

Г. Г. БРАНОВЕР и А. Б. ЦИНОБЕР

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

532
Б 87
УДК 532

Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. Бр а н о в е р Г. Г. и Ц и н о б е р А. Б., Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1970.

Рассматривается комплекс гидродинамических явлений, происходящих при движении несжимаемой электропроводящей жидкости по трубам и каналам и при обтекании тел в присутствии внешнего магнитного поля. Результаты, излагаемые в книге, относятся прежде всего к течениям расплавленных металлов и электролитов, но приложимы также к течениям низкотемпературной плазмы при дозвуковой скорости. Основное внимание уделяется теоретическим и экспериментальным исследованиям ламинарных и турбулентных течений в трубах, устойчивости ламинарных течений и перехода к турбулентности, пограничного слоя, обтекания тел и струй. Кратко освещены вопросы, связанные с техникой магнитогидродинамического эксперимента и с гидродинамическим расчетом магнитогидродинамических машин.

Рис. 190, табл. 13, библ. ссылок 396.

2-4-3
227—69

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

Глава I. **Основные эффекты, обусловленные магнитным полем, и способы их исследования** 9

§ 1. Магнитогидродинамические эффекты. Критерии подобия . . 9
§ 2. Уравнения магнитной гидродинамики 15
§ 3. Уравнения турбулентного движения электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля при $Re_m \ll 1$ 19
§ 4. Способы экспериментального изучения магнитогидродинамических течений 23
Литература 36

Глава II. **Ламинарные магнитогидродинамические течения в трубах** . 38

§ 1. Предварительные замечания 38
§ 2. Уравнения равномерного установившегося движения в трубе . 41
§ 3. Плоскопараллельное равномерное течение в поперечном магнитном поле 44
§ 4. Течение в прямоугольной трубе 48
§ 5. Течение в круглой трубе 62
§ 6. Течение в трубе с шероховатыми стенками в присутствии поперечного магнитного поля 65
§ 7. Некоторые замечания о тепловой задаче при магнитогидродинамическом ламинарном течении расплавленного металла в трубе 76
Литература 78

Глава III. **Неустойчивость ламинарного течения и переход к турбулентности в присутствии магнитного поля** 81

§ 1. Воздействие магнитного поля на возмущения течения . . . 81
§ 2. Плоское течение в поперечном магнитном поле (течение Гартмана) 88
§ 3. Осесимметричное и плоское течение в продольном поле . . . 97
§ 4. Течения в трубах прямоугольного и круглого сечения, находящихся в поперечном магнитном поле 106
§ 5. Некоторые сведения об устойчивости других типов течения в поперечном поле 115
§ 6. О влиянии конечных возмущений на переход к турбулентности в магнитогидродинамических течениях 120
Литература 123

Глава IV. **Турбулентные течения в трубах в присутствии поперечного и продольного магнитных полей** 128
§ 1. Основные представления о турбулентном течении в магнитном поле 128
§ 2. О полуэмпирических теориях турбулентных течений в трубах в присутствии магнитного поля 129
§ 3. Об учете влияния магнитного поля на турбулентное течение через посредство пути смешения 134
§ 4. Решение дифференциальных уравнений движения для различных случаев турбулентного течения во внешнем магнитном поле 137
§ 5. Плоскопараллельное турбулентное течение в плоскости поперечного магнитного поля (гартмановское турбулентное течение) 140
§ 6. Плоское и осесимметричное течение в продольном магнитном поле. Плоское течение в плоскости, перпендикулярной поперечному магнитному полю 148
§ 7. Течение в шероховатых трубах в присутствии поперечного магнитного поля 155
§ 8. Интерполяционные зависимости для расчета плоскопараллельного турбулентного течения в плоскости поперечного магнитного поля 162
§ 9. Расчет турбулентных течений в магнитном поле на основе уравнений вторых моментов пульсаций скорости 168
§ 10. Влияние магнитного поля на теплообмен при турбулентном течении в трубах 178
Литература 183

Глава V. **Особенности магнитогидродинамического обтекания тел** . . 186
§ 1. Постановка задачи 186
§ 2. Обтекание бесконечной плоской пластины в поперечном магнитном поле 188
§ 3. Обтекание бесконечного цилиндра вдоль его образующей в поперечном магнитном поле 189
§ 4. Магнитогидродинамическое течение Джеффри—Гамеля . . . 198
Литература 207

Глава VI. **Магнитогидродинамические течения Стокса и Озеена** . . 208
§ 1. О пределах применимости стоксова приближения 208
§ 2. Единственность решения задачи о стоксовом течении . . . 209
§ 3. Фундаментальное решение 213
§ 4. Об отсутствии парадокса Стокса в магнитной гидродинамике . 218
§ 5. Формула Грина и интегральное представление решений . . . 219
§ 6. Общее решение задачи о стоксовом течении в полуплоскости . 223
§ 7. Сведение нелинейной задачи о течении в полуплоскости к интегральному уравнению 229
§ 8. Сопротивление тел простейшей формы при стоксовом обтекании 231
§ 9. Течения типа Озеена 234
§ 10. Обтекание тела электропроводящей жидкостью с внешним электрическим током 239
Литература 241

Глава VII. **Магнитогидродинамический пограничный слой** 243
§ 1. Предварительные замечания 243
§ 2. Магнитогидродинамический пограничный слой на плоской пластине 244
§ 3. Течение в следе за телом в поперечном магнитном поле . . . 259

§ 4. Течение на начальном участке трубы в присутствии поперечного магнитного поля . . . 261
Литература . . . 267

Глава VIII. **Результаты численных расчетов задач о магнитогидродинамическом обтекании тел** . . . 269
§ 1. Предварительные замечания . . . 269
§ 2. Обтекание круглого цилиндра в поперечном магнитном поле . 269
§ 3. Обтекание плоской пластины конечной ширины в поперечном магнитном поле . . . 273
Литература . . . 276

Глава IX. **Экспериментальные исследования обтекания тел в присутствии магнитного поля** . . . 278
§ 1. Предварительные замечания . . . 278
§ 2. Обтекание тел в присутствии продольного магнитного поля . 279
§ 3. Обтекание тел в присутствии поперечного магнитного поля . 281
§ 4. Течение в следе за телом . . . 293
§ 5. Обтекание чувствительных элементов измерительных устройств
Литература . . . 297

Глава X. **Струи в магнитном поле** . . . 304
§ 1. Некоторые общие замечания о ламинарных и турбулентных струях в магнитном поле . . . 304
§ 2. Экспериментальные исследования турбулентных струй, вытекающих в трубу с непроводящими стенками . . . 309
§ 3. Экспериментальные исследования турбулентных струй, вытекающих в трубу с двумя хорошо проводящими стенками, параллельными полю . . . 316
§ 4. Распределение давления и коэффициент сопротивления при внезапном расширении потока . . . 319
Литература . . . 323

Приложение I. **Некоторые специальные инженерные задачи** . . 325
§ 1. Предварительные замечания . . . 325
§ 2. Гидродинамический расчет магнитогидродинамического насоса 327
§ 3. Гидродинамический расчет электромагнитного дозатора для жидкого металла . . . 332
§ 4. Электромагнитный лоток . . . 334
Литература . . . 338

Приложение II. **Краткий очерк гидродинамики расплавленных металлов** . . . 340
§ 1. Области применения и главные особенности течения расплавленных металлов . . . 340
§ 2. Линейные гидравлические сопротивления . . . 345
§ 3. Местные сопротивления . . . 352
§ 4. Физические свойства жидких металлов . . . 354
Литература . . . 360
Дополнения при корректуре . . . 362
Основные обозначения . . . 372
Именной указатель . . . 374
Предметный указатель . . . 377

ПРЕДИСЛОВИЕ

Магнитная гидродинамика за короткий срок своего существования успела стать наукой очень разветвленной и обширной. Число опубликованных работ, относящихся к магнитной гидродинамике, выражается сейчас уже многими тысячами. Среди главных направлений исследования можно назвать устойчивость высокотемпературной плазмы, магнито-газодинамику, течения в трубах и каналах, пограничный слой и обтекание тел, магнитогидродинамическую турбулентность, теорию машин. Часто трудно бывает провести границу между магнитогидродинамическими исследованиями и исследованиями, посвященными физике плазмы, число которых чрезвычайно велико.

Большое разнообразие имеется не только в объектах изучения, но и в особенностях постановки задач. В одних случаях главная особенность явления состоит в возмущении внешнего магнитного поля вследствие течения электропроводящей жидкости. В других — свойства движения и среды таковы, что возмущением магнитного поля вполне можно пренебречь, и единственно важным магнитогидродинамическим эффектом остается влияние магнитного поля на гидродинамические характеристики. Последний случай имеет место, когда мало магнитное число Рейнольдса и отсутствуют источники внешнего электрического поля.

Существует, наконец, определенный круг задач, относящихся к магнитогидродинамическим машинам, при решении которых поток жидкости можно сравнительно обоснованно заменить движущимся твердым телом с той же электрической проводимостью и свести, таким образом, задачу к чистой электродинамике.

В этой книге рассматриваются задачи о течениях электропроводящей несжимаемой жидкости в магнитном поле, в которых гидродинамический аспект играет главенствующую роль. В большинстве случаев предполагается, что магнитное число Рейнольдса мало, однако если индуцированное магнитное поле не оказывает обратного влияния на течение, как, например, при течении в цилиндрических и призматических трубах, никакие ограничения на величину магнитного числа Рейнольдса, естественно, не накладываются.

С большей или меньшей полнотой в книге рассматриваются в магнитогидродинамическом варианте все главные «канонические» вопросы общей гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости — ламинарные течения в трубах, смена ламинарного режима турбулентным, турбулентные течения в трубах, пограничный слой, обтекание тел. Всюду, где возможно, проводится сопоставление результатов с закономерностями общей гидродинамики.

Во множестве случаев общая гидродинамика служит источником идей и методов, необходимых для решения магнито-гидродинамических задач. Однако бесспорно, что в свою очередь прогресс в магнитной гидродинамике может оказаться полезным для общей гидродинамики. Для иллюстрации этой мысли ограничимся лишь одним примером — турбулентностью. Как показано в гл. III и IV, наложение магнитного поля приводит к существеннейшему снижению интенсивности турбулентности и одновременно обусловливает особую ее анизотропию. Едва ли можно указать другое столь же эффективное средство воздействия на структуру турбулентности. Таким образом, наложение магнитного поля дает возможность, произведя своего рода вивисекцию течения, приведя его в необычное внутреннее состояние, выявить некоторые новые, в других условиях скрытые, закономерности турбулентности.

Все вопросы, рассматриваемые в этой книге, имеют самую непосредственную связь с проблемой разработки магнито-гидродинамических машин и других инженерных устройств. Поскольку, однако, в книге рассматриваются явления как таковые и в основном тексте почти нет речи о течениях в конкретных машинах или о способах инженерных расчетов (если не считать отдельных эмпирических формул и кратких рекомендаций для расчетов), в приложении дана небольшая глава, посвященная некоторым инженерным вопросам.

При анализе гидродинамических явлений, как и любых явлений физики вообще, необходимо возможно более четко представить себе свойства материальной среды, выступающей носительницей этих явлений. Поэтому и нам желательно прежде всего выяснить, какая среда может служить физической реализацией тех свойств, которые предполагаются присущими жидкости в дальнейшем изложении.

В задачах, составляющих предмет этой книги, жидкость предполагается несжимаемой и электропроводящей. Жидкие металлы, электролиты и плазма (при малых значениях числа Маха) обладают этими свойствами. Однако электролиты обладают столь низкой электрической проводимостью, что при технически реализуемых напряженностях магнитного поля магнито-

гидродинамические эффекты в них весьма слабы. Кроме того, контактные электрические явления на границе электролита с твердыми проводниками могут очень серьезно искажать магнитогидродинамические явления и чрезвычайно затруднять измерения в экспериментах.

Использование в гидродинамических экспериментах плазмы также сопряжено с серьезными трудностями. К их числу относятся прежде всего высокая температура, а также неизбежное изменение электрической проводимости по всему объему, занятому потоком, вследствие теплообмена с внешней средой, трудность сколько-нибудь точного определения физических свойств плазмы в конкретном течении.

Таким образом, наиболее подходящей средой для гидродинамического эксперимента с электропроводящей жидкостью в магнитном поле являются расплавленные металлы. При их использовании, кстати, большей частью удовлетворяется еще одно допущение, принятое выше, — допущение о малости магнитного числа Рейнольдса.

Все изложенное в этой книге приложимо прежде всего к течениям жидких металлов в магнитном поле.

Мы не стремились дать полный обзор литературы, посвященной рассматриваемым вопросам. Однако мы старались достаточно полно выяснить весь комплекс явлений, связанных с присутствием магнитного поля при ламинарном и турбулентном течении в трубах, обтекании тел, в пограничном слое и т. д. Большая часть книги основана на результатах, полученных авторами, причем некоторые из них публикуются впервые.

§§ 2—4 главы I, §§ 2—5 и 7 главы II, §§ 2 и 4—6 главы III, §§ 1 и 3—10 главы IV, § 4 главы VII, глава X и приложение I написаны Г. Г. Брановером. Главы V и VI, §§ 1—3 главы VII и глава VIII написаны А. Б. Цинобером. § 1 главы I, §§ 1 и 6 главы II, §§ 1 и 3 главы III, § 2 главы IV и глава IX написаны совместно Г. Г. Брановером и А. Б. Цинобером. В работе над книгой принял участие также Е. З. Рабинович. Им написано приложение II. Общая редакция книги осуществлена Г. Г. Брановером.

Некоторые новые результаты, полученные в то время, когда книга уже набиралась, коротко изложены в разделе «Дополнения при корректуре», написанном Г. Г. Брановером.

Авторам хочется выразить здесь глубокую признательность Г. А. Любимову и С. А. Регирeру, рецензировавшим рукопись, за их большой труд, за критику и многочисленные советы.

Рига, март 1970 г. *Г. Г. Брановер, А. Б. Цинобер*

Исправление

На странице 8 в строке 5 снизу допущена неточность:

напечатано: Г. Г. Брановером
следует читать: Г. Г. Брановером и А. Б. Цинобером.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ЭФФЕКТЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ, И СПОСОБЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 1. Магнитогидродинамические эффекты. Критерии подобия

Рассмотрим ламинарное стационарное течение жидкого металла со средней скоростью V в достаточно длинной прямоугольной трубе, помещенной в однородное поперечное магнитное поле с индукцией B_0 (рис. 1.1). Допустим, что сторона сечения трубы, перпендикулярная к полю, имеет размер $2b$, много больший размера $2a$ стороны, параллельной полю, и поэтому течение можно считать плоскопараллельным. Примем также, что стенки с размером $2b$ непроводящие, а стенки с размером $2a$ идеально проводящие и, кроме того, имеют идеальный электрический контакт с жидкостью (т. е. контактное сопротивление равно нулю).

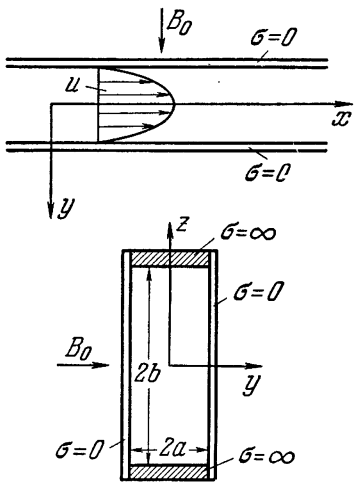


Рис. 1.1. Поток жидкого металла в прямоугольной трубе, помещенной в поперечное магнитное поле.

При движении жидкости на содержащийся в ней единичный электрический заряд действует электромагнитная сила Лоренца $f=uB_0$*), направленная перпендикулярно к скорости и магнитному полю. Здесь u — локальная скорость течения. Под действием этой силы происходит разделение зарядов, возникает разность электрических потенциалов между стенками $z=+b$ и $z=-b$ и, следовательно, электрическое поле с напряженностью E, направленное параллельно силе f, но в противоположную сторону.

*) Здесь и далее используются международная система единиц (СИ).

Легко показать, что наведенное таким образом электрическое поле будет однородным. В самом деле, на поверхности идеального проводника электрическое поле всюду одинаково. Но тогда оно при сделанных допущениях будет иметь ту же напряженность также в примыкающих к этой грани слоях жидкости, а так как движение плоскопараллельное, то и во всей жидкости.

Плотность токов, текущих в жидкости, легко вычислить по закону Ома

$$j=\sigma(E-uB_0).$$

Здесь σ — электрическая проводимость жидкости.

Ввиду того, что перетекание тока от стенки $z=+b$ к стенке $z=-b$ вне жидкости невозможно, то интеграл токов по сечению трубы должен быть равен нулю, т. е.

$$\int_{-a}^{a}(E-uB_0)\,dy=0;$$

отсюда

$$E=\frac{1}{2a}\left(\int_{-a}^{a}u\,dy\right)B_0=VB_0.$$

Возвращаясь к выражению для плотности тока, можем теперь написать

$$j=\sigma B_0(V-u).$$

Следовательно, в ядре потока, где $u>V$, токи текут в одну сторону, а у стенок, где $u<V$, — в противоположную.

Электрические токи в свою очередь взаимодействуют с магнитным полем, и в результате на жидкость действует электромагнитная сила

$$F_{\text{эм}}=jB_0=\sigma B^2(V-u).$$

Легко убедиться, что в ядре потока эта сила является тормозящей ($F_{\text{эм}}<0$), а в пристеночных слоях жидкости она направлена в сторону движения ($F_{\text{эм}}>0$). Поскольку электромагнитная сила пропорциональна разности средней и локальной скоростей, то она приводит к выравниванию скоростей течения в ядре потока. У стенки же, наоборот, из-за того, что на самой стенке $u=0$, присутствие силы $F>0$ приводит при неизменной средней скорости течения к увеличению градиента скорости, в результате чего увеличивается сила трения на стенке. Суммарная электромагнитная сила в каждом сечении трубы равна нулю, так как нулю равен полный электрический ток. Весь этот комплекс явлений носит наименование эффекта Гартмана.

Когда индуцированные токи велики, их собственное магнитное поле может существенно исказить внешнее магнитное поле. Это происходит при высокой проводимости жидкости или при большой скорости течения и большом характерном размере потока.

Если грани $z=\pm b$ соединить между собой через внешнюю электрическую цепь, то получится типичная схема магнитогидродинамической машины. Если электрическая энергия подводится к жидкости, то эта схема соответствует насосу или вентилю, если же электрическая энергия отводится от жидкости, схема соответствует генератору. Допустим, что рассматривается схема генератора. Здесь интеграл токов по сечению уже не равен нулю, следовательно, не равна нулю и суммарная тормозящая сила. Теперь поддержание постоянной средней скорости течения требует увеличения продольного градиента давления не только для компенсации сил трения на стенках, увеличивающихся по сравнению с течением вне магнитного поля, но и для преодоления объемных электромагнитных тормозящих сил. Здесь только сила трения на стенке является в полном смысле слова гидродинамической, и при вычислении коэффициента сопротивления только ее следует принимать в расчет.

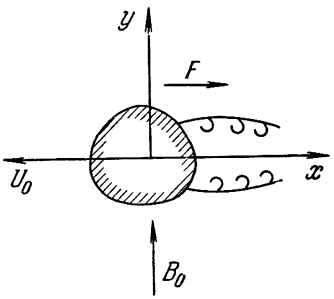


Рис. 1.2. Обтекание тела в поперечном магнитном поле.

Рассмотрим теперь в общих чертах физическую картину обтекания тела в присутствии внешнего магнитного поля.

На рис. 1.2 показано сечение цилиндрического тела, движущегося с постоянной скоростью U_0 в неподвижной (вдали от тела) проводящей жидкости в присутствии поперечного к U_0 магнитного поля. Мы предполагаем, что внешних источников электрического тока нет. Поэтому в системе координат, неподвижной относительной покоящейся жидкости, электрическое поле равно нулю, и закон Ома для движущейся среды запишется в виде

$$j=\sigma u B_0 .$$

(Так же как при течении в трубе, мы предполагаем, что возмущением магнитного поля можно пренебречь.) Взаимодействие тока с магнитным полем обусловливает возникновение электромагнитной объемной силы (суммарной силы Лоренца)

$$F_{\text{эм}}=\sigma u B_0^2 ,$$

направленной в сторону, противоположную направлению движения тела. Если теперь перейти, как это делается в общей гидродинамике, к системе координат, неподвижной относительно тела, то для лоренцевой силы получим выражение

$$F_{эм}=\sigma B_0^2(U_0-u).$$

Подчеркнем, что здесь u есть составляющая скорости по оси x в системе координат, связанной с телом.

Легко видеть, что лоренцева сила направлена в ту же сторону, что и невозмущенная скорость набегающего потока, равная по величине U_0, так как $U_0-u>0$. Эта сила возрастает по мере приближения к поверхности тела и достигает максимума на этой поверхности, так как здесь $u=0$. Из сказанного очевидно, что лоренцева сила имеет составляющую, направленную против сил трения вдоль поверхности тела, и поэтому обусловливает бо́льшие градиенты скоростей у поверхности тела, а следовательно, и бо́льшие силы поверхностного трения. Соответственно увеличивается коэффициент сопротивления трения. В этом состоит один из главных эффектов влияния поля на обтекание тела. Этот эффект вполне аналогичен эффекту Гартмана при течении в трубе в поперечном магнитном поле.

Ввиду того, что лоренцева сила имеет также составляющую, нормальную к поверхности тела и направленную к телу до миделева сечения и от тела позади этого сечения, а также ввиду того, что скорость вблизи тела больше, чем при течении в отсутствие магнитного поля, давление в лобовой части тела больше, а в кормовой меньше, чем при течении в отсутствие поля. Следствием этого является увеличение коэффициента сопротивления формы.

Рассмотрим, наконец, каково влияние поля на явление отрыва пограничного слоя. Как известно, физические причины отрыва состоят в том, что за миделевым сечением тела инерция движущихся частиц жидкости недостаточна для преодоления сил поверхностного трения и сил, обусловленных положительным градиентом давления. В нашем случае тангенциальная составляющая электромагнитной силы в этой области направлена против сил трения и давления. Нормальная составляющая электромагнитной силы обусловливает уменьшение давления в кормовой части тела. В результате точка отрыва смещается вниз по потоку и безотрывное течение может существовать при бо́льших скоростях, чем в отсутствие магнитного поля.

К выводу о том, что поперечное магнитное поле противодействует отрыву пограничного слоя, можно прийти и путем несколько иного рассуждения. В самом деле, в области отрыва имеет место возвратное течение, обусловливающее большие по-

перечные градиенты скорости. Но при рассмотрении течения в трубе мы видели, что поперечное поле уменьшает градиенты скорости всюду, за исключением непосредственной окрестности твердой стенки. То же происходит и за обтекаемым телом. Скорость течения стремится стать всюду одинаковой, и при достаточно сильном магнитном поле отрицательные скорости вообще исчезают, т. е. течение становится безотрывным.

Попытаемся теперь столь же элементарным путем вывести основные характерные для магнитогидродинамических явлений критерии подобия. Рассмотрим некоторый объем жидкости, находящейся в плоскопараллельном движении в поперечном магнитном поле (рис. 1.3).

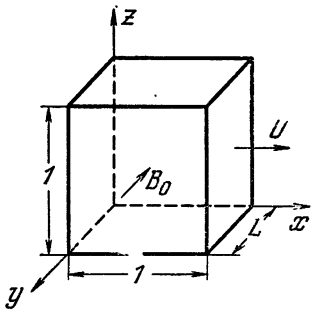


Рис. 1.3. Элементарный объем жидкого металла, движущегося в магнитном поле.

Движение будем считать квазиодномерным. К движущейся жидкости приложены вязкие и электромагнитные силы, а также силы инерции. Из соображений размерности легко получить следующие выражения. Для вязкой силы, отнесенной к единице объема жидкости:

$$F_{\text{в}} \sim \rho\nu \frac{U}{L^2}, \qquad (1.1)$$

где U — характерная скорость, L — характерный размер, ρ и ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости. Для силы инерции, отнесенной к единице объема:

$$F_{\text{ин}} \sim \rho U^2/L. \qquad (1.2)$$

Для электромагнитной силы, отнесенной к единице объема:

$$F_{\text{эм}} \sim \sigma B_0^2 U, \qquad (1.3)$$

где B_0 — характерная величина индукции магнитного поля, σ — электрическая проводимость жидкости.

Отсюда находим, что порядок отношения электромагнитной силы к силе вязкости характеризует величина $B_0^2 L^2 \sigma/\rho\nu$. Обычно используется квадратный корень из этой величины, называемый числом Гартмана:

$$\text{Ha} = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}. \qquad (1.4)$$

Порядок отношения электромагнитной силы к силе инерции характеризует число Стюарта

$$\mathrm{N}=\frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}. \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{Ha}^2=\mathrm{N}\cdot\mathrm{Re}$.

Выше уже указывалось, что помимо силового взаимодействия внешнего магнитного поля и индуцированных электрических токов, может быть необходимо учитывать также возмущение внешнего магнитного поля собственным магнитным полем токов. Попытаемся вывести критерий, характеризующий это взаимодействие. Полный ток, протекающий через выделенный объем, пропорционален величине $\sigma B_0 U L^2$ (если нет приложенной разности потенциалов). Индукция собственного магнитного поля этого тока

$$\Delta B_0 \sim \mu_0 \mu \sigma B_0 U L. \tag{1.6}$$

Для всех расплавленных металлов относительная магнитная проницаемость μ близка к единице, поэтому вместо (1.6) запишем

$$\Delta B \sim \mu_0 \sigma B_0 U L. \tag{1.7}$$

Отнеся эту величину к индукции внешнего магнитного поля, получим критерий, называемый магнитным числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_m=\mu_0 \sigma U L. \tag{1.8}$$

Критериев Re, Ha и Re_m при данных условиях замыкания токов достаточно для получения путем их комбинации всех других критериев, характеризующих различные явления, наблюдающиеся при изотермическом течении жидкого металла в магнитном поле.

Разделив число Стюарта на магнитное число Рейнольдса, получим критерий, называемый числом Альфвена:

$$\mathrm{Al}=\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho U^2}. \tag{1.9}$$

Как известно, величина B_0^2/μ_0 выражает с точностью до постоянного числового множителя энергию магнитного поля в единице объема. Величина ρU^2 выражает с той же точностью кинетическую энергию единицы объема. Следовательно, число Альфвена характеризует отношение магнитной энергии к кинетической.

Деля Re_m на Re, получим число Бэтчелора, составленное исключительно из физических характеристик жидкости:

$$\mathrm{Bt}=\mu_0 \sigma \nu. \tag{1.10}$$

Если течение является неизотермическим и рассматриваются вопросы теплообмена, добавляются соответствующие критерии, например числа Нуссельта, Пекле и др.

Легко видеть, что даже при простейшем изотермическом течении, когда имеются три определяющих критерия подобия, моделирование потоком одного металла потока другого металла представляет весьма сложную задачу, ибо необходимо соблюдать равенство обоих чисел Рейнольдса — динамического и магнитного. Иными словами, для обоих металлов число Бэтчелора должно иметь одинаковое значение. Задача намного облегчается, если индуцированным магнитным полем можно пренебречь. Тогда остаются всего два критерия, например **Re** и **Ha**, и соблюдение условий подобия не представляет особых трудностей.

Выше описаны основные эффекты, обусловленные присутствием магнитного поля, которые можно предсказать априори на основе физических соображений. В дальнейшем мы рассмотрим разнообразные проявления этих эффектов. Однако прежде необходимо познакомиться с основным теоретическим и экспериментальным аппаратом магнитогидродинамических исследований; к рассмотрению этих вопросов мы сейчас и приступим.

§ 2. Уравнения магнитной гидродинамики

Система уравнений, описывающих изотермическое движение электропроводящей среды в присутствии магнитного поля, состоит из уравнений Навье—Стокса, содержащих члены электромагнитного происхождения, уравнений Максвелла и закона Ома для движущихся сред [1—3]. В случае, когда речь идет о жидких металлах, можно считать, что из всех сил электромагнитного происхождения существенны лишь силы, обусловленные взаимодействием электрических токов проводимости с магнитным полем. Далее можно принять, что относительные диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость близки к единице $\varepsilon \approx \mu \approx 1$ и что проводимость σ постоянна и изотропна. Наконец, условимся, что рассматриваются движения с характерной скоростью, много меньшей скорости света. Учитывая все это, уравнения магнитной гидродинамики можно записать в следующем виде:

1) Уравнение Навье—Стокса с членом, учитывающим лоренцеву силу:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{U}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\nabla^2\boldsymbol{U} + \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}. \qquad (1.11)$$

2) Уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.12}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}. \tag{1.13}$$

3) Закон Ома для движущихся сред:

$$\boldsymbol{j} = \sigma[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{B}]. \tag{1.14}$$

Кроме того, надо иметь в виду, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{U} = 0.$$

Для того чтобы привести эти уравнения к безразмерному виду, рассмотрим, какие характерные величины можно выбрать в качестве масштабов для отдельных членов уравнений. При конкретных условиях задачи всегда можно выбрать характерный размер L, характерную скорость U_0 и индукцию магнитного поля B_0. Тогда для плотности электрического тока получаем, исходя из (1.13), характерную величину B_0/L. Если нет внешних источников тока, то характерную величину напряженности электрического поля можно получить из (1.14) в виде $U_0 B_0$. В качестве масштаба времени естественно принять L/U_0 и в качестве масштаба давления ρU^2. Разделив все члены уравнений на соответствующие масштабные величины, получим*):

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{U} \operatorname{grad}) \boldsymbol{U} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{U} + \mathrm{Al}\,[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}], \tag{1.15}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.16}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}, \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{j} = \mathrm{Re}_m [\boldsymbol{E} + \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{B}]. \tag{1.18}$$

Из (1.16)—(1.18) легко получить следующее уравнение, связывающее индукцию магнитного поля со скоростью течения:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\mathrm{Re}_m} \nabla^2 \mathbf{B}. \tag{1.19}$$

Как мы уже упоминали в § 1, существуют задачи, в которых обратным влиянием течения на приложенное магнитное поле

*) Обозначения для безразмерных величин мы сохраняем те же, что и для размерных, так как в дальнейшем будут большей частью использоваться безразмерные величины. Там, где могут быть неясности, будет специально указываться, идет ли речь о величинах размерных или безразмерных.

можно пренебречь, т. е. индукцию магнитного поля можно считать заданной. В этом случае говорят, что задача решается в безындукционном приближении. Это имеет место при $\mathrm{Re}_m \ll 1$. Малость индукции наведенного поля, естественно, обусловлена малостью плотности наведенного электрического тока $\boldsymbol{j}$. Это, однако, вовсе не означает, что мала лоренцева сила. В самом деле, выражение для безразмерной лоренцевой силы можно с учетом (1.18) записать так:

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}) = \mathrm{Al}\cdot\mathrm{Re}_m(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}.$$

Следовательно, порядок величины лоренцевой силы оценивается произведением $\mathrm{Al}\cdot\mathrm{Re}_m$, которое, как нетрудно убедиться, равно числу Стюарта N. Но в магнитогидродинамических машинах число N обычно имеет порядок единицы. Действительно, чтобы получить $\mathrm{N}\approx 1$, достаточно, например, поместить поток ртути с характерным размером 0,1 *м* и характерной скоростью 0,1 *м/сек* в магнитное поле, индукция которого составляет всего около 0,1 *тл*. Таким образом, при $\mathrm{Re}_m \ll 1$ выражение для лоренцевой силы в уравнениях Навье—Стокса сохраняется, но его можно писать в виде

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}_0)$$

или

$$\mathrm{N}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_0,$$

где $\boldsymbol{B}_0$ — индукция внешнего магнитного поля.

В случае $\mathrm{Re}_m \ll 1$ не только отпадает необходимость отыскания индукции магнитного поля, но также значительно упрощается задача о вычислении напряженности электрического поля. Действительно, в этом случае, если внешнее магнитное поле слабо меняется со временем, в уравнении (1.16) можно пренебречь величиной $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$. Тогда $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$, т. е. электрическое поле потенциально, и $\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi$. Для нахождения потенциала электрического поля φ можно получить уравнение, наложив условие сохранения заряда $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$ на уравнение (1.18). Это дает

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{div}[\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}_0],$$

и поскольку $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}_0=0$,

$$\nabla^2\varphi = \boldsymbol{B}_0 \operatorname{rot}\boldsymbol{U}.$$

Итак, в случае $\mathrm{Re}_m \ll 1$ имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}+(\boldsymbol{U}\operatorname{grad})\boldsymbol{U} = -\operatorname{grad}p+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\boldsymbol{U}+\mathrm{N}(-\operatorname{grad}\varphi+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_0,$$

$$\nabla^2\varphi = \boldsymbol{B}_0\operatorname{rot}\boldsymbol{U}. \qquad (1.20)$$

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
им. Горького
МГУ

В магнитогидродинамических машинах течение часто можно считать плоскопараллельным, ибо проточную часть машины, которая располагается между полюсами магнита, приходится устраивать в виде узкой прямоугольной щели. Плоскопараллельное течение обладает некоторыми интересными особенностями, которые мы сейчас рассмотрим.

Если поперечное магнитное поле располагается в плоскости течения и как течение, так и магнитное поле стационарны, то напряженность электрического поля постоянна во всей области течения и вектор напряженности перпендикулярен плоскости течения.

В самом деле, если движение происходит в плоскости x y, то скорость имеет соответственно только компоненты u и v. Кроме того, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{j}$, а в силу закона Ома и $\boldsymbol{E}$ не зависят от z. Тогда, обращаясь к уравнению $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$, видим, что

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z=\text{const}=E_0,$$

причем

$$\varphi=-E_0z+\varphi^*(x,y)$$

и $\varphi^*(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}=0.$$

С другой стороны, уравнение движения в проекции на ось z дает

$$b_x\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}-by\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}=\frac{1}{\sigma\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\text{const}=C.$$

Если $\mathrm{Re}_m\ll 1$, то $b_x=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$, $b_y=\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$.

Таким образом, если имеет место плоское движение, потенциал φ^* должен удовлетворять системе

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}=0,\\&\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}=C.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(а)}$$

Эта система уравнений может иметь решение лишь при специально подобранных краевых условиях для φ^*. В частности,

если $\frac{\partial p}{\partial z} \equiv C \equiv 0$, то из (б) $\varphi^* = C_1\Phi + C_2$, т. е. проекция на плоскость xy вектора плотности тока параллельна вектору индукции магнитного поля. Таким образом, если даже E_x и E_y не равны нулю, то они таковы, что никакого влияния на движение не оказывают. Отсюда вытекает, что при решении динамической задачи рассматриваемого типа можно положить $E_x = E_y = 0$.

Покажем теперь, что если магнитное поле постоянно и перпендикулярно плоскости течения, то оно не может изменить распределения скоростей течения [4]. Ограничимся при этом случаем $\mathrm{Re}_m \ll 1$.

В проекциях на оси координат уравнения (1.20) для рассматриваемой задачи принимают вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u + \mathrm{N}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - u\right), \tag{1.21}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 v + \mathrm{N}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - v\right), \tag{1.22}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.23}$$

В уравнениях (1.21) и (1.22) последние члены в правых частях представляют собой проекции лоренцевой силы F_x и F_y. Применив к этой силе операцию rot и учитывая (1.23), легко убедиться, что $\mathrm{rot}\, F = 0$, т. е. лоренцева сила потенциальна и поэтому может быть включена в давление. Таким образом, лоренцева сила не влияет на поле скоростей, если граничные условия для $\boldsymbol{U}$ не зависят от давления.

§ 3. Уравнения турбулентного движения электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля при $\mathrm{Re}_m \ll 1$

Для вывода основных уравнений турбулентного течения воспользуемся уравнением (1.20):

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{U}\,\mathrm{grad})\,U = -\mathrm{grad}\, p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \boldsymbol{U} + \mathrm{N}(-\mathrm{grad}\,\varphi + \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_0.$$

Перепишем это уравнение в проекциях на оси координат, учитывая, что $-\mathrm{grad}\,\varphi$ представляет собой вектор напряженности

электрического поля:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k}+\mathbf{N}(\varepsilon_{irs}e_r b_s+b_i b_s u_s-b_s b_s u_i), \tag{1.24}$$

где e_r — компонента вектора напряженности электрического поля, а ε_{irs} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Далее представим проекции скорости и электрического поля, а также давление в виде суммы осредненных по времени величин и пульсационных добавок:

$$u_i=U_i+u'_i, \qquad e_r=E_r+e'_r, \qquad p=P+p'. \tag{1.25}$$

Имея в виду случай $\mathbf{Re}_m\ll 1$, можно пренебречь пульсацией индукции магнитного поля по сравнению с осредненным ее значением. Подставив (1.25) в (1.24), получим

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial t}+U_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+u'_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+U_k\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}u'_i u'_k=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k\partial x_k}\right)+\mathbf{N}[\varepsilon_{irs}(E_r+e'_r)b_s+$$

$$+(U_s+u'_s)b_i b_s-(U_i+u'_i)b_s b_s]. \tag{1.26}$$

Подвергнем теперь все члены уравнений (1.26) осреднению по времени. Тогда получим

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u'_i u'_k}=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k\partial x_k}+\mathbf{N}[\varepsilon_{irs}E_r b_s+b_i b_s U_s-b_s b_s U_i]. \tag{1.27}$$

Уравнения (1.27), очевидно, представляют собой магнитогидродинамическое обобщение уравнений Рейнольдса для изотермического течения несжимаемой жидкости при

$$\mathbf{Re}_m\ll 1.$$

В частности, для подробно рассматриваемого в гл. IV квазиодномерного и стационарного в среднем течения в плоскости поперечного магнитного поля из уравнений (1.27) остается лишь следующее одно уравнение:

$$\frac{1}{\mathbf{Re}}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}-\frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u'_1 u'_2}-\mathbf{N}(E_3+U_1)-\frac{\partial P}{\partial x_1}=0. \tag{1.28}$$

Как показано в § 2, E_3 в этом случае является постоянной величиной, которая определяется из условия замыкания токов. В случае, когда стенки изолированные, $E_3 = -1$.

Обозначая

$$x_1 \equiv x; \quad x_2 \equiv y; \quad U_1 \equiv u; \quad u'_1 \equiv u'; \quad u'_2 \equiv v' \quad \text{и} \quad -\frac{2\partial P}{\partial x} = \lambda$$

(коэффициент сопротивления), можно уравнение (1.28) записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{d}{dy}\overline{u'v'} + \frac{\lambda}{2} + \mathrm{N}(1-u) = 0. \tag{1.29}$$

Если течение происходит в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, или магнитное поле параллельно направлению осредненного течения, то в уравнении (1.29), как и в аналогичных уравнениях для ламинарного течения (§ 2), выпадает последний член левой части.

Получим далее уравнения пульсационной энергии. Для этого вычтем из (1.26) уравнение для осредненного движения (1.27)

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u'_i u'_k - \overline{u'_i u'_k}) =$$

$$= \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} + \varepsilon_{irs}\,\mathrm{N}\,e'_r b_s + \mathrm{N}\,u'_s b_i b_s - \mathrm{N}\,u'_i b_s b_s. \tag{1.30}$$

Умножая уравнение (1.30) для u'_i на u'_j, а для u'_j на u'_i и затем складывая и осредняя их, получим уравнения баланса вторых моментов пульсаций скоростей

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_k u'_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u'_k u'_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u'_i u'_j u'_k} - \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(p'u'_j)} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{(p'u'_i)}\right] +$$

$$+ \overline{p'\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}\right) +$$

$$+ \mathrm{N}(\varepsilon_{irs}b_s\overline{e'_r u'_j} + \varepsilon_{jrs}b_s\overline{e'_r u'_i} + b_i b_s\overline{u'_s u'_j} + b_j b_s\overline{u'_s u'_i} - 2b_s b_s\overline{u'_i u'_j}). \tag{1.31}$$

При $i=j$ получим искомое уравнение баланса энергии пульсационного движения

$$\frac{\partial q}{\partial t}+U_k\frac{\partial q}{\partial x_k}=-\overline{u'_iu'_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{(p'+q)u'_k}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 q}{\partial x_k\partial x_k}-$$

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}+\mathrm{N}(\varepsilon_{irs}b_s\overline{e'_ru'_i}+b_ib_s\overline{u'_su'_i}-2b_sb_sq), \quad (1.32)$$

где $$q=\frac{\overline{u'_iu'_i}}{2}.$$

Члены, стоящие в левой части этого уравнения, выражают полное изменение пульсационной энергии в единицу времени. Физический смысл членов, стоящих в правой части, следующий. Первый член выражает энергию, отбираемую пульсационным движением от осредненного, а последующие члены — турбулентную и вязкую диффузию пульсационной энергии и вязкую и джоулеву диссипацию этой энергии.

Представляет интерес рассмотреть еще уравнения баланса энергии отдельно для каждой из трех компонент пульсационной скорости. Эти уравнения получаются из (1.31) при $i=j$ ($i=1, 2, 3$), если суммирование производить только по повторяющемуся индексу k. Им можно придать следующий вид:

$$\overline{\frac{\partial u_i'^2}{\partial t}}+\sum_k U_k\overline{\frac{\partial u'^2_i}{\partial x_k}}=-2\sum_k\overline{u'_ku'_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+2p'\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_i}}-$$

$$-\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{1}{\mathrm{Re}}\overline{\frac{\partial u'^2_i}{\partial x_k}}+\overline{u'_k(u'^2_i+2\delta_{ik}p')}\right]-$$

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\sum_k\left(\overline{\frac{\partial u'^2_i}{\partial x_k}}\right)+2\mathrm{N}\sum_{r,s}(\varepsilon_{irs}b_s\overline{e'_ru'_i}+b_ib_s\overline{u'_su'_i}-b_s^2\overline{u'^2_i}). \quad (1.32')$$

По сравнению с (1.32) здесь новым является член $2p'\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_i}}$, который выражает обмен энергией между i-й компонентой пульсационной скорости и другими ее компонентами. Понятно, что в уравнении (1.32), где все величины суммируются по трем компонентам, аналогичного члена быть не может.

Ковнер и Левин [6] приняли допущение относительно пульсации электрического поля, согласно которому

$$e'_r = -\beta \varepsilon_{rlm} u'_e b_m, \tag{1.33}$$

где $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

При этом электромагнитный член в правой части уравнения (1.32) запишется следующим образом:

$$\alpha_1 N (b_i b_s \overline{u'_i u'_s} - 2 b_s b_s q).$$

Здесь

$$\alpha_1 = 1 - \beta. \tag{1.34}$$

Коэффициент β в (1.33) по существу учитывает условия замыкания пульсационных токов.

§ 4. Способы экспериментального изучения магнитогидродинамических течений

Как указывалось в предисловии, в качестве рабочей среды в магнитогидродинамических экспериментах большей частью используются жидкие металлы и реже — электролиты. Применение последних сильно ограничивается их относительно слабой электрической проводимостью, из-за чего при работе с ними все магнитогидродинамические эффекты слабо выражены. Поэтому ниже, описывая методику и технику магнитогидродинамических экспериментов, мы будем предполагать, что они проводятся с жидким металлом.

Проведение гидродинамических экспериментов с расплавленными металлами связано с преодолением ряда специфических трудностей. Эти трудности становятся еще больше, если экспериментальная труба или канал помещены в магнитное поле. Основная трудность связана с тем, что размеры поперечного сечения экспериментального участка приходится делать сравнительно малыми, так как индукция магнитного поля резко убывает при увеличении воздушного зазора магнита. Можно, конечно, применять очень мощные электромагниты, которые позволяют получать большую индукцию при значительном зазоре, но при этом надо учитывать, что пропорционально характерному размеру трубы увеличивается и длина участка стабилизации течения в магнитном поле, а потому необходимый магнит превращается в очень громоздкое, мощное и дорогостоящее сооружение. Для иллюстрации можно указать, что современный электромагнит, дающий в воздушном зазоре $0{,}3 \times 0{,}5 \times 3{,}0$ *м* поле с индукцией около 2 *тл*, весит несколько сот тонн и потребляет

мощность около 1000 *квт*, соленоид же, дающий поле 10 *тл* в зазоре 0,1 *м*, потребляет около 10^4 *квт* на каждый метр длины [7]. Значительно меньшую электрическую мощность потребляют электромагниты и соленоиды со сверхпроводящей обмоткой, но они требуют строительства специальных установок для получения сжиженного газа, охлаждающего обмотку, и намного менее удобны в работе. Таким образом, экспериментатор оказывается вынужденным всячески уменьшать размеры экспериментального участка, что и приводит к необходимости уменьшения размеров всех измерительных устройств, вводимых в поток. Малость размеров сечения экспериментальных труб обусловливает большую чувствительность результатов измерений сопротивления к точности изготовления трубы и качеству внутренних поверхностей стенок. Напомним, что, например, при течении в трубе с сечением в виде узкой щели коэффициент сопротивления зависит от ширины щели в третьей степени. Это значит, что при желании получить данные о коэффициенте сопротивления с точностью 1—2% в трубе шириной 0,2 *см* необходимо ограничить предельную ошибку в ширине величиной 5 микрон.

Когда $\mathbf{Re}_m \ll 1$, рабочий металл может выбираться из условий удобства экспериментирования, так как в безындукционном приближении магнитогидродинамические явления при течении одного металла беспрепятственно моделируются с помощью любого другого металла. Действительно, как уже было показано выше, в безындукционном приближении остаются только два определяющих критерия подобия **Re** и **Ha**, а физические свойства различных расплавленных металлов (вязкость, проводимость) различаются не настолько сильно, чтобы за счет изменения размеров, скорости и индукции поля нельзя было моделировать практически осуществляемое течение одного металла течением другого. Значительно сложнее произвести моделирование, когда $\mathbf{Re}_m \gtrsim 1$. Сказанное иллюстрируется таблицей, в которой даны критерии подобия некоторых расплавленных металлов, отнесенных к критериям, вычисленным для ртути при одинаковых скорости течения и индукции магнитного поля.

К общим неблагоприятным для эксперимента свойствам металла как рабочей среды относятся непрозрачность, исключающая применение визуальных, фото- и киноспособов исследования, большая молекулярная теплопроводность, затрудняющая использование такого действенного инструмента общей гидродинамики, как электротермоанемометр. Сюда же относятся химическая агрессивность расплавленных металлов и их сильная подверженность окислению, приводящие при отсутствии специальных мер к быстрому износу и загрязнению экспериментальных установок и измерительных устройств.

Металл	Температура, °С	$Re/Re_{рт}$	$Re_m/Re_{mрт}$	$Ha/Ha_{рт}$	$Bt/Bt_{рт}$	$Pr/Pr_{рт}$
Ртуть	20	1	1	1	1	1
Галлий	80	0,384	3,09	2,65	8,06	0,834
Натрий	130	0,176	8,98	4,81	51,0	0,858
Натрий	330	0,311	5,41	5,12	17,4	0,387
Олово	280	0,455	1,95	1,31	4,29	0,531
Цинк	580	0,330	2,67	1,32	8,08	0,755
Алюминий	980	0,480	3,83	10,8	7,96	0,183

Примечание. Для ртути при $V=1$ *м/сек*, $B=1$ *тл*, $L=0{,}01$ *м* и $t=20°$ С $Re=87\,000$, $Ha=252$, $Re_m=0{,}013$, $Bt=1{,}52\cdot10^{-7}$, $Pr=2{,}71\cdot10^{-2}$.

Мы рассмотрим здесь весьма кратко особенности экспериментальной техники магнитной гидродинамики. Более полное изложение этого вопроса содержится в работе [8].

Экспериментальная установка обычно представляет собой так называемый циркуляционный контур — систему труб, по которым циркулирует расплавленный металл, приводимый в движение насосом. В тех случаях, когда в состав контура включается бак постоянного напора, МГД-контур приобретает полное сходство с обычными гидродинамическими установками, предназначенными для экспериментов с водой, представляя собой уменьшенную копию последних. Типичная схема контура показана на рис. 1.4 [9]. Контур работает следующим образом. Шестеренчатый насос (производительность 125 литров в минуту) подает ртуть из нижнего бака *1* в верхний бак *2*, откуда избыток ртути сливается по трубе *11* обратно, и тем самым поддерживается постоянный напор. Из верхнего бака ртуть поступает в рабочую часть контура, где устанавливаются сменные экспериментальные трубы и каналы. Расход в контуре измеряется двумя трубами Вентури. Большие расходы измеряются трубой *4*, имеющей большую площадь сечения узкой части, малые — трубой *5* с меньшей площадью сечения. Труба *5* имеет байпасную линию *5а*, которая закрыта во время работы трубы *5* и открыта во время работы трубы *4*. Охлаждение ртути осуществляется водопроводной водой, пропускаемой через «рубашки» *6*, *7*, надетые на участки основной трубы контура, и через змеевики, погруженные в нижний бак *1*.

Краны *9*, *10* служат для регулирования подачи ртути в бак *2*. Кран *12* предназначен для регулирования расхода в контуре. С помощью крана *13* можно управлять уровнем в измерительных трубках, для чего меняется статическое давление в системе.

Для предотвращения окисления ртути в баки *1* и *2* во время работы непрерывно подается под небольшим избыточным давлением аргон. В байпасной линии *10* установлен фильтр для очистки ртути.

При разработке жидкометаллических экспериментальных контуров приходится очень серьезно заботиться об уменьшении

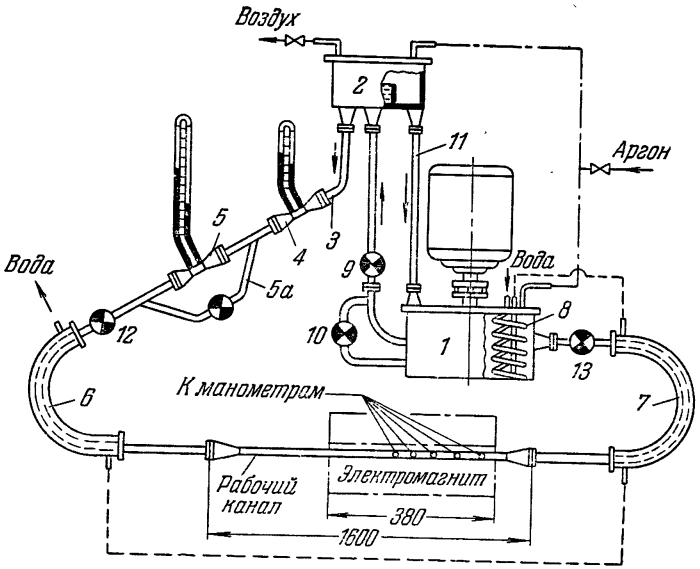


Рис. 1.4. Экспериментальный ртутный контур с механическим насосом и баком постоянного напора.

1 — нижний бак с погруженным в него шестеренчатым насосом, *2* — бак постоянного напора, *3* — труба, по которой ртуть поступает в рабочую ветвь контура, *4* — труба Вентури для измерения больших расходов, *5* — труба Вентури для измерения малых расходов, *5а* — байпасная линия, *6*, *7* — «рубашки» для охлаждающей воды. *8* — змеевик, *9* — кран, *10* — кран с фильтром на байпасной трубе, *11* — сливная труба, *12* — кран для регулирования расхода через экспериментальный участок, *13* — кран для регулирования статического уровня в манометрах.

общей емкости контура. К этому вынуждают высокая стоимость рабочей среды, необходимость ее периодической очистки и др. Емкость рассмотренного контура составляет около 20 литров.

Некоторым видоизменением описанной схемы являются контуры, в которых отсутствуют баки. В них обычно применяются электромагнитные насосы, отличающиеся от механических насосов весьма равномерной подачей жидкости. На рис. 1.5 показана принципиальная схема такого контура, использовавшегося для исследований струй ртути в ограниченном пространстве и для

измерения профилей скорости в трубах прямоугольного сечения [10]. Однако при необходимости получения значительных расходов и напоров жидкости механические насосы в условиях лаборатории все же часто предпочтительнее.

Во многих случаях для измерения расхода вместо труб Вентури или одновременно с ними используются электромагнитные

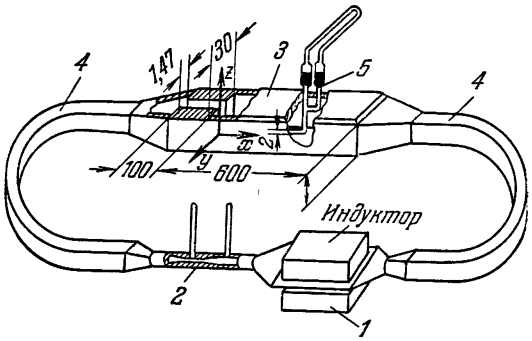


Рис. 1.5. Замкнутый ртутный контур с индукционным насосом.

1 — индукционный насос, *2* — труба Вентури, *3* — рабочий канал, *4* — «рубашки» для охлаждающей воды, *5* — трубка Пито—Прандтля с дифференциальным двухжидкостным манометром.

расходомеры [11—13]. Теория и опыт применения электромагнитных расходомеров обобщены в известной книге Шерклифа [14].

Для создания магнитного поля в магнитогидродинамических экспериментальных установках часто используются мощные магниты промышленного производства. Однако иногда вполне приемлемыми оказываются небольшие электромагниты, изготовление которых доступно каждой экспериментальной мастерской.

На рис. 1.6 показан один из таких простых и дешевых электромагнитов [8], позволяющий при затрате мощности около 12 *квт* получать в зазоре $1{,}5\times9{,}0\times60{,}0$ *см* магнитное поле с индукцией около 2 *тл*. Нужно подчеркнуть, что материал сердечника — обыкновенная конструкционная сталь, подвергнутая трехкратному отжигу.

Часто эксперимент обладает такой спецификой, что для его проведения заведомо целесообразно строить специальный электромагнит. Так, в упоминавшемся уже опыте со струями, где было необходимо на большой длине получить сравнительно слабое, но весьма однородное магнитное поле, оказалось целесообразным устроить своеобразный магнит из разрезанной вдоль образующей толстостенной стальной трубы большого диаметра,

внутри которой располагалась обмотка (рис. 1.7). Вертикальными стенками экспериментального канала служили полюсы магнита. Аналогично устроен кольцевой магнитогидродинамический

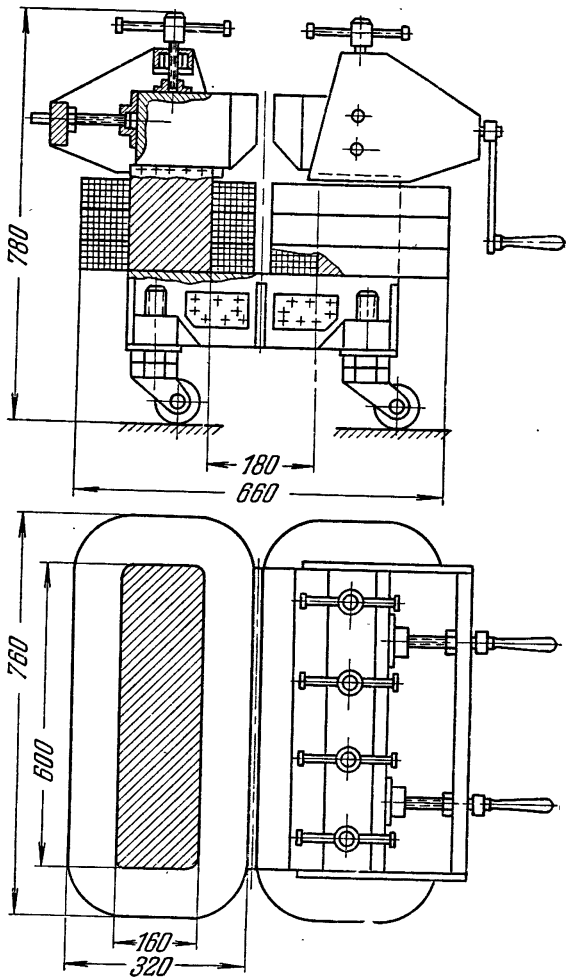


Рис. 1.6. Электромагнит, дающий поле с индукцией около 2 *тл*.
(в обмотке около 2000 витков, потребляемая мощность 12 *квт*).

канал (рис. 1.8), использовавшийся для разнообразных исследований, в том числе для многочисленных исследований обтекания тел в поперечном магнитном поле [15—17]. Отличительной

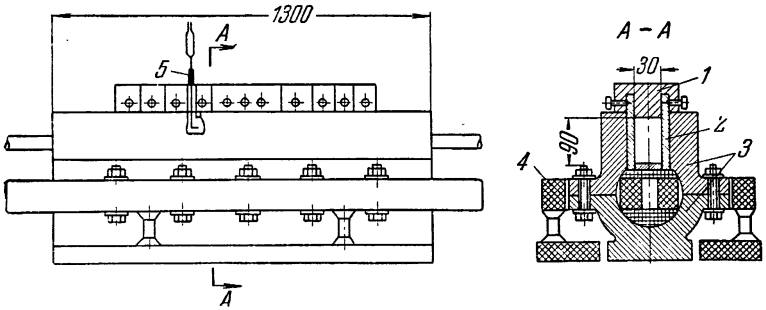


Рис. 1.7. Электромагнит и канал для измерения распределения скоростей в струях.

1 — съемная секционированная крышка из немагнитной нержавеющей стали, 2 — ферромагнитные стенки канала, 3 — магнитопровод, 4 — катушка, 5 — трубка Пито—Прандтля.

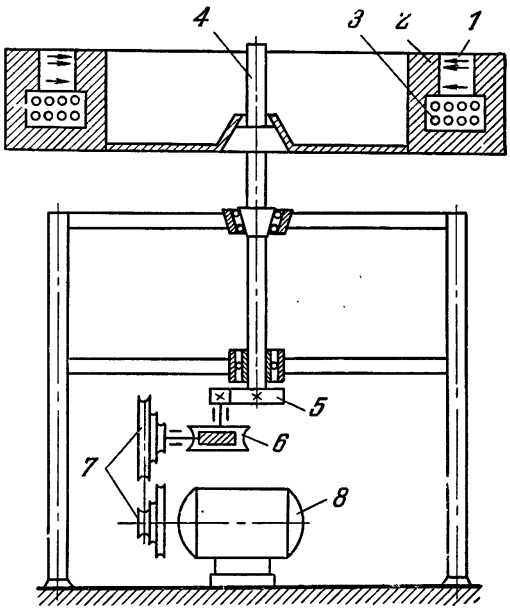


Рис. 1.8. Кольцевой магнитогидродинамический канал.

1 — канал, 2 — магнитопровод, 3 — катушка, 4 — вал, 5 — зубчатая передача, 6 — червячная передача, 7 — ременная передача, позволяющая ступенями менять число оборотов, 8 — электродвигатель.

особенностью этого канала является возможность проводить магнит в равномерное вращение как вместе с расплавленным металлом, так и независимо от него. Помимо своего основного назначения, катушка электромагнита может использоваться для индукционного разогревания металла до 150° С, для чего через нее пропускается переменный ток.

При исследованиях течений в бегущем магнитном поле часто оказывается возможным использовать один и тот же индуктор

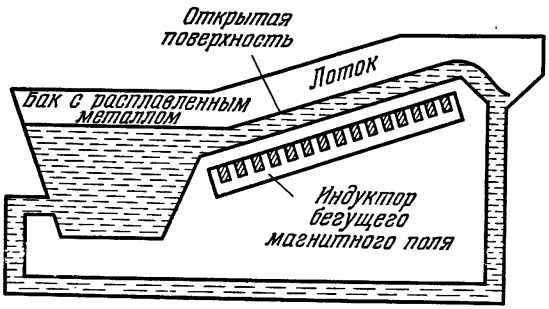


Рис. 1.9. Жидкометаллический контур для исследования безнапорных течений в бегущем магнитном поле.

бегущего магнитного поля как для создания поля на экспериментальном участке, так и для приведения в движение жидкости во всем контуре (рис. 1.9) [18].

Значительная часть измерительных устройств, используемых в магнитогидродинамических экспериментах, представляет собой результат соответствующей модификации и приспособления измерительных устройств общей гидродинамики. Так, для измерения локальных осредненных по времени скоростей течения используются трубки Пито и Пито—Прандтля, которые отличаются от используемых в общей гидродинамике сравнительно малыми диаметрами, материалом (их приходится изготовлять полностью из немагнитной нержавеющей стали), а также тем, что их во многих случаях необходимо предварительно градуировать по напряженности магнитного поля [19]*). Для измерения турбулентных пульсаций скорости предприняты попытки применить электротермоанемометр с чувствительным элементом, покрытым слоем электрической изоляции [20], а также известные в общей гидродинамике устройства, в которых динамическое давление воспринимается небольшим телом, помещаемым в нужную точку

*) Подробнее об этой градуировке сказано в гл. IX.

потока, и с помощью тензодатчика превращается в электрический сигнал [21].

Измерение давлений и перепадов давлений при работе со ртутью и другими тяжелыми металлами облегчается возможностью применения двухжидкостных манометров (рис. 1.10), в которых перемещение уровня увеличивается при достаточно большом отношении площадей сечения узкой и широкой трубок во столько раз, во сколько отличаются удельные веса легкой и

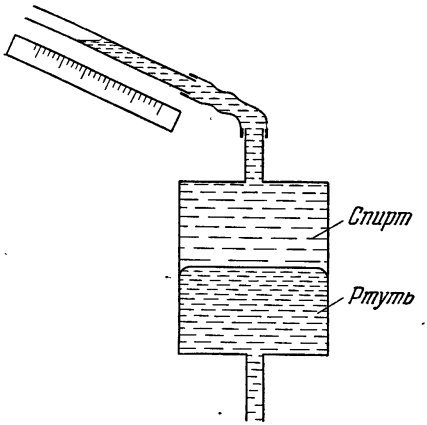


Рис. 1.10. Двухжидкостный манометр с наклонной измерительной трубкой.

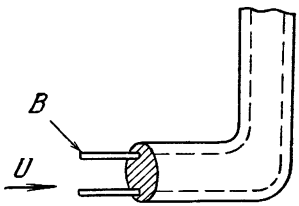


Рис. 1.11. Схема кондукционного измерения локальных скоростей.

тяжелой жидкости. Таким образом, при использовании ртути и спирта можно получить усиление до 15 раз, а при наклонной верхней измерительной трубке и до 60 и более раз [10, 15]*).

Некоторые из применяемых в экспериментах измерительных устройств являются специфически магнитогидродинамическими. Выше уже упоминались электромагнитные расходомеры. Для измерения локальных скоростей течения и особенно турбулентных пульсаций скорости начинает применяться другое магнитогидродинамическое устройство — кондукционный измеритель локальных скоростей [5, 14]. Этот измеритель, показанный на рис. 1.11, представляет собой два электрода, введенных на малом расстоянии один от другого в поток, находящийся в магнитном поле. Если поток безграничный и однородный, между электродами наводится разность потенциалов, связанная со скоростью течения следующим образом:

$$\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{B}_0. \qquad (1.35)$$

*) Установка верхней трубки под очень маленькими углами к горизонту нежелательна, так как при этом искажается мениск, затрудняется считывание показаний, а сами показания становятся чрезмерно чувствительными к чистоте поверхности стекла.

Столь простая связь скорости течения и подлежащего измерению сигнала — разности потенциалов, как и возможность сделать датчик весьма миниатюрным и мало возмущающим поток, делает этот способ измерения весьма заманчивым. Однако разность потенциалов составляет при обычных для экспериментов значениях $\boldsymbol{U}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$ несколько единиц, в лучшем случае несколько десятков микровольт, и необходимость многократного усиления сигнала обусловливает высокий уровень шумов. Но самая серьезная трудность состоит в том, что связь между $\boldsymbol{U}$ и $\operatorname{grad}\varphi$ является столь простой, как в (1.35), лишь когда рассматривается безграничный невозмущенный поток жидкости. В большинстве же случаев в направлении $\operatorname{grad}\varphi$ текут индуцированные в осредненном течении электрические токи, и потому

$$\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}_0-\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma}. \tag{1.36}$$

Вычислить же предварительно распределение $\boldsymbol{j}$ по сечению потока при турбулентном режиме с надлежащей точностью обычно нельзя. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Экспериментально могут быть получены по отдельности три компоненты градиента потенциала. Если иметь в виду лишь пульсационные величины и рассматривать течение в магнитном поле $\boldsymbol{B}$ $(0, B_0, 0)$, то из (1.36) получается следующая связь между компонентами градиента потенциала, скорости и электрического тока:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x}=-B_0w'-\frac{j'_x}{\sigma};\quad \frac{\partial\varphi'}{\partial y}=\frac{j'_y}{\sigma};\quad \frac{\partial\varphi'}{\partial z}=B_0u'-\frac{j'_z}{\sigma}. \tag{1.37}$$

Понятно, что для вычисления мгновенного значения пульсационной скорости по результатам измерений градиента потенциала надо знать мгновенное значение пульсации электрического тока. Данные об этом токе можно было бы в принципе получить, измеряя пульсации индуцированного магнитного поля. Однако измерения должны производиться одновременно с измерениями разности потенциалов и притом непосредственно в межэлектродном пространстве, а это едва ли осуществимо с технической точки зрения. Если подвергнуть данные измерений пульсаций потенциала статистической обработке, например вычислять среднеквадратические величины, то определить пульсации скорости еще труднее. В самом деле, из (1.37) следует, что

$$\overline{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2}=B_0^2\overline{w'^2}+\frac{\overline{j'^2_x}}{\sigma^2}+2\frac{B_0}{\sigma}\overline{w'j'_x},\ \text{и т. д.} \tag{1.38}$$

Как следует из (1.38), для вычисления среднеквадратических значений пульсаций скорости необходимо знать не только сред-

неквадратические значения пульсаций электрического тока, но также и средние значения корреляций пульсаций скорости и электрического тока $\overline{w'j'_x}$ и $\overline{u'j'_z}$. Все сказанное заставляет признать, что кондукционный анемометр позволяет получать лишь грубые, сугубо качественные, но не количественные сведения о турбулентности. Уместно подчеркнуть, что это утверждение одинаково справедливо при любой величине проводимости среды. Действительно, предполагая, как и ранее, что $\mathrm{Re}_m \ll 1$, из уравнений Максвелла и закона Ома можно получить следующие уравнения:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\mathrm{Re}_m} \operatorname{rot} \boldsymbol{b} + \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{b}_0,$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{b} = \mathrm{Re}_m \operatorname{rot} \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{b}_0.$$

Второе из этих уравнений заменой $\boldsymbol{b} = \mathrm{Re}_m \boldsymbol{b}^*$ приводится к виду

$$\nabla^2 \boldsymbol{b}^* = \operatorname{rot} (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{b}_0).$$

Таким образом, $\boldsymbol{b}^*$ не зависит от Re_m (т. е. от проводимости жидкости), если граничные условия не зависят от проводимости жидкости (например, стенки, ограничивающие область течения, изолированы или идеальные проводники). Кроме того, при измерении турбулентных пульсаций граничные условия, по-видимому, не будут оказывать заметного влияния на результаты измерений в большей части потока, и лишь в непосредственной близости от стенки это влияние может проявляться.

Обращаясь к первому уравнению, получаем, что

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{rot} \boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{b}_0,$$

тем самым $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ не зависит от Re_m, а следовательно, от проводимости жидкости*).

Этот результат можно проиллюстрировать следующим простым рассуждением. Поскольку индуцированный ток (т. е. $\operatorname{rot} \boldsymbol{b}$) прямо пропорционален проводимости, то $\boldsymbol{j}/\sigma$ при всех прочих равных условиях не зависит от σ, а поэтому $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{B}_0$ также от σ не зависит.

*) Заметим, что здесь речь идет о зависимости от проводимости, вытекающей из закона Ома, на котором основан принцип работы кондукционного датчика. Естественно, что $\boldsymbol{E}$ будет зависеть от проводимости через посредство профиля скорости, который определяется в числе других параметров и проводимостью жидкости.

Известны различные предположения, касающиеся мер, уменьшающих влияние индуцированных токов на показания измерителя. Однако, несмотря на сравнительно большое число работ, посвященных исследованию этого способа измерения скоростей [22—32], надежные количественные результаты с его помощью еще не получены.

Следует обратить внимание еще и на тот факт, что условия $\mathrm{Re}_m \ll 1$ недостаточно для пренебрежения нестационарным членом в уравнении

$$\mathrm{Re}_m \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = \mathrm{Re}_m \operatorname{rot} (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{b}_0) + \nabla^2 \boldsymbol{b}.$$

Действительно, принимая, что индуцированное магнитное поле $h \sim \mathrm{Re}_m$, порядок величин членов в этих уравнениях оценивается соответственно следующим образом:

$$\frac{\mathrm{Re}^2_m}{\tau}, \quad \mathrm{Re}_m, \quad \mathrm{Re}_m,$$

где τ — характерное безразмерное время, причем $\tau = T\frac{V}{l}$, V — средняя (осредненная скорость), l — масштаб пульсации, а T — характерное время пульсации в неподвижной относительно датчика измерителя системе координат.

Очевидно, что для того, чтобы пренебрежение членом $\mathrm{Re}_m \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}$ было оправдано, необходимо потребовать, чтобы

$$\frac{1}{\tau} \ll \frac{1}{\mathrm{Re}_m}. \tag{1.39}$$

С другой стороны, характерное время взаимодействия пульсации с магнитным полем оценивается как $\tau_в \sim \mathrm{N}^{-1}$.

Если число Стюарта мало, т. е. $\mathrm{N} \ll 1$, то характерное безразмерное время будет порядка единицы, $\tau \sim 1$, так как при этом $\frac{l}{V} \ll \frac{1}{\sigma B^2/\rho}$, и членом с производной по времени можно пренебречь. Если же $\mathrm{N} \gg 1$, то $\tau \sim \tau_в \sim \mathrm{N}^{-1}$, и для выполнения условия (1.39) необходимо потребовать, чтобы

$$\mathrm{N} \ll \frac{1}{\mathrm{Re}_m}$$

или $\mathrm{Lu} \ll 1$, где $\mathrm{Lu}^2 = \mathrm{NRe}_m = \mathrm{Ha}^2\beta$ — так называемое число Лундквиста.

Упомянем еще об измерении локальной осредненной по времени скорости с помощью вводимого в поток электрода, воспринимающего электрический потенциал [31, 33]. Второй электрод представляет при этом стенка трубы. Для вычисления локальной скорости необходимо знать распределение потенциала по всему сечению трубы, а его вычисление связано с необходимостью графического интегрирования и дифференцирования результатов измерения. Указанное обстоятельство, как и ряд чисто экспериментальных трудностей, делает этот способ весьма трудным для применения.

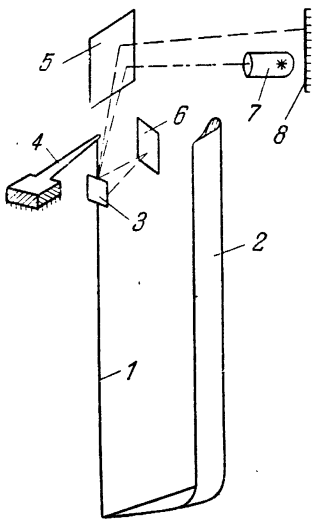


Рис. 1.12. Схема устройства для измерения локальных скоростей на малых расстояниях от твердой поверхности.

1 — кварцевая нить, *2* — ножка штатива, *3* — зеркало, *4* — упругий элемент, *5*, *6* — зеркала, *7* — источник света, *8* — экран.

Рассмотрим, наконец, очень простое измерительное устройство, которое с успехом применялось для измерения локальных скоростей течения ртути на близких расстояниях от твердой поверхности [34]. Схема этого устройства показана на рис. 1.12. Чувствительным элементом является кварцевая нить *1* толщиной 50÷100 *мк*, натянутая между ножкой штатива *2* и упругим элементом *4*. Прогиб нити, зависящий от скорости набегающего потока, фиксируется с помощью оптической системы, главным элементом которой является миниатюрное зеркальце *3*, сделанное из посеребренной капроновой пленки и укрепленное непосредственно на нити. Световой луч от источника *7*, отражаясь от системы зеркал *3*, *5*, *6*, направляется на экран *8*, удаленный на несколько метров. В работе [34] измерялось распределение скорости в пограничном слое на плоской пластинке. Скорость невозмущенного потока не превышала 10 *см/сек*, общая длина кварцевой нити составляла около 10 *см*. По-видимому, описанное устройство может быть применено и для измерения скоростей в каналах, а при некоторой его модификации и для измерения турбулентных пульсаций. Недостатком его является необходимость тарировки каждой нити. Кроме того, устройство можно использовать лишь при наличии свободной поверхности, и при этом нужно принимать особые меры для предотвращения динамического воздействия на нить пленки окислов, которая всегда имеется на поверхности расплавленного металла. В работе [34] нить в

месте прохождения через поверхность ртути защищалась специальным щитком, а поверхность ртути непрерывно очищалась раствором серной кислоты.

На этом мы заканчиваем краткий обзор магнитогидродинамической экспериментальной техники, отсылая читателя за более подробными сведениями к работе [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Л., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, Москва, 1959.
2. Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, Физматгиз, Москва, 1962.
3. Кирко И. М., Жидкий металл в электромагнитном поле, «Энергия», Москва, 1964.
4. Gotoh K., Stokes flow of an electrically conducting fluid in an uniform magnetic field, J. Phys. Japan, **15**, 4, 696 (1960).
5. Хинце О., Турбулентность, ИЛ, Москва, 1963.
6. Ковнер Д. С., Левин В. Б., О турбулентном течении электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле, Теплофизика высоких температур **2**, № 5, 742 (1964).
7. Карасик В. Р., Физика и техника сильных магнитных полей, «Наука», Москва, 1964.
8. Брановер Г. Г., Турбулентные магнитогидродинамические течения в трубах, «Зинатне», Рига, 1967.
9. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Щербинин Э. В., Турбулентное течение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, Магнитная гидродинамика, № 4, 78 (1966).
10. Брановер Г. Г., Щербинин Э. В., Магнитогидродинамическое струйное течение в ограниченном пространстве, Магнитная гидродинамика, № 3, 55 (1966).
11. Murgatroyd W., Experiments on magnetohydrodynamic channel flow, Phil. Mag. **44**, 1348 (1953).
12. Globe S., The effect of a longitudinal magnetic field on pipe flow of mercury, Transaction of the ASME, Ser. C., Journ. of Heat Transfer, **83**, 4, 445, (1961).
13. Ковнер Д. С., Красильников Е. Ю., Миронов О. М., Экспериментальный жидкометаллический галлиевый контур для магнитогидродинамических исследований, Теплофизика высоких температур **3**, № 2, 315 (1965).
14. Шерклиф Дж., Теория электромагнитного измерения расхода, «Мир», Москва, 1965.
15. Брановер Г. Г., Кирко И. М., Лиелаусис О. А., Экспериментальное изучение влияния поперечного магнитного поля на распределение скоростей в потоке ртути. В сб. «Прикладная магнитогидродинамика», Труды института физики АН ЛССР **12**, 167 (1961).
16. Цинобер А. Б. Вопросы влияния магнитного поля на обтекание тел. — В сб.: «Вопросы магнитной гидродинамики», 3, Изд. АН ЛССР, Рига (1963), 49.
17. Цинобер А. Б., Магнитогидродинамическое обтекание тел, «Зинатне», Рига, 1970.
18. Брановер Г. Г., Кирко И. М., Лиелаусис О. А., Цинобер А. Б., Гидравлика безнапорных потоков жидкого металла, движущегося в каналах с обратным уклоном дна под действием бегущего магнитного поля. —

В сб.: «Вопросы магнитной гидродинамики», 3, Изд. АН ЛССР, Рига (1963), 65.
19. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В., О применении трубок Пито и Прандтля в магнитогидродинамическом эксперименте, Магнитная гидродинамика, № 1, 98 (1966).
20. Sajben M., Hot wire anemometer in liquid mercury, Rev. Scient. Instrum. **36**, 7, 945 (1965).
21. Брановер Г. Г., Слюсарев Н. М., Щербинин Э. В., Некоторые результаты измерений турбулентных пульсаций скорости в потоке ртути в присутствии поперечного магнитного поля. Магнитная гидродинамика, № 1, 33 (1965).
22. Williams E. J., The induction of e.m.f. in a moving liquid by a magnetic field and its application to an investigation of the flow of liquids, Proc. Phys. Soc. Lond. **42**, 46€ (1930).
23. Grossman L. M., Shay E. A., Turbulent velocity measurments, Mech. Engng. **71**, 14 (1949).
24. Grossman L. M., Charwat A. F., The measurments of turbulent velocity fluctuations by the method of electromagnetic induction, Rev. Sci. Instrum. **23**, 741 (1952).
25. Kolin A., Electromagnetic method for the determination of velocity distribution in fluid flow, Phys. Rev. **63**, 218 (1943).
26. Kolin A., Electromagnetic velometry. I. A method for the determination of fluid velocity in space and time, J. Appl. Phys. **15**, 150 (1944).
27. Kolin A., An alternating field inducting flowmeter of high sensitivity, Rev. Sci. Instrum. **16**, 109 (1945).
28. Kolin A., Reiche F., Electromagnetic velometry. II. Elimination of the effects of induced currents in explarations of the velocity distribution in axially symmetric flow. J. Appl. Phys, **25**, 409 (1954).
29. Remenieras G., Hermant C., Electromagnetic measurments of speed in liquids, Houille Blanche **9**, 732 (1954).
30. Grossman L. M., Li H., Turbulence investigation in liquid shear flow by the method of electromagnetic induction. Univ. of Calif (Berkley) Inst. Engng Res, Series 65, Issue 2 (1956).
31. Гущин Г. К., Логинов Н. И., Субботин В. И., Измерение профиля скорости электромагнитным методом. — В сб.: «Вопросы магнитной гидродинамики», 3, Изд. АН ЛССР, Рига (1963), 297.
32. Болонов Н. И., Колованди Б. А., Повх И. Л., Скринник Е. Ф., Исследование структуры магнитогидродинамических потоков индукционным анемометром, Известия вузов, сер. «Энергетика», № 1, 65 (1966).
33. Lecocq P., Contribution a' l'etude des pertes de charge et profils de vitesse en ecoulment turbulent en magnetohydrodynamique, Bull. centre rech. et essais Chatou 8, (Suppl) (1964).
34. Гуревич Б. Я., Миллер Р. Л., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Обтекание плоской пластины электропроводящей жидкостью в поперечном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 4, 69 (1966).

ГЛАВА II

ЛАМИНАРНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ

§ 1. Предварительные замечания

В отсутствие магнитного поля ламинарное течение в трубе — явление, относительно редко встречающееся на практике. Во всяком случае инженеры привыкли к мысли о том, что ламинарное течение в трубе это некая абстракция, могущая реально встретиться лишь в редких специальных случаях. При течении расплавленного металла в магнитном поле положение существенно меняется. Как будет показано далее, магнитное поле значительно повышает гидродинамическую устойчивость течения, а в течении, которое уже турбулентно, возмущения подавляются магнитным полем. Таким образом, в проточных частях магнитогидродинамических машин существование ламинарного режима течения весьма вероятно.

Однако есть еще и другое обстоятельство, обусловливающее важность исследований ламинарных магнитогидродинамических течений. Это обстоятельство состоит в том, что для анализа экспериментальных данных о турбулентных течениях, для разработки соответствующих полуэмпирических теорий необходимо знать закономерности ламинарных течений, ибо, как уже сказано, при наложении достаточно сильного поля первоначально турбулентное течение может стать ламинарным.

Теория ламинарных магнитогидродинамических течений в трубах сейчас уже развита сравнительно подробно. Во всяком случае различным аспектам этой проблемы посвящено несколько сотен работ. В этой главе мы не будем пытаться дать их обзор и коснемся лишь весьма немногих из них. Цель этой главы — выяснить основные физические аспекты воздействия магнитного поля на течения жидкого металла в трубе и рассмотреть некоторые важные расчетные зависимости, сопоставив их с имеющимися экспериментальными данными. В магнитной гидродинамике имеет большое значение сопоставление с экспериментом даже строгих теоретических решений задач о ламинарных течениях. Как уже говорилось выше, ламинаризованный режим устанавливается в проточных частях магнитогидродинамических машин и в экспериментальных трубах обычно лишь под воздей-

ствием магнитного поля, т. е. до вступления в магнитное поле течение турбулентно. Таким образом, теория предполагает *ламинарное* течение, реальное же течение является *ламинаризованным*. Априори можно допустить, что оба эти вида течения идентичны. Решить же этот вопрос может лишь эксперимент.

В этой главе будут рассмотрены течения лишь в таких трубах, форма и размеры сечения которых не изменяются по длине, т. е. в цилиндрических и призматических трубах. Внешнее магнитное поле также будет предполагаться постоянным по длине. Можно показать (§ 2), что при этих условиях наведенное магнитное поле не оказывает на течение обратного влияния, если только исключить из рассмотрения начальный участок трубы, где происходит стабилизация течения. Отсюда следует, что поле скоростей получается при решении задачи в строгой постановке таким же, как при решении в безындукционном приближении. Поэтому на протяжении этой главы предположение о малости магнитного числа Рейнольдса нигде не делается.

В магнитной гидродинамике, так же как в общей, решение задач о равномерном движении жидкости в трубе основывается на предположении о том, что имеется лишь одна продольная компонента скорости. Это предположение отнюдь не очевидно, так как и при условии $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$ (x — продольная координата) возможно, вообще говоря, существование вторичных течений в плоскости поперечного сечения трубы. В опубликованной недавно работе Ханта [1] отсутствие поперечных компонент впервые доказано. Рассмотрим это доказательство.

Пусть имеется течение в трубе произвольного, но постоянного сечения. Направим ось x вдоль трубы, и соответствующую компоненту скорости обозначим u. Компоненты скорости в направлении осей y и z обозначим соответственно v и w. Область течения (поперечное сечение трубы) обозначим D, а границу этой области S. Тогда теорема Ханта может быть сформулирована следующим образом: если течение таково, что $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$, а на границе $\boldsymbol{U}=0$, то $v \equiv 0$ и $w \equiv 0$, т. е. линии тока параллельны.

Как легко убедиться, при условиях теоремы уравнения (1.11), (1.13) и (1.19) в проекции на оси y и z становятся независимыми. Это позволяет записать эти уравнения только для компонент v, w и B_y, B_z:

$$(\boldsymbol{U}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{U} = -\,\mathrm{grad}\,p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\boldsymbol{U} + \mathrm{Al}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}, \qquad (2.1)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}_m}\nabla^2\boldsymbol{B} + \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}) = 0, \qquad (2.2)$$

где

$$\boldsymbol{U}=(0, v, w); \quad \boldsymbol{B}=(0, B_y, B_z),$$

$$\operatorname{grad}=\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}; \quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Умножая (2.1) на $\boldsymbol{U}$, (2.2) на $\mathrm{Al}\boldsymbol{B}$, складывая и интегрируя по D, получим

$$\int_D\int \boldsymbol{U}[(\boldsymbol{U}\operatorname{grad})\boldsymbol{U}]dy\,dz=$$

$$=\int_D\int\left\{-\boldsymbol{U}\operatorname{grad}p+\frac{1}{\mathrm{Re}}\boldsymbol{U}\nabla^2\boldsymbol{U}+\frac{\mathrm{Al}}{\mathrm{Re}_m}\boldsymbol{B}\nabla^2\boldsymbol{B}+\mathrm{Al}[\boldsymbol{U}(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B})+\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{B}\operatorname{rot}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B})]\right\}dy\,dz. \qquad (2.3)$$

Поскольку $\operatorname{div}\boldsymbol{U}=0$, то, учитывая, что на границе $\boldsymbol{U}=0$, получаем

$$\int_D\int \boldsymbol{U}\operatorname{grad}p\,dy\,dz=\int_S p\boldsymbol{U}\,dS=0.$$

Далее

$$\int_D\int \boldsymbol{U}\nabla^2\boldsymbol{U}\,dy\,dz=-\int_D\int(\operatorname{rot}\boldsymbol{U})^2dy\,dz+\int_S(\operatorname{rot}\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{U})\,dS=$$

$$=-\int_D\int(\operatorname{rot}\boldsymbol{U})^2dy\,dz$$

и аналогично

$$\int_D\int \boldsymbol{B}\nabla^2\boldsymbol{B}\,dy\,dz=-\int_D\int(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})^2dy\,dz+\int_S\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}\,dS=$$

$$=-\int_D\int(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})^2dy\,dz.$$

Так как вследствие того, что $\boldsymbol{U}|_S=0$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\equiv 0$, из закона Ома следует, что и $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}|_S=0$.

Последние два члена правой части уравнения (2.3) также равны нулю:

$$\int_D\int[\boldsymbol{U}(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\operatorname{rot}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B})]dy\,dz=$$

$$=\int_D\int\operatorname{div}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B})\,dy\,dz=\int_S(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B})\,dy\,dz=0.$$

Наконец, нулю оказывается равной и левая часть (2.3):

$$\int\int_D \boldsymbol{U}[(\boldsymbol{U}\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{U})]dy\,dz=$$

$$\int\int_D \left[\boldsymbol{U}\,\mathrm{grad}\frac{U^2}{2}-\boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U})\right]dy\,dz=$$

$$=\int\int_D\left(\boldsymbol{U}\,\mathrm{div}\frac{U^2}{2}-\frac{U^2}{2}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}\right)dy\,dz=\int_S\frac{U^2}{2}dS=0.$$

Таким образом, вместо (2.3) получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\int_D(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U})^2dy\,dz+\frac{1}{\mathrm{Re}_m}\int\int_D(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})^2dy\,dz=0, \quad (2.4)$$

откуда вытекает, что во всей области D

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}=0. \quad (2.5)$$

Следовательно, скорость $\boldsymbol{U}=(0,\ v,\ w)$ имеет потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа,

$$\nabla^2\varphi=0. \quad (2.6)$$

Поскольку на границе S скорости $v=0$ и $w=0$, то $\varphi|_S=\mathrm{const}$, и единственным решением уравнения (2.6) является $\varphi=\mathrm{const}$ во всей области D, и так как $v=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $w=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, то мы получаем

$$v=w=0, \quad (2.7)$$

и теорема доказана.

Из того, что скорость течения имеет лишь одну компоненту и, следует, что уравнение движения становится линейным, и тогда легко доказать единственность его решения. Это доказательство также дается в работе [1]. Мы не воспроизводим его здесь, так как совершенно аналогичное доказательство рассмотрено ниже (гл. VI) при изложении вопросов, связанных с течениями Стокса.

§ 2. Уравнения равномерного установившегося движения в трубе

Рассмотрим общий случай равномерного течения в трубе, не делая предположения о малости магнитного числа Рейнольдса [2, 3]. Само рассмотрение мы проведем несколько иначе, чем в указанных работах.

С учетом теоремы Ханта уравнение (1.15) и уравнение для потенциала в рассматриваемой задаче принимают следующий вид:

$$\frac{1}{\mathbf{Re}}\nabla^2 u+\mathbf{N}\left[b_y\frac{\partial\varphi}{\partial z}-b_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}-u(b_y^2+b_z^2)\right]=\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{N}\left(b_z\frac{\partial\varphi}{\partial x}-b_x\frac{\partial\varphi}{\partial z}+ub_yb_z\right)=\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{N}\left(b_x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-b_y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+ub_zb_x\right)=\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{2.10}$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial ub_y}{\partial z}-\frac{\partial ub_z}{\partial y}. \tag{2.11}$$

Из (1.17) и (1.18) получаем

$$\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}=-\mathbf{Re}_m\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial z}=-\mathbf{Re}_m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+ub_z\right), \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial y}=\mathbf{Re}_m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-ub_y\right). \tag{2.14}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}=0. \tag{2.15}$$

Величина $\mathbf{Re}_m\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, как следует из уравнения (1.18), равна составляющей плотности электрического тока j_x. Она не зависит от движения. Следовательно, j_x — это плотность тока, подводимого извне, и ее величина должна быть задана. Отсюда вытекает, что b_y и b_z определяются из (2.12) и (2.15) и соответствующих граничных условий независимо от движения. Зависящей от движения является лишь компонента индукции магнитного поля b_x, которая может быть найдена из уравнений (2.13) и (2.14) после определения поля скоростей, причем распределение скоростей и электрических потенциалов может быть найдено из уравнений (2.8)—(2.11) независимо от магнитного числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_m$. Из этого следует, что с точки зрения определения поля скоростей постановка задачи о равномерном течении в трубе в безындукционном приближении является точной постановкой.

Внутри стенок трубы $u\equiv 0$, $\nabla^2 b_x\equiv 0$, а для φ должно выполняться уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi=0$. Наконец, вне трубы $u\equiv\varphi\equiv b_x\equiv 0$.

Перейдем к рассмотрению граничных условий. Будем обозначать величины на границе, относящиеся к жидкости, индексом (1), а величины, относящиеся к стенке трубы, индексом (2). Отношение электрической проводимости стенки к проводимости жидкости будем обозначать символом σ_*.

Граничные условия для скорости течения обычные:

$$u^{(1)}=0. \tag{2.16}$$

Граничные условия для потенциала можно найти, исходя из того, что на границе со стенкой должны оставаться непрерывными нормальная компонента плотности тока и касательная компонента напряженности электрического поля. Поскольку

$$\boldsymbol{j}=\sigma(-\operatorname{grad}\varphi+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}) \quad \text{и} \quad u^{(1)}=0,$$

то

$$j_n=-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

а значит,

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial n}=\sigma_*\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial n}\ ^*). \tag{2.17}$$

Непрерывность касательной компоненты напряженности электрического поля означает, что

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\tau}=\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial\tau}. \tag{2.18}$$

Рассмотрим теперь граничные условия для магнитного поля. Так как магнитное поле непрерывно, то

$$b_x^{(1)}=b_x^{(2)}\ ^*). \tag{2.19}$$

Далее, поскольку на границе $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=-\sigma\operatorname{grad}\varphi$, то $(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})_\tau=-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$. Кроме того, в нашем случае $(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})_\tau=\frac{\partial b_x}{\partial n}$. Следовательно, с учетом (2.18)

$$\sigma_*\frac{\partial b_x^{(1)}}{\partial n}=\frac{\partial b_x^{(2)}}{\partial n}. \tag{2.20}$$

---

*) Условия на внешней границе стенки трубы определяются свойствами внешней электрической цепи. В частности, если стенка трубы изолирована, то $\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial n}=0$ и $b_x^{(2)}=0$.

§ 3. Плоскопараллельное равномерное течение в поперечном магнитном поле

В простейшем случае, когда стенки, ограничивающие стационарное равномерное плоскопараллельное течение, являются непроводящими, эта задача была решена Гартманом [4]. Мы рассмотрим сейчас более общий случай, когда стенки имеют произвольную проводимость [5, 6]. Схема течения показана на рис. 2.1.

Поскольку в плоскопараллельном движении все производные по z тождественно равны нулю (кроме $\partial\varphi/\partial z=\text{const}$), то уравнения (2.8)—(2.10) принимают вид

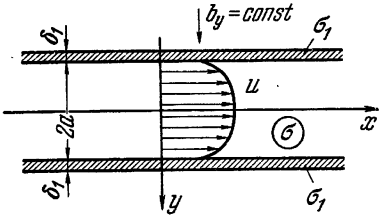


Рис. 2.1. Равномерное течение между параллельными стенками в поперечном магнитном поле.

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2u}{dy}+\mathrm{N}(E_z-u)=\frac{dp}{dx}. \qquad (2.21)$$

Уравнение (2.11) дает

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\text{const}=E_z. \qquad (2.22)$$

Этот результат мы уже получили в гл. I для общего случая плоского движения в плоскости поля. Наконец из (2.12)—(2.14) получаем

$$\frac{d^2b_x}{dy^2}+\mathrm{Re}_m\frac{du}{dy}=0. \qquad (2.23)$$

Граничные условия для скорости следующие:

$$u=0 \quad \text{при} \quad y=\pm 1\ ^*). \qquad (2.24)$$

Граничные условия для магнитного поля мы рассмотрим несколько позже, а сейчас займемся уравнением (2.21), решение которого, как уже указывалось в § 2, не зависит от наведенного магнитного поля b_x.

Прежде всего определим постоянную напряженность электрического поля E_z. При отсутствии внешней электрической цепи это можно сделать исходя из того, что в каждом сечении полный ток через жидкость и стенки должен быть равен нулю,

$$\int_{1+\delta_1/a}^{1+\delta_1/a} j_z\,dy=0. \qquad (2.25)$$

*) За характерный размер принята половина расстояния между стенками — a. За характерную скорость — средняя по сечению скорость V.

Из (2.25) получаем $E_z=\frac{1}{1+\alpha}$, где

$$\alpha=\sigma_*\frac{\delta_1}{a}. \tag{2.26}$$

С учетом граничного условия (2.24) решение уравнения (2.21) получается в виде

$$u=\left(-\frac{1}{\mathrm{N}}\frac{dp}{dx}+E_z\right)\left(1-\frac{\operatorname{ch}\mathrm{Ha}_y}{\operatorname{ch}\mathrm{Ha}}\right). \tag{2.27}$$

Поскольку $\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}u\,dy=1$, можно, проинтегрировав (2.27), найти

$$\left(-\frac{1}{\mathrm{N}}\frac{dp}{dx}+E_z\right)=\frac{\mathrm{Ha}\operatorname{ch}\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}\operatorname{ch}\mathrm{Ha}-\operatorname{sh}\mathrm{Ha}} \tag{2.28}$$

и вместо (2.27) написать

$$u=\frac{\mathrm{Ha}\operatorname{ch}\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}\operatorname{ch}\mathrm{Ha}-\operatorname{sh}\mathrm{Ha}}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\mathrm{Ha}\,y}{\operatorname{ch}\mathrm{Ha}}\right). \tag{2.29}$$

Отсюда видно, что профиль скорости не зависит ни от проводимости стенок, ни от приложенного электрического поля. Кроме того, естественно, что безразмерный профиль не зависит также и от числа Рейнольдса.

Учитывая, что $\mathrm{Re}=\frac{Va}{\nu}$ и что безразмерный градиент давления равен $\frac{dp}{dx}\frac{a}{\rho V^2}$, где p и x — уже размерные величины, можно из (2.28) с учетом (2.26) получить следующие выражения для средней скорости течения:

$$V=-\frac{a^2}{\rho\nu}\frac{dp}{dx}\left(\frac{1+\alpha}{\alpha\,\mathrm{Ha}^2+\mathrm{Ha}\operatorname{th}\mathrm{Ha}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{th}\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}}\right). \tag{2.30}$$

Коэффициент сопротивления

$$\lambda=-\frac{dp/dx}{\rho V^2/2a} \tag{2.31}$$

выразится следующим образом:

$$\lambda=\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\alpha\,\mathrm{Ha}+\operatorname{th}\mathrm{Ha}}{1+\alpha}\right)\left(\frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Ha}-\operatorname{th}\mathrm{Ha}}\right). \tag{2.32}$$

Укажем, что когда $\alpha=0$, для коэффициента сопротивления при большом **Ha** из (2.32) получается следующее простое асимптотическое выражение:

$$\lambda=\frac{2\,\mathbf{Ha}}{\mathbf{Re}}, \tag{2.33}$$

а когда $\alpha=\infty$ и **Ha** велико

$$\lambda=2\,\mathbf{N}. \tag{2.34}$$

При течении вне поля коэффициент сопротивления может быть определен также как $\tau_w/\rho\frac{V^2}{2}$, где τ_w — напряжение трения на стенке. В нашем случае эти два определения равнозначны лишь при непроводящих стенках. Если же стенки проводящие, то суммарная по сечению электромагнитная сила, приложенная к жидкости, не равна нулю и, следовательно, градиент давления уравновешивает не только трение на стенке, но и эту электромагнитную силу. Из уравнений (2.20) и (2.28) вытекает, что коэффициент сопротивления трения $\lambda_{\text{тр}}=\tau_w/\rho\frac{V^2}{2}$ равен

$$\lambda_{\text{тр}}=\frac{2}{\mathbf{Re}}\,\frac{\mathbf{Ha}^2\,\mathrm{th}\,\mathbf{Ha}}{\mathbf{Ha}-\mathrm{th}\,\mathbf{Ha}},$$

т. е. совпадает с коэффициентом сопротивления при непроводящих стенках и не зависит ни от проводимости стенок, ни от параметров внешней цепи. Это и естественно, так как профиль скорости также обладает таким свойством.

Формулы (2.29) и (2.32) дают возможность количественно проследить проявление эффекта Гартмана, который в принципе уже был рассмотрен нами в начале гл. I. На рис. 2.2 показаны безразмерные профили скорости, вычисленные при различных значениях числа Гартмана.

При больших значениях **Ha** скорость становится постоянной почти по всему сечению, и лишь вблизи стенок имеются так называемые гартмановские слои с большими градиентами скорости. В первом приближении безразмерная толщина этих слоев пропорциональна $\mathbf{Ha}^{-1}$.

Другое проявление эффекта Гартмана — увеличение коэффициента сопротивления — иллюстрирует рис. 2.3, где показана зависимость коэффициента сопротивления λ, отнесенного к коэффициенту сопротивления вне поля $\lambda_0=6/\mathbf{Re}$, от числа Гартмана при различной проводимости стенок, т. е. при различных значениях α. Здесь видно, что даже при непроводящих стенках ($\alpha=0$) λ увеличивается во много раз уже при $\mathbf{Ha}=10\div20$.

Вернемся сейчас к уравнению (2.23) для магнитного поля. Граничные условия для этого уравнения легко получить из (2.19) и (2.20):

$$b_x^{(1)} = b_x^{(2)}; \quad \sigma_* \frac{db_x^{(1)}}{dy} = \frac{db_x^{(2)}}{dy} \quad \text{при} \quad y = \pm 1,$$

$$b_x^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm\left(1 + \frac{\delta}{a}\right). \tag{2.35}$$

Интегрирование уравнения (2.23) с условиями (2.35) дает

$$b_x = -\frac{dp}{dx}\frac{\mathrm{Re}_m}{\mathrm{N}}\left[\left(\frac{1+\alpha}{\alpha\,\mathrm{Ha} + \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}\right)\frac{\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}\,y}{\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}} - y\right]. \tag{2.36}$$

Из (2.36) с учетом (2.32)—(2.34) следует, что максимальное по сечению относительное индуцированное поле b_x (напомним,

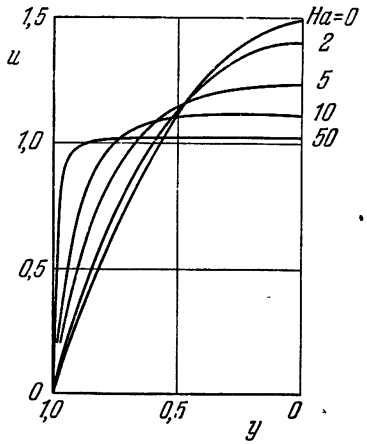


Рис. 2.2. Гартмановские профили скорости.

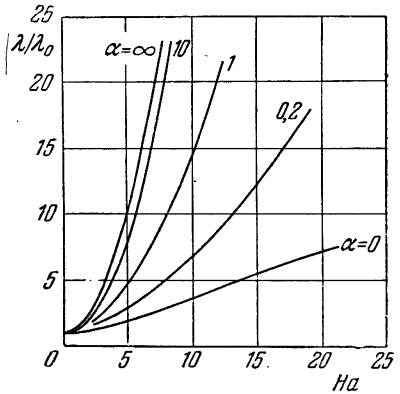


Рис. 2.3. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Гартмана при различной проводимости стенок.

что b_x это отношение индукции индуцированного продольного поля к индукции наложенного извне поперечного поля) при большом Ha пропорционально $\mathrm{Re}_m/\mathrm{Ha}$, когда $\alpha = 0$, и пропорционально Re_m, когда $\alpha = \infty$. Отсюда можно заключить, что если $\mathrm{Re}_m \approx 1$, а $\mathrm{Ha} \gg 1$, то при течении между непроводящими стенками индуцированным магнитным полем можно пренебречь, но если стенки хорошо проводящие или имеют значительную толщину, этого делать нельзя.

§ 4. Течение в прямоугольной трубе

Перейдем теперь к исследованию двумерных течений в трубах прямоугольного сечения. За характерный размер примем полуширину трубы в направлении поля a. Безразмерную ширину трубы в направлении, перпендикулярном полю, обозначим $\beta = \frac{b}{a}$ (рис. 2.4).

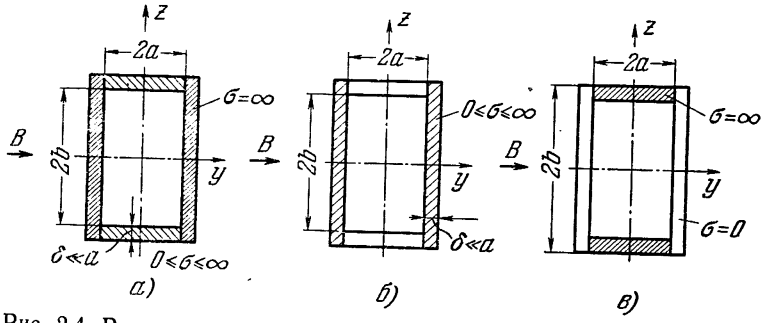


Рис. 2.4. Различные варианты сочетания проводимости стенок трубы прямоугольного сечения.

Попытаемся выяснить основные фактические отличия течения в трубе прямоугольного сечения по сравнению с плоскопараллельным течением.

При плоскопараллельном течении, как мы видели, электрическое поле во всей области движения постоянно. При течении в прямоугольной трубе напряженность электрического поля различна в различных точках сечения.

Далее, магнитогидродинамические пограничные слои имеются теперь не только на стенках, перпендикулярных полю, но и на стенках, параллельных полю. Размерная толщина первых имеет по-прежнему порядок $a \cdot \mathrm{Ha}^{-1}$. Толщина вторых должна быть всегда больше, ибо электрический ток здесь имеет, помимо составляющей в направлении оси z, также составляющую в направлении y, которая с магнитным полем не взаимодействует. Поскольку основное сопротивление для индуцированных токов в трубе с непроводящими стенками представляют тонкие пограничные слои на стенках, перпендикулярных полю [7], то полный ток в пограничном слое на стенке, параллельной полю, имеет такой же порядок, как на стенке, перпендикулярной полю, т. е. $\sigma BVa\mathrm{Ha}^{-1}$, а плотность тока — порядок $\sigma BV\mathrm{Ha}^{-1}$. Если далее принять, что компонента плотности тока в направлении оси z имеет тот же порядок величины, то порядок величины электро-

магнитной силы, действующей на единицу объема, получается равным $\sigma B^2 V \mathrm{Ha}^{-1}$. Приравняв эту силу удельной вязкой силе $\rho\nu V\delta_1^2$, получим оценку для толщины второго пограничного слоя: $\delta_1 \sim a\mathrm{Ha}^{-1/2}$. Как мы увидим ниже, эта оценка подтверждается точными решениями.

Уравнения рассматриваемой здесь задачи запишутся с учетом результатов § 2 так:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u + \mathrm{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - u\right) = \frac{dp}{dx}, \tag{2.37}$$

$$\nabla^2 b_x = -\mathrm{Re}_m \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.38}$$

Поскольку в рассматриваемом случае безразмерная величина $b_y = 1$, то из (2.14) следует, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - u = \frac{1}{\mathrm{Re}_m}\frac{\partial b_x}{\partial y},$$

а поэтому уравнение (2.37) можно переписать так:

$$\nabla^2 u + \frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Re}_m}\frac{\partial b_x}{\partial y} = \mathrm{Re}\frac{dp}{dx}. \tag{2.39}$$

Граничные условия формулируются различным образом в зависимости от сочетания проводимостей стенок трубы. Мы выделим здесь три частных случая, показанных соответственно на рис. 2.4, *а*, *б* и *в*.

а) Стенки, перпендикулярные магнитному полю, идеально проводящие; стенки, параллельные магнитному полю, тонкие с произвольной проводимостью*) [5, 8—10].

Допущение о малой толщине стенок, параллельных полю, необходимо для того, чтобы внутри этих стенок можно было считать распределение магнитного поля линейным. При этом граничные условия принимают вид (при отсутствии внешней цепи)

$$\left.\begin{aligned} u = 0; \quad & \frac{\partial b_x}{\partial y} = 0 && \text{при} \quad y = \pm 1, \\ u = 0; \quad & \frac{\partial b_x}{\partial y} = \pm\frac{1}{\alpha} b_x && \text{при} \quad z = \pm\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

Решение уравнений (2.38), (2.39) может быть найдено разложением скорости и магнитного поля в ряды Фурье. Не приводя здесь довольно громоздкую запись решения, рассмотрим следу-

*) Предполагается, что внешней электрической цепи нет.

ющие из него физические выводы. При достаточно большом числе Ha скорость во всем ядре потока оказывается практически постоянной и лишь вблизи стенок имеются тонкие пограничные

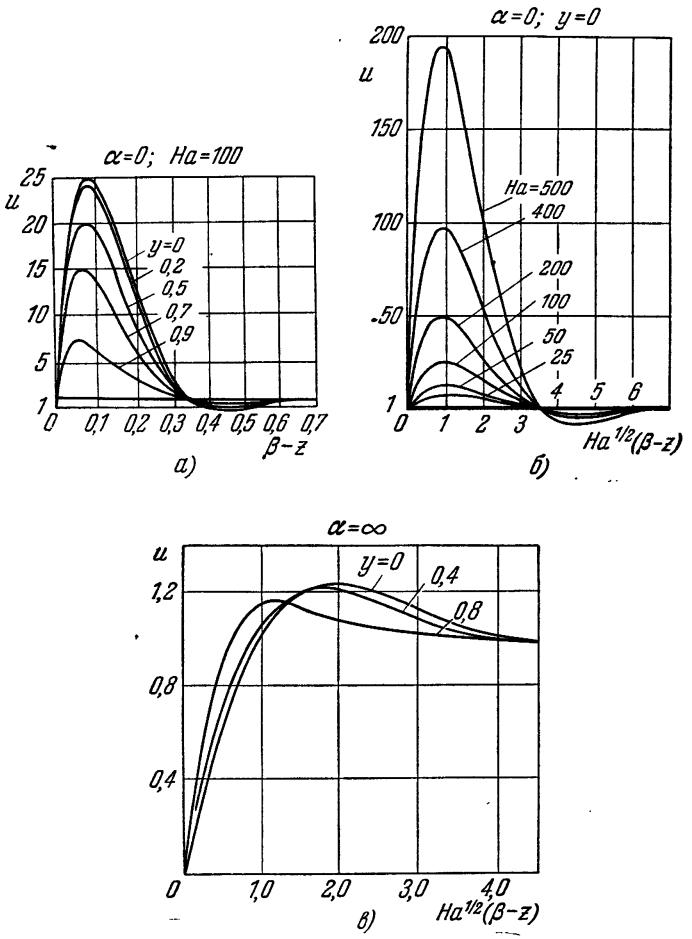


Рис. 2.5. Распределение скоростей течения в прямоугольной трубе вблизи стенки, параллельной магнитному полю.
Оси координат, как на рис. 2.4.

слои. При этом толщина слоя у стенок $y=\pm 1$ пропорциональна Ha^{-1}, тогда как толщина слоя у стенок $y=\pm\beta$ значительно больше и пропорциональна $\mathrm{Ha}^{-1/2}$.

На рис. 2.5 показано распределение скоростей течения вблизи стенок $z=\pm\beta$ при $\alpha=0$ и $\alpha=\infty$. Наиболее примечательно то, что

в обоих случаях скорость в пограничном слое больше, чем в ядре. Особенно ярко этот эффект выражен при $\alpha=0$, т. е. когда стенки, параллельные полю, непроводящие. При этом максимум скорости становится при больших **Ha** равным 0,25 **Ha**.

Существование максимума объясняется тем, что вблизи непроводящих стенок индуцированные токи текут преимущественно в направлении поля, и следовательно, жидкость почти не тормозится магнитным полем. Вблизи границы ядра и пограничного слоя существует также область отрицательных скоростей. Таким образом, здесь мы встречаемся с одним из примеров столь сильного воздействия поля на течение, что картина течения сохраняет мало общего с картиной течения в отсутствие поля. Особенно примечательно, что полученный результат, как мы уже подчеркивали выше, справедлив при любом значении $\mathbf{Re}_m$, в том числе и при сколь угодно малом его значении.

При $\alpha=\infty$ лишь незначительные электрические токи текут около стенок $z=\pm\beta$ по жидкости вдоль поля, и потому описанные эффекты проявляются сравнительно слабо (рис. 2.5).

Имеются экспериментальные данные при $\beta=1{,}52$, которые в принципе согласуются с результатами теории при $\alpha=\infty$ [11]*). К сожалению, в эксперименте весьма трудно реализовать предположения, принятые относительно проводимости стенок трубы при теоретическом решении. Действительно, один из лучших проводников электричества — медь — обладает проводимостью в 50 раз большей, чем ртуть. При таком соотношении проводимостей и технически осуществимых размерах сечения трубы выполнить одновременно условия $\alpha\to\infty$ и $\delta\to 0$ невозможно. В описываемом эксперименте относительная проводимость α равнялась около 10, а относительная толщина δ — около 0,2. Стенки трубы, перпендикулярные магнитному полю, естественно, также не были бесконечно проводящими. Их относительная проводимость составляла около 20. Наконец, необходимо указать, что большая часть измерений скоростей производилась при $\mathbf{Re}=2{,}5\cdot 10^4$ и предельном значении $\mathbf{Ha}=116$, когда течение еще не было полностью ламинаризованным, хотя степень турбулентности и была значительно уменьшена под влиянием магнитного поля (о критериях ламинаризации см. ниже, в гл. III). Лишь небольшая часть измерений относится к $\mathbf{Ha}=174$, когда течение можно было считать полностью ламинаризованным.

На рис. 2.6 показано распределение скоростей на нескольких линиях, параллельных оси z (на линиях, параллельных оси y, скорость в пределах ядра потока почти постоянна). Вблизи

*) Краткие указания на такого рода эксперименты имеются также в работе [24].

стенки, параллельной вектору индукции магнитного поля, скорости течения значительно больше, чем в центре трубы.

На рис. 2.7 экспериментальные результаты при $\mathrm{Ha}=174$, т. е. когда течение было уже полностью ламинаризованным, сопоставлены с теоретическими результатами для трубы, все стенки которой идеально проводящие. Хотя вследствие обсужденных

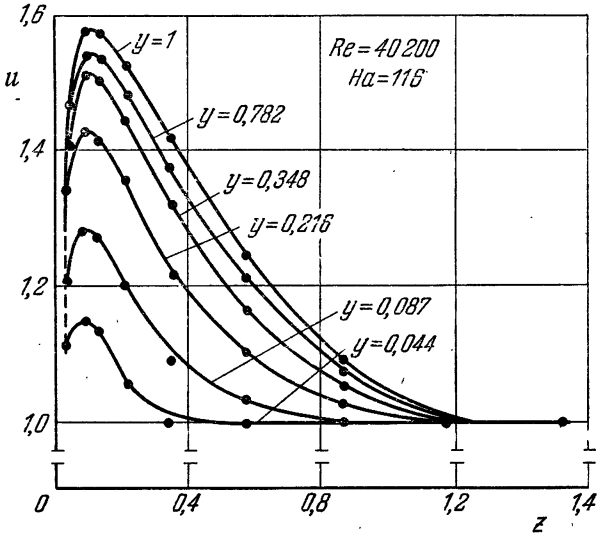


Рис. 2.6. Экспериментальные данные о распределении скоростей в прямоугольной трубе с проводящими стенками.

Ось y направлена вдоль силовой линии, начало координат — на стенке. Все скорости отнесены к значению скорости на оси трубы.

выше различий между условиями опыта и допущениями теории количественного совпадения результатов не получено, в принципиальном отношении они полностью согласуются между собой.

Наглядное представление о картине течения в целом дает рис. 2.8, где показаны изотахи, построенные по экспериментальным данным. Существование потока со столь своеобразным строением при равномерном течении в отсутствие магнитного поля невозможно.

Исследования статического давления показали, что с точностью до погрешности измерений статическое давление постоянно по сечению трубы.

Возвращаясь к теоретическому решению, укажем, что при $\alpha=0$ и $\alpha=\infty$ в случае достаточно больших Ha из точного реше-

ния могут быть получены следующие простые асимптотические выражения для коэффициента сопротивления: при $\alpha=0$

$$\lambda=\frac{2}{\mathrm{Re}}\,\frac{1}{0{,}3/\mathrm{Ha}^{3/2}\beta+1/\mathrm{Ha}^2}, \tag{2.41}$$

при $\alpha=\infty$

$$\lambda=\frac{2}{\mathrm{Re}}\,\frac{\mathrm{Ha}^2}{1-1/\mathrm{Ha}-2{,}4/\mathrm{Ha}^{3/2}\beta}. \tag{2.42}$$

На рис. 2.9 формула (2.41) сопоставлена с результатами, полученными в экспериментах с трубой прямоугольного сечения при $\beta=14$ и относительной проводимости стенок, перпендикулярных магнитному полю, равной около 100 [12]. Экспериментальные значения λ несколько выше теоретических. При больших числах Гартмана это расхождение превышает 10%.

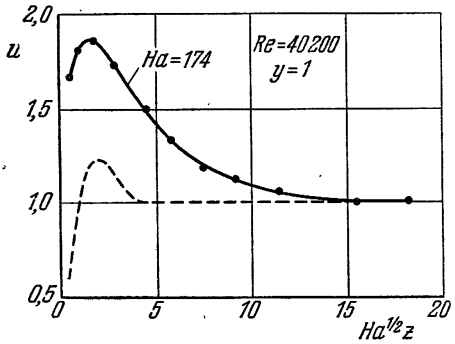


Рис. 2.7. Сопоставление экспериментального профиля скорости с теоретическим, соответствующим трубе с идеально проводящими стенками.

Штриховая — теория, точки — эксперимент. Начало координат — на стенке.

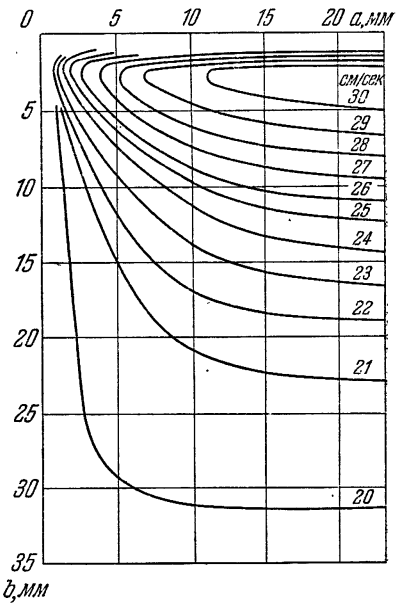


Рис. 2.8. Изотахи, построенные по результатам измерения скоростей в трубе с проводящими стенками.

Изображена одна четверть сечения трубы.

Возможно, что это расхождение обусловлено шероховатостью стенок экспериментальной трубы. Как будет показано ниже (§ 6), при ламинарном течении в поперечном магнитном поле шероховатость стенок может приводить к значительному повышению коэффициента сопротивления.

б) Стенки, параллельные магнитному полю, непроводящие, стенки, перпендикулярные магнитному полю, тонкие с произвольной проводимостью [10—11, 13] *).

В этом случае граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u=0;\quad & \frac{\partial b_x}{\partial y}=\mp\frac{1}{\alpha}b_x \quad \text{при} \quad y=\pm 1,\\ u=0;\quad & b_x=0 \qquad\quad \text{при} \quad z=\pm\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

Решение уравнений (2.38), (2.39) и здесь может быть получено путем разложения скорости и магнитного поля в ряды Фурье.

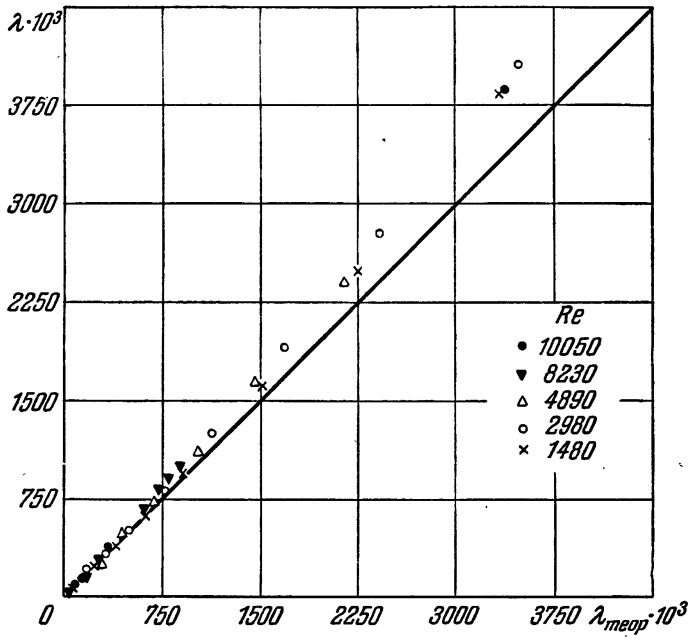


Рис. 2.9. Сопоставление с теорией экспериментальных результатов о коэффициенте сопротивления трубы с проводящими стенками при отношении сторон сечения $\beta=14$.

Очевидно, что при $\alpha=\infty$ мы получим тот же результат, что в п. а) при $\alpha=0$.

Другой предельный случай $\alpha=0$ соответствует трубе, у которой все стенки изолированные.

*) Недавно было опубликовано решение, полученное без ограничения толщины проводящих стенок [14].

Распределение скоростей не имеет в этом случае тех особенностей, которые были описаны в предыдущем пункте этого параграфа. На рис. 2.10 дано сопоставление профилей скорости на линиях $z=0$ и $y=0$, полученных экспериментально в трубе с отношением размеров сторон сечения $\beta=1{,}52$ при $\mathrm{Ha}=174$ [12] и вычисленных, согласно решению Шерклифа, [13] при том же числе Гартмана. На этих рисунках показаны профили безразмерной скорости, отнесенной к средней по сечению, которые не зависят от числа Рейнольдса. Несмотря на то, что в экспериментальной трубе стенки, параллельные

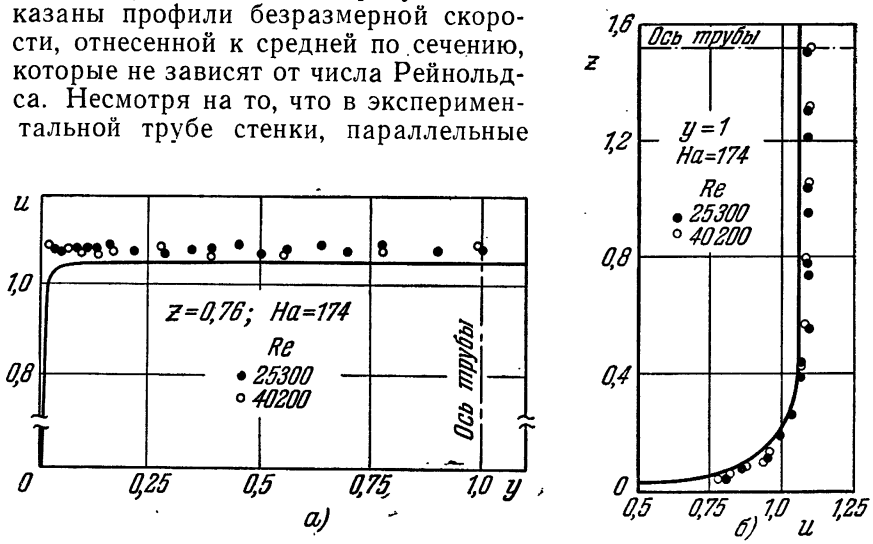


Рис. 2.10. Сопоставление результатов измерения скоростей с теорией Шерклифа для прямоугольной трубы с непроводящими стенками.
Сплошные линии — теория Шерклифа.

магнитному полю, были хорошо проводящими (медь), а теоретическое решение относится к трубе с непроводящими стенками, отклонение экспериментальных данных от теоретических не превышает 3%. Необходимо обратить внимание на то, что экспериментальные результаты получены при $\mathrm{Re}\approx 4\cdot 10^4$, когда в отсутствие поля течение является развитым турбулентным. Хорошее совпадение этих результатов с теорией ламинарных течений позволяет заключить, что при $\mathrm{Ha}=174$ экспериментальный поток был уже полностью ламинаризован магнитным полем и его внутреннее строение не отличалось от строения ламинарного потока.

На рис. 2.11 сопоставлены экспериментальная и теоретическая картины изотах. Хотя вблизи стенки, параллельной магнитному полю, которая, как уже упоминалось, была в экспериментах проводящей, расположение экспериментальных изотах несколько

отличается от теоретического, экспериментальное значение скорости в любой точке сечения отличается от теоретического не более чем на 3—4%. Анализ картины экспериментальных изотах позволяет заключить, что в согласии с теорией толщина градиентного слоя на стенках, параллельных магнитному полю, в $Ha^{1/2}$

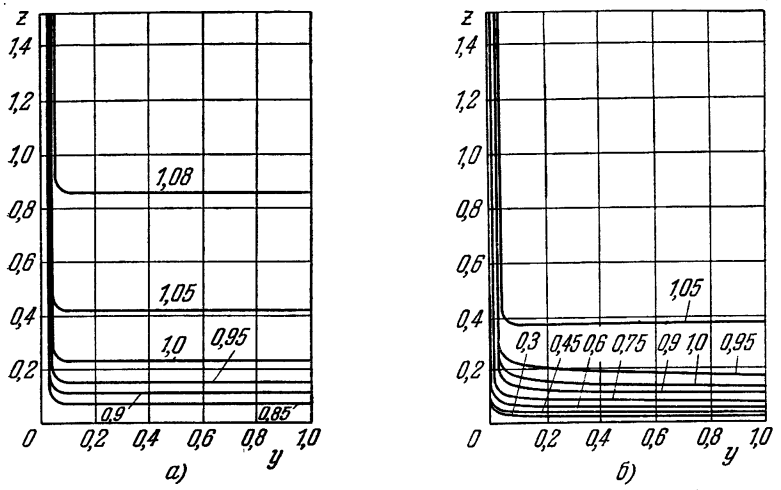


Рис. 2.11. Изотахи в сечении прямоугольной трубы.

а) Эксперимент с трубой, две стенки которой (параллельные полю) были проводящими; $\mathbf{Re}=40\,200$, $\mathbf{Ha}=174$; *б)* теория для трубы с непроводящими стенками $\mathbf{Ha}=174$.

раз больше толщины гартмановских слоев на стенках, перпендикулярных полю. Изменения статического давления по сечению трубы и в этом случае экспериментально уловить не удалось.

Для коэффициента сопротивления трубы прямоугольного сечения с непроводящими стенками получается следующее выражение:

$$\lambda=\frac{\pi^2}{16\,\mathbf{Re}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\left[1-\frac{2\,\mathbf{Ha}_1\,\beta^2(\operatorname{ch}\mathbf{Ha}_1-\operatorname{sh}\mathbf{Ha}_1)}{\pi^2(2n+1)^2\operatorname{sh}\mathbf{Ha}_1}\right]\right\}^{-1}, \tag{2.44}$$

где

$$\mathbf{Ha}_1^2=\mathbf{Ha}^2+(2n+1)^2\frac{\pi^2}{\beta^2}.$$

На рис. 2.12, *а)* и *б)* [11] приводятся рассчитанные по формуле (2.44) кривые, выражающие зависимость величины $\lambda\,\mathbf{Re}$ от числа Гартмана при различных β.

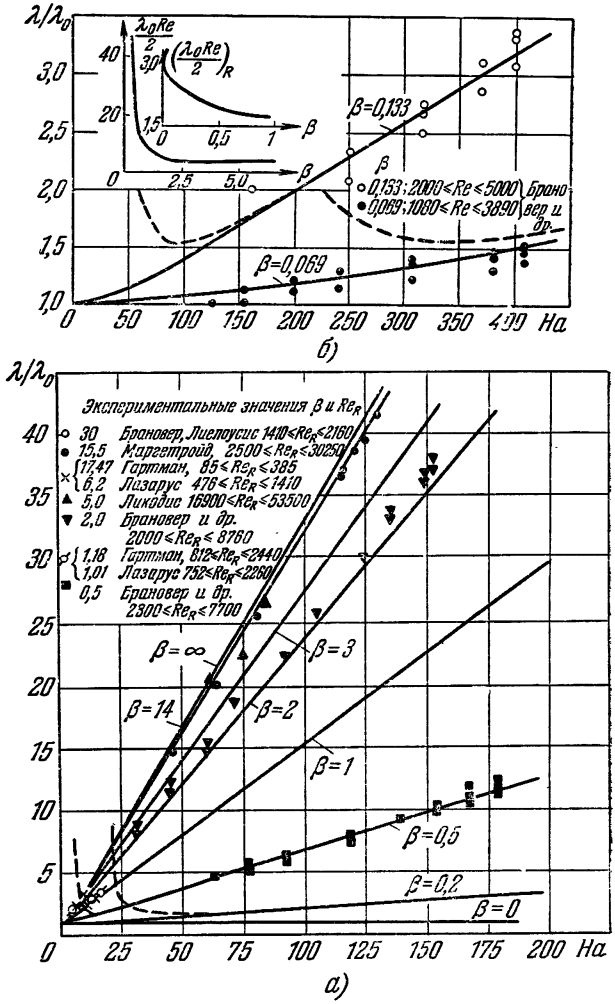


Рис. 2.12. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Гартмана для трубы прямоугольного сечения с непроводящими стенками.

Сплошные линии — теория Шерклифа. Штриховые линии — приближенная формула Шерклифа. $\mathbf{Re}_R$ — число Рейнольдса, при вычислении которого за характерный размер принят гидравлический радиус сечения.

Необходимо обратить внимание на то, что при больших значениях β кривые $\lambda \mathrm{Re} = f(\mathrm{Ha})$, соответствующие различным постоянным значениям β, сравнительно слабо различаются между собой. При малых β, напротив, кривые, построенные даже при весьма близких значениях β, резко расходятся.

На рис. 2.13, *а* показан график зависимости $\lambda \mathrm{Re} = f(\beta)$ при фиксированном значении Ha. Из рассмотрения этого рисунка следует, что при $\beta \geqslant 3$ значения λ отличаются от значений, соответствующих плоскопараллельному течению, не более чем на 6%.

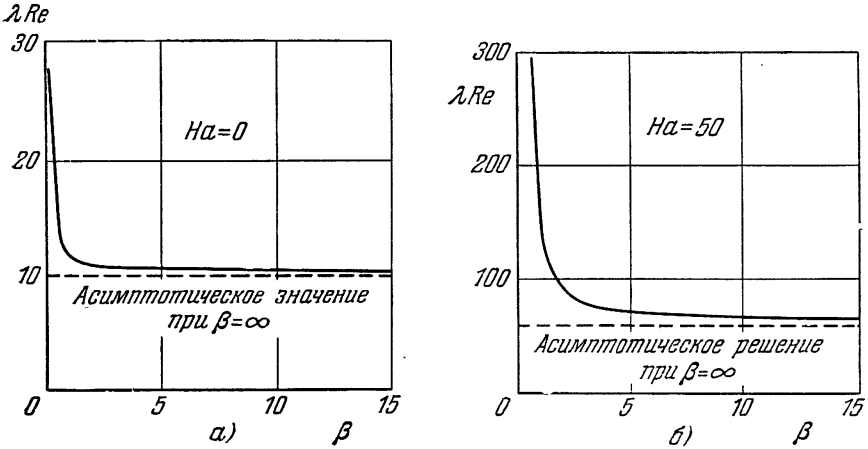


Рис. 2.13. Зависимость коэффициента сопротивления прямоугольной непроводящей трубы от отношения сторон сечения при фиксированном числе Гартмана.

При $\beta < 3$ значения λ изменяются с уменьшением β более резко. Однако вплоть до $\beta \geqslant 1$ отклонение от значения, соответствующего плоскопараллельному течению, остается менее 20%.

На рис. 2.13, *б* приведена аналогичная кривая, относящаяся к течению в отсутствие магнитного поля. В этом случае, для того, чтобы течение можно было считать плоскопараллельным, требуется существенно большее значение β. В самом деле, при $\beta = 3$ значение λ отличается еще от асимптотического значения более чем на 25%.

Мы уделяем здесь столько внимания вопросу о влиянии величины β на коэффициент сопротивления по двум причинам. Во-первых, при постановке экспериментальных исследований часто бывает важным знать, при каком отношении размеров сторон трубы прямоугольного сечения течение в ней можно считать плоскопараллельным. Во-вторых, этот вопрос, как будет показано ниже, имеет важное значение при рассмотрении критериев ус-

тойчивости ламинарного режима течения в трубах прямоугольного сечения.

На рис. 2.12, *а*, *б* нанесены также точки, соответствующие экспериментальным данным, полученным различными авторами в опытах с потоками ртути при $0{,}07 \leqslant \beta \leqslant 30{,}0$ [12, 15—19]. Опыты охватывают широкую область изменения чисел Рейнольдса, и

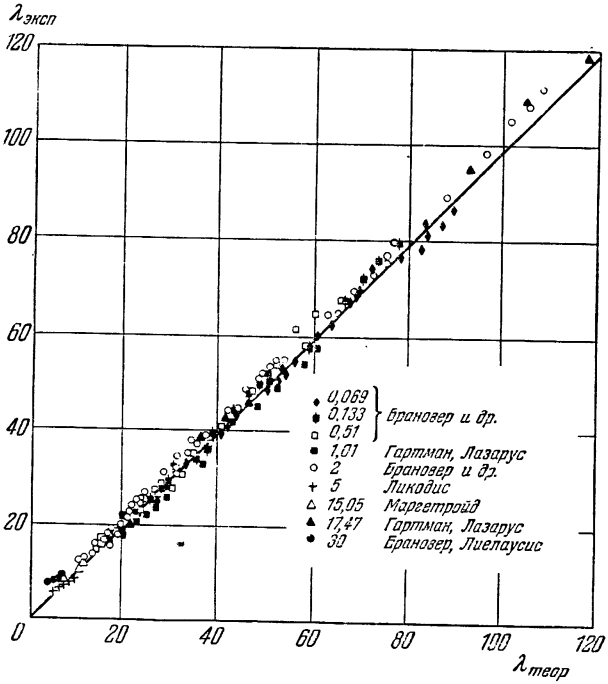


Рис 2.14. Сопоставление экспериментальных данных о коэффициенте сопротивления прямоугольных непроводящих труб с теорией.

значительная часть экспериментальных точек относится к таким течениям, которые в отсутствие магнитного поля были бы развитыми турбулентными течениями. Несмотря на это, все экспериментальные точки группируются около соответствующих теоретических кривых.

Более наглядное представление о соответствии теории и эксперимента дает рис. 2.14. Среднее арифметическое отклонение экспериментального значения $\lambda_{эксп}$ от теоретического — $\lambda_{теор}$ составляет около +2,8%, а среднеквадратичное — около 4,9%.

Наряду с точным решением (2.44) во многих случаях может быть использовано приближенное решение, полученное Шерклиф-

фом [13] путем исследования пограничных слоев, образующихся на стенках, перпендикулярных магнитному полю и параллельных ему.

Это решение может быть записано так:

$$\lambda=\frac{2\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Re}}\left(1-\frac{0{,}852}{\mathrm{Ha}^{1/2}\beta}-\frac{1}{\mathrm{Ha}}\right)^{-1}=\lambda_H\left(1-\frac{0{,}852}{\mathrm{Ha}^{1/2}\beta}-\frac{1}{\mathrm{Ha}}\right)^{-1}. \tag{2.45}$$

При

$$\mathrm{Ha}\,\beta^2>18 \tag{2.46}$$

(2.44) и (2.45) дают, согласно Шерклифу, совпадающие результаты. На рис. 2.12 показаны пунктиром линии, соответствующие формуле (2.45). Можно заметить, что эти кривые сливаются с точными кривыми при значениях Ha в несколько раз меньших, чем следует из (2.46). Это означает, что область применимости приближенной формулы (2.45) значительно шире, чем считает ее автор.

Укажем, что с помощью формулы (2.45) легко вывести условия, при которых течение в прямоугольной трубе мало отличается от плоскопараллельного. В самом деле, полагая, например, $\mathrm{Ha}=50$, получаем $\lambda=\lambda_H\left(0{,}98-\frac{0{,}121}{\beta}\right)^{-1}$. Если $\beta=3$, то λ отличается от λ_H на 6%, как и было получено выше, исходя из результатов точных расчетов.

в) Стенки, перпендикулярные магнитному полю, проводящие, стенки, параллельные магнитному полю, идеально проводящие [20—23]. В этом случае граничные условия следующие:

$$u=0;\quad \frac{\partial b_x}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad y=\pm 1,\quad z=\pm\beta,$$

или

$$u=0;\quad \frac{\partial b_x}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad z=\pm\beta,$$

$$u=0;\quad b_x=C_1 \quad \text{при} \quad y=1,$$

$$u=0;\quad b_x=C_2 \quad \text{при} \quad y=-1,$$

где C_1 и C_2 — постоянные величины, связанные с током, проходящим через единицу длины трубы:

$$I_0=\int_{-1}^{+1} j_z dy=C_1-C_2.$$

Поскольку в этом случае точное решение получить не удается, приходится ограничиваться упрощенным рассмотрением, которое основано на разбиении потока на ядро, в котором скорость считается постоянной, а магнитное поле распределенным по линейному закону, и на пограничные слои толщиной порядка Ha^{-1} на стенках, перпендикулярных полю, и толщиной порядка $\mathrm{Ha}^{-1/2}$ на стенках, параллельных полю. В этих слоях пренебрегается вторыми производными скорости и магнитного поля по касательной по сравнению с теми же производными по нормали. Отдельно приходится рассматривать сложные области в углах поперечного сечения трубы. Все принимаемые допущения тем ближе к истине, чем больше число Гартмана. Напомним, что в описанных выше экспериментах [11, 23], несмотря на высокую электрическую проводимость стенок, параллельных полю, распределение скоростей практически совпало с результатами решения для непроводящей трубы.

Коэффициент сопротивления записывается в виде

$$\lambda=\frac{2\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Re}}\left(1-\frac{0{,}956}{\mathrm{Ha}^{1/2}}\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\mathrm{Ha}}-O\left(\frac{1}{\mathrm{Ha}^{3/2}}\right)\right)^{-1}. \qquad (2.47)$$

Здесь

$$\lambda=\frac{B_0 I_0/2a-dp/dx}{\lambda V^2/2},$$

причем I_0 — ток во внешней цепи (на единицу длины трубы), который следует считать положительным в режиме насоса. При $\beta\geqslant 1$ разница между формулами (2.47) и (2.45) очень невелика. Интегрируя выражение закона Ома по сечению канала, можно найти разность потенциалов между проводящими стенками трубы:

$$-\Delta\varphi=\beta\frac{I_0}{\sigma}+2B_0 V a\beta. \qquad (2.48)$$

В заключение этого параграфа заметим еще следующее. Своеобразные профили скорости, обсуждавшиеся в п. а), являются лишь частным случаем весьма распространенного в магнитной гидродинамике явления, состоящего в том, что течение сосредоточивается в узких слоях и профиль скорости принимает форму дельта-функции. Такие профили имеют место в недавно исследованном случае течения в трубе квадратного сечения, две стенки которой идеально проводящие, а две другие — непроводящие, помещенной в наклонное по отношению к стенкам поперечное магнитное поле [24, 25]. Подобное, в принципе, распределение скорости имеет место и в ряде случаев обтекания тел, которые будут рассмотрены в гл. V.

§ 5. Течение в круглой трубе

С физической точки зрения воздействие магнитного поля на течение в круглой трубе подобно воздействию на течение в трубе квадратного сечения. Здесь, однако, уже нельзя четко разделить области существования гартмановских пограничных слоев и

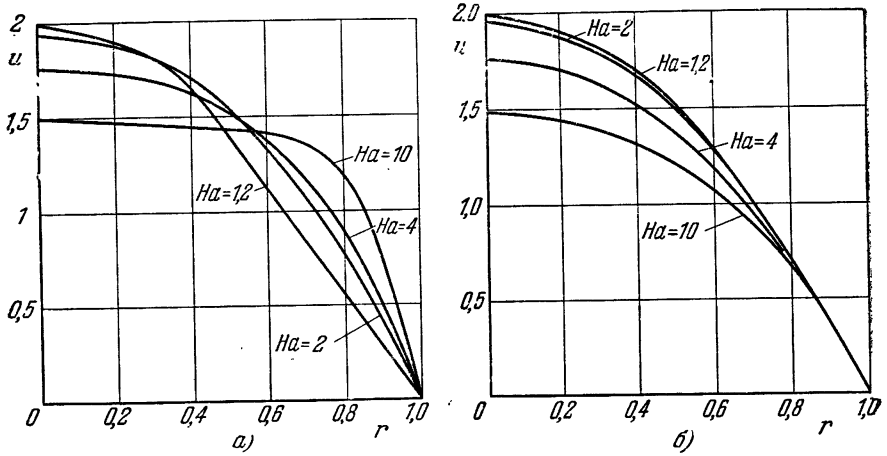


Рис. 2.15. Профили скорости в круглой непроводящей трубе в поперечном магнитном поле:

а) по диаметру, параллельному магнитному полю, *б)* по диаметру, перпендикулярному магнитному полю.

слоев большей толщины, так как если отсчитывать углы от диаметра, расположенного вдоль силовых линий, то максимальное влияние поля на пристеночный слой будет вблизи точки $\theta=0$, и оно будет последовательно ослабевать по мере приближения к точке $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Опуская подробности решения и не приводя запись результатов, которые получаются в виде рядов Фурье, рассмотрим расчетные профили скорости в непроводящей трубе, приведенные на рис. 2.15. В сечении $\theta=0$ (см. рис. 2.13, *а*) отчетливо проявляется эффект Гартмана, в сечении же, перпендикулярном магнитном полю $\theta=\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2.13, *б*), сохраняются профили, близкие к параболическому. Приведем также выражение для коэффициента сопротивления непроводящей трубы,

полученное Голдом [26]:

$$\lambda/\lambda_0=\frac{1}{4}\left\{\frac{-I_1{}^3\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\right)}{\frac{\mathrm{Ha}}{2}I_0\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\right)}+\frac{2}{\mathrm{Ha}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{I_{n-1}\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\right)+I_{n+1}\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\right)}{I_n\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\right)}\right]I_{n-1}\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\right)I_{n+1}\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\right)\right\}^{-1}, \quad (2.49)$$

где I_n — функции Бесселя первого рода мнимого аргумента; $\lambda_0=16/\mathrm{Re}$ — коэффициент сопротивления вне поля. При расчете

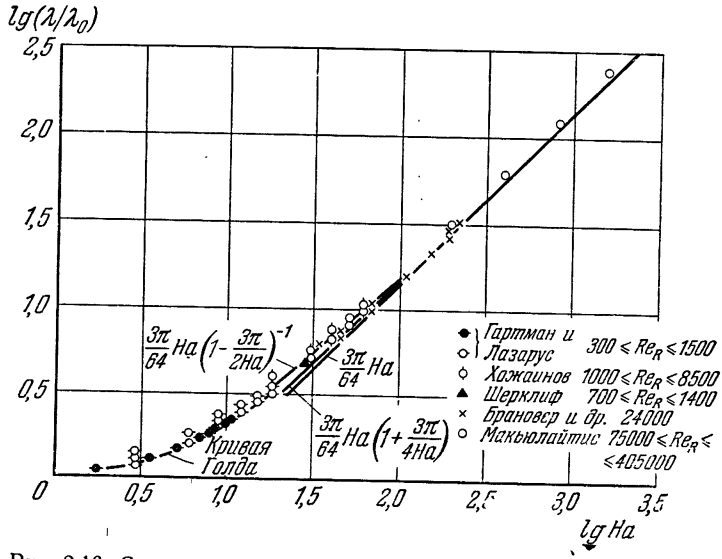


Рис. 2.16. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных о коэффициенте сопротивления круглых непроводящих труб.

всех величин в формуле (2.49) за характерный размер принят радиус трубы. Выражение (2.49), к сожалению, плохо сходится при больших значениях Ha. Сам Голд применяет его только до $\mathrm{Ha}=20$. При $\mathrm{Ha}\gg 1$ Голд предлагает пользоваться следующим асимптотическим выражением:

$$\lambda/\lambda_0=\frac{3\pi\,\mathrm{Ha}}{64}\left(1+\frac{3\pi}{4\,\mathrm{Ha}}\right). \quad (2.50)$$

Приближенное решение Шерклифа [27], основанное на разбиении потока на потенциальное ядро и градиентные пристеночные слои, приводит к аналогичной зависимости

$$\lambda/\lambda_0=\frac{3\pi\,\mathrm{Ha}}{64}\left(1-\frac{3\pi}{2\,\mathrm{Ha}}\right)^{-1}. \qquad (2.50')$$

Сопоставление с экспериментальными данными [16, 28—31] показано на рис. 2.16. Расхождение в общем небольшое, однако примечательно, что почти все экспериментальные значения выше соответствующих значений $\lambda_{теор}$. Соответственно среднеарифметическое расхождение положительно и составляет около 4%. Это относится не только к приближенным решениям, но и к точному решению Голда. Особенно велико положительное отклонение экспериментальных результатов Макьюлайтиса [30], в экспериментах которого были достигнуты наиболее высокие значения числа Гартмана (до 1500). Отклонения эти составляют около +12%. (Приведенное выше среднее отклонение определено без учета данных Макьюлайтиса.) Из приближенных решений лучше соответствует экспериментам решение Шерклифа. При $\mathrm{Ha}>20$ отклонения вычислялись относительно этого решения.

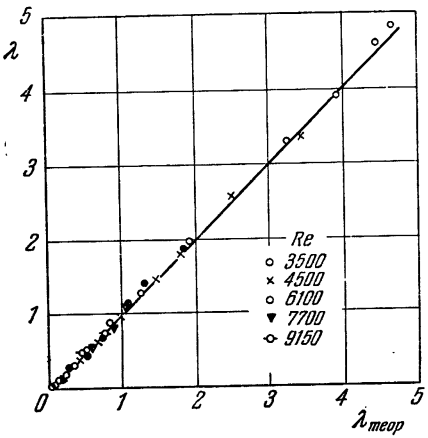


Рис. 2.17. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных о коэффициенте сопротивления круглой проводящей трубы.

При течении в круглой трубе с проводящими стенками, когда $\mathrm{Ha}\gg 1$ формула для коэффициента сопротивления имеет вид (все величины отнесены к радиусу трубы) [5]

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{\pi\,\mathrm{Ha}}{1+2\alpha}\left[\frac{\pi}{\alpha\,\mathrm{Ha}}-\frac{1}{(\alpha\,\mathrm{Ha})^2}+\frac{\pi}{8(\alpha\,\mathrm{Ha})^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\ln\left(4\alpha\,\mathrm{Ha}+\sqrt{16(\alpha\,\mathrm{Ha})^2-1}\right)}{4(\alpha\,\mathrm{Ha})^3\sqrt{16(\alpha\,\mathrm{Ha})^2-1}}\right]. \qquad (2.51)$$

Ее сопоставление с результатами эксперимента [31] с потоком ртути в медной трубе ($\delta=0{,}1$ *см*, $\alpha=12{,}5$) показано на рис. 2.17. И здесь λ несколько выше $\lambda_{теор}$. Среднее отклонение составляет +2,5%.

§ 6. Течение в трубе с шероховатыми стенками в присутствии поперечного магнитного поля

В отсутствие магнитного поля гидравлическое сопротивление при ламинарном режиме течения в шероховатой трубе практически не отличается от сопротивления при течении в гладкой трубе [32].

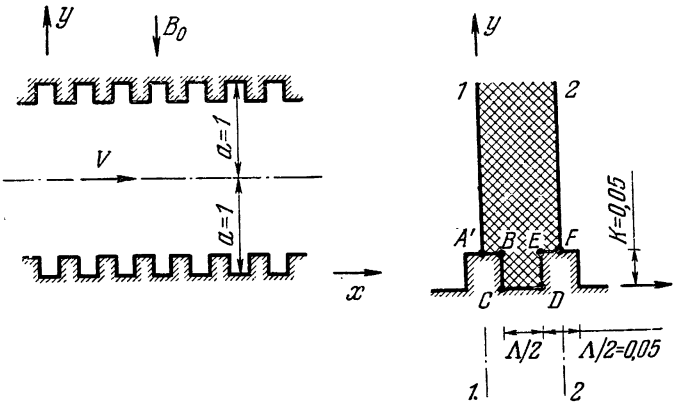


Рис. 2.18. Схема шероховатой трубы, применительно к которой был произведен численный расчет.

В присутствии поперечного магнитного поля картина существенно меняется. Как явствует из исследований обтекания тел электропроводящей жидкостью, наложение поперечного магнитного поля приводит к следующим главным эффектам [33]. Давление в окрестности лобовой части тела повышается, а в окрестности кормовой части — понижается. Это приводит к увеличению сопротивления формы. Одновременно увеличивается градиент скорости на поверхности тела, и это обусловливает повышение сопротивления трения. Наконец, точка отрыва пограничного слоя смещается вниз по течению, а при достаточно большой напряженности магнитного поля течение становится безотрывным. Эти результаты относятся к свободному обтеканию тел. Обтекание тел, расположенных на стенке, имеет специфические особенности, однако можно полагать, что в принципиальном отношении влияние поперечного поля в обоих случаях аналогично. Следовательно, по мере увеличения напряженности поперечного магнитного поля коэффициент сопротивления шероховатой трубы должен увеличиваться.

Для выяснения основных особенностей ламинарного течения в шероховатой трубе в поперечном магнитном поле было прове-

дено численное решение дифференциальных уравнений движения [34].

Рассматривалось плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными непроводящими плоскостями, покрытыми периодически повторяющимися призматическими выступами квадратного сечения (рис. 2.18). Оси выступов предполагались перпендикулярными к направлению течения.

При $\mathbf{Re}_m \ll 1$ безразмерные уравнения, соответствующие этой задаче, принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\nabla^2 u+\mathbf{N}(E_z-u),\\ u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathbf{Re}}\nabla^2 v,\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0. \end{aligned}\right\} \quad (2.52)$$

В этих уравнениях за характерную скорость принята средняя скорость течения, определенная по размеру $2a$ (см. рис. 2.18).

Решение рассматриваемой задачи должно удовлетворять граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u_w=v_w=0 && \text{на твердой поверхности,}\\ &\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=v\big|_{y=1}=0 && \text{на оси симметрии потока.} \end{aligned}\right\} \quad (2.53)$$

Поскольку рассматривается стабилизовавшееся течение, достаточно решить задачу для участка длины трубы, соответствующего одному шагу шероховатости Λ. Это соответствует области D, выделенной на рис. 2.18 штриховкой. На ограничивающих эту область линиях, перпендикулярных твердой поверхности, должны выполняться условия периодичности*):

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\Lambda}, \qquad v\big|_{x=0}=v\big|_{x=\Lambda},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\Lambda}, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=\Lambda}. \quad (2.54)$$

*) Заметим, что условия (2.54) обеспечивают непрерывность всех компонент тензора напряжений.

Наконец, в любом сечении должно удовлетворяться интегральное условие постоянства расхода

$$\int_0^1 u\,dy = 1. \tag{2.55}$$

Для определения напряженности постоянного электрического поля E_z можно воспользоваться тем обстоятельством, что в силу периодичности интеграл электрических токов по области D должен быть равен нулю. Простые вычисления приводят к результату

$$E_z = \frac{1}{1-k/2}. \tag{2.56}$$

Соотношение размеров потока и шероховатости было выбрано, исходя из того, чтобы рассматриваемая задача возможно ближе соответствовала реальным течениям в шероховатых трубах. Прежде всего это касается относительной высоты выступов шероховатости, которая была принята небольшой и равной 0,05. Расстояние между выступами было принято равным ширине выступа и составляло 0,05 относительной единицы. Однако при весьма малой относительной высоте выступов для расчета по способу конечных разностей необходимо брать в окрестности выступов весьма мелкую сетку. Сохранение того же шага во всей области невозможно, так как оказывается недостаточной емкость памяти вычислительной машины и весьма велики затраты машинного времени. Вместе с тем можно полагать, что присутствие выступов на стенке слабо влияет на распределение скоростей течения в ядре потока. Исходя из этого, расчет был проведен в подобласти D, примыкающей к стенке и имеющей высоту $2k$, причем считалось, что в остальной части области D течение соответствует решению Гартмана для течения между гладкими бесконечными поверхностями в поперечном магнитном поле. Справедливость этого первого способа расчета была проверена и подтверждена расчетом по второму способу, когда использовалась сетка с переменным шагом и задача решалась во всей области D.

Системе уравнений (2.52) путем введения функции тока $\left(u = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ придавался вид

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^4\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} - \mathrm{N}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0. \tag{2.57}$$

Граничные условия (2.53), интегральное условие (2.55) и условия периодичности (2.54) заменялись при этом следующими условиями:

$$\psi_w=0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_w=0 \quad \text{на твердой поверхности} \qquad (2.58)$$

(n — координата, отсчитываемая по нормали к твердой поверхности);

$$\psi|_{y=1}=1, \quad \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_{y=1}=0 \quad \text{на оси симметрии потока;} \qquad (2.59)$$

$$\psi|_{x=0}=\psi|_{x=\Lambda}, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=\Lambda}, \quad \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|_{x=\Lambda}. \qquad (2.60)$$

Далее вместо стационарной задачи, которой соответствует уравнение (2.57) и условия (2.58—2.60), рассматривалась нестационарная задача, которой соответствует уравнение

$$\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t}=f(\psi), \qquad (2.61)$$

где $f(\psi)$ — левая часть уравнения (2.57).

В качестве начальных условий при решении этого уравнения принималось распределение функции тока, соответствующее течению Пуазейля при $\mathrm{N}=0$ и течению Гартмана при $\mathrm{N}>0$. Поскольку безразмерная ширина потока в обоих этих случаях равна $2(1-k)$, начальные условия записывались в виде

$$\psi=\frac{3(y-k)(1-k)^2+(1-y)^3-(1-k)^3}{2(1-k)^3} \quad \text{при} \quad \mathrm{N}=0, \qquad (2.62)$$

$$\psi=\frac{\mathrm{Ha}(y-k)\operatorname{ch}\mathrm{Ha}(1-k)+\operatorname{sh}\mathrm{Ha}(1-y)-\operatorname{sh}\mathrm{Ha}(1-k)}{\mathrm{Ha}(1-k)\operatorname{ch}\mathrm{Ha}(1-k)-\operatorname{sh}\mathrm{Ha}(1-k)}$$

$$\text{при} \quad \mathrm{N}>0. \qquad (2.63)$$

Искомое стационарное решение разыскивалось как предел решения нестационарной задачи при стремлении времени к бесконечности. В ходе расчета уравнение (2.63) заменялось следующим приближенным конечноразностным уравнением:

$$\frac{\nabla^2\psi^{k+1}-\nabla^2\psi^k}{\tau}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^4\psi^{k+1}+(1-\alpha)\left[\frac{\partial\psi^k}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi^{k+1}}{\partial y}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\psi^k}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi^{k+1}}{\partial x}\right]+\alpha\left[\frac{\partial\psi^{k+1}}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi^k}{\partial y}-\frac{\partial\psi^{k+1}}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi^k}{\partial x}\right]-\mathrm{N}\frac{\partial^2\psi^{k+1}}{\partial y^2}, \qquad (2.64)$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, ψ^k — значение функции ψ в момент времени $t = k\tau$ (τ — шаг сетки по времени, $k = 1, 2 \ldots$). Значения производных по координатам в уравнении (2.64) заменялись центральными разностями с порядком аппроксимации $h^2 + l^2$, где h — шаг пространственной сетки в направлении оси x, l — шаг в направлении оси y ($x = ih$, где $i = 0, 1, 2 \ldots$ и $y = jl$, где $j = 0, 1, 2 \ldots$).

Мы не воспроизводим здесь громоздкую запись уравнения (2.64) после замены пространственных производных конечными разностями.

Значение α было принято равным нулю, так как пробные расчеты показали, что при других значениях α никакого улучшения сходимости не получается.

Уравнение решалось по способу матричной прогонки [35].

По найденным значениям функции тока в узлах сетки разыскивались линии тока. Далее находились безразмерные скорости.

Для вычисления распределения давления по стенке использовались следующие выражения, которые можно получить из уравнений (2.59) и граничных условий:

$$p = p_0 + \mathbf{N} E_z x + \frac{1}{\mathbf{Re}} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} dx \qquad (2.65)$$

на участках, параллельных оси x, и

$$p = p_0 - \frac{1}{\mathbf{Re}} \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} dy \qquad (2.66)$$

на участках, параллельных оси y.

Наконец вычислялся коэффициент сопротивления, равный сумме коэффициента сопротивления трения и коэффициента сопротивления формы:

$$\lambda = \frac{1}{\Lambda} \left[\frac{2}{\mathbf{Re}} \int \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + 2 \int p \, dy \right]. \qquad (2.67)$$

Здесь первый интеграл берется по участкам твердой стенки, параллельным оси x, второй — по участкам, параллельным оси y.

Расчет производился при нескольких значениях числа Рейнольдса: $\mathbf{Re} = 50, 200, 600$. При каждом значении задавались следующие значения числа Стюарта $\mathbf{N} = 0, 1, 3, 9$.

Контрольный расчет по второму способу был проведен при $\mathbf{Re} = 200$, $\mathbf{N} = 0, 1, 3$ и $\mathbf{Re} = 600$, $\mathbf{N} = 0; 1$. При расчете по этому

способу уравнение (2.57) сводилось к системе двух уравнений введением функции вихря

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\zeta+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\mathrm{N}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0, \tag{2.68}$$

$$\zeta=-\nabla^2\psi.$$

К граничным условиям (2.51)—(2,53) добавлялось условие

$$\zeta|_{y=1}=0. \tag{2.60'}$$

Условия для ζ на твердой границе были получены следующим образом [36]. Функция ψ разлагалась в точке, принадлежащей границе, в ряд Тейлора по координате, перпендикулярной твердой поверхности:

$$\psi_1=\psi_w+\frac{\partial\psi}{\partial n}\Delta n+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}(\Delta n)^2+\cdots$$

На твердой поверхности $\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$, и потому

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}=2\frac{\psi_1-\psi_w}{(\Delta n)^2}.$$

Поскольку

$$\zeta=-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\right)$$

и на твердой поверхности

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\right|_{n=0}=0,$$

окончательно получаем

$$\zeta_w=2\frac{\psi_w-\psi_1}{(\Delta n)^2}. \tag{2.69}$$

Условия периодичности записывались в виде

$$\zeta|_{x=0}=\zeta|_{x=\Lambda}. \tag{2.70}$$

В этом случае получается следующая система конечно-разностных уравнений:

$$\frac{\zeta^{k+1}-\zeta^k}{\tau}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\zeta^{k+1}+\frac{\partial\psi^k}{\partial x}\frac{\partial\zeta^{k+1}}{\partial y}-\frac{\partial\psi^k}{\partial y}\frac{\partial\zeta^{k+1}}{\partial x}+\mathrm{N}\frac{\partial^2\psi^{k+1}}{\partial y^2}$$

$$\zeta^{k+1}=-\nabla^2\psi^{k+1}. \tag{2.71}$$

Дальнейший расчет был подобен расчету по первому способу. Отличие состояло лишь в том, что уравнения (2.71) решались в выемке и в остальной части области отдельно. Полученные решения сшивались на границе этих частей области течения.

Результаты расчета по обоим способам практически совпали. Во всяком случае разница в полученном значении скорости течения нигде не превышала 5%. На расстоянии k от вершины выступа шероховатости распределение скорости течения, как и предполагалось, не отличается практически от гартмановского. Сказанное иллюстрирует рис. 2.19.

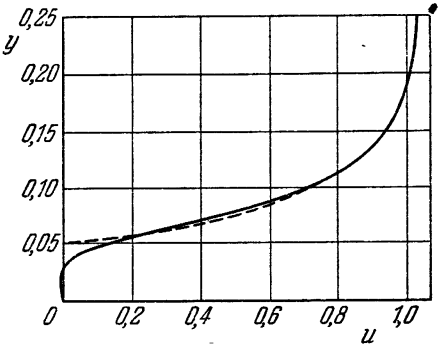


Рис. 2.19. Профили скорости над выступом (штриховая линия) и над впадиной (сплошная линия). Пунктирная линия совпадает с профилем Гартмана.

Заметим, что безразмерные профили скорости при постоянном числе Гартмана не зависят от числа Рейнольдса. Так, профили, показанные на рис. 2.19, были получены при $\mathbf{Ha}=24{,}5$ и двух сильно различающихся числах Рейнольдса $\mathbf{Re}=200$ и $\mathbf{Re}=600$.

Совпадение результатов обоих способов расчета позволяет нам не делать различия между данными, полученными первым и вторым способом расчета.

На рис. 2.20 показана картина линий тока в выемке между элементами шероховатости и в ближайшей окрестности при $\mathbf{Re}=200$ и $\mathbf{N}=0, 3, 9$. При $\mathbf{N}=0$ течение выше уровня выступов почти не возмущено присутствием шероховатости. После наложения магнитного поля линии тока основного течения прогибаются, проникая в глубь выемки тем глубже, чем больше число $\mathbf{N}$. Благодаря этому сокращается объем вихря в выемке. Нетрудно усмотреть в этом аналогию со стремлением течения к безотрывному при обтекании тела в поперечном магнитном поле (гл. IX). Однако при максимальном расчетном значении числа Стюарта $\mathbf{N}=9$ отрыв потока еще сохраняется.

Интенсивность вихря с увеличением числа $\mathbf{N}$ увеличивается. Течение в выемке становится асимметричным. Градиент скорости вблизи твердой поверхности увеличивается.

Распределение давления по лобовой и кормовой частям выступа при $\mathbf{N}=0$ и $\mathbf{N}=9$ сопоставлено на рис. 2.21. Разность интегралов давления по лобовой и кормовой частям выступа во втором случае значительно больше чем в первом. Эта разность и

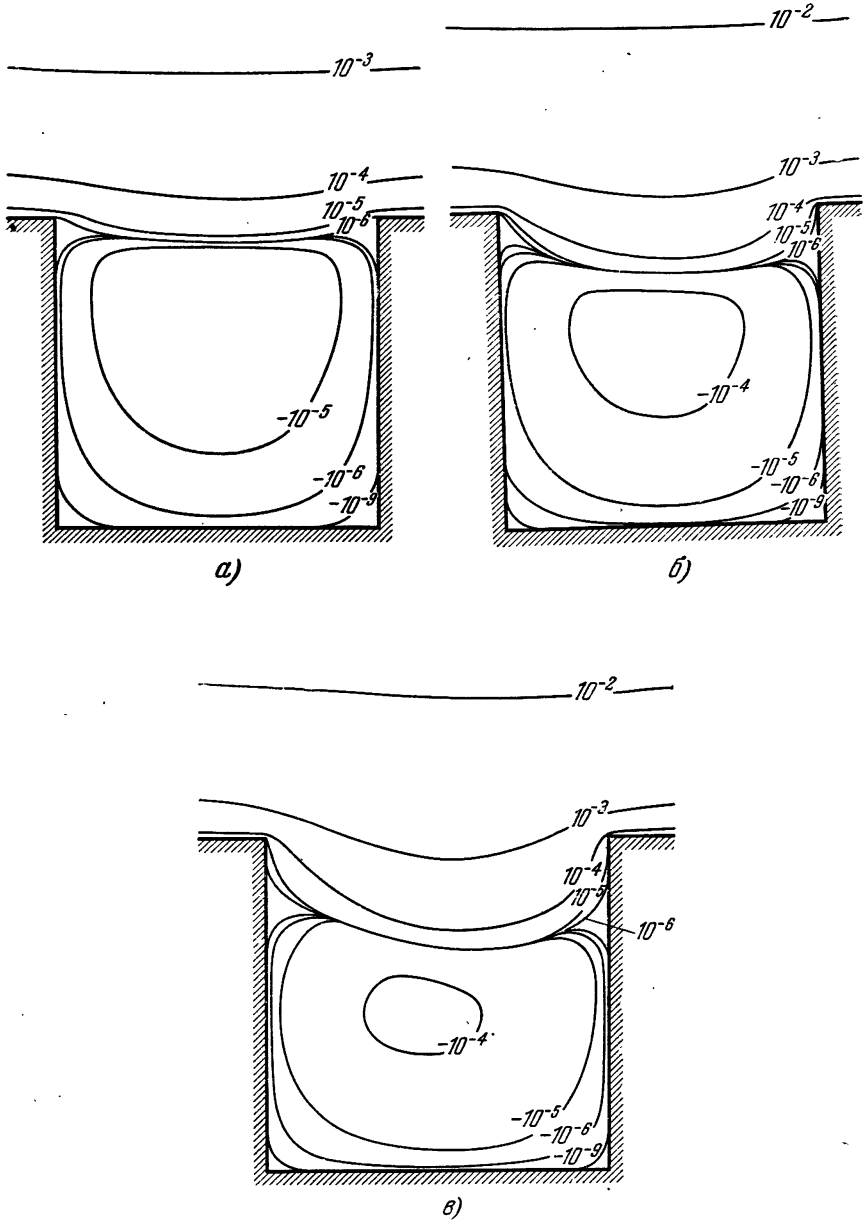


Рис. 2.20. Картина линий тока в выемке между элементами шероховатости при $Re=200$. *а*) $N=0$, *б*) $N=3$, *в*) $N=9$.

представляет собою силу сопротивления формы отдельного выступа.

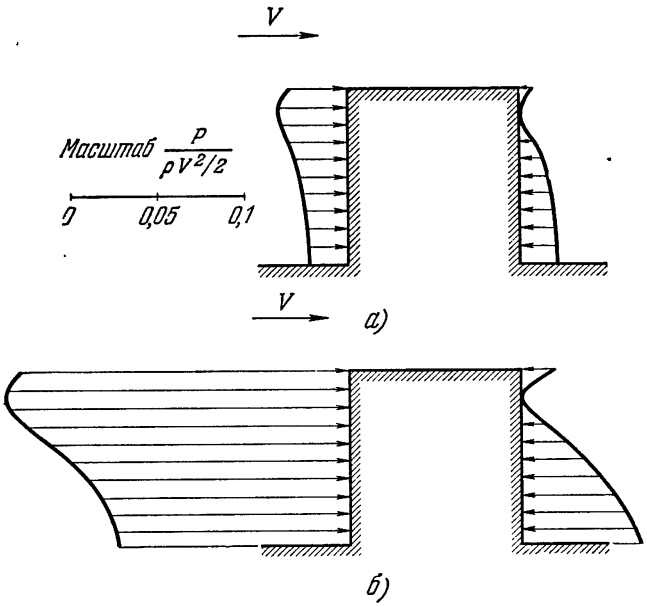


Рис. 2.21. Распределение давления по поверхности выступа шероховатости: *а*) N=0, *б*) N=9.

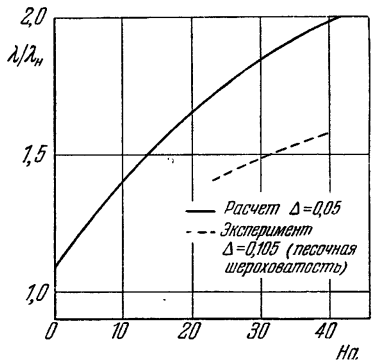


Рис. 2.22. Зависимость коэффициента сопротивления шероховатой трубы, отнесенного к коэффициенту сопротивления гладкой трубы, от числа Гартмана.

О зависимости полного коэффициента сопротивления от числа Гартмана можно судить по графику на рис. 2.22. По

вертикальной оси на этом графике отложено значение отношения коэффициентов сопротивления шероховатой трубы λ к коэффициенту гладкой трубы λ_H, вычисленному по Гартману. Коэффициенты рассчитаны при $\mathbf{Re}=200$. В таких координатах результаты расчета дают возможность непосредственно судить о том, насколько резче возрастает в магнитном поле коэффициент сопротивления шероховатой трубы, чем гладкой.

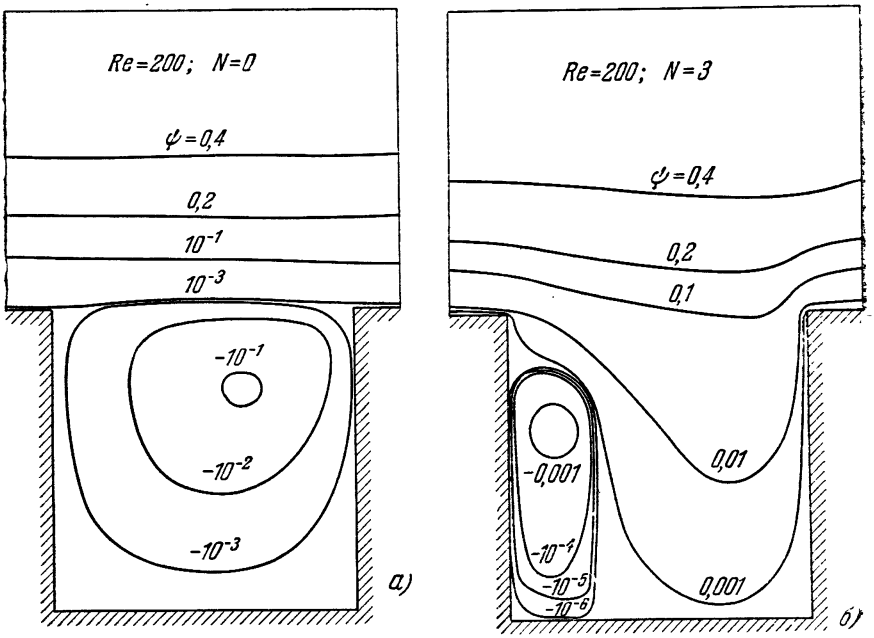


Рис. 2.23. Картина линий тока при обтекании крупных выступов на стенке при $\mathbf{Re}=200$. *а*) $\mathbf{N}=0$, *б*) $\mathbf{N}=3$.

На том же рисунке показана аналогичная зависимость, полученная экспериментально при течении ртути в трубе прямоугольного сечения с песочной шероховатостью [37]. Относительная высота шероховатости в опытах составляла 0,105, число Рейнольдса менялось от 300 до 600. При столь большом различии в виде и размерах шероховатости в опытах и в расчете нет оснований производить количественное сопоставление данных о коэффициенте сопротивления. Важно, однако, что в обоих случаях λ/λ_H увеличивается с увеличением числа Гартмана. Интересно, что экспериментальные значения λ/λ_H, полученные при большей относительной шероховатости, ниже теоретических. Это объяс-

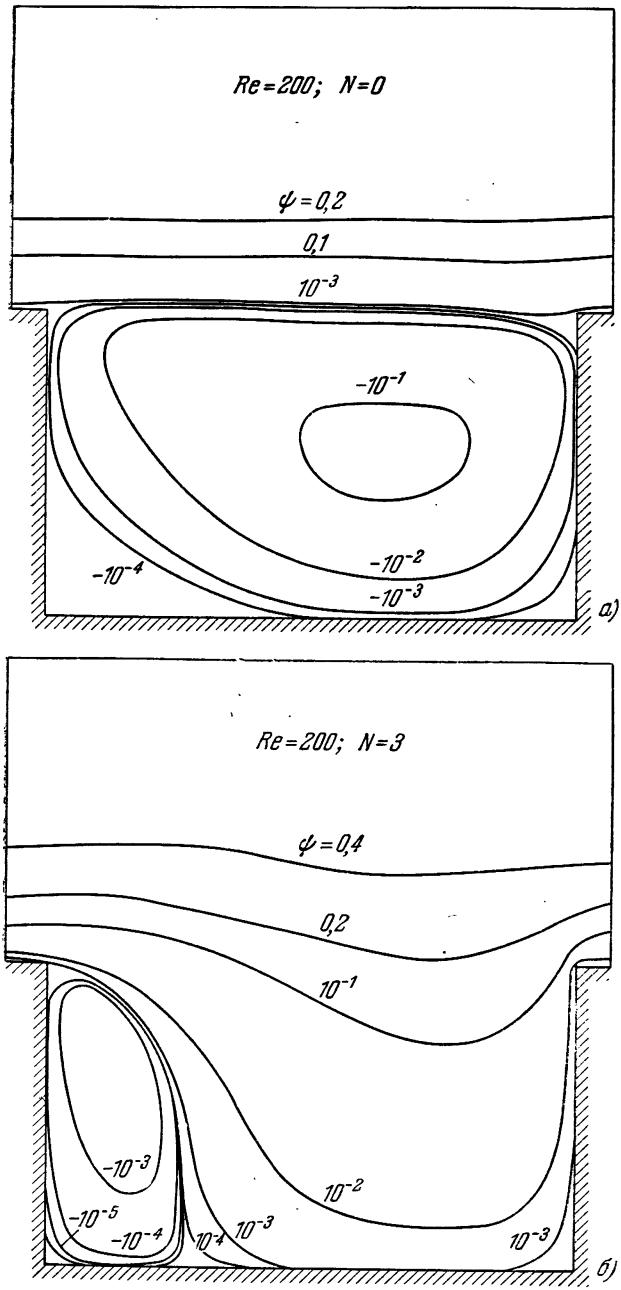


Рис. 2.24. Картина линий тока при обтекании выступов, редко расположенных на стенке при $Re=200$. *а*) $N=0$, *б*) $N=3$.

няется тем, что в экспериментах шероховатость состояла из пространственных элементов, а в расчете — из плоских. В специальных экспериментальных исследованиях обтекания тел в присутствии поперечного магнитного поля (гл. IX) получен аналогичный результат: увеличение коэффициента сопротивления за счет магнитного поля при обтекании бесконечного цилиндра приблизительно в три раза больше, чем при обтекании шара [33, 38].

Интересно рассмотреть, как проявляются описанные в этом параграфе эффекты при несколько иных геометрических условиях. На рис. 2.23 показаны результаты расчета в случае, когда выступы весьма крупные — их высота равна $a/2$.

Расчет этот произведен по первому из двух способов, описанных в этом параграфе. Тем же способом была рассчитана другая задача, в которой высота выступов также равнялась $a/2$, но ширина их составляла лишь $1/16a$, в то время как шаг большой и равен a. Результаты этих расчетов даны на рис. 2.24.

Как на рис. 2.23, так и на рис. 2.24 степень проникновения основного течения во впадину значительно больше, чем в случае мелких выступов, рассмотренном выше (рис. 2.20).

§ 7. Некоторые замечания о тепловой задаче при магнитогидродинамическом ламинарном течении расплавленного металла в трубе

До сих пор мы ограничивались исключительно гидродинамической задачей. Однако в работе большинства технических устройств с расплавленным металлом явления теплообмена играют исключительно важную роль. Более того, часто знание гидродинамических особенностей течения нужно именно для расчета тепловых явлений. Но поскольку эта книга посвящена рассмотрению главным образом гидродинамических задач, мы укажем здесь лишь, каковы главные физические особенности теплообмена в присутствии магнитного поля.

При стационарном плоскопараллельном течении в поперечном магнитном поле уравнение переноса тепла отличается от соответствующего уравнения при течении вне поля лишь членом, учитывающим выделение джоулева тепла. Для жидких металлов этим членом обычно пренебречь нельзя. Он, конечно, особенно существен, когда имеется внешний ток или когда стенки трубы проводящие и индуцированные токи значительны.

Выделением тепла за счет работы сил вязкости часто можно пренебречь, однако нужно иметь в виду, что при больших числах Гартмана тонкий пристеночный слой с очень большими гра-

диентами скорости генерирует одинаковые по порядку величины количества теплоты путем вязкой и джоулевой диссипации.

Влияние магнитного поля на процесс переноса тепла осуществляется через посредство изменения профиля скорости. Увеличение градиента скорости вблизи стенки обусловливает повышение интенсивности теплообмена. Известно, что в жидких средах с малым числом Прандтля, которыми являются жидкие металлы, влияние изменения профиля скорости на теплопередачу вуалируется очень большой молекулярной теплопроводностью. Все же соответствующие расчеты [39] показывают, что при умеренных значениях числа Гартмана теплообмен при течении

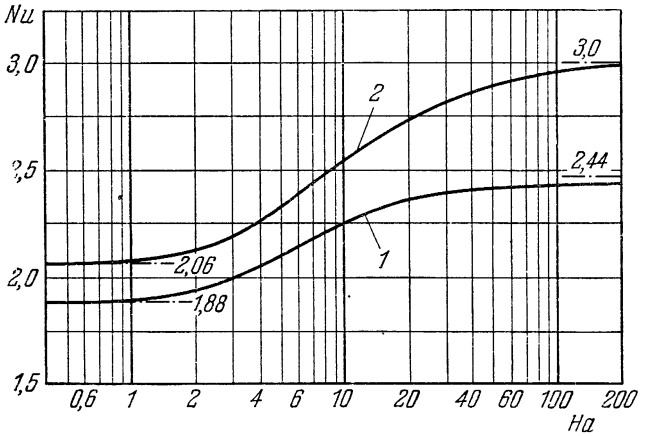


Рис. 2.25. Зависимость числа Нуссельта от числа Гартмана при плоскопараллельном течении в поперечном магнитном поле.

1 — граничные условия 1-го рода (постоянная температура стенки), *2* — граничные условия 2-го рода (постоянный тепловой поток через стенку).

кидкого металла в поперечном магнитном поле может существенно увеличиваться по сравнению с течением вне поля. Однако по мере дальнейшего увеличения числа Гартмана увеличение теплообмена постепенно замедляется, а затем прекращается вовсе. Наступает своего рода «насыщение», когда увеличение числа Гартмана не изменяет значения числа Нуссельта. Сказанное иллюстрирует рис. 2.25, заимствованный из работы [40]. Напомним, что одновременно с этим коэффициент сопротивления монотонно увеличивается пропорционально числу Гартмана.

Ограничиваясь здесь этими весьма краткими сведениями, укажем, что различные аспекты вопроса о теплообмене при ламинарном магнитогидродинамическом течении рассмотрены в работах [39—45] и излагаются также в подробном обзоре [46].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hunt J. C. R., A uniqueness theorem for magnetohydrodynamic duct flows, Proc. Cambr. Phil. Soc. **65**, 319 (1969).
2. Регирер С. А., О течении электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля, ПММ **24**, 3, 541 (1960).
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, Физматгиз, Москва, 1962.
4. Hartman J., Hg-Dynamics. I, Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogenous magnetic field, Det. Kgl. Danske Videnskab. Selskab. (Math.-fys. Medd.) **15**, 6 (1937).
5. Chang C. C., Lundgren T. S., Duct flow in magnetohydrodynamics, ZAMP **12**, 2, 100 (1961).
6. Chang C. C., Yen Y. T., Magnetodynamic channel flow as influenced by wall conductance, ZAMP **13**, 3, 266 (1962).
7. Шерклиф Дж., Теория электромагнитного измерения расхода, «Мир», Москва, 1965.
8. Уфлянд Я. С., Установившееся течение электропроводной жидкости в прямоугольном канале при наличии поперечного магнитного поля, ЖТФ **30**, 10, 1256 (1960).
9. Lungren T. S., Atabek B. H., Chang C. C., Transient magnetohydrodynamic duct flow, Phys. Fluids **4**, 8, 106 (1961).
10. Hunt J. C., Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts, J. Fluid. Mech. **21**, 4, 577 (1965).
11. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Экспериментальное исследование распределения скоростей при течении проводящей жидкости в трубах прямоугольного сечения, находящихся в поперечном магнитном поле, Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 79 (1968).
12. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Течение ртути в поперечном магнитном поле в трубах с непроводящими и проводящими стенками, Магнитная гидродинамика, № 1, 154 (1967).
13. Shercliff J. A., Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields, Proc. Cambr. Phil. Soc. **49**, 1, 136 (1953).
14. Sloan D. M., Smith P., Magnetohydrodynamic flow in a rectangular pipe between conducting plates, ZAMM **46**, 7, 439 (1966).
15. Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А., Об особенностях влияния поперечного магнитного поля на турбулентные течения жидкого металла при различных числах Рейнольдса. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики» 3, Изд. АН ЛССР, Рига (1963), 59.
16. Hartman J., Lazarus F., Hg-Dynamics. II, Det. Kgl. Danske Videnskab. Selskab. (Math.-fys. Medd.) **15**, 7 (1937).
17. Murgatroyd W., Experiments on magnetohydrodynamic channel flow, Phil. Mag. **44**, 1348 (1953).
18. Ликодис П. С., Экспериментальные исследования процессов переноса в турбулентном потоке проводящей среды в присутствии магнитного поля. Международный симпозиум по свойствам и применению низкотемпературной плазмы, М., 1965.
19. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Щербинин Э. В., Турбулентное течение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, Магнитная гидродинамика, № 4, 78 (1966).

20. Гринберг Г. А., Об установившемся течении проводящей жидкости по находящейся во внешнем магнитном поле прямоугольной трубе с двумя проводящими и двумя непроводящими стенками. ДАН СССР, **141**, 2, 230 (1961).
21. Гринберг Г. А., Об установившемся течении проводящей жидкости в прямоугольной трубе с двумя непроводящими стенками и двумя проводящими параллельными магнитному полю, ПММ **25**, 6, 1024 (1968).
22. Гринберг Г. А., О некоторых случаях течения проводящей жидкости по трубам прямоугольного сечения, находящимся в магнитном поле, ПММ **26**, 1, 80 (1962).
23. Hunt J. C., Stuartson K., Magnetohydrodynamic flow in rectunglar ducts, II, J. Fluid Mech. **23**, 3, 563 (1965).
24. Шерклиф Дж. А., Исследования по магнитной гидродинамике и электромагнитному измерению расхода, проводимые в Уорвикском университете (Англия), Магнитная гидродинамика, № 4, 17 (1967).
25. Куликовский А. Т., О медленных стационарных течениях проводящей жидкости при больших числах Гартмана. Изв. АН СССР, сер. «Механика жидкости и газа», № 2, 3 (1968).
26. Gold R. R., Magnetohydrodynamic pipe flow. Part I., J. Fluid Mech. **13**, 4, 505 (1962).
27. Shercliff J. A., Magnetohydrodynamic pipe flow. Part II. High Hartman number **13**, 4, 513 (1962).
28. Shercliff J. A., The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic fields. J. Fluid Mech. **1**, 4, 644 (1956).
29. Хожаинов А. И., Турбулентное течение жидкого металла в магнитогидродинамических каналах круглого сечения, Журнал технической физики **36**, 1, 147 (1965).
30. Maciulaitis A., Loeffler A. L., Ir., Calcanes P. J. Experimental investigation of MHD-flows through circular pipes at high Hartmann and Reynolds numbers, International Symposium on magnetohydrodynamic power generation, Salzburg, SM — 74/195 (1966).
31. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Течение проводящей жидкости в круглых трубах в поперечном магнитном поле, Изв. АН ЛССР, сер. физико-технических наук, № 3, 55 (1967).
32. Nikuradse J., Strömungsgesetze in rauhen Röhren, VDI-Forschungsheft, 361 (1933).
33. Цинобер А. Б., Магнитогидродинамическое обтекание тел, «Зинатне», Рига, 1970.
34. Брановер Г. Г., Витолиньш Г. Г., Дукуре Р. К., Золберга Р. П., Калис Г. Э., Цинобер А. Б., Численный расчет течения электропроводящей жидкости между шероховатыми плоскостями в поперечном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 3, 105 (1967).
35. Березин И. С., Жидков И. Н., Методы вычислений, Физматгиз, Москва, 1962.
36. Том А., Эйплт С., Числовые расчеты полей в физике и технике, ИЛ, Москва, 1964.
37. Дукуре Р. К., Влияние относительной шероховатости на магнитогидродинамическое течение в прямоугольных трубах, Магнитная гидродинамика, № 2, 109 (1966).
38. Цинобер А. Б., Вопросы влияния магнитного поля на обтекание тел. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики», 3. Изд. АН ЛССР, Рига (1963), 49.
39. Зигель Р., Влияние магнитного поля на конвективную теплоотдачу в канале, образованном параллельными пластинами, Механика, № 3, 65 (1959).

40. Блум Э. Я., Влияние электромагнитных полей на теплообмен проводящих жидкостей в каналах, Автореферат диссертации, Рига, 1967.
41. Михайлов Ю. А., Озол Р. Я., Теплообмен в поперечном однородном магнитном поле, Изв. АН ЛССР, сер. физ. и техн. наук, № 2, 19 (1965).
42. Nigam S. D., Singh S. N., Heat transfer by laminar flow between parallel plates under the acting of transverse magnetic field, J. of Mech. and Appl., Mathematics, **13**, 85 (1960).
43. Perlmutter M., Siegel R., Heat transfer to an electrically conducting fluid flowing in a channel with a transverse magnetic field, NASA TN, D-875 (1961).
44. Блум Э. Я., Цепуре Н. Я., Развитие температурного поля гартмановского течения, Изв. АН ЛССР, сер. физ. и техн. наук, № 5, 48 (1966).
45. Генин Л. Г., Подшибякин Л. К., Влияние электрического и магнитного полей на теплообмен при ламинарном течении жидкости в плоском канале, Теплофизика высоких температур **4**, № 3, 369 (1966).
46. Ромиг М. Ф., Влияние электрического и магнитного полей на теплообмен в электропроводящих жидкостях, В сб. «Современные проблемы теплообмена», «Энергия», Москва—Ленинград (1966), 5.

ГЛАВА III

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ И ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1. Воздействие магнитного поля на возмущения течения

Одним из наиболее существенных эффектов, обусловливаемых магнитным полем, является повышение гидродинамической устойчивости течения. Принципиальная возможность получения устойчивого ламинарного течения при сколь угодно больших числах Рейнольдса представляется весьма заманчивой с точки зрения приложений. Это явление очень интересно и в другом аспекте: накладывая магнитное поле на турбулентное течение, мы имеем редкую возможность эффективно воздействовать извне на структуру турбулентности, и, следовательно, можно надеяться, что таким путем будут получены данные, проливающие новый свет на проблему турбулентности в целом.

В общем случае магнитное поле влияет на устойчивость течения двояким путем. С одной стороны, присутствие поля изменяет баланс энергии любого случайного возмущения. Магнитное поле обусловливает диссипацию энергии индуцированными токами, т. е. джоулеву диссипацию, которая приводит к более быстрому затуханию возмущения, чем в случае, когда имеется лишь вязкая диссипация. Таким образом, непосредственное взаимодействие поля с возмущениями течения всегда приводит к повышению устойчивости течения. С другой стороны, магнитное поле может взаимодействовать и с осредненным стационарным течением. При этом влияние на устойчивость происходит через посредство изменения профиля осредненной скорости течения. Это влияние может оказаться намного существеннее, чем непосредственное воздействие на возмущения, причем изменение профиля осредненной скорости может приводить не только к повышению, но и к понижению устойчивости, как, например, при воздействии поперечного магнитного поля на течение Куэтта.

Для того чтобы получить общее представление о взаимодействии магнитного поля с турбулентными возмущениями, произведем оценку сил, действующих на некоторый объем жидкости, имеющий пульсацию скорости u_l (в этом параграфе для упрощения записи формул штрихи при обозначениях пульсаций

опущены), перпендикулярную магнитному полю, и характерный размер l. Силы будем вычислять на единицу длины в направлении u_l. Тогда тормозящая электромагнитная сила, действующая на пульсационный объем $F_{эм} \sim \sigma B^2 u_l l$. Вязкая сила $F_в$ имеет порядок $\rho\nu u_l l^{-1}$. Наконец, сила инерции $F_{ин} \sim \rho u_l^2$. В реальной жидкости всегда присутствуют силы вязкости, которые обусловливают затухание случайных возмущений и устойчивость течения (до некоторых пределов). Естественно поэтому, оценивая влияние электромагнитных сил на устойчивость течения, сравнивать их с силами вязкости. Отсюда можно получить, что критерием, определяющим влияние магнитного поля на затухание возмущения, является число Гартмана, вычисленное по размеру возмущения:

$$\frac{F_{эм}}{F_в} = \frac{\sigma B^2 l^2}{\rho\nu} = \mathrm{Ha}_l^2. \tag{3.1}$$

Следовательно, относительная роль электромагнитных сил тем больше, чем крупнее возмущение. Известно, что в отсутствие магнитного поля обусловленный вязкой диссипацией минимальный масштаб турбулентности, который еще может существовать при данных скорости и размере основного течения, так называемый «внутренний» масштаб турбулентности, может быть на основании анализа размерностей выражен следующим образом [1]*):

$$l_i \sim \frac{L}{\mathrm{Re}^{3/4}}, \tag{3.2}$$

где L — размер основного течения.

Аналогично при течении в присутствии магнитного поля можно вычислить «внешний» масштаб турбулентности l_e, т. е. такой самый крупный масштаб, существование которого еще допускается электромагнитными силами. Понятно, что речь здесь идет не о *затухающей* под влиянием магнитного поля турбулентности, а о турбулентности, *генерируемой* в присутствии магнитного поля. Для возмущения такого масштаба должны быть величинами одного порядка электромагнитные силы и силы инерции, откуда следует, что число Стюарта, вычисленное по размеру и скорости возмущения, должно иметь порядок единицы:

$$\frac{F_{эм}}{F_{ин}} \sim \frac{\sigma B^2 l_e}{\rho u_e} = \mathrm{N}_e \sim 1. \tag{3.3}$$

*) Здесь и далее для грубых оценок используются результаты, справедливые, вообще говоря, при однородной изотропной турбулентности.

Из (3.3) следует, что по мере увеличения B отношение $\frac{l_e}{u_e}$ должно убывать. Поскольку при отсутствии магнитного поля u_e соизмеримо, как известно, с характерной скоростью осредненного течения V, то нельзя допустить, что u_e увеличивается при наложении поля, и остается принять, что u_e убывает. Для того чтобы оценить зависимость l_e от напряженности магнитного поля, необходимо принять какое-то допущение о характере связи l_e и u_e. Воспользуемся для этой цели известным из общей гидродинамики соотношением для энергии, отбираемой турбулентным движением от основного и передаваемым по спектру в сторону малых масштабов:

$$\varepsilon \sim \frac{u_e^3}{l_c} \sim \frac{V^3}{L}. \tag{3.4}$$

В присутствии магнитного поля эта энергия, как показывает экспериментальное изучение сопротивления в турбулентных течениях, всегда уменьшается. Поэтому должно соблюдаться неравенство

$$\left(\frac{u_e^3}{l_e}\right)_{\text{м}} \leqslant \left(\frac{u_e^3}{l_e}\right)_0, \tag{3.5}$$

где индексы «м» и «0» относятся к случаю с магнитным полем и без него соответственно. Так как при фиксированном числе **Re**

$$\left(\frac{u_e^3}{l_e}\right)_0 \sim \frac{V^3}{L} = \text{const}, \tag{3.6}$$

то отсюда следует

$$(u_e)_{\text{м}} \leqslant V\left(\frac{l_e}{L}\right)^{1/3}_{\text{м}}. \tag{3.7}$$

Воспользовавшись неравенством (3.7) и соотношением (3.3), получаем следующую оценку для l_e в присутствии магнитного поля:

$$l_e \leqslant \frac{L}{\mathbf{N}^{3/2}}. \tag{3.8}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что по мере усиления магнитного поля в турбулентном спектре прежде всего исчезают возмущения самых крупных масштабов — низкочастотные возмущения.

Но одновременно с уменьшением внешнего масштаба должен увеличиваться внутренний масштаб, т. е. должны исчезать и

возмущения наиболее высокой частоты. Действительно, в силу (3.5), а также потому, что в процессе передачи энергии по спектру часть ее опять-таки расходуется на джоулевы потери, понятно, что вся турбулентная энергия окажется рассеянной прежде, чем достигнет возмущений с масштабом, равным внутреннему масштабу в отсутствие магнитного поля. Следовательно, используя те же индексы, которые мы применяли выше, можем написать

$$(l_i)_{\text{м}} \gtrsim (l_i)_0 . \tag{3.9}$$

Естественно предположить, что ламинаризация течения магнитным полем завершается тогда, когда внешний и внутренний масштабы становятся равными. В таком случае критерий ламинаризации можно получить, исходя из следующего равенства:

$$(l_e)_{\text{м}} \approx (l_i)_{\text{м}} . \tag{3.10}$$

Величину $(l_e)_{\text{м}}$ выразим согласно (3.8). Поскольку оценить зависимость $(l_i)_{\text{м}}$ от магнитного поля пока не удалось, воспользуемся в качестве первого грубого приближения формулой (3.2). Приравняв правые части (3.2) и (3.8), найдем

$$\mathrm{Re}_{\text{кр}} \sim \mathrm{Ha}^{4/3} . \tag{3.11}$$

При получении всех этих грубых оценок мы допускали, что турбулентность изотропна и остается таковой и при наложении поля. Однако уже самые простые качественные соображения приводят к выводу, что в присутствии магнитного поля турбулентность должна становиться анизотропной. Сказанное удается достаточно убедительно проиллюстрировать в рамках спектральной теории. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее.

Будем предполагать, что турбулентность однородна. Далее положим, что справедливо безындукционное приближение, причем напомним, что, как было показано в гл. I, безындукционное приближение справедливо для турбулентного движения лишь при выполнении условия $\mathrm{Ha}\beta^{1/2} = (\mathrm{NRe}_m)^{1/2} \ll 1$.

При этих допущениях можно, исходя из общей магнитогидродинамической системы уравнений, получить известным из общей гидродинамики путем [2] следующее уравнение для спектрального двухточечного тензора поля турбулентных скоростей Φ_{ij}:

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} = \Omega_{ij} - 2\nu k^2 \Phi_{ij} - \frac{2\sigma B^2}{\rho} \frac{k_3^2}{k^2} \Phi_{ij} . \tag{3.12}$$

Здесь

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \overline{u_i u_j} \exp\{-i\boldsymbol{kr}\}\, d\boldsymbol{r}, \tag{3.13}$$

$\boldsymbol{k}$ (k_1, k_2, k_3) — волновой вектор, причем предполагается, что магнитное поле приложено в направлении компоненты волнового вектора k_3, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, соединяющий рассматриваемые точки.

Символом Ω_{ij} обозначена совокупность членов, соответствующая тройным моментам компонент скоростей и моментам давления и скорости в двух точках. Мы не выписываем более подробно вид Ω_{ij}, поскольку ниже нам это не потребуется.

Напомним, что двойные моменты поля скоростей выражаются через спектральный тензор Φ_{ij} посредством следующего обратного преобразования:

$$\overline{u_i u_j} = \int \Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{kr}}\, d\boldsymbol{k}. \tag{3.14}$$

Смысл первых двух членов в правой части уравнения (3.12) тот же, что и в общей гидродинамике, т. е. первый из них соответствует нелинейным процессам передачи энергии, а второй — вязкой диссипации энергии. Последний член правой части соответствует, как легко понять, джоулевой диссипации энергии.

Выбрав некоторым образом характерные значения длины и скорости, можно придать уравнению (3.12) безразмерный вид. Если еще обозначить $\frac{k_3^2}{k^2} = \cos^2\theta$, где θ — угол между волновым вектором и направлением магнитного поля, получим

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} = \Omega_{ij} - \frac{2}{\mathrm{Re}} k^2 \Phi_{ij} - 2\mathbf{N}\cos^2\theta \Phi_{ij}. \tag{3.15}$$

При рассмотрении начального периода изменения турбулентности вследствие наложения магнитного поля, так же как при рассмотрении конечной стадии вырождения турбулентности, нелинейными эффектами можно пренебречь и соответственно член Ω_{ij} в уравнении (3.15) опустить.

Такое рассмотрение для конечной стадии вырождения турбулентности в присутствии магнитного поля впервые провел Ленерт [3], а затем ряд других авторов [4—13]. Начальный период рассмотрен в работах [13, 14].

Пренебрегая в (3.15) нелинейными членами и интегрируя, получаем

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^0 \exp\left\{-2\left(\frac{k^2}{\mathrm{Re}} + \mathbf{N}\cos^2\theta\right)t\right\}, \tag{3.16}$$

где Φ_{ij}^0 соответствует начальному моменту времени.

Из (3.16) сразу следует, что магнитное поле приводит к анизотропии турбулентности. Действительно, даже если в начальный момент имела место изотропия, т. е. тензор Φ_{ij}^0 изотропен, то Φ_{ij} неизотропен благодаря присутствию множителя $\exp\{-2Nt\cos^2\Theta\}$. В отсутствие магнитного поля ($N=0$) Φ_{ij} остается изотропным, поскольку $\exp\left\{-\frac{2}{Re}k^2t\right\}$ от направления вектора $\boldsymbol{k}$ не зависит.

Далее из (3.16) видно, что медленнее всего затухают возмущения с малыми значениями k_3. Для таких возмущений велик масштаб в направлении магнитного поля $l_\parallel \sim \frac{1}{k_3}$. Другими словами, структура турбулентности асимптотически стремится к одномерной. Этот результат получен, по-видимому, впервые Ленертом [3]. Как показали расчеты Дайслера [4], а также Нестлероде и Ламли [14], имеет место также следующее явление: с течением времени пульсация скорости, параллельная магнитному полю $\overline{u_3^2}$, убывает медленнее, чем убывают интенсивности других компонент пульсаций скорости, причем $\overline{u_1^2}=\overline{u_2^2}$. Как легко убедиться, это не противоречит выводам Ленерта о том, что масштаб пульсаций в направлении магнитного поля становится с течением времени значительно больше, чем поперечный масштаб, так как убывает медленнее, чем поперечный. Действительно, обратимся к уравнению неразрывности для пульсаций скоростей:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0.$$

Согласно [4, 14], $u_1 \sim u_2$. Обозначим скорости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, символом $u_\perp$, а соответствующие им масштабы $l_\perp$. Тогда порядок величины первых двух членов в уравнении неразрывности равен $u_\perp/l_\perp$. Аналогично порядок величины третьего члена $u_\parallel/l_\parallel$. Из уравнения неразрывности следует $u_\perp/l_\perp \gtrsim u_\parallel/l_\parallel$. Отсюда видно, что если $u_\parallel$ уменьшается медленнее, чем $u_\perp$, то $l_\parallel$ также должно убывать медленнее, чем $l_\perp$.

Рассмотрим теперь, каковы некоторые общие закономерности воздействия магнитного поля на однородную турбулентность в случае, когда в уравнении (3.15) нелинейными членами Ω_{ij} пренебречь нельзя. Как известно, нелинейные — инерционные члены отражают в отсутствие магнитного поля перенос энергии от возмущений с малыми волновыми числами к возмущениям с большими волновыми числами. Можно показать, что в присутствии

магнитного поля, помимо этого, имеет место поток энергии из области волнового пространства, где $\cos\theta=\frac{k_3}{k}\approx 0$, в область, где $\cos\theta=\frac{k_3}{k}\sim 1$. Иначе говоря, в отсутствие магнитного поля энергия передается в волновом пространстве из внутренней части сферы радиуса $k_i\sim\frac{1}{l_i}$ (l_i, как и выше, — внутренний масштаб

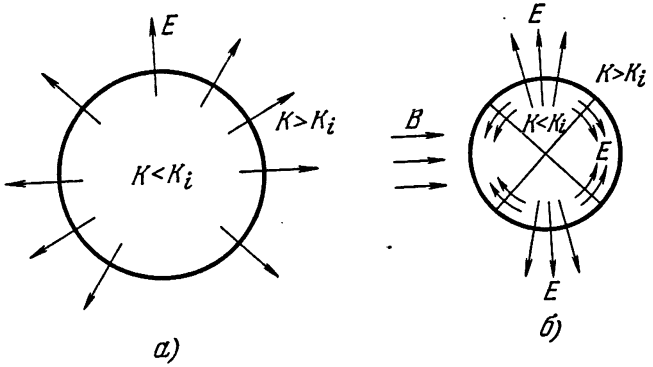


Рис. 3.1. Перенос турбулентной энергии в волновом пространстве.
а) без магнитного поля, *б)* в присутствии магнитного поля.

турбулентности, выражающийся согласно (3.2)) во внешнюю по отношению к сфере часть пространства (рис. 3.1, *а*). В присутствии же магнитного поля энергия передается из области, расположенной вне конуса, ось которого параллельна магнитному полю, в область, ограниченную этим конусом (рис. 3.1, *б*), где она превращается в джоулево тепло [13, 15].

Для того чтобы убедиться в справедливости сказанного, прежде всего обратим внимание на то, что наибольшая джоулева диссипация происходит в той же части спектра, где сосредоточена основная турбулентная энергия, но энергонесущие возмущения с различным направлением волнового вектора вносят неодинаковый вклад в джоулеву диссипацию. Это вытекает непосредственно из рассмотрения члена $\frac{2\sigma B^2}{\rho}\cos^2\theta\Phi_{ij}$, выражающего в уравнении (3.12) джоулеву диссипацию. При фиксированном угле θ джоулева диссипация прямо пропорциональна спектральной плотности кинетической энергии Φ_{ii}, при фиксированном же значении модуля вектора k наибольшая джоулева диссипация имеет место в возмущениях с $\cos\theta\approx 1$ и наименьшая

в возмущениях с $\cos\theta \approx 0$. Это и обусловливает поток энергии из области $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ в область $\theta \approx 0$. Порядок величины угла α при вершине конуса в волновом пространстве, внутри которого происходит джоулева диссипация, может быть определен из следующего выражения [15]:

$$\cos^2\alpha = \frac{\int_0^1 \cos^2\theta \Phi_{ii} d\cos\theta}{\int_0^1 \Phi_{ii} d\cos\theta}. \qquad (3.16)$$

Интересно, что конкретный вид зависимости Φ_{ii} от θ слабо влияет на величину α и во всех случаях $\alpha \approx 60°$.

На этом мы заканчиваем краткое рассмотрение общих закономерностей взаимодействия магнитного поля с турбулентными возмущениями и далее займемся вопросами устойчивости и перехода при ряде конкретных видов магнитогидродинамических течений.

Во всей этой главе мы будем ограничиваться рассмотрением течений при $\mathrm{Re}_m \ll 1$. Эти течения имеют пока наибольшее прикладное значение. Кроме того, экспериментальное исследование течений при $\mathrm{Re}_m \gg 1$ по существу еще не начато. Мы же будем наибольшее внимание уделять экспериментальному аспекту*).

§ 2. Плоское течение в поперечном магнитном поле (течение Гартмана)

В главе II было показано, что при достаточно большом значении Ha профиль скорости в течении Гартмана настолько видоизменяется, что во всем ядре потока градиенты скорости практически равны нулю, и лишь в узких пристеночных слоях имеются очень большие градиенты скорости. Из результатов исследований устойчивости в общей гидродинамике следует, что течение с таким профилем скорости должно быть значительно более устойчивым, чем течение Пуазейля с параболическим профилем скорости.

*) Заметим, что при экспериментальном изучении перехода к турбулентности при течении в трубах в присутствии магнитного поля имеется та же особенность, что и при экспериментальном изучении перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный в общей гидродинамике: во всех проведенных до настоящего времени экспериментах на рабочий участок набегает турбулентный поток.

Локк [16] рассмотрел эту задачу, исходя из теории малых возмущений. Если принять, что в рассматриваемом случае справедлива известная в общей гидродинамике теорема Сквайра [17], согласно которой двумерные возмущения опаснее в отношении нарушения устойчивости, чем трехмерные*), то уравнение Орра—Зоммерфельда для течения Гартмана записывается в следующем виде:

$$(u-c)(\psi''-\alpha^2\psi)-u''\psi+\frac{i}{\alpha\,\mathrm{Re}}(\psi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\psi''+\alpha^4\psi)=\frac{i\,\mathrm{Ha}^2}{\alpha\,\mathrm{Re}}\psi'', \tag{3.17}$$

где u — скорость гартманова течения, ψ — функция тока возмущенного движения, α — безразмерная волновая частота возмущения, c — безразмерная фазовая скорость возмущения.

Граничные условия для уравнения (3.17) имеют вид

$$\psi=\psi'=0 \quad \text{при} \quad y=\pm 1. \tag{3.18}$$

Член, стоящий в правой части и учитывающий непосредственное воздействие магнитного поля на возмущение, пренебрежимо мал для нейтральных и усиливающихся возмущений. Таким образом, в исследовании Локка осталось обычное уравнение Орра—Зоммерфельда с вязкими членами, а влияние поля учитывалось лишь через посредство профиля осредненной скорости. При малых Ha это был профиль Гартмана, а при больших Ha Локк заменял его весьма близким к профилю Гартмана экспоненциальным профилем $u=1-\exp\{-\mathrm{Ha}(1+y)\}$. Этот последний профиль подобен известному в общей гидродинамике профилю скорости в пограничном слое с отсосом. Решение задачи привело к выводу о том, что $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ сильно увеличивается при увеличении Ha, и при достаточно большом Ha ($\mathrm{Ha}>20$) справедлива линейная зависимость

$$\mathrm{Re}_{\text{кр}}=5\cdot 10^4\,\mathrm{Ha}. \tag{3.19}$$

Как и следовало ожидать, этот результат в принципе совпадает с результатами исследования устойчивости пограничного слоя с отсосом, выполненным в общей гидродинамике [19]. Там получилось $\mathrm{Re}_{\text{кр}}=4\cdot 10^4$, причем Re вычислено по толщине слоя. Поскольку толщина гартмановского слоя $\delta\sim\mathrm{Ha}^{-1}$, то при вычислении Re по размеру δ формула (3.19) приобретает вид $\mathrm{Re}_{\text{кр}}=5\cdot 10^4$.

*) Как показал Хант [18], теорема Сквайра в магнитной гидродинамике справедлива не всегда. Ниже мы подробнее рассмотрим этот вопрос. Здесь, однако, допущение о справедливости этой теоремы вполне приемлемо, поскольку непосредственное воздействие магнитного поля оказывается с точки зрения устойчивости несущественным по сравнению с его воздействием на профиль основного движения.

Коэффициент при **Ha** в (3.19), как показывают эксперименты, значительно завышен (в 200 раз). Возможно, что это результат недостатков линейной теории, а возможны и другие объяснения. Однако для дальнейшего наиболее важно, что $\mathbf{Re}_{кр}$ линейно

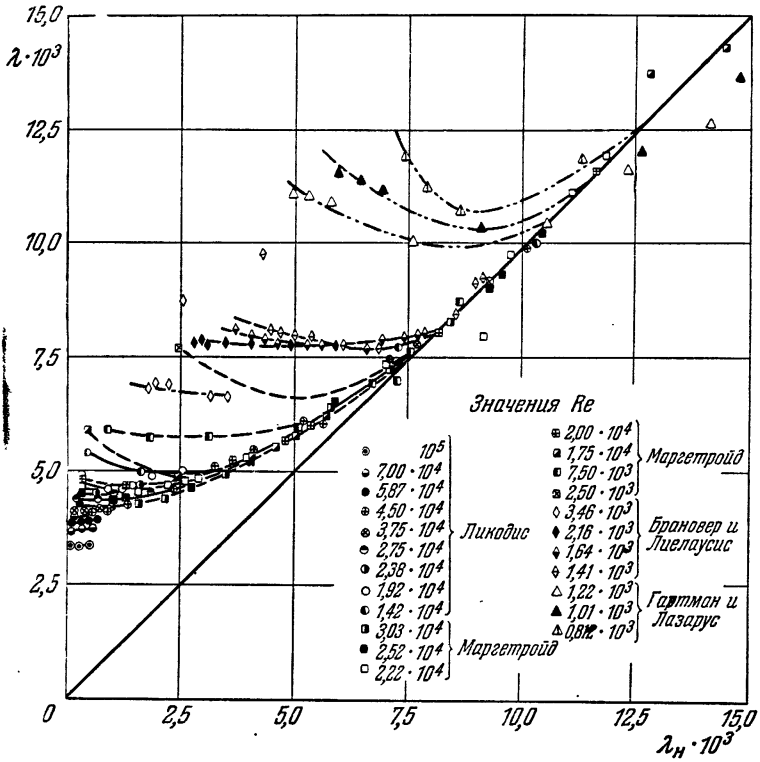


Рис. 3.2. Экспериментальные данные о коэффициенте сопротивления при плоскопараллельном турбулентном течении в гладкой трубе в поперечном магнитном поле в сопоставлении с теорией для ламинарных течений.

зависит от **Ha**. Поскольку при большом **Ha** коэффициент сопротивления равен **2Ha/Re**, то (3.19) означает, что переход к турбулентности должен происходить при постоянном «критическом» значении коэффициента сопротивления

$$\lambda_{кр} = \text{const}. \qquad (3.20)$$

Вопрос о постоянстве $(\mathbf{Re/Ha})_{кр}$ исследовался с других позиций также Ликодисом [20].

Эти выводы в принципе хорошо подтверждаются результатами экспериментов. На рис. 3.2 собрано большинство имеющихся экспериментальных данных о коэффициенте сопротивления при течении в поперечном поле в трубах прямоугольного сечения, которые можно с достаточным основанием считать плоскими (с отношениями сторон сечения $\beta \geqslant 5$). Эти данные отложены в зависимости от величины λ_H, представляющей собой коэффициент сопротивления, вычисленный при определенных **Re** и **Ha** по формуле Гартмана. Очевидно, что точки, группирующиеся вокруг биссектрисы координатного угла, можно считать соответствующими ламинарному режиму течения. Соответственно отклонение точек от этой прямой указывает на начало турбулентности. Рассмотрение рисунка приводит к выводу, что при всех достаточно больших значениях **Re** (и соответственно больших **Ha**) ламинарный режим действительно наступает при постоянном значении λ. Конечно, поскольку о смене режимов мы судим по касанию экспериментальной и теоретической кривой, можно утверждать лишь, что имеет место приблизительное постоянство $\lambda_{кр}$. При малых **Re** и **Ha** постоянство $\lambda_{кр}$ не наблюдается. Правда, здесь и экспериментальные данные содержат большую погрешность. Обращает на себя внимание то, что в этой области λ вплоть до совпадения с λ_H все время убывает с увеличением **Ha**, тогда как при больших **Re** λ практически монотонно возрастает. Это приводит к мысли о существовании некоторого «граничного» числа Рейнольдса, при котором $\lambda_{кр}=\lambda_0$, в то время как при $\mathbf{Re}<\mathbf{Re}_{гр}$ $\lambda_{кр}<\lambda_0$, а при $\mathbf{Re}>\mathbf{Re}_{гр}$ $\lambda_{кр}>\lambda_0$. Очень существенно, что, судя по коэффициенту сопротивления, смена режимов при $\mathbf{Re}>\mathbf{Re}_{гр}$ происходит плавно, без скачка. Различие поведения коэффициента сопротивления при наложении поля в областях $\mathbf{Re}<\mathbf{Re}_{гр}$ и $\mathbf{Re}>\mathbf{Re}_{гр}$ можно легко объяснить. Действительно, в § 1 этой главы было показано, что влияние электромагнитных сил существенно для турбулентных пульсаций крупных масштабов и мало по сравнению с влиянием вязкости для пульсаций малых масштабов. Там же указывалось, что наименьший масштаб турбулентных пульсаций убывает с увеличением числа Рейнольдса. Значит, при малых **Re** следует ожидать самого сильного воздействия магнитного поля на турбулентность. Это должно обусловить существенное уменьшение поперечного переноса количества движения и переход более наполненного турбулентного профиля скорости в менее наполненный вытянутый ламинарный профиль. С другой стороны, поперечное поле воздействует также и на осредненное течение, вызывая эффект Гартмана, т. е. увеличение наполненности профиля. Картина взаимодействия получается достаточно сложной, и если при этом коэффициент

сопротивления убывает, то можно заключить, что эффект подавления турбулентности превалирует над эффектом Гартмана.

Превалирование эффекта подавления турбулентности над эффектом Гартмана при малых числах **Re** можно объяснить следующим образом. Когда **Re** лишь ненамного больше значения $\mathbf{Re}_{кр.\,0}$, преобладают, как известно, турбулентные возмущения, занимающие все сечение трубы. Возмущенная скорость при этом имеет тот же порядок величины, что и средняя скорость основного течения. Для тормозящей электромагнитной силы, действующей на возмущенный объем жидкости, имеем

$$F_{эм_1} \sim \sigma B^2 V L.$$

При выводе этого выражения мы предполагали, что индуцированные токи определяются лишь электрическим сопротивлением самого возмущенного объема, т. е. что эти токи замыкаются через всю окружающую жидкость, сопротивление которой весьма мало. Иначе обстоит дело при рассмотрении электромагнитной силы, действующей на единицу объема жидкости, участвующей в осредненном движении. Здесь при тех же характерных размере L и скорости V индуцированные токи замыкаются через узкие пристеночные гартмановские слои, толщина которых, как было показано в гл. II, имеет порядок величины $L/\mathbf{Ha}$. Соответственно

$$F_{эм_2} \sim \frac{\sigma B^2 V L}{\mathrm{Ha}};$$

отсюда следует, что $F_{эм_1}/F_{эм_2} \sim \mathbf{Ha}$, т. е. при малых **Re** влияние поля на пульсации значительно больше, чем на осредненное течение при $\mathbf{Ha} \gg 1$).

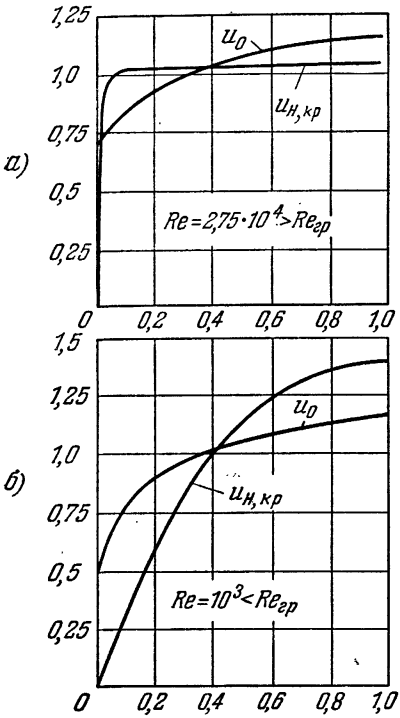


Рис. 3.3. Профили скорости в отсутствие магнитного поля и в поперечном поле.

а) Число Рейнольдса больше граничного;
б) число Рейнольдса меньше граничного.

Не повторяя полностью рассуждений, укажем, что при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{гр}$ преобладающим оказывается эффект Гартмана.

Можно весьма простым путем определить численные значения $\lambda_{кр}$ и $\mathrm{Re}_{гр}$, совершенно не прибегая к магнитогидродинамическому эксперименту [21]. Допустим, что существует какое-то постоянное значение $\lambda_{кр}$, соответствующее переходу от ламинарного течения к турбулентному. Примем вначале его значение совершенно произвольно, выбрав любую точку на кривой Блазиуса, изображающей зависимость λ_0 от Re. По кривой Блазиуса определим также значение $\mathrm{Re}_{гр}$, соответствующее принятому $\lambda_{кр}$. Имея значение $\lambda_{кр}$, можно для любого Re определить соответствующее ему значение $\mathrm{Ha}_{кр}$ и построить критический профиль Гартмана $u_{H,\,кр}$. На рис. 3.3 показан вид профиля скорости в отсутствие магнитного поля u_0 и в поле в состоянии перехода $u_{H,\,кр}$ при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{гр}$ и при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{гр}$. Рассмотрение этих рисунков приводит к выводу, что при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{гр}$ профили u_0 и $u_{H,\,кр}$ должны быть весьма близкими друг к другу или, возможно, практически совпадают. Это обстоятельство и можно использовать для нахождения численных значений $\lambda_{кр}$ и $\mathrm{Re}_{гр}$. Вместо того чтобы требовать полного совпадения профилей, мы ограничимся более слабым требованием, чтобы при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{гр}$ у обоих профилей совпадали градиенты скорости на стенке и максимальные значения скорости на оси потока. Итак, при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{гр}$ имеем

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial u_{H,кр}}{\partial y}\right|_{y=0} \tag{3.21}$$

или, учитывая, что $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \dfrac{\tau_w}{\rho\nu}$ и $\lambda = \dfrac{\tau_w}{1/2\rho V^2}$, можем просто записать

$$\lambda_0 = \lambda_H . \tag{3.22}$$

Далее

$$u_{0,\,\max} = u_{H,\,\max} , \tag{3.23}$$

Для вычисления λ_0 воспользуемся формулой Блазиуса:

$$\lambda_0 = 0{,}056\,\mathrm{Re}^{-1/4} . \tag{3.24}$$

Для λ_H — формулой Гартмана:

$$\lambda_H = \frac{2}{\mathrm{Re}}\,\frac{\mathrm{Ha}^2 \operatorname{th}\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha} - \operatorname{th}\mathrm{Ha}} . \tag{3.25}$$

Тогда вместо (3.22) получим

$$0{,}028\,\mathrm{Re}^{3/4} = \frac{\mathrm{Ha}^2 \operatorname{th}\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha} - \operatorname{th}\mathrm{Ha}} . \tag{3.26}$$

Пользуясь степенным законом распределения скоростей [22], можем получить, что в достаточно широком интервале $10^3 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 5 \times 10^3$ $u_{0,\,\max} \approx 1{,}25$. Выражение же для $u_{H,\,\max}$ следует из решения Гартмана:

$$u_{H,\,\max} = \frac{\mathrm{Ha}\,(\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - 1)}{\mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}. \qquad (3.27)$$

Следовательно, вместо (3.23) можем записать

$$1{,}25 = \frac{\mathrm{Ha}\,(\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - 1)}{\mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}. \qquad (3.28)$$

Совместное решение (3.26) и (3.28) дает значения $\mathrm{Re}_{\mathrm{гр}} = 1280$ и $\lambda_{\mathrm{гр}} = \lambda_{\mathrm{кр}} = 0{,}00935$. Обращаясь снова к рис. 3.2, можем заключить, что полученное значение $\lambda_{\mathrm{кр}}$ вполне удовлетворительно согласуется с результатами экспериментов. Что же касается значения $\mathrm{Re}_{\mathrm{гр}} = 1280$, то оно представляется несколько заниженным. Правда, окончательный вывод пока сделать трудно, ибо, как уже отмечалось, именно в этой области экспериментальные данные наименее точны.

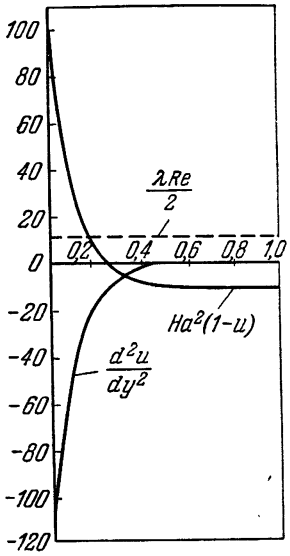


Рис. 3.4. Распределение по сечению потока величины членов уравнения (3.29).

Попытаемся теперь выяснить еще некоторые особенности самого явления перехода ламинарного плоскопараллельного течения в турбулентное в присутствии поперечного магнитного поля. Исходя из уравнения (2.14) и учитывая выражение для электрического поля (2.19), можем записать уравнение плоскопараллельного ламинарного движения в безразмерном виде следующим образом:

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \mathrm{Ha}^2(1-u) + \frac{\lambda\,\mathrm{Re}}{2} = 0. \qquad (3.29)$$

На рис. 3.4 показано распределение по ширине потока величин, входящих в уравнение (3.29), вычисленных из решения Гартмана при $\mathrm{Ha} = 10$. Характерно, что в большей части сечения, за исключением пристеночного слоя, вязкое трение $\frac{d^2u}{dy^2}$ играет ничтожную роль в балансе сил, и продольный градиент давления $\lambda\mathrm{Re}/2$ практически уравновешивается лишь объемными электромагнитными силами $\mathrm{Ha}^2(1-u)$.

Допустим теперь, что поток при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{гр}}$ находится в состоянии перехода от ламинарного режима к турбулентному. Пред-

положим далее, что переход кризисный, т. е. происходит скачком, как при течении в отсутствие магнитного поля. Тогда, в соответствии с рис. 3.3, скорость в ядре потока увеличивается, а значит, увеличивается и член $\mathrm{Ha}^2(1-u)$. Член d^2u/dy^2 также увеличится.

Надо еще учесть, что при переходе к турбулентности к вязким напряжениям трения добавляются еще касательные турбулентные напряжения. С другой стороны, поскольку $\mathrm{Re}_{\text{гр}}<\mathrm{Re}$, коэффициент сопротивления уменьшается (рис. 3.2).

Итак, мы приходим к выводу, что при скачкообразном переходе баланс сил в ядре потока при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{\text{гр}}$ невозможен. Отсюда можно сделать единственный вывод, состоящий в том, что при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{\text{гр}}$ невозможен скачкообразный переход, т. е. кризис ламинарного течения по всему сечению плоскопараллельного потока. Можно представить себе явление таким образом, что переход происходит постепенно, начиная из пристеночных слоев, и по мере уменьшения Ha при постоянном Re (или по мере увеличения Re при постоянном Ha) турбулентная область занимает все большую часть сечения.

Необходимо, правда, оговориться, что в пристеночных слоях переход может оставаться кризисным, но это не может вызвать существенный скачок в энергетическом балансе всего потока в целом.

Аналогичное рассмотрение при $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{\text{гр}}$ приводит к выводу, что в этом случае в принципе возможен кризисный переход. Переход при этом обусловлен преимущественно взаимодействием поля с пульсационным движением.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще результаты непосредственного экспериментального изучения локальных характеристик турбулентности в течениях, близких к течению Гартмана. Нужно сразу оговориться, что результаты эти пока весьма немногочисленны и скудны.

На рис. 3.5 представлены экспериментальные данные по интенсивности продольной компоненты пульсаций скоростей, полученные с помощью динамического датчика [22]. Датчик устанавливался в центре трубы прямоугольного сечения с отношением сторон 1 : 2,5 на различных расстояниях от входа потока в поперечное магнитное поле.

Эти данные позволили установить, что интенсивность турбулентности сравнительно медленно затухает по длине потока, значительно медленнее, чем перестраивается профиль осредненных скоростей течения. Кроме того, на расстоянии от входа в магнитное поле, равном 20 характерным размерам сечения трубы при $\mathrm{Re}/\mathrm{Ha}\approx 200$, т. е когда экспериментальный коэффициент сопротивления соответствует теории ламинарных течений, сохранялась

еще весьма высокая интенсивность пульсаций, равная приблизительно половине интенсивности в отсутствие магнитного поля. Последнее обстоятельство подтверждено в более поздних работах [23, 24], где использовались кондукционные анемометры. На рис. 3.6 воспроизведен график из работы [24]. Эксперименты были

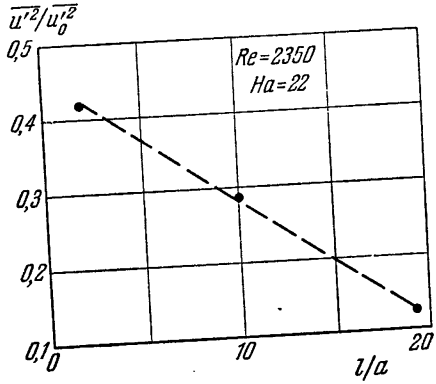


Рис. 3.5. Затухание по длине потока среднеквадратичного значения продольной пульсации скорости в поперечном поле, отнесенной к своему значению вне поля.

Длина отсчитывается от начала полюсов магнита.

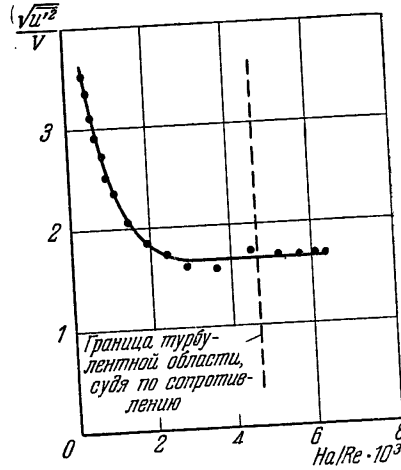


Рис. 3.6. Зависимость относительной интенсивности продольной пульсации скорости в прямоугольном канале с отношением сторон 1 : 5.

Кондукционный датчик расположен на расстоянии 70 характерных размеров канала от входа потока в магнитное поле.

проведены также в канале прямоугольного сечения, но отношение сторон составляло 1 : 5. Измерение можно было проводить в точке, удаленной от входа потока в магнитное поле на расстояние, равное почти 70 характерным размерам. Как и в эксперименте, описанном выше, при $\mathbf{Re/Ha}<215$ сохранялась интенсивность пульсаций, составляющая не менее 30% первоначальной интенсивности. Результат этот кажется с первого взгляда парадоксальным: сопротивление потока совпадает с сопротивлением при ламинарном режиме, а вместе с тем в нем имеется весьма интенсивное пульсационное движение. Однако подобные, в принципе, ситуации известны и в общей гидродинамике. В частности, существование в ламинарном потоке не влияющих на сопротивление и распределение осредненных скоростей затухающих возмущений обсуждалось Томасом [26]. Мы вынуждены заключить,

что и в рассматриваемом нами здесь случае речь идет о затухающих возмущениях, сносимых потоком, генерация же турбулентности полностью подавлена магнитным полем. Это явление можно проанализировать более подробно, опираясь на результаты об анизотропии турбулентности, изложенные в § 1. Однако течение типа Гартмана не является наиболее благоприятным для такого анализа видом течения, ибо влияние поля на турбулентность вуалируется эффектом Гартмана. Мы переносим поэтому более подробное рассмотрение затронутых здесь явлений в последующие параграфы.

§ 3. Осесимметричное и плоское течение в продольном поле

Течения в продольном поле отличаются от течения в поперечном прежде всего тем, что здесь нет взаимодействия осредненного течения с магнитным полем и при ламинарном течении профиль скорости тот же, что при течении вне поля. Есть и еще одно существенное отличие, которое, однако, часто упускается из виду. Продольное поле непосредственно воздействует лишь на поперечные компоненты пульсаций скорости, которые, как известно [27, 28], имеют значительно меньшую амплитуду, чем продольная компонента, на которую продольное поле может оказывать воздействие лишь косвенно.

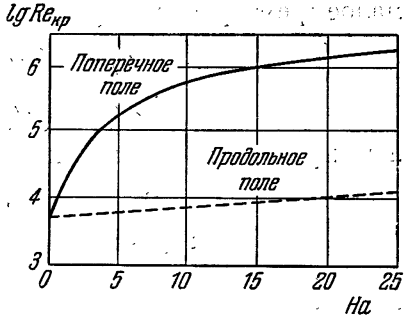


Рис. 3.7. Критическое число Рейнольдса в зависимости от числа Гартмана, вычисленное по теории бесконечно малых возмущений.

Таким образом, можно полагать, что стабилизирующее действие продольного поля меньше, чем поперечного. Действительно, анализ, проведенный Стюартом [29] в рамках теории бесконечно малых возмущений, подтвердил этот вывод. Стюарт исследовал уравнение Орра—Зоммерфельда с тем добавочным «магнитным» членом, который был отброшен Локком*). Профиль осредненной скорости был в исследовании Стюарта параболическим. Насколько более слабое стабилизирующее действие продольного поля по сравнению с поперечным показывает рис. 3.7,

*) Конкретный вид этого члена получается различным при течении в поперечном и продольном поле.

где сопоставлены зависимости $\mathrm{Re}_{кр}$ от Ha, полученные Локком и Стюартом. При $\mathrm{Ha} \leqslant 20$ простейшая зависимость $\mathrm{Re}_{кр} \sim \mathrm{Ha}^{4/3}$ (§ 1) хорошо согласуется с расчетами Стюарта, однако при больших значениях Ha, согласно Стюарту, $\mathrm{Re}_{кр}$ увеличивается быстрее.

Исследование Стюарта, как и большинство исследований устойчивости магнитогидродинамических течений, основывалось на допущении о том, что в присутствии магнитного поля сохраняет справедливость теорема Сквайра, согласно которой двумерные возмущения опаснее с точки зрения потери устойчивости, чем трехмерные. Однако, как показал впоследствии Хант [18], теорема Сквайра в магнитной гидродинамике справедлива не всегда. В § 2 уже упоминалось об этом. Здесь же мы изложим результаты Ханта более подробно, поскольку его исследование относится именно к случаю течения в продольном магнитном поле.

Рассмотрим стационарное течение со скоростью $\boldsymbol{U}=(U(y), 0, 0)$ в присутствии внешнего продольного магнитного поля $\boldsymbol{B}_0=(B_0, 0, 0)$. На это течение наложим бесконечно малое трехмерное возмущение скорости

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{q}(y)\exp\{i(\alpha^* x+\gamma^* z-\beta t)\}, \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{q}(y)=\{u(y), v(y), w(y)\}$$

и возмущение магнитного поля

$$\left.\begin{aligned} b&=\boldsymbol{r}(y)\exp\{i(\alpha^* x+\gamma^* z-\beta t)\}\\ \boldsymbol{r}(y)&=\{\Phi(y), \Psi(y), \mathrm{X}(y)\}\ . \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

Исходя из общей системы уравнений магнитной гидродинамики, можно путем стандартной процедуры получить следующее уравнение Орра—Зоммерфельда для компоненты v (в предположении, что $\mathrm{Re}_m \ll 1$)

$$(U-c)(v''-\lambda^2 v)-vU''+i\,\mathrm{N}\,\alpha v=-\frac{i}{\alpha\,\mathrm{Re}}(v^{\mathrm{IV}}-2\lambda^2 v''+\lambda^4 v). \tag{3.32}$$

Здесь

$$\lambda^2=\alpha^2+\gamma^2,$$

$$\alpha=\alpha^* L,\ \gamma=\gamma^* L,$$

$$c=c_r+ic_i=\frac{\beta}{\alpha^* U_0};$$

U_0 — характерная скорость основного течения, L — характерная длина.

Уравнение (3.32) описывает возмущенное движение при распространении возмущения под углом $\theta\left(\cos\theta=\frac{\alpha}{\lambda},\ \sin\theta=\frac{\gamma}{\lambda}\right)$ к направлению $\boldsymbol{U}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$. Введем обозначения

$$\overline{\mathbf{N}}=\mathbf{N}\cos\theta,\qquad \overline{\mathbf{Re}}=\mathbf{Re}\cos\theta. \tag{3.33}$$

Принимая во внимание, что $\alpha=\lambda\cos\theta$ вместо (3.32), получим следующее уравнение:

$$(U-c)(v''-\lambda^2 v)-vU''+i\lambda\overline{\mathbf{N}}\,v=-\frac{i}{\lambda\overline{\mathbf{Re}}}(v^{\mathrm{IV}}-2\lambda^2 v''+\lambda^4 v). \tag{3.34}$$

Это уравнение не зависит от угла θ. Граничные условия (они однородны) также не зависят от θ. Поэтому и уравнение, из которого находятся собственные значения, также не будет зависеть от θ.

Следовательно, величина $\overline{\mathbf{Re}}_{\text{кр}}$ зависит лишь от $\overline{\mathbf{N}}$:

$$\overline{\mathbf{Re}}_{\text{кр}}=f(\overline{\mathbf{N}}), \tag{3.35}$$

причем здесь $f(x)$ — та же самая функция, которая определяет $\mathbf{Re}_{\text{кр}}$ для двумерного возмущения ($\theta=0$) в зависимости от $\mathbf{N}$ и которая была найдена Стюартом.

Соотношение (3.35) можно записать так:

$$\mathbf{Re}_{\text{кр}}(\mathbf{N},\theta)=\frac{f(\mathbf{N}\cos\theta)}{\cos\theta}. \tag{3.36}$$

При $\mathbf{N}=0$ вместо (3.36) получаем $\mathbf{Re}_{\text{кр}}=\frac{\overline{\mathbf{Re}}_{\text{кр}}}{\cos\theta}$ и наименьшее значение $\mathbf{Re}_{\text{кр}}$ достигается при $\theta=0$, так что самыми опасными являются действительно двумерные возмущения. Иное дело при $\mathbf{N}\neq 0$. Так как $\cos\theta$ убывает с возрастанием θ и при этом убывает также числитель в (3.36) (функция $f(x)$, найденная Стюартом, возрастает и всюду вогнута, т. е. $f'(x)$, $f''(x)>0$), то может оказаться, что величина $\frac{f(\mathbf{N}\cos\theta)}{\cos\theta}$ достигает минимума при $\theta\neq 0$.

Этот результат можно предвидеть и из физических соображений. При отсутствии магнитного поля имеют место два вида воздействий на возмущение: вязкая диссипация турбулентной энергии, которая не зависит от θ, и рейнольдсовы напряжения, достигающие максимума при $\theta=0$ и обусловливающие генерацию турбулентной энергии. Отсюда ясно, почему при $\mathbf{N}=0$ наиболее опасными являются возмущения, которым соответствует $\theta=0$, т. е. двумерные возмущения.

При наличии магнитного поля имеет место еще третий вид воздействия на возмущения — джоулева диссипация энергии, которая также зависит от величины θ и достигает максимума при $\theta=0$. Следовательно, при увеличении θ одновременно с уменьшением генерации уменьшается и джоулева диссипация, и наиболее опасным может быть возмущение, которому соответствует $\theta\neq 0$. Можно, далее, полагать, что чем сильнее магнитное поле, тем больше это значение θ.

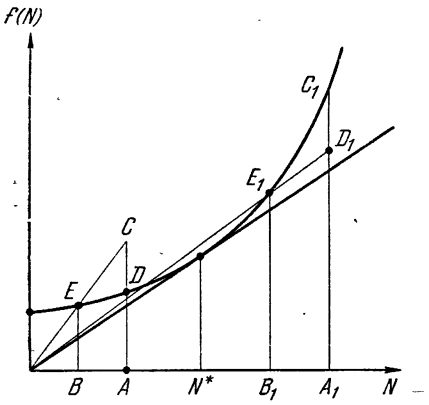


Рис. 3.8. Построения, иллюстрирующие несправедливость теоремы Сквайра при плоском течении в продольном магнитном поле.

Покажем теперь, как этот результат можно получить формальным путем. Для этой цели обратимся снова к функции $\mathrm{Re}_{кр}=f(N)$, найденной Стюартом. Нам не понадобится конкретный вид этой функции, а лишь то ее свойство, что она всюду вогнута ($f''(x)>0$). Зафиксируем величину N в соотношении (3.36) и попытаемся найти

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant\pi/2} \mathrm{Re}_{кр}(N,\theta),$$

которое и будет истинным критическим числом, соответствующим данному значению N. На рис. 3.8 показан вид функции $f(N)$.

Рассмотрим два случая: 1) $N\leqslant N^*$ и 2) $N>N^*$, где N^* — значение N, определяющее положение точки касания кривой $f(N)$ и прямой, проведенной из начала координат.

1) $N\leqslant N^*$. Пусть $OA=N$, $OB=N\cos\theta$; тогда из соотношения (3.36) и рис. 3.8 следует $\mathrm{Re}_{кр}(N,\theta)=AC>AD=\mathrm{Re}_{кр}(N,0)$. Поэтому $\min \mathrm{Re}_{кр}(N,\theta)=\mathrm{Re}_{кр}(N,0)$, т. е. в этом случае теорема Сквайра имеет место.

2) $N>N^*$. Пусть теперь $OA_1=N$, $OB_1=N\cos\theta$. Из рис. 3.8 и (3.36) следует, что

$$\mathrm{Re}_{кр}(N,\theta)=A_1D_1<A_1C_1=\mathrm{Re}_{кр}(N,0),$$

т. е. теорема Сквайра не имеет места.

Нетрудно видеть, что

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant\pi/2} \mathrm{Re}_{кр}(N,\theta)$$

достигается при угле θ, который определяется из соотношения $\cos\theta=\dfrac{N^*}{N}$. Отсюда, между прочим, следует, что при $N\to\infty$ наи-

более опасными являются возмущения, соответствующие углу $\theta \to \frac{\pi}{2}$. Это вполне понятно и физически. При $N \to \infty$ решающую роль в подавлении возмущений играют электромагнитные силы, а эти силы не действуют на движение, происходящее в плоскости, которая перпендикулярна магнитному полю. Такое движение и имеет место при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Этот результат можно получить аналитически, вычисляя минимум функции

$$\varphi(\theta) = \frac{f(N \cos \theta)}{\cos \theta}$$

в предположении, что $f'(x)$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$. Производная

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \{f(\bar{N}) - \bar{N} f'(\bar{N})\} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \qquad (\bar{N} = N \cos \theta)$$

обращается в нуль при двух значениях угла: первое значение $\theta = 0$, а второе определяется из соотношения $\cos \theta = \frac{N^*}{N}$, причем величина N^* находится из уравнения $f'(N^*) = \frac{f(N^*)}{N^*}$. Это значение соответствует той точке кривой $f(x)$, в которой касательная к этой кривой проходит через начало координат. Ясно, что при $N < N^*$ $\frac{d\varphi}{d\theta}$ обращается в нуль лишь в точке $\theta = 0$.

Вычисляя вторую производную

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = f''(\bar{N}) \bar{N}^2 \operatorname{tg} \theta + \{f(\bar{N}) - \bar{N} f'(\bar{N})\} \cdot \frac{2 - 3\cos^2 \theta}{\cos^3 \theta},$$

нетрудно убедиться, что при $N < N^*$ минимум $\varphi(\theta)$ имеет место при $\theta = 0$ и равен $f(N)$, а при $N > N^*$ минимум $\varphi(\theta)$ достигается при $\theta = \theta^*$, причем $\min \varphi(\theta) = N f'(N^*)$. Таким образом, $Re_{кр}$ как функция числа Стюарта определяется соотношениями

$$Re_{кр} = \begin{cases} f(N) & \text{при } N < N^*, \\ N f'(N^*) & \text{при } N > N^*, \end{cases} \quad f'(N^*) = \frac{f(N^*)}{N^*},$$

где $f(N)$ — функция, найденная Стюартом.

Подчеркнем еще, что из доказанной Хантом линейности зависимости $Re_{кр} = f(N)$ при $N > N^*$ сразу вытекает, что при достаточно большом значении На критическое число Рейнольдса

линейно зависит от Ha:

$$\mathrm{Re}_{кр} = C \cdot \mathrm{Ha}. \tag{3.37}$$

Постоянная $C = 450$; ее нетрудно найти, исходя из вычисленной Стюартом кривой.

Недавно Фрейм и Хейзер [30], измерявшие сопротивление в круглой трубе, помещенной в продольное магнитное поле, и определявшие также момент перехода к турбулентности с помощью термоанемометрического устройства, предложили эмпирическую формулу, вполне согласующуюся с (3.37) и справедливую при $\mathrm{Ha} \gg 1$:

$$\mathrm{Re}_{кр} = 30\,\mathrm{Ha}. \tag{3.38}$$

Перейдем теперь к рассмотрению накопленного до настоящего времени экспериментального материала, позволяющего высказать суждение о том, как и при каких соотношениях критериев подобия происходит смена режимов течения в присутствии продольного магнитного поля.

Мы уже упомянули работу Фрейма и Хейзера [30]. Это пока единственное исследование течения в продольном магнитном поле*), в котором фиксировались пульсации скорости. Для этой цели использовалось устройство в виде грубого термоанемометра, нить которого была натянута по диаметру трубы — от стенки до стенки. Такое устройство, осредняя пульсации по всей ширине трубы, могло, естественно, давать достаточно адэкватные результаты лишь в отношении наиболее крупных, соизмеримых с размером трубы возмущений. Считая, что состоянию перехода соответствует появление перемежаемости течения, видимой на осциллограммах, Фрейм и Хейзер установили приведенную выше формулу (3.38).

Все остальные исследования, в которых предпринималась попытка экспериментального определения критических соотношений критериев при наличии продольного магнитного поля, основаны почти исключительно на измерениях сопротивления. Результаты, полученные при этом различными авторами, оказались не совсем идентичными, что послужило поводом для довольно интенсивной дискуссии. Расхождение состоит в том, что по одним данным [31] коэффициент сопротивления при фиксированном Ha и уменьшающемся Re убывает монотонно вплоть до пересечения кривой $\lambda = f(\mathrm{Re})$ с кривой Пуазейля, соответствующей ламинарному течения (рис. 3.9, кривая *1*). По другим данным [30, 32, 33] коэффициент сопротивления убывает только до

*) Все экспериментальные результаты, полученные до сих пор, относятся к течению в круглой трубе. Плоское течение, устойчивость которого в продольном магнитном поле изучалась в рассмотренных выше работах, экспериментально труднее реализовать.

некоторого значения $\mathbf{Re}$, а дальше при меньших $\mathbf{Re}$ экспериментальные точки располагаются выше кривой Пуазейля и лишь при $\mathbf{Re}=\mathbf{Re}_{кр}$ опускаются на нее (рис. 3.9, кривая *2*). Эти экспериментальные результаты можно истолковать по-разному. Можно считать, что особенности кривой *2* являются результатом погрешностей эксперимента или особенностей экспериментальной установки. Так Глоуб [32] и особенно Фрейм и Хейзер [30] видят причину в недостаточной длине участка стабилизации течения полем. При этом справедливо подчеркивается, что с увеличением числа Рейнольдса необходимая длина участка стабилизации ламинарного течения также увеличивается. Следовательно, повышенное значение сопротивления свидетельствует не о наличии турбулентности, а о том, что на экспериментальном участке еще продолжается стабилизация ламинарного профиля скорости*). Против этой точки зрения можно выдвинуть много возражений, и среди них наиболее серьезно, по-видимому, следующее. Если при вступлении на измерительный участок трубы стабилизация профиля еще не завершилась, то на этом участке должно было быть зафиксировано непостоянство продольного градиента давления, соизмеримое с отклонением измеренного перепада давления от закона Пуазейля. Другой причиной завышения сопротивления может быть незначительный перекос оси трубы относительно оси соленоида, в результате чего имеется поперечная компонента магнитного поля. Однако отсутствие такого перекоса специально проверялось экспериментаторами.

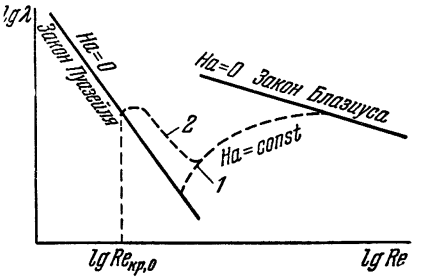


Рис. 3.9. Вид зависимости коэффициента сопротивления в продольном поле от числа Рейнольдса по экспериментальным данным различных авторов.

1 — [36]; *2* — [30, 37, 38].

Поиски объяснения наблюдавшегося в опытах поведения коэффициента сопротивления и анализ общих закономерностей воздействия магнитного поля на турбулентность, о которых говорилось в § 1 этой главы, приводит к предположению о том, что в трубе, помещенной в соленоид, сохраняется движение, подобное турбулентному, при сколь угодно сильном магнитном поле, если только $\mathbf{Re}>\mathbf{Re}_{кр,\,0}$.

---

*) В самое последнее время С. А. Регирер показал, что длина участка стабилизации ламинарного течения в продольном магнитном поле возрастает с увеличением числа Гартмана.

Действительно, как указывалось в § 1, в затухающей однородной турбулентности магнитное поле наиболее слабо воздействует на компоненты пульсаций в направлении поля $u_{\parallel}$, причем дольше всего сохраняются пульсации, соответствующие большим масштабам, т. е. максимум кривой спектральной плотности энергии компоненты $u_{\parallel}$ соответствует относительно большим значениям $l_{\parallel}$. Напротив, компоненты $u_{\perp}$ убывают в присутствии магнитного поля значительно быстрее, причем более живучими среди них оказываются мелкомасштабные возмущения, и, таким образом, кривая энергии смещается в сторону малых значений $l_{\perp}$. Во избежание недоразумений нужно сразу подчеркнуть, что все эти особенности носят относительный характер, поскольку они происходят на фоне весьма значительного общего снижения интенсивности турбулентности.

Итак, мы приходим к картине течения, в котором присутствуют длинные и тонкие «шнуроподобные» возмущения, вытянутые вдоль силовых линий магнитного поля [34]. Можно полагать, что такие шнуры возмущений могут сливаться по длине, становясь продолжением друг друга и при достаточно сильном магнитном поле тянутся вдоль всего соленоида и поддерживаются турбулентными пульсациями в участках трубы впереди и за участком с магнитным полем, так что все движение становится осредненно-стационарным. В пределах каждого такого «шнура» продольная корреляция пульсаций должна быть очень высока и, наоборот, одноточечная корреляция продольной и поперечной компоненты близка к нулю. Поскольку, однако, асимптотическое состояние, при котором движение вообще не зависит от продольной координаты, может достигаться лишь при бесконечно большой напряженности магнитного поля, то в реальных случаях величина $\overline{uv}\,\frac{du}{dy}$ не равна нулю и соответственно существует некоторый отбор энергии от осредненного течения, что и отражается на коэффициенте сопротивления.

Описанное гипертрофированно анизотропное почти однокомпонентное движение едва ли можно называть турбулентностью в полном смысле слова. По-видимому, лишь тогда, когда по мере увеличения числа Рейнольдса это движение становится само неустойчивым, и наступает собственно турбулентность.

На осцилограммах Фрейма и Хейзера это соответствует появлению перемежаемости*), а на кривых $\lambda = f(\mathbf{Re})$ — точке минимума.

---

*) При меньших **Re** на осциллограммах Фрейма и Хейзера видны пульсации малой амплитуды и низкой частоты, которые вполне соответствуют описанной выше модели движения.

Альтернативой рассмотренной схеме могла бы быть совокупность длинных вихрей с осями, расположенными параллельно магнитному полю, поскольку на такое движение поле не действует. Однако это движение затухало бы вследствие вязкости, а снабжение его энергией за счет осредненного движения невозможно из-за отсутствия продольной компоненты возмущенного

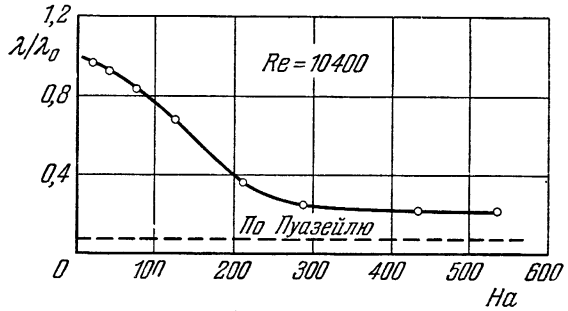


Рис. 3.10. Уменьшение относительной величины коэффициента сопротивления в продольном магнитном поле.

движения [35]. Следовательно, эту альтернативу необходимо отбросить.

Едва ли нужно подчеркивать, что все высказанные выше соображения носят гипотетический характер. Проверить их правдоподобность могли бы специальные и весьма непростые эксперименты, которые пока не проводились.

Мы приведем здесь, однако, некоторые дальнейшие экспериментальные результаты, которые, хотя и косвенно, говорят в пользу этих предположений.

Прежде всего укажем на еще одну работу по измерению сопротивления, в которой были достигнуты намного более высокие значения **Ha** и **Re**, чем в работах, указанных выше. Речь идет о работе Левина и Чиненкова [36] (рис. 3.10).

При достаточно большом **Ha** λ становится независимым от **Ha**, хотя и остается значительно больше, чем соответствующее ламинарному течению пуазейлево значение λ_P.

О слабом влиянии поля на продольные пульсации высокой частоты свидетельствуют и результаты экспериментов Сайбена и Фея [37], измерявших с помощью электротермоанемометра локальные скорости в струе ртути в продольном магнитном поле. На рис. 3.11 приведены данные о влиянии поля на интенсивность турбулентности, правда, не в трубе, а на оси струи, полученные в этой работе. Рассматривая этот рисунок, можно заключить, что

при достаточно сильном поле интенсивность турбулентности стремится к асимптотическому значению, которое составляет лишь немного меньше половины значения интенсивности в отсутствие магнитного поля.

Важное значение в связи с рассматриваемым здесь вопросом имеет предпринятое в недавнее время измерение осредненных скоростей течения в круглой трубе в присутствии продольного

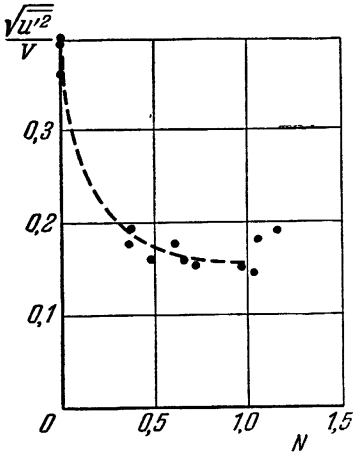


Рис. 3.11. Экспериментальные данные о пульсациях скорости на оси струи в продольном магнитном поле.

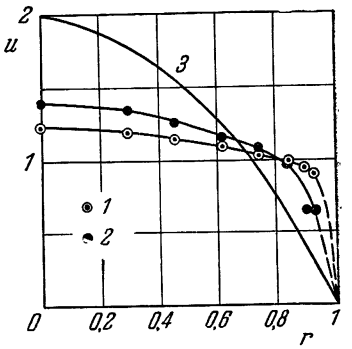


Рис. 3.12. Экспериментальные профили скорости в круглой трубе, находящейся в продольном магнитном поле.
$\mathbf{Re} = 2{,}5 \cdot 10$.
1 — **Ha**=0; *2* — **Ha**=154; *3* — профиль Пуазейля.

магнитного поля [4]. Измерения производились при таком соотношении чисел **Ha** и **Re**, при котором коэффициент сопротивления при данном **Re** минимален. Можно было ожидать, что профиль скорости при этом близок к параболическому профилю Пуазейля. В действительности, однако, измеренный профиль отличается от турбулентного лишь приблизительно на 10% (рис. 3.12) и соответственно весьма далек от ламинарного пуазейлева профиля.

§ 4. Течения в трубах прямоугольного и круглого сечения, находящихся в поперечном магнитном поле

Проблема устойчивости ламинарного течения в трубе прямоугольного сечения не поддается пока теоретическому анализу даже в отсутствие магнитного поля. Устойчивость течения в круглой трубе является объектом интенсивных исследований в

общей гидродинамике, однако линейная теория, как известно, дает в этом случае результаты, которые не согласуются с экспериментом даже в принципе. Теория приводит к выводу об устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе при любых видах возмущений, а эксперимент показывает, что это течение устойчиво лишь до тех пор, пока $\mathbf{Re} < 575$.

В присутствии поперечного магнитного поля задача о теоретическом исследовании устойчивости этих течений еще сложнее. В отношении течения в круглой трубе это связано с тем, что поперечное магнитное поле нарушает круговую симметрию течения.

Поскольку, однако, течение в трубах именно прямоугольного и круглого сечения представляет наибольший прикладной интерес, был предпринят ряд экспериментальных исследований,

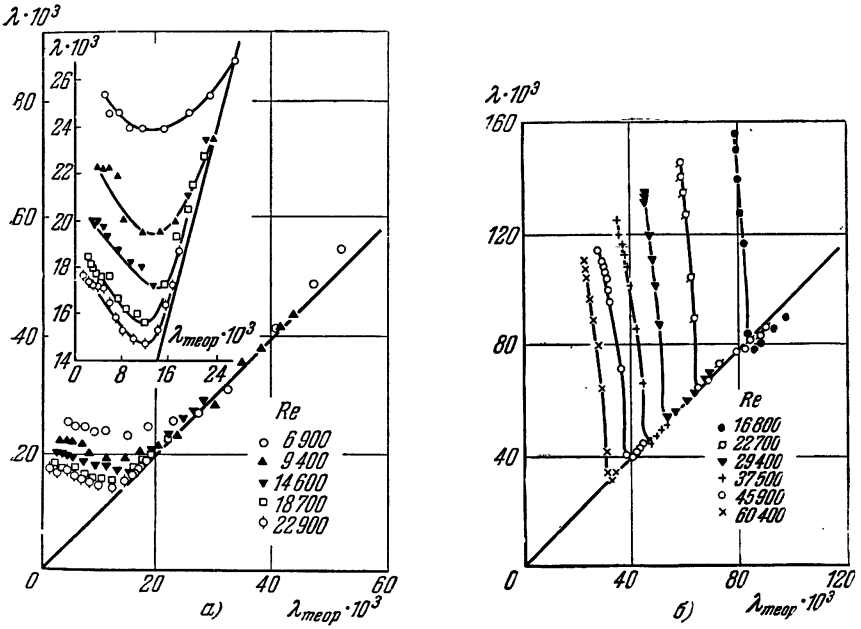


Рис. 3.13. Сопоставление экспериментальных значений коэффициента сопротивления с теорией ламинарных течений в трубах прямоугольного сечения
а) $\beta = 2{,}0$, *б*) $\beta = 0{,}067$.

результаты которых позволили установить критерии смены режимов течения в таких трубах [21, 39—45]. О переходе от ламинарного режима к турбулентному можно судить, как и при плоскопараллельном течении, по отклонению экспериментальных

значений коэффициента сопротивления λ от соответствующих теоретических значений $\lambda_{теор}$. В трубах прямоугольного сечения при больших β это отклонение происходит весьма постепенно, при малых — резко, и сопровождается изменением знака производной $d\lambda/d\lambda_{теор}$. На рис. 3.13 показаны типичные графики $\lambda = f(\lambda_{теор})$ при $\beta>1$ и $\beta<1$. График, соответствующий круглой

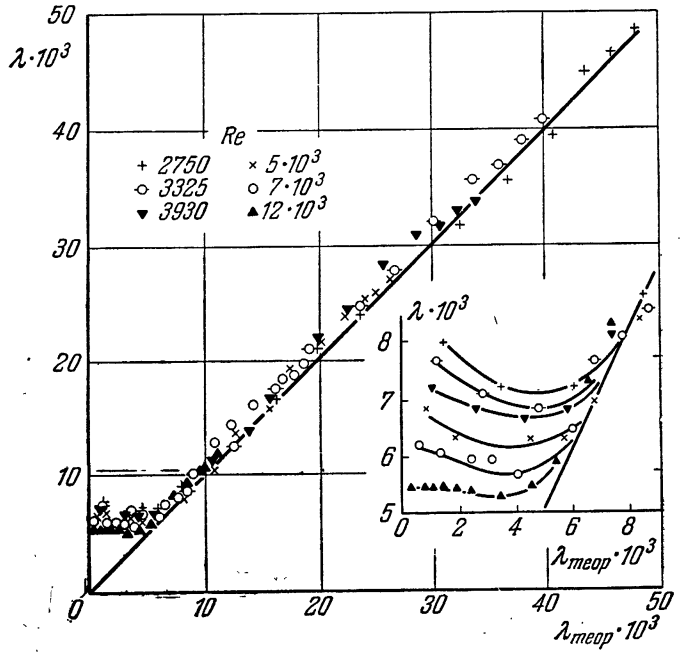


Рис. 3.14. Сопоставление экспериментальных значений коэффициента сопротивления с теорией ламинарных течений в трубе круглого сечения.

трубе, напоминает графики для прямоугольных труб при $\beta>1$ (рис. 3.14). Из этих графиков видно, что при малых β можно наиболее точно установить значения λ, соответствующие переходу. Анализ экспериментальных результатов приводит к выводу, что при каждой определенной геометрической форме сечения трубы переход к турбулентному режиму течения происходит при постоянном значении отношения $(\mathbf{Re}/\mathbf{Ha})_{кр}$. Однако численное значение этого отношения различно для труб различной формы [45].

Постоянство отношения $(\mathbf{Re}/\mathbf{Ha})_{кр}$ хорошо видно, если представить экспериментальные данные в координатах $\lambda/\lambda_0 = f(\mathbf{Re}/\mathbf{Ha})$

для ряда фиксированных значений **Re**. Здесь λ_0 — значение коэффициента сопротивления при **Ha**=0 и соответствующем **Re** (рис. 3.15).

Обратим внимание на то, что и здесь результат, выражаемый формулой (3.11), оказывается близким к истине. Более подробный анализ экспериментальных данных показывает даже, что

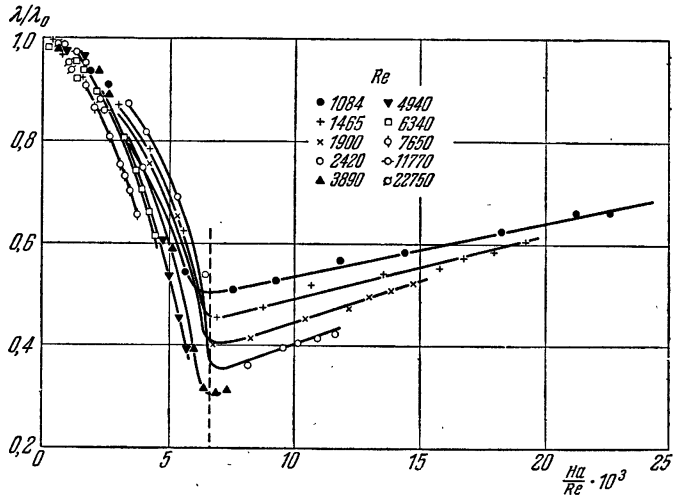


Рис. 3.15. Экспериментальные данные, иллюстрирующие постоянство критического отношения чисел Рейнольдса и Гартмана (труба прямоугольного сечения, β=0,067).

правильнее записывать критерий перехода в виде $(\mathbf{Re}/\mathbf{Ha}^n)_{кр}$ = =const, причем показатель n несколько больше единицы. Однако в тех пределах изменения числа **Re**, которые охвачены экспериментами, вполне можно считать практически $n \approx 1$.

График, приведенный на рис. 3.16, показывает установленную по экспериментальным данным зависимость величины $(\mathbf{Re}/\mathbf{Ha})_{кр}$ от β. Значение $(\mathbf{Re}/\mathbf{Ha})_{кр}$ при $\beta=\infty$ получено расчетным путем, как описано в § 2. На этот же график нанесена точка, соответствующая течению в круглой трубе. Условно ей поставлено в соответствие значение $\beta=1$.

Общий критерий перехода от ламинарного режима к турбулентному для труб прямоугольного и круглого сечения, следовательно, может быть записан в виде

$$\mathbf{Re}_{кр} = \text{const} \cdot \mathbf{Ha}, \qquad (3.39)$$

причем значения константы можно определять по рис. 3.16.

Как видим, при изменении β от 0,067 до ∞ значение константы изменяется менее чем вдвое. Достаточно надежно можно

считать, что при $Re<130\,Ha$ течение в любой прямоугольной или круглой трубе является ламинарным, а при $Re>215\,Ha$ турбулентным. Конечно, все эти оценки справедливы лишь при больших значениях числа Гартмана. Разумным условием их применимости, по-видимому, можно считать $Ha_R>10$. (Напомним, что Ha_R — число Гартмана, при вычислении которого за характерный размер принят гидравлический радиус сечения трубы.)

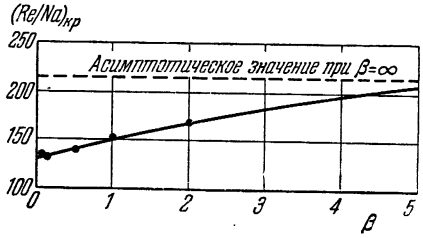


Рис. 3.16. Зависимость критического отношения чисел Рейнольдса и Гартмана от соотношения длин сторон сечения трубы β.

В главе I был подробно проанализирован вопрос о том, при каких значениях отношения сторон сечения коэффициент сопротивления прямоугольной трубы практически совпадает с коэффициентом сопротивления при плоскопараллельном течении. Результаты этого анализа позволяют заключить, что при $\beta\geqslant 3$ условие $(Re/Ha)_{кр}=\text{const}$ практически эквивалентно условию $\lambda_{кр}=\text{const}$*). Подавление турбулентности поперечным магнитным полем в прямоугольной трубе при малых значениях β представляет особый интерес. Действительно, при малом β осредненное течение в такой трубе мало отличается от плоскопараллельного в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Как показано в гл. I, магнитное поле вообще не меняет распределения скоростей в таком течении. Следовательно, здесь проявляется в чистом виде влияние поля на турбулентные пульсации, подобно тому, как при течении в продольном поле. С другой стороны, имеется одно весьма важное принципиальное отличие рассматриваемого нами здесь течения от течения в продольном поле. Отличие это состоит в том, что поперечное магнитное поле взаимодействует непосредственно с продольной компонентой пульсационной скорости. Эта компонента имеет значительно большую амплитуду, чем поперечные компоненты, и, что еще более важно, именно продольной компоненте пульсационной скорости принадлежит главная роль в извлечении энергии из осредненного движения.

Сопоставление результатов, касающихся сопротивления, полученных в поперечном магнитном поле с трубами, у которых $\beta\ll 1$, и результатов, полученных в продольном магнитном поле, при-

*) Это соответствует ошибке не более 6%. Если же удовлетвориться двадцатипроцентной точностью, то высказанное здесь утверждение справедливо уже при $\beta\geqslant 1$.

водит к выводу, что это отличие действительно чрезвычайно существенно.

Прежде всего в поперечном поле относительное снижение коэффициента сопротивления во много раз больше, чем в случае течения в продольном поле при тех же числах Рейнольдса и Гартмана (рис. 3.17). Далее коэффициент сопротивления при

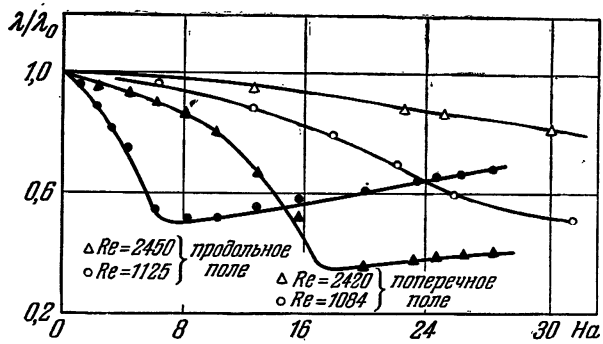


Рис. 3.17. Сопоставление эффективности подавления турбулентности продольным магнитным полем и поперечным полем при $\beta \ll 1$ ($\beta=0{,}067$).

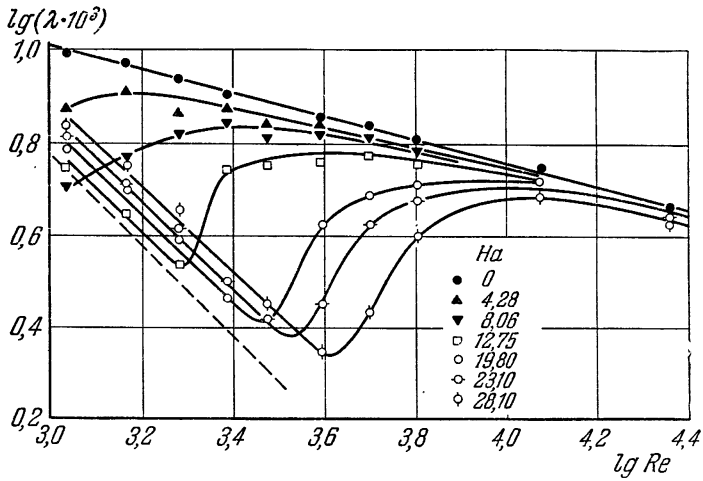


Рис. 3.18. Изменение коэффициента сопротивления под влиянием поперечного магнитного поля при течении в прямоугольной трубе ($\beta=0{,}067$).

фиксированном **Ha** и уменьшающемся **Re** монотонно убывает, пока не достигает значения, соответствующего теории ламинарных течений (рис. 3.18).

Таковы основные данные об интегральной характеристике течения — о сопротивлении. Обратимся теперь к рассмотрению немногочисленных пока данных, полученных при измерении локальной характеристики, — пульсаций скорости в трубах с отношением сторон $\beta \ll 1$.

На рис. 3.19 воспроизведена экспериментальная зависимость безразмерного среднеквадратичного значения продольной компоненты пульсаций скорости в центре прямоугольной трубы ($\beta = 0{,}2$) от отношения Ha/Re [25]. Эти данные получены с помощью кондукционного анемометра, и потому, как показано в гл. I, опираясь на них, можно анализировать лишь качественную, но не количественную сторону вопроса.

Измерения производились на таком расстоянии от вступления потока в магнитное поле, которое равнялось около 70 гидравлическим радиусам сечения трубы. Здесь мы снова встречаемся с тем же парадоксальным результатом, что и в случае течения Гартмана: при полном совпадении экпсериментального коэффициента сопротивления с теоретическим значением для ламинарного течения, которое, как говорилось выше, наступает при $\mathrm{Re}/\mathrm{Ha} \approx 130$, в потоке сохраняется значительная интенсивность пульсаций скорости. Выше, при рассмотрении течения Гартмана, мы не стали подробно обсуждать и анализировать этот факт, поскольку сильное увеличение сопротивления в результате эффекта Гартмана может, вообще говоря, завуалировать вклад сохраняющихся пульсаций скорости в коэффициент сопротивления. В случае же, рассматриваемом здесь, эффект Гартмана почти отсутствует и соответствие коэффициента сопротивления теории ламинарных течений красноречиво свидетельствует о том, что сохраняющиеся в магнитном поле пульсации скорости не отбирают энергию у осредненного течения.

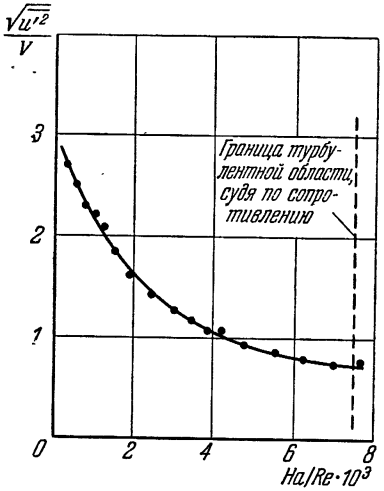


Рис. 3.19. Результаты экспериментального исследования с помощью кондукционного анемометра продольной компоненты пульсации скорости на оси прямоугольной трубы ($\beta = 0{,}2$), расположенной длинной стороной сечения вдоль магнитного поля.

В следующей главе будут приведены некоторые результаты измерения распределения осредненных скоростей течения в прямоугольной трубе, расположенной длинной стороной вдоль маг-

нитного поля, из которых следует, что при $\mathrm{Re/Ha} \approx 130$ профиль осредненной скорости, несмотря на наличие значительных пульсаций, также соответствует теории ламинарных течений.

Анализ спектрального состава сохраняющихся пульсаций скорости приводит к выводу, что наибольшая энергия возмущенного движения сосредоточена в области малых волновых чисел*).

Попытка объяснить совокупность этих результатов приводит к следующей картине течения в прямоугольной трубе с отношением сторон $\beta \ll 1$, помещенной в магнитное поле при $\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}} < \left(\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}}\right)_{\text{кр}} = 130$. Генерация турбулентности на участке с магнитным полем полностью прекращается. Однако турбулентные возмущения, приносимые течением из участков, расположенных выше по потоку, затухают не сразу. В процессе затухания под действием магнитного поля проявляются те закономерности, которые были рассмотрены в § 1 этой главы применительно к однородной турбулентности, а именно: $u_\perp$ уменьшаются быстрее, чем $u_\parallel$ и соответствующие энергосодержащим частям спектров значения $l_\parallel$ становятся значительно больше $l_\perp$. Такая «одномерная турбулентность», характеризующаяся низкими частотами, может сохраняться, несмотря на присутствие магнитного поля, на значительной длине трубы, рассеивая свою энергию преимущественно за счет вязкости. Параллельно с этим можно представить себе и другое явление — поворот турбулентных вихрей, вступающих в магнитное поле, происходящий в таком направлении, чтобы вектор вихря стал параллелен магнитному полю. При этом расположении достаточно протяженный в направлении поля вихрь вообще с ним не взаимодействует. О том, что такой поворот в присутствии магнитного поля в принципе возможен, свидетельствуют специальные эксперименты, в которых осуществлялось визуальное наблюдение подкрашенных вихрей в потоке электролита, обтекающего цилиндр [46]. В этой работе показано также существование сил, обусловливающих поворот вихря.

Нетрудно убедиться, что для совокупности сносимых потоком возмущений, представляющих собой длинные параллельные друг другу вихри, одноточечные моменты $\overline{u'v'}$ равны нулю. Таким

*) Здесь нужно снова напомнить, что измерения пульсаций проводились кондукционным анемометром, показания которого зависят не только от величины измеряемой компоненты пульсации, но и от пульсационной компоненты электрического тока в перпендикулярном к данной компоненте скорости направлении. В результате при экспериментальном изучении сильно анизотропной турбулентности кондукционный анемометр при любом расположении электродов, по-видимому, дает некоторые виртуальные показания, соответствующие как по амплитуде, так и по частоте наиболее энергонесущей компоненте пульсаций скорости.

образом, такая «двумерная турбулентность» не меняет энергии осредненного движения и не осуществляет перераспределения количества движения в нем.

Понятно также, что из числа этих вихрей, не взаимодействующих с магнитным полем, наиболее долго — на большей длине потока сохраняются самые крупные низкочастотные, поскольку они в относительно меньшей степени подвержены действию вязкости.

Остается еще ответить на вопрос о том, почему не может также и генерироваться «одномерная» или «двумерная турбулентность»? В отношении «одномерной турбулентности» дело обстоит совсем просто. В рассматриваемом случае, в отличие от течения в продольном поле (§ 3), сохраняющаяся компонента пульсаций, как и магнитное поле, направлена перпендикулярно основному течению. Но в таком случае отсутствует механизм отбора энергии от основного течения и возмущения могут быть лишь затухающими. Что же касается невозможности генерирования турбулентности в виде двумерных возмущений, то здесь мы сошлемся на известный в общей гидродинамике результат, состоящий в том, что переход к турбулентности происходит только при посредстве трехмерных возмущений [47]. В этой связи уместно упомянуть, что исследование устойчивости рассматриваемого нами здесь плоского течения в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, проведенное Вулером [48] в рамках линейной теории, привело к выводу о том, что магнитное поле вообще не влияет на устойчивость. Этот результат получен с использованием теоремы Сквайра. Легко понять, что в рассматриваемом случае теорема Сквайра справедлива. Действительно, двумерные возмущения, лежащие в плоскости течения, не испытывают воздействия со стороны магнитного поля и, таким образом, являются наиболее опасными с точки зрения нарушения устойчивости. Но отсюда, если учесть, что магнитное поле не изменяет профиля осредненной скорости, сразу следует, что расчет должен дать то же значение критического числа Рейнольдса, что и в отсутствие поля. На

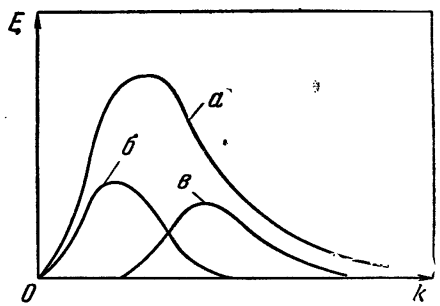


Рис. 3.20. Вид кривых спектральной плотности турбулентной энергии:
а — без магнитного поля, *б* — в магнитном поле при $(\mathbf{Re}/\mathbf{Ha}) < (\mathbf{Re}/\mathbf{Ha})_{кр}$ на небольшом расстоянии от входа в магнитное поле (затухающая турбулентность), *в* — в магнитном поле при $(\mathbf{Re}/\mathbf{Ha}) > (\mathbf{Re}/\mathbf{Ha})_{кр}$ на большом удалении от входа в магнитное поле (турбулентность, генерируемая в присутствии магнитного поля).

самом же деле, как мы видели выше, при рассматриваемом виде течения критическое число Рейнольдса повышается под действием магнитного поля больше, чем при каком-либо другом виде течения. Объяснить это противоречие можно лишь тем, что неустойчивость еще не означает перехода к турбулентности, причем переход обусловливается трехмерными возмущениями.

Хотя до настоящего времени еще не получены надежные экспериментальные данные, которые позволили бы построить кривую спектральной плотности энергии рассмотренной в этом параграфе затухающей турбулентности, можно полагать, что эта кривая имеет вид, показанный на рис. 3.20. На том же рисунке показан предположительный вид кривой спектральной плотности турбулентной энергии на большом удалении от вступления потока в магнитное поле в случае, когда

$$\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}} > \left(\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}}\right)_{\text{кр}}$$

и происходит еще генерация турбулентности в области высоких волновых чисел.

§ 5. Некоторые сведения об устойчивости других типов течения в поперечном поле

а) Течения в прямоугольных трубах с искусственной шероховатостью [45, 49—54]. Критерии устойчивости ламинарного течения в шероховатых трубах и сам подход к вопросу существенно зависят от соотношения размеров сечения трубы. Экспериментально изучены два крайних случая: $\beta \gg 1$ и $\beta \ll 1$. Начнем рассмотрение со случая $\beta \gg 1$. При этом, в отличие от течения в отсутствие магнитного поля, шероховатость влияет на коэффициент сопротивления не только при турбулентном, но и при ламинарном течении. (Причины этого явления были уже подробно рассмотрены теоретически в гл. II.) Указанное обстоятельство значительно усложняет установление момента перехода. Действительно, выше во многих случаях мы судили об изменении режима течения по отклонению экспериментальных значений коэффициента сопротивления от теоретических. В рассматриваемом же здесь случае аналитического решения нет. Более того, в отличие от течения без магнитного поля, продольный градиент давления в данном случае зависит от скорости течения нелинейно и при ламинарном течении. Линейной эта зависимость может быть во всяком случае лишь после того, как обтекание выступов шероховатости станет под влиянием магнитного поля безотрывным. Можно показать, что это достигается значительно

позднее ламинаризации потока. Не анализируя здесь этого вопроса подробно, напомним, что при рассмотрении в гл. II заведомо ламинарного течения в шероховатой трубе ($\mathbf{Re}=200$) обтекание выступов оставалось еще отрывным при наибольшем расчетном значении числа Стюарта $\mathbf{N}=9$.

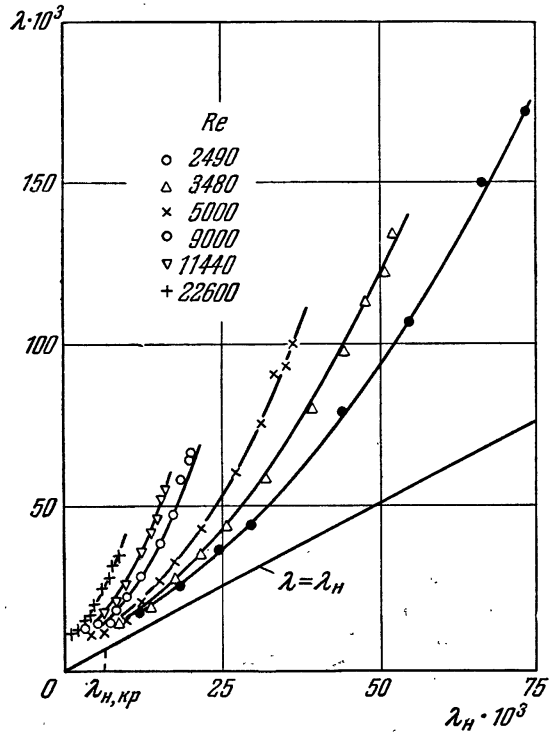


Рис. 3.21. Изменение коэффициента сопротивления шероховатой трубы под действием поперечного магнитного поля ($\beta=11{,}7$, $k=0{,}033$).

Таким образом, в общем случае невозможно установить границы существования ламинарного течения по экспериментальным данным о коэффициенте сопротивления при течении в шероховатой трубе с отношением сторон сечения $\beta\gg1$ в присутствии поперечного магнитного поля. Опыты с трубами, имевшими песочную шероховатость, вполне подтверждают этот вывод. Для иллюстрации сказанного мы воспроизводим на рис. 3.21 экспериментальные данные о коэффициенте сопротивления, по-

лученные в одной из таких труб ($\beta=11{,}7$, $k=0{,}033$), в сопоставлении со значениями коэффициента сопротивления при ламинарном течении в гладкой трубе λ_H. Там же указана граница существования турбулентного течения в гладкой трубе $\lambda_{H,\,кр}$.

Лишь в случае весьма редкой шероховатости, когда сопротивление выступов шероховатости играет ничтожную роль в сопротивлении всей трубы при ламинарном течении *), анализ на основании экспериментальных данных о λ возможен, ибо при ламинарном течении $\lambda\approx\lambda_H$. Эти данные приводят к выводу о том, что чем больше относительная шероховатость k, тем при меньшем числе Гартмана происходит переход к турбулентному течению, когда число **Re** фиксировано [51].

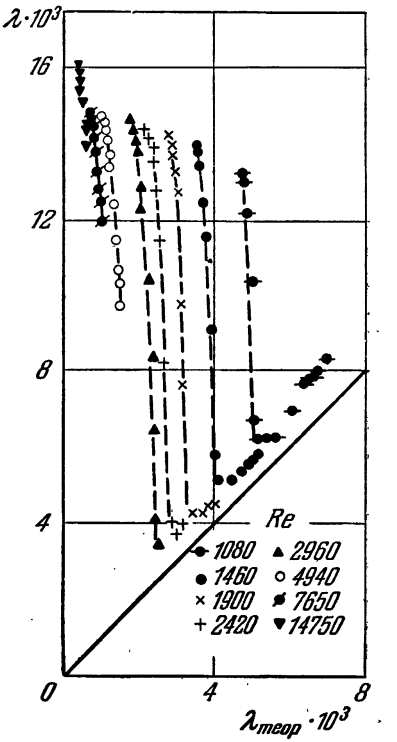


Рис. 3.22. Изменение коэффициента сопротивления шероховатой трубы под действием поперечного магнитного поля ($\beta=0{,}067$, $k=0{,}05$).

Совершенно иная картина получается, когда $\beta\ll1$. В этом случае, как показывают эксперименты, коэффициент сопротивления изменяется при наложении поперечного поля на турбулентное течение следующим образом. Если зафиксировать **Re** и увеличивать **Ha**, то λ сначала убывает, достигает минимума, а затем начинает увеличиваться в приблизительном соответствии с теорией ламинарного течения в трубе, сечение которой может быть вписано в сечение данной шероховатой трубы (рис. 3.22). Отсюда можно заключить, что при ламинарном течении в таких трубах шероховатость совершенно не влияет на течение, которое происходит только выше элементов шероховатости. Если считать, что границей между ламинарным и турбулентным режимами течения служит точка минимума на описанной выше кривой изменения коэффициента сопротивления, то получается критерий смены

*) Сказанное отнюдь не означает, что эта шероховатость не играет роли при турбулентном течении.

режимов

$$(\mathrm{Re}/\mathrm{Ha})_{\text{кр}} \approx 130,$$

т. е. такой же, как для гладкой трубы с той же формой сечения.

б) Течение в трубах с проводящими стенками. Вопрос об устойчивости течения в трубах с проводящими стенками изучен слабо. По-видимому, проводимость стенок не влияет на устойчивость плоскопараллельного течения в поперечном поле, пока справедливо безындукционное приближение.

Применим способ Лоренца и рассмотрим баланс энергии возмущения, наложенного на ламинарное течение. Будем предполагать, что справедливо безындукционное приближение. Как было установлено в гл. II, профиль скорости при плоскопараллельном ламинарном течении не зависит от проводимости стенок [55, 56]. Следовательно, при некотором определенном виде возмущения перенос энергии от осредненного движения к возмущенному и вязкая диссипация не могут зависеть от проводимости стенок. Таким образом, вопрос сводится к тому, зависит ли джоулева диссипация от проводимости стенок. Джоулева диссипация пропорциональна величине $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B})^2$. Второе слагаемое при данном виде возмущения заведомо не зависит от проводимости стенок, что же касается напряженности электрического поля, то она определяется средней по сечению потока скоростью, которая, как уже сказано выше, не зависит от проводимости стенок и не может меняться также при любом виде возмущения, подчиняющегося уравнению неразрывности. Следовательно, электрическое поле также остается неизменным при различной проводимости стенок и проводимость эта вообще не влияет на устойчивость ламинарного течения при $\mathrm{Re}_m \ll 1$.

Иное дело, если нельзя пренебречь магнитным полем индуцированных токов. Это поле, направленное всегда вдоль оси трубы, оказывает дополнительное гасящее воздействие на возмущения скорости. Величина же индуцированного магнитного поля существенно зависит от проводимости стенок. В частности, при плоскопараллельном течении между идеально проводящими стенками имеется следующее соотношение между индукцией внешнего поперечного магнитного поля B_y и максимальным значением индукции наведенного в жидкости продольного магнитного поля $B_{x,\,\max}$:

$$B_{x,\,\max} \sim B_y \mathrm{Re}_m .$$

Это значит, что для ртути при $\mathrm{Re} \approx 10^7$, а для натрия уже при $\mathrm{Re} \approx 10^6$ индукция наведенного поля становится величиной того же порядка, что и индукция поля, приложенного извне.

По экспериментальным данным о коэффициенте сопротивления в трубах с высокой электрической проводимостью стенок [43, 44, 57] трудно судить о возникновении турбулентности, так как увеличение потерь энергии за счет пульсационного движения трудно уловить на фоне очень больших потерь энергии, обусловленных индуцированными токами, которые замыкаются через проводящие стенки. Все же при малых значениях числа Ha можно заметить значительное превышение экспериментальных значений λ над теоретическими (рис. 3.23), объясняющееся наличием турбулентной диссипации энергии. Более подробный анализ приводит к выводу, что $(\mathrm{Re}/\mathrm{Ha})_{кр} \approx 300 \div 500$, т. е. в 1,5÷2 раза больше, чем при плоскопараллельном течении между непроводящими стенками. К этим данным нужно, однако, относиться с весьма большой осторожностью.

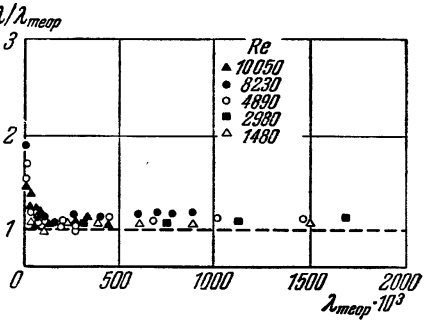


Рис. 3.23. Экспериментальные результаты о коэффициенте сопротивления при плоскопараллельном течении между проводящими стенками в присутствии поперечного магнитного поля.

в) Течение Куэтта. Большое число теоретических и экспериментальных работ посвящено изучению устойчивости течения Куэтта по отношению к вторичным течениям Тейлора [58—67]. Значительный интерес представляет вопрос о плоском течении Куэтта между непроводящими пластинами в поперечном магнитном поле [68—70]. Здесь мы встречаемся с течением, которое под действием поля становится гидродинамически неустойчивым, так как поле, воздействуя на осредненное течение, обусловливает искривление первоначально линейного профиля скорости. Согласно расчетам на основе теории бесконечно малых возмущений неустойчивость наблюдается при $\mathrm{Ha} \geqslant 4$.

Несомненно, однако, что по мере дальнейшего увеличения напряженности магнитного поля устойчивость течения снова должна повышаться. Действительно, при достаточно сильном магнитном поле профиль скорости вблизи каждой из стенок ничем не отличается от экспоненциального профиля, устойчивость которого, согласно исследованию Локка, повышается, а в средней части потока скорость постоянна. Вопрос этот детально пока никем не исследован.

Различные аспекты магнитогидродинамической устойчивости, выходящие за рамки этой книги, рассмотрены в работах [71—79].

§ 6. О влиянии конечных возмущений на переход к турбулентности в магнитогидродинамических течениях

Рассмотренные выше линейные теории устойчивости магнитогидродинамических течений дают сильно завышенные по сравнению с экспериментом значения критических чисел Рейнольдса. Достаточно детальные экспериментальные исследования перехода к турбулентности в магнитогидродинамических течениях, как мы видели, пока отсутствуют. Однако из общей гидродинамики известно, что критическое число Рейнольдса растет с уменьшением уровня начальных возмущений. Экспериментальные исследования течения в пограничном слое (в отсутствие магнитного поля) показали [80], что линейная теория устойчивости справедлива при весьма низком уровне начальных возмущений порядка 0,03%. В различных технических устройствах и при экспериментальных исследованиях влияния магнитного поля на критическое число Рейнольдса поток на входе в магнитное поле является, как мы уже выше подчеркивали, турбулентным и несет также иные значительные возмущения. Можно ожидать, что в этих условиях существенное значение имеют нелинейные эффекты. Полуэмпирическая теория перехода к турбулентности, в которой предпринята попытка учесть эти эффекты, предложена Левиным [81, 82, 83]. Теория основана на полуэмпирическом замыкании уравнений баланса вторых моментов пульсаций скорости (1.31) с помощью приближенного выражения для джоулевой диссипации и формул, предложенных Ротта [84] для течения при отсутствии магнитного поля:

для обмена энергией между тремя компонентами возмущенной скорости

$$\frac{1}{\rho}\overline{p'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}=-k\frac{\sqrt{q}}{l}\left(\overline{u'_iu'_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}q\right), \qquad (3.40)$$

для диссипации возмущенного движения

$$2\nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}}=\frac{2}{3}c\delta_{ij}\frac{q^{3/2}}{l}+c_{1,0}\nu\frac{\overline{u'_iu'_j}}{l^2}, \qquad (3.41)$$

где $q=\frac{1}{2}\overline{u'_iu'_i}$ — энергия; l — масштаб возмущений; k, c, $c_{1,0}$ — константы.

Первое слагаемое правой части (3.41) является известным выражением Колмогорова, вытекающим из гипотезы о локальной изотропии. Второе слагаемое учитывает прямое действие вязкости на возмущенное движение. Оно является основным при

малых числах Рейнольдса возмущений $\mathrm{re}_q = \sqrt{q}l/\nu$ и хорошо описывает диссипацию вблизи критического режима (вплоть до простейшего случая синусоидальных волн).

Таким образом, использование интерполяционной формулы (3.41) не накладывает существенных ограничений на вид рассматриваемых начальных возмущений.

Использование выражения (3.40), согласно которому обмен энергией между компонентами возмущений пропорционален разности их энергий, накладывает ограничение на вид рассматриваемых начальных возмущений и является основным фактором, определяющим область применимости данного метода. Рассматриваемые возмущения могут, например, возникать в результате действия входных устройств — сеток или хонейкомбов.

С целью получения аналитических зависимостей используется наиболее простое выражение для джоулевой диссипации возмущений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{u'_i u'_j}\right)_в = -\gamma^2 B^2 \frac{\sigma}{\rho}\overline{u'_i u'_j}, \qquad (3.42)$$

физический смысл которого особенно ясен при $i=j$: в магнитном поле с индукцией B пульсационная скорость u' индуцирует электрическое поле напряженностью $e' \sim u'B$ и ток $j \sim \sigma u' B$, определяющие джоулево тепло $\overline{je} \sim \sigma B^2 \overline{u'^2}$. В формуле (3.42) множитель $1/\rho$ появляется при переходе к кинематическим величинам, а γ можно рассматривать как эмпирический коэффициент. Согласно [83] $\gamma \approx 0{,}3$.

Выражение для джоулевой диссипации (3.42) удобно объединить со сходным по структуре вторым членом в (3.31)

$$\left(\nu\frac{c_1}{l^2} + \gamma^2 B^2 \frac{\sigma}{\rho}\right)\overline{u'_i u'_j} + \nu\frac{c_1}{l^2}\left(1 + \frac{\gamma^2}{c_1}\mathrm{ha}^2\right)\overline{u'_i u'_j}, \qquad (3.43)$$

где локальное число Гартмана $\mathrm{ha} = Bl\sqrt{\sigma/\rho\nu}$.

Таким образом, в рассматриваемом приближении действие произвольно ориентированного магнитного поля на возмущенное движение эквивалентно увеличению диссипативного коэффициента c_1

$$c_1 = c_{1,0}\left(1 + \frac{\gamma^2}{c_1}\mathrm{ha}^2\right). \qquad (3.44)$$

Поэтому все результаты, полученные для течения при отсутствии магнитного поля [84, 81], можно распространить на течения в магнитном поле заменой $c_{1,0}$ на c_1.

Для многих типов течений диффузия и конвекция возмущений не являются определяющими процессами. Пренебрегая ими

и используя для замыкания (1.31) полуэмпирические соотношения (3.41)—(3.44), получим систему из шести алгебраических уравнений, связывающих вторые моменты $\overline{u'_i u'_j}$ с локальными критериями $\mathrm{re}=\nu^{-1}l^2\frac{dU}{dy}$ и ha. Из этой системы можно получить уравнение энергии возмущений, корни которого re_q выражаются через re и ha. Можно показать, что эти корни обладают следующими свойствами:

а) Всегда существует тривиальное решение $\mathrm{re}_q=0$, соответствующее невозмущенному течению.

б) Для каждого значения локального числа Гартмана ha существует критическое значение локального числа Рейнольдса $\mathrm{re}_{кр}$. При $\mathrm{re}<\mathrm{re}_{кр}$ диссипация больше порождения при всех re_q, поэтому возмущения любой интенсивности угасают.

в) При $\mathrm{re}>\mathrm{re}_{кр}$ имеется два положительных корня. Бо́льший корень определяет стационарный турбулентный режим. Режим, соответствующий меньшему корню re_{q1}, неустойчив. Если начальные возмущения имеют $\mathrm{re}_q>\mathrm{re}_{q1}$, то порождение больше диссипации и возмущения развиваются до стационарного уровня (жесткое возбуждение). Если начальные возмущения имеют $\mathrm{re}_q<\mathrm{re}_{q1}$, то порождение меньше диссипации и возмущения затухают. Таким образом, re_{q1} является барьером начальных возмущений при переходе к турбулентности.

Наложение магнитного поля повышает критическое число Рейнольдса и барьер возмущений. Влияние поля на барьер возмущений оказывается более сильным. В рамках приближенного полуэмпирического рассмотрения повышение барьера устойчивости равно кубу повышения локального критического числа Рейнольдса.

Для критического числа Рейнольдса при течении в круглой трубе в продольном магнитном поле можно получить следующую приближенную формулу:

$$\mathrm{Re}_{кр}=2300+13{,}5\,\mathrm{Ha}+0{,}045\,\mathrm{Ha}^2. \qquad (3.45)$$

Сопоставление экспериментальных данных Фрейма и Хейзера, которые уже упоминались выше, с результатами расчета по формуле (3.45) показывает, что в диапазоне экспериментального исследования соответствие полуэмпирической теории с экспериментом можно считать удовлетворительным (рис. 3.24).

В экспериментах Фрейма и Хейзера установлено, что в продольном магнитном поле вместе с ростом критического числа Рейнольдса расширяется интервал чисел Рейнольдса $\Delta\mathrm{Re}$, в котором при заданном числе Стюарта N существует перемежаемость. Обработка данных, приведенных в работе Фрейма и Хей-

зера, показывает, что относительная ширина этого интервала $\Delta Re/Re_{кр}$ уменьшается с ростом $Re_{кр}$. Кроме того, осциллограммы показывают, что пульсации скорости в турбулентных пробках при течении в продольном магнитном поле, как и в случае $N=0$, имеют достаточно развитый спектр вплоть до $Re=Re_{кр}$*). Оба эти факта говорят в пользу принятых выше предположений о характере возмущений и возможности приближенного полуэмпирического описания нелинейных эффектов при переходе к турбулентности.

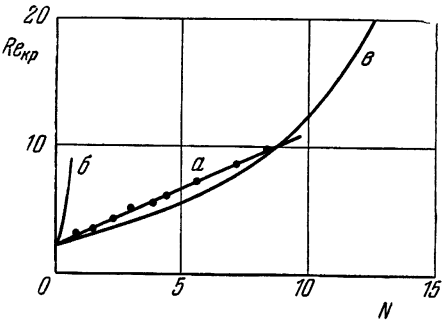


Рис. 3.24. Зависимость критического числа Рейнольдса от числа Стюарта при течении в трубе в продольном магнитном поле.
а — Экспериментальные данные Фрейма и Хейзера; *б* — теория Стюарта; *в* — полуэмпирическая теория.

Как и всякая полуэмпирическая теория, все изложенное в данном параграфе нуждается в экспериментальной проверке и уточнении. При экспериментальном исследовании течения в трубе в продольном магнитном поле наиболее интересно выяснить, происходит ли предсказываемое теорией усиление роста критического числа Рейнольдса при больших числах Стюарта. Для этого необходимо расширить исследованный диапазон чисел Стюарта до $N\approx30$. Экспериментальное подтверждение сильного роста в магнитном поле барьера начальных возмущений будет означать, что в магнитогидродинамических течениях переход к турбулентности может быть затянут до значительно больших чисел Рейнольдса (или до бóльших возмущений потока), чем в течениях при отсутствии магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, Москва, 153 (1954).
2. Бэтчелор Дж., Теория однородной турбулентности, ИЛ, Москва, (1955).
3. Lehnert B., The decay of magneto-turbulence in the presence of magnetic field and Coriolis force, Quart. Appl. Math. **12**, № 4, 321 (1955).

*) Ценность экспериментальных данных Фрейма и Хейзера несколько снижается тем обстоятельством, что нить термоанемометра была натянута по всему диаметру трубы. При этом развитый спектр пульсационной скорости может представлять собой результат наложения случайных пульсаций различного масштаба вблизи и вдали от стенок трубы.

4. Deissler R. B., Magneto-fluid turbulence with a uniform imposed magnetic field, Phys. Fluids **6**, № 9, 1250 (1963).
5. Елисеев Б. В., Затухание однородной турбулентности в слабопроводящей жидкости, ДАН СССР **161**, № 3, 560 (1965).
6. Елисеев Б. В., О затухании однородной турбулентности в магнитном поле, ПММ **29**, № 5, 961 (1965).
7. Nihoul J. C. J., The stochastic transform and the study of homogenous turbulence, Physica **31**, № 2, 141 (1963).
8. Nihoul J. C. J., Note sur la turbulence magnetique, J. de mecanique **2**, № 3, 251 (1963).
9. Nihoul J. C. J., Asymptotic law of decay of homogenous magnetoturbulence, Phys. Fluids **9**, 12, 2370. (1966).
10. Прудников М. М., Однородная плазменная турбулентность в сильном магнитном поле. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, № **4**, 10 (1961).
11. Lecocq P., Odres de grandeur en turbulence magnétodynamique, C. R. Acad. sci., Paris, **254**, № 7, 1198 (1962).
12. Lecocq P., Contribution a' l'e'tude des pertes de charge et profils de vitesse en e'coulment turbulent en magnetohydrodynamique. Bull. Centre rech. et essais Chatou, 8, Suppl. (1962).
13. Moffat H. K., On the suppression of turbulence by a uniform magnetic field, J. Fluid Mech., **28**, № 3, 571 (1967).
14. Nestlerode J. A., Lumley J. L., Initial response of the spectrum of isotropic turbulence to the sudden application of a strong magnetic field, Phys. Fluids **6**, № 9, 1260 (1963).
15. Moreau R., On magneto-hydrodynamic turbulence. Доклад на Рижском совещании по магнитной гидродинамике, Рига, сентябрь, 1968.
16. Lock R. C., Stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field, Proc. Roy. Soc., London, **A233**, 105 (1955).
17. Squire H. B., On the stability of three-dimensional distribution of viscous fluid between parallel walls, Proc. Roy. Soc. **A142**, № 847, 621 (1933).
18. Hunt J. C. R., On the stability of parallel flows with parallel magnetic fields, Proc. Roy. Soc. **A293**, 342 (1966).
19. Chiarully P., Freeman J. C., Stability of the boundary layer. Techn. Rep. NF-TR/1197—IA. Headquarters Air Material, Command., Dayton, 1948.
20. Lukoudis P. S., Transition from laminar to turbulent flow in magneto-fluid mechanic channels. Rev. Mod. Phys. **32**, № 4, 796 (1960).
21. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Цинобер А. Б., Турбулентные магнитогидродинамические течения в призматических и цилиндрических трубах, Магнитная гидродинамика, № 3, 3 (1966).
22. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, ИЛ, М., (1956), 396.
23. Брановер Г. Г., Слюсарев Н. М., Щербинин Э. В., Некоторые результаты измерения турбулентных пульсаций скорости в потоке ртути в присутствии поперечного магнитного поля, Магнитная гидродинамика, № 1, 33 (1965).
24. Слюсарев Н. М., Экспериментальное исследование влияния магнитного поля на турбулентные пульсации скорости, Аннотации докладов VI Рижского совещания по магнитной гидродинамике, Рига, **1**, 8 (1968).
25. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Кит Л. Г., Цинобер А. Б., О некоторых общих свойствах МГД-турбулентности в трубах и их исследовании с помощью кондукционных анемометров, Изв. АН СССР, МЖГ № 2, 35 (1970).
26. Thomas L. H., Qualitative analyses of the flow of fluids in pipes, Amer. Journ. of Mathem. **64**, 754 (1942).

27. Laufer J., Investigation of turbulent flow in two-dimensional channel, NACA Rep. 1053 (1951).
28. Laufer J., The structure of turbulence in fully developed channel flow, NACA Rep. 1174 (1955).
29. Stuart J. T., On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a coplanar magnetic field, Proc. Roy. Soc., London, **A221**, 189 (1954).
30. Fraim F. W., Heiser W. H., The effect of a strong longitudinal magnetic field in the flow of mercury in a circular tube, J. Fluid Mech. **33**, № 2, 397 (1968).
31. Ковнер Д. С., Красильников К. Ю., Экспериментальное исследование турбулентного течения электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле, ДАН СССР, № 5, 1096 (1965).
32. Globe S., The effect of a longitudinal magnetic field on pipe flow of mercury. Transaction of the ASME, series C, J. of Heat Transfer **83**, № 4, 445 (1961).
33. Генин Л. Г., Жилин В. Г., Влияние продольного магнитного поля на коэффициент сопротивления при течении ртути в круглой трубе. Теплофизика высоких температур **4**, № 2, 233 (1966).
34. Брановер Г. Г., Об особенностях подавления турбулентности в трубах с поперечным и продольным магнитным полем, Магнитная гидродинамика, № 2, 156 (1967).
35. Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидродинамика, ч. 1. «Наука», 328 (1966).
36. Левин В. Б., Чиненков И. А., Экспериментальное исследование турбулентного течения электропроводящей жидкости в трубе в продольном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 1, 33 (1965).
37. Sajben M., Fay J. A., Measurement of the growth of a turbulent mercury jet in a coaxial magnetic field, J. Fluid Mech. **27**, № 1, 81 (1967).
38. Генин Л. Г., Жилин В. Г., Экспериментальное исследование турбулентного течения ртути в круглой трубе в продольном магнитном поле, Теплофизика высоких температур, № 2, 302 (1967).
39. Shercliff J. A., The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic field, J. Fluid Mech. **1**, 644 (1956).
40. Хожаинов А. И., Турбулентное течение жидкого металла в магнитогидродинамических каналах круглого сечения, Журнал технической физики **36**, № 1, 147 (1965).
41. Хожаинов А. И., Стационарное течение жидкого металла в магнитогидродинамическом канале прямоугольного течения, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 4, 114 (1966).
42. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Щербинин Э. В., Турбулентное течение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, Магнитная гидродинамика, № 4, 78 (1966).
43. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Течение ртути в поперечном магнитном поле в трубах с непроводящими и проводящими стенками, Магнитная гидродинамика, № 1, 154 (1967).
44. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Течение проводящей жидкости в круглых трубах в поперечном магнитном поле, Изв. АН ЛССР, сер. физ.-техн. наук, № 3, 55 (1967).
45. Брановер Г. Г., Сопротивление МГД-труб, Магнитная гидродинамика, № 4, 3 (1967).
46. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Турунтаев С. В., Цинобер А. Б., Влияние поперечного магнитного поля на возмущения скорости за круглым цилиндром, обтекаемым электролитом, Магнитная гидродинамика, № 3, 63 (1969).

47. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M., The three dimensional nature of boundary layer instability, J. Fluid Mech. **12**, № 1, 1 (1962).
48. Wooler P. T., Instability of flow between parallel planes with coplanar magnetic field, Phys. of Fluids **4**, № 1, 24. (1961).
49. Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А., Влияние поперечного магнитного поля на внутреннюю структуру и гидравлическое сопротивление в потоках жидкого металла, Изв. АН ЛССР, № 1, 59 (1961).
50. Брановер Г. Г., Дукуре Р. К., О влиянии шероховатости стенок канала на сопротивление при турбулентном течении жидкого металла в поперечном магнитном поле. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики», 3, Изд. АН ЛССР, 77 (1963).
51. Дукуре Р. К., Влияние относительной шероховатости на течение электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля, Магнитная гидродинамика, № 1, 29 (1965).
52. Дукуре Р. К., Влияние относительной шероховатости на магнитогидродинамическое течение в прямоугольных трубах, Магнитная гидродинамика, № 2, 109 (1966).
53. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Дукуре Р. К., Сопротивление шероховатых труб при турбулентном течении в поперечном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 4, 148 (1966).
54. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Течение в шероховатой трубе, расположенной длинной стороной сечения параллельно магнитному полю, Магнитная гидродинамика, № 4, 80 (1967).
55. Chang C. C., Lundgren T. S., Duct flow in magnetohydrodynamics, ZAMP **12**, № 2, 100 (1961).
56. Chang C. C., Yen Y. T., Magnetohydrodynamic channel flow asinfluenced by wall conductance, ZAMP **13**, № 3, 266 (1962).
57. Дмитриев К. И., Михайлов Ю. М., Пресняков В. С., Экспериментальное исследование магнитогидродинамического течения жидкого металла в прямоугольном канале с проводящими стенками. Международный симпозиум по производству энергии с помощью МГД-генераторов, Зальцбург, 1 (1966), 74.
58. Ленерт Б., Экспериментальное исследование неламинарного течения ртути в магнитном поле. В книге Л. Гаррис, МГД-течения в каналах, ИЛ, Москва (1964).
59. Chandrasekhar S., The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a magnetic field, Proc. Roy. Soc. **A246**, № 1246, 301 (1958).
60. Chandrasekhar S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford U. P. (1961).
61. Chandrasekhar S., The stability of nondissipative Couette flow in hydromagnetics, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **46**, № 12, 253 (1960).
62. Chandrasekhar S., Elbert D., The stability of viscous flow between rotating cylinders in presence of magnetic field. Proc. Roy. Soc. **A262**, № 1311, 443 (1961).
63. Donnelly R. J., Ozima H., Experiments on stability of flow between rotating cylinders in the presence of magnetic field, Proc. Roy. Soc. **A266**, 272 (1962).
64. Donnelly R. J., Kaldwell T. J., Experiments on the stability of hydromagnetic Couette flow, J. Fluid Mech. **19**, 2, 257 (1964).
65. Kurzweg U. H., The stability of Couette flow in the presence of an axial magnetic field, J. Fluid Mech. **17**, № 1, 52 (1963).
66. Deardorff J. W., On the stability of viscous plane Couette flow, J. Fluid Mech., **15**, 4, 623 (1963).

67. Roberts P. H., The stability of hydromagnetic Couette flow, Proc. Cambr. Soc. **60**, 3, 635, (1964).
68. Tatsumi T., Suppl. Progr. Theoret. Phys., № 24, (1962). Magneto Fluid Dynamics, ch. VI, MHD-Stability and Turbulence, 156.
69. Павлов К. Б., Об устойчивости плоского течения Куэтта в присутствии магнитного поля. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», Рига, (1962), 99.
70. Kakutani T., The hydromagnetic stability of the modified plane Couette flow in the presence of a transverse magnetic field, J. Phys. Soc. Japan **19**, 6, 1041 (1964).
71. Michael D. H. Stability of plane parallel flows of electrically conducting fluids, Proc. Cambr. Phil. Soc. **49**, № I, 166 (1953).
72. Тарасов Ю. А., Устойчивость плоского пуазейлева течения плазмы с конечной проводимостью в магнитном поле, ЖЭТФ **37**, № 6, 170, 1708 (1959).
73. Павлов К. Б., Тарасов Ю. А., Об устойчивости течения вязкой проводящей жидкости между параллельными плоскостями в перпендикулярном магнитном поле, ПММ **24**, № 4, 723 (1960).
74. Велихов Е. П., Устойчивость плоского пуазейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле, ЖЭТФ **36**, № 4, 1192 (1959).
75. Велихов Е. П., Устойчивость течения идеально проводящей жидкости между вращающимися цилиндрами в магнитном поле, ЖЭТФ **36**, № 5, 1398 (1959).
76. Rossow V. J., Boundary layer stability diagrams for electrically conducting fluids in the presence of a magnetic field, NASA, techn. rep., № R-37 (1959).
77. Архипов В. Н., Влияние магнитного поля на устойчивость пограничного слоя, ДАН СССР **129**, № 4, 751 (1959).
78. Drazin P. G., Stability of parallel flow in a parallel magnetic field at small magnetic Reynold numbers, J. Fluid Mech., **8**, № 1, 130 (1960).
79. Тверский П. А., Об устойчивости течения хорошо проводящей жидкости поперек магнитного поля, ДАН СССР **143**, № 2, 301 (1962).
80. Шлихтинг Г., Возникновение турбулентности, ИЛ, Москва, 1962.
81. Левин В. Б., К расчету основных характеристик турбулентных потоков с поперечным сдвигом, Теплофизика высоких температур 2, № 4, 588 (1964).
82. Левин В. Б., О стабилизирующем влиянии продольного магнитного поля на неоднородные турбулентные течения электропроводной жидкости, Магнитная гидродинамика, № 2, 3 (1965).
83. Левин В. Б., О переходе к турбулентности в МГД-течениях при конечных возмущениях, Магнитная гидродинамика, № 3 (1970).
84. Rotta I., Statistiche Theorie nichthomogener Turbulenz, Zs. f. Phys. **129**, 547 (1951).

ГЛАВА IV

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ В ПРИСУТСТВИИ ПОПЕРЕЧНОГО И ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

§ 1. Основные представления о турбулентном течении в магнитном поле

Рассматривая в предыдущей главе вопросы перехода от ламинарного течения к турбулентному, мы по необходимости коснулись уже многих особенностей турбулентного течения в магнитном поле. Перечислим сведения, касающиеся течения, в котором генерация турбулентности еще не полностью подавлена.

Магнитное поле препятствует хаотическому турбулентному движению — «подавляет» турбулентность. Сам факт подавления сейчас подтвержден уже экспериментально. Помимо довольно многочисленных косвенных подтверждений, следующих из анализа экспериментальных данных о коэффициенте сопротивления и распределении осредненных скоростей течения, имеются результаты непосредственных измерений пульсаций скорости [1, 2, 3], пульсаций температуры [4], а также данные о влиянии магнитного поля на турбулентный массообмен и теплообмен [5, 6]. Совокупность этих результатов достаточно убедительно показывает, что под влиянием магнитного поля интенсивность турбулентности уменьшается. Воздействие поля на турбулентные возмущения определяется характерным размером — масштабом этих возмущений. Наиболее существенно влияние на возмущения крупных масштабов.

Этот вывод также имеет некоторые экспериментальные подтверждения [3, 4, 6]. Исходя из результатов экспериментов по изучению сопротивления в присутствии поперечного магнитного поля, можно сделать вывод о том, что в этом случае уменьшение амплитуд турбулентных пульсаций происходит постепенно, плавно. В присутствии поперечного магнитного поля увеличивающейся напряженности ламинарное течение можно рассматривать как асимптотическое состояние первоначально турбулентного потока. Имеющиеся результаты непосредственных измерений турбулентных пульсаций скорости в присут-

ствии поперечного магнитного поля в принципе согласуются с этим выводом*).

Продольное магнитное поле при достигнутых в опытах значениях напряженности, по-видимому, не приводит к полной ламинаризации течения. Оно лишь значительно снижает интенсивность турбулентности и обусловливает специфическую ее анизотропию. Пока еще мало известно о том, в какой степени магнитное поле искажает закономерности турбулентного движения. Однако высказывавшееся еще давно предположение о том, что оно обусловливает анизотропию турбулентности, так как движение вдоль магнитного поля является предпочтительным [7, 8], в последнее время получает косвенное экспериментальное подтверждение [9, 10].

Выше мы рассматривали воздействие магнитного поля на пульсации скорости. Известно, что разделение скорости на осредненную и пульсационную части является условным. Можно, однако, обратить внимание на то, что при течении в поперечном магнитном поле это разделение приобретает добавочный физический смысл по сравнению с течением в отсутствие магнитного поля. В самом деле, напряженность электрического поля, индуцированного плоскопараллельным движением жидкости определяется, как показано в предыдущей главе, средней скоростью, и пульсации скорости любой амплитуды не меняют этой напряженности.

Далее, как и в предыдущей главе, мы часто будем применять рейнольдсову схематизацию, используя то обстоятельство, что взаимодействие поперечного магнитного поля с осредненным течением подобно взаимодействию магнитного поля с ламинарным течением.

§ 2. О полуэмпирических теориях турбулентных течений в трубах в присутствии магнитного поля

В последние годы были предложены различные варианты полуэмпирических теорий турбулентных течений в трубах в присутствии магнитного поля. Их можно подразделить на следующие три группы:

1. Теории, использующие уравнения Рейнольдса (1.27), в которых турбулентные напряжения выражаются либо по формулам, заимствованным из общей гидродинамики, либо по модифицированным формулам, учитывающим влияние магнитного поля [12—15].

*) Здесь речь идет о вновь генерируемых возмущениях, а не о возмущениях, сносимых из вышележащих участков.

2. Теории, основанные на уравнениях вторых моментов пульсаций скорости, в которых часть членов выражается полуэмпирически [11, 16, 17].

3. Теории, основанные на анализе размерностей [18], интегральных соотношениях [19] и др.

Нужно обратить внимание на то, что в общей гидродинамике полуэмпирические теории справедливы как для плоского, так и для осесимметричного течения. В магнитной гидродинамике положение существенно иное. Теория, разработанная для плоского течения в присутствии поперечного магнитного поля, не может быть применена к течению в круглой трубе. Действительно, в присутствии поперечного магнитного поля круговая симметрия течения нарушается, и по этой причине пока не предложен способ полуэмпирического анализа столь, казалось бы, простого и практически важного случая турбулентного течения, как течение в круглой трубе при наличии поперечного магнитного поля.

В указанных выше работах предложены теории для плоского течения в плоскости поперечного магнитного поля и для плоского и осесимметричного течения в продольном магнитном поле. Во всех этих случаях стенки предполагаются гладкими. Ниже будет показано, что полуэмпирические теории могут быть разработаны и в случае плоского течения в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, а также в различных случаях течения между шероховатыми стенками.

Турбулентное течение в плоскости магнитного поля, т. е. гартманово турбулентное течение, обладает некоторыми преимуществами для полуэмпирического анализа. Действительно, в этом случае в уравнении Рейнольдса присутствует член, выражающий осредненную по времени объемную электромагнитную силу, приложенную к жидкости. Когда напряженность магнитного поля значительна, этот член во много раз больше члена, учитывающего турбулентное трение и выражаемого приближенно на основании экспериментальных данных и тех или иных гипотез. Если даже значение напряжения турбулентного трения, подставленное в уравнение Рейнольдса, выражено весьма грубо, то ошибка в решении оказывается все же относительно малой, ввиду присутствия электромагнитного члена, и решение может получиться вполне удовлетворительным.

Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Рейнольдсово уравнение движения для рассматриваемого случая течения получено в гл. I (уравнение (1.29)). Запишем его здесь в следующем виде:

$$\frac{d^2u}{dy^2} - \mathrm{Ha}^2 u = -\left(\frac{\lambda\,\mathrm{Re}}{2} + \mathrm{Ha}^2\right) + \mathrm{Re}\,\frac{d\overline{(u'v')}}{du}. \qquad (4.1)$$

Если начало координат расположено на оси потока, то граничные условия имеют вид

$$u|_{y=\pm 1}=0. \tag{4.2}$$

Наконец, интегральное условие сохранения расхода следующее:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} u\,dy=1. \tag{4.3}$$

Обращая оператор, стоящий в уравнении (4.1) слева, с учетом граничных условий (4.2) получим

$$u(y)=\int_{-1}^{1} k_1(y,\eta)\left\{-\frac{\lambda\,\mathrm{Re}}{2}-\mathrm{Ha}^2+\mathrm{Re}\frac{d\overline{(u'v')}}{du}\right\}d\eta, \tag{4.4}$$

где

$$k_1(y,\eta)=-\frac{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}\,[2-|y-\eta|]-\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}\,(y+\eta)}{2\,\mathrm{Ha}\,\mathrm{sh}\,2\mathrm{Ha}}$$

функция Грина оператора $\frac{d^2}{dy^2}-\mathrm{Ha}^2$ с граничными условиями (4.2).

Используя интегральное условие (4.3), можно исключить константу $-\left(\frac{\lambda\mathrm{Re}}{2}+\mathrm{Ha}^2\right)$ из уравнения (4.4). В самом деле, интегрируя (4.4) по y и учитывая (4.3), получим

$$\frac{\lambda\,\mathrm{Re}}{2}+\mathrm{Ha}^2=$$

$$=\frac{\mathrm{Ha}^2}{1-\frac{\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}}}-\frac{\mathrm{Re}}{2\left(1-\frac{\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}}\right)}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}\,y}{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}\right)\frac{d\tau}{d\eta}\,d\eta, \tag{4.5}$$

где $\tau=-\overline{(u'v')}$.

Далее, подставляя (4.5) в (4.4), получим следующее интегральное уравнение относительно $u(y)$:

$$u(y)=u_H(y)+\int_{-1}^{1} k(y,\eta)\frac{d\tau}{d\eta}\,d\eta, \tag{4.6}$$

где

$$k(y, \eta) = \frac{\mathrm{Re}}{2\,\mathrm{Ha}} \frac{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}[2-|y-\eta|]-\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}\,(y+\eta)}{\mathrm{sh}\,2\,\mathrm{Ha}} -$$

$$- \frac{\mathrm{Re}}{2\,\mathrm{Ha}} \frac{\left(1-\dfrac{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}\,y}{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}\right)\left(1-\dfrac{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}\,\eta}{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}\right)}{\mathrm{Ha}-\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}};$$

$u_H = \dfrac{1-\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}\,y/\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}{1-\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}/\mathrm{Ha}}$ — гартмановский профиль скорости.

Мы называем (4.6) интегральным уравнением, поскольку τ, вообще говоря, зависит от u, du/dy и т. д. Из (4.6) следует

$$u(y) = u_H(y) + \int_{-1}^{1} \frac{\partial k}{\partial \eta} \tau\, d\eta. \tag{4.7}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\int_{-1}^{1} \left|\frac{\partial k}{\partial \eta}\right| d\eta \leqslant 2 \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}} \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}. \tag{4.8}$$

Это позволяет получить из (4.7) следующую оценку:

$$|u(y) - u_H(y)| \leqslant 2 \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}} \mathrm{th}\,\mathrm{Ha} \cdot \max|\tau|. \tag{4.9}$$

Исходя из самого осторожного допущения о том, что

$$\max|\tau| \leqslant \max|\tau_0|, \tag{4.10}$$

и учитывая, что $\max|\tau_0| \approx \tau_{w0} = \lambda_0/2$ и что по Блазиусу $\lambda_0 = 0{,}056/\mathrm{Re}^{0{,}25}$, окончательно находим

$$|u(y) - u_H(y)| \leqslant 0{,}056 \frac{\mathrm{Re}^{3/4}}{\mathrm{Ha}} \mathrm{th}\,\mathrm{Ha}. \tag{4.11}$$

Если принять во внимание, что уже при $\mathrm{Ha} \geqslant 3$ $\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}$ отличается от единицы менее чем на 1%, то можно заключить, что при $\mathrm{Ha} \geqslant \mathrm{Re}^{3/4}$ профиль скорости отличался бы от ламинарного профиля Гартмана лишь на 5% даже при сохранении той же степени турбулентности течения, которая характерна для течения в отсутствие магнитного поля.

Таким образом, большая или меньшая произвольность гипотезы, принятой относительно турбулентного трения, скрадыва-

ется при расчетах течения в поперечном поле тем решающим влиянием, которое оказывает на течение эффект Гартмана. Именно это обстоятельство позволяет применять полуэмпирические теории турбулентности при течении в поперечном магнитном поле вплоть до полной ламинаризации течения. При течении же в продольном поле эффекта Гартмана нет, и обоснованность гипотезы о связи турбулентного трения с характеристиками осредненного течения становится особенно важной.

Первыми (по времени разработки) были полуэмпирические теории, которые выше отнесены к третьей группе. Эти теории описывали случай гартмановского турбулентного течения. Теория Гарриса [18], построенная на анализе размерностей, приводит к профилю скорости, представляющему собой сумму обычного логарифмического профиля в универсальных координатах и некоторой эмпирической добавки, зависящей от числа Стюарта и координаты. Гаррис впервые проанализировал распределение напряжений турбулентного трения по сечению потока. Коэффициент сопротивления, который может быть получен при интегрировании профиля скорости Гарриса, не согласуется с данными экспериментов.

Теория [19], предложенная еще в 1961 г., основана на интегральных соотношениях. Позволяя выяснить некоторые общие закономерности, она, однако, мало удобна для практического применения.

Теория, разработанная Ковнером [14], базируется на уравнении Рейнольдса и модифицированной гипотезе локальности Лойцянского. При течении в магнитном поле, где имеется последовательно усиливающееся влияние вязкости не только по мере приближения к стенке, но и по мере увеличения индукции магнитного поля, попытка использования гипотезы локальности вполне естественна.

Магнитогидродинамическая модификация гипотезы локальности состоит в том, что критическое значение локального числа Рейнольдса поставлено в зависимость от локального числа Стюарта. Ковнеру удалось, однако, получить результаты, согласующиеся с экспериментом, лишь после того, как он допустил, что путь смешения (в смысле Прандтля) убывает в присутствии магнитного поля.

Несколько вариантов полуэмпирических теорий, основанных на уравнениях вторых моментов пульсаций скорости и полуэмпирических соотношениях, предложенных в общей гидродинамике Ротта [20], были разработаны Ковнером и Левиным [11, 17].

Подробное рассмотрение и критический анализ упомянутых здесь и еще некоторых других полуэмпирических теорий дается в монографии [15].

§ 3. Об учете влияния магнитного поля на турбулентное течение через посредство пути смешения

Большинство полуэмпирических теорий, известных в общей гидродинамике, используют понятие о пути смешения в том смысле, как оно было введено Прандтлем [21]. Попытаемся установить, как влияет на величину пути смешения магнитное поле. Используем для этого результаты, полученные в гл. III относительно влияния магнитного поля на возмущения различных масштабов, имея в виду, что путь смешения, с которым связывается турбулентный перенос количества движения, должен по порядку величины соответствовать низкочастотной (крупномасштабной) энергосодержащей части спектра масштабов турбулентных возмущений.

В гл. III было показано, что влияние магнитного поля на турбулентные возмущения течения определяется масштабом последних, причем наиболее сильно магнитное поле влияет на возмущения больших масштабов. Там же было введено понятие о «внешнем масштабе турбулентности», представляющем собой масштаб самых крупных турбулентных пульсаций, генерация которых еще возможна при данном значении числа Стюарта. Была получена оценка

$$l_e \sim \frac{1}{N^{3/2}} \tag{4.12}$$

(здесь величина l_e безразмерная, отнесенная к размеру основного течения L).

В силу сделанных выше замечаний о пути смешения естественно положить в случае течения в магнитном поле

$$l \approx l_e. \tag{4.13}$$

Формула (4.12) получена из соотношений, справедливых для однородной изотропной турбулентности. В трубах турбулентность неоднородна и анизотропна. Более того, как указывалось в гл. II, магнитное поле нарушает, по-видимому, свойство локальной изотропности, имеющееся при течении в отсутствие магнитного поля. Будем поэтому исходить из предположения, что рассматривается течение в магнитном поле такой напряженности, при которой турбулентность еще можно считать локально изотропной. Далее разобьем поток в трубе на слои, параллельные стенкам, толщину которых примем равной kl, где k — некоторый численный коэффициент. Тогда в пределах каждого такого слоя можем считать турбулентность более или менее близкой к однородной.

Будучи записанной для одного такого слоя, формула (4.12) примет вид

$$l_e \sim \frac{1}{k^{3/2}(\mathrm{N}l)^{3/2}},$$

а с учетом (4.13) можем написать

$$l \sim \frac{1}{k^{3/2}(\mathrm{N}l)^{3/2}}. \qquad (4.15)$$

Для дальнейшего упрощения положим в первом приближении в знаменателе правой части $l \approx l_0$, где l_0 — путь смешения при отсутствии поля. Исходя из (4.15) и учитывая, что $\mathrm{N}=0$ при $l=l_0$, запишем формулу для вычисления пути смешения при течении в магнитном поле

$$l=\frac{l_0}{1+\chi(\mathrm{N}\,l_0)^{3/2}}, \qquad (4.16)$$

где χ — безразмерная константа.

Для вычисления l_0 можно воспользоваться формулой Прандтля—Никурадзе с поправкой, предложенной Ван-Драйстом [22] и учитывающей более быстрое затухание турбулентности вблизи твердой стенки:

$$l_0=l_{00}[1-\exp(-\alpha\,\mathrm{Re}\sqrt{\lambda/2}\,y)], \qquad (4.17)$$

где α — численная константа, l_{00} — путь смешения в отсутствие магнитного поля, вычисленный по Прандтлю—Никурадзе

$$l_{00}=0{,}14-0{,}08(1-y)^2-0{,}06(1-y)^4. \qquad (4.18)$$

После того как установлено выражение для пути смешения в присутствии магнитного поля, напряжение турбулентного трения может быть вычислено по одной из формул, предложенных в общей гидродинамике. Можно, в частности, воспользоваться формулой Прандтля

$$\tau_т=-\overline{u'v'}=l^2\left|\frac{du}{dy}\right|\frac{du}{dy} \qquad (4.19)$$

(формула написана в безразмерном виде).

Однако часто принимаемое в общей гидродинамике допущение о том, что во всей области течения $\tau=\tau_w$, где τ_w — напряжение на стенке, в присутствии поперечного магнитного поля неприемлемо. Далее, в полуэмпирических теориях турбулентных течений часто полностью пренебрегают вязким трением. Это допущение неприемлемо как в поперечном, так и в продольном

магнитном поле, ибо, как мы знаем, магнитное поле любой ориентации снижает степень турбулентности потока, и соответственно роль вязкости повышается. Из сказанного следует, что в присутствии магнитного поля полуэмпирическая теория турбулентных течений в трубах должна основываться на полном уравнении Рейнольдса, в котором сохранены все члены.

До сих пор мы имели в виду течение в трубе с гладкими стенками. Если стенки шероховатые, то вопрос о пути смешения требует специального анализа.

Вдали от шероховатых стенок магнитное поле, по-видимому, влияет на турбулентность аналогично тому, как это имеет место в гладкой трубе и здесь можно пользоваться формулой (4.16). Однако в непосредственной близости к стенке путь смешения зависит от размера шероховатости. В отсутствие магнитного поля эту зависимость от размера шероховатости исследовал Ротта [23] на основании экспериментальных данных Никурадзе [24]. Ротта получил следующую зависимость, справедливую вблизи шероховатой стенки (в безразмерном виде):

$$l_1 = -0{,}76\left(\mathrm{Re}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)^{-1} + 0{,}014k, \tag{4.20}$$

где k — относительная высота шероховатости.

Полная формула для пути смешения при течении в трубе с шероховатыми стенками записывается, согласно Ротта, следующим образом:

$$l_0 = l_1 + l_{00}, \tag{4.21}$$

где l_{00} — путь смешения в гладкой трубе.

Рассмотрим, как следует преобразовать эту формулу в случае течения в поперечном магнитном поле. Вдали от стенки величина l_{00} значительно больше l_1, и поэтому l_{00} можно считать характерным размером возмущения скорости, испытывающего воздействие магнитного поля. Повторяя рассуждения, проведенные при рассмотрении течения между гладкими стенками, мы придем, очевидно, к следующему выражению для пути смешения в области, достаточно удаленной от шероховатой стенки:

$$l = \frac{l_{00}}{1 + \chi(\mathrm{N}\, l_{00})^{3/2}}. \tag{4.22}$$

Понятно, что, поскольку рассматривается область, далекая от стенки, формула Прандтля—Никурадзе для пути смешения практически совпадает с формулой Ван-Драйста, т. е. $l_0 \approx l_{00}$, и потому

формула (4.22) тождественна с формулой (3.16). Что касается величины l_1, то для выяснения вопроса о том, как влияет на нее поперечное магнитное поле, следует обратиться к результатам расчета ламинарного течения между шероховатыми плоскостями в присутствии поперечного магнитного поля (гл. II, § 6). Согласно этим результатам поперечное магнитное поле обусловливает при ламинарном течении искривление линий тока над выемками между элементами шероховатости и увеличение эффективной высоты шероховатости. Очевидно, что в качественном отношении воздействие поперечного магнитного поля приводит к аналогичным результатам и при турбулентном течении. Это позволяет считать, что l_1 увеличивается с усилением магнитного поля. В качестве определяющего критерия подобия в данном случае естественно выбрать число Стюарта, поскольку в явлениях, связанных с обтеканием тел, определяющим является, как показывают теория и эксперимент (гл. VI и IX), именно этот критерий. Таким образом, мы приходим к выводу, что при турбулентном течении в трубе с шероховатыми стенками и наличии поперечного магнитного поля путь смешения может быть выражен в следующем виде:

$$l=\frac{l_{00}}{1+\chi(\mathrm{N}\,l_{00})^{3/2}}+l_1 f(\mathrm{N}), \tag{4.23}$$

причем возрастающая функция $f(\mathrm{N})$ должна быть найдена из сопоставления результатов расчетов и экспериментов.

К вопросам о значении константы χ и виде функции $f(\mathrm{N})$ мы вернемся ниже.

§ 4. Решение дифференциальных уравнений движения для различных случаев турбулентного течения во внешнем магнитном поле

Рассмотрим сейчас коротко ход решения уравнений движения для некоторых главных случаев течения. Все, что касается результатов расчетов и сопоставления их с данными экспериментов, составит содержание ряда последующих параграфов.

В общем случае мы имеем следующую краевую задачу для $u(y)$, получающуюся из (1.29) с учетом (4.19):

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{du}{dy}+l^2(y)\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]+\mathrm{N}(1-u)+\frac{\lambda}{2}=0, \tag{4.24}$$

$$u|_{y=0}=0; \quad \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=1}=0. \tag{4.25}$$

Кроме того, должно удовлетворяться очевидное интегральное условие сохранения расхода:

$$\int_0^1 u(y, \lambda) = 1, \tag{4.26}$$

из которого определяется коэффициент сопротивления λ, рассматриваемый как параметр.

В случае продольного магнитного поля имеем следующее уравнение, являющееся частным случаем уравнения (4.24):

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{du}{dy}+l^2(y)\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]+\frac{\lambda}{2}=0. \tag{4.27}$$

Начнем с рассмотрения последнего, более простого случая. Интегрируя уравнение (4.27) в пределах от 0 до y, получаем

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{du}{dy}+l^2(y)\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\frac{\lambda}{2}y-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{du}{dy}\Big|_{y=0}-l^2(0)\left(\frac{du}{dy}\Big|_{y=0}\right)^2=0. \tag{4.28}$$

Допустим сначала, что стенки гладкие. Тогда $l(0)=0$. Из условия $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=1}=0$ находим, что $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\mathrm{Re}\,\frac{\lambda}{2}$ и вместо (4.28) получаем

$$\frac{du}{dy}+\mathrm{Re}\,l^2(u)\left(\frac{du}{dy}\right)^2-\mathrm{Re}\,\frac{\lambda}{2}(1-y)=0. \tag{4.29}$$

Если l задается зависимостью, в которую не входит du/dy, то для du/dy имеется квадратное уравнение. Выбирая неотрицательное решение, получаем

$$\frac{du}{dy}=\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(1-y)}{1+\sqrt{1+2\,\mathrm{Re}^2\lambda(1-y)l^2(y)}}, \tag{4.30}$$

откуда

$$u(y)=\int_0^y \frac{\mathrm{Re}\,\lambda(1-s)\,ds}{1+\sqrt{1+2\,\mathrm{Re}^2\lambda(1-s)l^2(y)}}. \tag{4.31}$$

Ниже будут рассмотрены также некоторые гипотезы, при которых l зависит от du/dy, и уравнение для du/dy становится трансцендентным. Здесь, однако, мы не будем подробнее обсуждать этот вопрос.

Имея выражение (4.31) для $u(y)$, находим коэффициент сопротивления λ непосредственно из интегрального условия (4.26):

$$\int_0^1 u(y,\lambda)\,dy \equiv \int_0^1 \frac{\mathrm{Re}\,\lambda(1-y)^2\,dy}{1+\sqrt{1+2\,\mathrm{Re}^2\lambda(1-y)l^2(y)}} = 1. \qquad (4.32)$$

После определения λ скорость $u(y)$ может быть найдена из уравнения (4.27). Поскольку $u(0)=0$ и $du/dy|_{y=0}=\mathrm{Re}\,\frac{\lambda}{2}$, то имеем задачу Коши для этого уравнения.

Нужно отметить, что $u(y)$ можно найти из (4.29) или (4.31). Поскольку, однако, в случае течения в поперечном поле необходимо интегрировать уравнения (4.24), то соответствующая программа вычислений на машине может быть использована и здесь.

При рассмотрении течения в поперечном магнитном поле должно быть решено общее уравнение (4.24). Проинтегрировав его в пределах от 0 до 1 и учитывая условие $du/dy|_{y=1}=0$, получим

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{du}{dy}\Big|_{y=0} - l^2(0)\left(\frac{du}{dy}\Big|_{y=0}\right)^2 + \mathrm{N}\int_0^1 (1-u)\,dy + \frac{\lambda}{2} = 0. \qquad (4.33)$$

Если интегральное условие (4.26) выполняется, то должно быть

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{du}{dy}\Big|_{y=0} - l^2(0)\left(\frac{du}{dy}\Big|_{y=0}\right)^2 + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Если стенки трубы гладкие, то имеем также $l(0)=0$, и потому

$$\frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \mathrm{Re}\,\frac{\lambda}{2}. \qquad (4.34)$$

Если же стенки шероховатые, то

$$\frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \frac{\mathrm{Re}\,\lambda}{1+\sqrt{1+2\,\mathrm{Re}^2\lambda l^2(0)}}. \qquad (4.35)$$

Таким образом, интегральное условие заменяется условиями (4.34) и (4.35) при гладких и шероховатых стенках соответственно.

При получении приводимых ниже численных результатов уравнение (4.24) решалось способом пристрелки. При фиксиро-

ванных Re и N выбиралось некоторое значение λ_1, и решалась задача Коши для уравнения (4.24) с условиями $u(0)=0$; $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = \frac{\mathrm{Re}\lambda_1}{2}$. Если при выбранном значении λ_1 получалось $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=1}<0$, то следующее значение λ_2 выбиралось большим, чем λ_1, если же $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=1}>0$, то $\lambda_2<\lambda_1$ *).

Таким путем можно получить достаточно узкий интервал значений λ. Делением этого интервала пополам находилось λ, а затем и $u(y)$.

Аналогично решалась задача и для течений в шероховатых трубах. При этом отличалось лишь значение $du/dy|_{y=0}$.

Следует заметить, что при больших значениях N указанным здесь способом удавалось получать профили $u(y)$ лишь в начальной части отрезка [0, 1] — приблизительно до начала области малых градиентов скорости.

Этот способ неприменим также при $\mathrm{N}=0$, тогда из $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = \mathrm{Re}\frac{\lambda}{2}$ следует только $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=1}=0$ и интегральное условие нужно использовать отдельно. В этом случае задача решается так же, как для течения в продольном магнитном поле.

§ 5. Плоскопараллельное турбулентное течение в плоскости поперечного магнитного поля (гартмановское турбулентное течение)

Обратимся теперь к сопоставлению результатов расчетов и экспериментов и установлению численных значений констант. В этом параграфе мы рассмотрим гартмановское турбулентное течение, ограниченное гладкими стенками.

---

*) Действительно, интегрируя уравнение (4.24) в пределах от 0 до 1 и учитывая условие $du/dy|_{y=0}=\mathrm{Re}\,\frac{\lambda}{2}$, получаем

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=1} + l^2(1)\left(\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=1}\right)^2 + \mathrm{N}\left(1-\int_0^1 u\,dy\right)=0,$$

а для решений рассматриваемой задачи Коши

$$\int_0^1 u_1(y,\lambda_1)\,dy > \int_0^1 u_2(y,\lambda_2)\,dy, \text{ если } \lambda_1>\lambda_2.$$

В основное уравнение (4.24) входят две константы α и χ (мы не упоминаем константы, входящие в выражение для l_{00}, поскольку они остаются заведомо такими же, как в общей гидродинамике). Первая из них не связана с магнитогидродинамическими явлениями. Поэтому значение α можно было бы принять таким же, как в работе Ван-Драйста [22]. Поскольку, однако, мы

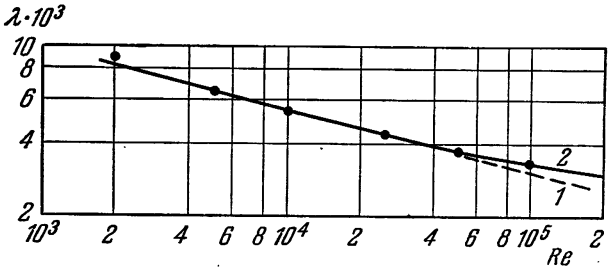


Рис. 4.1. Сопоставление результатов расчета коэффициента сопротивления при $\mathbf{N}=0$ с законами Блазиуса — *1* и Прандтля — *2*.

несколько видоизменили исходные допущения Ван-Драйста, желательно подобрать значение α заново. Путем сопоставления решения уравнения (4.28) с экспериментальными данными о коэффициенте сопротивления, полученными в общей гидродинамике, найдено $\alpha=1/27{,}5$. Это весьма близко к значению, найденному Ван-Драйстом. На рис. 4.1 показаны кривые для коэффициентов сопротивления, соответствующие известным законам Блазиуса и Прандтля, и точки, рассчитанные описанным выше способом.

Отметим, что решение уравнения (4.24), полученное при числе Стюарта $\mathbf{N}=0$, представляет самостоятельный интерес, так как оно соответствует экспериментам вблизи оси трубы несколько лучше, чем решение Ван-Драйста. Это объясняется тем, что здесь не используется допущение $\tau=\tau_w=\text{const}$, а вместо выражения $l_{00}=0{,}4$ применяется полная формула Прандтля—Никурадзе для пути смешения.

На рис. 4.2 полученный таким путем профиль скорости представлен в универсальных координатах в сопоставлении с экспериментальными данными и обычным логарифмическим профилем. Совпадение с экспериментами вполне удовлетворительное не только в переходной области, но и вблизи оси потока.

На рис. 4.3 тот же расчетный профиль скорости представлен в физических безразмерных координатах и сопоставлен с экспериментальными данными [25]. Здесь следует обратить

внимание на то, что эти данные получены при исследовании потока ртути и хорошее их совпадение с результатами расчета еще

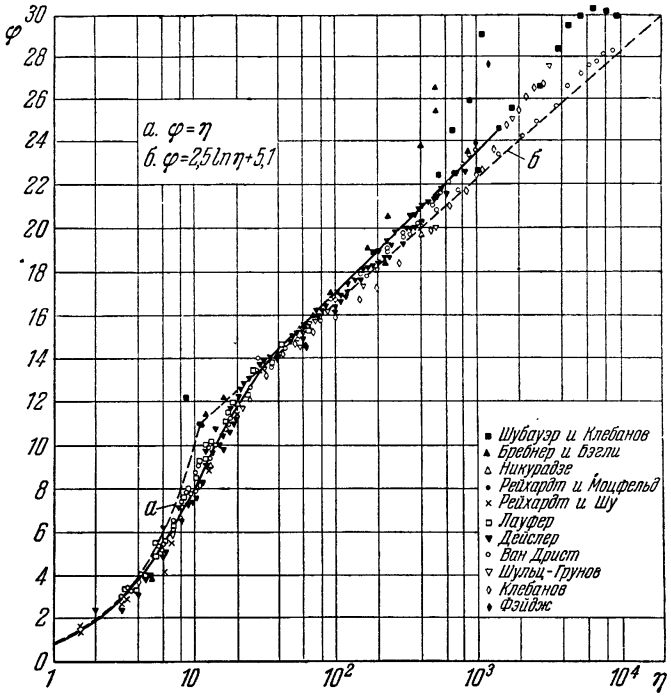


Рис. 4.2. Сопоставление результатов расчета распределения скорости при N=0 (сплошная линия) с экспериментальными данными. Штриховая линия — логарифмический профиль.

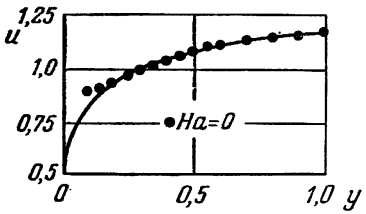


Рис. 4.3. Сопоставление расчетного профиля скорости при Ha=0 с результатами измерения распределения скоростей течения в потоке ртути.

раз подтверждает, что расплавленные металлы ведут себя с гидродинамической точки зрения совершенно так же, как обычные ньютоновские жидкости.

Вернемся теперь к магнитогидродинамическим вопросам. Что касается константы χ, то она подбиралась из условия, чтобы при $(\mathrm{Ha}/\mathrm{Re}) = (\mathrm{Ha}/\mathrm{Re})_{кр}$ было $\lambda = \lambda_{кр} = 0{,}00935$ (подразумевается, что рассматривается поток при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{гр}$). При принятом законе убывания пути смешения в зависимости от числа Стюарта можно требовать выполнения этого условия лишь с какой-то выбранной точностью. Удовлетворительные результаты получаются при $\chi = 10^5$.

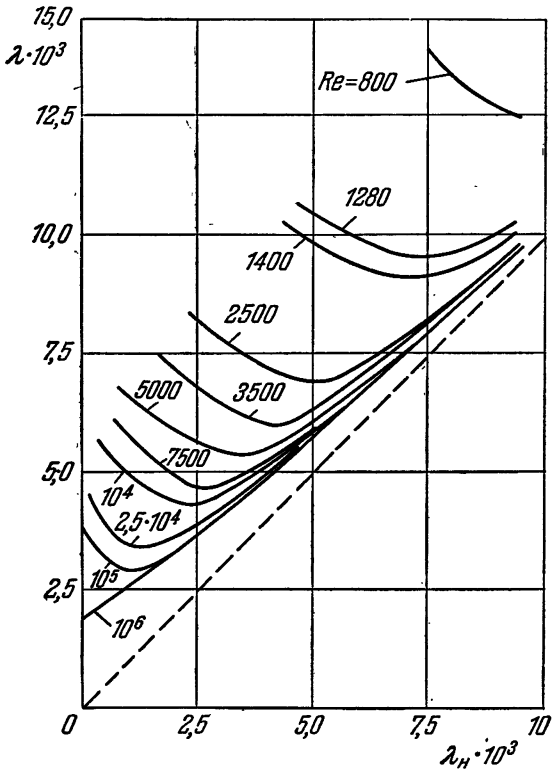


Рис. 4.4. Расчетные кривые коэффициента сопротивления турбулентного гартмановского течения при ряде постоянных значений числа Рейнольдса.

На рис. 4.4 показана расчетная зависимость коэффициента сопротивления λ от λ_H при ряде значений Re, где λ_H — коэффициент сопротивления ламинарного течения, вычисленный по Гартману.

Коэффициент сопротивления при наложении поля сначала уменьшается и лишь потом, достигнув минимума, начинает увеличиваться. На рис. 3.1 предыдущей главы видно, что при малых

числах Рейнольдса (но бо́льших чем $\mathbf{Re}_{гр}$) коэффициент сопротивления при наложении слабого поля действительно несколько уменьшается. Это уменьшение значительнее при малых числах Рейнольдса и, наоборот, при $\mathbf{Re} \geqslant 10^5$ уменьшения вообще нет. Такое поведение λ легко объяснить, исходя из представлений о том, что магнитное поле существенно влияет на турбулентные пульсации больших масштабов и слабо влияет на пульсации малых масштабов. Действительно, уменьшение λ можно при наличии эффекта Гартмана объяснить лишь преобладанием эффекта подавления турбулентности. Естественно, что при наложении магнитного поля на течение эффект подавления преобладает лишь при таких слабых полях, когда еще не исчезают пульсации крупных масштабов. В потоке с большим числом **Re** спектр частот турбулентности столь широк, что подавление крупномасштабных (низкочастотных) пульсаций не влияет существенно на механизм поперечного переноса количества движения и в конечном счете на коэффициент сопротивления и последний монотонно увеличивается при увеличении **Ha**.

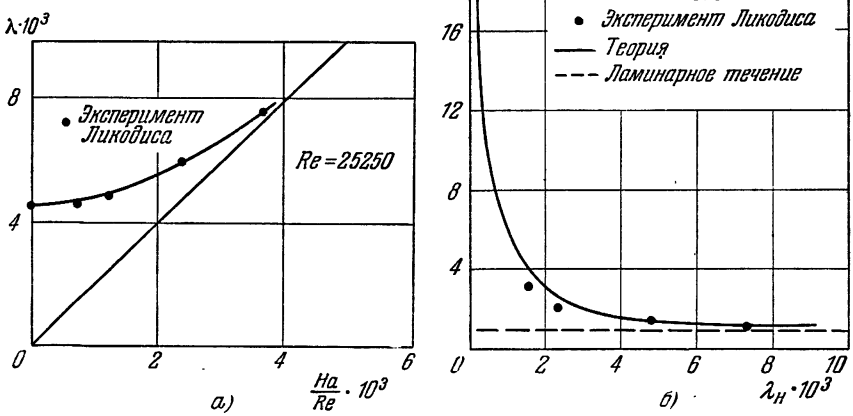


Рис. 4.5. Сопоставление расчета с экспериментальными данными Ликодиса о коэффициенте сопротивления.

Таким образом, расчет и эксперимент приводят к одинаковой качественной картине. Однако расчетные кривые $\lambda = f(\lambda_H)$, показанные на рис. 4.4, имеют бо́льшие провалы, чем экспериментальные кривые, показанные на рис. 3.1.

Результаты, лучше совпадающие с экспериментом, удается получить, если принять множитель, учитывающий уменьшение пути смешения под влиянием магнитного поля, в виде $e^{-\chi N^2 / \frac{dy}{du}}$

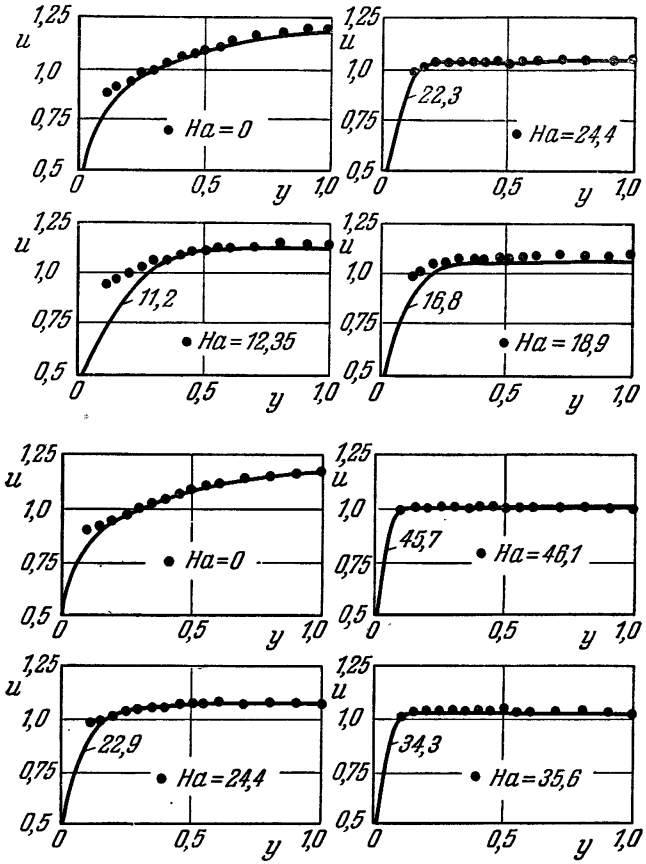


Рис. 4.6. Экспериментальные и расчетные профили скорости при гартмановском турбулентном течении.
а) **Re**=10 000, *б*) **Re**=5000.

[15]. Сопоставление получающихся при этом расчетных значений λ с экспериментальными результатами Ликодиса [26] показано на рис. 4.5, *а*. На рис. 4.5, *б* показаны те же результаты, что и на рис. 4.5, *а*, но в других координатах: $\lambda/\lambda_H = f(\lambda_H)$. По этому рисунку можно судить об уменьшении количественного вклада

турбулентности в коэффициент сопротивления по мере усиления магнитного поля.

Расчетные профили скорости мы рассмотрим в сопоставлении с экспериментальными профилями [25]. Измерения проведены в трубе с большим отношением сторон ($\beta=9$), так что течение было достаточно близким к плоскопараллельному всюду, кроме непосредственной окрестности коротких сторон сечения. Измерение производилось трубкой Пито с внешним диаметром насадка 0,11 *см*. Трубка была предварительно протарирована

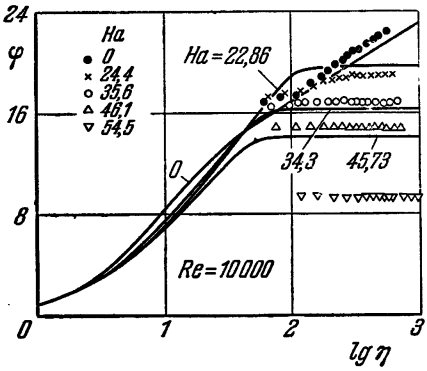


Рис. 4.7. Экспериментальные и расчетные профили скорости при гартмановском турбулентном течении (в универсальных координатах).

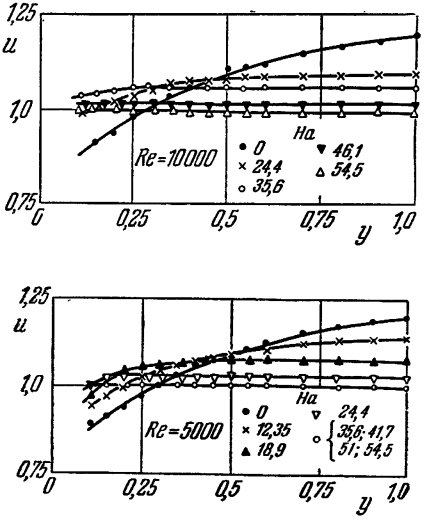


Рис. 4.8. Экспериментальные профили скорости при турбулентном гартмановском течении.

по напряженности магнитного поля [27]. Отбор статического давления производился со стенки трубы. Распределение статического давления по сечению при различных напряженностях исследовалось специально, и было найдено, что в пределах точности измерения давление в любой точке сечения равно давлению на стенке. Результаты этих подробных измерений распределения скорости согласуются с измерениями Ликодиса [26], а также с более ранними измерениями [28].

На рис. 4.6 дано сопоставление экспериментальных и расчетных профилей в физических координатах, а на рис. 4.7 — в универсальных координатах. На рис. 4.8 и 4.9 приведены серии экспериментальных и расчетных профилей при постоянных значениях числа Рейнольдса.

Все приведенные профили хорошо иллюстрируют проявление эффекта Гартмана при турбулентном течении.

Весьма своеобразна картина распределения по сечению трубы напряжений турбулентного трения, полученная путем расчета

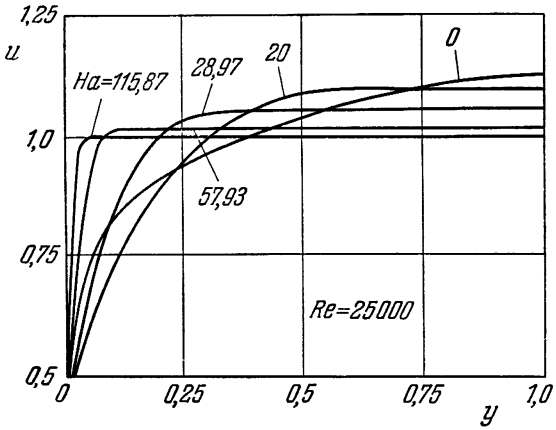


Рис. 4.9. Расчетные профили скорости при турбулентном гартмановском течении.

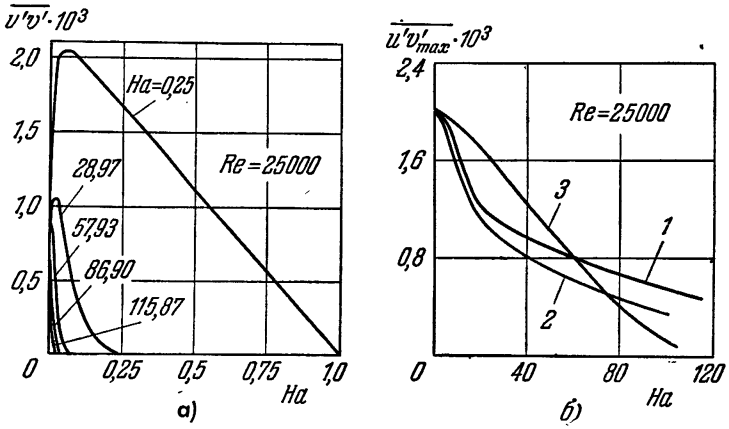


Рис. 4.10. *а)* Распределение напряжений турбулентного трения по сечению при турбулентном гартмановском течении; *б)* изменение под действием магнитного поля максимального значения турбулентного напряжения.

1 — при выражении пути смешения по формуле $l=l_0/[1+\chi(\mathbf{N}l_0)^3/^2]$; *2* — при выражении пути смешения по формуле $l=l_0\cdot\exp\left(-\chi\mathbf{N}^2/\frac{du}{dy}\right)$; *3* — по интерполяционным формулам.

при различных значениях Ha (рис. 4.10, *а*). В полном согласии с выводами, сделанными в гл. III, по мере усиления магнитного поля турбулентное трение прежде всего исчезает в ядре потока

и при достаточно большом Ha остаются только узкие полоски вблизи каждой из стенок, в пределах которых $\tau_т \neq 0$. Во всей же остальной части потока течение, по-видимому, можно при этом считать ламинарным. На рис. 4.10, *б* приведены кривые изменения максимального по сечению значения турбулентных напряжений, вычисленные различными способами.

§ 6. Плоское и осесимметричное течение в продольном магнитном поле. Плоское течение в плоскости, перпендикулярной поперечному магнитному полю

Турбулентное течение в продольном магнитном поле описывается уравнением (4.27). Поскольку в этом случае магнитное поле не взаимодействует с осредненным течением, результаты решения при плоскопараллельном и осесимметричном течении аналогичны. Константа α сохраняет, естественно, то же значение, что и при течении в поперечном магнитном поле, т. е. $\alpha = 1/27{,}5$.

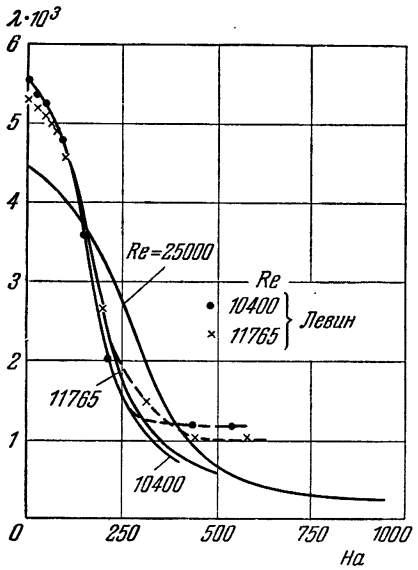


Рис. 4.11. Изменение коэффициента сопротивления под действием продольного магнитного поля.
Сплошные линии — расчет. Точки, соединенные штриховыми линиями, — эксперимент.

Значение константы χ приходится подбирать, исходя из того, чтобы результат вычисления коэффициента сопротивления совпадал с экспериментальными данными о коэффициенте сопротивления [9, 29, 30]. Так было найдено значение $\chi = 16{,}1$.

Конечно, результаты расчета не отражают особенностей завершения ламинаризации, которые обсуждались в гл. III и обусловлены, по-видимому, тем, что при достаточно большой напряженности продольного магнитного поля турбулентность становится резко анизотропной. Расчетные значения коэффициента сопротивления при постоянном Re и увеличивающемся Ha асимптотически приближаются к закону Пуазейля. Экспериментальные же значения остаются значительно выше пуазейлевых.

На рис. 4.11 показаны полученные расчетным путем кривые изменения коэффициента сопротивления в зависимости от числа

Гартмана в сопоставлении с соответствующими экспериментальными данными, полученными Левиным и Чиненковым [9]. От

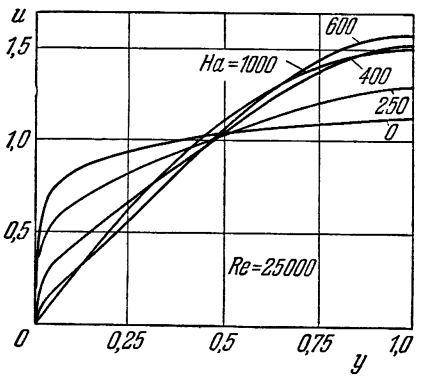


Рис. 4.12. Профили скорости при течении в продольном магнитном поле.

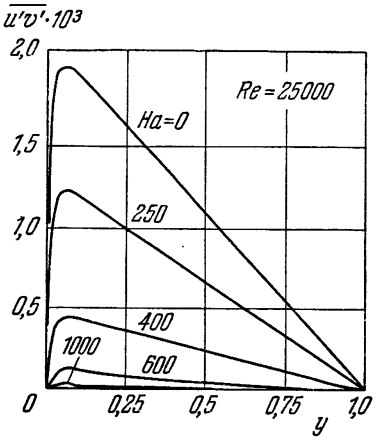


Рис. 4.13. Профили напряжений турбулентного трения при плоскопараллельном течении в продольном магнитном поле.

Ha=0 до того значения **Ha**, которое соответствует точке перегиба кривой, согласие теории и эксперимента вполне удовлетворительное. Видимо, именно начиная с этой точки, приобретает важное значение то видоизменение структуры турбулентности, приводящее к гипертрофированной анизотропии, которое рассмотрено в гл. III. При этом предпосылки полуэмпирической теории теряют справедливость. Интересно отметить, что, начиная приблизительно с того же значения числа **Ha**, появляются аномалии в виде перегибов и в расчетных профилях скорости (рис. 4.12). Тем самым определяется граница применимости полуэмпирической теории.

Профили напряжений турбулентного трения (рис. 4.13) изменяются иначе, чем при течении в поперечном поле. При некотором **Ha** их относительное по сравнению с течением вне поля уменьшение одинаково по всему сечению.

Совершенно аналогично расчету турбулентного течения в продольном магнитном поле производится расчет плоскопараллельного течения в плоскости, перпендикулярной поперечному магнитному полю. Иным получается лишь значение константы χ, которое определяется на основании экспериментальных данных.

В этом случае, как и при течении в продольном магнитном поле, осредненное течение не испытывает никаких непосредствен-

ных магнитогидродинамических воздействий. Понятно, что в экспериментах можно осуществить лишь некоторое приближение к плоскому течению, беря трубы прямоугольного сечения с малым параметром β. Как следует из анализа, проведенного в гл. II, при

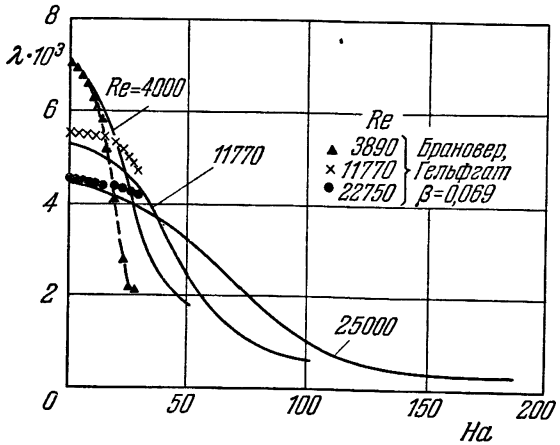


Рис. 4.14. Изменение коэффициента сопротивления под действием поперечного поля, перпендикулярного плоскости, в которой происходит течение.
Сплошные линии — расчет. Точки, соединенные штриховыми линиями, — эксперимент.

течении в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, значительно труднее добиться хорошего приближения течения к плоскому, чем в случае течения в плоскости поля. Так, если в последнем случае течение можно считать практически плоским уже при отношении сторон прямоугольной трубы 3 : 1, то в рассматриваемом здесь случае при отношении 1 : 3 течение еще далеко от плоского и, что самое главное, оно все более отличается от плоского по мере увеличения числа Гартмана. Все же экспериментальные результаты, полученные в трубах с отношением сторон сечения 1/15 : 1/30, можно считать достаточно близко соответствующими плоскому течению. Применительно к этим данным получено значение константы, входящей в полуэмпирическую теорию, $\chi = 1200$. На рис. 4.14 показано сопоставление расчетных и экспериментальных данных о коэффициенте сопротивления [31].

Подтвержденная экспериментами возможность весьма эффективного снижения сопротивления при наложении на турбулентное течение в прямоугольной трубе поперечного магнитного поля, параллельного длинной стороне сечения трубы, представляет значительный интерес с точки зрения приложений. Не рассматривая здесь подробно вопрос о схемах практического использования

этого явления, укажем лишь, что могут быть предложены удобные способы их технической реализации. Одним из таких способов является, например, пропускание электрического тока вдоль оси трубы непосредственно через текущий расплавленный металл [43].

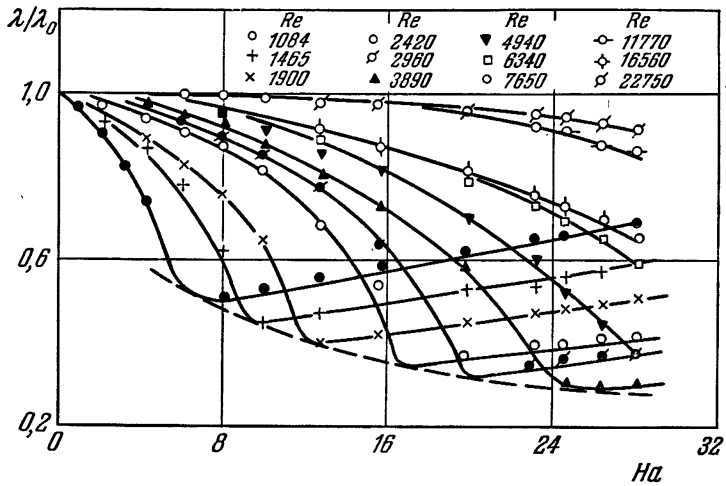


Рис. 4.15. Экспериментальные данные о коэффициенте сопротивления при течении в прямоугольной трубе с отношением сторон $\beta=0{,}069$.

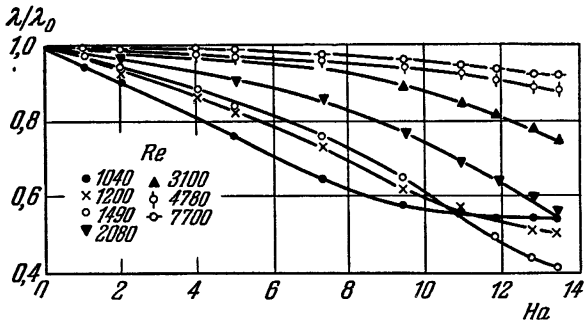


Рис. 4.16. Экспериментальные данные о коэффициенте сопротивления при течении в прямоугольной трубе с отношением сторон $\beta=0{,}031$.

Нетрудно понять, что в этом случае взаимная ориентация магнитного поля и потока получается принципиально такой же, как при течении в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю.

На рис. 4.15 и 4.16 приведены еще некоторые примеры экспериментальных кривых, полученных в трубах с различным отноше-

нием сторон β. Интересно, что степень уменьшения коэффициента сопротивления определяется отношением Ha/Re и практически одинакова при всех $\beta \leqslant 1/3$. Это позволяет предложить для

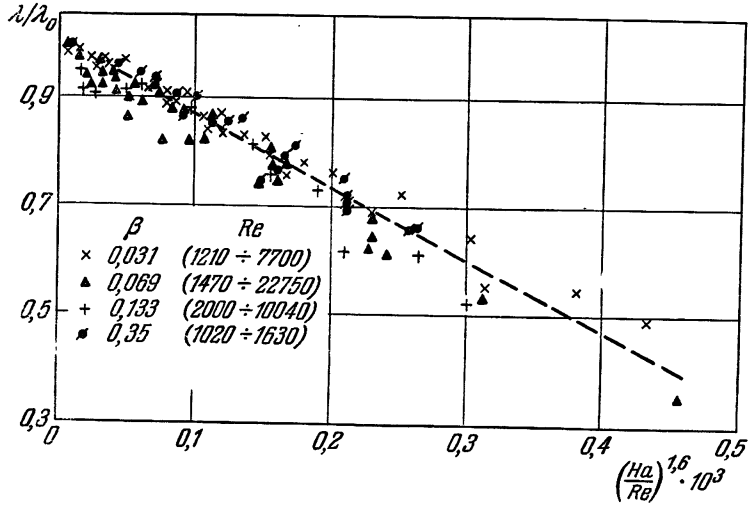


Рис 4.17. Эмпирическая зависимость относительного коэффициента сопротивления от $(Ha/Re)^{1,6}$ при плоскопараллельном турбулентном течении в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

инженерных расчетов следующую простую и хорошо соответствующую экспериментам эмпирическую зависимость (рис. 4.17):

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 - 1300\left(\frac{Ha}{Re}\right)^{1,6}, \qquad (4.36)$$

которая применима для практических расчетов вплоть до полной ламинаризации течения, т. е. до

$$Ha/Re = 1/130.$$

Расчетные профили скорости и турбулентных касательных напряжений в принципиальном отношении ничем не отличаются от соответствующих профилей, полученных из полуэмпирической теории в случае течения в продольном магнитном поле (рис. 4.18, *а* и 4.18, *б*).

Экспериментальные данные о распределении скоростей ограничиваются в рассматриваемом случае пока лишь измерениями скорости на оси потока u_m, которые произведены в трубе с отношением сторон $\beta = 0{,}133$ [32].

Течение в экспериментальной трубе не является идеально плоским, и потому магнитное поле воздействует на него и при ламинарном течении. Очевидно, что скорость u_m после полного

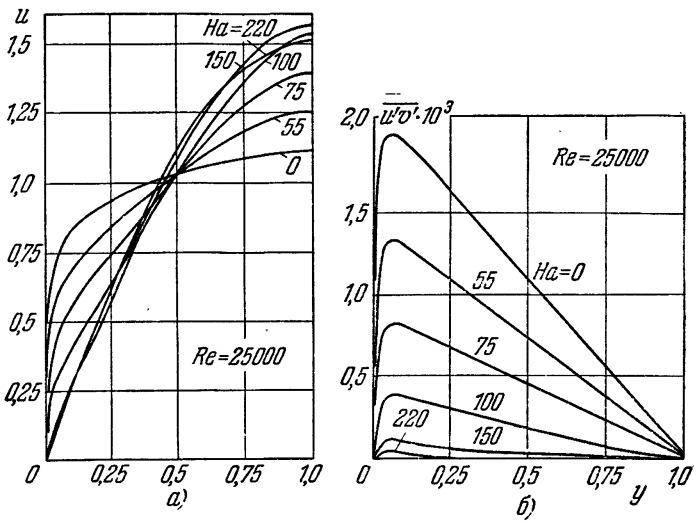


Рис. 4.18. Расчетные профили скорости (*а*) и касательных турбулентных напряжений (*б*) при течении в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

подавления турбулентности следует зависимости

$$u_m = f(\mathrm{Ha}),$$

характерной для ламинарных течений. Сопоставление экспериментальных данных с этой теоретической зависимостью для ламинарных течений может служить источником добавочных сведений о соотношении величин Re и Ha при смене режимов течения.

Для получения зависимости

$$u_m = f(\mathrm{Ha})$$

проведено специальное численное исследование решения Шерклифа [33]. В гл. II, анализируя это решение, мы обращали главное внимание на коэффициент сопротивления. Здесь же нас интересует выражение, полученное Шерклифом для распределения скоростей.

Как оказалось, профили скорости при ламинарном течении в случае $\beta \ll 1$, который ранее не исследовался, имеют некоторые

интересные особенности. Особенности эти состоят в том, что при наложении магнитного поля профиль скорости по мере увеличе-

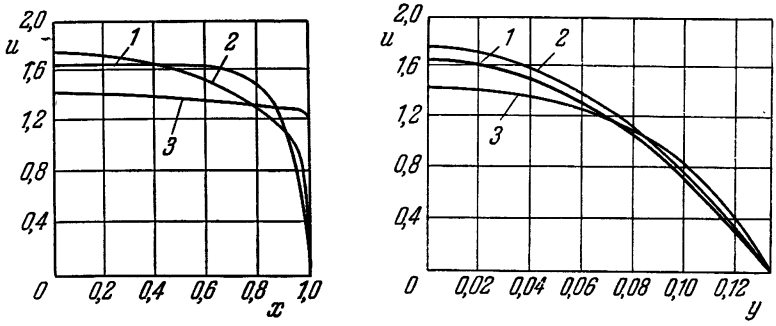


Рис. 4.19. Видоизменение профиля скорости под влиянием поперечного магнитного поля при ламинарном течении в трубе прямоугольного сечения при $\beta=0{,}133$.

Ось y совпадает с направлением магнитного поля, начало координат — на оси трубы. *1* — **Ha**=0; *2* — **Ha**=5,8; *3* — **Ha**=49,2.

ния **Ha** первоначально несколько вытягивается, u_m достигает максимума и лишь затем профиль начинает уплощаться.

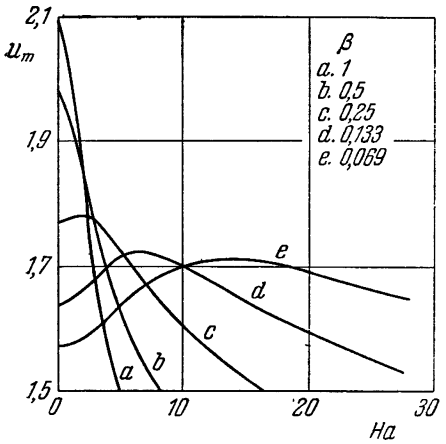


Рис. 4.20. Зависимость максимальной скорости на оси трубы прямоугольного сечения от числа Гартмана при ламинарном течении.

Сказанное иллюстрирует рис. 4.19. Интересно, что при немонотонном поведении u_m градиент скорости на стенке увеличивается монотонно.

На рис. 4.20 показано изменение u_m в зависимости от числа Гартмана при различных значениях β. Из рассмотрения этого рисунка можно заключить, что те особенности видоизменения профиля под действием поперечного поля, о которых здесь идет речь, начинают проявляться при $\beta=0{,}25$.

Результаты измерения скорости на оси трубы ($\beta=0{,}133$) представлены на рис. 4,21. На этом же рисунке показана кривая изменения u_m при ламинарном течении (сплошная линия). Хотя экспериментальные кривые и не сливаются при больших **Ha** с

кривой для ламинарного течения, как можно было ожидать, они все же располагаются достаточно близко к ней. Если допустить, что завершению ламинаризации течения соответствуют максимумы экспериментальных кривых, то получается $(Re/Ha)_{кр} \approx 130$, что согласуется с выводами, сделанными в гл. III.

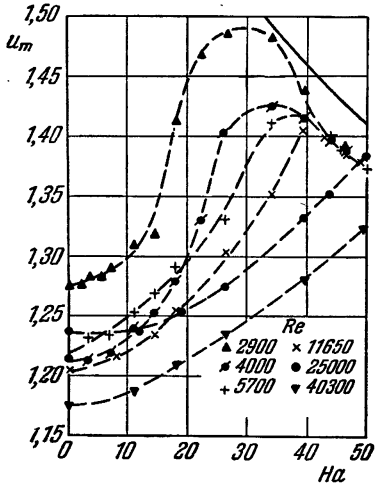


Рис. 4.21. Зависимость скорости на оси прямоугольной трубы ($\beta=0{,}133$) от числа Гартмана. Штриховые линии — эксперимент; сплошная линия — теория для ламинарного течения.

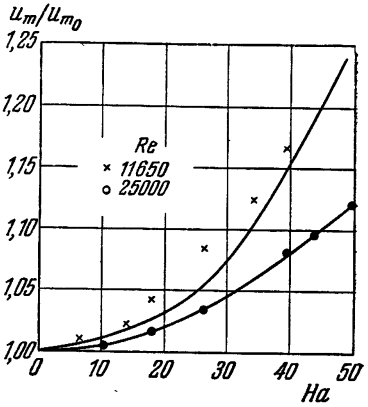


Рис. 4.22. Сопоставление результатов измерения скорости на оси трубы ($\beta=0{,}133$) с вычислениями на основе полуэмпирической теории.
u_m — скорость в присутствии магнитного поля; $u_{m,0}$ — без поля.

На рис. 4.22 показано сопоставление экспериментальных результатов об u_m с вычислениями, произведенными согласно полуэмпирической теории.

§ 7. Течение в шероховатых трубах в присутствии поперечного магнитного поля

В §§ 4 и 5 этой главы было показано, каким образом изложенная выше полуэмпирическая теория может быть применена к анализу течения в шероховатых трубах. Основное уравнение, граничные и интегральные условия остаются теми же, что и при рассмотрении течения в гладких трубах. Иначе решается лишь вопрос о пути смешения. Напомним полученный в § 4 результат, состоящий в том, что при течении между перпендикулярными

магнитному полю плоскостями, покрытыми равномерной зернистой шероховатостью, путь смешения может быть выражен следующим образом:

$$l=\frac{l_{00}}{1+\chi(\mathrm{N}\,l_{00})^{3/2}}+l_1 f(\mathrm{N}).$$

Там же указывалось, что вопрос о конкретном виде функции $f(\mathrm{N})$ должен решаться путем сопоставления результатов расчетов с экспериментом. Рассмотрим поэтому прежде всего некоторые экспериментальные результаты, полученные в опытах с трубами прямоугольного сечения ($\beta\gg 1$), стенки которых были покрыты песочной шероховатостью (отнесенные к гидравлическому радиусу шероховатости $k=0{,}049$—$0{,}12$). Эти опыты показали, что при наличии шероховатости коэффициент сопротивления увеличивается под влиянием поля гораздо быстрее и резче, чем в гладких трубах. Таким образом, был качественно подтвержден результат, полученный в ряде более ранних экспериментальных исследований с другими видами шероховатостей (равномерно чередующиеся полосы, диски, трехгранные пирамиды, редко расположенные песчинки) [15, 28, 34, 35]. Во всех случаях результаты измерения коэффициента сопротивления весьма удовлетворительно обобщаются зависимостью следующего вида:

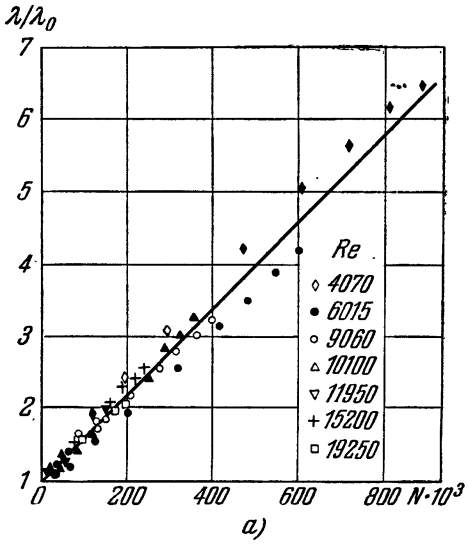
$$\lambda=\lambda_0(1+\gamma\,\mathrm{N}), \tag{4.37}$$

где λ_0 — коэффициент сопротивления при $\mathrm{N}=0$, γ — численный коэффициент, который имеет различное значение для шероховатости различной геометрической формы и весьма мало зависит от размера шероховатости.

На рис. 4.23 показаны примеры экспериментальных зависимостей λ/λ_0 от N. На рис. 4.24 показаны в тех же координатах прямые линии, соответствующие результатам, полученным при различных видах шероховатости. График этот вместе с формулой (4.37) может быть использован для практических расчетов.

Заметим, что пренебрежимо малая зависимость коэффициента γ от размера шероховатости не находится в противоречии с законом подобия, поскольку размер учитывается величиной λ_0, входящей в формулу (4.37) в качестве параметра.

Приведем еще некоторые результаты измерений распределения скоростей течения в трубе с шероховатостью в виде равномерно чередующихся полос, перпендикулярных направлению течения (рис. 4.25). Профиль скорости, который в отсутствие магнитного поля более вытянут, чем при течении в гладкой



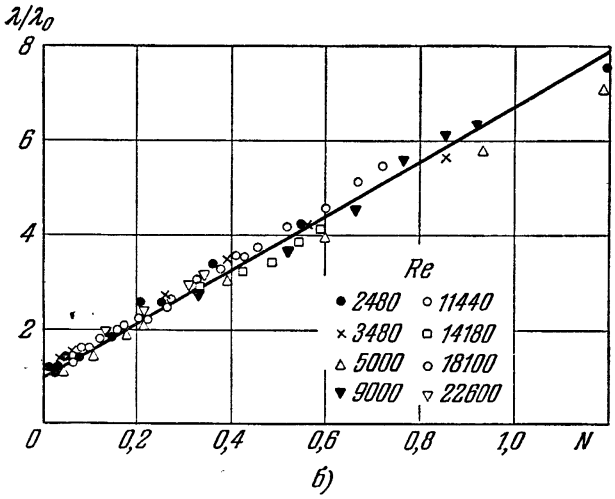


Рис. 4.23. Экспериментальные зависимости относительного коэффициента сопротивления λ/λ_0 от числа Стюарта N, полученные в трубах с песочной шероховатостью.

а) $\beta=17{,}5$, $k=0{,}12$; *б)* $\beta=12$, $k=0{,}08$.

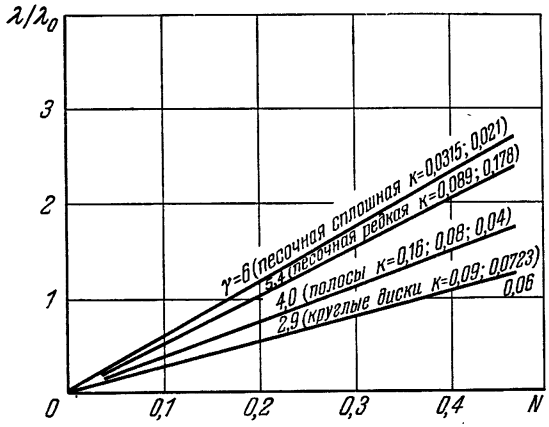


Рис. 4.24. Значения коэффициента γ в формуле (4.41) по результатам эксперимента с различными видами шероховатости стенок прямоугольных труб.

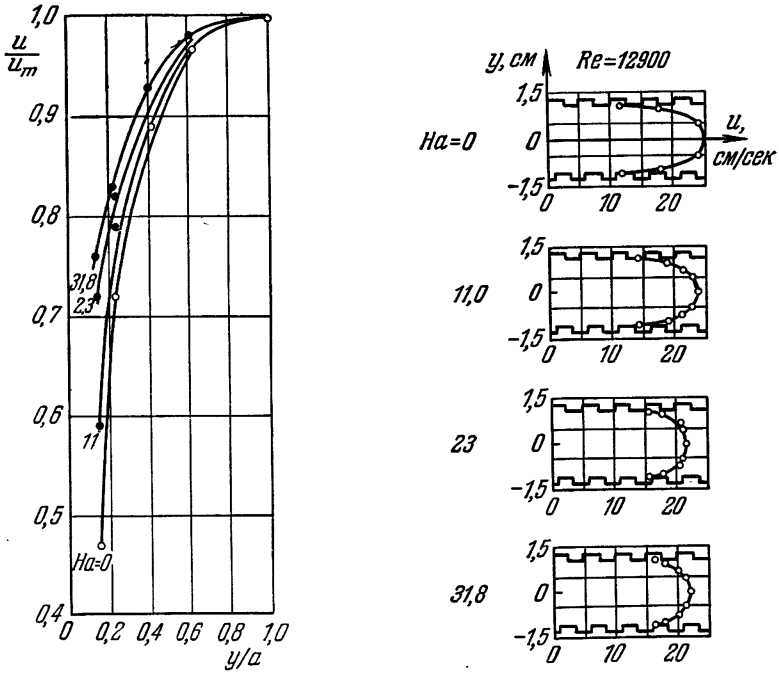


Рис. 4.25. Экспериментальные профили скорости в трубе с шероховатостью в виде полос, перпендикулярных направлению течения.

трубе, уплощается в этом случае под действием поля относительно даже более сильно, чем в гладкой трубе.

Вернемся теперь к вопросу об определении функции, входящей в формулу для пути смешения. Путем сопоставления результатов численного решения основного уравнения (4.24)

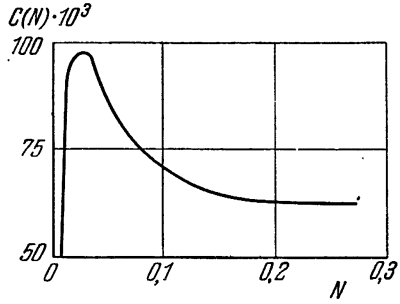


Рис. 4.26. Вспомогательная функция для нахождения пути смешения в трубах с песочной шероховатостью.

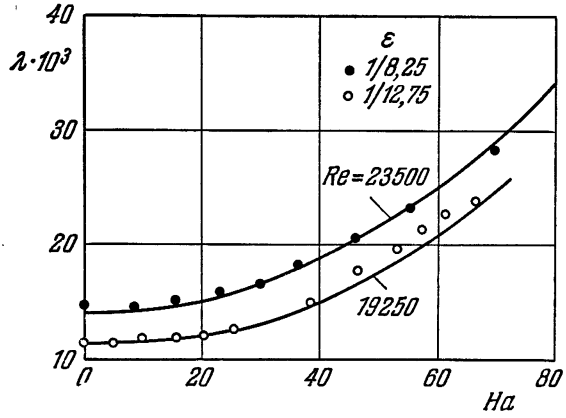


Рис. 4.27. Сопоставление кривых для коэффициента сопротивления в трубах с песочной шероховатостью, вычисленных согласно полуэмпирической теории, с экспериментальными данными.

с экспериментальной зависимостью, показанной на рис. 4.23, *а*, было установлено, что $f(\mathrm{N})$ нужно искать в следующем виде:

$$f(\mathrm{N}) = 1 + C(\mathrm{N})\left(\frac{k}{l_1} - 1\right), \tag{4.38}$$

причем $C(\mathrm{N})$ в свою очередь находилась следующим образом. При некотором фиксированном N принимались два значения

C (C_1 и C_2) и определялись соответственно два значения λ (λ_1 и λ_2) (расчет λ велся, как описано в § 5, т. е. по методу Рунге—Кутта для дифференциального уравнения второго порядка, путем пристрелки по λ). Истинное значение C, соответствующее экспериментальному значению λ в данной точке, находилось посредством линейной интерполяции по λ. Вид кривой $C(\mathrm{N})$ получился довольно сложным. Эта кривая показана на рис. 4.26.

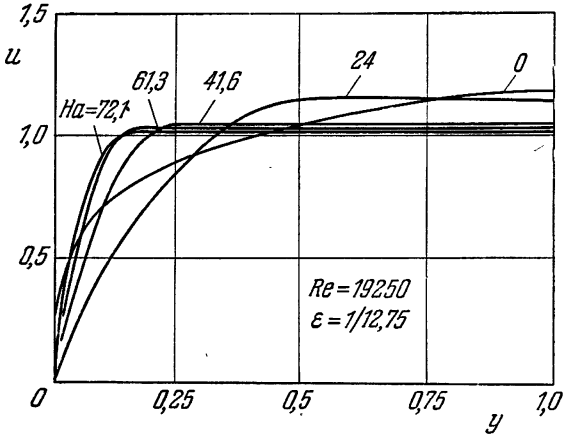


Рис. 4.28. Профили скорости при плоскопараллельном течении в поперечном магнитном поле между стенками, покрытыми зернистой шероховатостью.

Подчеркнем, что хотя эта кривая найдена применительно к результатам эксперимента с одной определенной шероховатой трубой, ее использование, как оказалось, дает вполне удовлетворительные результаты и для труб с другим размером шероховатости. Это иллюстрируют графики, показанные на рис. 4.27. Верхняя кривая ($k=0{,}12$) была использована для нахождения $C(\mathrm{N})$; нижняя кривая ($k=0{,}079$) вычислена при той же функции $C(\mathrm{N})$. Конечно, пока еще недостаточно данных, чтобы утверждать, что функция $C(\mathrm{N})$ вообще универсальна.

Результаты расчета профилей скорости и напряжений турбулентного трения показаны соответственно на рис. 4.28 и 4.29.

Интересно, что вблизи стенки турбулентные напряжения под действием магнитного поля не только не убывают до нуля, но, наоборот, увеличиваются. Это вполне понятно, поскольку вблизи

стенки увеличивается величина l_1. Однако наличие в узком пристеночном слое значительных касательных напряжений нельзя относить за счет турбулентности в истинном смысле этого понятия. Скорее здесь речь идет о существовании вихрей, связанных с выступами шероховатости на стенке.

Все, что было рассмотрено выше в этом параграфе, относилось к шероховатым трубам при $\beta \gg 1$. Однако рассмотрение другого крайнего случая, когда $\beta \ll 1$, также представляет теоретический

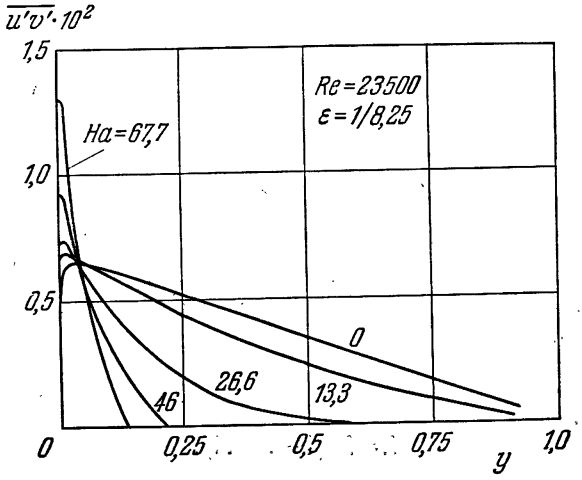


Рис. 4.29. Распределение касательных турбулентных напряжений при плоскопараллельном течении в поперечном магнитном поле между стенками, покрытыми зернистой шероховатостью.

и практический интерес. В этом случае длинные стороны сечения трубы, определяющие особенности течения, оказываются параллельными силовым линиям магнитного поля. В конце гл. III уже был сделан вывод, что при таком течении магнитное поле обусловливает, в противоположность случаю $\beta \gg 1$, уменьшение эффективной высоты шероховатости. В сочетании с подавлением турбулентности этот эффект приводит к весьма резкому уменьшению сопротивления.

Рассмотренная нами выше единая полуэмпирическая теория может быть с успехом применена и в этом случае. Путь смешения выражается снова по формуле (4.23), однако $f(N)$ убывает и стремится к нулю.

Экспериментальные результаты, полученные в трубах с песочной шероховатостью при $0{,}067 \leqslant \beta \leqslant 0{,}133$ и $k=0{,}05$, удовлетвори-

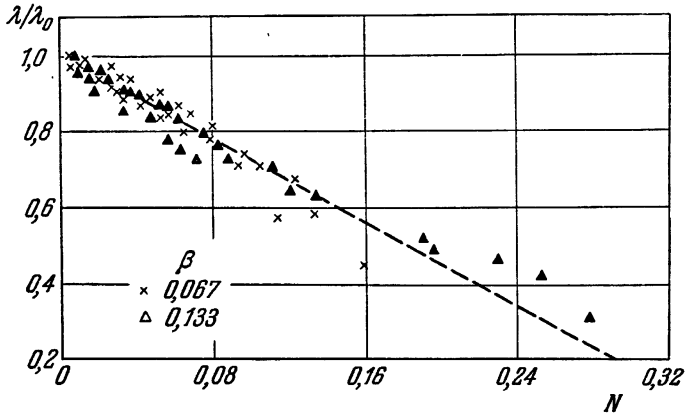


Рис. 4.30. Экспериментальные данные о коэффициенте сопротивления при турбулентном течении в трубах с песочной шероховатостью, расположенных длинной стороной сечения параллельно магнитным силовым линиям.

тельно обобщаются следующей эмпирической зависимостью (рис. 4.30):

$$\lambda=\lambda_0(1-2{,}8\,N). \qquad (4.39)$$

Эксперименты с другими видами шероховатости в трубах с параметром $\beta \ll 1$ пока не производились.

§ 8. Интерполяционные зависимости для расчета плоскопараллельного турбулентного течения в плоскости поперечного магнитного поля

В предыдущих параграфах этой главы анализ турбулентного движения в присутствии магнитного поля базировался на уравнении Рейнольдса. Было показано, что для многих конкретных случаев течения в гладких и шероховатых трубах могут быть получены удовлетворительные решения. В этих решениях фигурирует в большинстве случаев лишь одна константа, определяемая из магнитогидродинамического эксперимента. С точки зрения практических расчетов полуэмпирическая теория представляет некоторые неудобства, связанные с необходимостью численного решения нелинейного дифференциального уравнения. Учитывая это, была сделана попытка получить расчетные зави-

симости в явном виде. Эта попытка была предпринята применительно к плоскопараллельному течению между гладкими стенками, перпендикулярными к магнитному полю.

Как свидетельствует эксперимент (см. § 6), при магнитодинамическом течении с постоянным числом Рейнольдса значения коэффициента сопротивления, локальной скорости и других величин заключены между соответствующими значениями при турбулентном течении в отсутствие магнитного поля и при полностью ламинаризованном магнитным полем течении, когда число Гартмана достигает своего критического значения. Отсюда можно допустить, что при некотором промежуточном значении числа Гартмана коэффициент сопротивления, например, может быть найден путем интерполяции между двумя предельными своими значениями λ_0 и $\lambda_{кр}$. В работе [36] была применена весьма грубая линейная интерполяция между этими двумя значениями. Полученная формула, однако, имела приемлемую для практических расчетов точность.

Отметим, что идея интерполяции была в ином виде использована Вулисом и Фоменко [37].

Поскольку мы ищем зависимости для практических расчетов, естественно ограничить рассмотрение условием $\mathbf{Re} \geqslant \mathbf{Re}_{гр}$, которое всегда выполняется в реальных магнитогидродинамических машинах.

Начнем с коэффициента сопротивления. Нам известно, что:

1) $\lambda = \lambda_0$ при $\mathbf{Ha} = 0$.

2) $\lambda = \lambda_H$ (λ_H означает коэффициент сопротивления по теории Гартмана для ламинарных плоскопараллельных течений) при $\lambda_H = \lambda_{кр} = 0{,}00935$. Напомним, что этот критерий перехода был получен в гл. III.

Наконец, из представления о плавном, бескризисном переходе следует:

3) $\dfrac{d\lambda}{d\lambda_H} = 1$ при $\lambda_H = 0{,}00935$.

Запишем теперь:

$$\lambda = \lambda_H + k_1(\lambda_H - \lambda_{кр}) + k_2(\lambda_H - \lambda_{кр})^2. \qquad (4.40)$$

В самой структуре выражения (4.40) уже заложено условие 2). Условия же 1) и 3) послужат нам для определения коэффициентов k_1 и k_2. Произведя вычисления, получим:

$$\lambda = \lambda_H + \left(\lambda_0 - \frac{6}{\mathbf{Re}}\right)\left(\frac{\lambda_H - 0{,}00935}{6/\mathbf{Re} - 0{,}00935}\right)^2. \qquad (4.41)$$

Расчеты по (4.41) показывают, что при $\mathbf{Re} = \mathbf{Re}_{гр}$ не получается

постоянства λ. Это побуждает вместо (4.40) написать

$$\lambda=\lambda_H+k_1(\lambda_H-\lambda_{кр})+k_2(\lambda_H-\lambda_{кр})^{1+f(\mathrm{Re})}, \qquad (4.42)$$

где $f(\mathrm{Re})\geqslant 0$ и $f(\mathrm{Re}_{гр})=0$.

При этом формула для вычисления λ приобретает следующий окончательный вид:

$$\lambda=\lambda_H+\left(\lambda_0-\frac{6}{\mathrm{Re}}\right)\left(\frac{\lambda_H-0{,}00935}{6/\mathrm{Re}-0{,}00935}\right)^{1+\left(1-\frac{\mathrm{Re}_{гр}}{\mathrm{Re}}\right)^2}. \qquad (4.43)$$

На рис. 4.31 показано сопоставление этой формулы с результатами экспериментов. Из рисунка видно, что удовлетворительное совпадение получается не только при $\mathrm{Re}\geqslant\mathrm{Re}_{гр}$, но и при $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{гр}$.

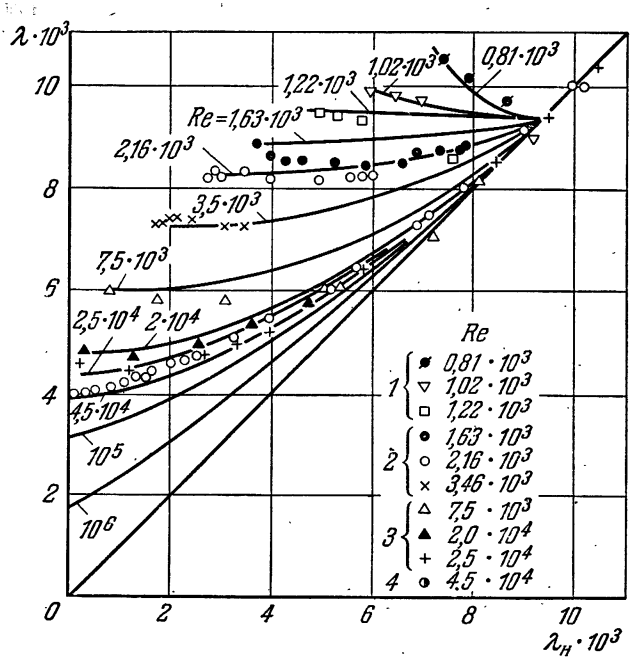


Рис. 4.31. Сопоставление результатов расчета по интерполяционной зависимости (4.47) (линии) с экспериментами (точки).

Перейдем теперь к вопросу о профиле скорости. Будем пользоваться безразмерными переменными. Снова рассмотрим, каким условиям должен подчиняться профиль скорости.

Очевидными являются следующие два условия:

1) $u=u_0$ при $\mathrm{Ha}=0$

2) $u=u_H$ при $\lambda=\lambda_{кр}=0{,}00935$.

Связь градиента скорости на стенке трубы с числом Рейнольдса и коэффициентом сопротивления дает условие

$$3)\quad \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\frac{\lambda\,\mathrm{Re}}{2}.$$

Далее из уравнения движения следует, что на стенке, где $\overline{u'v'}=0$, справедливо условие

$$4)\quad \left.\frac{d^2u}{dy^2}\right|_{y=0}=-\frac{\lambda\,\mathrm{Re}}{2}-\mathrm{Ha}^2.$$

Следующим условием является условие постоянства расхода

$$5)\quad \int_0^1 u\,dy=1.$$

Шестое условие введем для скорости на оси потока u_m. При достаточно большом Ha на оси потока можно в уравнении движения пренебречь не только турбулентным трением, но и вязким трением; тогда из уравнения движения при $y=1$ получается

$$u(1)=u_{\max}=1+\frac{\lambda\,\mathrm{Re}}{2\,\mathrm{Ha}^2}. \tag{4.44}$$

При малых Ha выражение (4.44) теряет справедливость. Однако известно, что при $\mathrm{Ha}=0$ должно быть

$$u_{\max}=u_{0,\max}.$$

Интерполируя при малых Ha между значениями $u_{\max}$ по формуле (4.44) и $u_{0,\max}$ так, чтобы интерполяционная функция плавно переходила в (4.44), можно записать:

$$u(1)=u_{\max}=1+\frac{\lambda\,\mathrm{Re}}{2}\left\{\mathrm{Ha}^2+\frac{\lambda\,\mathrm{Re}}{2(u_{0,\max}-1)}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-\frac{2\,\mathrm{Ha}^2(u_{0,\max}-1)}{\lambda\,\mathrm{Re}}\right]\right\}^{-1}. \tag{4.45}$$

Нетрудно убедиться, что выражение (4.45) уже при сравнительно небольших Ha переходит в точное выражение (4.44).

Можно использовать и еще более простую интерполяционную зависимость для $u(1)$, построение которой очевидно:

$$u(1)=u_H(1)-\frac{u_H(1)-u_0(1)}{\mathrm{Ha}_{кр}}(\mathrm{Ha}_{кр}^2-\mathrm{Ha}^2), \qquad (4.46)$$

где

$$u_H=\frac{\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}-\mathrm{th}\,\mathrm{Ha}}\left[1-\frac{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}(1-y)}{\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}\right].$$

Таким образом, искомое шестое условие состоит в том, что u_{max} должно соответствовать (4.45) или (4.46). Оказывается, однако, что подобрать аппроксимирующую функцию, которая удовлетворяла бы указанным шести условиям и вместе с тем не имела бы перегибов или каких-либо иных особенностей, не свойственных профилю скорости, далеко не просто. Пока удалось подобрать функцию, которая удовлетворяет лишь второму, третьему, четвертому и пятому условиям. Она имеет вид

$$u=u_H+k_1\Delta u+k_2\Delta u^2+k_3\Delta u^3, \qquad (4.47)$$

где $\Delta u=u_H-u_{H,\,кр}$.

Коэффициенты k_i находятся из третьего, четвертого и пятого условий:

$$k_1=\frac{\lambda-\lambda_H}{\lambda_H-\lambda_{H,\,кр}};\quad k_2=\frac{2}{\mathrm{Re}^2}\frac{\lambda_H-\lambda}{(\lambda_H-\lambda_{H,\,кр})^3}(\mathrm{Ha}_{кр}^2-\mathrm{Ha}^2);$$
$$k_3=-k_2I_2/I_3, \qquad (4.48)$$

где

$$I_2=\int_0^1\Delta u^2dy,\quad I_3=\int_0^1\Delta u^3dy.$$

Условие первое формулой (4.47) не удовлетворяется. Поэтому ее нельзя применять при $\mathrm{Ha}=0$ и при весьма малых Ha. Условие второе выполняется с высокой степенью точности, ибо при $\lambda_H=\lambda_{H,\,кр}$, $k_1=0$, а k_2 и k_3 очень малы.

Для облегчения практических расчетов может служить таблица значений коэффициента k_3 для ряда значений Re и Ha.

Re / Ha	$5\cdot10^3$	10^4	$1{,}5\cdot10^4$	$2\cdot10^4$	$2{,}5\cdot10^4$	$5\cdot10^5$	10^5	$2{,}5\cdot10^5$
$0{,}4\cdot10^{-3}$	2,498	1,090	0,7850	0,6570	0,5870	0,4520	0,3750	0,3250
$1{,}3\cdot10^{-3}$	2,706	1,480	1,194	1,059	0,9770	0,7950	0,6780	0,5790
$2{,}2\cdot10^{-3}$	5,031	2,810	2,257	1,992	1,8320	1,472	1,3110	0,9180
$3{,}1\cdot10^{-3}$	12,790	6,440	4,970	4,303	3,9080	3,046	2,871	1,755
$4{,}0\cdot10^{-3}$	75,380	25,900	17,930	14,690	12,916	9,410	9,066	5,116

Возвращаясь к формуле (4.47), укажем еще, что, имея профиль скорости $u(y)$, нетрудно из уравнения (4.24) вычислить

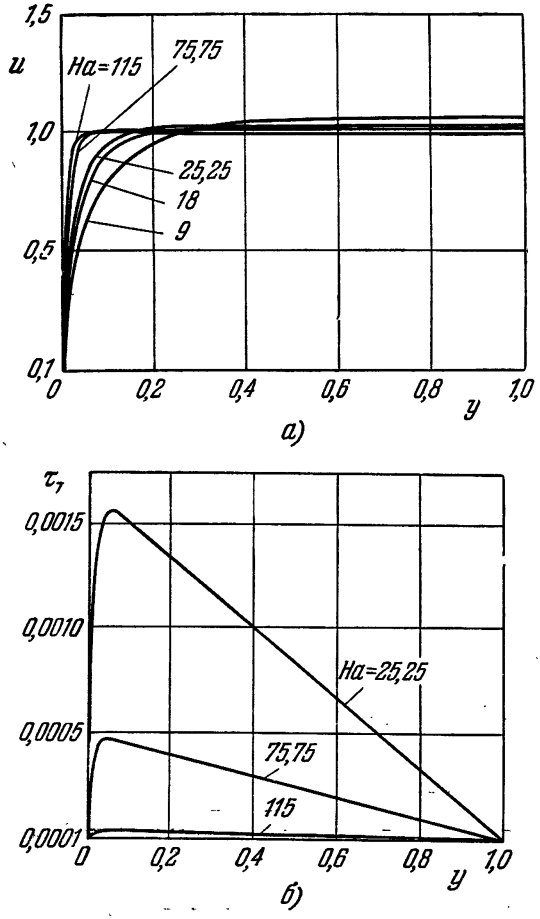


Рис. 4.32. Результаты расчета по интерполяционным зависимостям.
а) Профили скорости; *б)* профили напряжений турбулентного трения, $\mathbf{Re}=2{,}5\cdot 10^4$.

распределение напряжений турбулентного трения:

$$\tau_т = -\overline{u'v'} = \frac{\lambda}{2}(1-y) - \frac{1}{\mathbf{Re}}\frac{du}{dy} - \mathbf{N}\int_0^y (1-u)\,dy. \qquad (4.49)$$

На рис. 4.32 показаны примеры профилей скорости, рассчитанные по (4.47), и соответствующие кривые распределения $\tau_т$ по (4.49).

§ 9. Расчет турбулентных течений в магнитном поле на основе уравнений вторых моментов пульсаций скорости

Как указывалось в § 3, известно несколько работ, в которых расчет турбулентного течения в присутствии магнитного поля производится на основе системы уравнений вторых моментов пульсаций скорости [11, 17]. Одной из существенных величин, входящих при этом в окончательные расчетные выражения, является путь смешения, который в упомянутых работах принимается таким же, как в отсутствие магнитного поля. Лишь в работе [38] содержатся некоторые упоминания о расчетах с учетом искажения пути смешения магнитным полем.

Принимая во внимание, что предложенные в § 4 этой главы зависимости для вычисления пути смешения в присутствии магнитного поля приводят к удовлетворительным результатам при расчетах на основе уравнений Рейнольдса, представляется целесообразным использовать их и в расчетах, основывающихся на уравнениях вторых моментов пульсаций скорости.

При использовании уравнений для вторых моментов пульсаций скорости удается получить существенно более полные сведения о турбулентном течении, чем с помощью одного уравнения Рейнольдса.

Если в уравнениях (1.31) с электромагнитными членами в виде (1.34), следуя [11], пренебречь членами, выражающими турбулентную и вязкую диффузию, а для членов, выражающих диссипацию и обмен вдоль трех осей, применить полуэмпирические выражения Ротта [20]

$$\frac{2}{\mathrm{Re}}\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}=\frac{c_1}{\mathrm{Re}\,l^2}\overline{u'_iu'_j}+\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{c}{l}q^{3/2}, \tag{4.50}$$

$$p'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)=k\frac{q^{1/2}}{l}\left(\overline{u'_iu'_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}q\right), \tag{4.51}$$

где

$$q=\frac{u'_iu'_j}{2}$$

δ_{ij} — символ Кронекера, c, c_1, k — численные постоянные, то эти уравнения для стационарного в среднем течения в трубе запишутся

в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{u'v'}\frac{dU}{dy}+\frac{k}{2}\frac{\sqrt{q}}{l}\left(\overline{u'^2}-\frac{2}{3}q\right)+\frac{c}{3}\frac{q^{3/2}}{l}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{c_1}{2}\frac{\overline{u'^2}}{l^2}=0,\\
&\frac{k}{2}\frac{\sqrt{q}}{l}\left(\overline{v'^2}-\frac{2}{3}q\right)+\frac{c}{3}\frac{q^{3/2}}{l}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{c_1}{2}\frac{\overline{v'^2}}{l^2}+\alpha_1\mathrm{N}\,\overline{v'^2}=0,\\
&\frac{k}{2}\frac{\sqrt{q}}{l}\left(\overline{w'^2}-\frac{2}{3}q\right)+\frac{c}{3}\frac{q^{3/2}}{l}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{c_1}{2}\frac{\overline{w'^2}}{l^2}+\alpha_1\mathrm{N}\,w'^2=0,\\
&v'^2\frac{dU}{dy}+k\frac{\sqrt{q}}{l}\overline{u'v'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}c_1\frac{\overline{u'v'}}{l^2}+\alpha_1\mathrm{N}\,\overline{u'v'}=0,\\
&\overline{u'v'}\frac{dU}{du}+k\frac{\sqrt{q}}{l}\overline{u'w'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\overline{u'w'}}{l^2}+\alpha_1\mathrm{N}\,\overline{u'w'}=0,\\
&k\frac{\sqrt{q}}{l}\overline{v'w'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}c_1\frac{\overline{v'w'}}{l^2}+2\alpha_1\mathrm{N}\,\overline{v'w'}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(4.52)$$

при течении в продольном магнитном поле и

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{u'v'}\frac{dU}{dy}+k\frac{\sqrt{q}}{l}\left(\overline{u'^2}-\frac{2}{3}q^2\right)+\frac{c}{3}\frac{q^{3/2}}{l}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{c_1}{2}\frac{\overline{u'^2}}{l^2}+\alpha_1\mathrm{N}\,\overline{u'^2}=0,\\
&\frac{k}{2}\frac{\sqrt{q}}{l}\left(\overline{v'^2}-\frac{2}{3}q\right)+\frac{c}{3}\frac{q^{3/2}}{l}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{c_1}{2}\frac{\overline{v'^2}}{l^2}=0,\\
&\frac{k}{2}\frac{\sqrt{q}}{l}\left(\overline{w'^2}-\frac{2}{3}q\right)+\frac{c}{3}\frac{q^{3/2}}{l}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{c_1}{2}\frac{\overline{w'^2}}{l^2}+\alpha_1\mathrm{N}\,\overline{w'^2}=0,\\
&\overline{v'^2}\frac{dU}{dy}+k\frac{\sqrt{q}}{l}\overline{u'v'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}c_1\frac{\overline{u'v'}}{l^2}+\alpha_1\mathrm{N}\,\overline{u'v'}=0,\\
&\overline{v'w'}\frac{dU}{dy}+k\frac{\sqrt{q}}{l}\overline{u'w'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}c_1\frac{\overline{u'w'}}{l^2}+2\alpha_1\mathrm{N}\,\overline{u'w'}=0,\\
&k\frac{\sqrt{q}}{l}\overline{v'w'}+\frac{1}{\mathrm{Re}}c_1\frac{\overline{v'w'}}{l^2}+\alpha_1\mathrm{N}\,\overline{v'w'}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(4.53)$$

при течении в поперечном магнитном поле.

Очевидно, что в силу пренебрежения диффузией уравнения (4.52) и (4.53) выражают локальный баланс порождения и диссипации пульсационной энергии (или при $i \neq j$ соответственно вторых моментов пульсаций скорости), что, согласно Лауферу [44] и Таунсенду [39], имеет место вблизи твердой стенки.

Если ввести обозначения

$$\mathrm{re} = \mathrm{Re}\, l^2 \frac{dU}{dy}, \tag{4.54}$$

$$\mathrm{re}_q = \mathrm{Re}\, l q^{1/2}, \tag{4.55}$$

$$\mathrm{ha} = \mathrm{Ha}\, l, \tag{4.56}$$

то уравнения (4.52) и (4.53) записываются соответственно в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\overline{u'v'}}{q}\mathrm{re} + c_1 + c\,\mathrm{re}_q + \alpha_1 \mathrm{ha}^2\left(\frac{\overline{v'^2}}{q} + \frac{\overline{w'^2}}{q}\right) = 0,\\
&\frac{\overline{v'^2}}{q}(k\,\mathrm{re}_q + c_1) - \frac{2}{3}(k-c)\,\mathrm{re}_q + 2\alpha_1 \mathrm{ha}^2 \frac{\overline{v'^2}}{q} = 0,\\
&\frac{\overline{w'^2}}{q}(k\,\mathrm{re}_q + c_1) - \frac{2}{3}(k-c)\,\mathrm{re}_q + 2\alpha_1 \mathrm{ha}^2 \frac{\overline{w'^2}}{q} = 0,\\
&\frac{\overline{v'^2}}{q}\mathrm{re} + \frac{\overline{u'v'}}{q}(k\,\mathrm{re}_q + c_1) + \alpha_1 \mathrm{ha}^2 \frac{\overline{u'v'}}{q} = 0,\\
&\frac{\overline{v'w'}}{q}\mathrm{re} + \frac{\overline{u'w'}}{q}(k\,\mathrm{re}_q + c_1) + \alpha_1 \mathrm{ha}^2 \frac{\overline{u'w'}}{q} = 0,\\
&\frac{\overline{v'w'}}{q}(k\,\mathrm{re}_q + c_1) + 2\alpha_1 \mathrm{ha}^2 \frac{\overline{v'w'}}{q} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{4.57}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\overline{u'v'}}{q}\,\mathrm{re}+c\,\mathrm{re}_q+c_1+\alpha_1\,\mathrm{ha}^2\left(\frac{\overline{u'^2}}{q}+\frac{\overline{w'^2}}{q}\right)=0,\\
&\frac{\overline{v'^2}}{q}(k\,\mathrm{re}_q+c_1)-\frac{2}{3}(k-c)\,\mathrm{re}_q=0,\\
&\frac{\overline{w'^2}}{q}(k\,\mathrm{re}_q+c_1)-\frac{2}{3}(k-c)\,\mathrm{re}_q+2\alpha_1\,\mathrm{ha}^2\frac{\overline{w'^2}}{q}=0,\\
&\frac{\overline{v'^2}}{q}\,\mathrm{re}+\frac{\overline{u'v'}}{q}(k\,\mathrm{re}_q+c_1)+\alpha_1\,\mathrm{ha}^2\frac{\overline{u'v'}}{q}=0,\\
&\frac{\overline{v'w'}}{q}\,\mathrm{re}+\frac{\overline{u'w'}}{q}(k\,\mathrm{re}_q+c_1)+2\alpha_1\,\mathrm{ha}^2\frac{\overline{u'w'}}{q}=0,\\
&\frac{\overline{v'w'}}{q}(k\,\mathrm{re}_q+c_1)+\frac{\overline{v'w'}}{q}\alpha_1\,\mathrm{ha}^2=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.58)$$

Здесь в обоих случаях первое уравнение системы заменено суммой первых трех.

В этих уравнениях путь смешения в работах Ковнера и Левина [11, 17] выражался согласно Прандтлю—Никурадзе. Здесь же, исходя из результатов § 4 этой главы, используется формула (4.16)

$$l=\frac{l_0}{1+\chi(\mathrm{N}\,l_0)^{3/2}},$$

где, согласно (4.17),

$$l_0=l_{00}\left(1-e^{-\alpha\,\mathrm{Re}\sqrt{\lambda/2}\,y}\right),$$

l_{00} — путь смешения, вычисленный по Прандтлю—Никурадзе.

Итак, мы пришли к алгебраическим системам уравнений, в которые величина dU/dy входит как параметр. Очевидно, что из этих систем можно выразить пульсационные величины через re и re_q и найти также связь между re и re_q.

Для замыкания систем к ним нужно добавить соответствующие уравнения осредненного движения.

Далее проведем рассмотрение отдельно для течения в продольном магнитном поле и для течения в поперечном магнитном поле (гартмановского турбулентного течения). Начнем с течения в продольном поле, так как в этом случае решение несколько проще.

Из (4.57) легко получить

$$\overline{u'w'}=0, \tag{4.59}$$

$$\overline{v'w'}=0, \tag{4.60}$$

$$\frac{\overline{u'^2}}{q}=2-\frac{4}{3}\frac{(k-c)\,\mathrm{re}_q}{k\,\mathrm{re}_q+c_1+2\alpha_1\,\mathrm{ha}^2}, \tag{4.61}$$

$$\frac{\overline{v'^2}}{q}=\frac{\overline{w'^2}}{q}=\frac{\frac{2}{3}(k-c)\,\mathrm{re}_q}{k\,\mathrm{re}_q+c_1+2\alpha_1\,\mathrm{ha}^2}, \tag{4.62}$$

$$\frac{\overline{u'v'}}{q}=-\frac{2}{3}\frac{(k-c)\,\mathrm{re}_q\,\mathrm{re}}{(k\,\mathrm{re}_q+c_1+2\alpha_1\,\mathrm{ha}^2)(k\,\mathrm{re}_q+c_1+\alpha_1\,\mathrm{ha}^2)}, \tag{4.63}$$

$$\frac{2}{3}(k-c)\,\mathrm{re}_q\mathrm{re}^2=(c\,\mathrm{re}_q+c_1)(k\,\mathrm{re}_q+c_1+2\alpha_1\,\mathrm{ha}^2)\times$$

$$\times(k\,\mathrm{re}_q+c_1+\alpha_1\,\mathrm{ha}^2)+\frac{4}{3}\alpha_1\,\mathrm{ha}^2\,\mathrm{re}_q(k-c)(k\,\mathrm{re}_q+c_1+\alpha_1\,\mathrm{ha}^2). \tag{4.64}$$

Уравнение движения для этого случая имеет в принятых здесь обозначениях следующий вид:

$$\mathrm{re}\frac{\overline{u'v'}}{q}\mathrm{re}_q^2+(y-1)\frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{re}_q^2}{q}=0. \tag{4.65}$$

Уравнения (4.59)—(4.65) позволяют решить задачу о нахождении профиля скорости и распределения по сечению пульсационных величин $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{u'v'}$.

Для нахождения коэффициента сопротивления нужно использовать еще интегральное условие сохранения расхода

$$\int_0^1 U(y,\lambda)\,dy=1. \tag{4.66}$$

При решении системы (4.59)—(4.65) мы получаем величину dU/dy. Поэтому для проверки выполнения интегрального усло-

вия в виде (4.66), в которое скорость U входит под знаком интеграла, пришлось бы производить двукратное интегрирование

$$\int_0^1 dy \int_0^y U(s, \lambda)\, ds = 1. \qquad (4.66^{\mathrm{I}})$$

Такой расчет требует очень большого машинного времени. Этого легко избежать, изменив порядок интегрирования в (4.66^{I}), что приводит к интегральному условию в виде

$$\int_0^1 (1-y)\frac{dU}{dy}\, dy = 1, \qquad (4.66^{\mathrm{II}})$$

которое и использовалось в расчете.

Последовательность решения задачи, которое производилось на вычислительной машине БЭСМ-2, была следующей.

С помощью соотношений (4.54) и (4.63) из уравнения (4.65) исключались величины $\overline{u'v'}$ и q. Полученное выражение вместе с (4.64) представляло собой систему двух уравнений для нахождения $\mathrm{re}_q(y)$ и $\mathrm{re}(y)$. Исключением из них $\mathrm{re}(y)$ получалось уравнение для $\mathrm{re}_q(y)$. Это уравнение в общем случае имеет несколько корней. При каждом значении y выбирался больший положительный корень, а при отсутствии положительных корней принималось, что $\mathrm{re}_q(y^*) = 0$. Это, очевидно, означает, что в области $(0, y^*)$ течение ламинарно. Таким путем определялась толщина вязкого подслоя у стенки, в пределах которого использовались уравнения ламинарного движения.

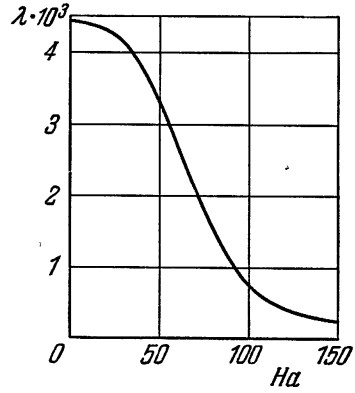


Рис. 4.33. Коэффициент сопротивления при течении в продольном магнитном поле, вычисленный с помощью уравнений вторых моментов пульсаций скоростей.

После нахождения $\mathrm{re}_q(y)$ вычислялось $\mathrm{re}(y)$, dU/dy и затем, путем численного интегрирования $U(y)$. Поскольку найденный таким путем профиль скорости зависел от параметра λ, то окончательно выбирался тот профиль и то значение λ, при которых выполняется интегральное условие (4.66^{II}). Далее по формулам (4.61)—(4.63) находились пульсационные величины. На рис. 4.33—4.35 показаны результаты расчета, произведенного при $\mathrm{Re} = 25 \cdot 10^4$ и ряде значений Ha.

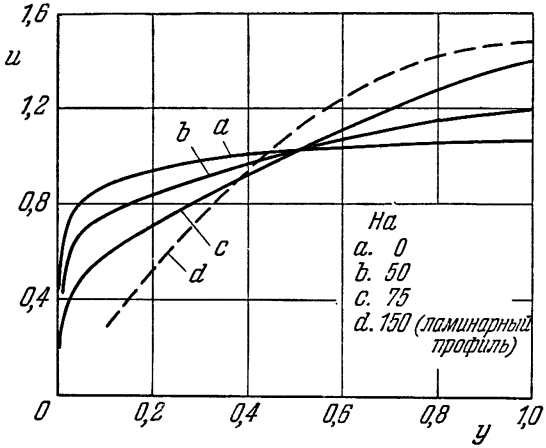


Рис. 4.34. Профили скорости при течении в продольном магнитном поле, вычисленные с помощью уравнений вторых моментов пульсаций скоростей.

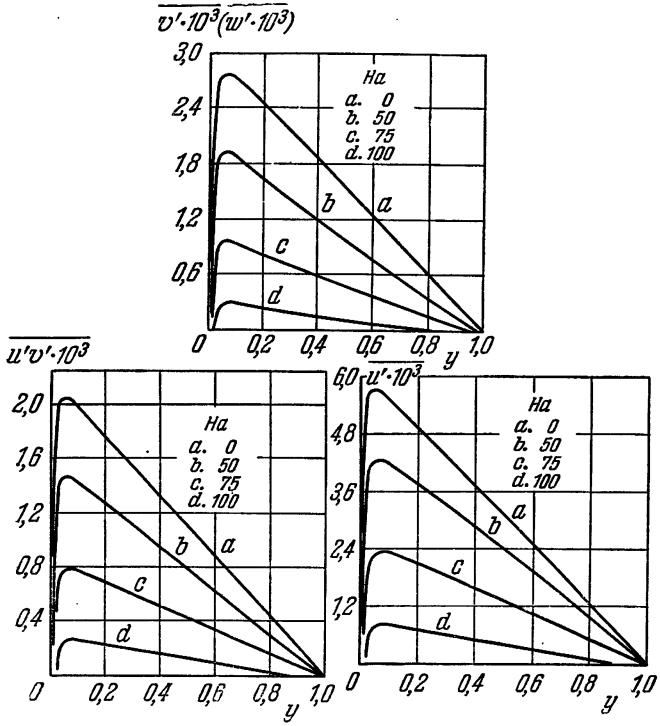


Рис. 4.35. Распределение по сечению пульсационных величин при течении в продольном магнитном поле. Расчет с помощью уравнений вторых моментов пульсаций скоростей.

Расчет произведен при следующих значениях констант

$$c_1=0{,}404, \quad k/c=4{,}0.$$

Эти значения были подобраны, исходя из того, чтобы при отсутствии магнитного поля получились наиболее удовлетворительные значения λ и $u(y)$. Заметим, что эти константы отличаются от полученных Ковнером и Левиным. Результаты, касающиеся коэффициента сопротивления, скорости и напряжений турбулентного трения, аналогичны тем, что были получены выше с помощью уравнения Рейнольдса для случаев течения в продольном магнитном поле и в поперечном поле, которое перпендикулярно плоскости течения. Что касается величин $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ и $\overline{w'^2}$, то на первый взгляд странным кажется то, что, согласно расчету, они убывают до нуля на оси потока не только в присутствии магнитного поля, но и без поля. Это, однако, легко объяснить недостатками исходных допущений, принятых в расчете.

В самом деле, поскольку в уравнениях пульсационной энергии мы пренебрегли членами, выражающими диффузию энергии, то на оси потока, где $\frac{dU}{dy}=0$ и локального порождения пульсационной энергии нет, величины $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ и $\overline{w'^2}$ должны обращаться в нуль. Изменение этих величин по мере усиления магнитного поля качественно подобно изменению турбулентного трения $\overline{u'v'}$. Конечно, полученные результаты не отражают тех особенностей ламинаризации течения продольным полем, которые наблюдаются в экспериментах и которые мы выше истолковывали как проявление сильной анизотропии турбулентности.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о гартмановском турбулентном течении в поперечном магнитном поле. Уравнения (4.59), (4.60), (4.63), (4.64) сохраняются и в этом случае, а остальные уравнения заменяются следующими:

$$\frac{\overline{u'^2}}{q}=2-\frac{2}{3}(k-c)\,\mathrm{re}_q\left(\frac{1}{k\,\mathrm{re}_q+c_1+2\alpha_1\,\mathrm{ha}^2}+\frac{1}{k\,\mathrm{re}_q+c_1}\right), \tag{4.67}$$

$$\frac{\overline{u'^2}}{q}=\frac{2}{3}\,\frac{k-c}{k\,\mathrm{re}_q+c}, \tag{4.68}$$

$$\frac{\overline{w'^2}}{q}=\frac{2}{3}\,\frac{(k-c)\,\mathrm{re}_q}{k\,\mathrm{re}_q+c_1+2\alpha_1\,\mathrm{ha}^2}. \tag{4.69}$$

Уравнение движения имеет вид

$$\mathrm{re}-\frac{\overline{u'v'}}{q}\mathrm{re}_q^2+(y-1)\frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{re}_q}{q}+\mathrm{N}\frac{\mathrm{re}_q^2}{q}\int_0^y[1-u(s)]ds=0. \quad (4.70)$$

Используя (4,54), (4.55) и (4.63), можем из (4.70) получить следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{dU}{dy}=\frac{\mathrm{Re}\frac{\lambda}{2}(1-y)-\mathrm{Ha}^2\int_0^y\left[1-(y-s)\frac{dU(s)}{ds}\right]ds}{1+\frac{2}{3}(k-c)\,\mathrm{re}_q^3(y)[k\,\mathrm{re}_q(y)+c_1]^{-1}[k\,\mathrm{re}_q(y)+c_1+\alpha_1\,\mathrm{ha}^2]^{-1}}. \quad (4.71)$$

При заданном re_q (4.71) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра для функции dU/dy. Хотя $\mathrm{re}_q(y)$ нам также неизвестно, но имеется уравнение (4.64), которое связывает $\mathrm{re}_q(y)$ и $dU(y)/dy$.

Задача решалась следующим образом. Выбиралось некоторое распределение точек на интервале $0\leqslant y\leqslant 1$ и задавалось нулевое приближение dU^0/dy (в заданных точках y), соответствующее решению при $\mathrm{Ha}=0$.

Из уравнения (4.64) находилось $\mathrm{re}_q{}^0(y)$. При этом принимался наибольший положительный корень, если таковые имелись, и нуль в противном случае. Далее, используя $dU^0(y)/dy$ и $\mathrm{re}_q{}^0(y)$, из уравнения (4.71) находилось $dU^1(y)/dy$. Интеграл при этом вычислялся с помощью параболической аппроксимации. Далее из (4.64) определялось $\mathrm{re}_q{}^1$ и так далее до сходимости.

Описанную схему расчета можно изобразить в следующем виде:

если имеется $\dfrac{dU^{k-1}(y)}{dy}$, то

$$\mathrm{re}_q{}^{k-1}(y)=G\left[y_1\frac{dU^{k-1}(y)}{dy}\right], \quad (4.72)$$

$$\frac{dU^k(y)}{dy}=F\left[y_1\frac{dU^{k-1}(y)}{dy},\ \mathrm{re}_q{}^{k-1}(y)\right]. \quad (4.73)$$

Норма разности двух соседних приближений была определена следующим образом:

$$\left\| \frac{dU^k(y)}{dy} - \frac{dU^{k-1}(y)}{dy} \right\| = \int_0^1 \left| \frac{dU^k(y)}{dy} - \frac{dU^{k-1}(y)}{dy} \right| dy. \tag{4.74}$$

Однако оказалось, что описанный выше итерационный процесс сходится очень медленно, и поэтому окончательно расчет велся

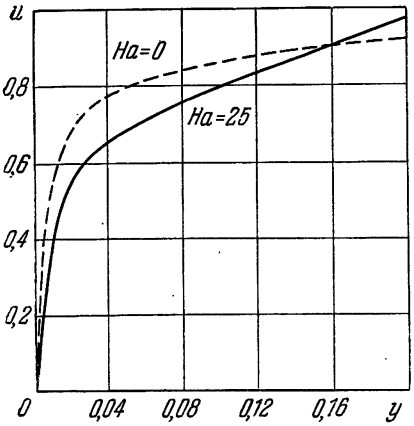


Рис. 4.36. Профили скорости при течении в поперечном магнитном поле. Расчет с помощью уравнений вторых моментов пульсаций скоростей.

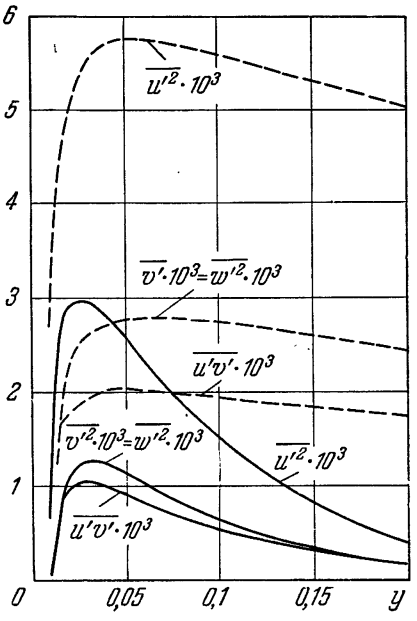


Рис. 4.37. Распределение по сечению пульсационных величин при течении в поперечном магнитном поле, рассчитанное с помощью уравнений вторых моментов пульсаций скоростей. Штриховые линии — **Ha**=0; сплошные линии — **Ha**=25.

по следующей несколько измененной схеме: $\mathbf{re}_q^{k-1}(y)$ по-прежнему находилось согласно (4.72), но далее

$$\frac{dU^k(y)}{dy} = \beta \frac{d\widetilde{U}(y)}{dy} + (1-\beta)\frac{dU^{k-1}(y)}{dy}, \tag{4.75}$$

где $0<\beta<1$

$$\frac{d\widetilde{U}^k(y)}{dy}=F\left[y_1\frac{dU^{k-1}(y)}{dy},\ \mathrm{re}_q{}^{k-1}(y)\right]. \qquad (4.76)$$

Окончательно значение β было принято равным 1/2.

При заданных **Re** и **Ha** принималось некоторое значение λ_1, и по описанной итерационной схеме находилось dU/dy и $\mathrm{re}_q(y)$. Из уравнения (4.71) видно, что интегральное уравнение

$$\int_0^1 U(y,\lambda)\,dy=1\left(\text{или}\int_0^1(1-y)\frac{dU}{dy}\,dy=1\right)$$

эквивалентно условию $dU(1)/dy=0$. Поэтому, если при выбранном значении λ_1 величина $dU(1)/dy>0$, то нужно принять значение $\lambda<\lambda_1$, если же $dU(1)/dy<0$, то следует принять $\lambda>\lambda_1$.

Вычисления оказались весьма трудоемкими, требующими большого машинного времени. Поэтому расчеты ограничились получением для λ лишь двух точных значащих цифр.

Следует отметить, что расчет производился лишь в пристеночной области ($y\leqslant 0{,}2$). При этом на внешней границе этой области выполнялось условие $dU/dy<\varepsilon=0{,}001$, так что при больших значениях y можно было принять $U=\mathrm{const}=U_{\max}$. Поскольку, однако, вблизи оси потока, как уже указывалось выше, теряют справедливость исходные допущения, нет смысла добиваться более высокой точности расчета. Скорость $U(y)$ определялась путем численного интегрирования с использованием параболической аппроксимации.

Некоторые результаты этого расчета при $\mathbf{Re}=2{,}5\cdot 10^4$ и $\mathbf{Ha}=0$ и $\mathbf{Ha}=25$ показаны на рис. 4.36 и 4.37.

Здесь, как и при расчете течения в поперечном магнитном поле по уравнению Рейнольдса, получаются ламинаризованные слои не только у твердой стенки, но и вблизи оси потока.

§ 10. Влияние магнитного поля на теплообмен при турбулентном течении в трубах

Из общей гидродинамики известно, что интенсивность теплообмена изменяется подобно изменению коэффициента сопротивления (так называемая аналогия Рейнольдса). В магнитной гидродинамике это подобие может нарушаться выделением джоулева тепла, однако качественная аналогия все же сохраняется [40]. Таким образом, основываясь на уже известных нам сведениях о влиянии различно ориентированных магнитных полей на

коэффициент сопротивления, можно предугадать принципиальный характер влияния этих полей на теплообмен. К жидким металлам, однако, эту аналогию нужно применять с чрезвычайной осторожностью, ибо она может совершенно искажаться молекулярной теплопроводностью.

Продольное поле всегда должно обусловливать уменьшение теплообмена в турбулентном потоке, поскольку оно подавляет турбулентность и уменьшает градиент осредненной скорости у стенки и каждое из этих явлений обусловливает уменьшение теплообмена. Влияние поля убывает с уменьшением масштабов турбулентных пульсаций, т. е. с увеличением числа Рейнольдса, поэтому можно ожидать, что при постоянном **Ha** влияние поля на теплообмен будет уменьшаться с увеличением **Re**. Но при малых **Re** относительно невелик вклад турбулентного переноса тепла в общий теплообмен, поэтому влияние продольного поля может ослабевать и при малых **Re**. Следовательно, должна существовать какая-то область промежуточных чисел **Re**, где подавление продольным полем интенсивности теплообмена наиболее существенно.

В поперечном поле поведение коэффициента сопротивления более сложно, поскольку действуют два противонаправленных фактора — эффект Гартмана и эффект подавления турбулентности. Сочетание этих же двух факторов определяет собой изменение интенсивности теплообмена. Относительно эффекта подавления турбулентности сохраняет силу все сказанное выше применительно к продольному полю. Говоря об эффекте Гартмана, нужно прежде всего еще раз напомнить, что все рассматриваемые здесь явления происходят на фоне чрезвычайно большой молекулярной теплопроводности и роль всех эффектов следует оценивать в сравнении с теплообменом путем молекулярной теплопроводности. Как было указано в гл. II, при ламинарном течении эффект Гартмана приводит к некоторому увеличению теплообмена. Но при ламинарном течении разница между параболическим профилем скорости и профилем Гартмана очень велика. При турбулентном же течении эффект Гартмана сравнительно немного изменяет и без того плоский турбулентный профиль. Поэтому можно полагать, что в этом случае роль изменения теплообмена за счет эффекта Гартмана несущественна по сравнению с молекулярным теплообменом, и при рассмотрении влияния поперечного магнитного поля можно ограничиться учетом лишь эффектов подавления турбулентности, как при течении в продольном поле.

Анализ имеющихся экспериментальных данных приводит к выводу, что максимальное снижение интенсивности теплообмена при некотором значении числа Гартмана имеет место при

приблизительно постоянном отношении $Re/Re_{кр} \approx 2$, где $Re_{кр}$ — критическое значение числа Рейнольдса, соответствующее данному Ha. На рис. 4.38, взятом из работы [38], показаны кривые в координатах

$$Nu/Nu_0 = f(Re/Re_{кр}),$$

где Nu_0 означает критерий Нуссельта при течении в отсутствие магнитного поля. Эти кривые построены по экспериментальным

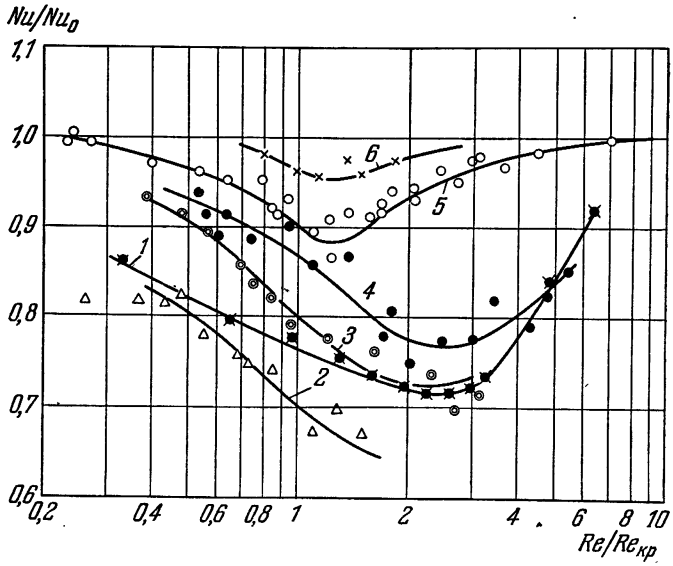


Рис. 4.38. Особенности влияния поперечного магнитного поля на теплообмен при различных значениях числа Рейнольдса.
1 — поток ртути **Ha**=29; *2, 3, 4* — поток галлия, значения **Ha** соответственно 30; 22,5; 15; *5, 6* — поток КОН, числа **Ha** 7,75 и 4,5.

данным, полученным при исследовании теплообмена в потоках ртути [12], галлия [6] и электролита КОН [41]. Действительно, точки минимума всех кривых располагаются в пределах $1{,}2 \leqslant Re/Re_{кр} \leqslant 2{,}5$.

Полуэмпирические теории, дающие решение гидродинамической задачи при течении в трубах, могут служить основой для постановки и решения соответствующей тепловой задачи. В качестве примера рассмотрим в основных чертах, как Красильников, основываясь на полуэмпирической теории Ковнера [14], решил вопрос о теплообмене при турбулентном плоскопараллельном ограниченном электронепроводящими стенками течении в поперечном магнитном поле [42].

Для решения задачи использовалось соответствующее интегральное соотношение Лайона

$$\mathrm{Nu}=\left[\int_0^1 \frac{\left(\int_0^y u\,dy\right)^2}{1+(\mathrm{Pr}/\mathrm{Re}_\tau)\,(\nu/\varepsilon)}\,dy\right]^{-1},$$

где скорость u бралась из решения Ковнера, турбулентная вязкость ε находилась по профилю скорости с помощью соотношения Лойцянского $\tau=\rho\nu\dfrac{du}{dy}f\left(\dfrac{\varepsilon}{\nu}\right)$, а турбулентное число Прандтля Pr_τ принималось равным единице. Был выполнен ряд численных расчетов, анализ результатов которых позволил предложить следующую приближенную зависимость*):

$$\mathrm{Nu}=2{,}5+0{,}019\left(\frac{\mathrm{Pe}}{1+59{,}2\,\mathrm{N}}\right)^{0{,}8}. \qquad (4.77)$$

Эта зависимость допускает предельные переходы. При $\mathrm{N}=0$ она переходит в обычную зависимость для турбулентных течений в плоской прямоугольной трубе; при $\mathrm{N}\to\infty$ — в зависимость для ламинарных течений.

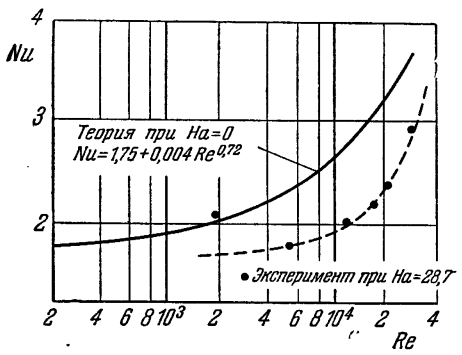


Рис. 4.39. Влияние поперечного магнитного поля на теплообмен при турбулентном течении ртути в круглой трубе.

Перейдем теперь к рассмотрению экспериментальных результатов. На рис. 4.39 показаны данные, полученные Ликодисом при течении ртути в круглой трубе, помещенной в поперечное магнитное поле [12]. На рис. 4.40 и 4.41 воспроизведены результаты, полученные Красильниковым при течении галлия [6]. Рис. 4.40 относится к течению в круглой трубе в продольном поле, а рис. 4.41 к течению в плоской трубе прямоугольного сечения в поперечном магнитном поле. Эти рисунки иллюстрируют прежде всего сам факт существенного влияния магнитного поля на турбулентный теплообмен. Далее они подтверждают

*) Число Пекле $\mathrm{Pe}=\dfrac{\rho c_p V a}{\varkappa}=\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}$.

приведенные в начале параграфа соображения о зависимости этого влияния от числа Рейнольдса (или числа Пекле). Действительно, наибольшее подавление теплообмена наблюдается при некотором среднем значении **Pe**, а при больших и меньших **Pe** влияние поля постепенно ослабевает.

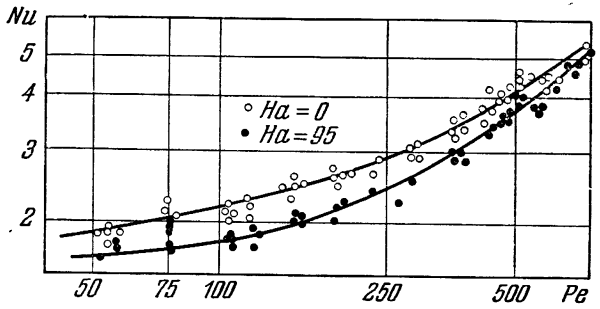


Рис. 4.40. Влияние продольного магнитного поля на теплообмен при турбулентном течении галлия в круглой трубе.

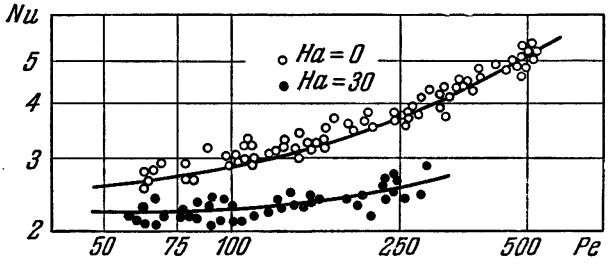


Рис. 4.41. Влияние поперечного магнитного поля на теплообмен при турбулентном течении галлия в трубе прямоугольного сечения ($\beta \gg 1$).

Заслуживает внимания следующее обстоятельство. Несмотря на то, что при течении в поперечном поле существует эффект Гартмана, обусловливающий некоторое повышение интенсивности теплообмена, все же в общем теплообмен уменьшается. Больше того, при действии поперечного поля такое же относительное уменьшение числа **Nu**, как и в продольном поле, достигается при числах **Ha** на порядок меньших. Это снова подтверждает высказанные в гл. III утверждения о том, что наибольшее подавление турбулентности достигается тогда, когда поле непосредственно взаимодействует с продольными компонентами пульсаций

скорости. Эксперименты, результаты которых описаны выше, позволили предложить для расчетов следующие эмпирические формулы. При течении в продольном поле

$$\mathrm{Nu} = 1{,}62 + \frac{0{,}005\,\mathrm{Pe}}{1 + 1890\,(\mathrm{Ha}/\mathrm{Pe})^{1{,}7}} \qquad (4.78)$$

и при плоскопараллельном течении в поперечном магнитном поле

$$\mathrm{Nu} = 2{,}25 + \frac{0{,}006\,\mathrm{Pe}}{1 + 59{,}2\,\mathrm{N}}. \qquad (4.79)$$

Конечно, эти формулы следует применять лишь в тех пределах изменения критериев подобия, в которых получены данные, показанные на рис. 4.40 и 4.41.

Попытка экспериментального исследования действия магнитного поля на турбулентные пульсации температуры была предпринята Блумом [4]. Эксперимент ставился с потоком электролита. Полученные результаты подтвердили, что при наложении магнитного поля прежде всего исчезают пульсации низкой частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брановер Г. Г., Слюсарев Н. М., Щербинин Э. В., Некоторые результаты измерения турбулентных пульсаций скорости в потоке ртути в присутствии поперечного магнитного поля, Магнитная гидродинамика, № 1, 33 (1965).
2. Болонов Н. И., Колованди н Б. А., Повх И. Л., Скринник Е. Ф., Исследование структуры магнитогидродинамических потоков индукционным анемометром. Изв. вузов, сер. «Энергетика» **1**, 65 (1966).
3. Sajben M., Fay J. A., Experimental measurement of the growth of a turbulent mercury jet in a coaxial magnetic field. Massachusetts Institute of Technology, Fluid Mech. Labor., publ. № 65—5 (1965).
4. Блум Э. Я., Температурные пульсации турбулентного МГД-потока, Изв. АН ЛССР, сер. физ. и техн. наук, № 6, 45 (1966).
5. Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А., О влиянии магнитного поля на процессы турбулентного переноса в потоке ртути. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы 2, Изд-во АН ЛССР, Рига (1962), 591.
6. Ковнер Д. С., Красильников Е. Ю., Паневин И. Г., Экспериментальное исследование влияния продольного магнитного поля на конвективный теплообмен при турбулентном течении электропроводной жидкости в трубе, Магнитная гидродинамика, № 4, 101 (1966).
7. Lehnert B., The decay of magnetoturbulence in the presence of a magnetic field and coriolis force, Quart. Appl. Math. **12**, 321 (1955).
8. Сыроватский С. И., Магнитная гидродинамика, УФН **62**, № 3, 247 (1957).
9. Левин В. Б., Чиненков И. А., Экспериментальное исследование турбулентного течения электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 4, 147 (1966).

10. Генин Л. Г., Жилин В. Г., Петухов Б. С., Экспериментальное исследование турбулентного течения ртути в круглой трубе в продольном магнитном поле, Теплофизика высоких температур **5**, № 2, 302 (1967).
11. Ковнер Д. С., Левин В. Б., О турбулентном течении электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле, Теплофизика высоких температур **2**, № 5, 742 (1964).
12. Ликодис П. С., Экспериментальные исследования процессов переноса в турбулентном потоке проводящей среды в присутствии магнитного поля, М., 1965. Международный симпозиум по свойствам и применению низкотемпературной плазмы, Москва, 1965.
13. Lecocq P., Contribution a l'etude des pertes de change of profils, de vitesse en ecoulment turbulente en magneto-hydrodynamique, Bull. Centre rech. et essais Chatou, № 8, suppl. (1964).
14. Ковнер Д. С., Использование гипотезы локальности в турбулентном течении электропроводной жидкости в магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 2, 11 (1965).
15. Брановер Г. Г., Турбулентные магнитогидродинамические течения в трубах, «Зинатне», Рига, 1967.
16. Ковнер Д. С., Турбулентное течение электропроводной жидкости в продольном магнитном поле, Изв. вузов, Авиационная техника, № 1, 170 (1964).
17. Левин В. Б., О стабилизирующем влиянии продольного магнитного поля на неоднородные турбулентные течения электропроводной жидкости, Магнитная гидродинамика, № 2, 3 (1965).
18. Harris P. L., Hydromagnetic channel flows, N. Y.—London (1960).
19. Брановер Г. Г., Полуэмпирическая теория турбулентного потока жидкого металла в поперечном магнитном поле, Прикладная магнитогидродинамика, Труды Института физики **12**, Изд-во ЛССР, Рига (1961), 177.
20. Rotta J., Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, Zeitschrift f. Phys. **129**, 547 (1951).
21. Prandtl L., Uber die ausgebildete Turbulenz, ZAMM **5**, 136 (1925).
22. Van Driest E. R., On turbulent flow near a wall, J. of the aeronautical Sciences **23**, 107 (1956).
23. Rotta J., Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen, Ing. Archiv. **18**, 277 (1950).
24. Nikuradse J., Strömungsgesetze in rauhen Rohren, VDI- Forschungcheft, № 361 (1933).
25. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Турбулентное гартманово течение, Магнитная гидродинамика, № 1, 61 (1969).
26. Broilette F. C., Lykoudis P. S., Magnetofluidmechanic flow, I, Experiment, Purdue University, School of aeronautical and engineering Sciences, Lafayette, Indiana (1966).
27. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В., О применимости трубок Пито и Прандтля в магнитогидродинамическом эксперименте. Магнитная гидродинамика, № 1, 98 (1966).
28. Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А. Особенности влияния поперечного магнитного поля на турбулентные течения жидкого металла при различных числах Рейнольдса, ЖТФ **35**, № 2, 235 (1965).
29. Ковнер Д. С., Красильников Е. Ю., Экспериментальное исследование турбулентного течения электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле, ДАН, **163**, № 5, 1096 (1965).
30. Генин Л. Г., Жилин В. Г., Влияние продольного магнитного поля на коэффициенты сопротивления при течении ртути в круглой трубе. Теплофизика высоких температур **4**, № 2, 233 (1966).

31. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Щербинин Э. В., Турбулентное течение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, Магнитная гидродинамика, № 4, 78 (1965).
32. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Цинобер А. Б., Шкерстена А. Я., Распределение скоростей течения в прямоугольной трубе, расположенной длинной стороной поперечного сечения вдоль магнитного поля, Магнитная гидродинамика, № 1, 65 (1968).
33. Shercliff J. A., Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields, Proc. Cambr. Phil. Soc. **49**, № 1, 136 (1953).
34. Брановер Г. Г., Дукуре Р. К., О влиянии шероховатости стенок канала на сопротивление при турбулентном течении жидкого металла в поперечном магнитном поле, Вопросы магнитной гидродинамики, 3, Изд-во АН ЛССР, Рига (1963), 77.
35. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Дукуре Р. К., Сопротивление шероховатых труб при турбулентном течении в поперечном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 4, 148 (1966).
36. Брановер Г. Г., Об одной простейшей расчетной зависимости магнитной гидравлики. Вопросы магнитной гидродинамики, 4, Изд-во АН ЛССР, Рига (1964), 133.
37. Вулис Л. А., Фоменко Б. А., О переходных режимах течения в магнитной гидродинамике, Магнитная гидродинамика, № 1, 64 (1966).
38. Ковнер Д. С., Исследование турбулентного течения электропроводной жидкости в трубах в магнитном поле. Диссертация. Московский Ордена Ленина Авиационный институт имени Серго Орджоникидзе, Москва, 1965.
39. Таунсенд А. А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, ИЛ, Москва, 1959.
40. Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Материалы, представленные для обсуждения на Пятом рижском совещании по магнитной гидродинамике, сборник № 13, 3 (1966).
41. Блум Э. Я., Влияние электромагнитных полей на теплообмен проводящих жидкостей в каналах. Автореферат канд. дисс. Рига, 1967.
42. Красильников Е. Ю., Влияние поперечного поля на конвективный теплообмен при течении проводящей жидкости в канале, Магнитная гидродинамика, № 3, 37 (1965).
43. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Лиелаусис О. А., Щербинин Э. В., Способ уменьшения гидравлических потерь энергии в турбулентном течении токопроводящей жидкости. Авторское свидетельство № 226047, Бюллетень № 28 (1968).
44. Laufer I., Investigation of turbulent flow in a two dimensional channel, NACA techn. rep. 1953 (1951).

ГЛАВА V

ОСОБЕННОСТИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ

§ 1. Постановка задачи

В этой главе будут описаны характерные особенности магнитогидродинамического обтекания тел, не свойственные явлению обтекания тел в отсутствие магнитного поля. Как и ранее, мы всюду ограничимся случаем малых магнитных чисел Рейнольдса, т. е. безындукционным приближением.

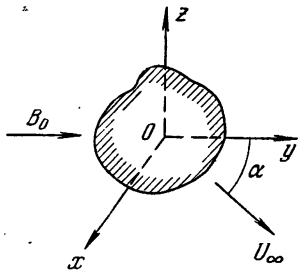


Рис. 5.1. К задаче об обтекании тела.

Рассмотрим стационарное обтекание тела, ограниченного поверхностью S (в плоском случае контуром S) и находящегося в однородном магнитном поле. Поток вязкой электропроводящей жидкости будем предполагать однородным на бесконечном удалении от тела. Векторы скорости невозмущенного потока $\boldsymbol{U}_\infty$ и индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}_0$ образуют угол α. Ось y совместим с вектором индукции магнитного поля, а плоскость x, y — с плоскостью, образованной векторами $\boldsymbol{U}_\infty$ и $\boldsymbol{B}_0$ (рис. 5.1). При этом уравнения движения (1.20) запишутся в следующем виде:

$$\nabla^2 \boldsymbol{U} + \mathrm{Ha}^2 (-\operatorname{grad}\varphi + \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{i}_y)\times\boldsymbol{i}_y - \operatorname{grad} q = \mathrm{Re}(\boldsymbol{U}\operatorname{grad})\boldsymbol{U}. \quad (5.1)$$

Здесь

$$q = \mathrm{Re}\, p.$$

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0. \quad (5.2)$$

Уравнение сохранения заряда

$$\nabla^2\varphi = (\operatorname{rot}\boldsymbol{U})_y. \quad (5.3)$$

Граничные условия следующие:

1) Для поля скоростей

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{U}|_S=0 && \text{на поверхности тела,}\\ &\boldsymbol{U}_\infty=\boldsymbol{i}_x\sin\alpha+\boldsymbol{i}_y\cos\alpha && \text{на бесконечности}\\ & && (r=(x^2+y^2+z^2)\to\infty). \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

2) На поверхности тела должны выполняться условия равенства касательных компонент электрического поля и нормальных компонент электрического тока, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &(\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{grad})\,\varphi=(\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{grad})\,\varphi_i,\\ &(\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad})\,\varphi=\frac{\sigma_i}{\sigma}\,(\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad})\,\varphi_i. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы касательной и нормали к телу, а индекс i относится к области внутри тела.

Потребуем, чтобы на большом удалении от тела электрический ток обращался в нуль: $\boldsymbol{j}_\infty=0$. Это дает

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\sin\alpha \text{ при } r\to\infty. \tag{5.6}$$

Если обтекаемое тело имеет отличную от нуля электропроводность, то к уравнению (5.3) для потенциала электрического поля в потоке следует добавить уравнение для потенциала электрического поля внутри тела

$$\nabla^2\varphi_i=0. \tag{5.7}$$

Уравнения (5.1)—(5.3), (5.7) с граничными условиями (5.4)—(5.6) представляют краевую задачу о магнитогидродинамическом обтекании тела в безындукционном приближении. Точное решение этой задачи даже для простейших тел (таких, как цилиндр, шар) неизвестно.

Сформулированная задача сложнее, чем при аналогичном течении без магнитного поля, так как к искомым функциям добавляется еще потенциал электрического поля φ. Однако в магнитной гидродинамике существует класс точных решений задач об

обтекании тел, аналога которому в общей гидродинамике не существует.

На примере этих решений можно выявить характерные особенности магнитогидродинамического обтекания тел. Ниже приводятся некоторые решения из указанного класса.

§ 2. Обтекание бесконечной плоской пластины в поперечном магнитном поле

Рассмотрим обтекание бесконечной пластины однородным на бесконечности потоком в поперечном магнитном поле. Пластину совместим с плоскостью $z=0$, угол $\alpha=\pi/2$ (рис. 5.2). Кроме того, $v=w=0$, а u зависит только от y. Рассматриваемое течение плоское, и магнитное поле находится в плоскости течения.

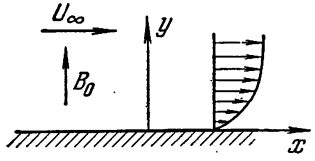


Рис. 5.2. Схема течения на плоской пластине.

Как было показано в гл. I, для такого течения

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi=e_z\boldsymbol{i}_z,$$

причем $e_z=\text{const}$.

Таким образом, из условия на бесконечности (5.6) получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0;\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=1.$$

Естественно, что такая функция φ удовлетворяет уравнению (5.3) (в рассматриваемом случае $(\operatorname{rot}\boldsymbol{U})_y\equiv 0$) и граничным условиям (5.5)*).

Учитывая, что внешний перепад давления отсутствует (это следует из условия $j_\infty=0$), из уравнения (5.1) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mathrm{Ha}^2(1-u)=0, \tag{5.8}$$

а из условий (5.4)

$$u(0)=0,\qquad u(\infty)=1. \tag{5.9}$$

Заметим, что в этой задаче нет характерного размера. Поэтому в качестве характерной длины выбрана величина ν/U_∞, так что число $\mathrm{Ha}=B/U_\infty(\sigma\nu/\rho)^{1/2}$.

Решение рассматриваемой задачи имеет вид

$$u=1-e^{-\mathrm{Ha}\,y}. \tag{5.10}$$

Этот результат аналогичен решению задачи о течении около плоской пластины с равномерным отсосом без магнитного поля.

*) В силу того, что $\boldsymbol{E}=\text{const}\,\boldsymbol{i}_z$, $\varphi_i=\varphi$ с точностью до константы.

Из (5.10) следует, что $\partial u/\partial y|_{y=0}=\mathrm{Ha}$, т. е. трение на стенке пропорционально числу Гартмана, а сила сопротивления единицы длины пластины равна $F=\rho U_\infty^2\mathrm{Ha}$.

Легко убедиться, что при $\mathrm{Ha}=0$ задача (5.8), (5.9) решения не имеет. Объяснение этого примечательного обстоятельства будет дано в следующем параграфе.

При $\mathrm{Ha}\gg 1$ профиль скорости всюду однороден, за исключением тонкого гартмановского слоя у поверхности пластины. Толщина этого слоя пропорциональна Ha^{-1}. Этот слой аналогичен гартмановскому слою, который образуется при течении в плоской трубе в поперечном магнитном поле при больших числах Гартмана. Различие состоит лишь в том, что в рассматриваемом течении градиент давления отсутствует.

§ 3. Обтекание бесконечного цилиндра вдоль его образующей в поперечном магнитном поле

Рассмотрим обтекание бесконечного цилиндрического тела однородным на бесконечности потоком, вектор скорости которого параллелен образующей цилиндра. Перпендикулярно образующей цилиндра приложено однородное магнитное поле (рис. 5.3). Ось x направим вдоль образующей цилиндра, ось y — вдоль магнитного поля.

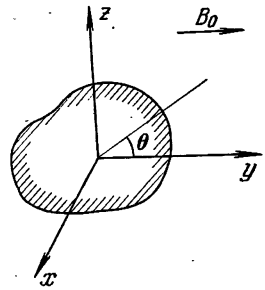


Рис. 5.3. К задаче о продольном обтекании цилиндра.

Как и предыдущем случае, линии тока прямолинейны, т. е. $v=w=0$. Градиент давления отсутствует. Все величины зависят только от y и z.

Из уравнений (5.1) и (5.3) получим

$$\nabla^2 u+\mathrm{Ha}^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-u\right)=0, \qquad (5.11)$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (5.12)$$

Граничные условия для скорости следующие:

$$u|_S=0 \quad \text{на поверхности цилиндра,} \qquad (5.13)$$

$$u=1 \quad \text{при } r=(y^2+z^2)^{1/2}\to\infty. \qquad (5.14)$$

Ограничимся рассмотрением двух случаев:
1) непроводящий цилиндр,
2) идеально проводящий цилиндр.

В этих случаях отпадает необходимость рассматривать уравнение (5.7) для потенциала электрического поля внутри тела.

В первом случае для потенциала электрического поля получим

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_s = 0. \tag{5.15}$$

Во втором случае

$$\varphi|_s = \text{const}. \tag{5.16}$$

На бесконечности в обоих случаях

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1. \tag{5.17}$$

Исключая из (5.11) и (5.12) потенциал электрического поля φ, получим

$$\nabla^4 u - \mathrm{Ha}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{5.18}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$u = 1 - (u_1 + u_2), \tag{5.19}$$

где u_1, u_2 — функции, удовлетворяющие уравнениям типа Озеена

$$\nabla^2 u_1 + \mathrm{Ha} \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \tag{5.20}$$

$$\nabla^2 u_2 - \mathrm{Ha} \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0. \tag{5.21}$$

Из (5.11), (5.12) и (5.19) получается, что если выбрать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{\mathrm{Ha}} \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial z}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= u - \frac{1}{\mathrm{Ha}} \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial y}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

то уравнения (5.11) и (5.12) тождественно удовлетворяются.

Рассмотрим теперь отдельно случаи изолированного и идеально проводящего цилиндров. Для простоты ограничимся случаем круглого цилиндра. При этом используем в плоскости y, z полярную систему координат с отсчетом угла θ от оси y.

1. Изолированный цилиндр. Для нахождения функций u_1 и u_2 необходимо сформулировать граничные условия для этих функций. Из условий (5.13) и (5.19) получим

$$u_1\big|_{r=1}+u_2\big|_{r=1}=1. \tag{5.13^1}$$

Условие (5.15) вместе с (5.13) и (5.19) приводит к следующему:

$$\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial\theta}\bigg|_{r=1}=0,$$

откуда

$$u_1\big|_{r=1}-u_2\big|_{r=1}=\text{const}.$$

Из соображений симметрии течения относительно оси z примем, что $\text{const}\equiv 0$.

Тогда

$$u_1\big|_{r=1}=u_2\big|_{r=1}=\frac{1}{2}. \tag{5.23}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае задача сводится к решению следующих двух краевых задач:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2u_1+\mathrm{Ha}\frac{\partial u_1}{\partial y}=0; && \nabla^2u_2-\mathrm{Ha}\frac{\partial u_2}{\partial y}=0,\\ &u_1\big|_{r=1}=\frac{1}{2}, && u_2\big|_{r=1}=\frac{1}{2},\\ &u_1\big|_{r=\infty}=0, && u_2\big|_{r=\infty}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

Решения уравнений (5.24), убывающие на бесконечности, можно выписать в виде рядов

$$u_1=e^{-\frac{\mathrm{Ha}}{2}y}\sum_{n=0}^{\infty}K_n\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}r\right)(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),$$

$$u_2=e^{+\frac{\mathrm{Ha}}{2}y}\sum_{n=0}^{\infty}K_n\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}r\right)(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta),$$

где $K_n(x)$ — функции Макдональда.

Воспользуемся теперь асимптотическим представлением функций Макдональда при больших значениях аргумента

$$K_n(x) \sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}, \quad \text{при} \quad x \gg 1. \tag{5.25}$$

Тогда на большом удалении от тела (т. е. при $r \gg 1$), а также при больших значениях числа $\mathrm{Ha} \gg 1$ (и любых $r \geqslant 1$) функции u_1, u_2 примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-r\mathrm{Ha}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \Phi_1(\theta), \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-r\mathrm{Ha}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \Phi_2(\theta). \end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

Из (5.26) видно, что функция u_1 убывает быстрее, чем экспонента всюду, за исключением параболической области с осью $\theta = \pi$. Эта область аналогична следу при обтекании тела непроводящей жидкостью. Точно так же ведет себя функция u_2 с той лишь разницей, что ее «след» направлен в противоположную сторону, т. е. его осью является луч $\theta = 0$.

При движении в сильном магнитном поле, т. е. при $\mathrm{Ha} \gg 1$, представление (5.26) справедливо во всей области течения. Поэтому для нахождения функций $\Phi_1(\theta)$ и $\Phi_2(\theta)$ можно воспользоваться условиями (5.23). В результате получим

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{-\mathrm{Ha}(r-1)\cos^2 \frac{\theta}{2}}, \\ u_2 &= \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{-\mathrm{Ha}(r-1)\sin^2 \frac{\theta}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

так что

$$u = 1 - \frac{1}{2\sqrt{r}} \left\{ e^{-\mathrm{Ha}(r-1)\cos^2 \frac{\theta}{2}} + e^{+\mathrm{Ha}(r-1)\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right\}. \tag{5.28}$$

Рассматривая выражение (5.28), нетрудно увидеть, что при обтекании изолированного цилиндра в сильном магнитном поле ($\mathrm{Ha} \gg 1$) можно выделить следующие пять характерных областей течения (рис. 5.4):

1. Область однородного внешнего потока (a), в которой скорость равна скорости набегающего потока, т. е. $u=1$.

2. «Следы» (b). В этих областях скорость имеет порядок $1-\frac{1}{2\sqrt{r}}$.

В частности, на расстоянии порядка радиуса цилиндра скорость в следах равна $u=\frac{1}{2}$.

3. Переходные слои между областью однородного внешнего потока и «следами» (c).

4. Гартмановские слои (d) у поверхности цилиндра.

5. Окрестности точек (1, 0), (1, π), где происходит взаимодействие переходных слоев с гартмановскими.

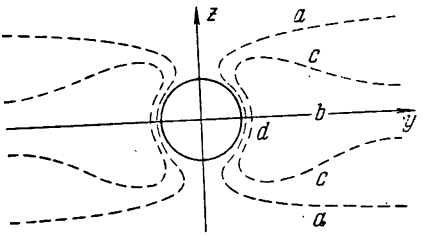


Рис. 5.4. Схематическое изображение областей течения и линий электрического тока при продольном обтекании изолированного цилиндра в поперечном магнитном поле.

Рассмотрим теперь, какова картина распределения электрических токов.

Для этой цели воспользуемся законом Ома

$$\boldsymbol{j}=-\operatorname{grad}\varphi+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{i}_y$$

и соотношением (5.22). В результате получим следующие выражения для компонент плотности электрического тока в полярных координатах

$$j_r=\frac{1}{\mathrm{Ha}\,r}\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial\theta},\qquad j_\theta=\frac{1}{\mathrm{Ha}}\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial r}. \tag{5.29}$$

В полном согласии с физическими представлениями из соотношений (5.29) следует, что существенные электрические токи текут лишь в тех областях, где имеют место значительные градиенты скорости.

К этим областям относятся, во-первых, гартмановские слои (d), в которых преобладает тангенциальная составляющая тока, и, во-вторых, переходные слои (c), где преобладает радиальная составляющая тока. Таким образом, общая картина линий электрического тока имеет вид, показанный на рис. 5.4 (штриховые линии).

Вычислим силу сопротивления единицы длины цилиндра. В рассматриваемом случае эта сила вызвана лишь трением. Из

(58) получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=\frac{\mathrm{Ha}}{2}.$$

Сила сопротивления в расчете на единицу длины

$$F=\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 R\frac{2}{\mathrm{Re}}\int_0^{2\pi}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}d\theta=\pi\rho U_\infty^2 R\frac{\mathrm{Ha}}{\mathrm{Re}}.$$

2. Идеально проводящий цилиндр. В этом случае граничные условия для u_1 и u_2 не отделяются. Действительно, условие (5.16) с учетом (5.22) и (5.13) приводит к следующему граничному условию:

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=1}-\left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=1}=0. \tag{5.30}$$

Ограничимся случаем $\mathrm{Ha}\gg 1$. Тогда можно снова воспользоваться представлением (5.26). Используя граничные условия (5.13[1]), (5.30) найдем, что

$$u_1=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}}e^{-\mathrm{Ha}(r-1)\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$u_2=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}}e^{-\mathrm{Ha}(r-1)\cos^2\frac{\theta}{2}}, \tag{5.31}$$

так что

$$u=1-\frac{1}{\sqrt{r}}\left\{\cos^2\frac{\theta}{2}e^{-\mathrm{Ha}(r-1)\sin^2\frac{\theta}{2}}+\sin^2\frac{\theta}{2}e^{-\mathrm{Ha}(r-1)\cos^2\frac{\theta}{2}}\right\}. \tag{5.32}$$

Из рассмотрения (5.32) следует, что течение можно разбить на следующие четыре области (рис. 5.5):

1. Область однородного внешнего потока (a).

2. «Следы» (b), в которых скорость имеет порядок $1-\frac{1}{\sqrt{r}}$. В частности, на расстояниях порядка радиуса цилиндра скорость близка к нулю.

3. Переходные слои между областью однородного внешнего потока и «следами» (c).

4. Окрестности точек $(1, 0)$, $(1, \pi)$.

Гартмановские слои вблизи большей части поверхности цилиндра (за исключением окрестностей точек $(1, 0)$ и $(1, \pi)$) не возникают, что видно непосредственно из (5.32). Это связано с тем, что у поверхности идеально проводящего тела тангенциальные составляющие электрического тока малы.

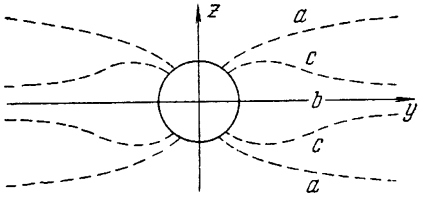


Рис. 5.5. Схематическое изображение областей течения и линий электрического тока при продольном обтекании идеально проводящего цилиндра в поперечном магнитном поле.

Обратимся теперь к картине распределения электрического тока.

Прежде всего, на поверхности цилиндра электрический ток имеет лишь радиальную составляющую, причем $j_r|_{r=1} = \sin\theta$, что следует из (5.31) и (5.29). Далее, значительные градиенты скорости имеются лишь в переходных областях (c). Поэтому лишь в этих областях имеются существенные электрические токи, причем преобладающей является радиальная компонента тока. Тангенциальная составляющая всюду мала. Картина линий электрического тока показана на рис. 5.5

Вычислим силу сопротивления единицы длины цилиндра. В случае проводящего тела эта сила складывается из сил трения и объемных электромагнитных сил, обусловленных токами, протекающими внутри тела. Для силы трения имеем

$$F_{\text{тр}} = -\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 R \,\frac{2}{\mathrm{Re}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=1} d\theta =$$

$$= \rho U_\infty^2 R \,\frac{1}{\mathrm{Re}} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Ha}}{2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\rho U_\infty^2 R \cdot \frac{\mathrm{Ha}}{\mathrm{Re}},$$

т. е. в случае идеально проводящего цилиндра сила трения вдвое меньше, чем у непроводящего.

Для того чтобы вычислить объемную электромагнитную силу, определим распределение электрического тока внутри цилиндра. Для потенциала электрического поля внутри цилиндра имеем краевую задачу

$$\nabla^2 \varphi_i = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = -\sin\theta,$$

решение которой имеет вид

$$\varphi_i = -r\sin\theta = -z.$$

Таким образом, внутри цилиндра $\boldsymbol{j} = \operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{i}_z$.

Объемная электромагнитная сила, приходящаяся на единицу длины цилиндра, равна

$$F_{эл} = \rho\sigma B_0^2 U_\infty R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^1 \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{b}\, r\, dr\, d\varphi = \pi\rho U_\infty^2 R\,\frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Re}} = \pi\rho U_\infty^2 R\,\mathrm{N}.$$

Напомним, что в трубах с электропроводными стенками сила сопротивления также пропорциональна Ha^2 (см. гл. II).

Таким образом, полная сила сопротивления, рассчитанная на единицу длины идеально проводящего цилиндра, равна

$$F = F_{тр} + F_{эм} = \frac{\pi\rho U_\infty^2 R}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Ha} + \mathrm{Ha}^2\right),$$

а так как $\mathrm{Ha} \gg 1$, то $F = \pi\rho U^2{}_\infty R \cdot \mathrm{N}$.

Решения задач, приведенные в этом и предыдущем параграфах, справедливы для произвольных значений магнитного числа Рейнольдса. Так же как и в случае внутренней задачи, это объясняется тем, что в уравнения движения и уравнения для потенциала электрического тока входит лишь поперечная составляющая магнитного поля, которая в рассмотренных случаях постоянна и равна наложенному полю. В потоке наводится лишь продольная составляющая b_x. Эту составляющую можно вычислить из уравнения

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{b} = \mathrm{Re}_m\{-\operatorname{grad}\varphi + \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{b}\}. \qquad (5.33)$$

При обтекании пластины получим

$$\frac{db_x}{dy} = \mathrm{Re}_m(u-1) = -\mathrm{Re}_m e^{-\mathrm{Ha}\,y},$$

т. е.

$$b_x = \frac{\mathrm{Re}_m}{\mathrm{Ha}}\,e^{-\mathrm{Ha}\,y} + C.$$

Постоянная в этом выражении определяется из граничного условия для магнитного поля, либо из условия на бесконечности. Если потребовать $b_x(\infty) = 0$, то $C = 0$.

В случае обтекания цилиндра из (5.33) получим два уравнения

$$\frac{\partial b_x}{\partial y}=\mathrm{Re}_m\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}-u\right),$$
$$\frac{\partial b_x}{\partial z}=-\mathrm{Re}_m\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Используя соотношения (5.22), найдем, что

$$\frac{\partial b_x}{\partial y}=\frac{\mathrm{Re}_m}{\mathrm{Ha}}\frac{\partial}{\partial y}(u_2-u_1),$$
$$\frac{\partial b_x}{\partial z}=\frac{\mathrm{Re}_m}{\mathrm{Ha}}\frac{\partial}{\partial z}(u_2-u_1),$$

и, таким образом,

$$b_x=\frac{\mathrm{Re}_m}{\mathrm{Ha}}(u_2-u_1).$$

При $\mathrm{Ha}\gg 1$ u_1 и u_2 определяются из (5.27) в случае, когда проводимость цилиндра равна нулю и из (5.31), когда цилиндр идеально проводящий.

Можно показать, что при $\mathrm{Ha}=0$ рассмотренная в этом параграфе задача не имеет решения, что аналогично известному парадоксу Стокса.

Существование решения при $\mathrm{Ha}\neq 0$ объясняется наличием, помимо вязкой, еще и джоулевой диссипации. Поэтому возмущения, создаваемые телом, рассеиваются значительно интенсивнее, чем в отсутствие магнитного поля. Это приводит к возможности удовлетворить условиям на бесконечности, так как вихрь скорости в этом случае убывает значительно быстрее чем r^{-1}, как это имеет место в обычной гидродинамике.

Задача, описанная в этом параграфе, в общем виде исследована в работе Хасимото [1] с использованием в качестве искомых функций u и b_x. Частные случаи движения простейших тел (полубесконечная пластина, пластина конечной ширины) рассмотрены в работах Гринспана [2], Гринспана и Пелетьера [3], Якубенко [4].

В заключение этого параграфа отметим, что Ленерт [5] провел эксперимент, подтверждающий описанный выше теоретический результат для идеально проводящего случая. В этом эксперименте ртуть находилась в вертикальном цилиндрическом сосуде,

вблизи дна которого вращалось медное кольцо. Сосуд располагался в магнитном поле, силовые линии которого были вертикальны.

Полученная картина течения показана на фотографии (рис. 5.6), заимствованной из упомянутой работы Ленерта. Движение наблюдалось лишь в области, находящейся непосредственно над медным кольцом. Движущееся кольцо ртути отделено от неподвижной свободными цилиндрическими слоями. Если обратить движение, т. е. оставить неподвижным медное кольцо, а вращать сосуд с ртутью, получится ситуация, аналогичная рассмотренной во второй части этого параграфа. Неподвижная ртуть над кольцом соответствует одному из «следов» над проводящим цилиндром. Различие состоит лишь в том, что в опыте силы инерции не были равны нулю, и потому при значительных скоростях вращения свободные слои сворачивались в вихревые дорожки.

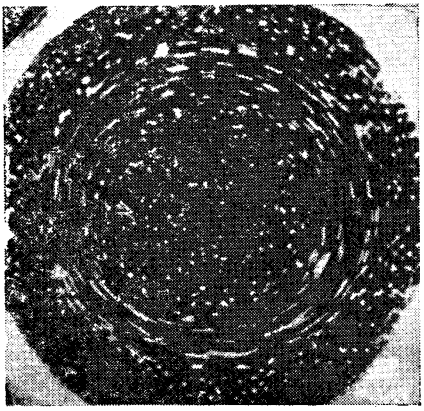


Рис. 5.6. Картина течения в опытах **Ленерта.**

§ 4. Магнитогидродинамическое течение Джеффри—Гамеля

Для течений, рассмотренных в предыдущих параграфах, характерны две особенности: в них отсутствует градиент давления и силы инерции тождественно равны нулю.

В магнитной гидродинамике (как и в общей) неизвестны точные решения задач об обтекании тел с учетом сил инерции.

В то же время наибольший интерес представляют течения с учетом сил инерции при наличии градиента давления и в особенности положительного градиента давления, когда имеет место отрыв потока.

Исследование течения в диффузоре позволяет уяснить механизм влияния магнитного поля на течения с положительным градиентом давления и, в частности, на явление отрыва потока в кормовой части плохообтекаемого тела.

Рассмотрим течение с расходом Q в плоском расширяющемся канале с углом раствора α (рис. 5.7). В вершине угла, образован-

ного сторонами канала, расположен проводник с током силой $2\pi I$. Компоненты магнитного поля такого проводника в полярных координатах имеют вид

$$b_r=0,$$

$$b_\theta=\frac{I}{r}.$$

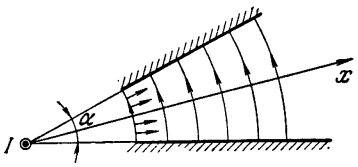


Рис. 5.7. К задаче о магнитогидродинамическом течении в диффузоре.

Такое же поле реализуется и между двумя ферромагнитными стенками, расположенными под углом α. Так как течение плоское, то $\boldsymbol{E}=e_z\boldsymbol{i}_z$ и $e_z=\text{const}$.

Предположим, что линии тока прямолинейны и лишь радиальная компонента скорости u_r отлична от нуля.

При этих предположениях уравнения движения записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}-\frac{u_r}{r^2}-\mathrm{Re}\,u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}-$$

$$-\mathrm{Ha}^2\left(\frac{e_z}{r}+\frac{u_r}{r^2}\right)-\frac{\partial q}{\partial r}=0, \qquad (5.34)$$

$$\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial\theta}=0. \qquad (5.35)$$

Здесь $\mathrm{Re}=Q/\nu$, $\mathrm{Ha}=I(\sigma/\rho\nu)^{1/2}$, $q=\mathrm{Re}\,p$.

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}=0$$

следует, что

$$u_r=\frac{1}{r}f(\theta). \qquad (5.36)$$

Подставляя (5.36) в (5.34) и (5.35), можно получить [6, 7]

$$f''+(4-\mathrm{Ha}^2)f+\mathrm{Re}\,f^2=C, \qquad (5.37)$$

$$q=\frac{2}{r^2}\left\{f(\theta)-\frac{C}{4}\right\}+e_z\ln r; \qquad (5.38)$$

здесь C — константа, подлежащая определению. В дальнейшем будем рассматривать течения при $e_z=0$.

Для нахождения $f(\theta)$ и C необходимы граничные условия

$$f\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right)=0 \tag{5.39}$$

и условие сохранения расхода

$$\int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} f(\theta)\,d\theta=1. \tag{5.40}$$

Мы будем предполагать, что $f(\theta)\geqslant 0$, течение симметрично и функция $f(\theta)$ имеет максимум при $\theta=0$, т. е.

$$f(0)=f_{\max},\qquad f'(0)=0,\qquad 0\leqslant f(\theta)\leqslant f_{\max}.$$

Уравнение (5.37) легко интегрируется в квадратурах. В результате интегрирования получается следующий результат:

$$\theta=\left(\frac{3\,\mathrm{Re}}{2}\right)^{1/2}\int_{f}^{f_{\max}}\{P(t)\}^{-1/2}\,dt,$$

где

$$P(t)=(f_{\max}-f)\left\{t^2+\left[\frac{3(4-\mathrm{Ha}^2)}{2\,\mathrm{Re}}+f_{\max}\right]t+D\right\}.$$

Ясно, что должно быть $P(t)\geqslant 0$.

Для нахождения постоянных $f_{\max}$ и D из граничных условий (5.39) и условия сохранения расхода (5.40) получаются два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{f_{\max}}\{P(t)\}^{-1/2}\,dt&=\left(\frac{\mathrm{Re}}{6}\right)^{1/2}\alpha,\\ \int_0^{f_{\max}}\{P(t)\}^{-1/2}\,t\,dt&=\left(\frac{\mathrm{Re}}{6}\right)^{1/2}.\end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

1. Критическое число Рейнольдса. Из общей гидродинамики известно, что уравнения (5.41) при $\mathrm{Ha}=0$ имеют решение лишь при числах Рейнольдса, меньших некоторого критического значения Re^*. Это значение определяется величиной угла раствора

диффузора α из условия обращения в нуль трения на стенках диффузора, т. е. $f'\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right)=0$. Нетрудно убедиться, что это означает, что в многочлене $P(t)$ $D=0$.

Из уравнений (5.41) и условия $D=0$ после преобразований получаются следующие соотношения для нахождения Re^* [6, 7]:

$$\mathrm{Re}^*=\frac{24}{\alpha}K(k)\{E(k)-(1-k^2)K(k)\}, \tag{5.42}$$

причем k находится из уравнения

$$K(k)=\frac{\alpha}{4}\left(\frac{4-\mathrm{Ha}^2}{1-2k^2}\right)^{1/2}. \tag{5.43}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Из уравнений (5.42), (5.43) следует, что Re^* возрастает с числом Ha. При $\mathrm{Ha}\gg 1$ и фиксированном α (точнее $\mathrm{Ha}\,\alpha\gg 1$) параметр k близок к единице. Поэтому можно воспользоваться асимптотическими выражениями для $K(k)$ и $E(k)$

$$K(k)\sim \ln 4(1-k^2)^{-1/2}, \qquad E(k)\sim 1.$$

Подставляя эти выражения в (5.42), (5.43), получим

$$\mathrm{Re}^*=6\,\mathrm{Ha}. \tag{5.44}$$

Таким образом, при $\mathrm{Ha}\,\alpha\gg 1$ критическое число Рейнольдса не зависит от угла раствора диффузора. Другими словами, при

$$\frac{\mathrm{Ha}}{\mathrm{Re}}>\frac{1}{6} \tag{5.45}$$

течение в диффузоре будет безотрывным.

2. Течение при малых Re. При $\mathrm{Re}\ll 1$ нелинейным членом в уравнении (5.37) можно пренебречь. В результате получим

$$\left.\begin{aligned} f_s(\theta)&=m\frac{\cos m\theta-\cos m\,\alpha/2}{2\sin m\,\alpha/2-m\alpha\cos m\,\alpha/2},\\ C_s&=\frac{m^3}{m\alpha-2\,\mathrm{tg}\,m\,\alpha/2}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\text{при}\quad \mathrm{Ha}<2\\ &m^2=4-\mathrm{Ha}^2;\end{aligned} \tag{5.46а}$$

$$\left.\begin{aligned} f_s(\theta)&=m\frac{\mathrm{ch}\,m\,\alpha/2-\mathrm{ch}\,m\theta}{m\alpha\,\mathrm{ch}\,m\,\alpha/2-2\,\mathrm{sh}\,m\,\alpha/2},\\ C_s&=-\frac{m^3}{m\alpha-2\,\mathrm{th}\,m\,\alpha/2}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\text{при}\quad \mathrm{Ha}>2\\ &m^2=\mathrm{Ha}^2-4.\end{aligned} \tag{5.46б}$$

В дальнейшем решение (5.46) будем для краткости называть стоксовым и все соответствующие величины снабжать индексом s.

При $\mathrm{Ha}\gg 1$ и $\mathrm{Ha}\,\alpha\gg 1$ из (5.46 б) получим, что $f_s=\frac{1}{\alpha}$ всюду, за исключением гартмановских слоев около стенок диффузора, где $f_s=\frac{1}{\alpha}\left[1-\exp\left\{-\mathrm{Ha}\left(\frac{\alpha}{2}-|\theta|\right)\right\}\right]$, $C_s=-\frac{\mathrm{Ha}^2}{\alpha}$, так что $\frac{\partial q}{\partial r}=-\frac{\mathrm{Ha}^2}{\alpha r^2}$, а $\frac{\partial q}{\partial \theta}=0$ всюду, за исключением гартмановских слоев, где

$$\left|\frac{\partial q}{\partial \theta}\right|=\frac{2\,\mathrm{Ha}}{\alpha r^2}\exp\left\{-\mathrm{Ha}\left(\frac{\alpha}{2}-|\theta|\right)\right\}.$$

Таким образом, для стоксова течения в диффузоре характерно наличие большого отрицательного градиента давления в направлении течения, пропорционального квадрату числа Гартмана. Кроме того, в гартмановском слое у стенок имеется большой поперечный градиент давления, пропорциональный числу Гартмана.

3. Существование и единственность решения нелинейной задачи. Уравнения (5.41) при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}^*$ не имеют решения. При $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}^*$ эти уравнения могут иметь решения. Для того чтобы выяснить условия, при которых решение задачи (5.37), (5.39), (5.40) существует и единственно, сведем эту задачу к интегральному уравнению. Представим уравнение (5.37) в следующем виде:

$$f''-m^2f=C-\mathrm{Re}\,f^2. \tag{5.37$^{\mathrm{I}}$}$$

Обратим оператор в левой части (5.37$^{\mathrm{I}}$) с учетом (5.39)

$$f(\theta)=\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}K_1(\theta,\xi)\,\{C-\mathrm{Re}\,f^2(\xi)\}\,d\xi, \tag{5.37$^{\mathrm{II}}$}$$

где

$$K_1(\theta,\xi)=(2m\,\mathrm{sh}\,m\alpha)^{-1}\{\mathrm{ch}\,m(\theta+\xi)-\mathrm{ch}\,m(\alpha-|\theta-\xi|)\}$$

— функция Грина оператора $f''-m^2f$ с условиями (5.39).

Используя условие сохранения расхода (5.40), можно исключить константу C из (5.37$^{\mathrm{II}}$). В результате получим следующее интегральное уравнение типа Гаммерштейна:

$$f(\theta)=f_s(\theta)+\mathrm{Re}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}K(\theta,\xi)f^2(\xi)\,d\xi, \tag{5.47}$$

где

$$K(\theta, \xi) = K_1(\theta, \xi) + K_2(\theta, \xi),$$

$$K_2(\theta, \xi) = (2m)^{-1}\left(\frac{m\alpha}{2} - \operatorname{th}\frac{m\alpha}{2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} m\theta}{\operatorname{ch}\frac{m\alpha}{2}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{ch} m\xi}{\operatorname{ch}\frac{m\alpha}{2}}\right),$$

$f_s(\theta)$ — стоксово решение (46 б).

Ниже нам потребуются оценки для $\max|K(\theta, \xi)|$, $\max\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}|K(\theta, \xi)|\,d\xi$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что

$$\max_{|\theta, \xi| \leqslant \alpha/2}|K(\theta, \xi)| \leqslant \frac{1}{2m}\Phi_1(m\alpha); \quad \Phi_1(m\alpha) = \operatorname{th}\frac{m\alpha}{2} + \frac{\left(1 - 1/\operatorname{ch}\frac{m\alpha}{2}\right)^2}{\frac{m\alpha}{2} + \operatorname{th}\frac{m\alpha}{2}}, \tag{5.48}$$

$$\max_{|\theta| \leqslant \alpha/2}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}|K(\theta, \xi)|\,d\xi \leqslant \frac{2}{m^2}\Phi_2(m\alpha); \quad \Phi_2(m\alpha) = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{m\alpha}{2}}; \tag{5.49}$$

заметим также, что

$$\max_{|\theta| \leqslant \alpha/2}|f_s(\theta)| = \Phi_3(m\alpha); \quad \Phi_3(m\alpha) = m\frac{1 - 1/\operatorname{ch}\frac{m\alpha}{2}}{m\alpha - 2\operatorname{th}\frac{m\alpha}{2}}. \tag{5.50}$$

Запишем теперь уравнение (5.47) в символическом виде

$$f = Af, \tag{5.47^1}$$

где A — оператор, стоящий в левой части (5.47), и применим к уравнению (5.47^1) принцип сжатых отображений [8, 9].

Отображение $g = Af$ имеет в шаре $\|f\| < \rho$ одну и только одну неподвижную точку, если выполнены следующие условия:

1. $\|Af\| < \rho$ при $\|f\| \leqslant \rho$,
2. $\|Af_1 - Af_2\| \leqslant \lambda\|f_1 - f_2\|$ при $\|f_{1,2}\| \leqslant \rho$, (5.51)
3. $\lambda < 1$.

В рассматриваемом случае мы имеем дело с отображением пространства непрерывных на отрезке $\left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$ функций в себя с нормой $\|f\| = \max\limits_{|\theta| \leqslant \frac{\alpha}{2}} |f(\theta)|$.

Условиям (5.51) можно удовлетворить, используя оценку (5.48) или (5.49).

Если воспользоваться оценкой (5.48), то получим

$$\|Af\| \leqslant \alpha\rho^2 \frac{\mathrm{Re}}{2m} \Phi_1(m\alpha) + \Phi_3(m\alpha), \quad \max|f| \leqslant \rho,$$

$$\|Af_1 - Af_2\| \leqslant \alpha\rho \frac{\mathrm{Re}}{m} \Phi_1(m\alpha) \|f_1 - f_2\|,$$

$$\|f\| \leqslant \rho, \qquad \|f_{1,2}\| \leqslant \rho.$$

Из этих соотношений и условий (5.51) вытекают неравенства

$$\rho \leqslant \frac{m}{\mathrm{Re}\,\alpha\Phi_1(m\alpha)},$$

$$\rho \leqslant \frac{m\sqrt{2}}{\mathrm{Re}\,\alpha\Phi_1(m\alpha)} \left[1 - \frac{\mathrm{Re}\,\alpha}{m} \Phi_1(m\alpha)\Phi_3(m\alpha)\right]^{1/2},$$

которые могут быть удовлетворены при условии

$$\frac{\mathrm{Re}\,\alpha}{m} \Phi_1(m\alpha)\Phi_3(m\alpha) < 1. \tag{5.52}$$

При $m\alpha \gg 1$ (т. е. $\mathrm{Ha}\,\alpha \gg 1$) это последнее неравенство упрощается и переходит в

$$\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}} < 1 - \frac{3}{\mathrm{Ha}\,\alpha} \quad *). \tag{5.52'}$$

Аналогично, если исходить из оценки (5.49), можно получить неравенства

$$\rho \leqslant \frac{m^2}{4\,\mathrm{Re}\,\Phi_2(m\alpha)}, \quad \rho \leqslant \frac{m^2}{2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}} \left[1 - \frac{4\,\mathrm{Re}}{m^2} \Phi_2(m\alpha)\Phi_3(m\alpha)\right]^{1/2}, \tag{5.53}$$

*) Заметим, что условие (5.45), при котором возможно безотрывное течение, имеет аналогичный вид $\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}} \leqslant 6$.

которые будут совместными, если выполнено условие

$$\frac{4\,\mathrm{Re}}{m^2}\Phi_2(m\alpha)\Phi_3(m\alpha)\leqslant 1. \tag{5.54}$$

Это последнее при $m\alpha\gg 1$ дает

$$\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}^2}\leqslant\frac{\alpha}{4}\left(1-\frac{2}{\mathrm{Ha}\,\alpha}\right). \tag{5.54'}$$

Таким образом, интегральное уравнение (5.47), а следовательно, и исходная задача (5.37), (5.39), (5.40) имеют единственное решение, если выполнено одно из неравенств (5.52) или (5.54). Другими словами, (5.52) и (5.54) являются достаточными условиями существования и единственности решения. Из этих неравенств вытекает, в частности, что как бы велико ни было число Рейнольдса, можно указать такое число Гартмана, что при всех числах Гартмана, превосходящих его, поставленная задача имеет решение и притом только одно.

4. Течение при больших числах Гартмана. Можно ожидать, что если электромагнитные силы значительно больше сил инерции (даже если число Рейнольдса не мало, скажем $\mathrm{Re}\gg 1$), то течение будет хорошо описываться стоксовым приближением. В случае течения в диффузоре это предположение можно строго обосновать. Пусть число Рейнольдса произвольно, но фиксировано, а число Гартмана очень велико. Иными словами, рассмотрим поведение решения уравнения (5.47) при $\mathrm{Re}=\mathrm{const}$ и $\mathrm{Ha}\to\infty$.

Предположим, что число Гартмана настолько велико, что имеет место неравенство (5.53). Тогда из (5.47) получим

$$\max|f|\leqslant(\max|f|)^2\frac{2\,\mathrm{Re}}{m^2}\Phi_2(m\alpha)+\Phi_3(m\alpha),$$

так что либо

$$\max|f|\leqslant\frac{2\Phi_3(m\alpha)}{1+\left\{1-\dfrac{8\,\mathrm{Re}}{m^2}\Phi_2(m\alpha)\Phi_3(m\alpha)\right\}^{1/2}},$$

либо

$$\max|f|\geqslant$$

$$\geqslant m^2[4\,\mathrm{Re}\,\Phi_2(m\alpha)]^{-1}\left\{1+\left[1-\frac{8\,\mathrm{Re}}{m^2}\Phi_2(m\alpha)\Phi_3(m\alpha)\right]^{1/2}\right\}^{-1}.$$

Последнее из этих двух неравенств противоречит (5.53). Первое же дает оценку

$$\max|f| \leqslant \Phi_3(m\alpha) + \frac{8\,\mathrm{Re}}{m^2}\Phi_2(m\alpha)\Phi_3(m\alpha).$$

Вместе с уравнением (5.47) эта оценка приводит к неравенству

$$\max_{|\theta|\leqslant\alpha/2}|f-f_s| \leqslant \frac{2\,\mathrm{Re}}{m^2}\Phi_2(m\alpha)\left\{\Phi_3(m\alpha) + \frac{8\,\mathrm{Re}}{m^2}\Phi_2(m\alpha)\Phi_3(m\alpha)\right\}^2.$$

При $\mathrm{Ha}\,\alpha \gg 1$ из этого неравенства следует

$$\max|f-f_s| \leqslant \frac{2\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}^2\alpha^2}\left(1+\frac{8\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}^2}\right)^2\left(1-\frac{4}{\mathrm{Ha}\,\alpha}\right)^{-1}.$$

Таким образом, при $\mathrm{Ha}\to\infty$ решение нелинейной задачи равномерно по θ стремится к стоксову решению и отличается от него на величину порядка Ha^{-2}.

Эти решения будут мало отличаться, если

$$\mathrm{Ha} \gg \frac{1}{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Re}} \gg \frac{2}{\alpha^2}.$$

Вышесказанное относится к распределению скоростей. Чтобы выяснить, каково поведение сил трения, необходимо, очевидно, оценить первую производную от f. Дифференцируя уравнение (5.47) (нетрудно показать, что дифференцирование под знаком интеграла допустимо), можно получить оценку

$$\max|f'(\theta) - f'_s(\theta)| \leqslant 2\frac{\mathrm{Re}}{m}\,\mathrm{th}\,\frac{m\alpha}{2},$$

а при $m\alpha \gg 1$

$$\max|f'-f'_s| \leqslant 2\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}}.$$

Тем самым при $\mathrm{Ha}\to\infty$ производная решения нелинейной задачи также равномерно по θ стремится к производной от стоксова решения, но отличается от нее лишь на величину порядка Ha^{-1}. Силы трения, следовательно, будут мало отличаться, если

$$\mathrm{Ha} \gg \frac{1}{\alpha} \quad \text{и} \quad \mathrm{Ha} \gg 2\,\mathrm{Re}.$$

Оценим поведение давления при $\mathrm{Ha}\to\infty$. Для этого достаточно оценить константу C. Можно показать, что при $\mathrm{Ha}\,\alpha\gg 1$

$$|C-C_s|\leqslant \mathrm{Re}\left(1+\frac{8\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Ha}^2}\right)^2\left(1-\frac{4}{\mathrm{Ha}\,\alpha}\right)^{-1},$$

т. е. давления различаются на величину порядка Re. Поскольку C_s имеет порядок Ha^2/α, то при условии $\mathrm{Ha}^2/\alpha\gg\mathrm{Re}$ разница между C и C_s будет мала по сравнению с величиной этих констант.

Как известно, для течения в диффузоре без магнитного поля характерно наличие положительного градиента давления. При наложении сильного магнитного поля распределение давления принципиально меняется. Это следует из только что доказанного утверждения о том, что при очень больших числах Гартмана параметры течения, в том числе и давление, приближаются к стоксову, для которого при $\mathrm{Ha}\gg 1$ характерен отрицательный градиент давления, пропорциональный Ha^2.

Кроме того, в гартмановском слое возникает значительный поперечный градиент давления, пропорциональный числу Гартмана.

В заключение этого параграфа отметим, что описанная в § 1 гл. I качественная картина течения в кормовой части плохообтекаемого тела в сильном магнитном поле полностью согласуется с результатами этого параграфа, а именно, давление в кормовой части тела резко понижается и течение становится безотрывным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hasimoto H., Steady longitudinal motion of a cylinder in a conducting fluid, J. of Fluid Mech. 8, № 1, 61 (1960).
2. Greenspan H. P., On longitudinal motion in a magnetic field J. of Fluid Mech. 9, № 3, 455 (1960).
3. Greenspan H. P., Peletier L. A., Some exact solutions of magnetohydrodynamic viscous flow problems, J. Math. a. Phys. **41**, № 2, 116 (1962).
4. Якубенко А. Е., Некоторые решения уравнений установившегося течения несжимаемой, вязкой и электропроводящей жидкости, ПМТФ, № 2, 71, (1963).
5. Lehnert B., Instability of laminar flow of mercury caused by an external magnetic field, Proc. Roy. Soc, **A233**, 299 (1955).
6. Ватажин А. Б., О течении в диффузоре в присутствии магнитного поля, ПММ **24**, № 3, 524 (1960).
7. Axford W. I., The magnetohydrodynamic Jeffrey — Hamel problem for a weakly conducting fluid, Quarterly J. Mech. a. Appl. Math. **14**, № 3, 335 (1961).
8. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, Москва, 1956.
9. Колмогоров А. И. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», Москва, 1968.

ГЛАВА VI

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТОКСА И ОЗЕЕНА

§ 1. О пределах применимости стоксова приближения

В предыдущей главе было показано, что для течения в диффузоре стоксово приближение применимо не только при малых числах Рейнольдса, но и при произвольном значении **Re**, если только число Гартмана достаточно велико. В § 7 настоящей главы показано, что это имеет место также и в случае течения в полуплоскости в поперечном магнитном поле. Естественно поставить вопрос: является ли вышеприведенный результат справедливым и для других течений?

Дать математически строгий ответ на этот вопрос пока не представляется возможным. Однако можно привести некоторые соображения в пользу положительного ответа на поставленный вопрос.

Введем в уравнениях (5.1) новые независимые переменные

$$\xi_i = \mathbf{Ha}\, x_i, \qquad i=1,2,3, \qquad \text{а также} \qquad \tilde{\varphi} = \mathbf{Ha}\,\varphi. \tag{6.1}$$

Тогда уравнения движения (5.1)—(5.3) запишутся следующим образом:

$$\nabla^2 \boldsymbol{U} + \{-\operatorname{grad}\tilde{\varphi} + \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{i}_2\}\times\boldsymbol{i}_2 - \operatorname{grad}\frac{\mathbf{Re}\,p}{\mathbf{Ha}} = \frac{\mathbf{Re}}{\mathbf{Ha}}(\boldsymbol{U}\operatorname{grad})\boldsymbol{U}, \tag{6.2}$$

$$\nabla^2\tilde{\varphi} = (\operatorname{rot}\boldsymbol{U})_2, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{U}=0. \tag{6.3}$$

В этих уравнениях операции ∇^2, div, rot и grad берутся по новым переменным ξ_i.

Если отношение **Re**/**Ha** значительно меньше единицы, то правая часть уравнения (6.2) может оказаться пренебрежимо малой по сравнению с величинами в левой части уравнения и, таким образом, стоксово приближение окажется применимым. Выска-

занное предположение находит и экспериментальное подтверждение. В частности, в стоксовом течении произведение $\mathbf{Re}p$ зависит лишь от числа Гартмана и не зависит от числа Рейнольдса. Ниже (гл. IX) приводятся результаты измерения распределения давления по поверхности круглого цилиндра в потоке жидкого натрия в поперечном магнитном поле. Как следует из этих результатов, при числах $\mathbf{Ha} \sim 10^3$ и $\mathbf{Re} \sim 2 \cdot 10^3 \div 6 \cdot 10^4$ произведение $\mathbf{Re}p$ практически не зависит от числа Рейнольдса, хотя отношение $\mathbf{Re}/\mathbf{Ha}$ еще не мало. Кроме того, давление в передней части цилиндра резко повышается, а в кормовой понижается и кривая распределения давления становится симметричной. При этом давление монотонно убывает от передней критической точки к задней.

Качественное подтверждение вышесказанного предположения следует также из результатов опытов по изучению влияния магнитного поля на течение в спутном потоке и на явление отрыва при числах Рейнольдса $\sim 10^3 \div 10^4$ (гл. IX). По мере возрастания индукции магнитного поля вихревая дорожка Кармана подавляется и течение в следе становится стационарным. При дальнейшем усилении поля обтекание становится безотрывным. Одновременно с этим резко возрастает коэффициент сопротивления. Аналогичная смена явлений происходит при последовательном убывании числа Рейнольдса.

На основании всего вышесказанного можно ожидать, что если отношение $\mathbf{Re}/\mathbf{Ha}$ меньше некоторой константы (для каждого конкретного течения своей), то приближение Стокса хорошо описывает истинное течение.

В связи с этим рассмотрение стоксовых течений в магнитной гидродинамике представляет бо́льший интерес, чем в общей гидродинамике. Этот интерес обусловлен также и тем обстоятельством, что при достаточно больших числах Гартмана повышается устойчивость течений и турбулентное течение переходит в ламинарное.

Ниже мы рассмотрим некоторые общие свойства стоксовых течений, а также некоторые простейшие частные случаи таких течений.

§ 2. Единственность решения задачи о стоксовом течении

Постановка задачи о стоксовом течении отличается от общего случая лишь тем, что в уравнениях (5.1)—(5.3) отсутствуют члены, соответствующие силам инерции.

Выпишем для удобства уравнения и краевые условия, описывающие стоксово течение.

В области течения

$$\nabla^2 \boldsymbol{U} + \mathrm{Ha}^2\{-\operatorname{grad}\varphi^e + \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{i}_2\}\times\boldsymbol{i}_2 = \operatorname{grad} p^*), \quad \operatorname{div}\boldsymbol{U}=0, \tag{6.4}$$

$$\nabla^2\varphi^e = (\operatorname{rot}\boldsymbol{U})_y. \tag{6.5}$$

Внутри тела $\boldsymbol{U}\equiv 0$

$$\nabla^2\varphi^i = 0. \tag{6.6}$$

Граничные условия

$$\boldsymbol{U}=0, \quad \varphi^e=\varphi^i, \quad \frac{\partial\varphi^e}{\partial n}=\frac{\sigma_i}{\sigma_e}\frac{\partial\varphi^i}{\partial n} \text{ на поверхности тела,} \tag{6.7}$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{i}_1\sin\alpha+\boldsymbol{i}_2\cos\alpha, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=\sin\alpha \text{ на бесконечности.} \tag{6.8}$$

Для доказательства единственности достаточно убедиться, что при однородных граничных условиях система (6.4)—(6.6) имеет лишь тривиальное решение. В рассматриваемом случае это означает, что вместо условий (6.8) следует потребовать, чтобы на бесконечности

$$\boldsymbol{U}=0, \quad \operatorname{grad}\varphi=0. \tag{6.8'}$$

Рассмотрим сначала трехмерный случай.

Умножим уравнения (6.4)—(6.6) скалярно на $\boldsymbol{U}$, φ^e и φ^i соответственно и проинтегрируем уравнение (6.6) по области внутри тела Ω^i, а уравнения (6.4) и (6.5) по области течения Ω_R^e, заключенной между поверхностью тела и сферой S_R достаточно большого радиуса R. Суммируя, в результате получим

$$\int\limits_{\Omega_R^e}\sum_{i,k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega_R^e + \mathrm{Ha}^2\int\limits_{\Omega_R^e}(u_1^2+u_3^2-\operatorname{grad}^2\varphi^e)\,d\Omega_R^e - \mathrm{Ha}^2\frac{\sigma_i}{\sigma_e}\int\limits_{\Omega_i}\operatorname{grad}^2\varphi^i d\Omega_i =$$

$$= \int\limits_{S_R}\left(u_i\frac{\partial u_i}{\partial n} - pu_n + \mathrm{Ha}^2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{U})_2\cdot\varphi^e - \mathrm{Ha}^2\varphi^e\frac{\partial\varphi^e}{\partial n}\right)dS_R. \tag{6.9}$$

*) Ниже в этой главе, если не оговорено противное, буквой p обозначено произведение $\mathrm{Re}p/\rho U_\infty^2$.

При выводе соотношения (6.9) использованы условия (6.7) на поверхности тела, уравнение неразрывности и формула Грина

$$\int_{\Omega} u_i \nabla^2 u_i d\Omega = -\int_{\Omega} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + \int_{S_\Omega} u_i \frac{\partial u_i}{\partial n} dS_\Omega,$$

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla^2 \varphi = -\int_{\Omega} \operatorname{grad}^2 \varphi d\Omega + \int_{S_\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_\Omega,$$

где Ω — некоторая область, а S_Ω — ее граница.

Кроме того, из (6.5) и (6.6) нетрудно получить неравенство

$$\int_{\Omega_R{}^e} \{u_1{}^2 + u_3{}^2 - \operatorname{grad}^2 \varphi^e\} d\Omega^e - \frac{\sigma_i}{\sigma_e} \int_{\Omega^i} \operatorname{grad}^2 \varphi^i d\Omega^i \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\Omega_R{}^e} \{u_1{}^2 + u_3{}^2 - \operatorname{grad}^2 \varphi^e\} d\Omega^e + \int_{S_R} \left\{\varphi^e (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{U})_2 - \varphi^e \frac{\partial \varphi^e}{\partial n}\right\} dS_\Omega. \tag{6.10}$$

Как будет показано ниже, при выполнении условий (6.8) скорость, давление и потенциал электрического поля на большом удалении от тела ведут себя следующим образом:

$$|u_i| \sim r^{-1}, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right| \sim r^{-3/2}, \quad |p| \sim r^{-3/2},$$

$$|\varphi| \sim r^{-1}, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \sim r^{-3/2} \text{ при } R \to \infty.$$

Вследствие такого поведения на бесконечности скорости, давления и потенциала электрического поля интегралы в правой части равенства (6.9) и неравенства (6.10) стремятся к нулю при $R \to \infty$.

Поэтому, переходя в (6.9) и (6.10) к пределу при $R \to \infty$, получим

$$\int_{\Omega^e} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega^e + \mathrm{Ha}^2 \int_{\Omega^e} (u_1{}^2 + u_3{}^2 \operatorname{grad}^2 \varphi^e) d\Omega^e -$$

$$- \mathrm{Ha}^2 \frac{\sigma_i}{\sigma_e} \int_{\Omega^i} \operatorname{grad}^2 \varphi^i d\Omega^i = 0, \tag{6.9'}$$

$$\int_{\Omega^e} (u_1{}^2 + u_3{}^2 - \operatorname{grad}^2 \varphi^e) d\Omega^e - \frac{\sigma_i}{\sigma_e} \int_{\Omega_i} \operatorname{grad}^2 \varphi d\Omega^i \geqslant 0. \tag{6.10'}$$

Из (6.9′) и (6.10′) немедленно следует, что $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \equiv 0$, т. е. $\boldsymbol{U} = \text{const}$. Но так как на поверхности тела $\boldsymbol{U}=0$, то и во всей области течения $\boldsymbol{U} \equiv 0$. Обращаясь теперь снова к равенству (6.9′), получаем, что $\operatorname{grad} \varphi^e \equiv 0$ и $\operatorname{grad} \varphi^i \equiv 0$, откуда с учетом того, что на поверхности тела $\varphi^e = \varphi^i$ следует

$$\varphi^e \equiv \varphi^i \equiv \text{const}.$$

Таким образом, единственность пространственной стоксовой задачи доказана.

Обратимся теперь к плоской задаче. В этом случае электрическое поле постоянно и имеет лишь x_3-компоненту, так что $-\operatorname{grad} \varphi = e_3 \boldsymbol{i}_3$. Поэтому разность $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}_1 - \boldsymbol{U}_2$ двух решений будет удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\nabla^2 \boldsymbol{W} + \mathrm{Ha}^2 \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_2 - \operatorname{grad} q = 0, \tag{6.11}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W} = 0 \tag{6.12}$$

и однородным условиям на поверхности тела и на бесконечности

$$\boldsymbol{W}|_S = 0,$$

$$\boldsymbol{W}|_{r \to \infty} = 0. \tag{6.13}$$

Умножим уравнение (6.11) скалярно на $\boldsymbol{W}$ и проинтегрируем по области течения Ω_R^e, заключенной между контуром S, ограничивающим тело, и окружностью S_R достаточно большого радиуса R. После простых преобразований с учетом (6.12) и (6.13) получим

$$\int\limits_{\Omega_R} \left\{ \sum_{i,\,k} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right)^2 + \mathrm{Ha}^2 w_1^2 \right\} d\Omega_R = \int\limits_{S_R} \left(w_i \frac{\partial w_i}{\partial n} - p w_n \right) dS_R,$$

$$i, k = 1, 2. \tag{6.14}$$

Ниже будет показано, что при $R \to \infty$

$$|w_i| \sim r^{-1/2}, \quad \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \right| \sim r^{-1}, \quad |p| \sim r^{-1}.$$

Поэтому интеграл в правой части равенства (6.14) стремится к

нулю при $R\to\infty$. Переходя в равенстве (6.14) к пределу при $R\to\infty$, получим

$$\int\limits_{\Omega^e}\left\{\sum_{i,k}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k}\right)^2+\mathrm{Ha}^2\,w_1^2\right\}d\Omega^e=0, \qquad (6.14')$$

откуда с учетом (6.13) получается, что $\boldsymbol{W}\equiv 0$ во всей области течения Ω^e. Таким образом, и здесь имеет место единственность.

Все сказанное в этом параграфе относилось к случаю обтекания тела, т. е. к случаю неограниченной области течения. Очевидно, что то же самое имеет место и для течения в ограниченной области.

§ 3. Фундаментальное решение

Пусть сила, действующая на тело, равна $-\boldsymbol{F}$. Рассматривая течение на расстояниях, по сравнению с которыми размеры тела пренебрежимо малы, тело можно заменить сосредоточенной силой $\boldsymbol{F}\delta(r)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

Поэтому, для того чтобы выяснить, каково поведение потока при $r\to\infty$, достаточно рассмотреть три течения во всем пространстве, вызванные единичными сосредоточенными силами, направленными вдоль каждой из координатных осей.

Другими словами, будем искать фундаментальное решение *) системы уравнений, описывающих движение, т. е. решение следующей системы:

$$\nabla^2\boldsymbol{U}_k+\mathrm{Ha}^2\{-\operatorname{grad}\varphi_k+\boldsymbol{U}_k\times\boldsymbol{i}_2\}\times\boldsymbol{i}_2-\operatorname{grad}p=\delta(r)\boldsymbol{i}_k,\quad k=1,2\ 3,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{U}_k=0,$$
$$\nabla^2\varphi_k=(\operatorname{rot}\boldsymbol{U}_k)_2 \qquad (6.15)$$

в пространственном случае и системы

$$\nabla^2\boldsymbol{U}_k+\mathrm{Ha}^2\,\boldsymbol{U}_k\times\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_2-\operatorname{grad}p=\delta(r)\boldsymbol{i}_k,\quad k=1,2,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{U}_k=0, \qquad (6.16)$$

в плоском случае, причем мы будем рассматривать сразу решения для возмущения

$$\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}_\infty,\quad \varphi-\varphi_\infty,\quad p-p_\infty,$$

оставляя за ними прежние обозначения. Поэтому в первом

*) Такое решение иногда называют также решением типа источника.

уравнении (6.16) опущен член $\operatorname{grad}\varphi$, так как в плоском случае $\operatorname{grad}\varphi=\text{const}\,\boldsymbol{i}_3=u_{1\infty}\cdot\boldsymbol{i}_3$.

Векторы $\boldsymbol{U}_k$ образуют так называемый фундаментальный тензор.

Фундаментальное решение уравнений (6.15) и (6.16) может быть найдено аналогично тому, как это сделано в известной работе Озеена [1] при нахождении фундаментального решения системы уравнений Озеена.

Начнем с пространственного случая.

Если искать решение системы (6.15) в виде

$$\left.\begin{aligned} u_{ik}{}^{\Phi}&=\delta_{ik}\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_k},\\ p_k{}^{\Phi}&=-\frac{\partial}{\partial x_k}(\nabla^2\Phi-\mathrm{Ha}^2\,\delta_{2k}\Phi);\quad \varphi_k{}^{\Phi}=\{\operatorname{rot}(\boldsymbol{i}_2\Phi)\}_k,\end{aligned}\right\}\tag{6.17}$$

то система (6.15) сводится к следующему уравнению:

$$\nabla^4\Phi-\mathrm{Ha}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2{}^2}=\delta(r).\tag{6.18}$$

Это уравнение может быть записано в виде

$$\left(\nabla^2+\mathrm{Ha}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\nabla^2-\mathrm{Ha}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Phi=\delta(r).$$

Уравнения $\nabla^2 f\pm\mathrm{Ha}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0$ заменой $f=e^{\mp\frac{\mathrm{Ha}}{2}x_2}\cdot g$ сводятся к уравнению Гельмгольца $\nabla^2 g-\dfrac{\mathrm{Ha}^2}{4}\cdot g=0$, фундаментальное решение которого в пространстве трех измерений имеет вид $-\dfrac{1}{4\pi r}e^{-\frac{\mathrm{Ha}}{2}r}$, где $r=\left(\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{1/2}$. Поэтому для фундаментального решения уравнения (6.18) получаем

$$\nabla^2\Phi-\mathrm{Ha}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=-\frac{1}{4\pi r}e^{-\frac{\mathrm{Ha}}{2}(r+x_2)},$$

$$\nabla^2\Phi+\mathrm{Ha}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=-\frac{1}{4\pi r}e^{-\frac{\mathrm{Ha}}{2}(r-x_2)},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{1}{4\pi \,\mathrm{Ha}\, r} e^{-\frac{\mathrm{Ha}}{2} r} \cdot \mathrm{sh}\,\frac{\mathrm{Ha}}{2} x_2,$$

окончательно

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi \,\mathrm{Ha}} \int_0^{x_2} \frac{1}{r} e^{-\frac{\mathrm{Ha}}{2} r} \cdot \mathrm{sh}\,\frac{\mathrm{Ha}}{2} \tau \, d\tau. \tag{6.19}$$

Выражения (6.17) и (6.19) и представляют фундаментальное решение системы уравнений пространственного магнитогидродинамического течения Стокса.

Пользуясь соотношениями (6.17) и (6.19), можно убедиться непосредственным вычислением, что при $r \to \infty$

$$\begin{gathered} |u_{ik}^{\Phi}| \sim r^{-1}, \quad \left|\frac{\partial u_{ik}^{\Phi}}{\partial x_j}\right| \sim r^{-3/2}, \quad p_k^{\Phi} \sim r^{-3/2}, \\ |\varphi_k^{\Phi}| \sim r^{-1}, \quad \left|\frac{\partial \varphi_k^{\Phi}}{\partial x_i}\right| \sim r^{-3/2}. \end{gathered} \tag{6.20}$$

Из этих же соотношений видно, что такое поведение на бесконечности имеет место лишь в двух узких параболических следах. Направление оси одного из следов совпадает с положительным направлением оси x_2 (т. е. вектора индукции магнитного поля). Ось другого следа направлена противоположно. Вне этих следов скорость, давление, электрический потенциал и их производные убывают экспоненциально.

В начале координат фундаментальное решение имеет особенность следующего вида:

$$|u_{ik}^{\Phi}| \sim r^{-1}, \quad \left|\frac{\partial u_{ik}^{\Phi}}{\partial x_j}\right| \sim r^{-2}.$$

Рассмотрим теперь плоский случай. Разыскивая решение уравнений (6.16) в виде

$$\begin{gathered} u_{ik}^{\Phi} = \delta_{ik} \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k}, \\ p_k^{\Phi} = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla^2 \Phi - \mathrm{Ha}^2 \delta_{2k} \Phi), \end{gathered} \tag{6.21}$$

приходим к уравнению вида (6.18)

$$\nabla^4 \Phi - \mathrm{Ha}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \delta(r), \qquad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}. \tag{6.22}$$

Фундаментальное решение этого уравнения в двух измерениях находится аналогично тому, как это сделано в случае трех измерений. Окончательно получается следующий результат:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{Ha}} \int_0^{x_2} K_0\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2} r\right) \mathrm{sh}\,\frac{\mathrm{Ha}\, x_2}{2}\, dx_2. \tag{6.23}$$

Здесь $K_0(z)$ — функция Макдональда.

Из соотношений (6.21) и (6.23) можно получить оценки, аналогичные (6.20). Именно, при $r \to \infty$

$$|u_{ik}{}^{\Phi}| \sim r^{-1/2}, \qquad \left|\frac{\partial u_{ik}{}^{\Phi}}{\partial x_j}\right| \sim r^{-1}, \qquad |p_k{}^{\Phi}| \sim r^{-1}, \tag{6.20'}$$

причем такое поведение на бесконечности имеет место лишь в двух узких параболических «следах». Оси этих следов совпадают с положительной и отрицательной полуосями x_2, т. е. направлены вдоль силовых линий магнитного поля. Вне этих следов при $r \to \infty$ скорость, давление и их производные убывают экспоненциально. Отметим особо, что если невозмущенный поток направлен вдоль магнитного поля, то один из следов будет направлен вниз по потоку, другой же расположится вверх по течению.

Образование двух следов физически объясняется аналогично распространению волн Альфвена в обе стороны вдоль направления силовых линий магнитного поля.

В начале координат фундаментальное решение имеет особенность вида

$$|u_{ik}{}^{\Phi}| \sim \ln r, \qquad \left|\frac{\partial u_{ik}{}^{\Phi}}{\partial x_j}\right| \sim r^{-1}.$$

Фундаментальное решение уравнений магнитогидродинамического течения Стокса по своей структуре аналогично фундаментальному решению уравнений Озеена. Очевидно, существенное отличие состоит в том, что вне области следа фундаментальное решение уравнений Озеена убывает как r^{-2} в пространственном случае и как r^{-1} в плоском, тогда как фундаментальное решение уравнений магнитогидродинамического течения Стокса вне области следов (здесь их два) убывает экспоненциально.

Зная фундаментальное решение и силу $\boldsymbol{F}$, действующую на тело, можно выписать в явном виде выражения для компонент вектора скорости, давления и потенциала электрического поля на большом удалении от тела. При этом форма тела, очевидно, не играет никакой роли.

Действительно, пусть $\boldsymbol{F}=F_k\boldsymbol{i}_k$. Тогда компоненты вектора скорости представляются в виде

$$u_i=u_{ik}^{\Phi}F_k, \qquad i=1, 2, k. \tag{6.24}$$

Соответственно давление и потенциал электрического поля равны

$$p=p_k^{\Phi}F_k, \qquad \varphi=\varphi_k^{\Phi}F_k. \tag{6.25}$$

Пусть течение обладает симметрией относительно направления вектора скорости набегающего потока. Это имеет место, в частности, если тело симметрично относительно направления вектора скорости набегающего потока и этот вектор параллелен или перпендикулярен вектору индукции магнитного поля. При этом сила, приложенная к телу, направлена вдоль скорости набегающего потока, и поведение потока на большом удалении от тела будет описываться соответствующей компонентой фундаментального решения. Если, например, имеет место осесимметричное течение в магнитном поле, параллельном скорости невозмущенного потока, то в цилиндрических координатах (ось z совпадает с направлением набегающего потока и магнитного поля) компоненты скорости даются выражениями

$$u_r=-F\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z}, \qquad u_z=F\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),$$

а давление

$$p=F\frac{\partial}{\partial z}(-\nabla^2\Phi+\mathrm{Ha}^2\Phi), \qquad r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}, \qquad z=x_3.$$

Очевидно, что электрическое поле в этом случае равно нулю.

Исходя из (6.24), (6.25), можно выписать аналогичные выражения и для других частных случаев.

Заметим, что знание асимптотического поведения решения на большом удалении от тела полезно при численных расчетах задач обтекания тел, так как при этом приходится производить расчеты в урезанных областях.

В заключение этого параграфа отметим, что если сосредоточенная сила $\delta(r)i_k$ приложена не в начале координат, а в произвольной фиксированной точке с координатами y_i $(i=1, 2, 3)$, то

фундаментальное решение определяется теми же формулами (6.17) и (6.21) с той лишь разницей, что для функции Φ мы получим следующее выражение:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi \mathrm{Ha}} \int_0^{x_2-y_2} \frac{1}{r} e^{-\frac{\mathrm{Ha}}{2} r} \cdot \mathrm{sh}\, \frac{\mathrm{Ha}}{2} \tau \, d\tau, \qquad (6.19')$$

$$r = \{(x_1-y_1)^2+\tau^2+(x_3-y_3)^2\}^{1/2},$$

в пространственном случае и

$$\Phi = \frac{1}{2\pi \mathrm{Ha}} \int_0^{x_2-y_2} K_0\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2} r\right) \mathrm{sh}\, \frac{\mathrm{Ha}}{2} \tau \, d\tau, \quad r = \{(x_1-y_1)^2+\tau^2\}^{1/2}, \qquad (6.23')$$

в случае плоского течения. При этом

$$\Phi(x_1, x_2; y_1, y_2) = \Phi(y_1, y_2; x_1, x_2).$$

Легко проверить, что фундаментальное решение по аргументам y_i удовлетворяет сопряженной системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_y^2 \boldsymbol{U}_k + \mathrm{Ha}^2 \{\mathrm{grad}_y \varphi_k + \boldsymbol{U}_k \times \boldsymbol{i}_2\} \times \boldsymbol{i}_2 + \mathrm{grad}_y p_k = 0, \\ &\mathrm{div}\, \boldsymbol{U}_k = 0, \qquad \nabla_y^2 \varphi_k = -(\mathrm{rot}_y \boldsymbol{U}_k)_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

в случае трех измерений и

$$\nabla_y^2 \boldsymbol{U}_k + \mathrm{Ha}^2 \boldsymbol{U}_k \times \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_2 + \mathrm{grad}_y p_k = \delta(r) i_k, \qquad \mathrm{div}\, \boldsymbol{U}_k = 0, \qquad (6.27)$$

в плоском случае.

§ 4. Об отсутствии парадокса Стокса в магнитной гидродинамике

Хорошо известно [1, 2], что в обычной гидродинамике фундаментальное решение для плоского стоксова течения имеет следующий вид:

$$u_{ik}^{\Phi} = \delta_{ik} \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k},$$

$$p_k^{\Phi} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \nabla^2 \Phi,$$

$$\Phi = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r; \qquad r = \{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\}^{1/2}.$$

Из этих выражений видно, что на бесконечности фундаментальное решение логарифмически возрастает. Это обстоятельство лежит в основе известного парадокса Стокса, т. е. несуществования решения плоской задачи обтекания в приближении Стокса.

Действительно, такое поведение фундаментального решения означает, что решений задачи обтекания, ограниченных на бесконечности, не существует, в частности, не существует решения, переходящего на бесконечности в однородный поток.

Совершенно иначе обстоит дело в случае магнитогидродинамического течения Стокса [3, 4]. Для такого течения, как мы видели выше, фундаментальное решение (6.21), (6.23′) на бесконечности стремится к нулю. Вследствие этого существует решение, удовлетворяющее условию однородности потока на бесконечности, и парадокс Стокса не имеет места.

Физически существование решения в этом случае, как уже указывалось в гл. V, можно объяснить наличием, помимо вязкой, еще и джоулевой диссипации. Возмущения, создаваемые телом, рассеиваются интенсивнее, чем в отсутствие магнитного поля, что и приводит к более быстрому их затуханию по мере удаления от тела и возможности удовлетворить условиям на бесконечности.

Заметим, что парадокс Стокса отсутствует лишь в случае течения в магнитном поле, достаточно медленно убывающем на бесконечности. Можно показать, что для течения, например, в поле проводника с током, т. е. в поле с компонентами $B_\varphi=\frac{I}{2r}$, $B_r=B_z=0$, парадокс Стокса имеет место. Это же относится и к течению в поле произвольно ориентированного диполя и т. п. Кроме того, если однородное магнитное поле перпендикулярно плоскости течения, то и в этом случае будет иметь место парадокс Стокса, ибо, как показано выше (гл. I), в таком течении поле скоростей остается таким же, как и без магнитного поля.

§ 5. Формула Грина и интегральное представление решений

Получение формул Грина, соответствующих системе уравнений магнитогидродинамического течения Стокса, сводится к интегрированию по частям и проводится так же, как и в отсутствие магнитного поля [1, 2, 5]. Поэтому мы опускаем детали и приведем лишь результат, различая, как и прежде, случаи трех и двух измерений.

В пространственном случае для произвольных достаточно гладких векторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ и скалярных величин p и q, φ и χ в замк-

нутой области Ω с достаточно гладкой границей Σ получается следующая формула:

$$\int_{\Omega}\{\boldsymbol{U}\cdot L^*(\boldsymbol{V})-\boldsymbol{V}\cdot L(\boldsymbol{U})\}\,d\Omega=\int_{\Sigma}\Big\{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}\cdot T\boldsymbol{U}+$$

$$+\mathrm{Ha}^2\Big[\chi(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{U})_2+\varphi(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{V})_2+\chi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\chi}{\partial n}\Big]\Big\}\,d\Sigma; \quad (6.28)$$

здесь

$$L(\boldsymbol{U})=\nabla^2\boldsymbol{U}-\operatorname{grad}p+\mathrm{Ha}^2[-\operatorname{grad}\varphi+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{i}_2]\times\boldsymbol{i}_2,$$

$$L^*(\boldsymbol{V})=\nabla^2\boldsymbol{V}+\operatorname{grad}q+\mathrm{Ha}^2[\operatorname{grad}\chi+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{i}_2]\times\boldsymbol{i}_2,$$

$$\boldsymbol{U}\cdot L^*(\boldsymbol{V})=u_iL^*(\boldsymbol{V})_i,$$

$$T\boldsymbol{U}=T_{ik}=-p\delta_{ik}+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

$$T^*\boldsymbol{V}=T^*_{ik}=q\delta_{ik}+\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right),$$

$$\boldsymbol{U}\cdot T^*\boldsymbol{V}=u_iT^*_{ik}n_k.$$

В случае двух измерений аналогичная формула выглядит несколько проще

$$\int_{\Omega}\{\boldsymbol{U}\cdot L^*(\boldsymbol{V})-\boldsymbol{V}\cdot L(\boldsymbol{U})\}\,d\Omega=\int_{\Sigma}\{\boldsymbol{U}\cdot T^*\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}\cdot T\boldsymbol{U}\}\,d\Sigma, \quad (6.29)$$

причем здесь

$$L^*(\boldsymbol{V})=\nabla^2\boldsymbol{V}+\mathrm{Ha}^2\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_2+\operatorname{grad}q,$$

$$L(\boldsymbol{U})=\nabla^2\boldsymbol{U}+\mathrm{Ha}^2\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{i}_2-\operatorname{grad}p.$$

Исходя из формул (6.28), (6.29) и используя фундаментальное решение, нетрудно получить представление магнитогидродинамической стоксовой задачи через значения решения и его нормальной производной на границе.

Для этого применим формулу (6.28) или (6.29) к области Ω, в которой вырезана сфера радиуса ε с центром в точке с координатами x_i $(i=1, 2, 3)$. В этой области фундаментальное решение как функция от переменных y_i регулярно и его можно исполь-

зовать в качестве функции $\boldsymbol{V}$ в формулах (6.28) или (6.29). Переходя затем к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим интегральное представление решения

$$\boldsymbol{U}(x_1, x_2, x_3) = \int_{\Sigma} \Big\{ \boldsymbol{U} \cdot T^* \boldsymbol{U}^{\Phi} - \boldsymbol{U}^{\Omega} \cdot T\boldsymbol{U} + \mathrm{Ha}^2 [\varphi^{\Phi} (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{n})_2 + \varphi (\boldsymbol{U}^{\Phi} \times \boldsymbol{n})_2] + \mathrm{Ha}^2 \Big[\varphi^{\Phi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^{\Phi}}{\partial n} \Big] \Big\} d\Sigma, \quad (6.30)$$

$$\boldsymbol{U}(x_1, x_2) = \int_{\Sigma} \{ \boldsymbol{U} \cdot T^* \boldsymbol{U}^{\Phi} - \boldsymbol{U}^{\Phi} \cdot T\boldsymbol{U} \} \, d\Sigma \quad (6.31)$$

в пространственном и плоском случаях соответственно.

Аналогичным путем получаются формулы и для представления давления и электрического потенциала.

Интегральные представления (6.30), (6.31) получены в предположении, что рассматриваемая область течения ограничена. Для того чтобы проверить их справедливость в случае неограниченной области, следует применить представления решения в области Ω_R^e, заключенной между поверхностью тела и сферой S_R достаточно большого радиуса R, и затем перейти к пределу при $R \to \infty$. В силу того, что при $R \to \infty$ для фундаментального решения, а вследствие этого и для любого решения, имеют место оценки (6.20), (6.20′), интегралы по сфере S_R при $R \to \infty$ обратятся в нуль, что и означает справедливость представлений (6.30), (6.31) в случае неограниченной области.

Очевидно, что знание фундаментального решения стоксовой задачи позволяет получать интегральные представления решений нелинейных уравнений (5.1)—(5.3). Действительно, рассматривая нелинейные члены как правую часть в уравнениях для стоксова течения, из формулы (6.28) получаем следующее интегральное представление решения нелинейной задачи:

$$\boldsymbol{U} = \int_{\Sigma} \Big\{ \boldsymbol{U} \cdot T^* \boldsymbol{U}^{\Phi} - \boldsymbol{U}^{\Phi} \cdot T\boldsymbol{U} + \mathrm{Ha}^2 [\varphi^{\Phi} (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{n})_2 + \varphi (\boldsymbol{U}^{\Phi} \times \boldsymbol{n})_2] + \mathrm{Ha}^2 \Big[\varphi^{\Phi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^{\Phi}}{\partial n} \Big] \Big\} d\Sigma + \int_{\Omega} (\boldsymbol{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}^{\Phi} d\Omega, \quad (6.32)$$

где

$$(\boldsymbol{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}^{\Phi} = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} u_{jk}^{\Phi}.$$

Интегрируя по частям, можно получить другое представление

$$\boldsymbol{U}=\int\limits_{\Sigma}\left\{\boldsymbol{U}\cdot T^{*}\boldsymbol{U}^{\Phi}-\boldsymbol{U}^{\Phi}T\boldsymbol{U}+(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{\Phi})(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n})+\mathrm{Ha}^{2}\left[\varphi^{\Phi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varphi\frac{\partial\varphi^{\Phi}}{\partial n}\right]\right\}+\mathrm{Ha}^{2}[\varphi^{\Phi}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{n})_{2}+\varphi(\boldsymbol{U}^{\Phi}\times\boldsymbol{n})_{2}]-\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}^{\Phi}d\Omega, \tag{6.32'}$$

где

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{\Phi}=u_{i}u_{ik}^{\Phi},\quad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}=u_{i}n_{i},\quad \boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}^{\Phi}=u_{i}u_{j}\frac{\partial u_{ik}^{\Phi}}{\partial x_{j}}.$$

В плоском случае получаются соответственно следующие выражения:

$$\boldsymbol{U}=\int\limits_{\Sigma}\{\boldsymbol{U}\cdot T^{*}\boldsymbol{U}^{\Phi}-\boldsymbol{U}^{\Phi}\cdot T\boldsymbol{U}\}d\Sigma+\int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{\Phi}d\Omega, \tag{6.33}$$

$$\boldsymbol{U}=\int\limits_{\Sigma}\{\boldsymbol{U}\cdot T^{*}\boldsymbol{U}^{\Phi}-\boldsymbol{U}^{\Phi}\cdot T\boldsymbol{U}+(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^{\Phi})(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n})\}d\Sigma-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}^{\Phi}d\Omega. \tag{6.33'}$$

Пользуясь формулами (6.28), (6.29), можно проверить, что представления (6.32), (6.33) решения нелинейной задачи в неограниченной области также имеют место, если при $r\to\infty$ для этих решений справедливы те же оценки (6.20) или (6.20'), что и для стоксова решения. Если же объемный интеграл в формулах (6.32), (6.33) понимать как предел при $R\to\infty$ интеграла, взятого по области Ω_R, ограниченной поверхностью тела и сферой радиуса R, то достаточно потребовать, чтобы при $R\to\infty$ $|\boldsymbol{U}|\sim R^{-(1/2+\varepsilon)}$ в пространственном случае и $|\boldsymbol{U}|\sim R^{-(1/4+\varepsilon)}$ $(\varepsilon>0)$ в случае двух измерений. Это последнее утверждение вытекает также из формул (6.28) или (6.29).

Пусть известно решение

$$g_{ik}(y),\quad y=(y_1,\ y_2,\ y_3)$$

стоксовой задачи для сопряженной системы уравнений (6.26) или (6.27), которое на границе принимает одинаковые с фундаментальным решением значения

$$g_{ik}=u_{ik}^{\Phi}(x,y)\quad\text{при}\quad y\in\Sigma,\quad x=(x_1,x_2,x_3),\quad y=(y_1,y_2,y_3).$$

Тогда разность $G=G_{ik}=u_{ik}^{\Phi}-g_{ik}$ представляет собой тензор Грина, т. е. такое фундаментальное решение, которое на границе обращается в нуль.

С помощью тензора Грина решение стоксовой задачи записывается в явном виде, а для нелинейной задачи получается нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_s-\int_{\Omega}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}\nabla)\,G\,d\Omega, \tag{6.34}$$

где $\boldsymbol{U}_S$ — решение стоксовой задачи соответственно в пространственном и плоском течениях.

§ 6. Общее решение задачи о стоксовом течении в полуплоскости

При рассмотрении плоских задач удобно ввести функцию тока ψ так, что $u_1=\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}$, $u_2=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}$.

При этом уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, а уравнения движения после исключения давления дают следующее уравнение:

$$\nabla^4\psi-\mathrm{Ha}^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}=F(x_1, x_2). \tag{6.35}$$

Здесь $\mathrm{Ha}^2=\dfrac{B_0^2\sigma\nu}{U_\infty^2}$ имеет смысл квадрата отношения числа Гартмана к числу Рейнольдса *), $F(x_1, x_2)$ соответствует внешним силам.

Рассмотрим течение в полуплоскости $x_2\geqslant 0$ (т. е. в поперечном к границе магнитном поле) с произвольными условиями на границе [6]

$$u_1\big|_{x_2=0}=f_1(x_1);\qquad u_2\big|_{x_2=0}f(x_1).$$

Эти условия равносильны заданию на границе функции тока и ее нормальной производной

$$\psi(x_1, 0)=F_1(x_1);\qquad \frac{\partial\psi(x_1, 0)}{\partial x_2}=F_2(x_1). \tag{6.36}$$

Таким образом, получаем задачу Дирихле для уравнения четвертого порядка.

*) В этой задаче нет характерного размера, поэтому в качестве характерной длины можно выбрать, например, отношение ν/U_∞, так что $\mathrm{Ha}=(B_0/U_\infty)(\sigma\nu)^{1/2}$, а $\mathrm{Re}=1$.

Единственность решения этой задачи доказывается обычным способом.

Умножая уравнение (6.35) на ψ и интегрируя по частям, получим следующее равенство:

$$\int_\Omega \left\{ (\nabla^2\psi)^2+\mathrm{Ha}^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega=$$

$$= \int_\Sigma \left(\nabla^2\psi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial n} - \mathrm{Ha}^2\,\psi \frac{\partial\psi}{\partial x_2} n_2 \right) d\Sigma.$$

Из этого равенства сразу же вытекает, что разность двух решений, удовлетворяющая однородным краевым условиям, тождественно равна нулю. А это и означает единственность решения рассматриваемой задачи.

Для оператора, стоящего в левой части уравнения (6.35), двукратным интегрированием по частям нетрудно получить следующую формулу Грина:

$$\int_\Omega \{\psi L(\chi) - \chi L(\psi)\} d\Omega =$$

$$= \int_\Sigma \left\{ \psi \frac{\partial\nabla^2\chi}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial n}\nabla^2\chi - \chi\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial n} + \frac{\partial\chi}{\partial n}\nabla^2\psi + \right.$$

$$\left. + \mathrm{Ha}^2\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial x_2} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) n_2 \right\} d\Sigma, \quad (6.37)$$

$$L(\psi) = \nabla^4\psi - \mathrm{Ha}^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2},$$

где Ω — ограниченная область с границей Σ, а χ и ψ — произвольные функции, непрерывные в области Ω вместе со своими производными до четвертого порядка.

Пусть теперь $\chi=\Phi+f$, где

$$\Phi=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{Ha}}\int_0^{x_2-y_2} \mathrm{sh}\frac{\mathrm{Ha}\,\tau}{2} K_0\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+\tau^2}\right) d\tau$$

— фундаментальное решение уравнения (6.35), а f произвольное регулярное его решение.

Применяя формулу (6.37) к области Ω, в которой вырезана окружность радиуса ε с центром в точке x_1, x_2, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{\Sigma} \left\{ \psi \frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial n_y} - \frac{\partial \psi}{\partial n_y} \nabla^2 \chi + \nabla^2 \psi \frac{\partial \chi}{\partial n_y} - \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial n_y} \chi + \right.$$

$$\left. + \mathrm{Ha}^2 \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial y_2} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right) n_2 \right\} d\Sigma_y + \int_{\Omega} L(\psi) \chi \, d\Omega_y .$$

При $F \equiv 0$ эта формула дает представление решения через значения решения и его производных до третьего порядка на границе.

Пусть теперь известно такое решение однородного уравнения (6.35), которое удовлетворяет на границе условиям

$$g|_{\Sigma} = -\Phi|_{\Sigma}, \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial n}\right|_{\Sigma} = -\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\Sigma} . \tag{6.38}$$

Другими словами, пусть $G = \Phi + g$ является функцией Грина задачи Дирихле для уравнения (6.35). Тогда решение этой задачи представляется в следующем виде:

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{\Sigma} \left\{ \psi \frac{\partial \nabla^2 G(x_1, x_2; y_1, y_2)}{\partial n_y} - \frac{\partial \psi}{\partial n_y} \times \right.$$

$$\left. \times \nabla^2 G(x_1, x_2, y_1, y_2) \, d\Sigma_y + \int_{\Omega} F(y_1, y_2) \, G(x_1, x_2; y_1, y_2) \, d\Omega_y . \right.$$

(6.39)

Обратимся теперь к течению в полуплоскости $x_2 \geqslant 0$. Для нахождения функции g из (6.38) вытекают краевые условия

$$\left. g|_{y_2=0} = -\frac{1}{2\pi \mathrm{Ha}} \int_0^{x_2} \mathrm{sh} \frac{\mathrm{Ha}\,\tau}{2} K_0 \left(\frac{\mathrm{Ha}}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \tau^2} \right) d\tau, \right|$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial y_2}\right|_{y_2=0} = -\frac{1}{2\pi \mathrm{Ha}} \mathrm{sh} \frac{\mathrm{Ha}\, x_2}{2} K_0 \left(\frac{\mathrm{Ha}}{2} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \tau^2} \right) d\tau. \right|$$

(6.38′)

Решение однородного уравнения (6.35) с краевыми условиями (6.38′) можно провести, применяя преобразование Фурье по переменной x_1. В результате получается краевая задача для обыкновенного уравнения четвертого порядка. Опуская выкладки,

приведем результат

$$g=\frac{2}{\pi \mathrm{Ha}^2}\operatorname{sh}\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}\operatorname{sh}\frac{\mathrm{Ha}\,y_2}{2}K_0\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi\,\mathrm{Ha}}\int_0^{x_2+y_2}\operatorname{sh}\frac{\mathrm{Ha}\,\tau}{2}K_0\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+\tau^2}\right)d\tau. \qquad (6.40)$$

Таким образом, функция Грина задачи Дирихле для уравнения (6.35) в полуплоскости $x_2\geqslant 0$ имеет вид

$$G(x_1, x_2;\ y_1, y_2)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{Ha}}\int_{x_2+y_2}^{x_2-y_2}\operatorname{sh}\frac{\mathrm{Ha}\,\tau}{2}K_0\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+\tau^2}\right)d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi\,\mathrm{Ha}^2}\operatorname{sh}\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}\operatorname{sh}\frac{\mathrm{Ha}\,y_2}{2}K_0\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2}\right). \qquad (6.41)$$

Итак, решение задачи о стоксовом магнитогидродинамическом течении в полуплоскости записывается следующим образом:

$$\psi(x_1, x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{F_1(y_1)\frac{\partial\nabla^2 G(x_1, x_2;\ y_1, 0)}{\partial y_2}-\right.$$

$$\left.-F_2(y_2)\nabla^2 G(x_1, x_2;\ y_1, 0)\right\}dy_1+$$

$$+\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(y_1, y_2)\,G(x_1, x_2;\ y_1, y_2)\,dy_1 dy_2, \qquad (6.42)$$

причем, как показывает непосредственное вычисление,

$$\nabla^2 G(x_1, x_2;\ y_1, 0)=-\frac{1}{\pi}\frac{x_2\operatorname{sh}\dfrac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}}K_1\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right),$$

$$\frac{\partial\nabla^2 G(x_1, x_2;\ y_1, 0)}{\partial y_2}=\frac{1}{\pi}\frac{\dfrac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}\operatorname{ch}\dfrac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}-\operatorname{sh}\dfrac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}}\times$$

$$\times K_1\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right)+$$

$$+\frac{\mathrm{Ha}}{2\pi}\frac{x_2^2\operatorname{sh}\dfrac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}K_2\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\right).$$

Здесь $K_1(t)$ и $K_2(t)$ — функция Макдональда первого и второго порядка соответственно.

Рассмотрим простые примеры:

1. Пусть непроницаемая пластина движется в плоскости $x_2=0$ *со скоростью* $u_1=1$. Это означает, что $F_1=0$, а $F_2=1$, кроме того, $F=0$. Формула (6.42) при этом сводится к частному виду интеграла типа Сонина—Гегенбауэра и дает

$$\psi=\frac{1}{\mathrm{Ha}}(1-e^{-\mathrm{Ha}\,x_2}),$$

$$u_1=\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=e^{-\mathrm{Ha}\,x_2},$$

$$u_2\equiv 0,$$

что совпадает с решением, которое получается непосредственно.

2. Точечная струя. Рассмотрим движение, вызванное струей конечного расхода, вытекающей через бесконечно узкую щель под углом α к плоскости $x_2=0$. В этом случае граничные условия имеют вид $u_1=\cos\alpha\cdot\delta(x_1)$ и $u_2=\sin\alpha\cdot\delta(x_1)$, где $\delta(x_1)$ — дельта-функция Дирака.

Для функции тока эти условия сводятся к

$$\begin{aligned}&\psi=0 \quad \text{при} \quad x_2=0, \quad x_1<0,\\ &\psi=\sin\alpha \quad \text{при} \quad x_2=0, \quad x_1>0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=\cos\alpha\cdot\delta(x_1).\end{aligned}$$

Эти условия вместе с формулой (6.42) приводят к следующему результату:

$$\psi=\frac{\cos\alpha}{\pi}\,\frac{x_2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}}{r}\,K_1\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}\,r\right)-$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\pi}\left(\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}-\mathrm{sh}\,\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}\right)\int_0^{x_1}\frac{K_1\left(\dfrac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{x_2^2+t^2}\right)}{\sqrt{x_2^2+t^2}}\,dt-$$

$$-\frac{\mathrm{Ha}\sin\alpha}{2\pi}\,x_2^2\,\mathrm{sh}\,\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}\int_0^{x_1}\frac{K_2\left(\dfrac{\mathrm{Ha}}{2}\sqrt{x_2^2+t^2}\right)}{x_2^2+t^2}\,dt-\frac{\sin\alpha}{2},$$

где $r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$.

В частном случае, когда на стенке имеется сосредоточенное касательное возмущение, т. е. $\alpha=0$

$$\psi=\frac{1}{\pi}\frac{x_2\,\mathrm{sh}\,\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}}{r}K_1\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}r\right).$$

Линии тока такого течения схематически изображены на рис. 6.1. Для сравнения показаны также линии тока в случае $\mathrm{Ha}=0$. Из рисунка видно, что в магнитном поле линии тока становятся замкнутыми.

В другом частном случае, когда струя вытекает под прямым углом, для скорости u_2 получим

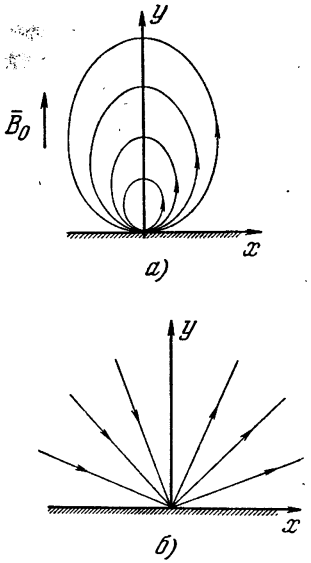


Рис. 6.1. Линии тока течения в полуплоскости, вызванного сосредоточенным касательным возмущением скорости на границе;
а) в магнитном поле; *б*) без магнитного поля.

$$u_2=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}\mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}-\mathrm{sh}\,\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}\right)\frac{K_1\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}r\right)}{r}+$$

$$+\frac{\mathrm{Ha}}{2\pi}x_2^2\,\mathrm{sh}\,\frac{\mathrm{Ha}\,x_2}{2}\,\frac{K_2\left(\frac{\mathrm{Ha}}{2}r\right)}{r^2}.$$

При $r\to\infty$ или $\mathrm{Ha}\to\infty$

$$u_2=\frac{\mathrm{Ha}^{1/2}}{2(\pi r)^{1/2}}(\sin\theta+\sin^2\theta)\,e^{-\frac{\mathrm{Ha}\,r}{2}(1-\sin\theta)}.$$

Таким образом, при $\mathrm{Ha}\to\infty$ скорость u_2 всюду, за исключением оси струи $x_1=0$, $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$, убывает экспоненциально. На оси струи u_2 возрастает как $\mathrm{Ha}^{1/2}$. Другими словами, при $\mathrm{Ha}\to\infty$ толщина струи, вытекающей в направлении магнитного поля, стремится к нулю, а скорость на оси струи неограниченно возрастает.

В заключение этого параграфа заметим, что рассмотренную задачу можно решать, не вводя функцию тока, т. е. разыскивать тензор Грина G_{ik} и соответствующее ему давление g_k. Непосредственным вычислением можно проверить, что

$$G_{ik}=u_{ik}{}^{\Phi}+v_{ik},\qquad g_k=p_k{}^{\Phi}+q_k, \tag{6.43}$$

где u_{ik}^{Φ} и p_k^{Φ} — фундаментальный тензор и соответствующее ему давление (см. (6.21), (6.23)), а

$$v_{ik}=(-1)^i\left\{\delta_{ik}\nabla^2 g-\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k}\right\},$$
$$q_k=\frac{\partial}{\partial x_k}\{\nabla^2 g-\delta_{2k}\,\mathrm{Ha}^2 g\} \tag{6.44}$$

и g — функция, определенная равенством (6.40).

§ 7. Сведение нелинейной задачи о течении в полуплоскости к интегральному уравнению

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение

$$\nabla^4\psi-\mathrm{Ha}^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}=\frac{D(\nabla^2\psi,\psi)}{D(x_1,x_2)}+F(x_1,x_2). \tag{6.45}$$

Здесь $\mathrm{Re}=1$, так как в качестве характерного размера выбрана величина ν/U_∞. Пользуясь тем, что нам известна функция Грина для оператора в левой части, можно свести краевую задачу для этого уравнения в полуплоскости к интегро-дифференциальному уравнению

$$\psi(x_1,x_2)=\psi_s(x_1,x_2)+\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}G(x_1,x_2;y_1,y_2)\frac{D(\nabla^2\psi,\psi)}{D(y_1,y_2)}\,dy_1dy_2. \tag{6.46}$$

Здесь $\psi_s(x_1, x_2)$ — стоксово решение этой задачи (6.42).

Мы будем предполагать, что интеграл в правой части этого уравнения существует.

Путем несложных преобразований порядок производных от ψ можно понизить. В результате получится следующее уравнение:

$$\psi=\psi_s+\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial y_2^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\frac{\partial\psi}{\partial y_2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y_1\partial y_2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_2}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\right)^2\right]\right\}dx_1dx_2. \tag{6.47}$$

Уравнение (6.46) эквивалентно уравнению для вектора скорости $\boldsymbol{U}$, которое может быть получено из уравнения (6.46) формальным дифференцированием:

$$u_k = u_{sk} + \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G_{ik} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dy_1 dy_2 . \tag{6.48}$$

Здесь u_{sk} — компоненты скорости стоксова решения, а G_{ik} — тензор Грина, определенный соотношениями (6.43), (6.44). Интегрируя уравнение (6.48) по частям, получим

$$u_k = u_{sk} - \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_i u_j \frac{\partial G_{ik}}{\partial y_j}\, dy_1 dy_2 . \tag{6.49}$$

Заметим, что тензор Грина G_{ik} зависит от x_i, y_i и от Ha лишь в комбинациях $\xi_i = \mathrm{Ha}\, x_i$ и $\eta_i = \mathrm{Ha}\, y_i$. Поэтому, для того чтобы выяснить поведение решения при $\mathrm{Ha} \gg 1$, естественно в (6.49) перейти к переменным ξ_i, η_i. Уравнение (6.49) при этом переходит в

$$u_k = u_{sk} - \frac{1}{\mathrm{Ha}} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_i u_j \frac{\partial G_{ik}}{\partial \eta_j}\, d\eta_i d\eta_2 . \tag{6.49'}$$

Из этого уравнения следует, что при достаточно больших числах Гартмана его решение можно искать в виде ряда

$$\boldsymbol{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \boldsymbol{U}_n , \tag{6.50}$$

где $\varepsilon = \mathrm{Ha}^{-1}$, а в качестве начального приближения принять стоксово решение $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{U}_s$. Подстановка ряда (6.50) в уравнение (6.49′) приводит к следующему рекуррентному соотношению:

$$\boldsymbol{U}_{n+1} = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{U}_k \boldsymbol{U}_{n-k} \Big) \nabla \boldsymbol{G}\, dy_1 dy_2 . \tag{6.51}$$

Пользуясь этим соотношением, можно вычислить любое приближение.

Заметим, что в отличие от тензора Грина G_{ik} стоксово решение $\boldsymbol{U}_s$, вообще говоря, зависит не только от ξ_i и η_i, но и от числа Гартмана. Поэтому и каждое последующее приближение $\boldsymbol{U}_n$ также будет зависеть от Ha. Однако легко убедиться (например, из (6.42)*), что стоксово решение $\boldsymbol{U}_s$ оценивается константой, не зависящей от числа Гартмана. Отсюда следует, что в силу (6.51) любое приближение $\boldsymbol{U}_{n+1}$ также оценивается константой, не зависящей от Ha. Поэтому каждый член ряда будет иметь порядок Ha^{-1}. Отсюда, в частности, следует, что при $\mathrm{Ha} \gg 1$ решение нелинейной задачи (6.45), (6.36) будет мало отличаться от решения линейной задачи, т. е. стоксова решения.

§ 8. Сопротивление тел простейшей формы при стоксовом обтекании

В § 6 в замкнутом виде получено точное решение задачи о стоксовом течении в полуплоскости в поперечном магнитном поле при произвольных граничных условиях типа Дирихле. В других случаях даже при частном виде граничных условий не удается получить не только точное решение, но и приближенное решение, которое было бы пригодно при произвольных числах Гартмана.

Приближенные решения удается получить лишь в двух предельных случаях $\mathrm{Ha} \ll 1$ и $\mathrm{Ha} \gg 1$ и для тел простейшей формы.

Ввиду громоздкости мы не будет воспроизводить соответствующие вычисления, а ограничимся перечислением основных результатов и эффектов. Заметим лишь, что, как правило, решение ищется в виде рядов по системе функций, определяемой рассматриваемой областью, причем коэффициенты ряда находятся из системы рекуррентных соотношений, вытекающих из граничных условий (6.7), (6.8).

Сопротивление тела складывается из двух компонент: первая обязана своим происхождением вязким силам и несимметричному распределению давления, вторая вызвана взаимодействием токов, текущих внутри тела, с магнитным полем. Ясно, что в случае непроводящего тела вторая компонента будет отсутствовать.

В случае, когда обтекаемым телом является сфера, при малых числах Гартмана сопротивление, т. е. проекция силы на направление невозмущенной скорости, равно [7, 8, 9]

$$\frac{F_D}{F_{D_0}} = 1 + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)\mathrm{Ha} + O(\mathrm{Ha}^2).$$

*) Мы предполагаем, что $F_1(x_1)F_2(x_1)$ и $F(x_1, x_2)$ таковы, что интегралы в (6.42) сходятся.

Здесь $F_{D_0}=6\pi\rho\nu RU_\infty$ — стоксово сопротивление при течении вне магнитного поля, а α — угол между направлением набегающего потока и магнитного поля. Таким образом, в присутствии поля при $\mathrm{Ha}\ll 1$ сопротивление шара увеличивается на величину, пропорциональную числу Гартмана. Кроме того, сила, действующая на сферу, имеет еще компоненту, перпендикулярную направлению скорости и лежащую в плоскости, образуемой направлениями невозмущенного потока и магнитного поля. Тем самым, хотя обтекается симметричное тело (сфера), возникает также и подъемная сила, пропорциональная числу Гартмана

$$\frac{F_L}{F_{D_0}}=\frac{3}{32}\mathrm{Ha}\cdot\sin 2\alpha+O(\mathrm{Ha}^2).$$

Возникновение подъемной силы связано с несимметричным распределением объемных электромагнитных сил, а следовательно, и потока.

Лишь при $\alpha=0$ или $\alpha=\pi/2$ поток симметричен относительно направления набегающего потока, и подъемная сила обращается в нуль.

Приведенные выражения справедливы как для проводящей, так и непроводящей сфер. Различие проявляется лишь в членах порядка Ha^2 и выше.

Отметим одну особенность, характерную для обтекания тел в однородном поле. Хотя в уравнение движения входит лишь квадрат числа Гартмана, выражение для сопротивления тела содержит член, линейный по числу Гартмана. Это показывает, что при $\mathrm{Ha}\ll 1$ решение не может быть найдено в виде суммы стоксова решения при $\mathrm{Ha}=0$ и подлежащего определению малого возмущения, вызванного слабым ($\mathrm{Ha}^2\ll 1$) магнитным полем, так как это возмущение имело бы порядок Ha^2 и член порядка Ha был бы потерян.

В связи с указанной особенностью отметим, что при учете инерционных эффектов в приближении Озеена число Рейнольдса входит линейно как в уравнения, так и в известное выражение для сопротивления

$$\frac{F}{F_s}=1+\frac{3}{8}\mathrm{Re}.$$

При больших значениях числа Гартмана известно решение лишь в случае обтекания осесимметричного тела в продольном магнитном поле [10—13]. Сопротивление такого тела при $\mathrm{Ha}\gg 1$ оказывается пропорциональным числу Гартмана. В частности,

для сопротивления сферы получается следующий простой результат [10, 11]:

$$\frac{F}{F_{D_0}}=\frac{2}{9}\mathrm{Ha}.$$

Характерно, что при $\mathrm{Ha}\gg 1$ на поверхности тела имеют место гартмановские пограничные слои, т. е. слои толщины порядка Ha^{-1}, в которых скорость существенно отличается от скорости набегающего потока.

Как уже отмечалось, в случае плоского течения в однородном магнитном поле, расположенном в плоскости течения, парадокс Стокса отсутствует и удается получить решение в стоксовом приближении.

Для сопротивления круглого цилиндра при $\mathrm{Ha}\ll 1$ [3, 4] получаются выражения, аналогичные формуле Ламба в приближении Озеена в отсутствие магнитного поля:

в продольном магнитном поле

$$F_D=\frac{8\pi\rho\nu U_\infty}{2\varkappa+1}\{1+O(\mathrm{Ha}^2)\}$$

и в поперечном магнитном поле

$$F_D=\frac{8\pi\rho\nu U_\infty}{2\varkappa-1}\{1+O(\mathrm{Ha}^2)\};$$

здесь $\varkappa=-\left(C+\ln\frac{\mathrm{Ha}}{4}\right)$, $C=0{,}57721$ — постоянная Эйлера.

Как и в случае сферы, эти выражения с точностью до членов порядка Ha^2 пригодны как для проводящего, так и для непроводящего цилиндра.

Для больших значений Ha сопротивление круглого цилиндра в продольном поле пропорционально числу Гартмана [12, 13]

$$F_D=\frac{5\pi}{8}\rho\nu U_\infty\cdot\mathrm{Ha},$$

тогда как в поперечном поле — квадрату числа Гартмана [14]

$$F_D=\frac{7\pi}{16}\rho\nu U_\infty\cdot\mathrm{Ha}^2.$$

Естественно, что и при обтекании цилиндра на его поверхности при $\mathrm{Ha}\gg 1$ образуются гартмановские пограничные слои толщины порядка Ha^{-1}.

Аналогичные результаты получаются для тормозящего момента при медленном вращении тел в проводящей жидкости в магнитном поле.

В случае вращения сферы вокруг оси, совпадающей или перпендикулярной направлению магнитного поля при $\mathrm{Ha} \ll 1$ для тормозящего момента непроводящей сферы соответственно получается [8, 15—17]

$$M = M_0\{1 + {}^1/_{180}\,\mathrm{Ha}^2 + O(\mathrm{Ha}^3)\}, \quad M = M_0\{1 + {}^1/_{60}\,\mathrm{Ha} + O(\mathrm{Ha}^2)\},$$

где $M_0 = 8\pi\rho\nu\omega R^3$ — тормозящий момент в отсутствие поля.

Таким образом, в отличие от сопротивления тормозящий момент увеличивается на величину, пропорциональную Ha^2. В случае проводящей сферы с осью, параллельной магнитному полю, коэффициент при Ha^2 равен $\dfrac{1}{15}\dfrac{1+\sigma^*}{1+\dfrac{2}{3}\sigma^*}$, где $\sigma^* = \dfrac{\sigma_т}{\sigma}$ — отношение электропроводностей тела и жидкости.

При $\mathrm{Ha} \gg 1$ тормозящий момент сферы, вращающейся вокруг оси, совпадающей с направлением магнитного поля, оказывается равным [16]

$$M = M_0\left\{1 + \frac{\sigma^*\,\mathrm{Ha}}{5(6+\sigma^*\,\mathrm{Ha})}\right\}\frac{\mathrm{Ha}}{6}$$

Из этого выражения видно, что при $\sigma^* = 0$ или $\mathrm{Ha}\,\sigma^* \gg 1$ тормозящий момент, как и сопротивление, пропорционален числу Гартмана.

§ 9. Течения типа Озеена

В этом случае инерционные силы частично учитываются посредством линеаризации члена $(\boldsymbol{U}\nabla)\boldsymbol{U}$ в уравнениях движения. Вводя возмущения скорости $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} - U_\infty \boldsymbol{i}_u$ и электрического поля $\operatorname{grad}\varphi' = \operatorname{grad}\varphi - \boldsymbol{i}_3 \cdot \sin\alpha$ и сохраняя лишь линейные относительно возмущения члены из (5.1)—(5.3), получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{gathered}\nabla^2\boldsymbol{V} - \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{i}_u\cdot\nabla)\boldsymbol{V} + \mathrm{Ha}^2\{-\operatorname{grad}\varphi' + \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{i}_2\}\times\boldsymbol{i}_2 - \operatorname{grad}p = 0,\\ \nabla^2\varphi' = (\operatorname{rot}\boldsymbol{V})_2, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{V} = 0.\end{gathered}\right\} \quad (6.52)$$

Здесь $\boldsymbol{i}_u$ — единичный вектор вдоль направления невозмущенного потока.

Фундаментальное решение этой системы находится так же, как и в случае течения Стокса. Непосредственной проверкой

можно убедиться, что фундаментальное решение системы (6.52) имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u_{ik}^{\Phi} &= \delta_{ik}\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_k}, \\ p_k^{\Phi} &= -\frac{\partial}{\partial x_k}\{\nabla^2\Phi - \delta_{2k}\,\mathrm{Ha}^2\,\Phi - \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{i}_u\nabla)\,\Phi\}, \\ \varphi_k^{\Phi} &= -\{\mathrm{rot}\,(i_2\Phi)\}_k \qquad (i, k = 1, 2, 3), \end{aligned}\right\} \tag{6.53}$$

причем функция Φ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^4\Phi - \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{i}_u\cdot\nabla)\,\nabla^2\Phi - \mathrm{Ha}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} = \delta(r). \tag{6.54}$$

При произвольном направлении $\boldsymbol{i}_u$ найти решение этого уравнения в замкнутом виде не удается. Однако в случае, когда направления невозмущенного потока и магнитного поля совпадают, т. е. $\boldsymbol{i}_u\cdot\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x_2}$, оператор в левой части (6.54) представляется в виде произведения двух операторов второго порядка, и это уравнение записывается в следующем виде:

$$\left(\nabla^2 - k_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\nabla^2 - k_2\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\Phi = \delta(r), \tag{6.54'}$$

где k_1, k_2 — корни уравнения $k^2 + \mathrm{Re}k - \mathrm{Ha}^2 = 0$*).

Его решение находится так же, как и решение уравнения (6.18), и имеет следующий вид:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi(k_2 - k_1)}\int_0^{x_2 - y_2}\frac{1}{r}\left\{e^{\frac{k_1}{2}(\tau - r)} - e^{\frac{k_2}{2}(\tau - r)}\right\}d\tau, \tag{6.55}$$

$$r = \{(x_1 - y_1)^2 + \tau^2 + (x_3 - y_3)^2\}^{1/2}.$$

Из общей гидродинамики известно, что приближение Озеена хорошо описывает течение не только при малых числах Рейнольдса, но также и поведение на большом удалении от тела решения полной нелинейной системы уравнений Навье—Стокса при произвольных значениях числа Рейнольдса. Понятно, что

*) При $\mathrm{Ha}/\mathrm{Re} \gg 1$, $k_{1,2} \approx \pm\mathrm{Ha}$, т. е. фундаментальное решение системы магнитогидродинамического течения Озеена переходит в фундаментальное решение системы для стоксова течения.

последнее относится и к фундаментальному решению системы уравнений Озеена. Из (6.53)—(6.55) следует, что фундаментальное решение системы уравнений магнитогидродинамического течения Озеена (а следовательно, и решение задачи об обтекании тела) экспоненциально убывает всюду, за исключением двух параболических следов. Эти следы направлены вниз и вверх вдоль набегающего потока. Таким образом, возникает необычная ситуация — возмущения, вызванные присутствием тела, распространяются не только вниз, но и вверх по потоку. Как уже указывалось выше, это явление обязано своим существованием распространению волн Альфвена в обе стороны вдоль силовых линий магнитного поля. В случаях, когда направление магнитного поля не совпадает с направлением набегающего потока, следы располагаются под некоторым углом, величина которого определяется соотношением чисел Гартмана и Рейнольдса, а также углом между невозмущенной скоростью и магнитным полем. Отметим, что при $\alpha \neq 0$ следы развиваются независимо, а при $\alpha = 0$ передний след оказывает непосредственное влияние на развитие следа за телом, так как частицы жидкости, побывав в переднем следе, попадают затем в след за телом.

При плоскопараллельном течении для возмущения скорости получается система

$$\nabla^2 \boldsymbol{V} - \mathrm{Re}\,(i_u \nabla)\boldsymbol{V} + \mathrm{Ha}^2 \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_2 - \operatorname{grad} p = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0. \tag{6.56}$$

Ее фундаментальное решение записывается в виде

$$v_{ik}^{\Phi} = \delta_{ik}\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_k},$$

$$p_k^{\Phi} = \frac{\partial}{\partial x_k}\{\nabla^2\Phi - \delta_{2k}\,\mathrm{Ha}^2\,\Phi - \mathrm{Re}\,(i_u\nabla)\Phi\}, \tag{6.57}$$

$$\nabla^4\Phi - \mathrm{Re}\,(i_u \cdot \nabla)\nabla^2\Phi - \mathrm{Ha}^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} = 0. \tag{6.58}$$

В случае, когда $i_u \cdot \nabla = \dfrac{\partial}{\partial x_2}$, решение уравнения (6.58), как при трехмерном течении, находится в замкнутом виде

$$\Phi = \frac{1}{2\pi(k_2 - k_1)} \int_0^{x_2 - y_2} \left\{ e^{\frac{k_2}{2}\tau} K_0\left(\frac{k_2}{2} r\right) - e^{\frac{k_1}{2}\tau} K_0\left(\frac{k_1}{2} r\right)\right\} d\tau,$$

$$r = \{(x_1 - y_1)^2 + \tau^2\}^{1/2}.$$

Фундаментальное решение как функция переменных y_i удовлетворяет сопряженной системе уравнений:

в пространственном случае

$$\nabla^2 \boldsymbol{V}_k + \mathbf{Re}(\boldsymbol{i}_u \cdot \nabla)\boldsymbol{V}_k + \mathbf{Ha}^2\{\operatorname{grad}\varphi'_k + \boldsymbol{V}_k \times \boldsymbol{i}_2\} \times \boldsymbol{i}_2 + \operatorname{grad} p_k = \delta(r)\, i_k,$$
$$\nabla^2 \varphi'_k = -(\operatorname{rot} \boldsymbol{V}_k)_2, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{V}_k = 0; \qquad (6.52')$$

в плоском случае

$$\nabla^2 \boldsymbol{V}_k + \mathbf{Re}(\boldsymbol{i}_u \cdot \nabla)\boldsymbol{V}_k + \mathbf{Ha}^2 \boldsymbol{V}_k \times \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_2 + \operatorname{grad} p_k = \delta(r)\boldsymbol{i}_k, \quad (6.56')$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{V}_k = 0.$$

Для системы уравнений магнитогидродинамического течения Озеена можно получить формулы Грина, аналогичные формулам Грина течения Стокса:

при трехмерном течении

$$\int_\Omega \{\boldsymbol{U}L^*(\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V}L(\boldsymbol{U})\}\, d\Omega = \int_\Sigma \Big\{ \boldsymbol{U}T^*\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}T\boldsymbol{U} - \mathbf{Re}(\boldsymbol{i}_u \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}) +$$
$$+ \mathbf{Ha}^2 \Big[\chi(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{U})_2 + \varphi(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{V})_2 + \chi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \chi}{\partial n} \Big] \Big\}\, d\Sigma;$$

здесь $L(U)$ и $L^*(V)$ — операторы в правой части первого уравнения системы (6.52) и (6.52′) соответственно, а $T^*\boldsymbol{V}$, $T\boldsymbol{U}$ имеют тот же смысл, что и в случае стоксова течения;

при плоскопараллельном течении

$$\int_\Omega (\boldsymbol{U}L^*(\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V}L(\boldsymbol{U}))\, d\Omega = \int_\Sigma \{\boldsymbol{U}T^*\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}T\boldsymbol{U} - \mathbf{Re}(\boldsymbol{i}_u \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V})\}\, d\Sigma,$$

причем здесь $L(\boldsymbol{U})$ и $L^*(\boldsymbol{V})$ — операторы в правой части уравнений (6.56) и (6.56′) соответственно.

При рассмотрении плоских течений с использованием функции тока ψ получается уравнение четвертого порядка

$$L_1(\psi) \equiv \nabla^4 \psi - \mathbf{Re}\,(\boldsymbol{i}_u \cdot \nabla)\nabla^2 \psi - \mathbf{Ha}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = 0.$$

Соответствующая оператору $L_1(\psi)$ формула Грина записывается

в следующем виде:

$$\int_{\Omega}\{\psi L^*_1(\chi)-\chi L(\psi)\}d\Omega=\int_{\Sigma}\left\{\psi\frac{\partial\nabla^2\chi}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial n}\nabla^2\chi-\chi\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\chi}{\partial n}\nabla^2\psi\right\}+\mathbf{Re}\left[\psi(\boldsymbol{i}_u\cdot\nabla)\frac{\partial\chi}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial n}(\boldsymbol{i}_u\cdot\nabla)\chi+\boldsymbol{i}_u\cdot\boldsymbol{n}\psi\nabla^2\chi\right]+$$

$$+\mathbf{Ha}^2\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial x_2}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)n_2\Big\}d\Sigma,$$

где $L^*_1=\nabla^4+\mathbf{Re}(\boldsymbol{i}_u\cdot\nabla)\nabla^2-\mathbf{Ha}^2\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — сопряженный L_1 оператор.

Из формул Грина с использованием фундаментального решения нетрудно получить интегральные представления решения через значения решения и его нормальной производной на границе.

Заметим также, что доказательство единственности решения задачи о магнитогидродинамическом течении Озеена проводится в точности так же, как и в случае стоксова течения.

Нахождение решения в приближении Озеена встречает еще большие математические трудности. Получить приближенное решение удается лишь в случае продольного поля. Сопротивление сферы в этом случае выражается следующим образом [18—21]:

$$\frac{F_D}{F_{D_0}}=1+\frac{3}{8}\gamma, \tag{6.59}$$

где

$$\gamma=\frac{2\,\mathbf{Ha}^2+\mathbf{Re}^2}{\{4\,\mathbf{Ha}^2+\mathbf{Re}^2\}^{1/2}},$$

F_{D_0} — стоксова сила сопротивления при $\mathbf{Ha}=0$.

Из (6.58) видно, что при $\mathbf{Ha}=0$ получается известная формула Озеена $\dfrac{F}{F_s}=1+\dfrac{3}{8}\,\mathbf{Re}$, а при $\mathbf{Re}=0$ — формула, полученная впервые Честером [7] $\dfrac{F_D}{F_{D_0}}=1+\dfrac{3}{8}\,\mathbf{Ha}$. В случае обтекания круглого цилиндра выражение для сопротивления усложняется [22]:

$$F_D=8\pi\rho\nu U_\infty\frac{k_1-k_2}{k_1(1+2\varkappa_1)-k_2(1+2\varkappa_2)},$$

где $k_{1,2}$ — корни уравнения $k^2-\mathbf{Re}\,k-\mathbf{Ha}^2=0$, а $\varkappa_{1,2}=-\left\{C+\right.$

$\left.+\ln\dfrac{k_{1,2}}{4}\right\}$, $C=0{,}57721$ — постоянная Эйлера.

При $\mathbf{Ha}=0$ это выражение переходит в формулу Лэмба, а при $\mathbf{Re}=0$ — в приведенную выше формулу для сопротивления круглого цилиндра в стоксовом приближении.

§ 10. Обтекание тела электропроводящей жидкостью с внешним электрическим током

В этом параграфе мы рассмотрим задачу обтекания непроводящего тела электропроводящей жидкостью, через которую пропускается электрический ток, взаимодействующий с собственным магнитным полем *). В случае плоской задачи возникающая лоренцева сила потенциальна и поэтому может быть уравновешена соответствующим распределением давления. Однако уже в осесимметричном случае эта сила непотенциальна. Рассмотрим задачу о медленном обтекании непроводящей сферы электропроводящей жидкостью, через которую пропускается однородный на бесконечности электрический ток j_∞, параллельный скорости набегающего потока $\boldsymbol{U}_\infty$ [23].

Пренебрегая влиянием движения жидкости на распределение электрического тока (в случае $\mathrm{Re}_m \ll 1$ наведенный за счет движения ток будет пренебрежимо малым по сравнению с приложенным), из уравнений Максвелла нетрудно найти распределение электрического тока, соответствующего ему магнитного поля и вычислить лоренцеву силу, возникающую в результате их взаимодействия.

Вводя функцию тока Стокса для осесимметричного движения

$$u_r = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad u_\theta = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial R}.$$

Из уравнений движения с учетом лоренцевой силы получим в безразмером виде следующее уравнение для ψ в сферических координатах:

$$D^4\psi + \frac{1}{2}\mathrm{R}_h \cdot \mathrm{Re}\,\frac{1}{R^2}\left(1 - \frac{1}{R^3}\right)\sin^2\theta\cos\theta = \\ = \mathrm{Re}\,\frac{1}{R^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\partial\psi}{\partial R^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial R} - \frac{2}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)D^2\psi, \tag{6.60}$$

где

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin\theta}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

Re — число Рейнольдса, $\mathrm{R}_h \cdot \mathrm{Re} = \dfrac{j^2 a^3}{\rho U_\infty \nu}$, $\mathrm{R}_h = \dfrac{j_\infty^2 a^2}{\rho U_\infty^2}$, R, θ, φ —

*) Такая задача представляет интерес для изучения влияния малых непроводящих частиц, распределенных в проводящей жидкости, на свойства этой жидкости.

сферические координаты, $\boldsymbol{j}_\infty$ и $\boldsymbol{U}_\infty$ параллельны и направлены вдоль прямой $\theta=0, \pi$. В качестве характерных величин приняты радиус сферы и скорость набегающего потока.

Граничные условия обычные

$$\psi(1,\theta)=\frac{\partial\psi(1,\theta)}{\partial R}=0,$$

$$\psi(R,\theta)\to\frac{1}{2}R^2\sin^2\theta \quad \text{при} \quad R\to\infty.$$

В случае медленного движения нелинейными членами в уравнении (6.60) можно пренебречь. При этом решение может быть записано в замкнутом виде

$$\psi=\frac{1}{2}\left\{R^2-\frac{3}{2}R+\frac{1}{2R}\right\}\sin^2\theta-$$

$$-\frac{1}{16}\mathrm{Re}\,\mathrm{R}_h\left\{R^2-\frac{5}{2}+\frac{1}{R}+\frac{1}{2R^2}\right\}\sin^2\theta\cos\theta. \qquad (6.61)$$

Вычисляя на основании (6.61) силу сопротивления, получим, что $F_D=F_{D_0}$, где F_{D0} — стоксово сопротивление при течении без электрического тока.

Это объясняется тем, что движение жидкости, возникающее при пропускании тока около неподвижной сферы, симметрично относительно плоскости $\theta=\pi/2$ и поэтому не порождает дополнительного сопротивления. Следует особо отметить, что если параметр $k=\frac{1}{16}\mathrm{Re}\mathrm{R}_h$ не мал, то за сферой образуется (в стоксовом приближении) зона отрыва (рис. 6.2), хотя сопротивление при этом остается неизменным.

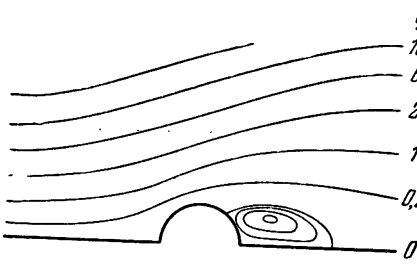


Рис. 6.2. Картина линий тока при обтекании непроводящей сферы жидкостью с электрическим током $\mathrm{Re}\cdot\mathrm{R}_h=10$.

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае, как и в обычной гидродинамике, стоксово приближение перестает быть справедливым на большом удалении от тела. Это объясняется тем, что вихревая часть лоренцевой силы очень быстро (как R^{-3}) убывает на бесконечности.

Если учесть силы инерции с помощью приближения Озеена, то для силы сопротивления получается результат [24]

$$\frac{F_D}{F_{D_0}} = 1 + \frac{1}{8}(3 + \mathrm{R}_h)\,\mathrm{Re}.$$

Несколько иная картина получается, если помимо тока наложить достаточно сильное внешнее магнитное поле. Такая ситуация рассмотрена, например, в работе [25], когда плотность тока на бесконечности j_∞ и внешнее магнитное поле $\boldsymbol{B}_0$ взаимно перпендикулярны. Наличие тела порождает также неконсервативную силу, которая приводит жидкость в движение, даже если тело покоится. Такое движение снижает возникающую выталкивающую силу, действующую на тело.

ЛИТЕРАТУРА

1. Oseen C. W., Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m.b.h., 1927.
2. Odquist K. F. G., Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flussigkeiten, Math. Zs. **32**, № 3, 329 (1930).
3. Yoshinobu H., Kakutani T., Two dimensional Stokes flow of an electrically conducting fluid in a uniform magnetic field, J. Phys. Soc. Japan **14**, № 10, 1433 (1959).
4. Дамбург Р., Обтекание бесконечного цилиндра вязкой проводящей жидкостью в присутствии магнитного поля, Изв. АН ЛССР, № 5, 81 (1959).
5. Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Москва, Физматгиз, 1961, стр. 597.
6. Цинобер А. Б., Функция Грина для магнитогидродинамического течения Стокса в полуплоскости, VI Рижское совещание по магнитной гидродинамике, Рига, изд-во «Зинатне», 1968, стр. 75.
7. Chester W., The effect of magnetic field on Stokes flow in a conducting fluid, J. of Fluid Mech. **3**, № 3, 304 (1957).
8. Gotoh K., Stokes flow of an electrically conducting fluid in a uniform magnetic field, J. of the Phys. Soc. of Japan **15**, № 4, 696 (1960).
9. Imai I., On flows of conducting fluids past bodies, Rev. of Modern Phys. **32**, № 4, 992 (1960).
10. Chester W., The effect of a magnetic field on the flow of a conducting fluid past a body of revolution, J. of Fluid Mech. **10**, № 3, 459 (1961).
11. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Обтекание шара проводящей жидкостью в сильном магнитном поле, ЖТФ **30**, № 8, 925 (1960).
12. Childress S., The effect of a strong magnetic field on two-dimensional flows of a conducting fluid, J. of Fluid Mech. **15**, № 3, 429 (1963).
13. Котов Я. П., Валиев Х. В., Обтекание бесконечного цилиндра проводящей жидкостью в сильном магнитном поле, Изв. АН Узб. ССР, сер. физ.-мат. наук, № 588 (1962).
14. Цинобер А. Б., Штерн А. Г., О стоксовом обтекании круглого цилиндра в поперечном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 4, 146 (1967).
15. Круминь Ю. К., Медленное вращение шара в вязкой проводящей жидкости в магнитном поле, Изв. АН ЛССР, № 2, 127 (1958).

16. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Вращение шара в вязкой проводящей жидкости в магнитном поле, ЖТФ **30**, № 9, 1067 (1961).
17. Kanval R. P., Slow rotation of an axial symmetric body in a viscous ellectrically conducting fluid, Phys. Fluids **4**, № 5, 651 (1961).
18. Gotoh K., Magnetohydrodynamic flow past a Sphere, J. of the Phys. Soc. of Japan **15**, № 1, 189 (1960).
19. Richard van Blerkom, Magnetohydrodynamic flow of a viscous fluid past a Sphere, J. of Fluid Mech. **8**, № 3, 432 (1960).
20. Ludford G. S. S., The effect of an aligned magnetic field on Oseen flow of a conducting fluid, Archive for Rational Mechanics and Analysis **4**, № 5, 405 (1960).
21. Бедин А. П., Обтекание сферы потоком электропроводящей жидкости в магнитном поле при малых числах, Сб. работ студентов физ.-мат. ф-та ЛПИ, вып. 2, 48 (1959).
22. Yoshinobu H., A linearized theory of magnetohydrodynamic flow past a fixed body in a parallel magnetic field, J. of the Phys. Soc. of Japan **15**, № 1, 175 (1960).
23. Chow C.-Y., Flow around a nonconducting sphere in a current carrying fluid, Phys. Fluids **9**, № 5, 933 (1966).
24. Chow C.-Y., Billings F., Current carrying fluid past a nonconducting sphere at low Reynolds number, Phys. Fluids **10**, № 4, 871 (1967).
25. Андрес У. Ц., Полак А. С., Сыроватский С. М., Электромагнитное выталкивание тела из проводящей жидкости, ЖТФ **33**, № 3, 263 (1963).

ГЛАВА VII

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

§ 1. Предварительные замечания

При изучении течений при больших числах Рейнольдса приходится использовать теорию пограничного слоя. В этой главе мы ограничимся некоторыми простейшими случаями течения в двумерном пограничном слое, когда магнитное поле расположено в плоскости течения. Предполагая, что на поверхности тела образуется тонкий слой толщины δ, много меньшей характерного размера тела L, и производя обычные оценки, можно получить из полных уравнений (5.1)—(5.3) следующую систему уравнений пограничного слоя [1, 2]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\sigma}{\rho}(ub_y^2+e_z b_y), \tag{7.1}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}+\sigma(b_x b_y\cdot u+e_z\cdot b_x), \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{7.3}$$

с граничными условиями

$$u(x,0)=v(x,0)=0,\quad u(x,\infty)=U_\infty(x),\quad u(0,y)=U_0(y), \tag{7.4}$$

причем $U_0(\infty)=U_\infty(0)$.

Здесь ось x направлена по касательной, а ось y — по нормали к поверхности тела. $U_\infty(x)$ — скорость на внешней границе пограничного слоя, $U_0(y)$ — начальный профиль скорости. Предполагается, что магнитное поле ориентировано произвольно в плоскости течения xy; b_x, b_y — компоненты вектора индукции магнитного поля; $e_z=\text{const}$ — z компонента электрического поля.

Постоянную e_z можно определить либо из условия обращения в нуль электрического тока на бесконечности (при обтекании тела), либо из условия замыкания токов во внешней цепи (при течении в канале).

Из системы (7.1)—(7.3) следует, что на поле скорости непосредственное влияние оказывает лишь поперечная компонента

магнитного поля b_y, продольная же компонента входит лишь в уравнение (7.2) для поперечного градиента давления. Из этого уравнения следует, что если магнитное поле не ортогонально к поверхности тела, то по крайней мере в сильном магнитном поле величина градиента давления поперек пограничного слоя может быть существенной. Естественно, это приводит к возникновению подъемной силы, которая может оказаться одного порядка величины с сопротивлением трения тела. Несмотря на это, поперечный градиент давления мал по сравнению с продольным, и поэтому в уравнении (7.1) можно пренебречь зависимостью $\partial p/\partial x$ от y и считать продольный градиент давления зависящим лишь от x и равным продольному градиенту давления во внешнем потоке, который находится из решения задачи о течении невязкой жидкости.

Таким образом, первое и третье уравнения системы (7.1)—(7.3) могут быть решены независимо от второго.

Заметим также, что в пределах пограничного слоя зависимостью поперечной компоненты магнитного поля от y можно пренебречь и считать $b_y=b_y(x)$. Это вытекает из уравнения $\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}=0$, если предположить, что порядок величины компоненты b_x не превосходит порядка величины компоненты b_y.

§ 2. Магнитогидродинамический пограничный слой на плоской пластине

При обтекании плоской полубесконечной пластины однородным потоком $\boldsymbol{U}_\infty=\text{const}$, $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ электрический ток на бесконечности обращается в нуль, если $e_z=U_\infty b_y$.

Заметим, что условие однородности внешнего потока и условие обращения в нуль электрического тока на бесконечности совместимы лишь в случае $b_y=\text{const}$. В противном случае для поддержания однородного внешнего потока необходимо приложить продольный градиент давления

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\sigma\{b_y^2(x)\,U_\infty+e_z b_y(x)\}.$$

При этом $j_\infty\neq 0$. В дальнейшем предполагается, что если $b_y\neq\text{const}$, такой градиент давления имеет место, так что $U_\infty=\text{const}$. Уравнения (7.1), (7.3) в безразмерном виде

записываются следующим образом.

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mathrm{N}(1-u), \tag{7.1'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{7.3'}$$

а граничные условия

$$u(x,0)=v(x,0)=0, \quad u(x,\infty)=1, \quad u(0,y)=u_0(y),$$

причем $u_0(\infty)=1$.

Здесь в качестве характерных величин приняты: для размера ν/U_∞, а для скорости U_∞.

$\mathrm{N}=\dfrac{\sigma b_y^2\nu}{\rho U_\infty^2}$ — число Стюарта, вычисленное по размеру ν/U_∞ и являющееся квадратом отношения числа Гартмана к числу Рейнольдса $\mathrm{Ha}^2/\mathrm{Re}^2$.

Введением функции тока ψ система (7.1'), (7.3') сводится к уравнению

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}+\frac{D\left(\psi,\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{D(x,y)}+\mathrm{N}\left(1-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0, \tag{7.5}$$

$$\psi(x,0)=\frac{\partial\psi(x,0)}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\psi(x,\infty)}{\partial y}=1, \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial\psi(0,y)}{\partial y}=u_0(y). \tag{7.7}$$

Решение задачи (7.5)—(7.7) при произвольных $\mathrm{N}(x)$ получить не удается. Поэтому рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Однородное магнитное поле $\mathrm{N}x\ll 1$ *). Приближение пограничного слоя справедливо лишь при $x\gg 1$, т. е. на большом удалении от носика пластины. При таких значениях продольной координаты влияние входного профиля $u_0(y)$ проявляется слабо. Поэтому часто ищут одно из решений (а их, вообще говоря, бесконечно много), удовлетворяющих лишь условиям (7.6). Таким решением является, в частности, автомодельное решение Блазиуса. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $\mathrm{N}=$ $=\mathrm{const}$ задача (7.5), (7.6) неавтомодельна. При течении в слабом магнитном поле $\mathrm{N}x\ll 1$, решение задачи (7.5), (7.6) можно

*) $\mathrm{N}x$ есть не что иное, как число Стюарта, вычисленное по текущей длине пластины.

искать в виде ряда

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{N}x)^n f_n(\eta), \tag{7.8}$$

где $\eta = y/\sqrt{x}$ — переменная Блазиуса.

Подставляя ряд (7.8) в уравнение (7.5), получим систему уравнений для нахождения функций $f_n(\eta)$

$$\left.\begin{aligned} &2f'''_0 + f_0 f''_0 = 0, \\ &2f'''_1 + f_0 f''_1 - 2f'_0 f'_1 + 3f''_0 f_1 = f'_0 - 1, \\ &2f'''_2 + f_0 f''_2 - 4f_0 f'_2 + 5f''_0 f_2 = 2f''_1 + 2f'_1 - 3f_1 f''_1 \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

с краевыми условиями

$$f_0(0) = f'_0(0) = 0, \quad f'_0(\infty) = 1,$$

$$f_n(0) = f'_n(0) = f'_n(\infty) = 0, \quad n \geqslant 1.$$

Как и следовало ожидать, первое уравнение системы (7.9) есть нелинейное уравнение Блазиуса, а все последующие — линейные уравнения, но с переменными коэффициентами. Россоу [3] нашел f_1 и f_2 численным интегрированием. Эти результаты приводятся в таблице на стр. 248.

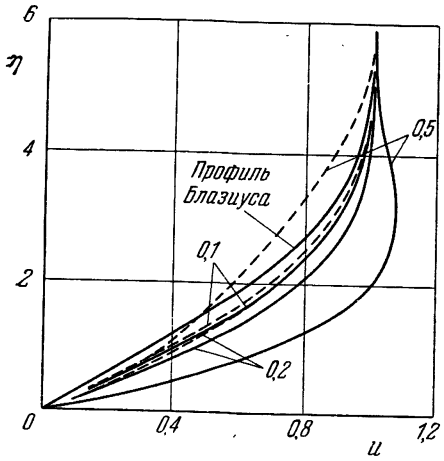


Рис. 7.1. Профили скорости в пограничном слое в однородном магнитном поле (по Россоу [3]).

На рис. 7.1 показаны профили скорости, вычисленные по двум и трем членам ряда (7.8) для трех значений $\mathrm{N}x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}5$. Из этого рисунка видно, что по мере возрастания магнитного поля профиль скорости становится все более наполненным. При $\mathrm{N}x = 0{,}5$ ряд (7.8) сходится медленно и трех его членов оказывается недостаточно.

Для местного коэффициента сопротивления пластины $c_x = 2\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$ получается следующий результат:

$$c_x = x^{-1/2}\{0{,}664 + 2{,}293\,\mathrm{N}x - 2{,}768\,(\mathrm{N}x)^2\},$$

η	f_1	f_1'	f_1''	f_2	f_2'	f_2''
0	0	0	1,147	0	0	−1,384
0,2	0,022	0,210	0,953	−0,028	−0,278	−1,362
0,4	0,081	0,382	0,773	−0,110	−0,542	−1,300
0,6	0,172	0,520	0,606	−0,243	−0,713	−1,205
0,8	0,287	0,626	0,453	−0,425	−1,022	−1,080
1,0	0,420	0,702	0,312	−0,650	−1,224	−0,932
1,2	0,566	0,752	0,186	−0,913	−1,394	− 0,765
1,4	0,719	0,777	0,072	−1,205	−1,529	−0,584
1,6	0,876	0,781	−0,028	−1,522	−1,626	−0,394
1,8	1,031	0,767	−0,113	−1,854	−1,686	−0,202
2,0	1,181	0,737	−0,184	−2,193	−1,708	−0,014
2,2	1,325	0,694	−0,241	−2,534	−1,692	0,165
2,4	1,438	0,642	−0,282	−2,868	−1,643	0,327
2,6	1,581	0,582	−0,310	−3,189	−1,563	0,467
2,8	1,691	0,519	−0,323	−3,492	−1,458	0,580
3,0	1,788	0,454	−0,324	−3,771	−1,333	0,663
3,2	1,873	0,390	−0,314	−4,024	−1,195	0,713
3,4	1,944	0,329	−0,296	−4,248	−1,050	0,732
3,6	2,001	0,272	−0,270	−4,444	−0,904	0,722
3,8	2,054	0,221	−0,240	−4,610	−0,763	0,687
4,0	2,093	0,176	−0,208	−4,749	−0,630	0,632
4,2	2,124	0,138	−0,176	−4,863	−0,511	0,565
4,4	2,149	0,105	−0,145	−4,954	−0,405	0,490
4,6	2,167	0,079	−0,117	−5,026	−0,315	0,413
4,8	2,181	0,058	−0,092	−5,081	−0,240	0,339
5,0	2,191	0,042	−0,071	−5,123	−0,179	−0,271
5,2	2,198	0,030	−0,053	−5,154	−0,130	0,212
5,4	2,203	0,021	−0,039	−5,176	−0,093	0,161
5,6	2,206	0,014	−0,028	−5,192	−0,065	0,120
5,8	2,209	0,009	−0,020	−5,203	−0,045	0,087
6,0	2,210	0,006	−0,013	−5,210	−0,030	0,061
6,2	2,211	0,004	−0,009	−5,215	−0,020	0,043
6,4	2,212	0,002	−0,006	−5,218	−0,013	0,029
6,6	2,212	0,001	−0,004	−5,220	−0,008	0,019
6,8	2,212	0,001	−0,002	−5,222	−0,005	0,012
7,0	2,213	0	−0,002	−5,522	−0,003	0,008
7,2	2,213	0	−0,001	−5,223	−0,002	0,005
7,4	2,213	0	−0,001	−5,223	−0,001	0,003
7,6	2,213	0	0	−5,223	−0,001	0,002
7,8	2,213	0	0	−5,223	0	0,001
8,0	2,213	0	0	−5,223	0	0,001
8,2	2,213	0	0	−5,224	0	0
8,4	2,213	0	0	−5,224	0	0
8,6	2,213	0	0	−5,224	0	0

для полного коэффициента сопротивления пластины длиной x

$$C_x = 1{,}328 x^{-1/2} \{1 + 1{,}151\,\mathrm{N}x - 0{,}834\,(\mathrm{N}x)^2\}.$$

Эти выражения являются достаточно точными лишь до значений $\mathrm{N}x \leqslant 0{,}2$ [3]. В этих пределах сопротивление пластины растет практически линейно с $\mathrm{N}x$.

2. Сильное магнитное поле [2]. Пусть $\mathbf{N}$ произвольно зависит от x, $\mathbf{N}=\mathbf{N}_0 f^2(x)$, причем $\mathbf{N}_0 \gg 1$. Введем новые переменные

$$\xi = x, \quad \zeta = \mathbf{N}_0^{1/2} y,$$

$$\psi = \mathbf{N}_0^{-1/2} \Phi.$$

В этих переменных задача (7.5), (7.6) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \zeta} + f^2(\xi)\left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right) = \mathbf{N}_0^{-1} \frac{D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \Phi\right)}{D(\xi, \zeta)}, \tag{7.10}$$

$$\Phi(\xi, 0) = \frac{\partial \Phi(\xi, 0)}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(\xi, \infty)}{\partial \zeta} = 1. \tag{7.11}$$

Форма уравнения (7.10) подсказывает вид, в котором следует искать решение

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Phi_n(\xi, \zeta), \quad \varepsilon = \mathbf{N}^{-1}. \tag{7.12}$$

Из (7.10) и (7.12) получим уравнения для нахождения $\Phi_n(\xi, \eta)$

$$\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \zeta^3} - f^2(\xi)\left(1 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\right) = 0, \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \zeta^3} - f^2(\xi)\left(1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta}\right) = \frac{D\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta}, \psi_0\right)}{D(\xi, \zeta)}, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_n}{\partial \zeta^3} - f^2(\xi)\left(1 - \frac{\partial \Phi_n}{\partial \zeta}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \zeta}, \Phi_{n-k-1}\right)}{D(\xi, \zeta)} \tag{7.15}$$

с граничными условиями

$$\Phi_0(\xi, 0) = \frac{\partial \Phi_0(\xi, 0)}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0(\xi, \infty)}{\partial \zeta} = 1, \tag{7.16}$$

$$\Phi_n(\xi, 0) = \frac{\partial \Phi_n(\xi, 0)}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Phi_n(\xi, \infty)}{\partial \zeta} = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{7.17}$$

Из (7.13) и (7.16) для Φ_0 получим

$$\Phi_0=\zeta+\frac{1}{f(\xi)}[\exp\{-f(\xi)\zeta\}-1],$$

аналогично

$$\Phi_1=\frac{f'(\xi)}{4f^2(\xi)}\left[\zeta^2+\frac{1}{f(\xi)}\zeta+\frac{7}{3f^2(\xi)}\right]\exp\{-f(\xi)\zeta\}-$$
$$-\frac{f'(\xi)}{6f^4(\xi)}\exp\{-2f(\xi)\zeta\}-\frac{5}{12}\frac{f'(\xi)}{f^4(\xi)}.$$

Каждый следующий член ряда может быть вычислен в элементарных функциях. Действительно, из (7.15) с учетом граничных условий (7.17) получим

$$\Phi_n(\xi,\zeta)=\int_0^{\zeta}e^{-f(\xi)t_1}dt_1\int_0^{t_1}e^{2f(\xi)t_2}dt_2\int_{\infty}^{t_2}e^{-f(\xi)t_3}\frac{D\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial t_3},\Phi_{n-k-1}\right)}{D(\xi,t_3)}dt_3. \tag{7.18}$$

Так как Φ_0 и Φ_1 выражаются через произведения степеней ζ и показательных функций, то из (7.18) вытекает, что и Φ_n будет выражаться также через произведения степеней ζ и показательных функций.

При достаточно больших N_0 можно ограничиться первым членом ряда (7.12), т. е. Φ_0. Для продольной скорости получаем

$$u=\frac{\partial\psi}{cy}=\frac{\partial\Phi}{c\zeta}=1-e^{-f\zeta}=1-e^{-N_0^{1/2}f(x)y}. \tag{7.19}$$

Если магнитное поле однородно, т. е. $f(x)\equiv\text{const}=1$, то все члены ряда (7.12), за исключением первого, тождественно обращаются в нуль, так что нулевое приближение является точным решением задачи (7.5), (7.6). В этом случае профиль скорости имеет вид

$$u=1-e^{-N_0^{1/2}y}, \tag{7.20}$$

т. е. совпадает с распределением скорости при обтекании бесконечной в обе стороны пластины.

Сравнивая выражения (7.19) и (7.20), приходим к выводу о том, что при $N_0\gg 1$ распределение скорости в каждом сечении пограничного слоя в неоднородном магнитном поле такое же, как и в однородном магнитном поле с напряженностью, равной напряженности неоднородного поля в данном сечении.

В работе [5] описаны результаты измерения распределения скорости в пограничном слое на плоской пластине в однородном

магнитном поле. Оказалось, что при $Nx \geqslant 2$ профиль становится асимптотическим. На рис. 7.2 показано сравнение результатов измерений при $Nx \approx 2$ с асимптотическим профилем (7.20). Как видно из рисунка, совпадение очень хорошее.

3. Переменная проводимость. При движении тела в атмосфере с большими скоростями у его поверхности происходит ионизация воздуха. Кроме того, при больших скоростях происходит так называемая абляция *) металла с поверхности тела. Эти явления приводят к тому, что у поверхности тела воздух становится электропроводящим. Как показывают опыты, электропроводность воздуха за ударной волной зависит линейно от скорости [3]. Поэтому для качественной оценки течения в пограничном слое можно предположить, что электропроводность пропорциональна либо разности скорости набегающего потока и скорости в данной точке, либо градиенту скорости в данной точке. Эти два случая мы и рассмотрим, предполагая, что магнитное поле произвольно зависит от продольной координаты $N = N_0 f^2(x)$. Кроме того, как и в п. 2, мы ограничимся случаем сильного магнитного поля.

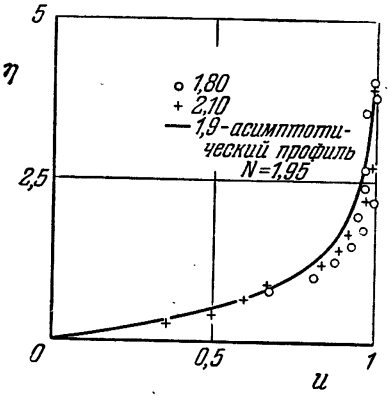


Рис. 7.2. Сравнение асимптотического профиля скорости в постоянном магнитном поле с экспериментальными результатами.

Обратимся к первому случаю. Пусть $\sigma = \sigma_0 \dfrac{U_\infty - u}{U_\infty}$. Введем, как и в п. 2, переменные

$$\xi = x, \qquad \zeta = N_0^{1/2} y, \qquad \Phi = N_0^{1/2} \psi .$$

Уравнение (7.5) в этих координатах примет следующий вид:

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \zeta^3} + f^2(\xi) \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right)^2 = N_0^{-1} \frac{D\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \Phi\right)}{D(\xi, \zeta)} \qquad (7.21)$$

с граничными условиями (7.11)

$$\Phi(\xi, 0) = \frac{\partial \Phi(\xi, 0)}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi(\xi, \infty)}{\partial \zeta} = 1.$$

*) Конвективный перенос металла с расплавленной поверхности.

При $N_0 \gg 1$ решение этого уравнения естественно искать в виде ряда по степеням $\varepsilon = N_0^{-1}$, $\Phi = \Sigma \varepsilon^n \Phi_n(\xi, \zeta)$ (7.12). Из (7.12), (7.21) получим систему уравнений для Φ_n

$$\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \zeta^3} + f^2(\xi)\left(1 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial_3 \Phi_1}{\partial \zeta^3} - 2f^2(\xi)\left(1 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} = \frac{D\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta}, \Phi_0\right)}{D(\xi, \zeta)},$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_n}{\partial \zeta^3} - 2f^2(\xi)\left(1 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \Phi_n}{\partial \zeta} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \zeta}, \Phi_{n-k-1}\right)}{D(\xi, \zeta)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi_{n-k}}{\partial \zeta}, \qquad n \geqslant 2,$$

с граничными условиями

$$\Phi_0(\xi, 0) = \frac{\partial \Phi_0(\xi, 0)}{\partial \zeta} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi_0(\xi, \infty)}{\partial \zeta} = 1,$$

$$\Phi_n(\xi, 0) = \frac{\partial \Phi_n(\xi, 0)}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Phi_n(\xi, 0)}{\partial \zeta} = 0, \qquad n \geqslant 1.$$

Первое уравнение этой системы элементарно интегрируется в квадратурах, что дает

$$\Phi_0 = \frac{f(\xi)\zeta^2}{\sqrt{6} + f(\xi)\zeta},$$

$$u = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} = 1 - \frac{1}{(1 + f(\xi)/\sqrt{6}\zeta)^2}. \tag{7.22}$$

На рис. 7.3 показано сравнение этого профиля скорости с распределением скорости в случае постоянной проводимости Естественно, что профиль скорости (7.22) оказался менее напол-

ненным, чем при постоянной проводимости среды. Это объясняется тем, что во всей области течения проводимость жидкости, а значит, и электродинамическое воздействие на нее будут меньше, чем в случае постоянной проводимости.

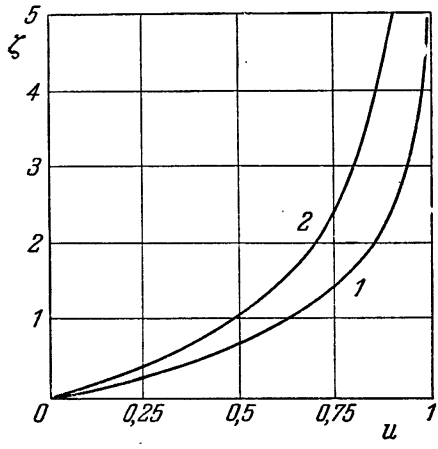


Рис. 7.3. Сравнение профилей скорости в пограничном слое жидкости с переменной и постоянной проводимостью.
1 — σ=const, *2* — σ≠const.

Рассмотрим теперь второй случай

$$\sigma=\sigma_0\frac{\nu}{U_\infty^2}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из сравнения порядков величин вязких и электромагнитных сил вытекает, что в этом случае следует ввести другие переменные

$$\xi=x,\qquad \zeta=N_0 y,\qquad \Phi=N_0\psi.$$

При этом уравнение (7.5) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\zeta^3}+f^2(\xi)\left(1-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2}=N_0^{-2}\frac{D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta},\Phi\right)}{D(\xi,\zeta)}.$$

При $N_0\gg 1$ левая часть этого уравнения мала, и его решение можно искать в виде ряда

$$\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\Phi_n(\xi,\zeta),\qquad \varepsilon=N^{-2},$$

подставляя который в уравнение, получим систему уравнений для Φ_n

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\zeta^3}+f^2(\xi)\left(1-\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\zeta^2}=0,\\
&\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\zeta^3}+f^2(\xi)\left\{\left(1-\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\zeta^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta}\right\}=\frac{D\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta},\Phi_0\right)}{D(\xi,\zeta)},\\
&\frac{\partial^3\Phi_n}{\partial\zeta^3}+f^2(\xi)\left\{\left(1-\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi_n}{\partial\zeta}\right\}=\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{D\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial\zeta},\Phi_{n-k-1}\right)}{D(\xi,\zeta)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi_n}{\partial\zeta}\frac{\partial^2\Phi_{n-k-1}}{\partial\zeta^2},\quad n\geqslant 2,
\end{aligned}\right\}$$

с граничными условиями

$$\Phi_0(\xi, 0)=\frac{\partial\Phi_0(\xi, 0)}{\partial\zeta}=0, \quad \frac{\partial\Phi_0(\xi, \infty)}{\partial\zeta}=1,$$

$$\Phi_n(\xi, 0)=\frac{\partial\Phi_n(\xi, 0)}{\partial\zeta}=\frac{\partial\Phi_n(\xi, \infty)}{\partial\zeta}=0, \quad n\geqslant 1.$$

Первое уравнение этой системы интегрируется элементарно и дает

$$\Phi_0=\zeta-\frac{2}{f^2(x)}\ln\left(1+\frac{1}{2}f^2\zeta\right),$$

$$u=\frac{\partial\Phi_0}{\partial\zeta}=1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}f^2\zeta}.$$

Характерно, что в обоих случаях течения с переменной электропроводностью скорость алгебраически зависит от y, в то время как в случае постоянной электропроводности эта зависимость экспоненциальна.

4. Автомодельное течение, $\mathrm{N}(x)=\mathrm{N}_0x^{-1}$. В этом случае, если искать решение в виде

$$\psi=x^{1/2}F(\eta), \quad \eta=y/\sqrt{x},$$

задача (7.5), (7.6) сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$F'''+\frac{1}{2}FF''+\mathrm{N}_0(1-F')=0, \tag{7.23}$$

$$F(0)=F'(0)=0; \quad F'(\infty)=1. \tag{7.24}$$

Результаты численного решения уравнения (7.23) с краевыми условиями (7.24) показаны на рис. 7.4. Видно, что с увеличением магнитного поля распределение скорости становится все более наполненным по сравнению с профилем Блазиуса, а трение на стенке возрастает.

При $\mathrm{N}_0\gg 1$, как и в предыдущем случае, решение можно искать в виде ряда по степеням N_0^{-1}, если ввести переменные

$$G(\gamma)=\mathrm{N}_0^{1/2}F(\eta), \quad \gamma=\mathrm{N}_0^{1/2}\eta.$$

Для G получается уравнение

$$G'''+1-G'=-\frac{1}{2}\mathrm{N}_0^{-1}GG'' \tag{7.25}$$

с краевыми условиями

$$G(0)=G'(0)=0, \quad G'(\infty)=1.$$

Ряд

$$G(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n G_n(\eta),\qquad \varepsilon=N^{-1},\tag{7.26}$$

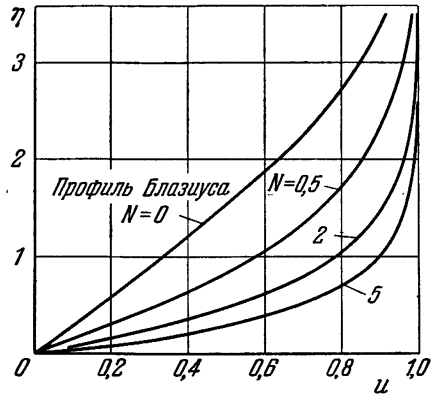


Рис. 7.4а. Профили скорости в пограничном слое при $f(x)=x^{-1/2}$ (автомодельный случай).

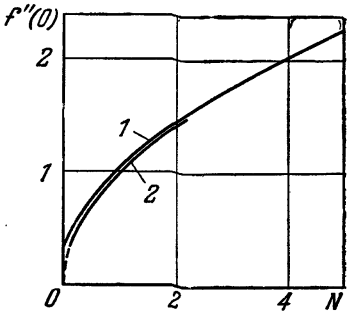


Рис. 7.4б. Зависимость трения на стенке от N при $f(x)=x^{-1/2}$ (автомодельный случай).

1 — точное решение, *2* — рассчитанное по первым двум членам ряда (7.25).

подставляем в уравнение (7.25) и получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &G'''_0+1-G'_0=0,\\ &G'''_n-G'_n=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}G_kG_{n-k-1},\quad n\geqslant 1,\end{aligned}\right\}$$

с граничными условиями

$$G_0(0)=G'_0(0)=0,\qquad G'_0(\infty)=1,$$
$$G'_n(0)=G'_n(0)=G'_n(\infty)=0,\qquad n\geqslant 1.$$

Нетрудно проверить, что

$$G_0=\gamma+e^{-\gamma}+1,$$
$$G_1=\frac{1}{12}(\gamma-1)e^{-\gamma}+\frac{1}{12}e^{-2\gamma}.$$

Очевидно, что все последующие члены вычисляются через элементарные функции.

На рис. 7.5 приведено сравнение профилей скорости, а на рис. 7.4, *б* — сил трения, рассчитанных по первым двум членам ряда (7.25), с точным численным решением. Уже при $N_0 \geqslant 2$ максимум разности между точным и приближенным решением не превышает 3%.

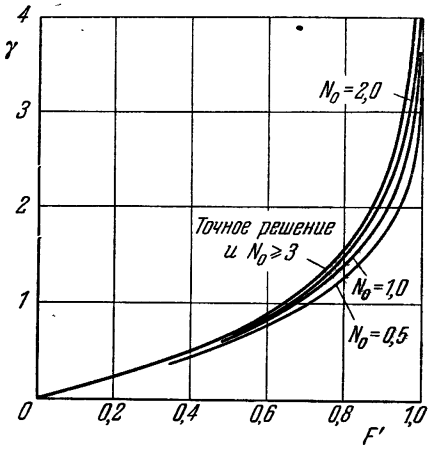


Рис. 7.5. Сравнение профилей скорости, рассчитанных по первым двум членам ряда (7.25) с точным численным решением.

5. Поведение пограничного слоя при $x \to \infty$. Приведем теперь некоторые соображения об асимптотическом поведении потока при $x \to \infty$ и фиксированном N_0. Очевидно, что оно определяется видом функции $f(x)$. Если $f(x) = x^{-1/2}$, то все члены в уравнении (7.5) убывают с одинаковой скоростью, как x^{-1}. Поэтому в этом случае асимптотикой потока будет описанное в предыдущем пункте автомодельное решение. Если $f(x)$ убывает быстрее, чем $x^{-1/2}$, то при больших x электромагнитные силы будут много меньше инерционных и вязких сил, и естественно, что распределение скорости будет стремиться к профилю Блазиуса. Если же $f(x)$ убывает медленнее, чем $x^{-1/2}$, или возрастает, то при $x \to \infty$ инерционные члены (которые убывают, как x^{-1}) будут малы по сравнению с электромагнитным, и асимптотическим будет профиль с экспоненциальным распределением скорости, совпадающий с полученным при $N_0 \gg 1$ (7.19).

Ниже приведены результаты численного расчета, подтверждающие высказанные предположения о проведении решения при больших x или N [2, 5].

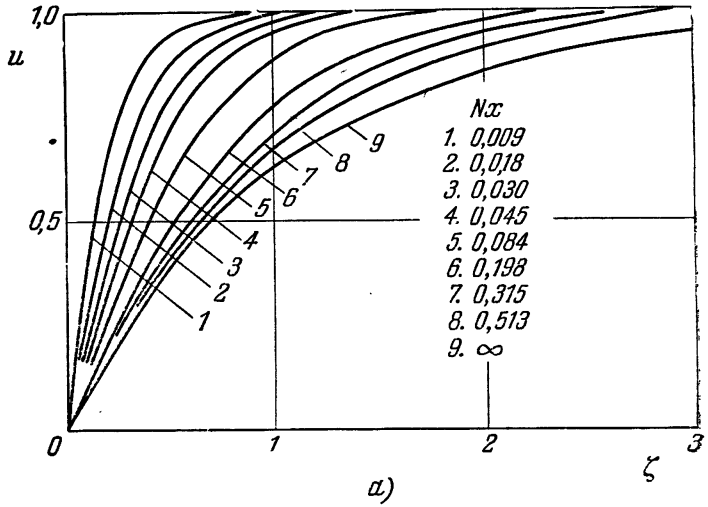
Система уравнений (7.1′), (7.3′) при $N_0 = 1$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + f^2(x)(1-u),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0,$$

с граничными условиями (7.4) и условием на входе $u_0(y) \equiv 1$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0; \quad u(x, \infty) = 1, \quad u(0, \eta) = 1,$$



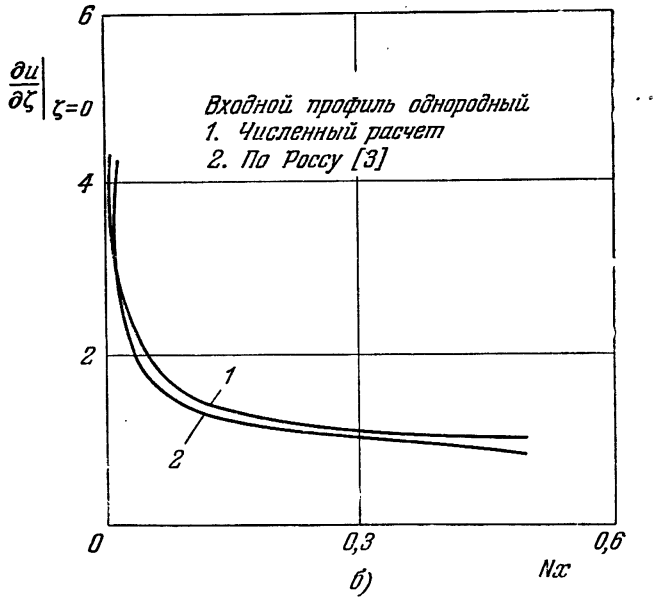


Рис. 7.6. Результаты численного расчета течения в пограничном слое (случай однородного магнитного поля).

а) Профили скорости; *б*) трение на стенке.

рассчитывалась численно для пяти различных видов зависимости

$$f(x): \quad 1,\ e^{-5x},\ \ (x+0{,}1)^{-1/2},\ \ (16x+1)^{1/2},\ e^{x}.$$

Расчет производился методом прогонки по переменной y. Первый случай соответствует однородному магнитному полю. На рис. 7.6, *а* приведены профили скорости для различных значений

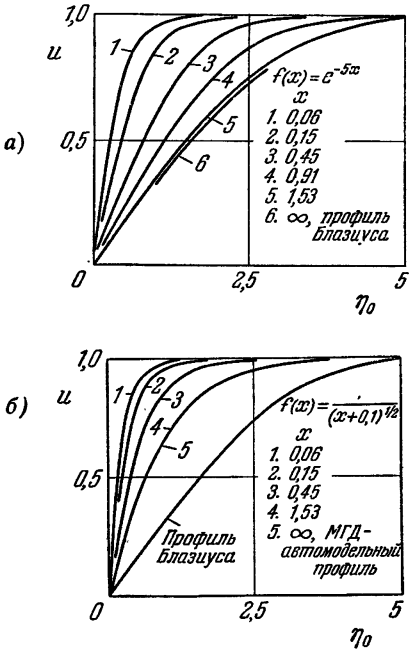


Рис. 7.7. Результаты численного расчета профилей скорости в пограничном слое (случай убывающего поля).

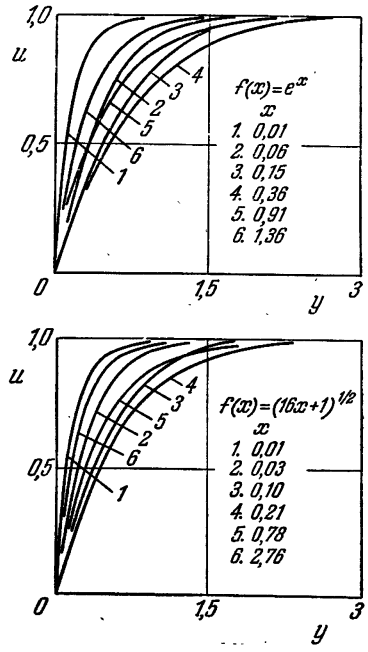


Рис. 7.8. Результаты численного расчета профилей скорости в пограничном слое (случай возрастающего поля).

$\mathrm{N}x$ в зависимости от ζ, из которого видно, что уже при $\mathrm{N}x \sim 1$ достигается асимптотический профиль (7.20). На рис. 7.6, *б* показана зависимость трения на стенке от $\mathrm{N}x$ (кривая *1*). Уже при $\mathrm{N}x \sim 0{,}3$ величина трения на стенке отличается от асимптотического значения менее чем на $3 \div 4\%$.

Во втором случае магнитное поле быстро убывает. Поэтому уже при сравнительно небольших x достигается профиль Блазиуса. Это видно из рис. 7.7, *а*, на котором показаны профили скорости в зависимости от переменной Блазиуса. В этом случае

удобно использовать именно эту переменную, так как асимптотикой является профиль Блазиуса.

Для третьего случая характерно убывание магнитного поля как $x^{-1/2}$. Поэтому асимптотическим должно быть автомодельное решение, рассмотренное в п. 4. Это подтверждается результатами, представленными на рис. 7.7, *б*. Понятно, что и в этом случае в качестве поперечной координаты использована переменная Блазиуса.

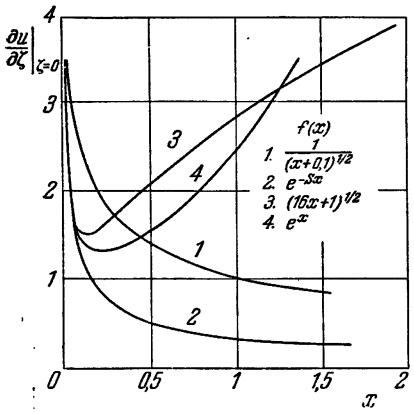


Рис. 7.9. Результаты численного расчета трения на стенке в убывающем и возрастающем магнитном поле.

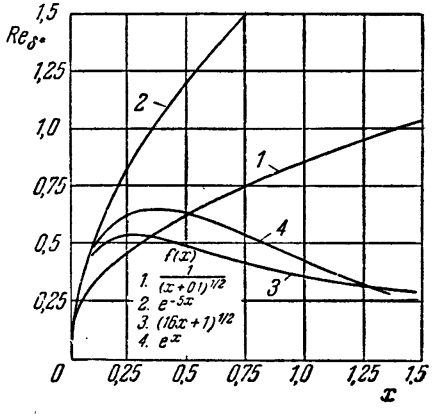


Рис. 7.10. Влияние зависимости магнитного поля от продольной координаты на изменение толщины вытеснения пограничного слоя вдоль пластины.

Во всех трех описанных случаях (когда магнитное поле постоянно или убывает) профиль скорости изменяется от однородного на входе до асимптотического при больших x монотонно, т. е. по мере возрастания x становится все менее наполненным. Трение на стенке также монотонно убывает (рис. 7.6, *б* и рис. 7.9, кривые *1* и *2*). Совершенно иная картина наблюдается, когда магнитное поле возрастает. В этом случае наполненность профиля скорости до некоторого сечения уменьшается, а затем профиль становится все более наполненным. При этом, естественно, трение на стенке до этого сечения убывает, а затем возрастает.

На рис. 7.8 показаны профили скорости, полученные в результате численного расчета для двух случаев возрастающего магнитного поля. Ясно, что асимптотический профиль достигается за тем сечением, начиная с которого наполненность профиля скорости увеличивается и возрастает трение на стенке. Как показывает сравнение, профили скорости, обозначенные на рис. 7.8 циф-

рой 6, менее чем на 3% отличаются от асимптотического (7.19). Зависимость трения на стенке от x показана на рис. 7.9. Видно, что в возрастающем магнитном поле трение на стенке убывает, достигает в некотором сечении минимума и затем неограниченно увеличивается.

Представляет интерес, как изменяется характер зависимости от x толщины вытеснения пограничного слоя $\delta^* = \int_0^\infty (1-u)\,dy$ от вида магнитного поля. Эти зависимости приведены на рис. 7.10. В убывающем поле толщина вытеснения возрастает и тем быстрей, чем быстрее убывает магнитное поле. В постоянном магнитном поле δ^* стремится к постоянной величине. В случае возрастающего поля δ^* ведет себя немонотонно: сначала возрастает, достигает максимума, а затем убывает до нуля.

§ 3. Течение в следе за телом в поперечном магнитном поле

Рассмотрим течение в следе на большом расстоянии от обтекаемого тела. Линеаризуем уравнения пограничного слоя (7.1′) по методу Озеена. Тогда для возмущения скорости получится следующая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mathrm{N}u, \tag{7.27}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \qquad \text{при} \quad y = 0, \\ u &= 0 \qquad \text{при} \quad y = \infty. \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

Отметим сразу же, что эта задача имеет бесконечное число решений (в том числе тривиальное). Однако на большом расстоянии от тела все нетривиальные решения задачи (7.27), (7.28) будут мало отличаться друг от друга.

Приведем несколько таких решений.

Используя замену

$$u = \exp\left\{-\int \mathrm{N}(x)\,dx\right\} \cdot \omega(x, y), \tag{7.29}$$

приходим к следующей задаче для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial \omega(x, 0)}{\partial y} = 0, \qquad u(x, \infty) = 0.$$

Одним из нетривиальных решений этой задачи является

$$\omega=\frac{A}{\sqrt{x}}e^{-y^2/4x}, \qquad A=\text{const}$$

и, таким образом,

$$u=\frac{A}{\sqrt{x}}\exp\left\{-\int \mathrm{N}(x)\,dx-\frac{y^2}{4x}\right\} \tag{7.30}$$

является решением исходной задачи (7.27), (7.28).

Нетрудно получить более общее решение в виде

$$u=a(x)f(\eta), \qquad \eta=\frac{y}{2\sqrt{x}}, \tag{7.31}$$

причем

$$a(x)=\frac{A}{x^{\lambda/2}}\exp\left\{-\int \mathrm{N}(x)dx\right\}, \tag{7.32}$$

а $f(\eta)$ является решением уравнения

$$f''+2\eta f'+2\lambda f=0 \tag{7.33}$$

с условиями

$$f'(0)=f(\infty)=0.$$

Нетрудно убедиться, что при $\lambda=1$ решение (7.31) переходит в (7.30).

Для однозначного определения решения уравнения (7.27) можно задаться профилем скорости на входе. Рассмотрим течение при $\mathrm{N}=\text{const}$ в следе за пластиной столь большой длины, что на задней ее кромке имеет место асимптотический профиль скорости, рассмотренной в п. 2 § 2. Это дает условие

$$u(0, y)=e^{-\mathrm{N}^{1/2}|y|}. \tag{7.34}$$

Тем самым получаем задачу Коши для уравнения (7.27). Ее решение можно выписать в явном виде

$$u=\frac{e^{-\mathrm{N}x}}{2\sqrt{\pi x}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\mathrm{N}^{1/2}|\eta|-\frac{(y-\eta)^2}{4x}\right\}d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{-\sqrt{\mathrm{N}}y}\left\{1-\Phi\left(\sqrt{\mathrm{N}x}-\frac{y}{2\sqrt{x}}\right)\right\}+e^{\sqrt{\mathrm{N}}y}\left\{1-\Phi\left(\sqrt{\mathrm{N}x}+\frac{y}{2\sqrt{x}}\right)\right\}\right],$$

где $\Phi(t)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t e^{-\xi^2}d\xi.$

На большом удалении от кромки пластины (точнее, при $N_x \gg 1$)

$$u = \frac{2}{\sqrt{Nx}} \exp\left\{-Nx - \frac{y^2}{4x}\right\}, \tag{7.35}$$

что согласуется с приведенными выше выражениями.

Как следует из (7.34), скорость на оси следа при $x \to \infty$ убывает экспоненциально, в то время как при отсутствии поля убывание скорости происходит по алгебраическому закону $x^{-1/2}$, т. е. при течении в поперечном магнитном поле профиль скорости в следе за телом очень быстро становится однородным.

§ 4. Течение на начальном участке трубы в присутствии поперечного магнитного поля

Течение, названное в заголовке этого параграфа, имеет много общего с течением около плоской пластины, расположенной параллельно набегающему потоку. Поэтому, естественно, схожи и способы теоретического решения обеих задач.

С точки зрения приложений вопрос о магнитогидродинамическом течении на начальном участке трубы чрезвычайно важен, поскольку всей длины рабочего участка магнитогидродинамических машин часто бывает недостаточно для завершения стабилизации течения в магнитном поле, и, таким образом, с гидродинамической точки зрения, весь этот участок является начальным. Неудивительно, что этому вопросу посвящено значительное число работ, в подавляющем большинстве теоретических. Однако при большом разнообразии исходных допущений и способов решения большинству этих работ свойственна одна общая черта: течение предполагается ламинарным еще до вступления в магнитное поле. В действительности же во всех машинах, а также в экспериментальных установках, предназначенных для исследования магнитогидродинамических явлений, течение до вступления в магнитное поле обычно турбулентно и на участке, где присутствует магнитное поле, происходит стабилизация двоякого рода:

1) изменяется распределение осредненных скоростей течения в результате воздействия магнитного поля на индуцированные в жидкости стационарные электрические токи (подобно тому, как при ламинарном течении) и

2) благодаря воздействию магнитного поля на нестационарные электрические токи, индуцированные вследствие турбулентности, возмущения по мере продвижения жидкости в магнитном поле затухают, и течение при достаточной напряженности и протяженности магнитного поля становится ламинарным. Само

собою разумеется, что изменение характеристик турбулентности в свою очередь оказывает влияние на распределение осредненных скоростей течения. Столь сложная суперпозиция явлений в сочетании с тем обстоятельством, что течение на участке стабилизации является трехмерным, приводят к тому, что весьма важная роль в исследовании этих вопросов принадлежит эксперименту.

Экспериментальным результатам мы и посвятим в этом параграфе наибольшее внимание. Но прежде чем приступить к изложению результатов проведенных в последнее время сравнительно подробных экспериментальных исследований течения на участке входа турбулентного потока ртути в поперечное магнитное поле и выхода из него, остановимся вкратце на предложенных рядом исследователей способах теоретического расчета начального участка. Отметим, что все эти способы относятся к течению между параллельными бесконечными плоскостями.

Рассмотрим, например, как в принципе производится расчет на основе интегральных соотношений [6]. Предположим, что скорость на входе постоянна. Поток можно разделить на ядро с постоянной скоростью и пограничный слой. Скорость в ядре должна увеличиваться по длине трубы, ибо увеличивается толщина пограничного слоя, в котором жидкость движется замедленно. Если иметь в виду безразмерные величины, то скорость в ядре увеличивается от единицы до некоторого $u_{\max}$, соответствующего скорости на оси гартмановского профиля (понятно, что полностью развитый профиль скорости при плоскопараллельном течении в поперечном магнитном поле является гартмановским профилем). Распределение скорости в пограничном слое можно принять также следующим закону Гартмана *). Исходя из интегрального уравнения импульсов для пограничного слоя, содержащего член, выражающий импульс электромагнитных сил, можно найти зависимость толщины пограничного слоя δ от продольной координаты x. Концу начального участка, очевидно, соответствует то значение x, где δ становится с выбранной точностью равным асимптотическому значению толщины гартмановского слоя. Часто концом начального участка считается то сечение, где скорость на оси потока с выбранной точностью совпадает со значением максимальной скорости соответствующего профиля скорости Гартмана.

Кроме способа интегральных соотношений, предложены и другие способы расчета течения на начальном участке [7—9], аналогичные приближенным способам расчета ламинарного пограничного слоя на пластинке, известным в общей гидродинамике.

*) При этом в формулу Гартмана для скорости подставляется вместо y величина $y/\delta(x)$, где $\delta(x)$ — толщина пограничного слоя.

Заметим, что работа [8] была первой, в которой был рассмотрен случай, когда на входе в трубу имеется не однородное распределение скорости, а пуазейлев профиль. Качественно результаты всех этих расчетов совпадают: длина начального участка значительно сокращается с увеличением числа Гартмана. Можно считать, что безразмерная (отнесенная к полуширине потока) длина начального участка изменяется обратно пропорционально числу Стюарта. Количественные же значения длины начального участка, вычисленные различными способами, получаются различными.

Сопоставление длины начального участка, получающейся в предположении о том, что на входе в магнитное поле скорость постоянна по всему сечению трубы, с длиной, получающейся в предположении, что в магнитное поле вступает поток с параболическим пуазейлевым профилем скорости, показывает, что во втором случае перестроение потока происходит медленнее.

Имеется ряд работ, в которых различные аспекты ламинарного течения в поперечном поле на начальном участке исследуются численно. В большинстве случаев задача решается на основе уравнений пограничного слоя и в безындукционном приближении [11—14]. Известна одна работа [15], где численное решение задачи о плоскопараллельном течении на начальном участке в поперечном магнитном поле ведется на основе полных уравнений Навье—Стокса и при конечном значении магнитного числа Рейнольдса. Среди прочих результатов этой работы особый интерес представляет вывод о том, что в пределах начального участка профиль скорости имеет максимумы и точки перегиба вблизи твердых стенок.

Выше мы видели, что все аналитические и численные решения исходят из допущения, что течение является плоскопараллельным. Регирер впервые обратил внимание на то, что это допущение в применении к начальному участку принципиально неприемлемо, и показал, что течение на этом участке является пространственным. Это заставляет искать пути для внесения соответствующих корректив во все упомянутые решения *).

Турбулентный пограничный слой на пластине, находящейся в поперечном поле, и турбулентное течение на начальном участке трубы исследованы еще совсем мало.

В работах [10, 17, 18] этот вопрос решается на основе интегральных соотношений. Если при ламинарном течении было достаточно одного основного допущения о распределении скоростей, а сила трения на стенке находилась по профилю скорости, то при турбулентном течении приходится вводить два раздельных

*) Подробнее об этом сказано в обзорной статье [16].

предположения — о распределении скорости и о силе трения на стенке. В работе [10] используется степенной профиль скорости и закона трения Блазиуса, в работе [17] — профиль скорости согласно полуэмпирической теории Гарриса [19] и сила трения согласно экспериментальным данным Гартмана и Лазаруса [20] и Маргетройда [22], относящимся к установившемуся течению в трубах.

Длина начального участка, получающаяся в результате подобных расчетов, оказывается большей, чем при ламинарном течении, но значительно меньшей, чем при течении в отсутствие магнитного поля. Так, например, из работы [10] следует, что при $\mathrm{Re}=2{,}5\cdot 10^4$ и $\mathrm{Ha}=100$ безразмерная длина начального участка равна приблизительно 5.

Предложены еще некоторые другие полуэмпирические теории турбулентного пограничного слоя на пластине в поперечном поле [22—24], в частности теории, которые основаны на двухслойной модели пограничного слоя (ламинарный подслой и турбулентный слой) и принятии параболической кривой распределения турбулентных касательных напряжений в пределах турбулентной части слоя [23, 24].

Во всех этих работах, однако, совершенно не учитывается непосредственное воздействие поля на турбулентные возмущения, т. е. подавление турбулентности.

Экспериментальные исследования течения на начальном участке, как уже упоминалось, пока немногочисленны. Некоторые сведения о свойствах течения на начальном участке получаются попутно, при измерении продольного градиента давления в трубах. Измерения распределения потенциала вдоль стенок трубы квадратного сечения [25] привели к следующей эмпирической зависимости для длины начального участка

$$\frac{L}{R}\approx 2\mathrm{N}^{-1/2}, \tag{7.36}$$

где R — характерный размер трубы.

В работе [26] течение на начальном участке прямоугольных труб с отношением сторон $\beta=1{,}5$ изучалось путем измерения распределения скорости в различных сечениях труб.

В экспериментальном исследовании [27] основная рабочая труба прямоугольного сечения имела большое отношение сторон ($\beta=9$), что позволяло считать течение до вступления в магнитное поле плоскопараллельным. Узкая сторона сечения трубы составляла 1 *см*. Длина полюсов электромагнита равнялась 38 *см*. Длина участков трубы до вступления в магнитное поле и по выходе из него была одинакова и равнялась 31 *см*. Измерение скоростей производилось тарированной в присутствии магнитного

поля трубкой Пито (диаметр насадка 0,1 *см*) в ряде сечений с интервалом 5 *см*. Поскольку специальные измерения показали, что статическое давление с точностью до погрешности измерения (2%) постоянно как без магнитного поля, так и в присутствии магнитного поля, при окончательных измерениях отбор статического давления производился со стенки трубы. Скорости

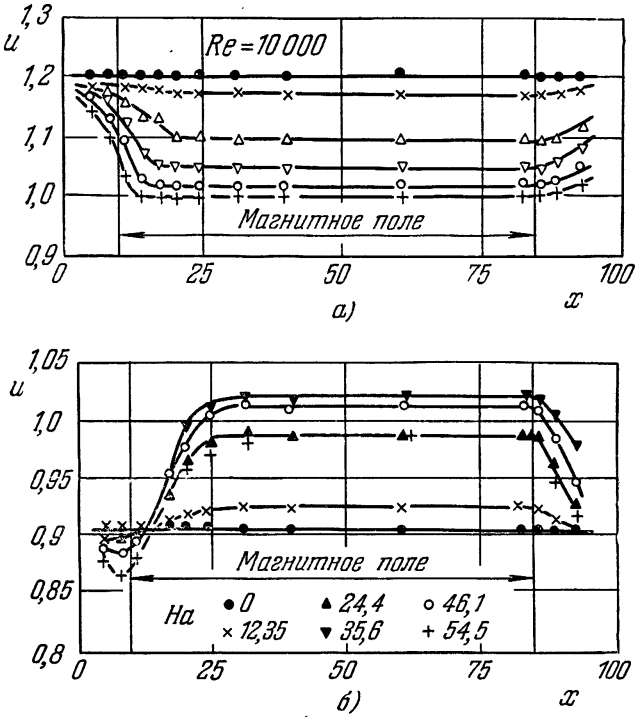


Рис. 7.11. Изменение скоростей течения по длине потока x при $\mathbf{Re}=10^4$;
а) на оси, *б*) вблизи стенки.

измерялись в большом числе точек сечения, однако далее мы будем рассматривать лишь результаты, относящиеся к точкам, лежащим на меньшей оси симметрии каждого сечения.

Перейдем к описанию главных результатов экспериментов. Напомним еще раз, что, в отличие от предпосылок теории, в эксперименте в магнитное поле вступает турбулентный поток, который перестраивается под влиянием поля и ламинаризуется одновременно.

Другим отличием условий эксперимента от предпосылок теоретических решений является то, что в эксперименте магнитное поле увеличивается и убывает постепенно, по экспоненциальному закону, тогда как во всех имеющихся решениях предполагается ступенчатое изменение напряженности магнитного поля от нуля до максимального значения.

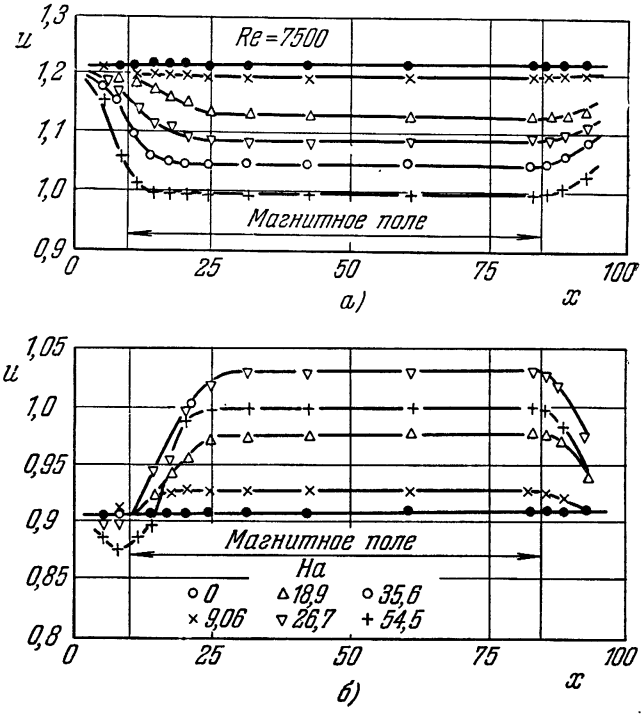


Рис. 7.12. Изменение скоростей течения по длине потока x при $\mathbf{Re}=7{,}5\cdot 10^3$;
а) на оси, *б*) вблизи стенки.

На рис. 7.11 и 7.12 показано изменение вдоль трубы скорости в центре и в ближайшей к стенке точке, где еще производились измерения при ряде значений числа Гартмана. Из этих графиков следует, что длина участка стабилизации течения в магнитном поле резко сокращается с увеличением числа Гартмана. Это особенно заметно по измерениям в центре трубы. Восстановление турбулентного профиля после выхода потока из магнитного поля происходит при бо́льших значениях **Ha** несколько медленнее, чем стабилизация течения в магнитном поле. Интересно, что скорость

вблизи стенки в начале участка с магнитным полем при всех Ha несколько убывает и лишь далее начинает увеличиваться. Это, по-видимому, обусловлено подавлением турбулентности и уменьшением турбулентного переноса количества движения поперек потока. Возможность качественного сопоставления результатов эксперимента и теории дает рис. 7.13. Здесь безразмерная длина стабилизации L/a (где L определено как длина от начала полюсов до сечения, в котором профиль скорости отличается от стабилизовавшегося не более чем на 2%) отложена в зависимости от 1/N. Как указывалось выше, из теории следует, что длина участка стабилизации изменяется обратно пропорционально числу Стюарта. Это означает, что если теория дает верный результат, то в принятых координатах все экспериментальные точки должны ложиться на одну линию. Как видно из рисунка, при больших значениях N это действительно имеет место. Однако при меньших N получаются различные кривые при различных значениях числа Рейнольдса. Как нам представляется, это можно объяснить тем, что либо на большей части длины стабилизации течение еще остается турбулентным и полностью ламинаризуется лишь в конце этого участка, либо оно при данном N вообще не становится полностью ламинарным.

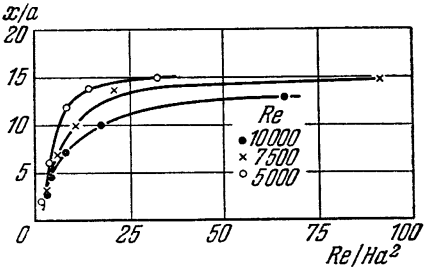


Рис. 7.13. Экспериментальные данные о безразмерной длине стабилизации плоскопараллельного течения в поперечном магнитном поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Г. А., К постановке задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое, ПММ **26**, № 5, 811 (1962).
2. Цинобер А. Б., Штерн А. Г., О некоторых свойствах МГД-пограничного слоя на пластинке, Магнитная гидродинамика, № 3, 34 (1968).
3. Rossow V. I., On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field, NACA Rp. № 1358 (1958).
4. Китанин Э. Л., Соковишин Ю. А., Пограничный слой проводящей среды в магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 1, 47 (1966).
5. Гуревич Б. Я., Миллер Р. Я., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Обтекание плоской пластинки электропроводящей жидкостью в магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 4, 47 (1966).
6. Якубенко А. Е., Задача о входе проводящей жидкости в плоский канал, Изв. АН СССР, Мех. и машиностр., № 6, 62 (1963).
7. Shercliff J. A., Entry of conducting and non-conducting fluids in pipes, Proc. Cambr. Phil. Soc. **52**, 3 (1956).
8. Регирер С. А., Течение электропроводной жидкости в начальном участке плоской трубы. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., № 6, 6 (1962).

9. Roidt M., Cess R. D., An approximate analysis of laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of a flat fuct, Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, № WA-147 (1961).
10. Maciulaitis A., Loeffler A. L., Jr., A theoretical investigation of MHD channel entrance flows, AIAA Journal **2**, № 12, 2100 (1964).
11. Shohet J. L., Osterle J. F., Joung F. J., Velocity and temperature profiles for laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of a plane channel, Phys. Fluids **5**, № 5, 545 (1962).
12. Shohet J. L., Velocity and temperature profiles for laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of an annular channel, Phys. Fluids **5**, № 8, 879 (1962).
13. Shohet J. L., Errors and stability of the entry problem equations in laminar magnetohydrodynamic flow, Phys. Fluids **6**, № 6, 797 (1963).
14. Hwang C. L., Li K. C., Fan L. T., Magnetohydrodynamic channel entrance flow with parabolic velocity at the entry, Phys. Fluids **9**, № 6, 1134 (1966).
15. Brandt A., Gillis Y., Magnetohydrodynamic flow in the inlet region of a straight channel, Phys. Fluids **9**, № 4, 690 (1966).
16. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А., Расчет магнитогидродинамических течений в каналах МГД-устройств, В сб. Магнитогидродинамический метод получения электроэнергии, «Энергия», Москва, 1968, стр. 329.
17. Krüger C. H., Sonju O. K., On the turbulent magnetohydrodynamic boundary layer, Proc., Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Berkley, Calif., Stanford, Univ. Press 147 (1964).
18. Хейвуд Дж. Б., Моффат В. К., Пригодность интегральных методов при анализе МГД-пограничного слоя, Ракетная техника и космонавтика **3**, № 8, 254 (1965).
19. Harris L. P., Hydromagnetic channel flows, Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology and John Willey and Sons, Inc., N.—Y., L., 1960.
20. Hartman J., Lazarus F., Experimental investigations on the flow of mercury in a homogenous magnetic field, Hg-Dynamics, Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-fys. Medd. **15**, № 27 (1937).
21. Napolitano L. G., On turbulent magnetofluid dynamic boundary layers, Revs. Mod. Phys. **32**, № 24, 785 (1960).
22. Murgatroyd W., Experiments on magnetohydrodynamic channel flow, Phil. Mag. (7 ser.) **44**, № 359, 1348 (1953).
23. Гинзбург И. П., Скурин Л. И., Турбулентный магнитогидродинамический пограничный слой в жидкости с постоянной электропроводностью, Магнитная гидродинамика, № 4, 33 (1966).
24. Гинзбург И. П., Скурин Л. И., Турбулентный магнитогидродинамический пограничный слой в сжимаемой жидкости, Магнитная гидродинамика **1**, 77 (1967).
25. Хожаинов А. И., Экспериментальное исследование начального участка в МГД-канале квадратного сечения с учетом неоднородности магнитного поля в продольном направлении, Журнал технической физики **35**, 9, 1568 (1965).
26. Гельфгат Ю. М., Экспериментальное исследование стабилизации распределения скоростей в прямоугольной трубе под действием поперечного магнитного поля, Изв. АН ЛССР, сер. физ. и техн. наук, № 4, 59 (1967).
27. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Стабилизация плоскопараллельного течения в поперечном магнитном поле (экспериментальные результаты), Магнитная гидродинамика, № 3, 9 (1968).

ГЛАВА VIII

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ЗАДАЧ О МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ

§ 1. Предварительные замечания

В последнее время появилось большое число работ [3—9], посвященных численному расчету различных задач гидродинамики непосредственно по точным уравнениям Навье—Стокса. В области магнитной гидродинамики таких работ насчитываются пока единицы. Результаты численных расчетов магнитогидродинамических течений в трубах были изложены в гл. II.

В настоящей главе излагаются результаты численных расчетов обтекания круглого цилиндра и плоской пластины конечной длины, ориентированной вдоль и поперек набегающего потока, в поперечном магнитном поле.

§ 2. Обтекание круглого цилиндра в поперечном магнитном поле

Введем возмущение функции тока ψ и вихрь скорости ζ. Тогда задача об обтекании круглого цилиндра однородным потоком проводящей жидкости в присутствии поперечного магнитного поля сводится к решению системы

$$\frac{2}{\mathrm{Re}}\nabla^2\zeta-\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{D(\psi,\zeta)}{D(x,y)}+\frac{\mathrm{N}}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \qquad (8.1)$$

$$\zeta=-\nabla^2\psi \qquad (8.2)$$

с граничными условиями

$$\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\sin\theta \quad \text{при} \quad r=1. \qquad (8.3)$$

Здесь в качестве характерного размера выбран радиус цилиндра, а числа Рейнольдса и Стюарта вычислены по диаметру, r и θ — полярные координаты, скорость невозмущенного потока направлена вдоль оси x (т. е. $\theta=0$).

Кроме того, течение предполагается симметричным относительно оси x, поэтому

$$\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad y=0,$$

$$\zeta=\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad y=0. \tag{8.4}$$

Далее

$$\zeta=\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{\partial\zeta}{\partial y}=0$$

при $y=\infty$. (8.5)

Разлагая ψ в ряд по r, из второго уравнения получаем условие Тома [3] для ζ на поверхности цилиндра

$$\zeta|_{r=1}=-\frac{2}{(\Delta r)^2}\{\psi|_{r=1+\Delta r}+$$

$$+\sin\theta(1+\Delta r)\}. \tag{8.6}$$

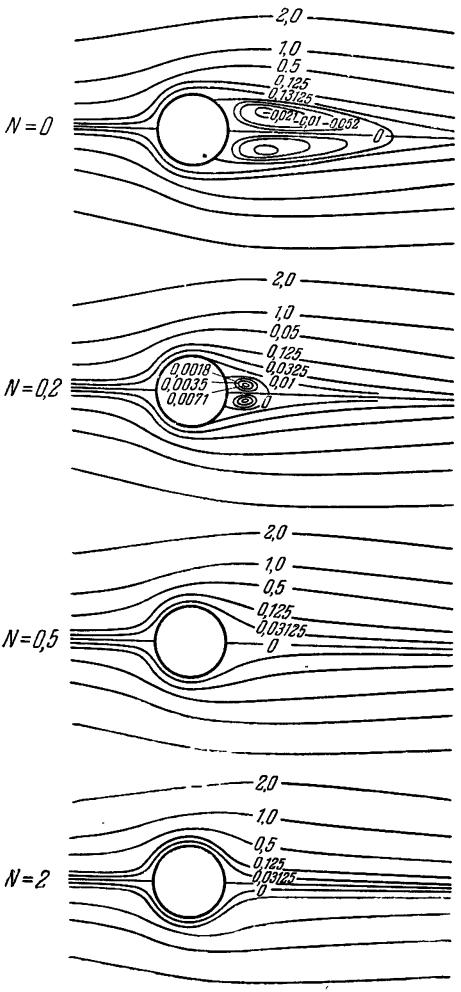


Рис. 8.1. Картины линий тока при обтекании круглого цилиндра в поперечном магнитном поле $\mathbf{Re}=40$.

Численный расчет системы (8.1), (8.2) с граничными условиями (8.3)—(8.6) производился при различных числах Стюарта и $\mathbf{Re}=40$ [1, 2]. Это значение числа Рейнольдса было выбрано потому, что ранее при том же значении были выполнены расчеты в условиях обычной гидродинамики [3—10], что давало возможность сопоставления. Не останавливаясь на подробностях самого расчета, приведем лишь окончательные результаты.

На рис. 8.1 показаны картины линий тока для различных значений числа Стюарта.

Как видно из этих рисунков, с ростом числа Стюарта область присоединенных вихрей позади тела сокращается, точка

отрыва перемещается назад и, начиная с $N=0{,}5$, течение становится безотрывным. Качественно это хорошо согласуется с экспериментальными результатами, приводимыми в гл. IX. Из приведенных картин линий тока видно также, что по мере увеличения числа Стюарта линии тока прижимаются к цилиндру, причем поле воздействует сильнее на те линии тока, которые находятся ближе к поверхности цилиндра.

На рис. 8.2 показаны зависимости скорости на оси x от расстояния до поверхности цилиндра. Сплошным линиям соответствуют скорости впереди цилиндра, штриховым — скорости в следе за цилиндром. Как и следовало ожидать, по мере увеличения расстояния от тела величина скорости приближается к ее значению в невозмущенном потоке тем быстрее, чем больше число Стюарта.

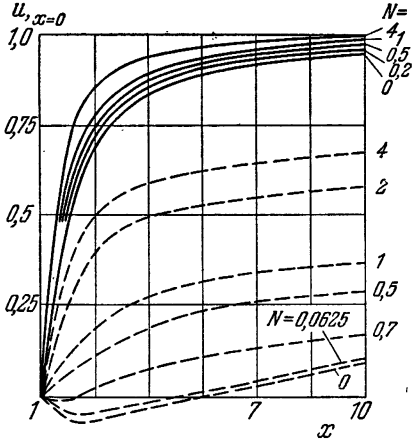


Рис. 8.2. Зависимости скорости на оси $y=0$ от расстояния до поверхности цилиндра $\mathbf{Re}=40$.

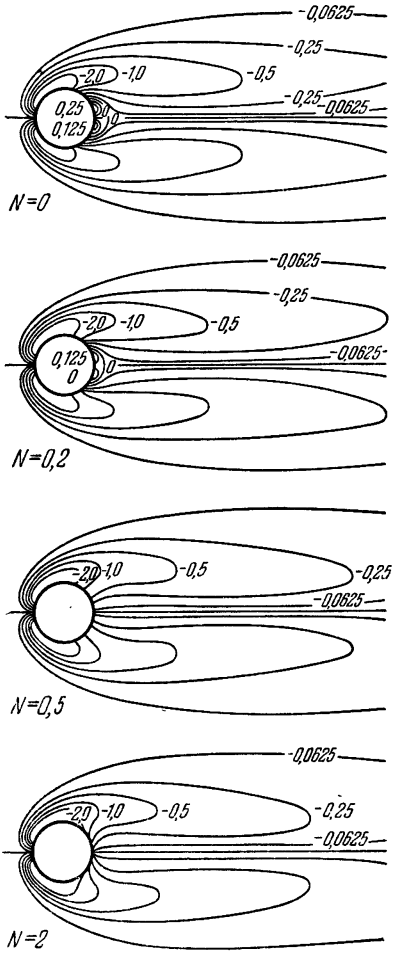


Рис. 8.3. Линии постоянного вихря $\mathbf{Re}=40$.

На рис. 8.3 показаны линии постоянного вихря для некоторых значений числа Стюарта. Здесь видно также, что влияние магнитного поля сильнее всего проявляется в непосредственной

близости к поверхности и в следе за обтекаемым цилиндром, т. е. в областях с наибольшей завихренностью потока.

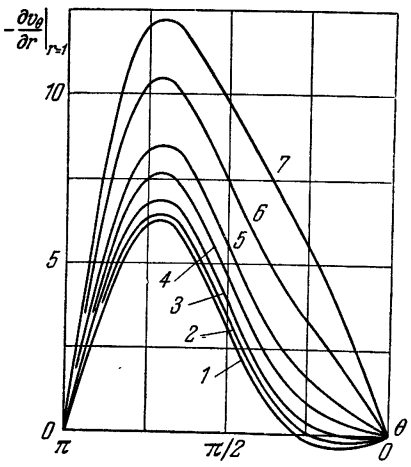


Рис. 8.4. Распределение сил трения по поверхности цилиндра Re=40. Значения N: *1* — 0; *2* — 0,0625; *3* — 0,2; *4* — 0,5; *5* — 1,0; *6* — 2,0; *7* — 4,0.

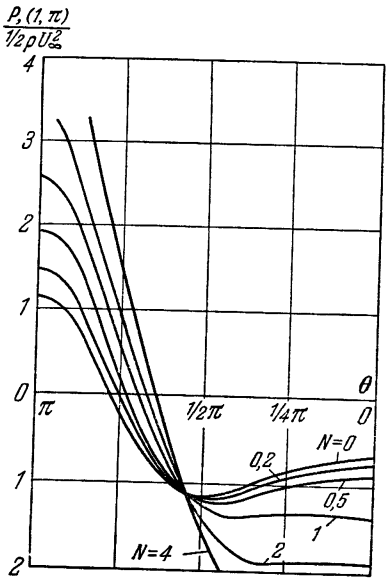


Рис. 8.5. Распределение давления по поверхности цилиндра Re=40.

На рис. 8.4 показано распределение вихря скорости по поверхности цилиндра, которое с точностью до коэффициента совпадает с распределением сил трения, так как

$$\zeta|_{r=1} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\Big|_{r=1}.$$

Видно, что с увеличением числа Стюарта силы трения на поверхности возрастают и, начиная с N=0,5, т. е. с момента перехода к безотрывному течению, всюду направлены в одну сторону.

Распределение давления по поверхности цилиндра показано на рис. 8.5. С увеличением N давление в передней части сильно возрастает и, в частности, быстро увеличивается коэффициент давления в передней критической точке. В кормовой части цилиндра давление убывает, причем точка минимума давления сдвигается вниз по потоку, а при N=2 эта точка совпадает с задней критической точкой.

На рис. 8.6 показаны зависимости полного сопротивления C_D, сопротивления формы C_p и сопротивления трения C_f от числа Стюарта.

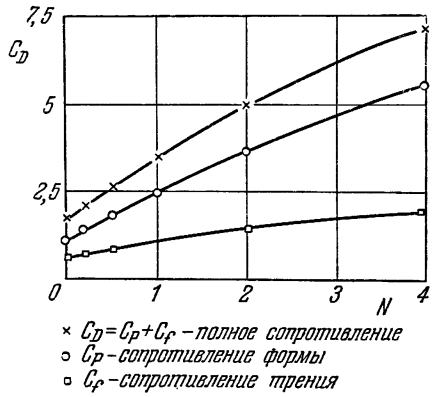


Рис. 8.6. Сопротивление круглого цилиндра.

Видно, что сопротивление цилиндра в магнитном поле сильно возрастает. Так, при $N=4$ коэффициент сопротивления достигает величины $C_D=7{,}14$, тогда как при $N=0$ $C_{D_0}=1{,}645$.

Отметим, что при $N=0$ величины C_{D_0}, C_{p_0} и C_{f_0} хорошо согласуются с результатами, полученными в работах Кавагути [4] и Эйплта [5], что видно из приводимой ниже таблицы.

	C_{D_0}	C_{p_0}	C_{f_0}
Кавагути [4]	1,618	1,053	0,565
Эйплт [5]	1,469	0,928	0,568
По данным [1, 2]	1,645	1,0597	0,585

Следует также отметить, что аналогичное увеличение сопротивления цилиндра в магнитном поле наблюдается экспериментально и при больших числах Рейнольдса (см. гл. IX).

§ 3. Обтекание плоской пластины конечной ширины в поперечном магнитном поле

1. Продольное обтекание. Методом, описанным в работе [10], рассчитывалась задача обтекания пластины конечной ширины однородным на бесконечности потоком, параллельным плоскости пластины, в поперечном магнитном поле. За характерный размер

была принята ширина пластины. Задача формулируется следующим образом: найти решение системы

$$\nabla^2 u + \mathbf{Re}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mathbf{Ha}^2(1-u) - \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\nabla^2 v + \mathbf{Re}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \qquad (8.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

при условиях

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant 0{,}5,\ y = 0, \qquad (8.8)$$

$$u = 1,\ v = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \to \infty, \qquad (8.9)$$

$$\partial u/\partial y = 0,\ v = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geqslant 0{,}5,\ y = 0, \qquad (8.10)$$

$$p = 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty,\ y = 0. \qquad (8.11)$$

При проведении расчета была использована система нестационарных уравнений, соответствующая при $\partial/\partial t = 0$ системе (8.7). Кроме того, условия (8.9)—(8.11) сносились на конечное расстояние от пластины:

$$u = 1,\ v = 0 \quad \text{при} \quad \left.\begin{array}{l} y = 1, \\ x = a, \\ x = b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{array}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \left\{\begin{array}{l} x \leqslant a, \\ x \geqslant b, \end{array}\right.$$

$$p = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x = a.$$

На рис. 8.7, *а*, *б*, *в* показаны распределения продольной скорости u на линиях $y = \text{const}$ при $\mathbf{Re} = 10$ и $\mathbf{N} = 0$, 5 и 10. Видно, что при течении без магнитного поля течение несимметрично относительно оси y; и за пластиной образуется длинный след. По мере возрастания магнитного поля течение становится все более симметричным и при $\mathbf{N} = 10$ ($\mathbf{Ha}/\mathbf{Re} = 1$) несимметричность течения практически исчезает. Кроме того, при $\mathbf{N} = 10$ распределение продольной скорости всюду совпадает с экспоненциальным гартмановским профилем, за исключением малых окрестностей кромок пластины.

2. Поперечное обтекание. В этом случае производился расчет уравнения четвертого порядка для функции тока

$$\frac{1}{\mathbf{Re}}\nabla^2\psi + \frac{D(\psi, \nabla^2\psi)}{D(x, y)} - \mathbf{N}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

при условиях

$$\psi=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=0;\quad \psi=1,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad y=1,$$

$$\psi=1,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad 0{,}5\leqslant y\leqslant 1;$$

$\psi=F(y)$, где $F(y)$ соответствует течению Гартмана при $x=\pm\infty$.

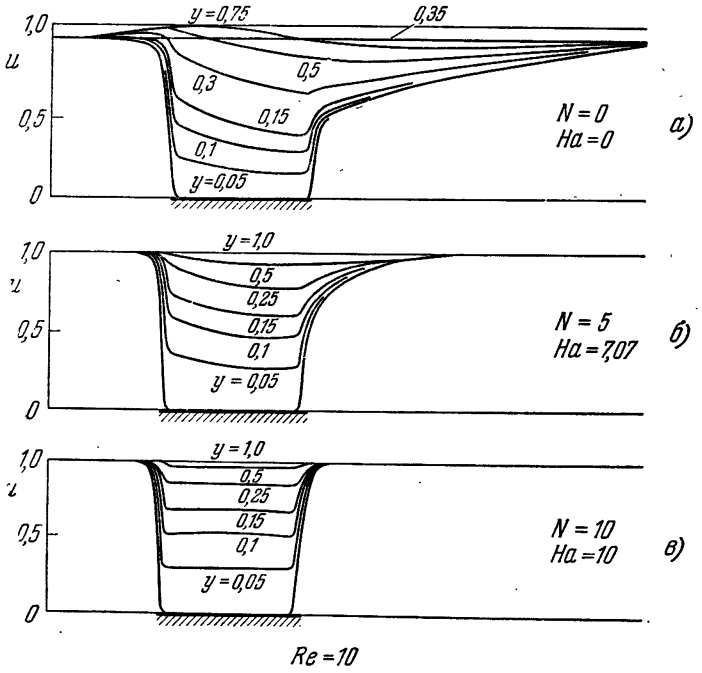


Рис. 8.7. Распределение продольной скорости на линиях $y=\text{const}$ при продольном обтекании плоской пластины в поперечном магнитном поле $\mathbf{Re}=10$.

Последнее условие сносилось на конечное расстояние от пластины, и расчет производился в конечной области. Так же как и в предыдущих случаях, решение получалось как предел при $t\to\infty$ решения соответствующей нестационарной задачи.

На рис. 8.8, *а*, *б*, *в* показаны картины линий тока при $\mathbf{Re}=20$ и различных значениях числа Стюарта. С увеличением индукции магнитного поля зона отрыва за пластинкой сокращается и течение переходит в безотрывное. При очень больших значениях

числа Гартмана (Ha/Re$>$1) течение становится, так же как и в предыдущих случаях, близким к симметричному.

При поперечном обтекании пластины течение видоизменяется в магнитном поле так же, как и в случае обтекания круглого цилиндра. Поведение давления на поверхности пластины, сил трения и т. п. также подобно в случае поперечного обтекания пластины и цилиндра. Поэтому мы не приводим здесь соответствующие результаты.

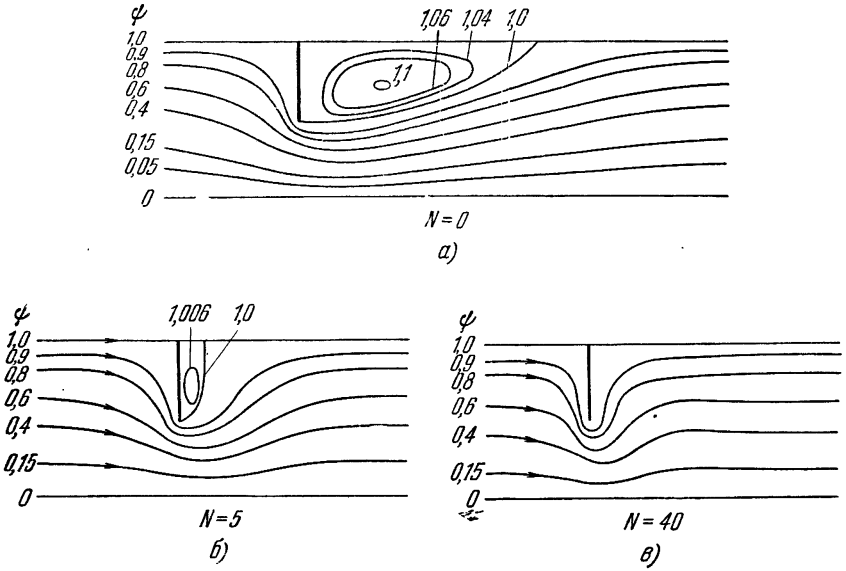


Рис. 8.8. Картины линий тока при поперечном обтекании плоской пластины в поперечном магнитном поле Re=20.

В заключение этой главы отметим, что приведенные выше результаты численных расчетов некоторых случаев обтекания простейших тел подтверждают высказанное в гл. VI предположение о том, что в очень сильном магнитном поле (Ha/Re$\geqslant$1) течение приближается к стоксову. Естественно, что это происходит раньше у тех течений, которые в отсутствие поля являются безотрывными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калис Х. Э., Цинобер А. Б., Обтекание круглого цилиндра электропроводящей несжимаемой жидкостью в поперечном магнитном поле, Латвийский математический ежегодник, изд-во «Зинатне», Рига, 1966, стр. 235.

2. Калис Х. Э., Цинобер А. Б., Щербинин Э. В., Штерн А. Г., Обтекание круглого цилиндра электропроводящей жидкостью в поперечном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 1, 18 (1965).
3. Thom A., The flow past circular cylinders of low Reynolds numbers, Proc. Roy. Soc. **A141**, № 845, 651 (1933).
4. Kawaguti M., Numerical solution of the Navier—Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40, J. Phys. Soc. Japan 8, № 6, 747 (1953).
5. Apelt C. J., The steady flow of a viscous fluid past a circular cylinder at Reynolds numbers 40 and 44, Aeronaut. Res. Council. Rep. and Mem., № 3175, 1 (1961).
6. Payne R. B., Calculations of insteady viscous flow past a circular cylinder, J. Fluid. Mech. 4, 1, 81—86 (1958).
7. Russel D. E., Obtaining solutions to the Navier—Stokes equations with automatic digital computers, Aeronaut. Res. Council Rep. and Mem., № 3331 (1963).
8. Dennis S. C. R., Shimshoni M., The steady flow of a viscous fluid past a circular cylinder, Aeronaut. Res. Council. Current paper, № 797 (1965).
9. Hiroto J., Mijakoda K., Numerical Solution of Karman vortex street behind a cyrcular cylinder, J. of the Meteorol. Soc. of Japan **43**, 1, 30 (1965).
10. Владимирова Н. Н., Кузнецов В. Г., Яненко Н. Н., Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости. В сб. «Некоторые вопросы прикладной и вычислительной математики», Новосибирск, «Наука», СО, 1966, стр. 186.
11. Колис Х. Э., Миллере Р. П., Цинобер А. Б., Шкерстена А. Я., О некоторых численных результатах изучения влияния магнитного поля на поток вязкой несжимаемой электропроводной жидкости, в сб. «Труды всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости», Новосибирск, «Наука», СО, 1969, стр. 121.

ГЛАВА IX

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1. Предварительные замечания

В магнитной гидродинамике, как и в общей, области изменения критериев подобия, в которых производятся теоретические исследования обтекания тел, с одной стороны, и экспериментальные — с другой, почти не перекрываются. В общей гидродинамике такое положение пока непреодолимо по существу. Действительно, решения типа Стокса, как известно, теряют справедливость при $\mathrm{Re} \approx 1$, решения типа Озеена — при $\mathrm{Re} \approx 3 \div 5$, наконец, при еще больших числах Рейнольдса происходит отрыв потока. Таким образом, при исследовании течения около плохообтекаемых тел сопоставление количественных экспериментальных результатов с теорией может иметь смысл лишь при чрезвычайно медленных движениях, для которых число Рейнольдса имеет порядок единицы.

В магнитной гидродинамике положение существенно иное. Как было подробно показано в предыдущих главах теоретически, стоксово решение может оставаться справедливым при сколь угодно больших значениях числа Рейнольдса, если только течение происходит в достаточно сильном магнитном поле. В настоящей главе будут приведены и некоторые экспериментальные доказательства этого утверждения.

Таково положение вещей в принципе. Фактически же постановка экспериментов при больших значениях параметра магнитогидродинамического взаимодействия сопряжена с серьезными техническими трудностями, и потому такие эксперименты начали появляться лишь в самое последнее время. Большинство же накопленных до сих пор экспериментальных результатов таково, что их сопоставление с теорией возможно лишь в качественном отношении.

В этой главе мы рассмотрим не только основные особенности обтекания тел в продольном и поперечном магнитном поле, но приведем и ряд эмпирических расчетных зависимостей, а также проанализируем работу некоторых измерительных устройств, погружаемых в поток.

§ 2. Обтекание тел в присутствии продольного магнитного поля

Как было показано в тл. VI, при обтекании тела в продольном магнитном поле имеется не только обычный хорошо известный в гидродинамике след за телом, но также специфический передний след. С экспериментального подтверждения этого типично магнитогидродинамического явления мы и начнем рассмотрение вопросов, связанных с обтеканием тел.

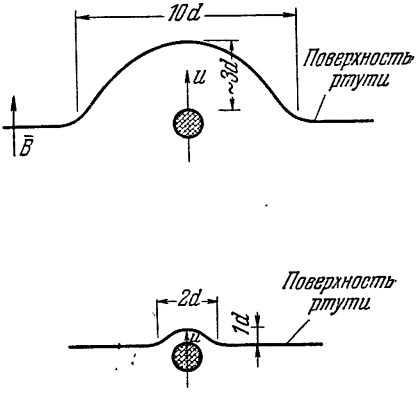


Рис. 9.1. К экспериментальному подтверждению существования переднего следа.

Первые эксперименты, в которых наблюдался передний след, были проведены Липманом, Хоултом и Алстромом [1]. В этих экспериментах изучалось поведение свободной поверхности ртути при приближении к ней снизу сферы или полубесконечного тела Рэнкина. Опыты носили сугубо предварительный характер, однако результаты их, которые мы воспроизводим на рис. 9.1, очень наглядны и любопытны. На рис. 9.1, *а*, относящемся к течению без магнитного поля, наибольшее выпучивание свободной поверхности ртути достигает по высоте лишь диаметра сферы. На рис. 9.1, *б*, относящемся к случаю, когда напряженность магнитного поля, параллельного скорости сферы, составляла 0,4 *тл*, высота гребня свободной поверхности достигает трех диаметров. Ширина волны отличается во втором случае от ширины в первом еще сильнее. Аналогичны были и результаты в случае тела Рэнкина.

Некоторые дальнейшие наблюдения над передним следом были проведены Мэксуорси [2] при движении металлической сферы в жидком натрии. Он измерял с помощью катушек возмущение магнитного поля, вызванное движением сферы, и пришел к выводу, что, как и следует из теории, возмущение перед телом затухает в зависимости от расстояния лишь как r^{-1}, что подтверждает существование переднего следа.

Систематическое исследование вопроса о переднем магнитном следе было проведено Алстромом [3]. В этих опытах тело Рэнкина диаметром около 2,5 *см* двигалось в сосуде со ртутью диаметром около 14 *см*, помещенном в соленоид, дающий магнитное поле до 0,8 *тл*. Определяющие критерии подобия изменялись в

следующих пределах: $7{,}8 \cdot 10^4 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 4 \cdot 10^5$; $1{,}2 \cdot 10^{-3} \leqslant \mathrm{Re}_m \leqslant 6{,}1 \cdot 10^{-3}$; $0{,}22 \leqslant \mathrm{Al} \leqslant 311$.

Регистрация возмущений, как и в опытах Мэксуорси, производилась с помощью индукционных катушек. Таким образом удавалось получить сведения о магнитных следах, а по ним уже можно было составить представление и о динамических следах. Анализ результатов привел к выводу, что передний магнитный след затухает в зависимости от расстояния не линейно, как следует из теории при бесконечно протяженном набегающем потоке, а экспоненциально. Это отличие автор объяснил влиянием близости стенок сосуда, а также электрической проводимостью этих стенок.

Сопротивление при обтекании сферы в присутствии продольного магнитного поля изучалось в уже цитированной работе [1], а при обтекании сфер и дисков — в недавно опубликованной работе [4]. Обе проводились с жидким натрием. Первая из них относится к небольшим числам Рейнольдса (до $1{,}1 \cdot 10^4$) и числу Гартмана до 150. Во второй числа Рейнольдса доходили до $2{,}5 \cdot 10^5$ и числа Стюарта до 80. При этом магнитное число Рейнольдса достигало значения 2,5. Степень стеснения потока сферой изменялась в первой работе от 0,08 до 0,16, во второй — от 0,16 до 0,48. Наконец, в первой — сферы двигались и сопротивление вычислялось по скорости движения, во второй — сферы были закреплены проволоками и сила сопротивления измерялась тензометрически.

Результаты обеих работ плохо согласуются между собой. В работе [1] было сделано заключение, что коэффициент сопротивления в магнитном поле существенно увеличивается и однозначно определяется отношением Ha/Re и не зависит от Re, когда $\mathrm{Ha} \geqslant 10$.

В работе [4] было получено, что при тех же значениях Ha/Re, но больших Re коэффициент сопротивления от поля еще практически не зависит. Влияние поля начинает проявляться, лишь когда $N \geqslant 1$. Коэффициент сопротивления увеличивается при увеличении числа N, но зависит также и от Ha. Наконец, при $N \geqslant 10$ коэффициент сопротивления изменяется пропорционально $N^{-1/2}$. Очень интересно, что при этом коэффициенты сопротивления сферы и диска практически совпадают, это находится в полном согласии с теоретическим результатом Честера [5], состоящем в том, что сопротивление тела вращения в сильном продольном магнитном поле определяется лишь максимальным сечением тела, перпендикулярным к оси вращения тела (и магнитному полю), а в остальном от геометрии тела не зависит. Подчеркнем, что Честер получил этот результат, исходя из приближения Стокса.

При использовании результатов работы [4] нужно иметь в виду, что степень стеснения потока телом в этих экспериментах была весьма высокой. Учитывая это, автор вводил поправку в свои результаты, полагая, что стеснение обусловливает лишь увеличение скорости набегающего потока, пропорциональное уменьшению площади сечения трубы. С учетом этой поправки он получил, что при $N \geqslant 10$ коэффициент сопротивления при нестесненном обтекании может быть вычислен по следующей простой эмпирической формуле:

$$C_D = 0{,}33\, N^{1/2}. \tag{9.1}$$

§ 3. Обтекание тел в присутствии поперечного магнитного поля

Обтекание тел в присутствии поперечного магнитного поля изучено более подробно, чем в присутствии продольного поля [6—18, 33, 34]. К сожалению, и здесь опыты различных исследователей проведены в существенно различных условиях и это очень затрудняет обобщение результатов. Работы Кросса и Пуарье [6—8] посвящены изучению обтекания круглого цилиндра, расположенного в трубе прямоугольного сечения. Степень стеснения потока обтекаемым телом составляла 0,5, а длина образующей цилиндра равнялась лишь 0,8 его диаметра, благодаря чему течение было весьма далеко от плоского. Далее поток ртути, набегавший на цилиндр, был неоднородным и турбулентным, причем неоднородность и степень турбулентности менялись как при изменении числа Рейнольдса, так и при изменении числа Гартмана. Коэффициент сопротивления вычислялся на основании измерений распределения давления по поверхности цилиндра.

В силу всех упомянутых недостатков постановки, эти наиболее ранние опыты позволили выяснить главным образом качественные особенности явления *).

Последующие работы [9—17] были проведены более корректно. В этих экспериментах тела двигались в неподвижной ртути, степень стеснения не превосходила 0,16 (как правило, менее 0,1), для определения коэффициента сопротивления измерялась непосредственно сила, действующая на обтекаемое тело. На эти работы мы и будем главным образом опираться, описывая ниже экспериментально изученные явления при обтекании тел в присутствии поперечного магнитного поля.

*) Характеристикой ненадежности их количественных результатов служит хотя бы тот факт, что при отсутствии поля было получено значение коэффициента сопротивления в четыре раза большее, чем в известных опытах с водой и воздухом.

На рис. 9.2 показана экспериментальная зависимость от числа Стюарта коэффициента сопротивления пластины шириной 0,8 *см* и толщиной 0,1 *см*, установленной поперек потока, при глубине погружения 3 *см*. Эксперименты проведены при двух значениях числа Рейнольдса — 5800 и 8800. Однако экспериментальные точки, представляющие зависимость отношения коэффициента сопротивления в присутствии поля к коэффициенту сопротивления без поля от числа Стюарта, хорошо ложатся на одну кривую и, следовательно, не зависят от числа Рейнольдса. Этим, к сожалению, исчерпываются пока все имеющиеся данные об обтекании пластины, установленной поперек потока. К тому же в этих опытах отношение ширины пластины к ширине канала было столь велико, что влиянием стенок вряд ли можно пренебречь, а величина отношения ширины пластины к глубине ее погружения никак не позволяет считать течение плоским.

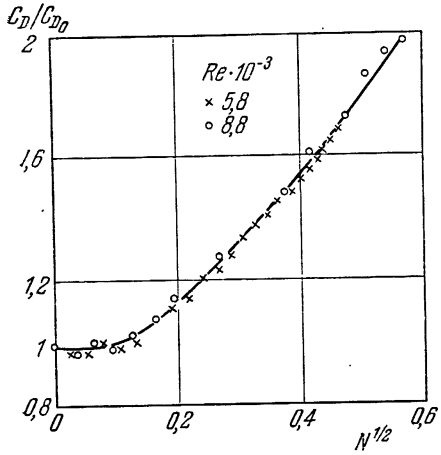


Рис. 9.2. Зависимость коэффициента сопротивления пластины от числа Стюарта.

Несколько более подробно изучено обтекание шара. Шары диаметром 5 и 7 *мм* опускались в поток на вертикальных цилиндрических державках диаметром 0,3 *мм*. Известно, что такая державка при достаточно большом значении числа Рейнольдса может совершенно исказить результат [19]. Однако в описываемых опытах число **Re** менялось от $1{,}1 \cdot 10^3$ до $8{,}6 \cdot 10^3$, т. е. все они далеки от критической области. В пользу достоверности полученных результатов говорит хорошее совпадение данных при **Ha**$=0$ с результатами общей гидродинамики [19].

Как и в случае пластины, относительный коэффициент C_D/C_{D_0} оказался зависящим лишь от числа Стюарта. Как видно из рис. 9.3, *а*, зависимость эта весьма проста:

$$\frac{C_D}{C_{D_0}} = 1 + \mathbf{N}^{1/2}. \qquad (9.1')$$

Наиболее полные сведения получены об обтекании круглого цилиндра. Снова, как и в случае с шаром, C_D/C_{D_0} оказывается не зависящим от числа Рейнольдса и прямо пропорциональным

квадратному корню из числа Стюарта. Эмпирическая зависимость для коэффициента сопротивления может быть записана в виде

$$\frac{C_D}{C_{D_0}} = 1 + f(l)\,\mathrm{N}^{1/2}, \tag{9.2}$$

где $f(l)$ — численный коэффициент, зависящий от безразмерной

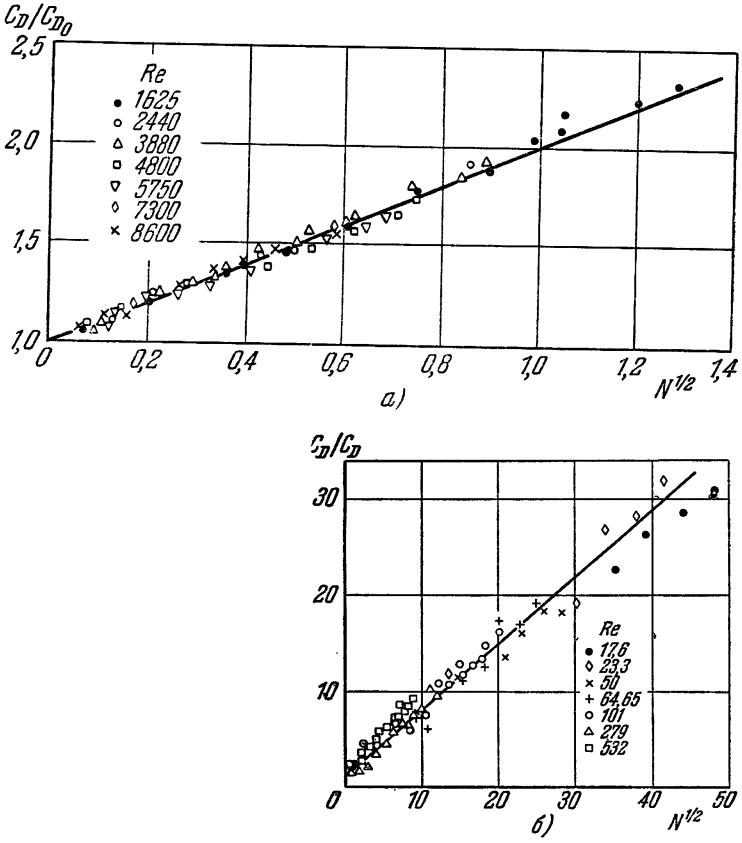


Рис. 9.3. Влияние поперечного магнитного поля на коэффициент сопротивления шара.

глубины погружения цилиндра*). На рис. 9.4, *а* показана зависимость отношения C_D/C_{D_0} от $\mathrm{N}^{1/2}$ для одного значения $l=30$ при

*) Опыты производились с цилиндрами конечной длины. Поэтому величина C_D/C_{D_0} зависит еще и от отношения глубины погружения цилиндра к его диаметру $l=L/d$. Коэффициент сопротивления цилиндра конечной длины меньше коэффициента сопротивления цилиндра с бесконечной длиной.

различных числах Рейнольдса. Из этого рисунка хорошо видно, что C_D/C_{D_0} не зависит от Re.

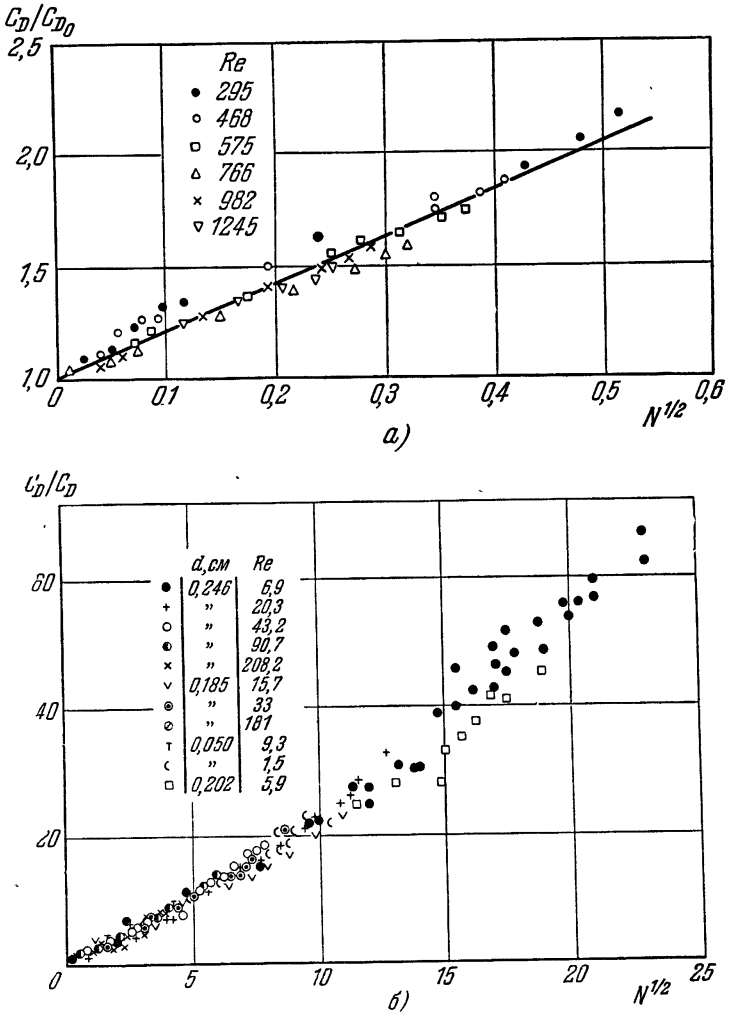


Рис. 9.4. Зависимость коэффициента сопротивления круглого цилиндра от числа Стюарта $l=30$.

Вид функции $f(l)$, полученной из опытов, показан на рис. 9.5. Поскольку с увеличением l эта функция асимптотически приближается к значению 3, 4, эмпирическую зависимость для цилиндра бесконечной длины можно записать в виде $C_D/C_{D_0}=1+3{,}4\,N^{1/2}$.

Недавно были произведены измерения сопротивления круглого цилиндра и шара при малых числах Рейнольдса и соответственно больших числах Стюарта [16]. Полученные результаты (рис. 9.3, *б*, 9.4, *б*) находятся в согласии с результатами работы [10].

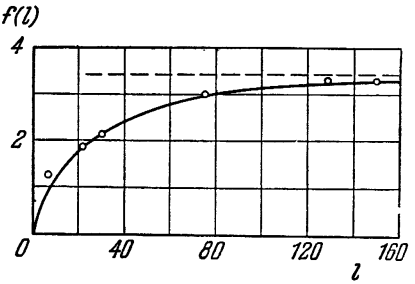


Рис. 9.5. Вид функции $f(l)$.

Под воздействием поперечного магнитного поля существенно видоизменяется и распределение давления на поверхности плохо обтекаемого тела. Общая закономерность состоит в том, что наложение поля приводит к увеличению давления в лобовой части тела и уменьшению в кормовой, и таким образом, по мере увеличения индукции магнитного поля раз-

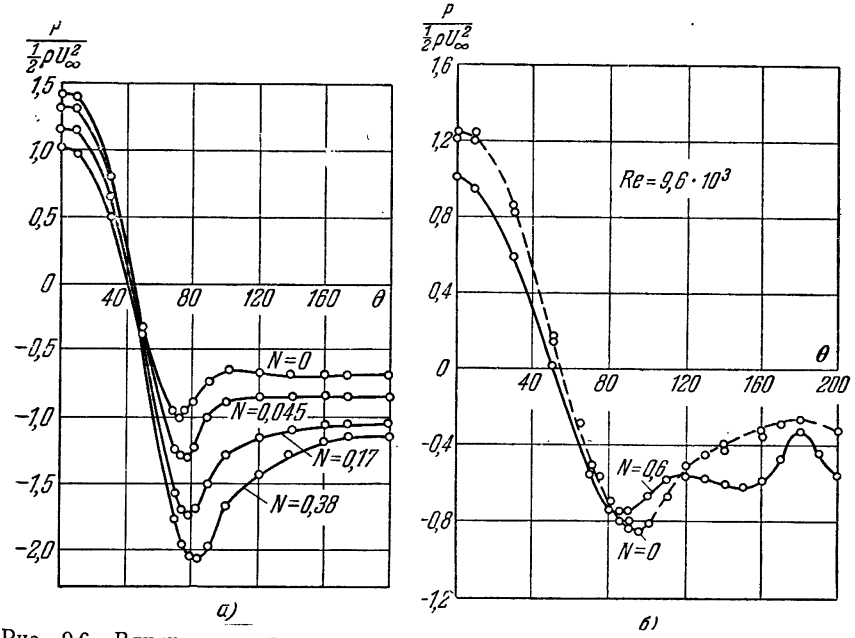


Рис. 9.6. Влияние поперечного магнитного поля на распределение давления по поверхности круглого цилиндра и шара.

ница между давлением в лобовой и кормовой частях тела увеличивается. Это (вместе с увеличением градиентов скорости на

поверхности тела) приводит к увеличению сопротивления тела. Указанные выше явления иллюстрирует рис. 9.6, *а*, *б*, на котором показаны кривые распределения давления по поверхности круглого цилиндра (*а*) для нескольких значений числа Стюарта при $Re=7200$ и шара (*б*) при $Re=9600$. Из этого рисунка также видно, что минимум давления становится более глубоким и смещается вниз по течению, т. е. в сторону задней критической точки. Характерно, что положение точки минимума давления на цилиндре полностью определяется величиной числа Гартмана, что видно из приводимого рис. 9.7.

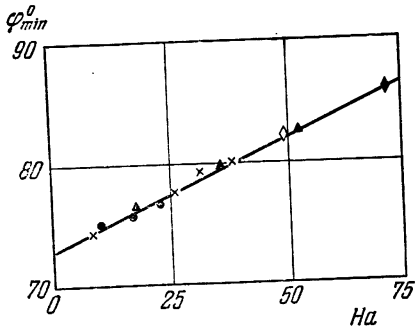


Рис. 9.7. Положение точки минимума давления на поверхности круглого цилиндра в зависимости от числа Гартмана.

● — $Re=3200$, △ — $Re=7200$,
× — $Re=5200$, ◇ — $Re=10\,300$.

Проведенные недавно эксперименты [13, 18], в которых измерялось распределение давления по поверхности круглого цилиндра, обтекаемого жидким натрием, дали хорошее подтверждение полученных в предшествующих главах выводов о том, что при достаточно больших значениях числа Гартмана течение приближается к стоксову даже при значительных числах Рейнольдса. В этих экспериментах стеснение потока телом составляло 0,25, а отношение высоты цилиндра к его диаметру равнялось 10, что обеспечивало достаточно хорошее приближение течения к плоскому.

На рис. 9.8 и 9.9 показано распределение давления по поверхности цилиндра при числе Гартмана 850 и числах Рейнольдса $1{,}8\cdot10^4\leqslant Re\leqslant6\cdot10^4$ (число Стюарта $12\leqslant N\leqslant38$); для сравнения даны также результаты, полученные в отсутствие магнитного поля. Как известно, при стоксовом обтекании для кривых распределения давления характерна центральная симметрия. Кривые на рис. 9,8, *б* достаточно близки к симметричным. Выше, в гл. VI упоминалось, что при стоксовом обтекании распределение величины $Re\,p$ не зависит от Re. Данные, показанные на рис. 9.9, *б* и относящиеся к числам Рейнольдса, отличающимся более чем в три раза, расходятся между собой сравнительно слабо. Это особенно хорошо проявляется в лобовой части цилиндра.

Весьма важным с точки зрения применимости трубки Пито для измерения скорости течения металлов в присутствии поля является вопрос об увеличении давления в передней критической точке тела. Ниже мы специально займемся этим вопросом.

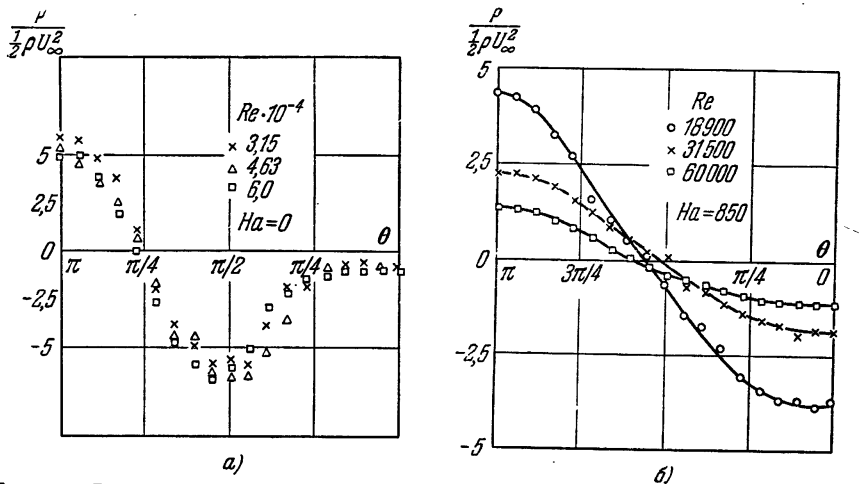


Рис. 9.8. Распределение давления по поверхности при обтекании круглого цилиндра жидким натрием.

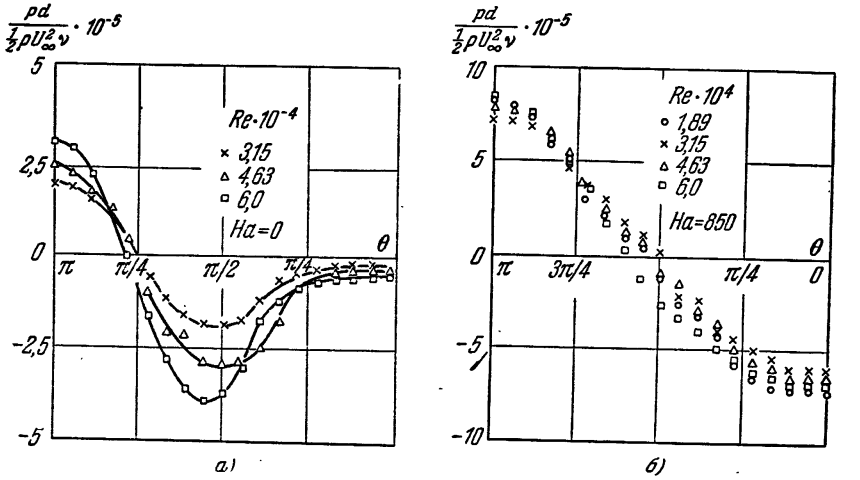


Рис. 9.9. К вопросу о применимости приближения Стокса.

Все сказанное выше относилось к непроводящим телам. Явление обтекания электрически проводящего тела обладает существенными особенностями. Так, в частности, влияние поля на сопротивление при обтекании непроводящего тела обусловлено не непосредственно электромагнитными силами, а изменением величины и распределения сил трения и давления. При обтекании же проводящего тела токи в большей или меньшей мере замыкаются через тело и к нему, помимо сил трения и давления, оказывается непосредственно приложенной и электромагнитная сила сопротивления. Очевидно, что в случае проводящего тела величина и распределение сил трения и давления по его поверхности будут отличаться от того, что имеет место в случае изолированного тела. Однако можно полагать, что эти эффекты будут второстепенными и коэффициент сопротивления проводящего тела возрастает по сравнению с непроводящим главным образом за счет электромагнитных сил, действующих на токи, текущие в самом теле. Несложные оценки показывают, что величина этой силы пропорциональна числу Стюарта, причем коэффициент пропорциональности определяется отношением проводимости тела к проводимости жидкости [14, 20]. Это подтверждается экспериментальными данными. На рис. 9.10 показаны результаты опытов по измерению силы сопротивления бронзовых и медных шаров в потоке ртути в сопоставлении с результатами для непроводящего шара. Отношение C_D/C_D для проводящих шаров в несколько раз больше, чем для непроводящих. Экспериментальные кривые удовлетворительно описываются зависимостью вида

$$\frac{C_D - C_{D,\sigma_*=0}}{C_{D_0}} = k(\sigma_*)\mathrm{N},$$

где C_{D_0} — коэффициент сопротивления непроводящего шара, σ_* — отношение проводимости тела к проводимости жидкости.

Вид функции $k(\sigma^*)$ пока указать нельзя, так как известны лишь две точки: для меди $k(56{,}5) = 2{,}3$, а для бронзы $k(5{,}34) = 1{,}3$.

Металл	Относительная проводимость (по отношению к ртути)
Медь	56,5
Латунь	11,9
Бронза	5,34
Ртуть	1,0
Висмут	0,81

Более подробные экспериментальные данные имеются об обтекании ртутью в поперечном поле проводящих цилиндров. Исследован ряд цилиндров в диапазоне $10^2 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 5{,}2 \cdot 10^3$ и $0 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 1{,}1$, материал и проводимость которых указаны в следующей таблице.

При определенной относительной глубине погружения $l = 14{,}5$ относительный избыточный по сравнению с изолированным телом

коэффициент сопротивления (рис. 9.11) выражается зависимостью, совершенно аналогичной зависимости для шара:

$$\frac{C_D - C_{D,\sigma_*=0}}{C_{D_0}} = k(\sigma_*)\,\mathrm{N}.$$

Вид функции $k(\sigma_*)$ по данным описываемых экспериментов показан на рис. 9.12.

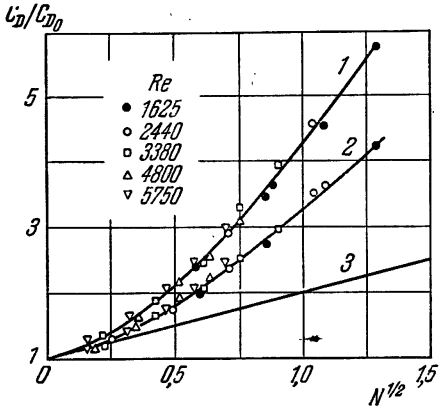


Рис. 9.10. Влияние проводимости шара на относительное увеличение коэффициента сопротивления.
1 — медный шар, *2* — бронзовый, *3* — непроводящий.

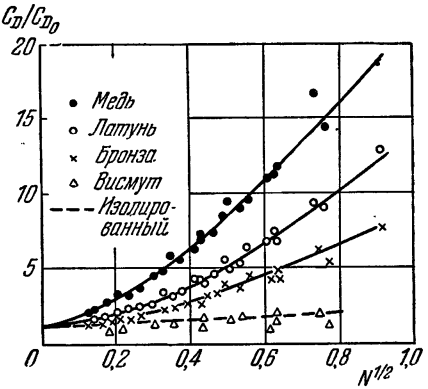


Рис. 9.11. Влияние проводимости круглого цилиндра на относительное увеличение коэффициента сопротивления $l=14{,}5$.

С другой стороны, анализ результатов, полученных с цилиндрами при одинаковом $\sigma_*=56{,}5$, но разных l (рис. 9.13), приводит к выводу, что при этом

$$\frac{C_D - C_{D,\sigma_*=0}}{C_{D_0}} = f(l)\,\mathrm{N},$$

причем $f(l)$ — та же функция, что в формуле (9.2) для изолированных цилиндров.

Таким образом, окончательно имеем для проводящих цилиндров

$$\frac{C_D - C_{D,\sigma_*=0}}{C_{D_0}} = f(l)\,k(\sigma_*)\,\mathrm{N}.$$

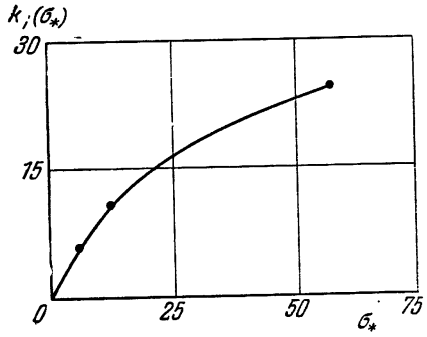


Рис. 9.12. Вид функции $k(\sigma_*)$.

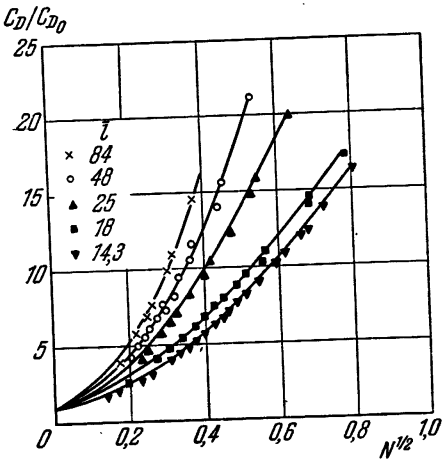


Рис. 9.13. Влияние относительной длины на сопротивление проводящего цилиндра $\sigma_*=56{,}6$.

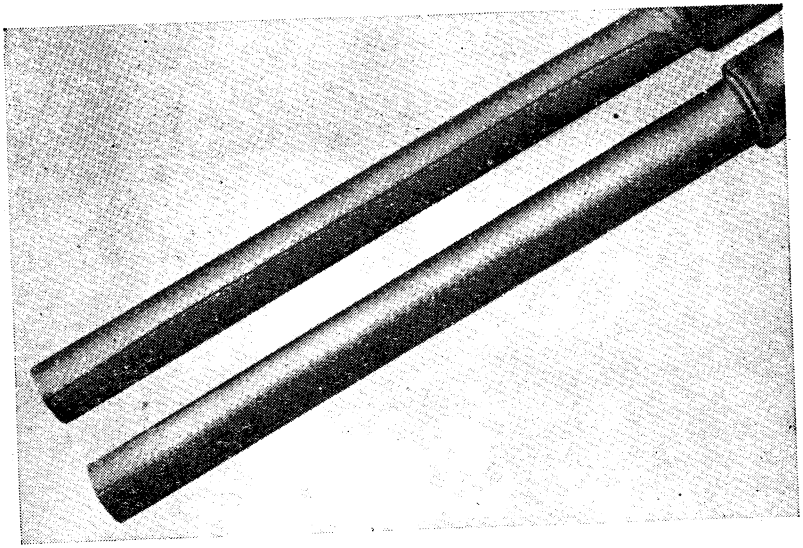


Рис. 9.14. След линии отрыва на поверхности оловянного цилиндра (сверху) после трехминутного пребывания в потоке ртути.

Ввиду малочисленности экспериментальных данных ко всем этим выводам нужно подходить с осторожностью и рассматривать их как первое приближение к действительности.

Эксперименты с проводящими цилиндрами, изготовленными из металлов, быстро растворяющихся в ртути, — олова и висмута, — позволили изучить еще один аспект влияния поперечного поля на обтекание тел плохо обтекаемой формы — влияние на отрыв пограничного слоя [12]. После пребывания растворимого цилиндра в потоке на поверхности цилиндра отчетливо видно положение линии отрыва, ибо в области отрыва процессы массопереноса интенсивнее и растворение происходит быстрее (рис. 9.14). Результаты этих экспериментов, проводившихся при $1{,}1 \cdot 10^3 \leqslant \mathbf{Re} \leqslant 5{,}2 \cdot 10^3$ и $0 \leqslant \mathbf{N} \leqslant 1{,}8$, сводятся к следующему. Угол, определяющий положение линии отрыва, увеличивается с увеличением напряженности магнитного поля и достигает в конце концов 180°, т. е. течение становится безотрывным. Увеличение угла зависит от проводимости тела и происходит быстрее при большей проводимости. Относительный угол отрыва φ/φ_0, где φ_0 относится к течению вне поля, оказывается независимым от $\mathbf{Re}$ и определяется числом Стюарта (рис. 9.15).

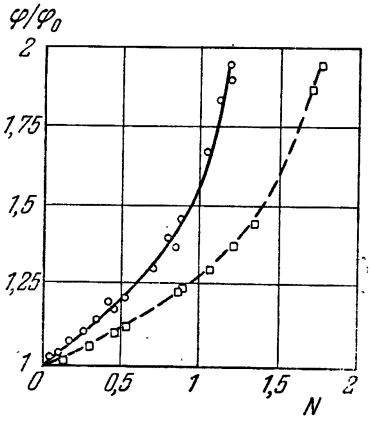


Рис. 9.15. Зависимость положения точки отрыва потока на круглом цилиндре от числа Стюарта.

Самые верхние экспериментальные точки на этом рисунке соответствуют безотрывному обтеканию ($\varphi = 180°$). Если назвать соответствующее значение числа Стюарта критическим $\mathbf{N}_{кр}$, то для оловянных цилиндров $\mathbf{N}_{кр} = 1{,}13$, а для цилиндров из висмута, проводимость которого приблизительно в 10 раз меньше, $\mathbf{N}_{кр} = 1{,}76$. Надо полагать, что для непроводящего тела $\mathbf{N}_{кр}$ еще больше. Напомним для сравнения, что в упоминавшемся выше численном расчете, проведенном при $\mathbf{Re} = 40$, получилось $\mathbf{N}_{кр} \approx 0{,}5$.

Для того чтобы теоретически оценить величину критического числа Стюарта, рассмотрим уравнения стационарного пограничного слоя в безындукционном приближении

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathbf{N}(1-u), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.3)$$

в непосредственной близости от точки отрыва [12, 21].

Мы здесь предполагаем, что магнитное поле всюду ортогонально к поверхности тела и в пределах пограничного слоя постоянно. Поскольку в точке отрыва, помимо $u=v=0$, также и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, из (9.3) для производной $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial p}{\partial x}-\mathrm{N}.$$

Дифференцируя далее первое уравнение (9.3) по y и находя $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ и т. д., можно представить профиль скоростей в сечении отрыва в виде ряда Тейлора

$$u(y)=\left\{\frac{\partial p}{\partial x}-\mathrm{N}\right\}y^2\left\{1+\frac{1}{12}\mathrm{N}\,y^2+\frac{1}{360}\mathrm{N}^2\,y^4+\cdots\right\}.$$

На границе пограничного слоя $y=\delta(x)$, $u\approx 1$ имеем

$$\delta^2\left(1+\frac{1}{12}\mathrm{N}\delta^2+\frac{1}{360}\mathrm{N}^2\,\delta^4+\cdots\right)=\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial x}-\mathrm{N}}. \qquad (9.4)$$

При $\mathrm{Re}_m\ll 1$ толщина пограничного слоя имеет порядок $\delta\sim \mathrm{Re}^{1/2}$ [25]. Для произвольного сечения x толщина $\delta=\mathrm{const}\cdot x^{1/2}$, и (9.4) можно переписать в виде

$$x+\frac{1}{12}\mathrm{N}\,x^2+\frac{1}{360}\mathrm{N}\,x^4+\ldots=\frac{\mathrm{const}}{\frac{\partial p}{\partial x}-\mathrm{N}}\cdots \qquad (9.5)$$

Из этого уравнения следует, что с возрастанием N величина x должна возрастать. При $\mathrm{N}=\frac{\partial p}{\partial x}$ правая часть уравнения (9.5) обращается в бесконечность, что по существу соответствует смещению точки отрыва в заднюю критическую точку. При еще больших значениях N правая часть (9.5) становится отрицательной. Это означает, что при этих значениях N пограничный слой не будет отрываться от тела. Таким образом, начиная с $\mathrm{N}=\frac{\partial p}{\partial x}$, обтекание должно быть безотрывным. Оценим по порядку величины это значение числа Стюарта. Так как

$$\frac{\partial p}{\partial x}\sim 1, \quad \text{то} \quad \mathrm{N}_{\text{кр}}\sim 1,$$

что находится в хорошем соответствии с результатами эксперимента. Более обстоятельный теоретический анализ рассмотренного здесь явления отрыва содержится в работах [22—24]. Основной результат этих работ состоит в том, что при $N \geqslant 2$ отрывное течение невозможно.

§ 4. Течение в следе за телом

Исходя из общих представлений о влиянии магнитного поля на течение электропроводящей жидкости можно предположить, что при наложении магнитного поля устойчивость течения в следе за телом повышается. Имеющиеся экспериментальные данные подтверждают это предположение.

Рядом исследователей [7, 9, 15, 26, 27] получены фотографии поверхности ртути за обтекаемым круглым цилиндром или пластиной, установленной перпендикулярно к набегающему потоку. На рис. 9.16 мы воспроизводим фотографии, заимствованные из работы [26].

Из рассмотрения этих фотографий можно заключить, что с возрастанием напряженности поперечного магнитного поля сначала подавляется вихревая дорожка, а затем и колебания в следе, так что за цилиндром остаются лишь два присоединенных стационарных вихря.

В работе [28] приводятся данные о колебаниях зонда в виде пластинки, помещенной в след за телом. Эти данные свидетельствуют о том, что амплитуда колебаний по мере увеличения напряженности поперечного магнитного поля последовательно уменьшается до нуля. Частота же колебаний практически не зависит от магнитного поля.

В недавнее время получены также сравнительно подробные экспериментальные сведения о распределении осредненных по времени скоростей течения в следе за круглым цилиндром при наличии поперечного магнитного поля [29]. Измерения производились при помощи трубки Пито—Прандтля. Цилиндр диаметром 0,8 *см* и высотой 7 *см* находился в потоке ртути в канале шириной 4,6 *см*. Экспериментальные профили скорости впереди цилиндра и в нескольких сечениях за ним при различных числах Гартмана воспроизведены на рис. 9.17. Анализ этих результатов показывает, что профиль дефекта скорости в следе является афинным как по длине потока, так и при различных значениях числа Гартмана, и может быть представлен в следующем виде (рис. 9.18):

$$u'/u'_m = \exp\left(-\ln 2 \frac{y^2}{y_{1/2}{}^2}\right),$$

где $u'=\frac{u_0-u}{U_\infty}$ — безразмерный дефект скорости, U_∞ — скорость невозмущенного потока, u — локальная скорость, u'_m — дефект

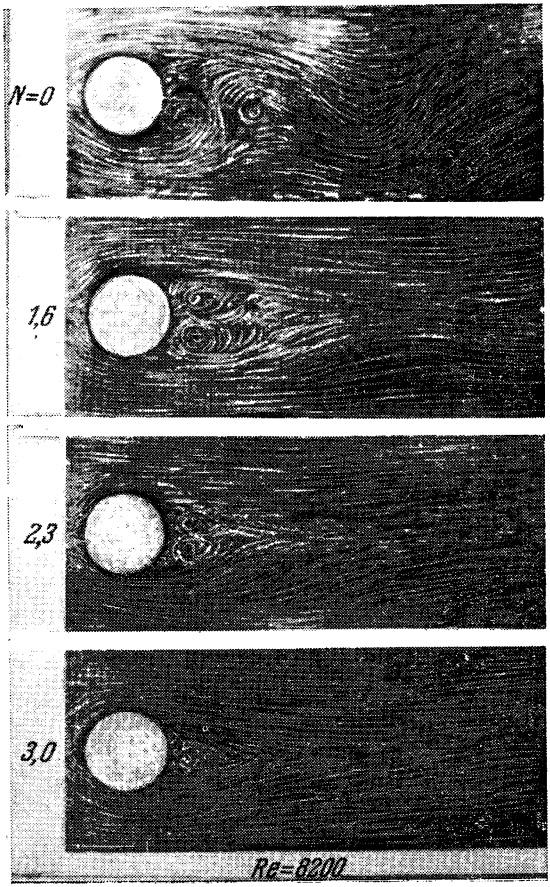


Рис. 9.16. Картины линий тока в следе за круглым цилиндром **Re**=8200.

скорости на оси следа, $y_1/_2$ — значение координаты y, при котором $u'=\frac{1}{2}u'_m$.

Как показывается в работе [23], для дефекта скорости на оси следа u'_m можно, учитывая экспериментальные данные о

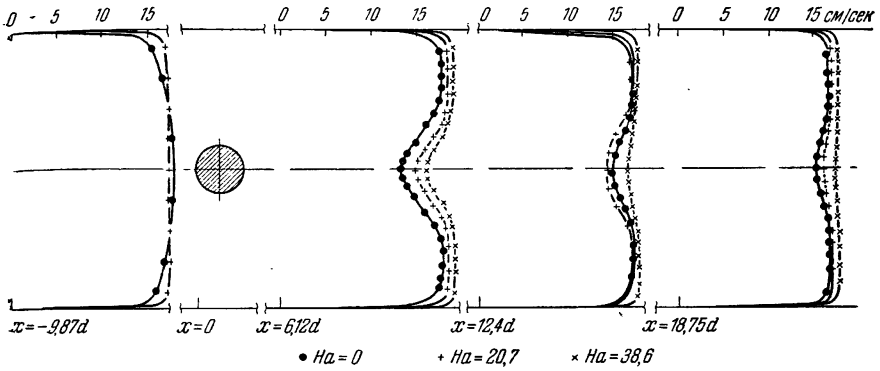


Рис. 9.17. Профили скорости перед и за круглым цилиндром.

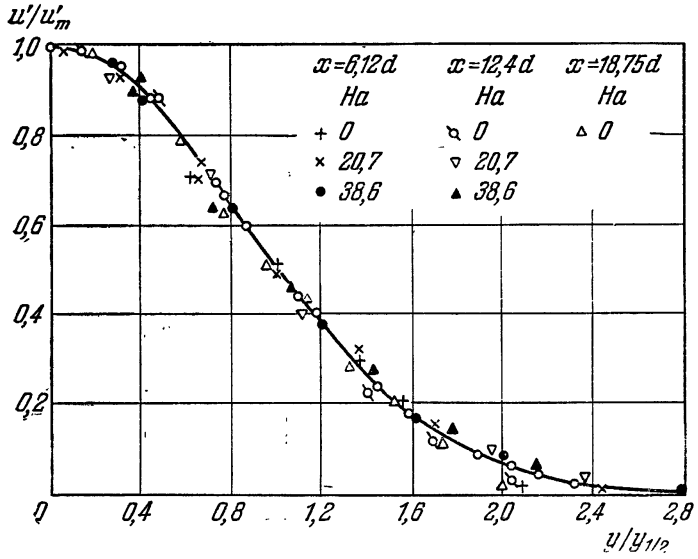


Рис. 9.18. Относительный профиль дефекта скорости в следе за круглым цилиндром.

сопротивлении цилиндра, получить следующее выражение:

$$u'_m/u'_{m0} = (1+3{,}4\,N^{1/2})\,e^{-Nx},$$

где u'_{m0} — значение u'_m при отсутствии магнитного поля.

Интересно, что скорости в следе начинают выравниваться при наложении магнитного поля усиливающейся напряженности не сразу. Первоначально, при слабых магнитных полях, дефект скорости даже увеличивается по сравнению с тем, что имеет место без магнитного поля. Это легко объяснить противоборством двух эффектов — увеличением сопротивления тела, обусловлива-

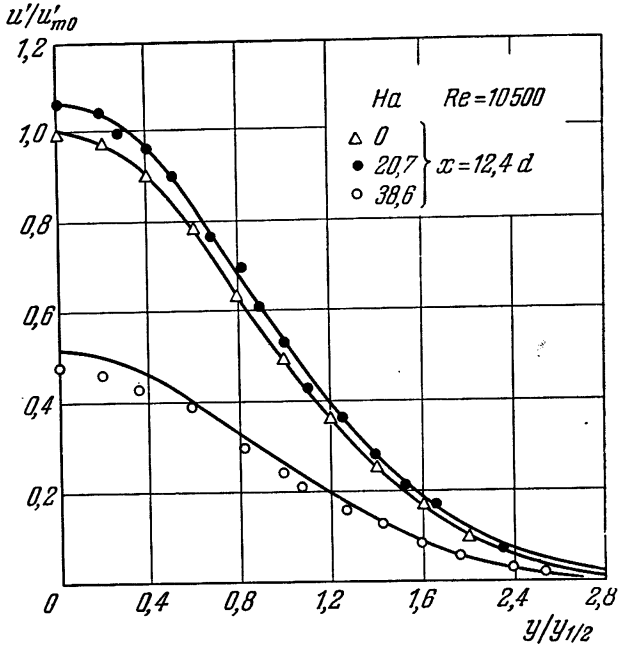


Рис. 9.19. Профили дефекта скорости в следе за круглым цилиндром, отнесенные к максимальному дефекту при отсутствии магнитного поля.

ющим увеличение дефекта скорости, и непосредственным воздействием электромагнитных сил, стремящихся выравнять скорости течения в следе.

Иллюстрацией только что описанного поведения профилей скорости в следе является рис. 9.19, на котором по вертикальной оси отложены отношения локального дефекта скорости к максимальному дефекту в отсутствие поля в сечении, удаленном на 12 диаметров от цилиндра.

§ 5. Обтекание чувствительных элементов измерительных устройств

Как было показано выше, основные эффекты, обусловленные влиянием поля на обтекание тел, в самых общих чертах сводятся к следующему:

1. Изменяется распределение давления по поверхности тела, причем в передней критической точке давление существенно повышается.

2. Увеличивается коэффициент сопротивления, причем это обусловлено как изменением распределения давления, так и увеличением градиентов скорости вблизи поверхности тела.

3. Точка отрыва пограничного слоя сдвигается вниз по течению и обтекание в конечном счете становится безотрывным.

4. Повышается устойчивость течения в следе за телом.

Все эти эффекты необходимо учитывать при разработке и использовании измерительных устройств с чувствительными элементами, помещенными в поток.

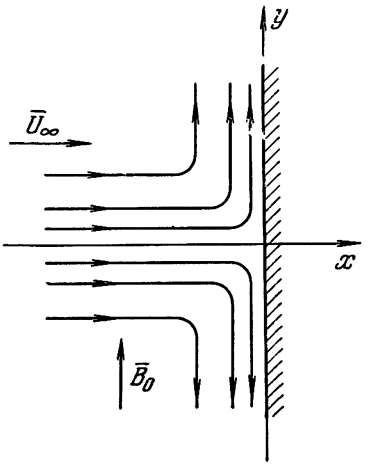


Рис. 9.20. Схема течения в передней критической точке.

Ясно, например, что при использовании термопар или нитей термоанемометров необходимо в числе прочего учитывать, что по мере увеличения напряженности поля условия теплоотдачи с поверхности будут изменяться как за счет изменения градиентов скоростей, так и за счет подавления вихрей в области отрыва. Все эти вопросы применительно к термопарам и датчикам термоанемометров остаются совершенно неизученными.

До настоящего времени исследовалась возможность использования в потоках расплавленных металлов в присутствии поперечного магнитного поля лишь некоторых датчиков скорости, воспринимающих динамическое давление потока. Их мы и рассмотрим несколько подробнее.

Как указывалось выше, с увеличением напряженности магнитного поля давление в передней части тела сильно возрастает и, в частности, коэффициент давления в передней критической точке становится намного больше единицы. Поэтому измеренная трубкой Пито скорость течения будет получаться больше истинной и по мере увеличения магнитного поля погрешность будет

возрастать. Иными словами, будет наблюдаться эффект, аналогичный эффекту Баркер, имеющему место в общей гидродинамике [30, 31].

Рассмотрим течение вблизи передней критической точки при обтекании тела в поперечном магнитном поле [14, 32].

Попытаемся оценить величину давления в этой точке при больших числах Стюарта. Течение для простоты будем считать плоским *).

Поскольку давление поперек вязкого пограничного слоя меняется незначительно, этим изменением можно пренебречь, и при оценке давления в передней критической точке жидкость считать невязкой.

Безразмерные уравнения движения при этом записываются в следующем виде (рис. 9.20):

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mathbf{N}(1-u),\\ u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

с граничными условиями

$$u(0,y)=0,\qquad u(-\infty,y)=1,\qquad v(-\infty,y)=0.$$

На основании этих уравнений произведем оценку давления в передней критической точке при большом значении $\mathbf{N}$. Сила взаимодействия потока с магнитным полем направлена вдоль набегающего потока и пропорциональна возмущению скорости в этом направлении. Поэтому эта сила стремится уменьшить возмущение скорости, вызванное присутствием тела. Следовательно, можно полагать, что при больших $\mathbf{N}$ лишь в узкой зоне около тела скорость будет сильно отличаться от невозмущенной скорости.

Произведем теперь оценку членов в системе уравнений (9.6). Введем масштабы величин, входящих в эти уравнения. Масштаб длины вдоль y имеет порядок единицы (это есть масштаб тела). Масштаб длины вдоль x обозначим через Δ. При больших $\mathbf{N}$ из вышеприведенных рассуждений вытекает оценка $\Delta\ll 1$. Если принять, что по порядку величины $u\sim 1$, то для v из уравнения неразрывности получим $v\sim\frac{1}{\Delta}$. Из первого уравнения системы (9.6) имеем $\frac{\partial p}{\partial y}\sim\Delta^{-2}$; тогда $\frac{\partial p}{\partial x}\sim\Delta^{-3}$. Из второго уравнения

*) Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для пространственного случая [33].

этой системы при этом вытекает, что $\Delta^{-3} \sim \mathbf{N}$ и, таким образом,

$$\Delta \sim \mathbf{N}^{-1/3}.$$

Оценим теперь величину давления в передней критической точке. Для этого проинтегрируем первое уравнение системы (9.6) вдоль линии тока $y=0$, считая, что $p_\infty = 0$:

$$p = \frac{1}{2} + \mathbf{N} \int_{-\infty}^{0} (1-u)\,dx.$$

Для интеграла в правой части имеем оценку

$$\int_{-\infty}^{0} (1-u)\,dx \sim \Delta \sim \mathbf{N}^{-3}.$$

Таким образом, при больших $\mathbf{N}$ в передней критической точке давление возрастает пропорционально числу Стюарта в степени 2/3:

$$p \sim \mathbf{N}^{2/3}.$$

Этот результат качественно согласуется с экспериментальными данными, полученными при обтекании цилиндра и количественно

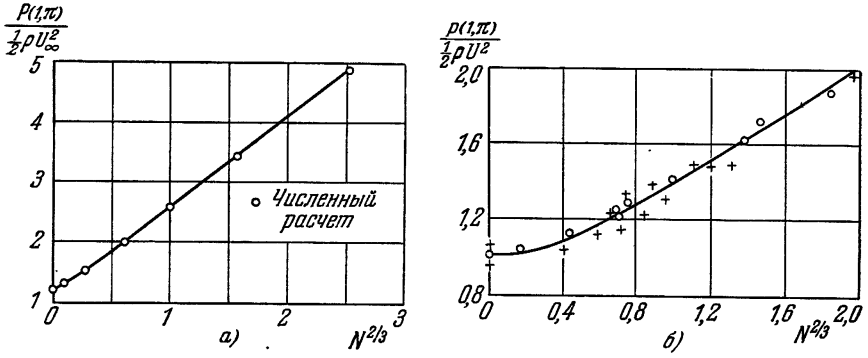


Рис. 9.21. Зависимость давления в передней критической точке от числа Стюарта.

совпадает с результатами численного расчета по точным уравнениям при $\mathbf{Re}=40$, как это видно из рис. 9.21, *а*. Конечно, при обтекании реального насадка трубки Пито течение является пространственным, и потому возрастание давления в передней критической точке должно быть не столь значительным.

Это подтверждается измерениями, результаты которых показаны на рис. 9.21, *б* [17].

Для проверки всех этих соображений была предпринята экспериментальная тарировка трубок Пито по числу Стюарта в поперечном магнитном поле [33]. Экспериментами была охвачена область $6 \cdot 10^2 \leqslant \mathbf{Re} \leqslant 10^4$; $0 \leqslant \mathbf{N} \leqslant 0{,}5$. В результате этих опытов выяснилось, что для трубки Пито повышение давления в передней критической точке под влиянием магнитного поля действительно существенно меньше, чем для цилиндра. На рис. 9.22 показана зависимость коэффициентов k трубок Пито—Прандтля *) от числа Стюарта, вычисленного по диаметру насадка. Видно, что до $\mathbf{N}=0{,}15$ коэффициент k мало отличается от единицы, а затем убывает. Тем самым можно заключить, что трубки Пито и Прандтля применимы в магнитогидродинамических экспериментах

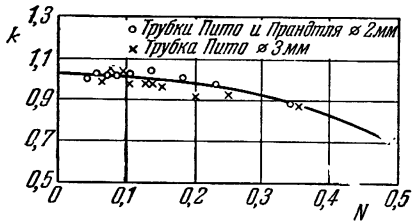


Рис. 9.22. Зависимость коэффициента трубки Пито и Прандтля от числа Стюарта.

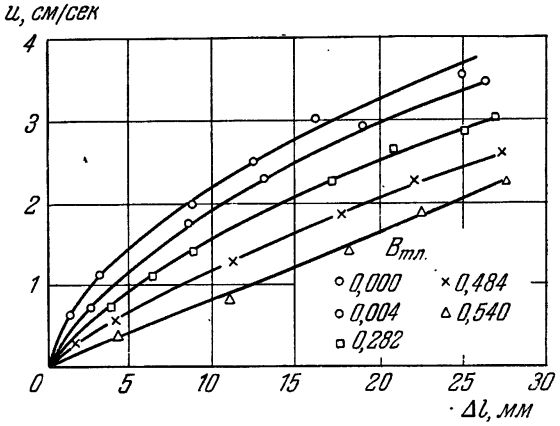


Рис. 9.23. Пример тарировочной кривой динамического датчика.

без тарировки по магнитному полю до $\mathbf{N} \leqslant 0{,}15$. В противном случае подобная тарировка необходима.

$$k = \frac{U_\infty}{(2\Delta p/\rho)^{1/2}}$$

*) Как известно, коэффициент трубки Пито и Прандтля определяется формулой

Другим прибором, который уже нашел применение в магнитогидродинамическом эксперименте с расплавленным металлом, является зонд в виде шарика или хорошо обтекаемой капли, воспринимающей динамическое давление, которое далее измеряется тензометрическим способом [34]. Естественно, что эти устройства должны предварительно градуироваться по скорости течения потока и по магнитному полю (рис. 9.23). Интересно отметить, что при достаточно сильном поле зависимость сигнала (отклонения луча на экране осциллографа) от скорости становится линейной.

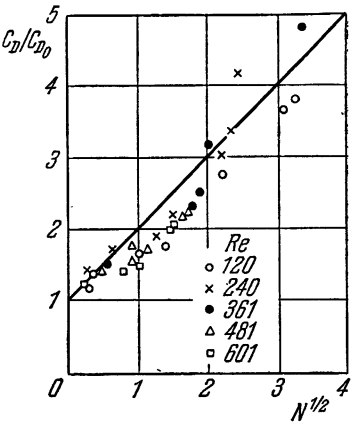


Рис. 9. 24. Зависимость относительного коэффициента сопротивления динамического датчика от числа Стюарта.
Сплошная линия соответствует зависимости (9.1′).

Основываясь на зависимости (9.1′) можно, вообще говоря, градуировку по напряженности поля получить расчетным путем, имея экспериментальную зависимость сигнала от скорости $\Delta l = F(u)$ при $\mathrm{Ha} \approx 0$. Пересчет результатов экспериментальной градуировки, показанной на рис. 9.23, подтверждает, что эти результаты удовлетворительно согласуются с зависимостью (9.1′). Это сопоставление показано на рис. 9.24.

Отметим еще, что в силу хорошо известного явления периодического отрыва вихрей от обтекаемого тела, зонд, воспринимающий динамическое давление потока и закрепленный на гибкой державке, при определенных условиях начинает совершать автоколебания, которые весьма затрудняют использование этого прибора [35].

ЛИТЕРАТУРА

1. Liepman H. W., Hoult D. P., Ahlstrom H. G., Concept, constructions and preliminary use of a facility for experimental studies in magnetofluid dynamics, Miszellanneen Angew. Mech. Berlin, Akad.-Verl., № 175 (1962).
2. Maxworthy T., Measurements of drag and wake structure in magnetofluid dynamic flow about a sphere, Proc. Heat. Transf. Fluid Mech. Inst., Seattle, Wash., June 13—15, Stanford, Calif., Stanford Univ. Press, p. 197 (1962).
3. Ahlstrom H. G., Experiments on the upstream wake in magnetofluid dynamics, J. Fluid Mech. **15**, № 2, 205 (1963).
4. Yonas G., Measurements of drag in a conducting fluid with an aligned field and large interaction parameter, J. Fluid Mech. **30**, № 4, 813 (1967).

5. Chester W., The effect of a magnetic field on the flow of a conducting fluid past a body of revolution, J. of Fluid Mech. **10**, № 3, 459 (1961).
6. Crausse E., Poirier Y., Actions dynamiques sur un obstacle d'un liquide conducteur en movement en presence d'un champ magnetique, C. r. Acad. Sci. **250**, № 14, 2533 (1960).
7. Poirier Y., Contribution a l'etude experimentale de la magnetodynamique des liquides, Publs. Scient. Univ. Alger **B6**, 1—2, 1 (1960).
8. Poirier Y., Magnetodynamique des liquides, Mach.-Outil franc. **26**, № 165, 85 (1961).
9. Лиелаусис О. А., Цинобер А. Б., О влиянии магнитного поля на сопротивление при обтекании тел ртутью. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», Рига, 1962, стр. 785.
10. Цинобер А. Б., Щербинин Э. В., О влиянии магнитного поля на сопротивление при обтекании тел потоком электропроводящей жидкости, Изв. АН ЛССР, № 11, 45 (1962).
11. Лиелаусис О. А., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., О влиянии поперечного магнитного поля на характер обтекания тел жидким металлом, Изв. АН ЛССР, № 5, 73 (1963).
12. Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В., Об отрыве магнитогидродинамического пограничного слоя, Изв. АН ЛССР, № 12, 49 (1963).
13. Цинобер А. Б., Магнитогидродинамическое обтекание тел, «Зинатне», Рига, 1970.
14. Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В., Обтекание тел проводящей жидкостью в магнитном поле, Изв. АН ЛССР, сер. физ. и техн. наук, № 4, 32 (1963).
15. Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В., О течении в следе за цилиндром в поперечном магнитном поле. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики», № 4, 1964, стр. 129.
16. Калис Х. Э., Слюсарев Н. М., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Сопротивление плохообтекаемых тел при больших числах Стюарта, Магнитная гидродинамика, № 3, 152 (1966).
17. Колесников Ю. М., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В., О распределении давления при МГД-обтекании сферы, Магнитная гидродинамика, № 1, 147 (1967).
18. Цинобер А. Б., К вопросу о применимости приближения Стокса в магнитной гидродинамике, Тезисы VI Рижского совещания по магнитной гидродинамике, Рига, 1968, стр. 78.
19. Handbuch der Experimental-Physik, Bd. 4, Teil 2, Leipzig, Akad. Verlag (1932).
20. Reitz J. R., Foldy L. L., The Force on a sphere moving through a conducting fluid in the presence of a magnetic field. J. Fluid Mech. **11**, № 1, 133 (1961).
21. Ватажин А. Б., Об отрыве магнитогидродинамического пограничного слоя, ПММ **27**, № 2, 338 (1963).
22. Moreau R., L'effet d'un champ magnetique transversal sur le decolement, C. r. Acad. Sci. **258**, № 6, 1732 (1964).
23. Fuchs W., Fisher E., Uhlenbusch J., Laminare Grenzischichten an cylindrischen Körpern in der Magnetohydrodynamik, Zs. fur Flugwiss. **12**, № 11, 389 (1964).
24. Leibovich S., Magnetohydrodynamic flow at a rear Stagnation point, J. of Fluid Mech. **29**, № 2, 401 (1967).
25. Любимов Г. А., К постановке задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое, ПММ **26**, № 5, 811 (1962).

26. Калис Х. Э., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В., Обтекание круглого цилиндра электропроводящей жидкостью в поперечном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 1, 18 (1965).
27. Heiser W. H., Influence of magnetic fields upon separation AIAA 2, № 12, 2543 (1964).
28. Causse R., Crausse E., Amortissement d'un Sillage d' obstacle et liquide electroconducteur Somis a un champ magnetique transversal, C. r. Acad. Sci. **A264**, № 21, 910 (1967).
29. Колесников Ю. Б., Цинобер А. Б., Щербинин Э. В., Экспериментальное исследование магнитогидродинамического следа за круглым цилиндром, Магнитная гидродинамика, № 2, 45 (1963).
30. Homann F., Einfluss groser Zähigkeit bei Stromung um Zylinder. Forsch. auf dem Geb. Ing. Wes. 7, № 1 (1936).
31. McMillan F. A., Viscous effects on Pitot tubes at low speeds, J. Roy. Aeronaut. Soc. 58, № 524, 570—572 (1954).
32. Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Автомодельная задача магнитогидродинамического течения вблизи критической точки, Изв. АН ЛССР, сер. физ. и техн. наук, № 1, 15 (1964).
33. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Цинобер А. Б., Штерн А. Г., Щербинин Э. В., О применимости трубок Пито и Прандтля в магнитогидродинамическом эксперименте, Магнитная гидродинамика, № 1, 98 (1966).
34. Брановер Г. Г., Слюсарев Н. М., Цинобер А. Б., К вопросу о сопротивлении при магнитогидродинамическом обтекании шара, Магнитная гидродинамика, № 3, 149 (1966).
35. Дидковский М. М., Егидис Б. Н., Поздняк Н. П., Датчик для одновременного измерения двух составляющих мгновенной скорости, В сб. «Новые методы и приборы для гидравлических исследований», Изд. АН СССР, Москва, 1961, стр. 75.

ГЛАВА X

СТРУИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 1. Некоторые общие замечания о ламинарных и турбулентных струях в магнитном поле

Наиболее интересная с прикладной точки зрения задача о затопленной струе в ограниченном пространстве пока не может быть решена теоретически. Задачи о ламинарных затопленных струях в безграничном пространстве довольно интенсивно исследуются на основе уравнений пограничного слоя. Здесь удается получить ряд автомодельных решений, а также решения, в которых жидкость предполагается невязкой [1—15]. Эти решения показывают, что в присутствии поперечного магнитного поля струя размывается значительно быстрее, чем без поля. Более того, в ряде случаев получается, что ширина струи неограниченно увеличивается при приближении к некоторому сечению, расположенному на конечном расстоянии от источника струи. Дальше этого сечения течения нет. Такой результат для вязкой жидкости противоестествен. Получается же он из-за того, что при быстром расширении струи поперечная компонента скорости становится столь большой, что предположения, лежащие в основе вывода уравнений пограничного слоя, теряют справедливость [13, 15].

Более быстрый размыв струи в присутствии поперечного магнитного поля подтверждается и численными расчетами по полным уравнениям Навье—Стокса, выполненными для течения в плоской трубе за внезапным расширением [16]. По мере увеличения напряженности магнитного поля отрывная зона уменьшается. Аналогичные результаты получены при численном расчете течения в постепенно расширяющейся трубе прямоугольного сечения [17].

В магнитогидродинамическом эксперименте практически невозможно реализовать условия, которые соответствовали бы хоть в некоторой мере струе в безграничном пространстве. В качестве отдаленного приближения к этому случаю можно рассматривать опыты Моро [18, 19], в которых изучалось поведение струи, вытекающей из щели в спутный поток, в присутствии поперечного магнитного поля. Наличие спутного потока предотвращало существование вторичных течений в окрестности струи, которые

всегда имеют место при истечении в ограниченное пространство. Моро пришел к выводу о том, что в этих опытах струя вела себя в соответствии с теорией струи в безграничном пространстве. Он предложил также выражение для аффинного профиля скорости.

Наибольший практический интерес представляют, конечно, турбулентные струи в ограниченном пространстве. Этот вопрос сравнительно подробно изучен экспериментально [20—22]. Здесь мы встречаемся, по-видимому, с одним из наиболее сильных

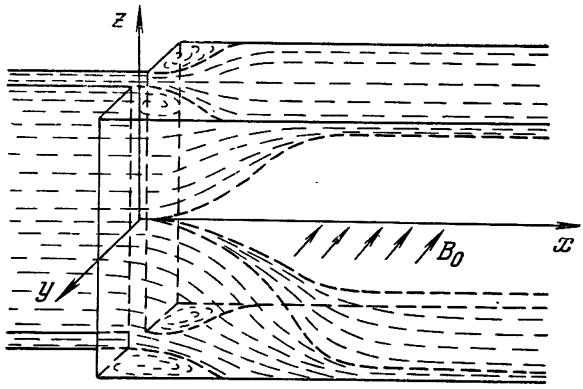


Рис. 10.1. Схема перестроения течения за внезапным расширением прямоугольной трубы под действием поперечного магнитного поля.

магнитогидродинамических эффектов, наблюдавшихся до настоящего времени в условиях лаборатории. Этот эффект состоит в том, что если струя вытекает из узкой плоской щели, перпендикулярной магнитному полю, в прямоугольную трубу, то она разделяется на две струи в плоскости, повернутой на 90° относительно исходной. Эти две струи движутся вдоль тех двух стенок широкой трубы, которые параллельны магнитному полю. Сказанное иллюстрируется пространственным изображением, показанным на рис. 10.1. Этот эффект может быть, по-видимому объяснен двумя главными причинами. Первая связана с подавлением крупномасштабной турбулентности, вторая — с эффектами, подобными тем, что имеют место при ламинарном течении в прямоугольной трубе с хорошо проводящими стенками.

Рассмотрим эти вопросы несколько подробнее. Выше мы уже не раз повторяли и обосновывали утверждение о том, что влияние магнитного поля на турбулентность и осредненные характеристики турбулентного потока тем больше, чем крупнее масштаб

турбулентности. Если при мелкомасштабной турбулентности джоулева диссипация составляет лишь небольшую добавку к вязкой диссипации, то при крупномасштабной турбулентности основная часть турбулентной энергии диссипируется в присутствии сильного магнитного поля в джоулево тепло. Но, как известно [23], граница транзитной турбулентной струи и вихревых зон, образующихся при движении струи в ограниченном пространстве, является мощным генератором макротурбулентности, сносимой осредненным потоком достаточно далеко вниз по течению. Вблизи этой границы кинетическая энергия, заключенная в крупных турбулентных возмущениях, может превосходить кинетическую энергию осредненного течения. Понятно, что эта крупномасштабная турбулентность является также главным фактором в поперечном переносе количества движения и в размыве струи.

Вспомним, что даже при плоскопараллельном течении в трубе, когда $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{гр}}$ и наблюдаются преимущественно турбулентные возмущения крупных масштабов, подавление турбулентности и вызванное этим уменьшение обмена количеством движения поперек потока проявляется столь сильно, что преобладает над увеличением поперечного обмена количеством движения, обусловленного электромагнитными силами. Этим вызвано, в частности, вытягивание профиля скорости в магнитном поле. На границе же струи масштаб турбулентности еще крупнее и, следовательно, эффект подавления турбулентности тем более должен быть преобладающим.

Таким образом, можно ожидать, что по мере увеличения напряженности поля и подавления крупномасштабных турбулентных возмущений струя будет сужаться, а вихревые зоны расширяться. Если при этом средняя скорость поддерживается постоянной, то осредненные электромагнитные тормозящие силы в транзитной струе будут увеличиваться. Одновременно будет увеличиваться и тормозящий электромагнитный момент, обусловленный осредненным вращением жидкости в вихревых областях. Этим самым создается противоречие: с одной стороны, вследствие нарушения турбулентного механизма переноса количества движения струя не расширяется, с другой — нерасширяющаяся струя в поперечном поле столь быстро должна растрачивать свою энергию вследствие джоулевой диссипации, что течение становится вообще невозможным. Чтобы пояснить это, произведем грубую оценку диссипации энергии в струе, предполагая, что она расширяется не быстрее, чем при отсутствии поля. Рассмотрим соотношение между энергией, вносимой струей, $W_0 = \dfrac{\rho Q^3}{8a_1^2}$

(где Q — объемный расход жидкости) и энергией, диссипируемой вязкими и электромагнитными силами на длине L, равной расстоянию от выхода струи из щели до того места, где струя

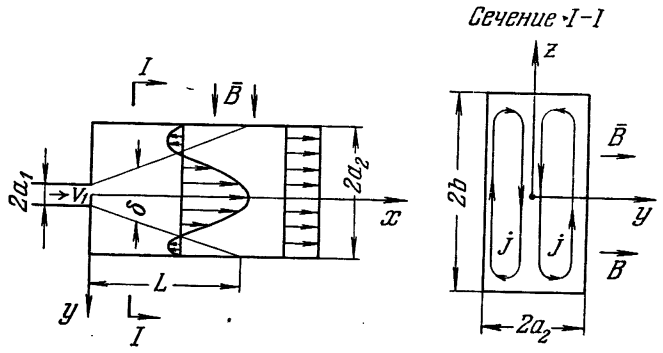


Рис. 10.2. Схема для расчета вязкой и джоулевой диссипации энергии в струе.

касается стенок трубы (рис. 10.2). Основная часть вязкой диссипации равна

$$W_{\text{вязк}}=2\rho\nu\int_0^L\int_0^{a_2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy\,dx,$$

а джоулева диссипация

$$W_{\text{дж}}=2\int_0^L\int_0^{a_2}\frac{j^2}{\sigma}\,du\,dx.$$

Ток $\boldsymbol{j}=\sigma[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B}]$ выразим через среднюю скорость $V_2=\dfrac{Q}{2a_2}$ из условия равенства нулю интеграла токов по сечению, так что $j=\sigma B(u-V_2)$, а для вычисления интегралов воспользуемся полиномиальным представлением профиля скорости

$$u=\frac{3Q}{4a_2\left(1-\dfrac{1}{5}\dfrac{a_2^2}{\delta^2}\right)}\left[1-\frac{\delta^2-a_2^2}{\delta^2a_2^2}y^2+\frac{y^4}{\delta^2a_2^2}\right]$$

где δ — ширина струи.

Этот простейший профиль выбран из условий

$$u(\pm a)=0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0; \quad u(\pm\delta)=0; \quad \int\limits_{-a_2}^{a_2} u\,dy=Q$$

и справедлив при не очень больших отношениях $\frac{a_2}{a_1}<\sqrt{5}$.

Не приводя здесь элементарные, но довольно громоздкие выкладки, укажем лишь окончательные результаты. Для $a_2/a_1=2$ и линейно расширяющейся струи $\left(\delta=a_1+\frac{a_2-a_1}{L}x\right)$ условие существования течения принимает вид

$$\frac{a_2}{L}\mathrm{Re}>8{,}6+0{,}945\,\mathrm{Ha}^2.$$

При $\mathrm{Ha}=0$ это условие всегда соблюдается (за исключением очень малых чисел Re); при Ha, отличном от нуля, джоулева диссипация может привести к тому, что существование течения в том виде, как мы его представили, станет невозможным. Так, при $\mathrm{Re}=10^4$ и $\frac{a_2}{L}\sim 10^{-1}$ уже при $\mathrm{Ha}>32{,}4$ диссипируемая на длине L энергия превышала бы вносимую энергию. В реальных же условиях Ha может достигать значительно больших величин. Таким образом, можно заключить, что турбулентная струя проводящей жидкости в ограниченном пространстве должна становиться в поперечном поле неустойчивой и переходить в какую-то другую форму течения.

Как было сказано выше, эксперименты показали, что струя разделяется на две струи, примыкающие к тем стенкам трубы, которые параллельны магнитному полю. Легко понять, что при этом течение становится близким к плоскому в перпендикулярной магнитному полю плоскости. В таком течении джоулева диссипация энергии весьма мала.

Другое объяснение необычного перестроения струи состоит в следующем. Строение потока при истечении струи в прямоугольную трубу, находящуюся в поперечном магнитном поле, имеет много общего со строением потока в прямоугольной трубе, у которой стенки, перпендикулярные магнитному полю, идеально проводящие. Легко увидеть физическую аналогию между этими двумя случаями течения. Действительно, струя, вытекающая в широкую трубу, окружена толстыми слоями жидкости, текущей в обратном направлении. Эти слои обеспечивают такие же условия для замыкания электрических токов, как и хорошо проводя-

щие твердые стенки. В результате индуцированные в жидкости электрические токи испытывают малое сопротивление, сила тока получается большой. Соответственно и силы электромагнитного торможения получаются большими всюду, за исключением окрестностей стенок, параллельных магнитному полю, где электрические токи текут параллельно магнитным силовым линиям.

Перейдем теперь к более детальному рассмотрению результатов экспериментов.

§ 2. Экспериментальные исследования турбулентных струй, вытекающих в трубу с непроводящими стенками

Как показано в предыдущем параграфе, струи в ограниченном пространстве подвергаются в присутствии поперечного магнитного поля столь сложному перестроению, что пока нет возможности предложить хоть какой-либо грубо схематический способ теоретического описания этого явления. Трудно предложить даже какие-либо эмпирические обобщения результатов экспериментов. Поэтому мы приводим здесь сравнительно подробное описание данных измерений, полагая, что это может дать читателю возможность не только достаточно полно представить себе явление, но в случае надобности основывать на них количественные оценки. На ряде последующих рисунков воспроизводятся экспериментальные профили скорости, как в плоскости магнитного поля, так и в перпендикулярной плоскости (расположение осей координат всюду соответствует рис. 10.2). Данные эти получены с помощью трубок Пито—Прандтля с диаметром насадка около 1,5 *мм*.

Рассмотрим рис. 10.3. На полосе *а* представлены профили скорости в плоскости поля на середине высоты трубы ($z=0$) в ряде сечений, находящихся на различном удалении от щели, при $\mathrm{Re}=2850$. Прежде всего обращает на себя внимание то, что при максимальной индукции поля, соответствующей $\mathrm{Ha}=148$, на расстоянии около 40 характерных размеров щели никакого течения в этой плоскости уже не наблюдается. На больших расстояниях от щели течение исчезает при еще меньших Ha.

На полосе *б*, где показаны аналогичные профили, измеренные вблизи стенки трубы, параллельной полю ($z=45$ *мм*), наблюдается противоположное явление — по мере увеличения Ha максимум скорости увеличивается, а распределение скорости приближается к равномерному. Таким образом, струя в плоскости поля на очень коротком участке трансформируется в две струи в плоскости, перпендикулярной полю. Нужно обратить внимание на то, что в этих преобразованных струях наибольшая скорость течения может превышать максимальную скорость в исходной

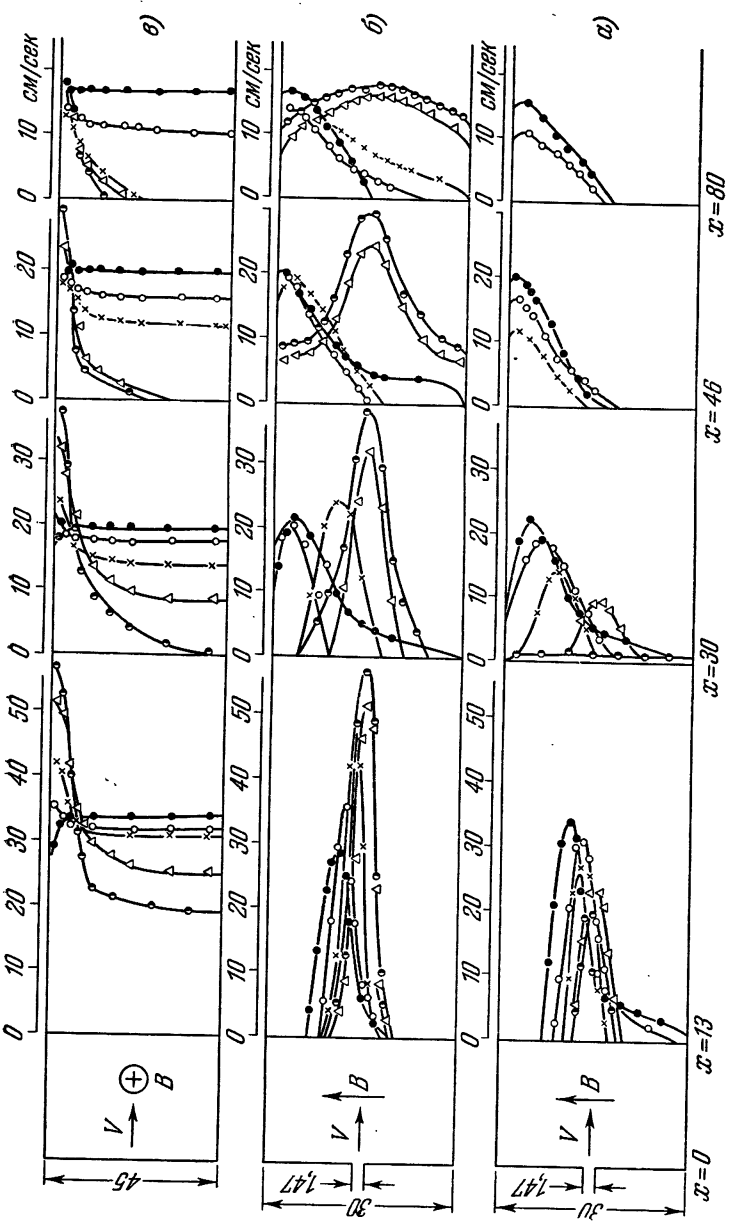


Рис. 10.3. Профили скоростей при **Re** = 2850. Значения **Ha**:
● — 0; ○ — 52,5; × — 82,5; △ — 123; ◑ — 148. Размеры и расстояния указаны в миллиметрах.

струе. Трансформированный вид течения хорошо виден на полосе *в* того же рисунка, где показаны результаты измерения профиля максимальной скорости в плоскости, перпендикулярной полю. Таким образом, вывод, сделанный в предыдущем параграфе о том, что первоначальное строение потока должно при наложении поля становиться неустойчивым, получает убедительное экспериментальное подтверждение.

На рис. 10.4 и 10.5 показаны результаты измерений скорости при бо́льших числах **Re**, равных соответственно 5750 и 9300. Здесь почти все аналогично рис. 10.3. Новым является лишь то, что формирование под влиянием поля основного «двуязычного» течения сопровождается образованием целого ряда более мелких языков в средней части трубы, особенно вблизи выхода струи из щели. Они, однако, по мере продвижения потока довольно быстро сглаживаются. Создается впечатление, что жидкость не сразу «находит» области, движение в которых сопряжено с преодолением наименьшего сопротивления.

Можно еще обратить внимание на то, что ось струи, которая при отсутствии поля искривлена, по мере увеличения **Ha** все более выпрямляется.

Из рис. 10.4 и 10.5 видно, что вновь сформировавшееся течение сохраняется на расстоянии, достигающем почти тысячи размеров щели. По-видимому, под действием вязкости течение в конце концов перейдет в равномерное, однако место этого перехода лежит значительно дальше, чем при отсутствии поля. Во всяком случае в экспериментальной трубе выравнивание еще не успевало происходить.

Такой же характер преобразования струй под действием поля наблюдается и при значительно большей ширине щели (0,8 *см*), что видно из рис. 10.6. Заметим, что вследствие недостаточной длины участка стабилизации течения в щели (около 10 размеров щели) профиль максимальной скорости при отсутствии поля имеет провал вблизи стенок $z=45$ *мм*. Несмотря на это, общий характер влияния магнитного поля на струйное течение достаточно четко выражен и в этом случае.

Более наглядное представление об описанном выше явлении дает рис. 10.7, построенный по данным рис. 10.4.

Во всех опытах насадок измерительной трубки был параллелен оси x. Понятно, что при описанном выше сложном трехмерном течении компоненты скорости в направлении осей y и z могут существенно искажать результаты измерений продольной компоненты. Однако исключение погрешности измерения, обусловленной наличием поперечных компонент скорости, может привести лишь к еще большему усилению описанных эффектов, так как эти компоненты увеличивают показания трубки статического

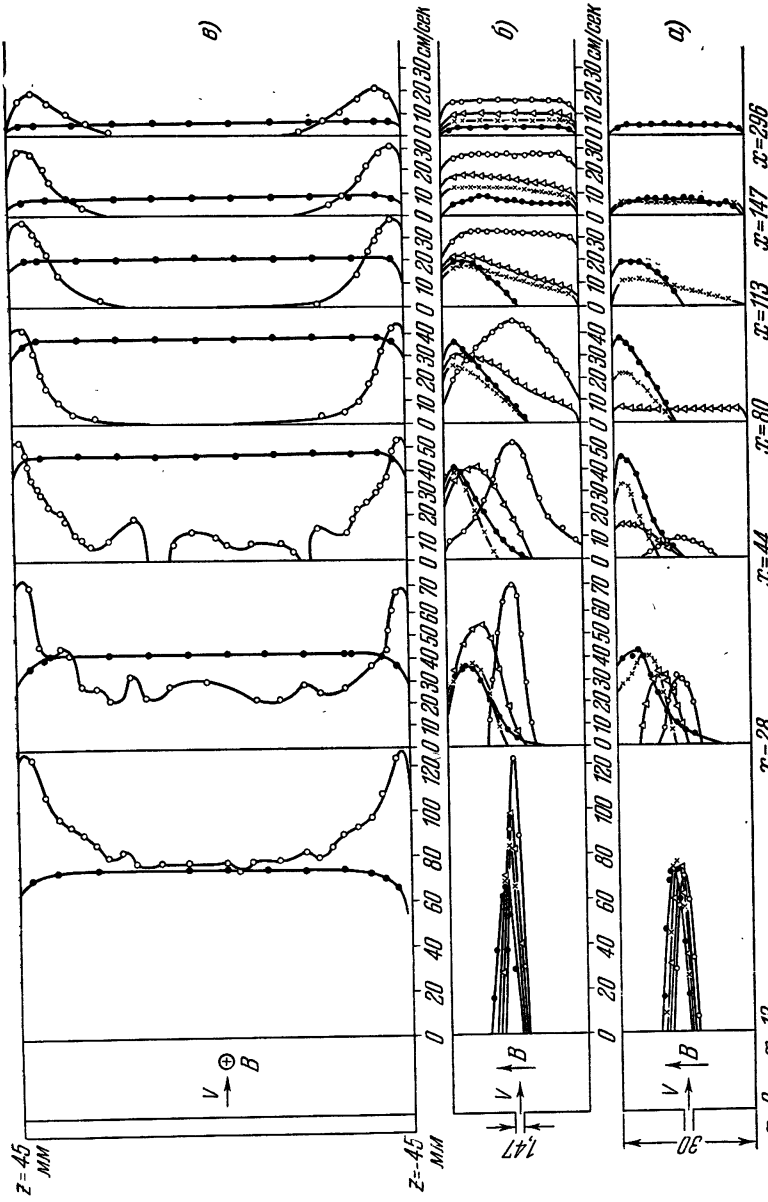


Рис. 10.4. Профили скоростей при Re=5750. Обозначения те же, что на рис. 10.3.

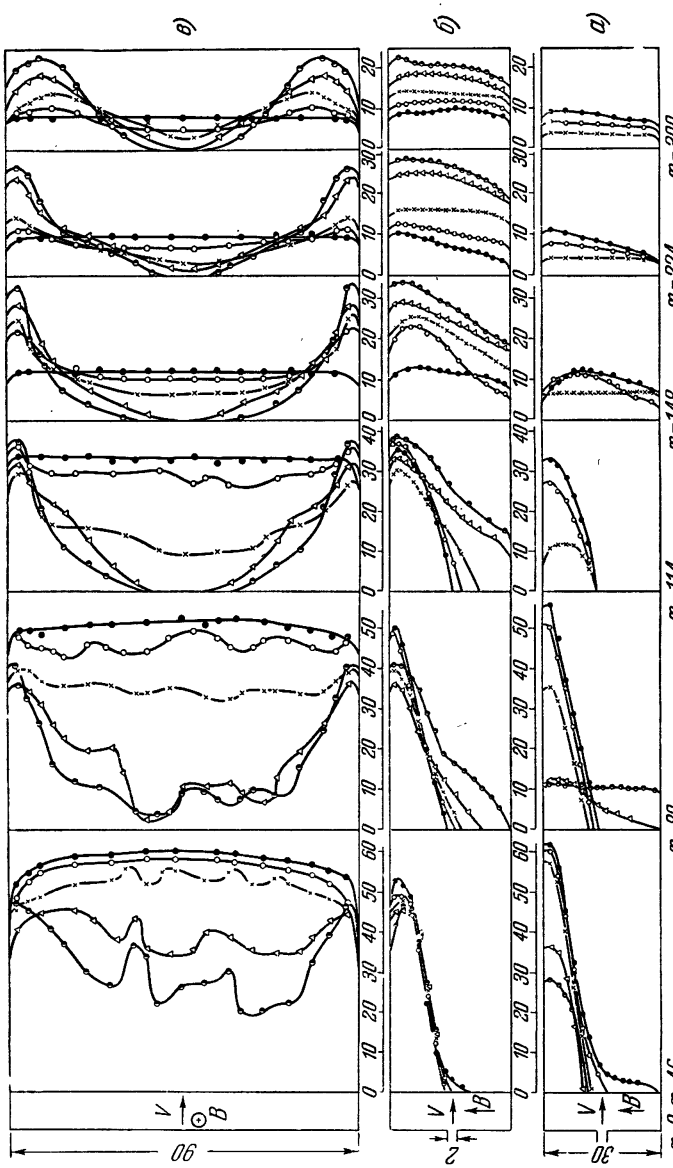


Рис. 10.5. Профили скоростей при **Re**=9300. Обозначения те же, что на рис. 10.3.

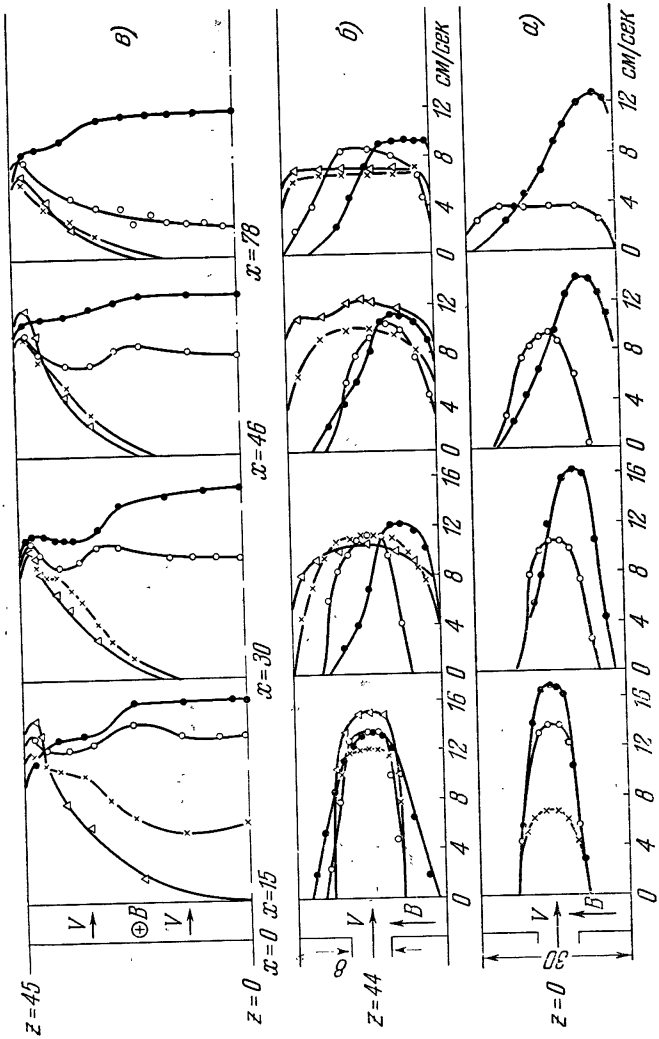


Рис. 10.6. Профили скоростей при **Re**=6600. Значения **Ha**:
● — 0; ○ — 78,6; × — 100; △ — 159.

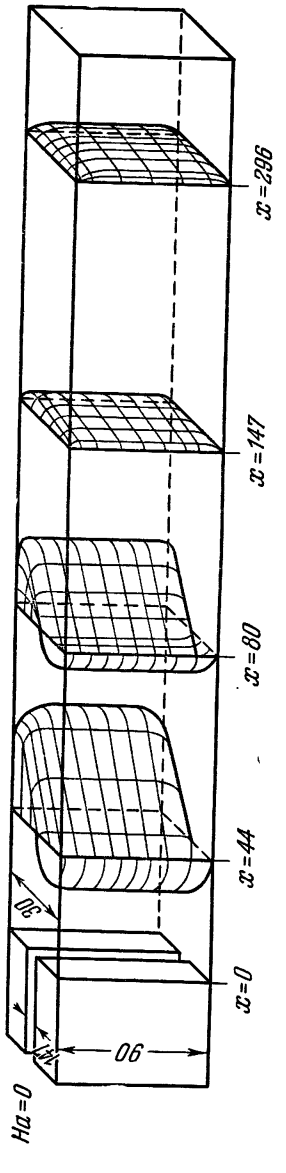


Рис. 10.7. Аксонометрическое изображение профилей скоростей течения при $\mathbf{Re} = 5750$.

давления и, следовательно, измеренная скорость является заниженной. Эти искажения должны убывать по мере удаления от щели, когда перестроение потока завершается.

В заключение укажем, что с точки зрения практики эффект поворота и разделения струи может представить значительный интерес. Действительно, здесь имеется возможность с помощью магнитных полей умеренной напряженности очень эффективно управлять течением. С другой стороны, в результате этого эффекта первоначальная неравномерность распределения скоростей по сечению еще усиливается и сохраняется на очень большой длине потока. Это надо иметь в виду при проектировании проточных частей магнитогидродинамических машин. Если в рабочей зоне машины желательно получить поток с возможно более равномерным распредлением скоростей, то надо принять меры к тому, чтобы поперечные градиенты скорости в ядре потока были малыми до вступления потока в поперечное магнитное поле.

§ 3. Экспериментальные исследования турбулентных струй, вытекающих в трубу с двумя хорошо проводящими стенками, параллельными полю

В случае, когда параллельные магнитному полю стенки широкой трубы представляют собой хорошо проводящие электроды, можно ожидать ослабления рассматриваемых нами эффектов. В этом случае на поверхности электродов имеется нормальная компонента электрического тока, обусловливающая электромагнитное торможение жидкости. Рассмотрим, однако, результаты измерений.

Некоторые из результатов таких измерений показаны на рис. 10.8. Как видно из этого рисунка, конечный результат перестроения оказывается тот же, что и при изолированных стенках, однако процесс перестроения сопровождается появлением множества «языков» большой амплитуды по всей высоте трубы. Нужно подчеркнуть, что здесь показана не мгновенная, а стационарная картина течения. Картина эта является достаточно стабильной — число и амплитуда «языков» в данном сечении и при данных **Re** и **Ha** почти не меняются от эксперимента к эксперименту. Необходимо признать, что возможность существования такого течения в виде гребенки кажется весьма странной. И все же повторявшиеся множество раз эксперименты не оставляют никаких оснований для сомнений в реальности такого течения.

Следовательно, использование проводящих шин не только не исключает существования эффекта, описанного в § 1, но еще

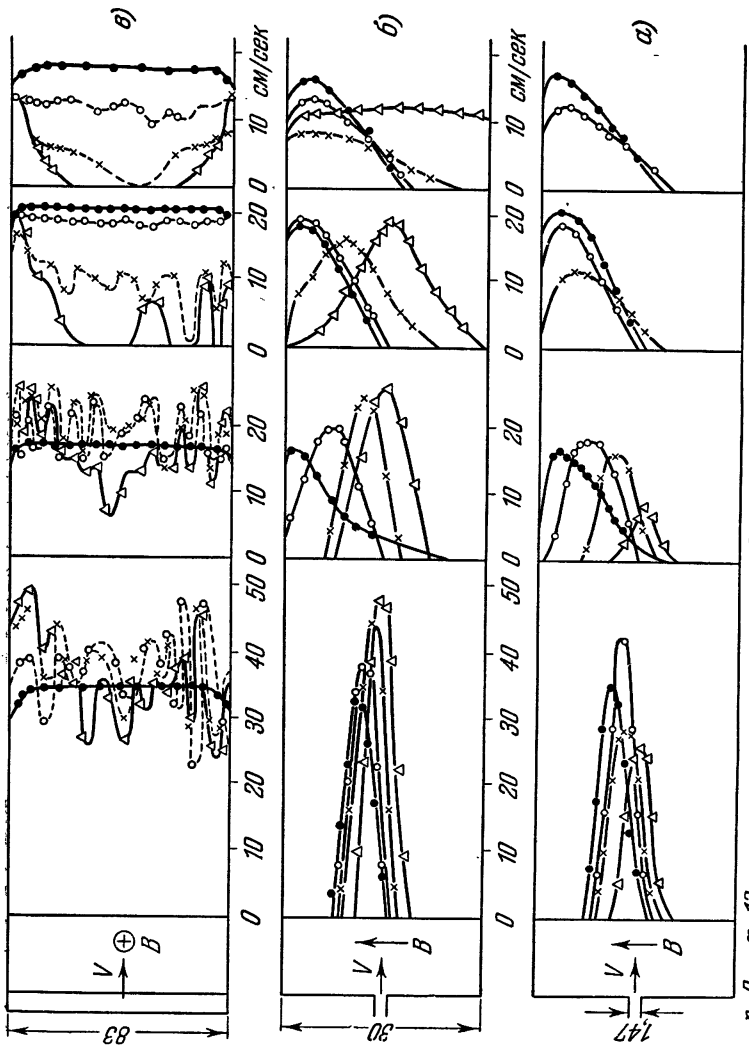


Рис. 10.8. Профили скоростей в трубе с двумя проводящими стенками. Re=2850. Значения Ha:
● — 0; ○ — 52,5; × — 82,5; △ — 123.

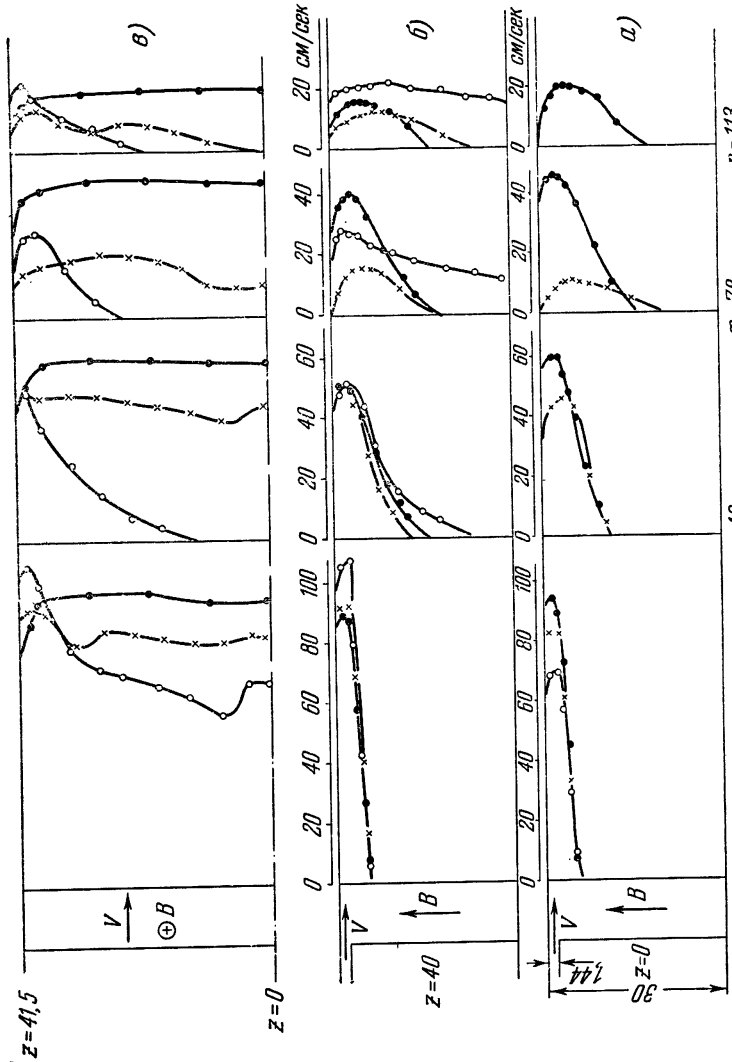


Рис. 10.9. Профили скоростей в пристеночной струе, движущейся в трубе с двумя проводящими стенками. $Re = 5750$. Значения **Ha**:
● — 0; × — 81; ◑ — 159.

приводит к дополнительному усложнению картины течения в переходной области.

Однако наличие проводящих стенок, параллельных магнитному полю, не во всех случаях истечения в ограниченное пространство обусловливает существование профилей скорости в виде «гребенки». Так, в случае пристеночной струи формирование потока происходит значительно более «спокойно», чем в симметричной струе, что видно на рис. 10.9.

Само существование «гребенки» объясняется, по-видимому, локальным замыканием индуцированных электрических токов.

Продолжая аналогию с течением в прямоугольной трубе, рассмотренным Хантом [24], можно заметить, что, согласно решению последнего, профиль скорости имеет периодическую структуру. Описанная здесь форма профиля скорости в виде гребенки напоминает в принципе этот результат Ханта.

§ 4. Распределение давления и коэффициент сопротивления при внезапном расширении потока

Еще сравнительно давно было исследовано влияние поперечного магнитного поля на коэффициент сопротивления участка с внезапным расширением потока [25]. Эти исследования были выполнены в двух прямоугольных трубах с расширением. Отношение площади сечения узкой части к площади широкой части в первой трубе составляло 0,375, во второй 0,200.

В недавнее время эти данные дополнены подробными измерениями распределения давления по длине потока в серии прямоугольных труб с расширением [26]. Отношение площадей до и после расширения менялось в экспериментальных трубах от 0,1 до 0,4, причем во всех случаях сопоставлялись результаты измерений при двустороннем симметричном и одностороннем несимметричном расширении. Отборы давления располагались по всем четырем стенкам трубы, а также на плоскости уступа (рис. 10.10, *а*) и *б*)). Иллюстрацией результатов может служить рис. 10.11, где показаны кривые распределения давления по длине труб с расширением при различной напряженности поперечного магнитного поля. Как видно из рисунка, кривые распределения давления в случае двустороннего и одностороннего расширения идентичны.

Различие давления на стенках, перпендикулярных и параллельных магнитному полю в одном и том же сечении, вполне согласуется с картиной распределения скоростей. Действительно, за уступом стенки трубы жидкость под влиянием магнитного поля устремляется к стенкам, параллельным полю, и давление

на этих стенках оказывается больше, чем на перпендикулярных полю стенках.

С точки зрения приложений наиболее важны сведения о влиянии магнитного поля на коэффициент сопротивления при внезапном расширении. Для вычисления этого коэффициента необходимо знать разность давлений в потоке непосредственно перед

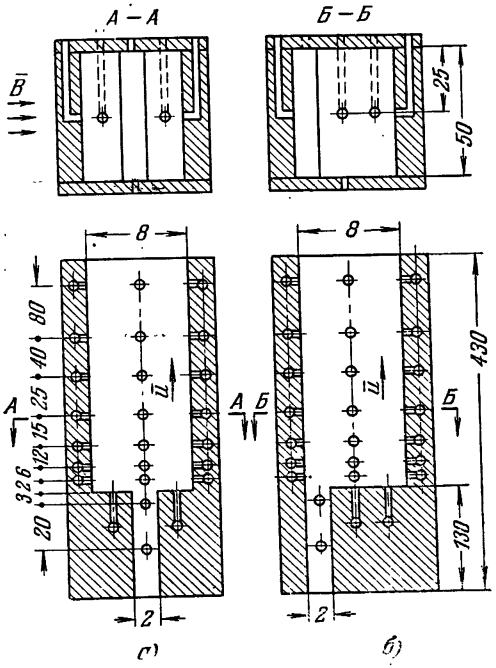


Рис. 10.10. Схема расположения отборов давления при исследовании течения в прямоугольных трубах с расширением.

расширением и в сечении за расширением, начиная с которого продольный градиент давления следует закономерностям равномерного течения. Это в свою очередь требует подробного измерения давления на длинном участке потока. Можно, однако, показать, что если установить экспериментально зависимость давления в центре уступа стенки от числа Стюарта:

$$\frac{p_1 - p_y}{\rho V_2^2/2} = f(N), \qquad (10.1)$$

где p_y — давление на уступе; p_1 — давление в потоке перед расширением, то коэффициент сопротивления весьма точно вычисляется из элементарного решения, которое можно назвать

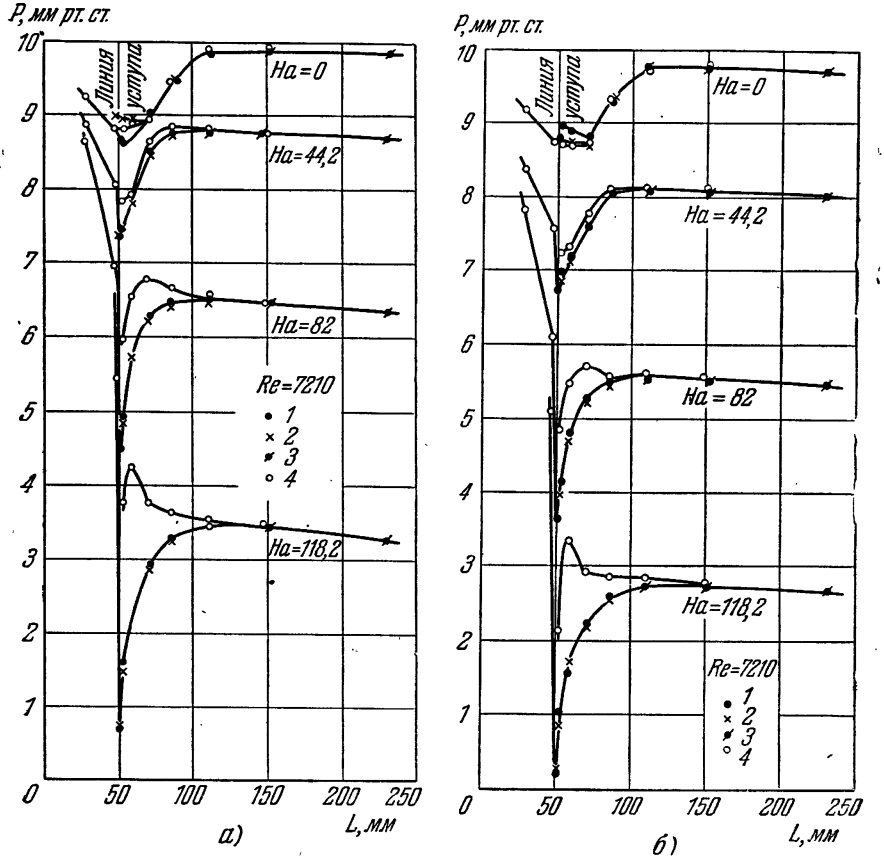


Рис. 10.11. Распределение давлений по длине прямоугольных труб с внезапным расширением.

а) Двустороннее симметричное расширение; *б*) одностороннее расширение. *1, 2* — отборы давления от стенок, перпендикулярных магнитному полю; *3* — совмещенные отборы от обеих стенок, перпендикулярных магнитному полю; *4* — отбор давления от стенки, параллельной магнитному полю.

магнитогидродинамической модификацией теоремы Борда. Это решение получается при совместном использовании уравнения Бернулли и уравнения количества движения, в котором член, выражающий импульс реакции уступа, выражен в соответствии с (10.1). Окончательное выражение для коэффициента

сопротивления имеет вид

$$\zeta=\zeta_0-\left(1-\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)f(N), \qquad (10.2)$$

где ζ_0 — коэффициент сопротивления в отсутствие магнитного

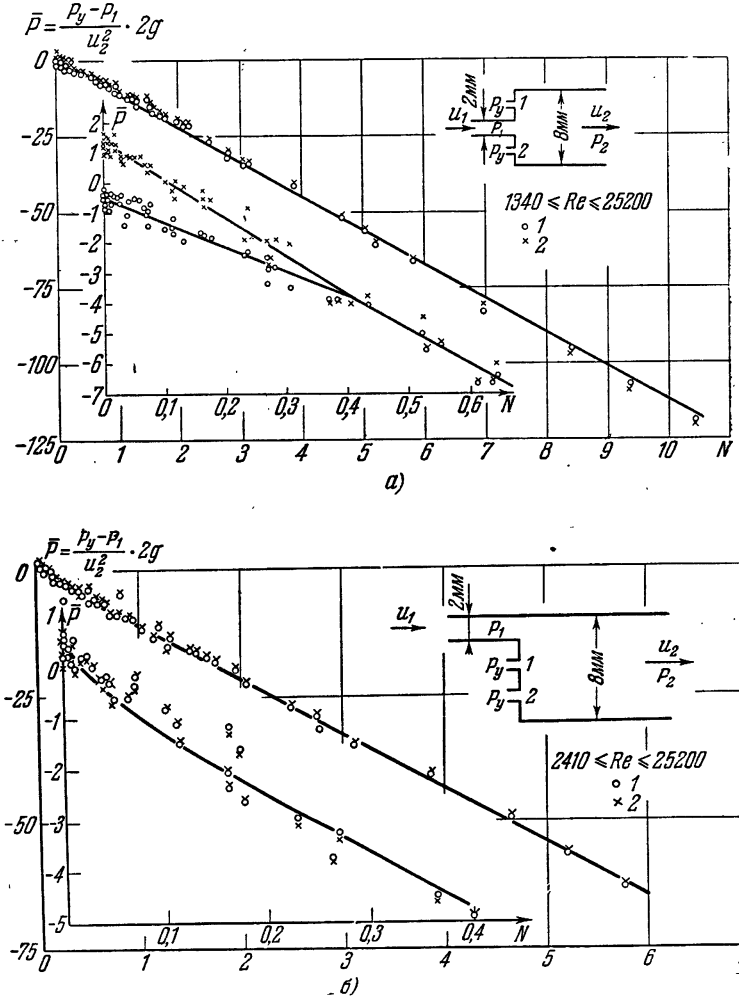


Рис. 10.12. Зависимость безразмерного давления на уступе от числа Стюарта.
а) Двустороннее симметричное расширение; *б*) одностороннее расширение.

поля; ω_1, ω_2 — соответственно площадь узкой и широкой части трубы.

Функция $f(N)$ представляет собой линейную функцию числа Стюарта, причем численный множитель не зависит от величины отношения ω_1/ω_2.

Ориентировочно можно считать, что $f(N) = -11{,}2N$. Пример экспериментальной зависимости $f(N)$ показан на рис. 10.12.

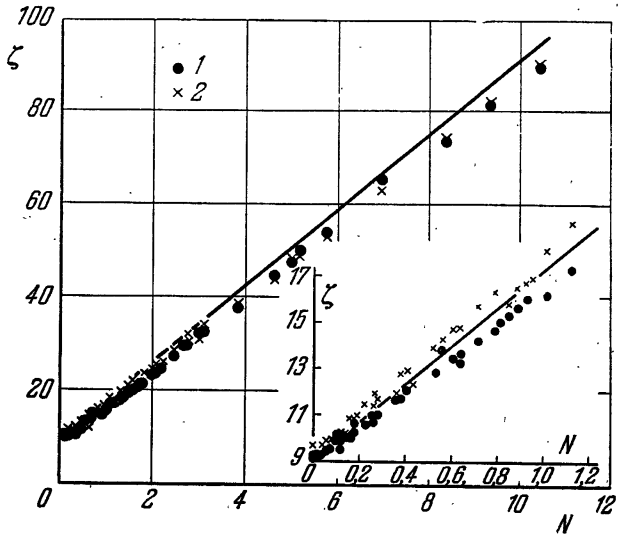


Рис. 10.13. Сопоставление экспериментальных и расчетных данных о коэффициенте сопротивления внезапного расширения с отношением площадей 1 : 4.

1 — одностороннее расширение, *2* — двустороннее расширение.

Сопоставление формулы (10.2) с экспериментальными данными показано на рис. 10.13. Как видно из рисунка, совпадение достаточно убедительное.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pai S. I., Laminar jet mixing of electrically conducting fluid in a transverse magnetic field, J. of the Aero/Space Sci. **26**, № 4, 254 (1959).
2. Riley N., Laminar jet mixing of an electrically conducting fluid in the presence of magnetic field, J. of the Aero/Space Sci. **29**, № 5, 634 (1962).
3. Peskin R. L., Hydromagnetic free jet, Phys. of Fluids **6**, № 5, 643 (1963).
4. Two dimensional boundary layers and jets in magneto-fluid dynamics, Rev. Mod. Phys. **32**, № 4, 823 (1960).
5. Jungclaus G., Laminare Grenzschichten in der Magnetohydrodynamik, Westdeutcher Verl., Köln (1959).
6. Джаугаштин К. Е., Распространение плоской струи проводящей жидкости, ИФЖ, № 5, 586 (1965).

7. Страхович К. И., Соковишин Ю. А., Истечение ламинарной струи проводящего газа в пространство с магнитным полем, ИФЖ, № 10, 65 (1962).
8. Moreau R., Jet libre plan, laminare, d'un fluid incompressible en presence d'un champ magnetique transversal, C. R. Acad. Sci. **256**, № 11, 2294 (1963).
9. Moreau R., Jet libre plan, laminaire, d'un fluide incompressible, en presence d'un champ magnetique transversal. Compt. Rend. Acad. Sci. **256**, № 23, 4849 (1963).
10. Moreau R., Jet laminaraire rasant une paroi en presence d'un champ magnetique transversal. Compt. Rend. Acad. Sci. **259**, 14, 2177 (1964).
11. Moreau R., Sur le jet liber, plan, turbulent, en presence d'un champ magnetique transversal Compt. Rend. Acad. **259**, 15, 2347 (1964).
12. Вулис Л. А., Джаугаштин К. Е., Полуограниченная струя проводящей жидкости, Магнитная гидродинамика, № 4, 67 (1965).
13. Цинобер А. Б., Щербинин Э. В., Плоские магнитогидродинамические струи, Магнитная гидродинамика, № 3, 21 (1965).
14. Щербинин Э. В., Интегральные методы в теории струй электропроводящей жидкости, Магнитная гидродинамика, № 3, 30 (1965).
15. Moffat H. K., Toomre J., The annihilation of a two-dimensional jet by a transverse magnetic field, J. Fluid Mech. **30**, № 1, 65 (1967).
16. Джаугаштин К. Е., Озерова Е. Ф., Симуни Л. М., Магнитогидродинамическое течение в начальном участке плоского канала, Материалы, представленные для обсуждения на V Рижском совещании по магнитной гидродинамике, Рига, 1966, сб. 22, 31.
17. Симуни Л. М., Движение вязкой проводящей жидкости в начальном участке плоского расширяющегося канала, Магнитная гидродинамика, № 2, 101 (1966).
18. Moreau R., Etude experimentale de l'affinite des profils de vitesse excedetaire dans les jets confines en presence d'un champ magnetique transversal, C. R. Acad. Sci. **262**, Ser. A et B, № 4, 259 (1966).
19. Moreau R., Etude experimentale de l'evolution des jets confines en presence d'un champ magnetique transversal, C. R. Acad. Sci. **262**, Ser. A et B, № 5, 304 (1966).
20. Брановер Г. Г., Щербинин Э. В., О поведении струи в канале с непроводящими стенками в поперечном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 4, 154 (1965).
21. Брановер Г. Г., Щербинин Э. В., Магнитогидродинамическое струйное течение в ограниченном пространстве, Магнитная гидродинамика, № 3, 55 (1966).
22. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Щербинин Э. В., Струйные турбулентные МГД-течения в ограниченном пространстве, Изв. АН ЛССР, сер. физ. и техн. наук. № 2, 47 (1967).
23. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй, Физматгиз, Москва, 1960.
24. Hunt J. C., Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. J. Fluid. Mech. **21**, № 4, 577 (1965).
25. Брановер Г. Г., Дукуре Р. К., Лиелаусис О. А., Цинобер А. Б., О местных гидравлических сопротивлениях в потоке жидкого металла в поперечном магнитном поле, Изв. АН ЛССР, № 11, 97 (1960).
26. Брановер Г. Г., Васильев А. С., Гельфгат Ю. М., Исследование влияния поперечного магнитного поля на течение в трубе с внезапным расширением, Магнитная гидродинамика, № 3, 99 (1967).

ПРИЛОЖЕНИЕ I

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Предварительные замечания

Во всех предшествующих разделах книги мы занимались рассмотрением различных аспектов влияния магнитного поля на течение электропроводящих несжимаемых сред. При этом всюду, где позволяет современный уровень знаний, приводились расчетные зависимости. И все же для гидродинамического расчета ряда типов магнитогидродинамических машин одних только этих сведений может оказаться недостаточно. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, форма проточной части или характер работы некоторых магнитогидродинамических машин таковы, что даже безотносительно к влиянию магнитного поля на особенности течения, т. е. в рамках общей гидродинамики их расчет требует предварительного проведения специальных исследований. Наиболее убедительный и практически важный пример — электромагнитные насосы. Форма их проточной части весьма специфична, она имеет очень мало общего с проточными частями гидравлических машин, изученных до появления магнитогидродинамической техники. И потому, чтобы подойти к вопросу об учете влияния магнитного поля на течение, необходимо прежде изучить особенности течения в проточной части насоса без поля, при прокачивании жидкости извне. Другой пример — электромагнитный дозатор для расплавленных металлов. Он включает в свой состав электромагнитный насос, так что тут справедливо все, сказанное выше, но кроме того, дозатор работает в очень своеобразном нестационарном режиме. Снова необходима постановка специальных исследований нестационарного течения в дозаторах, и лишь после этого можно вводить поправки, обусловленные влиянием магнитного поля.

Бесспорно есть случаи, когда магнитное поле совершенно видоизменяет картину течения, и говорить о поправках, обусловленных полем, не имеет смысла. Однако и в этих случаях для расчета и анализа необходимо знать, каково было бы течение в отсутствие поля при прочих равных условиях.

Именно в таком аспекте будут рассмотрены вопросы, составляющие содержание этого приложения.

Второй причиной, могущей сделать недостаточными для расчета сведения, изложенные в предыдущих главах, является то, что во многих магнитогидродинамических машинах применяется бегущее магнитное поле. Вопрос же о том, в какой мере результаты, полученные в постоянном поле, возможно переносить на течение в бегущем поле, пока недостаточно выяснен. Существует точка зрения, выдвинутая впервые, по-видимому, Гаррисом [1], согласно которой все результаты, полученные при течении в постоянном поле приложимы и к течению в бегущем поле, если только учесть ослабление внешнего магнитного поля полем индуцированных в металле токов. Кроме того, нужно, конечно, брать в расчет эффективное значение индукции магнитного поля, равное $B_m/\sqrt{2}$, где B_m — амплитудное значение. Ослабление поля индуцированными токами предлагается учесть, заменив во всех формулах Ha на $\xi\mathrm{Ha}$, причем

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_0\sigma\omega S}{k^2}\right)^2}},$$

где ω — частота переменного тока, питающего индуктор бегущего поля; S — скольжение, равное разности скоростей поля и среды, отнесенной к скорости поля; $k=\frac{\pi}{\tau}$, 2τ — длина бегущей волны.

Существует, однако, и другая точка зрения, принадлежащая Охременко [2], согласно которой вопрос не может быть решен так просто и требует детальных экспериментальных исследований, которые сейчас начаты [3]. Проведение экспериментальных исследований, направленных на изучение особенностей течения в бегущем поле, представляет собой весьма сложную задачу. Достаточно упомянуть, например, о проблеме определения коэффициента сопротивления при течении в бегущем поле. Поскольку бегущее поле не только тормозит поток жидкого металла, но прежде всего сообщает потоку энергию для движения, коэффициент сопротивления следует определять по разности энергии переданной индуктором жидкости и добавочной энергии, имеющейся у жидкости при выходе из насоса. Последняя величина определяется просто — по разности пьезометрических высот до и после насоса. Первую же определить значительно труднее. Известен, например, способ, когда индуктор свободно подвешивается и измеряется действующая на него реактивная сила.

Во всяком случае пока еще нет данных для достаточно общих количественных выводов о влиянии бегущего поля даже на сопротивление, а тем более на более тонкие характеристики

течения. Поэтому приходится тем или иным способом приспосабливать к расчету течения в бегущем магнитном поле результаты, полученные в постоянном поле. Укажем, что подробному рассмотрению гидродинамического расчета магнитогидродинамических машин посвящена вышедшая недавно работа Лиелаусиса [4].

§ 2. Гидродинамический расчет магнитогидродинамического насоса

Рабочая часть насоса располагается между полюсами магнита или между индукторами бегущего поля. Это заставляет конструировать ее в виде трубы узкого прямоугольного сечения. Трубопровод же, подводящий расплавленный металл к насосу и отводящий от него, по конструктивным и технологическим соображениям делается обычно круглого сечения. Так получается специфическая форма проточной части магнитогидродинамического насоса — узкая щель, сопрягающаяся по концам с круглыми трубами. Мы говорим тут о так называемых линейных насосах, проточная же часть других типов — цилиндрических, спиральных, может обладать еще более сложной конфигурацией. Площадь рабочей щели обычно в 2÷5 раз меньше площади сечения круглых труб (иногда это отношение достигает даже 10÷20), и поэтому входную часть насоса можно назвать конфузором, а выходную — диффузором. Однако эти конфузор и диффузор обладают столь своеобразной геометрией, что к ним, оказывается, никак нельзя применить накопленные в общей гидродинамике сведения о сопротивлениях.

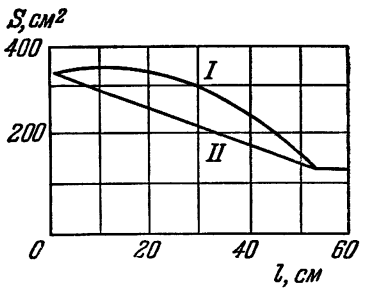


Рис. П1.1. Закон изменения площади сечения переходных частей электромагнитного насоса.
Кривая *I* — переходник типа А; кривая *II* — переходник типа В.

В настоящее время проведены уже довольно широкие специальные исследования гидравлических сопротивлений электромагнитных насосов [5, 6]. Исследования эти ведутся с водой и частично с воздухом. Испытан ряд серий моделей линейных электромагнитных насосов, которые отличались в основном длинами переходных частей. Кроме того, варьировалась сама геометрия переходных частей. Тип А образован плоскостями и усеченным круговым конусом. Это наиболее простой тип, площадь сечения меняется в нем по длине неравномерно (рис. П1.1, кривая *I*). Тип В образован более сложными поверхностями,

подобранными так, чтобы площадь сечения линейно менялась по длине (рис. ПI.1, кривая *II*) и чтобы, таким образом, жидкость двигалась с постоянным ускорением. Наконец, тип С отличается от В лишь более плавным сопряжением с круглой трубой и призматической рабочей частью. На рис. ПI.2 приведены схемы моделей всех трех серий. Очень важно, чтобы конфузор обеспечивал на входе в рабочую часть насоса возможно более равномерное

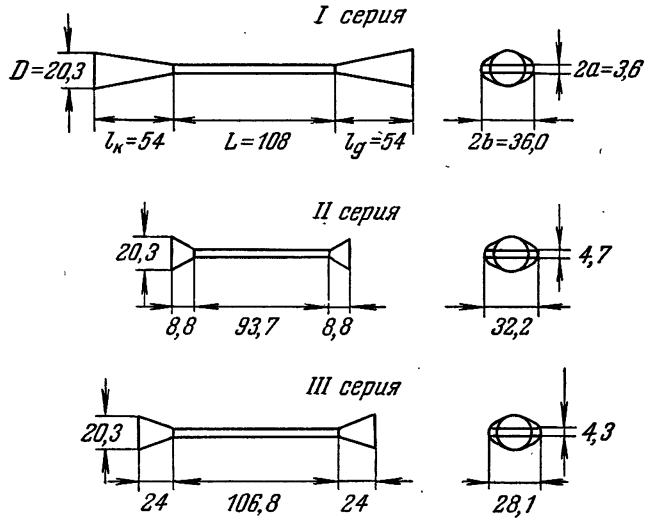


Рис. ПI.2. Основные размеры (в сантиметрах) моделей линейных электромагнитных насосов.

распределение скоростей. При коротком и плохо профилированном конфузоре течение за ним может стать отрывным и на входе в рабочую часть иметь строение, напоминающее струю в ограниченном пространстве [5].

При короткой длине призматической рабочей части весь насос следует рассматривать как единое местное гидравлическое сопротивление в том смысле, что влияние конфузора распространяется на всю призматическую часть, в которой не успевает установиться равномерное течение. В этом случае учет влияния магнитного поля на течение весьма затруднен, и можно лишь косвенно руководствоваться выводами, полученными в гл. X при рассмотрении частного случая местного гидравлического сопротивления — внезапного расширения потока.

Все же большей частью в реальных насосах длина призматической части вполне достаточна, чтобы течение успело стабили-

зироваться. Надо только иметь в виду, что, как было показано в гл. X, большие внутренние градиенты скорости при вступлении потока в поперечное магнитное поле усиливаются полем и могут привести, как в случае струи, к полному перестроению потока под влиянием поля. Проведенные эксперименты с моделями насосов позволяют заключить, что при исследованных типах переходных частей, даже при худшем типе переходника (типе А), поток в призматической части стабилизируется на длине, равной приблизительно $20a$, где a — полуширина призматической трубы. Понятно, что если только возможно, надо оставлять такую длину до вступления потока в магнитное поле.

Если в рабочем режиме насоса число Стюарта имеет порядок 10^{-2} или менее, то влиянием поля на сопротивление можно вообще пренебречь*). В таком случае можно непосредственно воспользоваться значениями коэффициентов сопротивлений,

Модель			ζ
	I серия		
0/10	2,5	15A/15B	0,80
5/10	2,5	15A/15B	1,20
15/10	2,5	15A/15B	1,75
20/10	2,5	15A/15B	2,10
30/10	2,5	15A/15A	2,80
30/10	2,5	15A/15B	2,40
30/10	2,5	15B/15A	3,00
30/10	2,5	15B/15B	2,60
50/10	2,5	15A/15B	3,60
	II серия		
20/6,85	2,14	1,87A/1,87A	3,32
20/6,85	2,14	1,87A/1,87C	3,35
20/6,85	2,14	1,87C/1,87A	3,06
20/6,85	2,14	1,87C/1,87C	3,13
0/6,85	2,14	1,87C/1,87A	3,83
6,54/6,85	2,14	1,87C/1,87A	2,38
13,3/6,85	2,14	1,87C/1,87A	2,68
	III серия		
24,8/6,54	2,68	5,58A/5,58A	3,86
24,8/6,54	2,68	5,58A/5,58C	3,35
24,8/6,54	2,68	5,58C/5,58A	3,65
24,8/6,54	2,68	5,58C/5,58C	3,43
0/6,54	2,68	5,58A/5,58C	1,80
8,3/6,54	2,68	5,58A/5,58C	2,45
16,5/6,54	2,68	5,58A/5,58C	2,95

*) Эта рекомендация достаточно надежна для кондукционных машин. Для индукционных машин ее следует применять с крайней осторожностью.

полученных при экспериментах на воде. Мы воспроизводим здесь таблицу коэффициентов сопротивления, заимствованную из работы [6]. Испытанные модели обозначены в ней рядом цифр и букв. Числитель первой дроби выражает значение $L/2a$ (см. рис. ПI.2), знаменатель b/a; средняя цифра — отношение площадей круглой трубы и прямоугольной щели; числитель второй дроби $l_к/2b$ и тип конфузора; знаменатель $l_д/2b$ и тип диффузора.

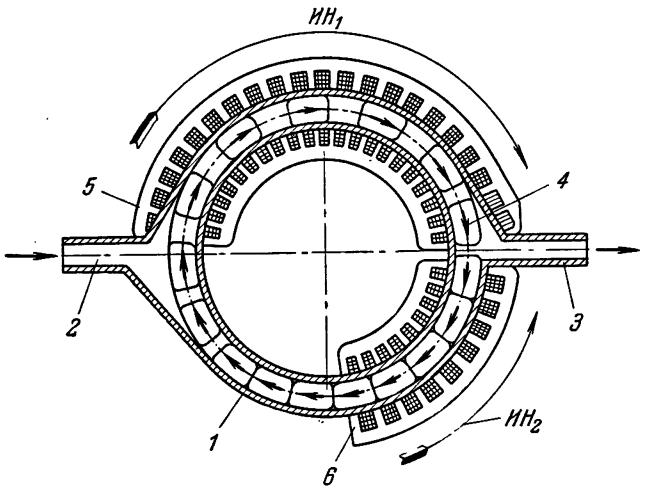


Рис. ПI.3. Схема электромагнитного поршневого насоса с телами-посредниками.

1 — труба — корпус насоса; *2* — всасывающая труба; *3* — напорная труба, *4* — поршни (тела-посредники); *5* — индуктор разгона $ИН_1$; *6* — индуктор торможения $ИН_2$.

Надо иметь в виду, что значения коэффициентов сопротивления моделей, приведенные в таблице, соответствуют такому числу **Re**, при котором ζ_0 уже не зависит от **Re**, т. е. когда имеет место квадратичный закон сопротивления. Началу квадратичной области по данным экспериментов соответствовало $\mathbf{Re}=10^5 \div 3{,}10^5$.

Если $\mathbf{N}>10^{-2}$, то расчет сопротивления проточной части насоса необходимо вести с учетом магнитогидродинамических явлений.

Порядок расчета призматической части следующий. Вычисляется коэффициент сопротивления в предположении, что режим течения ламинарный. Далее, если $\lambda>\lambda_{кр}$, расчет продолжается по формулам ламинарной теории (гл. II). Если же $\lambda<\lambda_{кр}$, то течение турбулентно и коэффициент сопротивления, распределе-

ние скоростей и т. д. находятся по формулам для гладких или шероховатых труб, приведенным в гл. IV. Там же содержатся некоторые сведения о расчете теплообмена.

Таким образом, гидродинамический расчет линейного электромагнитного насоса в настоящее время может быть выполнен сравнительно хорошо. Несравнимо хуже возможности расчета

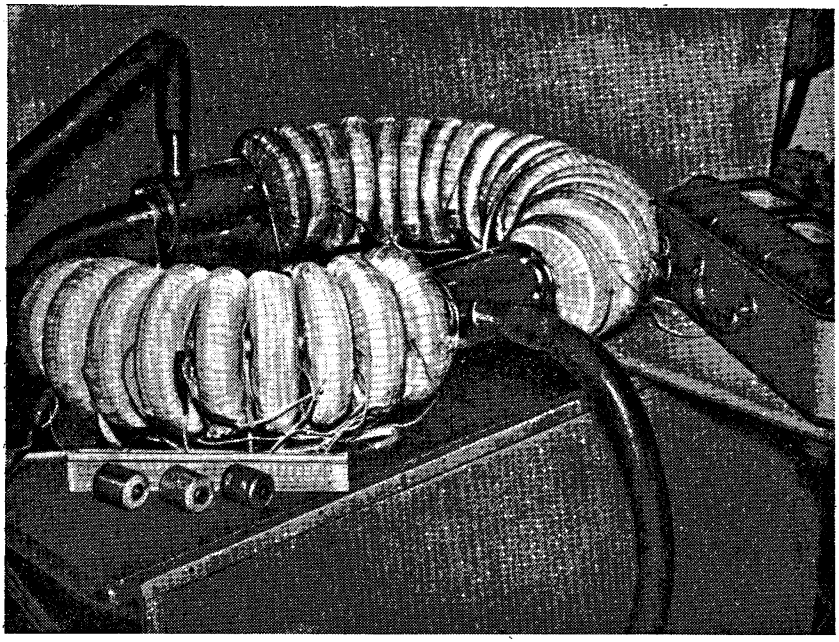


Рис. ПI.4. Экспериментальный электромагнитный поршневой насос с телами-посредниками.
На переднем плане лежат несколько отдельных тел-посредников.

электромагнитных насосов с другой формой проточной части — цилиндрических, спиральных и др. Здесь проектировщик вынужден пытаться разумно использовать аналогии с линейными насосами.

В недавнее время предложены электромагнитные насосы нового типа, представляющие собой своеобразный синтез электромагнитного и механического насоса [7—9]. В них электромагнитная энергия передается от индуктора бегущего магнитного поля плавающим в жидкости твердым телам, имеющим высокую электропроводность и, кроме того, еще специальные ферромагнитные вставки. По виду дальнейшего воздействия твердых тел на

перекачиваемую жидкость эти насосы подразделяются на поршневые, центробежные и др.

На рис. ПI.3 показана схема поршневого насоса. Один индуктор $ИН_1$ ускоряет плавающие тела-посредники, увеличивая расстояние между ними и обеспечивая всасывание жидкости, второй индуктор $ИН_2$ затормаживает тела, расстояния между ними уменьшаются, и жидкость выталкивается в напорный трубопровод. На рис. ПI.4 показана фотография экспериментального насоса этого типа.

Закономерности течения жидкости между телами и в узких кольцевых зазорах между телами и корпусом насоса находятся еще на самой начальной стадии изучения [10]. Вопрос осложняется тем, что движение здесь существенно нестационарное. Предложения, содержащиеся в работе [10], основаны на грубой гидравлической схематизации явлений.

§ 3. Гидродинамический расчет электромагнитного дозатора для жидкого металла

Поиски способов автоматического дозирования расплавленного металла и подачи его в машину для литья под давлением естественно приводят к идее электромагнитного дозатора. Принципиальная схема такого дозатора показана на рис. ПI.5. В настоящее время построен уже ряд экспериментальных и полупромышленных электромагнитных дозаторов для расплавленных металлов [11, 12].

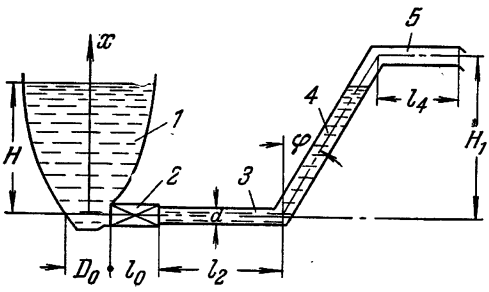


Рис. ПI.5. Принципиальная схема электромагнитного дозатора.

1 — раздаточная ванна; *2* — электромагнитный насос; *3, 4, 5* — участки трубопровода.

Для гидродинамического расчета дозатора необходимо изучить нестационарные процессы, происходящие в нем в результате кратковременного действия объемных электромагнитных сил, возникающих в электромагнитном насосе, который является одним из участков трубопровода дозатора. Естественно, что в нестационарных гидродинамических процессах, развивающихся в дозаторе, важную роль играют гидродинамические свойства проточной части насоса и прежде всего его гидравлическое сопротивление. В этом отношении при расчете следует руководствоваться данными, изложенными в § 2.

Нестационарным процессам в дозаторе посвящено несколько работ [13—15]. Рабочий цикл дозатора естественно подразделяется на следующие этапы (рис. П1.5):

1. Включение насоса и заполнение трубопровода (*4*).
2. Заполнение горизонтального трубопровода (*5*). Этот этап отличается от предыдущего тем, что статический напор, преодолеваемый насосом, меняется очень слабо — лишь за счет понижения уровня в раздаточной ванне (*1*).
3. Подача металла до момента выключения насоса.
4. Продолжение подачи за счет сил инерции.
5. Обратный слив металла из трубопровода (*5*).
6. Обратный слив металла из трубопровода (*4*).

Дифференциальные уравнения движения на разных этапах получаются различными. Идея решения заключается в «сшивании» этих уравнений во времени с учетом изменения массы, участвующей в движении. Уравнения составляются в «гидравлическом приближении» в том смысле, что скорость течения в пределах каждого сечения считается постоянной и равной средней, а потери напора выражаются через коэффициенты сопротивления и средние скорости. Все явление определяется системой геометрических критериев подобия и, кроме того, безразмерным давлением насоса

$$p=\frac{p'}{\rho g D_0}, \qquad (П1.1)$$

где p' — размерное давление, развиваемое насосом; D_0 — характерный размер горизонтального сечения раздаточной ванны, и безразмерной продолжительностью включения насоса

$$\theta=\frac{\theta'}{\sqrt{D_0/g}}, \qquad (П1.2)$$

где θ — размерная продолжительность работы насоса.

Род жидкости не имеет значения для моделирования.

Мы не выписываем довольно громоздкую систему уравнений для всех этапов. Она получается сравнительно просто из уравнения импульсов и уравнения неразрывности. Все уравнения системы удается проинтегрировать, однако вычисления по получающимся формулам весьма трудоемки и предпочтительнее решать исходную систему уравнений численно с помощью вычислительных машин. На рис. П1.6 показан пример вычисленного графика колебаний уровня в раздаточной ванне в течение выдачи одной дозы. Доза, как легко понять, определяется разностью начального и конечного уровня расплавленного металла в раздаточной ванне. Дальнейшая обработка результатов позволяет найти

зависимость времени θ от порядкового номера цикла при условии выдачи постоянной дозы (рис. ПI.7). Эта зависимость необходима для программирования работы насоса.

Весьма важно выяснить, как влияют те или иные критерии подобия (геометрические и прочие) на величину дозы. Таким образом, можно также установить пути получения наименьшей

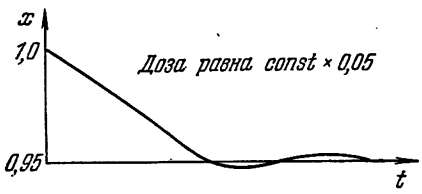


Рис. ПI.6. Закон изменения уровня в раздаточной ванне в течение одного рабочего цикла.

Раздаточная ванна цилиндрическая.

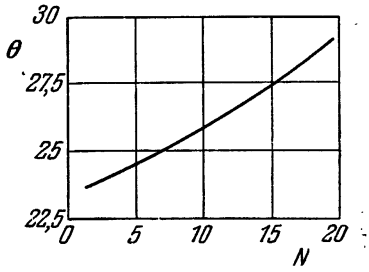


Рис. П I.7. Пример расчетной кривой для программирования работы дозатора, выдающего постоянные дозы.

По горизонтали отложен порядковый номер дозы, по вертикали — безразмерная продолжительность включения насоса.

погрешности дозы. В самом деле, в реальном дозаторе меняются диаметры труб за счет зарастания кристаллизующимся металлом или, наоборот, за счет коррозии, меняются по тем же причинам и гидравлические сопротивления. Далее в результате колебаний напряжения в электрической сети может меняться давление насоса, а время его включения тоже определяется с некоторой погрешностью.

Выяснив путем расчета большого числа вариантов дозаторов, как влияют эти факторы на погрешность дозы, например при различной геометрии дозатора, можно определить оптимальное соотношение геометрических размеров, при котором погрешность в величине дозы получается наименьшей. Соответствующие данные можно найти в работах [14, 15].

§ 4. Электромагнитный лоток

Электромагнитный лоток — устройство, предназначенное для транспортирования расплавленного металла. Металл движется под действием бегущего магнитного поля, порождаемого индуктором, расположенным под лотком, а сверху лоток открыт (рис. ПI.8). Такое устройство имеет ряд преимуществ в применении к черным металлам, плавящимся при температурах, боль-

ших 1000° С. Главные преимущества — удобство периодической замены футеровки лотка и возможность механизации этой работы.

С гидродинамической точки зрения течение в лотке представляет собой очень интересное явление. В лотке, например, возможно равномерное течение при обратном уклоне дна, тогда как

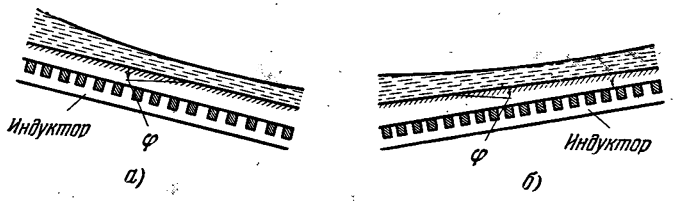


Рис. ПІ.8. Схема электромагнитного лотка:
а) с прямым уклоном дна, *б*) с обратным уклоном дна.

в общей гидродинамике известно, что равномерное течение безнапорного потока мыслимо лишь при прямом уклоне. Гидродинамика лотка, однако, легко сводится к обычным явлениям, известным в теории безнапорного движения, если, во-первых, пренебречь влиянием поля на сопротивление и, во-вторых, ввести виртуальный уклон дна [16]:

$$i=\frac{F_{эм}}{\rho g}+\sin\varphi, \qquad (ПІ.3)$$

где $F_{эм}$ — электромагнитная сила, порождаемая бегущим полем в единице объема жидкости.

При этом рассмотрение условий равновесия элемента жидкости приводит к уравнению

$$\frac{dh}{dx}=\frac{i-\frac{\lambda}{R}\frac{V^2}{2g}}{\mathrm{Fr}-1}, \qquad (ПІ.4)$$

где λ — коэффициент сопротивления, R — гидравлический радиус сечения лотка, V — средняя скорость течения, $\mathrm{Fr}\frac{\alpha V^2}{gh}$ — критерий Фруда, $\alpha>1$ — коэффициент, зависящий от неравномерности распределения скоростей по сечению и равный 1,0 при равномерном распределении скоростей.

Уравнение (ПІ.4) ничем не отличается от уравнения безнапорного течения, рассматриваемого в общей гидродинамике. Следовательно, в лотке должны наблюдаться те же режимы течения и те же формы кривых свободной поверхности, что и в

русловых потоках. Экспериментальные исследования, проведенные с ртутью при обратном уклоне дна [16], полностью подтвердили это.

Экспериментально наблюдались как неравномерные, так и равномерные течения и даже скачкообразный переход от малой глубины при $Fr>1$ к большой глубине при $Fr<1$, т. е. гидравлический прыжок. Фотография прыжка показана на рис. ПI.9. При

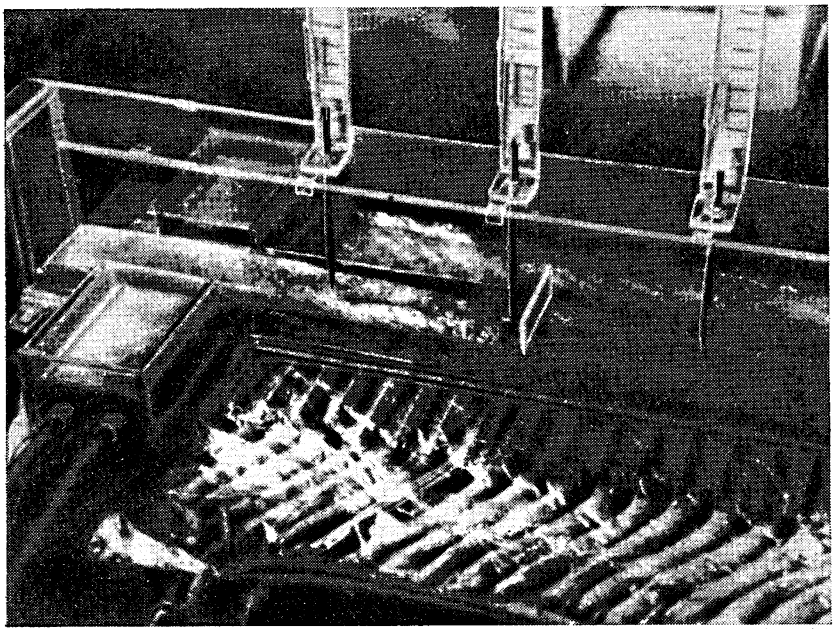


Рис. ПI.9. Гидравлический прыжок ртути.

$Fr>1$ и очень малой глубине потока наблюдалось следующее интересное явление: поток, отступая от стенок лотка, стягивался в жгут (рис. ПI.10), извивающийся в пространстве и стационарный во времени. Длина волн жгута примерно равна длине волны бегущего магнитного поля.

Это явление можно объяснить тем, что бегущее поле создает не только тангенциальную компоненту электромагнитной силы, но также компоненту, нормальную к поверхности индуктора и направленную вверх. Под действием этой силы расплавленный металл обезвешивается и начинают проявляться капиллярные силы, которые и стягивают поток в жгут. Возможно, что здесь играет роль также пинч-эффект. По предложению Кирко [17]

нормальную компоненту электромагнитной силы следует учитывать и при вычислении числа Фруда, входящего в уравнение (6.4). В этом уравнении следует вместо Fr писать величину ($Fr+Fr_{эм}$), причем

$$Fr_{эм}=\frac{F_{эм\,n}}{\rho g}, \qquad (П1.5)$$

где $F_{эм,\,n}$ — нормальная компонента объемной электромагнитной силы.



Рис. П1.10. Форма течения при малой глубине потока и большой индукции бегущего магнитного поля (вид сверху).

Изложенная здесь элементарная теория электромагнитного лотка является, конечно, весьма грубой. Помимо тех допущений, которые были оговорены выше, она базируется на представлении о том, что электромагнитная сила постоянна по глубине потока. В действительности же она убывает по мере удаления от индуктора по экспоненциальному закону.

Вопрос о нахождении электромагнитной силы и закона ее распределения представляет собой уже чисто электродинамическую задачу.

К рассматриваемой здесь проблеме примыкает вопрос о воздействии магнитного поля на особенности гидравлического прыжка. Этот вопрос исследовался Вулисом с сотрудниками [18]. Было установлено, что постоянное магнитное поле влияет на соотношение глубин, сопрягаемых прыжком, на расположение прыжка по длине потока и что при определенных условиях прыжок вообще исчезает и сверхкритическое течение плавно сопрягается с докритическим. Для изучения возможности перенесения этих результатов на течение в бегущем поле необходима постановка специальных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаррис А., Магнитогидродинамические течения в каналах, ИЛ, Москва, 1963.
2. Охременко Н. М., Влияние бегущего магнитного поля на гидравлическое сопротивление турбулентному течению проводящей жидкости в каналах. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики» 3, Изд. АН ЛССР, Рига, 1963, 115.
3. Охременко Н. М., Опытное определение коэффициентов сопротивления каналов при турбулентном магнитогидродинамическом течении под действием бегущего магнитного поля, Магнитная гидродинамика, № 3, 1967, 119.
4. Лиелаусис О. А., Гидродинамика жидкометаллических МГД-устройств, Изд-во «Зинатне», Рига, 1967.
5. Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А., Лиелпетер Я. Я., Щербинин Э. В., Экспериментальное изучение гидравлического сопротивления проточной части электромагнитных насосов, Изв. АН ЛССР, № 4 (1963), 87.
6. Богданов Ю. В., Брановер Г. Г., Лиелпетер Я. Я., Лиелаусис О. А., Тананаев А. В., О гидравлических свойствах проточной части электромагнитных насосов, Магнитная гидродинамика, № 2 (1966), 130.
7. Кирко И. М., Брановер Г. Г., Иоффе Б. А., Саулите У. А., Авторское свидетельство № 177778, 1966.
8. Кирко И. М., Брановер Г. Г., Иоффе Б. А., Саулите У. А., Авторское свидетельство № 188847, 1966.
9. Иоффе Б. А., Саулите У. А., Экспериментальные исследования электромагнитного ротационно-поршневого насоса, Изв. АН ЛССР, сер. физ. и техн. наук, № 3, 1966.
10. Иоффе Б. А., Лапидус М. Х., Исследование герметичного электромагнитного поршневого насоса, Изв. АН ЛССР, серия физ. и техн. наук, № 1 (1967), 81.
11. Соколин Я. И., Магнитогидродинамический дозатор, Магнитная гидродинамика, № 1 (1966), 150.
12. Соколин Я. И., Куликова Л. М., Никулин С. М., Исследование работы автоматического магнитогидродинамического дозатора для питания машин литья под давлением порциями жидкого металла, Магнитная гидродинамика, № 2 (1967), 133.
13. Кирко И. М., Лиелпетер Я. Я., Дозирование жидкого металла при помощи электромагнитных индукционных насосов. В сб. «Прикладная магнитная гидродинамика», Труды Института физики АН ЛССР, 12 (1961), 155.

14. Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А., Цинобер А. Б., Шехтер Е. Ю., Гидравлическая теория электромагнитного дозатора, Изв. АН ЛССР, сер. физ. и техн. наук, № 5 (1966), 3.
15. Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А., Шехтер Е. Ю., Гидравлические принципы определения параметров дозаторов жидкого металла с постоянным давлением на входе, Магнитная гидродинамика, № 1 (1966), 103.
16. Брановер Г. Г., Кирко И. М., Лиелаусис О. А., Цинобер А. Б., Гидравлика безнапорных потоков жидкого металла, движущегося в канале с обратным уклоном дна под действием бегущего магнитного поля. В сб. «Прикладная магнитная гидродинамика» 3, Изд. АН ЛССР, 1963, 65.
17. Кирко И. М., Жидкий металл в электромагнитном поле, Москва—Ленинград, «Энергия», 1964.
18. Вулис Л. А., Гусика П. Л., Кусаинов М. К., Шмелев Ю. К., Яглейко В. Т., Течение ртути в лотке в поперечном магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 2 (1966), 61.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

КРАТКИЙ ОЧЕРК ГИДРОДИНАМИКИ РАСПЛАВЛЕННЫХ МЕТАЛЛОВ

§ 1. Области применения и главные особенности течения расплавленных металлов

Как указывалось в гл. I, наиболее подходящей средой для проведения ряда магнитогидродинамических экспериментов являются расплавленные металлы. Они служат рабочим телом также во многих магнитогидродинамических машинах и устройствах. Учитывая это, представлялось целесообразным включить в книгу о магнитной гидродинамике несжимаемых сред настоящий краткий очерк гидродинамики расплавленных металлов. Этот очерк не претендует на полноту. Более подробно в нем рассматриваются те вопросы, которые слабее освещены в обобщающей литературе. Это относится, в частности, к вопросу о течении расплавленных металлов при температурах, близких к температуре кристаллизации, а также к различным аспектам течения расплавленных черных металлов. Напротив, вопросы теплопередачи в потоках расплавленных металлов не излагаются вовсе, поскольку им посвящена широко известная монография [1].

Первоначальные сведения о течении расплавленных металлов были известны еще в глубокой древности. Они накапливались в процессе литейного производства. Получение отливок осуществляется путем заполнения литейной формы металлом, подводимым к ней по так называемой литниковой системе. Литниковые системы могут представлять собой сложные гидравлические системы — с большим числом ответвлений и местных гидравлических сопротивлений.

Наряду с наиболее распространенным способом получения отливок, при котором движение расплавленного металла по каналам литниковой системы обусловливается исключительно высотным положением отдельных ее элементов, широкое применение в последнее время получает также литье под давлением.

Новую область применения получили расплавленные металлы с развитием атомной энергетики. Ныне они широко используются в качестве теплоносителей в ядерных реакторах.

Преимущество использования расплавленных металлов, циркулирующих в системе, в качестве теплоносителей заключается

в том, что благодаря высокой температуре их кипения, можно получать высокие температуры теплоносителя на выходе из реактора при низком давлении. Высокие же температуры теплоносителя в свою очередь позволяют получать пар высоких параметров, создающий наиболее благоприятные условия для работы турбогенераторной установки.

Движение расплавленных металлов в литниковых системах и в системах охлаждения реакторов характеризуется по сравнению с движением обычных жидкостей, рассматриваемых в гидродинамике, рядом существенных особенностей. Объясняется это отчасти физическими свойствами расплавленных металлов *), но главным образом весьма необычными условиями, в которых происходит их движение, обычно сопровождающееся активным теплообменом (специфичность этого явления обусловлена малостью чисел Прандтля, имеющих порядок 10^{-2}) и часто связанное с изменением агрегатного состояния — выпадением твердой фазы, образованием на стенках каналов твердой корки и т. п.

В связи с этим возник ряд специальных гидродинамических и термодинамических задач.

Прежде всего необходимо было установить расчетные зависимости для определения гидравлических сопротивлений при движении расплавленных металлов в трубах и каналах. Это в свою очередь требовало изучения механизма движения расплавленных металлов и получения ответа на вопрос о том, в каких случаях можно считать металлические жидкости жидкостями ньютоновскими и рассматривать их течения с позиций общей гидродинамики. В первом приближении перечисленные задачи решались в предположении изотермичности происходящих процессов.

Второй цикл задач определялся необходимостью учета влияния тепловых факторов — рассматривались неизотермические течения металлических жидкостей, изучался перенос тепла и теплопередача при их течении в трубах и каналах.

При изучении гидродинамики расплавленных металлов следует рассматривать два случая: движение металлических жидкостей с большими перегревами, т. е. при температурах, значительно превышающих температуру начала кристаллизации, и движение в температурном интервале кристаллизации.

Имеются все основания считать, что в первом случае движение расплавленных металлов по существу не отличается какими-то особенностями по сравнению с движением обычных ньютоновых жидкостей.

---

*) Краткие сведения об этих свойствах даны в § 3 настоящего приложения.

Убедительным подтверждением правильности этого положения являются результаты работ, выполненных различными авторами по изучению гидравлических сопротивлений при движении расплавленных металлов в трубах и каналах (см. далее § 2), которые не показали какого-либо различия в величине потерь напора в этих случаях по сравнению со случаями течения обычных неметаллических ньютоновых жидкостей.

Об этом говорят также и некоторые, правда весьма немногочисленные, экспериментальные исследования, посвященные изучению распределения скоростей при движении расплавленных металлов.

Измерения распределения скоростей в открытом канале (на выпуске из доменной печи) при движении в нем расплавленного чугуна проведены Е. З. Рабиновичем [2]. Канал, в котором производились измерения, имел поперечное сечение треугольной формы с боковыми стенками из каменной одежды с песчаной обсыпкой. Измерения производились при помощи специально сконструированного для этой цели прибора в ряде точек поперечного сечения потока.

Анализ полученных профилей показывает, что они имеют форму, весьма близкую к профилям скоростей для обычных случаев турбулентного течения.

Аналогичные результаты были получены и при наблюдениях над движением модельных аналогов расплавленных металлов — расплавленного салола, нафталина и парафина — в стеклянных трубках.

Значительно менее определенными являются результаты исследования механизма движения расплавленных металлов вблизи температуры их затвердевания. Предложен ряд гипотез, объясняющих механизм остановки движения металлов в каналах литниковых систем до окончания заполнения литейных форм. При этом остановка движения рассматривается либо как результат образования твердой корки у стенок, ограничивающих поток жидкости, нарастающей во времени и по длине потока, либо объясняется появлением в жидкости твердой фазы в виде отдельных твердых кристалликов, находящихся в потоке во взвешенном состоянии, и постепенно получающей преобладающее значение.

Так Портевен и Бастьен [3, 4] исходят из предположения о том, что процесс кристаллизации всегда состоит из трех следующих стадий: первой начальной стадии, в которой жидкая фаза непрерывна, а твердая является прерывной, второй стадии, характеризующейся непрерывностью обеих фаз, и третьей, заключительной, стадии, где непрерывной является одна лишь твердая фаза. Они указывают, что текучесть металла при переходе от первой стадии ко второй заметно снижается и становится равной

нулю в третьей стадии. Таким образом, они полагают, что движение металла прекращается тогда, когда затвердевшая металлическая корка полностью перекрывает сечение канала.

Нехендзи и Самарин [5] также считают, что металл перестает течь тогда, когда в нем образуется достаточное количество сплошной твердой фазы. Они указывают, например, что для стали критическая концентрация твердой фазы, обусловливающая нулевую жидкотекучесть, составляет около 20%.

Гуляев [6] приходит к выводу, что движение металла прекращается в тот момент, когда сплошной слой твердого металла, образующийся на поверхности концевой части потока, оказывается механически достаточно прочным, чтобы выдержать гидростатический напор.

Ряд соображений о механизме движения расплавленных металлов вблизи температуры их затвердевания, основанных на визуальных наблюдениях над движением их модельных аналогов (расплавленного салола, нафталина и парафина) в стеклянных трубках, высказал Е. З. Рабинович [7].

При движении салола и нафталина снижение температуры расплава до температуры кристаллизации приводит к образованию в трубке своеобразной кристаллической решетки в виде дендритной структуры, через которую просачивается не успевшая закристаллизоваться жидкая часть расплава. При движении же нафталина кристаллизация сопровождается образованием весьма малых по своим размерам кристаллов, рассеянных по всему объему трубки, расплав загустевает и переходит в «кашеобразное» состояние.

На основании этого были предложены следующие упрощенные модели движения: в первом случае, моделирующем движение чистых металлов, течение можно рассматривать как фильтрацию жидкости через своеобразный пористый фильтр с меняющейся во времени пористостью, второй случай, моделирующий движение эвтектических сплавов, можно уподобить течению неньютоновой жидкости типа коллоидных растворов с переменной концентрацией.

Справедливость последнего положения была подтверждена дальнейшими работами Е. З. Рабиновича [8, 9], в которых рабочей жидкостью служил удобный с экспериментальной точки зрения легкоплавкий неэвтектический металлический сплав типа сплава Вуда (удельный вес 10,66; температура плавления 87° С), характеризующийся значительным интервалом кристаллизации (111—87° С).

Первым объектом исследования явилось начальное напряжение сдвига. Измерения производились с помощью прибора, работающего по принципу ротационного вискозиметра.

Результаты измерений показаны на рис. ПII.1. Из рисунка следует, что при температурах выше 111°С исследованный сплав не обладает начальным напряжением сдвига. При снижении температуры начальное напряжение сдвига появляется и непрерывно увеличивается по мере приближения к температуре затвердевания. Аналогичные результаты были получены и при измерениях начального напряжения сдвига для парафина.

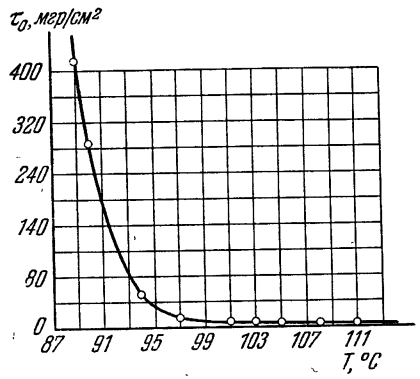


Рис. ПII.1. Изменение величины статического напряжения сдвига в зависимости от температуры (сплав Вуда).

Второй цикл исследований был произведен с целью определения форм расходных характеристик $Q=f(H)$ при течении металлических жидкостей в трубах и выяснения вопроса о наличии на них так называемых «нулевых» точек. Известно, что для начала течения неньютоновых бингамовых жидкостей необходимо наличие некоторого начального напора, и поэтому расходные характеристики в этих случаях представляют собой кривые, проходящие не через начало координат (как для жидкостей ньютоновых, начинающих течь при сколь угодно малых напорах), а через некоторые «нулевые» точки, положение которых определяется величиной соответствующего начального напора, зависящего от физических свойств жидкости.

Применявшаяся экспериментальная установка представляла собой вертикальный сосуд с отверстием в дне, в которое был вварен цилиндрический патрубок, соединенный при помощи колена с горизонтально расположенной стеклянной трубкой из термостойкого стекла, по которой при определенных температурах пропускалась жидкость (вода, парафин, сплав Вуда). Постоянство температуры обеспечивалось спиральным электрообогревателем.

Измерения производились при различных напорах, создававшихся путем введения между патрубком и коленом дополнительных цилиндрических вставок разной длины. Расход жидкости определялся объемным способом.

На основании обработки полученных таким образом экспериментальных данных были построены расходные характеристики, представленные на рис. ПII.2. Отдельные кривые на этом графике соответствуют наблюдениям над движением различных

жидкостей при определенных температурных условиях: *I* — сплав типа Вуда при $T=97°$; *II* — тот же сплав при $T=90°$; *III* — парафин, $T=54°$; *IV* — вода, $T=15°$.

Из графика видно, что расходная характеристика проходит через начало координат только в случае воды. Все же остальные

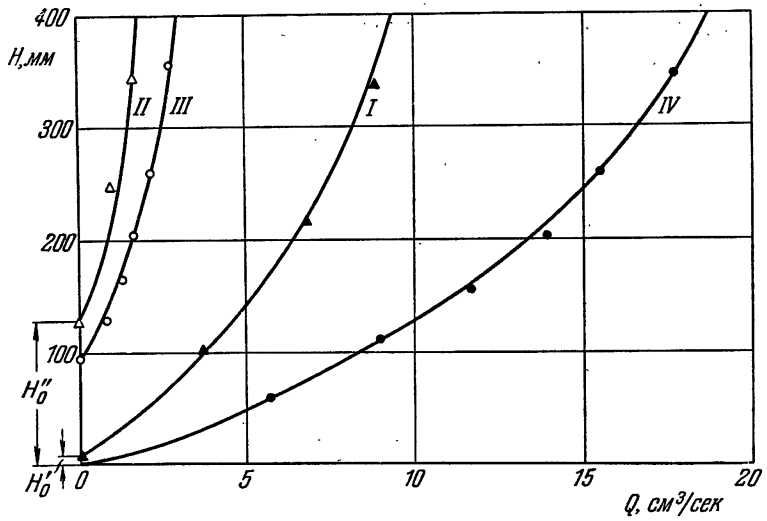


Рис. ПІ.2. Расходные характеристики для течения жидкостей в стеклянных трубках.

Кривые: *I* — для сплава типа Вуда при $t=97°$ С; *II* — для того же сплава при $t=90°$ С; *III* — для парафина ($t=54°$ С); *IV* — для воды ($t=15°$ С).

случаи характеризуются наличием на характеристиках «нулевых» точек, отстоящих от начала координат на различных для разных случаев расстояниях, представляющих собой соответствующие начальные напоры.

Существенной отличительной особенностью металлических жидкостей является непостоянство величины начального напряжения сдвига, изменяющегося в зависимости от температуры. Начальное напряжение сдвига увеличивается при снижении температуры и резко возрастает при температурах, близких к температуре затвердевания.

§ 2. Линейные гидравлические сопротивления

При исследовании вопроса о гидравлическом сопротивлении в применении к расплавленным металлам, как это следует из предыдущего, необходимо различать два основных, принципиально

отличных случая, определяемых механизмом движения: течение расплавленных металлов при температурах, превышающих температуру кристаллизации, и течение металлов в интервале кристаллизации.

Наибольшее практическое значение имеет первый случай, когда, как это было показано выше, расплавленный металл может считаться ньютоновой жидкостью. Он в основном и подвергался исследованиям.

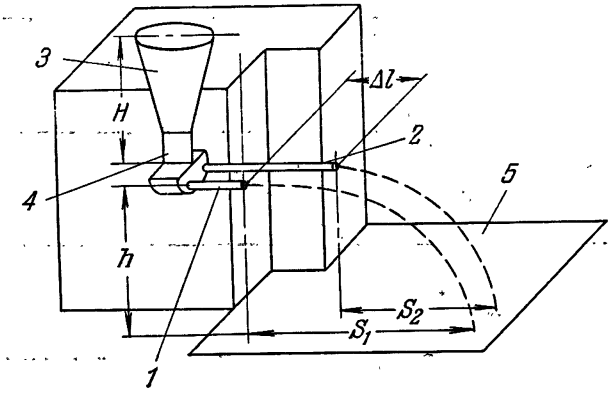


Рис. ПII.3. Экспериментальная установка Руффа.
1, 2 — цилиндрические каналы; *3* — металлоприемник; *4* — стояк; *5* — проволочная сетка.

Ряд работ в этой области был выполнен в связи с задачами литейного производства.

Рассмотрим несколько подробнее работы Руффа [10, 11], исследовавшего движение расплавленного ковкого чугуна и стали в цилиндрических каналах.

Экспериментальная установка Руффа (рис. ПII.3) состояла из вертикального литника, включающего металлоприемник и стояк, и двух горизонтальных каналов, отформированных в специальной формовочной земле («декстриновый песок»). Температура у начальных участков каналов, имевших внутренний диаметр $d=5{,}6$ и 8 *мм*, во время опытов поддерживалась постоянной и равной: для чугуна 1390—1400° С, для стали 1550—1560° С.

Опыты производились следующим образом: жидкий металл подавался в металлоприемник, протекал по горизонтальным каналам и изливался через выходные отверстия наружу, попадая на проволочную сетку и выжигая в ней отверстия на различных расстояниях от места вылива в зависимости от скорости истечения.

Величина скорости истечения определялась по формуле

$$V=S\sqrt{\frac{2g}{h}}.$$

Все произведенные измерения лежали в области турбулентного режима: $\mathbf{Re}=1{,}62\cdot10^4\div3{,}47\cdot10^4$.

Указанная установка оказалась весьма простой и удобной для проведения столь специфических экспериментов и в дальнейшем использовалась также рядом других исследователей.

Для определения коэффициента гидравлического сопротивления Руфф пользовался зависимостью

$$\lambda=\frac{4d(V_1-V_2)}{DL(V_1+V_2)}, \qquad \text{(ПП.1)}$$

где V_1 и V_2 — средние скорости течения жидкого металла по каналам *1* и *2*.

На основании обработки по этому выражению полученных экспериментальных данных были предложены следующие расчетные формулы:

для ковкого чугуна

$$\lambda=\frac{\mathbf{Re}^{0,53}}{116\,000}, \qquad \text{(ПП.2)}$$

для стали

$$\lambda=\frac{\mathbf{Re}^{0,15}}{183}.$$

Приведенные соотношения дают прямую зависимость между значениями коэффициента λ и числом Рейнольдса (с увеличением $\mathbf{Re}$ λ возрастает), что противоречит обычным, установившимся по этому поводу в гидромеханике понятиям и расходится с высказанными выше соображениями о механизме движения расплавленных металлов.

Подробный анализ принятой Руффом методики обработки экспериментальных данных показал, что она страдает рядом весьма грубых допущений и в первую очередь совершенно недопустимым усреднением таких величин, как скорость и ускорение.

Е. З. Рабиновичем [12, 13] была произведена обработка данных Руффа на основании несколько иных соображений, исходя из уравнения Бернулли в его обычном виде, составленного для крайних сечений потока, т. е. для сечения, совпадающего со свободной поверхности в металлоприемнике и выходных сечений

каналов. Определение значений коэффициента производилось по следующей простой зависимости:

$$\lambda=\frac{2gHd}{\Delta L}\left(\frac{1}{V_2^2}-\frac{1}{V_1^2}\right), \qquad \text{(ПII.3)}$$

где H — напор над центром тяжести выходных сечений каналов, d — диаметр каналов, ΔL — разность длин каналов ($\Delta L=L_2-L_1$), V_1, V_2 — скорости истечения расплавленного металла.

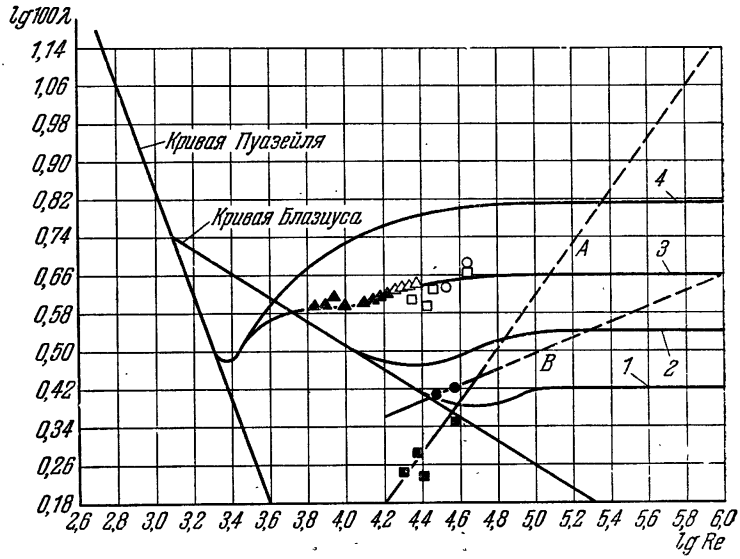


Рис. ПII.4. График Никурадзе изменения коэффициента гидравлического сопротивления λ от числа Рейнольдса Re для труб с однородной искусственной шероховатостью и экспериментальные точки различных авторов.

1, 2, 3, 4 — кривые Никурадзе для различных значений относительной шероховатости ε=0,0081; 0,0163; 0,0328; 0,0660; ▣ — экспериментальные точки Руффа для чугуна; ● — для стали; *A*, *B* — кривые по формулам Руффа для чугуна и стали; □ — экспериментальные точки по формуле Е. З. Рабиновича для чугуна; ○ — для стали; ▲ — экспериментальные точки Б. В. Рабиновича для чугуна при ΔL=640 *мм*; △ — при ΔL=250 *мм*.

Вычисленные по этой формуле значения λ были нанесены на известный график Никурадзе, суммирующий опыты по исследованию гидравлических сопротивлений в трубах с искусственной однородной шероховатостью (рис. ПII.4); там же показаны экспериментальные точки Руффа и построены кривые *A* и *B*, отвечающие формулам (ПII.2) и (ПII.3). На основании данных о механическом ситовом анализе «декстринового» песка было оп-

ределено также среднее значение относительной шероховатости для стенок каналов $\varepsilon = 0{,}0328$.

Экспериментальные точки, полученные по формуле (III.3) как для ковкого чугуна, так и для стали, достаточно хорошо соответствуют обычному ходу кривых Никурадзе, располагаясь на нем вдоль кривой *III*, отвечающей указанному выше значению относительной шероховатости.

На основании полученных результатов был сделан вывод о неприменимости формул Руффа и о том, что движение расплавленного черного металла в области турбулентного режима не отличается какими-то особенностями по сравнению с обычными случаями движения нормальных ньютоновых жидкостей.

Указанное положение в настоящее время является узаконенным и общепринятым при производстве различных гидравлических расчетов в области литейного дела.

Позднее аналогичные результаты были получены также Райтмайером [14] и Чикелем и Гроссманом [15].

Ряд интересных, тщательно поставленных опытов на установке, подобной установке Руффа, выполнил Б. В. Рабинович [16].

Результаты этих экспериментов представлены на том же графике Никурадзе (рис. III.4); как видно из графика, соответствие с результатами Никурадзе очень хорошее.

Большое число работ по определению гидравлических сопротивлений при движении расплавленных металлов в трубах и каналах было выполнено в связи с задачами устройства ртутно-паровых котлов, а затем и в связи с проблемами использования жидкометаллических теплоносителей в ядерной энергетике.

Михеев, Баум, Воскресенский и Федынский [17] исследовали изотермическое и неизотермическое течение тяжелых и щелочных расплавленных металлов в стальных и медных шлифованных трубах различных диаметров; при этом перепад давлений в трубах измерялся жидкостными дифференциальными манометрами.

Изучалось также влияние смачивания поверхностей при течении расплавленного олова в окисленных (вороненных) и луженых стальных трубах.

В результате исследований было установлено, что во всех случаях коэффициенты гидравлического сопротивления в трубах для металлических и неметаллических жидкостей одинаково зависят от числа **Re** и что гидравлические расчеты следует производить по формулам обычной гидравлики.

Боришанский и Кутателадзе [18, 19] изучали течение расплавленного висмута и эвтектики свинец—висмут в обычных промышленных стальных трубах диаметром $d = 9{,}09$ и $9{,}95$ *мм*. Опыты производились как при изотермическом, так и при неизотерми-

ческом течении. Перепад давлений в трубах измерялся жидкостными обогреваемыми манометрами, и коэффициент сопротивления определялся из формулы Дарси—Вейсбаха

$$\lambda = \frac{2gd\dfrac{\Delta p}{\gamma^*}}{LV^2}. \qquad \text{(ПII.4)}$$

Полученные результаты представлены графически в координатах $\lambda = f(\mathbf{Re})$ на рис. ПII.5 и ПII.6.

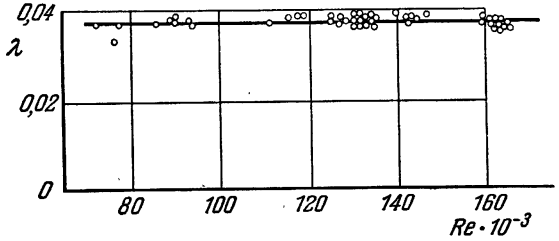


Рис. ПII.5. Поведение коэффициента гидравлического сопротивления λ при изменении числа Рейнольдса **Re** при течении висмута в стальной шероховатой трубе промышленного изготовления.

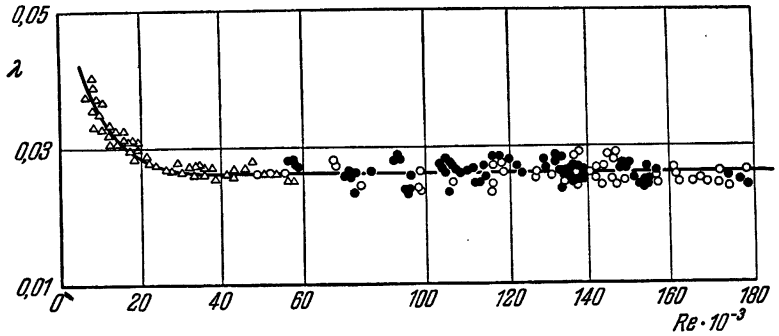


Рис. ПII.6. Изменение коэффициента гидравлического сопротивления λ в зависимости от числа Рейнольдса **Re** при течении эвтектики свинец—висмут в шероховатой трубе из стали 20.

△ — опыты с водой; ○ — изотермическое течение эвтектики; ● — неизотермическое течение эвтектики.

В опытах с висмутом, проводившихся в изотермических условиях при температуре потока 360—470° С и числах Рейнольдса

Re=73 000—165 000, экспериментальные точки располагаются вдоль горизонтальной прямой со средним значением $\lambda=0{,}032$ (рис. ПП.5).

Опыты с эвтектикой свинец—висмут (43,5% свинца и 56,5% висмута, по весу) при изотермическом течении проводились при температуре 200—2800° С в интервале значений **Re** от 45 000 до 175 000. Результаты опытов показаны на рис. ПП.6. Там же нанесены и экспериментальные точки для воды при числах **Re**= =5000—50 000.

Более низкие значения λ на этом графике (чем в опытах с висмутом) объясняются меньшей шероховатостью стенок.

Неизотермическое течение эвтектики, создававшееся различными тепловыми нагрузками (до $q\approx 800\,000$ *ккал/м² час*), характеризовалось температурами 170—280° С при значениях **Re**= =55 000—180 000. Полученные в этом случае экспериментальные точки расположились на том же графике (рис. ПП.6) около средней линии.

Все эти результаты являются подтверждением справедливости сделанных выше выводов о том, что гидравлические сопротивления при движении расплавленных металлов в области турбулентного режима при больших числах Рейнольдса подчиняются квадратичному закону и могут рассчитываться по формулам гидравлики обычных жидкостей.

При этом, как показывают опыты Боришанского и Кутателадзе, это оказывается справедливым как для изотермического, так и для неизотермического течения, и следовательно, изменение тепловой нагрузки не оказывает здесь заметного влияния на величину гидравлических сопротивлений.

Для полноты картины следует рассмотреть также вопрос о гидравлических сопротивлениях при течении расплавленных металлов в доквадратичной области турбулентного режима и в области гладкого трения. Можно ожидать, что и здесь имеют место те же закономерности, что и для обычных ньютоновых жидкостей. Имеющиеся по этому поводу, правда весьма ограниченные, экспериментальные данные подтверждают правильность этого предположения.

В работах Стыриковича, Семеновкера, Сорина [20] и Канаева [21] исследовалось течение ртути в стальных промышленных трубах. Опыты проводились в изотермических условиях при температурах от 20 до 500° С в интервале значений чисел Рейнольдса **Re**=20 000÷400 000. Этими опытами было установлено, что при **Re**>50 000 имеет место квадратичный закон сопротивлений, а при меньших значениях **Re** изменение соответствует закономерностям, полученным при течении воды в промышленных трубах.

Таким образом, можно считать, что во всей области турбулентного режима расплавленные металлы ведут себя подобно обычным, ньютоновым жидкостям. При этом различие коэффициента сопротивления при изотермическом и неизотермическом течениях имеет место лишь в областях гладкого трения и доквадратичной, где λ является функцией числа Рейнольдса.

Весьма существенным является также и то обстоятельство, что гидравлические сопротивления, как это было показано опытами Михеева и др.*), не зависят от смачивающей способности жидкостей.

Движение расплавленных металлов при ламинарном режиме почти не подвергалось специальному изучению. Однако имеющиеся в литературе весьма многочисленные данные по определению гидравлических сопротивлений при ламинарном режиме для самых разнородных как по химическому составу, так и по своим физическим свойствам жидкостей во всех случаях показывают полное соответствие с формулой Пуазейля—Стокса. Поэтому имеются основания предполагать, что и расплавленные металлы при ламинарном режиме ведут себя аналогично обычным жидкостям и коэффициент сопротивления для них следует также определять по указанной формуле, естественно считаясь при этом с температурным режимом процесса.

§ 3. Местные сопротивления

Большое значение при расчетах гидравлических систем имеет учет местных сопротивлений, представляющих собой различного рода конструктивные вставки — сужения и расширения, колена, тройники и т. д., необходимость устройства которых обусловливается технологическими и эксплуатационными требованиями. Вызываемые этими сопротивлениями местные потери напора в некоторых случаях, например в литниковых системах при небольшой протяженности литниковых каналов, могут иметь решающее значение в общем балансе потерь напора.

В настоящее время можно считать вполне установленным, что при турбулентном режиме коэффициенты местных сопротивлений зависят только от вида и конструктивных особенностей самих сопротивлений; влияние же вязкости начинает проявляться только в области ламинарного режима, где эти коэффициенты являются функцией также и от числа Рейнольдса.

Обобщенная формула для определения коэффициентов местных сопротивлений, применимая как при ламинарном, так и при

*) См. цитированную выше работу.

турбулентном режиме, имеет следующий вид:

$$\zeta=\frac{A}{\mathrm{Re}}+\zeta_{к}, \qquad \text{(ПII.5)}$$

где A — эмпирический коэффициент, зависящий от вида местного сопротивления; $\zeta_к$ — коэффициент местного сопротивления в квадратичной (автомодельной) области турбулентного режима.

В частном случае турбулентного режима при больших числах Рейнольдса (автомодельная область) первый член формулы (ПII.5) оказывается весьма малым по сравнению со вторым членом и им оказывается возможным пренебречь. Наоборот, при $\mathrm{Re}\leqslant 10$ решающее значение получает первое слагаемое.

При больших же значениях числа Рейнольдса в области ламинарного режима, так же как и в доквадратичной зоне турбулентного режима, коэффициенты местных сопротивлений определяют по общей формуле (ПII.5) или по формуле

$$\zeta=\frac{B}{\mathrm{Re}^{n}}, \qquad \text{(ПII.6)}$$

где B — коэффициент, устанавливаемый по виду местного сопротивления, $n\approx 0{,}285$.

Следует иметь в виду, однако, что до сих пор вопрос о местных сопротивлениях при ламинарном режиме исследован все еще недостаточно полно. Имеющиеся для этого случая данные весьма скудны и требуют проверки и дальнейшего уточнения.

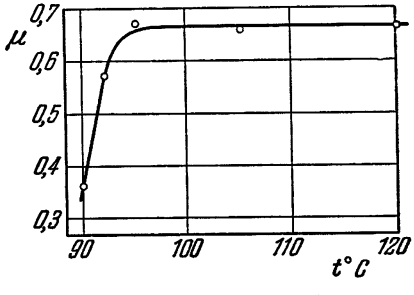


Рис. ПII.7. Изменение коэффициента расхода μ в зависимости от температуры t при истечении из данного отверстия в тонкой стенке (сплав Вуда).

Более обстоятельно исследован вопрос о местных сопротивлениях при турбулентном режиме. При практических расчетах в этой области, как уже указывалось, коэффициенты местных сопротивлений считают зависящими только от характера и конструктивного оформления самого сопротивления.

Число специальных работ, посвященных исследованию местных сопротивлений при движении расплавленных металлов, весьма ограниченно; основные результаты, полученные в этих работах, приводятся ниже.

Е. З. Рабинович [13] исследовал истечение сплава Вуда из донного отверстия в тонкой стенке с острыми кромками; значения числа Рейнольдса в этих опытах не превышали 10 000.

Результаты опытов представлены кривой, показывающей изменение коэффициента расхода μ в зависимости от температуры расплава (рис. ПП.7). Этот график показывает, что при температурах, далеких от температуры затвердевания, коэффициент расхода при истечении расплавов может считаться постоянным и его значения в этой области практически такие же, как для обычных ньютоновых жидкостей.

Резкое изменение величины коэффициента расхода наблюдается лишь при температурах, близких к температуре затвердевания, т. е. в той области, где расплав представляет собой неньютонову жидкость. Как видно из графика, значения коэффициента расхода здесь резко уменьшаются с падением температуры.

Аналогичные результаты были получены Е. З. Рабиновичем и при исследованиях местных сопротивлений в колене (плавное закругление).

Боришанский и Кутателадзе [18] провели ряд экспериментов по определению времени истечения t определенных объемов W ртути и воды через диафрагмы. Данные измерений для обеих жидкостей расположились на одной прямой в координатах $t = f(W^{1/2})$ для каждого типа диафрагмы. На основании этого авторы приходят к выводу о достоверности измерений расхода металлической жидкости дроссельными приборами и возможности расчета местных сопротивлений в потоке расплавленного металла по обычным формулам гидравлики. К такому же выводу пришли также Михеев, Баум, Воскресенский и Федынский [17].

§ 4. Физические свойства жидких металлов

Данные о физических свойствах жидких металлов сравнительно ограничены и в значительной степени противоречивы. Приводимые ниже данные получены в результате сопоставления и некоторого осреднения значений, указанных в различных литературных источниках [22—24]. Их ни в коем случае не следует рассматривать как рекомендуемые справочные данные, а лишь как ориентировочные значения, которые можно использовать для грубых, предварительных расчетов.

Физические свойства сплавов зависят в очень сильной степени от состава сплава. Они требуют подробного рассмотрения и потому здесь не приводятся.

Температура плавления. Температура плавления металлов изменяется в весьма широких пределах. Большинство металлов

Таблица 1

Температура плавления некоторых металлов

Металл	Температура плавления, °С
Ртуть	−38,0
Галлий	29,9
Калий	63,7
Натрий	97,8
Олово	231,9
Свинец	327,4
Цинк	419,5
Алюминий	660,2
Железо чистое	1535

Таблица 2

Плотности некоторых металлов

Металл	t, °С	Плотность	
		$\frac{кГ/сек^2}{м^4}$	$кг/м^3$
Калий,	100	83,48	819
»	700	68,91	676
Алюминий,	660	242,61	2380
»	1100	230,48	2261
Галлий,	32	621,67	6093
»	300	601,94	5905
Олово,	400	697,30	6840
»	700	676,66	6638
Цинк,	450	703,36	6900
»	800	669,72	6570
Свинец,	400	1071,35	10510
»	1000	1000,00	9810

в обычных температурных условиях находится в твердом состоянии. Исключение составляют ртуть и некоторые специальные сплавы; при сравнительно низкой температуре плавится галлий.

Температуры плавления некоторых металлов приведены в табл. 1.

Плотность. Плотность расплавленных металлов уменьшается с повышением температуры. Зависимость плотности от температуры для чистых металлов близка к линейной. На рис. ПІІ.8—ПІІ.10 показаны кривые изменения плотности для натрия, ртути и чистого железа.

Значения плотности для некоторых других металлов при различных температурах приведены в табл. 2.

Вязкость. Вязкость расплавленных металлов уменьшается с повышением температуры. Это уменьшение происходит особенно резко при температурах, близких к температуре кристаллизации,

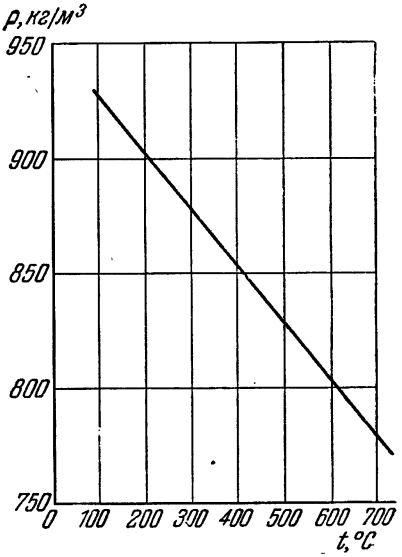


Рис. ПІІ.8. Изменение плотности натрия в зависимости от температуры.

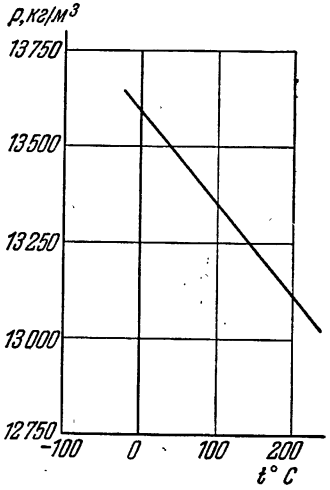


Рис. ПII.9. Изменение плотности железа в зависимости от температуры.

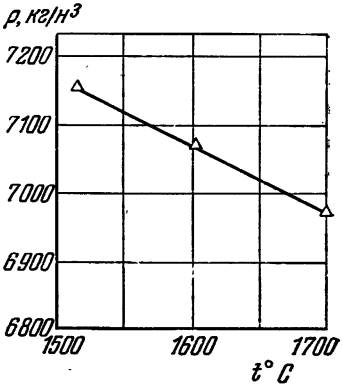


Рис. ПII.10. Изменение плотности ртути в зависимости от температуры.

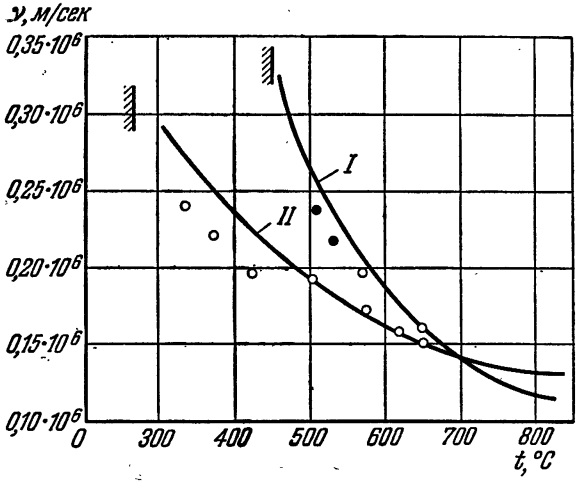


Рис. ПII.11. Изменение кинематической вязкости олова и свинца в зависимости от температуры ($м^2/сек$)

I — олово, *II* — свинец.

Таблица 3

Динамическая вязкость некоторых металлов

Металл	t, °С	Динамическая вязкость	
		$кГ \cdot сек/м^2$	$н \cdot сек/м^2$
Калий,	70	$0{,}052 \cdot 10^{-3}$	$0{,}515 \cdot 10^{-3}$
»	170	$0{,}0336 \cdot 10^{-3}$	$0{,}330 \cdot 10^{-3}$
»	250	$0{,}263 \cdot 10^{-3}$	$0{,}258 \cdot 10^{-3}$
»	700	$0{,}0139 \cdot 10^{-3}$	$0{,}136 \cdot 10^{-3}$
Натрий,	104	$0{,}0699 \cdot 10^{-3}$	$0{,}686 \cdot 10^{-3}$
»	170	$0{,}0514 \cdot 10^{-3}$	$0{,}504 \cdot 10^{-3}$
»	250	$0{,}0389 \cdot 10^{-3}$	$0{,}381 \cdot 10^{-3}$
»	700	$0{,}0185 \cdot 10^{-3}$	$0{,}182 \cdot 10^{-3}$
Ртуть,	−20	$0{,}189 \cdot 10^{-3}$	$1{,}85 \cdot 10^{-3}$
»	0	$0{,}171 \cdot 10^{-3}$	$1{,}68 \cdot 10^{-3}$
»	20	$0{,}158 \cdot 10^{-3}$	$1{,}55 \cdot 10^{-3}$
»	100	$0{,}123 \cdot 10^{-3}$	$1{,}21 \cdot 10^{-3}$
Галлий,	53	$0{,}193 \cdot 10^{-3}$	$1{,}89 \cdot 10^{-3}$
»	300	$0{,}105 \cdot 10^{-3}$	$1{,}03 \cdot 10^{-3}$
Олово,	240	$0{,}195 \cdot 10^{-3}$	$1{,}91 \cdot 10^{-3}$
»	300	$0{,}170 \cdot 10^{-3}$	$1{,}67 \cdot 10^{-3}$
»	400	$0{,}141 \cdot 10^{-3}$	$1{,}38 \cdot 10^{-3}$
»	600	$0{,}107 \cdot 10^{-3}$	$1{,}05 \cdot 10^{-3}$
Свинец,	440	$0{,}216 \cdot 10^{-3}$	$2{,}12 \cdot 10^{-3}$
»	550	$0{,}173 \cdot 10^{-3}$	$1{,}70 \cdot 10^{-3}$
»	845	$0{,}121 \cdot 10^{-3}$	$1{,}18 \cdot 10^{-3}$
Алюминий,	700	$0{,}296 \cdot 10^{-3}$	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$
»	800	$0{,}143 \cdot 10^{-3}$	$1{,}40 \cdot 10^{-3}$
Цинк,	450	$0{,}323 \cdot 10^{-3}$	$3{,}17 \cdot 10^{-3}$
»	500	$0{,}283 \cdot 10^{-3}$	$2{,}78 \cdot 10^{-3}$
»	600	$0{,}228 \cdot 10^{-3}$	$2{,}24 \cdot 10^{-3}$
»	700	$0{,}192 \cdot 10^{-3}$	$1{,}88 \cdot 10^{-3}$
Железо чистое,	1540	$0{,}754 \cdot 10^{-3}$	$7{,}40 \cdot 10^{-3}$
»	1600	$0{,}632 \cdot 10^{-3}$	$6{,}20 \cdot 10^{-3}$
»	1700	$0{,}571 \cdot 10^{-3}$	$5{,}60 \cdot 10^{-3}$
»	1800	$0{,}550 \cdot 10^{-3}$	$5{,}40 \cdot 10^{-3}$

как это видно из рис. ПП.11, где приведены зависимости кинематической вязкости расплавленных олова и свинца от температуры.

В табл. 3 приведены данные о вязкости некоторых металлов при различных температурах.

Поверхностное натяжение. Коэффициент поверхностного натяжения расплавленных металлов слабо изменяется с изменением температуры.

Средние значения этого коэффициента приведены в табл. 4.

Теплоемкость. Значения теплоемкости некоторых металлов приведены в табл. 5.

Теплопроводность. Теплопроводность расплавленных металлов существенно больше теплопроводности обычных жидкостей,

Таблица 4

Коэффициент поверхностного натяжения некоторых металлов

Металл	t °C	Коэффициент поверхностного натяжения	
		кГ/м	*н/м*
Калий,	100	0,0088	0,086
Натрий,	100	0,0210	0,206
»	250	0,0204	0,200
Свинец,	350	0,0451	0,442
»	500	0,0439	0,431
Ртуть,	20	0,0747	0,465
»	100	0,0464	0,455
Олово,	300	0,0536	0,526
»	500	0,0520	0,510
Алюминий,	750	0,0530	0,520
Галлий,	40	0,0749	0,735
Цинк,	500	0,0800	0,785
»	600	0,0783	0,768
Железо чистое,	1540	0,1896	1,860
»	1700	0,1814	1,780

Таблица 5

Теплоемкость некоторых металлов

Металл	t °C	Теплоемкость	
		ккал/кг · град	*дж/кг · град*
Ртуть,	0	0,0333	139,4
»	100	0,0328	137,3
Свинец,	400	0,0370	155,0
Олово,	250	0,0580	242,8
Галлий,	40	0,0820	343,3
Цинк,	450	0,1195	500,3
»	600	0,1173	491,1
Калий,	70	0,1960	820,6
»	200	0,1890	791,3
»	400	0,1830	766,2
Алюминий,	700	0,2590	1084,4
Натрий,	100	0,3300	1381,7
»	200	0,3200	1339,8
»	400	0,3050	1277,0

чем в основном и определяется характер теплообмена в металлических жидкостях.

Значения теплопроводности для некоторых металлов приведены в табл. 5.

Таблица 5

Теплопроводность некоторых металлов

Металл	t °C	Теплопроводность	
		ккал/м · сек · град	*вт/м · град*
Ртуть,	0	$1{,}96 \cdot 10^{-3}$	$82{,}06 \cdot 10^{-3}$
»	120	$2{,}61 \cdot 10^{-3}$	$109{,}28 \cdot 10^{-3}$
Свинец,	330	$3{,}90 \cdot 10^{-3}$	$163{,}29 \cdot 10^{-3}$
»	500	$3{,}70 \cdot 10^{-3}$	$154{,}92 \cdot 10^{-3}$
»	700	$3{,}60 \cdot 10^{-3}$	$150{,}73 \cdot 10^{-3}$
Галлий,	30	$8{,}00 \cdot 10^{-3}$	$335{,}00 \cdot 10^{-3}$
Олово,	240	$8{,}00 \cdot 10^{-3}$	$335{,}00 \cdot 10^{-3}$
»	300	$8{,}10 \cdot 10^{-3}$	$340{,}00 \cdot 10^{-3}$
»	400	$7{,}90 \cdot 10^{-3}$	$330{,}00 \cdot 10^{-3}$
Калий,	200	$10{,}70 \cdot 10^{-3}$	$447{,}41 \cdot 10^{-3}$
»	400	$9{,}56 \cdot 10^{-3}$	$400{,}00 \cdot 10^{-3}$
Цинк,	500	$13{,}8 \cdot 10^{-3}$	$577{,}80 \cdot 10^{-3}$
»	700	$13{,}5 \cdot 10^{-3}$	$565{,}24 \cdot 10^{-3}$
Натрий,	100	$20{,}5 \cdot 10^{-3}$	$857{,}93 \cdot 10^{-3}$
»	200	$19{,}5 \cdot 10^{-3}$	$816{,}46 \cdot 10^{-3}$
»	400	$17{,}0 \cdot 10^{-3}$	$711{,}79 \cdot 10^{-3}$
Алюминий,	700	$24{,}7 \cdot 10^{-3}$	$1034{,}19 \cdot 10^{-3}$
»	800	$29{,}0 \cdot 10^{-3}$	$1214{,}23 \cdot 10^{-3}$

Таблица 6

Электропроводность некоторых металлов

Металл	t °C	Электропроводность	
		м/ом · мм²	*сим/м*
Ртуть,	50	1,017	$1{,}017 \cdot 10^6$
»	100	0,969	$0{,}969 \cdot 10^6$
Свинец,	330	1,054	$1{,}054 \cdot 10^6$
»	400	1,020	$1{,}020 \cdot 10^6$
»	800	0,858	$0{,}858 \cdot 10^6$
Олово,	240	2,100	$2{,}100 \cdot 10^6$
»	400	1,946	$1{,}946 \cdot 10^6$
»	600	1,760	$1{,}760 \cdot 10^6$
Цинк,	450	2,840	$2{,}840 \cdot 10^6$
»	500	2,825	$2{,}825 \cdot 10^6$
»	700	2,805	$2{,}805 \cdot 10^6$
Галлий,	30	3,680	$3{,}680 \cdot 10^6$
»	46	3,520	$3{,}520 \cdot 10^6$
Алюминий,	700	4,880	$4{,}880 \cdot 10^6$
»	800	4,460	$4{,}460 \cdot 10^6$
Калий,	65	7,570	$7{,}570 \cdot 10^6$
»	250	4,000	$4{,}000 \cdot 10^6$
Натрий,	100	10,370	$10{,}370 \cdot 10^6$
»	250	6,710	$6{,}710 \cdot 10^6$
»	350	5,430	$5{,}430 \cdot 10^6$

Электропроводность. Расплавленные металлы обладают наибольшей среди всех жидкостей электропроводностью. С повышением температуры электропроводность металлов уменьшается.

Значения электропроводности для некоторых металлов приведены в табл. 6.

Магнитная проницаемость. Некоторые расплавленные металлы обладают парамагнитными, другие — диамагнитными свойствами. Однако при изучении магнитогидродинамических явлений, магнитную проницаемость всех расплавленных металлов практически можно принять равной магнитной проницаемости пустоты, т. е. полагать относительную магнитную проницаемость равной единице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боришанский В. М., Кутателадзе С. С., Новиков И. И., Федынский О. С., Жидкометаллические теплоносители, Атомиздат, Москва, 1967.
2. Рабинович Е. З., Экспериментальное исследование движения расплавленного металла в открытом канале, Доклады АН СССР IV, № 3 (1946).
3. Portevin A., Bastien P., Facteurs principaux de la coulabilite des metaux pures C. R. Acad. Sci. **194** (1932).
4. Portevin A., Bastien P., Contribution a l'etude de la coulabilite des alliges ternaires C. R. Acad. Sci. **196** (1933).
5. Нехендзи Ю. А., Самарин А. М., Жидкотекучесть металлов и новая проба для стали, Труды ЦНИИ МТМ, № 5 (1946).
6. Гуляев Б. Б., Расчет жидкотекучести, Литейное производство, Машгиз, Москва, 1949.
7. Рабинович Е. З., Некоторые вопросы гидравлики расплавленных металлов, В сб. «Гидродинамика расплавленных металлов», Изд. АН СССР, Москва, 1958.
8. Рабинович Е. З., Особенности течения расплавленных металлов вблизи температур кристаллизации, Труды Моск. нефт. ин-та им. Губкина **23** (1958).
9. Рабинович Е. З., О механизме движения расплавленных металлов, Труды Межвузовской научно-технической конференции, Машгиз, Москва, 1960.
10. Ruff W., The running quality of liquid malleable iron and steel, The Iron Steel Institute Carnegie Scolarship Memoirs, XXV (1936).
11. Ruff W., Beitrag zur Bestimung von Zaufeigenschaften von flussigen Metallen Zs. f. Metallkunde **29**, № 7 (1937).
12. Рабинович Е. З., О формулах для коэффициента сопротивления при движении расплавов, Доклады АН СССР, IV, № 5 (1946).
13. Рабинович Е. З., О гидравлических сопротивлениях при движении жидких металлов, Изв. АН СССР (ОТН), № 7 (1946).
14. Ruddle R., Correspondence of the paper B. Rightmire and Taylor, The fluidity of molten steel, Journal of Iron and Steel Institue **176** (1954).
15. Czikel J., Grossman H., Zeitmessungen an einer stabförmigen Vergiessbarkeitsprobe, deren wissenschaftliche und technische Auswertung Freiberger, Forschungsheft **138** Giesserreiwesen (1958).
16. Рабинович Б. В., Введение в литейную гидравлику, Машгиз, Москва, 1966.

17. Михеев М. А., Баум В. А., Воскресенский К. Д., Федынский О. Д., Теплоотдача расплавленных металлов (Доклад на Международной конференции по мирному использованию атомной энергии), 1955.
18. Боришанский В. М., Кутателадзе С. С., О расчете теплопередачи и гидравлического сопротивления при течении жидких металлов в трубах, Энергомашиностроение, № 6 (1957).
19. Боришанский В. М., Кутателадзе С. С., Теплоотдача и гидравлические сопротивления при течении жидких металлов, Журнал технической физики, XXVIII, № 4 (1958).
20. Стырикович М. А., Семеновкер И. Е., Сорин А. Р., Исследование движения парортутной смеси по трубам, Советское котлотурбостроение, № 11 (1940).
21. Канаев А. А., Теплообмен и гидравлическое сопротивление при течении ртути в трубах, Котлотурбостроение, № 2 (1953).
22. Никольский И. А., Калакуцкая И. А., Пчелкин И. М., Классен Г. В., Вельтищева В. А., Теплоэнергетика, № 2 (1959).
23. Чиркин В. С., Теплофизические свойства материалов (справочное руководство), Физматгиз, Москва, 1959.
24. Жидкометаллические теплоносители, ИЛ, Москва, 1958.

ДОПОЛНЕНИЯ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

За время, в течение которого эта книга редактировалась и набиралась, появились весьма существенные новые результаты, главным образом экспериментальные, в свете которых одни предположения, высказанные в книге, превратились во вполне достоверные факты, другие же (к счастью, таких немного) — стали сомнительными. Сказанное относится прежде всего к проблеме магнитогидродинамической турбулентности, изучение которой увенчалось буквально в последние месяцы разносторонними успехами. Картина затухающей в магнитном поле турбулентности, которую позволяют нарисовать эти новые результаты, столь своеобразна, она воспринимается гидродинамиками, свыкшимися с закономерностями «обычной», немагнитной турбулентности, как нечто, если можно так выразиться, столь драматическое, что казалось досадным совершенно не отразить этого в книге или удовлетвориться лишь теми предварительными сведениями, которые вошли в основной ее текст.

Аналогично обстоит дело с примыкающими к проблеме турбулентности вопросами о влиянии магнитного поля на возмущения течения и на переход от ламинарного течения к турбулентному. Сообщить читателю об этих новейших результатах кажется необходимым еще и потому, что, с одной стороны, они несомненно могут служить отправной точкой дальнейших исследований, а с другой, — уже в нынешнем своем виде представляют бесспорную ценность для инженерных приложений. Наконец, некоторые из полученных результатов показывают, как наложение магнитного поля на поток электропроводящей жидкости может стать действенным аналитическим средством в арсенале общей гидродинамики.

Существенные новые результаты получены также в отношении магнитогидродинамических пограничных слоев, а также некоторых других вопросов.

Поскольку, однако, включить этот новый материал в соответствующие главы не было уже технической возможности, мы решили присовокупить их к книге в виде настоящих кратких

дополнений. По причинам опять-таки техническим нет возможности снабдить изложение иллюстрациями, изображающими экспериментальные данные и призванными дать возможность читателю самому проследить за ходом и убедительностью рассуждения, ведущего от гипотезы к эксперименту и от результатов эксперимента (часто более или менее косвенного) к воссоздаваемой картине течения.

1. Действие поперечного магнитного поля на возмущения течения [1, 2, 3]

Представим себе трубу круглого или прямоугольного сечения, часть длины которой проходит в зазоре магнита. Пусть в трубу вмонтирован круглый цилиндр, ось которого перпендикулярна к магнитному полю. Расположим сначала трубу так, чтобы цилиндр находился в магнитном поле. Будем поддерживать некоторую постоянную скорость течения в трубе, соответствующую числу Рейнольдса, при котором имеет место отрывное течение и турбулентный след, и станем наблюдать течение, последовательно увеличивая индукцию поля (как уже было сказано, здесь не описывается способ, с помощью которого мы «наблюдаем» течение — это может быть и визуальное наблюдение за подкрашенными струйками электролита, и косвенное, осуществляемое через посредство анемометрических измерений, измерений потенциалов и т. д.). Сначала под влиянием магнитного поля сокращается протяженность следа и интенсивность движения в нем, смещаются по направлению к кормовой части цилиндра точки отрыва потока. Если без магнитного поля оси индивидуальных вихрей в следе преимущественно параллельны оси цилиндра, от взаимодействия которого с потоком они произошли, то теперь на некотором удалении от цилиндра оси вихрей становятся параллельными магнитному полю и перпендикулярными к оси цилиндра. (Напомним, что вихрь, ось которого направлена вдоль магнитного поля, взаимодействует с последним тем слабее, чем больше протяженность вихря, т. е. чем ближе движение в нем к плоскому; см. § 2 гл. I). При еще большей индукции магнитного поля течение становится безотрывным — образование вихрей нормальной ориентации, т. е. с осью, параллельной оси цилиндра, не допускается магнитным полем, образование же таких вихрей, с которыми поле не взаимодействует, т. е. с осью вдоль поля, не допускается граничными условиями (расположением твердой поверхности цилиндра). Теперь, если в магнитное поле вступает невозмущенный поток, то на весьма малом удалении (2—3 диаметра) от цилиндра вниз по течению поток снова оказывается невозмущенным.

Если же в магнитное поле вступает турбулентный поток или поток, несущий какие-либо другие возмущения, то на небольшом расстоянии от цилиндра интенсивность возмущений оказывается даже меньшей, чем интенсивность, имеющая место при отсутствии цилиндра и прочих равных условиях.

Этот парадоксальный результат, полученный в экспериментах, можно объяснить таким образом. Возмущения, приносимые потоком на экспериментальный участок из участков, расположенных выше по течению, ослабляются при обтекании цилиндра (аналогично тому, как это происходит при течении через решетку, хонейкомб или конфузор). Новых же возмущений цилиндр не вносит, так как след за ним подавлен магнитным полем.

Переместим теперь трубу вдоль ее оси так, чтобы цилиндр расположился вне полюсов магнита, на некотором удалении (выше по течению) от места вступления потока в магнитное поле. Измеритель же пульсаций скорости поместим между полюсами магнита, возможно ниже по течению от места вступления потока в магнитное поле. И снова результат парадоксален: измеряемая интенсивность возмущений при включенном магнитном поле оказывается существенно выше, чем без него. Это объясняется тем, что возмущения, как несомые потоком, так и возбуждаемые цилиндром, вступая в магнитное поле, деформируются и переориентируются, приспосабливаясь к магнитному полю так, чтобы джоулева диссипация была минимально возможной. Но одновременно под влиянием магнитного поля происходит также уменьшение вязкой диссипации. Причина этого следующая. В отсутствие магнитного поля движение в крупных возмущениях теряет устойчивость и в результате крупные возмущения дробятся на более мелкие, те в свою очередь на еще более мелкие и т. д., пока энергия возмущения не рассеивается вязкостью. Это — известный процесс Колмогорова—Ричардсона, процесс передачи энергии по спектру возмущений в сторону больших волновых чисел. При наличии магнитного поля повышается не только устойчивость основного течения и прекращается генерация возмущений, но повышается также устойчивость течения внутри уже существующих возмущений и прекращается передача энергии по спектру, а следовательно, резко уменьшается вязкая диссипация. Магнитное поле, таким образом, как бы консервирует вступающие в него возмущения — рассеяние их энергии минимально и они сохраняются в потоке в течение длительного времени (на большой длине).

Если теперь повернуть трубу вокруг ее продольной оси на 90° так, чтобы ось цилиндра стала параллельной магнитному полю, то описанные выше явления еще усиливаются, поскольку отрыва-

ющиеся при обтекании цилиндра вихри ориентированы наивыгоднейшим образом (в смысле минимальности джоулевой диссипации) еще до вступления в магнитное поле. Наконец, если, не меняя ориентации цилиндра, вдвинуть его в зазор магнита, то измеритель укажет увеличение интенсивности возмущений в несколько раз. Дело в том, что след теперь с самого начала ламинарен и в нем сохраняются крупные, несущие большую энергию вихри дорожки Кармана.

2. О деформации возмущений в магнитном поле

В предыдущем пункте речь шла о тенденции возмущений к переориентации и формированию плоского течения в плоскости, перпендикулярной к направлению вектора индукции магнитного поля. Наряду с этой тенденцией имеет место и другая (о ней речь шла в § 1 гл. III): возмущение стремится деформироваться таким образом, чтобы его размер в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, стал значительно меньше размера в направлении поля. Для подтверждения этой тенденции был предпринят численный эксперимент. Исходя из полной системы уравнений Навье—Стокса, рассчитывалось течение электропроводящей жидкости в плоской квадратной области, на границах которой задавалась постоянная касательная составляющая скорости, направленная всюду против часовой стрелки (или по ней). Нормальная скорость была равна нулю. Магнитное поле полагалось перпендикулярным к одной паре отрезков, ограничивающих рассматриваемую область.

В отсутствие магнитного поля наблюдается симметричное течение, линии тока которого близки к круговым на незначительном удалении от границы области. Однако при наличии достаточно сильного магнитного поля течение распадается на два вихря, сильно вытянутых вдоль магнитного поля и прижатых к стенкам, параллельным магнитному полю, т. е. тенденция, рассмотренная в гл. III, получает дополнительное подтверждение.

3. Профили интенсивности турбулентных пульсаций в трубе при наличии поперечного магнитного поля [4, 5]

Пусть имеется труба круглого или прямоугольного поперечного сечения, в которой на расстоянии 40—50 характерных размеров сечения вниз по потоку от места вступления в магнитное поле установлен измеритель пульсаций скорости (продольной компоненты), который можно перемещать по сечению и получать таким образом профили интенсивности.

Ограничимся рассмотрением профилей лишь по той оси сечения трубы, которая параллельна магнитному полю.

В отсутствие магнитного поля и при слабом поле интенсивность пульсаций в пределах тонкого пристеночного слоя увеличивается от нуля на самой стенке до максимума, а далее монотонно уменьшается по мере приближения к оси потока. Иначе говоря, в пределах почти всего сечения имеет место отрицательный градиент интенсивности пульсаций от стенки к оси. Это обусловливает диффузию турбулентности от стенки к оси. По мере увеличения напряженности магнитного поля градиент профиля интенсивности приближается к нулю (сама интенсивность отнюдь не стремится к нулю, хотя и уменьшается), а затем устанавливаются профили с положительными градиентами, т. е. интенсивность пульсаций на оси потока больше, чем вблизи стенки. Предположить, что турбулентность генерируется вблизи оси, нельзя, так как в присутствии поперечного магнитного поля большой напряженности профиль осредненной скорости в ядре потока совершенно плоский. Остается заключить, что генерация турбулентности полностью прекратилась, а измеритель скорости фиксирует возмущения, приносимые потоком из участков, расположенных выше магнита. Вблизи стенки роль вязкости больше и, кроме того, здесь движение в вихрях, ориентированных вдоль поля, менее чем в других местах потока может приближаться к плоскому, а потому возмущения затухают быстрее, чем в ядре, где справедливо все то, о чем шла речь в пункте 1. Этим и объясняется наличие положительного градиента профилей интенсивности от стенки к оси.

То отношение чисел Рейнольдса и Гартмана, при котором профиль интенсивности пульсаций становится однородным (градиент равен нулю), соответствует критическому отношению, определенному по совпадению экспериментального значения коэффициента сопротивления с коэффициентом сопротивления, соответствующим теории ламинарного течения.

4. Зависимость интенсивности пульсаций продольной скорости на оси потока от отношения числа Гартмана к числу Рейнольдса [5, 6]

До того, как были начаты исследования локальных характеристик турбулентных магнитогидродинамических течений, можно было ожидать, что при достаточно большом отношении числа Гартмана к числу Рейнольдса соответствующая турбулентным пульсациям скорости беспорядочно колеблющаяся кривая на экране осциллографа сменяется прямой линией, т. е. интенсивность становится равной нулю. Первые же попытки измерения

показали, что это не так. Согласно последним данным, после прекращения генерации турбулентности интенсивность не только сохраняет около 30 или даже более процентов исходного значения, но при дальнейшем увеличении числа Гартмана интенсивность даже несколько увеличивается и лишь после этого начинает медленно убывать. Увеличение объясняется тем, что движение внутри возмущений становится устойчивым и прекращается передача энергии по спектру, благодаря чему возмущения достигают сечения с измерителем, сохранив бо́льшую часть своей энергии (подробнее аналогичное явление уже обсуждалось в пункте 1).

5. О применимости кондукционного анемометра для изучения магнитогидродинамической турбулентности [7]

Если кондукционный анемометр используется для изучения турбулентности в потоке, в котором еще сохранилась генерация турбулентности, то справедливы все соображения об ограничениях его возможностей, которые рассматривались в основном тексте книги (§ 4 гл. I). Однако если изучению подвергается затухающая в магнитном поле турбулентность, то возможности и достоинства кондукционного анемометра значительно увеличиваются. В самом деле, все ограничения возможностей этого устройства проистекают от того, что измеряемая разность потенциалов зависит не только от скорости, являющейся объектом изучения, но также и от электрических токов, текущих в жидкости и величина которых неизвестна. Но затухающая в магнитном поле турбулентность перестраивается так, чтобы токи и соответственно джоулева диссипация энергии были минимальными. Поэтому кондукционный анемометр даже при пренебрежении токами позволяет получить результат, близкий к истинному. Специальные эксперименты показали, что погрешность измерения интенсивности затухающей турбулентности в сильном магнитном поле становится менее 10%.

6. Об использовании магнитогидродинамических экспериментов для изучения общих закономерностей «немагнитной» турбулентности

В предисловии к этой книге было высказано предположение о том, что наложение магнитного поля на поток электропроводящей жидкости может явиться средством исследования закономерностей общей гидродинамики, в частности, проблемы турбулент-

ности. Исследования, проведенные в последнее время, часть результатов которых была описана в предшествующих пунктах настоящих дополнений, действительно содержат данные, позволяющие сделать выводы, которые имеют серьезное значение в общей гидродинамике. Остановимся лишь на одном из них.

Исследования турбулентности, проведенные в последнее время, показали, что следует различать потерю устойчивости и переход к турбулентности. Различие не только в том, что в первом случае речь идет о бесконечно малых возмущениях, а во втором — о конечных, но также и в том, что в отношении потери устойчивости согласно теореме Сквайра наиболее опасны двумерные возмущения, тогда как переход к турбулентности, судя по некоторым недавним экспериментам, сопряжен с наличием трехмерных возмущений.

В связи с этим описанные выше результаты магнитогидродинамических экспериментов позволяют высказать следующее общее суждение: *Переход к турбулентности в любом (немагнитогидродинамическом) течении невозможен без посредства трехмерных возмущений.*

В самом деле, поперечное магнитное поле сколь угодно большой напряженности не препятствует существованию двумерных возмущений в плоскости, перпендикулярной к полю. Вместе с тем, как мы видели выше, начиная с некоторого отношения чисел Гартмана и Рейнольдса генерация турбулентности прекращается, т. е., несмотря на наличие двумерных возмущений (притом конечных), переход к турбулентности не происходит из-за того, что магнитное поле не допускает существования трехмерных возмущений.

7. О магнитогидродинамических пограничных слоях

В основном тексте книги рассмотрены простейшие задачи магнитогидродинамического пограничного слоя в традиционной постановке общей гидродинамики (гл. VII). Различие сводится лишь к тому, что в уравнениях Прандтля присутствуют члены, соответствующие электромагнитной силе.

Существует, однако, большое число магнитогидродинамических течений, в которых образуются самые разнообразные пограничные слои, не имеющие ничего общего (за исключением того, что они тонкие) с традиционными пограничными слоями в общей гидродинамике.

Такие слои образуются, в частности, при наличии сильного магнитного поля [8—10]. Попытка дать классификацию этих слоев при обтекании тел предпринята в работе [11].

Картина обтекания тела в сильном однородном магнитном поле сводится к следующему. Вблизи поверхности тела, если оно электрически изолировано, образуются гартмановские пограничные слои толщиной, обратно пропорциональной числу Гартмана. В окрестности точек, где нормальная к поверхности тела составляющая поля равна нулю, образуются области с толщиной, обратно пропорциональной корню кубическому из квадрата числа Гартмана и протяженностью, обратно пропорциональной корню кубическому из числа Гартмана.

Кроме того, вдоль цилиндрической поверхности, касающейся поверхности тела, с образующей, параллельной полю, возникают свободные пограничные слои толщиной, обратно пропорциональной корню квадратному из числа Гартмана.

Вне этой цилиндрической поверхности поток однороден, а внутри скорость существенно отличается от скорости невозмущенного потока.

8. Искажение плоскопараллельного течения при входе в поперечное магнитное поле и выходе из него

В основном тексте книги уже указывалось, что на участках входа в магнитное поле и выхода из него плоское движение становится трехмерным. Дальнейшие эксперименты показали, что в достаточно сильном поперечном магнитном поле практически невозможно получить в канале прямоугольного сечения плоское течение, которое было бы сопоставимо с соответствующей теорией.

Причин для этого две. Во-первых, электрические токи, индуцируемые на участке с магнитным полем и замыкающиеся через жидкость вне поля, обусловливают повышение продольного градиента давления на экспериментальном участке. Чем выше напряженность магнитного поля, тем на большей длине существенно влияние этих концевых токов. Таким образом, несмотря на то, что профиль скорости стабилизуется в магнитном поле на короткой длине, определить экспериментально собственно гидродинамическое сопротивление оказывается невозможным, ибо на всей длине экспериментального канала продольный градиент давления искажен присутствием концевых электрических токов. Во-вторых, эксперименты подтвердили [12, 13] сделанный еще сравнительно давно Шерклифом вывод о том, что на концевых участках, где течение трехмерно, профили скорости в непроводящей трубе в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, имеют вблизи стенок языки. Языки эти могут сохраняться на большой длине потока.

9. Об использовании трубок Пито—Прандтля в магнитогидродинамических экспериментах [13]

В основном тексте книги (§ 5 гл. IX) обсуждался вопрос о необходимости тарировки трубок Пито—Прандтля по напряженности магнитного поля. При этом имелась в виду необходимость учета обусловленного полем повышения давления в передней критической точке насадка трубки. Однако было совершенно упущено из виду следующее простое, но важное обстоятельство. Трубка Пито—Прандтля в магнитогидродинамическом эксперименте используется обычно в достаточно узких трубах и каналах, в которых при всех условиях, а при наличии поперечного магнитного поля в особенности, велики продольные градиенты давления. Этим магнитогидродинамический эксперимент существенно отличается от эксперимента в аэродинамической трубе или водяной установке. В результате измерения скорости могут искажаться значительной разностью статического давления между точками, где располагаются динамическое и статическое приемные отверстия трубки (они удалены друг от друга обычно на 3—4 диаметра трубки). Сказанное особенно важно в том случае, когда стенки трубы изготовлены из хорошо проводящего материала, так как в этом случае продольный градиент давления особенно значителен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брановер Г. Г., Кит Л. Г., Козленко Н. И., Турунтаев С. В., Опыт Рейнольдса в магнитном поле, Магнитная гидродинамика, № 2 (1970).
2. Кит Л. Г., Турунтаев С. В., Цинобер А. Б., Исследование воздействия поперечного магнитного поля на возмущения скорости в следе за цилиндрическими телами с помощью кондукционного анемометра, Магнитная гидродинамика, № 3 (1970).
3. Кит Л. Г., Колесников Ю. Б., Цинобер А. Б., Штерн П. Г., Применение кондукционного анемометра при исследовании МГД-следа за телом, Магнитная гидродинамика, № 4 (1969).
4. Gardner A., Lykoudis P. S., Magneto-Fluid-Mechanic pipe flow in transverse magnetic field with and without heat transfer, AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference, San Francisco, California, June 16—18, 1969.
5. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М., Кит Л. Г., Платниекс И. А., Влияние поперечного магнитного поля на профили интенсивности турбулентных пульсаций скорости в трубе прямоугольного сечения, Магнитная гидродинамика, № 3 (1970).
6. Брановер Г. Г., Слюсарев Н. М., Щербинин Э. В., Измерение профилей скорости в плоском канале, расположенном длинной стороной сечения параллельно внешнему поперечному магнитному полю, Магнитная гидродинамика, № 4 (1970).

7. Кит Л. Г., Использование кондукционного анемометра с трехэлектродным датчиком для измерения турбулентных пульсаций скорости, Магнитная гидродинамика, № 3 (1970).
8. Шерклиф Дж. А., Исследования по магнитной гидродинамике и электромагнитному измерению расхода, проводимые в Уорвикском университете (Англия), Магнитная гидродинамика, № 4, 7 (1967).
9. Hunt J. C. R., Ludford G. S. S., Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields. Part 1. Obstacles in a constant area channel, J. Fluid Mechanics, **33**, № 4, (1968).
10. Куликовский А. Г., О медленных стационарных течениях при больших числах Гартмана, МЖГ, № 2, (1968).
11. Цинобер А. Б., Магнитогидродинамическое обтекание тел, «Зинатне», Рига (1970).
12. Кит Л. Г., Платниекс И. А., Цинобер А. Б., Петерсон Д. А., Исследование влияния пространственных концевых эффектов на магнитогидродинамическое течение в канале с непроводящими стенками, Магнитная гидродинамика, № 4 (1970).
13. Слюсарев Н. М., Шилова Е. А., Щербинин Э. В., Экспериментальное исследование МГД течения в диффузоре и конфузоре, Магнитная гидродинамика, № 4 (1970).

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

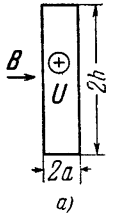
x — координата в направлении оси трубы.
y — координата в направлении внешнего магнитного поля.
z — координата в направлении, перпендикулярном магнитному полю и оси трубы.
L — характерный размер.
a — полуширина трубы в направлении магнитного поля.
b — полуширина трубы в направлении, перпендикулярном магнитному полю.
R — гидравлический радиус, равный отношению площади сечения трубы к ее периметру.
Δ — абсолютная величина шероховатости, k — высота шероховатости, отнесенная к характерному размеру сечения трубы.
U_0 — характерная скорость.
U_∞ — скорость на бесконечности.
V — средняя (расходная) скорость.
$\boldsymbol{U}$ — вектор полной скорости.
u, v, w — или u_1, u_2, u_3 — компоненты скорости по осям.
u', v', w' — или u'_1, u'_2, u'_3 — пульсационные составляющие соответствующих компонент скорости.
l — масштаб турбулентности и путь смешения.
p — давление.
τ — напряжение трения.
ρ — плотность жидкости.
ν — коэффициент кинематической вязкости.
σ — электрическая проводимость.
μ_0 — магнитная проницаемость вакуума.
μ — магнитная проницаемость среды.
$\boldsymbol{B}$ — вектор магнитной индукции.
B_0 — характерная величина магнитной индукции, величина магнитной индукции внешнего поля.
b_x, b_y, b_z — компоненты вектора магнитной индукции.
$\boldsymbol{E}$ — вектор напряженности электрического поля.
φ — потенциал электрического поля.
кр — индекс, обозначающий состояние перехода от ламинарного течения к турбулентному.
0 — индекс, указывающий, что величина относится к течению при отсутствии магнитного поля или что рассматривается некоторая характерная величина.
P — индекс, указывающий, что величина относится к течению Пуазейля в отсутствие магнитного поля.
H — индекс, указывающий, что величина относится к течению Гартмана.
w — индекс, относящийся к стенке.
т — индекс, указывающий на турбулентность.

R — индекс, указывающий на то, что при вычислении безразмерного критерия за характерный размер принят гидравлический радиус.

Динамическая скорость $u_*=\sqrt{\tau_w/\rho}$.
Универсальная скорость $\varphi=u/u_*$.
Универсальная координата $\eta=u_*y/\nu$.
Коэффициент сопротивления $\lambda=\tau_w/\rho\,\dfrac{V^2}{2}$.
Число Рейнольдса $\mathbf{Re}=U_0L/\nu$.
Магнитное число Рейнольдса $\mathbf{Re}_m=\mu_0\sigma U_0L$.
Число Альфвена $\mathbf{Al}=B_0^2/\mu_0\rho U_0^2$.
Число Гартмана $\mathbf{Ha}=B_0L\sqrt{\sigma/\rho\nu}$.
Число Стюарта $\mathbf{N}=\dfrac{\sigma B_0^2L}{\rho U_0}$.
Локальное число Рейнольдса $\mathbf{re}=\dfrac{l^2/\nu}{du/dy}$.
Локальное число Гартмана $\mathbf{ha}=B_0l\sqrt{\sigma/\rho\nu}$.

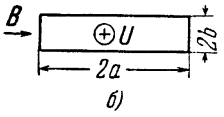
Все другие обозначения поясняются в тексте по ходу изложения.

Основные варианты взаимной ориентации магнитного поля и течения в трубе:



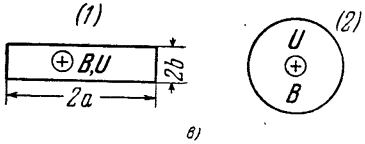
а)

— течение в плоскости поперечного магнитного поля.



б)

— течение в плоскости, которая перпендикулярна к поперечному магнитному полю.



в)

— плоское (*1*) и осесимметричное (*2*) течения в продольном магнитном поле.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрамович Г. Н. 324
Алстром Х. Г. (Ahlstrom H. G.) 279, 301
Альфвен Х. (Alfven H.) 14, 236
Андрес У. Ц. 242
Архипов В. Н. 127
Атабек Б. Х. (Atabek B. H.) 78

Баркер М. (Barker M) 298
Бастьен П. (Bastien P.) 342, 360
Баум В. А. 349, 354, 360
Бедин А. П. 242
Биллингс Ф. (Billings F.) 242
Блазиус Г. (Blasius H.) 93, 132, 245, 246, 253, 254, 255, 257, 258
Блерком ван Р. (Blerkom van R.) 242
Блум Э. Я. 79, 183, 185
Богданов Ю. В. 338
Болонов Н. И. 37, 183
Боришанский В. М. 349, 351, 354, 360, 361
Брандт А. (Brandt A.) 268
Брановер Г. Г. 8, 36, 59, 78, 79, 124, 125, 126, 183, 184, 264, 268, 303, 324, 338, 339
Браулит Ф. С. (Broilette F. C.) 184
Бэтчелор Г. К. (Batchelor G. K.) 14, 15, 123

Валиев Х. В. 241
Васильев А. С. 36, 78, 79, 125, 126, 185, 324
Ватажин А. Б. 207, 268, 302
Велихов Е. П. 127
Вельтищева В. А. 361
Вильямс Е. Дж. (Williams E. J.) 37
Витолиньш Г. Г. 79
Владимирова Н. Н. 277
Воскресенский К. Д. 349, 354, 360
Вулер П. Г. (Wooler P. G.) 114, 126
Вулис Л. А. 163, 185, 324, 338, 339

Гамель Г. (Hamel G.) 4, 198
Гаррис Л. П. (Harris L. P.) 133, 184, 264, 268, 326, 338
Гартман Ю. (Hartman J.) 44, 59, 73, 78, 88
Гельфгат Ю. М. 36, 78, 79, 124, 125, 126, 184, 185, 268, 303, 324
Генин Л. Г. 80, 125, 183
Герман С. (Hermant C.) 37
Гершуни Г. З. 241, 242
Гиллис И. (Gillis Y.) 268
Гинзбург И. П. 268
Глоуб С. (Globe S.) 103, 125
Голд Р. Р. (Gold R. R.) 62, 63, 64, 79
Гоман Ф. (Homan F.) 303
Гото К. (Gotoh K.) 36, 241, 242
Гринберг Г. А. 78
Гринспан Х. П. (Greenspan H. P.) 197, 207
Гроссман И. (Grossman I.) 349, 360
Гроссман Л. М. (Grossman L. M.) 37
Гуляев Б. Б. 343, 360
Гуревич Б. Я. 37, 267
Гусика П. Л. 339
Гущин Г. К. 37

Дайслер Р. Б. (Deissler R. B.) 86, 124
Дамбург Р. 241
Деардорф Дж. У. (Deardorff J. W.) 126
Деннис С. К. Р. (Dennis S. C. R.) 277
Джаугаштин К. Е. 323, 324
Джеффри Г. Б. (Jeffrey G. B.) 4, 198
Дидковский М. М. 303
Дмитриев К. И. 126
Донелли Р. И. (Donelly R. I.) 126
Дразин П. Г. (Drazin P. G.) 127
Драйст ван Е. Р. (Van Driest E. R.) 135, 141, 184
Дукуре Р. К. 79, 126, 185

Егидис Б. Н. 303
Елисеев Б. В. 124

Жилин В. Г. 125, 183
Жуховицкий Е. М. 241, 242

Зигель Р. (Siegel R.) 79

Иен И. Т. (Yen Y. T.) 78, 126
Имаи И. (Imai I.) 241
Ионас Г. (Yonas G.) 302
Иоффе Б. А. 338
Иошинобу Х. (Yoshinobu H.) 241, 242

Кавагути М. 273, 277
Какутани Т. (Kakutani T.) 127, 241
Калакутская И. А. 361
Калкан П. И. (Calcanes P. I.) 79
Калис Х. А. 276, 277, 302, 303
Канаев А. А. 351, 361
Канвал Р. П. (Kanval R. P.) 242
Карасик В. Р. 36
Кирко И. М. 36, 336, 338, 339
Кит Л. Г. 124
Китанин Э. Л. 267
Классен Г. В. 361
Клебанов П. С. (Klebanoff P. S.) 125
Ковнер Д. С. 23, 36, 125, 133, 171, 174, 180, 181
Колдуэлл Т. Дж. (Caldwell T. J.) 126
Колесников Ю. Б. 302, 303
Колин А. (Kolin A.) 37

Колмогоров А. Н. 120, 207
Коловандин Б. А. 37, 183
Косс Р. (Causse R.). 303
Котов Я. П. 241
Красильников Е. Ю. 36, 125, 180, 181, 183, 184, 185
Красносельский М. А. 207
Кросс Э. (Crausse E.) 281, 302, 303
Круминь Ю. К. 241
Крюгер Ц. Х. (Krüger C. H.) 268
Кузнецов В. Г. 277
Куликова Л. М. 338
Куликовский А. Г. 36, 77, 79
Курцвег У. Х. (Kurzweg U. H.) 126
Кусаинов М. К. 339
Кутателадзе С. С. 349, 351, 354, 360, 361
Куэтт М. (Couette M.) 81, 119

Ладыженская О. А. 241
Лазарус Ф. (Lazarus F.) 59, 78, 90, 264, 268
Лайон Г. М. (Lyon H. M.) 181
Ламб Г. (Lamb H.) 233, 238
Ламли Дж. Л. (Lumly J. L.) 86, 124
Ландау Л. Д. 36, 123
Лапидус М. Х. 338
Лауфер Дж. (Laufer J.) 125, 170, 185
Левин В. Б. 23, 36, 105, 120, 121, 125, 127, 133, 148, 149, 171, 174, 183, 184
Лейбович С. (Leibovich S.) 302
Лекок П. (Lecocq P.) 37, 124
Ленерт Б. (Lehnert B.) 85, 86, 123, 126, 183, 197, 198, 207
Леффлер А. Л. (Leoffler A. L.) 79, 268
Ли Г. (Li H.) 37
Ли К. С. (Li K. S.) 268
Лиелаусис О. А. 36, 78, 90, 126, 183, 184, 185, 302, 324, 327, 338, 339
Лиелпетер Я. Я. 338
Ликодис П. С. (Lykodis P. S.) 59, 88, 90, 124, 144, 145, 146
Липман Г. В. (Liepmann H. W.) 279, 301
Лифшиц Е. М. 36, 123
Логинов Н. И. 37
Лойцянский Л. Г. 133, 181
Локк Р. К. (Lock R. C.) 89, 97, 119, 124
Лоренц Г. А. (Lorentz G. A.) 9, 11, 118
Лундгрен Т. С. (Lundgren T. S.) 78, 126
Лундквист С. (Lundquist S.) 34
Любимов Г. А. 8, 36, 77, 267, 268, 302
Людфорд Дж. С. С. (Ludford G. S. S.) 242

Майкл Д. Х. (Michael D. H.) 127
Макмиллан Ф. А. (McMillan F. A.) 303
Максвелл Дж. (Maxwell J.) 15
Макьюлайтис А. (Maciulaitis A.) 64, 79, 268
Маргетройд У. (Murgatroyd W.) 36, 59, 78, 264, 268
Миллер Р. Л. 37, 267, 277
Миронов О. М. 36
Михайлов Ю. А. 79, 185
Михайлов Ю. М. 126
Михеев М. А. 349, 354, 359, 360
Миякода К. (Mijakoda K.) 277
Монин А. С. 125
Моро Р. (Moreau R.) 124, 302, 305, 324
Моффат Х. К. (Moffatt H. K.) 124, 268, 324
Мэксуорси Т. (Maxworthy T.) 279, 301

Навье Л. (Navier L.) 15, 17, 235, 263, 269, 304
Наполитано Л. Дж. (Napolitano L. G.) 268
Нестлероде Дж. А. (Nestlerode J. A.) 86, 124
Нехендзи Ю. А. 343, 360
Нигам С. Д. (Nigam S. D.) 79
Никольский И. А. 361
Никулин С. М. 338
Никурадзе И. (Nikuradse J.) 79, 135, 136, 141, 142, 171, 184, 348, 349
Нихул Дж. С. Дж. (Nihoul J. C. J.) 124
Новиков И. И. 268, 360
Нуссельт В. (Nusselt W.) 15, 77, 180

Одквист К. Ф. (Odquist K. F.) 241
Озеен С. В. (Oseen C. W.) 4, 190, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 241, 259, 277
Озерова Е. Ф. 324
Озима Х. (Ozima H.) 126
Озол Р. Я. 79
Остерле Дж. Ф. (Osterle J. F.) 268
Охременко Н. М. 326, 338

Павлов К. Б. 127
Пай Ши-и (Pai S.-I.) 323
Паневин И. Г. 183
Пелетьер Л. А. (Peletier L. A.) 197, 207
Перлмуттер М. (Perlmutter M.) 79
Пескин Р. Л. (Peskin R. L.) 323
Петухов Б. С. 183
Повх И. Л. 37, 183
Подшибякин Л. К. 80
Поздняк Н. П. 303
Полак А. С. 242
Портевен А. (Portevin A.) 342, 360
Прандтль Л. (Prandtl L.) 76, 133, 134, 135, 136, 141, 171, 184, 300
Пресняков В. С. 126
Прудников М. М. 124
Пчёлкин И. М. 361
Пуарье И. (Poirier Y.) 281

Рабинович Б. В. 349, 360
Рабинович Е. З. 8, 342, 343, 347, 348, 353, 354, 360
Радл Р. (Ruddle R.) 360
Райтмайер Б. (Rightmire B.) 349, 360
Регирер С. А. 8, 77, 103, 263, 268
Рейнольдс О. (Reynolds O.) 168, 174
Рейхардт Г. (Reichardt H.) 142
Рейхе Ф. (Reihe F.) 37
Ременьера Г. (Remenieras G.) 37
Рилей Х. (Riley H.) 323
Робертс П. Х. (Roberts P. H.) 126
Ройдт М. (Roidt M.) 268
Ромиг М. Ф. (Romig M. F.) 80
Россоу В. И. (Rossow V. I.) 127, 246, 256, 267
Ротта Ю. (Rotta J.) 120, 127, 133, 136, 138, 184
Руфф В. (Ruff W.) 346, 347, 348, 349, 360

Сайбен М. (Sajben M.) 37, 105, 125, 183
Самарин А. М. 343, 360
Саржент Л. М. (Sargent L. M.) 125
Саулите У. А. 338
Семеновкер И. Е. 351, 361
Сес Р. Д. (Cess R. D.) 268
Симуни Л. М. 324
Синг С. Н. (Singh S. N.) 79
Сквайр Х. Б. (Squire H. B.) 89, 98, 100, 114, 124
Скринник Е. Ф. 37, 183
Скурин Л. И. 268
Слоан Д. М. (Sloan D. M.) 78

Слюсарев Н. М. 37, 124, 183, 302, 303
Смит П. (Smith P.) 78
Соковишин Ю. А. 267
Соколин Я. И. 338
Сонью О. К. (Sonju O. K.) 268
Сорин А. Р. 351, 361
Стокс Г. Г. (Stokes G. G.) 4, 15, 17, 197, 208, 234, 239, 278, 304, 352
Стырикович М. А. 351, 361
Стюарт Дж. Т. (Stuart J. T.) 14, 100, 101, 102, 124
Стюартсон К. (Stewartson K.) 78
Субботин В. И. 37
Сыроватский С. И. 183, 242

Тананаев А. В. 338
Тарасов Ю. А. 127
Таунсенд А. А. (Townsend A. A.) 170, 185
Тацуми Т. (Tatsumi T.) 127
Тверский П. А. 127
Тидстром К. Д. (Tidstrom K. D.) 125
Том А. (Thom A.) 277
Томас Л. Х. (Thomas L. H.) 96, 124
Тоомре И. (Toomre I.) 324
Турунтаев С. В. 125
Тэйлор Дж. И. (Taylor J. I.) 119

Уленбуш И. (Uhlenbusch J.) 302
Уфлянд Я. С. 78

Фан Л. Т. (Fan L. T.) 268
Фей Дж. А. (Fay J. A.) 105, 125, 183
Фейдж А. (Fage A.) 142
Федынский О. С. 349, 354, 360
Фишер Э. (Fischer E.) 302
Фолди Л. Л. (Foldy L. L.) 302
Фоменко Б. А. 163, 185
Фомин С. В. 207
Фрейм Ф. У. (Fraim F. W.) 102, 103, 104, 122, 123, 125
Фримен Дж. С. (Freeman J. C.) 124
Фукс В. (Fuchs W.) 302

Хант Дж. К. Р. (Hunt J. C. R.) 39, 42, 77, 78, 89, 98, 101, 124, 319
Хасимото Х. (Hasimoto H.) 197, 207
Хейвуд Дж. Б. (Heywood J. B.) 268
Хейзер У. Х. (Heiser W. H.) 102, 103, 104, 122, 123, 125, 303
Хинце О. (Hinze O.) 36
Хирото И. (Hiroto I.) 277
Хожаинов А. И. 79, 125, 268
Хоулт Д. П. (Hoult D. P.) 279, 301
Хуанг Л. Л. (Hwang L. L.) 268

Цепуре И. Я. 79
Цинобер А. Б. 8, 36, 37, 79, 124, 125, 184, 185, 241, 267 276, 277, 302, 303, 324, 339

Чандрасекхар С. (Chandrasekhar S.) 126
Чарват А. Ф. (Charwat A. F.) 37
Чен К. К. (Chang C. C.) 78, 126
Честер У. (Chester W.) 238, 241, 280, 281, 302
Чикель И. (Czikel I.) 349, 360
Чилдрес С. (Childress S.) 241
Чиненков И. А. 105, 125, 149, 183
Чиркин В. С. 361
Чу К. И. (Chow C. Y.) 242
Чьярулли П. (Chiarully P.) 124

Шей Э. А. (Shay E. A.) 37
Шерклиф Дж. А. (Shercliff J. A.) 27, 36, 55, 57, 59, 60, 64, 78, 79, 125, 153, 154, 185
Шехтер Е. Ю. 339
Шимшони М. (Shimshoni M.) 227
Шкерстена А. Я. 185, 277
Шлихтинг Г. (Schlichting H.) 127
Шмелёв Ю. К. 339
Шохэт Дж. А. (Shohet J. L.) 268
Шу Г. (Schuh H.) 142
Шубауэр Г. Б. (Schubauer G. B.) 142
Шульц-Грунов Ф. (Schultz-Grunow F.) 142

Щербинин Э. В. 36, 78, 124, 125, 183, 184, 185, 277, 302, 303, 324, 338

Эйплт К. И. (Apelt C. I.) 273, 277
Эксфорд У. И. (Axford W. I.) 207
Элберт Д. (Elbert D.) 126

Юнг Ф. Дж. (Young F. J.) 268
Юнгклаус Г. (Yungclaus G.) 323

Ягленко В. Т. 339
Яглом А. М. 125
Якубенко А. Е. 197, 207, 267
Яненко Н. Н. 277

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абляция 250
Алюминий 355
Аналогия Рейнольдса 178
Анемометр кондукционный 31, 112, 113
Анизотропия турбулентности 86, 104

Баланс энергии возмущения 81

Вихрь скорости 70, 269
Возмущения конечные 120
— скорости 236
— турбулентные 81, 83, 87, 261
— функции тока 269
Волны Альфвена 216, 236
Высота шероховатости эффективная 161

Галлий 25, 180, 182, 355, 357
Генерация турбулентности 97, 113, 115
Гипотеза локальности Лойцянского 133

Датчик динамический 301
Дефект скорости 295
Диск 280
Диссипация вязкая 76, 81, 85, 307
Диссипация джоулева 76, 81, 85, 87, 121, 307
Диффузор 198, 327
Длина начального участка 264, 267
Дозатор электромагнитный 329, 332
Дорожка вихревая Кармана 209

Железо 356, 357, 358

Зависимости интерполяционные 162
Задача Дирихле 223, 225
— Коши 140, 260
— краевая 137, 225
— плоская 212
— Стокса 220, 223
— тепловая 76, 178
Закон Ома для движущихся сред 10, 16
— сопротивления Блазиуса 141
— соопротивления Прандтля 141
Зарядов разделение 9

Единственность решения 202, 205, 209

Измерение давления 30
— потенциала 32, 35, 264
— скорости 27, 32, 35
Измеритель локальных скоростей 31
— кондукционный 31
Изотахи 56
Индуктор бегущего магнитного поля 29, 326
Интенсивность турбулентности 95, 96, 106, 112

Канал кольцевой магнитогидродинамический 28
Контур жидкометаллический 25
Контур циркуляционный 25
Конфузор 327
Корреляции между компонентами пульсаций 104
Коэффициент сопротивления 45, 53, 56, 58, 61, 63, 90, 107, 150, 348
— — в бегущем поле 326
— — в гартмановском течении 46
— — в продольном поле 103, 148, 173
— — в турбулентном течении Гартмана 144
— — пластины 282
— — при внезапном расширении 319
— — цилиндра 283
— — — бесконечного 285
— — шероховатой трубы 65, 69, 73, 116
Критерии подобия 9
— устойчивости и перехода 89, 90, 93, 102, 109

Ламинаризация течения 51, 55, 96, 129, 148, 261, 265
Линии постоянного вихря 271
— тока 228, 270, 275, 294
— — в шероховатой трубе 71
— — при обтекании выступов на стенке 75
Лоток электромагнитный 334

Магнит 27
Манометр двухжидкостный 30
Масштаб турбулентности 86, 128, 306
— — внешний 82, 134
— — внутренний 82
Машина магнитогидродинамическая 325
Металл расплавленный 24, 340, 354

Напряжение на стенке 135
— сдвига начальное 344
— турбулентного трения 135
Насос механический 27
— электромагнитный 26, 326
— — линейный 327
— — поршневой 330

Насос электромагнитный спиральный 327
— — цилиндрический 327
Натрий жидкий 25, 280, 285
Натяжение поверхностное 357
Обтекание безотрывное 209, 271, 275, 292
— пластины 188, 273
— проводящего тела 287
— стоксово 231
— тел 11, 65, 186, 239, 279, 281
— цилиндра 189
— — идеально проводящего 194
— — непроводящего 191

Отрыв пограничного слоя 12, 209, 278, 292

Парадокс Стокса 197, 218, 233
Передача энергии в волновом пространстве 87
Переменная Блазиуса 246, 258
Перенос тепла 76
Переход ламинарного течения в турбулентное 94, 107, 209
Пластина 188, 244, 273, 282
Плотность 355
— тока 10
— турбулентной энергии спектральная 114
Подавление турбулентности 92, 144, 179, 305
Подслой ламинарный 264
Поле магнитное бегущее 326, 334
— электрическое 9, 10, 18, 19, 21, 67, 118, 138, 217
Представление решения интегральное 221
Преобразование Фурье 225
Приближение безындукционное 17, 39, 84, 263
— Озеена 232, 233, 235, 241
— стоксово 208, 240
Проводимость переменная 250
— электрическая относительная 45
Проницаемость магнитная 360
Профиль Блазиуса 253, 255, 257
— напряжения турбулентного трения 147, 149, 153, 161, 167, 175, 177
— скорости 50, 62, 246, 249, 251, 257, 258, 262, 295, 296, 312, 342
— — асимптотический 260
— — в виде гребенки 319
— — в шероховатой трубе 71
— — гартмановский 47
— — при турбулентном течении 106, 142, 145, 149, 153, 155, 158, 160, 167, 174, 177
— — пуазейлев 263
— — экспоненциальный 89
Пульсация электрического поля 23
Путь смешения 134
— — в гладкой трубе 135
— — в шероховатой трубе 136, 157

Распределение давления 272, 281, 286, 319
Расходомер Вентури 27
— электромагнитный 27
Расчеты численные 269
Расширение потока внезапное 319
Решение Блазиуса 245
— стоксово 229, 278
Решение фундаментальное 213, 215, 218, 221, 224, 234
Ртуть 25, 51, 288, 355, 356, 357

Свойства жидких металлов 354
Сила вязкая 13, 49, 82
— инерции 13, 82
— Лоренца 9, 11, 12, 239
— — безразмерная 17
— подъемная 232
— сопротивления 189, 194, 195, 196
— электромагнитная 10, 11, 12, 13, 48, 82, 92, 196, 337
Силы капиллярные 336
Система литниковая 340
След 193, 195, 198, 215, 216, 236, 259, 293
— передний 279
Слой гартмановский 46, 48, 50, 89, 189, 193, 207, 233
— градиентный пристеночный 48, 50, 64
— пограничный 244, 249, 298
— — на плоской пластине 244, 262
— — турбулентный 263
Соленоид 24, 104, 279
Сопротивление гидравлическое линейное 345
— местное 352
— пластины 247
— тел 231
— трения 273
— формы 273
Спектр турбулентный 83
Сплав Вуда 353
Способ интегральных соотношений 262
Степень стеснения потока 281
Струя ламинарная 304
— точечная 227
— турбулентная 305, 309, 316
Существование решения 202
Сфера 231, 234, 279, 280

Тарировка трубки Пито 300
Тело Рэнкина 279
Температура кристаллизации 346
— плавления 354
Тензор Грина 223, 228, 230
— фундаментальный 229
Теорема Борда магнитогидродинамическая 321
— Сквайра 98, 114
— Ханта 39
Теория малых возмущений 89
— полуэмпирическая турбулентных течений 129, 168
Теплоемкость 357
Теплоноситель 340
Теплообмен 76, 179, 341
Теплопередача 76
Теплопроводность молекулярная 76, 179, 357
Течение в следе 259
— в прямоугольной трубе ламинарное 48
— Гартмана 44, 47, 275
— — турбулентное 140, 175
— Джеффри—Гамеля 198
— ламинаризованное 39, 52, 55
— ламинарное магнитогидродинамическое 38, 39
— на начальном участке трубы 261
— неизотермическое 341
— Озеена 234, 237
— плоскопараллельное 18, 44, 66, 88, 140, 150, 162, 188, 198, 212, 236, 263, 298
Течение пространственное 263
— Пуазейля 68, 88, 103
— стоксово 209, 215, 216, 221
— турбулентное в плоскости, перпендикулярной к полю 150
— — в продольном поле 48, 173

— — — шероховатой трубе 155
Толщина вытеснения 259
— пограничного слоя 262
Точка передняя критическая 297
Труба круглая 62
— прямоугольная 48
— шероховатая 65, 155
Трубка Пито 29, 265, 286, 297, 300
— Пито—Прандтля 29, 293, 300, 309
Турбулентности анизотропия 86, 104

Уклон дна 335
Уравнение баланса вторых моментов пульсаций скоростей 21, 169, 170, 171
— — пульсационной энергии 22
— Блазиуса 246
— Вольтерра 176
— Гаммерштейна 202, 223
— Гельмгольца 214
— движения 137, 172, 186, 208
— — в трубе 42, 94
— Лапласа 41, 42
— Навье—Стокса 15, 66, 235, 263 269, 304
— — безразмерное 16, 66
— Озеена 214, 216, 236
— Орра—Зоммерфельда 89
— пограничного слоя 304, 344
— Рейнольдса 20, 130
— спектрального тензора турбулентных скоростей 84
Уравнения Максвелла 16, 239
— турбулентного движения 20
Условие сохранения расхода интегральное 138, 165, 172, 200
Устойчивость гидродинамическая 81
— в продольном магнитном поле 97
— течения в круглой трубе 107
— — в прямоугольной трубе 107
— — — трубах с проводящими стенками 118
— — — шероховатой трубе 115
— — Гартмана 88
— — Куэтта 81, 119

Форма литейная 340
Формула Грина 219, 224, 237
— Дарси—Вейсбаха 350
— Озеена 238
— Честера 238
Функция Грина 131, 202, 225, 229
— Макдональда 216, 227
Функция тока 67, 223, 245, 269, 274
— — Стокса 239
Футеровка 335

Цилиндр 233, 270, 283, 293
— бесконечный 189, 285
— идеально проводящий 194
— изолированный 191
— оловянный 290
— проводящий 289

Число Альфвена 14, 17, 280
— Бэтчелора 14
— Гартмана 13, 24, 46, 77, 88, 102, 110, 149, 188, 197, 202, 205, 266, 276, 278, 280, 281, 294, 301, 309
— — локальное 121, 170
— Лундквиста 34
— Нуссельта 15, 77, 180
— Пекле 15, 181
— Пландтля 76, 181
— Рейнольдса 24, 45, 89, 91, 95, 102, 103, 115, 142, 144, 163, 201, 205, 208, 235, 239, 269, 273, 280, 281, 285, 309, 330, 347, 351
— — граничное 91, 93, 306
— — возмущений 121
— — критическое 84, 89, 98, 115, 122, 200
— — локальное 170
— — магнитное 14, 17, 24, 33, 88, 118, 263, 280, 292
— Стюарта 14, 17, 101, 116, 134, 162, 245, 263, 269, 270, 275, 280, 282, 284, 291, 298, 301, 329, 330
— — критическое 293
— Фруда 335

Шар 282
— бронзовый 288
— медный 288
Шероховатость 66, 157
— песочная 74, 157

Эксперимент гидродинамический в магнитном поле 23
Электромагнит 23, 29, 105
Электропроводность 358
Электротермоанемометр 24, 29, 105
Элементы чувствительные измерительных устройств 297
Энергия пульсационная 22
Эффект Баркер 298
— Гартмана 10, 46, 91, 97, 112, 179
— подавления турбулентности 92, 179
Эффекты магнитогидродинамические 9

Герман Герцевич Брановер,
Аркадий Борисович Цинобер
МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА
НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД

М., 1970 г., 380 стр. с илл.

Редактор *В. Б. Левин*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод.*
Корректоры *О. А. Сегал, Е. Я. Гороховская*

Сдано в набор 24/XII 1969 г. Подписано к печати 10/VII 1970 г. Бумага $60\times90^{1}/_{16}$.
Физ. печ. л. 23,75. Условн. печ. л. 23,75. Уч.-изд. л. 22.
Тираж 4000 экз. Т-09799.
Цена книги 1 р. 59 к. Заказ 3704.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Тип. № 2 «Советская Латвия»