Э. В. ВЕНГЕРСКИЙ, В. А. МОРОЗОВ,
Г. Л. УСОВ

# ГИДРОДИНАМИКА ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ В СИСТЕМАХ ПИТАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК



Москва «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1982

ББК 39.62
В 29
УДК 629.7.036:532.529.5

Рецензент канд. техн. наук *В. И Петров*

**Венгерский Э. В. и др.**

В29 Гидродинамика двухфазных потоков в системах питания энергетических установок/Э. В. Венгерский, В. А. Морозов, Г. Л. Усов — М.: Машиностроение, 1982.— 128 с., ил.

45 к.

В книге описаны физические процессы изменения параметров газожидкостной среды при вынужденном движении в гидравлических топливоподающих системах питания энергетических силовых установок.

Книга рассчитана на инженеров, занимающихся проектированием топливных систем энергетических силовых установок и исследованием рабочих процессов.

**В** $\frac{3606000000\text{-}228}{038(01)\text{-}82}$ 228-82

**ББК 39.62**

**6Т6**

ИБ № 1949

*Эдуард Владимирович Венгерский, Генрих Леонидович Усов, Владимир Александрович Морозов*

ГИДРОДИНАМИКА ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ В СИСТЕМАХ ПИТАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Редактор *Л. В. Васильева*
Художественный редактор *В. В. Лебедев* Технический редактор *В. И. Орешкина*
Корректоры *А. А. Снастина* и *А. М. Усачева* Обложка художника *Е. Н. Волкова*

Сдано в набор 26.10.81. Подписано в печать 04.02.82. Т-00430
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл. печ. л. 8 Уч.-изд. л. 9,24
Тираж 1200 экз. Заказ 2410 Цена 45 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Машиностроение», 107076, Москва, Б-76, Стромынский пер., 4.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Хохловский пер., 7.

© Издательство «Машиностроение», 1982 г

# ВВЕДЕНИЕ

Дальнейшее совершенствование энергетических установок неразрывно связано с точностью математического моделирования сложных физических процессов, протекающих в их агрегатах и системах. В последнее время методы математического моделирования широко внедряются в практику исследований в связи с развитием ЭВМ и созданием систем диагностирования.

Одним из вопросов математического моделирования энергетических установок является описание процессов течения топлива в магистралях системы питания. С этими физическими процессами неразрывно связаны такие проблемы работоспособности изделий, как продольная устойчивость, устойчивость двигателя к низкочастотным колебаниям, к кавитационным автоколебаниям. За последние годы исследованиям этих проблем и вопросам, связанным с ними, посвящен целый ряд изданий, в которых в той или иной мере рассматриваются динамические характеристики систем питания и методы их математического моделирования [19, 30, 42, 47].

В известных публикациях упругие свойства магистралей питания описываются без учета возможного образования в них при течении топлива двухфазного газожидкостного потока. Условия эксплуатации двигательных установок, работающих на высококипящих топливах, требуют обеспечения насыщения топлива газом до равновесных концентраций [48]. Это обстоятельство создает предпосылки для возникновения после запуска при провалах давления, сопровождающих переходные режимы, выделения растворенного в топливе газа и течения топлива с газовыми включениями. Более того, если не принимается специальных мер по дегазированию, большинство применяемых в эксплуатации энергетических установок высококипящих топлив без принудительного насыщения оказывается в той или иной мере насыщенным газами. Возникновение в магистралях системы питания двухфазного газожидкостного потока может привести к значительному видоизменению динамических характеристик энергетической установки, снижению кавитационных запасов насосов, увеличению гидравлических потерь давления. Степень влияния двухфазности потока на параметры течения и характеристики энергетической установки в целом определяются прежде всего относительной объемной концентрацией газовой фазы.

Вопросам гидродинамики двухфазных потоков посвящено большое число отечественных и зарубежных исследований, содержащих обширный теоретический и экспериментальный материал [33, 43, 39, 67]. Однако значительное усложнение физической картины процесса течения двухфазного потока, сопровождающегося механическим и тепловым взаимодействием фаз, характеризующегося разнообразными формами и режимами, многообразием возможных структур потока, затрудняет получение достоверных количественных характеристик и проведение математического моделирования процесса течения.

В настоящее время в известной нам литературе отсутствует строгая, сколько-нибудь обоснованная физическая картина образования двухфазного газожидкостного потока. Более того, в обширной литературе нет единого взгляда на источник образования новой фазы. В большинстве случаев при исследовании двухфазных потоков фазовый переход схематизируется в зависимости от условий течения либо как предельно равновесный, подчиняющийся термодинамическим соотношениям, либо им пренебрегают вообще.

Анализ условий течения насыщенного газом топлива по магистралям систем питания энергетических установок и результаты экспериментальных данных показывают, что ни та, ни другая предельная схематизация процесса в этих условиях не может быть принята.

Для удовлетворительного совпадения результатов математического моделирования с опытными данными необходим учет кинетики процесса образования двухфазного потока, т. е. кинетики процесса десорбции газа, растворенного в топливе при провалах давления, сопровождающих переходные режимы работы энергетических установок. Это обстоятельство еще более усложняет систему уравнений, описывающих неустановившееся течение.

Большинство известных теоретических исследований течения потока в топливоподающих магистралях проводится методами, основанными на линеаризации уравнений гидромеханики и выделении областей устойчивости без прямого решения исходной системы уравнений. При этом сходимость с экспериментальными данными достигается путем введения сосредоточенной упругости, описывающей кавитационные явления в шнекоцентробежном насосе. Однако с помощью такого метода трудно оценить механизм возникающих колебаний и влияние на границу устойчивости отдельных режимных и конструктивных факторов. Кроме того, результаты моделирования, используемые при разработке систем диагностирования ненормальных состояний по данным телеметрической информации, требуют получения описаний поведения параметров во временной области. С этих точек зрения, особенно с развитием ЭВМ, более удобным являются методы непосредственного численного интегрирования уравнений, описывающих динамику процесса течения.

В книге рассмотрены основные вопросы неустановившегося движения жидкости с учетом неравновесных фазовых переходов,

связанных с выделением растворенного в жидкости газа, применительно к условиям течения высококипящих топлив в системах питания энергетических установок.

Все исследования проведены с единых позиций создания на базе предложенной физической модели образования двухфазного потока математической модели неустановившегося движения и разработки методов ее решения. При написании книги авторы использовали обширный, но разрозненный теоретический и экспериментальный материал по отдельным сторонам процесса двухфазного течения и результаты собственных исследований. Некоторые положения в книге являются дискуссионными, однако сложность и многообразие физических процессов, возникающих при фазовых переходах в потоке, и их взаимное влияние с характеристиками течения, недостаточная изученность в настоящее время отдельных явлений не позволяют считать решение задачи полностью завершенным. Сложность задачи состоит еще в том, что экспериментальное подтверждение каждого процесса в отдельности практически невозможно.

Книга состоит из введения и семи глав. Главы 1, 7 написаны В. А. Морозовым, введение и главы 2 и 3 написаны Э. В. Венгерским и главы 4, 5, 6 — Г. Л. Усовым.

Авторы выражают искреннюю признательность и благодарность канд. техн. наук Петрову В. И. за полезные советы и ряд ценных замечаний, сделанных при рецензировании книги.

*Глава 1*

# УСЛОВИЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ГИДРОСИСТЕМАХ ПИТАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

## 1.1. НАСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ ПИТАНИЯ

В современных энергетических установках весьма широко используются двигатели, топлива для питания которых специально или в результате их контакта с окружающей атмосферой насыщаются газом до равновесных состояний [48]. При движении таких жидкостей по системам питания в последних создаются условия для выделения растворенного газа и образования двухфазных потоков. Присутствие свободного газа в гидравлических системах приводит к существенному изменению их гидравлических характеристик и к значительному усложнению расчетов по определению параметров потока.

Рассматриваемые в монографии системы питания энергетических установок представляют собой обширный класс гидравлических линий, обеспечивающих подачу жидкости от топливных баков на вход в двигатели, например в камеры сгорания или насосы ЖРД. Системы питания включают в себя совокупность трубопроводов различной конфигурации, заборные и регулирующие устройства, а также ряд других вспомогательных устройств. Примеры топливных систем питания представлены на рис. 1.1 и 1.2. [48].

Основная задача системы питания — обеспечить подачу топлива и заданные входные параметры двигателей при запуске, остановке и работе на всех предусмотренных программой режимах.

Рассмотренному классу систем питания присущ ряд особенностей, определяющих во многом условия их работы и протекающие в них процессы: небольшая протяженность — до 20 м, значительные средние скорости течения жидкости — до 10—15 м/с, довольно узкий диапазон рабочих давлений — $10^5$—$2 \cdot 10^6$ Па и небольшие гидравлические сопротивления. С другой стороны, специфика работы систем питания определяется особенностями связанных с ними двигателей: жесткими требованиями к временным характеристикам запуска и выключения, узким диапазоном рабочих входных давлений, широким диапазоном регулирования по расходу и динамическими характеристиками, весьма чувствительными к внешним воздействиям. Учитывая при этом наличие в гидравлических линиях свободных газовых включений, при рассмотрении совместной работы системы питания с ЖРД приходится решать ряд весьма сложных проблем по определению кавитационных запасов насосов, параметров потока при запуске, включении и из-

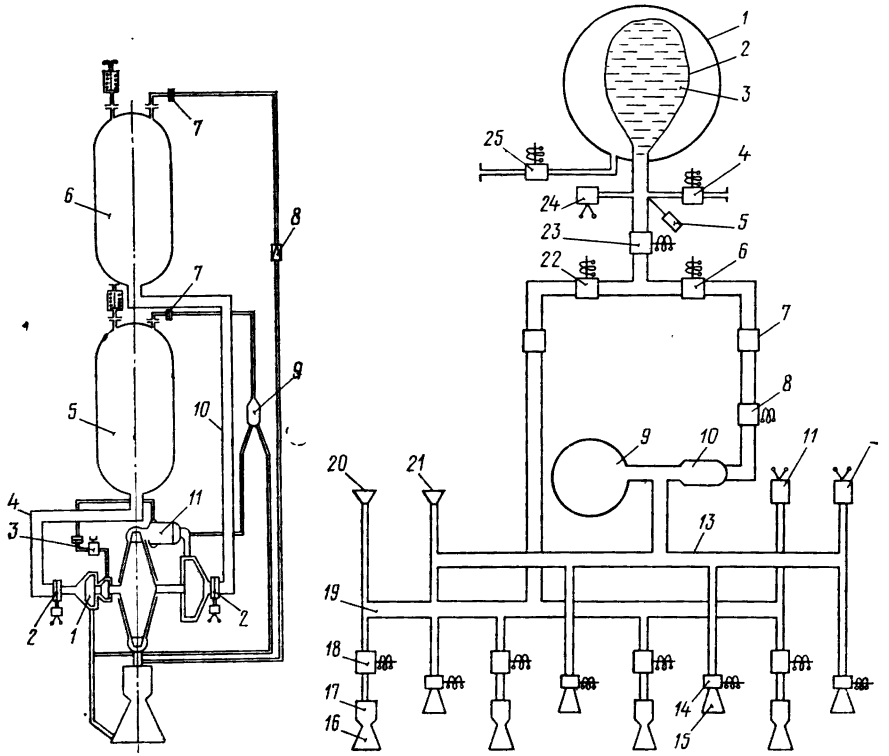



Рис. 1.1. Схема ЖРДУ с дожиганием окислительного газа (типа «газ — жидкость»):

*1*—ТНА; *2*—пусковые клапаны; *3*—регулятор тяги; *4*—система питания горючего; *5*—бак горючего; *6*—бак окислителя; *7*—мембранные клапаны; *8*—регулятор наддува бака окислителя; *9*—газогенератор наддува бака горючего; *10*—система питания окислителя; *11*—газогенератор

Рис. 1.2. Схема реактивной системы управления на однокомпонентном жидком топливе с двигателями жесткой и мягкой стабилизации:

*1*—топливный бак; *2*—эластичный мешок; *3*—топливо; *4*—заправочно-сливной клапан; *5*—преобразователь температуры; *6, 22*—пусковые клапаны; *7*—фильтр; *8*—обратный клапан; *9*—рессивер; *10*—газогенератор; *11, 12, 24*—преобразователь давления топлива; *13, 19*—системы питания; *14, 18*—электроклапаны двигателей; *15, 16*—сопла; *17*—камера разложения; *20, 21*—поверочные клапаны; *23*—нагреватель; *25*—клапан заправки тела наддува

менении режимов работы, в том числе по определению гидроударов и провалов давления на входе в двигатели.

При рассмотрении задач такого рода гидравлические линии представляют в виде систем с распределенными параметрами, на концах которых сосредоточены свойства входящих в состав системы питания агрегатов и узлов. Параметры потока в гидравлических линиях определяются при этом в результате интегрирования уравнений неразрывности, сохранения количества движения и энергии при заданных начальных и граничных условиях. Основным параметром, определяющим при такой постановке задачи

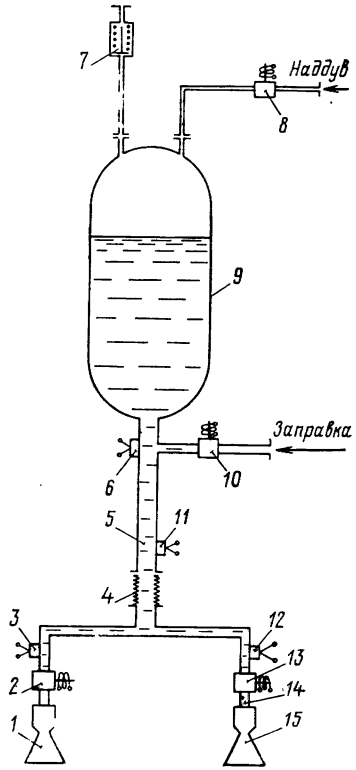



Рис. 1.3. Система питания ЖРД:

*1, 15*—ЖРД; *2, 13*—пусковые клапаны; *3, 6, 11, 12*—малоинерционные преобразователи давления; *4*—упругий компенсатор; *5*—трубопровод системы питания; *7*—предохранительный клапан; *8*—ЭПК системы наддува; *9*—топливный бак; *10*—клапан системы заправки; *14*—трубопровод питания двигателя

упругие свойства гидравлической линии, является скорость распространения упругих возмущений, или, как ее часто называют, скорость звука $a$.

Рассмотрим работу типовой системы питания топливом двух ЖРД, схема которой представлена на рис. 1.3. Для регистрации изменения давления в системе перед пусковыми клапанами *2* и *14*, а также в середине и в начале трубопровода *5* установим малоинерционные преобразователи *12, 3, 6, 11*. В исходном состоянии бак *9* и магистрали питания до клапанов *13* и *2* заполнены топливом и находятся под пусковым баковым давлением $p_0$ (рис. 1.4). При подаче команды на запуск двигателя *15* (двигатель *1* в это время выключен или работает на основном режиме) производится открытие пускового клапана *13* — время $\tau_1$. Время открытия клапанов такого типа составляет обычно 0,005—0,05 с. Открытие клапана является началом неустановившегося процесса заполнения магистрали питания *14* и трактов двигателя *15*. В системе питания возникают колебания давления, исходным возмущением для которых служит распространение по магистралям волны разрежения, образовавшейся при открытии клапанов. В силу упругости жидкости и трубопроводов системы питания распространение возмущений по магистралям происходит со скоростью $a$. Это хорошо иллюстрирует задержка по времени начала изменения давления преобразователями *11, 3* по сравнению с преобразователем *12* — $\tau_1$; $\tau_2$; $\tau_3$.

Зная длину магистралей и располагая записью изменения давлений в системе, скорость распространения возмущений в процессе заполнения можно оценить по крайней мере двумя способами. Во-первых, по времени прохождения возмущения между преобразователями, например, *12* и *11*: $a=L_{10-11}/(\tau_2-\tau_1)$, где $L_{10-11}$ — расстояние между указанными преобразователями. Во-вторых, по периоду колебаний давления в системе исходя из известного положения, что при движении жидкости в процессе заполнения (трубопровод с открытым концом) период акустических колебаний давления пропорционален двойной длине трубопрово-

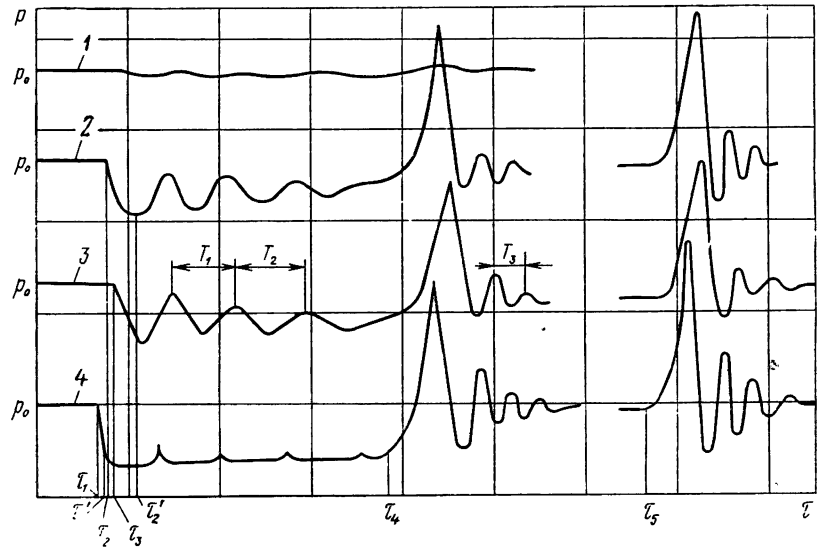



Рис. 1.4. Изменение давления в системе питания (см. рис. 1.3) при запуске двигателя *15:*

*1*—давление на входе в систему питания (преобразователь *6*); *2*—давление в системе питания (преобразователь *11*); *3*—давление перед пусковым клапаном *13* (преобразователь *12*); *4*—давление после пускового клапана; $\tau_1$—время открытия пускового клапана 13; $\tau_2$—время прихода фронта волны разрежения к преобразователю *11*; $\tau_3$—время прихода фронта волны разрежения к преобразователю *3*; $\tau_4$—время прихода жидкости к двигателю *15*; $\tau_5$—время закрытия пускового клапана *13*; $\tau_1$—$\tau_1'$—время открытия пускового клапана *13* (протяженность фронта волны разрежения у клапана *13*); $\tau_2$—$\tau_2'$—протяженность фронта волны разрежения, зафиксированная преобразователем *11*; $T_1$ и $T_2$—периоды колебаний

да, т. е. $a=2L/T$, где $L$ — длина трубопровода от фронта жидкости до бака; $T$ — период колебаний (на рис. 1.4. это либо $T_1$, либо $T_2$). Продолжительность периода заполнения обычно незначительна и не превышает 0,5 с.

При заполнении трубопровода *14* и достижении фронтом жидкости двигателя *15* в момент $\tau_4$ происходит ее резкое торможение, и на входе в двигатель возникает гидравлический удар, который, распространяясь по магистралям системы питания, вызывает в ней новый колебательный процесс. Причем скорость распространения возмущений может несколько отличаться от величин, зафиксированных в процессе заполнения. Оценка значений $a$ может быть, как и прежде, произведена по измерению продолжительности прохождения возмущений давления между преобразователями или по замеру периода колебаний давления после гидравлического удара, только с той разницей, что после контакта жидкости с двигателем скорость распространения возмущений будет пропорциональна учетверенной длине трубопровода (закрытый конец), т. е. $a=4L/T_3$. По заполнении коммуникаций двигателя происходит его запуск, который, в свою очередь, может сопровождаться резкими изменениями расхода, а следовательно, возникновением в магистралях питания новых волновых процессов.

Идентичные явления наблюдаются и при регулировании тяги двигателей, если скорости изменения расхода значительны.

При подаче команды на включение двигателя *15* — в момент $\tau_5$ происходит закрытие клапана *13*, расход жидкости прекращается, и в результате его резкого торможения преобразователь *12* фиксирует новый гидравлический удар, который также распространяется по системе питания, вызывая новый цикл колебаний давления.

Исследователи, занимающиеся нестационарными процессами в системах питания, часто обращают внимание на факт несоответствия экспериментальных значений скорости звука в гидросистемах с расчетными значениями, полученными по известной форме Жуковского:

$$a = a_\infty \Big/ \left( \sqrt{1 + \frac{E_ж d}{E_м \delta}} \right),$$

где $a_\infty$ — скорость распространения малых возмущений в неограниченном объеме; $E_ж$, $E_м$ — модули объемной упругости жидкости и металла трубопровода; $d$, $\delta$ — гидравлический параметр и толщина стенки трубопровода.

Причем эта разница достигает иногда 200—300% при расчетных значениях 1000—1300 м/с. Экспериментальные данные показывают 400—800 м/с. Наличие в системе питания упругих элементов типа сильфонов, демпферов и т. п. не может столь сильно влиять на скорость $a$ в силу их существенно малой протяженности по сравнению с магистралями. Элементы такого типа, их обычно называют сосредоточенные упругости, увеличивают декременты затухания колебательных процессов, приводят к выполаживанию фронта проходящих через них волн возмущения, что видно из сравнения характера изменения давлений, зарегистрированных преобразователями *12* и *6*. Фронт первой волны разрежения у клапана *13* (падение давления в период $\tau_1$—$\tau_1'$) определяется в основном временем его открытия. Этот фронт всегда круче фронта этой же волны после прохождения элемента с сосредоточенной упругостью и зафиксированного преобразователем *11* (период $\tau_2$—$\tau_2'$). То же самое можно сказать и о прохождении возмущениями местных гидравлических сопротивлений и других элементов с сосредоточенными параметрами.

Существенное снижение скорости распространения малых возмущений может быть обусловлено только наличием в системе дополнительной распределенной по длине магистралей упругости, например пузырьков газа. В общих чертах механизм таких явлений имеет следующую картину. Топливо в результате длительного контакта с газовой подушкой в баке или специального предварительного насыщения в заправочной емкости насыщается до равновесной концентрации, соответствующей баковому давлению. При открытии пускового клапана *13* и начале движения жидкости давление в магистралях падает ниже начального, при котором количество растворенного газа в жидкости соответствовало этому

давлению. Иногда нижний уровень давления в магистрали пр неустановившемся процессе может оказаться ниже давления упр гости паров топлива при данной температуре. Падение давлени нарушает равновесие в системе жидкость — газ и возникают пред посылки для выделения в потоке свободного газа и пара, а сле довательно, появления дополнительной распределенной упругост в системе. Причем объемами, в которые в основном происходи выделение парогаза, являются газовые пузырьки, выросшие и микропор стенок трубопроводов.

При восстановлении давления начинается обратный процесс Колебательный характер изменения давления и малый период колебаний (0,01—0,05 с) приводят к тому, что в каждом цикле колебаний процесс выделения и растворения газа может носить неравновесный характер. Причем равновесие между количеством газа и давлением в жидкости не наступает до окончания переходного процесса. Это подтверждается возрастанием в ряде случаев при заполнении трубопровода двигателя периода волновых колебаний давления ($T_2 > T_1$ на рис. 1.4.). С увеличением в потоке количества пузырьков свободного газа существенно изменяется и внешняя картина переходных процессов — колебания более размыты, быстро затухают, уменьшаются значения гидроударов. Детальное рассмотрение процессов газовыделения и образования газожидкостных потоков в трубопроводах будет проведено в последующих главах. Здесь же следует отметить, что процессы газовыделения в системах питания совсем не всегда связаны с колебаниями давления акустической природы.

Весьма часто в магистралях превуалируют колебания, обусловленные инерционными характеристиками системы питания. И именно они создают предпосылки для образования двухфазного потока. В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим изменение давления в системе питания с промежуточной емкостью (рис. 1.5) [48]. При запуске двигателя *1* открывается пусковой клапан *2,* и сначала процесс заполнения протекает так же, как и в предыдущем случае (период $\tau_1$—$\tau_2$ на рис. 1.6.). Однако в силу различной инерционности жидкости в магистралях *3* и *5* в системе возникают низкочастотные колебания давления, период которых $T_2$ может на порядок превышать период акустических колебаний $T_1$, а амплитуды изменения давлений могут создавать условия для пребывания жидкости при давлениях ниже равновесного.

Гидравлические системы реальных двигательных установок представляют собой сложные гидравлические линии, по которым возмущения, возникающие при запуске, останове и изменении режимов работы двигателей, передаются на входы в другие, приводя к дополнительным динамическим воздействиям на последние. Если вернуться даже к простой схеме (см. рис. 1.3), то для двигателя *1* очевидны два режима динамических воздействий. Во-первых, при работающем двигателе *1* запуск и выключение двигателя *15* вносят дополнительные возмущения на его режим работы. Во-вторых, при выключенном двигателе *1* запуск и выклю-

чение двигателя *15* приводят к дополнительному воздействию на клапанный механизм двигателя *1*, причем «тупиковый эффект» может приводить к существенному увеличению значений гидравлических ударов,

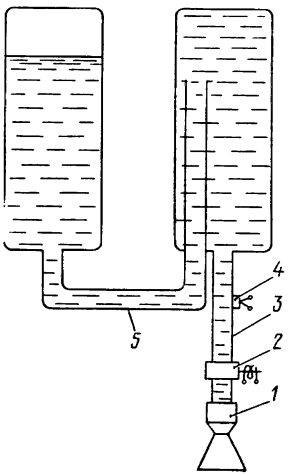



Рис. 1.5. Система питания ЖРД с промежуточной емкостью:

*1*—ЖРД; *2*—пусковой клапан; *3, 5*—магистрали питания; *4*—преобразователь

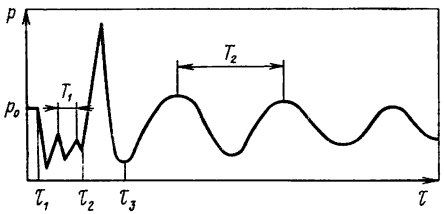



Рис. 1.6. Изменение давления в системе питания ЖРД с промежуточной емкостью (преобразователь *4* на рис. 1.5):

$\tau_1$—время открытия пускового клапана *2*; $\tau_2$—время подхода жидкости к двигателю; $\tau_3$—время начала низкочастотных колебаний; $T_1$ и $T_2$—периоды колебаний; $p_0$—исходное давление в системе

фиксируемых преобразователем *11*, по сравнению с исходным значением по преобразователю *6*.

При увеличении числа двигателей с различной цикличностью их выключения работа системы питания будет протекать в условиях практически непрерывных динамических воздействий. В связи с этим для многих двигательных установок задача точной оценки динамических характеристик систем питания становится одной из важнейших.

Из-за специфики работы системы питания энергетических установок, а также из-за особенностей их геометрических и гидравлических характеристик механизм образования двухфазных потоков существенно отличается от широко освещенных в литературе механизмов кипения и кавитации. Если при кипении и кавитации предполагают преобладание в пузырьках паровой фазы при значительных градиентах возмущающих факторов (тепловых потоков, давлений) и малых временах протекания, порядок которых составляет $10^{-3}$ с, то рассматриваемые нами процессы характеризуются преобладанием в потоке газовой фазы, на порядок бо́льшими временами протекания процессов и неравновесным их характером, обусловленным неустановившимся движением жидкости.

## 1.2. РАСТВОРЕНИЕ ГАЗОВ В ЖИДКОСТИ

Контакты газа и жидкости, будь то контакт свободной поверхности топл га в баке и газовой подушки или движение пузырьков газа в объеме жидкост создают условия для процесса массообмена, растворения (асорбции) или вы деления (десорбции) газа.

Растворимость газа в жидкости подчиняется закону Генри, который уст навливает, что растворимость газа прямо пропорциональна парциальному да лению газа над жидкостью:

$$C_\infty = \varkappa p_\Gamma,$$

где $C_\infty$ — равновесная концентрация газа; $\varkappa$ — коэффициент растворимос Генри; $p_\Gamma$ — парциальное давление газа.

Коэффициент Генри определяется физико-химическими свойствами жидк сти и в диапазоне рассматриваемых давлений является функцией температур

У некоторых жидкостей, например воды, процесс растворения газов сопр вождается выделением тепла, и растворимость газа в них с повышением тем пературы понижается. Графики зависимости коэффициента Генри от темпер туры для различных газов и воды представлены на рис. 1.7, 1.8, 1.9 [85].

Существует, однако, ряд жидкостей органического происхождения, раств рение газов в которых сопровождается поглощением тепла. Растворимос газа в них с ростом температуры повышается. К таким жидкостям относят керосин, азотный тетраксид, несимметричный диметилгидразин, чистый этил вый спирт. Графики зависимостей коэффициента Генри от температуры дл ряда таких жидкостей представлены на рис. 1.10, 1.11 [85].

В случае смеси газов растворимость каждого определяется его парциал ным давлением $p_i$, которое в соответствии с законом Дальтона можно опр делить так:

$$p_i = p\varphi_i = m_i \frac{M}{\mu_i} \frac{RT}{V},$$

где $\varphi_i$, $m_i$ — объемная и массовая доли $i$-го газа в смеси; $\mu_i$ — молекулярна масса $i$-го газа; $M$, $V$, $R$, $T$ — масса, объем, температура, газовая постоянна смеси.

Рассмотрение этой зависимости дает следствие из закона Генри, показы вающее, что объем газа, растворяющегося при постоянной температуре в об' еме жидкости, не зависит от его парциального давления.

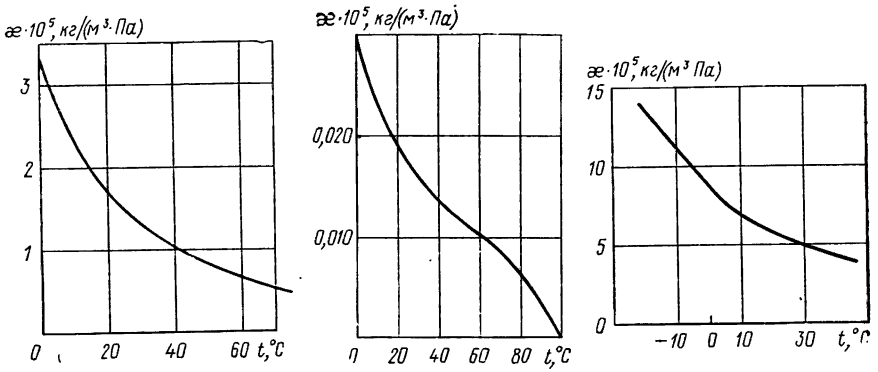



Рис. 1.7. Зависимость коэффициента Генри от температуры для системы угле кислый газ — вода ($p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па)

Рис. 1.8. Зависимость коэффициента Генри от температуры для системы азот — вода ($p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па)

Рис 1.9. Зависимость коэффициента Генри от температуры для системы углекислый газ — этиловый спирт ($p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па)

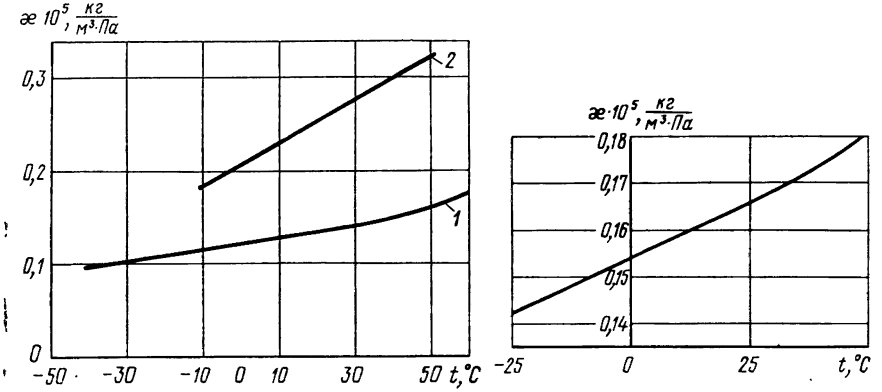



Рис. 1.10. Зависимость растворимости азота от температуры ($p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па):
*1*—в несимметричном диметилгидразине; *2*—в четырехокиси азота

Рис. 1.11. Зависимость растворимости воздуха от температуры в смеси этилового спирта (95%) с водой (5%) ( $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па)

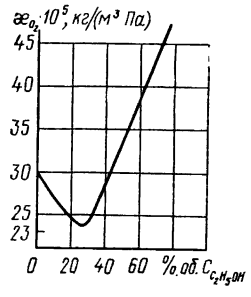



Рис. 1.12. Зависимость коэффициента Генри от концентрации растворителя для системы кислот — вода — этиловый спирт [85] ($p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $t = 20$ С)

Смеси жидкости, особенно с противоположными тепловыми процессами при растворении газов, приводят к неоднозначности изменения коэффициента Генри по температуре (рис. 1.12 [85]).

Естественно, что закон Генри и все представленные зависимости подразумевают только равновесное состояние между жидкостью и газом.

Процессы массообмена между жидкостью и газом в системе питания определяются как условиями хранения и течения жидкости, так и их физико-химическими свойствами. В табл. 1.1 представлены физико-химические свойства некоторых жидкостей и газов [48, 85].

## 1.3. ВЛИЯНИЕ СВОБОДНЫХ ГАЗОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ЖИДКОСТИ НА КАВИТАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ НАСОСОВ

Наличие свободных пузырьков газа в трубопроводах систем питания ускоряет процесс возникновения кавитации в насосах и повышает статическое давление в зоне кавитации по сравнению с давлением насыщенных паров, так как кавитационные каверны при этом заполнены не только парами жидкости, но и газом. В реальных условиях работы энергетических установок вообще трудно себе представить чисто паровую кавитацию. Одним из общих критериев оценки кавитационных свойств насосов является безразмерный параметр

$$K = \frac{p_{вх} - p_{кр}}{\varrho_ж c_{вх}^2/2},$$

где $p_{вх}$ и $c_{вх}$ — статическое давление и скорость жидкости перед входом в насос; $p_{кр}$ — местное статическое давление в проточной части насоса, при

Таблица 1.1

| Среда | $a$, скорость звука | $\rho$, плотность | $\theta$, угол смачивания | $p_{кр} \cdot 10^6$, критическое давление | $T_{кр}$, критическая температура | $\nu$, коэффициент кинематической вязкости | $\sigma$, коэффициент поверхностного натяжения | $p_s$, упругость паров | $K \cdot 10^{-4}$, модуль упругости | $T_{кип}$, температура кипения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | м/с | кг/м³ | градус | Н/м² | К | м²/с | Н/м | Н/м² | кг/см² | К |
| $H_2O$ | 1407 | 998,2 | стекло—0<br>сталь<br>70...90 | 22,12 | 647,26 | 1,0 (293) | 72,5 (293)<br>73,48 | 23,38 | 2,0 | 373,16 |
| $C_2H_5OH$ | 1170 | 789,3 | | 6,38 | 516,16 | 1,517<br>(293) | 24,1 (293)<br>22,8 (293) | 55,99 | 0,89<br>0,87 | 351,46 |
| Керосин $T_1$ | (298)<br>1315 | 800 | | — | — | 1,5 (293) | 24 (293)<br>26,8 (293) | 179,00...<br>...200,00 | 1,27 | 453,16...<br>...593,16 |
| $N_2O_4$ | 1465 | 1490 | | 10,03 | 431,16 | 0,301 (293)<br>0,331 (283) | 27,92 (283)<br>26,15 | 959,91 | 0,83 | 294,31 |
| НДМГ | 1502 | 783 | | 5,35 | 523,16 | 0,7...1,0<br>(293)<br>0,69 | 28 (298) | 146,65 | | 334,4 |
| $O_2$(ж)<br>—183°С | (61)<br>1133 | 1132,1 | | 5,0<br>4,8 | 154,32 | 0,167 | 13,2 | 993,24 | | 90,18 |

Продолжение табл. 1.1

| Среда | $T_{плавл}$, температура плавления | $D \cdot 10^9$, коэффициент молекулярной диффузии | $r \cdot 10^{-4}$, теплота парообразования | $C_p \cdot 10^{-3}$, теплоемкость | $\lambda$, коэффициент теплопроводности | Коэффициент Генри для различных газов $\varkappa \cdot 10^5$, кг/м³·Па при $T$=293 К | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $N_2$ | $CO_2$ | Кг | воздух | He | $O_2$ |
| | К | м²/с | Дж/кг | Дж/кг·К | Дж/м·с·к | | | | | | |
| $H_2O$ | 273,16 | $H_2$ — 5,85<br>0,528<br>$N_2$ — 1,9<br>$O_2$ — 2,08<br>2,5<br>$CO_2$ — 1,78<br>1,96 | 538,9<br>225,26 | 4,18 | 0,598 | 0,0193 | 1,75 | 0,238 | 0,024 | 0,01 | 0,046 |
| $C_2H_5OH$ | 158,76 | $CO_2$ — 4,0 | 90,46<br>89,45 | 2,47 | 0,176 | 0,1534 | 5,73 | 1,94 | 0,169 | 0,005 | 0,3207 |
| Керосин $T_1$ | ⩽—60<br>⩽213,16 | $N_2$ — 4,67<br>He — 14; 45 | 23,76 | 2,09 | 0,15 | 0,144 | | | 0,177 | 0,0035 | 0,294 |
| $N_2O_5$ | 261,96 | | 41,39 | 1,53 | 0,133 | 0,211 | | | 0,306<br>0,258 | 0,0093<br>0,0066 | |
| НДМГ | 215,16 | $N_2$ — 9,0 | 58,3 | 0,038 | 0,523 | 0,125 | | | | 0,00589 | |
| $O_2$(ж)<br>—183° С | 54,46 | He — 8,64<br>$N_2$ — 6,3 | 21,33<br>21,32 | 1,67 | 0,148 | | 0,215 | | | 0,013 | |

котором наступает резкое нарушение структуры потока, разрыв сплошно и другие характерные для кавитации явления.

При чисто паровой кавитации $p_{кр}$ близко к давлению насыщенных пар жидкости. Чем меньше $K$, тем меньше разрежение в проточной части нас и тем совершеннее он в отношении антикавитационных свойств.

Чаще всего для оценки кавитационных свойств насоса используют коэфф циент быстроходности

$$C_{кр} = \frac{5{,}62n\sqrt{Q}}{\Delta h_{кр}^{3/4}},$$

где $n$ — частота вращения насоса, об/мин; $Q$ — объемный расход жидкос через насос, м³/с; $\Delta h_{кр}$ — критический кавитационный запас или превышен минимального напора жидкости во всасывающем патрубке над упругост насыщенных паров, м.

При работе насоса на газожидкостной смеси [75]

$$\Delta h_{кр} = \frac{p_{вх.кр} - p_{п}}{\varrho_{ж} g}(1 + \delta_{вх}) + \frac{c_{вх}^2}{2g}(1 + \delta_{вх})^2,$$

где $p_{вх.кр}$ — давление на входе в насос, при котором наступает кавитационны срыв; $\delta_{вх} = Q_г/Q_ж$ — отношение объемных расходов газа и жидкости на вхо в насос (объемное газосодержание); $p_п$ — давление насыщенного пара.

Чем больше коэффициент быстроходности $C_{кр}$, тем лучшими антикавитацио ными свойствами обладает насос. Последние ухудшаются в случае присутств в потоке на входе в насос газовых включений, $C_{кр}$ при этом уменьшается.

Если известно критическое число кавитации насоса $K_{кр}$ при работе чистой жидкости, то критическое давление на входе $p_{кр}$ при известных $\delta_{вх}$ $c_{вх}$ может быть получено из зависимости

$$p_{вх.кр} = K_{кр}\varrho_{ж}\frac{c_{вх}^2}{2}(1 + \delta_{вх}) + p_{кр}.$$

Лучшие результаты при оценке влияния газовых включений на входе в н сос на его кавитационные свойства дает полученная для широкого класса в сокооборотных центробежных насосов эмпирическая зависимость [75], котор представлена на рис. 1.13. Как видно из графика, даже небольшое количест свободного газа в жидкости значительно ухудшает антикавитационные сво ства лопастных насосов. Так, наличие в жидкости 1% газа (по объем уменьшает коэффициент быстроходности насоса $C_{кр}$ примерно на 13%.

Исследования антикавитационных свойств шнекоцентробежных насосо работающих на газожидкостных смесях при сравнительно низких частот вращения и высоких давлениях в проточной части шнека, показали возмож ность появления в срывных характеристиках насосов кроме двух общеизвес ных критических режимов (первого и второго) еще одного — нулевого (ри 1.14). Этот критический режим наступает при повышении давления на вхо в насос и характеризуется, как правило, срывом его работы.

Иногда антикавитационные свойства насоса при нулевом критическом р жиме оценивают по критическому давлению на входе, а по критическом газосодержанию на входе в насос $\delta_{вх.кр}$ (при $p_{вх}$, $n$, $Q_ж$ = = const). Такие характеристики хорошо показывают, что критическое газосодержание в потоке

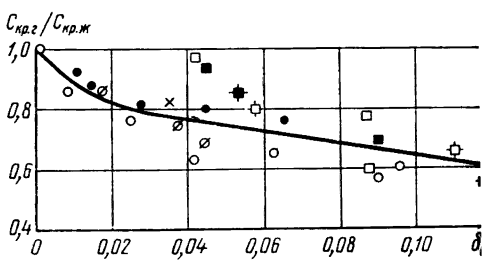



Рис. 1.13. Влияние количества свободного воздуха в жидкости на входе в насос на его кавитационные характеристики (по результатам испытаний насосов различных типов)

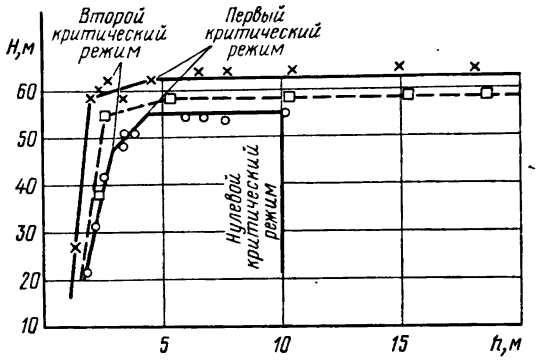



Рис. 1.14. Срывные характеристики шнеко-центробежных насосов при работе на газожидкостной смеси ($h$ — напор на входе в насос)

в значительной степени является функцией $p_{вх}$. При этом чем ниже $p_{вх}$, тем выше то относительное объемное количество газа в жидкости, при котором насос не теряет своей работоспособности.

Растворенный в жидкости газ, как правило, не влияет на кавитационные характеристики насоса. Это можно объяснить тем, что процесс кавитации происходит с существенно большей скоростью, чем процесс газовыделения в зоне кавитации и вблизи ее, а также тем, что унос выделяющегося в кавитационной каверне газа не приводит к повышению в ней давления и антикавитационные свойства насоса по срывным режимам практически не изменяются.

Что касается существующих в настоящее время методик расчета кавитационных характеристик насосов, работающих на газожидкостных смесях, следует отметить их большое несовершенство, в том числе и по причине построения методик на предположении равновесного газовыделения в зоне кавитации, так как при скорости смеси, существенно превышающей скорость газовыделения, предположение о равновесности газовыделения должно приводить к большим погрешностям методики.

*Глава 2*

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЕДИНИЧНОГО ПУЗЫРЬКА И ОКРУЖАЮЩЕЙ ЕГО ЖИДКОСТИ

## 2.1. ОБЩИЙ ВИД УРАВНЕНИЙ МАССООБМЕНА И ГИДРОДИНАМИКИ

Образование двухфазной смеси из перенасыщенной жидкости связано с возникновением в жидкости растягивающих напряжений и образованием разрывов сплошности, заполняемых паром или растворенным в жидкости газом. Рост образовавшихся паровых или газовых пузырьков происходит как вследствие расширения их под действием возникающих растягивающих напряжений, так и вследствие выделения в пузырьки растворенного в жидкости газа или заполнения их паром в результате массообменных и теплообменных процессов пузырька и окружающей его жидкости. Как процесс расширения пузырька, так и процесс заполнения его газом или паром будет определяться величиной растягивающих напряжений, а именно уровнем давления или разрежения, возникающего в жидкости. При возникновении чисто газовых пузырьков вследствие выделения растворенного в жидкости газа пленка жидкости, окружающей пузырек, будет насыщена газом до величины концентрации, определяемой уровнем дав-

ления газа в пузырьке и коэффициентом растворимости Генр
т. е. на поверхности пузырька

$$C_0 = \varkappa(p_г,\ T_г)\, p_г, \qquad (2.$$

где $C_0$ — равновесная концентрация; $\varkappa(p_г,\ T_г)$ — коэффициен растворимости Генри, зависящий от температуры и в общем сл чае от уровня давления; $p_г$ — парциальное давление газа в п зырьке.

Если жидкость насыщена до концентрации растворенного газ равной $C_\infty$, то при снижении давления в пузырьке ниже уровн при котором на поверхности пузырька концентрация $C_0$ буд ниже $C_\infty$, вследствие разности концентраций $C_\infty - C_0$, являющейс так называемой движущей силой процесса диффузии, возникае поток массы газа, растворенного в жидкости, в пузырек, приро массы газа в пузырьке и при прочих неизменных условиях (темп ратуре и давлении) рост пузырька. При отрицательной разност концентраций $C_\infty - C_0$ происходит растворение находящегося в пу зырьке газа окружающей его жидкостью и схлопывание пузырьк В общем случае скорость процесса выделения газа будет опреде ляться скоростью процесса диффузии газа в жидкости, т. е. скор стью переноса газа к границе жидкость — газ, скоростью непосред ственного процесса выделения (десорбции) газа на поверхност и скоростью процесса отвода выделившегося газа в объеме газо вого пузырька.

Процесс массопереноса в объеме газового пузырька может быт определен исходя из молекулярно-кинетического анализа, соглас но которому поток массы газа через единичную площадку поверх ности в единицу времени составляет [72]

$$j = \frac{p_\infty - p_0}{\sqrt{2\pi BT}}\,\alpha = \frac{C_\infty - C_0}{\varkappa\sqrt{2\pi BT}}\,\alpha, \qquad (2.2$$

где $\alpha$ — коэффициент аккомодации, зависящий от условий процес са; $B$ — газовая постоянная.

Намного сложнее описывается процесс массопереноса в жид кой фазе. Здесь вследствие разности концентраций возникает процесс молекулярной диффузии на границе раздела за счет мо лекулярного переноса вещества. Согласно первому закону Фика процесс диффузии описывается зависимостью [27]

$$j = -D(T,\ p)\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R}, \qquad (2.3)$$

где $j$ — предельный поток массы газа через единицу поверхности; $D(T,\ p)$ — коэффициент молекулярной диффузии; $(\partial C/\partial r)_{r=R}$ — производная концентрации по нормали к поверхности на поверх ности пузырька. То есть скорость переноса вещества при данных температуре и давлении пропорциональна только градиенту кон центрации вблизи поверхности раздела.

Величина производной концентрации в уравнении (2.3) при неподвижной границе раздела фаз определяется из решения уравнения молекулярной диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial \tau}=D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right). \qquad (2.4)$$

Начальными и граничными условиями для уравнений (2.4) являются

при
$$\tau=0 \quad r=R,\ r\to\infty,\ C=C_\infty;$$
$$\tau>0 \quad r=R, \qquad C=C_0; \qquad (2.5)$$
$$r\to\infty, \qquad C=C_\infty.$$

Решение уравнения (2.4) при начальных и граничных условиях (2.5), приведенное в работе [80], позволяет определить градиент концентрации на границе пузырька

$$\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R}=(C_\infty-C_0)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\sqrt{\pi D\tau}}\right). \qquad (2.6)$$

Из зависимостей (2.3) и (2.6) находят поток массы газа через единичную площадку, который определяется процессом молекулярной диффузии в жидкости:

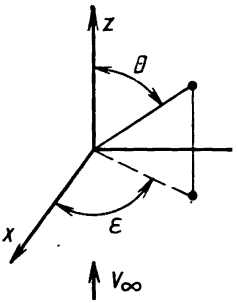
$$j=-D(C_\infty-C_0)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\sqrt{\pi D\tau}}\right). \qquad (2.7)$$

Выражение (2.7) показывает, что поток массы газа, определяемый молекулярным переносом в жидкости в начальный период времени, превосходит величину, определяемую исходя из молекулярно-кинетической теории (при $\tau\to 0$; $j\to\infty$), т. е. в это время процесс массопереноса будет определяться выражением (2.2). Однако сопоставление зависимостей (2.2) и (2.7), определяющих процесс массопереноса в объеме газового пузырька и в жидкости, показывает, что уже начиная с ничтожно малых значений времен процесса ($\sim 10^{-14}$ с) скорость потока массы лимитируется процессом молекулярной диффузии в жидкости. Это время процесса может быть определено из выражения

$$\tau=2\varkappa^2 DBT/\alpha^2.$$

Зависимости (2.6) и (2.7) показывают, что вследствие молекулярного переноса происходит быстрое обеднение концентрации растворенного в жидкости газа вблизи поверхности пузырька, увеличение размеров диффузионного пограничного слоя и снижение потока массы газа. На практике процесс чисто молекулярного переноса реализуется крайне редко, так как практически всегда имеет место относительное движение слоев жидкости вблизи поверхности пузырьков и выравнивание концентрации растворенного газа макроскопическим движением частиц жидкости. В этом

Рис. 2.1. Сферические координаты




случае распределение концентрации в жидкости определяется уравнением конвективной диффузии [34]

$$\frac{\partial C}{\partial \tau}+\vec{V}\,\mathrm{grad}\,C=D\Delta C. \qquad (2.8)$$

Решение уравнения конвективной диффузии (2.8) должно проводиться совместно с уравнениями гидродинамики, описывающими течение жидкости вблизи поверхности массообмена и позволяющими определить распределение скоростей $V_x$, $V_y$, $V_z$ зависимости от координат и времени. Уравнения динамики вязк несжимаемой жидкости при условии изотермичности движения векторной форме имеют вид [36]

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}+(V\nabla V)=F-\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p+\nu\nabla^2 V; \qquad (2.$$

$$\mathrm{div}\,V=0, \qquad (2.1$$

где $F$ — массовые силы.

При условии симметрии потока относительно единичного п зырька целесообразным является переход к сферическим координатам (рис. 2.1).

В общем случае система уравнений гидродинамики потока диффузии для несжимаемой жидкости, имеющей в бесконечност скорость движения, равную $V_\infty(\tau)$ и обтекающей единичный г зовый пузырек, может быть представлена в следующем виде [60

$$\frac{\partial V_r}{\partial \tau}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}-\frac{V_\theta^2}{r}=F_r-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}+\frac{\mathrm{ctg}}{r^2}\frac{\theta\partial V_r}{\partial\,\theta}-\frac{2V_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}V_\theta\right), \qquad (2.11$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial \tau}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{V_r V_\theta}{r}=F_\theta-\frac{1}{\varrho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}-\frac{V_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right); \qquad (2.12$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_R\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(rV_\theta\sin\theta)=0; \qquad (2.13$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau}+V_r\frac{\partial C}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial C}{\partial\theta}=D\left[\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial C}{\partial\theta}\right)+\frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right], \qquad (2.14$$

где $V_\theta$, $F_\theta$ — проекции вектора скорости и массовых сил на тангенциальное направление $\theta$; $V_r$, $F_r$ — проекции вектора скорости и массовых сил на радиальное направление $r$. Система уравнений

сохранения количества движения (2.11) и (2.12), неразрывности (2.13) и диффузии (2.14) представляет собой замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для определения скорости ($V_r$, $V_\theta$), давления и концентрации в окрестности единичного пузырька, обтекаемого потоком жидкости с учетом изменения поверхности пузырька вследствие массообменных процессов с растворенным в жидкости газом. Текущий радиус пузырька $R$ определяется с учетом изменения массы газа в нем по производной концентрации на поверхности пузырька в соответствии с первым законом Фика (2.3). При условии изотермичности процесса, что в первом приближении является оправданным вследствие превалирующего влияния на процесс массы жидкой фазы по сравнению с массой газа в единичном пузырьке, изменение радиуса пузырька может быть определено из условия изменения объема пузырька

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{D}{\varrho_\Gamma}\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R} + \frac{R}{3\varrho_\Gamma}\frac{\partial \varrho_\Gamma}{\partial \tau}, \qquad (2.15)$$

где $\varrho_\Gamma$ — плотность газа в пузырьке.

В общем случае процессы переноса массы не только зависят от поля скоростей, но и сами оказывают влияние на эти поля. Решение полной системы уравнений гидродинамики и массопереноса возможно лишь численными методами при существенных упрощающих предпосылках. Точное решение даже чисто гидродинамической задачи внешнего обтекания тел постоянной формы и размера стационарным потоком вязкой жидкости возможно лишь для узкого круга задач, допускающих пренебрежение конвективными членами либо их линеаризацию. Учет нестационарности потока и изменений границы поверхности, связанных с ростом или сокращением радиуса пузырька вследствие изменения давления в жидкости, а также процессов фазовых превращений еще более усложняет решение полной системы уравнений. В следующих подразделах рассмотрены возможности упрощения системы уравнений диффузии и гидродинамики, описывающих взаимодействие единичного пузырька и окружающей его жидкости применительно к условиям течения топлива в магистралях системы питания энергетических установок.

## 2.2. СКОРОСТЬ ВСПЛЫТИЯ ЕДИНИЧНОГО ПУЗЫРЬКА КОЭФФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В качестве первого приближения рассмотрим особенности гидродинамических процессов единичного пузырька и окружающей его неподвижной жидкости. Будем предполагать, что массообменные процессы не оказывают влияния на гидродинамику. В этом случае распределение скоростей и давления определяется уравнениями сохранения количества движения (2.11), (2.12) и неразрывности (2.13) и используется затем в уравнении конвективной диффузии (2.14) для определения концентрации.

Уравнения (2.11)—(2.14) приводятся к безразмерному ви для функции тока и для установившегося течения имеют вид

$$\frac{\mathrm{Re}}{2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{D^2\psi}{r^2(\sin^2\theta)}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D^2\psi}{r^2\sin^2\theta}\right)\right]\sin\theta=D^4\psi, \quad (2.1$$

где $D^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{D}{\partial\theta}\right)$ — оператор Стокса;

$$\mathrm{Re}=\frac{2V_\infty R}{\nu};\ \frac{\partial\psi}{\partial r}=-V_\theta r\sin\theta;\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}=V_r r^2\sin\theta;$$

$\psi$, $r$ — безразмерные функции тока и расстояние до центра сфер (в качестве масштабов выбраны скорость установившегося теч ния $V_\infty$ и радиус сферы $R$).

В качестве граничных условий принимается на поверхнос пузырька условие непроницаемости, т. е. равенство нулю нормал ных компонентов скоростей внутри и вне сферы, равенство меж собой касательных составляющих скоростей газа и жидкости условие непрерывности тангенциальных составляющих тензо напряжений. Указанные граничные условия формулируются в сл дующем виде:

при $r=1\ \psi_ж=\psi_г=0;$ (2.1

$$\frac{\partial\psi_ж}{\partial r}=\frac{\partial\psi_г}{\partial r};$$ (2.1

$$\mu_ж\left(2\frac{\partial\psi_ж}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi_ж}{\partial r^2}\right)=\mu_г\left(2\frac{\partial\psi_г}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi_г}{\partial r^2}\right);$$ (2.1

при $r\to\infty\ \psi_ж=-\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta.$ (2.2

Здесь индексом «г» обозначены параметры газа (внутри пузыр ка), а индексом «ж» — параметры жидкости. С учетом того, чт $\mu_ж\gg\mu_г$, граничное условие примет следующий вид:

$$2\frac{\partial\psi_ж}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi_ж}{\partial r^2}=0.$$ (2.2

Течение жидкости вокруг газового пузырька имеет ряд характе ных особенностей, зависящих, прежде всего, от значений крит риев Re и We. Для малых значений Re обтекание пузырька носи чисто ламинарный характер и силами инерции в уравнении дв жения можно пренебречь по сравнению с вязкостными. При эти условиях решение уравнения (2.16) было проведено для случа безынерционного обтекания капли Ж. С. Адамаром [11] и В. Ры чинским [11], и выражения для функции тока были получены виде

$$\psi_г=\frac{r^2(1-r^2)}{4(1+\mu^*)}\sin^2\theta;$$ (2.2

$$\psi_ж=-\frac{1}{4}\left(2r^2-\frac{3\mu^*+2}{\mu^*+1}r+\frac{\mu^*}{\mu^*+1}\frac{1}{r}\right)\sin^2\theta,$$ (2.2

где $\mu^*=\mu_г/\mu_ж$.

Скорость движения капли по расчетам Ж. С. Адамара составляет

$$V_\infty = \frac{2(\varrho_г - \varrho_ж) gR^2}{3\mu_ж} \frac{\mu_ж + \mu_г}{2\mu_ж + 3\mu_г}, \qquad (2.24)$$

что для случая газового пузырька ($\mu_г \ll \mu_ж$, $\varrho_г \ll \varrho_ж$) дает выражение для установившейся скорости всплытия под действием выталкивающей (архимедовой) силы:

$$V_\infty = \frac{1}{3} \frac{gR^2}{\nu_ж}. \qquad (2.25)$$

Составление выражения для баланса действующих на пузырек сил

$$\pi R^2 C_\mu \frac{\varrho_ж V_\infty^2}{2} = \frac{4}{3} \pi R^3 (\varrho_ж - \varrho_г) g \qquad (2.26)$$

позволяет получить зависимость для коэффициента сопротивления:

$$C_\mu = 16/\mathrm{Re}. \qquad (2.27)$$

Сравнение результатов решения (2.25) и (2.27) с экспериментальными данными показало в ряде случаев значительное их расхождение, что объясняется влиянием на режим обтекания (в этих случаях) примесей поверхностно-активных веществ, которые повышают коэффициент сопротивления. Даже небольшое присутствие поверхностно-активных веществ приводит к тому, что коэффициент сопротивления и скорость движения газового пузырька в жидкости становятся весьма близкими к результатам, полученным для обтекания твердой сферы в работе [61]

$$V_\infty = \frac{2}{9} \frac{\varrho_ж g R^2}{\mu_ж}; \qquad (2.28)$$

$$C_\mu = 24/\mathrm{Re}. \qquad (2.29)$$

С увеличением размеров пузырьков (т. е. с увеличением чисел Re) наблюдается влияние сил вязкости лишь вблизи сферы. При этом до существенных значений чисел Re (порядка нескольких сотен) обтекание пузырька происходит практически безотрывно.

Для случая безвихревого течения коэффициент сопротивления газового пузырька, поднимающегося в покоящейся жидкости при $\mathrm{Re} > 1$, рассчитывается по зависимости [11]

$$C_\mu = 48/\mathrm{Re}. \qquad (2.30)$$

Учет диссипации энергии в пограничном слое на поверхности пузырька и в следе позволяет уточнить выражение (2.30) и получить аналитические зависимости

$$C_\mu = \frac{8}{\mathrm{Re}} \left[ 2 + \frac{\mathrm{Re}}{8} + \frac{1}{20} \left( \frac{\mathrm{Re}}{2} \right)^2 \ln \left( \frac{\mathrm{Re}}{2} \right) \right] \text{ для } \mathrm{Re} < 80; \qquad (2.31)$$

$$C_\mu = \frac{48}{\mathrm{Re}} \left( 1 - \frac{2{,}2}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \right) \text{ для } \mathrm{Re} > 50. \qquad (2.32)$$

Наличие поверхностно-активных веществ в жидкости оказыв влияние на особенности течения и в этой области промежуточ чисел Re. Сопоставление экспериментальных данных об изме нии скорости всплывающих газовых пузырьков в различных ра воров без специальных мер по очистке жидкостей [11, 61, 67 экспериментальными данными, при получении которых тщате но учитывались требования чистоты водных растворов, показа. что теоретические зависимости применимы лишь для раствор свободных от поверхностно-активных веществ. В противном сл чае происходит отрыв потока от поверхности сферы и коэффиц ент сопротивления приближается к значению, полученному д обтекания твердых сфер. Согласно работе [67] для $2<\mathrm{Re}<5$ коэффициент сопротивления может быть приближенно оценен формуле

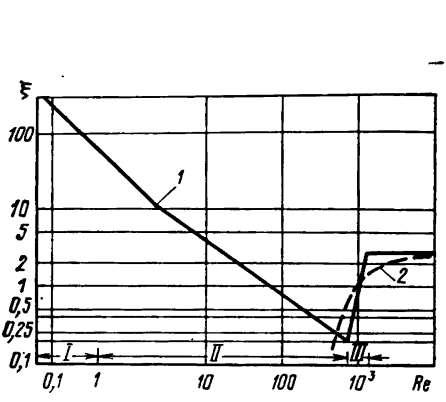
$$C_\mu = 18{,}5/\mathrm{Re}^{0{,}67}. \qquad (2.3$$

При дальнейшем увеличении размеров газовых пузырьков д чисел $\mathrm{Re}>500$ наблюдается деформация пузырьков, отклонен их формы от сферической, пульсация объема, скорости и трае тории движения и связанное с этим возрастание коэффициен гидравлического сопротивления. Очевидно, что в этой област коэффициент гидравлического сопротивления начинает зависе от поверхностного натяжения на границе раздела фаз. Рост по верхностного натяжения стабилизирует форму газового пузырьк снижая деформацию и уменьшая таким образом диссипативны потери энергии и коэффициент гидравлического сопротивлени При этом происходит переход от вязкого сопротивления к сопрс тивлению формы. Когда размеры пузырьков становятся достаточ но большими, влияние поверхностного натяжения так же, ка вязкости, становится исчезающе малым, поскольку пузырь пр этом имеет неизменную форму (приблизительно сферическую го ловную часть с углом охвата $\approx 100°$ и плоскую кормовую часть) В этой области течения максимальная скорость всплытия може быть определена по зависимости, приведенной в работе [67]:

$$V_\infty = \sqrt{gR_{\text{экв}}}. \qquad (2.34$$

Это выражение позволяет сделать очень важный для определени предельных условий существования газового пузырька в жидкости вывод о том, что значение коэффициента гидравлическог сопротивления деформируемого газового пузырька перед его дроблением автомодельно от числа Re и поверхностного натяжения.

Наиболее обобщающие зависимости по скоростям подъема единичных газовых пузырьков в широком диапазоне изменения термодинамических и режимных параметров приведены в работе [84]. Согласно проведенным исследованиям для случаев, когда не принимались специальные меры по очистке жидкостей от поверхностно-активных веществ, скорости всплытия газовых пузырьков в неподвижной жидкости под действием архимедовой силы при усло-



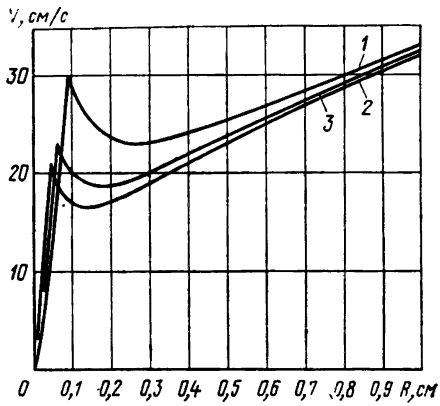




Рис. 2.2. Зависимость коэффициента сопротивления $C_\mu=\xi$ газовых пузырьков от числа Re:

*1*—(2.35); *2*—(2.36)

Рис. 2.3. Скорость всплытия газовых пузырьков в неподвижной жидкости:

*1*—вода+воздух; *2*—НДМГ+$N_2$; *3*—АТ+$N_2$

вии пренебрежения плотности газа по сравнению с плотностью жидкости могут быть получены из следующих соотношений:

$$V_\infty=\frac{2R^2g}{9\nu_ж} \text{ при } \mathrm{Re}\ll 2;$$

$$V_\infty=0{,}33\,\frac{g^{0,76}R^{1,28}}{\nu_ж^{0,52}} \text{ при } 2<\mathrm{Re}\leqslant 4{,}02\,G_ж^{-0,214};$$

$$V_\infty=1{,}35\left(\frac{\sigma}{\varrho_ж R}\right)^{0,5} \text{ при } 4{,}02G_ж^{-0,214}<\mathrm{Re}<2{,}35\,G_ж^{-0,25}; \qquad (2.35)$$

$$V_\infty=1{,}18\left(\frac{g\sigma}{\varrho_ж}\right)^{0,25} \text{ при } 2{,}35G_ж^{-0,25}<\mathrm{Re}<3{,}3G_ж^{-0,25};$$

$$V_\infty=(gR)^{0,5} \text{ при } \mathrm{Re}>3{,}3G_ж^{-0,25},$$

где $$G_ж=g\nu_ж^4\varrho_ж^3/\sigma^3.$$

Значения коэффициентов гидравлических сопротивлений, подсчитанные с учетом зависимости (2.35) для воздушных пузырьков в воде, приведены на рис. 2.2. График построен с учетом экспериментальных и теоретических значений, полученных в работах [11, 33, 38, 61, 67].

Для зоны, автомодельной относительно вязкости, в работе [38] предложена зависимость для скорости в виде

$$V_\infty=\sqrt{\frac{\sigma}{R\varrho_ж}+gR}, \qquad (2.36)$$

которая, как видно из рассмотрения рис. 2.2, позволяет довольно

близко к экспериментальным данным описать условия обтекан газового пузырька в широком пределе изменения параметров, том числе при начале деформации формы.

Предельное значение числа Re между II и III зонами мож быть получено из решения системы уравнений

$$\frac{18{,}5}{\mathrm{Re}^{0{,}67}}=\frac{2{,}66Rg}{V_\infty^2};$$

$$V_\infty=\sqrt{\frac{\sigma}{R\varrho_ж}+gR};$$

$$\mathrm{Re}=\frac{2V_\infty R}{\nu_ж}.$$

Для воды условием перехода является $\mathrm{Re}\approx 550$, для АТ· $\mathrm{Re}\approx 640$ и для НДМГ — $\mathrm{Re}\approx 440$.

На рис. 2.3 показано изменение скорости всплытия единичнь газовых пузырьков в зависимости от их радиуса, рассчитанное п полученным уравнениям.

## 2.3. МАССООБМЕН ЕДИНИЧНОГО ПУЗЫРЬКА И ЖИДКОСТИ

Полученные в предыдущем подразделе зависимости по ра пределению компонентов скоростей жидкости в окрестности по верхности единичного газового пузырька позволяют решить ура нения конвективной диффузии (2.14). Для случая стационарног процесса диффузии и при условии, что производные концентраци вдоль поверхности сферы малы по сравнению с производными п радиусу, уравнение конвективной диффузии (2.14), описывающе распределение концентраций в пограничном слое, может быт преобразовано:

$$V_r\frac{\partial C}{\partial r}+V_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial\theta}=D\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}. \qquad (2.37$$

Граничными условиями указанного уравнения являются:

$$r=R;\ C=\varkappa(p_г,\ T_г)p_г;\ r\to\infty;\ C=C_\infty. \qquad (2.38$$

Кроме граничных условий (2.38) принимается постоянство кон центрации в точке натекания потока на сферу, т. е.

$$r=R;\quad \theta=0;\quad C=C_\infty. \qquad (2.39$$

С помощью безразмерных значений скоростей, координат и концен траций уравнение (2.37) приводится к безразмерному виду

$$\bar{V}_r\frac{\partial\bar{C}}{\partial\bar{r}}+\frac{\bar{V}_\theta}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{C}}{\partial\theta}=\frac{2}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial^2\bar{C}}{\partial\bar{r}^2}, \qquad (2.40)$$

где $\mathrm{Pe}=2RV_\infty/D$ — критерий Пекле; $\bar{C}=C/C_\infty$, $\bar{V}=V/V_\infty$, $\bar{r}=r/R$ — безразмерные значения концентрации, скорости и координаты.

Как видно из (2.40) число Pe характеризует соотношение между конвективным и молекулярным переносами вещества. Так как для большинства жидкостей коэффициент молекулярной диффузии $D \approx 10^{-9}$ м$^2$/с, то для размеров пузырьков $\approx 10^{-4}$ м уже для относительных скоростей $\approx 10^{-2}$ м/с величина $Pe > 10^3$, т. е. конвективный перенос значительно превосходит перенос вещества молекулярной диффузией, что обеспечивает изменение концентраций в тонком пограничном слое.

Решение уравнения (2.37) с граничными условиями (2.38) и (2.39) при $Pe \gg 1$ проведено в работе [50] методом размерного анализа. Полученное значение концентраций для вязкого режима обтекания газового пузырька ($Re \ll 1$) и несжимаемой жидкой фазы позволило определить зависимость потока массы газа в единичный газовый пузырек вследствие конвективной диффузии растворенного в жидкости газа:

$$\frac{dm_г}{d\tau} = 4\sqrt{\pi}(C_\infty - C_0)\sqrt{\frac{2}{3}V_\infty D R^3}, \qquad (2.41)$$

где $V_\infty$ — относительная скорость газа в жидкости при $r \to \infty$ (скорость всплытия для неподвижной жидкости).

Для умеренных значений Re ($R < 1$ см) выражение для потока массы отличается только числовым коэффициентом, который отражает соотношение скоростей на поверхности пузырька:

$$\frac{dm_г}{d\tau} = 8\sqrt{\pi/2}(C_\infty - C_0)\sqrt{DV_\infty R^3}. \qquad (2.42)$$

Как уже отмечалось, наличие поверхностно-активных веществ на поверхности пузырька резко меняет условия обтекания его, увеличивает коэффициент сопротивления. Наличие поверхностно-активных веществ снижает также интенсивность массообмена. Условие равенства нулю касательной составляющей скорости при наличии поверхностно-активных веществ (прилипание) приводит к тому, что выражение для потока массы и распределение концентрации вблизи поверхности газового пузырька оказывается таким же, как и вблизи твердой частицы [61]:

$$\frac{dm_г}{d\tau} = 7{,}98(C_\infty - C_0)\sqrt[3]{D^2 V_\infty R^4}. \qquad (2.43)$$

При расчетах массообменных процессов с целью исключения влияния условий проведения эксперимента и использования аппарата теории размерностей часто используется коэффициент массопередачи, представляющий собой величину диффузионного потока массы через единицу поверхности, отнесенную к движущей силе (разности концентраций), т. е.

$$\beta = \frac{dm_г/d\tau}{4\pi R^2 (C_\infty - C_0)}.$$

Коэффициент массопередачи позволяет с помощью теории раз-

мерности составить выражение для безразмерного соотношени Шервуда

$$\mathrm{Sh} = 2R_{\text{п}}^{3}/D. \qquad (2.4$$

Для значения $\mathrm{Pe} > 10^3$ решение уравнения (2.40) проведено в р боте [6] при условии распределения скоростей по уравнению (2.1( и с учетом выражения для функции тока, т. е. для $\mathrm{Re} < 1$. Получе ное выражение для критерия Шервуда составляет:

для случая газового пузырька

$$\mathrm{Sh} = 0{,}65\sqrt{\mathrm{Pe}}; \qquad (2.4$$

для твердой сферы

$$\mathrm{Sh} = 0{,}99\sqrt[3]{\mathrm{Pe}}. \qquad (2.4$$

Указанные выражения позволяют с учетом (2.44) получить форм лы для диффузионных потоков, практически совпадающие дл газового пузырька с зависимостью (2.41) и для твердой сфер с (2.42).

Для случая $\mathrm{Re} < 1$ и значений $\mathrm{Pe} < 10^3$ численные расчеты ура нения конвективного массопереноса удовлетворительно описыв ются зависимостями:

для газового пузырька

$$\mathrm{Sh} = 2 + \frac{0{,}651\mathrm{Pe}^{1,72}}{1 + \mathrm{Pe}^{1,32}}; \qquad (2.4$$

для твердой сферы

$$\mathrm{Sh} = 2 + \frac{0{,}333\mathrm{Pe}^{0,840}}{1 + 0{,}331\mathrm{Pe}^{0,507}}. \qquad (2.4$$

На рис. 2.4 приведены полученные по выражениям (2.45)—(2.48 зависимости критерия Sh для газового пузырька и твердой сфер при $\mathrm{Re} < 1$. Выражения для массовых потоков (2.41)—(2.42), также для безразмерных соотношений Шервуда (2.45)—(2.48 справедливы для случая безотрывного обтекания газового пузыр ка или твердой сферы, т. е. при $\mathrm{Re} \ll 1$. Как уже отмечалось, в ростом Re происходит отрыв потока в кормовой части сферы, что необходимо учитывать при расчете массообмена, так же как и влияние на массообмен образующихся за сферой вихрей. Для случая безотрывного обтекания ($\mathrm{Re} < 100$ для газового пузырька и $\mathrm{Re} < 20$ для твердой сферы) влияние режима обтекания на

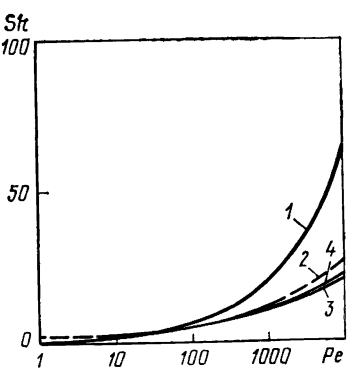



Рис. 2.4. Зависимость критерия Sh от числа Re для малых чисел Re по уравнениям:
*1*—(2.45); *2*—(2.47); *3*—(2.46); *4*—(2.48)

массообмен предлагается учитывать с помощью поправочных коэффициентов в уравнениях для функциональной зависимости критерия Шервуда [57]:

для газового пузырька

$$\mathrm{Sh}=\varphi(V_\theta)\sqrt{\mathrm{Pe}}; \tag{2.49}$$

для твердой сферы

$$\mathrm{Sh}=f(\xi_\theta)\sqrt[3]{\mathrm{Pe}}, \tag{2.50}$$

где $\varphi(V_\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_s} V_\theta \sin^2\theta\, d\theta}$; $f(\xi_\theta)=0{,}641\left(\int_0^{\theta_s}\sqrt{\xi_\theta \sin^3\theta}\, d\theta\right)^{2/3}$;

$\theta_s$ — угол отрыва потока; $\xi_\theta=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)$ — вихрь на поверхности твердой сферы.

Определенные с помощью рассчитанных в работе [6] коэффициентов $f(\xi_\theta)$ и $\varphi(V_\theta)$ значения Sh для газового пузырька и твердой сферы приведены на рис. 2.5.

Там же приведены значения Sh для чисел $\mathrm{Pe}=10^4$ для твердой сферы и газового пузырька, рассчитанные по зависимостям (2.51)—(2.54). Для твердой сферы экспериментальные данные в области значений $20<\mathrm{Re}<2000$ удовлетворительно аппроксимируются зависимостью

$$\mathrm{Sh}=2+\alpha\,\mathrm{Re}^{1/6}\,\mathrm{Pe}^{1/3}, \tag{2.51}$$

где $\alpha$ — коэффициент для твердой частицы в жидкости, составляющий согласно [76] 0,76.

Аппроксимация зависимости $\mathrm{Sh}=f(\mathrm{Pe}, \mathrm{Re})$, рассчитанная для газового пузырька по уравнению (2.49), позволяет получить выражение, которое в диапазоне $1<\mathrm{Re}<100$ с достаточной точностью может быть использовано при расчетах:

$$\mathrm{Sh}=2+0{,}63\,\mathrm{Re}^{0{,}085}\,\mathrm{Pe}^{0{,}5}. \tag{2.52}$$

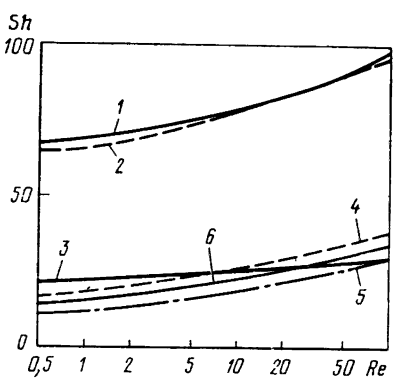



Рис. 2.5. Зависимость критерия Sh от Re для $\mathrm{Pe}=10^4$ по уравнениям:
*1*—(2.49); *2*—(2.52); *3*—(2.50); *4*—(2.51); *5*—(2.53), *6*—(2.54)

Для массообмена твердой сферы и окружающей ее жидкости имеется значительно больше теоретических и экспериментальных исследований, чем для газового пузырька, которые позволяют получить зависимости для массопереноса в широком диапазоне изменения режимов течения. Для больших чисел $\mathrm{Re}(1<\mathrm{Re}<70000)$

и умеренных значений Pr ($0{,}6<\mathrm{Pr}<400$) дополнительно к рассмо ренным может быть рекомендована зависимость [61]

$$\mathrm{Sh}=2+0{,}459\,\mathrm{Re}^{0{,}55}\,\mathrm{Pr}^{0{,}33}, \qquad (2.5$$

а для $\mathrm{Re}>10$ и $\mathrm{Pe}\gg 1$ [6]

$$\mathrm{Sh}=0{,}72\mathrm{Re}^{1/6}\,\mathrm{Pe}^{1/3}. \qquad (2.5$$

Полученные соотношения для описания массообменных проце сов единичного пузырька и окружающей его насыщенной жидкост справедливы, как отмечалось, для случая квазистационарного пр цесса диффузии (при условии пренебрежения первым членом уравнении конвективной диффузии (2.14). Этот случай реализ ется, когда изменение концентрации от $C_\infty$ до $C_0$ происходит диффузионном слое. В начальный момент времени при возникн вении газового пузырька концентрация растворенного в жидкост газа на границе раздела со стороны жидкости равна концентр ции $C_\infty$ в толщине жидкости. В этом случае изменение концентр ции происходит в тонком (молекулярном) слое, который со вр менем процесса вследствие выделения газа в пузырек обедняе ся, что приводит к уменьшению диффузионного потока до уровн определяемого уравнением стационарной диффузии (2.37). Дл молекулярной диффузии решение уравнения нестационарного ма сопереноса (2.7) для газового пузырька позволяет получить вы ражение для соотношения Шервуда в виде

$$\mathrm{Sh}(\tau)=2\left(1+\frac{R}{\sqrt{\pi D\tau}}\right). \qquad (2.5$$

Анализ полученного соотношения показывает, что время устано ления стационарного распределения концентраций для случа «чисто» молекулярного переноса составляет довольно значитель ную величину ($t=D\tau/R^2\approx 100$). Движение поверхности раздел приводит к перемешиванию слоев жидкости вблизи поверхност что сокращает время установления стационарного процесса. Дл газового пузырька при условии $\mathrm{Re}<1$ и $\mathrm{Pe}\gg 1$ решение уравне ния теплопроводности проведено в работе [50] методом размерно анализа, и применительно к уравнению конвективной диффуз (2.14) для распределения концентраций позволяет получить вы ражение

$$\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R}=(C_\infty-C_0)\sqrt{\frac{3}{\pi D\tau}+\frac{2}{3\pi}\,\frac{U_\infty}{DR}}. \qquad (2.56$$

Полученная зависимость с учетом выражений (2.3) и (2.44) дае возможность провести анализ влияния нестационарности масс переноса по соотношению

$$\frac{\mathrm{Sh}\,(\tau)}{\mathrm{Sh}}=\sqrt{\frac{9}{\mathrm{Pe}\,t}+1}, \qquad (2.57$$

где $\mathrm{Sh}\,(\tau)$ — соотношение Шервуда для нестационарного процесса; $t=D\tau/R^2$ — безразмерное время (соотношение Фурье).

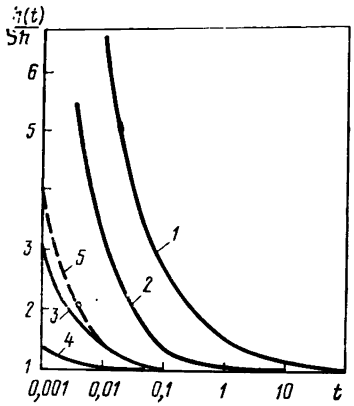



Рис. 2.6 Влияние нестационарности массообмена при различных числах Pe:

для газового пузырька: *1*—Pe=0; *2*—Pe=$10^2$; *3*—Pe=$10^3$; *4*—Pe=$10^4$; для твердой сферы: *5*—Pe=$10^3$

На рис. 2.6 представлены зависимости $Sh(\tau)/Sh$, рассчитанные с помощью выражений (2.55) и (2.57) для газового пузырька при различных значениях Pe. Кривая *5* построена по результатам расчета конечно-разностным методом уравнения конвективного массообмена для случая обтекания сферической твердой частицы при $Pe=10^3$ и $Re<1$ [1]. Иллюстрация показывает, что для реальных условий течения ($Pe>10^3$) время установления стационарного процесса массообмена довольно незначительно и в соответствии с работой [6] для больших Pe может быть принято $t\approx \approx 1/Pe^{2/3}$, что позволяет пользоваться приведенными зависимостями для квазистационарного приближения. Вместе с тем, при рассмотрении колебательных процессов, которые приводят к изменению знака потока массы газа на границе пузырька, необходим учет нестационарности процесса массообмена.

## 2.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЕДИНИЧНОГО ПУЗЫРЬКА И ЖИДКОСТИ В ПОТОКЕ

Полученные зависимости, описывающие массообменные процессы единичного пузырька и окружающей его жидкости, содержат относительную скорость пузырька и жидкости, которая для случая неподвижной жидкости определяется выражениями, полученными в подразд. 2.2.

Рассмотрим особенности массообменных процессов единичного пузырька, находящегося в нестационарном турбулентном потоке жидкости. По-прежнему будем предполагать, что массообменные процессы не оказывают влияния на гидродинамику. Предположим также, что давление в газовом пузырьке однозначно определяется давлением в потоке. Для указанных допущений, пренебрегая влиянием единичного пузырька на поток, запишем уравнение сохранения количества движения (2.9) для одномерного нисходящего потока вязкой жидкости в простом трубопроводе диаметром $d$ в виде [74]

$$\varrho_{ж}\frac{dV_{ж}}{d\tau}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\varrho_{ж}g-\lambda_{т}\frac{\varrho_{ж}V_{ж}^2}{2d}, \qquad (2.58)$$

где $\lambda_{т}$ — коэффициент гидравлического сопротивления трения; $x$ — направление течения.

Аналогичное уравнение для единичного газового пузырька радиуса $R$ может быть записано так:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_г \frac{dV_г}{d\tau} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_г g + f, \qquad (2.59)$$

где $f$ — сила, действующая на пузырек со стороны потока жидкости, возникающая вследствие разности скоростей жидкости и пузырька.

Выразив производную давления через параметры потока жидкости из (2.58), получим уравнение движения единичного пузырька в следующем виде:

$$\rho_г \frac{dV_г}{d\tau} = \rho_ж \frac{dV_ж}{d\tau} - g(\rho_ж - \rho_г) + \lambda_т \frac{\rho_ж V_ж^2}{2d} + \frac{f}{4/3\pi R^3}. \qquad (2.60)$$

Сила взаимодействия пузырька и потока жидкости при нестационарном движении в рассматриваемом случае включает в себя силу трения, силу, возникающую вследствие так называемого эффекта «присоединенных» масс, а также силы Бассэ, возникающей за счет гидродинамического сопротивления при нестационарном течении. При условии сферической формы пузырька и пренебрежении эффектами, связанными с его вращением (силами Жуковского и Магнуса), выражение для силы взаимодействия может быть представлено в виде

$$f = f_m + f_\mu, \qquad (2.61)$$

где $f_m$ — число взаимодействия, связанное с эффектом «присоединенной» массы; $f_\mu$ — сила гидродинамического сопротивления.

Сила взаимодействия, связанная с эффектом «присоединенной» массы, в общем случае с учетом изменения радиуса пузырька равна [43]

$$f_m = \xi_m \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_ж \left[\frac{dV_ж}{d\tau} - \frac{dV_г}{d\tau}\right] + (V_ж - V_г)\frac{3}{R}\frac{dR}{d\tau}, \qquad (2.62)$$

где $\xi_m$ — коэффициент формы, который в случае сферического пузырька принимается равным 0,5. Последний член в уравнении (2.62) учитывает силу «присоединенной» массы при увеличении радиуса пузырька.

Сила гидродинамического сопротивления, как было уже показано, зависит от режима обтекания (критерия Re, построенного по относительной скорости) и для неустановившегося течения должна включать в себя члены, учитывающие переменность поступательного движения. Для сферы постоянного радиуса выражение для силы гидродинамического сопротивления при неустановившемся движении и $\mathrm{Re} \ll 1$ получено в работе [60]:

$$f_\mu = 6\pi\mu_ж R V(t) + 6\sqrt{\pi\nu_ж \rho_ж} R^2 \left[\frac{V_0}{\sqrt{\tau_1}} + \int_0^\tau V(\tau)\frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau - \tau_1}}\right], \qquad (2.63)$$

где $\tau_1$ — время начала отклонения скорости от стационарного значения $V_0$.

Следует при этом отметить, что радиальное движение жидкости в окрестности пузырька изменяет силу гидродинамического сопротивления также и за счет изменения коэффициента гидравлического сопротивления. Так при равномерной относительной скорости жидкости и в предположении $\mathrm{Re}_\omega < 1$ в работе [3] получено выражение для коэффициента гидравлического сопротивления с учетом радиального движения $C_{\mu_\omega}$, которое может быть представлено в зависимости от коэффициента гидравлического сопротивления без учета радиального движения в виде

$$C_{\mu_\omega} = C_\mu \left(1 - \frac{7}{48}\mathrm{Re}_\omega\right), \qquad (2.64)$$

где $\mathrm{Re}_\omega = 2R\dot{R}/\nu$ — число Рейнольдса по скорости радиального движения; $\dot{R}$ — скорость радиального движения.

Полученное выражение показывает, что с увеличением скорости радиального движения коэффициент гидравлического сопротивления уменьшается, что компенсирует увеличение силы гидродинамического сопротивления при нестационарном движении вследствие увеличения радиуса сферы. С этим обстоятельством, по-видимому, связаны и некоторые результаты исследований, показывающих, что для случая $\mathrm{Re}_\omega \ll 1$ и $\mathrm{Re}_V \ll 1$ вдув не оказывает влияния на силу сопротивления сферы в ламинарном потоке вязкой жидкости [21].

Выразив в квазистационарном приближении силу гидродинамического сопротивления как

$$f_\mu = C_\mu \frac{\varrho_ж (V_ж - V_г)^2}{2} \pi R^2, \qquad (2.65)$$

получим уравнение движения единичного газового пузырька в потоке жидкости в следующем виде:

$$\left(\varrho_г + \frac{1}{2}\varrho_ж\right)\frac{dV_г}{d\tau} = \frac{3}{2}\varrho_ж \frac{dV_ж}{d\tau} + \frac{\lambda \varrho_ж V_ж^2}{2d} + \\ + \frac{3}{8} C_\mu \frac{\varrho_ж (V_ж - V_г)^2}{R} + \frac{3}{2}(V_ж - V_г)\frac{\varrho_ж}{R}\frac{dR}{d\tau} - g(\varrho_ж - \varrho_г). \qquad (2.66)$$

Учитывая, что для газового пузырька в жидкости $\varrho_г \ll \varrho_ж$, уравнение движения можно значительно упростить:

$$\frac{dV_г}{d\tau} = 3\frac{dV_ж}{d\tau} + \lambda \frac{V_ж^2}{d} + 3(V_ж - V_г)\frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau} + \frac{3}{4} C_\mu \frac{(V_ж - V_г)^2}{R} - 2g.$$

Отсюда выражение для относительной скорости газового пузырька в потоке $V_{г.ж} = V_г - V_ж$ будет иметь вид

$$\frac{dV_{г.ж}}{d\tau} = 2\frac{dV_ж}{d\tau} + \lambda \frac{V_ж}{d} - \frac{3}{4} C_\mu \frac{V_{г.ж}^2}{2} - 2g - 3\frac{V_{г.ж}}{R}\frac{dR}{d\tau}. \qquad (2.67)$$

Для пузырька постоянного радиуса, всплывающего в безграничной неподвижной жидкости, из уравнения (2.67) может быть получено известное выражение относительной скорости

$$\frac{dV_r}{d\tau} = -\frac{3}{4} C_\mu \frac{V_r^2}{R} - 2g. \qquad (2.68)$$

Для интегрирования этого уравнения воспользуемся зависимостями для $C_\mu$ из подразд. 2.2. Так, для $Re<1$ в соответствии с (2.29) $C_\mu = 24/Re$, что позволяет получить решение уравнения (2.68) в виде

$$\overline{V} = 1 - e^{-9\tau^*}, \qquad (2.69)$$

где $\overline{V} = V_r/V_\infty$; $\tau^* = \nu\tau/R^2$, $V_\infty = -\frac{2}{9}\frac{gR^2}{\nu}$. Для случая $Re>1$ $\left(C_\mu = 48/Re,\ V_\infty = -\frac{1}{9}\frac{gR}{\nu}\right)$ аналогичное решение имеет вид

$$\overline{V} = 1 - e^{-18\tau^*}. \qquad (2.70)$$

При значительных числах $Re>10^3$, в зоне автомодельности коэффициента гидродинамического сопротивления от вязкости ($C_\mu = 2{,}66 = \text{const}$, $V_\infty = \sqrt{gR}$) уравнение имеет следующее решение:

$$\overline{V} = \frac{e^{2Re\tau^*} - 1}{e^{2Re} + 1}. \qquad (2.71)$$

Решения уравнений (2.68)—(2.71) приведены на рис. 2.7. Из рассмотрения графика видно, что увеличение числа Re приводит к уменьшению безразмерного времени достижения пузырьком стационарной скорости. Однако при одной и той же зависимости $C_\mu = f(Re)$ ($\tau^* = \text{const}$) рост Re происходит из-за увеличения размеров пузырька ($\sim Re^{1/3}$) и стационарной скорости всплытия ($\sim Re^{2/3}$). Это обстоятельство приводит к тому, что время стабилизации (т. е. время достижения, например, 90% установившегося значения скорости) увеличивается с ростом Re пропорционально $Re^{2/3}$. При постоянном Re изменение зависимости $C_\mu = f(Re)$ приводит к изменению времени стабилизации. Так, при квадратичном законе сопротивления переход из зоны $Re<1$ в зону $Re>1$ (при $Re=2$) сопровождается уменьшением времени стабилизации, так как

$$\frac{\tau_{Re>1}}{\tau_{Re<1}} \approx \left(\frac{C_{\mu\,Re>1}}{C_{\mu\,Re<1}}\right)^{2/3} \frac{\tau^*_{Re>1}}{\tau^*_{Re<1}} = \left(\frac{C_{\mu\,Re>1}}{C_{\mu\,Re<1}}\right)^{2/3} \left(\frac{C_{\mu\,Re<1}}{C_{\mu\,Re>1}}\right) = \left(\frac{C_{\mu\,Re<1}}{C_{\mu\,Re>1}}\right)^{1/3}.$$

На рис. 2.8 приведены зависимости времени стабилизации скорости газовых пузырьков, всплывающих в воде, от Re, рассчитанные по уравнениям (2.69)—(2.7) для $\overline{V} = 0{,}9$, которые показывают, что в широком диапазоне изменения чисел Re ($0{,}1<Re<100$) время стабилизации составляет менее 0,01 с.

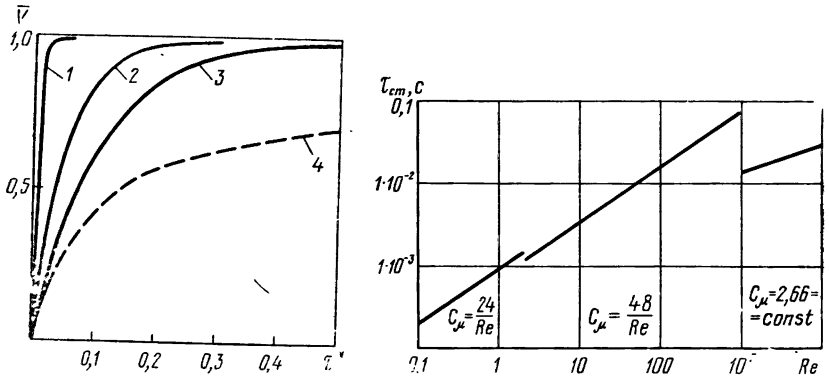



Рис. 2.7. Изменение относительной скорости по уравнениям:
*1*—(2.71); *2*—(2.70); *3*—(2.69); *4*—с учетом силы Бассе

Рис. 2.8. Зависимость времени стабилизации от Re

Учет нестационарных эффектов, связанных с силой Бассе, т. е. с возникновением дополнительного гидродинамического сопротивления, должен приводить к уменьшению относительной скорости газового пузырька, особенно на начальном этапе разгона, и увеличению времени стабилизации. Результаты решения задачи о неустановившемся движении газового пузырька с учетом силы Бассе для $Re<1$ представлены на рис. 2.7 штриховой линией и характеризуют увеличение времени нестационарного процесса и скорости всплытия. Однако незначительное абсолютное значение времени стабилизации позволяет пренебречь эффектами, связанными с нестационарностью гидродинамического сопротивления.

Как показывает сопоставление уравнений (2.67) и (2.68), значение относительной скорости газового пузырька в потоке жидкости может значительно отличаться от значения скорости всплытия его в неподвижной среде. Это отличие связано с силами, действующими на пузырек вследствие имеющегося в потоке градиента давления, а для неустановившегося движения и с ускорением несущего потока жидкости. При этом если для стационарного нисходящего потока влияние архимедовой силы соизмеримо с влиянием сил, связанных с наличием градиента давления, и указанные силы компенсируют друг друга, то на режиме заполнения, сопровождающемся значительными ускорениями жидкой несущей среды, влияние последних оказывается преобладающим, что приводит к значительным положительным величинам скорости газового пузырька относительно жидкой фазы.

## 2.5. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЕДИНИЧНОГО ПУЗЫРЬКА И ОКРУЖАЮЩЕЙ ЕГО ЖИДКОСТИ

До сих пор при рассмотрении особенностей взаимодействия единичного пузырька и окружающей его жидкости в большинстве случаев не учитывалось изменение поверхности газового пузырька и предполагалось, что давление в газовом пузырьке однозначно определяется давлением в потоке жидкости.

Процесс массообмена, а также колебания давления в потоке приводят к изменению поверхности пузырька и движению слоев жидкости, окружающей пузырек.

Задача о неустановившемся безвихревом движении поверхности пузырька при условии несжимаемости жидкости и сферической симметрии движения решена Релеем, и уравнение движения получено в виде

$$\varrho_{ж}\left[R\frac{d^2R}{d\tau^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2\right]=p_0-\frac{2\sigma}{R}-\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{d\tau}-p_\infty, \qquad (2.72)$$

где $p_\infty$ — давление в жидкости при $r\to\infty$; $p_0$ — давление внутри пузырька.

Анализ уравнения (2.72) проведен в ряде монографий по исследованию кавитационных явлений [28, 46, 54], где учтено также и влияние сжимаемости жидкости. Уравнение движения поверхности пузырька (2.72) показывает, что при расширении пузырька (сжатии) давление в окружающей жидкости будет отличаться от давления в пузырьке на величину, зависящую от инерционности, вязкости и поверхностного натяжения жидкости и определяемой скоростью расширения (сжатия) пузырька. При этом, если поверхностное натяжение всегда увеличивает давление внутри пузырька, то инерционность и вязкость жидкости препятствуют изменению поверхности, т. е. при увеличении радиуса уменьшают давление в пузырьке, а при сокращении поверхности увеличивают.

Изменение давления в окружающем пузырек потоке жидкости, а следовательно, и давления внутри пузырька, а также процесс массообмена, приводящий к выделению в пузырек растворенного в жидкости газа, неразрывно сопровождаются изменением температуры парогазовой смеси и соотношения парциальных давлений пара и газа в пузырьке. При неизменном окружающем давлении увеличение массы газа в пузырьке приводит к снижению парциального давления пара, что влечет за собой испарение жидкости с внутренней поверхности пузырька, и понижению температуры окружающих пузырек слоев жидкости. Таким образом, даже при неизменном давлении процесс массообмена единичного пузырька и окружающей его жидкости сопровождается возникновением разности температур и, следовательно, процессом теплообмена, который в общем случае зависит от термодинамических характеристик жидкости и растворенного газа. Учитывая малый размер пузырька, можно принять температуру парогазовой смеси равно-

мерно распределенной по объему пузырька, т. е. пренебречь процессом теплообмена и массообмена внутри пузырька. Для этих условий уравнение изменения энергии для объема смеси, заключенного в пузырьке и представляющего собой смесь газа и пара, можно представить в виде

$$dQ = dU + pdv, \tag{2.73}$$

где $dQ$ — изменение тепловой энергии; $dU$ — изменение внутренней энергии смеси; $dv$ — изменение объема пузырька.

Поступаемое к пузырьку тепло состоит из подведенного теплопроводностью из жидкости, а также вносимого массовыми потоками пара и газа и расходуемого на фазовый переход, связанный с испарением жидкости и выделением растворенного газа.

С учетом известных термодинамических соотношений уравнение первого закона термодинамики (2.37) может быть представлено в виде

$$4\pi R^2\lambda\left(\frac{\partial T}{dr}\right)_{r=R} + (c_{p\text{г}}T - H_\text{г} - c_{v\text{г}})\frac{dm_\text{г}}{d\tau} + (c_{p\text{п}}T - c_{v\text{п}}T - H_\text{п})\frac{dm_\text{п}}{d\tau} =$$
$$= (m_\text{г}c_{v\text{г}} + m_\text{п}c_{v\text{п}})\frac{dT}{d\tau} + p4\pi R^2\frac{dR}{d\tau}, \tag{2.74}$$

где $\lambda$ — коэффициент теплопроводности; $c_p$, $c_v$ — теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме; $T = T_s(p_\text{п})$ — температура пара на линии насыщения при парциальном давлении $p_\text{п}$; $H_\text{п}$, $H_\text{г}$ — теплота фазового перехода; индексы «п» и «г» относятся к пару и газу.

Уравнение (2.74) составлено при условии пренебрежения также изменением кинетической энергии, связанной с движением газа в пузырьке, а также потерями энергии вследствие пульсационного движения, сопровождающейся диссипацией из-за вязкости окружающей пузырек жидкости, т. е. изменение температуры жидкости вблизи поверхности пузырька связано только с испарением или конденсацией. В этом случае значение производной температуры на поверхности пузырька определяется из решения уравнения теплопроводности, аналогичного уравнению конвективной диффузии,

$$\frac{\partial T}{\partial\tau} + V_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V\theta}{r} = K\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial/\partial\theta}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{2\partial T}{r\partial r}\right] \tag{2.75}$$

при граничных условиях:

при $\tau > 0,\ r = R \quad T = T_s(p_\text{п})$;

при $r \to \infty,\ \tau = 0 \quad T = T_\infty$;

при $r = R,\ r \to \infty \quad T = T_\infty$.

Результаты решения аналогичны полученным для уравнения конвективной диффузии, и безразмерные соотношения для теплообмена имеют вид

$$\beta_t = \frac{dQ/d\tau}{4\pi R^2 (T_\infty - T_0)}; \tag{2.76}$$

$$\mathrm{Nu} = \frac{2R\beta_t}{\lambda}; \tag{2.77}$$

$$\mathrm{Pe}_t = \frac{2RV_\infty}{K}, \tag{2.78}$$

где $K$ — коэффициент температуропроводности.

Таким образом, полная система уравнений, описывающая процессы взаимодействия единичного пузырька в потоке жидкости с учетом изменения его поверхности, фазовых превращений, связанных с выделением растворенного в жидкости газа, и испарения будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
2\pi R\lambda (T_\infty - T)\mathrm{Nu} + (c_{p\,\text{г}} T - c_{v\text{г}} T - H_\text{г})\frac{dm_\text{г}}{d\tau} + (c_{p\,\text{п}} T - c_{v\text{п}} T - H_\text{п})\frac{dm_\text{п}}{d\tau} = \\
= (m_\text{г} c_{v\,\text{г}} + m_\text{п} c_{v\,\text{п}})\frac{dT}{d\tau} + p 4\pi R^2 \frac{dR}{d\tau}; \\
\frac{dm_\text{г}}{d\tau} = 2\pi R D (C_\infty - C_0)\,\mathrm{Sh}; \\
\frac{dm_\text{п}}{d\tau} = \frac{\alpha [p_s(T) - p_\text{п}]}{\sqrt{2\pi B_\text{г} T_s (p_\text{п})}} 4\pi R^2; \\
p = p_\infty + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{d\tau} + \varrho_\text{ж}\left[R\frac{d^2R}{d\tau^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2\right]; \\
p_\text{г} = p\frac{m_\text{г} B_\text{г}}{m_\text{г} B_\text{г} + m_\text{п} B_\text{п}}; \quad p_\text{п} = p\frac{m_\text{п} B_\text{п}}{m_\text{г} B_\text{г} + m_\text{п} B_\text{п}}; \\
\frac{dV_{\text{г.ж}}}{d\tau} = 2\frac{dV_\text{ж}}{d\tau} + \lambda_\tau \frac{V_\text{ж}^2}{d} - \frac{3}{4} C_\mu \frac{V_{\text{г.ж}}^2}{R} - 2g; \\
R = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{m_\text{г} + m_\text{п}}{\varrho_\text{г} + \varrho_\text{п}}\right)^{1/3}; \quad \varrho_\text{г} = \frac{p_\text{г}}{B_\text{г} T}; \quad \varrho_\text{п} = \frac{p_\text{п}}{B_\text{п} T}.
\end{gathered} \tag{2.79}$$

Термодинамические характеристики $c_{p\text{г}}$, $c_{p\text{п}}$, $c_{v\text{г}}$, $c_{v\text{п}}$, $\lambda$, $D$, $\varkappa$, $K$, $p_s$, $T_s$, $H_\text{п}$, $H_\text{г}$ являются в общем случае функцией температуры (давления) и зависят от рода жидкости и насыщающего газа.

Для пузырьков малого размера следует учитывать, что равновесное давление пара над вогнутой поверхностью жидкости будет ниже, чем при плоской поверхности раздела и может быть определено из соотношения Кельвина — Гельмгольца, которое для случая $\varrho_\text{ж} \gg \varrho_\text{п}$ имеет вид

$$p_s = p_s' e^{-\frac{2\sigma}{R}\frac{1}{\varrho_\text{ж} B_\text{п} T}}, \tag{2.80}$$

где $p_s$ — упругость пара над вогнутой поверхностью с радиусом кривизны, равным $R$; $p_s'$ — упругость пара над плоской поверхностью жидкости.

Расчетный анализ системы уравнений, проведенный методами численного интегрирования, выявил следующие особенности вза-

имодействия единичного пузырька и окружающей его жидкости. При снижении давления в жидкости ниже уровня, соответствующего равновесной концентрации растворенного в жидкости газа, и поддержании его при постоянном значении, превышающем величину упругости пара, при температуре жидкости происходит рост размера пузырька вследствие диффузии растворенного в жидкости газа в полость пузырька. Скорость роста при этом определяется величиной возмущения (снижением давления ниже равновесного), определяемой степенью пересыщения потока.

Расширение пузырька вследствие диффузии газа сопровождается испарением топлива в пузырек из-за снижения температуры парогазовой смеси в пузырьке и уменьшения парциального давления пара. Так как процесс теплообмена для большинства высококипящих топлив, а также модельных жидкостей, применяемых при отработке энергетических установок, происходит намного быстрее, чем процесс диффузии газа, при решении задачи о диффузионном росте парогазового пузырька при постоянном давлении в жидкости можно не учитывать изменение температуры в пузырьке, приняв $T=T_s$.

Анализ показывает, что подобное допущение справедливо, если термодинамические характеристики жидкости и растворенного в ней газа удовлетворяют следующему неравенству:

$$W=\frac{\varkappa\sqrt{DK}\cdot H_{\text{п}}}{\lambda}\,\frac{dp_s}{dT}\,\frac{B_{\text{г}}}{B_{\text{п}}}<1. \qquad (2.81)$$

Величина $W$ для 288К составляет для пары азотный тетраксид и азот $1{,}54\cdot10^{-3}$, для НДМГ и азота $1{,}75\cdot10^{-5}$, для воды и воздуха $1{,}01\cdot10^{-6}$, для воды и $CO_2$ $1{,}27\cdot10^{-4}$.

В этом случае процесс испарения успевает завершиться полностью и парциальное давление газа в пузырьке может быть определено из очевидного соотношения.

$$p_{\text{г}}=p-p_s(T_{\text{ж}}).$$

При постоянном давлении в жидкости процесс расширения происходит только вследствие диффузии газа, и скорости изменения поверхности даже при величинах пересыщения $(C_\infty-p_{\text{г}}\varkappa)/\varrho_{\text{г}}$, соизмеримых с единицей, позволяют пренебречь инерционным и вязкостным членами в уравнении Релея (2.72). Однако влияние вязкости жидкости проявляется при ее изменении за счет изменения относительной скорости пузырька и числа Sh, определяющего массообмен. С увеличением вязкости скорость изменения радиуса уменьшается.

Для процесса роста пузырька при постоянном давлении влияние нестационарности числа Sh сказывается лишь на начальном этапе роста, что допускает использование для расчетов зависимостей для стационарного массообмена (2.51)—(2.54).

Таким образом, анализ системы уравнений (2.79) показывает, что для постоянного давления в жидкости изменение радиуса газового пузырька вследствие диффузии газа при заторможенной

активными веществами поверхности может быть рассчитано по уравнению (для $2<\mathrm{Re}<500$)

$$\frac{dR}{d\tau}=\frac{C_\infty - p_{\text{г}\varkappa}}{\varrho_{\text{г}}}\left[\frac{D}{R}+0{,}24\frac{D^{2/3}R^{1/8}}{\nu^{5/12}}\left(\lambda_{\text{т}}\frac{V_{\text{ж}}^2}{d}-2g\right)^{3/8}\right]. \quad (2.82)$$

Для роста газовых пузырьков в жидкостях, свободных от поверхностно-активных веществ, аналогичная зависимость будет иметь вид

$$\frac{dR}{d\tau}=\frac{C_\infty - p_{\text{г}\varkappa}}{\varrho_{\text{г}}}\left[\frac{D}{R}+0{,}087\frac{R^{3/4}D^{1/2}}{\nu^{2/3}}\left(\lambda_{\text{т}}\frac{V_{\text{ж}}^2}{d}-2g\right)^{5/12}\right]. \quad (2.83)$$

Для пузырьков малых размеров, у которых дополнительное давление, вызываемое поверхностным натяжением, может быть соизмеримо с упругостью, парциальное давление газа в зависимостях (2.82) и (2.83) должно определяться с учетом влияния поверхностного натяжения, т. е.

$$p_{\text{г}}=p_\infty - p_s(T_{\text{ж}})+2\sigma/R. \quad (2.84)$$

Несколько иначе проявляется влияние различных факторов на процесс изменения объема парогазового пузырька при колебаниях давления. В этом случае колебания объема пузырька вследствие изменения давления приводят к колебаниям температуры парогазовой смеси. Процессы испарения (конденсации), выделения газа в объем (растворения) и теплопроводности снижают амплитуду колебаний температуры, так как снижение температуры при расширении компенсируется подводом тепла с потоками масс газа и пара теплопроводностью и, наоборот, при сжатии объема с повышением давления происходит конденсация и растворение находящегося в объеме пузырька пара и газа и отвод тепла теплопроводностью. То есть при колебаниях объема процессы тепло- и массообмена сопровождают друг друга и оказываются взаимосвязанными. Завершенность указанных процессов зависит от времени действия возмущения, т. е. они являются релаксационными, а следовательно, изменение температуры в объеме пузырька при колебаниях давления будет зависеть как от амплитуды, так и от частоты колебаний. С уменьшением частоты колебаний амплитуда колебаний температуры вследствие бо́льшей завершенности процессов тепло- и массообмена уменьшается. Так, при колебаниях давления $1{,}5\cdot10^5\pm0{,}5\cdot10^5$ Па в эмульсии воздушных пузырьков в воде при температуре 343 К изменение температуры среды в объеме пузырька при частоте 500 Гц составляет 292 К, а при частоте 50 Гц колеблется от 340 до 347 К (рис. 2.9).

Для ограниченных частот колебаний, характерных для магистралей системы питания ($f<100$ Гц), влияние вязкости и сжимаемости жидкости в уравнении Релея (2.72) практически не сказывается, так как собственная частота пузырьков оказывается много выше частоты возмущения [12].

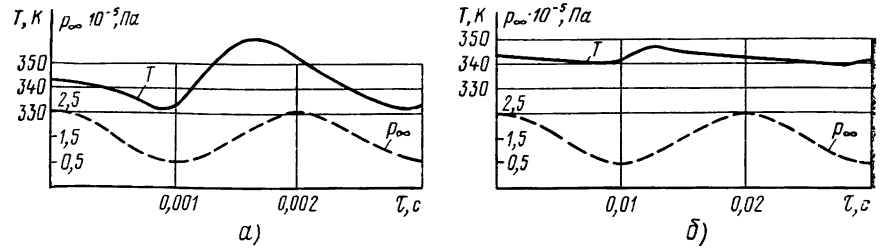



Рис. 2.9. Влияние частоты колебаний давления на изменение температуры среды в объеме пузырька:

*а*—$f$=500 Гц; *б*—$f$=50 Гц

При колебаниях давления на изменение объема пузырька оказывает влияние нестационарность тепло- и массообмена.

Как уже обращалось внимание в подразд. 2.3, в начальный момент возникновения диффузионного процесса поток массы намного превышает установившееся значение. Снижение интенсивности массообмена происходит вследствие обеднения слоев жидкости, лежащих вблизи поверхности пузырька, при выделении газа и увеличения размеров диффузионного слоя. В процессе колебаний давления при изменении направления потока массы (при переходе через равновесное состояние) процесс диффузии возникает при начальных условиях. Кроме того, при колебаниях давления около уровня, соответствующего равновесной концентрации, процесс выделения газа при понижении давления происходит через бóльшую поверхность пузырька, чем процесс растворения при повышении давления.

Эти обстоятельства приводят к росту объема пузырька при колебаниях давления. С указанными особенностями фазовых переходов по всей вероятности связан и специфический вид изменения давления в системах питания при низкочастотных колебаниях (острые пики и плавные провалы давления).

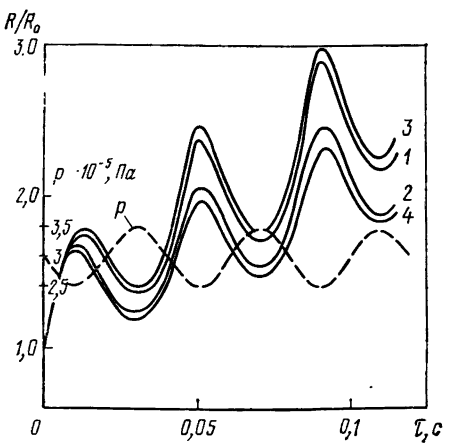



Рис. 2.10. Изменение относительного радиуса пузырька

На рис. 2.10 представлены результаты расчета системы уравнений (2.79) при синусоидальном изменении давления в $N_2O_4$, насыщенной азотом с частотой $f$=25 Гц и амплитудой $2A = 1 \cdot 10^5$ Па около среднего уровня $3 \cdot 10^5$ Па, соответствующего равновесной концентрации 0,5 кг/м$^3$. Кривая *1* получена по результатам расчета по полной системе урав-

нений (2.79); кривая *2* — при использовании зависимостей для стационарного массообмена; кривая *3* иллюстрирует влияние поверхностного натяжения ($\sigma=0$); кривая *4* построена по результатам расчета при условии стационарного массообмена и отсутствии поверхностного натяжения. Из рассмотрения рис. 2.10 следует, что если учет влияния поверхностного натяжения оказывает слабое влияние на изменение относительного радиуса пузырька, то пренебрежение нестационарностью тепло- и массообмена при колебаниях давления может привести к существенным ($\approx 20\%$) погрешностям расчета.

*Глава 3*

# ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА

## 3.1. СОСТАВ И СТРУКТУРА ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА

Структура и характер распределения фаз в двухфазном газожидкостном потоке оказывают существенное влияние на особенности протекания процессов взаимодействия между фазами. Как показывают результаты исследований, со структурой двухфазного потока неразрывно связаны такие характеристики потока как гидравлические потери давления, потери энергии из-за механического взаимодействия фаз, особенности распространения возмущений в потоке и др. От особенностей структуры двухфазного потока зависит также возможная схематизация процесса течения, выбор формы уравнений и методов, применяемых для исследования течения. Очевидно, что при расслоенной структуре течения, когда имеет место четкая граница раздельного существования фаз, могут быть использованы уравнения движения каждой из фаз в отдельности с учетом описания процессов на поверхности раздела. Подобный метод трудно применим для пузырькового режима течения, когда основная энергия потока сосредоточена в несущей жидкой фазе и распределенные в ней газовые пузырьки являются лишь источником диссипативных потерь, возникающих при относительных перемещениях поверхности раздела. Вместе тем структура потока, распределение пузырьков по размерам, оказывают влияние на характер и скорость протекания процессов обмена массой, теплом и количеством движения между фазами.

Степень дисперсности газовой фазы влияет также и на характер изменения энергетических характеристик центробежных насосов, работающих на газожидкостных смесях [17]. Эти обстоятельства делают необходимым определение не только состава двухфазного потока, т. е. относительной концентрации фаз, но характера ее распределения как по длине и сечению трубопровода, так и по размерам пузырьков, составляющих газовую фазу. Вместе с тем, следует отметить, что и сама структура двухфазн

го потока определяется гидродинамическими характеристиками потока.

Многочисленные исследования режимов течения двухфазных потоков, основанные на визуальных наблюдениях, предполагает наличие различных форм течения, определяемых распределением фаз по сечению трубопроводов [29, 65, 67]. По структуре потока режимы течения разделяются на пузырьковый, эмульсионный, снарядный, дисперсно-кольцевой и обращенный дисперсно-кольцевой [33].

При сравнительно небольших газосодержаниях потока и значительных его скоростях, которые могут реализоваться в системах питания, следует ожидать, что в большинстве случаев в магистралях возникает пузырьковый или эмульсионный режим течения, характеризующийся равномерным распределением газовой фазы в виде дисперсных пузырьков.

Так, в соответствии с исследованиями [33] в вертикальных трубах устойчиво реализуется пузырьково-снарядное течение при

$$K \leqslant 7;\ N \ll 0{,}1, \tag{3.1}$$

где $K = \dfrac{\varrho_г V_{0г}^2}{\sqrt{g\sigma\,(\varrho_ж - \varrho_г)}}$;

$$N = \mathrm{Fr}\,\mathrm{We}^{1{,}25}\left(1 + \frac{31}{\mathrm{Ga}^{0{,}55}}\right);$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{V_ж d g^{0{,}5}(\varrho_ж - \varrho_г)}{4\sigma^{3/4}};\quad \mathrm{We} = \frac{\sigma}{g\,(\varrho_ж - \varrho_г)\,d^2};$$

$$\mathrm{Ga} = \frac{1}{\varrho_ж}\left(\frac{\sigma}{g\,(\varrho_ж - \varrho_г)}\right)^{3/2};$$

$V_{0г}$ — приведенная скорость газовой фазы (отношение объемного расхода к поперечному сечению трубопровода); $V_ж$ — скорость жидкой фазы.

Для горизонтальных потоков и нисходящего течения в наклонных трубах предельным условием устойчивого существования пробкового режима является следующая экспериментальная зависимость [39]:

$$\mathrm{Fr}_c \geqslant (0{,}2 + 2i/\lambda_т)\,e^{-2{,}5\beta_г/\beta_ж^2}, \tag{3.2}$$

где $i = \sin\alpha$ — геометрический уклон, численно равный гидравлическому при безнапорном течении жидкости в наклонном трубопроводе; $\alpha$ — угол между осью трубопровода и горизонталью; $\beta_г$, $\beta_ж$ — относительные объемные расходные концентрации газовой и жидкой фазы; $\mathrm{Fr}_c = V_c^2/(gd)$ — критерий Фруда, построенный по скорости смеси.

Нарушение пузырькового режима может произойти вследствие слияния пузырьков газа при образовании и движении их в потоке. Наличие градиентов давления и скорости в турбулентном потоке приводит к концентрации пузырьков в определенных сечениях по

радиусу трубы (на расстоянии 0,6 ... 0,8 радиуса от центра канала). Это обстоятельство способствует слиянию небольших пузырьков и образованию пробок. Однако дрейф пузырьков газа в область с повышенной интенсивностью пульсаций должен также приводить к созданию условий для гидромеханической неустойчивости их, нарушению сферичности формы и дроблению под действием пульсаций скорости потока несущей фазы. То есть в общем случае двухфазный пузырьковый режим течения характеризуется широким спектром размеров отдельных парогазовых пузырьков, минимальная величина которых определяется условием их образования, а максимальная — условием дробления. В частном конкретном случае для определения закона распределения размеров пузырьков, составляющих газовую фазу, должны быть проанализированы не только эти условия, но и особенности течения взаимодействия фаз, определяющих закон распределения.

Для двухкомпонентных потоков на практике [31, 63, 70] обычно применяют нормально-логарифмический закон распределения включений, в соответствии с которым функция распределения

$$f(R)=\frac{\lg l}{\sqrt{2\pi}R\lg\sigma}\exp\left[-\left(\frac{\lg R-\lg R_0}{\sqrt{2}\lg\sigma}\right)^2\right],$$

где $R_0$ — математическое ожидание радиусов; $\sigma$ — среднеквадратичное отклонение радиусов.

В настоящее время известно весьма ограниченное число публикаций по исследованию функции распределения размеров газовых или парогазовых пузырьков в жидкости. Наиболее интересны результаты экспериментальных (с помощью фотографического метода регистрации) и теоретических исследований распределения по размерам газовых пузырьков в кавитирующем турбулентном потоке, создаваемом вращающимся винтом [26]. При исследовании было установлено, что общий характер функции распределения сохраняется неизменным, хотя абсолютное содержание пузырьков и их размеры могут изменяться в зависимости от условий эксперимента.

На основании анализа экспериментальных данных было показано, что с достаточной вероятностью (равной по результатам эксперимента 0,99) распределение размеров газовых пузырьков совпадает с нормально-логарифмическим законом распределения.

Исследования распределения в жидкости мельчайших газовых пузырьков или твердых несмачиваемых частиц, являющихся зародышами ультразвуковой кавитации, показали, что в отстоявшейся дистиллированной воде распределение указанных зародышей весьма неравномерно с резким увеличением количества частиц или пузырьков при уменьшении их размера [59, 83]. Аналогичный характер имеет также распределение зародышей, полученное Страссбергом [46] в обычной водопроводной воде, хотя абсолютное количество их с одинаковыми размерами значительно (для радиусов $10^{-3}$ см на 2 порядка) превосходит количество таких зародышей в дистиллированной воде. Указанные исследования, а также извест-

ные результаты распределения механических примесей в низкокипящих топливах на различных этапах их эксплуатации показывают, что распределение ядер может быть принято нормально-логарифмическим. При известных значениях минимальных $R_{min}$ и максимальных $R_{max}$ размеров пузырьков в потоке среднее значение радиуса при нормально-логарифмическом законе распределения может быть определено как

$$R_* = \sqrt{R_{min} R_{max}}. \qquad (3.3)$$

Для определения минимальных размеров газовых или парогазовых пузырьков следует более подробно остановиться на физической модели образования двухфазного потока в магистралях системы питания при течении в них насыщенного газом топлива.

### 3.2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА

Анализ многочисленных теоретических и экспериментальных исследований кавитационных явлений в дегазированных и насыщенных газом жидкостях свидетельствует о том, что в настоящее время отсутствует единая, сколько-нибудь строгая теория образования разрывов сплошности в жидкостях при снижении в них давления ниже уровня упругости пара или давления, соответствующего равновесной концентрации растворенного в жидкости газа.

Согласно молекулярно-кинетической теории жидкость способна выдерживать значительные растягивающие напряжения, и для разрывов сплошности при неизменной температуре должны быть реализованы давления значительно ниже равновесных значений. Из условия статического равновесия сферического газового пузырька и окружающей его жидкости

$$p_п + p_г = p + 2\sigma/R, \qquad (3.4)$$

следует, что для разрыва сплошности на молекулярном уровне ($R \approx 10^{-10}$ м) необходимо реализовать растягивающие напряжения $2\sigma/R = 10^{10}$ Па (для воды — $1{,}4 \cdot 10^9$ Па), что никогда не наблюдается на практике.

Образование разрывов сплошности на зародышах новой фазы в виде газовых пузырьков конечных размеров также труднообъяснимо. В соответствии с условием статического равновесия диффузионное равновесие газового пузырька в жидкости, насыщенной до равновесной концентрации, будет иметь вид

$$(p - p_п + 2\sigma/R)\varkappa = C_\infty. \qquad (3.5)$$

Подобное диффузионное равновесие пузырька является неустойчивым. При неизменном давлении в жидкости в случае непроизвольного увеличения радиуса пузырька парциальное давление газа внутри него уменьшается вследствие снижения давления, определяемого поверхностным натяжением, что приводит к снижению концентрации газа на поверхности пузырька, диффузионному потоку газа и жидкости, дальнейшему росту пузырька и всплытию его

под действием гидростатического давления. Случайное уменьшение радиуса приводит к увеличению парциального давления газа и концентрации на поверхности, диффузионному потоку массы газа в окружающую его жидкость и полному растворению пузырька.

Подобные процессы возникают при понижении или повышении гидростатического давления. При этом изменение концентрации газа на поверхности будет происходить вследствие изменения не только самого гидростатического давления, но и радиуса, связанного с изменением объема пузырька. То есть в случае изменения давления в жидкости, окружающей газовый пузырек, его положение равновесия становится еще менее устойчивым, чем в случае непроизвольного случайного изменения его радиуса.

Полученные экспериментальные значения растягивающих напряжений различных жидкостей имеют существенный разброс, который определяется условиями проведения эксперимента, характеристиками самих жидкостей, наличием в них посторонних примесей, растворенных и свободных газов.

Опыт эксплуатации различного рода энергетических установок и гидравлических систем показывает, что в реальных условиях даже незначительное снижение в жидкости давления ниже уровня, соответствующего равновесной концентрации растворенного в жидкости газа, приводит к выделению газа и образованию газопаровых пузырьков. То есть реальные жидкости неспособны выдерживать растягивающие напряжения и при наступлении «пересыщения» в них возникают разрывы.

Большинство исследователей кавитационных явлений сходятся во мнении, что причиной их возникновения является наличие в жидкости так называемых слабых мест, т. е. источником образования новой фазы являются поверхностные эффекты, возникающие при контакте жидкости с находящимися в ней мельчайшими нерастворенными газовыми включениями.

В настоящее время предложен ряд механизмов существования пузырьков в массе жидкости. Один из них, изложенный Гарвеем, заключается в существовании нерастворенного газа в микроскопических несмачиваемых жидкостью порах в поверхности сосуда, ограничивающих жидкость, или несмачиваемых твердых примесей [16]. В этом случае поверхностное натяжение жидкости образует выпуклый в сторону поры мениск, который снижает давление газа в поре ниже уровня давления в жидкости на величину, зависящую от поверхностного натяжения и радиуса кривизны мениска. То есть для несмачиваемой поры условием диффузионного равновесия на поверхности, разделяющей жидкость и парогазовую полость, будет в отличие от (3.5) зависимость

$$(p - p_{\text{п}} - 2\sigma/R)\varkappa = C_{\infty}. \qquad (3.6)$$

В этом случае увеличение давления в жидкости приводит к уменьшению радиуса кривизны мениска, что компенсирует изменение концентрации на поверхности раздела и обеспечивает устойчивое существование газа в поре.

Другим механизмом устойчивого существования газовых ядер может служить наличие в жидкости органических примесей, препятствующих процессу растворения мельчайших газовых пузырьков [81].

Инициирование газовых и паровых пузырьков в пересыщенных жидкостях возможно также под влиянием заряженных частиц, что широко применяется для их изучения в пузырьковых камерах [50].

Качественное подтверждение гипотезы Гарвея содержится во многих опубликованных исследованиях механизма образования газовой фазы, как в неподвижной жидкости, так и в движущемся потоке.

Так, например, обработка образцов рабочей жидкости давлением приводит к существенному увеличению их объемной прочности вследствие уменьшения количества газа в порах и числа активных пор [28]. Тщательная полировка внутренней поверхности сопла при течении испаряющейся жидкости приводит к увеличению плотности потока и значительному его «пересыщению» [13]. Исследование процесса газовыделения в стеклянном сосуде с насыщенной воздухом водой показывает, что снижение давления до $10^3$ Па не приводит к образованию пузырей даже при сильном встряхивании, тогда как присутствие образцов из стали, алюминия и др. приводит к интенсивному газообразованию [44]. Результаты исследования неустановившегося течения воды в трубопроводе [66] также показывают существенное влияние на увеличение газосодержания в потоке газовых полостей, находящихся в микротрещинах поверхности трубопровода. Следует отметить, что определяющим фактором в гипотезе Гарвея является отсутствие смачиваемости жидкостью поверхностей сосуда и находящихся в ней механических примесей. Большинство подтверждающих гипотезу Гарвея экспериментальных данных проведено на воде, смачиваемость которой с большинством твердых поверхностей существенно зависит от степени загрязнения поверхностей. Имеющиеся экспериментальные данные об измерении краевых углов различных жидкостей имеют значительный разброс [22, 23, 62], однако, для воды при температуре, близкой к температуре кипения, эта величина никогда не превосходит 90°. То есть чистые металлические поверхности являются смачиваемыми водой и, следовательно, поверхностные эффекты на границе жидкость — стенки сосуда должны исключать существование нерастворенного газа в микрополостях поверхности сосуда или трубопровода.

Вместе с тем большинство измерений краевых углов проводилось на обработанных поверхностях с шероховатостью поверхностей металла до $R_t=32$ и в процессе эксперимента уделялось особое внимание исключению загрязнения поверхности органическими примесями. В реальных технических системах поверхность емкостей и трубопроводов имеет шероховатость намного грубее и технологический процесс их изготовления при контакте с охлаждающими и смазочными материалами не исключает загрязнения

поверхности органическими примесями. Кроме того, замеренное общее значение краевого угла не дает достаточного представления о микроскопическом угле в имеющихся в материале мельчайших впадинах и трещинах. Это обстоятельство приводит к тому, что полное заполнение микровпадин на поверхности металла оказывается практически немозможным и впадины с конусностью $\beta<\theta$ (где $\theta$ — краевой угол смачивания) оказываются способными устойчиво сохранять газ в нерастворенном состоянии [10].

Все вышеизложенное является характерным не только для воды, но и для большинства жидкостей, в том числе и высококипящих топлив. Даже такие хорошие растворители органических веществ, как ацетон, спирты, эфиры и фреон, имеют краевые углы смачивания с металлическими поверхностями, отличные от 0.

Если насыщение ракетного топлива газом проводится в заправочных средствах с последующей закольцовкой газовых объемов в процессе заправки [48], то это обстоятельство также способствует сохранению газовых зародышей в микрополостях поверхности бака и трубопроводов.

При образовании пузырьков газа на твердой поверхности разность термодинамических потенциалов системы после образования пузырька и до его возникновения ($\Phi$ и $\Phi_0$ соответственно) выражается в виде

$$\Delta\Phi=\Phi-\Phi_0=\sigma S+(V-\sigma)S'-(p_\text{г}+p_\text{п}-p)W, \qquad (3.7$$

где $W=\frac{\pi R^3}{3}(2+3\cos\theta-\cos^3\theta)$ — объем пузырька: $S=2\pi R^2(1+$ $+\cos\theta)$ — поверхность пузырька; $S'=\pi R^2\sin\theta$ — площадь основания (контакта); $V=\sigma(1+\cos\theta)$ работа адгезии.

С учетом того, что в состоянии равновесия

$$p_\text{г}+p_\text{п}=p+\frac{2\sigma}{R_0},$$

выражение (3.7) может быть преобразовано так:

$$\Delta\Phi=\pi\sigma\varphi(\theta)\left(-\frac{2}{3}\frac{R^3}{R_0}+R^2\right), \qquad (3.8$$

где $\varphi(\theta)=2+3\cos\theta-\cos^3\theta$.

Введем соотношение $\psi(\theta)$, равное отношению функции $\varphi(\theta)$ к ее значению при нулевом угле смачивания, т. е.

$$\psi(\theta)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1}{4}\cos^3\theta. \qquad (3.9$$

Выражение (3.9) представляет собой отношение разности термодинамических потенциалов системы при образовании парогазового пузырька на твердой поверхности к аналогичной разности при образовании пузырька в жидкости ($\theta=0$). Вид функции (3.9), уменьшающейся с ростом краевого угла смачивания $\theta$, свидетельствует о том, что при прочих равных условиях — наличие органических примесей, препятствующих процессу растворени

влияния ионизирующих частиц, флуктуаций плотности, давления и температуры — вероятность возникновения парогазового зародыша на стенке или при контакте с механическими примесями будет выше, чем в однородной жидкости, вследствие меньшей работы, которую нужно совершить над системой для образования пузырька. В общем случае физическая модель образования двухфазного потока при течении насыщенной газом жидкости описана в работе [14].

Снижение давления в потоке ниже уровня, соответствующего равновесной концентрации растворенного в жидкости газа, приводит к процессу диффузии газа из жидкости в полости, распределенные по поверхности, ограничивающей жидкость, и механических примесей, что приводит к росту газовых пузырьков на поверхности трубопровода до размеров, определяемых условием обтекания растущих пузырьков основным потоком, снесению пузырьков в основной поток, росту пузырьков в потоке до размеров, определяемых условием дробления их в потоке.

Косвенное подтверждение принятой гипотезы о возникновении двухфазного потока в насыщенных газом жидкостях вследствие процесса диффузии газа в микрополости, образованные при заправке на поверхности системы питания силами поверхностного натяжения жидкости, получено также в результате экспериментальных работ, проведенных авторами и описанных в подразд. 3.3.

### 3.3. ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В УСЛОВИЯХ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В соответствии с принятой физической моделью образования двухфазного газожидкостного потока рассмотрим особенности роста парогазового пузырька на поверхности магистрали системы питания при снижении давления ниже уровня, соответствующего концентрации.

Указанный процесс представляет интерес с точки зрения решения общей задачи образования двухфазного потока, так как такие характеристики процесса, как отрывной диаметр пузырей, которые будучи снесенными в поток, являются в нем источниками образования («зародышами») газовой фазы, их число, скорость роста до момента отрыва и т. д., неразрывно связаны с кинетикой общего процесса газовыделения и получением зависимости относительной объемной концентраци газовой фазы в потоке.

Применительно к исследованию теплообменных процессов вопросам роста паровых пузырей при пузырьковом кипении на поверхности нагрева посвящен широкий круг теоретических и экспериментальных работ, проведенных как у нас в стране, так и за рубежом. Глубокий анализ особенностей этих процессов и широкая библиография, посвященная им, содержится в монографиях [22, 33, 65]. Вместе с тем условия возникновения и роста парогазовых пузырьков вследствие диффузии газа в них на поверхно-

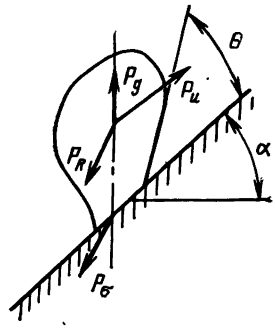



Рис. 3.1. Силы, действующие на единичный пузырек, находящийся на поверхности трубопровода

сти трубопроводов системы питания при напорном течении в них насыщенного газом топлива имеет ряд характерных особенностей. К этим особенностям следует отнести, прежде всего, диффузионный характер процесса роста пузырьков при отсутствии значительных тепловых потоков и перегрева жидкости.

Кроме того, в большинстве случаев к магистралям питания не предъявляется специальных требований по шероховатости поверхностей, и конструктивно они, как правило, представляют собой соединение с помощью сварки или фланцевых соединений секции сортовых трубопроводов. Шероховатость внутренних поверхностей магистралей системы питания редко когда выполняется выше, чем Rz=80, что приводит к значительному увеличению числа так называемых действующих центров образования газовой фазы.

В общем случае при росте единичного пузырька и находящегося на стенке трубопровода, когда поверхность его омывается потоком жидкости (рис. 3.1), на пузырек будут действовать силы поверхностного натяжения $P_\sigma$ гидродинамического сопротивления основному потоку $P_u$, сопротивления со стороны жидкости изменению поверхности пузырька вследствие его роста $P_R$ и выталкивающая (архимедова) сила $P_g$.

При условии сферической формы пузырька выражение для составляющих сил могут быть получены из рассмотрения рис. 3.1:

$$P_\sigma = 2\pi R\sigma \sin\theta;$$

$$P_u = \xi_u \frac{\varrho_ж - V_ж^2}{2} R^2(\pi - \theta - \sin\theta\cos\theta);$$

$$P_R = \xi_R \pi R^2(\varrho_ж - \varrho_г)\left[\frac{dR}{d\tau}(1+\cos\theta)\right]^2;$$

$$P_g = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\varrho_ж - \varrho_г)(2+3\cos\theta - \cos^3\theta),$$

где $\theta$ — угол смачивания.

В условиях диффузионного роста газового пузырька на по верхности трубопровода силой сопротивления жидкости вследстви увеличения размера пузырька можно пренебречь. В этом случа условие равновесия сил, действующих на пузырек, составляет:

$$(P_g\cos\alpha)^2 + (P_u + P_g\sin\alpha)^2 = P_\sigma^2.$$

В условиях неподвижной жидкости (при отсутствии гидрод намической силы от набегающего потока) для пузырька, раст

щего на горизонтальной поверхности, радиус в момент отрыва от поверхности $R_d$ получен В. Фритцем [22] из анализа действующих сил: подъемной и поверхностного натяжения. С учетом эмпирических коэффициентов полученное выражение имеет вид:

$$R_d = 0{,}0104\theta \sqrt{\frac{\sigma}{(\varrho_ж - \varrho_г) g}}.$$

Как уже отмечалось, угол смачивания для многих жидкостей и твердых поверхностей зависит от условий проведения эксперимента и является статистической величиной, в связи с чем использование формулы Фритца для определения отрывного радиуса должно давать существенный разброс результатов.

Вместе с тем в момент отрыва в месте контакта пузырька с поверхностью происходит образование шейки с увеличением угла контакта и уменьшением его периметра. Это обстоятельство приводит к тому, что средний динамический угол смачивания мало отличается для различных жидкостей и поверхностей. Так, для паровых пузырей, образующихся в воде при 90°С на плоской хромированной плите $\theta_d = 40...45°$ [69], для парогенераторных труб $\theta_d = 45...55°$ [35], для кипения азота на разных поверхностях $\theta_d \approx \approx 54°$ [22].

При росте пузырька на поверхности трубопровода превалирующее влияние на условие равновесия оказывают гидродинамические силы, возникающие при обтекании пузырька потоком жидкости. При этом средняя по поверхности пузырька скорость потока определяется профилем изменения скорости по сечению трубопровода. Для турбулентного течения жидкости, в случае когда рост пузырька происходит целиком в вязком подслое, изменение скорости на поверхности трубопровода может быть принято по линейному закону [77]:

$$V_y = \frac{\tau_0}{\nu\varrho} y = \frac{\lambda V_\infty^2}{8\nu} y, \qquad (3.10)$$

где $\tau_0$ — напряжение трения; $y$ — расстояние от поверхности трубопровода.

Для пузырька сферической формы ($y = 2R$) интегрирование зависимости (3.10) по высоте пузырька дает выражение

$$\overline{V}_R = \frac{\lambda V_\infty^2}{8\nu} R. \qquad (3.11)$$

При учете краевого угла смачивания зависимость средней по поверхности скорости потока, обтекающего пузырек, намного усложняется:

$$\overline{V}_R = \frac{\lambda V_\infty^2 R}{8\nu} \frac{\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} + (\pi - \theta)\cos\theta}{\pi - \theta + \sin\theta \cdot \cos\theta}. \qquad (3.12)$$

Выражения для средней скорости, аналогичные (3.11), (3.12), обычно используют для расчета гидродинамической силы, действующей на пузырек, и определения отрывного радиуса пузырька [32, 49]. Полученные при этом значения коррелируют эмпирическими коэффициентами. Использование при подобных расчетах в уравнении (3.5) коэффициента гидравлического сопротивления единичного пузырька, всплывающего в жидкости, дает существенную погрешность вследствие влияния на характер обтекания поверхности трубопровода и соседних пузырьков. С этой точки зрения необходимым становится учет числа так называемых центров образования газовой фазы на поверхности трубопровода и влияния соседних пузырей. Имеющийся в настоящее время значительный экспериментальный материал по определению плотности центров на поверхностях нагрева получен для условий образования пузырей пара в перегретых жидкостях, и полученные соотношения включают в себя величину перегрева. Обобщение этого материала содержат монографии [22, 65]. Следует ожидать, что для диффузионного роста газовых пузырей размер центров должен быть существенно меньше и плотность их выше, чем для условий кипения. Ограниченные результаты экспериментальных исследований подтверждают это предположение. Так, например, для диффузионного роста водородных пузырей на платиновом катоде при электролизе водного раствора серной кислоты размер центров оценивается, по крайней мере, на порядок меньшим, чем для случая кипения [15]. На плохо обработанной поверхности трубопровода число таких центров должно быть значительно. Проведенная нами оценка показала, что число пузырьков газа, выделившихся из насыщенной жидкости на единицу поверхности трубопровода питания, зависит от их размера [45]. То есть число центров оказывается достаточным для того, чтобы вся поверхность в зоне трубопровода, где создаются условия для газовыделения, была покрыта слоем пузырьков газа. На рис. 3.2 приведена фотография распределения пузырьков газа, выделившихся из водопроводной воды при атмосферном давлении на поверхности трубопровода, выполненного из алюминиевого сплава АМг6.

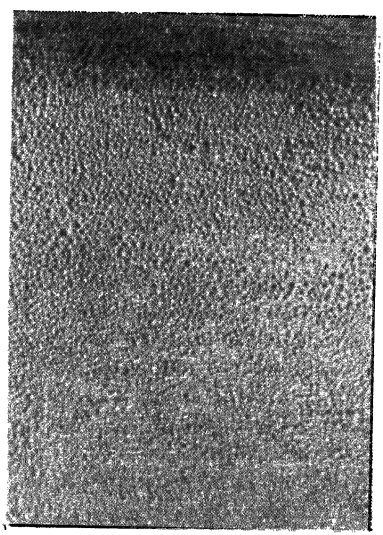


Рис. 3.2. Распределение пузырьков газа на поверхности трубопровода

Такое распределение пузырьков на поверхности позволяет предположить, что слой этих пузырьков должен передать к стенке трубопровода все касательные

напряжения, которые возникают при течении жидкости. В этом случае выражение для силы, действующей на единичный газовый пузырек в момент его отрыва от набегающего потока жидкости, можно представить в виде

$$p_u = \pi R_d^2 \tau_0 = \frac{1}{8} \pi R_d^2 \varrho_ж V_\infty^2 \lambda_т. \qquad (3.13)$$

Коэффициент гидравлического сопротивления трения в выражении (3.13), очевидно, должен учитывать изменение относительной шероховатости трубопровода при наличии на нем газовых пузырьков. Если в качестве условной относительной шероховатости принять отношение диаметра пузырька к радиусу трубопровода, то для режима развитой шероховатости [36]:

$$\lambda_т = \frac{1}{(2 \lg d_т / 4R_d + 1{,}74)^2}, \qquad (3.14)$$

где $d_т$ — диаметр трубопровода.

Штауб [78] исследовал процесс отрыва паровых пузырей при значительных (до 8 м/с) скоростях движения потока жидкости. При существенных скоростях вынужденного движения форма пузырька в момент отрыва по наблюдениям Штауба может быть принята полусферической. Полученное им соотношение для отрывного радиуса при действии сил поверхностного натяжения и обтекания потоком имеет вид

$$R_d = \frac{16 f(\theta)\, \sigma}{\lambda_т \varrho_ж V_\infty^2}, \qquad (3.15)$$

где значение $f(\theta)$ для широкого изменения режимных параметров по результатам экспериментальных данных может быть принято постоянным и равным 0,03.

На рис. 3.3 приведены значения радиуса пузырька, находящегося на поверхности, при равновесии действующих на него сил, рассчитанные по зависимости (3.15).

В области малых скоростей (<1 м/с) отрывной радиус определяется действием сил поверхностного натяжения и подъемной. В этом случае значение отрывного радиуса сохраняется неизменным.

Процесс диффузионного роста пузырька, находящегося на поверхности трубопровода, также имеет ряд особенностей по сравнению с рассмотренными в гл. 2 массообменными процессами единичного пузырька и омываемого его потока жидкости. Эти особенности связаны с отмеченными выше влияниями

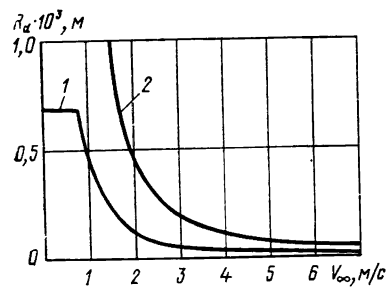



Рис. 3.3. Предельный радиус пузырька в различных жидкостях:
*1*—АТ; *2*—$H_2O$

твердой поверхности и наличием соседних пузырьков газа. Указанные особенности намного осложняют теоретическое решение задачи диффузионного роста пузырька на поверхности и требует введения дополнительных упрощающих предложений.

При исследовании молекулярной диффузии, проведенном А. С. Горшковым и Ю. Н. Калашниковым [46], влияние поверхности на процесс роста и растворения пузырьков предлагается учесть уменьшением коэффициента диффузии. Рассчитанные при этом по результатам экспериментальных данных значения коэффициента молекулярной диффузии имеют значительный разброс ($0{,}975 \cdot 10^{-9} - 1{,}34 \cdot 10^{-9}$ м$^2$/с при исходном значении $1{,}6 \cdot 10^{-9}$ м$^2$/с). Наиболее вероятной причиной такого разброса, по мнению авторов, является невозможность обеспечения равномерного распределения концентрации газа в среде, окружающей пузырек в начальный момент времени.

Для решения задачи роста пузырьков по поверхности осесимметричного тела, обтекаемого потоком воды, проведенного Б. Р. Перкиным и К. В. Керминым на основе уравнения конвективной диффузии [28], используется предположение, что диффузия в пузырек идет через поверхность $\approx \pi R^2$.

Еще сложнее учет особенностей роста множества пузырьков. При одновременном росте пузырьков возникает конкуренция за растворенный в жидкости газ, которая должна приводить к уменьшению скорости роста множества пузырьков по сравнению со скоростью единичного пузырька. Вместе с тем возникновение соседнего пузырька вследствие его гидравлического сопротивления приводит к более интенсивному перемешиванию жидкости и возрастанию скорости роста первого пузырька.

Если предположить аналогично тому, как это было сделано при определении гидродинамического воздействия потока жидкости на пузырьки, находящиеся на поверхности, что они практически полностью покрывают стенку трубопровода, то удается использовать для решения задачи о диффузионном росте пузырька на поверхности решение задачи о потоке тепла на внутреннюю поверхность трубы при турбулентном течении, полученное в работе [37].

Для режима с развитой турбулентностью $10^4 < \mathrm{Re}_{d_т} < 10^5$ и значительных чисел $\mathrm{Pr} > 200$ значение диффузионного числа составляет

$$\mathrm{Sh} = 0{,}023\, \mathrm{Re}_{d_т}^{0,8} \mathrm{Pr}^{1/3}. \qquad (3.16)$$

Окончательное выражение для приращения массы газа в пузырек, находящийся на поверхности трубопровода, при полусферической форме пузырька в процессе роста можно записать так:

$$\frac{dm}{d\tau} = 0{,}072\,(C_\infty - C_0)\, R\, \frac{D^{0,66} V_\infty^{0,8} d_т^{0,8}}{\nu^{0,47}}. \qquad (3.17)$$

Представляет интерес сопоставление полученной зависимости с выражениями, выведенными из условия обтекания единичного пузырька. Для пузырька, находящегося целиком в вязком подслое и имеющего полусферическую форму, согласно (3.12) значение средней по поверхности скорости составит:

$$\overline{V}_R = \frac{\lambda V_\infty^2 R}{6\pi\nu}, \qquad (3.18)$$

что с учетом зависимостей для диффузионного критерия Шервуда при $Re > 1$ позволяет получить выражения для коэффициента массоотдачи в виде:

для газового пузырька

$$\beta = 0{,}085 \frac{V_\infty^{1,17} R^{0,17} \lambda^{0,585} D^{0,5}}{\nu^{0,67}}; \qquad (3.19)$$

для твердой сферы

$$\beta = 0{,}124 \frac{\lambda V_\infty D^{2/3}}{\nu^{2/3}}. \qquad (3.20)$$

В соответствии же с (3.17) коэффициент массоотдачи на поверхность трубопровода

$$\beta = 0{,}0115 \frac{D^{0,66} V_\infty^{0,8} d_т^{0,8}}{R\nu^{0,47}}. \qquad (3.21)$$

Вычисления, проведенные по зависимостям (3.19)—(3.21), показывают, что процесс переноса массы к пузырьку, находящемуся в пограничном слое турбулентного потока [(формула (3.21)] проходит намного интенсивнее, чем процесс переноса массы к единичному пузырьку, обтекаемому с эквивалентной скоростью [формулы (3.19)—(3.20)].

### 3.4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ РАЗМЕР ПУЗЫРЬКА В ПОТОКЕ. УСЛОВИЯ ДРОБЛЕНИЯ

Выше уже отмечалось, что при увеличении числа Re пузырька ($>500$) наступает нарушение сферичности его формы, которое приводит к увеличению коэффициента сопротивления и последующему дроблению пузырька. Этот процесс сопровождается пульсациями объема, скорости и траектории движения. При этом происходит сплющивание пузырька, который принимает форму эллипсоида, а затем сфероидальной чашки. Сложность указанного процесса и его малоизученность не позволяют в настоящее время однозначно решить задачу определения условий дробления.

Для стационарного движения одиночных пузырей в большом объеме жидкости в работе [33] получено следующее сочетание со-

отношений, качественно определяющих зависимость процесса течения от основных параметров:

$$\mathrm{Re}=f(\mathrm{Ar};\ k;\ \Pi;\ \mu), \tag{3.22}$$

где $\mathrm{Ar}=\frac{g\delta}{\nu_{ж}^2}\left(1-\frac{\varrho_г}{\varrho_ж}\right)$; $k=W^{1/6}\left(\frac{\mathrm{grad}\,p}{\sigma}\right)^{1/4}\left(\frac{\varrho_г}{\varrho_ж}\right)^{1/2}$;

$$\Pi=\frac{p\delta\,(\varrho_г-\varrho_ж)}{\varrho_г\sigma}; \quad \mu=\mu_г/\mu_ж;$$

$W$, $\delta$ — объем и характерный размер газового пузырька соответственно.

При движении пузырька в потоке жидкости условия его деформации и дробления еще более усложняются. При наличии градиента давления один из возможных механизмов разрушения газового пузырька связан с образованием микроструек жидкости. Схематично процесс такого дробления газового пузырька показан на рис. 3.4 [28].

Вследствие наличия градиента давления происходит деформация формы пузырька, приводящая к появлению на его поверхности углубления, в которое проникает струйка жидкости, пронизывающая насквозь пузырек и разрушающая его.

В работе [73] приведены численные расчеты уравнений движения, описывающих образование струйки жидкости при схлопывании пузырька в несжимаемой невязкой жидкости. Расчетные значения скорости струйки составляют до нескольких тысяч метров в секунду. С образованием микроструек жидкости связывают также и возможный механизм кавитационного разрушения поверхности материалов. Обзор экспериментальных и теоретических исследований этого процесса содержит монография [28]. Механизм разрушения газового пузырька в турбулентном потоке жидкости, основанный на возникновении внутри пузырька вследствие подвижности поверхности раздела циркуляционных токов, рассмотрен в работе [26]. Предполагается, что при обтекании пузырька потоком жидкости происходит увлечение газа, находящегося внутри пузырька, которое приводит к созданию динамического напора $\varrho_г V_г^2$, направленного против стабилизирующего действия сил поверхностного натяжения. Полученное значение предельного радиуса в этом случае имеет вид:

$$R_{кр}=\sqrt[3]{\frac{3}{C_\mu}}\,\frac{\sigma}{V_\infty^2\sqrt[3]{\varrho_г\varrho_ж^2}}, \tag{3.23}$$

где значение коэффициента гидравлического сопротивления $C_\mu$ соответствует режиму дробления.

Относительная скорость пузырька и окружающей его жидкости в общем случае находится из условия совместного решения уравнения движения пузырька и окружающей его жидкости. Для случая воздушного пузырька, всплывающего в неподвижной воде при атмосферном давлении ($V_\infty\approx 0{,}3$ м/с), предельный радиус,

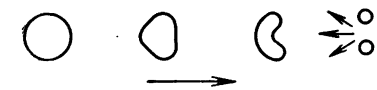



Рис. 3.4. Схема процесса разрушения пузырька

рассчитанный по выражению (3.23), составляет примерно 10 м$^{-2}$. Как уже отмечалось, относительная скорость в нестационарных потоках может значительно превышать указанные значения для случая установившегося течения. С этим обстоятельством связан экспериментально установленный факт наличия мелкодисперсной структуры газожидкостного потока на режимах заполнения. Вместе с тем предельный размер газового пузырька и для случая установившегося движения оказывается меньше рассчитанного по выражению (3.23) с учетом скорости всплытия. Это обстоятельство, по всей вероятности, объясняется наличием наложенных на осредненное течение турбулентных пульсаций давления и скорости. Измерения скоростей турбулентных пульсаций, проведенные с помощью термоанемометров для различных условий течения [41, 77], показали, что скорости самых быстрых турбулентных пульсаций составляют примерно 10% осредненной скорости течения. Наиболее полные исследования [4] позволяют оценить значение интенсивности продольных пульсаций скорости, автомодельных от числа Re потока, равным 2,8 динамической скорости, а масштаб их равным 0,3 радиуса трубы. Учитывая, что пульсации масштаба $h$ связаны с крупномасштабными пульсациями по закону 1/3, можно получить следующее выражение для турбулентных пульсаций скорости, действующих на газовый пузырек, находящийся в турбулентном потоке жидкости:

$$V=2{,}8V_*\left(\frac{R_{кр}}{0{,}15d}\right)^{1/3}, \qquad (3.24)$$

где $V_*=V_\infty\sqrt{\frac{\lambda_т}{8}}$ — динамическая скорость. С учетом выражения (3.24) зависимость для случая дробления пузырька турбулентными пульсациями может быть представлена в виде

$$R_{кр}=0{,}53\frac{\sigma^{0,6}d_г^{0,4}}{V_\infty^{1,2}\rho_г^{0,2}\rho_ж^{0,4}\lambda_т^{0,6}}. \qquad (3.25)$$

На рис. 3.5 представлены результаты расчета по формуле (3.25) предельного радиуса парогазового пузырька в различных жидкостях в зависимости от скорости течения. Результаты расчета показывают, что до скорости основного потока примерно 2 м/с предельный радиус парогазового пузырька определяется скоростью его всплытия и не зависит от скорости основного потока. Однако, начиная со значения скорости 2 м/с, предельный размер пузырьков в потоке будет определяться действием на него турбулентных пульсаций. При этом вследствие более высокого значения коэф-

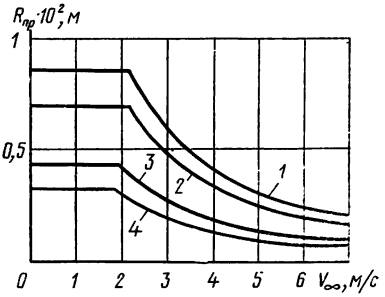



Рис 3.5. Предельный радиус пузырька в турбулентном потоке в различных жидкостях:

*1*—вода при $p=10^5$ Па; *2*—вода при $p=3 \cdot 10^5$ Па; *3*—НДМГ при $p=3 \cdot 10^5$ Па; *4*—АТ при $p=3 \cdot 10^5$ Па

фициента поверхностного натяжения у воды по сравнению с АТ и НДМГ пузырьки воздуха в ней оказываются более устойчивыми к разрушению. Повышенная плотность парогазовой фазы в АТ снижает предельный радиус пузырьков по сравнению с пузырьками в НДМГ.

В ряде исследований [43] при рассмотрении условий потери устойчивости пузырьками обращается внимание на необходимость учета времени действия возмущения, приводящего к дроблению. При дроблении растущих вследствие конвективной диффузии газа пузырьков в турбулентном потоке следует отметить, что наличие наложенных колебаний скорости и давления вызывает дрейф пузырька в ту сторону, где эти колебания больше. То есть по мере роста пузырьки будут смещаться в зону действия максимальных турбулентных пульсаций, под действием которых и будут дробиться [12].

## 3.5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ ДАВЛЕНИЯ В ДВУХФАЗНОМ ПОТОКЕ

Гидравлические потери давления в магистралях систем питания представляют собой одну из основных характеристик, определяющих совершенство системы питания и оказывающих непосредственное влияние на энергетические характеристики изделия в целом. Потери давления в магистралях системы питания оказывают существенное влияние также на низкочастотную устойчивость двигательной установки к продольным и кавитационным автоколебаниям [42, 47]. Поэтому определению коэффициентов гидравлических сопротивлений уделяется большое внимание как на этапе проектирования, так и на этапе отработки. Конструктивные и эксплуатационные особенности систем питания — требования малых габаритных размеров и массы, значительное влияние условий входа потока в магистраль питания, малые величины кавитационных запасов насосов ЖРД — предъявляют повышенные требования к точности определения коэффициентов гидравлических сопротивлений. Возникновение в системе питания двухфазного газожидкостного потока оказывает определенное влияние на коэффициенты гидравлических сопротивлений. Условия течения потока в гидравлических сопротивлениях, в свою очередь, видоизменяют характеристики двухфазного потока и в ряде случаев являются причиной его возникновения.

В настоящее время накоплен значительный экспериментальный и теоретический материал по потерям давления в двухфазном потоке, особенностям кавитационных явлений в местных сопротивлениях. Большой экспериментальный материал по потерям давления двухфазного потока содержат монографии [2, 33, 39, 65]. Однако в большинстве случаев при экспериментальных исследованиях удается оценить лишь суммарные потери давления, включающие в себя как изменение гидравлического сопротивления, так и потери энергии потока, связанные с взаимодействием фаз и с нестационарностью течения вследствие наличия фазовых переходов и изменения плотности. Ввиду этих обстоятельств полученные данные значительно зависят от условий проведения эксперимента, что затрудняет их использование для расчетов. С этой точки зрения наибольший интерес представляют экспериментальные данные об изменении коэффициентов гидравлических сопротивлений трения и коэффициентов потерь местных сопротивлений. В большинстве случаев, особенно для ограниченных значений относительных объемных концентраций ($\varphi \approx 0{,}1$) принимают коэффициент гидравлического сопротивления трения таким же для двухфазного течения, как и при течении однофазной жидкости [61, 65]. Вместе с тем имеется значительное число экспериментальных данных, указывающих на зависимость коэффициента гидравлического сопротивления трения от расходного газосодержания (относительной объемной концентрации газовой фазы), числа Фруда и приведенной плотности смеси. В работе [39] для приведенного коэффициента гидравлического сопротивления рекомендована эмпирическая зависимость, полученная по результатам исследования течения газожидкостных потоков:

$$\psi = \frac{1 - 0{,}78\beta[1 - \exp(-2{,}2\sqrt{\mathrm{Fr_c}})] - 0{,}22\beta[1 - \exp(-15\dot{\varrho})]}{1 - \beta}, \quad (3.26)$$

где $\psi = \lambda_c/\lambda(\mathrm{Re_c}, \varepsilon)$ — приведенный коэффициент гидравлического сопротивления трения; $\lambda_c$ — коэффициент гидравлического сопротивления двухфазного потока; $\lambda(\mathrm{Re_c}, \varepsilon)$ — коэффициент гидравлического сопротивления однофазной жидкости при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re_c}$, построенном по скорости смеси $V_c$, и относительной шероховатости $\varepsilon$; $\beta$ — объемное расходное газосодержание; $\mathrm{Fr_c} = V_c^2/(gd)$ — число Фруда; $\dot{\varrho} = \varrho_г/\varrho_ж$ — относительная плотность.

В работе [33] приведено сопоставление многочисленных экспериментальных данных, полученных при исследовании течения пароводяной смеси, с зависимостью для коэффициента гидравлического сопротивления трения в виде

$$\lambda_т = 0{,}017\mathrm{We}/\mathrm{Re}^{0{,}5}, \quad (3.27)$$

где We, Re — числа Вебера и Рейнольдса, построенные по скорости смеси.

Зависимость (3.26) получена по результатам испытаний газожидкостных потоков с принудительным впуском газа в поток жидкости. В этих условиях получение подобной зависимости ко-

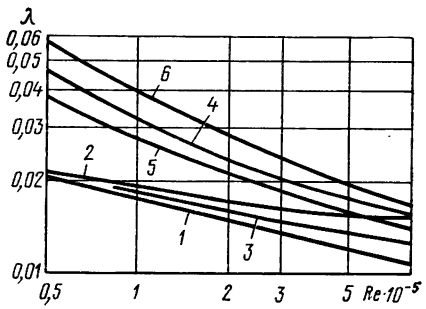



Рис. 3.6. Коэффициент гдиравлического сопротивления

*1*—по формуле Блазиуса $\lambda=0{,}3164/\mathrm{Re}^{1/4}$; *2*—для труб аустенитной стали с шероховатостью $k_s=0{,}01$ мм [43]; *3, 4, 5*—по формуле (3.28); *3*—для тянутых труб с $k_s=0{,}0015$ мм; [80]; *4*—для воды с $\sigma=72\cdot10^{-3}$ Н/м; *5*—для воды с $\sigma=36\times10^{-3}$ Н/м; *6*—для АТ с $\sigma=26\cdot10^{-3}$ Н/м

эффициента гидравлического сопротивления является неожиданным. При образовании двухфазного потока принудительным впуском газа в поток жидкости (без фазовых превращений) распределение скорости по сечению трубопровода и условия взаимодействия потока с ограничивающей поверхностью трубы должны быть такими же, как и у однофазного потока при таких же скоростях (одинаковых числах Re) течения. Зависимость гидравлического сопротивления трения от числа We (3.27) может быть объяснена возникновением пузырьков на поверхности трубопровода и увеличением относительной шероховатости трубы. Как уже отмечалось, наличие поверхностно-активных веществ приводит к условиям обтекания пузырька набегающим потоком, аналогичным условиям обтекания твердой сферы. При этом эквивалентная песочная шероховатость в случае плотного размещения полусфер по поверхности трубопровода может даже превышать геометрическую, построенную по радиусу полусферы [77]. Если преобразовать известную формулу Коулбрука и Уайта для коэффициента гидравлического сопротивления трения с учетом полученного выражения для предельного радиуса пузырька на стенке, то можно получить уравнение, определяющее влияние поверхностного натяжения и числа Re потока в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_c}}=1{,}74-2\lg\left(\frac{0{,}48\sigma}{\lambda_c\varrho_ж V_\infty^2 d_т}+\frac{18{,}7}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda_c}}\right). \qquad (3.28)$$

Анализ уравнения (3.28) показывает, что если в гидравлическом трубопроводе происходит выделение газовой фазы и рост пузырьков на поверхности, то зависимость коэффициента трения от числа Re становится более ярко выраженной, чем в случае течения однофазной жидкости. При неизменном поверхностном натяжении уменьшение числа Re одновременно приводит как бы к увеличению относительной шероховатости. На рис. 3.6 приведены зависимости коэффициента гидравлического сопротивления трения для различных относительных шероховатостей поверхности трубопровода и различных характеристик рабочих жидкостей.

Условная относительная шероховатость для различных рабочих жидкостей будет определяться, исходя из следующего соотношения

$$\frac{k_{s1}}{k_{s2}}=\frac{\sigma_1\varrho_2 V_2^2}{\varrho_1 V_1^2\sigma_2}=\frac{\mathrm{Re}_2^2\nu_2^2\sigma_1\varrho_2}{\mathrm{Re}_1^2\nu_1^2\sigma_2\varrho_1}. \qquad (3.29)$$

Отсюда следует, что при одинаковых числах Re потока несмотря на меньшее значение коэффициента поверхностного натяжения у азотного тетраксида по сравнению с водой, условная шероховатость у него оказывается вследствие влияния вязкости и плотности более чем в 5 раз выше, чем у воды, а это приводит к большим значениям коэффициента гидравлического сопротивления трения.

К сожалению, имеющийся экспериментальный материал не позволяет оценить погрешность полученного выражения (3.28), однако качественное соответствие позволяет использовать указанную зависимость для расчета гидравлических потерь давления на трение. Для стационарного потока, когда к тому же можно пренебречь потерями давления на ускорение вследствие фазовых превращений, потери давления на трение можно рассчитать по зависимости

$$\Delta p_{\text{тр}}=\lambda(\mathrm{Re}_{\text{с}})\,\frac{l}{d}\,\frac{\varrho_{\text{с}}V_{\text{с}}^2}{2}\,. \tag{3.30}$$

С учетом уравнения неразрывности

$$\varrho_{\text{г}}V_{\text{г}}+\varrho_{\text{ж}}V_{\text{ж}}=\varrho_{\text{с}}V_{\text{с}} \tag{3.31}$$

и зависимости для плотности смеси

$$\varrho_{\text{см}}=\varrho_{\text{г}}\varphi+\varrho_{\text{ж}}(1-\varphi) \tag{3.32}$$

выражение (3.30) может быть преобразовано к виду

$$\Delta p_{\text{тр}}\approx\lambda_{\text{с}}(\mathrm{Re}_{\text{с}})\,\frac{l}{2d}\,\frac{\varrho_{\text{ж}}^2}{\varrho_{\text{ж}}(1-\varphi)+\varrho_{\text{г}}\varphi}\,V_{\text{ж}}^2. \tag{3.33}$$

Для условий течения в магистралях системы питания (при $\varrho_{\text{г}}\ll\varrho_{\text{ж}}$ и $\varphi\ll 1$)

$$\Delta p_{\text{тр}}=\lambda_{\text{с}}(\mathrm{Re}_{\text{с}})\,\frac{l}{2d}\,\frac{\varrho_{\text{ж}}V_{\text{ж}}^2}{1-\varphi}\,. \tag{3.34}$$

Аналогичным образом рассчитываются по гомогенной теории и потери давления на местных сопротивлениях:

$$\Delta p_{\text{мест}}=\zeta_{\text{с}}\,\frac{\varrho_{\text{ж}}V_{\text{ж}}^2}{1-\varphi}\,. \tag{3.35}$$

Экспериментальные данные показывают, что при этом коэффициент гидравлического сопротивления $\zeta_{\text{с}}$ может намного превышать коэффициент гидравлического сопротивления при течении однофазного потока. Это отлично связано с взаимодействием фаз, относительным их движением при существенных изменениях условий течения в местных сопротивлениях на значительном протяжении трубопровода за ними. В соответствии с экспериментальными исследованиями С. И. Мочана, приведенными в работе [33], коэффициент гидравлического сопротивления выхода двухфазного потока из трубопровода составляет $\zeta_{\text{вых.с}}=1{,}2$. При входе потока

в трубопровод возмущающее влияние входных потерь сказывается на значительном (60—100 калибров) входном участке трубы. Коэффициент гидравлических потерь при повороте двухфазного потока в 6—7 раз превышает его значение для однофазного течения, если за поворотом оказывается вертикальный или наклонный участок, в то время как при горизонтальном участке после поворота значения гидравлических сопротивлений однофазного и двухфазного течения оказываются равными. Последнее обстоятельство необходимо учитывать при проектировании магистралей подвода к турбонасосному агрегату, когда в условиях напряженной компоновки двигательного отсека указанные магистрали приобретают сложную конфигурацию с наличием поворотов в нескольких плоскостях.

### 3.6. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВУХФАЗНОМ ПОТОКЕ

При исследовании неустановившегося течения в магистралях системы питания и математическом моделировании происходящих при этом процессов в качестве замыкающего систему уравнений неразрывности и движения используют обычно уравнение состояния, т. е. уравнение, описывающее законы деформации среды под действием возникающих при течении возмущений. С установлением указанной зависимости неразрывно связаны точность описания динамических процессов, определение частот колебаний и границ устойчивости всей системы.

Рассмотрим некоторый участок трубопровода объемом $F\Delta X$ за фронтом волны сжатия, распространяющейся по трубопроводу со скоростью $a$ (рис. 3.7). За время прохождения возмущения $\Delta\tau$, в течение которого давление в объеме увеличится на величину возмущения $\Delta p$, за счет деформации трубопровода объем участка увеличится на величину $\Delta F\Delta X$. При этом первоначальный объем среды, находящийся в объеме, за счет изменения ее плотности изменится на величину $\Delta W=\frac{W_0}{\varrho_0}\Delta\varrho$. В результате изменения объема трубопровода и среды образуется пространство, в которое со скоростью $\Delta V$ поступит дополнительный объем среды, равный $\Delta V\Delta\tau(F+\Delta F)$. Условие неразрывности позволяет записать равенство

$$\Delta V\Delta\tau(F+\Delta F)=\Delta F\Delta X+\frac{W_0}{\varrho_0}\Delta\varrho.$$

Учитывая, что $\Delta X=a\Delta\tau$, и пренебрегая малыми величинами более высокого порядка, получаем выражение для изменения скорости при прохождении волны возмущения в виде

$$\Delta V=a\left(\frac{\Delta F}{F}+\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right). \qquad (3.36)$$

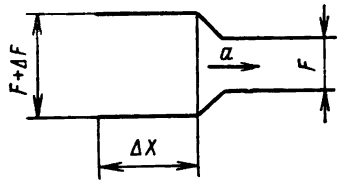



Рис. 3.7. Участок трубопровода при распространении возмущений

Материал стенки трубопровода находится в области упругих деформаций и подчиняется закону Гука, согласно которому, пренебрегая продольной деформацией,

$$\frac{\Delta D}{D}=\frac{\sigma}{E_м},$$

где $\Delta D/D$ — относительная деформация трубопровода диаметром $D$; $\sigma$ — растягивающее напряжение; $E_м$ — модуль упругой деформации материала.

С учетом того, что растягивающие напряжения трубопровода круглого сечения с толщиной стенки трубопровода $\delta$ связаны с давлением зависимостью $\sigma=pD/(2\delta)$, а также что $\Delta D/D\approx\approx\Delta F/(2F)$, получим зависимость относительного увеличения поперечного сечения трубопровода с ростом в нем давления:

$$\Delta F/F=\Delta pD/(E_м\delta). \qquad (3.37)$$

За время $\Delta\tau$ масса смеси, заполнявшая объем до прихода возмущения $\varrho F\Delta X$, получит приращение количества движения за счет изменения скорости на величину $\Delta V$. Приравняв изменение количества движения импульсу силы, получим

$$\begin{aligned}\Delta pF\Delta\tau&=\varrho F\Delta Va\Delta\tau;\\ \Delta p&=\varrho a\Delta V.\end{aligned} \qquad (3.38)$$

С учетом выражений (3.37) и (3.38) из уравнения (3.36) при переходе к пределам определяется зависимость для скорости распространения возмущения в трубопроводе:

$$a=\left(\frac{\varrho D}{E_м\delta}+\frac{d\varrho}{dp}\right)^{-1/2}. \qquad (3.39)$$

Таким образом, задача определения скорости распространения волны возмущения в магистрали системы питания сводится к определению зависимости, связывающей изменение плотности среды с изменением давления. Особенностью течения насыщенного газом топлива в магистралях системы питания является, как уже отмечалось, то обстоятельство, что условия для возникновения в магистралях двухфазного потока возникают в течение коротких промежутков времени — при провалах давления, связанных с переходными режимами в процессе запуска, при низкочастотных колебаниях давления. На стационарном режиме работы уровень давления в системе питания, как правило, выбирают таким образом, чтобы избежать возникновения отрицательных для ЖРД кавитационных явлений, нарушения сплошности потока. То есть при динамических процессах создаются условия для перехода от течения однофазной «капельной» жидкости к течению двухфазного газожидкостного потока. Степень завершенности происходя-

щих при этом переходе процессов и оказывает существенное влияние на скорость распространения возмущений в потоке. С учетом зависимости между относительной объемной $\varphi$ и массовой $\varepsilon$ концентрациями газовой фазы

$$\varphi=\frac{\varepsilon\varrho_{ж}}{\varepsilon\varrho_{ж}+(1-\varepsilon)\varrho_{г}\gamma}, \tag{3.40}$$

где $\gamma=V_{г}/V_{ж}$ — отношение скорости фазы к скорости жидкости, выражение для плотности среды может быть представлено в виде

$$\varrho=\frac{\varrho_{г}\varrho_{ж}[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)]}{\varepsilon\varrho_{ж}+(1-\varepsilon)\varrho_{г}\gamma}. \tag{3.41}$$

Дифференцирование выражения (3.41) позволяет получить следующую зависимость для скорости распространения возмущения в неограниченном объеме двухфазной среды:

$$\frac{1}{a_{\infty}^2}=\frac{d\varrho}{dp}=\frac{1}{[\varepsilon\varrho_{ж}+(1-\varepsilon)\varrho_{г}\gamma]^2}\left\{[\varepsilon+\gamma(1-\varepsilon)]\left[\varepsilon\varrho_{ж}^2\frac{d\varrho_{г}}{dp}+\right.\right.$$
$$\left.+(1-\varepsilon)\gamma\varrho_{г}^2\frac{d\varrho_{ж}}{dp}\right]+\varepsilon(1-\varepsilon)\varrho_{г}\varrho_{ж}(\varrho_{ж}-\varrho_{г})\frac{d\gamma}{dp}-\left.\gamma\varrho_{г}\varrho_{ж}(\varrho_{ж}-\varrho_{г})\frac{d\varepsilon}{dp}\right\}. \tag{3.42}$$

Перейдя к объемным концентрациям, с учетом выражения (3.39), а также того, что $d\varrho_{г}/dp=1/a_{г\infty}^2$, а $d\varrho_{ж}/dp=1/a_{ж\infty}^2$, уравнение (3.42) преобразуем к виду

$$\frac{1}{a_{\infty}^2}\left[\varphi^2+\varphi(1-\varphi)\frac{\varrho_{ж}}{\varrho_{г}}\right]\frac{1}{a_{г\infty}^2}+\left[\varphi(1-\varphi)\frac{\varrho_{г}}{\varrho_{ж}}+(1-\varphi)^2\right]\frac{1}{a_{ж\infty}^2}+$$
$$+\frac{\varphi(1-\varphi)(\varrho_{ж}-\varrho_{г})}{\gamma}\frac{d\gamma}{dp}-\frac{[\varrho_{ж}(1-\varphi)+\varphi\varrho_{г}\gamma]^2}{\varrho_{г}\gamma}\frac{d\varepsilon}{dp}+$$
$$+\frac{[\varrho_{г}\varphi+\varrho_{ж}(1-\varphi)]D}{E_{м}\delta}. \tag{3.43}$$

Если предположить в волне возмущения отсутствие фазового перехода ($d\varepsilon/dp=0$), завершенность между фазами обменом количества движения ($d\gamma/dp=0$) и обменом тепла ($T_{г}=T_{ж}$), равенство давления в жидкой и газовой фазах, а также учесть, что $\varrho_{г}\ll\varrho_{ж}$, то из зависимости (3.43) можно получить известное выражение для изотермической скорости распространения малых возмущений

$$a_{\infty\,изот}=\frac{a_{ж\infty}}{\sqrt{(1-\varphi)^2+\dfrac{\varphi(1-\varphi)\varrho_{ж}a_{ж\infty}^2}{p_{г}}}}, \tag{3.44}$$

В случае, если изменение плотности газовой фазы в волне происходит по адиабатическому закону, т. е. не успевает произойти теплообмен между фазами, то

$$a_{\infty\,ад}=\frac{a_{ж\infty}}{\sqrt{(1-\varphi)^2+\dfrac{\varphi(1-\varphi)\varrho_{ж}a_{ж\infty}^2}{kp}}}, \tag{3.45}$$

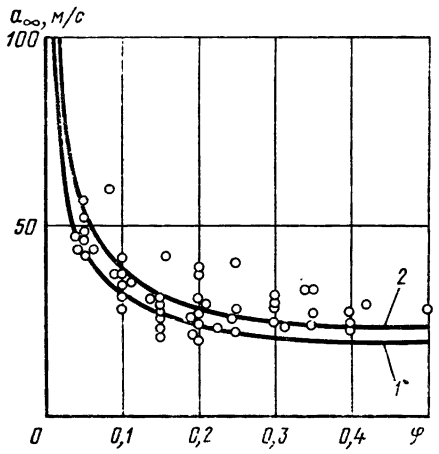



Рис. 3.8. Скорость распространения малых возмущений в воздухо-водяном потоке ($p=0{,}98\cdot10^5$ Па):

*1*—изотермическая; *2*—адиабатная; ●—по результатам исследований

где $k$ — показатель адиабаты процесса.

На рис. 3.8 приведены результаты расчета по формулам (3.44) и (3.45) зависимости изотермической и адиабатичной скоростей распространения малых возмущений от относительной объемной концентрации газовой фазы для воздухо-водяной смеси. На этом же рисунке приведены экспериментальные данные И. Ж. Кэмпбелла и А. С. Питчера [79], а также данные, приведенные в работах [33] и [39]. Из графика видно, что скорость распространения возмущения в двухфазном потоке оказывается значительно ниже, чем в каждой из фаз в отдельности. Наличие в потоке воды при нормальных условиях газовой фазы с относительной объемной концентрацией 1% снижает скорость распространения возмущения до $a_{\text{ад}\infty}=118$ м/с, т. е. до величины примерно в 3 раза меньшей, чем в газовой фазе, и более, чем в 10 раз меньшей, чем в жидкости. Как известно, скорость распространения возмущения в сплошных средах определяется соотношением упругих и инерционных свойств среды. В двухфазных газожидкостных средах сжимаемость среды почти целиком определяется сжимаемостью газовой среды, тогда как инерционные свойства вследствие превалирующего влияния на плотность среды массы жидкости по сравнению с массой газа определяются жидкой фазой. Указанная особенность двухфазной газожидкостной среды и является причиной отмеченного снижения скорости распространения малых возмущений в газожидкостных средах по сравнению с этой величиной в каждой из фаз в отдельности. Степень этого снижения, в первую очередь, зависит от относительной объемной концентрации газовой фазы и уровня давления в потоке. С увеличением давления в потоке при неизменной концентрации растворенного в жидкости газа скорость распространения возмущений увеличивается как за счет сокращения относительной объемной концентрации, так и вследствие увеличения плотности газовой фазы.

Анализ полученного выражения (3.43) для скорости распространения малых возмущений показывает, что указанная величина может зависеть от особенностей протекания процессов обмена между фазами, количеством движения, теплом и массой, возникновения при колебаниях давления радиального движения по-

верхности газовых пузырьков и связанного с этим движением излучения акустических волн в жидкости, влияния на эти процессы поверхностного натяжения, характеристик топлива и растворенного газа. Протекание указанных процессов зависит от степени дисперсной газовой фазы в смеси, структуры потока, характеристик возникающего возмущения — его амплитуды, длины волны и ее знака. Особенности протекания этих процессов на примере взаимодействия единичного пузырька с окружающей жидкостью рассмотрены в конце гл. 2. Применительно к условиям течения насыщенного газом топлива в магистралях системы питания проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

При решении задачи определения параметров в магистралях системы питания при запуске двигателя, сопровождающемся возникновением в системе питания резких провалов давления и гидроударов, скорость распространения возмущения может быть определена исходя из следующих допущений. Процесс теплообмена между фазами в волне возмущения не успевает завершиться, и изменение плотности газовой фазы близко к адиабатному. С протеканием процесса теплообмена, как уже отмечалось, неразрывно связан также процесс обмена массой пара. Многочисленные экспериментальные данные по исследованию пароводяных потоков, обобщенные в работе [68], показывают, что в диапазоне частот 200—10000 Гц за время распространения звуковой волны фазовый переход произойти не успевает, что подтверждает также и незавершенность теплообмена при таких возмущениях. С учетом того, что процесс газовыделения протекает значительно медленнее процесса парообразования, допустимым также является пренебрежение им для определения скорости распространения малых возмущений [условие $d\varepsilon/dp=0$ в уравнении (3.43)]. При резких возмущениях особое значение приобретает обмен количеством движения между фазами. При подходе фронта потока к шнеку в фазе гидроудара происходит торможение потока и вследствие большего снижения скорости газовой фазы уменьшение величины скольжения $\gamma=V_г/V_ж$, что увеличивает относительную объемную концентрацию газовой фазы и снижает скорость распространения малых возмущений. При провале давления и разгоне потока в процессе заполнения полостей двигателя при запуске происходит обратная картина. Проведенный в работе [82] анализ показал, что степень увеличения скорости распространения возмущения вследствие увеличения скольжения является линейной функцией относительной объемной концентрации. Для условий проведенных экспериментальных исследований полученная зависимость имеет вид

$$\frac{a_\infty}{a_{\infty\ изот}}=1{,}035+1{,}671\varphi.$$

При низкочастотных колебаниях давления ($f \lesssim 50$ Гц) в магистралях системы питания теплообмен и парообразование успевают завершиться полностью, что позволяет применять для ана-

лиза изотермическую скорость распространения малых возмущений (3.44). При этом парциальное давление пара может быть принято равным упругости пара при температуре жидкости, т. е. парциальное давление газа в выражении (3.44) определяется зависимостью $p_г = p - p_s + 2\sigma/R$.

Приведенные выше результаты справедливы в тех случаях, когда частота звуковой волны достаточно мала, чтобы можно было принять равными значения давлений в газопаровой и жидкой фазах. При больших частотах расширение и сжатие среды происходит при радиальном движении вблизи каждого пузырька, что приводит к зависимости скорости распространения от частоты возмущения. При изменении радиуса пузырька могут также возникнуть диссипативные эффекты вследствие процесса теплообмена между пузырьком и окружающей его жидкостью, связанные с неоднородностью температуры газа по объему пузырька. Исследование влияния этого процесса рассмотрено в работе [12]. Диссипативные эффекты вследствие процесса теплообмена оказываются существенными при частотах $\omega$ и средних радиусах пузырьков в диапазоне, определяемом следующим неравенством:

$$2 < 2R\sqrt{\frac{\omega}{2k_т}} < 12,$$

где $k_т$ — коэффициент температуропроводности в газовой фазе.

Влияние вязкости и сжимаемости жидкости при радиальном движении поверхности сказывается при частотах, близких к собственной частоте колебаний пузырьков [19]:

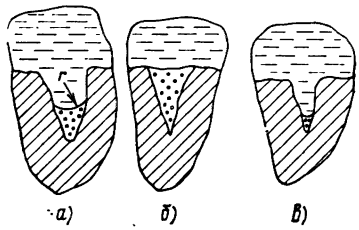
$$\omega = \frac{1}{R}\left(\frac{3p}{\varrho_ж} + \frac{4\sigma}{R\varrho_ж}\right)^{1/2}.$$

Выражение (3.43) при отсутствии газовой фазы ($\varphi = 0$) переходит в известную формулу Жуковского для скорости распространения малых возмущений в жидкости с учетом упругости питающего трубопровода:

$$a_ж = \frac{a_{ж\infty}}{\sqrt{1 + \frac{E_ж D}{E_м \delta}}}. \qquad (3.46)$$

Однако проведенные экспериментальные исследования [45] показали, что при работе системы питания на насыщенных газом жидкостях, скорость распространения малых возмущений оказывается ниже рассчитанной по зависимости (3.46) даже в том случае, когда уровень давления в системе при распространении возмущения оказывается выше значения соответствующей равновесной концентрации. При этом деаэрирование рабочего тела при выдержке системы под вакуумом обеспечивает получение близких к рассчитанным по формуле (3.46) экспериментальных значений скорости распространения малых возмущений, что позволяет исключить влияние инерции стенок и эллипсности трубопровода. Особенно заметным было снижение скорости распространения малых

Рис. 3.9. Фазы изменения газа в порах




возмущений при испытаниях систем питания с относительно небольшими диаметрами питающих трубопроводов (≈20 мм). Причиной отмеченного снижения скорости распространения малых возмущений является наличие кавитационных зародышей в виде микрополостей газа, образованных на поверхности трубопровода силами поверхностного натяжения жидкости при заправке системы питания. Физический механизм существования таких пор рассмотрен в подразд. 3.2 и виден также из рассмотрения рис. 3.9. При заполнении системы питания топливом поверхностное натяжение жидкости обеспечивает существование газа в микропоре вследствие разности давлений в жидкости и в газе на величину, равную $2\sigma/r$, где $r$ — кривизна мениска, $\sigma$ — поверхностное натяжение (рис. 3.9, *а*). При хранении системы питания до запуска под действием разности концентраций равной $2\sigma\varkappa/r$, где $\varkappa$ — коэффициент растворимости, возникает процесс молекулярной диффузии газа из жидкости в полость, который будет продолжаться до тех пор, пока будет существовать кривизна поверхности раздела (рис. 3.9, *б*). Максимальное значение массы газа, находящегося в микропоре, составит величину $\frac{C_\infty W_0}{\varkappa BT}$, где $C_\infty$ — концентрация растворенного в жидкости газа, $W_0$ — объем единичной микропоры, $B$ — газовая постоянная, $T$ — температура жидкости.

При повышении давления в системе питания перед запуском (рис. 3.9, *в*) объем газа, находящегося в микропоре, может быть определен при условии изотермического изменения газовой фазы по выражению

$$W_\text{г} = W_0 \frac{C_\infty}{\varkappa p_\text{г}}. \qquad (3.47)$$

Справедливость механизма стабилизации постоянных газовых включений на поверхности трубопровода подтверждается визуальными наблюдениями и результатами экспериментов по замеру скорости распространения малых возмущений. На рис. 3.2 приведена внутренняя поверхность участка трубопровода, изготовленного из алюминиевого сплава АМг6 после выдержки в течение 7 ч в водопроводной воде при атмосферном давлении. Видно, что указанной выдержки достаточно, чтобы поверхность трубопровода оказалась практически полностью покрытой пузырьками воздуха, выделившегося в микропоры из воды. При равномерном распределении микропор по поверхности трубопровода относительная объемная концентрация газовой фазы, находящаяся на участке трубопровода диаметром $D$ и длиной $\Delta X$ с учетом выражения (3.47) составит

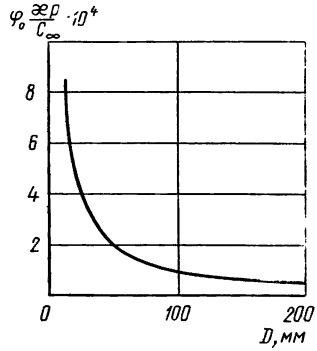



Рис. 3.10. Зависимость начальной относительно объемной концентрации от диаметра трубопровода для различных сред

$$\varphi_0 = \frac{4\pi n D \Delta X}{\pi D^2 \Delta X} W_0 \frac{C_\infty}{\varkappa p_\text{г}} = \frac{k_f C_\infty}{D \varkappa p_\text{г}}, \qquad (3.48)$$

где $n$ — число микропор на единице по верхности трубопровода; $k_f$ — коэффициент пропорциональности, учитывающий объем газа, приходящийся на единицу поверхности и имеющий размерность длины.

По экспериментальным значениям скорости распространения малых возмущений была получена зависимость относительной объемной концентрации газовой фазы в магистралях системы питания, известная в литературе под наименованием «начальной пустотности трубопровода [66], от концентрации растворенного в топливе газа и диаметра трубопровода питания.

На рис. 3.10 приведены экспериментальные значения начальной относительной объемной концентрации $\varphi_0 \varkappa p_\text{г}/C_\infty$ трубопроводов, полученные при испытаниях систем питания с различными внутренними диаметрами трубопроводов ($D = 12...180$ мм) на воде АТ, насыщенных воздухом и азотом до максимальных значений равновесных концентраций в АТ 0,8 кг/м³. Методика проведения эксперимента и описание экспериментальной установки приведены в работе [45]. Полученные экспериментальные значения достаточно хорошо аппроксимируются зависимостью (3.48) при значении $k_f = 10^{-5}$ м.

## 3.7. ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФАЗ ПРИ КОНЕЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КОНЦЕНТРАЦИЙ

В гл. 2 были рассмотрены условия механического взаимодействия, а также массо- и теплообмена единичного пузырька и окружающей его жидкости. С ростом концентрации газовой фазы возникает взаимное влияние процессов взаимодействия отдельных пузырьков друг с другом, что требует внесения определенных поправок в полученные зависимости. Величины этих поправок, очевидно, будут зависеть от объемной концентрации дисперсной фазы, наличия пульсаций давления и скорости, столкновения и дробления и т. п. Строгое описание процессов взаимодействия частиц в вязком потоке с учетом их взаимного влияния, хаотичного распределения центров частиц и других особенностей течения в настоящее время не представляется возможным. Имеющиеся в этой области исследования основаны на схематизации процесса течения и анализе экспериментальных данных.

Если длина масштаба движения больше расстояния между пузырьками, то сферу можно рассматривать как однофазную

жидкость, и сила межфазного взаимодействия для единицы объема среды, представляет собой сумму сил взаимодействия жидкости с дисперсными пузырьками, находящимися в единичном объеме. При условии несжимаемости жидкости и отсутствия относительного поступательного, вращательного и радиального движений около дисперсной фазы выражение для эффективной вязкости среды получено в работе [11] на основании анализа уравнения Навье — Стокса в виде

$$\mu = \mu_{ж}\left[1 + \varphi\left(\frac{\mu_{ж} + 5/2\mu_{*}}{\mu_{ж} + \mu_{*}}\right)\right], \qquad (3.49)$$

где $\mu_{*}$ — отношение вязкости дисперсной и несущей фаз. Для малых сферических частиц, т. е. для $Re<1$, выражение (3.49) может быть использовано при наличии относительной поступательной скорости сферы.

При отсутствии поверхностно-активных веществ для смеси газовых пузырьков в жидкости ($\mu_{*}=0$) выражение (3.49) преобразуется в зависимость Тейлора»

$$\mu = \mu_{*}(1 + \varphi). \qquad (3.50)$$

Для суспензий ($\mu_{*}=\infty$) выражение для эффективной вязкости потока было выведено впервые А. Эйнштейном:

$$\mu = \mu_{ж}(1 + 5/2\varphi). \qquad (3.51)$$

Выражение для эффективной вязкости сферы получено при условии $\varphi \ll 1$ и не зависит от взаимного расположения дисперсных частиц. Экспериментальные данные по измерению вязкости суспензий для различных жидкостей и материалов твердых частиц имеют существенный разброс и граница применимости полученных выражений находится в пределах $\varphi = 0{,}02...0{,}1$ [11]. Увеличение концентрации дисперсной фазы приводит к необходимости учета влияния соседних частиц и зависит от характера распределения частиц в потоке и особенностей осреднения. Подробный анализ приближенных моделей осреднения, применяемых в механике дисперсных смесей, содержит монография Р. И. Нигматулина [43]. В приближении ячеечной модели вычисления эффективной вязкости смеси для ограниченных, но конечных величин относительной концентрации газовой фазы приводят к выражению для монодисперсной смеси [9].

$$\mu = \mu_{ж}\left[1 + \frac{5\mu_{*} + 2 - 21/5\varphi^{2/3} - 4/5\,(\mu_{*} - 1)\,\varphi^{7/3}}{2\,(\mu_{*} + 1) - 7\mu_{*}\varphi^{5/3} + 5\,(\mu_{*} - 2)\,\varphi^{7/3}}\,\varphi\right],$$

которое при $\varphi \to 0$ переходит в формулу Тейлора для $\mu_{*}=0$ и Эйнштейна для $\mu_{*}=\infty$. Сила сопротивления пробной частицы в монодисперсном потоке при стесненном обтекании увеличивается по сравнению с единичной частицей.

При условии, что возмущение потока от единичной сферы приложено в центре сферы и пропорционально скорости невозмущенного потока жидкости при отсутствии частиц и возмущению жид-

кости, обусловленному влиянием всех остальных частиц, выражение для силы сопротивления единичной сферы для безынерционного течения имеет вид

$$f_\mu = \lambda(\varphi) f_{\mu 0}, \tag{3.52}$$

где $\lambda(\varphi)$ — коэффициент, учитывающий влияние возмущения от соседних частиц; $f_{\mu_0}$ — сила сопротивления единичной сферы.

При наличии поверхностно-активных веществ сила сопротивления пробного газового пузырька в стесненном потоке жидкости может быть принята такой же, как и для твердой сферы,

$$f_\mu = 6\pi\mu_ж R V_{г.ж\,0} \lambda(\varphi),$$

где $V_{г.ж\,0}$ — относительная скорость единичной сферы.

Для указанных условий поправочный коэффициент при $\varphi < 2/3$ составляет [6]:

$$\lambda(\varphi) = \frac{4 + 3\varphi + 3\sqrt{8\varphi - 3\varphi^2}}{(2 - 3\varphi)^2}. \tag{3.53}$$

В приближении ячеечной модели на основе анализа «ползущего» течения выражение для поправочного коэффициента в более широком диапазоне изменения $\varphi$ получено в работе [43]:

$$\lambda(\varphi) \approx \frac{1}{1 + 3/2\varphi^{1/3} + 9/4\varphi^{2/3} + \frac{15}{8}\varphi}. \tag{3.54}$$

Вычисления по зависимостям (3.53) и (3.54) показывают их близкую сходимость в области $\varphi < 0{,}25$.

Результаты экспериментальных исследований для различных жидкостей и сферических частиц [71] показали допустимость применения зависимостей (3.53), (3.54) лишь при равномерном распределении частиц в потоке, без образования скоплений и цепочек.

При хаотичном распределении частиц поправочный коэффициент значительно снижается, так как обеспечиваются лучшие условия механического взаимодействия (меньший коэффициент сопротивления) дисперсной и несущей фазы.

При увеличении относительной скорости течения ($\mathrm{Re} > 1$) задача определения влияния конечной объемной концентрации и стесненности потока на процессы взаимодействия еще более усложняется. В этом случае сила сопротивления пробной частицы может быть представлена в виде

$$f_\mu = C_\mu(\mathrm{Re}, \varphi)\, \pi R^2 \varrho_ж \frac{V_{г.ж}^2}{2}, \tag{3.55}$$

где $C_\mu(\mathrm{Re}, \varphi)$ — коэффициент сопротивления, являющийся функцией не только числа Re, но и относительной объемной концентрации.

Коэффициент сопротивления на основании обработки экспериментальных данных получен в работе [67]:

$$C_\mu(\varphi,\ \mathrm{Re}) \approx (1-\varphi)^{-2,7} C_{\mu *}(\mathrm{Re}), \qquad (3.56)$$

где $C_{\mu *}$ — коэффициент сопротивления без учета стесненности. В работе [43] для определения коэффициента сопротивления предложено использование модифицированного числа $\mathrm{Re}_*$, построенного по относительной скорости фаз в минимальном сечении между частицами, которая может быть представлена, как

$$V_{\text{г.ж}*} = \frac{(1-\varphi)}{1-1{,}16\varphi^{2/3}} V_{\text{г.ж}}. \qquad (3.57)$$

Выражение для силы сопротивления в этом случае может быть представлено формулой

$$f_\mu = C_{\mu_*} \pi R^2 \varrho_\text{ж} V^2_{\text{г.ж}}/2, \qquad (3.58)$$

где

$$C_{\mu *} = C_{\mu *}(\mathrm{Re}_{\text{г.ж}*}) = C_\mu\left(\frac{1-\varphi}{1-1{,}16\varphi^{2/3}}\,\mathrm{Re}_{\text{г.ж}}\right). \qquad (3.59)$$

Для широкого диапазона изменения Re ($2<\mathrm{Re}<500$) коэффициент гидравлического сопротивления может быть выражен зависимостью (2.33). Увеличение силы сопротивления за счет конечного значения относительной объемной концентрации может быть учтено с помощью выражения

$$C_\mu(\mathrm{Re},\ \varphi) = C_\mu(\mathrm{Re})\left(\frac{1-\varphi}{1-1{,}16\varphi^{2/3}}\right)^{1,4}. \qquad (3.60)$$

Изменение условий обтекания единичной сферы при конечных значениях относительной концентрации видоизменяет поле скоростей потока и условия протекания тепло- и массообменных процессов. Однако при больших числах Re диффузионный пограничный слой составляет малую долю радиуса газового пузырька, что позволяет использовать для решения уравнение конвективной диффузии в виде (2.37), а влияние стесненности потока учесть в компонентах скоростей $V_\theta$ $V_r$.

Для $\mathrm{Re} \ll 1$ при указанных условиях решение уравнения (2.37) проанализировано в работе [6]. Для критерия Sh получены следующие зависимости. Для твердых сфер

$$\mathrm{Sh} = 1{,}26 \sqrt[3]{\frac{1-\varphi^{5/3}}{2-3\varphi^{1/3}+3\varphi^{5/3}-2\varphi^2}}\ \sqrt[3]{\mathrm{Pe}}. \qquad (3.61)$$

Для капель и пузырьков в отсутствии поверхностно-активных веществ

$$\mathrm{Sh} = 0{,}923 \sqrt{\frac{1-\varphi^{2/3}}{\mu_*(Y-\varphi^{1/3}W)}}\ \sqrt{\mathrm{Pe}}, \qquad (3.61\text{а})$$

где число Pe определяется по скорости с учетом стесненности потока, которая для случая оседания частиц или всплытия пу-

зырьков в неподвижной жидкости может быть выражена зависимостью

$$V_* = -\frac{2}{3} V_s \left[ \frac{\varphi^{-1/3} - 1}{\varphi^{-2/3} - 1} - \frac{\varphi^{5/3} - 1}{W(\varphi^{-2/3} - 1)} - \frac{V}{W} \right];$$

$$W = 3 + 2/\mu_* + 2\varphi^{5/3}(1 - 1/\mu_*);$$

$$Y = 2 + 2/\mu_* + \varphi^{5/3}(3 - 2/\mu_*);$$

$V_s$ — значение скорости одиночной частицы; $\mu_* = 0$ — для газовых пузырьков: $\mu_* = \infty$ — для твердых сфер.

Выражения для массовых потоков газа вследствие конвективной диффузии в газовый пузырек при стесненном обтекании монодисперсного потока также получены в работе [8].

Для газовых с поверхностно-активными веществами пузырьков полученная зависимость имеет вид

$$\frac{dm}{d\tau} = 7{,}98 (D^2 R^4 V_2)^{1/3} (C_\infty - C_0) \qquad (3.62)$$

и для случая свободной от активных веществ поверхности

$$\frac{dm}{d\tau} = 5{,}72 (D R^3 V_1)^{1/2} (C_\infty - C_0). \qquad (3.63)$$

Модифицированная скорость $V_2$ в выражении (3.62) для монодисперсного потока связана с относительной концентрацией следующей зависимостью [7]:

$$V_2 = V_{г.ж} \psi(\varphi), \qquad (3.64)$$

где поправочный множитель $\psi(\varphi)$ определяется как

$$\psi(\varphi) = 1 + \frac{1}{2 - 3\varphi} \left\{ \left[ 18\varphi (1 - 3/2\varphi) + \frac{81}{4} \varphi^2 \right]^{1/2} + 9/2\varphi \right\}. \qquad (3.65)$$

Модифицированная скорость на экваторе газового пузырька в зависимости (3.63) определяется выражением

$$V_1 = \frac{1}{2} \vartheta(\varphi) V_{г.ж}, \qquad (3.66)$$

где $\vartheta(\varphi)$ — положительный корень уравнения

$$\vartheta(\varphi) = \frac{1 + \xi}{1 + 1/3};$$

$$\xi^3 + 3\xi^2 - \frac{18}{2 - 3\varphi} \xi - \frac{18}{2 - 3\varphi} = 0.$$

Переход к безразмерному критерию Sh позволяет получить выражения, аналогичные для одиночных частиц с поправочными коэффициентами. Для твердых сфер

$$\mathrm{Sh} = B\,\mathrm{Pe}^{1/3}, \text{ где } B = 0{,}998 \psi(\varphi)^{1/3}, \qquad (3.67)$$

и для газовых пузырьков

$$\mathrm{Sh} = C\,\mathrm{Pe}^{1/2}, \text{ где } C = 0{,}462 \vartheta(\varphi)^{1/2}. \qquad (3.68)$$

При $\varphi \to 0$, $\psi(\varphi) \to 1$, $\theta(\varphi) \to 1$ зависимости (3.67), (3.68) преобразуются к известным выражениям для одиночной твердой сферы и одиночного газового пузырька.

Массо- и теплообмен для стесненного течения при $Re > 1$ характеризуется меньшим влиянием числа Re, чем для одиночной частицы. Это позволяет распространить полученные выражения для $Re < 1$ в сторону больших чисел Re, вплоть до значений $Re < 100$, что подтверждается экспериментальными данными для $\varphi < 0{,}7$ [8].

Результаты расчетов, проведенные для $Re < 500$ и $\varphi < 0{,}5$ опубликованные в работе [6], также показывают возможность использования соотношения Sh, полученного для $Re < 1$ до чисел $Re < 100$.

### 3.8. КИНЕТИКА ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Рассмотренные основные характеристики двухфазного потока в значительной степени определяются относительной концентрацией газовой фазы в потоке. Процесс образования двухфазного газожидкостного потока из потока однофазной капельной жидкости, насыщенной газом, в условиях течения по магистралям системы питания носит релаксационный характер. При этом на время установления равновесной концентрации газовой фазы существенное влияние оказывает волновой характер изменения давления в магистралях, который из-за чередования кратковременных провалов и повышений давления требует учета кинетики процессов выделения и растворения газовой фазы. В соответствии с принятой физической моделью образования двухфазного газожидкостного потока как процесса диффузии газа в микропоры трубопровода, образованные силами поверхностного натяжения жидкости при заправке системы питания, роста газовых пузырьков, вытесненных с поверхности трубопровода динамическим напором, в потоке до размеров, определяемых из условия дробления турбулентными пульсациями, выражение для скорости изменения массы газовой фазы в единице объема смеси может быть представлено в следующем виде:

$$I = \frac{1}{F\Delta X}\frac{d}{d\tau}(zm + z_* m_*), \qquad (3.69)$$

где $z$, $m$ — число пузырьков и масса единичного пузырька на поверхности трубопровода длиною $\Delta X$ сечением $F$: $z_*$, $m_*$ — число пузырьков и масса единичного пузырька в выделенном объеме трубопровода $F\Delta X$. Первый член в скобках выражения (3.69) учитывает массу газа, находящегося на поверхности выделенного участка трубопровода, а второй характеризует массу газа, находящегося в потоке. При большой по сравнению с бугорками шероховатости и равномерно обработанной поверхности распределение числа активных микропор можно считать равновероятным для всех точек поверхности. Это позволяет принять для числа пузырьков, находящихся на выделенном участке, следующее выражение:

$$z = \frac{k_1 \pi d_\tau}{R_d^2}\Delta X, \qquad (3.70)$$

где $R_d$ — предельный размер пузырька; $k_I$ — коэффициент пропорциональности, учитывающий долю поверхности трубопровода, занятую растущими пузырьками газа.

Число пузырьков, отнесенное к объему составит

$$\frac{z}{F\Delta X} = \frac{k_т}{R_d^2 d},$$

где $k_т \approx 4k_I$ и по результатам визуальных наблюдений соизмерим с 1.

Число пузырьков газа, находящегося в потоке, и их размер в общем случае зависят от истории их развития с момента отрыва от поверхности трубопровода на участке $n$, предшествующем $i$-му выделенному. В общем случае

$$I_i = \frac{k_т}{R_d^2 d}\frac{dm_i}{d\tau} + \frac{1}{F\Delta X}\sum_{n=1}^{i}\frac{d}{d\tau}(z_{ni}m_{ni}). \qquad (3.71)$$

Решение уравнения (3.71) в полученном виде для случая неустановившегося потока, а тем более для условий волновых процессов в магистралях системы питания не представляется возможным. Упрощение выражения (3.71), позволяющее его решить, может быть достигнуто с помощью применяемой обычно при исследованиях дисперсных потоков замены реального полидисперсного потока эквивалентным монодисперсным, в котором все пузырьки имеют одинаковый размер $R_*$, а изменение межфазной поверхности происходит за счет изменения числа пузырьков. В этом случае

$$z_* = \frac{F\Delta X}{4/3\pi R_*^3 \varrho_г}\left(\bar{\varrho}_г - \frac{zm}{F\Delta X}\right); \qquad (3.72)$$

$$\frac{dz_*}{d\tau} = \frac{z_*}{m_*}\frac{dm_*}{d\tau}, \qquad (3.73)$$

где $\bar{\varrho}_г$ — парциальная плотность газовой фазы (масса газа в единице объема смеси).

С учетом полученных соотношений выражение для скорости фазового перехода, связанного с выделением растворенного в жидкости газа или его растворением, может быть получено из уравнения (3.69) при переходе к пределам:

$$I = \frac{k_т}{R_d^2 d}\frac{dm}{d\tau} + \frac{1}{4/3\pi R_*^3 \varrho_г}\left(\bar{\varrho}_г - \frac{k_т}{R_d^2 d}m\right)\frac{dm_*}{d\tau}. \qquad (3.74)$$

В уравнении (3.74) приращение массы газа и масса газа в пузырьке, находящемся на поверхности трубопровода, определяются по зависимости (3.17) до момента, когда радиус полусферического пузырька не достигнет предельного значения, определяемого выражением (3.15), то есть в процессе интегрирования проверяется условие

$$R = \left(\frac{m}{4/3\pi\varrho_г}\right)^{1/3} \leqslant R_d,$$

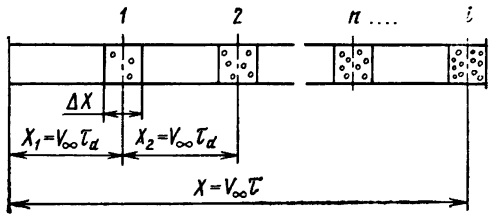



Рис. 3.11. Схема кинетики газовыделения

при нарушении которого со следующего шага интегрирования принимается $R=R_0$.

Концентрация растворенного в жидкости газа определяется с учетом выделившейся массы газа по выражению

$$C_\infty = C_{\infty 0} - \varrho_\Gamma \frac{\varphi}{1-\varphi}, \qquad (3.75)$$

где $C_{\infty 0}$ — начальное значение концентрации растворенного в топливе газа, определяемое условиями эксплуатации изделия.

Эквивалентный радиус пузырька для дисперсного турбулентного потока может быть определен с учетом нормально-логарифмического закона распределения по выражению (3.3):

$$R_* = \sqrt{R_{\min} R_{\max}},$$

где минимальный радиус в потоке связан с предельным значением радиуса пузырька на стенке очевидным выражением

$$R_{\min} = 2^{1/3} R_d \qquad (3.76)$$

или с учетом (3.15)

$$R_{\min} \approx 0{,}6 \frac{\sigma}{\rho_\text{ж} V_\infty^2 \lambda_\text{т}}. \qquad (3.77)$$

Предельный размер пузырька в турбулентном потоке определяется выражением (3.25). Приращение массы газа в пузырьке, находящемся в потоке, в широком диапазоне изменения чисел Re (до 100) с учетом стесненности потока определяется относительной скоростью и при заторможенной активными веществами поверхностью согласно полученному выражению (3.64) может быть представлено так:

$$\frac{dm_*}{d\tau} = 7{,}98 (C_\infty - C_0) D^{2/3} R_*^{4/3} [V_{\text{г.ж}} \psi(\varphi)]^{1/3}. \qquad (3.78)$$

Для расчета относительной объемной концентрации газа при установившемся режиме течения топлива в магистрали системы питания возможно некоторое упрощение уравнения кинетики фазовых переходов (3.74).

Рассмотрим условия течения объема топлива $F\Delta X$ на участке трубопровода системы питания, в котором при установившемся режиме течения давление ниже уровня, соответствующего равновесной концентрации растворенного в жидкости газа (рис. 3.11). Определим количество выделившегося газа за время прохождения текущего объема $F\Delta X$ по участку трубопровода длиной $X$. Через время $\tau_d$ после попадания выделенного объема в зону пониженного давления в рассматриваемый объем с поверхности трубопровода выде-

лится объем газа, равный $\left(z\frac{2}{3}\pi R_d^3\right)_1$. В это время текущий объем займет положение *1* на расстоянии $X_1=V_\infty\tau_d$ от начала участка. В положении *2* на расстоянии $X_2=V_\infty\tau_d$ от положения *1*, в текущий объем выделится еще одна порция газа $\left(z\frac{2}{3}\pi R_d^3\right)_2$, а масса газа, выделившаяся в положении *1*, получит дополнительное приращение на величину $\frac{dm_*}{d\tau}\tau_d$. К моменту подхода объема к $i$-му сечению каждая порция газа получит приращение на величину $\frac{dm_*}{d\tau}\Delta\tau$, где для первой порции $\Delta\tau=\tau-\tau_d$, для второй $\Delta\tau=\tau-2\tau_d$ и т. д. При неизменных условиях течения приращение относительной объемной концентрации в $i$-ом положении составит

$$\Delta\varphi_i=\left[\left(\frac{2}{3}\pi R_d^3\frac{z}{F\Delta X}\right)_1+\frac{z_*}{F\Delta X}\frac{1}{\varrho_\Gamma}\frac{dm_*}{d\tau}(\tau-\tau_d)\right]_{i1}+$$
$$+\left[\left(\frac{2}{3}\pi R_d^3\frac{z}{F\Delta X}\right)_2+\frac{z}{F\Delta X}\frac{1}{\varrho_\Gamma}\frac{dm_*}{d\tau}(\tau-2\tau_d)\right]_{i2}+\ldots$$
$$\ldots+\left[\left(\frac{2}{3}\pi R_d^3\frac{z}{F\Delta X}\right)_n+\frac{z_*}{F\Delta X}\frac{1}{\varrho_\Gamma}\frac{dm_{\Gamma*}}{d\tau}(\tau-n\tau_d)\right]_{in}+$$
$$+\left(\frac{2}{3}\pi R_d^3\frac{z}{F\Delta X}\right)_i.$$

Просуммировав, получим

$$\varphi_i=\frac{2}{3}\pi\frac{zR_d^3}{F\Delta X}n+\frac{z_*}{F\Delta X}\frac{1}{\varrho_\Gamma}\frac{dm_{\Gamma*}}{d\tau}\sum_{n=1}^{i}(\tau-n\tau_d).$$

С учетом того, что количество пополнений потока с поверхности трубы за время пребывания $\tau=X/V_\infty$ на участке длиной $X$ составит $n=\tau/\tau_d$, а $z_*=zR_d^3/2R_*^3$ и с учетом (3.70) получим

$$\Delta\varphi=\frac{2}{3}\pi\frac{k_\tau R_d}{d}\frac{v}{\tau_d}\left[1+\frac{3}{4\pi R_*^3\varrho_\Gamma}\frac{dm_*}{dv}(\tau-\tau_d)\right]. \qquad (3.79)$$

Выражение для времени роста газового пузырька на поверхности трубопровода может быть получено при условии постоянства давления интегрированием зависимости (3.17):

$$\tau_d\approx\frac{10\sigma^2\varrho_\Gamma\nu^{0,47}}{V_\infty^{4,8}\lambda^2D^{2/3}(C_\infty-C_0)\varrho_\text{ж}^2}. \qquad (3.80)$$

Для стационарного потока относительную скорость газового пузырька можно получить из уравнения движения (2.67) при пренебрежении радиальным движением:

$$V_{\text{г.ж}}=\left[\frac{4R_*}{3C_\mu}\left(\lambda\frac{V_\infty^2}{d}-2g\right)\right]^{1/2}, \qquad (3.81)$$

где коэффициент сопротивления определяется режимом обтекания.

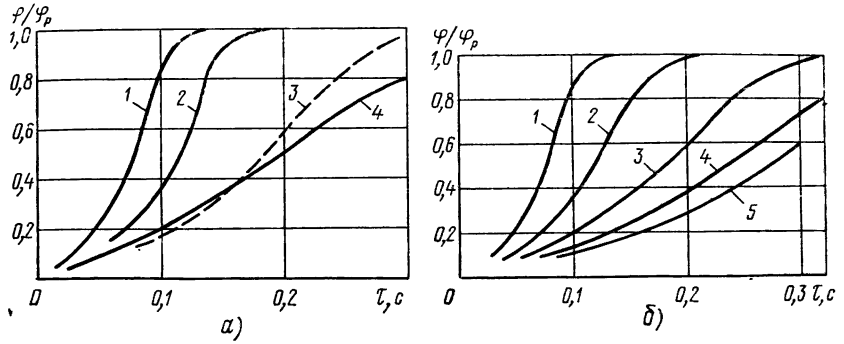



Рис. 3.12. Изменение относительной объемной концентрации:

*а* : *1* — $\Delta C/\varrho_г = 2$; $d = 0{,}07$ м; $V_\infty = 5$ м/с; *2* — $\Delta C/\varrho_г = 2$; $d = 0{,}14$ м; $V_\infty = 5$ м/с; *3* — $\Delta C/\varrho_г = 2$; $d = 0{,}07$ м; $V_\infty = 2{,}5$ м/с: *4* — $\Delta C/\varrho_г = 0{,}2$; $d = 0{,}07$ м; $V_\infty = 5$ м/с;

*б* : *1* — $D = 5\cdot10^{-9}$ м/с; $\sigma = 0{,}026$ Н/м; $\nu = 0{,}31\cdot10^{-4}$ м²/с; $\varrho_ж = 1400$ кг/м³; *2* — $D = 2\cdot10^{-9}$ м²/с; $\sigma = 0{,}026$ Н/м; $\nu = 0{,}31\cdot10^{-4}$; $\varrho_ж = 1400$ кг/м³; *3* — $D = 2\cdot10^{-9}$ м²/с; $\sigma = 0{,}072$ Н/м; $\nu = 0{,}31 \times 10^{-4}$ м²/с; $\varrho_ж = 1400$ кг/м³; *4* — $D = 2\cdot10^{-9}$ м²/с; $\sigma = 0{,}072$ Н/м; $\nu = 1\cdot10^{-4}$ м²/с; $\varrho_ж = 1400$ кг/м³; *5* — $D = 2\cdot10^{-9}$ м²/с; $\sigma = 0{,}072$ Н/м; $\nu = 1\cdot10^{-4}$; $\varrho_ж = 1000$ кг/м³

Полученное выражение кинетики газовыделения (3.79) представляет собой экспоненциальную зависимость относительной объемной концентрации φ от времени пребывания. То есть скорость газовыделения зависит от начального значения газосодержания, которое и определяет начальную поверхность массообмена. Расчетный анализ уравнения кинетики газовыделения позволяет оценить влияние на процесс газовыделения основных конструктивных параметров системы питания, режимных и эксплуатационных факторов и характеристик топлива и насыщенного газа. На рис. 3.12 приведены результаты расчета относительной объемной концентрации газовой фазы в стационарном потоке для различных условий течения. Как и для всякого релаксационного процесса, относительная объемная концентрация в процессе газовыделения зависит от возмущения, которое для этого процесса определяется уровнем давления в потоке и его снижением ниже равновесного, определяемым концентрацией растворенного в жидкости газа. Равновесное значение относительной объемной концентрации газовой фазы может быть получено из зависимости Генри и составляет

$$\varphi_р = \frac{C_\infty - p_г \varkappa}{C_\infty - p_г \varkappa + \varrho_г}. \qquad (3.82)$$

На рис. 3.12,*а* и *б* по оси ординат отложена степень равновесности процесса, т. е. отношение текущего значения относительной объемной концентрации φ к равновесной $\varphi_р$.

Кроме степени пересыщения $(C_\infty - p_г \varkappa)/\varrho_г$ на скорость газовыделения существенное влияние оказывает абсолютная величина диа-

метра трубопровода, характеризующая собой отношение объема трубопровода к его поверхности, а следовательно, и число «зародышей» газовой фазы в единице объема. С ростом диаметра трубопровода (кривые *1* и *2* на рис. 3.12,*а*) скорость газообразования уменьшается. Увеличение скорости течения уменьшает время пребывания топлива на участке пониженного давления, однако значительно интенсифицирует массообмен и число растущих пузырьков на поверхности, что при заданном расходе топлива приводит к небольшому увеличению относительной концентрации газа при одной и той же длине участка трубопровода питания с пониженным давлением. Это обстоятельство смещает оптимальный диаметр трубопровода питания при работе на насыщенном газе топливе в сторону бóльших значений. С увеличением диаметра трубопровода происходит уменьшение φ, как непосредственно из-за $d$, так и вследствие снижения скорости течения.

Изменение осевых перегрузок при полете может различным образом сказаться на процессе газовыделения вследствие различного влияния на относительную скорость газовой фазы [см. (3.81)]. При больших гидравлических потерях давления по длине вертикального трубопровода питания увеличение осевой перегрузки снижает относительную скорость газовой фазы (уменьшает скольжение фаз) и таким образом ослабляет интенсивность процесса газовыделения. При низких скоростях течения увеличение осевой перегрузки может привести к увеличению скорости газовыделения, т. е. при прочих равных условиях влияние осевого ускорения будет зависеть от абсолютного значения разности $\left(\lambda \frac{V_\infty^2}{d} - 2g\right)$. Следует при этом отметить, что положительное значение относительной скорости газовой фазы ($V_г > V_ж$) при одинаковой массовой концентрации приводит к уменьшению относительной объемной концентрации газа.

Влияние температуры топлива сказывается на процессе газовыделения через степень пересыщения потока $(C_\infty - p_{г ж})/\varrho_г$. При одинаковом давлении в потоке парциального давления газа в пузырьке и его плотность с ростом температуры будут снижаться, что приводит к увеличению степени пересыщения и росту газосодержания. Однако на указанный процесс особенно при больших концентрациях будут оказывать влияние такие термодинамические характеристики, как теплота испарения $H$, теплоемкость жидкости $C_ж$ и газовая постоянная паровой фазы.

Вследствие испарения жидкости, сопровождающего рост газовых пузырьков, происходит снижение температуры жидкости на величину

$$t_{ж0} - t_ж = \frac{\varphi}{1-\varphi} \frac{H \varrho_п}{c_ж \varrho_ж}. \qquad (3.83)$$

Влияние других термодинамических характеристик топлива и насыщающего газа проявляется следующим образом (рис. 3.12,*б*). Увеличение поверхностного натяжения и снижение плотности жидко-

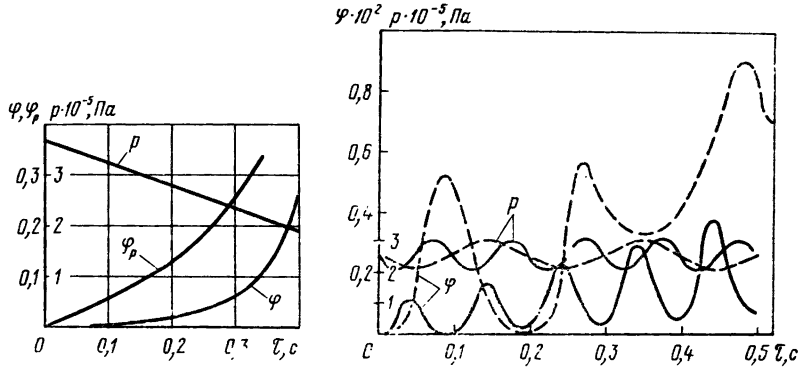



Рис. 3.13. Изменение объемной концентрации

Рис. 3.14. Изменение объемной концентрации при наличии пульсаций давления ($p=2{,}63\cdot10^5$ МПа, $t=15°$ С, $C_\infty=0{,}5$ кг/м$^3$, рабочая среда (АТ+$N_2$)):

——— $f=10$ Гц; — — — $f=5$ Гц

сти приводит к увеличению размеров газовых пузырьков, как на поверхности трубопровода, так и в потоке, что уменьшает число пузырьков в единице объема и, следовательно, поверхность массообмена. Увеличение коэффициента кинематической вязкости снижает массообмен пузырька, находящегося на поверхности трубопровода, с потоком жидкости вследствие уменьшения градиента концентрации и увеличения размеров диффузного слоя у стенки.

Термодинамические характеристики жидкости могут существенно изменить протекание процесса газовыделения в потоке. Сравнение процесса десорбции газа в азотном тетраксиде и воде при одинаковом пересыщении потока (кривые *2* и *5*) на рис. 3.12,*б* показывает, что вследствие больших значений поверхностного натяжения и вязкости и меньшей плотности интенсивность образования двухфазного потока в воде намного слабее, чем в азотном тетраксиде. Это обстоятельство следует иметь в виду при модельных гидравлических проливках системы питания.

Из термодинамических характеристик газа, растворенного в жидкости, наиболее сильное влияние на скорость изменения относительной объемной концентрации оказывает растворимость газа и универсальная газовая постоянная, изменяющие при прочих равных условиях ($C_\infty$ и $p_г$) степень пересыщения потока. Увеличение газовой постоянной, снижающее плотность газа, приводит к некоторому незначительному увеличению среднего радиуса пузырька в потоке и уменьшению поверхности и интенсивности массообмена, однако обратное влияние, сказывающееся на степени пересыщения, значительно сильнее.

На рис. 3.13 приведены результаты расчета относительной объемной концентрации при снижении давления в потоке от уровня, соответствующего равновесной концентрации. Результаты показы-

вают, что учет неравновесности процесса газовыделения снижает относительную объемную концентрацию, которая при реальных временах пребывания топлива в условиях пониженного давления (0,1—0,2 с) составляет лишь 20—30% равновесного значения.

Пребывание топлива в условиях колебания давления около равновесного значения (рис. 3.14) приводит к росту среднего значения относительной объемной концентрации газовой фазы, что является следствием большей поверхности массообмена при провале давления и выделении газа, чем при повышении давления и процессе растворения газа. При этом снижение частоты колебаний интенсифицирует указанный процесс.

*Глава 4*

# УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ МНОГОФАЗНОЙ СРЕДЫ

## 4.1. УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

При описании движения сплошной среды параметры, характеризующие смесь в целом, состоящие из $i$ составляющих ($i=1, 2, ..., m$), определяют исходя из следующих очевидных зависимостей для относительной плотности $\bar{\varrho}$ и среднемассовой скорости $V$ (плотность $i$-й составляющей $\bar{\varrho}_i$ определяется как масса $i$-й составляющей в единице объема среды):

$$\bar{\varrho}=\sum_{i=1}^{m}\bar{\varrho}_i;\quad V=\frac{1}{\bar{\varrho}}\sum_{i=1}^{m}\bar{\varrho}_i V_i. \tag{4.1}$$

При этом в многоскоростной сплошной среде для функции $f$ используют субстанциональную производную $d_i f/d\tau$, связанную с движением $i$-й составляющей:

$$\frac{d_i f}{d\tau}=\frac{\partial f}{\partial \tau}+V_{ix}\frac{\partial f}{\partial x}+V_{iy}\frac{\partial f}{\partial y}+V_{iz}\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{4.2}$$

где $V_{ix}$, $V_{iy}$, $V_{iz}$ — проекции скорости $i$-й составляющей на соответствующие оси координат.

Механика смесей строится на основе физических законов сохранения массы, импульса и энергии [43], при этом составляются балансовые соотношения массы, импульса и энергии для каждой составляющей в некотором фиксированном в пространстве объема смеси $W$, ограниченном поверхностью $S$, учитывая обмен не только с внешней средой, но и соответствующий обмен массой, импульсом и энергией между составляющими внутри объема $W$.

Предположим, что в рассматриваемой области течения осуществляется переход массы из $j$-й в $i$-ю составляющую (или наоборот) в единице объема и в единицу времени с интенсивностью $I_i$. Вырежем из движущейся массы участок, куда входит масса $i$-й

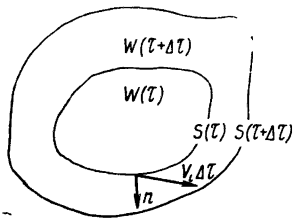



Рис. 4.1. Изменяемый объем фиксированных частиц среды

составляющей $m_i$ (рис. 4.1). В процессе течения занимаемая массой $m_i$ область пространства $W(\tau)$, ограниченная поверхностью $S(\tau)$, изменяется в зависимости от времени, а прирост массы $m_i$ составит величину

$$\frac{dm_i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \int\limits_{W(\tau)} \bar{\varrho}_i(\tau)\, dW, \tag{4.3}$$

где $dW$ — элемент объема.

При переходе массы из $j$-й в $i$-ю составляющую скорость изменения массы в объеме $W(\tau)$ будет равна

$$\frac{dm_i}{d\tau} = \int\limits_{W(\tau)} I_i dW. \tag{4.4}$$

Так как прирост массы равен ее переходу, то из (4.3) и (4.4) получим

$$\frac{d}{d\tau} \int\limits_{W(\tau)} \bar{\varrho}_i(\tau)\, dW = \int\limits_{W(\tau)} I_i dW. \tag{4.5}$$

Рассмотрим интеграл в левой части (4.5), для чего обратимся к определению производной, приняв во внимание рис. 4.1:

$$\frac{d}{d\tau} \int\limits_{W(\tau)} \bar{\varrho}_i(\tau)\, dW = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \left[ \int\limits_{V(\tau+\Delta\tau)} \bar{\varrho}_i(\tau+\Delta\tau)\, dW - \int\limits_{W(\tau)} \bar{\varrho}_i(\tau)\, dW \right]. \tag{4.6}$$

Разложим выражение в квадратных скобках на два следующих слагаемых:

$$[\ldots] = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где

$$\Delta_1 = \int\limits_{W(\tau+\Delta\tau)} \bar{\varrho}_i(\tau)\, dW - \int\limits_{W(\tau)} \bar{\varrho}_i(\tau)\, dW;$$

$$\Delta_2 = \int\limits_{W(\tau+\Delta\tau)} [\bar{\varrho}_i(\tau+\Delta\tau) - \varrho_i(\tau)]\, dW.$$

Величину элемента пространства между областями $W(\tau)$ и $W(\tau+\Delta\tau)$ можно записать через векторное произведение скорости $\vec{V}_i$ и внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности $S(\tau)$:

$$dW = \vec{V}_i \vec{n} ds d\tau,$$

где $ds$ — элемент поверхности $S(\tau)$.

Тогда

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta_1}{\Delta\tau} = \int\limits_{S(\tau)} \bar{\varrho}_i(\tau) \vec{V}_i \vec{n} ds; \tag{4.7}$$

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta_2}{\Delta\tau} = \int\limits_{W(\tau)} \frac{\partial}{\partial\tau} \bar{\varrho}_i(\tau)\, dW. \tag{4.8}$$

Подставив (4.7) и (4.8) в уравнение (4.6) и использовав (4.5), получим уравнение баланса масс в виде

$$\int\limits_{S(\tau)} \vec{\varrho}_i(\tau)\vec{V}_i\vec{n}ds + \int\limits_{W(\tau)} \frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\varrho}_i(\tau)dW = \int\limits_{W(\tau)} I_i dW. \qquad (4.9)$$

Применив к первому члену (4.9) формулу Остроградского — Гаусса перехода от поверхностного интеграла к объемному, распространенному на область $V(\tau)$, ограниченную поверхностью $S(\tau)$, получим

$$\int\limits_{W(\tau)} \left(\operatorname{div}\vec{\varrho}_i\vec{V}_i + \frac{\partial\bar{\varrho}_i}{\partial\tau}\right)dW = \int\limits_{W(\tau)} I_i dW. \qquad (4.10)$$

Если сжать область $W(\tau)$ в точку, то при таком предельном переходе с помощью теоремы о среднем интегрального исчисления получим дифференциальное уравнение сохранения массы каждой составляющей

$$\frac{\partial\bar{\varrho}_i}{\partial\tau} + \operatorname{div}\bar{\varrho}_i\vec{V}_i = I_i. \qquad (4.11)$$

Если рассматривается одномерное движение, то

$$\frac{\partial\bar{\varrho}_i}{\partial\tau} + \frac{\partial\bar{\varrho}_i V_i}{\partial x} = I_i. \qquad (4.12)$$

## 4.2. УРАВНЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Уравнение изменения количества движения отражает закон, который обычно формулируется так: приращение количества движения системы материальных точек на каком-либо элементарном перемещении равно импульсу всех внешних сил, действовавших на точки системы за время этого перемещения. Исходя из этого определения выразим изменение количества движения $i$-й составляющей, находящейся в области $W(\tau)$, в виде

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{W(\tau)} \bar{\varrho}_i(\tau)\vec{V}_i dW = F_м + F_s + \int\limits_{W(\tau)} \vec{R}_i dW, \qquad (4.13)$$

где $F_м$ — массовые силы, действующие в области интегрирования $W(\tau)$; $F_s$ — поверхностные силы, действующие извне на поверхность $S(\tau)$; $R_i$ — интенсивность обмена импульсом $i$-й и остальных составляющих.

Обозначив тензор поверхностных сил как $\vec{\sigma}_i$ и приняв, что $F_м = \int\limits_{W(\tau)} \vec{\varrho}_i\vec{g}dW$, где $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения, из (4.13), после проведения преобразований, получим

$$\int\limits_{W(\tau)} \frac{\partial\vec{\varrho}_i\vec{V}_i}{\partial\tau}dW + \int\limits_{S(\tau)} \vec{\varrho}_i\vec{V}_i V_i ds = \int\limits_{S(\tau)} \vec{\sigma}_i ds + \int\limits_{W(\tau)} \vec{\varrho}_i\vec{g}dW + \int\limits_{W(\tau)} \vec{R}_i dW. \qquad (4.14)$$

В общем случае течения параметры многофазной среды переменны в любой точке сечения, перпендикулярного оси трубопровода. Но в большинстве случаев, особенно при исследовании движения по круглому трубопроводу в условиях развитой турбулентности, для упрощения без существенной потери точности пренебрегают неравномерностью по сечению величин, характеризующих поток, и уравнения движения рассматривают для средних по сечению параметров, так как интерес в конечном итоге (при определении энергетических характеристик) представляет расход среды, протекающей через все сечение в данный момент времени. При этом допущении задача становится одномерной и искомые величины можно считать изменяющимися по двум координатам $x$ и $\tau$.

В проекции на ось $x$ с использованием формулы Остроградского — Гаусса уравнение (4.14) может быть записано в виде

$$\int\limits_{W(\tau)} \left[ \operatorname{div}\left(\bar{\varrho}_i V_{ix} \vec{V}_i\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\bar{\varrho}_i V_{ix}\right) - \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x} - \bar{\varrho}_i g - R_i \right] dW = 0.$$

С помощью такого же предельного перехода, как и в предыдущем подразделе, получим дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div}\left(\bar{\varrho}_i V_{ix} \vec{V}_i\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\bar{\varrho}_i V_{ix}\right) = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} + \bar{\varrho}_i g + R_i, \qquad (4.15)$$

которое для случая одномерного движения принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\bar{\varrho}_i V_i\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\varrho}_i V_i^2\right) = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} + \bar{\varrho}_i g + R_i. \qquad (4.16)$$

Тензор поверхностных сил, содержащий приведенные силы давления и трения, в одномерном движении для удобства исследований часто заменяют суммой градиента давления с выражением для перепада давлений на преодоление сил трения [74], куда входит экспериментальный коэффициент трения $\lambda_т$, так что

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_т \frac{\bar{\varrho}_i V_i^2}{2 d_т}\right) \varphi_i, \qquad (4.17)$$

где $\varphi_i$ — объемное содержание фазы; $d_т$ — диаметр трубопровода.

С учетом (4.12) и (4.17) уравнение (4.16) можно переписать в виде

$$\bar{\varrho}_i \frac{d_i V_i}{d\tau} = -\varphi_i \frac{\partial p}{\partial x} - \varphi_i \lambda_т \frac{\varrho_i V_i^2}{2 d_т} + \bar{\varrho}_i g + R_i - I_i V_i. \qquad (4.18)$$

Ограничимся рассмотрением двухфазной смеси, при этом первая фаза является несущей средой, описываемой моделью вязкой жидкости, а вторая фаза (газовая) присутствует в виде отдельных, одинакового размера включений, непосредственными взаимодействиями между которыми можно пренебречь. В этом случае при достаточно малых объемных содержаниях дисперсной фазы $\varphi_г$ на основании результатов, изложенных в работе [43] и в гл. 2, будем полагать, что воздействие вдоль граничной поверхности выделенного

объема смеси приходится на несущую фазу, а воздействие на дисперсную фазу определяется силой со стороны несущей фазы на целое число частиц, находящихся в этом объеме.

Как и в работе [43], будем полагать, что обмен импульсом между фазами $R_i$ в единицу времени и в единице объема может быть представлен в виде суммы двух слагаемых:

$$R_i=[F_\sigma+I(V_ж-V_г)]\varphi_i. \tag{4.19}$$

Здесь $I(V_ж-V_г)$ представляет собой изменение импульса соответствующей фазы за счет фазовых превращений; $F_\sigma$ — межфазная сила, содержащая следующие составляющие: силу трения от действия вязких сил при взаимодействии между фазами из-за разности скоростей $(V_ж-V_г)$, силу от эффекта присоединенных масс и силу Бассэ, возникающую вследствие гидродинамического сопротивления при неустановившемся движении.

Вывод соотношений для составляющих, входящих в уравнение (4.19), достаточно подробно изложен в гл. 2. Поэтому, не останавливаясь на частностях этих выводов, запишем в окончательном виде уравнение (4.18) для движущейся двухфазной среды

$$\bar{\varrho}_ж\frac{d_ж V_ж}{d\tau}=(1-\varphi)\frac{\partial p}{\partial x}-(1-\varphi)\lambda_т\frac{\varrho_ж V_ж^2}{2d_т}-(1-\varphi)I(V_г-V_ж)+$$
$$+\bar{\varrho}_ж g-\frac{3}{4\pi r_*^3}\varphi(1-\varphi)f_*; \tag{4.20}$$

$$\bar{\varrho}_г\frac{d_г V_г}{d\tau}=-\varphi\frac{\partial p}{\partial x}-\varphi\lambda_т\frac{\varrho_ж V_ж^2}{2d_т}-\varphi I(V_г-V_ж)+$$
$$+\bar{\varrho}_г g+\frac{3}{4\pi r_*^3}\varphi(1-\varphi)f_*, \tag{4.21}$$

где $\varphi$ — относительная объемная концентрация газовой фазы;

$f_*$ — сила взаимодействия единичного газового пузырька радиусом $r_*$ с несущей жидкой фазой.

### 4.3. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Уравнения движения многофазной среды (4.12), (4.20), (4.21) без дополнительных зависимостей не могут быть использованы для получения решения, так как число зависимых переменных превышает число уравнений. Для замыкания системы сложим уравнения сохранения массы (4.12) для газовой и жидкой фаз, полагая $\bar{\varrho}=\bar{\varrho}_г+\bar{\varrho}_ж$ [43]. Рассматривая давление $p$ как функцию двух термодинамических параметров — плотности $\bar{\varrho}$ и энтропии смеси $S$, запишем следующее очевидное соотношение:

$$\frac{\partial p}{\partial\tau}=\left(\frac{\partial p}{\partial\bar{\varrho}}\right)_S\frac{\partial\bar{\varrho}}{\partial\tau}+\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\bar{\varrho}}\frac{\partial S}{\partial\tau}=a^2\frac{\partial\varrho}{\partial\tau}+\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\bar{\varrho}}\frac{\partial S}{\partial\tau}. \tag{4.22}$$

При движении жидкости для упрощения процедуры исследова-

ний обычно пренебрегают вторым членом, входящим в правую часть (4.22), ввиду его малости [18], т. е.

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial \varrho}{\partial \tau}. \tag{4.23}$$

Учет изменения температуры (и энтропии) и описание процессов с учетом зависимости (4.22), содержащей $\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\varrho} \frac{\partial S}{\partial \tau}$, принципиальных трудностей не вызывает, как это показано в работе [43]. Однако при рассмотрении течения рабочей среды, содержащей высококипящую жидкость с начальной температурой, равной температуре окружающей среды, без существенной потери точности может быть принято условие (4.23) для движения рабочего тела в магистралях питания реальных энергетических установок. Очевидно, это допущение оправдано для исследования нестационарных процессов запуска, когда время неустановившегося режима не превышает 1—2 с и теплообменные процессы практически не успевают пройти.

Тогда, подставив (4.23) в (4.12) и использовав уравнения (4.20), (4.21) совместно с зависимостями (2.61), (3.43), (3.74), получим следующую систему уравнений для нахождения решений при одномерном неустановившемся движении многофазной среды по магистрали постоянного проходного сечения:

$$\frac{\partial \bar{\varrho}_{\text{ж}}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\varrho}_{\text{ж}} V_{\text{ж}}}{\partial x} = -I; \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial \bar{\varrho}_{\text{г}}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\varrho}_{\text{г}} V_{\text{г}}}{\partial x} = I; \tag{4.25}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\varrho}_{\text{ж}} V_{\text{ж}} + \bar{\varrho}_{\text{г}} V_{\text{г}}\right) = 0; \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial V_{\text{ж}}}{\partial \tau} + V_{\text{ж}} \frac{\partial V_{\text{ж}}}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\varrho}_{\text{ж}}}\left\{\bar{\varrho}_{\text{ж}} g - (1-\varphi)\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_{\text{т}} \frac{\varrho_{\text{ж}} V_{\text{ж}}^2}{2d_{\text{т}}} + I\left(V_{\text{г}} - V_{\text{ж}}\right) + \frac{\varphi}{4/3\pi r_*^3} f_*\right]\right\}; \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial V_{\text{г}}}{\partial \tau} + V_{\text{г}} \frac{\partial V_{\text{г}}}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\varrho}_{\text{г}}}\left\{\bar{\varrho}_{\text{г}} g - \varphi\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_{\text{т}} \frac{\varrho_{\text{ж}} V_{\text{ж}}^2}{2d_{\text{т}}} + I\left(V_{\text{г}} - V_{\text{ж}}\right) - \frac{1-\varphi}{4/3\pi r_*^3} f_*\right]\right\}. \tag{4.28}$$

Система уравнений (4.24)—(4.28) используется совместно с зависимостями (3.74), (3.43), (2.61), (3.3), (2.79) для скорости фазового перехода $I$, скорости звука $a$, силы межфазного взаимодействия $f_*$, радиуса пузырька $r_*$. Коэффициент трения $\lambda_{\text{т}}$ определяется по известным формулам гидравлики в зависимости от числа Re и относительной шероховатости стенок трубопровода, с учетом (3.28).

*Глава 5*

# КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В МАГИСТРАЛЯХ СИСТЕМ ПИТАНИЯ

В общем случае изменение параметров движущейся двухфазной среды в одномерной постановке определяется двумя независимыми переменными $x$ и $\tau$. Взаимосвязь параметров, определяющая физический процесс, математически описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными, которые могут иметь бесчисленное множество решений. Поэтому для однозначной характеристики процесса и выделения необходимого частного решения к уравнениям (4.24)—(4.28) следует присоединить дополнительные или краевые условия, конкретизирующие характер движения и содержащие начальные и граничные условия. Начальные условия определяют конкретные значения параметров и их взаимосвязи до начала движения (или до начала изменения параметров); граничные условия — задание значений функций в характерных сечениях магистрали.

Формулировка начальных условий особого труда не вызывает и в соответствии с вышеуказанным их записывают в виде:

при $$\tau=0 \quad f=f(x), \tag{5.1}$$

где под заданной вектор-функцией $\bar{f}=\bar{f}(x)$ подразумевается совокупность параметров $p$, $V_{ж}$, $V_{г}$, $\varrho_{ж}$, $\varrho_{г}$ и т. д.

Граничные условия определяют, как правило, энергетическое и силовое взаимодействие движущегося потока и внешней среды, поэтому записываются либо известной взаимосвязью давлений или расходов (скоростей) на границе, либо заданием их значений. Остальные параметры, характеризующие двухфазность, находятся из зависимостей, приведенных в гл. 3. Одним из наиболее характерных случаев является постановка граничных условий в месте стыка ($x=0$) расходного трубопровода с баком (рис. 5.1), когда давление $p_б$ в баке над зеркалом жидкости считается заданным:

$$p_б=p_б(\tau). \tag{5.2}$$

Тогда, использовав уравнение Бернулли для сечений между зеркалом жидкости и течением $x=0$ в расходном трубопроводе с учетом уравнений сохранения массы, количества движения (4.12), (4.20), (4.21) и термодинамических функций для смеси и отдельных составляющих (2.79), граничные условия запишем в следующем виде:

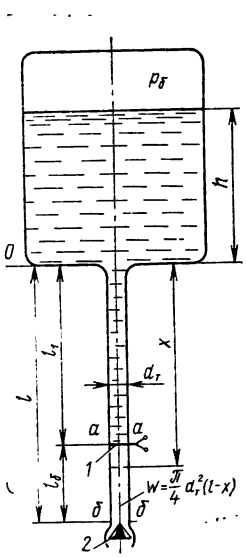



Рис. 5.1. Схема системы питания:
*1*—пусковой клапан; *2*—насос

при .

$$x=0\,(\tau\geqslant 0)\quad p=p_б+(\bar{\varrho}_ж+\bar{\varrho}_г)\,ghn_x-\frac{1+\xi}{2}\frac{(\bar{\varrho}_ж V_ж+\bar{\varrho}_г V_г)^2}{\bar{\varrho}_ж+\bar{\varrho}_г};\quad (5.3)$$

$$\frac{\partial V_ж}{\partial\tau}+V_ж\frac{\partial V_ж}{\partial x}=\frac{1}{\bar{\varrho}_ж}\left\{\bar{\varrho}_ж g-(1-\varphi)\left[\frac{\partial p}{\partial x}+\lambda_т\frac{\varrho_ж V_ж^2}{2d_т}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+I\,(V_г-V_ж)+\frac{\varphi}{4/3\pi r_*^3}\,f_*\right]\right\};\quad (5.4)$$

$$\frac{\partial V_г}{\partial\tau}+V_г\frac{\partial V_г}{\partial x}=\frac{1}{\bar{\varrho}_г}\left\{\bar{\varrho}_г g-\varphi\left[\frac{\partial p}{\partial x}+\lambda_т\frac{\varrho_ж V_ж^2}{2d_т}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+I\,(V_г-V_ж)-\frac{1-\varphi}{4/3\pi r_*^3}\,f_*\right]\right\};\quad (5.5)$$

$$\frac{\partial\bar{\varrho}_ж}{\partial\tau}+\frac{\partial\bar{\varrho}_ж V_ж}{\partial x}=I;\quad (5.6)$$

$$\frac{\partial\bar{\varrho}_г}{\partial\tau}+\frac{\partial\bar{\varrho}_г V_г}{\partial x}=-I;\quad (5.7)$$

$$T=T_0.\quad (5.8)$$

Здесь $h$ — высота столба жидкости в баке; $n_*$ — осевая перегрузка, действующая по оси трубопровода; $\xi$ — коэффициент потерь давления на входе в расходный трубопровод в сечении $x=0$; $T=T_0$ — известная зависимость для температуры смеси.

## 5.1. ПРОЦЕССЫ В ЗАПОЛНЯЕМОМ ОБЪЕМЕ ПРИ ЗАПУСКЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

В процессе пуска энергетической установки открываются пусковые клапаны, отделяющие жидкое рабочее тело от газовой среды, находящейся в магистрали (см. рис. 5.1). Приходящий в движение столб жидкости будет воздействовать на газовую среду, заполняющую объем магистрали между пусковым клапаном и потребителем, например насосом для силовой установки с ЖРД. При этом из-за повышения давления в объеме $W$ часть газа вытекает через сечение $б$—$б$, а сам газовый объем изменяется со скоростью

$$\frac{dW}{d\tau}=-FV,\quad (5.9)$$

где $V$ — скорость движения фронта жидкости; $F$ — площадь проходного сечения трубопровода.

Как правило, длина магистрали от $а$—$а$—$б$—$б$ на практике выбирается существенно меньше длины волны возмущений, возникающих в системе, поэтому можно пренебречь различием в параметрах по длине магистрали.

Будем полагать, что до момента подхода фронта жидкости к сечению *б—б* в объеме $W$ находится смесь нейтрального газа и пара жидкости, причем составляющие смеси неизменно сохраняют свою химическую индивидуальность, а формула Клапейрона применима для смеси в такой же мере, как и для чистых газов, если только в расчет вводится газовая постоянная смеси $R$ зависящая от состава смеси:

$$pW = RTM. \tag{5.10}$$

Здесь $p$ — давление в объеме $W$; $W$ — объем магистрали от *а—а* до *б—б*; $M$ — масса парогаза; $T$ — температура смеси.

Считаем также, что для смеси применим принцип аддитивности и для выделенной $i$-й компоненты смеси (пара или газа) уравнение состояния может быть представлено в виде

$$p_i W = R_i T M_i, \tag{5.11}$$

причем давление смеси равно сумме парциальных давлений (закон Дальтона)

$$p = \sum_i p_i = p_{\text{п}} + p_{\text{г}}. \tag{5.12}$$

Использовав (5.10)—(5.12), получим выражение для $R$ смеси:

$$R = \sum_i \mu_i R_i, \tag{5.13}$$

где

$$\mu_i = M_i / M. \tag{5.14}$$

Исходя из уравнений баланса массы и энергии в объеме запишем выражения для изменения массы смеси $M$ и внутренней энергии $U$ в виде

$$\frac{dM}{d\tau} = \dot{m}_{\text{п}} + \dot{m}_{\text{г}} - \dot{m}_{\text{вых}}; \tag{5.15}$$

$$\frac{dU}{d\tau} = -\left[p\,\frac{dW}{d\tau} + \dot{m}_{\text{п}} H_{\text{п}} + \dot{m}_{\text{г}} H_{\text{г}} + c_p \dot{m}_{\text{вых}} T\right]; \tag{5.16}$$

$$U = M c_v T, \tag{5.17}$$

где $\dot{m}_{\text{п}}$ — скорость испарения с поверхности раздела жидкости в объеме $W$; $\dot{m}_{\text{г}}$ — скорость выделения растворенного газа из жидкости в объеме $W$; $H_{\text{п}}$ — удельная теплота испарения; $H_{\text{г}}$ — теплота на 1 кг газа при его выделении из жидкости; $\dot{m}_{\text{вых}}$ — массовый расход парогаза в единицу времени из объема $W$ через сечение *б—б*; $c_p$, $c_v$ — удельные теплоемкости соответственно при постоянном давлении и объеме.

Скорость испарения $\dot{m}_{\text{п}}$ и газовыделения $\dot{m}_{\text{г}}$ в объеме определяются давлением паров жидкости $p_s$ и концентрацией газа в жидко-

сти $C_\infty$ и могут быть найдены из выражений для баланса данной фазы [43]:

$$\dot{m}_{\text{п}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}}\,\alpha_{\text{п}} F\,\frac{p_s - p_{\text{п}}}{\sqrt{R_{\text{п}} T}}; \tag{5.18}$$

$$\dot{m}_{\text{г}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}}\,\alpha_{\text{г}} F\,\frac{\left(C_\infty \dfrac{\bar{\varrho}_{\text{г}}}{1-\varphi} - p_{\text{г}}\right)}{\varkappa}}{\sqrt{RT}}, \tag{5.19}$$

где $\alpha_{\text{п}}$, $\alpha_{\text{г}}$ — коэффициенты пропорциональности; $g$ — ускорение свободного падения; $\bar{\varrho}_{\text{г}}$ — приведенная плотность газовой фазы на фронте жидкости; $F$ — площадь проходного сечения трубопровода; $\varphi$ — объемная концентрация парогазовой фазы на фронте жидкости; $p_s$ — давление паров жидкости, зависящее от температуры $T$; $p_s = P_s(T)$; $\varkappa$ — коэффициент растворимости газа (коэффициент Генри).

Расход газа из объема магистрали между фронтом жидкости и сечением *б—б*, где установлен насос, определяется по формулам:

при $\dfrac{p_{\text{ат}}}{p} > \beta_{\text{кр}}$ $\quad \dot{m}_{\text{вых}} = F_{\text{б}} \sqrt{\dfrac{2k}{k-1}\,\dfrac{p^2}{RT}\left[\left(\dfrac{p_{\text{ат}}}{p}\right)^{2/k} - \left(\dfrac{p_{\text{ат}}}{p}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}$; (5.20)

при $\dfrac{p_{\text{ат}}}{p} \leqslant \beta_{\text{кр}}$ $\quad \dot{m}_{\text{вых}} = F_{\text{б}} p \sqrt{\dfrac{k}{RT}\left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$,

где $\beta_{\text{кр}}$ — критический перепад давлений, $\beta_{\text{кр}} = \left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$; $F_{\text{б}}$ — площадь проходного сечения на выходе из магистрали в сечении *б—б*; $p_{\text{ат}}$ — давление у потребителя (за насосом); $k$ — показатель адиабаты.

При этом расходы газовой фазы $\dot{m}_{\text{г.вых}}$ и паровой фазы $\dot{m}_{\text{п.вых}}$ на основании принципа аддитивности могут быть определены в зависимости от парциальных давлений:

$$\dot{m}_{\text{г.вых}} = \dot{m}_{\text{вых}}\,\frac{\dfrac{kR}{k-1} - \dfrac{k_{\text{п}} R_{\text{п}}}{k_{\text{п}} - 1}}{\dfrac{k_{\text{г}} R_{\text{г}}}{k_{\text{г}} - 1} - \dfrac{k_{\text{п}} R_{\text{п}}}{k_{\text{п}} - 1}}; \tag{5.21}$$

$$\dot{m}_{\text{п.вых}} = \dot{m}_{\text{вых}}\,\frac{\dfrac{k_{\text{г}} R_{\text{г}}}{k_{\text{г}} - 1} - \dfrac{kR}{k-1}}{\dfrac{k_{\text{г}} R_{\text{г}}}{k_{\text{г}} - 1} - \dfrac{k_{\text{п}} R_{\text{п}}}{k_{\text{п}} - 1}}, \tag{5.22}$$

где $k_г$ и $k_п$ — соответственно показатели адиабаты газовой и первой фаз. Используя уравнения баланса массы фаз

$$\frac{dM_г}{d\tau} = \dot{m}_г - \dot{m}_{г.вых}; \tag{5.23}$$

$$\frac{dM_п}{d\tau} = \dot{m}_п - \dot{m}_{п.вых}. \tag{5.24}$$

и уравнения баланса массы и энергии смеси (5.15), (5.16), зависимости для определения параметров среды в объеме $W$ с учетом выражений (5.10)—(5.14), (5.17)—(5.22), можно преобразовать к виду, разрешенному относительно искомых термодинамических параметров $p$, $p_п$, $p_г$, $T$, $W$:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{(k-1)\,p}{W}\left(\frac{dW}{d\tau} + \frac{\dot{m}_п H_п + \dot{m}_г H_г}{p}\right) - kp\frac{\dot{m}_{вых}}{M} - \\ - p\left[\frac{d\ln W}{d\tau} - \frac{d\ln(k-1)}{d\tau}\right]; \tag{5.25}$$

$$\frac{dT}{d\tau} = -\frac{(k-1)\,T}{W}\left(\frac{dW}{d\tau} + \frac{\dot{m}_п H_п + \dot{m}_г H_г}{p}\right] - \\ - T\left[\frac{d\ln R}{d\tau} - \frac{d\ln(k-1)}{d\tau} + \frac{(k-1)\,\dot{m}_{вых} + \dot{m}_п + \dot{m}_г}{M}\right]; \tag{5.26}$$

$$\frac{dp_г}{d\tau} = \frac{R_г T}{W}(\dot{m}_г - \dot{m}_{г.вых}) - p_г\left(\frac{d\ln W}{d\tau} - \frac{d\ln R}{d\tau} - \frac{d\ln T}{d\tau}\right); \tag{5.27}$$

$$\frac{dp_п}{d\tau} = \frac{R_п T}{W}(\dot{m}_п - \dot{m}_{п.вых}) - p_п\left(\frac{d\ln W}{d\tau} - \frac{d\ln R}{d\tau} - \frac{d\ln T}{d\tau}\right); \tag{5.28}$$

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{R_г(\dot{m}_г - \dot{m}_{г.вых}) + R_п(\dot{m}_п - \dot{m}_{п.вых})}{M}; \tag{5.29}$$

$$\frac{dk}{d\tau} = \frac{k_г(\dot{m}_г - \dot{m}_{г.вых}) + k_п(\dot{m}_п - \dot{m}_{п.вых})}{M}; \tag{5.30}$$

$$\frac{dW}{d\tau} = -FV; \tag{5.31}$$

$$\dot{m}_п = \sqrt{\frac{g}{2\pi}}\,\frac{p_s - p_п}{\sqrt{R_п T}}\,\alpha_п F; \quad \dot{m}_г = \sqrt{\frac{g}{2\pi}}\,\frac{\left[C_\infty - \frac{\bar{Q}_г}{1-\varphi}\right]^{\varkappa} - p_г}{\sqrt{R_г T}}\,\alpha_г F; \tag{5.32}$$

$$\text{при } \frac{p_{ат}}{p} > \beta_{кр}\ \ \dot{m}_{вых} = F_б\sqrt{\frac{2k}{k-1}\,\frac{p^2}{RT}\left[\left(\frac{p_{ат}}{p}\right)^{2/k} - \left(\frac{p_{ат}}{p}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}; \tag{5.33}$$

$$\text{при } \frac{p_{ат}}{p} \leqslant \beta_{кр}\ \ \dot{m}_{вых} = F_б p\sqrt{\frac{k}{RT}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}};$$

$$\dot{m}_{\text{г.вых}}=\dot{m}_{\text{вых}}\frac{\dfrac{kR}{k-1}-\dfrac{k_{\text{п}}R_{\text{п}}}{k_{\text{п}}-1}}{\dfrac{k_{\text{г}}R_{\text{г}}}{k_{\text{г}}-1}-\dfrac{k_{\text{п}}R_{\text{п}}}{k_{\text{п}}-1}}; \tag{5.34}$$

$$\dot{m}_{\text{п.вых}}=\dot{m}_{\text{вых}}\frac{\dfrac{k_{\text{г}}R_{\text{г}}}{k_{\text{г}}-1}-\dfrac{kR}{k-1}}{\dfrac{k_{\text{г}}R_{\text{г}}}{k_{\text{г}}-1}-\dfrac{k_{\text{п}}R_{\text{п}}}{k_{\text{п}}-1}}; \tag{5.35}$$

$$\dot{M}=\frac{pW}{RT}. \tag{5.36}$$

Система уравнений (5.25)—(5.36) позволяет определить давление в газовой полости магистрали, которое, очевидно, можно полагать равным давлению во фронте движущейся жидкости.

Полная система уравнений, отражающих условия течения на границе раздела жидкости и газа до момента подхода фронта к сечению *б—б* (см. рис. 5.1) кроме зависимостей (5.25)—(5.36) включает уравнения (5.4)—(5.8).

При заполнении жидкостью всей магистрали и подходе фронта к сечению *б—б* граница раздела исчезает и от агрегата, установленного в конце трубопровода питания, вверх по потоку отходит отраженная волна, оказывающая влияние на режим течения рабочего тела. Положив, что площадь тракта системы питания в месте стыка его с трубопроводом (сечение *б—б*) меняется от значения $F$ до $\omega$, определим скорость $i$-й фазы $V_i$ в сечении $F$ из следующих соображений. Считая протяженность зоны перехода от $F$ до $\omega$ существенно меньше длины волны возмущений, а также пренебрегая нестационарностью потока и изменением его плотности на этом участке, можно записать уравнение неразрывности в виде

$$V_i=V_i'\omega/F, \tag{5.37}$$

где $V_i'$ — скорость фазы в сечении $\omega$.

Если известен коэффициент гидравлического сопротивления от внезапного сужения $\zeta$, то использовав уравнение Бернулли для сечений $\omega$ и $F$

$$p'+\frac{\bar{\varrho}_i(V_i')^2}{2}(1+\zeta)=p+\frac{\bar{\varrho}_iV_i^2}{2} \tag{5.38}$$

(где $p'$ — давление за агрегатом и в месте сужения; $\bar{\varrho}_i$ — плотность $i$-й составляющей), с учетом (5.37), получим следующую зависимость для скорости $i$-й фазы потока;

$$V_i=\frac{\omega}{F}\sqrt{\frac{2(p-p')}{\bar{\varrho}_i\left[1+\zeta-\left(\dfrac{\omega}{F}\right)^2\right]}}. \tag{5.39}$$

Использовав полученное выражение (в предположении, что поток состоит из жидкой и газовой фаз и, следовательно, $i$-ж или $i$-г), с

привлечением уравнения сохранения массы (4.24)—(4.26) и термодинамических зависимостей для фазовых превращений, запишем граничные условия при прохождении рабочим телом агрегата с переменной площадью сечения в виде

$$\frac{\partial \bar{\varrho}_{ж}}{\partial \tau}+\frac{\partial \bar{\varrho}_{ж} V_{ж}}{\partial x}=I; \tag{5.40}$$

$$\frac{\partial \bar{\varrho}_{г}}{\partial \tau}+\frac{\partial \bar{\varrho}_{г} V_{г}}{\partial x}=-I; \tag{5.41}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}+a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\varrho}_{ж} V_{ж}+\bar{\varrho}_{г} V_{г}\right)=0; \tag{5.42}$$

$$V_{ж}=\frac{\omega}{F}\sqrt{\frac{2(p-p')}{\bar{\varrho}_{ж}\left[1+\zeta-\left(\frac{\omega}{F}\right)^2\right]}}; \tag{5.43}$$

$$T=T_0. \tag{5.44}$$

Уравнения (5.40)—(5.44) используются совместно с зависимостями (2.79), (3.3), (3.43), (3.74) для скорости звука и скорости фазового перехода и применяются как для исследования нестационарных процессов, так и при определении давления гидроудара после заполнения магистрали питания.

## 5.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ПИТАНИЯ СО ШНЕКОЦЕНТРОБЕЖНЫМ НАСОСОМ

После заполнения магистрали питания рабочая среда поступает во входное устройство насоса, обеспечивающего работу силовой установки на эксплуатационных режимах. Как правило, на современных силовых установках, например жидкостных ракетных двигателях (ЖРД), устанавливают высокооборотные шнекоцентробежные насосы, процессы в которых, особенно на переходных режимах работы, достаточно сложны и их протекание зависит от типа применяемого насоса и его характеристик, а также от гидравлических характеристик трубопровода системы питания.

Работа шнекоцентробежных насосов описывается с помощью их универсальных энергетических характеристик, которые, как правило, определяются в процессе холодных испытаний. Правильность характеристик подтверждается при стендовых испытаниях в составе всей энергетической установки. Эти характеристики отражают зависимость напора $\Delta p_{н}$, создаваемого насосом, момента $M_{н}$ и КПД насоса $\eta_{н}$ от объемного расхода топлива $Q_2$ на выходе из насоса и частоты вращения вала турбонасосного агрегата (ТНА) $n_{т}$. С учетом неустановившегося режима работы насоса универсальные энергетические характеристики записываются в виде:

$$\Delta p_{н}=\left[a_{н}\left(\frac{Q_2}{n_{т}}\right)^2+b_{н}\left(\frac{Q_2}{n_{т}}\right)+c_{н}\right] n_{т}^2 \varrho+\varrho A \frac{dn_{т}}{d\tau}-\varrho c \frac{dQ_2}{d\tau}; \tag{5.45}$$

$$M_{\text{н}}=\frac{30}{n_{\text{т}}}\frac{Q_2\Delta p_{\text{н}}}{\eta_{\text{н}}}+I_{\text{ТНА}}\frac{dn_{\text{т}}}{d\tau}+D\frac{dn_{\text{т}}}{d\tau}-E\frac{dQ_2}{d\tau}; \qquad (5.46)$$

$$\eta_{\text{н}}=A_\eta(1-q_0)^{m_1}q_0^{m_2}; \quad q_0=\frac{Q_2}{n_{\text{т}}}\Big/\left(\frac{Q_2}{n_{\text{т}}}\right)_{\Delta p_{\text{н}}=0}, \qquad (5.47)$$

где $a_{\text{н}}$, $b_{\text{н}}$, $c_{\text{н}}$ — обобщенные коэффициенты, определяемые типом насоса; $I_{\text{ТНА}}$ — момент инерции ТНА.

Два последние члена в уравнениях (5.45) и (5.46) учитывают неустановившийся режим работы насоса. Коэффициенты $A$, $C$, $D$, $E$, $A_\eta$, $m_1$, $m_2$ в наиболее общем случае зависят от геометрических характеристик проточной части насоса и режима его работы [47].

В большинстве случаев уравнений (5.45)—(5.47) недостаточно для описания процессов течения топлива в системе подачи силовой установки, например ЖРД, с высокооборотными шнекоцентробежными насосами. Это объясняется тем, что даже на номинальных режимах работы шнекоцентробежные насосы большинства современных ЖРД имеют на входах такие давления, при которых возникают кавитационные явления в проточной части. В частности, по данным [75] первые зоны кавитации возникают в межлопаточных каналах шнека при давлении на входе 1,7—2,5 МПа над упругостью пара.

Кроме кавитационных образований в проточной части насоса на режиме малых расходов во входной магистрали перед шнеком возникают обратные токи, которые приводят к образованию двухфазной вихревой пульсирующей зоны в топливной магистрали [75]. Размеры этой зоны могут быть значительными. На определенных режимах работы насоса возможно также возникновение кавитации при входе потока в выходной конический диффузор. Таким образом, в общем случае работа шнекоцентробежных насосов ЖРД сопровождается возникновением различного рода кавитационных образований как в проточной части насоса, так и во входной магистрали перед шнеком.

Наличие кавитационных образований в шнекоцентробежных насосах видоизменяет переходные процессы в ЖРД. В связи с этим точность описания динамических характеристик систем питания силовой установки существенно зависит от точности описания кавитационных явлений в шнекоцентробежных насосах. В системе уравнений, описывающей работу насоса на переходных режимах с учетом частичной кавитации, определяющей является зависимость объема кавитационной каверны $W_{\text{к}}$ от давления на входе в насос $p_1$ и режима работы насоса $Q_1/n$. Эта зависимость носит название упругорасходной характеристики [47] и записывается в виде

$$W_{\text{к}}=W_{\text{к}}(p_1,\ Q_1/n). \qquad (5.48)$$

В настоящее время, к сожалению, отсутствует единая общепринятая методика получения упругорасходной характеристики даже в области малых изменений режимов (по отношению к номинальному) по $p_1$ и $Q_1/n$. Математическая же модель шнекоцентробежного насоса, предназначенная для воспроизведения ненормальных

состояний ЖРД, требует получения зависимости (5.48) в широком диапазоне изменения $p_1$ и $Q_1/n$, что еще более усложняет решение задачи.

Одной из наиболее разработанных в настоящее время моделей, которая позволяет определить характеристики шнекоцентробежного насоса, работающего на режиме частичной кавитации, является модель, основанная на неустановившемся кавитационном обтекании решетки плоских пластин [47]. Эта модель учитывает наличие кавитационных образований в проточной части шнекоцентробежного насоса и зависимость их объема от давления на входе $p_1$ и режима работы $Q_1/n$ насоса. В модели суммарный объем кавитационных каверн определяется из уравнения материального баланса:

$$W_{к\Sigma}=\int_0^{\tau}(Q_2-Q_1)\,d\tau+W_{к\Sigma 0}(\tau), \qquad (5.49)$$

где $W_{к\Sigma 0}$ — суммарный (в проточной части насоса и в зоне перед шнеком) объем кавитационной полости на установившемся режиме работы.

Расход $Q_2$ в выражении (5.49) должен определяться с учетом возможного возникновения кавитации у «языка», которая ограничивает расход на выходе из насоса. Предельный расход в этом случае может быть определен по методике, изложенной в работе [47].

При отсутствии обратных токов упругорасходная характеристика определяется из совместного решения уравнения баланса и следующей системы уравнений:

$$p_1=p_s+\varrho\frac{V_1^2}{2}K(W_{к\Sigma},\ q_1)+B_1T_к\frac{dW_{к\Sigma}}{d\tau};$$

$$W_{к\Sigma}=W_ш\left(1-\frac{\pi}{4{,}6z}\right)\frac{\bar h_к^2}{1-q_1};$$

$$\bar h_к=1-\frac{k+2q_1\cos\alpha-2q_1\psi+\sqrt{(K+2q_1\cos\alpha-2q_1\psi)^2-4q_1^2(1-\psi)(K+1-\psi)}}{2(K+1-\psi)},$$

где $K$ — кавитационный коэффициент (число кавитации); $B_1$ — упругость кавитационных каверн; $T_к$ — постоянная времени кавитационной каверны; $V_1$ — относительная скорость потока на входе в межлопаточные каналы шнека; $W_ш$ — объем шнека; $q_1$ — коэффициент режима; $\bar h_к$ — относительная высота каверны; $\psi$ — коэффициент потерь давления при входе потока в каналы шнека; $z$ — число лопаток шнека; $\alpha$ — угол атаки при входе в шнек.

На режимах с обратными токами упругорасходная характеристика находится из совместного решения уравнения баланса (5.49) и следующих эмпирических соотношений:

$$p_1=p_{ср.э}+K^*\frac{\varrho V_1^2}{2}+BT_к\frac{dW_{к\Sigma}}{d\tau};$$

$$K^*=\frac{0{,}167aq_1}{\left[1+\frac{0{,}167}{K^*_{\text{п.ш}}}\right]\exp\left\{7{,}5aq_1^2\frac{W_{\text{к}\Sigma}-W^*_{\text{к}}}{2{,}3S\left(R^2_{\text{н}}-r^2_{\text{в}}\right)}\right\}-1};$$

$$B=\frac{4{,}5q_1(K^*)^2+7{,}5aq_1^2K^*}{2{,}3S\left(R^2_{\text{н}}-r^2_{\text{в}}\right)}\frac{\varrho V_1^2}{2};$$

$$K^*_{\text{п.ш}}=\frac{57{,}2-73q}{0{,}32-q}10^{-3};$$

$$a=\begin{cases}1 & \text{при } q_1<0{,}35;\\ 1+30(q_1-0{,}35) & \text{при } 0{,}35\leqslant q_1\leqslant 0{,}45;\\ 4 & \text{при } 0{,}45\leqslant q_1\leqslant 0{,}6,\end{cases}$$

где $p_{\text{ср.э}}$ — давление срыва по экспериментальной статической срывной характеристике насоса, $p_{\text{ср.э}}=f(Q_1/n)$; $K^*_{\text{п.ш}}$ — число кавитации, соответствующее появлению кавитационной полости перед шнеком; $R_{\text{н}}$ — радиус насоса наружный; $r_{\text{н}}$ — радиус насоса внутренний; $S$ — шаг винтовой линии; $W_{\text{к}}^*$ — объем каверн при $K^*=K^*_{\text{п.ш}}$.

Возникновение кавитационной каверны перед шнеком происходит при условии $K^*<K^*_{\text{п.ш}}$. Приведенные зависимости позволяют определить давление на входе в насос и суммарный объем кавитационной зоны. Однако результаты экспериментальных исследований показали, что не все кавитационные образования оказывают влияние на напор насоса [75]. Для определения напора и мощности необходимо разделение суммарного объема каверны на каверну в вихревой зоне перед шнеком и каверну в проточной части, которая и оказывает влияние на характеристики насоса. Это разделение удается произвести, если предположить, что на режимах с обратными токами объем вихревой зоны перед шнеком пропорционален отношению расходов обратных токов к прямотокам. Экспериментальная зависимость имеет вид:

$$\frac{Q_{\text{о.т}}}{Q_{\text{пр}}}\approx 1-2q_1.$$

С учетом этой зависимости

$$W_{\text{к.п.ш}}=W_{\text{к}\Sigma}(1-q_1);\quad W_{\text{к.п.ч}}=W_{\text{к}\Sigma}q_1,$$

где $W_{\text{к.п.ш}}$ — объем каверны перед шнеком; $W_{\text{к.п.ч}}$ — объем каверны в проточной части насоса.

Степень снижения напора, развиваемого насосом при работе в режиме кавитации и получаемого на основании обработки экспериментальных данных, описывается зависимостью:

$$f_{\text{н}}(W_{\text{к}})=1-0{,}2168\overline{W}_{\text{к}}-0{,}5446\overline{W}^2_{\text{к}};$$

$$\overline{W}_{\text{к}}=W_{\text{к.п.ч}}/W_{\text{н}},$$

где $W_{\text{н}}$ — объем насоса.

Степень снижения потребляемого насосом момента, зависящая от формы и размеров проточной части насоса, учитывается с помощью коэффициентов $\beta_к$ и $r_к$, которые вычисляются по формулам [47]:

$$\beta_к = \sqrt[4]{\mu + \mu_1 \bar{W}_к + \mu_2 \bar{W}_к^2}; \quad r_к = a\bar{W}_к^2 + b\bar{W}_к + c,$$

где $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, $a$, $b$, $c$ — постоянные коэффициенты насоса.

С учетом полученных соотношений универсальные энергетические характеристики насоса на переходных режимах записываются в виде:

$$\Delta p_н = \varrho\left[c_н + b_н\left(\frac{Q_2}{n_т}\right) + a_н\left(\frac{Q_2}{n_т}\right)^2\right] n_т^2 f_н(W_к) + \varrho A \frac{dn_т}{d\tau} - \varrho C \frac{dQ_2}{d\tau}; \quad (5.50)$$

$$M_н = \frac{30}{\pi n_т} \frac{Q_2 \Delta p_н}{\eta_н} \beta_к - \lambda \frac{\pi\varrho}{30} n_т r_к \frac{dW_к}{d\tau} + D\frac{dn_т}{d\tau} - E\frac{dQ_2}{d\tau}; \quad (5.51)$$

$$p_2 = p_1 + \Delta p_н. \quad (5.52)$$

Таким образом, рассмотренный подход позволяет получить расчетные характеристики системы трубопровод — шнекоцентробежный насос с учетом кавитационных образований в насосе уже на этапе проектирования до проведения специальных испытаний.

## 5.3. ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СИСТЕМЫ ПИТАНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ

Приведенные в гл. 4 уравнения движения среды применимы лишь для анализа течений в трубопроводах неизменного по длине сечения. Если магистраль выполнена составной из участков различного диаметра, то для согласования параметров потока в месте стыка при переходе от узкого сечения *1—1* в широкое сечение *2—2* следует установить дополнительные соотношения (рис. 5.2).

Если пренебречь теплообменом с окружающей средой в месте перехода и воспользоваться экспериментальным фактом равенства давлений в месте стыка для узкой и широкой труб, то уравнения неразрывности и изменения количества движения можно записать в виде (при условии равенства плотности в потоке до и после сечения перехода):

$$V_2 = V_1 \alpha^{-1}, \quad (5.53)$$

$$p_1 + \bar{\varrho} V_1^2 = \alpha(p_2 + \bar{\varrho} V_2^2) - p_1(\alpha - 1); \quad (5.54)$$

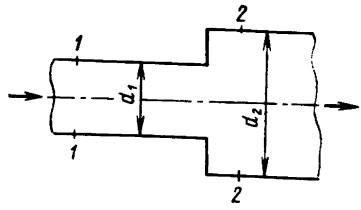
$$\alpha = (d_2/d_1)^2, \quad (5.55)$$

где $d_i$ — диаметр $i$-го трубопровода, $i = 1,2$; $p_1$, $\bar{\varrho}$, $V_i$ — давление, относительная плотность и скорость потока в $i$-м трубопроводе.

Из (5.53) и (5.54) получим взаимосвязь давлений до и после стыка трубопроводов

$$p_2 = p_1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} \bar{\varrho} V_1^2. \quad (5.56)$$

Рис. 5.2. Составная магистраль




Аналогичное соотношение справедливо для параметров на входе и выходе из агрегата, установленного в трубопроводе и оказывающего местное сопротивление движущемуся потоку жидкости. В этом случае коэффициент $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ в (5.56) должен быть заменен на коэффициент потерь на местном сопротивлении $\zeta/2$, который, как правило, зависит от параметров потока.

При расчетных исследованиях неустановившегося движения среды выражение (5.56) для взаимосвязи давлений до и после граничного сечения (место стыка трубопроводов, место установки клапанов, регуляторов и т. д.) используется совместно с зависимостями (5.4)—(5.8), записанными в сечениях трубопровода до и после граничного сечения.

*Глава 6*

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

## 6.1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ

Зависимости (4.24)—(4.28), описывающие движение двухфазной среды, представляют собой систему квазилинейных уравнений в частных производных, явное представление решений которых в виде рядов или интегралов даже при однородных краевых условиях практически невозможно. Такого типа решения можно получить либо для явлений, описываемых линеаризированными уравнениями движения с относительно простыми краевыми условиями, к которым применим интеграл Фурье, либо для изэнтропических течений среды и автомодельных движений, когда параметры, характеризующие состояние, меняются так, что распределение любого из этих параметров по координатам остается подобным самому себе. Очевидно, к этим классам не относятся явления, описываемые уравнениями (4.24)—(4.28) и краевыми условиями (5.1)—(5.8), (5.25)—(5.44), (5.50)—(5.56), так как эти зависимости нелинейны и включают в себя диссипативные силы, что приводит к возрастанию энтропии системы. Поэтому вполне естественным кажется применение приближенных разностных методов, с помощью которых можно получить таблицу значений искомого решения в некоторых точках полуполосы в плоскости $x$, $\tau$ ограниченной прямыми, проходящими через координаты граничных сечений рассматриваемой магистрали ($x=0$, $x=l$).

Одним из наиболее распространенных методов интегрирования систем уравнений типа (4.24)—(4.28) является метод характеристик, заключающийся в сведении дифференциальных уравнений в частных производных к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых разностным методом. Его характерной особенностью сравнительно с другими разностными методами является минимальное использование операторов интегрирования и связанная с этим максимальная близость области зависимости разностной схемы и области зависимости системы дифференциальных уравнений.

В связи с широкой распространенностью, наглядностью и удобством использования в ряде случаев исследований следует более подробно остановиться на физической сущности метода характеристик.

## 6.2. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

В потоке движущейся среды с нестационарным распределением параметров характерно получение фронта волны или фронта возмущения, при движении которого в течение бесконечно малого промежутка времени значения производных от параметров по координатам изменяются на конечную величину, что характеризует неоднозначность их определения. Это положение и является основным при выводе метода характеристик.

Пусть в некоторой области плоскости $x$, $\tau$ расположена некоторая гладкая кривая $C$. Поставим такой вопрос: в каком случае по значениям решения $p$, $\bar{\varrho}_{ж}$, $\bar{\varrho}_{г}$, $V_{ж}$, $V_{г}$ и т. д. системы уравнений (4.24) — (4.28) на кривой $C$ нельзя однозначно определить частные производные решения? Для этого перепишем систему уравнений (4.24)—(4.28) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{\varrho}_{ж}}{\partial \tau}+V_{ж}\frac{\partial \bar{\varrho}_{ж}}{\partial x}+\bar{\varrho}_{ж}\frac{\partial V_{ж}}{\partial x}=-I;\quad \frac{\partial \bar{\varrho}_{г}}{\partial \tau}+V_{г}\frac{\partial \bar{\varrho}_{г}}{\partial x}+\bar{\varrho}_{г}\frac{\partial V_{г}}{\partial x}=I;\\
&\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial \tau}+\frac{\partial \bar{\varrho}_{ж}}{\partial \tau}+\frac{\partial \bar{\varrho}_{г}}{\partial \tau}=0;\\
&\frac{\partial V_{ж}}{\partial \tau}+V_{ж}\frac{\partial V_{ж}}{\partial x}=-\frac{1-\varphi}{\bar{\varrho}_{ж}}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{R_1}{\bar{\varrho}_{ж}};\\
&\frac{\partial V_{г}}{\partial \tau}+V_{г}\frac{\partial V_{г}}{\partial x}=-\frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{г}}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{R_2}{\bar{\varrho}_{г}};
\end{aligned}\right\}\qquad (6.1)$$

где

$$R_1=\bar{\varrho}_{ж}g-(1-\varphi)\left[\lambda_{т}\frac{\varrho_{ж}V_{ж}^2}{2d_{т}}+I(V_{г}-V_{ж})+\frac{\varphi}{4/3\pi r_{*}^3}f_{*}\right];$$

$$R_2=\bar{\varrho}_{г}g-\varphi\left[\lambda_{т}\frac{\varrho_{ж}V_{ж}^2}{2d_{т}}+I(V_{г}-V_{ж})+\frac{1-\varphi}{4/3\pi r_{*}^3}f_{*}\right].$$

Значения частных производных на кривой $C$ связаны соотношениями (6.1) и следующим дифференциальным соотношением (где дифференциалы берутся вдоль кривой $C$):

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}\,d\tau+\frac{\partial f}{\partial x}\,dx=df, \tag{6.2}$$

где вектор $f$ содержит компоненты $f=(p, \bar{\varrho}_{ж}, \bar{\varrho}_{г}, V_{ж}, V_{г})$. Использовав соотношения (6.2), исключим из системы уравнений (6.1) неизвестные $\partial f/\partial\tau$ и получим следующую систему уравнений для отыскания производных $\partial f/\partial x$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(V_{ж}-\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{d\bar{\varrho}_{ж}}{dx}+\bar{\varrho}_{ж}\frac{\partial V_{ж}}{\partial x}=-I-\frac{d\bar{\varrho}_{ж}}{d\tau};\\
&\left(V_{г}-\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{\partial\bar{\varrho}_{г}}{\partial x}+\bar{\varrho}_{г}\frac{\partial V_{г}}{\partial x}=I-\frac{d\bar{\varrho}_{г}}{d\tau};\\
&\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial\varrho_{ж}}{\partial x}+\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial\bar{\varrho}_{г}}{\partial x}-\frac{1}{a^2}\frac{dx}{d\tau}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial\bar{\varrho}_{ж}}{d\tau}+\frac{d\bar{\varrho}_{г}}{d\tau}-\frac{1}{a^2}\frac{dp}{d\tau};\\
&\left(V_{ж}-\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{\partial V_{ж}}{\partial x}+\frac{1-\varphi}{\bar{\varrho}_{ж}}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{R_1}{\bar{\varrho}_{ж}}-\frac{dV_{ж}}{d\tau};\\
&\left(V_{г}-\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{\partial V_{г}}{\partial x}+\frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{г}}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{R_2}{\bar{\varrho}_{г}}-\frac{dV_{г}}{d\tau}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Обозначим матрицу коэффициентов системы (6.3) через $\Delta$, т. е.

$$\Delta=\begin{vmatrix}
V_{ж}-\frac{dx}{d\tau} & 0 & 0 & \bar{\varrho}_{ж} & 0\\
0 & V_{г}-\frac{dx}{d\tau} & 0 & 0 & \bar{\varrho}_{г}\\
\frac{dx}{d\tau} & \frac{dx}{d\tau} & -\frac{1}{a^2}\frac{dx}{d\tau} & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1-\varphi}{\bar{\varrho}_{ж}} & V_{ж}-\frac{dx}{d\tau} & 0\\
0 & 0 & \frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{г}} & 0 & V_{г}-\frac{dx}{d\tau}
\end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

Так как мы исходим из существования решения системы (6.3), определитель ее (6.4) должен быть равен нулю для получения бесконечного множества решений

$$\Delta=0. \tag{6.5}$$

В этом случае кривую $C$ на плоскости $x$, $\tau$ называют характеристикой системы (4.24) — (4.28).

Так как система (6.3) совместна, то и все определители, получающиеся заменой в $\Delta$ $k$-го столбца столбцом правых частей системы (6.3) должны также обращаться в нуль:

$$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_5=0. \tag{6.6}$$

Заменив первый столбец в (6.4) столбцом правых частей, получим

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -I d\tau - d\bar{\varrho}_{ж} & 0 & 0 & \bar{\varrho}_{ж} d\tau & 0 \\ I d\tau - d\bar{\varrho}_{г} & V_{г} d\tau - dx & 0 & 0 & \bar{\varrho}_{г} d\tau \\ d\bar{\varrho}_{ж} + d\bar{\varrho}_{г} - \frac{dp}{a^2} & dx & -\frac{dx}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{R_1}{\bar{\varrho}_{ж}} d\tau - dV_{ж} & 0 & \frac{1-\varphi}{\bar{\varrho}_{ж}} d\tau & V_{ж} d\tau - dx & 0 \\ \frac{R_2}{\bar{\varrho}_{г}} d\tau - dV_{г} & 0 & \frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{г}} d\tau & 0 & V_{г} d\tau - dx \end{vmatrix} = 0. \quad (6.7)$$

Таким образом, на характеристике $C$ решение $p$, $\bar{\varrho}_{ж}$, $\bar{\varrho}_{г}$, $V_{ж}$, $V_{г}$ связано двумя условиями (6.5) и (6.7), называемыми уравнениями характеристик.

Условие (6.5), где $\Delta$ определяется из (6.4), называют уравнением направления характеристики, а (6.7) — дифференциальным соотношением на характеристике. Их совместное рассмотрение обеспечивает при определенных условиях получение решения, при этом дифференциальные уравнения заменяют соответствующими конечно-разностными соотношениями. Однако сложность машинной логики при реализации метода характеристик на ЭВМ, особенно когда число направлений характеристик больше двух, и невозможность его применения при отсутствии характеристических многообразий, когда режим движения среды в магистралях установившийся, является серьезным препятствием его приложения к системе (4.24)—(4.28).

В последнее время для получения приближенного решения дифференциальных уравнений широко применяются методы конечных разностей или методы сеток, которые весьма универсальны и позволяют вычислять решение с заданной степенью точности.

### 6.3. МЕТОД СЕТОК И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

Существо метода конечных разностей состоит в том, что в рассматриваемой области плоскости $x$, $\tau$ вместо непрерывной среды, состояние которой описывается функциями непрерывного аргумента, вводится ее разностный аналог. При применении метода конечных разностей область непрерывного изменения аргументов $x$ и $\tau$ заменяется дискретным множеством точек, являющимся областью определения функций дискретного аргумента. Такое множество называется разностной сеткой, с координатами $x=i\Delta x$, $\tau=j\Delta\tau$, где шаги сетки $\Delta x$ и $\Delta\tau$ являются малыми положительными приращениями переменных $x$ и $\tau$. Здесь $i=0, 1, 2, ..., I$; $j=0, 1, 2...$ (рис. 6.1,*а*), $I=l/\Delta x$, $l$ — длина магистрали. Соответственно вместо функций не-

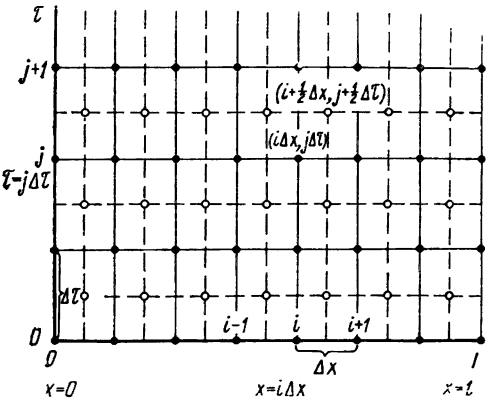



Рис. 6.1. Разностная сетка

прерывных аргументов $f(x, \tau)$ рассматриваются функции дискретных аргументов $f_i^j = f_i^j(i\Delta x, j\Delta\tau)$, определенные в узлах сетки $(i\Delta x, j\Delta\tau$ и называемые сеточными функциями.

Кроме основной сетки рассмотрим также вспомогательную сетку с узлами $[x=(i+0{,}5)\Delta x, \quad \tau=(j+0{,}5)\Delta\tau]$. Многочисленные исследования [53, 56, 58] показывают, что несмотря на кажущуюся, простоту вопрос о выборе сетки заслуживает внимания. С одной стороны, следует стремиться к уменьшению шагов в расчетной сетке и брать большое число узлов. С другой стороны, возможности ЭВМ по быстродействию и объему памяти вынуждают исследователей пользоваться сетками со сравнительно небольшим числом узлов. Поэтому выбор разумного компромисса, как правило, определяется опытом и интуицией тех, кто проводит счет.

Основные конечно-разностные формулы для частных производных, как правило, получают при помощи разложения в ряды Тейлора. В предположении непрерывности производных формы односторонних разностных представлений для первых производных $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial\tau$ можно вывести разложением в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа относительно точек с координатами

$$\left[x=\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta x,\ \tau=j\Delta\tau\right],\ \left[x=\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta x,\ \tau=\left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta\tau\right],\ [x=i\Delta x,\ \tau=j\Delta\tau]:$$

$$f\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta x,\ \left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta\tau\right]\equiv f^{j+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}=f^{j}_{i+\frac{1}{2}}+\frac{\Delta\tau}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)^{j}_{i+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right)^{j}_{i+\frac{1}{2}}+0(\Delta\tau^3);] \qquad (6.8)$$

$$f[i\Delta x,\ j\Delta\tau]\equiv f^j_i=f^{j}_{i+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{j}_{i+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{j}_{i+\frac{1}{2}}-$$

$$-0(\Delta x^3); \qquad (6.9)$$

$$f[(i+1)\Delta x,\ j\Delta\tau]\equiv f^j_{i+1}=f^{j}_{i+\frac{1}{2}}+\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{j}_{i+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{j}_{i+\frac{1}{2}}+0\ (\Delta x^3); \qquad (6.10)$$

$$f\left[\left(i+\frac{3}{2}\right)\Delta x,\ j\Delta\tau\right]\equiv f^j_{i+\frac{3}{2}}=f^j_{i+\frac{1}{2}}+\Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^j_{i+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^j_{i+\frac{1}{2}}+0(\Delta x^3); \qquad (6.11)$$

$$f\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta x,\ j\Delta\tau\right]\equiv f^j_{i-\frac{1}{2}}=f^j_{i+\frac{1}{2}}-\Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^j_{i+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^j_{i+\frac{1}{2}}-0(\Delta x^3); \qquad (6.12)$$

$$f\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta x,\ (j+1)\Delta\tau\right]\equiv f^{j+1}_{i+\frac{1}{2}}=f^j_{i+\frac{1}{2}}+\Delta\tau\left(\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)^j_{i+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta\tau^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right)^j_{i+\frac{1}{2}}+0(\Delta\tau^3); \qquad (6.13)$$

$$f\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta x,\ \left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta\tau\right]\equiv f^{j+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}=f^{j+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}-\Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{j+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{j+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}-0(\Delta x^3); \qquad (6.14)$$

$$f\left[i\Delta x,\ (j+1)\Delta\tau\right]\equiv f^{j+1}_i=f^j_i+\Delta\tau\left(\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)^j_i+\frac{1}{2}\Delta\tau^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right)^j_i+0(\Delta\tau^3); \qquad (6.15)$$

$$f\left[(i+1)\Delta x,\ j\Delta\tau\right]\equiv f^j_{i+1}=f^j_i+\Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^j_i+\frac{1}{2}\Delta x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^j_i+0(\Delta x^3), \qquad (6.16)$$

где $0(\Delta x^3)$ и $0(\Delta\tau^3)$ — остаточные члены порядка $\Delta x^3$ и $\Delta\tau^3$ относящиеся к членам, содержащим множители $\Delta x^3$, $\Delta x^4$, $\Delta x^5$, ..., $\Delta\tau^3$, $\Delta\tau^4$, $\Delta\tau^5$...

Разрешив (6.8), (6.14)—(6.16) относительно $\partial f/\partial\tau$ и $\partial f/\partial x$ получим

$$\frac{\partial f}{\partial\tau}=\frac{f^{j+1}_i-f^j_i}{\Delta\tau}-\frac{\Delta\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right)^j_i-0(\Delta\tau^2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f^j_{i+1}-f^j_i}{\Delta x}-\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^j_i-0(\Delta x^2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f^{j+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}-f^{j+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}+\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{j+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}}-0(\Delta x^2).$$

Ограничившись членами первого порядка малости по шагам сетки, получим разностные аналоги первых производных

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta \tau}; \tag{6.17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x}; \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \tag{6.19}$$

Использовав разложения (6.9) и (6.10) для определения функции $f_{i+\frac{1}{2}}^j$, из (6.8) получим еще одно приближение первой производной, которое используется при решении дифференциальных уравнений движения,

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{f_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^j + f_i^j\right)}{\Delta \tau/2}. \tag{6.20}$$

Конечно-разностные схемы могут быть двух существенно разных типов. К первому из них относятся так называемые явные или локальные схемы, которые для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} = 0 \tag{6.21}$$

в каждом узле сетки $(i\Delta x, j\Delta\tau)$ могут быть записаны в виде

$$b_1 f_i^{j+1} + b_2 f_i^j + b_3 f_{i-1}^j + b_4 f_{i+1}^j = 0, \tag{6.22}$$

где $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ — коэффициенты, зависящие от $\Delta x$ и $\Delta\tau$. Как видно, если известны значения функций на временном слое номера $j$, то по формуле (6.22) легко определяются от слоя к слою дискретные значения $f_i^{j+1}$ во всех узлах сетки $(i\Delta x, j\Delta\tau)$.

Ко второму типу относятся неявные схемы, которые приводят к необходимости решать системы большого числа алгебраических уравнений. Для уравнения (6.21) неявную схему можно представить в виде

$$b_1 f_{i-1}^{j+1} + b_2 f_i^{j+1} + b_3 f_{i+1}^{j+1} + b_4 f_i^j = 0.$$

Неявные схемы обладают лучшей устойчивостью по сравнению с явными схемами, особенно когда критерий Куранта

$$\frac{a\Delta\tau}{\Delta x} \leqslant 1{,}0 \tag{6.23}$$

нарушается для значительной области сетки [53, 55]. Однако применение таких схем существенно осложняется как алгебраическими трудностями, возникающими при линеаризации систем разностных уравнений, полученных из (4.24)—(4.28), так и чисто техническими обстоятельствами, обусловленными большой загрузкой памяти

ЭВМ. Поэтому если критерий Куранта нарушается только на сравнительно небольшой области сетки, то для одномерных задач выгоднее применять явные схемы, преимущественные по своей простоте.

Практика показывает, что для получения решения уравнений движения (4.24)—(4.28) приемлемо использовать явную схему с пересчетом типа «предиктор — корректор», аналогичную схеме, использованной в работе [58], которая для модельного уравнения (6.21) с учетом (6.17)—(6.20) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(f_{i+1}^{j} + f_{i}^{j}\right)}{\frac{\Delta\tau}{2}} + \frac{f_{i+1}^{j} - f_{i}^{j}}{\Delta x} = 0; \\ &\frac{f_{i}^{j+1} - f_{i}^{j}}{\Delta\tau} + \frac{f_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.24)$$

При использовании схемы (6.24) вначале по известным величинам на $j$-м временном слое производится определение функций на полуцелом слое $j+1/2$ из первого уравнения системы (6.24). Далее используется второе уравнение и определяются окончательные величины на $j+1$-м временном слое.

В конечно-разностной форме уравнения движения по схеме «предиктор» принимают вид

$$\frac{(\bar{\varrho}_{ж})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[(\bar{\varrho}_{ж})_{i+1}^{j} + (\bar{\varrho}_{ж})_{i}^{j}\right]}{0{,}5\Delta\tau} + \frac{(\bar{\varrho}_{ж}V_{ж})_{i+1}^{j} - (\bar{\varrho}_{ж}V_{ж})_{i}^{j}}{\Delta x} = \frac{I_{i+1}^{j} + I_{i}^{j}}{2}; \qquad (6.25)$$

$$\frac{(\bar{\varrho}_{г})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[(\bar{\varrho}_{г})_{i+1}^{j} + (\bar{\varrho}_{г})_{i}^{j}\right]}{0{,}5\Delta\tau} + \frac{(\bar{\varrho}_{г}V_{г})_{i+1}^{j} - (\bar{\varrho}_{г}V_{г})_{i}^{j}}{\Delta x} = \frac{I_{i+1}^{j} + I_{i}^{j}}{2}; \qquad (6.26)$$

$$\frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[p_{i+1}^{j} + p_{i}^{j}\right]}{0{,}5\Delta\tau} + \frac{(a^2)_{i+1}^{j} + (a^2)_{i}^{j}}{2} \frac{(\bar{\varrho}_{ж}V_{ж} + \bar{\varrho}_{г}V_{г})_{i+1}^{j} - (\bar{\varrho}_{ж}V_{ж} + \bar{\varrho}_{г}V_{г})_{i}^{j}}{\Delta x} = 0; \qquad (6.27)$$

$$\frac{(V_{ж})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[(V_{ж})_{i+1}^{j} + (V_{ж})_{i}^{j}\right]}{0{,}5\Delta\tau} + \frac{(V_{ж})_{i+1}^{j} + (V_{ж})_{i}^{j}}{2} \frac{(V_{ж})_{i+1}^{j} - (V_{ж})_{i}^{j}}{\Delta x} +$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1-\varphi_{i+1}^{j}}{(\bar{\varrho}_{ж})_{i+1}^{j}}+\frac{1-\varphi_{i}^{j}}{(\bar{\varrho}_{ж})_{i}^{j}}\right]\right\}\frac{p_{i+1}^{j}-p_{i}^{j}}{\Delta x}=g-\frac{1}{2}\left\{\left[(1-\varphi)\frac{\varrho_{ж}V_{ж}^{2}\lambda_{г}}{2d_{т}\bar{\varrho}_{ж}}+\right.\right.$$

$$+\frac{1-\varphi}{\bar{\varrho}_{ж}}(V_{г}-V_{ж})I+\left.\frac{\varphi(1-\varphi)}{4/3\pi r_{*}^{3}\bar{\varrho}_{ж}}f_{*}\right]_{i+1}^{j}+\frac{(1-\varphi)^{j}}{(\bar{\varrho}_{ж})_{i}^{j}}\left[\frac{\varrho_{ж}V_{ж}^{2}}{2d_{т}}+\right.$$

$$\left.\left.+I(V_{г}-V_{ж})+\frac{\varphi f_{*}}{4/3\pi r_{*}^{3}}\right]_{i}^{j}\right\};\qquad(6.28)$$

$$\frac{(V_{г})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left[(V_{г})_{i+1}^{j}+(V_{г})_{i}^{j}\right]}{0{,}5\Delta\tau}+\frac{(V_{г})_{i+1}^{j}+(V_{г})_{i}^{j}}{2}\frac{(V_{г})_{i+1}^{j}-(V_{г})_{i}^{j}}{\Delta x}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{г}}\right)_{i+1}^{j}+\left(\frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{г}}\right)_{i}^{j}\right]\frac{p_{i+1}^{j}-p_{i}^{j}}{\Delta x}=g-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{г}}\right)_{i+1}^{j}\left[\frac{\lambda_{т}\varrho_{ж}V_{ж}^{2}}{2d_{т}}+\right.\right.$$

$$+I(V_{г}-V_{ж})-\left.\frac{(1-\varphi)f_{*}}{4/3\pi r_{*}^{3}}\right]_{i+1}^{j}+\left(\frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{г}}\right)_{i}^{j}\left[\frac{\lambda_{т}\varrho_{ж}V_{ж}^{2}}{2d_{т}}+I(V_{г}-V_{ж})-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(1-\varphi)f_{*}}{4/3\pi r_{*}^{3}}\right]_{i}^{j}\right\}.\qquad(6.29)$$

Уточнение параметров на «целом» временном слое $j+1$ производится по схеме «корректор» [второе уравнение (6.24)]:

$$\frac{(\bar{\varrho}_{ж})_{i}^{j+1}-(\bar{\varrho}_{ж})_{i}^{i+1}}{\Delta\tau}+\frac{(\bar{\varrho}_{ж}V_{ж})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}-(\bar{\varrho}_{ж}V_{ж})_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}=-I_{i}^{j};\qquad(6.30)$$

$$\frac{(\bar{\varrho}_{г})_{i}^{j+1}-(\bar{\varrho}_{г})_{i}^{j}}{\Delta\tau}+\frac{(\bar{\varrho}_{г}V_{г})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}-(\bar{\varrho}_{г}V_{г})_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}=I_{i}^{j};\qquad(6.31)$$

$$\frac{p_{i}^{j+1}-p^{j}}{\Delta\tau}+(a^{2})_{i}^{j}\frac{(\bar{\varrho}_{ж}V_{ж}+\bar{\varrho}_{г}V_{г})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}-(\bar{\varrho}_{ж}V_{ж}+V_{г}\bar{\varrho}_{г})_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}=0;\qquad(6.32)$$

$$\frac{(V_{ж})_{i}^{j+1}-(V_{ж})_{i}^{j}}{\Delta\tau}+(V_{ж})_{i}^{j}\frac{(V_{ж})_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}-(V_{ж})_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}+\frac{1-\varphi_{i}^{j}}{(\bar{\varrho}_{ж})_{i}^{j}}\times$$

$$\times\frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}-p_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}=g-\left(\frac{1-\varphi}{\bar{\varrho}_{ж}}\right)_{i}^{j}\left[\frac{\varrho_{ж}V_{ж}^{2}}{2d_{т}}+I(V_{г}-V_{ж})+\frac{\varphi}{4/3\pi r_{*}^{3}}f_{*}\right]_{i}^{j};\qquad(6.33)$$

$$\frac{(V_г)_i^{j+1}-(V_г)_i^j}{\Delta\tau}+(V_г)_i^j\frac{(V_г)_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}-(V_г)_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}+\left(\frac{\varphi}{\varrho_г}\right)_i^j\times$$

$$\times\frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}-p_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}=g-\left(\frac{\varphi}{\varrho_г}\right)_i^j\left[\frac{\varrho_ж V_ж^2}{2d_т}+I(V_г-V_ж)-\frac{1-\varphi}{4/3\pi r_*^3}f_*\right]_i^j. \tag{6.34}$$

Кроме вопросов о методике построения разностных схем существует важный аспект, который должен учитываться при обосновании выбранной разностной схемы; решение разностных уравнений должно сходиться к решениям дифференциальных уравнений, которые они приближают. Обладание свойством сходимости является фундаментальным требованием, которое предъявляется к разностной схеме при численном решении. Если оно имеет место, то с помощью разностной схемы (6.25) — (6.34) можно вычислить решение с любой наперед заданной точностью, выбирая для этого значения шагов в расчетной сетке $\Delta\tau$ и $\Delta x$ достаточно малыми. К сожалению, сходимость схемы, как правило, трудно проверить теоретически, в особенности для нелинейных задач движения многофазных сред. Обычно для доказательства сходимости проверяют другое свойство схемы, называемой устойчивостью, так как согласно теореме Лакса об эквивалентности [53] сходимость следует из аппроксимации и устойчивости принятой разностной схемы.

## 6.4. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА СЕТОК

Так как использование сходимости решений разностных уравнений (6.25)—(6.34) к решениям дифференциальных (4.24)—(4.28) состоит в получении оценок для разности между ними, то необходимо определить понятие разности между решениями дифференциальных уравнений, т. е. функциями $f(x, \tau)$, определенными во всех точках полуполосы ($x=0$, $x=l$, $\tau=0$), и решениями разностных уравнений $f_i^j$, определенными только в конечном числе точек разностной сетки. Для этого каждой функции $f(x, \tau)$ в рассматриваемой полуполосе плоскости $x$, $\tau$ ставим в соответствии сеточную функцию $[f(x, \tau)]_i^j$, определенную только в точках той же сетки, что и решение разностных уравнений $f_i^j$. Соответствие устанавливаем сопоставлением каждой непрерывной функции $f(x, \tau)$ сеточной функции $[f(x, \tau]_i^j$, принимающей в точках сетки те же самые значения. В этом случае будем считать, что функции $[f(x, \tau]_i^j$ и $f_i^j$ лежат в одном функциональном пространстве, а разность между ними оценивается по норме этого пространства. Если соответствующую норму обозначить символом $\|\cdot\|$, то под близостью сеточной функции $f_i^j$ и функции $f(x, \tau)$ во всех точках сетки будем понимать малость величины

$$\|\cdot\|=\|f_i^j-[f(x, \tau)]_i^j\|. \tag{6.35}$$

Решения разностной и дифференциальной задач приближаются друг к другу тогда, когда величина $\|\cdot\|$ неограниченно уменьшается при бесконечном дроблении сетки.

Заменяя дифференциальный оператор разностным оператором, мы допускаем ошибку — погрешность аппроксимации, от величины которой будет зависеть точность решения разностной задачи.

Порядок точности и аппроксимацию, как это принято [53], будем оценивать по скорости убывания нормы $\| \ \|$, когда число точек разбиения в разностной сетке увеличивается. Для этого искомые функции $p$, $\bar{\varrho}_{ж}$, $\bar{\varrho}_{г}$, $V_{г}$, $V_{ж}$, входящие в уравнения (6.25)—(6.29), разложим в ряд Тейлора относительно точки с координатами $\left[x=\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta x,\ \tau=j\Delta\tau\right]$ согласно формулам (6.8)—(6.14). (Естественно предположить, что функции в окрестности данной точки имеют непрерывные частные производные всех порядков, которые встречаются в приводимых разложениях.). Ограничившись членами со вторыми производными, подставим полученные разложения в уравнения (6.25)—(6.29) и вычтем из полученных разностных уравнений соответствующие уравнения системы (4.24) — (4.28). В результате в точках сетки с «полуцелыми» точками получим следующие разности, которые приняты за норму $\| \cdot \|$:

$$\frac{\Delta\tau}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right)^{j+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta x}{4\sigma}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{j}_{i+\frac{1}{2}} + (\Delta x)^2 F^{j}_{i+\frac{1}{2}},$$

где под $f$ последовательно подразумеваются $\bar{\varrho}_{ж}$, $\bar{\varrho}_{г}$, $p$, $V_{ж}$, $V_{г}$; $F$ — функции от параметров, входящих в уравнения (6.25)—(6.29); $\sigma$ — соотношение шагов, $\sigma=\Delta\tau/\Delta x$.

Коэффициенты при $\Delta\tau$, $\Delta x$ и $\Delta x^2$ в этих разностях являются ограниченными, так как, по предположению, входящие в них частные производные непрерывны. Это обстоятельство символически выражается в следующем виде:

$$0(\Delta\tau)+0(\Delta x),\ \text{когда}\ \Delta\tau,\ \Delta x\to 0,$$

и истолковывается в том смысле, что разностная схема «предиктор» (6.25)—(6.29) аппроксимирует систему соответствующих дифференциальных уравнений с первым порядком точности по временной и пространственной переменными.

Проделав аналогичные разложения в точке с координатами $x=i\Delta x$, $\tau=j\Delta\tau$ [см. (6.15), (6.16)] и подставив их в разностные уравнения (6.30)—(6.34), получим, что соответствующая норма разности дифференциальных операторов системы (4.24)—(4.28) и разностных (6.30)—(6.34) будет равна

$$0(\Delta\tau)+0(\Delta x^2).$$

То есть разностные уравнения (6.30)—(6.34) уточняют систему (6.25)—(6.29) и аппроксимируют дифференциальные уравнения (4.24)—(4.28) с первым порядком точности по временной переменной и со вторым порядком точности по пространственной переменной. Очевидно, что определенные преимущества от разностной схемы (6.25)—(6.34) можно получить в задачах установления движения либо при исследовании стационарных течений, когда пропадают члены, содержащие производную по временной переменной.

## 6.5. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Устойчивость какой-либо принятой приближенной схемы в широком смысле слова состоит в том, что существуют пределы, которых не могут превзойти функции, преобразующиеся в процессе вычислений. Поэтому, когда говорят об устойчивости конкретного решения относительно малых возмущений, то имеют в виду, что эти возмущения, вносимые начальными и граничными условиями, будут затухать при $\Delta\tau$, $\Delta x\to 0$. Полагают, что исследуемые уравнения являются устойчивыми тогда и только тогда, когда это условие удовлетворяется для всех рассматриваемых $x$ и $\tau$. Это предположение основано на наблюдении, что в известных случаях неустойчивости быстрые колебания (как в пространстве, так и во времени) локально развиваются в окрестности той области, где

вышеупомянутое условие нарушается, а затем со временем возрастают, на что указано в работе [53]. При исследовании в качестве критерия устойчивости в задачах движения сплошных сред, как правило, пользуются критерием Неймана, выражающимся в том, что все собственные значения матрицы перехода $\boldsymbol{G}(\Delta\tau, \omega)$ при $\Delta\tau \to 0$, $\Delta x \to 0$ при всех действительных значениях $\omega$ будут лежать внутри единичного круга или на его границе, если система разностных уравнений (6.25)—(6.34) устойчива. Принятая на практике процедура исследования устойчивости уравнений типа (6.25)—(6.34) заключается в цепи упрощающих предположений, которые в конечном итоге завершаются гармоническим анализом устойчивости [56], при этом рассмотрение вопроса устойчивости связано с характером отношения величин $\Delta\tau$ и $\Delta x$ при их стремлении к нулю.

Для системы дифференциальных уравнений (4.24)—(4.28) предварительно получают линейные уравнения в вариациях, полагая вместо $\rho_ж$, $\rho_г$, $p$, $V_ж$, $V_г$ сумму $p+\tilde{p}$, $\rho_ж+\tilde{\rho}_ж$ и т. д., где величины со знаком $\sim$ суть малые величины 1-го порядка, а $\rho_ж$, $\rho_г$, $p$ и т. д. — постоянные значения и в уравнениях играют роль коэффициентов.

Для системы уравнений (6.1) обобщенное уравнение в вариациях запишем в виде

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} + A\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = B, \tag{6.36}$$

где $A$ — вектор-функция, включающая коэффициенты $V_ж$, $V_г$, $a^2$, $(1-\varphi)\rho_ж$, $\varphi\rho_г$; $B$ — вектор-функция правых частей уравнений (6.1).

Применим к линеаризованным уравнениям (6.36) разностную схему (6.24) и умножим полученные зависимости на $\Delta\tau$. Отбросив члены порядка $0(\Delta\tau)$ как бесконечно малые и оставив члены первого порядка, получим следующие выражения для связи величин на $j$-м и $(j+1)$-м временных слоях:

$$\left.\begin{aligned} 2\tilde{f}_i^{\,j+\frac{1}{2}} &= \tilde{f}^{\,j}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{f}^{\,j}_{i-\frac{1}{2}} - A\sigma\left(\tilde{f}^{\,j}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{f}^{\,j}_{i-\frac{1}{2}}\right); \\ \tilde{f}_i^{\,j+1} &= \tilde{f}_i^{\,j} - A\sigma\left(\tilde{f}^{\,j+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{f}^{\,j+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

Следуя результатам работы [53], будем считать, что точное решение разностных уравнений (6.37) может быть представлено в виде рядов Фурье, так что в точках сетки ($x=i\Delta x$, $\tau=j\Delta\tau$) это решение будет

$$\tilde{f}_i^{\,j} = \zeta^j \exp\left(\sqrt{-1}\omega i\Delta x\right), \tag{6.38}$$

где $\zeta$ и $\omega$ — некоторые константы, причем $\omega$ — целое число. Подставим в (6.37) выражение (6.38). Выбрав $\zeta$ так, чтобы уравнения (6.37) при этом удовлетворялись, получим

$$\zeta = 1 - 2(A\sigma)^2 \sin^2\frac{\omega\Delta x}{2} - \sqrt{-1}\sigma \sin\omega\Delta x, \tag{6.39}$$

откуда

$$\max_{\omega}|\zeta| = \sqrt{1-2(A\sigma)^2\left[1-(A\sigma)^2\right]}. \tag{6.40}$$

Условие устойчивости по Нейману требует, чтобы

$$\max|\zeta| \leqslant 1{,}0.$$

Очевидно, что неравенство удовлетворяется тогда, когда

$$\Delta\tau \leqslant \frac{\Delta x}{2A}. \tag{6.41}$$

При нахождении решения уравнений (6.25)—(6.34) в задачах движения многофазной смеси следует руководствоваться условием (6.41) для выбора шагов в расчетной сетке.

## 6.6. АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

При замене дифференциальных уравнений (4.24), (4.25) — (4.28) конечно-разностными (6.25)—(6.34) начальные условия (5.1) заменяются совокупностью дискретных значений вектор-функции $f(i\Delta x,\ j\Delta\tau)$ в точках ($x=i\Delta x,\ \tau=0$) сетки ($x=i\Delta x,\ \tau=j\Delta\tau$):

$$f(i\Delta x,\ 0)=[p,\ \bar{\varrho}_{\text{ж}},\ \bar{\varrho}_{\text{г}},\ V_{\text{ж}},\ V_{\text{г}} \text{ и т. д.}]_i^0. \tag{6.42}$$

В принципе абсолютно аналогичная аппроксимация применима была бы и для граничных условий, если бы они выражались полиномиальными зависимостями типа

при
$$x=l_N\quad f(l_N,\ \tau)=a_1+a_2\tau+a_3\tau^2+\ldots \tag{6.43}$$

Тогда разностное соотношение принимает вид

$$f(l_N,\ j\Delta\tau)=a_1+a_2j\Delta\tau+a_3(j\Delta\tau)^2+\ldots \tag{6.44}$$

Однако, как следует из зависимостей для граничных условий, приведенных в гл. 5, совокупность взаимосвязей параметров включает в себя дифференциальные операторы $\partial f/\partial\tau$ и $\partial\psi/\partial x$. В этом случае для аппроксимации пространственных производных можно воспользоваться интерполяционной формулой Лагранжа

$$\psi_n(x,\ \tau)=\sum_{n=0}^{m}\psi(x_n,\ \tau)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})\ldots(x-x_m)}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})\ldots(x_n-x_m)}, \tag{6.45}$$

а временные производные заменить разностными соотношениями

$$\frac{\partial f}{\partial\tau}\approx\frac{f_i^{j+1}-f_i^j}{\Delta\tau}. \tag{6.46}$$

Если в граничном условии используется зависимость параметров, описываемая уравнением типа

$$\frac{\partial f}{\partial\tau}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=\omega, \tag{6.47}$$

то разностное соотношение для функции $f(l_N,\ i\Delta\tau)$ в точке сетки ($x=l_N,\ \tau=i\Delta\tau$) с учетом (6.45) и (6.46) может быть записано в виде [ограничиваясь вторым порядком точности для формулы Лагранжа (6.45)]:

$$f_N^{j+1}=f_N^j-\frac{\Delta\tau}{2\Delta x}\left(\psi_{N-2}^j-4\psi_{N-1}^j+3\psi_N^j\right)+\omega_N^j\Delta\tau, \tag{6.48}$$

где $N$ — номер точки в сетке, соответствующий $x=l_N$, $N=\dfrac{l}{\Delta x}+1$. Соотношения (6.42), (6.43) и (6.48) позволяют использовать краевые условия для расчета параметров движущейся среды методом сеток.

Использовав зависимости типа (6.43) и (6.44), приведем граничные условия для сечения $x=0$ (точки расчетной сетки $i=1,\ j$) в месте стыка трубопровода

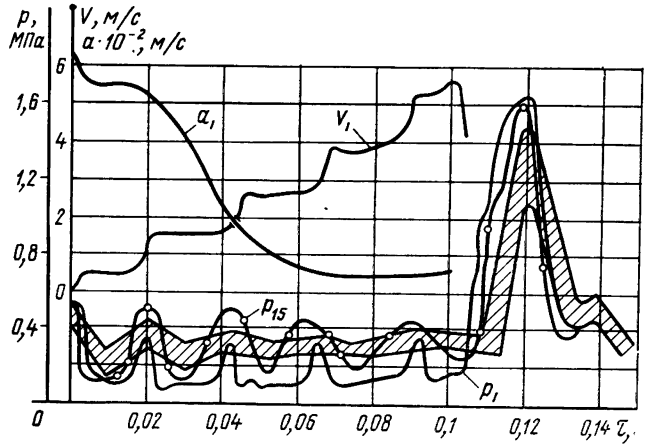



Рис. 6.2. Изменение параметров двухфазной среды при заполнении магистрали ($C_\infty = 0{,}5$ г/л, $t = 15°$ С)

с баком (5.3)—(5.8) к виду, удобному для процедуры счета и нахождения решений уравнений (4.24)—(4.28):

при $x = 0$ $(i = 1)$

$(\tau > 0)$

$$p_1^{j+1} = p_6^{j+1} + \left(\bar{\varrho}_{\text{ж}} + \bar{\varrho}_{\text{г}}\right)_1^{j+1} hgn_x - \frac{1-\zeta}{2}\left[\frac{\left(\bar{\varrho}_{\text{ж}} V_{\text{ж}} + \bar{\varrho}_{\text{г}} V_{\text{г}}\right)^2}{\bar{\varrho}_{\text{ж}} + \bar{\varrho}_{\text{г}}}\right]_i^j; \qquad (6.49)$$

$$(V_{\text{ж}})_1^{j+1} = (V_{\text{ж}})_1^j + \frac{\sigma}{2}\left\{(V_{\text{ж}})_1^j\left[(V_{\text{ж}})_3^j - 4\,(V_{\text{ж}})_2^j + 3\,(V_{\text{ж}})_1^j\right] + \left(\frac{1-\varphi}{\bar{\varrho}_{\text{ж}}}\right)_1^j \times\right.$$

$$\left.\times\left(p_3^j - 4p_2^j + 3p_1^j\right)\right\} + \Delta\tau\left\{g - \left(\frac{1-\varphi}{\bar{\varrho}_{\text{ж}}}\right)_1^j\left[\lambda_{\text{т}}\frac{\varrho_{\text{ж}} V_{\text{ж}}^2}{2d_{\text{т}}} + I\left(V_{\text{г}} - V_{\text{ж}}\right) + \frac{\varphi}{4/3\pi r_*^3} f_*\right]_1^j\right\}; \qquad (6.50)$$

$$(V_{\text{г}})_1^{j+1} = (V_{\text{г}})_1^j + \frac{\sigma}{2}\left\{(V_{\text{г}})_1^j\left[(V_{\text{г}})_3^j - 4\,(V_{\text{г}})_2^j + 3\,(V_{\text{г}})_1^j\right] + \left(\frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{\text{г}}}\right)_1^j \times\right.$$

$$\left.\times\left[p_3^j - 4p_2^j + 3p_1^j\right]\right\} + \Delta\tau\left\{g - \left(\frac{\varphi}{\bar{\varrho}_{\text{г}}}\right)_1^j\left[\lambda_{\text{т}}\frac{\varrho_{\text{ж}} V_{\text{ж}}^2}{2d_{\text{т}}} + I\left(V_{\text{г}} - V_{\text{ж}}\right) - \frac{1-\varphi}{4/3\pi r_*^3} f_*\right]_1^j\right\}; \qquad (6.51)$$

$$\left(\bar{\varrho}_{\text{ж}}\right)_1^{j+1} = \left(\bar{\varrho}_{\text{ж}}\right)_1^j + \frac{\sigma}{2}\left[\left(\bar{\varrho}_{\text{ж}} V_{\text{ж}}\right)_3^j - 4\left(\bar{\varrho}_{\text{ж}} V_{\text{ж}}\right)_2^j + 3\left(\bar{\varrho}_{\text{ж}} V_{\text{ж}}\right)_1^j\right] + \Delta\tau I; \qquad (6.52)$$

$$\left(\bar{\varrho}_{\text{г}}\right)_1^{j+1} = \left(\bar{\varrho}_{\text{г}}\right)_1^j + \frac{\sigma}{2}\left[\left(\bar{\varrho}_{\text{г}} V_{\text{г}}\right)_3^j - 4\left(\bar{\varrho}_{\text{г}} V_{\text{г}}\right)_2^j + 3\left(\bar{\varrho}_{\text{г}} V_{\text{г}}\right)_1^j\right] - \Delta\tau I, \qquad (6.53)$$

где $\sigma = \Delta\tau/\Delta x$.

Зависимости (6.49)—(6.53) аппроксимированы по явной конечно-разностной схеме. Аналогичным образом приводятся к разностному виду и остальные граничные условия, отмеченные в гл. 5. Конечно-разностные уравнения (6.25)—(6.34) и граничные условия дают возможность найти решение для различных задач неустановившегося движения многофазных сред.

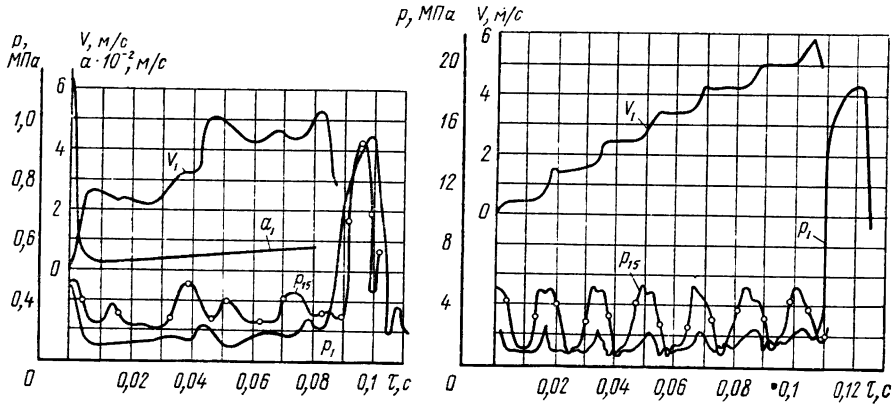



Рис. 6.3. Равновесное заполнение магистрали двухфазной средой ($C_\infty = 0{,}5$ г/л, $t = 15°$ С)

Рис. 6.4. Нестационарное течение однофазной жидкости ($C_\infty = 0$, $a = 630$ м/с)

Приведенные выше зависимости использовались для оценки влияния растворенного газа на параметры движущейся жидкости в системе, представленной на рис. 5.1 (см. [14]).

Результаты расчета изменения давления $p$, скорости смеси $V$ и скорости распространения малых возмущений $a$ приведены на рис. 6.2—6.4 для трех случаев течения. Первый случай на рис. 6.2 соответствует движению двухфазной смеси с начальными параметрами: плотность смеси $\bar{\varrho} = 1{,}4$ г/см³, концентрация газа (воздуха в жидкости) $C_\infty = 0{,}5$ г/л, жидкость — азотный тетраксид. На рис. 6.3 приведено изменение параметров при равновесном движении среды, когда концентрация газа в жидкости $C$ соответствует парциальному давлению $p_г$. Для сравнения на рис. 6.4 даны результаты для течения однородной жидкости с плотностью $\bar{\varrho} = 1{,}4$ г/см³ без учета газовыделения. На рис. 6.2—6.4 параметры с индексом *15* относятся к среднему по длине сечению трубопровода, с индексом *1* — к сечению в конце трубопровода.

Во всех случаях было принято, что длина магистрали от бака до пускового клапана $l_1 = 5$ м, расстояние от клапана до сечения *б—б*, где установлен шнекоцентробежный насос $l_б = 0{,}3$ м.

В начальный момент $\tau = 0$ открывается пусковой клапан отделяющий газовую среду в магистрали $l_б$ от жидкости, находящейся под суммарным давлением в баке $p_б = 0{,}51$ МПа, и жидкая среда приходит в движение с последующим гидроударом (см. рис. 6.2—6.4) в момент подхода к насосу в сечении *б—б* (момент времени $\tau = 0{,}10 \ldots 0{,}12$ с).

Анализ результатов, приведенных на рис. 6.2—6.4, показывает, что насыщение жидкости газом несколько уменьшает время заполнения магистрали и скорость жидкости в момент подхода фронта к насосу (сечение *б—б*), что приводит к снижению гидравлического удара и увеличению времени его формирования. При этом чем сильнее насыщена газом жидкость, тем меньше среднее по длине трубопровода значение скорости распространения малых возмущений к моменту полного заполнения трубопровода жидкостью.

Для качественной оценки характера изменения параметров в системе питания ЖРД при заполнении трубопроводов двухфазной средой иногда бывает целесообразно использовать упрощенные методы исследований. Один из таких методов разработан при участии авторов и изложен в работе [40].

Взаимовлияние трубопровода питания и шнекоцентробежного насоса, работающего в режиме частичной кавитации на переходном режиме после заполнения трубопровода и насоса, исследовалось с привлечением системы уравнений (6.25)—(6.34) и граничных условий (6.49)—(6.53), (5.50)—(5.52), аппрок-

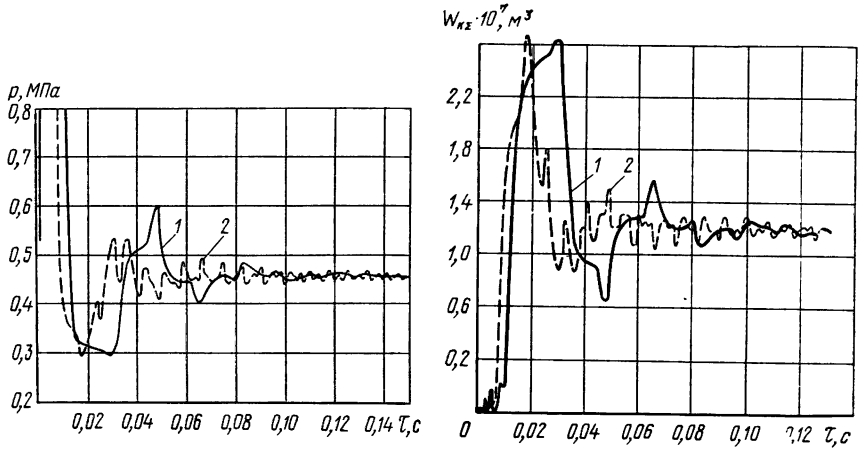



Рис. 6.5. Изменение давления на входе в насос при выходе на режим:
*1*—с газовыделением; *2*—без газовыделения

Рис. 6.6. Изменение объема кавитационной полости в проточной части насоса:
*1*—с газовыделением; *2*—без газовыделения

симированных конечно-разностными зависимостями, аналогичными зависимостям (6.49)—(6.53).

Результаты расчета изменения давления на входе в насос $p_1$ и объема кавитационной полости $W_{к\Sigma}$ для течения двухфазной и однофазной среды ($C_\infty$=0,5 кг/м³ и $C_\infty$=0) приведены на рис. 6.5, 6.6. Анализ показывает, что наличие растворенного газа в жидкости задерживает время установления режима работы системы и снижает частоту колебаний.

*Глава 7*

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ ПИТАНИЯ

## 7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ УСТАНОВКИ

При подготовке и проведении экспериментальных работ ставились следующие задачи:

1. Показать, что нестационарные процессы в системах питания с насыщенными газом жидкостями создают условия для выделения растворенного газа и образования газожидкостных потоков.

2. Показать степень влияния свободного газа в потоке на динамические характеристики систем питания.

3. Подтвердить гипотезу об определяющей роли микротрещин в стенках трубопроводов как первичных центров образования двухфазного потока.

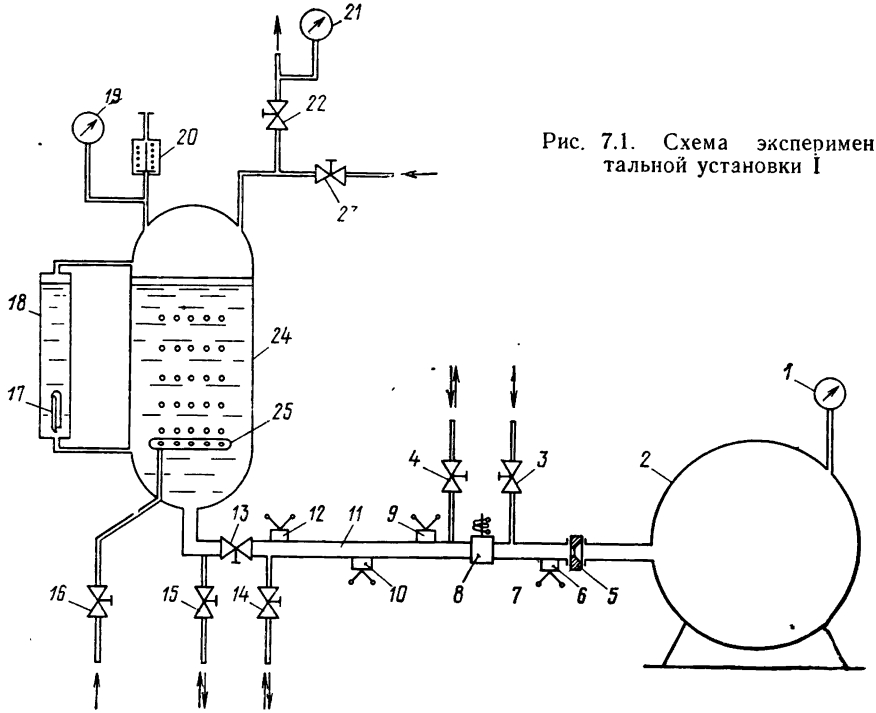



Рис. 7.1. Схема экспериментальной установки I

Для проведения работ были использованы две экспериментальные установки, схемы которых представлены на рис. 7.1. Первая установка представляет собой часть системы питания ЖРД малой тяги, состоящей из трубопровода *11*, пускового клапана *8*, трубопровода *7*, имитирующего заполняемый объем двигателя, и дроссельной шайбы *5*, имитирующей гидравлические сопротивления трактов двигателя. Трубопроводы *11* и *7* располагались горизонтально и были выполнены из коррозионно-стойкой стали 12Х18Н9Т. От питающей емкости *24* система питания отделялась вентилем *13*. Заправка емкости *24* жидкостью производилась при закрытом вентиле *13* через заправочный вентиль *15*, уровень заправки контролировался с помощью мерного стекла *18*. Предварительная деаэрация жидкости производилась в емкости путем создания разрежения в свободном объеме над жидкостью. Подключение вакуумнасоса осуществлялось через дренажный вентиль *22*, а контроль давления в емкости производился с помощью мановакуумметра *21*. После окончания деаэрации для контроля емкость выдерживалась под вакуумом в течение 1 ч.

Насыщение жидкости газом также производилось в емкости *24* методом Барботажа. Газ подавался через вентиль *16* в расположенный в емкости коллектор *25*. Заданное давление насыщения в емкости в течение всего процесса поддерживалось настройкой предохранительного клапана *20* или настройкой степени открытия

вентилей *16* и *22*. Замер давления обеспечивался манометром *19*. Контроль насыщения жидкости до равновесного состояния осуществлялся двумя способами. Сначала после окончания насыщения производился сброс давления из емкости на $(0{,}2 \ldots 0{,}3) \cdot 10^5$ Па через вентиль *22*. Если через 10—15 мин давление, при котором велось насыщение, восстанавливалось и не менялось в течение 30 мин, то процесс насыщения считался законченным. После этого к вентилю *15* подсоединился пробоотборник, производилось взятие пробы жидкости, анализ которой хромотографическим методом позволял определить количество растворенного в жидкости газа.

Объем емкости *24* составлял 0,05 м$^3$. Обычная доза заправки равнялась 2/3 объема емкости. Деаэрация такого количества жидкости занимала 3—4 ч, насыщение до равновесной концентрации — 5—6 ч: Стендовые системы позволяли обеспечивать поддержание давления в емкости 24 до $15 \cdot 10^5$ Па. После подготовки жидкости в емкости *24* (деаэрация, насыщение) через вентиль *13* производилось заполнение магистрали питания *11*. При работе с деаэрированной жидкостью перед заполнением трубопровод *11* вакуумировался через вентиль *14*. В случае заполнения трубопровода *11* насыщенной жидкостью в нем сначала устанавливалось давление, превышающее давление в емкости, а следовательно, и давление насыщения на $(0{,}3 \ldots 0{,}5) \cdot 10^5$ Па, а затем уже производилось заполнение жидкостью при осторожном дренировании газа через вентиль *14* с последующим проливом через систему некоторого количества жидкости. При этих операциях падение давления в системе ниже давления насыщения не допускалось.

В некоторых случаях после заполнения системы питания производилась ее выдержка под рабочим давлением, которое могло и превышать давление насыщения. Для подачи газа наддува и контроля давления в емкости использовались вентиль *23* и манометр *19*. Продолжительность выдержки составляла обычно 2 ... 4 ч. Для контроля роста пузырьков на стенках трубопроводов при выдержке системы в мерное стекло *18* помещался элемент трубопровода *17* из того же материала, что и трубопровод *11*, за которым и велись визуальные наблюдения.

Собственно эксперимент проводился следующим образом. Подавались команды на включение измерительной аппаратуры и открытие пускового клапана *8*. Начиналось неустановившееся движение жидкости по трубопроводу *11*, заполнение магистрали *7* до дроссельной шайбы *5*. Время открытия пускового клапана составляло 0,005—0,01 с. В зависимости от условий эксперимента иногда перед его началом производилось вакуумирование магистрали *7* до давления $10^{-7}$ Па.

Эксперимент заканчивался закрытием клапана *8* и включением измерительной аппаратуры. Неустановившиеся процессы в системе питания, обусловленные распространением волн давления при открытии клапана *8*, заполнением магистрали *7* и гидравлическим ударом о дроссельную шайбу *5*, регистрировались с помощью малоинерционных преобразователей давления *6, 9, 10, 12* через согла-

сующие устройства на шлейфовые осциллографы. Частоты фиксируемых процессов не превышали 100 Гц.

После окончания эксперимента вентиль *13* закрывался и через вентили *14, 4* производился слив жидкости из магистрали *11* с последующей просушкой горячим газом. В этих же целях для трубопровода *7* использовался вентиль *3*. Для обеспечения вакуума в трубопроводе *7* до и в процессе эксперимента трубопровод подключался к барокамере *2* объемом 3 м$^3$. Разрежение создавалось в ней перед экспериментами специальными насосами. Контроль давления осуществлялся мановакуумметром *1*.

Вторая экспериментальная установка (рис. 7.2) также представляла собой систему питания ЖРД, но имела три существенных отличия от первой: вертикальное расположение трубопровода питания *21*, больший диаметр проходного сечения и другой материал стенок (алюминиевый сплав АМг6). Кроме трубопровода *21* в систему питания входил мембранный пусковой клапан *28*, а также трубопровод *31* с дроссельной шайбой *32*, имитирующие заполняемые объемы и гидравлическое сопротивление трактов двигателя. Подача жидкости в систему осуществлялась из емкости *19*, уровень в которой контролировался с помощью мерного стекла *18*, соединенного с емкостью *19* через вентили *17* и *22*. Подготовка рабочей жидкости (деаэрация, насыщение) осуществлялись в отдельной емкости *41*, заправка которой производилась через вентиль *43*. Уровень в емкости контролировался с помощью мерного стекла *34*, соединенного с емкостью *41* через вентили *35* и *33*.

Для насыщения жидкости газом использовался установленный внутри емкости коллектор *42*, через отверстия в котором при открытии вентиля *44* в заправленную жидкость емкости подавался газ. Заданное давление насыщения в емкости *41* поддерживалось или настройкой предохранительного клапана *38* или регулированием расхода газа с помощью дренажного вентиля *40*. Контроль давления производился с помощью манометра *36* и датчика *39*. Контроль окончания насыщения осуществлялся теми же методами, что и на первой установке. Отбор проб осуществлялся через вентиль *45*.

Емкости *12* и *41* имели объемы по 0,2 м$^3$ каждая. Обычная доза заправки — 1/3 емкости. Деаэрация такого объема водопроводной воды занимала около 6 ч, такое же время уходило на насыщение в диапазоне давлений $(2 \ldots 10) \cdot 10^5$ Па. Вообще же стендовые системы позволили обеспечивать рабочее давление в системах до $15 \cdot 10^5$ Па.

После подготовки жидкости в емкости *41* производилось ее передавливание в емкость *12* и заполнение системы питания *21*. В случае заправки деаэрированной жидкости сначала на емкости *19* открывался дренажный вентиль *10* и при закрытом вентиле *13* с помощью редуктора *15* через вентиль *37* производился наддув емкости *41* до давления $(0{,}7 \ldots 1{,}2) \cdot 10^5$ Па. Затем открывался вентиль *27* и производилось заполнение системы питания *21* и емкости *19*. По заполнении системы вентили *10, 37, 27* закрывались, а *13* открывался.

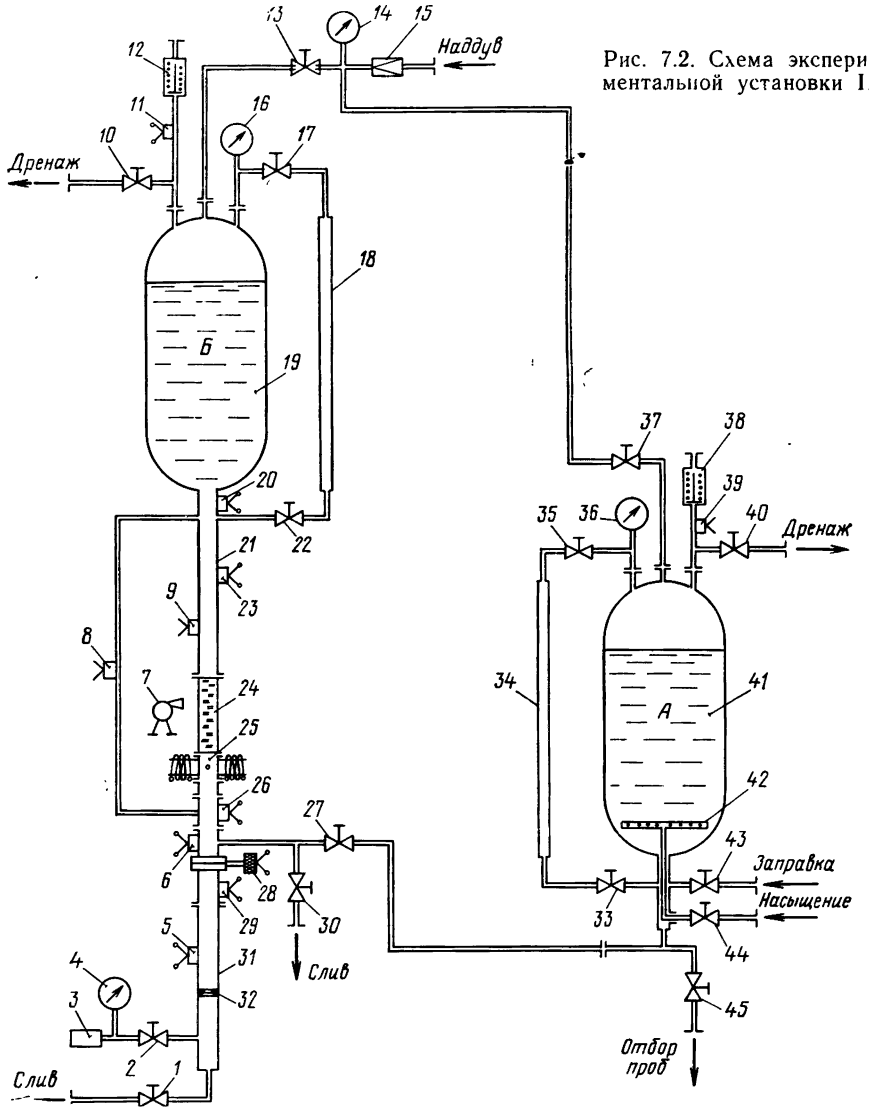



Рис. 7.2. Схема экспериментальной установки II

В случае заправки в систему насыщенной жидкости емкость *19* с помощью редуктора *15* через вентиль *13* наддувалась до давления, на $(0{,}3 \ldots 0{,}5) \cdot 10^5$ Па превышающего давления насыщения. Затем вентиль *13* закрывался и через вентиль *37* производился наддув емкости *41* до давлений, превышающего на $(0{,}7 \ldots 1{,}2) \cdot 10^5$ Па давление в емкости *19*. Заполнение системы питания *21* и емкости *19* осуществлялось при плавном открытии вентиля *27* и поддержании в емкостях *19* и *41* указанных выше давлений. Заправка прекращалась закрытием вентиля *27*. Иногда после заполнения жидкостью системы питания *21* и емкости *19* проводилась двух-трехчасовая

выдержка системы под давлением заправки или под рабочим давлением. Наддув емкости *19* до рабочего давления осуществлялся также с помощью редуктора *15* через вентиль *13*. Контроль давления производился манометрами *16, 14*. Давление насыщения в емкости поддерживалось настройкой предохранительного клапана *12*.

Процедура проведения эксперимента на установке II была идентичной процедуре на установке I. Подавались команды на включение измерительной аппаратуры и подрыв пиропатрона открытия пускового клапана *28*. Время открытия клапана *28* составляло 0,005—0,01 с. Начиналось неустановившееся движение жидкости в магистрали *21* и заполнение трубопровода *31* до дроссельной шайбы *32*. Стендовые системы позволяли перед началом эксперимента обеспечивать в магистрали *31* разряжение до $10^{-7}$ Па. Продолжительность эксперимента и регистрации параметров определялась временем заполнения жидкостью трубопровода *31* и затуханием колебаний давления в системе питания, вызванных гидроударом о дроссельную шайбу *32*. Обычно это время не превышало 1 с. Как и на установке I изменение давлений в системе при нестационарных процессах фиксировалось малоинерционными преобразователями давления *5, 6, 9, 20, 23, 26, 29* с регистрацией на шлейфовые осциллографы. Изменение давления в емкости *19* фиксировалось потенциометрическим преобразователем *11*, а изменение перепада давлений на магистрали *21* — преобразователи перепада *38*. Изменение скорости потока на среднем участке системы фиксировалось малоинерционным расходомером *25* индукционного типа. В некоторых случаях в систему питания *21* вмонтировалась прозрачная вставка *24*; через которую с помощью скоростной кинокамеры *7* осуществлялась съемка структуры потока. После окончания эксперимента проводился слив жидкости из системы через вентили *1*, *30* с последующей просушкой магистралей горячим воздухом.

Для обеспечения разрежения в магистрали *31* перед испытанием к ней подстыковывался резервуар объемом 0,05 м$^3$, который предварительно вакуумировался вакуум-насосом *3* через вентиль *2*. Контроль давления при этом осуществлялся мановакуумметром *4*.

### 7.2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эксперименты на установках начинаются с определения так называемой опорной скорости звука системы, т. е. скорости распределения упругих возмущений при отсутствии в системе свободных газовых включений. Для этого производится предварительная деаэрация рабочей жидкости и вакуумирование системы питания пускового клапана с целью очистки микропор стенок трубопровода от газа. Вакуумирование магистрали осуществляется обычными промышленными вакуум-насосами до уровня не ниже $1 \cdot 10^2$ Па. Заправка магистралей питания деаэрированной жидкостью проводится под вакуумом. После этого для получения большей гарантии отсутствия свободного газа в жидкости и микропорах системы в течение 2—3 ч выдерживается под максимально возможным давле-

нием. На описанных установках оно не превышало $15 \cdot 10^5$ Па. Указанная процедура подготовки системы к работе, хотя и весьма трудоемка, но достаточно эффективна. Затем производится собственно эксперимент. В баке устанавливается заданное рабочее давление, вакуумируется пространство за пусковым клапаном и подается команда на его открытие. Система изменений регистрирует колебания давления в различных точках магистралей питания при заполнении жидкостью имитатора двигателя и гидравлическом ударе о дроссельную шайбу.

Скорость звука в системе определяется по задержкам в показаниях малоинерционных преобразователей давления, установленных в различных фиксированных точках системы; при прохождении этих точек волны разрежения, вызванной открытием пускового клапана, $a = \Delta L/\Delta\tau$, где $\Delta L$ — расстояние между преобразованием; $\Delta\tau$ — время задержки начала прохождения волны разрежения в указанных точках, а также по частоте акустических колебаний давления $a = 2L/T$, где $L$ — длина системы питания от емкости до пускового клапана; $T$ — период колебаний давления. Для уменьшения погрешности первого метода скорость протяжки регистрирующих осциллографов выбирается около 1 м/с, а в трубопроводы устанавливаются преобразователи одного рабочего диапазона, которые заводятся на шлейфы одинакового типа, причем масштаб тарировки преобразователей одинаков. Таким образом, например, при расстоянии между преобразователями около 5 м и средней скорости звука 500 м/с расстояние на осциллограмме между началом свала давления от прохождения волны разрежения в указанных точках составляет 0,01 м, что при расшифровке и соблюдения всех указанных выше условий дает весьма удовлетворительную погрешность определения скорости звука.

При оценке скорости звука по периодам акустических колебаний основная погрешность метода набирается из-за незнания текущего значения длины столба жидкости. Длина столба принимается постоянной, равной расстоянию между баком и пусковым клапаном, а длиной от пускового клапана до фронта жидкости пренебрегают ввиду ее малости по сравнению с длиной основного трубопровода. В описанных установках при протяженности основного трубопровода 10 м и расстоянии от клапана до фронта 0,25 м такое допущение увеличивает погрешность определения скорости звука на 3%. Суммарная погрешность этого метода также не превышает 5%.

Проведенные и обработанные таким образом эксперименты дают опорные скорости распространения малых возмущений в системах питания (м/с), весьма близкие к значениям, определенным по известной формуле Жуковского (табл. 7.1).

Для повышения чистоты эксперимента системы питания должны собираться с минимальным числом стыков, поворотов, без вставок из других материалов, компенсаторов и других упругих элементов, искажающих картину распространения возмущений.

Следующий цикл экспериментов проводится при заправке систем питания без их предварительного вакуумирования. Заполнение

Таблица 7.1

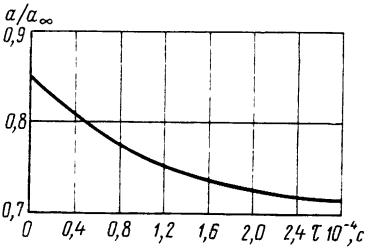
| | Трубопровод из алюминиевого сплава АМГ+6 $d=0{,}05$ м, $\delta=0{,}003$ м | | Трубопровод из стали 12Х18Н9Т $d=0{,}012$ м, $\delta=0{,}003$ м | |
|---|---|---|---|---|
| | вода | этиловый спирт | вода | этиловый спирт |
| Расчет | 1100 | 1040 | 1440 | 1160 |
| Эксперимент | 1050 | 1000 | 1380 | 1100 |

системы производится жидкостями, насыщенными до равновесных концентраций в диапазоне давлений $(2 \ldots 10) \cdot 10^5$ Па. Правда, на установке I (см. рис. 7.1), трубопроводы системы питания которой располагаются горизонтально, для исключения запирания в системе случайных объемов газа заправка иногда производилась, как и ранее, под вакуум деаэрированной жидкостью. Последняя затем замещалась насыщенной жидкостью под давлением, несколько превышающем давление насыщения.

На установке II, трубопроводы системы питания которой располагаются вертикально, имитируется процедура заправки топливом реальных энергетических установок, т. е. насыщение жидкости проводится в отдельной емкости, затем при давлении в установке несколько большем, чем давление насыщения, происходится передавливание жидкости в систему питания и бак. При этом в микротрещинах стенок трубопроводов заправляемой жидкостью запирается определенный объем газа. Системы питания выдерживаются при давлении хранения, близком к давлению насыщения в течение нескольких часов.

Далее проводятся эксперименты, при обработке результатов которых рассматриваются два момента: изменения скорости распространения малых возмущений и других параметров системы от степени насыщения жидкости, выдержки после насыщения и рабочего давления в период, когда уровень давления в магистралях не падает ниже давления насыщения, и изменение этих же параметров при падении уровня давления ниже давления насыщения.

Обработка результатов эксперимента показала, что в случае заправки системы питания насыщенной газом жидкостью скорость распространения переднего фронта волны разрежения, вызванного открытием пускового клапана, оказывается ниже расчетной, хотя жидкость в системе все время находится под давлением, превышающим давление насыщения. Полученные результаты подтверждают высказанное выше предположение о том, что при нахождении жидкости в сисгеме питания под давлением хранения диффузионный поток массы газа из жидкости в газовые объемы микропор стенок трубопроводов приводит к росту этих газовых объемов, пока не устанавливается равновесие концентраций газа, растворенного в основной массе жидкости и на границах поверхности раздела газ—жидкость.



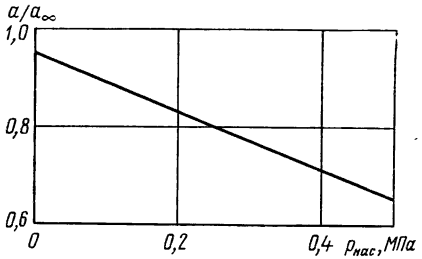




Рис. 7.3. Влияние на скорость распространения малых возмущений времени выдержки системы под давлением хранения (вода — азот)

Рис. 7.4. Изменение скорости распространения малых возмущений от давления насыщения (вода — азот)

При проведении испытаний было установлено также влияние на скорость распространения малых возмущений времени выдержки заправленной системы под давлением хранения (рис. 7.3). Получена также экспериментальная зависимость скорости распространения малых возмущений от давления насыщения, определяющего концентрацию растворенного в воде воздуха (рис. 7.4).

Экспериментальные данные, полученные на описанных установках и ряде других при испытаниях гидравлических линий в диапазоне внутренних диаметров трубопроводов 0,012—0,18 м на рабочих жидкостях — воде, азотном тетраксиде и спирте, насыщенных воздухом или азотом до равновесных концентраций при давлении хранения, были обработаны по зависимости (3.48). Результаты обработки (см. рис. 3.10) показывают, что коэффициент пропорциональности (нулевая пустотность) в выражении (3.48) может быть принят равным $K_f \approx 10^{-5}/d$ ($d$ в метрах). Это позволяет производить по зависимости (3.45) оценку скорости распространения малых возмущений в гидравлических линиях, заполненных жидкостью с растворенным газом.

Полученные зависимости показывают, что степень снижения скорости распространения малых возмущений возрастает с ростом концентрации растворенного в жидкости газа, с уменьшением диаметра трубопровода и уровня давления в нем.

Далее при экспериментах рассматривался процесс неустановившегося движения при заполнении жидкостью трубопровода между пусковым клапаном и дроссельной шайбой, имитирующей гидравлическое сопротивление насоса или двигателя. На рис. 7.5, 7.6, где представлены осциллограммы записи изменения давления в различных точках системы питания при экспериментах, процесс заполнения занимает промежуток времени $\tau_2$—$\tau_1$. Это период времени, когда в потоке наблюдаются интенсивные волновые процессы, вызванные волной разрежения при открытии пускового клапана. На осциллограмме рис. 7.5,*а* представлена запись изменения давления при эксперименте на ненасыщенной рабочей жидкости (этиловый спирт). Видно, что колебания давления носят весьма устойчивый

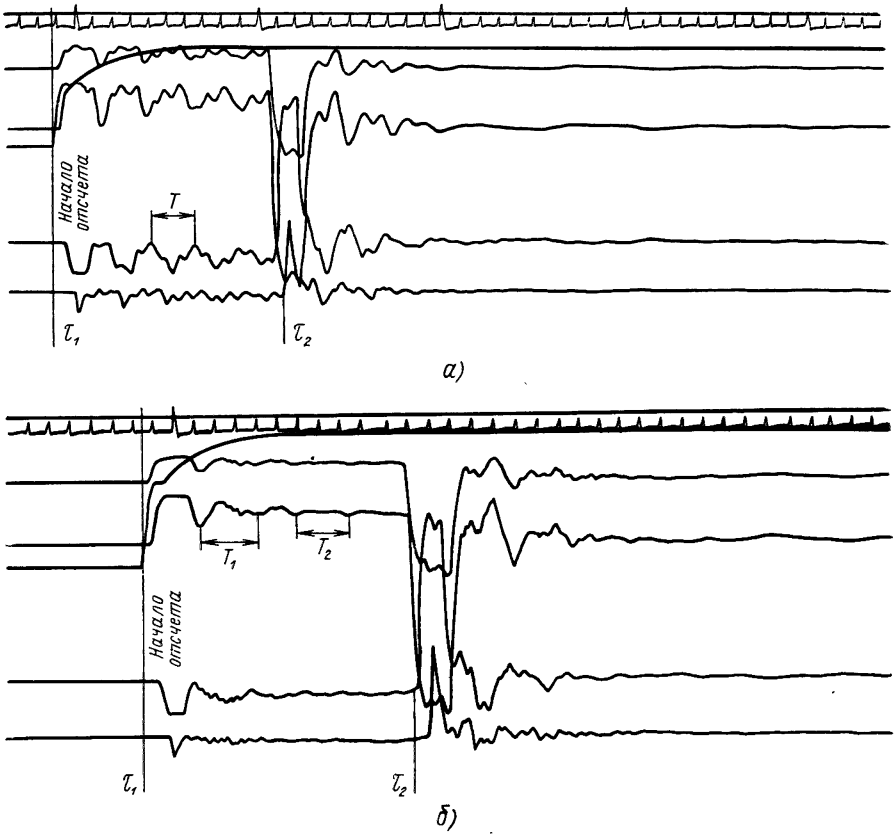



Рис. 7.5. Осциллограмма изменения давления в системе питания при работе на ненасыщенной жидкости (этиловый спирт) (*а*), при работе на насыщенной жидкости (этиловый спирт — углекислый газ) (*б*)

характер с постоянным периодом $T$ и малым декрементом затухания. Нижний предел колебаний может достигать значений давлений перед фронтом двигающейся жидкости, верхний — давления в баке.

На осциллограмме рис. 7.5,*б*, где зарегистрировано изменение давления в системе при работе на насыщенной жидкости (этиловый спирт — углекислый газ), волновые процессы протекают с большим декрементом затухания, период колебаний имеет тенденцию к увеличению ($\tau_2 > \tau_1$). Эти особенности связаны с тем, что в периоды времени, когда жидкость находится под давлением, меньшим, чем давление насыщения, в трубопроводах создаются условия для выделения растворенного в жидкости газа. Смена фаз давления в пузырьках газа приводит к дополнительным потерям энергии потоке, а при прохождении волн давления происходит частичное растворение выделившегося газа. Но в соответствии с изложенной выше физической моделью процесса за счет уменьшения поверхности пу-

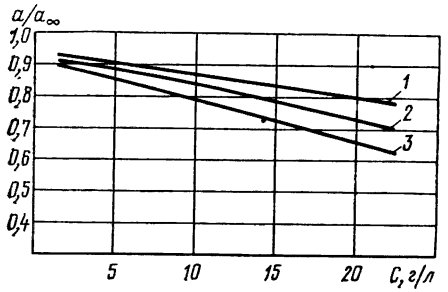



Рис. 7.6. Влияние концентрации растворенного газа на скорость распространения малых возмущений (этиловый спирт — углекислый газ) при различных $p_б$:

*1*—$10 \cdot 10^5$ Па; *2*—$8 \cdot 10^5$ Па; *3*—$4 \cdot 10^5$ Па

зырьков при сжатии растворение идет менее интенсивно. Это способствует накоплению газа в системе, что и приводит к увеличению периода акустических колебаний $T$ и, следовательно, к уменьшению скорости звука. Постепенное увеличение периода $T$ от цикла к циклу колебаний свидетельствует также о неравновесном характере газовыделения. Влияние концентрации растворенного в жидкости газа на скорость распространения малых возмущений иллюстрирует рис. 7.6 (этиловый спирт, насыщенный углекислым газом).

Процесс заполнения оканчивается гидравлическим ударом о дроссельную шайбу (время $\tau_2$ на рис. 7.5,*б*) и вызванными им колебаниями давления в системе питания. Следует отметить, что на описанных экспериментальных установках при малых концентрациях растворенного газа (до 20 г/л) не удалось установить существенного отличия во временах заполнения при работе на ненасыщенных и насыщенных жидкостях.

При заполнении вакуумированных магистралей сначала происходит интенсивный процесс испарения и газовыделения в заполняемую полость, а затем сжатие и вытеснение движущимся потоком накопившегося в трубопроводе газа через дроссельную шайбу.

По этой причине время заполнения от вакуумированных магистралей мало отличается от времени заполнения магистралей, находящихся перед открытием пускового клапана под атмосферным давлением.

Величины гидравлических ударов о дроссельную шайбу в случае течения газожидкостной смеси меньше значения гидроударов при работе на ненасыщенной жидкости (рис. 7.7). Причем эта разница определяется во многом абсолютным значением гидроудара. При небольших гидроударах $(20 \ldots 25) \cdot 10^5$ Па она достигает 25%, а при больших значениях повышения давления $(50 \ldots 70) \cdot 10^5$ Па — 10%. Распространение гидравлического удара по магистрали с газожидкостным потоком происходит с значительно большим декрементом затухания (рис. 7.8). Это надо иметь в виду при выдаче исходных данных для расчетов на прочность трубопроводов систем питания.

Следует отметить, что в начальной стадии работ имели место трудности при получении сходимости экспериментов, проводимых с насыщенной жидкостью с последующей выдержкой системы под давлением хранения. После проведения первого эксперимента, слива жидкости из трубопроводов и последующей повторной заправке для следующего испытания скорости звука при втором эксперимен-

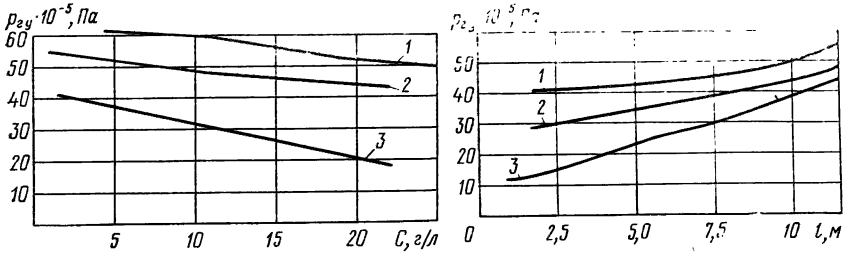



Рис. 7.7. Влияние концентрации растворенного газа на величину гидроудара (этиловый спирт — углекислый газ) при различных $p_б$:
*1*—10 · 10⁵ Па; *2*—8 · 10⁵ Па; *3*—4 · 10⁵ Па

Рис. 7.8. Снижение величины гидроудара по длине магистрали питания при различных $p_б$:
*1*—10 · 10⁵ Па; *2*—8 · 10⁵ Па; *3*—4 · 10⁵ Па

те получались значительно выше, чем в первом. Удовлетворительная сходимость экспериментов стала получаться только после того, как по окончании испытаний система тщательно просушивалась прогретым газом. Указанный факт весьма красноречиво подтверждает положение об определяющей роли микропор в стенках трубопроводов как начальных центров газовыделения в системе питания. При повторении эксперимента на непросушенном трубопроводе имело место частичное закупоривание микротрещин насыщенной жидкостью с предыдущего испытания, что и приводило к существенному удлинению процесса диффузии газа в микропоры. В пользу предположения об определяющей роли микропор говорят также результаты экспериментов с предварительной выдержкой жидкости на установке II, трубопроводы питания которой расположены вертикально. Если в жидкости после заправки и имелось какое-то количество взвешенных пузырьков микроскопических размеров, то при выдержке при давлении хранения часть из них с наименьшими размерами должна быть уничтожена силами поверхностного натяжения, оставшиеся же пузырьки вследствие процессов массообмена должны вырасти до размеров, когда архимедова сила вытолкнет их в газовую подушку емкости. Это же произойдет и с большинством микрочастиц, взвешенных в жидкости, так как благодаря диффузионному потоку массы газа из жидкости в их микротрещины, вокруг них будут образовываться пузырьки, подъемная сила которых направит эти частицы вверх за пределы трубопроводов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамзон Б. И., Ривкинд В. А., Фишбейн Т. А.** Нестационарный массообмен с гетерогенной химической реакцией при ламинарном обтекании сферы. — ИФЖ, 1967, т. 30, № 1, с. 73—79.

2. **Арзуманов Э. С.** Кавитация в местных гидравлических сопротивлениях. М.: Энергия, 1978, 304 с.

3. **Башкатов М. В., Шабанов С. И.** Обтекание сферы с поперечным потоком вещества при малых числах Рейнольдса. — ПМТФ, 1972, № 3, с. 103—108.

4. **Белло Ж. К.** Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: «Мир», 1968. 176 с.

5. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений, т. 2. М.: Госиздат физматгиз, 1960. 620 с.

6. **Броунштейн Б. И., Фишбайн Г. А.** Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977. 279 с.

7. **Буевич Ю. А.** О конвективной диффузии к частицам концентрированного обмена твердых сфер. — ИФЖ, 1972, т. 23, с. 708—712.

8. **Буевич Ю. А., Корнеев Ю. А.** О межфазном массо- и теплообмене в концентрированной дисперсной системе. — ИФЖ, 1973, т. 25, № 4, с. 594—600.

9. **Буевич Ю. А., Сафрай В. М.** Вязкость фазы в дисперсных системах. — ПМТФ, 1967, № 2, с. 45—49.

10. **Бэнков С. Г.** Вскипание на твердой поверхности в отсутствии распространенной газовой фазы. — В кн.: Вопросы физики кипения. М.: Мир, 1964, с. 80—98.

11. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 757 с.

12. **Бэтчелор Г. К.** Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. — В кн.: Механика. М.: Мир, 1968, № 3, с. 65—84.

13. **Вейсман М. Д.** Термодинамика парожидкостных потоков. М.: Энергия, 1967. 272 с.

14. **Венгерский Э. В., Морозов В. А., Усов Г. Л.** Некоторые особенности нестационарных процессов в гидросистемах энергетических установок при работе на насыщенных газом жидкостях. — В кн.: Кавитационные автоколебания в насосных системах, ч. 2. Киев: Наукова думка, 1976, с. 86—93.

15. **Вестерхайд Д., Уэстуотер Дж.** Изотермический рост пузырей водорода при электролизе. — В кн.: Вопросы физики кипения. М.: Мир, 1964, с. 354—375.

16. **Гарвей Э., Мак-Элрой У., Уайтли А.** Об образовании полостей в воде. — В кн.: Вопросы физики кипения. М.: Мир, 1964, с. 47—65.

17. **Гафуров О. А.** Влияние дисперсности газовой фазы на работу ступени подвижного электроцентробежного насоса трубы. Уфа: БашНИПИ нефти, 1973, вып. 34, с. 36—49.

18. **Гликман Б. Ф.** Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1974. 395 с.

19. **Гликман Б. Ф.** Нестационарные течения в пневмогидравлических цепях. М.: Машиностроение, 1979. 254 с.

20. **Годунов С. К., Рябенький В. С.** Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.

21. **Головин А. М.** Влияние вдува на сопротивление сферы в ламинарном потоке вязкой жидкости. — ПМТФ, 1972, № 3, с. 110—114.

22. **Григорьев В. А., Павлов Ю. М. Аметистов Е. В.** Кипение криогенных жидкостей. М.: Энергия, 1977, 288 с.

23. **Гриффигс. П., Уоллис Дж.** Роль состояния поверхности при пузырчатом кипении. — В кн.: Вопросы физики кипения. М.: Мир, 1964, с. 99—137.

24. **Дрейк МЛ.** Обсуждение трудов ASME. Сер. С. Теплопередача/Пер. с англ. М.: Мир, 1961, т. 82, № 2, с. 86—88.

25. **Зауэр Р.** Нестационарные задачи газодинамики/Пер. с нем. М.: Мир, 1969. 230 с.

26. **Ильичев В. И., Неуймин Г. Г.** О законе распределения размеров газовых пузырьков в турбулентном потоке жидкости. — Акустический журнал. 1965, т. II, вып. 4, с. 453—457.

27. **Кафаров В. В.** Основы массопередачи М.: Высшая школа, 1962. 656 с.

28. **Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.** Кавитация М.: Мир, 1970. 687 с.

29. **Козлов Б. К.** Формы течения газожидкостных смесей и границы их устойчивости в вертикальных трубах. — ЖТФ, 1954, № 24, с. 2285—2288.

30. **Колесников К. С., Самойлов Ю. А., Рыбак С. А.** Динамика топливных систем ЖРД. М.: Машиностроение, 1975. 171 с.

31. **Колмогоров А. Н.** О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении. — Доклады АН СССР, 1941, т. 31, № 2, с. 99—101.

32. **Кумутсос Н., Мойсис Р., Спиридонос А.** Исследование отрыва пузырьков в кипящей жидкости при вынужденной конвекции. — Труды ASME. Сер. С. Теплопередача/Пер. с англ. М.: Мир.

33. **Кутателадзе С. С., Стырикович М. А.** Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976, 296 с.

34. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Н.** Механика сплошных сред, М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.

35. **Лелеев Н. С.** Неустановившееся движение теплоносителя в обогреваемых трубах мощных парогенераторов. М.: Энергия, 1978. 288 с.

36. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973, 847 с.

37. **Лыков А. В.** Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 479 с.

38. **Маленков И. Г.** О движении больших пузырей газа, всплывающих в жидкости. — ПМТФ, 1968, № 6, с. 130—133.

39. **Гидродинамика** газожидкостных смесей в трубах/В. А. Мамаев, Г. А. Одишария, Н. И. Семенов, А. А. Точигин. М.: Недра, 1969 г. 208 с.

40. **Математическое** моделирование нестационарных процессов в магистралях систем питания./Э. В. Венгерский, Г. Л. Усов. В. П. Ткачев, Д. А. Полухин — В кн.: Динамика насосных систем. Киев: Наукова думка.

41. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. ч. I. М.: Наука, 1965. 639 с.

42. **Натанзон М. С.** Продольные автоколебания жидкостной ракеты. М.: Машиностроение, 1977. 204 с.

43. **Нигматулин Р. Н.** Основы механики гетерогенных сред, М.: Наука, 1978. 336 с.

44. **Об образовании** газовых пузырей в пересыщенном топливе./В. Д. Борисов, В. П. Логвинюк, В. В. Макаренков, В. В. Малышев — ИФЖ, 1969, т. 17, № 2, с. 210—216.

45. **Определение** скорости распространения малых возмущений в гидравлических линиях, заполненных жидкостью с растворенным газом./Э. В. Венгерский, В. А Морозов, Г. Л. Усов и др.— В кн.: Кавитационные автоколебания и динамика гидравлических систем. Киев: Наукова думка, 1977, с. 97—102.

46. **Перник А. Д.** Проблемы кавитации. Л.: Судостроение, 1966 439 с.

47. **Пилипенко В. В., Задонцев В. А., Натанзон М. С.** Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем. М.: Машиностроение, 1977. 352 с.

48. **Пневмогидравлические** системы двигательных установок с жидкостными ракетными двигателями./Челомей В. Н., Полухин Д. А., Миркин Н. Н. и др. М.: Машиностроение, 1978, 240 с.

49. **Присняков В. Ф.** Об отрыве пузырей от поверхности нагрева. — ИФЖ, 1970, т. 19, № 5, с. 912—920.

50. **Пузырьковые** камеры./Ю. А. Александров, Г. С. Воронов, В. М. Горбунков, Н. Б. Делонэ. М.: Госатомиздат, 1963. 340 с.

51. **Распределение** истинного объемного газосодержания по сечению канала./В. М. Баришанский, А. А. Андреевский, Б. С. Фокин и др. — В кн.: Достижения в области исследования теплообмена и гидравлики двухфазных потоков в элементах электрооборудования. Л.: Наука, с. 96—108.

52. **Решение** одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках./ Г. Б. Алалыкин, С. К. Годунов, И. Л. Киреева, Л. А. Планер. М.: Наука, 1970, с. 112.

53. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач/Пер. с англ. М.: Мир, 1972, 418 с.

54. **Рождественский В. В.** Кавитация. Л.: Судостроение, 1977. 247 с.

55. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений. М.: 1968, 592 с..

56. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика/Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 616 с.

57. **Рыскин Г. М., Фишбейн Т. А.** О внешней задаче массообмена для твердой среды и капли при больших числах Пекле и $Re<100$.— ИФЖ, 1976, т. 30, № 1, с. 69—73.

58. **Самарский А. А., Попов Ю. П.** Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 352 с.

59. **Сиротюк М. Г.** Кавитационная прочность воды и распределение в ней зародышей кавитации. — Акустический журнал, 1965, т. II, вып. 3, с. 382—386.
60. **Слезкин Н. А** Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
61. **Соу С.** Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
62. **Степанов В. Г., Воляк Л. Д., Тарлаков Ю. В.** Краевые углы смачивания некоторых систем. — ИФЖ, 1977, т. 32, № 6, с. 1000—1003.
63. **Стернин Л. Е.** Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
64. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики, М.: Наука, 1972. 736 с.
65. **Тонг Л.** Теплоотдача при кипении и двухфазное течение. М.: Мир, 1969, 344 с.
66. **Уейлер, Стритер, Ларсен.** Исследование влияния кавитационных пузырьков на потерю количества движения в трубе при неустановившемся течении.— Труды ASME. Сер. Д. Теоретические основы инженерных расчетов/Пер. с англ. М.: Мир, 1971, № 1, с. 1—10.
67. **Уоллис Г.** Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972, 440 с.
68. **Фисенко В. В.** Критические двухфазные потоки. М.: Атомиздат, 1978, 159 с.
69. **Фритц В., Энде В.** Исследование механизма парообразования с помощью киносъемки паровых пузырей. — В кн.: Вопросы физики кипения. М.: Мир, 1964, с. 162—188.
70. **Фукс Н. А.** Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955, 352 с.
71. **Хаппель Д., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976, 630 с.
72. **Хирс Д. П., Паунд Г. М.** Испарение и конденсация. М.: Металлургия, 1966, 196 с.
73. **Чапмен М. С., Плессет Р. Б.** Нелинейные эффекты при захлопывании почти сферической каверны в жидкости.— Труды ASME. Сер. Д. Теоретические основы инженерных расчетов./Пер. с англ. М.: Мир, 1972, № 1, с. 158—162.
74. **Чарный И. А.** Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975, 296 с.
75. **Чебаевский В. Ф., Петров В. И.** Кавитационные характеристики высокооборотных шнекоцентробежных насосов. М.: Машиностроение, 1973, 151 с.
76. **Шервуд Т. К.** Явление диффузии при гетерогенном катализе. В кн.: Теоретические основы химической технологии. М.: Наука, 1967, т. I, № 1, с. 17—30.
77. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 712 с.
78. **Штауб.** Паросодержание при кипении недогретой жидкости и расчет начальной точки генерации пара. — Труды ASME. Серия С. Теплопередача/ /Пер. с англ. М.: Мир, т. 90, № 2, 1968, с. 110—117.
79. **Campbell I. J., Pitcher A. S.** Shok waves in a liquid containing gas bubbles. — Proc. Roy. Soc. Am., 1958, v. 243, pp. 534—545.
80. **Epstein P. S., Plesset M. S.,** On the stability of Gas Bubbles in Liquid—Gas Solutions. — Journal of Chemical Physics, 1950, v. 18, N. 11, p. 1505—1509.
81. **Fox F. E., Herzfeld K. F.** Gas Bubbles with Organic Skin as Cavitation Nuclei. — J. Acoust. Soc. Am., 1954, v. 26, p. 984—989.
82. **Henry R. E.** The Speed of Sound in Two-Phase Flow — Chem. Eng. Progress Symp. Ser. 1972, v. 102, p. 1.
83. **Messino D., Sette D., Wanderling F.** Statistical Approach to Ultrasonic Cavitation. — J. Acoust. Soc. Am., 1963, v. 35, N. 10, p. 1575—1583.
84. **Peebles F. N., Garber H. J.** Studies on the motion of gas bubbles in liquids. — Chem. Eng. Progr. 1953, v. 49, p. 88—97.
85. **Chang E. T., Gokcen N. A.** Solubilities of Gases in Simple and Complex Propellants. — Journal of Spacecraft and Rockets, 1969, v. 6, N. 10, p. 1177—1180.

# ОГЛАВЛЕНИЕ


| | Стр. |
|---|---|
| Введение | 3 |
| *Глава 1.* **Условия течения жидкости в гидросистемах питания энергетических установок** | 6 |
| 1.1. Нестационарные процессы в системах питания | 6 |
| 1.2. Растворение газов в жидкости | 13 |
| 1.3. Влияние свободных газовых включений в жидкости на кавитационные характеристики центробежных насосов | 14 |
| *Глава 2.* **Взаимодействие единичного пузырька и окружающей его жидкости** | 18 |
| 2.1. Общий вид уравнений массообмена и гидродинамики | 18 |
| 2.2. Скорость всплытия единичного пузырька. Коэффициент сопротивления | 22 |
| 2.3. Массообмен единичного пузырька и жидкости | 27 |
| 2.4. Взаимодействие единичного пузырька и жидкости в потоке | 32 |
| 2.5. Полная система уравнений взаимодействия единичного пузырька и окружающей его жидкости | 37 |
| *Глава 3.* **Основные характеристики двухфазного потока** | 43 |
| 3.1. Состав и структура двухфазного потока | 43 |
| 3.2. Физическая модель образования двухфазного потока | 46 |
| 3.3. Особенности взаимодействия в условиях пограничного слоя | 50 |
| 3.4. Предельный размер пузырька в потоке. Условия дробления | 56 |
| 3.5. Гидравлические потери давления в двухфазном потоке | 59 |
| 3.6. Скорость распространения возмущений в двухфазном потоке | 63 |
| 3.7. Особенности взаимодействия фаз при конечных значениях концентраций | 70 |
| 3.8. Кинетика фазовых превращений | 75 |
| *Глава 4* **Уравнения гидромеханики сплошной многофазной среды** | 82 |
| 4.1. Уравнение сохранения массы | 82 |
| 4.2. Уравнение изменения количества движения | 84 |
| 4.3. Полная система уравнений | 86 |
| *Глава 5.* **Краевые условия двухфазного течения в магистралях систем питания** | 88 |
| 5.1. Процессы в заполняемом объеме при запуске энергетической установки | 89 |
| 5.2. Характеристики систем питания со шнекоцентробежным насосом | 94 |
| 5.3. Влияние конструктивных особенностей системы питания на характеристики течения | 98 |
| *Глава 6.* **Аналитические методы исследования нестационарных процессов многофазных сред** | 99 |
| 6.1. Методы решений | 99 |
| 6.2. Метод характеристик | 100 |
| 6.3. Метод сеток и его использование для определения параметров движения многофазных сред | 102 |
| 6.4. Погрешность аппроксимации при использовании метода сеток | 109 |
| 6.5. Устойчивость конечно-разностной схемы | |
| 6.6 Аппроксимация краевых условий при исследовании нестационарных процессов | 111<br>108 |
| *Глава 7.* **Экспериментальные исследования нестационарных процессов в системах питания** | 114 |
| 7.1. Постановка задачи. Экспериментальные установки | 114 |
| 7.2. Методика проведения экспериментальных исследований. Результаты экспериментов | 119 |
| Список литературы | 125 |