ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА И ТЕПЛООБМЕН

# 2

# Computational fluid mechanics and heat transfer

**Dale A. Anderson**
Professor of Aerospace Engineering
Iowa State University

**John C. Tannehill**
Professor of Aerospace Engineering
Iowa State University

**Richard H. Pletcher**
Professor of Mechanical Engineering
Iowa State University

Hemisphere Publishing Corporation, New York
A subsidiary of Harper & Row, Publishers, Inc.
Cambridge · Philadelphia · San Francisco · Washington
London · Mexico City · São Paulo · Singapore · Sydney

Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА И ТЕПЛООБМЕН

В двух томах

**Том 2**

Перевод с английского
**С. В. Сенина и Е. Ю. Шальмана**

под редакцией
**Г. Л. Подвидза**

Москва «Мир» 1990

Scanned by Me
for RFree

ББК 22.253
А65
УДК 532 + 681.3

**Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.**
А65 Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 2: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 728—392 с., ил.
ISBN 5-03-001928-6

Книга учебного типа, написанная известными американскими специалистами. В ней поставлена цель — научить читателя составлять конечно-разностные алгоритмы решения гидро- и газодинамических задач. Структура книги тщательно продумана и позволяет практически освоить методику численного решения сложнейших задач гидродинамики и теплообмена. Этому способствуют тщательно подобранные примеры и уникальные наборы задач в конце каждой главы. В русском издании книга выходит в двух томах.

Для математиков-прикладников, инженеров-вычислителей, специалистов по механике жидкостей, аспирантов и студентов вузов.

**А** $\frac{1602120000-150}{041(01)-90}$ **28—90** **ББК 22.253**

*Редакция литературы по математическим наукам*

**ISBN 5-03-001928-6 (русск.)**
**ISBN 5-03-001926-X**
**ISBN 0-89116-471-5 (англ.)**

© 1984 by Hemisphere Publishing Corporation
© перевод на русский язык, С. В. Сенин, Е. Ю. Шальман, 1990

# Глава 7

# Численные методы решения уравнений типа уравнений пограничного слоя

## § 7.1. Введение

В гл. 5 было показано, что уравнения, получающиеся в приближении пограничного слоя (или тонкого вязкого слоя), являются полезной математической моделью для описания некоторых важных течений, встречающихся в инженерных приложениях. К ним относятся струи и следы, двумерные или осесимметричные течения в каналах и трубах, а также классический пристенный пограничный слой. Приближение пограничного слоя можно эффективно использовать и для описания некоторых трехмерных течений. В последние годы разработаны методы, позволившие применить приближение пограничного слоя для анализа течений с небольшими рециркуляционными областями. Часто вблизи плоскости, с которой начинается развитие течения в продольном направлении, существует небольшая область, плохо описываемая в приближении тонкого вязкого слоя. Однако при средних и больших числах Рейнольдса эта область мала, а в большинстве случаев пренебрежимо мала.

В этой главе приведены конечно-разностные методы решения рассматриваемых уравнений и некоторые численные результаты. Основное внимание уделено применению методов и подходов, уже описанных в гл. 3 и 4, а не подробному изложению какого-то одного общего конечно-разностного метода. В других работах подробно описаны несколько конечно-разностных методов решения уравнений пограничного слоя. Мы не будем повторять изложенные в этих работах детали, если только они не потребуются нам для иллюстрации ключевых моментов.

История численных методов решения уравнений пограничного слоя восходит к 1930—1940 гг. Конечно-разностные методы, близкие по форме к используемым в настоящее время, были созданы в 50-е гг. [Friedrich, Forstall, 1953; Rouleau, Osterle, 1955]. По сравнению с методами расчета некоторых других классов течений конечно-разностные методы решения уравнений пограничного слоя относительно хорошо развиты и апробированы. Несмотря на это, регулярно продолжают появляться новые численные методы решения этих уравнений.

## § 7.2. Краткое сравнение различных методов расчета пограничного слоя

Прежде чем перейти к изучению конечно-разностных методов расчета пограничного слоя, полезно напомнить, что в течение многих лет их решения находились другими методами, а для некоторых простых течений необходимые для инженерных приложений результаты были получены в виде простых формул. Эти результаты приведены в учебниках по гидромеханике, аэродинамике и теплообмену. Наиболее важные сведения о вязких течениях можно найти в монографиях Шлихтинга [Schlichting, 1979] и Уайта [White, 1974].

За исключением нескольких работ, основанных на теории подобия, встречающиеся в современной литературе методы расчета пограничного слоя можно разбить на три группы: (1) интегральные методы, (2) конечно-разностные методы, (3) методы конечных элементов.

Интегральные методы можно применять к широкому классу ламинарных и турбулентных течений, более того, любая задача, которая может быть решена конечно-разностным методом, может быть решена и интегральным методом. До 60-х гг. интегральные методы были основными вычислительными методами, которые использовались для решения сложных задач гидродинамики и теплообмена. Характерной чертой этих методов является то, что они преобразуют уравнения в частных производных в обыкновенные дифференциальные уравнения. Для этого делаются некоторые предположения о виде профилей скорости и температуры (обычно предполагают, что они являются функциями $N$ параметров), а уравнения интегрируются по одной из независимых переменных (обычно по нормальной к стенке координате). Многие из таких методов можно отнести к методам взвешенной невязки. Можно показать, что при очень больших $N$ решение, полученное методом взвешенной невязки, стремится к точному решению уравнений в частных производных.

Для решения сложных задач современными интегральными методами необходимо использовать ЭВМ. На практике оказывается, что воспользоваться интегральными методами не так просто, как конечно-разностными (применение интегральных методов требует больше интуиции). Эти методы не так гибки и носят не столь общий характер, как конечно-разностные методы; они обычно требуют большей модификации при изменении граничных или каких-либо других условий задачи. В последние годы большинство ученых предпочитают для расчета сложных погранслойных течений применять конечно-разностные, а не интегральные методы. Однако интегральные методы имеют по

крайней мере несколько очень влиятельных защитников и могут быть использованы для решения важных современных задач.

Метод конечных элементов стал использоваться для решения уравнений пограничного слоя относительно недавно. Вопросы, связанные с применением этого метода для расчета пограничного слоя, рассмотрены Чангом (Chung, 1978]. Целью всех перечисленных методов является сведение задачи, описываемой уравнениями в частных производных, к алгебраической задаче. Методы отличаются лишь процедурой, используемой для такой дискретизации. Вероятно, в будущем будут созданы гибридные вычислительные схемы, которые позволят сохранить лучшие свойства каждого из этих методов.

## § 7.3. Конечно-разностные методы расчета двумерных и осесимметричных стационарных внешних течений

### 7.3.1. Обобщенная форма записи уравнений

Наиболее удобная форма записи уравнений пограничного слоя зависит от рассматриваемой задачи. Так, в случае ламинарных течений часто применяют преобразование координат, позволяющее использовать почти постоянное число точек поперек слоя. Уравнение энергии обычно записывается по-разному для сжимаемых и несжимаемых течений. На практике часто приходится дополнять или изменять разностную схему, разработанную для какого-либо уравнения в частных производных, чтобы применить ее для решения аналогичного, но отличающегося в некоторых деталях уравнения. Выбор оптимальной схемы решения обычно достигается лишь методом проб и ошибок.

В гл. 5 приведены уравнения пограничного слоя в физической системе координат (уравнения (5.116)—(5.119)). Воспользуемся гипотезой Буссинеска и выразим напряжения Рейнольдса и турбулентный тепловой поток через коэффициент турбулентной вязкости $\mu_T$ и турбулентное число Прандтля $\mathrm{Pr}_T$:

$$-\rho\overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$-\rho c_p \overline{v'T'} = \frac{c_p \mu_T}{\mathrm{Pr}_T} \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Если при решении уравнения энергии выбрать в качестве искомой неизвестной полную энтальпию $H$, то в выражении для турбулентного теплового потока удобно исключить $T$ при помощи определения полной энтальпии $H = c_p T + u^2/2 + v^2/2$. В приближении пограничного слоя величиной $v^2/2$ можно пренебречь.

Проведя указанную подстановку, приведем уравнения двумерного или осесимметричного стационарного сжимаемого пограничного слоя к виду:

*Уравнение движения по координате x*

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r^m (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (7.1)$$

*Уравнение энергии*

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial y} + \rho \tilde{v} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left( r^m \left\{ \left( \frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_T}{\mathrm{Pr}_T} \right) \frac{\partial H}{\partial y} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \left[ \mu \left( 1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}} \right) + \mu_T \left( 1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}_T} \right) \right] u \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \right). \quad (7.2)$$

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^m \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (r^m \rho \tilde{v}) = 0, \quad (7.3)$$

*Уравнение состояния*

$$\rho = \rho (T, p). \quad (7.4)$$

Кроме того, необходимо задать коэффициенты $\mu$, $k$, $c_p$ как функции от температуры.

Введенный в гл. 5 параметр $m$ равен 1 для осесимметричных и 0 для плоских течений, а $\tilde{v} = (\bar{\rho}\bar{v} + \overline{\rho' v'})/\bar{\rho}$. При $m = 0$ имеем $r^m = 1$ и уравнения принимают вид, необходимый для описания двумерных течений.

Основной неизвестной в уравнении движения (7.1) является $u$. Удобно рассматривать это уравнение как уравнение переноса, содержащее члены, описывающие конвекцию и диффузию составляющей скорости $u$ и источниковый член. Уравнение энергии тоже можно рассматривать как уравнение переноса полной энтальпии $H$ с аналогичной интерпретацией его членов. Такую интерпретацию можно распространить на уравнения движения и энергии в случае нестационарного пограничного слоя.

Обычно оба уравнения (7.1) и (7.2) можно записать в виде уравнения переноса

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left( r^m \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad (7.5)$$

(такая запись уравнений невозможна лишь при использовании некоторых моделей турбулентности, например модели, предложенной Брэдшоу [Bradshaw et al., 1967]).

В уравнении (7.5) $\phi$ — обобщенная переменная, совпадающая с $u$ для уравнения движения и с $H$ для уравнения энергии,

$\lambda$ — обобщенный коэффициент диффузии. Расположенные в левой части уравнения члены описывают конвекцию $\phi$, первый член в правой части — диффузию $\phi$, а $S$ — источниковый член. *Источниковыми* в уравнениях с частными производными называют члены, не содержащие производных от неизвестной $\phi$. Например, член $\rho_e u_e du_e/dx$ в уравнении (7.1) и член, содержащий *иди/ду* в уравнении (7.2), — источниковые члены.

Большинство приведенных в гл. 5 дифференциальных моделей турбулентности также описываются уравнениями вида (7.5).

Так как уравнения движения и энергии приводятся к виду (7.5), они являются параболическими уравнениями, допускающими решение маршевым методом в направлении оси $x$. Если на основе тех или иных предложений определить коэффициенты уравнений, то из конечно-разностных аналогов уравнений движения, энергии и неразрывности можно независимо определить изменение на одном шаге по $x$ всех неизвестных, т. е. найти новые значения $u_j$, $H_j$ и $\tilde{v}_j$. Предложенная стратегия решения иллюстрируется следующим образом:

| *Решаемое маршевым методом уравнение* | *Определяемая неизвестная* |
|---|---|
| **движения в проекции на ось** $x$ | $u_j^{n+1}$ |
| **энергии** | $H_j^{n+1}$ |
| **состояния + неразрывности** | $\tilde{v}_j^{n+1}$ |

После каждого шага по маршевой координате коэффициенты всех уравнений вычисляются заново, поэтому фактически решения трех этих уравнений взаимосвязаны, а независимо решаются (расщепляются) лишь алгебраические уравнения на каждом шаге по маршевой координате. В некоторых методах расчета все уравнения полагаются взаимосвязанными, поэтому на каждом шаге по маршевой координате решается существенно бóльшая система алгебраических уравнений для одновременного определения $u_j$, $H_j$, $\tilde{v}_j$. Расщепление системы алгебраических уравнений является наиболее простым методом расчета, приводящим для большинства течений к неплохим результатам.

### 7.3.2. Пример применения простого явного метода

Хотя простой явный метод в настоящее время почти не используется для расчета пограничных слоев из-за жестких ограничений, накладываемых при его применении условиями устойчивости, мы в учебных целях приведем здесь одну достаточно общую разностную схему решения уравнений пограничного слоя, предложенную Ву [Wu, 1961]. Рассмотрим двумерное несжи-

маемое ламинарное течение без теплообмена. Оно описывается уравнениями в частных производных (5.104) и (5.105).

Конечно-разностный аналог этих уравнений можно записать в виде

*Уравнение движения по координате x*

$$u_j^n \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta x} + v_j^n \frac{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta y} = u_e^n \frac{(u_e^{n+1} - u_e^n)}{\Delta x} +$$

$$+ \frac{\nu}{(\Delta y)^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + O(\Delta x) + (\Delta y)^2. \quad (7.6)$$

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - u_j^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 + O(\Delta x) + O(\Delta y)^2. \quad (7.7)$$

При обтекании плоской пластины (рис. 7.1) расчет обычно начинают с передней кромки, предполагая, что на ней $u_j^n = u_\infty$,

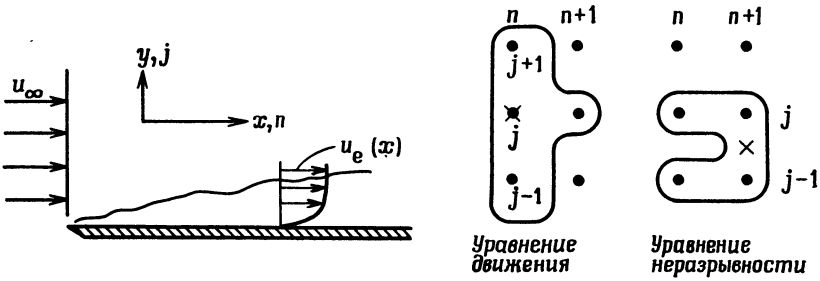



Рис. 7.1. Простая явная схема.

а $v_j^n = 0$. Знать величину $v_j^n$ в явном алгоритме необходимо для того, чтобы решить уравнения на $(n+1)$-м слое, однако математическая формулировка задачи для уравнений с частными производными не требует задания начального распределения $v_j^n$. Подходящее начальное распределение величины $v_j^n$ можно найти [Ting, 1965] при помощи уравнения неразрывности, используемого для исключения производной $\partial u/\partial x$ из уравнения движения. Тогда для ламинарного несжимаемого течения получим

$$-u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Так как

$$-u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -u^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{u}\right),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\left(u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Учитывая, что при $y = 0$ $v = 0$, получаем

$$v(y) = -u\int_0^y \frac{1}{u^2}\left(u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dy. \qquad (7.8)$$

В случае рассматриваемой задачи об обтекании плоской пластины предположим, что при $x = 0$ (на передней кромке пластины) $u_j^n = u_\infty$ всюду, кроме стенки, где $u_1^n = 0$. Необходимое для расчета по явной схеме начальное распределение величины $v_j^n$ можно теперь найти, интегрируя численно правую часть соотношения (7.8). Если для аппроксимации производной $\partial^2 u/\partial y^2$ в первом от стенки узле разностной сетки воспользоваться, как обычно, центральными разностями, то получим, что $v_j^n = 2\nu/\Delta y$ во всех узлах, кроме лежащего на стенке, где $v_1^n = 0$. На практике предположение, что в начальном сечении $v_j^n = 0$, также приводит к удовлетворительным результатам.

Зная начальное распределение $u_j^n$, из уравнения движения (7.6) можно определить по явной схеме $u_j^{n+1}$. Расчет обычно начинают от стенки и движутся от нее наружу до тех пор, пока не выполнится условие $u_j^{n+1}/u_e^{n+1} = 1 - \varepsilon \approx 0.9995$; т. е. используя асимптотическое граничное условие, мы в ходе решения находим положение внешней границы пограничного слоя. Значения величины $v_j^{n+1}$ можно теперь получить из уравнения (7.7), начиная вычисления с ближайшего к стенке узла разностной сетки и продвигаясь последовательно к внешней границе. Конечно-разностная формулировка уравнения неразрывности и описанный метод его решения эквивалентны интегрированию уравнения неразрывности по формуле трапеций для вычисления $v_j^{n+1}$.

*Условия устойчивости* этого метода имеют вид

$$\frac{2\nu\Delta x}{u_j^n(\Delta y)^2} \leqslant 1, \quad \frac{(v_j^n)^2\Delta x}{u_j^n\nu} \leqslant 2.$$

Второй член в уравнении движения (7.6) обведен прямоугольником, составленным из штриховых линий, по двум причинам. Во-первых, мы хотели показать, что различие условий устойчивости уравнения (7.6) и уравнения теплопроводности связано в основном с этим членом, а во-вторых, ниже мы рассмотрим другую возможную аппроксимацию этого члена.

**Другая запись явной схемы.** Для того чтобы устойчивость разностной схемы определялась лишь одним неравенством, обведенный прямоугольником член уравнения (7.6) (конечно-разностная аппроксимация $v\partial u/\partial y$) можно заменить выражением

$$v_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta y} \quad \text{при} \quad v_j^n > 0$$

и выражением

$$v_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta y} \quad \text{при} \quad v_j^n < 0.$$

Тогда условие устойчивости примет вид

$$\Delta x \leqslant \frac{1}{2\nu/\left[u_j^n (\Delta y)^2\right] + \left|v_j^n\right|/(u_j^n \Delta y)}.$$

Для такой аппроксимации величины $v\partial u/\partial y$ погрешность аппроксимации ухудшается и составляет лишь $O(\Delta x) + O(\Delta y)$.

Отметим, что для обеих рассмотренных явных схем условия устойчивости определяются локальными значениями составляющих скорости $u$ и $v$. Это характерно для уравнений с переменными коэффициентами. Спектральный критерий устойчивости Неймана позволяет неплохо оценить устойчивость методов расчета уравнений пограничного слоя, если входящие в уравнения коэффициенты $u$ и $v$ считать локально постоянными. Особо необходимо остановиться на интерпретации коэффициента турбулентной вязкости $\mu_T$ при анализе устойчивости разностных схем. При использовании некоторых моделей турбулентности в выражение для $\mu_T$ входят производные, разностная аппроксимация которых может вызвать неустойчивость алгоритма. При анализе устойчивости коэффициент турбулентной вязкости $\mu_T$ можно считать либо заданной функцией, подбирая в этом случае методом проб и ошибок конечно-разностную аппроксимацию $\mu_T$, обеспечивающую устойчивость алгоритма, либо, выразив $\mu_T$ через основные гидродинамические неизвестные, попытаться определить условие устойчивости алгоритма обычными методами.

### 7.3.3. Метод Кранка — Николсона и полностью неявный метод

Характерные особенности большинства неявных методов можно продемонстрировать на примере следующей конечно-разностной аппроксимации записанных в физических координатах уравнений сжимаемого ламинарного пограничного слоя на сетке с $\Delta y = \text{const}$:

*Уравнение движения*

$$\frac{\left[\theta\left(\rho_j^{n+1}u_j^{n+1}\right)+(1-\theta)\,\rho_j^n u_j^n\right]\left(u_j^{n+1}-u_j^n\right)}{\Delta x}+$$

$$+\frac{\theta\left(\rho_j^{n+1}v_j^{n+1}\right)\left(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(\rho_j^n v_j^n\right)\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)}{2\Delta y}=$$

$$=\frac{\left[\theta\left(\rho_e^{n+1}u_e^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(\rho_e^n u_e^n\right)\right]\left(u_e^{n+1}-u_e^n\right)}{\Delta x}+$$

$$+\frac{1}{(\Delta y)^2}\left\{\theta\left[\mu_{j+1/2}^{n+1}\left(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}\right)-\mu_{j-1/2}^{n+1}\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+(1-\theta)\left[\mu_{j+1/2}^n\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right)-\mu_{j-1/2}^n\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)\right]\right\}. \qquad (7.9)$$

Здесь $\theta$ — весовой коэффициент.

Если $\theta=0$, получается явный метод. Для определения погрешности аппроксимации удобнее всего проводить разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $(n, j)$. Погрешность аппроксимации равна $O(\Delta x)+O(\Delta y)^2$; приведенное ранее условие устойчивости Неймана существенно ограничивает шаг по маршевой координате.

Если $\theta=1/2$, получается неявный метод Кранка — Николсона. Разложение в ряд Тейлора удобнее всего проводить в точке $(n+1/2, j)$. Если все коэффициенты (и параметры состояния) вычисляются в точке $(n+1/2, j)$, то погрешность аппроксимации равна $O(\Delta x)^2+O(\Delta y)^2$. Критерий Неймана не накладывает ограничений на устойчивость схемы, но в тех случаях, когда нет диагонального преобладания, могут возникнуть затруднения при решении уравнений прогонкой [Hirsh, Rudy, 1974].

Если $\theta=1$, получается полностью неявный метод. Разложение в ряд Тейлора удобнее всего проводить в точке $(n+1, j)$, погрешность аппроксимации этого метода $O(\Delta x)+O(\Delta y)^2$ (если коэффициенты уравнения и параметры состояния вычисляются в точке $(n+1, j)$). Критерий Неймана не накладывает ограничений на устойчивость разностной схемы, но приведенные в случае $\theta=1/2$ замечания о диагональном преобладании остаются.

Отметим, что приведенная выше схема является неявной при $\theta>0$, а при $\theta\geqslant 1/2$ она безусловно устойчива. На практике успешно используют схемы со значениями $\theta$, лежащими между 1/2 и 1. Для полностью неявной и явной схем можно использовать одну и ту же запись уравнения неразрывности.

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\rho_j^{n+1}v_j^{n+1}-\rho_{j-1}^{n+1}v_{j-1}^{n+1}}{\Delta y}+\frac{\rho_j^{n+1}u_j^{n+1}-\rho_j^n u_j^n+\rho_{j-1}^{n+1}u_{j-1}^{n+1}-\rho_{j-1}^n u_{j-1}^n}{2\Delta x}=0. \tag{7.10}$$

При $\theta=1/2$ величины $\rho$ и $v$ в первом слагаемом нужно вычислять на $(n+1/2)$-м слое, в соответствии с этим надо изменить и запись уравнения (7.10). Тогда погрешность аппроксимации уравнения неразрывности равна $O(\Delta x)^2+O(\Delta y)^2$. Конечно-разностный аналог уравнения энергии строится по той же схеме, что и для уравнения движения. В качестве независимой переменной выберем температуру $T$, что вполне возможно при течении газа с небольшой скоростью. Тогда уравнение энергии можно записать:

*Уравнение энергии*

$$\rho u c_p\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v c^a\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\beta T u\frac{dp}{dx}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{7.11}$$

Введя коэффициент $\theta$, получим конечно-разностный аналог этого уравнения

$$\begin{aligned}&\left[\theta\left(\rho_j^{n+1}u_j^{n+1}c_{p_j}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(\rho_j^n u_j^n c_{p_j}^n\right)\right]\frac{T_j^{n+1}-T_j^n}{\Delta x}+\\&+\frac{\theta\left(\rho_j^{n+1}v_j^{n+1}c_{p_j}^{n+1}\right)\left(T_{j+1}^{n+1}-T_{j-1}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(\rho_j^n v_j^n c_{p_j}^n\right)\left(T_{j+1}^n-T_{j-1}^n\right)}{2\Delta y}=\\&=\frac{1}{(\Delta y)^2}\left\{\theta\left[k_{j+1/2}^{n+1}\left(T_{j+1}^{n+1}-T_j^{n+1}\right)-k_{j-1/2}^{n+1}\left(T_j^{n+1}-T_{j-1}^{n+1}\right)\right]+\right.\\&\left.+(1-\theta)\left[k_{j+1/2}^n\left(T_{j+1}^n-T_j^n\right)-k_{j-1/2}^n\left(T_j^n-T_{j-1}^n\right)\right]\right\}+\\&+\frac{\left[\theta\left(\beta_j^{n+1}T_j^{n+1}u_j^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(\beta_j^n T_j^n u_j^n\right)\right]\left(p_j^{n+1}-p_j^n\right)}{\Delta x}+\\&+\theta\mu_j^{n+1}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta y}\right)^2+(1-\theta)\mu_j^n\left(\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta y}\right)^2.\end{aligned} \tag{7.12}$$

Погрешность аппроксимации уравнения энергии такая же, как и уравнения движения при $\theta=0,\ 1/2,\ 1$.

Можно построить полностью неявную схему ($\theta=1$), имеющую формально второй порядок точности, если для аппроксимации производных в продольном направлении использовать значения неизвестных на трех слоях ($n-1$, $n$, $n+1$), как это было сделано в гл. 3. Возможность применения такой схемы показана в работах [Davis, 1963; Harris, 1971].

При использовании любого неявного метода ($\theta\neq 0$) конечно-разностные аналоги уравнений движения и энергии (уравне-

ния (7.9) и (7.12)) являются нелинейными алгебраическими уравнениями, так как в коэффициенты входят значения неизвестных на $(n+1)$-м слое. Линеаризация этих уравнений может быть проведена и обычно проводится одним из следующих способов.

1. *Запаздывающие коэффициенты*

Чаще всего используют простейший метод линеаризации разностных уравнений, состоящий в вычислении всех коэффициентов на $n$-м слое. Его называют *методом запаздывающих коэффициентов*. При таком подходе согласованность разностной схемы сохраняется, так как для произвольной функции $\phi(x, y)$ имеем $\phi(x_0+\Delta x, y_0)=\phi(x_0, y_0)+O(\Delta x)$. Однако такая линеаризация не позволяет достичь по маршевой координате аппроксимации более высокого чем первый порядка. Для записанного в общем виде уравнения переноса (7.5) полученное методом запаздывающих коэффициентов линеаризованное конечно-разностное уравнение имеет вид

$$\rho_j^n u_j^n \frac{\phi_i^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta x}+\frac{\rho_j^n v_j^n}{2\Delta y}\left[\theta\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(\phi_{j+1}^n-\phi_{j-1}^n\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{(\Delta y)^2}\left\{\lambda_{j+1/2}^n\left[\theta\left(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(\phi_{j+1}^n-\phi_j^n\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\lambda_{j-1/2}^n\left[\theta\left(\phi_j^{n+1}-\phi_{j-1}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(\phi_j^n-\phi_{j-1}^n\right)\right]\right\}+$$
$$+\theta S_j^{n+1}+(1-\theta)S_j^n. \qquad (7.13)$$

Конечно-разностные аналоги всех трех уравнений, описывающих законы сохранения, могут быть теперь решены независимо. Из уравнения движения можно найти $u_j^{n+1}$, из уравнения энергии — найти $T_j^{n+1}$, а из уравнения состояния — найти $\rho_j^{n+1}$ и, наконец, из уравнения неразрывности — найти $v_j^{n+1}$. Матрицы коэффициентов в уравнениях, аппроксимирующих уравнения движения и энергии, трехдиагональные, поэтому эти уравнения можно решать прогонкой.

2. *Простая итерационная замена коэффициентов*

Вычисление коэффициентов можно провести и на $(n+1)$-м слое в соответствии с уравнениями (7.9), (7.10) и (7.12) при помощи простого итерационного метода. При этом сначала все коэффициенты вычисляются на $n$-м слое (с запаздыванием) и из решения системы уравнений определяются значения неизвестных $u$, $T$, $v$ на $(n+1)$-м слое. Теперь значения коэффициентов можно найти по только что вычисленным значениям неизвестных на $(n+1)$-м слое, а расчет повторен на $(n+1)$-м слое для получения более точных результатов.

Эту процедуру можно повторить итерационно несколько раз до тех пор, пока отличие решений на двух последовательных итерациях не окажется достаточно малым. Обычно хватает двух-трех итераций, хотя Блоттнеру [Blottner, 1975a] при проведении расчетов по схеме Кранка — Николсона требовалось до 19 итераций для того, чтобы при измельчении сетки численно полученное решение вело себя как решение, полученное по схеме второго порядка точности (см. § 3.2). Несмотря на то что переход от метода запаздывающих коэффициентов к простой итерационной замене коэффициентов связан с минимальными изменениями в программе для ЭВМ, описанный ниже метод линеаризации по Ньютону значительно эффективнее, поэтому именно его мы рекомендуем для расчета пограничного слоя.

3. *Использование линеаризации по Ньютону для итерационного вычисления коэффициентов*

Линеаризация по Ньютону (ее часто называют также *квазилинеаризацией*) проводится следующим образом. Предположим, например, что мы хотим вычислить $(u_j^{n+1})^2$. Пусть $\delta_u$ — разность значений $u$ на двух последовательных итерациях, которые проводятся для решения разностных уравнений. Тогда $u_j^{n+1} = \hat{u}_j^{n+1} + \delta_u$, где значком $\wedge$ над буквой отмечено значение неизвестной на предыдущей итерации. Для первой итерации значение переменной $u_j^{n+1}$ принимается равным ее значению на предыдущем шаге по маршевой координате. Величина $\delta_u$ играет ту же роль, что и величина $\Delta x$ при использовании метода Ньютона — Рафсона — Канторовича для нахождения корней трансцендентного уравнения. Представим величину $(u_j^{n+1})^2$ в виде

$$(u_j^{n+1})^2 = (\hat{u}_j^{n+1} + \delta_u)^2 = (\hat{u}_j^{n+1})^2 + 2\delta_u \hat{u}_j^{n+1} + \delta_u^2. \qquad (7.14)$$

Линеаризуем правую часть уравнения (7.14), отбросив член $\delta_u^2$, пропорциональный квадрату изменения неизвестной, что аналогично отбрасыванию членов порядка $(\Delta x)^2$ в методе Ньютона — Рафсона — Канторовича. После линеаризации выражение для $(u_j^{n+1})^2$ примет вид

$$(u_j^{n+1})^2 \approx (\hat{u}_j^{n+1})^2 + 2\delta_u \hat{u}_j^{n+1}, \qquad (7.15)$$

причем неизвестной в нем является лишь величина $\delta_u$. Можно поступить и по-другому, учитывая, что $\delta_u = u_j^{n+1} - \hat{u}_j^{n+1}$. Тогда соотношение (7.15) примет вид

$$(u_j^{n+1})^2 \approx 2u_j^{n+1}\hat{u}_j^{n+1} - (\hat{u}_j^{n+1})^2. \qquad (7.16)$$

Описанную линеаризацию можно провести и более формально, используя разложения в ряд Тейлора. Пусть $\eta = u_j^{n+1}$,

$F(\eta)=\eta^2$ и $\eta_1=\hat{u}_j^{n+1}$ — значение $u_j^{n+1}$ на предыдущей итерации. Разлагая функцию $F$ в ряд Тейлора в окрестности значения неизвестной на предыдущей итерации, получим

$$F(\eta_1+\Delta\eta)=F(\eta_1)+F'(\eta_1)\Delta\eta+\ldots. \qquad (7.17)$$

В последнем выражении ряд оборван на члене, содержащем первую производную. Так как $F'(\eta_1)\Delta\eta=2\eta_1\Delta\eta$, то, выразив входящие в соотношение (7.17) величины через $u_j^{n+1}$, получим выражение, совпадающее с (7.15).

Обе формы записи, одна, получающаяся при использовании приращений $\delta_u$, и другая, получающаяся после исключения $\delta_u$ в результате подстановки, эквивалентны и встречаются в литературе. Последнюю форму мы используем в приведенных в этой главе примерах. Основное преимущество линеаризации по Ньютону связано с ускорением сходимости решения разностных уравнений при итерационной замене коэффициентов.

Проиллюстрируем применение рассматриваемого метода на примере полностью неявной ($\theta=1$) схемы, если рассчитывается несжимаемое течение, а уравнения, описывающие законы сохранения, решаются независимо. Наиболее ярко нелинейность проявляется в конечно-разностной аппроксимации члена $\rho u\partial u/\partial x$. Используя линеаризацию по Ньютону, запишем конечно-разностный аналог этого члена, полученный при использовании полностью неявной схемы, в виде

$$\frac{\rho\left[2\hat{u}_j^{n+1}u_j^{n+1}-(\hat{u}_j^{n+1})^2-u_j^n u_j^{n+1}\right]}{\Delta x}. \qquad (7.18)$$

Здесь единственной неизвестной является величина $u_j^{n+1}$. На первой итерации считают, что в качестве величины $\hat{u}_j^{n+1}$ можно использовать $u_j^n$. Немного другой результат получится, если мы проведем линеаризацию этого члена, записанного в математически эквивалентной форме $\rho\partial(u^2/2)/\partial x$.

Если описывающие законы сохранения уравнения решаются независимо, т. е. если из каждого такого уравнения определяется лишь одна неизвестная, то другие нелинейные члены уравнения $\rho v\,\partial u/\partial y$, $\partial/\partial y(\mu\,\partial u/\partial y)$ обычно вычисляются с помощью описанной выше простой итерационной замены коэффициентов.

Если при аппроксимации члена $\rho u\,\partial u/\partial x$ используется линеаризация по Ньютону, что приводит к соотношению (7.18), а при аппроксимации остальных членов — простая итерационная замена коэффициентов, то в результате получается система уравнений с трехдиагональной матрицей, которая может быть решена обычной прогонкой без каких-либо модификаций. Вычисления на каждом шаге по маршевой координате повторяются

два или более раз, при этом каждый раз проводится указанная выше замена коэффициентов.

4. *Линеаризация по Ньютону при совместном решении уравнений*

Некоторые исследователи отмечают, что при итерационной замене коэффициентов в уравнении движения пограничного слоя скорость сходимости итераций на каждом шаге по маршевой координате может быть существенно повышена, если уравнения движения и неразрывности решаются одновременно. При применении метода Кранка — Николсона второй порядок точности достигался при использовании на каждом шаге по маршевой координате лишь одной итерации, если уравнения движения и неразрывности решались совместно [Blottner, 1975a]. Согласно Блоттнеру [Blottner, 1975a], процедура совместного решения уравнений предложена Дэвисом (R. T. Davis) и использовалась в работах [Werle, Bertke, 1972; Werle, Dwoyer, 1972]. В качестве примера опишем процедуру совместного решения уравнений для случая полностью неявной схемы расчета течения несжимаемой жидкости с постоянными свойствами.

Член $u\,\partial u/\partial x$ аппроксимируется в соответствии с соотношением (7.18). Для линеаризации члена $v\,\partial u/\partial y$ воспользуемся соотношениями $v_j^{n+1} = \hat{v}_j^{n+1} + \delta_v$ и $u_j^{n+1} = \hat{u}_j^{n+1} + \delta_u$. На первой итерации в качестве $\hat{v}_j^{n+1}$ и $\hat{u}_j^{n+1}$ обычно выбирают $v_j^n$ и $u_j^n$ соответственно. После отбрасывания членов, содержащих произведения приращений $\delta_v$ и $\delta_u$, получим следующее представление величины $v\,\partial u/\partial y$:

$$\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n+1} \approx \hat{v}^{n+1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n+1} + v^{n+1}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)^{n+1} - \hat{v}^{n+1}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\right)^{n+1}. \tag{7.19}$$

Такой же результат можно получить и при разложении в ряд Тейлора функции двух переменных $v$ и $\partial u/\partial y$, если оборвать разложение на членах, содержащих первые производные.

Конечно-разностные аналоги уравнений неразрывности и движения записываются в виде

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n + u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \tag{7.20}$$

$$\frac{2\hat{u}_j^{n+1}u_j^{n+1} - (\hat{u}_j^{n+1})^2 - u_j^n u_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\hat{v}_j^{n+1}\left(u_{j+1}^{n+1} - \hat{u}_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + \hat{u}_{j-1}^{n+1}\right)}{2\Delta y} + \\ + \frac{v_j^{n+1}\left(\hat{u}_{j+1}^{n+1} - \hat{u}_{j-1}^{n+1}\right)}{2\Delta y} = \frac{\nu}{(\Delta y)^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) + \\ + \frac{(u_e^{n+1})^2 - u_e^{n+1}u_e^n}{\Delta x}. \tag{7.21}$$

Для того чтобы сделать более ясной алгебраическую формулировку этой задачи, перепишем уравнение движения в виде

$$B_j u_{j-1}^{n+1} + D_j u_j^{n+1} + A_j u_{j+1}^{n+1} + a_j v_j^{n+1} + b_j v_{j-1}^{n+1} = C_j, \quad (7.22)$$

где

$$B_j = -\frac{\hat{v}_j^{n+1}}{2\Delta y} - \frac{\nu}{(\Delta y)^2}, \quad D_j = \frac{2\hat{u}_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} + \frac{2\nu}{(\Delta y)^2},$$

$$A_j = \frac{\hat{v}_j^{n+1}}{2\Delta y} - \frac{\nu}{(\Delta y)^2}, \quad a_j = \frac{\hat{u}_{j+1}^{n+1} - \hat{u}_{j-1}^{n+1}}{2\Delta y}, \quad b_j = 0,$$

$$C_j = \frac{(\hat{u}_j^{n+1})^2}{\Delta x} + \hat{v}_j^{n+1} \frac{\hat{u}_{j+1}^{n+1} - \hat{u}_{j-1}^{n+1}}{2\Delta y} + \frac{(u_e^{n+1})^2 - u_e^{n+1} u_e^n}{\Delta x}.$$

В этом примере коэффициент $b_j$ можно опустить, так как он равен нулю. Однако мы будем искать решение уравнений с учетом содержащего $b_j$ члена, так как полученные результаты пригодятся нам при решении других разностных уравнений этой главы.

Для любого значения $j$ в левой части уравнения (7.22) содержатся *четыре* неизвестных $u_{j-1}^{n+1}$, $u_j^{n+1}$, $u_{j+1}^{n+1}$ и $v_j^{n+1}$ (если $b_j \neq 0$, то неизвестных пять). Очевидно, что в этом случае матрица коэффициентов уравнения уже не является трехдиагональной. Однако так как уравнение неразрывности может быть записано в виде

$$v_j^{n+1} = v_{j-1}^{n+1} - e_j (u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1}) + d_j, \quad (7.23)$$

где

$$e_j = \frac{\Delta y}{2\Delta x}, \quad d_j = \frac{(u_{j-1}^n + u_j^n)\Delta y}{2\Delta x},$$

то уравнения (7.22) и (7.23) при их совместном решении образуют систему уравнений с блочной трехдиагональной матрицей (см. приложение В), блоки которой имеют размер $2 \times 2$. Разработан метод решения такой системы уравнений (см. также [Werle et al., 1973] или [Blottner, 1975a]), иногда называемый *модифицированной прогонкой*. При использовании этого метода сначала исключаются блоки, расположенные над главной диагональю. После этого неизвестные составляющие скорости $u_j^{n+1}$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$u_j^{n+1} = E_j u_{j-1}^{n+1} + F_j + G_j v_{j-1}^{n+1},$$

причем $E_j$, $F_j$, $G_j$ и $v_{j-1}^{n+1}$ определяются по приведенным ниже соотношениям. Условия на верхней границе пограничного слоя при $j = J$ имеют вид

$$E_J = 0, \quad F_J = u_J^{n+1} \text{ (заданное граничное условие)}, \quad G_J = 0.$$

Зная их для $j = J - 1, J - 2, \ldots, 2$, можно вычислить

$$\bar{D}_j = D_j + A_j E_{j+1} - e_j (A_j G_{j+1} + a_j),$$
$$E_j = -\left(\frac{B_j - e_j (A_j G_{j+1} + a_j)}{\bar{D}_j}\right),$$
$$F_j = \frac{C_j - A_j F_{j+1} - d_j (A_j G_{j+1} + a_j)}{\bar{D}_j},$$
$$G_j = -\left(\frac{A_j G_{j+1} + a_j + b_j}{\bar{D}_j}\right).$$

Используя далее условия на нижней границе, найдем, что $v_1^{n+1} = 0$, $u_1^{n+1} = 0$. После этого по формулам

$$u_j^{n+1} = E_j u_{j-1}^{n+1} + F_j + G_j v_{j-1}^{n+1},$$
$$v_j^{n+1} = v_{j-1}^{n+1} - e_j (u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1}) + d_j$$

вычисляются составляющие скорости при $j = 2, \ldots, J$. Описанная процедура сводится к обычной скалярной прогонке (в том случае, когда расположенные над главной диагональю элементы исключены), применяемой для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей, если $a_j$, $b_j$, $e_j$ и $d_j$ положить равными нулю. Описанная система уравнений может быть решена и с использованием общего алгоритма решения систем уравнений с блочной трехдиагональной матрицей, который описан в приложении В. Однако приведенный в этом разделе алгоритм эффективнее, так как он предназначен специально для решения систем уравнений вида (7.22) и (7.23).

Эту процедуру можно использовать и для расчета течений сжимаемого газа с переменными свойствами (см. [Blottner, 1975a]). В этом случае уравнение энергии почти всегда решается независимо.

5. *Экстраполяция коэффициентов*

Значения коэффициентов на $(n + 1)$-м слое можно получить, экстраполируя значения, уже известные на $n$ предыдущих слоях. Формально при этом можно в соответствии с нашим желанием обеспечить любую сколь угодно малую погрешность аппроксимации. Например, мы можем написать

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n \Delta x_+ + O(\Delta x)^2.$$

Аппроксимируя производную $(\partial u/\partial x)_j^n$ лишь с первым порядком точности, например по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta x_-} + O(\Delta x),$$

получаем следующее выражение для величины $u_j^{n+1}$, которое формально имеет погрешность аппроксимации $O(\Delta x)^2$:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta x_-}\Delta x_+ + O((\Delta x)^2).$$

Аналогичную процедуру можно использовать и для вычисления других необходимых на $(n+1)$-м слое коэффициентов. Рассматриваемый подход был успешно применен для расчета пограничного слоя Харрисом [Harris, 1971].

*Рекомендации.* Во многих случаях при проведении расчетов пограничного слоя линеаризация коэффициентов $u$, $v$ и свойств жидкости (если рассматриваются течения с переменной температурой), осуществляемая методом запаздывающих коэффициентов, не приводит к существенному снижению точности получаемых результатов. Вносимая такой линеаризацией погрешность является просто погрешностью аппроксимации, и ее величина определяется размером шага по маршевой координате. Используя этот подход, многие исследователи получили удовлетворительные результаты. В тех случаях, когда такая линеаризация ведет к возникновению каких-либо специфических затруднений, мы советуем применять экстраполяцию коэффициентов или линеаризацию по Ньютону при совместном решении уравнений неразрывности и движения.

Первый подход не требует проведения итераций и, следовательно, более экономичен с точки зрения затрат машинного времени. Защищая метод экстраполяции коэффициентов, Макдональд [McDonald, 1978] отметил, что если итерации проводятся лишь для уменьшения связанной с линеаризацией погрешности аппроксимации, то при тех же затратах машинного времени точность расчета можно повысить, уменьшая шаг по маршевой координате. При этом одновременно уменьшается погрешность, связанная с аппроксимацией производных по маршевой координате. Требуемая точность получения результатов зависит от решаемой задачи. Однако ясно, что для решения задачи желательно использовать согласованную разностную схему, позволяющую при расчете получить погрешность, меньшую любой заранее заданной величины. Особо отметим, что при расчете турбулентных течений неопределенность экспериментальных

данных, используемых для проверки результатов расчета, а также неточность моделей турбулентности приводят к тому, что проводить расчеты с погрешностью, меньшей нескольких процентов (по крайней мере 3—5 %), не имеет смысла. Поэтому целесообразность использования для расчета таких течений схем высокого порядка точности (имеющих высокий порядок аппроксимации) определяется лишь возможностью экономии машинного времени, так как эти методы позволяют применять более грубые сетки.

*Замечание об устойчивости.* Обычно предполагают, что при $\theta \geqslant 1/2$ неявные разностные схемы абсолютно устойчивы (по Нейману). Схема Кранка — Николсона удовлетворяет условию абсолютной устойчивости при минимально допустимом значении $\theta$. Однако это условие устойчивости получено для линейных уравнений, а обобщение его на нелинейные уравнения носит эвристический характер.

Иногда, особенно при расчете турбулентных течений, схема Кранка — Николсона становится неустойчивой, поэтому более популярной является полностью неявная схема. При ее использовании формально второго порядка точности можно достичь, применяя трехточечную аппроксимацию производных по маршевой координате и экстраполяцию коэффициентов. Например, если шаг сетки постоянный, то конвективный член

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}$$

можно представить в виде

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\left(2u_j^n-u_j^{n-1}\right)\left(3u_j^{n+1}-4u_j^n+u_j^{n-1}\right)}{2\Delta x}+$$
$$+\frac{\left(2v_j^n-v_j^{n-1}\right)\left(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)}{2\Delta y}+O\left(\Delta x\right)^2+O\left(\Delta y\right)^2. \quad (7.24)$$

Обобщение этого представления конвективного члена на случай отличных от константы шагов сетки $\Delta x$ и $\Delta y$ связано с незначительным усложнением алгебраических выражений [Harris, 1971].

Существует еще одно существенное ограничение на использованиие рассматриваемых неявных разностных методов расчета пограничного слоя. Если выбранные шаги сетки таковы, что конвективный перенос (в уравнении движения или энергии) преобладает над диффузионным переносом, то возникает во многом похожее на численную неустойчивость поведение решения, хотя метод Неймана не указывает в этом случае на возник-

новение неустойчивости. Можно выделить две причины, приводящие к указанному затруднению при проведении расчетов. Во-первых, при решении уравнений с трехдиагональной матрицей методом исключения погрешность вычислений может сильно возрастать, если в матрице коэффициентов нет диагонального преобладания, т. е. при использовании введенных при описании прогонки обозначений, если $|D_j|$ не превосходит $|B_j|+|A_j|$. Это свойство метода исключения известно давно, но оно лишь недавно было привлечено к анализу неявных разностных схем Хёршем и Руди [Hirsh, Rudy, 1974]. До этого аналогичные затруднения в проведении расчетов возникли у Патанкара и Сполдинга (Patankar, Spalding, 1970], которые для преодоления этих затруднений предложили средство, названное ими «коррекцией большого дополнительного расхода».

Второй не менее важной причиной возникновения указанных выше затруднений является неправильное описание физических процессов, связанное с тем, что при выбранных шагах разностной сетки конечно-разностный аналог неправильно описывает вязкое течение. Аналогичные проблемы, возникающие при решении уравнения Бюргерса, рассмотрены в гл. 4. Можно показать, что, удовлетворяя необходимым условиям правильного описания физических процессов разностными уравнениями, мы одновременно удовлетворяем достаточным условиям диагонального преобладания.

Для иллюстрации причины возникновения указанных затруднений рассмотрим разностную схему, получающуюся при решении уравнения движения пограничного слоя газа с постоянными теплофизическими свойствами полностью неявным методом. Если воспользоваться методом запаздывающих коэффициентов, то конечно-разностную схему можно записать в виде

$$B_j u_{j-1}^{n+1} + D_j u_j^{n+1} + A_j u_{j+1}^{n+1} = C_j, \tag{7.25}$$

где

$$B_j = -\frac{v_j^n}{2\Delta y} - \frac{\nu}{(\Delta y)^2}, \quad D_j = \frac{u_j^n}{\Delta x} + \frac{2\nu}{(\Delta y)^2},$$

$$A_j = \frac{v_j^n}{2\Delta y} - \frac{\nu}{(\Delta y)^2}, \quad C_j = \frac{(u_j^n)^2}{\Delta x} + u_e^n \frac{(u_e^{n+1} - u_e^n)}{\Delta x}.$$

Исходя из предсказываемого видом уравнения (7.25) поведения величины $u_j^{n+1}$ при изменении $u_{j-1}^{n+1}$ и $u_{j+1}^{n+1}$, можно предположить, что характерное для вязкой жидкости поведение решения будет наблюдаться в тех случаях, когда оба коэффициента $A_j$ и $B_j$ отрицательны. Для вязкой жидкости характерно,

что при уменьшении скорости сверху $(u_{j+1}^{n+1})$ или снизу $(u_{j-1}^{n+1})$ от точки $(n+1, j)$ скорость $u_j^{n+1}$ в точке $(n+1, j)$ также уменьшается за счет вязких эффектов. Из (7.25) очевидно, что если хотя бы один из коэффициентов $A_j$ или $B_j$ положителен, то это свойство решения не выполняется. Условие отрицательности коэффициентов $A_j$ и $B_j$ имеет вид

$$\frac{|v_j^n|}{2\Delta y} - \frac{\nu}{(\Delta y)^2} < 0$$

или

$$|v_j^n| \Delta y/\nu \leqslant 2. \tag{7.26}$$

Соотношение (7.26) подтверждает наше предположение о том, что «корректным» является конечно-разностный аналог, обеспечивающий характерное для вязкого случая поведение решения. Неравенству (7.26) можно удовлетворить, выбрав достаточно мелкую сетку, что всегда можно сделать при использовании сходящихся разностных схем. Величина $|v_j^n| \Delta y/\nu$ является просто *сеточным числом Рейнольдса.* Иногда ее называют более общим термином — *сеточное число Пекле.*

Удовлетворяя неравенству (7.26), мы одновременно удовлетворяем достаточному (но не необходимому) условию диагонального преобладания получающейся системы уравнений. По-видимому, при проведении расчетов наиболее важным является обеспечение отрицательности коэффициентов $A_j$ и $B_j$, что позволяет правильно описывать вязкие эффекты. То, что в этом случае при решении системы алгебраических уравнений не наблюдается рост ошибки, является случайным совпадением. Для рассматриваемой разностной схемы мы должны будем признать непригодным даже свободное от численных ошибок решение (если мы сможем его получить) при $|v_j^n| \Delta y/\nu \gg 2$, исходя из физических соображений. С другой стороны, в некоторых случаях рост ошибки при решении уравнений методом исключения может затруднить проведение расчетов.

Для некоторых течений выполнение условия (7.26) требует использования сеток с очень большим числом узлов, что стимулировало некоторых исследователей рассмотреть возможные способы изменения разностной схемы, позволяющие исключить влияние сеточного числа Рейнольдса. Большинство посвященных этому вопросу исследований относится к более сложному случаю уравнений Навье — Стокса, когда вопросы экономичности численных методов оказываются более острыми. Проще всего избавиться от ограничений на сеточное число Рейнольдса, заменив при аппроксимации члена $v\partial u/\partial y$ центральные раз-

ности на односторонние разности против потока:

$$v\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{v_j^n\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)}{\Delta y} \quad \text{при } v_j^n > 0,$$

$$\frac{v_j^n\left(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}\right)}{\Delta y} \quad \text{при } v_j^n < 0.$$

Возникающая при использовании схемы с разностями против потока погрешность аппроксимации приводит к появлению схемной вязкости, которая усиливает вязкий характер решения и в некоторых случаях уменьшает точность получаемых результатов.

Вопрос о выборе наиболее подходящей аппроксимации производных при больших сеточных числах Рейнольдса все еще горячо обсуждается в современной научно-технической литературе, так как он до сих пор не нашел удовлетворительного решения. Можно, конечно, использовать схемы с разностями против потока, имеющие более приемлемую погрешность аппроксимации (используя два или больше расположенных выше по потоку узла), но тогда может получиться система уравнений с отличной от трехдиагональной матрицей коэффициентов, а это явный недостаток разностной схемы. Большинство примеров расчетов, показывающих нежелательные эффекты, связанные с использованием разностей против потока, относится к уравнениям Навье — Стокса. Для уравнений пограничного слоя таких результатов намного меньше. На основе имеющегося опыта можно предположить, что использование для аппроксимации члена $v\partial u/\partial y$ разностей против потока (в тех случаях, когда это связано с сеточным числом Рейнольдса) является достаточным для выполнения условия (7.26). Использовать для аппроксимации этого члена центральные разности мы, естественно, рекомендуем всегда, когда это только возможно.

Обычно при программировании на ЭВМ для перехода с одной разностной схемы на другую используют логические операторы. Когда сеточное число Рейнольдса превышает два, мы советуем не переходить сразу от центральных разностей к разностям против потока, а воспользоваться комбинацией односторонней (против потока) и центральной разностных аппроксимаций производных (т. е. воспользоваться «гибридной» разностной схемой). Впервые такой подход был предложен Алленом и Саусвеллом [Allen, Southwell, 1955]. Впоследствии, по-видимому не без влияния этой первой работы, аналогичные или даже идентичные конечно-разностные аналоги производных были предложены в работах [Spalding, 1972; Raithby, Torrance, 1974]. Для иллюстрации основных принципов построения такой

схемы рассмотрим случай $v_j^n > 0$. Пусть $R_{\Delta y}$ равно $|v_j^n|\Delta y/\nu$, а $R_c$ равно требуемому критическому значению сеточного числа Рейнольдса, при котором происходит переход к гибридной схеме, $R_c \leqslant 2$. Тогда при $v_j^n > 0$ и $R_{\Delta y} \geqslant R_c$ запишем конечно-разностной аналог величины $v\partial u/\partial y$ в виде

$$v\frac{\partial u}{\partial y} \approx \left(\frac{R_c}{R_{\Delta y}}\right) v_j^n \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{2\Delta y} + \left(1 - \frac{R_c}{R_{\Delta y}}\right) v_j^n \frac{(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{\Delta y}. \tag{7.27}$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства обозначает центрально-разностную аппроксимацию производной, а второе — аппроксимацию с разностями против потока. Конечно-разностная аппроксимация (7.27) написана для случая $v_j^n > 0$. Член с разностями против потока должен быть, естественно, записан по-другому, если направление потока изменится, т. е. если $v_j^n < 0$. Вид конечно-разностного аналога в этом случае очевиден.

Мы видим, что при увеличении $R_{\Delta y}$ стоящее в правой части взвешенное среднее разностных производных приближается к разностной производной против потока. При $R_{\Delta y} \to \infty$ производные аппроксимируются в точности разностями против потока. Гибридная схема гарантирует получение отрицательных значений коэффициентов $A_j$ и $B_j$ в уравнении (7.25) и при этом максимально использует центрально-разностную аппроксимацию производной.

Познакомиться с литературой, посвященной роли сеточного числа Рейнольдса и некоторым последним предложениям по решению возникающих при этом проблем, можно в работах [Raithby, 1976; Leonard, 1979a, 1979b; Chow, Tien, 1978]. Вполне вероятно, что вместо гибридной схемы, использующей комбинацию центральных разностей и разностей против потока, со временем будет предложен более подходящий способ построения разностных схем, удовлетворяющих ограничению на величину сеточного числа Рейнольдса. В настоящий момент, однако, у ученых нет единого мнения ни о значительности ошибки, возникающей при решении уравнений пограничного слоя по гибридной схеме, ни о наилучшей альтернативной процедуре.

Интересно отметить, что в научно-технической литературе нет указаний на то, что величина сеточного числа Рейнольдса накладывает какие-либо ограничения на возможность применения разностных схем решения уравнений пограничного слоя в тех случаях, когда уравнения неразрывности и движения ре-

шаются одновременно, например по описанной в этой главе схеме Дэвиса или приведенному в п. 7.3.5 модифицированному блочному методу. При совместном решении уравнений величина $v$ в члене $v\partial u/\partial y$ рассматривается в алгебраических уравнениях как неизвестная, а не как коэффициент при неизвестной $u$. По-видимому, при совместном решении уравнений неразрывности и движения пропадают осцилляции и нефизическое поведение решения, наблюдаемые в тех случаях, когда при больших сеточных числах Рейнольдса используются центральные разности. Другой вопрос — является ли получаемое при этом гладкое решение более точным, чем решение, полученное при независимом расчете уравнений неразрывности и движения с использованием разностей против потока.

*Заключительное замечание о методе Кранка — Николсона и полностью неявном методе.* Приведенные в этом разделе разностные схемы специально были использованы для решения уравнений, записанных в физической системе координат, а разностные уравнения были выписаны для случая постоянных шагов сетки $\Delta x$ и $\Delta y$. Это было сделано в основном для того, чтобы при изучении основных особенностей разностных схем иметь дело с наиболее простыми по виду уравнениями. Теперь, когда мы познакомились с основными особенностями конечно-разностных методов решения уравнений пограничного слоя, мы покажем, как их можно распространить на случай неравномерных сеток.

Программы расчета на ЭВМ, основанные на применении неявных методов, уже описаны в имеющейся литературе, поэтому они в этой книге не приводятся. Широко известный метод Патанкара — Сполдинга основан на полностью неявном методе и подробно описан в работе [Patankar, Spalding, 1970]. Еще одна программа STAN5, основанная на применении полностью неявной схемы, подробно описана в работе [Crawford, Kays, 1975].

### 7.3.4. Метод Дюфорта — Франкела

В качестве еще одного конечно-разностного метода, позволяющего рассчитывать ламинарные и турбулентные пограничные слои, опишем метод, являющийся обобщением предложенного Дюфортом и Франкелом [DuFort, Frankel, 1953] метода решения уравнения теплопроводности. Конечно-разностный аналог уравнений пограничного слоя мы запишем в виде, позволяющем использовать неравномерные сетки. Пусть $\Delta x_+ = x^{n+1} - x^n$, $\Delta x_- = x^n - x^{n-1}$, $\Delta y_+ = y_{j+1} - y_j$, $\Delta y_- = y_j - y_{j-1}$. Описанные в предыдущем разделе неявные схемы могут быть обоб-

щены на случай неравномерной сетки аналогичным приведенному ниже методом.

При описании метода Дюфорта — Франкела решения уравнений движения и энергии воспользуемся обобщенным уравнением переноса (7.5). Неизвестная $\phi$ в этом уравнении может обозначать составляющую скорости, параметр модели турбулентности или термодинамическую переменную, такую, как температура или энтальпия. В схеме Дюфорта — Франкела устойчивость достигается исключением из диффузионного члена величины $\bar{\phi}_j^n$ путем замены ее средним значением $\phi$ на $(n+1)$-м и $(n-1)$-м слоях. Однако Дэнси и Плетчер [Dancey, Pletcher, 1974] показали, что на неравномерной сетке более точные результаты получаются при линейной интерполяции $\phi$ между $(n+1)$-м и $(n-1)$-м слоями, а не при простом осреднении. При использовании линейной интерполяции значение $\bar{\phi}_j^n$ определяется соотношением $\bar{\phi}_j^n = (\Delta x_+ \phi_j^{n-1} + \Delta x_- \phi_j^{n+1})/(\Delta x_+ + \Delta x_-)$. Как и раньше, мы предполагаем, что в случае турбулентных течений $u$ и $v$ — осредненные по времени значения соответствующих составляющих скорости. В случае сжимаемых течений $v = \tilde{v}$. Для построения более общей схемы положим, что $\bar{\lambda} = \lambda_T + \lambda$, где $\lambda_T$ — коэффициент турбулентной диффузии. При использовании метода Дюфорта — Франкела конечно-разностный аналог обобщенного уравнения переноса имеет вид

$$\frac{\rho_j^n u_j^n (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})}{\Delta x_+ + \Delta x_-} + \frac{\rho_j^n v_j^n (\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n)}{\Delta y_+ + \Delta y_-} =$$

$$= \frac{2}{\Delta y_+ + \Delta y_-} \left[ \frac{\bar{\lambda}_{j+1/2}^n (\phi_{j+1}^n - \bar{\phi}_j^n)}{\Delta y_+} - \frac{\bar{\lambda}_{j-1/2}^n (\bar{\phi}_j^n - \phi_{j-1}^n)}{\Delta y_-} \right] + S_j^n. \quad (7.28)$$

В последнем соотношении $S_j^n$ — источниковый член. Приведем примеры наиболее часто встречающихся источниковых членов. В уравнении движения в проекции на ось $x$ это член с градиентом давления $dp/dx$:

$$S_j^n = \frac{p_j^{n+1} - p_j^{n-1}}{\Delta x_+ + \Delta x_-}.$$

Вязкий диссипативный член $\bar{\mu}(\partial u/\partial y)^2$ является источниковым членом в уравнении энергии, если в качестве термодинамической неизвестной используется температура $T$:

$$S_j^n = \bar{\mu}_j^n \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta y_+ + \Delta y_-} \right)^2.$$

Диссипативный член $C_D\rho(\bar{k})^{3/2}/l$ является источниковым членом в модельном уравнении для кинетической энергии турбулентности $\bar{k}$:

$$S_j^n = C_D\rho_j^n\left(\frac{\Delta y_+(\bar{k})_{j-1}^n + \Delta y_-(\bar{k})_{j+1}^n}{\Delta y_+ + \Delta y_-}\right)^{1/2}\left(\frac{\Delta x_+(\bar{k})_j^{n-1} + \Delta x_-(\bar{k})_j^{n+1}}{\Delta x_+ + \Delta x_-}\right)\Big/ l_j^n.$$

Отметим, что последнее выражение записано так, чтобы в него не входило значение $\bar{k}$ в узле $(n, j)$ разностной сетки. Это необходимо для обеспечения устойчивости разностной схемы (см. [Malik, Pletcher, 1978]). Необходимость такой записи диссипативного члена можно было предвидеть заранее, учитывая указанный выше способ аппроксимации диффузионного члена.

Мы уже указывали (гл. 4), что схема Дюфорта — Франкела явная. Хотя неизвестная $\phi_j^{n+1}$ фигурирует и в левой, и в правой частях разностного уравнения (в правой части по определению величины $\overline{\phi_j^n}$), это уравнение можно преобразовать так, чтобы выделить неизвестную $\phi_j^{n+1}$. Тогда мы получим уравнение вида $\phi_j^{n+1} =$ (все известные величины на $n$-м и $(n-1)$-м слоях). Формально при $\Delta x_+ = \Delta x_-$ и $\Delta y_+ = \Delta y_-$ погрешность аппроксимации равна $O(\Delta x)^2 + O(\Delta y)^2 + O(\Delta x/\Delta y)^2$. Однако главный член в выражении для погрешности аппроксимации $O(\Delta x/\Delta y)^2$ на самом деле равен $(\Delta x/\Delta y)^2(\partial^2\phi/\partial x^2)$, а в случае пограничного слоя предполагается, что производная $\partial^2\phi/\partial x^2$ мала.

Можно показать, что при использовании неравномерных сеток погрешность аппроксимации обычно возрастает, хотя в работе Блоттнера [Blottner, 1974] указаны некоторые исключения из этого правила. Такое снижение точности аппроксимации будет характерно для всех описанных в этой главе методов расчета пограничного слоя. На практике можно пренебречь увеличением погрешности, связанной с использованием неравномерной сетки. Почти всегда можно указать способ, восстанавливающий первоначальную точность аппроксимации за счет увеличения числа алгебраических операций. Например, Хонг [Hong, 1974] показал, что если производную по маршевой координате $\partial\phi/\partial x$ записать при использовании метода Дюфорта — Франкела в виде

$$\frac{(\Delta x_-)^2\phi_j^{n+1} - (\Delta x_+)^2\phi_j^{n-1} + (\Delta x_+^2 - \Delta x_-^2)\phi_j^n}{\Delta x_-\Delta x_+^2 + \Delta x_+\Delta x_-^2},$$

то второй порядок аппроксимации будет достигнут и при $\Delta x_+ \neq \Delta x_-$.

Соответствующая конечно-разностная аппроксимация уравнения неразрывности может быть записана в виде

$$\frac{\rho_j^{n+1}v_j^{n+1}-\rho_{j-1}^{n+1}v_{j-1}^{n+1}}{\Delta y_-}+\frac{\rho_j^{n+1}u_j^{n+1}-\rho_j^{n-1}u_j^{n-1}+\rho_{j-1}^{n+1}u_{j-1}^{n+1}-\rho_{-1j}^{n-1}u_{j-1}^{n-1}}{2(\Delta x_+ + \Delta x_-)}=0. \tag{7.29}$$

Погрешность аппроксимации составляет в этом случае $O(\Delta x)+O(\Delta y)^2$.

Анализ устойчивости, проведенный для случая $\Delta y = \text{const}$ [Madni, Pletcher, 1975a, 1975b], приводит к условию устойчивости

$$\Delta x_+ \leqslant \frac{\rho_j^n u_j^n \Delta y}{\left|\rho_j^n v_j^n + (\bar{\lambda}_{j-1}^n - \bar{\lambda}_{j+1}^n)/2\Delta y\right|}. \tag{7.30}$$

По-видимому, это условие можно использовать для грубой оценки устойчивости схемы и при переменном шаге сетки $\Delta y$. На практике оно не накладывает сколь-нибудь серьезных ограничений на размер шага по маршевой координате, вероятно, вследствие того, что отношение $v/u$ обычно мало, а второй член в знаменателе пропорционален разности коэффициентов диффузии, а не самим этим коэффициентам.

Условие устойчивости было получено методом Неймана, при этом коэффициенты уравнения локально рассматривались как константы. Интересно отметить, что неравенство (7.30) следует непосредственно из условия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви, а не из ограничений, связанных с диффузионным членом в уравнении движения пограничного слоя. Это становится очевидным, если диффузионный член $\partial/\partial y(\bar{\lambda}\partial\phi/\partial y)$ представить как сумму двух членов и переписать уравнения пограничного слоя в виде

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{\rho u}\left(\rho v-\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial y}\right)\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\bar{\lambda}}{\rho u}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{S}{\rho u}.$$

Теперь простое применение условия КФЛ приводит к неравенству (7.30).

Расчет пограничного слоя начинается с задания начального распределения переменной $\phi$. Так как при использовании схемы Дюфорта — Франкела надо иметь информацию о решении на двух слоях по маршевой координате, то необходимо каким-либо другим методом получить решение хотя бы на одном слое, прежде чем схема Дюфорта — Франкела сможет быть применена. Чаще всего эти начальные значения определяют, используя простую явную схему. Обычно при расчете пограничного слоя надо найти решение уравнений движения, неразрывности и энер-

гии. Эти уравнения можно решать независимо, начиная с уравнения движения. Обычно расчет начинают с вычисления продольной составляющей скорости в ближайшем к стенке узле сетки и движутся к внешней границе пограничного слоя. Предполагается, что внешняя граница достигнута, если полученная в ходе расчета продольная составляющая скорости отличается от заданной скорости на внешней границе не более чем на некоторую заранее выбранную величину. Аналогично можно решить уравнение энергии и определить термодинамическую неизвестную. Плотность в новом сечении можно определить из уравнения состояния. И наконец, уравнение неразрывности используется для получения нормальной составляющей скорости на $(n+1)$-м слое, начиная от ближайшего к стенке узла и двигаясь к внешней границе пограничного слоя.

По-видимому, наиболее привлекательным свойством схемы Дюфорта — Франкела является ее явный характер. Те, кто не имеет опыта применения численных методов, обычно более комфортабельно чувствуют себя при программировании явных, а не неявных разностных схем. Вторым важным свойством рассматриваемой схемы является то, что никакой дополнительной линеаризации, итераций или предположений для вычисления коэффициентов уравнений не требуется, так как в уравнения входят значения коэффициентов на $n$-м слое, где они уже известны. Остальные подробности, связанные с применением методов типа Дюфорта — Франкела к расчету пристенных пограничных слоев, можно найти в работах Плетчера [Pletcher 1969, 1970, 1971].

#### 7.3.5. Блочный метод Келлера и модифицированный блочный метод

Блочный метод Келлера [Keller, 1970] решения параболических уравнений в частных производных был модифицирован для расчета турбулентных пограничных слоев Келлером и Цебеци [Keller, Cebeci, 1972] и подробно описана в работе [Cebeci, Smith, 1974]. Это неявный метод, имеющий формально второй порядок точности, он отличается от других неявных методов второго порядка точности тем, что шаги сетки с самого начала полагаются произвольными. Вторые производные заменяются первыми; для этого вводятся дополнительные неизвестные (и дополнительные уравнения). Рассматриваемый метод приводит к более сложным алгебраическим уравнениям, чем большинство других методов решения уравнения теплопроводности, поэтому он не был описан в гл. 4.

Сначала мы обрисуем блочный метод Келлера в общих чертах, для того чтобы показать его основное отличие от других ме-

тодов второго порядка точности, например от метода Кранка — Николсона. Вернемся к уравнению теплопроводности и покажем, как при применении этого метода проводится аппроксимация первых и вторых производных. Итак, рассмотрим уравнение

$$\partial u/\partial t = \alpha \partial^2 u/\partial x^2.$$

Если ввести функцию $v = \partial u/\partial x$, то исходное уравнение в частных производных второго порядка можно заменить системой двух уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \tag{7.31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7.32}$$

Теперь мы постараемся построить конечно-разностные аналоги этих уравнений, используя лишь центральные разности и

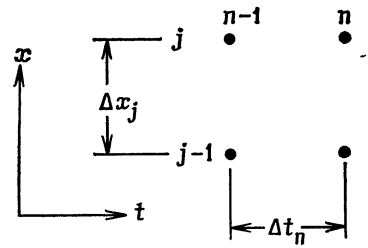



Рис. 7.2. Разностная сетка для блочного метода Келлера.

значения функций в четырех вершинах прямоугольника («блока») с центром в точке $(n - 1/2,\ j - 1/2)$ (рис. 7.2). Сеточные функции, содержащие $1/2$ в верхнем или нижнем индексе, по определению являются средними значениями. Например,

$$u^n_{j-1/2} = \frac{u^n_j + u^n_{j-1}}{2},$$

$$v^{n-1/2}_j = \frac{v^n_j + v^{n-1}_j}{2}.$$

При использовании центральных разностей для аппроксимации уравнений (7.31) и (7.32) получим (рис. 7.3 и 7.4)

$$\frac{u^n_j - u^n_{j-1}}{\Delta x_j} = v^n_{j-1/2}, \tag{7.33}$$

$$\frac{u^n_{j-1/2} - u^{n-1}_{j-1/2}}{\Delta t_n} = \frac{\alpha\left(v^{n-1/2}_j - v^{n-1/2}_{j-1}\right)}{\Delta x_j}. \tag{7.34}$$

Система уравнений (7.33) и (7.34) может быть записана в блочной трехдиагональной форме с блоками размером $2 \times 2$. Ее можно решить, используя блочный метод исключения [Keller, 1970]. Можно поступить и по-другому: сохранив используемый в блочном методе Келлера шаблон, так скомбинировать конечно-разностные аналоги уравнений в двух соседних узлах, чтобы исключить одну из переменных и получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей. Последняя может быть эффективно решена прогонкой. Такое изменение блочного метода

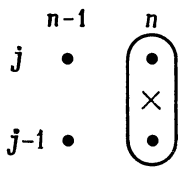



Рис. 7.3. Шаблон для вычисления $v^n_{j-1/2}$.

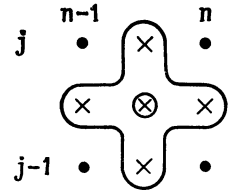



Рис. 7.4. Шаблон для уравнения (7.34).

Келлера, позволяющее упростить окончательную алгебраическую формулировку задачи, мы будем называть *модифицированным блочным методом.*

**Применение модифицированного блочного метода для решения уравнения теплопроводности.** Для начала запишем конечно-разностные аналоги уравнений (7.31) и (7.32) так же, как и в случае блочного метода Келлера, но решение будем искать на $(n+1)$-м слое по маршевой координате. Такая запись разностной схемы лучше согласуется с принятой записью других разностных схем решения маршевых задач, которые были описаны в гл. 4. Итак, имеем

$$\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_j} = v_{j-1/2}^{n+1} = \frac{v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{2}, \tag{7.35}$$

$$\frac{u_{j-1/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n}}{\Delta t_{n+1}} = \alpha \frac{v_j^{n+1/2} - v_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x_j} = \alpha \frac{v_j^n + v_j^{n+1} - v_{j-1}^n - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x_j}. \tag{7.36}$$

Как и раньше, сеточные функции, содержащие $^1/_2$ в индексе, по определению являются средними значениями неизвестных в узлах сетки. Уравнение (7.36) можно переписать в виде

$$\frac{u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta t_{n+1}} = \alpha \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_j} + \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t_{n+1}} + \alpha \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x_j}. \tag{7.37}$$

Основная идея модифицированного блочного метода состоит в том, чтобы выразить все $v$ через $u$. Величина $v_{j-1}^{n+1}$ может быть исключена из уравнения (7.37) простой подстановкой при помощи уравнения (7.35). Аналогично величину $v_{j-1}^{n}$ можно исключить, подставив ее из уравнения (7.35), записанного на $n$-м временно́м слое. Это дает

$$\frac{u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta t_{n+1}}=2\alpha\frac{v_j^{n+1}}{\Delta x_j}-2\alpha\frac{u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x_j)^2}+\frac{u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta t_{n+1}}+$$
$$+2\alpha\frac{v_j^n}{\Delta x_j}-2\alpha\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{(\Delta x_j)^2}. \qquad (7.38)$$

Для того чтобы исключить $v_j^{n+1}$ и $v_j^n$, надо переписать уравнения (7.35) и (7.37), увеличив в них индекс $j$ на 1, и сложить их. В результате придем к соотношению

$$\frac{u_{j+1}^{n+1}+u_j^{n+1}}{\Delta t_{n+1}}=\frac{-2\alpha v_j^{n+1}}{\Delta x_{j+1}}+\frac{2\alpha\left(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}\right)}{(\Delta x_{j+1})^2}+\frac{u_{j+1}^n+u_j^n}{\Delta t_{n+1}}+$$
$$+\frac{-2\alpha v_j^n}{\Delta x_{j+1}}+2\alpha\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{(\Delta x_{j+1})^2}. \qquad (7.39)$$

Величины $v_j^{n+1}$ и $v_j^n$ можно исключить, умножив уравнение (7.38) на $\Delta x_j$, уравнение (7.39) на $\Delta x_{j+1}$ и сложив эти два произведения. Полученную систему уравнений можно записать в трехдиагональном виде

$$B_j u_{j-1}^{n+1}+D_j u_j^{n+1}+A_j u_{j+1}^{n+1}=C_j, \qquad (7.40)$$

где

$$B_j=\frac{\Delta x_j}{\Delta t_{n+1}}-\frac{2\alpha}{\Delta x_j},\quad A_j=\frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta t_{n+1}}-\frac{2\alpha}{\Delta x_{j+1}},$$
$$D_j=\frac{\Delta x_j}{\Delta t_{n+1}}+\frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta t_{n+1}}+\frac{2\alpha}{\Delta x_j}+\frac{2\alpha}{\Delta x_{j+1}},$$
$$C_j=2\alpha\frac{u_{j-1}^n-u_j^n}{\Delta x_j}+2\alpha\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x_{j+1}}+$$
$$+\left(u_j^n+u_{j-1}^n\right)\frac{\Delta x_j}{\Delta t_{n+1}}+\left(u_{j+1}^n+u_j^n\right)\frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta t_{n+1}}.$$

Последние соотношения можно немного упростить, если шаг по $x$ постоянен. Но даже тогда для проведения расчетов на каждом шаге надо проводить больше алгебраических вычислений, чем при использовании схемы Кранка — Николсона, которая на равномерной сетке также имеет второй порядок точности. По

идее преимуществом разностных схем, основанных на используемой в блочном методе разностной аппроксимации, является то, что второй порядок точности достигается формально и на неравномерной сетке. Схему Кранка — Николсона можно обобщить на случай неравномерной сетки, применив для аппроксимации вторых производных соотношения (3.98), которыми мы пользовались при построении конечно-разностного аналога уравнения Лапласа. Если шаг сетки произволен, то формально получим разностную схему первого порядка точности. Блоттнер [Blottner, 1974] показал, что в тех случаях, когда введение сетки с неравномерным шагом эквивалентно преобразованию переменных, растягивающему координаты, на такой неравномерной сетке схема Кранка — Николсона имеет второй порядок точности.

**Применение блочного метода для расчета пограничного слоя.** Келлер и Цебеци [Keller, Cebeci, 1972] применили блочный метод для расчета пограничного слоя, преобразовав предварительно уравнения неразрывности и движения в одно уравнение в частных производных третьего порядка. Для этого они воспользовались преобразованиями Степанова — Манглера и Леви — Лиза (см. [Cebeci, Smith, 1974]). Уравнение в частных производных третьего порядка заменяется системой трех уравнений в частных производных первого порядка благодаря введению новых неизвестных. Эти неизвестные вводятся так же, как и при решении обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Далее строятся конечно-разностные аналоги уравнений в частных производных первого порядка и проводится линеаризация по Ньютону. В результате получается система линейных алгебраических уравнений с блочной трехдиагональной матрицей, блоки которой имеют размер $3 \times 3$. Эта система уравнений решается матричной прогонкой (блочным методом исключения). При аналогичной конечно-разностной аппроксимации уравнения энергии также получается система уравнений с блочной трехдиагональной матрицей, но с блоками размера $2 \times 2$.

Мы не будем здесь описывать подробно применение блочного метода Келлера к решению уравнений пограничного слоя, так как все необходимые детали можно найти в работе [Cebeci, Smith, 1974]. Вместо этого мы покажем, как можно построить модифицированную блочную разностную схему. Для решения получающейся в этом случае системы уравнений достаточно воспользоваться модифицированной прогонкой, уже описанной в этой главе при обсуждении метода Дэвиса совместного решения уравнений неразрывности и движения по неявной схеме. По

имеющимся в литературе данным [Blottner, 1975a; Wornom, 1977] применение при решении уравнений пограничного слоя модифицированного блочного метода требует примерно в два раза меньших затрат машинного времени, чем применение стандартного блочного метода Келлера.

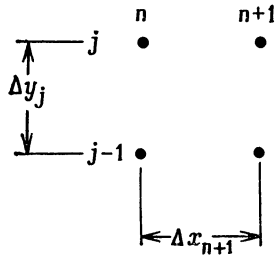



Рис. 7.5. Разностная сетка для модифицированного блочного метода.

Для сжимаемых течений уравнения движения и энергии могут быть записаны в общем виде (7.5). Для прямоугольной системы координат в этом случае имеем

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S, \tag{7.41}$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_T + \lambda$. Уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \tilde{v}}{\partial y} = 0. \tag{7.42}$$

Нумерация узлов сетки и обозначение шагов показаны на рис. 7.5. Обозначим

$$\tilde{\lambda}\,(\partial\phi/\partial y) = q, \quad D = S + \frac{\partial q}{\partial y} - \rho \tilde{v} \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

тогда уравнение (7.41) можно записать в виде

$$\rho u\, \partial\phi/\partial x = D. \tag{7.43}$$

Конечно-разностный аналог этого уравнения запишем для центра ячейки («блока»):

$$\frac{(\rho u)^{n+1}_{j-1/2} + (\rho u)^{n}_{j-1/2}}{2} \frac{\phi^{n+1}_{j-1/2} - \phi^{n}_{j-1/2}}{\Delta x_{n+1}} = S^{n+1/2}_{j-1/2} - \\ - \frac{(\rho \tilde{v})^{n+1/2}_{j-1/2} \left(\phi^{n+1/2}_{j} - \phi^{n+1/2}_{j-1}\right)}{\Delta y_j} + \frac{q^{n+1/2}_{j} - q^{n+1/2}_{j-1}}{\Delta y_j}. \tag{7.44}$$

Используя определение величины $q^{n+1/2}_{j-1/2}$,

$$\bar{\lambda}^{n+1/2}_{j-1/2} \frac{\phi^{n+1/2}_{j} - \phi^{n+1/2}_{j-1}}{\Delta y_j} = \frac{q^{n+1/2}_{j} + q^{n+1/2}_{j-1}}{2}, \tag{7.45}$$

можно исключить $q_{j-1}^{n+1/2}$ из уравнения (7.44). Тогда получим

$$\frac{(\rho u)_{j-1/2}^{n+1}+(\rho u)_{j-1/2}^{n}}{2}\frac{\phi_{j-1/2}^{n+1}-\phi_{x-1/2}^{n}}{\Delta x_{n+1}}=$$

$$=S_{j-1/2}^{n+1/2}-(\rho\tilde{v})_{j-1/2}^{n+1/2}\frac{\phi_j^{n+1/2}-\phi_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta y_j}+\frac{2q_j^{n+1/2}}{\Delta y_j}-$$

$$-2\bar{\lambda}_{j-1/2}^{n+1/2}\frac{\phi_j^{n+1/2}-\phi_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta y_j^2}. \quad (7.46)$$

Аналогично можно написать конечно-разностный аналог дифференциального уравнения в точке $(n+1/2,\ j+1/2)$ и исключить величину $q_{j+1}^{n+1/2}$ из этого уравнения при помощи определения величины $q_{j+1/2}^{n+1/2}$. В результате найдем, что

$$\frac{(\rho u)_{j+1/2}^{n+1}+(\rho u)_{j+1/2}^{n}}{2}\frac{\phi_{j+1/2}^{n+1}-\phi_{j+1/2}^{n}}{\Delta x_{n+1}}=$$

$$=S_{j+1/2}^{n+1/2}-(\rho\tilde{v})_{j+1/2}^{n+1/2}\frac{\phi_{j+1}^{n+1/2}-\phi_j^{n+1/2}}{\Delta y_{j+1}}+$$

$$+2\bar{\lambda}_{j+1/2}^{n+1/2}\frac{\phi_{j+1}^{n+1/2}-\phi_j^{n+1/2}}{(\Delta y_{j+1})^2}-\frac{2q_j^{n+1/2}}{\Delta y_{j+1}}. \quad (7.47)$$

Уравнения (7.46) и (7.47) можно скомбинировать так, чтобы исключить $q_j^{n+1/2}$. Для этого достаточно умножить уравнение (7.46) на $\Delta y_j$, уравнение (7.47) на $\Delta y_{j+1}$ и сложить два полученных произведения. После замены величин, определенных посредине между узлами, средним значением соответствующих величин в узлах получим выражение, которое можно записать в виде

$$\frac{\Delta y_j}{2\Delta x_{n+1}}[(\rho u)_j^{n+1}+(\rho u)_{j-1}^{n+1}+(\rho u)_j^{n}+(\rho u)_{j-1}^{n}]\times$$

$$\times(\phi_j^{n+1}+\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_j^{n}-\phi_{j-1}^{n})+$$

$$+\frac{\Delta y_{j+1}}{2\Delta x_{n+1}}[(\rho u)_{j+1}^{n+1}+(\rho u)_j^{n+1}+(\rho u)_{j+1}^{n}+(\rho u)_j^{n}]\times$$

$$\times(\phi_{j+1}^{n+1}+\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n})+$$

$$+\frac{1}{2}[(\rho\tilde{v})_j^{n+1}+(\rho\tilde{v})_{j-1}^{n+1}+(\rho\tilde{v})_j^{n}+(\rho\tilde{v})_{j-1}^{n}]\times$$

$$\times(\phi_j^{n+1}+\phi_j^{n}-\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^{n})+$$

$$+\frac{1}{2}[(\rho\tilde{v})_{j+1}^{n+1}+(\rho\tilde{v})_j^{n+1}+(\rho\tilde{v})_{j+1}^{n}+(\rho\tilde{v})_j^{n}]\times$$

$$\times(\phi_{j+1}^{n+1}+\phi_{j+1}^{n}-\phi_{j}^{n+1}-\phi_{j}^{n})=$$
$$=\Delta y_j(S_j^{n+1}+S_{j-1}^{n+1}+S_j^n+S_{j-1}^n)+$$
$$+\Delta y_{j+1}(S_{j+1}^{n+1}+S_j^{n+1}+S_{j+1}^n+S_{j-1}^n)+$$
$$+\frac{(\bar\lambda_{j+1}^{n+1}+\bar\lambda_j^{n+1}+\bar\lambda_{j+1}^n+\bar\lambda_j^n)(\phi_{j+1}^{n+1}+\phi_{j+1}^n-\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)}{\Delta y_{j+1}}-$$
$$-\frac{(\bar\lambda_j^{n+1}+\bar\lambda_{j-1}^{n+1}+\bar\lambda_j^n+\bar\lambda_{j-1}^n)(\phi_j^{n+1}+\phi_j^n-\phi_{j-1}^{n+1}-\phi_{j-1}^n)}{\Delta y_j}. \quad (7.48)$$

Систему уравнений (7.48) можно привести к трехдиагональному виду относительно неизвестных $\phi$, но, как всегда при использовании неявных схем, необходимо воспользоваться каким-либо методом для преодоления алгебраической нелинейности, связанной с коэффициентами уравнений. В принципе для этого можно применить любой из уже описанных в п. 7.3.3 методов. Наиболее удобная аппроксимация уравнения неразрывности может зависеть от того, какая процедура используется для линеаризации уравнения движения. В настоящее время чаще всего используется линеаризация по Ньютону при совместном решении уравнений неразрывности и движения [Blottner, 1975a]. В этом случае конечно-разностный аналог уравнения неразрывности можно записать в виде

$$\frac{(\rho u)_j^{n+1}+(\rho u)_{j-1}^{n+1}-(\rho u)_j^n-(\rho u)_{j-1}^n}{2\Delta x_{n+1}}+$$
$$+\frac{(\rho\tilde v)_j^{n+1}+(\rho\tilde v)_j^n-(\rho\tilde v)_{j-1}^{n+1}-(\rho\tilde v)_{j-1}^n}{2\Delta y_j}=0. \quad (7.49)$$

В уравнение движения входят величины $(\rho\tilde v)_{j+1}^{n+1}$, $(\rho\tilde v)_j^{n+1}$, $(\rho\tilde v)_{j-1}^{n+1}$. Для того чтобы воспользоваться модифицированной прогонкой, можно записать уравнение неразрывности (7.49) между слоями с номерами $j$ и $j+1$, а потом с помощью вычитания исключить $(\rho\tilde v)_{j+1}^{n+1}$ из уравнения движения. После линеаризации по Ньютону, которая проводится аналогично тому, как она проводилась в п. 7.3.3 для полностью неявной схемы Дэвиса, уравнения неразрывности и движения можно решить совместно с методом модифицированной прогонки. Уравнение энергии обычно решается отдельно, и все параметры, характеризующие свойства газа (включая турбулентную вязкость), изменяются итерационно в соответствии с нашими желаниями или ограничениями, накладываемыми требованиями к точности получаемых результатов.

При использовании блочного метода Келлера или модифицированного блочного метода напряжение трения на стенке и тепловой поток обычно определяются по вычисленному значению $q$ на стенке (при $j = 1$). В случае модифицированного блочного метода это делается после того, как значения $\phi$, $\bar{v}$ и $\rho$ уже найдены. Выражение для $q_1^{n+1/2}$ можно получить, записав уравнения (7.44) и (7.45) для $j = 2$ и исключив $q_2^{n+1/2}$ простой подстановкой.

### 7.3.6. Другие методы

Проведенные в относительно небольшом объеме исследования показали, что явный метод переменных направлений Бараката и Кларка можно использовать для решения уравнений пограничного слоя (R. G. Hindman, S. S. Hwang — частные сообщения, 1975). Результаты этих исследований показали, что явный метод переменных направлений по точности и затратам машинного времени близок к неявным методам, обычно используемым для расчета пограничных слоев. Для расчета пограничного слоя применялись и схемы более высокого порядка (вплоть до четвертого). Критический анализ некоторых из этих схем можно найти в работе [Wornom, 1977]. Здесь стоит отметить, что точность результатов, получаемых по схемам низкого порядка точности, можно повысить, если воспользоваться экстраполяцией по Ричардсону (см. [Ralston, 1965; Cebeci, Smith, 1974]).

Мы надеемся, что в этом разделе описаны все разностные схемы, которые чаще всего используются для расчета двумерных и осесимметричных пограничных слоев [1]. При этом мы не пытались подробно описать все известные численные методы.

### 7.3.7. Замечание о преобразовании координат в случае пограничного слоя

В общем виде вопросы, связанные с преобразованием координат, рассмотрены в гл. 5. В данной главе основное внимание уделяется именно разностным схемам, поэтому, для того чтобы проиллюстрировать их на самых простых примерах, все уравнения записываются в прямоугольной декартовой системе координат, т. е. в «физических координатах». Однако надо указать, что имеются определенные преимущества в применении преобразо-

[1] В книге не описана схема Петухова четвертого порядка точности, которая успешно используется многими советскими исследователями для расчета пограничного слоя (см. [24] в списке дополнительной литературы на стр. 712). Метод Петухова во многом похож на блочный метод Келлера, но имеет более высокий порядок точности. — *Прим. перев.*

вания координат или в растяжении координат до того, как производится построение конечно-разностного аналога дифференциального уравнения. Многие описанные в литературе методы расчета пограничного слоя используют преобразование координат.

Основными целями такого преобразования координат являются обычно получение системы координат, в которой толщина пограничного слоя, насколько это возможно, близка к константе, и исключение особенности в уравнениях, которая возникает на передней кромке или в передней критической точке. К сожалению, для сложных турбулентных течений оптимальное преобразование координат, обеспечивающее постоянство толщины пограничного слоя в преобразованных переменных, пока не найдено, хотя предложенное в работе [Carter et al., 1980] преобразование выглядит обнадеживающим.

Обычно применяют преобразование координат, связанное с переходом к переменной $\eta$, которая используется для получения автомодельного решения Блазиуса уравнений ламинарного пограничного слоя. Приведем пример такого преобразования переменных для случая ламинарного пограничного слоя с постоянным коэффициентом вязкости. Итак рассмотрим следующие уравнения:

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{7.50}$$

*Уравнение движения*

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{7.51}$$

Наиболее важным в описываемом преобразовании координат является введение переменной

$$\eta = \frac{y}{x}\left(\frac{u_e x}{\nu}\right)^{1/2}.$$

После этого возможно несколько вариантов, но наиболее общепринятым является преобразование $x = x$ (по оси $x$ растяжение не проводится) и $F = u/u_e$. Используя правила дифференцирования, получим

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_y = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_\eta + \left.\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial}{\partial \eta}\right|_x = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_\eta + \left(\frac{\eta}{2u_e}\frac{du_e}{dx} - \frac{\eta}{2x}\right)\left.\frac{\partial}{\partial \eta}\right|_x,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_x = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_\eta + \left.\frac{\partial \eta}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial}{\partial \eta}\right|_x = \left(\frac{u_e}{x\nu}\right)^{1/2}\left.\frac{\partial}{\partial \eta}\right|_x.$$

Заменив в соответствии с приведенными соотношениями производные по $x$ и $y$ в уравнениях (7.50) и (7.51) и введя неизвестную $F$, получим уравнения неразрывности и движения в преобразованной системе координат.

*Уравнение движения*

$$xF\frac{\partial F}{\partial x}+V\frac{\partial F}{\partial \eta}=\beta(1-F^2)+\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}. \tag{7.52}$$

*Уравнение неразрывности*

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \eta}+F\frac{\beta+1}{2}=0. \tag{7.53}$$

Здесь

$$V=\frac{\beta-1}{2}F\eta+\left(\frac{x}{\nu u_e}\right)^{1/2}v, \quad \beta=\frac{x}{u_e}\frac{du_e}{dx}.$$

При $x=0$ производные в продольном направлении из преобразованных уравнений исчезают и остается система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Обычно эти уравнения решают, используя слегка измененную версию маршевого алгоритма, который применяется для расчета течения во всей оставшейся области, т. е. при $x>0$. Вместо этого можно, конечно, использовать специальные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В новой системе координат особенность при $x=0$ отсутствует, так как вызывавшие затруднение производные в продольном направлении исключены. Фактически в случае ламинарного обтекания плоской пластины решение при $x=0$ является просто хорошо известным автомодельным решением Блазиуса. Поэтому естественно, что в случае течения с нулевым градиентом давления решение при $x>0$, полученное маршевым методом, будет повторять вниз по потоку то же самое решение и толщина пограничного слоя останется постоянной. Если градиент давления или граничные условия на стенке таковы, что решение уравнений пограничного слоя не является автомодельным, то толщина пограничного слоя будет меняться в направлении потока. Можно ожидать, что если ламинарное течение близко к автомодельному, то решение уравнений в преобразованных координатах обеспечивает более высокую точность результатов вблизи передней кромки, чем решение уравнений, записанных в физических переменных. Это связано с тем, что первый подход позволяет во всех сечениях использовать примерно одинаковое число узлов поперек слоя. В случае турбулентных течений обычно наблюдается значительный рост толщины пограничного слоя даже в указанных выше преобразованных переменных. Для внешних ламинарных пограничных слоев

мы рекомендуем использовать преобразование переменных типа преобразования подобия. В случае турбулентных течений преимущества предложенных в настоящее время преобразований не столь очевидны.

### 7.3.8. Специальные вопросы, связанные с расчетом турбулентных течений

Если для расчета турбулентных пограничных слоев используются модели, связанные с вычислением турбулентной вязкости во всем течении, то для получения достаточно точных результатов узлы сетки должны быть расположены внутри вязкого подслоя, т. е. при $y^+ \leqslant 4.0$ для несжимаемых течений и при $y^+ \leqslant 1.0$ или 2.0 в тех случаях, когда приходится решать и уравнение энергии. Если по нормальной координате к поверхности использовать сетку с равномерным шагом, то для типичного расчета пограничного слоя при умеренном числе Рейнольдса потребуется сетка с несколькими тысячами узлов по координате, нормальной к обтекаемой поверхности. Уже по одной этой причине стоит рассмотреть пути уменьшения необходимого числа узлов сетки по толщине пограничного слоя. Успешно используемые для этого подходы можно разделить на три категории — использование закона стенки, использование сетки с неравномерным шагом и преобразование координат.

**Использование закона стенки.** Мы уже отмечали (см. рис. 5.7), что для многих пристенных турбулентных пограничных слоев течение во внутренней части слоя носит универсальный характер, который описывается логарифмическим законом стенки. По сути эта внутренняя часть слоя является областью, в которой конвективный перенос играет незначительную роль. Грубо говоря, закон стенки можно рассматривать как решение уравнения движения пограничного слоя, полученное при описании турбулентности по модели пути смешения Прандтля в предположении, что конвективные члены и градиент давления не существенны. Аналогично для многих течений наблюдается почти универсальный характер распределения температуры, и закон стенки можно использовать для задания граничных условий на внутренней границе при решении уравнения энергии.

Итак, при применении закона стенки уравнения пограничного слоя решаются с использованием модели турбулентности лишь во внешней части слоя, при этом используется относительно грубая сетка. Решение в пристенной области описывается на основе закона стенки, который фактически является приближенным решением для пристенной области. Обычно предполагают, что закон стенки выполняется при $30 < y^+ < 200$, и первый от стенки

узел расчетной сетки располагают в этом интервале. Граничные условия для всех описываемых уравнениями переноса неизвестных ($u$, $T$, $\bar{k}$, $\varepsilon$ и т. д.) определяются в этом узле на основе закона стенки. Реализовать такой подход можно по-разному, а детали зависят от выбранной модели турбулентности и используемой разностной схемы. Этот подход хорошо развит для $(\bar{k}-\varepsilon)$-модели турбулентности, а рекомендуемые в этом случае функции для описания закона стенки можно найти в работе [Launder, Spalding, 1974].

Как и сами модели турбулентности, функции, входящие в закон стенки, нуждаются в модификации для точного описания эффектов, связанных, например, с вдувом или отсосом, шероховатостью обтекаемой поверхности и т. д. Однако их использование позволяет избежать необходимости располагать у стенки большое число близко расположенных точек. По-видимому, использование закона стенки не является необходимым и даже желательным для большинства погранслойных течений, однако при расчете более сложных течений, описываемых в рамках непогранслойных (эллиптических) уравнений Рейнольдса, применение закона стенки может оказаться куда более привлекательным, так как интересующие нас процессы могут в этом случае происходить довольно далеко от стенки. Вполне возможно, что в ближайшие годы, когда появятся еще более быстродействующие компьютеры, будут предприняты попытки описать турбулентные течения путем решения нестационарных уравнений Навье — Стокса (не вводя в них каких-либо моделей турбулентности). Не исключено, что первые такие расчеты будут связаны с использованием той или иной формы закона стенки для приближенного описания решения в пристенной области, где размер вихрей минимален.

**Использование сеток с неравномерным шагом.** Практически все без исключения расчеты турбулентных пограничных слоев, в которых решение конечно-разностным методом находилось вплоть до стенки, проводились либо с использованием неравномерных сеток, либо, что часто эквивалентно, с использованием преобразования координат. При этом применялись различные неравномерные сетки. В работе Плетчера [Pletcher, 1969] в нескольких ближайших к стенке узлах отношение шага сетки $\Delta y$ к величине $\Delta y^+$ (определенной как $\Delta y(\tau_w/\rho)^{1/2}/\nu_w$) приближенно равнялось единице, а потом приблизительно удваивалось через каждые несколько точек до тех пор, пока во внешней части пограничного слоя величина $\Delta y^+$ не достигала 100.

Другая широко используемая [Cebeci, Smith, 1974] и хорошо работающая схема основана на предположении о том, что отно-

шение двух последовательных шагов сетки постоянно:

$$\frac{\Delta y_+}{\Delta y_-} = \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} = K. \tag{7.54}$$

При использовании такой схемы с постоянным отношением шагов шаги сетки при движении от стенки возрастают на один и тот же процент. В результате шаги сетки растут в геометрической прогрессии. Для турбулентных течений значение числа $K$ лежит обычно между 1 и 2. Для схемы с постоянным отношением шагов имеем

$$\Delta y_j = K^{j-1}\Delta y_1 \quad \text{и} \quad y_j = \Delta y_1 \frac{K^{j-1}-1}{K-1}. \tag{7.55}$$

Точность, а иногда и устойчивость некоторых разностных схем оказываются сильно зависящими от выбранного значения $K$. В большинстве случаев удовлетворительные результаты получаются при $K \leqslant 1.15$. В случае типичного расчета с $\Delta y_1^+ \approx 1.5$, $K = 1.04$, $y_e^+ \approx 3000$ из уравнений (7.54) и (7.55) следует, что по нормали к стенке необходимо использовать примерно 113 узлов сетки.

При обобщении разностной схемы на случай переменной сетки необходимо заново определить погрешность аппроксимации, так как в этом случае формальная погрешность аппроксимации обычно ухудшается. Например, при использовании рекомендованной выше аппроксимации для поперечной производной от сдвиговых напряжений получим

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_j^n = \frac{2}{\Delta y_+ + \Delta y_-}\left(\mu_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta y_+} - \mu_{j-1/2}^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta y_-}\right) + \\ + O(\Delta y_+ - \Delta y_-) + O(\Delta y_+ + \Delta y_-)^2.$$

Это выражение имеет на первый взгляд первый порядок аппроксимации, если только мы не сможем показать, что для некоторой конкретной разностной схемы $O(\Delta y_+ - \Delta y_-) = O(\Delta y)^2$. Блоттнер [Blottner, 1974] показал, что если в схеме Кранка — Николсона воспользоваться приведенной выше аппроксимацией производных, то при использовании сетки с постоянным отношением шагов разностная схема имеет локально второй порядок точности. Для этого Блоттнер интерпретировал схему с постоянным отношением шагов как преобразование координат (см. ниже). Свои выводы он подтвердил расчетами, которые показали, что при измельчении сетки его схема ведет себя так, как если бы погрешность аппроксимации имела второй порядок.

**Использование преобразования координат.** Общие вопросы, связанные с преобразованием координат, обсуждались в гл. 5. Здесь мы рассмотрим преобразования координат, применяемые для получения в физической плоскости сетки с неравномерным шагом. Хорошим примером, иллюстрирующим этот подход, является преобразование 1 § 5.6 (см. также рис. 5.8). Такое преобразование позволяет использовать стандартные сетки с постоянным шагом при конечно-разностном решении уравнений в преобразованных координатах. Следовательно, сгущение точек вблизи стенки может быть достигнуто без ухудшения формального порядка погрешности аппроксимации. С другой стороны, уравнения в преобразованных переменных принимают более сложный вид и в них всегда появляются дополнительные переменные коэффициенты. Действительная величина погрешности аппроксимации будет зависеть от вида новых коэффициентов. Преобразования 1 и 2 § 5.6 гл. 5 являются достаточно представительными примерами преобразований, которые можно использовать для расчета пограничного слоя.

### 7.3.9. Примеры применения методов расчета пограничного слоя

Для ламинарных течений в тех случаях, когда теория пограничного слоя справедлива, легко можно сравнить результаты конечно-разностных расчетов с результатами, полученными для некоторых очень важных течений на основе других более точных теорий. Обычно даже в тех случаях, когда выбору размера шага уделяется не слишком большое внимание, достигается согласование в пределах 1—2 % с несколькими стандартными точными решениями. На рис. 7.6 сопоставлены профили скорости, рассчитанные по разностной схеме типа Дюфорта — Франкела [Pletcher, 1971] с аналитическими данными ван Дриста [Van Driest, 1952] для ламинарного течения с числом Маха 4 и отношением температур $T_w/T_e = 4$. Сопоставление профилей температуры для этого случая проведено на рис. 7.7. Согласование результатов достаточно хорошее. Этот результат типичен: он показывает, что можно ожидать при расчете ламинарных пограничных слоев.

Совсем другая ситуация возникает при расчете турбулентных течений. Введение модели турбулентности усложняет расчет, а его результаты становятся более неопределенными. Модели турбулентности можно подобрать так, чтобы получать неплохие результаты для некоторого ограниченного класса течений, однако при расчете других течений с условиями, на которые эта модель не распространяется, часто согласование резуль-

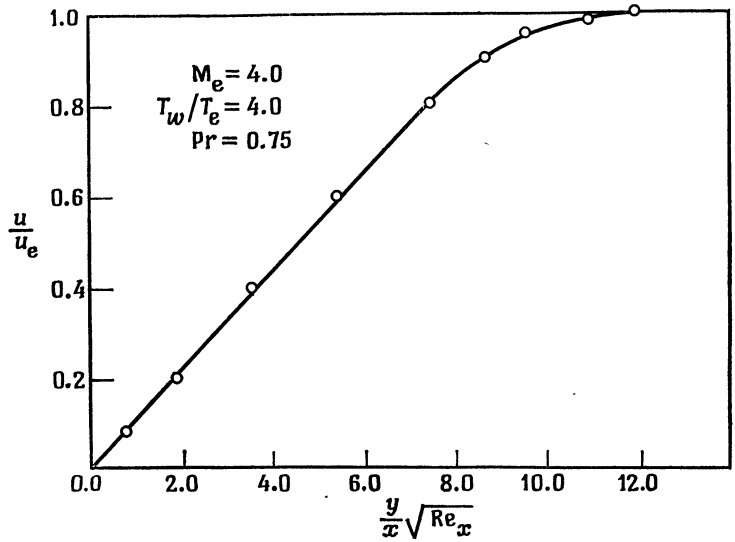



Рис. 7.6. Сравнение профилей скорости для ламинарного пограничного слоя сжимаемого газа. Сплошной линией показаны результаты расчета методом Дюфорта — Франкела [Pletcher, 1971]; О теория ван Дриста; $c_f\sqrt{Re_x} = 0.57$ (ван Дрист); $c_f\sqrt{Re_x} = 0.56$ (Дюфорт—Франкел).

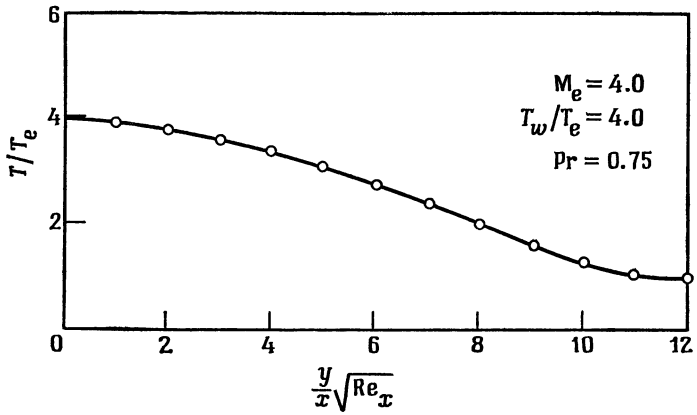



Рис. 7.7. Сравнение профилей температуры для ламинарного пограничного слоя сжимаемого газа. Сплошной линией показаны результаты расчета методом Дюфорта — Франкела [Pletcher, 1971]; О теория ван Дриста; $St\sqrt{Re_x} = 0.348$ (ван Дрист); $St\sqrt{Re_x} = 0.348$ (Дюфорт—Франкел).

татов оказывается плохим. Учитывая неопределенность, связанную как с измерениями при экспериментальном исследовании, так и с моделью турбулентности, отличие рассчитанных и измеренных значений в пределах $\pm(3 \div 4)$ % обычно рассматривают в случае турбулентных течений как вполне хорошее.

Даже простая алгебраическая модель турбулентности позволяет при расчете получать хорошие результаты в широком диапазоне чисел Маха, если рассматриваются турбулентные пограничные слои при нулевом или небольшом градиенте давления.

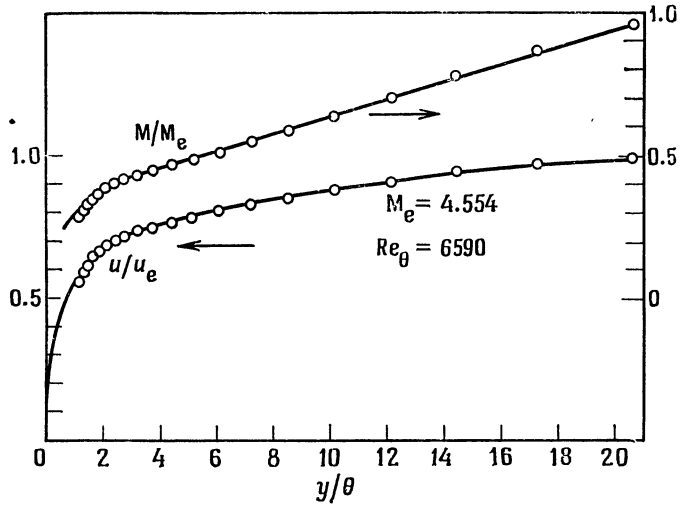



Рис. 7.8. Сопоставление результатов расчета пограничного слоя сжимаемого газа на плоской пластине с экспериментальными данными Коулза [Coles, 1953]. Сплошной линией показаны результаты расчета методом Дюфорта — Франкела [Pletcher, 1970]; О данные Коулза (тест 22); $c_f=0.00122$ (эксперимент), $c_f=0.00119$ (расчет).

На рис. 7.8 проведено сопоставление рассчитанного методом Дюфорта — Франкела и измеренного Коулзом [Coles, 1953] турбулентного пограничного слоя на теплоизолированной пластине при числе Маха набегающего потока $M_e=4.554$. Согласование результатов вполне хорошее.

Конечно-разностные методы легко приспосабливаются для расчета течений со ступенчато изменяющимися граничными условиями, т. е. для таких условий течения, когда применение простых критериальных зависимостей менее всего обосновано. На рис. 7.9 результаты расчета методом Дюфорта — Франкела при использовании алгебраической модели турбулентности сопоставлены с измерениями Моретти и Кейза [Moretti, Kays, 1965]

для случая обтекания низкоскоростным потоком охлаждаемой пластины со ступенчатым изменением температуры при благоприятном градиенте давления. Построенное на рис. 7.9 число

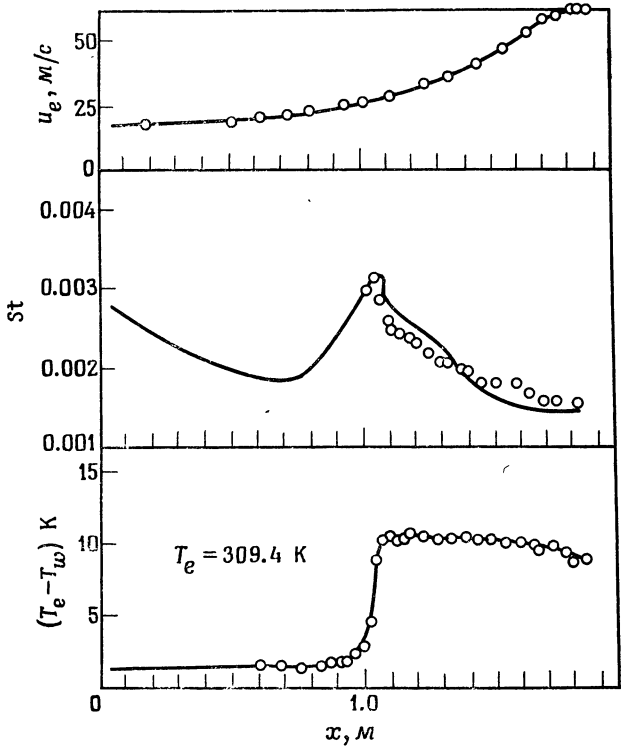



Рис. 7.9. Пограничный слой на охлаждаемой пластине в ускоряющемся потоке, экспериментально исследованный Моретти и Кэйзом [Moretti, Kays, 1965]. Сплошными линиями показаны результаты расчета пограничного слоя методом Дюфорта — Франкела [Pletcher, 1970]; О данные Моретти и Кэйза (тест 22).

Стантона St определяется соотношением

$$\mathrm{St} = k\,(\partial T/\partial y)_w/[\rho_e u_e (H_{aw} - H_w)],$$

где $H_{aw}$ — полная энтальпия на стенке при адиабатических граничных условиях.

Из научно-технической литературы известно довольно много примеров, когда проведенные с использованием простейших алгебраических моделей расчеты плохо согласуются с экспериментальными данными. В гл. 5 мы уже приводили примеры, по-

казывающие, что некоторые эффекты плохо описываются простейшими моделями турбулентности. К ним относятся течения с низкими числами Рейнольдса, особенно при сверхзвуковых числах Маха. Эффекты, связанные с низкими значениями числа Рейнольдса, проиллюстрированы на рис. 7.10. Из представленных на нем данных видно, что точка, в которой простейшая

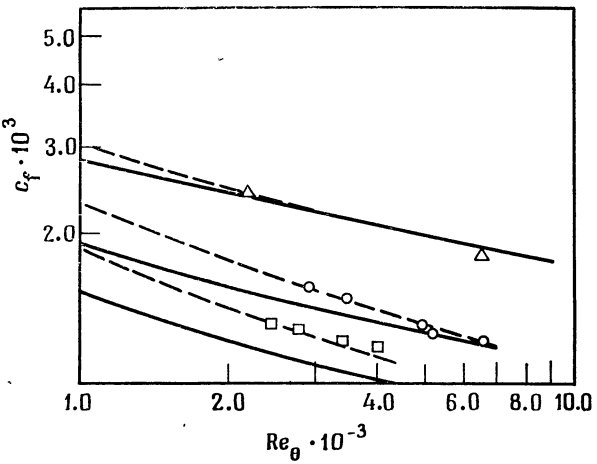



Рис. 7.10. Сопоставление рассчитанных значений коэффициента трения с измеренными Коулзом [Coles, 1953] и Коркеги [Korkegi, 1956] для сжимаемого турбулентного пограничного слоя на пластине при низких числах Рейнольдса: △ данные Коулза, $M_e = 2.6$; ○ данные Коулза, $M_e = 4.5$, □ данные Коркеги, $M_e = 5.8$, ——— расчет по модели А, — — — — — расчет по модели В.

алгебраическая модель турбулентности (модель А) перестает удовлетворительно описывать течение, смещается в область все больших и больших чисел Рейнольдса при увеличении числа Маха основного потока. Результаты расчетов с использованием модели турбулентности, содержащей описанную в п. 5.4.3 простую модификацию на случай низких чисел Рейнольдса, также показаны на рис. 7.10, где эта модель названа моделью В.

### 7.3.10. Заключение

В этом разделе мы рассмотрели наиболее важные вопросы, связанные с применением конечно-разностных методов к расчету двумерных и осесимметричных пограничных слоев. Кроме того, мы описали несколько конечно-разностных схем. В работе вычислителя, как и в любой другой деятельности, важно «набить руку», или, иначе говоря, приобрести необходимую прак-

тику. Поэтому надо решить несколько учебных задач, используя описанные разностные схемы, для того чтобы понять изложенные здесь основные концепции и связанные с ними проблемы. Так же как инженера вряд ли можно считать экспериментатором до тех пор, пока он не провел несколько экспериментов, нельзя считать специалистом в области вычислительной гидродинамики того, кто не провел несколько расчетов.

Какая разностная схема является наилучшей для расчета пограничного слоя? Такой вопрос на данном этапе представляется логичным, но мы должны иметь критерий, в соответствии с которым можно определить, что схема действительно наилучшая. Все согласованные разностные схемы позволяют получать численные результаты с любой требуемой точностью, если только воспользоваться достаточно мелкой сеткой. Так как максимально допустимая точность нас больше не волнует, то наиболее важными становятся затраты машинного времени и в меньшей степени простота программирования. При обсуждении этого вопроса мы предполагаем, что пользователю необходимо понять все связанные с применением метода алгебраические операции. Мы будем включать время и силы, необходимые для понимания данного алгоритма, в затрачиваемые на программирование усилия. Тогда усилия, затрачиваемые на программирование, будут определяться не числом операторов в программе для ЭВМ, а алгебраической сложностью шагов алгоритма и трудностью следования этим шагам для начинающего.

Анализ научно-технической литературы за последние 10 лет показывает, что все разностные схемы, приведенные в табл. 7.1, с успехом применялись для расчета двумерных и осесимметрич-

**Таблица 7.1. Рекомендуемые конечно-разностные схемы расчета пограничного слоя. Порядок расположения схем определяется сложностью их программной реализации**

1. Схема Дюфорта — Франкела
2. Полностью неявная схема (в том числе вариант этой схемы, предложенный Патанкаром и Сполдингом)
3. Неявная схема Кранка — Николсона
4. Полностью неявная схема при совместном решении уравнений неразрывности и движения
5. Неявная схема Кранка — Николсона при совместном решении уравнений неразрывности и движения
6. Модифицированная блочная схема
7. Блочная схема Келлера
8. Схема Петухова [1]

[1]) Эта схема добавлена переводчиком, так как она широко используется советскими исследователями.— *Прим. перев.*

ных пограничных слоев как при ламинарном, так и при турбулентном течениях. Все эти схемы мы рекомендуем к использованию, так как с их помощью были получены довольно хорошие результаты.

Характерное время расчета по любой из перечисленных выше схем невелико и составляет на современных ЭВМ всего лишь несколько секунд. Отдельные особенности, связанные с использованием этих схем, можно найти в работах, которые указывались нами при описании разностных схем. Нам известно лишь несколько работ, в которых проведено сопоставление времен расчета пограничного слоя по различным разностным схемам. В работе Блоттнера [Blottner, 1975a] показано, что при сопоставимой точности затраты машинного времени, необходимые для расчета пограничного слоя по схеме Кранка — Николсона (при совместном решении уравнений неразрывности и движения) и модифицированным блочным методом, примерно одинаковы. В той же работе продемонстрировано, что время расчета на ЭВМ блочным методом Келлера в два-три раза больше времени расчета модифицированным блочным методом (при сопоставимой точности).

Для начинающего программиста, который хочет составить достаточно общую программу расчета пограничного слоя, наиболее естественным было бы начать с полностью неявной схемы. Эта схема имеет лишь первый порядок точности в направлении маршевой координаты, но второй порядок точности, по-видимому, не является существенным для большинства проводимых расчетов пограничного слоя. Это, возможно, отчасти объясняется тем, что члены порядка $O(\Delta x)$ в выражении для погрешности аппроксимации обычно включают вторые производные по продольной координате, которые в тех случаях, когда приближение пограничного слоя справедливо, невелики. Если второй порядок точности по маршевой координате желателен, то его легко достичь при незначительных изменениях в алгоритме. Для этого достаточно либо воспользоваться при аппроксимации производных по маршевой координате со вторым порядком точности трехточечным шаблоном, либо перейти к схеме Кранка — Николсона. Различные способы линеаризации уравнений логично выбирать в порядке сложности их программной реализации — запаздывающие коэффициенты, экстраполяция, линеаризация по Ньютону при совместном решении уравнений неразрывности и движения. Если рассматривать метод запаздывающих коэффициентов как стандартный, то было бы полезно запрограммировать один из двух последних более точных (при одном и том же шаге сетки) методов, чтобы получить дополнительный способ контроля.

## § 7.4. Обратные методы, отрывные течения и вязко-невязкое взаимодействие

### 7.4.1. Введение

До сих пор мы рассматривали лишь методы решения уравнений пограничного слоя в том случае, когда заданы стандартные граничные условия, приведенные в § 5.3. Такие методы решения уравнений пограничного слоя называют *прямыми*. *Обратными* называют методы расчета пограничного слоя при задании отличных от стандартных граничных условий. Обычно при использовании обратных методов вместо условия на внешней границе пограничного слоя $\lim_{y\to\infty} u(x, y) = u_e(x)$ задается толщина вытеснения или трение на стенке, которым решение должно удовлетворять, а градиент давления (или $u_e(x)$) определяется в процессе решения. Подчеркнем, что отличие прямых и обратных методов связано именно с заданием *граничных условий*. Поэтому, по-видимому, правильно было бы говорить о прямой и обратной задачах, а не методах. Однако мы будем следовать принятой терминологии и ссылаться на методы решения как на прямые и обратные.

Обратные методы — это не просто альтернативный подход к решению уравнений пограничного слоя. Успешное развитие обратных методов расчета позволило расширить область применения приближения пограничного слоя.

Очевидно, что можно найти некоторые инженерные приложения, в которых желательно рассчитать давление на границе пограничного слоя, обеспечивающее заданное распределение толщины вытеснения или трения на стенках. Это явилось одной из причин создания обратных методов расчета пограничного слоя. Но, возможно, наиболее интересное применение обратных методов связано с расчетом отрывных течений. Долгое время предполагали, что в случае отрывных течений необходимо решать полную систему уравнений Навье — Стокса. Поэтому любое предположение о том, что эти очень важные для приложений течения могут быть описаны в рамках куда более простой математической модели, вызывало большой интерес. Вследствие этого наше описание обратных методов ограничится в основном их применением к расчету отрывных течений. Одним из наиболее интересных свойств обратных методов является то, что они позволяют устранить особенность Гольдштейна [Goldstein, 1948], возникающую в точке отрыва.

### 7.4.2. Замечания о возможности применения уравнений пограничного слоя для расчета отрывных течений

Еще совсем недавно предполагалось, что теория пограничного слоя становится несправедливой при приближении к точке отрыва. Это связано с двумя причинами. Во-первых, при стандартной постановке задачи пограничного слоя в точке отрыва возникает широко известная особенность Гольдштейна [Goldstein, 1948]. Во-вторых, сомнительным является использование приближения пограничного слоя в тех случаях, когда его толщина и нормальная составляющая скорости оказываются большими (по отношению к $u$), чем они обычно бывают при высоких числах Рейнольдса. Теперь мы знаем, что решение обратной задачи в точке отрыва регулярно [Klineberg, Steger, 1974], а результаты ряда расчетов [Williams, 1977; Kwon, Pletcher, 1979] показали, что приближение пограничного слоя может оказаться полезным при описании течений, содержащих небольшие замкнутые отрывные зоны (отрывные пузыри). Возможность применения приближения пограничного слоя подтверждает и то, что при возникновении отрывного пузыря толщина пограничного слоя обычно не возрастает на порядок, а значит, используемая в приближении пограничного слоя оценка его толщины $\delta/L \leqslant 1$ остается справедливой.

Результаты, полученные с помощью «трехпалубной модели» вязкого течения [Lighthill, 1953; Stewartson, 1974][1] (см. п. 7.4.4), также показывают, что при больших числах Рейнольдса приближение пограничного слоя справедливо для течений с малыми отрывными зонами. С другой стороны, иногда наблюдаются локальные большие значения производной $d\delta/dx$, что должно приводить к большим значениям отношения $v/u$. Итак, в лучшем случае можно ожидать, что уравнения пограничного слоя являются лишь грубым приближением для течений с рециркуляционными зонами, хотя они и позволяют оценить большинство параметров таких течений с достаточной для многих приложений точностью. Вопрос о том, в каких случаях уравнения пограничного слоя допустимо использовать для расчета отрывных течений, в настоящее время еще изучается.

Если используются обычные уравнения пограничного слоя со стандартными граничными условиями, то при наличии отрывных зон прямой расчет пограничного слоя маршевым методом нельзя проводить по двум причинам: во-первых, из-за особенности Гольдштейна в точке отрыва, и, во-вторых, из-за наличия

[1] См. также работы В. В. Сычёва, В. Я. Нейланда, Л. В. Гогиша и Г. Ю. Степанова, приведенные в дополнительном списке литературы (стр. 712). — *Прим. ред.*

возвратного течения, которое не позволяет проводит расчет маршевым методом в направлении основного потока (рис. 7.11), если не изменены конвективные члены в уравнениях. Если при обычных граничных условиях градиент давления задан, то в точке отрыва нормальная составляющая скорости и величина $d\tau_w/dx$ стремятся к бесконечности. Подробный анализ этой особенности можно найти в работах [Goldstein, 1948; Brown, Stewartson, 1969][1]. При конечно-разностном решении уравнений

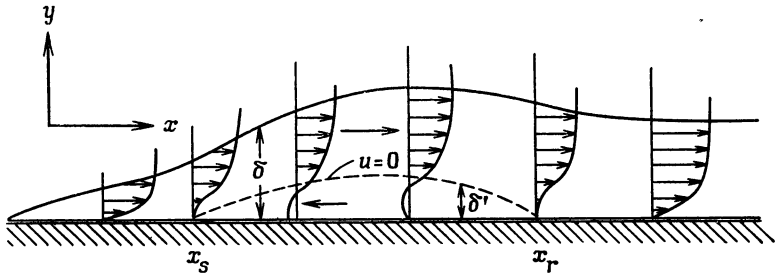



Рис. 7.11. Течение с отрывным пузырем; стрелками указано направление потока.

пограничного слоя с заданным $u_e(x)$ эта особенность проявляется как тенденция к неограниченному росту $v$ при уменьшении шага сетки в продольном направлении.

Для течения Хоуарта с линейным изменением скорости [Howarth, 1938] такое поведение решения проиллюстрировано на рис. 7.12. Естественно, что если шаг сетки конечен, то и $v$ конечно, но получающееся при этом решение не единственно. Преодолеть такое особое поведение решения, которое является скорее математической особенностью уравнений, чем физической особенностью течения, можно, либо вводя при использовании прямых методов поправку к давлению, связанную с взаимодействием [Reyhner, Flügge-Lotz, 1968; Napolitano et al., 1978], либо используя обратные методы. В этом разделе мы рассмотрим лишь обратные методы, применение которых не связано с привлечением дополнительных соотношений для исключения особенности в точке отрыва.

Перейдем теперь к анализу вопросов, связанных с аппроксимацией конвективных членов. Напомним, что уравнения стационарного пограничного слоя параболические. При $u > 0$ их решение может быть найдено маршем в направлении оси $x$. Это связано с тем, что физически информация из начального сечения

[1] См. также монографию [1] в списке дополнительной литературы на стр. 712. — *Прим. ред.*

переносится в направлении потока. Однако в области возвратного течения «направление потока» обозначает направление, противоположное направлению оси $x$ (рис. 7.11). Математически это значит, что при $u < 0$ уравнение движения пограничного слоя остается параболическим, но правильное маршевое направление есть направление, противоположное направлению оси $x$.

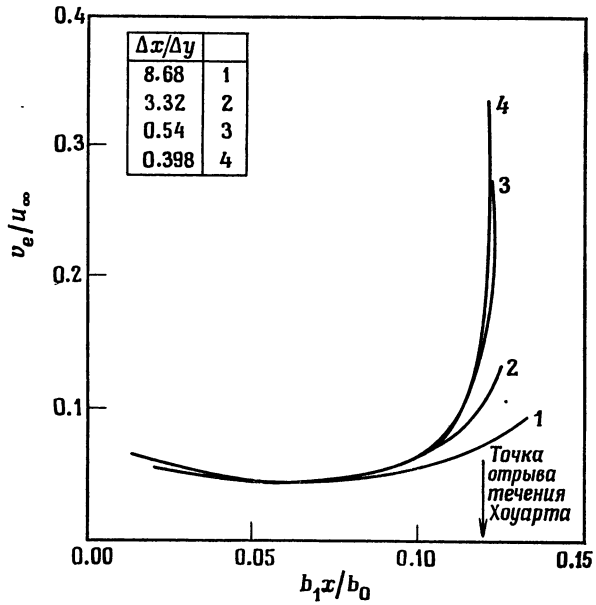



Рис. 7.12. Влияние на величину $v_e$ измельчения сетки в направлении оси $x$ при расчете пограничного слоя прямым методом [Pletcher, Dancey, 1976] вблизи точки отрыва для течения с линейным уменьшением скорости невязкого потока; $u_e = b_0 - b_1 x$, $b_0 = 30.48$м/с, $b_1 = 300$ с$^{-1}$, $\nu = 1.49 \cdot 10^{-4}$ м$^2$/с.

На первый взгляд кажется, что для преодоления проблем, связанных с выбором «правильного» маршевого направления, необходимо создать специальный метод расчета пограничного слоя. При этом расчет должен проводиться следующим образом: сначала задается какое-то распределение скорости в области возвратного течения потока с отрывным пузырем, которое запоминается, а далее проводится корректировка этого распределения скорости путем последовательного итерационного расчета всего поля течения. Конечно-разностные аппроксимации производных надо в этом случае строить с учетом маршевого направления, т. е. в зависимости от направления потока выбирать разности вперед или назад. Использование такой итерационной

процедуры почти полностью лишает методы расчета той простоты, которая присуща обычным методам расчета пограничного слоя. Кроме того, для запоминания значений скорости в области возвратного течения и вблизи нее необходимо выделить дополнительную память. Такие итерационные процедуры с многократным расчетом поля течения использовались в работах [Klineberg, Steger, 1974; Carter, Wornom, 1975; Cebeci, 1976]. Некоторые наиболее важные вопросы, связанные с конечно-разностной аппроксимацией производных при использовании указанной итерационной процедуры, станут очевидными поосле изучения материала, изложенного в гл. 8.

Рейнер и Флюгге-Лотц [Reyhner, Flügge-Lotz, 1968] предложили простую альтернативу методам с многократным расчетом поля течения. Заметив, что при течении с замкнутыми отрывными областями скорости в области обратного течения обычно малы, они предположили, что в области возвратного течения конвективный член $u\partial u/\partial x$, входящий в уравнение движения пограничного слоя, может быть представлен в виде $C|u|\partial u/\partial x$, где $C$ либо равно нулю, либо малая положительная константа. Такая аппроксимация конвективного члена обычно называется *приближением Флюгге-Лотц*. Использование этого приближения позволяет проводить расчет течений с отрывными зонами простым маршем в направлении основного потока.

Здесь необходимо подчеркнуть, что приближение Флюгге-Лотц связано с дополнительным предположением о характере решений уравнений пограничного слоя, а именно что в уравнении движения пограничного слоя член $u\partial u/\partial x$ в области возвратного течения мал по отношению к другим членам уравнения. С другой стороны, для многих течений с замкнутыми отрывными областями приближение Флюгге-Лотц позволяет получить гладкое и достаточно правдоподобное решение. Примеры решений, полученных в рамках этого приближения, будут представлены в п. 7.4.3. Известные в настоящее время расчетные и экспериментальные данные показывают, что если отрывный пузырь возникает естественным образом, то в области возвратного течения составляющая скорости $u$ действительно невелика. Обычно она составляет не более 10 % максимальной скорости, которая наблюдается в вязкой области течения.

Необходимо отметить, что, даже используя описанные аппроксимации конвективного члена $u\partial u/\partial x$, не удается получить единственное сходящееся решение стационарных уравнений пограничного слоя, применяя прямые маршевые методы расчета. Применение всех известных в настоящее время прямых методов связано с использованием условия взаимодействия, связывающего градиент давления с толщиной вытеснения вязкой под-

области течения (или каким-либо другим аналогичным параметром). Обычно учет этого взаимодействия происходит в рамках нестационарного подхода [Napolitano et al., 1978]. Это не обязательно является недостатком метода, так как для получения решения всей задачи о расчете течения с замкнутой отрывной областью обычно все равно приходится учитывать вязко-невязкое взаимодействие (если в вязкой области течения используется приближение пограничного слоя). Методы расчета вязко-невязкого взаимодействия будут описаны в п. 7.4.4. С другой стороны, обратные методы позволяют получить единственное сходящееся решение, проводя расчет одних лишь стационарных уравнений пограничного слоя.

### 7.4.3. Обратные конечно-разностные методы

В этом разделе мы опишем два обратных метода. Первый из них основан на реализации простейшей идеи, поэтому он особенно полезен для иллюстрации основной концепции обратного метода. Этот метод позволяет получать очень хорошие результаты при расчете присоединенных течений (т. е. при отсутствии областей с обратным течением). Если в потоке есть область возвратного течения, то в распределении трения на стенке появляются небольшие осцилляции. От этих осцилляций удается избавиться, применяя второй обратный метод, основанный на совместном решении уравнений неразрывности и движения. В обоих методах используется приближение Флюгге-Лотц. Для простоты мы ограничимся применением этих методов к течениям несжимаемой жидкости.

**Обратный метод А.** Запишем уравнения пограничного слоя в следующем виде:

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{7.56}$$

*Уравнение движения*

$$C|u|\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=u_e\frac{du_e}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}. \tag{7.57}$$

В последнем уравнении $C=1.0$ при $u>0$ и $C$ — малая положительная константа ($\leqslant 0.2$) при $u\leqslant 0$ и

$$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}-\rho\overline{u'v'}=(\mu+\mu_T)\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{7.58}$$

Приведенные выше уравнения записаны в виде, позволяющем проводить расчет как ламинарных, так и турбулентных течений.

В случае ламинарных течений обозначенные штрихом составляющие скорости и коэффициент турбулентной вязкости $\mu_T$ равны нулю, а если течение турбулентное, то под величинами без штриха подразумевается их осредненное по времени значение.

При решении обратной задачи граничные условия имеют вид

$$u(x,\ 0) = v(x,\ 0) = 0, \tag{7.59}$$

$$\int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \delta^*(x), \tag{7.60}$$

причем толщина вытеснения $\delta^*$ является заданной функцией. Вместо нее в качестве граничного условия можно задать распределение величины $\tau_w(x)$. Очевидно, в области присоединенного течения уравнения (7.56) и (7.57) могут быть решены прямым методом, если граничное условие (7.60) заменить обычным граничным условием

$$\lim_{y\to\infty} u(x,\ y) = u_e(x). \tag{7.61}$$

Вполне допустимо начать расчет пограничного слоя прямым методом, переключаясь на обратный метод тогда, когда нам это будет удобно.

Для аппроксимации уравнений пограничного слоя воспользуемся полностью неявной схемой с запаздывающими коэффициентами. Такой способ построения конечно-разностного аналога уравнений пограничного слоя подробно описан в § 7.3, и повторять его мы здесь не будем.

Для того чтобы удовлетворить заданным в обратной задаче граничным условиям, мы будем на каждом шаге по маршевой координате варьировать итерационным образом скорость $u_e$ до тех пор, пока не получим решение с заданным значением толщины вытеснения $\delta^*(x)$. На каждой из этих итераций алгоритм решения и граничные условия такие же, как и при решении прямой задачи. Толщина вытеснения находится по известному распределению скорости путем интегрирования (либо по формуле Симпсона, либо по формуле трапеций). Значение скорости $u_e$, позволяющее получить заданное в качестве граничного условия значение толщины вытеснения $\delta^*(\delta^*_{BC})$, определяется следующим образом. На каждом шаге по маршевой координате предполагается, что разность $\delta^* - \delta^*_{BC}$ является функцией от $u_e$, т. е. что $\delta^* - \delta^*_{BC} = F(u_e)$, а значение $u_e$, удовлетворяющее уравнению $F = 0$, определяется методом секущих [Fröberg, 1969]. В приведенных соотношениях $\delta^*$ — значение толщины вытесне-

ния, полученное при заданном $u_e$. При использовании такого подхода первые два значения толщины вытеснения необходимо задать, а всего требуется обычно три-четыре итерации [Pletcher, 1978].

Метод секущих можно рассматривать как обобщение метода Ньютона нахождения корней уравнения $F(x)=0$ (этот метод часто называют также методом Ньютона — Рафсона — Канторовича). При использовании метода Ньютона мы раскладываем функцию $F(x)$ в ряд Тейлора в окрестности выбранной точки $x_n$:

$$F(x_n+\Delta x)=F(x_n)+F'(x_n)\Delta x+\ldots.$$

Мы обрываем этот ряд на члене, содержащем первую производную, и находим величину $\Delta x$ из условия $F(x_n+\Delta x)=0$. При использовании метода Ньютона в этом случае имеем

$$x_{n+1}-x_n=\Delta x=-\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}. \tag{7.62}$$

Следовательно, задав начальное значение $x_n$, мы можем уточнить его в соответствии с соотношением (7.62). Этот процесс продолжается последовательно до тех пор, пока не выполнится условие $|(x_{n+1}-x_n)|<\varepsilon$.

Метод Ньютона является простой и эффективной процедурой. Однако для его использования необходимо задать функцию $F'(x)$ аналитически. Если этого сделать нельзя, то разумным представляется использовать обобщение метода Ньютона, называемое *методом секущих*.

В методе секущих вместо производной используется угол наклона прямой, проходящей через две точки

$$F'(x_n)\approx\frac{F(x_n)-F(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}.$$

Если два начальных приближения для $x$ заданы, то третье приближенное значение корня уравнения определяется по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\frac{F(x_n)}{F(x_n)-F(x_{n-1})}(x_n-x_{n-1}). \tag{7.63}$$

При применении метода секущих для расчета обратной задачи пограничного слоя $x_n$ надо заменить на $u_{e,n}$, а $F=\delta^*-\delta^*_{BC}$. Описанный итерационный процесс схематически показан на рис. 7.13.

После окончания итерационного процесса поиска величины $u_e(x)$, обеспечивающего получение заданного значения толщины вытеснения $\delta^*(x)$, так же как и при решении параболических уравнений, можно переходить к решению уравнений в расположенном ниже по потоку сечении. Простота обратного метода А очевидна. Если пренебречь небольшими изменениями, связан-

ными с использованием приближения Флюгге-Лотц, то можно решать разностные уравнения точно так же, как они решались прямым методом расчета пограничного слоя. Описанный метод оказывается вполне удовлетворительным [Pletcher, 1978; Kwon, Pletcher, 1979], однако если он применяется для расчета отрывных течений, то в рассчитанном распределении напряжения трения на стенке появляются небольшие осцилляции. Появления

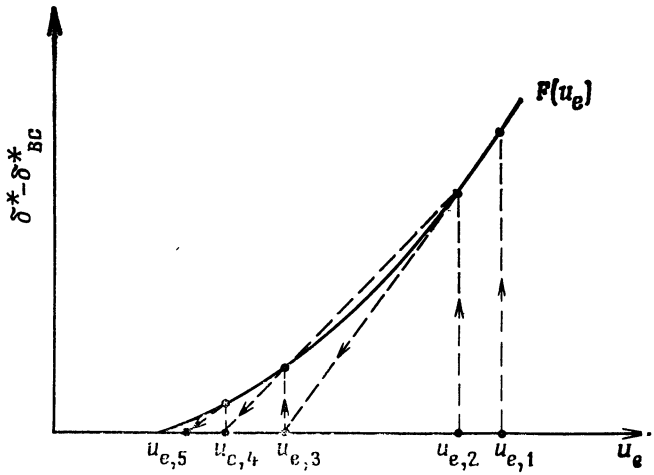



Рис. 7.13. Определение $u_e(x)$ методом секущих.

таких осцилляций можно избежать при совместном решении уравнений движения и неразрывности. Они не возникают при решении уравнений описанным ниже методом.

**Обратный метод В.** Опишем метод, предложенный Квоном и Плетчером [Kwon, Pletcher, 1981]. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы в каждом сечении заменить все заданные уравнения и граничные условия одной одновременно решаемой системой алгебраических уравнений. Для этого удобно ввести функцию $\psi$. Тогда

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

а законы сохранения массы и импульса запишутся в виде

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{7.64}$$

$$Cu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{7.65}$$

где $\tau = \bar{\mu}\,\partial u/\partial y$, $\bar{\mu} = \mu + \mu_T$.

Граничные условия имеют вид

$$u(x, 0) = \psi(x, 0) = 0, \tag{7.66}$$

$$\psi_e = u_e(y_e - \delta^*(x)), \tag{7.67}$$

где $\delta^*(x)$ — заданная функция. Граничное условие для $\psi_e$ следует из определения толщины вытеснения

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy.$$

Верхний предел интегрирования можно заменить значением $y$ на внешней границе пограничного слоя $y_e$, так как при $y > y_e$ подынтегральное выражение равно нулю. Умножив на $u_e$, получим

$$u_e\delta^* = u_e y_e - \int_0^{y_e} u\, dy.$$

Выразив $u$ через функцию тока, найдем, что интеграл равен $\psi_e$, и после несложных преобразований придем к соотношению (7.67). Если приведенные ниже разностные уравнения решаются прямым методом, то на внешней границе вместо условия (7.67) надо задать обычное граничное условие (7.61).

Построим сначала конечно-разностные аналоги уравнений (7.64) и (7.65). Они имеют вид

$$\frac{u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2} = \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_{j-1}^{n+1}}{\Delta y_-}, \tag{7.68}$$

$$Cu_j^{n+1}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} - \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta x}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta y_+ + \Delta y_-} =$$

$$= \chi^{n+1} + \frac{2}{\rho(\Delta y_+ + \Delta y_-)}\left(\bar{\mu}_{j+1/2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta y_+} - \bar{\mu}_{j-1/2}\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta y_-}\right). \tag{7.69}$$

Здесь $C = 1$ при $u_j^{n+1} > 0$ и $C = 0$ при $u_j^{n+1} < 0$, а

$$\chi = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}.$$

Теперь, следуя описанной в п. 7.3.3 процедуре, проведем линеаризацию по Ньютону нелинейных конвективных членов. Пусть $u_j^{n+1} = \hat{u}_j^{n+1} + \delta_u$ и $\psi_j^{n+1} = \hat{\psi}_j^{n+1} + \delta_\psi$. Знаком $\wedge$ обозначено полученное на предыдущей итерации значение неизвестной. Величины $\delta_u$ и $\delta_\psi$ обозначают изменение неизвестных на двух

последовательных итерациях, т. е. $\delta_\phi = \phi_j^{n+1} - \hat{\phi}_j^{n+1}$, где $\phi$ — произвольная функция. В результате получим систему разностных уравнений, которую можно записать в виде

$$\psi_{j-1}^{n+1} - \psi_j^{n+1} + b_j\left(u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1}\right) = 0, \tag{7.70}$$

$$B_j u_{j-1}^{n+1} + D_j u_j^{n+1} + A_j u_{j+1}^{n+1} + E_j \psi_j^{n+1} = H_j \chi^{n+1} + C_j. \tag{7.71}$$

Здесь

$$A_j = -\frac{\hat{\psi}_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta x\left(\Delta y_+ + \Delta y_-\right)} - \frac{2\bar{\mu}_{j+1/2}}{\rho\,\Delta y_+\left(\Delta y_+ + \Delta y_-\right)},$$

$$B_j = \frac{\hat{\psi}_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta x\left(\Delta y_+ + \Delta y_-\right)} - \frac{2\bar{\mu}_{j-1/2}}{\rho\,\Delta y_-\left(\Delta y_+ + \Delta y_-\right)},$$

$$C_j = \frac{C\left(\hat{u}_j^{n+1}\right)^2}{\Delta x} - \frac{\hat{\psi}_j^{n+1}\left(\hat{u}_{j+1}^{n+1} - \hat{u}_{j-1}^{n+1}\right)}{\Delta x\left(\Delta y_+ + \Delta y_-\right)},$$

$$D_j = \frac{C\left(2\hat{u}_j^{n+1} - u_j^n\right)}{\Delta x} + \frac{2}{\rho\left(\Delta y_+ + \Delta y_-\right)}\left(\frac{\bar{\mu}_{j+1/2}}{\Delta y_+} + \frac{\bar{\mu}_{j-1/2}}{\Delta y_-}\right),$$

$$E_j = -\frac{\hat{u}_{j+1}^{n+1} - \hat{u}_{j-1}^{n+1}}{\Delta x\left(\Delta y_+ + \Delta y_-\right)}, \quad H_j = 1, \quad b_j = \frac{\Delta y_-}{2}.$$

Приведенная выше система алгебраических уравнений аналогична полученной в § 7.3 при применении метода Дэвиса. Последняя решалась модифицированной прогонкой. Система уравнений (7.70) и (7.71) является системой уравнений с блочной трехдиагональной матрицей, блоки которой имеют размер $2\times 2$. На каждом шаге по маршевой координате приходится решать систему $2(NJ)-2$ уравнений с $2(NJ)-2$ неизвестными, где $NJ$ — число точек поперек слоя, включая граничные точки. Единственное различие между системами уравнений, получающихся в рассматриваемом случае и при использовании метода Дэвиса, состоит в том, что в правой части уравнения (7.71) появляется новый член $H_j\chi^{n+1}$. При решении обратной задачи безразмерный градиент давления $\chi^{n+1}$ является неизвестной величиной. Отличаются также условия на внешней границе пограничного слоя. Два этих фактора препятствуют применению описанного в § 7.3 метода модифицированной прогонки. Однако блоки, расположенные под главной диагональю, можно исключить, а для определения неизвестных получить рекуррентную формулу обратной подстановки [Kwon, Pletcher, 1981]. До проведения обратной подстановки необходимо найти параметр $\chi^{n+1}$ при помощи описанной ниже специальной процедуры.

Для определения неизвестных можно воспользоваться соотношениями

$$u_j^{n+1} = A'_j u_{j+1}^{n+1} + H'_j \chi^{n+1} + C'_j, \tag{7.72}$$

$$\psi_j^{n+1} = B'_j u_{j+1}^{n+1} + D'_j \chi^{n+1} + E'_j, \tag{7.73}$$

если коэффициенты $A'_j$, $H'_j$, $C'_j$, $B'_j$, $D'_j$, $E'_j$ и величины $u_{j+1}^{n+1}$ и $\chi^{n+1}$ уже известны. Указанные коэффициенты определяются соотношениями

$$A'_j = -\frac{A_j}{R_1},$$

$$B'_j = A'_j R_2,$$

$$C'_j = \frac{C_j - B_j C'_{j-1} - E_j (b_j C'_{j-1} + E'_{j-1})}{R_1},$$

$$D'_j = b_j H'_{j-1} + D'_{j-1} + H'_j R_2,$$

$$E'_j = b_j C'_{j-1} + E'_{j-1} + C'_j R_2,$$

$$H'_j = \frac{H_j - B_j H'_{j-1} - E_j (b_j H'_{j-1} + D'_{j-1})}{R_1},$$

$$R_1 = D_j + (B_j + E_j b_j) A'_{j-1} + E_j (B'_{j-1} + b_j),$$

$$R_2 = b_j (1 + A'_{j-1}) + B'_{j-1}.$$

Вследствие заданных на внутренней границе ($j = 1$) граничных условий величины $u_j^{n+1}$ и $\psi_j^{n+1}$ равны нулю, следовательно, равны нулю и коэффициенты $A'_1$, $B'_1$, $C'_1$, $D'_1$, $E'_1$, $H'_1$. Остальные коэффициенты можно вычислить последовательно, продвигаясь от $j = 2$ к внешней границе ($j = NJ$).

Безразмерный градиент давления $\chi^{n+1}$ определяется из одновременного решения системы уравнений, состоящей из уравнений (7.72) и (7.73) при $j = NJ - 1$ и граничных условий. При $j = NJ - 1$ уравнения (7.72) и (7.73) принимают вид

$$u_{NJ-1}^{n+1} = A'_{NJ-1} u_{NJ}^{n+1} + H'_{NJ-1} \chi^{n+1} + C'_{NJ-1}, \tag{7.74}$$

$$\psi_{NJ-1}^{n+1} = B'_{NJ-1} u_{NJ}^{n+1} + D'_{NJ-1} \chi^{n+1} + E'_{NJ-1}. \tag{7.75}$$

Выпишем также граничные условия

$$\psi_{NJ}^{n+1} = u_{NJ}^{n+1} (y_{NJ} - \delta^{*\,n+1}), \tag{7.76}$$

$$\chi^{n+1} = \frac{1}{\Delta} \left[ (2\hat{u}_{NJ}^{n+1} - u_{NJ}^{n}) u_{NJ}^{n+1} - (\hat{u}_{NJ}^{n+1})^2 \right]. \tag{7.77}$$

Уравнение (7.68) перепишем в виде

$$\psi_{NJ}^{n+1} = \psi_{NJ-1}^{n+1} + \frac{\Delta y_-}{2}(u_{NJ}^{n+1} + u_{NJ-1}^{n+1}). \tag{7.78}$$

Решив уравнения (7.74)—(7.78) относительно $\chi^{n+1}$, получим

$$\chi^{n+1} = \frac{(F_3/F_1)(2\hat{u}_{NJ}^{n+1} - u_{NJ}^{n}) - (u_{NJ}^{n+1})^2}{\Delta x - (F_2/F_1)(2\hat{u}_{NJ}^{n+1} - u_{NJ}^{n})}, \tag{7.79}$$

где

$$F_1 = y_{NJ} - \delta^{*\,n+1} - B'_{NJ-1} - \frac{\Delta y_-}{2}(1 + A'_{NJ-1}),$$

$$F_2 = D'_{NJ-1} + \frac{\Delta y_-}{2} H'_{NJ-1},$$

$$F_3 = E'_{NJ-1} + \frac{\Delta y_-}{2} C'_{NJ-1}.$$

Найдя безразмерный градиент давления $\chi^{n+1}$, можно из уравнений (7.74)—(7.78) определить и скорость $u_{NJ}^{n+1}$ на внешней границе пограничного слоя:

$$u_{NJ}^{n+1} = \frac{F_2}{F_1}\chi^{n+1} + \frac{F_3}{F_1}. \tag{7.80}$$

После этого величина $\psi_{NJ}^{n+1}$ определяется непосредственно из уравнения (7.76). Теперь можно воспользоваться соотношениями (7.72) и (7.73) для проведения обратной подстановки, т. е. последовательного вычисления неизвестных $u_j^{n+1}$ и $\psi_j^{n+1}$ от внешней границы к стенке. Так как применяется линеаризация по Ньютону, то систему уравнений надо решать итерационно, изменяя от итерации к итерации значения величин $\hat{u}_j^{n+1}$ и $\hat{\psi}_j^{n+1}$. На каждом шаге по маршевой координате итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разность значений неизвестных $u$ и $\psi$ на двух последовательных итерациях не окажется меньше некоторой наперед заданной величины. При расчете на каждом новом шаге по продольной координате предполагается, что $\hat{u}_j^{n+1} = u_j^n$ и $\hat{\psi}_j^{n+1} = \psi_j^n$. В тех случаях, когда этот метод применялся, двух-трех итераций обычно оказывалось достаточно для того, чтобы максимальная относительная погрешность $(\Delta\phi/\phi)$ стала меньше, чем $5 \cdot 10^{-4}$.

В работах Цебеци [Cebeci, 1976] и Картера [Carter, 1978] описаны другие конечно-разностные обратные методы расчета пограничного слоя. Эти методы также основаны на использовании приближения Флюгге-Лотц и на совместном решении уравнений неразрывности и движения.

### 7.4.4. Вязко-невязкое взаимодействие

При проектировании обтекаемого тела давление на его поверхности определяют обычно из анализа течения невязкого газа. Получающееся при этом распределение скорости течения невязкого газа используется как граничное условие для расчета пограничного слоя, который проводится для вычисления сопротивления тела, обусловленного вязкостью. Во многих случаях пограничный слой лишь слегка изменяет картину обтекания тела. Можно получить улучшенное решение течения невязкого газа, увеличив физическую толщину обтекаемого тела на толщину вытеснения пограничного слоя. Величина $\delta^*$ определена так, что новое невязкое решение учтет в этом случае вытесняющее воздействие вязкого слоя, который расположен вблизи поверхности обтекаемого тела. Подправленное невязкое распределение скорости можно теперь использовать для получения нового решения в вязкой области течения. В принципе такую процедуру вязко-невязкого взаимодействия можно продолжать итерационно до тех пор, пока изменения параметров не станут достаточно малыми. Однако на практике при переходе от одной итерации к другой для обеспечения сходимости итерационного процесса часто приходится применять нижнюю релаксацию.

К счастью, для большинства течений с присоединенным пограничным слоем изменение параметров потока, обусловленное учетом вязко-невязкого взаимодействия, пренебрежимо мало. Вследствие этого достаточная для инженерных приложений точность достигается при независимом расчете вязкого и невязкого потоков (т. е. при расчете без учета вязко-невязкого взаимодействия). Важным исключением из этого правила являются отрывные течения или течения с отрывными пузырями.

Вытесняющее воздействие области отрыва приводит к существенному локальному изменению распределения давления. Даже при отсутствии отрыва резкое утолщение пограничного слоя под воздействием неблагоприятного градиента давления может настолько изменить локальное распределение давления, что правдоподобное решение уравнений пограничного слоя не удастся получить без учета вытесняющего эффекта пристенного вязкого слоя. При таких условиях довольно часто оказывается, что расчет пограничного слоя, проведенный по невязкому полю скорости, найденному без учета вытесняющего эффекта, предсказывает возникновение отрыва, тогда как в реальном течении отрыв отсутствует.

Часто область, в которой существенны эффекты вязко-невязкого взаимодействия, можно сократить до небольшой окрестности пузыря в распределении толщины вытеснения. Такая ло-

кальная область взаимодействия схематически показана на рис. 7.14. Описанный в предыдущем п. 7.4.3 обратный метод расчета пограничного слоя особенно хорошо подходит для расчета течений, в которых может возникнуть отрыв потока.

Укажем на наиболее важные элементы процедуры расчета вязко-невязкого взаимодействия.

1. Метод определения поправки к невязкому течению, который позволяет найти распределение давления или скорости по поверхности тела, обусловленное вытесняющим воздействием вязкого слоя. В принципе для этого можно использовать любой метод определения параметров невязкого течения, но часто удается применить более простой метод расчета невязкого течения, основанный на теории малых возмущений.

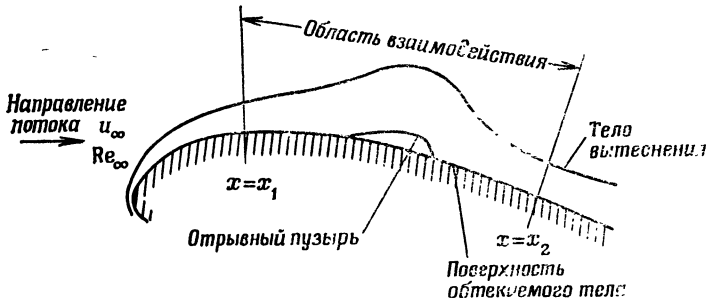



Рис. 7.14. Локальная область взаимодействия при двумерном обтекании тела.

2. Подходящий для рассматриваемой задачи метод решения уравнений пограничного слоя. Если возможен отрыв потока, то таким методом является обратный метод расчета пограничного слоя.

3. Процедура коррекции результатов, полученных при расчете вязкого и невязкого течений. Она должна обеспечивать стремление изменения параметров к нулю при переходе от одного итерационного цикла к последующему.

В течение ряда лет было предложено множество различных схем расчета вязко-невязкого взаимодействия. У нас нет возможности рассматривать здесь все эти схемы. Вместо этого мы кратко опишем одно приближение, позволяющее в случае течения несжимаемой жидкости рассчитать параметры потока вблизи возникающего на профиле отрывного пузыря. Такое течение схематически показано на рис. 7.14.

В этом случае поправку к невязкому решению, связанную с вытесняющим воздействием пограничного слоя, можно оце-

нить, используя теорию малых возмущений. Пусть $u_{e,o}$ — касательная составляющая скорости невязкого потока, обтекающего твердое тело (она найдена без учета вязких эффектов). Вытесняющее воздействие вязкого слоя заменим распределенными по поверхности тела источниками и стоками и обозначим через $u_c$ индуцируемую ими скорость на границе тела вытеснения. В этом случае составляющую по оси $x$ скорости на границе тела вытеснения можно представить в виде

$$u_e = u_{e,o} + u_c. \tag{7.81}$$

Следуя Лайтхиллу [Lighthill, 1958], интенсивность источников и стоков, смещающих линию тока к границе тела вытеснения, определим по формуле

$$q = \frac{d(u_e\delta^*)}{dx}. \tag{7.82}$$

При небольших значениях толщины вытеснения $\delta^*$ скорость $u_c$ можно выразить через интеграл

$$u_c(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(u_e\delta^*)}{dx'}\frac{dx'}{x-x'}. \tag{7.83}$$

Если скорость $u_c$ определяется численно, то обычно предполагают, что сильное взаимодействие происходит лишь в области $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, показанной на рис. 7.14. Кроме этого, предполагается, что интенсивность источников и стоков, моделирующих вытесняющее воздействие вязкого слоя, стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. В соответствии с этим величина $d(u_e\delta^*)/dx$ обычно вычисляется по результатам расчета пограничного слоя лишь при $x_1 < x < x_2$. Для вычисления стоящего в правой части уравнения (7.83) интеграла при $x < x_1$ и $x > x_2$ часто используется экстраполяционная формула [Kwon, Pletcher, 1979]

$$q'(x) = b/x^2. \tag{7.84}$$

Константа $b$ подбирается так, чтобы значения $q$ при $x_1$ и $x_2$ совпали с полученными из расчета пограничного слоя значениями. Соотношение (7.83) можно теперь переписать в виде

$$u_c(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{x_1}\frac{q'(x')}{x-x'}dx' + \int_{x_1}^{x_2}\frac{q(x')}{x-x'}dx' + \int_{x_2}^{\infty}\frac{q'(x')}{x-x'}dx'\right]. \tag{7.85}$$

Первый и третий интегралы вычисляются аналитически, второй интеграл определяется численно, обычно по формуле трапеций. Возникающую при $x = x'$ особенность можно выделить, исполь-

зуя процедуру, предложенную Джоубом [Jobe, 1974]. Некоторые авторы полагают, что, до тех пор пока разность $x - x'$ остается конечной, можно при вычислении интеграла не обращать внимания на указанную особенность [Briley, McDonald, 1975].

Невязкое распределение скорости $u_{e,o}$ по поверхности твердого тела (без учета пограничного слоя) можно получить либо одним из методов, описанных в гл. 6 (например, методом Хесса и Смита [Hess, Smith, 1967]), либо при помощи результатов измерений. Методом Хесса и Смита можно проводить расчет невязкого течения на всех итерациях, однако применение существенно более простой процедуры, основанной на теории малых возмущений, позволяет значительно сэкономить время расчета на ЭВМ. Имеющийся опыт показывает, что если теория пограничного слоя применима для описания вязкого течения, то в случае течения несжимаемой жидкости теория малых возмущений обеспечивает достаточную точность расчета вязко-невязкого взаимодействия.

Обратные методы расчета пограничного слоя, описанные в п. 7.4.3, вполне подходят для определения параметров в вязкой подобласти течения в тех случаях, когда возможно образование отрывных зон. Изменение решения в ходе итерационного процесса может быть успешно найдено обратным методом, что показано в работах Картера [Carter, 1978] и Квона и Плетчера [Kwon, Pletcher, 1979].

Расчет взаимодействия проводится следующим образом. Сначала на интересующем нас теле определяется величина $u_{e,o}$ и прямым методом проводится расчет пограничного слоя до начала области взаимодействия. Два этих решения в дальнейшем не меняются. После этого в области $x_1 < x < x_2$ (см. рис. 7.14) задается начальное распределение толщины вытеснения $\delta^*(x)$. Это начальное распределение может быть произвольным, но при $x = x_1$ значение толщины вытеснения $\delta^*(x)$ должно совпадать со значением, рассчитанным прямым методом. Далее это распределение $\delta^*(x)$ используется как граничное условие для расчета пограничного слоя обратным методом. В результате этого расчета находится распределение скорости на границе пограничного слоя $u_{e,BL}(x)$.

Расчет поправки к невязкому распределению скорости проводится в рамках теории малых возмущений по соотношению (7.85). Из него находим новое распределение скорости по поверхности тела $u_{e,\text{inv}}(x)$. Значения скорости $u_e(x)$, полученные в результате расчетов невязкого течения и пограничного слоя, не будут совпадать до тех пор, пока итерационный процесс не сойдется. По разности этих двух скорректированных значений

скорости можно найти новое, более удачное распределение толщины вытеснения $\delta^*(x)$. Формально для этого надо узнать, как изменение $u_e$ влияет на $\delta^*$. Для дозвуковых течений подходящую процедуру удалось построить, учитывая то, что при малых возмущениях локальной скорости $u_e$ расход газа на единицу толщины пограничного слоя стремится остаться постоянным, т. е. $u_e\delta^* \approx$ const. Таким образом, локальное уменьшение скорости $u_e(x)$ (градиент давления становится менее благоприятным) приводит к увеличению толщины вытеснения $\delta^*(x)$, а локальное увеличение скорости $u_e(x)$ (градиент давления становится более благоприятным) приводит к уменьшению толщины вытеснения $\delta^*(x)$. На практике эта идея используется при вычислении нового приближения для $\delta^*$ следующим образом [Carter, 1978]: перед очередным расчетом пограничного слоя толщина вытеснения $\delta^*$ определяется по формуле

$$\delta^*_{k+1} = \delta^*_k \left( \frac{u_{e,\, BL_k}}{u_{e,\, \mathrm{inv}_k}} \right), \tag{7.86}$$

где $k$ — номер итерации. Важно заметить, что на основе соотношения (7.86) проводится лишь коррекция величины $\delta^*$ при переходе к новой итерации, поэтому если итерационный процесс сходится, то никакой формальной проверки этого соотношения не требуется. В результате сходимости итерационного процесса должно быть выполнено условие $u_{e,\, BL} = u_{e,\, \mathrm{inv}}$; следовательно, соотношение (7.86), переходящее при этом в тождество, не оказывает влияния на окончательный результат. В этом смысле применение соотношения (7.86) несколько напоминает использование произвольного релаксационного параметра при численном решении эллиптических уравнений методом последовательной верхней релаксации. Картер [Carter, 1978] предложил более формальный вывод соотношения (7.86), основанный на применении интегрального соотношения Кармана.

Расчет вязко-невязкого взаимодействия завершается после ряда последовательных прохождений всей области взаимодействия, состоящих в расчете сначала пограничного слоя обратным методом, а потом невязкого течения, причем перед каждым расчетом пограничного слоя толщина вытеснения $\delta^*$ корректируется по формуле (7.86). Если $|u_{e,\, BL} - u_{e,\, \mathrm{inv}}|$ не превосходит некоторой наперед заданной величины, то предполагается, что рассматриваемый процесс сошелся. В некоторых случаях сходимость удается ускорить, применив в соотношении (7.86) последовательную верхнюю релаксацию величины $\delta^*$. Основные особенности нескольких методов расчета вязко-невязкого взаимодействия освещены в работе Вигтона и Холта [Wigton, Holt, 1981].

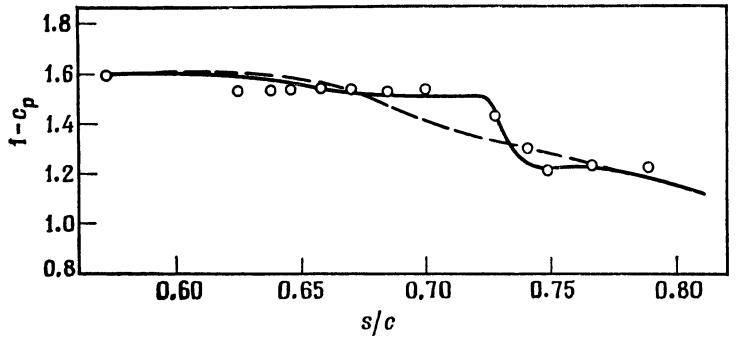



Рис. 7.15. Сопоставление рассчитанного распределения давления на профиле NACA $66_3$-018 при нулевом угле атаки с измеренным (○) [Gault, 1955] ($Tu = 0.15 \div 0.20$, $Re_c = 2 \cdot 10^6$); ——— расчет взаимодействующего пограничного слоя; — — — — невязкое решение (без итераций).

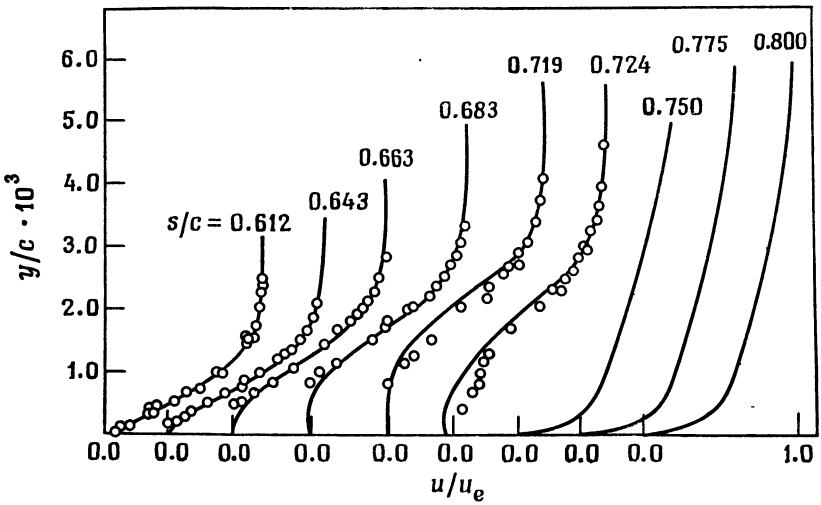



Рис. 7.16. Сопоставление профилей скорости, рассчитанных на профиле NACA $66_3$-018 при нулевом угле атаки, с измеренными (○) [Gault, 1955] ($Tu = 0.15 \div 0.20$); ——— расчет взаимодействующего пограничного слоя.

Некоторые результаты расчета течения в окрестности переходного отрывного пузыря, возникающего на профиле NACA $66_3$-018, показаны на рис. 7.15 и 7.16 [Kwon, Pletcher, 1979]. На этих рисунках приведена степень турбулентности набегающего потока Tu и число Рейнольдса $Re_c$, определенное по хорде профиля. На рис. 7.15 проведено сопоставление рассчитанного и измеренного коэффициентов давления. Штриховой линией на

рис. 7.15 показано распределение давления, полученное в результате расчета невязкого течения при отсутствии пограничного слоя. Вблизи отрывного пузыря, центр которого расположен при $s/c \approx 0.7$ ($s$ — расстояние, отсчитываемое вдоль профиля от передней критической точки, а $c$ — хорда профиля), рассчитанный коэффициент давления значительно отличается от измеренного. Сплошной линией на рисунке показаны результаты расчета, полученные при учете вязко-невязкого взаимодействия. Хорошо видно, что в этом случае рассчитанные значения достаточно точно описывают как сам коэффициент давления, так и характер его изменения. В рассматриваемом случае для сходимости итерационного процесса потребовалось 17 последовательных расчетов пограничного слоя и невязкого потока. Сопоставление рассчитанных и измеренных профилей скорости показано на рис. 7.16. Из вида профилей при $s/c$, близких к 0.7, очевидно, что в потоке возникает область возвратного течения. Результаты расчета очень чувствительны к модели, используемой для описания перехода от ламинарного течения к турбулентному.

Описанная выше общая стратегия расчета вязко-невязкого взаимодействия позволяет получать неплохие результаты и в случае течений сжимаемой жидкости, включая трансзвуковые и сверхзвуковые течения [Carter, 1981; Werle, Verdon, 1979]. При расчете сжимаемых течений уравнение энергии для вязкой подобласти записывается в рамках теории пограничного слоя и обычно решается с использованием приближения Флюгге-Лотц. При изменении режима обтекания тела, как правило, меняется и применяемый метод расчета невязкого течения. При расчете трансзвукового вязко-невязкого взаимодействия Картер [Carter, 1981] для описания невязкого течения воспользовался релаксационным методом решения полного уравнения потенциала. В случае сверхзвуковых течений снова оказывается полезной теория малых возмущений (линейная теория), и составляющая давления, связанная с влиянием вязкости, может быть просто выражена через вторую производную толщины вытеснения пограничного слоя. Конкретный вид соотношения, используемого для определения давления, зависит от рассматриваемой задачи. С конкретными примерами читатель может ознакомиться в работах [Werle, Vatsa, 1974; Burggraf et al., 1979]. В случае сверхзвукового невязкого течения для получения единственного решения необходимо задать граничное условие на нижней по потоку границе (обычно задают толщину вытеснения $\delta^*$), несмотря на то что градиент давления определяется лишь локальными параметрами.

Различные нестационарные итерационные методы также успешно использовались для расчета вязко-невязкого взаимо-

действия как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых течениях [Briley, McDonald, 1975; Werle, Vatsa, 1974].

В связи с вязко-невязким взаимодействием часто говорят о *трехпалубной модели* или *трехпалубной структуре*. Поэтому естественно попытаться понять, не следуют ли из этой теории какие-либо результаты, которые необходимо было бы учесть при численном решении задач вязко-невязкого взаимодействия. Рассматриваемая структура получается при $\mathrm{Re} \to \infty$, если применяется *метод сращиваемых асимптотических разложений* к анализу ламинарного течения вблизи области, в которой пограничный слой возмущен. Такое возмущение пограничного слоя может быть связано с небольшой отрывной зоной или с задней кромкой пластины. Мы в основном сосредоточили внимание на применении теории сращиваемых асимптотических разложений к анализу течений с небольшими отрывными зонами.

Развитие этой теории связано с именами нескольких крупных ученых. Некоторые первые результаты были получены Лайтхиллом [Lighthill, 1958]. Значительный вклад в развитие этой теории внес Стюартсон и ряд его сотрудников [1]. Прекрасный обзор развития теории сращиваемых асимптотических разложений вплоть до 1974 г. можно найти в работе Стюартсона [Stewartson, 1974].

Эта теория применима, если продольная длина области возмущения относительно мала. Следовательно, ее можно применять лишь к небольшим отрывным пузырям, а не к глобальным отрывным течениям. Длина области взаимодействия, в которой можно пользоваться трехпалубной моделью, имеет порядок $\mathrm{Re}^{-3/8}$. При определении числа Рейнольдса Re характерной длиной является длина, на которой происходило развитие пограничного слоя. «Палубами» (или слоями) в этой теории называют подобласти течения, расположенные на различных расстояниях от стенки. Толщина нижнего слоя имеет порядок $\mathrm{Re}^{-5/8}$. Силы инерции в этом слое настолько малы, что он моментально реагирует на все возмущения, передаваемые градиентом давления. Толщина среднего (или главного) слоя имеет порядок $\mathrm{Re}^{-1/2}$. В этом слое происходит дальнейшее развитие в продольном направлении набегающего пограничного слоя и течение здесь является преимущественно вихревым и невязким. В среднем слое параметры течения лишь слегка отличаются от соответствующих параметров в обычном невзаимодействующем пограничном слое. Возмущения, передаваемые от нижнего слоя,

---

[1] Большой вклад в развитие метода сращиваемых асимптотических разложений внесли советские ученые В. Я. Нейланд и В. В. Сычёв. — *Прим. ред.*

приводят к простому смещению границы среднего слоя от стенки. Толщина верхнего слоя имеет порядок $Re^{-3/8}$. Этот слой является возмущенной частью безвихревого невязкого потока.

Метод сращиваемых асимптотических разложений позволяет получить уравнения и граничные условия, необходимые для сращивания решений во всех трех слоях. Получаемые этим методом результаты справедливы лишь для ламинарных течений при $Re \to \infty$, т. е. возможность применить их на практике ограниченна. Для решения уравнений часто используются численные методы и процедура расчета вязко-невязкого взаимодействия [Jobe, Burggraf, 1974].

Приведем наиболее интересные для специалистов в области вычислительной гидромеханики результаты теории сращиваемых асимптотических разложений.

1. Уравнения трехпалубной модели, которые применимы для описания течений с малыми возмущениями (течения с небольшими отрывными зонами или у задних кромок тел), не содержат членов, не учитываемых в модели взаимодействующего с невязким потоком пограничного слоя. Это подтверждает справедливость предположения о том, что в предельном случае $Re \to \infty$ теория взаимодействующего пограничного слоя является корректной. Из теории сращиваемых асимптотических разложений следует, что для рассматриваемых здесь течений градиентом давления по нормали к поверхности можно пренебречь.

2. Метод сращиваемых асимптотических разложений позволяет оценить масштабы, которые могут оказаться полезными при конечно-разностном расчете ламинарных течений. Так, нижний слой имеет толщину порядка $Re^{-5/8}$. Хотя эта оценка справедлива лишь в пределе при $Re \to \infty$, вблизи стенки разумно использовать достаточно мелкую сетку. Такая сетка позволит описать течение в нижнем слое, на которое могут оказать сильное воздействие даже небольшие возмущения давления. Важность выбора такой сетки подтверждает проведенное Бургграфом и др. [Burggraf et al., 1979] исследование конечно-разностных схем.

3. Метод сращиваемых асимптотических разложений четко показывает, что задача расчета сверхзвукового отрывного течения является краевой задачей. Граничное условие на нижней границе необходимо задать для того, чтобы из множества возможных ветвящихся решений выбрать единственное. Необходимость задания такого условия заранее не очевидна, так как уравнения пограничного слоя параболические, а давление в соответствии с линейной теорией определяется лишь местным уг-

лом наклона тела вытеснения. В качестве граничного условия на нижней по потоку границе часто используют заданное значение толщины вытеснения.

С работой Бургграфа и др. [Burggraf et al., 1979] полезно ознакомиться для того, чтобы понять различие между методами расчета пограничного слоя с учетом вязко-невязкого взаимодействия и численным решением уравнений трехпалубной модели. При очень больших числах Рейнольдса ($10^9$) результаты расчетов отрывного сверхзвукового обтекания угла сжатия, проведенных в рамках модели взаимодействующего пограничного слоя и трехпалубной модели, неплохо согласуются между собой. По мере уменьшения числа Рейнольдса отличие результатов расчетов по двум этим моделям становится довольно значительным.

## § 7.5. Методы расчета внутренних течений

### 7.5.1. Введение

Уравнения тонкого вязкого слоя являются достаточно точной математической моделью и в случае двумерных или осесимметричных внутренних течений. К ним относятся течения, развивающиеся в трубах с прямой осью и в кольцевых каналах, образованных двумя концентрически расположенными трубами с прямой осью. Кроме того, поток в средней части канала прямоугольного сечения с большим относительным удлинением часто близок к двумерному (двумерное течение в плоском канале с параллельными стенками). Перечисленные внутренние течения схематически показаны на рис. 7.17. В этих стандартных случаях поперечное сечение канала не меняется в осевом направлении. Однако модель пограничного слоя является неплохим приближением и для некоторых внутренних течений в каналах с внезапным расширением, хотя при этом в потоке возникают зоны возвратного течения. Эта новая область применения уравнений тонкого вязкого слоя будет подробно рассмотрена в п. 7.5.2.

Конечно-разностные методы особенно полезны для анализа течения на участке от входа в канал до области полностью развитого течения. Гидродинамическое течение называется полностью развитым, если распределение скорости в поперечном сечении канала не меняется в осевом направлении. Обычно идеализацией полностью развитого течения можно пользоваться лишь в тех случаях, когда изменение свойств жидкости в направлении основного потока пренебрежимо мало. Рассматри-

ваемый класс течений позволяет описать и изменение термодинамических параметров. Для этого совместно с уравнениями неразрывности и движения надо решить уравнение энергии, записанное в приближении тонкого вязкого слоя. Если свойства жидкости не меняются, то при заданных в качестве граничных условий постоянной температуре стенки или постоянном тепловом потоке распределение безразмерной температуры поперек канала также может не зависеть от осевой координаты. Вопросы, связанные с анализом тепловых процессов во внутренних течениях, превосходно описаны в книге Шаха и Лондона [Shah, London, 1978].

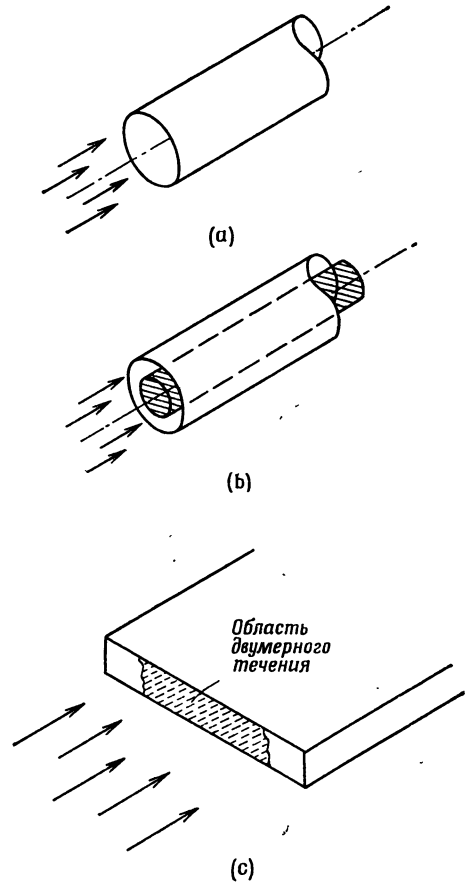



Рис. 7.17. Геометрические конфигурации внутренних течений, в которых расчет вязких течений проводится при помощи уравнений тонкого вязкого слоя: (a) круглая труба, (b) кольцевой канал, (c) канал прямоугольного сечения с большим относительным удлинением.

При расчете полностью развитых течений метод конечных разностей не играет большой роли, так как в этом случае уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Развитым ламинарным течением в трубе является широко известное течение Гагена — Пуазейля [White, 1974]. Если для описания турбулентности используется относительно простая модель, то даже для расчета полностью развитых турбулентных течений можно применять численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. При наличии теплообмена становится более вероятным, что вследствие изменения свойств жидкости поток не выйдет на режим полностью развитого течения.

В случае внутренних течений для определения числа Рейнольдса в качестве характерной длины обычно используют гидравлический диаметр $D_H$. По определению гидравлический диаметр равен $4A/P$, где $A$ — площадь поперечного сечения, а $P$ — периметр смачиваемой поверхности. Для круглой трубы гидравлический диаметр $D_H$ совпадает с ее диаметром.

Можно ожидать, что в небольшой области, расположенной у входа в канал, приближение пограничного слоя несправедливо. Эта область аналогична существующей во внешних течениях области с низкими числами Рейнольдса, которая расположена у передней кромки обтекаемого тела. Если при течении в канале число Рейнольдса больше 75, то область пренебрежимо мала. Сопоставление различных численных моделей, используемых для расчета течения на входе в канал при низких числах Рейнольдса, можно найти в работах Макдональда [McDonald et al., 1972] и Чилукури и Плетчера [Chilukuri, Pletcher, 1980].

### 7.5.2. Стратегия расчета внутренних течений

Важным свойством стационарных внутренних течений в каналах является то, что при отсутствии вдува или отсоса через стенку расход жидкости через любое сечение, перпендикулярное оси канала, постоянен. Так как для параболических уравнений начальное распределение скорости и температуры должно быть задано при постановке задачи, то и расход можно рассматривать как заданный. При наличии вдува или отсоса нормальная составляющая скорости на стенке должна быть задана для уравнений пограничного слоя в качестве граничного условия, поэтому и в этом случае изменение расхода вдоль канала можно определить, исходя из постановки задачи. В дальнейшем для простоты ограничимся случаем течения жидкости в канале с непроницаемыми стенками, хотя все методы расчета легко модифицируются на случай вдува или отсоса газа. Имеющаяся дополнительная информация о величине суммарного расхода через канал позволяет при решении задачи определить величину градиента давления. Задание расхода играет ту же роль, что простое соотношение между $u_e(x)$ и $dp/dx$, которое в случае внешних течений следует из стационарных уравнений Эйлера.

При обычном подходе к анализу пограничного слоя во внешних течениях поток вне пограничного слоя предполагается невязким, а не внешней границе пограничного слоя уравнения Эйлера сводятся к $dp/dx = -\rho u_e du_e/dx$. Именно вследствие этого продольный градиент давления при анализе внешних течений обычно рассматривается как заданный, т. е. он легко вы-

числяется по известной скорости $u_e(x)$, либо заранее известен. Для расчета внутренних течений используются лишь уравнения пограничного слоя. Поэтому какая-либо дополнительная информация, связанная с наличием внешнего невязкого потока отсутствует, а условия для $u$ на внешней границе определяются геометрией канала. Так как в общем случае вязкие эффекты могут оказаться существенными во всей области течения, то уравнения Эйлера нельзя использовать для определения градиента давления. Вместо этого градиент давления находится из условия сохранения суммарного расхода через канал. Итак, при расчете стационарных внутренних течений *градиент давления должен быть вычислен в процессе решения задачи* (из условия сохранения суммарного расхода), а не задан заранее, как в случае внешних течений. В этом состоит основное различие численных методов расчета внутренних и внешних течений.

Для двумерных внутренних течений уравнения тонкого вязкого слоя можно записать в следующем виде:

*Уравнения движения*

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y}(r^m \tau). \tag{7.87}$$

*Уравнение энергии*

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho \tilde{v} c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y}(-r^m q_y) + \beta T u \frac{dp}{dx} + \tau \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{7.88}$$

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r^m) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \tilde{v} r^m) = 0. \tag{7.89}$$

*Суммарный расход газа через канал*

$$\dot{m} = \int_A \rho u \, dA = \text{const}. \tag{7.90}$$

В последнем соотношении $A$ — поперечное сечение канала, перпендикулярное к его оси. Кроме того, для определения плотности по температуре и давлению используется уравнение состояния. При $m = 0$ приведенные выше уравнения описывают двумерные течения, а при $m = 1$ — осесимметричные. Если для описания турбулентности воспользоваться гипотезой Буссинеска, то получим

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{7.91}$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} + \rho c_p \overline{v'T'} = \left(-k + \frac{c_p \mu_T}{\mathrm{Pr}_T}\right) \frac{\partial T}{\partial y}. \tag{7.92}$$

Если члены, содержащие пульсационные составляющие газодинамических параметров (напряжения Рейнольдса), равны нулю, то приведенные уравнения сводятся к уравнениям, описывающим ламинарные течения.

Граничные условия на стенке остаются такими же, как и в случае внешних течений. При течении в трубах или плоскопараллельных каналах существует линия или плоскость симметрии течения. Поэтому условия на внешней границе имеют вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{r=0} = \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{r=0} = 0. \tag{7.93}$$

В случае течения в круглой трубе члены уравнений (7.87) и (7.88), описывающие вязкие напряжения и тепловые потоки, имеют особенность при $r = 0$. Правильное выражение для этих членов можно найти при помощи правила Лопиталя. В результате получим

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu r \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y}\right).$$

При расчете внутренних течений конечно-разностная аппроксимация всех членов уравнений, кроме члена с градиентом давления, проводится так же, как и для внешних течений. Градиент давления во внутренних течениях является неизвестной величиной. Как уже отмечалось выше, он должен быть определен из условия сохранения суммарного расхода. Это можно сделать несколькими способами.

Опишем сначала способ определения градиента давления, применяемый для явных разностных схем. В этом случае конечно-разностный аналог уравнения движения можно представить в виде

$$u_j^{n+1} = Q_j^n + \frac{dp}{dx} R_j^n, \tag{7.94}$$

где в $Q_j^n$ и $R_j^n$ входят лишь уже известные величины. Умножим теперь уравнение (7.94) на плотность $\hat{\rho}_j^{n+1}$ и проинтегрируем численно полученные уравнения по поперечному сечению канала. Для этого можно воспользоваться либо методом Симпсона, либо правилом трапеций. В результате получим

$$\int_A \hat{\rho}_j^{n+1} u_j^{n+1}\, dA = \dot{m} = \int_A \hat{\rho}_j^{n+1} Q_j^n\, dA + \frac{dp}{dx}\int_A \hat{\rho}_j^{n+1} R_j^n\, dA. \tag{7.95}$$

До тех пор пока градиент давления не найден, плотность $\hat{\rho}_i^{n+1}$ на $(n+1)$-м слое неизвестна. Знак $\wedge$ как раз и указывает на

то, что используемое значение является предварительным. Простое предположение $\hat{\rho}_j^{n+1} = \rho_j^n$ позволяет получить очень хорошие результаты. На практике чаще всего используют именно этот подход. Альтернативным является определение величины $\hat{\rho}_j^{n+1}$ путем экстраполяции со вторым порядком точности по уже известным значениям $\rho_j^n$ и $\rho_j^{n-1}$. Так как величина $\dot{m}$ определена заданными начальными условиями, а под интегралами в уравнении (7.95) стоят лишь известные величины, то градиент давления $dp/dx$ можно вычислить по формуле

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\dot{m} - \int\limits_A \hat{\rho}_j^{n+1} Q_j^n \, dA}{\int\limits_A \hat{\rho}_j^{n+1} R_j^n \, dA}. \tag{7.96}$$

Найдя градиент давления, можно решить конечно-разностные аналоги уравнений движения, неразрывности и энергии теми же методами, которые использовались в случае внешних течений. Наиболее широко используемой для расчета внутренних течений явной схемой является схема Дюфорта — Франкела, которая описана в п. 7.3.4 для решения уравнений тонкого вязкого слоя. Типичное сопоставление рассчитанных методом Дюфорта — Франкела значений с измеренными показано на рис. 7.18. Измерения Барбина и Джонса [Barbin, Jones, 1963] проведены для случая турбулентного течения воздуха в круглой трубе. На рис. 7.18 $u_b$ — среднее значение скорости в трубе, определенное по расходу, а $r_w$ — радиус трубы. Даже вблизи входа ($x/D = 1.5$) рассчитанные значения хорошо совпадают с измеренными. Расчет был проведен с использованием простой алгебраической модели турбулентности.

По своей постановке задача расчета внутренних течений очень похожа на обратную задачу пограничного слоя, которая для случая внешних течений рассмотрена в § 7.4. Наиболее очевидным это становится при использовании неявных методов расчета. Во внутренних течениях необходимо определить корректный градиент давления, обеспечивающий поле скорости, удовлетворяющее заданному расходу газа через канал. Во внешних течениях необходимо соответственно так подобрать градиент давления (или скорость на границе пограничного слоя), чтобы распределение скорости удовлетворяло заданной толщине вытеснения. Для определения градиента давления при расчете внутренних течений неявными методами использовалось несколько различных подходов. Опишем некоторые из них.

1. *Метод секущих.* В каждом сечении можно итерационно менять градиент давления до тех пор, пока расход не станет равен заданному [Briley, 1974]. Для этого используется метод секущих, подробно описанный в п. 7.4.3, где он применялся для решения обратной задачи пограничного слоя при заданной толщине вытеснения $\delta^*$. Если коэффициенты уравнения постоянны, скорость зависит от градиента давления линейно, поэтому

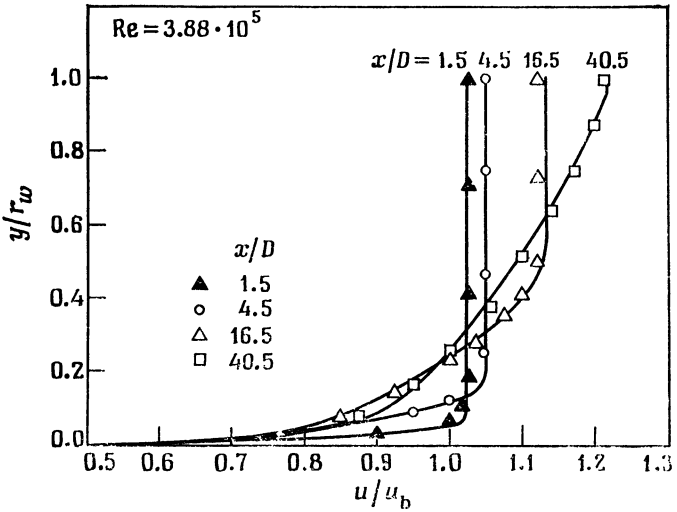



Рис. 7.18. Сопоставление рассчитанных и измеренных профилей скорости турбулентного потока во входном участке круглой трубы [Nelson, Pletcher, 1974]; ——— расчет методом Дюфорта — Франкела; значками обозначены экспериментальные данные Барбина и Джонса.

обычно сходимость итерационного процесса достигается за три итерации.

2. *Коррекция градиента давления с запаздыванием.* Патанкар и Сполдинг [Patankar, Spalding, 1970] отметили, что проводить итерации на каждом шаге по маршевой координате не экономично. Они предложили задавать в каждом сечении градиент давления еще до проведения расчета в этом сечении. Ошибка в расходе используется для задания градиента давления в следующем сечении. Такой подход можно сравнить с процессом управления автомобилем, корректировка курса которого проводится без возврата назад для улучшения траектории движения. Этот подход, основанный лишь на здравом смысле, явился основой для ранней версии метода Патанкара и Сполдинга расчета внутренних течений. Хотя наличие здравого

смысла в приведенных рассуждениях отрицать нельзя, такой подход приводит к слишком грубым по современным меркам результатам, поэтому пользоваться им мы не рекомендуем. Что же касается тенденции к снижению времени расчетов, которая наблюдается в течение последних десятилетий, то она уравновешивается тенденцией к применению потенциально более точных численных методов.

3. *Метод Ньютона.* Рейсби и Шнайдер [Raithby, Schneider, 1979] предложили метод расчета течений несжимаемой жидкости, требующий по крайней мере на одну треть меньших усилий, чем метод секущих, в котором минимально возможное число итераций равно трем. Метод основан на предположении о постоянстве коэффициентов разностных уравнений, т. е. эти коэффициенты не должны меняться при подборе градиента давления, удовлетворяющего условию сохранения расхода. Основная идея этого подхода состоит в том, что если для первоначально заданного градиента давления $dp/dx$ получено решение разностных уравнений, то коррекцию градиента давления можно провести методом Ньютона. При замороженных коэффициентах зависимость скорости от градиента давления линейная, поэтому одна коррекция по Ньютону позволяет получить точное значение градиента давления. Проиллюстрируем вышесказанное. Введем обозначение $S = dp/dx$. Зададимся некоторым начальным приближением градиента давления $dp/dx = (dp/dx)^*$ и вычислим соответствующие ему предварительные распределение скорости $(u_j^{n+1})^*$ и расход $\dot{m}^*$. Так как уравнение движения с замороженными коэффициентами линейное, то, применяя метод Ньютона (см. п. 7.4.2), видим, что точное значение скорости в каждой точке определяется соотношением

$$u_j^{n+1} = (u_j^{n+1})^* + \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial S} \Delta S, \qquad (7.97)$$

где $\Delta S$ — изменение градиента давления, необходимое для удовлетворения условию сохранения расхода. Обозначим $u_{p,j}^{n+1} = \partial u_j^{n+1}/\partial S$. Продифференцировав разностные уравнения по градиенту давления $S$, получим систему разностных уравнений относительно $u_{p,j}^{n+1}$ с трехдиагональной матрицей, причем коэффициенты при неизвестных будут такими же, как и в исходной системе неявных разностных уравнений. Из этой системы уравнений неизвестные $u_{p,j}^{n+1}$ определяются прогонкой. Граничные условия для неизвестных $u_{p,j}^{n+1}$ должны быть согласованы с граничными условиями для скорости. На тех границах, где ско-

рость задана, ставится условие $u_{p,j}^{n+1} = 0$, тогда как на границах с заданным градиентом скорости задается условие $\partial u_{p,j}^{n+1}/\partial n = 0$ ($n$ — нормаль к границе). Зная $u_{p,j}^{n+1}$, можно найти $\Delta S$, исходя лишь из того, что для выполнения условия сохранения расхода, скорость в каждой точке надо подправить на величину $u_{p,j}^{n+1}\Delta S$. Следовательно, мы можем написать соотношение

$$\dot{m} - \dot{m}^* = \Delta S \int_A \rho u_{p,j}^{n+1}\, dA, \tag{7.98}$$

в котором интеграл должен быть вычислен численно. В уравнении (7.98) $\dot{m}$ — значение расхода, определяемое заданными начальными условиями. Нужное нам значение $\Delta S$ находится из решения уравнения (7.98). После этого точные значения скоростей $u_j^{n+1}$ можно вычислить, используя соотношения (7.97), а неизвестные $v_j^{n+1}$ определить из уравнения неразрывности. Описанный подход требует примерно такого же объема вычислений, как две итерации при использовании метода секущих.

4. *Подходы, в которых градиент давления рассматривается в качестве дополнительной неизвестной.* Во всех описанных выше подходах градиент давления при решении уравнений для скоростей рассматривался как известная величина. Поэтому при применении подходов 1—3 разностные уравнения можно решать обычной прогонкой. Теперь мы перейдем к описанию разностных схем, в которых градиент давления входит в качестве неизвестной в систему алгебраических уравнений. В этом случае матрица коэффициентов уравнения уже не является трехдиагональной. В ранних схемах такого типа [Hornbeck, 1963] для решения системы уравнений использовался обычный метод исключения Гаусса. Впоследствии для этих целей стали применять более эффективные блочные методы [Blottner, 1977; Cebeci, Chang, 1978; Kwon, Pletcher, 1981]. Метод, предложенный Квоном и Плетчером [Kwon, Pletcher, 1981], является модификацией обратного метода В, описанного в п. 7.4.3. Для расчета внутренних течений с отрывными зонами используется приближение Флюгге-Лотц. Опишем изменения, которые необходимо внести в обратный метод В для того, чтобы с его помощью можно было рассчитывать двумерные внутренние течения несжимаемой жидкости в каналах. Предположим, что течение симметрично относительно средней линии канала, расположенной при $y = H/2$, где $y$ — координата, отсчитываемая от стенки канала, а $H$ — его высота. Для описания течения вос-

пользуемся уравнениями (7.64) и (7.65). Граничные условия на внешней границе имеют вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=H/2}=0, \quad \psi\left(x, \frac{H}{2}\right)=\frac{\dot{m}}{2\rho}, \tag{7.99}$$

где $\dot{m}$ — расход на единицу ширины канала (в двумерном случае). Конечно-разностные аналоги исходных уравнений имеют вид (7.68)—(7.71), причем, как и ранее, под $\chi^{n+1}$ подразумевается безразмерный градиент давления $-(1/\rho)\,dp/dx$. Различие методов расчета внутренних и внешних течений состоит лишь в способе определения величин $\chi^{n+1}$ и $u_{NJ}^{n}$ по условиям на внешней границе, так как два рассматриваемых случая отличаются лишь этими условиями. Для аппроксимации величины $\partial u/\partial y|_{H/2}$ со вторым порядком точности воспользуемся односторонними разностями, тогда получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{NJ}^{n+1} \approx \frac{u_{NJ}^{n+1}}{2}\left(\frac{4}{\Delta y_{-}}-\frac{1}{\Delta y_{--}}\right)-\frac{2u_{NJ-1}^{n+1}}{\Delta y_{-}}+\frac{u_{NJ-2}^{n+1}}{2\Delta y_{--}}, \tag{7.100}$$

где

$$\Delta y_{-}=y_{NJ}-y_{NJ-1},$$
$$\Delta y_{--}=y_{NJ-1}-y_{NJ-2}.$$

Условия на внешней границе (7.99) можно теперь записать в виде

$$u_{NJ}^{n+1}=c_1 u_{NJ-1}^{n+1}-c_2 u_{NJ-2}^{n+1}, \tag{7.101}$$

$$\psi_{NJ}^{n+1}=\dot{m}/2\rho, \tag{7.102}$$

где

$$c_1=\frac{4}{4-K}, \quad c_2=\frac{K}{4-K}, \quad K=\frac{\Delta y_{-}}{\Delta y_{--}}.$$

Уравнения (7.101) и (7.102) необходимо решить совместно с уравнениями (7.74), (7.75) и (7.78). Однако нам нужно получить еще одно дополнительное соотношение, так как для определения пяти неизвестных $u_{NJ}^{n+1}$, $u_{NJ-1}^{n+1}$, $u_{NJ-2}^{n+1}$, $\psi_{NJ-1}^{n+1}$, $\chi^{n+1}$ у нас есть пока лишь четыре независимых соотношения (7.101), (7.74), (7.75) и (7.78). Это дополнительное соотношение можно найти, записав уравнение (7.72) для неизвестной $u_{NJ-2}^{n+1}$ в виде

$$u_{NJ-2}^{n+1}=A'_{NJ-2}u_{NJ-1}^{n+1}+H'_{NJ-2}\chi^{n+1}+C'_{NJ-2}. \tag{7.103}$$

Из полученной системы уравнений можно определить $\chi^{n+1}$, используя обозначения

$$\alpha_1 = 1 - A'_{NJ-1}(c_1 - c_2 A'_{NJ-2}),$$

$$\alpha_2 = (c_1 - c_2 A'_{NJ-2}) H'_{NJ-1} - c_2 H'_{NJ-2},$$

$$\alpha_3 = (c_1 - c_2 A'_{NJ-2}) C'_{NJ-1} - c_2 C'_{NJ-2},$$

$$\alpha_4 = 1 + \frac{2}{\Delta y_-} B'_{NJ-1} + A'_{NJ-1},$$

$$\alpha_5 = -\left(H'_{NJ-1} + \frac{2}{\Delta y_-} D'_{NJ-1}\right),$$

$$\alpha_6 = \frac{\dot{m}}{\rho \Delta y_-} - \frac{2}{\Delta y_-} E'_{NJ-1} - C'_{NJ-1}.$$

Тогда

$$\chi^{n+1} = \frac{\alpha_1\alpha_6 - \alpha_3\alpha_4}{\alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_5}. \tag{7.104}$$

Осевую составляющую скорости на линии симметрии можно теперь найти из соотношения

$$u_{NJ}^{n+1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \chi^{n+1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}. \tag{7.105}$$

Теперь, используя соотношения (7.72) и (7.73), можно провести обратную подстановку и вычислить неизвестные $u_j^{n+1}$ и $\psi_j^{n+1}$, двигаясь от внешней границы к стенке. Остальная часть алгоритма подробно рассмотрена в п. 7.4.3. Единственное различие между обратным методом B и только что описанным методом расчета внутренних течений состоит в небольшом отличии граничных условий. Вследствие этого приходится слегка изменить алгебраические соотношения, которые используются для нахождения $\chi^{n+1}$ и $u_{NJ}^{n+1}$ на этапе, предшествующем обратной подстановке в блочном трехдиагональном алгоритме.

Одним из интересных приложений этого метода является расчет ламинарного течения в канале с внезапным симметричным расширением, где вниз по потоку от места расширения канала возникает область возвратно-рециркуляционного течения. Обычно возникающая в этом случае картина линий тока показана на рис. 7.19. Расчет проведен описанным выше методом решения уравнений пограничного слоя, при этом предполагалось, что перед расширением профиль скорости такой же, как в полностью развитом течении. Здесь $\mathrm{Re}_h$ — число Рейнольдса, подсчитанное по высоте ступеньки, а $H_1/H_2$ — отношение высот канала до и после расширения. Обычно такие течения рассчитывались на основе полных уравнений Навье — Стокса.

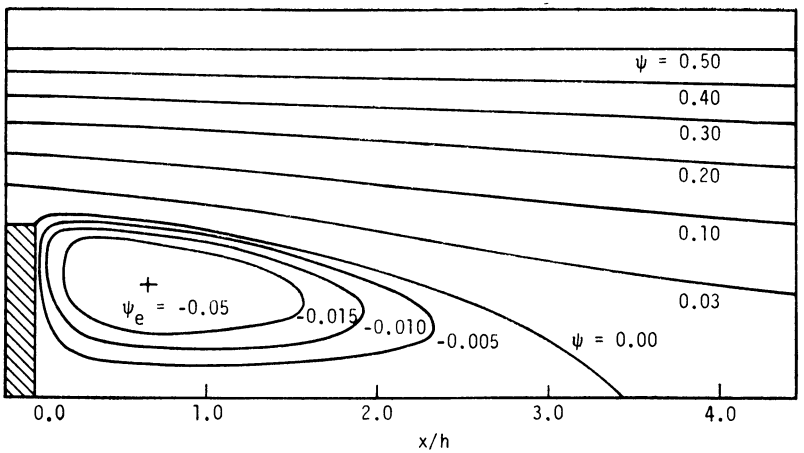



Рис. 7.19. Линии тока, рассчитанные в приближении пограничного слоя [Kwon, Pletcher, 1981] для ламинарного течения в симметричном канале с внезапным расширением; $\mathrm{Re}_h = 50$, $H_1/H_2 = 0.5$.

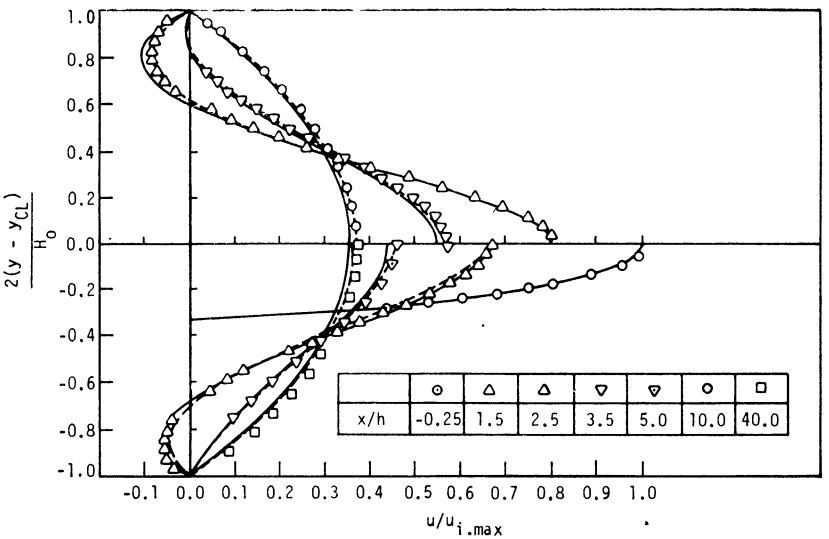



Рис. 7.20. Профили скорости при ламинарном течении в симметричном канале с внезапным расширением, $\mathrm{Re}_h = 56$ (число Рейнольдса вычисляется по $u_{\max}$), $H_1/H_2 = 1/3$ [Kwon, Pletcher, 1981]; ——— расчет при помощи уравнений пограничного слоя, — — — — — расчет уравнений Навье — Стокса, проведенный Дёрстом и др.; значками обозначены экспериментальные данные Дёрста и др.

На рис. 7.20 проведено сопоставление рассчитанных этим методом профилей скорости с результатами измерений и расчетов полных уравнений Навье — Стокса в симметричном канале с внезапным расширением. На этом рисунке $u_{i,\max}$ — максимальное значение скорости перед расширением (ступенькой), $H_0$ — высота канала вниз по потоку от места расширения, а $y_{CL}$ — расстояние от стенки до средней линии канала. Символы $h$, $H_1$ и $H_2$ имеют тот же смысл, что и на предыдущем рисунке.

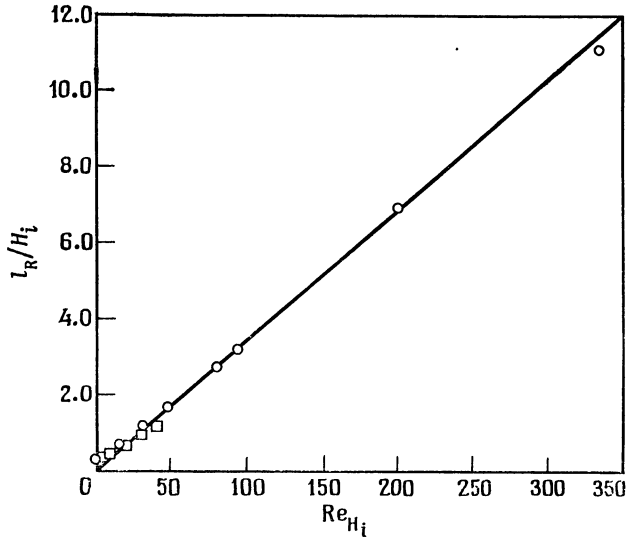



Рис. 7.21. Рассчитанное расстояние до точки присоединения для ламинарного течения в симметричном канале с внезапным расширением при $H_1/H_2 = 0.5$ [Kwon, Pletcher, 1981]; ——— расчет при помощи уравнений пограничного слоя; О результаты расчетов Ханга при помощи уравнений Навье — Стокса; □ результаты расчетов Морихары при помощи уравнений Навье — Стокса.

При использовании методов, основанных на решении уравнений пограничного слоя, затраты машинного времени оказываются на порядок меньше, чем при решении полных уравнений Навье — Стокса. В рассматриваемом случае метод, основанный на решении уравнений пограничного слоя, позволяет получить хорошее согласование рассчитанных и экспериментально измеренных значений.

На рис. 7.21 проведено сопоставление рассчитанного расстояния до точки присоединения с результатами расчетов полных уравнений Навье — Стокса. Число $Re_{H_i}$ подсчитано по высоте канала до расширения. В целом результаты расчетов уравнений пограничного слоя и Навье — Стокса находятся в хоро-

шем согласии, исключение составляют течения с числами Рейнольдса, меньшими 20, когда наблюдается тенденция к расхождению результатов расчетов уравнений пограничного слоя и Навье — Стокса.

### 7.5.3. Заключительные замечания

В § 7.3 были подробно описаны несколько конечно-разностных схем решения уравнений тонкого вязкого слоя, пригодных для расчета обычного пограничного слоя во внешних течениях. Рассматривая здесь методы расчета внутренних течений, мы не повторяли деталей численных методов, общих для внутренних и внешних течений. Вместо этого основное внимание было уделено тем особенностям, которые характерны для этих течений и являются специфическими именно для внутренних течений.

В этом разделе мы ограничились течениями в каналах с прямой осью. Блоттнер [Blottner, 1977] показал, что *приближение тонкого вязкого слоя* (известное также под названием приближение «узкого канала») может быть распространено и на искривленные двумерные каналы, высота которых меняется. При этом уравнения пограничного слоя надо записать в форме, учитывающей влияние продольной кривизны [van Dyke, 1969]. Обусловленный кривизной канала нормальный градиент давления определяется по формуле

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\varkappa \rho u^2}{1 + \varkappa n} \neq 0,$$

где $n$ — координата, нормальная к средней линии канала, а $\varkappa$ — кривизна средней линии канала.

Методы расчета вязко-невязкого взаимодействия можно применять для анализа внутренних течений тогда, когда в потоке существует невязкое ядро. В большинстве случаев влияние взаимодействия должно быть пренебрежимо мало. Исключения составляют течение на входе в канал при низких числах Рейнольдса и течение в каналах с внезапным изменением площади поперечного сечения. При учете вязко-невязкого взаимодействия происходит передача информации вверх по потоку; следовательно, в этом случае можно ожидать более точных результатов для течений, в которых поле давлений зависит от условий ниже по потоку. Течение невязкой несжимаемой жидкости в каналах обычно рассчитывают, решая уравнение Лапласа для функции тока. Для вязкой подобласти течения в этом случае можно использовать обратный метод В, описанный в п. 7.4.3. Такой комбинированный подход, учитывающий взаимодействие, применялся для расчета течений в канале с обратным уступом.

## § 7.6. Свободные сдвиговые течения

Уравнения тонкого вязкого слоя являются весьма точной математической моделью для многих свободных сдвиговых течений. К ним относятся плоские и осесимметричные струи, как затопленные, так и в спутном потоке, плоские слои смешения и следы за телами. Подавляющее большинство свободных сдвиговых течений, встречающихся в инженерных приложениях, являются турбулентными. В настоящее время модели турбулентности, используемые для описания свободных течений, носят куда менее общий характер, чем модели турбулентности, применяемые для пристенных пограничных слоев. До сих пор не удалось найти модель турбулентности, которая позволила бы проводить расчет развития плоских и осесимметричных струй и не требовала бы при этом изменения параметров модели.

Полный курс, посвященный расчету свободных сдвиговых течений, должен был бы на 60 % состоять из описания моделей турбулентности, на 25 % — из описания физических особенностей различных свободных сдвиговых течений и на 15 % — из описания численных методов. Численные методы, которым в основном посвящена наша книга, составляют наиболее простую часть задачи точного расчета характеристик свободных сдвиговых турбулентных течений.

Круглые струи, которые широко исследовались экспериментально и теоретически, являются достаточно характерным примером свободных сдвиговых течений. Хорошей математической моделью для описания круглых струй с прямой осью являются уравнения тонкого вязкого слоя, если только давление внутри струи можно положить равным давлению в окружающем пространстве. Последнее условие выполняется лишь в том случае, когда силы поверхностного натяжения на границе струи пренебрежимо малы, а струя является полностью расширенной, т. е. в начальном сечении (в сечении, где происходит истечение струи) давление в струе совпадает с давлением в окружающем пространстве.

Дозвуковую струю, истекающую из насадка, всегда можно рассматривать как полностью расширенную. Необходимым условием того, чтобы поперечное сечение струи оставалось круглым, а ее ось — прямой, является отсутствие сил, действующих на струю в поперечном направлении. Следовательно, струя должна вытекать либо в неподвижную среду (затопленная струя), либо направление движения среды должно совпадать с направлением вытекающего из насадка газа (струя в спутном потоке), а объемные силы (например, архимедовы силы) должны быть пренебрежимо малы. Если все перечислен-

ные условия выполнены, то для описания рассматриваемого течения можно воспользоваться уравнениями тонкого вязкого слоя (5.116)—(5.119). Выпишем эти уравнения для простейшего случая течения несжимаемой жидкости в круглой струе при отсутствии градиента давления.

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial (yu)}{\partial x} + \frac{\partial (yv)}{\partial y} = 0. \qquad (7.106)$$

*Уравнение движения*

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \right]. \qquad (7.107)$$

При численном решении основное различие между круглой струей и пристенным пограничным слоем состоит в задании

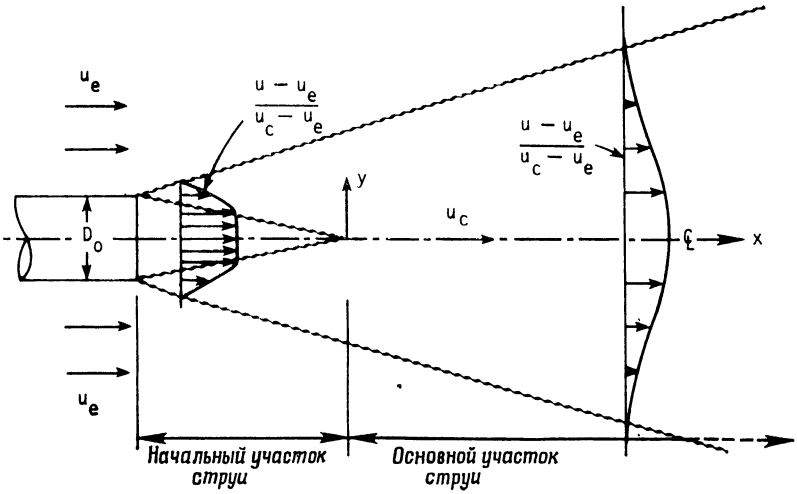



Рис. 7.22. Схема течения в круглой струе.

граничных условий. Схематически круглая струя показана на рис. 7.22. Так как струя симметрична относительно средней линии, подходящими граничными условиями при $y = 0$ будут условия: $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$ и $v(x, 0) = 0$. Граничное условие на внешней границе имеет тот же вид, что в случае пристенного пограничного слоя: $\lim\limits_{y \to \infty} u(x, y) = u_e$.

Для проведения численных расчетов необходимо задать также начальные условия. Обычно, особенно для турбулентных струй, начальная скорость в сечении истечения струи полагается постоянной и равной $u_0$. Естественно, что это условие не

является абсолютно точным, так как должна существовать небольшая область, в которой проявляется тормозящее воздействие стенок трубы. С другой стороны, не ожидается, что уравнения пограничного слоя позволят очень точно описать течение вблизи места истечения струи, т. е. при $x/D_0$, меньших единицы, где $D_0$ — диаметр струи в месте ее истечения. В случае турбулентной струи задание в начальном сечении равномерного поля скорости позволяет получать достаточно точные результаты в наиболее интересной для инженерных приложений области $x/D_0 > 1$.

Для некоторых разностных схем, используемых при расчете струйных течений в декартовой системе координат, необходимо также задать начальное распределение составляющей скорости $v$. Как уже отмечалось в § 7.3, это связано с математическими особенностями метода расчета, а не с математической постановкой задачи. Если такое начальное условие для $v$ необходимо, то мы рекомендуем задавать его в виде $v(0, y) = 0$. Вблизи начального сечения в уравнениях появляется особенность (производная $\partial u/\partial x$ велика из-за исчезающе малой начальной толщины слоя смешения). Влияние этой особенности можно ограничить небольшой зоной, если вблизи начального сечения провести на нескольких слоях расчет с мелким шагом по маршевой координате. Особенность в начальном сечении струи аналогична особенности, возникающей на передней кромке пластины при решении уравнений пограничного слоя в декартовых координатах.

Для затопленных турбулентных струй начальный участок, показанный на рис. 7.22, распространяется до значений $x/D \approx 5$. В случае спутной струи начальный участок может оказаться еще длиннее. Характерной особенностью начального участка является то, что скорость на оси струи равна скорости истекающего газа. В основном участке струи скорость определяется лишь скоростью в окружающем пространстве $u_e$. Законы изменения толщины струи на начальном и основном участках различны, поэтому при использовании алгебраических моделей турбулентности на каждом из этих участков должна применяться своя модель турбулентности (или одна и та же модель турбулентности, но с разными константами).

Практика показывает, что большинство конечно-разностных схем, описанных в § 7.3, позволяют неплохо рассчитывать и струйные течения. Ряд численных методов описан в трудах конференции по турбулентным сдвиговым течениям: Proceedings of the Langley Working Conference on Free Turbulent Shear Flows (NASA, 1972). Изучение трудов этой конференции является хорошей базой для понимания проблем, связанных с созданием достаточно точных методов расчета ряда свободных

турбулентных сдвиговых течений. Подробности различных численных методов описаны также в работах [Hornbeck, 1973; Madni, Pletcher, 1975a, 1975b, 1977a; Hwang, Pletcher, 1978]. В последней из них приведены разностные уравнения, полученные при применении для расчета круглой струи полностью неявного метода, методов Кранка — Николсона и Дюфорта — Франкела, а также явных методов переменных направлений Ларкина, Саульева, Бараката и Кларка. Полезный обзор известных экспериментальных данных, относящихся к турбулентным свободным сдвиговым течениям с постоянной плотностью, проведен Роуди [Podi, 1975].

Уравнение энергии, записанное в приближении пограничного слоя, также применимо к расчету свободных сдвиговых течений. Если затопленная нагретая струя истекает вертикально, то независимо от наличия температурной стратификации ось струи остается прямой и никаких новых проблем при использовании приближения пограничного слоя не возникает. Если нагретая струя вытекает под каким-либо углом или если она вытекает под любым углом к основному потоку, то ось струи должна искривиться. Такие течения рассчитывались как в рамках полных трехмерных уравнений Навье — Стокса (см. [Patankar et al., 1977] и некоторые другие работы), так и в рамках приближенной параболической конечно-разностной модели, основанной на предположении о том, что течение остается осесимметричным [Madni, Pletcher, 1977b; Hwang, Pletcher, 1978]. В этой осесимметричной модели используется упрощенное уравнение движения в поперечном направлении, что позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение для угла между касательной к средней линии струи и горизонталью. При таком подходе объем вычислений оказывается лишь слегка большим, чем объем вычислений при решении уравнений осесимметричного пограничного слоя. Неожиданным оказалось хорошее совпадение рассчитанных и измеренных значений всех параметров и особенно формы средней линии струи.

В этом разделе мы не приводили конкретных конечно-разностных схем, так как все схемы, описанные в § 7.3, легко модифицируются на случай свободных сдвиговых течений. Здесь, однако, стоит указать на одну особенность, возникающую иногда при численном расчете затопленных струй. Некоторые разностные схемы не позволяют достаточно точно рассчитать скорость $u$ в том случае, когда она должна асимптотически приближаться к равной нулю скорости внешнего потока. Возникающие при этом проблемы связаны, по-видимому, с аппроксимацией коэффициентов в конвективных членах и процедурой, используемой для нахождения внешней границы пограничного слоя. Отчетли-

вее всего эти проблемы видны при применении метода запаздывающих коэффициентов. На практике указанное затруднение обычно преодолевают, задавая на внешней границе струи небольшую положительную скорость, которая составляет 1—3 % скорости на оси струи. Имеющиеся в литературе данные показывают, что такое приближение не оказывает сколь-нибудь заметного влияния на точность получаемых результатов. Хорнбек [Hornbeck, 1973] показал, что при $u_e = 0$ достаточно хорошее решение можно получить при помощи неявного метода с итерационной заменой коэффициентов.

## § 7.7. Трехмерные пограничные слои

### 7.7.1. Введение

Большинство течений, встречающихся в инженерных приложениях, являются трехмерными. В этом разделе мы рассмотрим конечно-разностные методы расчета таких трехмерных течений, которые являются «тонкими» (т. е. имеют большой градиент скорости) лишь в одном направлении. Многие течения, встречающиеся на практике, относятся к течениям рассматриваемого типа. В основном это внешние течения. В качестве примера укажем на течения, возникающие в вязкой области потока на крыльях и аэродинамических телах произвольной формы.

Для начала рассмотрим трехмерный пограничный слой, схематически изображенный на рис. 7.23. Наличие в потоке цилиндра изменяет поле давления и отклоняет линии тока невязкого потока, как это показано на рисунке. Из уравнений движения следует, что составляющая градиента давления, вызывающая это отклонение, направлена от центра кривизны линий тока невязкого потока. Так как пограничный слой тонкий, то градиент давления не меняется в направлении, нормальном к обтекаемой поверхности. В результате при движении в глубь пограничного слоя вектор скорости поворачивается к центру кривизны линии тока невязкого течения. Это связано с тем, что градиент давления остается неизменным, а силы инерции убывают по мере приближения к стенке. Последнее и приводит к тому, что при движении по нормали к стенке внутрь пограничного слоя радиус кривизны линий тока убывает. Следовательно, в общем случае поперечная составляющая скорости достигает максимума в некоторой точке, расположенной внутри пограничного слоя, как это и показано на рис. 7.23. Итак, градиент давления приводит к возникновению поперечного течения, которое в приложениях обычно называют *вторичным* течением. Возникновением вторичных течений объясняются такие явле-

ния, как наблюдаемый на участке поворота реки перенос песка к ее внутреннему берегу или движение чаинок к центру (у дна чашки) при помешивании чая.

Еще одним интересным примером является трехмерный пограничный слой на осесимметричных телах, обтекаемых под углом атаки. Такие течения на удлиненных эллипсоидах исследовались многими авторами. Укажем здесь на работы [Wang, 1974, 1975; Blottner, Ellis, 1973; Cebeci et al., 1979a; Patel, Choi, 1979].

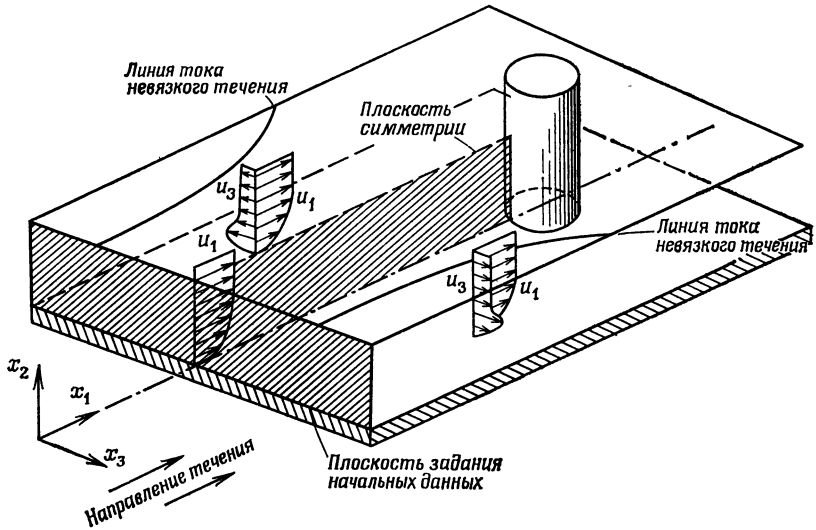



Рис. 7.23. Пример течения в дозвуковом трехмерном пограничном слое.

Уравнения трехмерного пограничного слоя не пригодны для описания вблизи линии пересечения двух поверхностей (например, вблизи линии пересечения крыла с фюзеляжем или в углу канала), так как в этом случае одинаково важную роль играют градиенты вязких напряжений по двум направлениям. Для описания течения вблизи углов используется другая упрощенная форма уравнений Навье — Стокса, которая будет обсуждаться в гл. 8.

Здесь мы не собираемся подробно осветить все вопросы теории трехмерного пограничного слоя. Наша цель — привести стратегию численного решения уравнений трехмерного пограничного слоя, опираясь на материал, изложенный в предыдущих разделах. При этом основное внимание будет уделено тем новым моментам, которые связаны с трехмерным характером решаемой задачи.

### 7.7.2. Уравнения трехмерного пограничного слоя

В гл. 5 уже были приведены уравнения трехмерного пограничного слоя в декартовой системе координат (уравнения (5.120)—(5.123)) и в ортогональной криволинейной системе координат, связанной с поверхностью обтекаемого тела (уравнения (5.124)—(5.128)). При некоторых специальных условиях (реализующихся, например, при сверхзвуковом ламинарном обтекании конуса под углом атаки) число независимых переменных можно сократить с трех до двух. Эти частные случаи мы здесь рассматривать не будем.

Декартовы координаты можно использовать для расчета течений на развертывающихся поверхностях (т. е. на таких поверхностях, которые могут быть развернуты на плоскость без сжатия или растяжения). Их можно, конечно, использовать и для расчета течений на плоской поверхности. Криволинейные координаты необходимы для анализа течения на телах более сложной формы. Небольшое количество расчетов проведено в потоковой системе координат (криволинейной ортогональной системе координат, связанной с линиями тока невязкого течения [Cebeci et al., 1973]). Однако большинство расчетов трехмерных пограничных слоев проведены в системах координат, связанных лишь с формой обтекаемой поверхности. Если даже система координат связана с обтекаемой поверхностью, то необходимо еще выбрать направление координатных линий. Обзор различных систем координат, используемых для расчета трехмерных течений, проведен Блоттнером [Blottner, 1975b].

Уравнения трехмерного пограничного слоя, приведенные в гл. 5, имеют особенность в начале координатной оси $x_1$. Это особенность того же типа, что и особенность, возникающая в двумерном случае на передней кромке пластины (см. п. 7.3.7). Некоторые исследователи успешно использовали уравнения, записанные в такой форме, для расчета течений в декартовой системе координат [Klinksiek, Pierce, 1973], а также для расчета более сложных течений, возникающих при обтекании осесимметрических тел [Wang, 1972; Patel, Choi, 1979]. Однако перед проведением расчета трехмерного пограничного слоя приходилось применять специальную процедуру для определения решения в передней критической точке.

Более общепринятым является исключение имеющейся в уравнениях особенности путем подходящей замены переменных. Ни одна из таких замен переменных не является оптимальной сразу для всех течений. Сопоставление нескольких преобразований переменных, применявшихся для решения различных задач, проведено Блоттнером [Blottner, 1975b]. В качестве примера мы

приведем одно из преобразований переменных, исключающее особенность в начале координатной оси $x_1$ и позволяющее найти профили всех неизвестных в передней критической точке из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается при $x_1 = 0$. Решая преобразованные уравнения, удается последовательно проводить расчет течения, начиная от передней критической точки. Если течение ламинарное, то толщина пограничного слоя в преобразованных переменных будет почти постоянной.

В первую очередь отметим, что во внешней части пограничного слоя, где вязкие члены пренебрежимо малы, а $\partial u_1/\partial x_2 \to 0$ и $\partial u_3/\partial x_2 \to 0$, уравнения пограничного слоя переходят в уравнения Эйлера. Поэтому составляющие градиента давления, входящие в уравнения (5.126) и (5.127), могут быть записаны в виде

$$-\frac{1}{h_1}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\rho u_{1,e}}{h_1}\frac{\partial u_{1,e}}{\partial x_1} + \frac{\rho u_{3,e}}{h_3}\frac{\partial u_{1,e}}{\partial x_3} + u_{1,e}u_{3,e}K_1 - u_{3,e}^2 K_3, \quad (7.108)$$

$$-\frac{1}{h_3}\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\rho u_{1,e}}{h_1}\frac{\partial u_{3,e}}{\partial x_1} + \frac{\rho u_{3,e}}{h_3}\frac{\partial u_{3,e}}{\partial x_3} - u_{1,e}^2 K_1 + u_{1,e}u_{3,e}K_3, \quad (7.109)$$

где $u_{1,e}(x_1, x_3)$ и $u_{3,e}(x_1, x_3)$ известны из решения задачи о невязком обтекании тела. Индексом $e$ обозначены значения параметров на внешней границе пограничного слоя.

Предположим, что вязкие турбулентные напряжения Рейнольдса можно описать при помощи коэффициента турбулентной вязкости. Тогда

$$-\rho\overline{u_1'u_2'} = \mu_T\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad -\rho\overline{u_3'u_2'} = \mu_T\frac{\partial u_3}{\partial x_2},$$

$$-\rho c_p\overline{u_2'T'} = k_T\frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad \frac{\mu_T c_p}{k_T} = \mathrm{Pr}_T, \quad \bar{\mu} = \mu_T + \mu.$$

Для определения величины $\mu_T$ можно использовать как простую, так и сложную модели. Никаких специальных предположений о сложности выражения для $\mu_T$ мы пока не делаем. Уравнения остаются справедливыми и для ламинарных течений, так как в этом случае $\bar{\mu} = \mu$.

Удобно ввести безразмерные составляющие скорости и полную энтальпию по формулам

$$F = \frac{u_1}{u_{1,e}}, \quad G = \frac{u_3}{W_e}, \quad I = \frac{H}{H_e},$$

где величину $W_e$ мы выберем позднее; она равна либо $u_{1,e}$, либо $u_{3,e}$.

Введем новые независимые переменные $x = x_1$, $z = x_3$ и

$$\eta = \left(\frac{u_{1,e}}{x(\rho\mu)_e}\right)^{1/2} \int_0^{x_2} \rho\, dx_2.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, получим, что производные по исходным независимым переменным должны быть заменены в соответствии с формулами

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \eta} = \left[\frac{u_{1,e}}{x(\rho\mu)_e}\right]^{1/2} \rho \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

После проведения указанной замены переменных уравнения (5.125)—(5.128) примут вид

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{x}{h_1 h_3}\frac{\partial (h_3 F)}{\partial x} + \frac{F}{2h_1}(1+\beta_1) + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \\ + \frac{1}{h_1 h_3 [(\rho\mu)_e u_{1,e}/x]^{1/2}}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{h_1 W_e G}{u_{1,e}}[x u_{1,e}(\rho\mu)_e]^{1/2}\right\} = 0. \quad (7.110)$$

*Уравнение движения по координате x*

$$\frac{xF}{h_1}\frac{\partial F}{\partial x} + V\frac{\partial F}{\partial \eta} + \underbrace{\frac{xG}{h_3}\frac{\partial F}{\partial z}}_{(1)} + \underbrace{FGxK_1}_{(2)} - \underbrace{xG^2K_3}_{(3)} = \\ = \beta_1(\theta - \underbrace{F^2}_{(4)}) + \beta_2\left(\frac{\theta u_{3,e}}{u_{1,e}} - \underbrace{FG}_{(5)}\right) + \\ + \theta\left(\frac{x u_{3,e} K_1}{u_{1,e}} - \frac{x u_{3,e}^2 K_3}{u_{1,e}^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\rho\bar{\mu}}{(\rho\mu)_e}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right). \quad (7.111)$$

*Уравнение движения по координате z*

$$\frac{xF}{h_1}\frac{\partial G}{\partial x} + V\frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{xG}{h_3}\frac{\partial G}{\partial z} + xFGK_3 - xF^2K_1 = \\ = \theta\left(\beta_3 + \beta_4 + \frac{xK_3 u_{3,e}}{u_{1,e}} - xK_1\right) - \beta_5 GF - \beta_6 G^2 + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\rho\bar{\mu}}{(\rho\mu)_e}\frac{\partial G}{\partial \eta}\right). \quad (7.112)$$

*Уравнение энергии*

$$\frac{xF}{h_1}\frac{\partial I}{\partial x}+V\frac{\partial I}{\partial \eta}+\frac{xGW_e}{h_3u_{1,e}}\frac{\partial I}{\partial z}=-\beta_7FI-\frac{\beta_8GW_eI}{u_{1,e}}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}+\frac{\mu_T}{\mathrm{Pr}_T}\right)\frac{\rho}{(\rho\mu)_e}\frac{\partial I}{\partial\eta}+\right.$$
$$+\frac{\rho u_{1,e}^2F}{H_e(\rho\mu)_e}\left[\mu\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)+\mu_T\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}_T}\right)\right]\frac{\partial F}{\partial\eta}+$$
$$\left.+\frac{\rho W_e^2G}{H_e(\rho\mu)_e}\left[\mu\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)+\mu_T\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}_T}\right)\right]\frac{\partial G}{\partial\eta}\right\}. \qquad (7.113)$$

Здесь

$$V=\rho\tilde{u}_2\left[\frac{x}{u_{1,e}(\rho\mu)_e}\right]^{1/2}+\frac{xF}{h_1}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{xGW_e}{h_3u_{1,e}}\frac{\partial\eta}{\partial z},$$

$$\theta=\frac{\rho_e}{\rho}, \qquad \beta_1=\frac{x}{h_1u_{1,e}}\frac{\partial u_{1,e}}{\partial x},$$

$$\beta_2=\frac{x}{h_3u_{1,e}}\frac{\partial u_{1,e}}{\partial z}, \qquad \beta_3=\frac{x}{h_1W_e}\frac{\partial u_{3,e}}{\partial x},$$

$$\beta_4=\frac{xu_{3,e}}{W_eh_3u_{1,e}}\frac{\partial u_{3,e}}{\partial z}, \qquad \beta_5=\frac{x}{W_eh_1}\frac{\partial W_e}{\partial x}.$$

Метрические коэффициенты и геодезические кривизны координатных линий поверхности определены в гл. 5.

$$\beta_6=\frac{x}{h_3u_{1,e}}\frac{\partial W_e}{\partial z}, \quad \beta_7=\frac{x}{h_1H_e}\frac{\partial H_e}{\partial x}, \quad \beta_8=\frac{x}{h_3H_e}\frac{\partial H_e}{\partial z}.$$

В случае течений сжимаемой жидкости для замыкания системы уравнений необходимо воспользоваться уравнением состояния $\rho=\rho(p, T)$. Номера, присвоенные отдельным членам уравнений, потребуются нам в дальнейшем для ссылок.

Обычно граничные условия задаются в виде

при $\eta=0$: $V=F=G=0$, $I=I(x, 0, z)$ или

$$\left.\frac{\partial I}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=Q(x, 0, z),$$

при $\eta\to\infty$: $F=G=I=1$, $G=u_{3,e}/W_e$,

где $Q(x, 0, z)$ — заданная функция, связанная с тепловым потоком в стенку. Кроме граничных условий надо задать еще начальные распределения величин $F$, $G$, $I$. Необходимо знать также распределение параметров $u_{1,e}$, $u_{3,e}$ и $H_e$.

Вопрос задания начальных условий требует самого тщательного рассмотрения. Анализ уравнений трехмерного пограничного слоя, записанных в исходной криволинейной ортогональной

системе координат (до проведения указанного выше преобразования переменных) или в декартовой системе координат, показывает, что координаты $x_1$ и $x_3$ взаимозаменяемы. Действительно, вид уравнений не меняется, если координаты $x_1$ и $x_3$ поменять местами. Следовательно, до тех пор пока составляющие скорости $u_1$ и $u_3$ положительны, нельзя выделить какое-то координатное направление как очевидно маршевое, рассматривая лишь сами уравнения. Так как в уравнения входят первые производные от $u_1$, $u_3$ и $H$ по $x_1$ и $x_3$, то можно ожидать, что для обеспечения возможности расчета маршевым методом в направлении осей $x_1$ и $x_3$ начальные условия следует задать на двух пересекающихся плоскостях. Правильное (преимущественное) маршевое направление можно найти при помощи принципа влияния, который будет приведен ниже. В дальнейшем мы будем исходить из предположений, что решение можно найти маршем вдоль осей $x_1$ или $x_3$ и что начальные данные надо задать на двух пересекающихся плоскостях. Обычно направление основного потока легко определить, зная геометрию обтекаемого тела и направление набегающего потока. Введя координату $\eta$, мы уже предположили, что направление осей $x$ или $x_1$ близко к направлению основного потока, а направление осей $x_3$ или $z$ — к направлению вторичного течения. Рассмотрим сначала вопрос задания начальных значений $F$, $G$, $I$ в плоскости $z$, $\eta$, что позволит получить информацию, необходимую для проведения расчета в направлении оси $x$ маршевым методом.

Если начало координат поместить в переднюю критическую точку (или, как это иногда бывает, на переднюю критическую линию), то уравнения энергии и движения сведутся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Решая их совместно с уравнением неразрывности, найдем необходимые начальные условия в одной из плоскостей. Для течения, показанного на рис. 7.23, уравнения требуемого вида получаются путем простого отбрасывания всех членов уравнения, содержащих $x$ в качестве сомножителя (они равны нулю). Такое начальное условие описывает течение, аналогичное течению у передней кромки пластины. Известно [Howarth, 1951], что при обтекании затупленных тел, имеющих истинную критическую точку (в которой происходит полное торможение потока), составляющие скорости $u_{1,e}$ и $u_{3,e}$ меняются в окрестности этой точки линейно по $x$. Следовательно, некоторые члены уравнений, обращающиеся в нуль на передней кромке пластины, в случае обтекания затупленного тела имеют при $x \to 0$ предел, отличный от нуля. В случае несжимаемой жидкости течение в передней критической точке подробно рассмотрено Блоттнером и Эллисом [Blottner, Ellis, 1973].

В большинстве случаев необходимые для расчета трехмерного пограничного слоя начальные распределения величин $F$, $G$, $I$ (или $u_1$, $u_3$, $H$, если расчет проводится в непреобразованных криволинейных ортогональных координатах) во второй пересекающейся плоскости можно найти путем решения системы уравнений в частных производных в *плоскости симметрии*. Формулировку задачи в плоскости симметрии мы обсудим ниже, а пока отметим, что в некоторых случаях такую плоскость выделить не удается [1]. В качестве примера укажем на обтекание заостренных вращающихся конусов, рассмотренное в работах [Dwyer, 1971; Dwyer, Sanders, 1975]. Высказывались различные мнения о том, возможно ли для уравнений трехмерного пограничного слоя решать задачу с начальными данными, заданными лишь в одной плоскости [Lin, Rubin, 1973a]. Оказывается, что при использовании разностных схем с запаздывающей аппроксимацией производных в поперечном направлении [Dwyer, Sanders, 1975; Kitchens et al., 1975] задачу удается решить маршевым методом, задав начальные условия лишь в одной плоскости. Такое решение может быть найдено лишь в области, размер которой определяется принципом влияния. Указанная разностная аппроксимация уравнений и принцип влияния будут приведены в п. 7.7.3.

Плоскость симметрии течения на пластине с установленным на ней цилиндром показана на рис. 7.23. При обтекании невращающихся осесимметричных тел под углом атаки в потоке обычно существуют две плоскости симметрии: одна из них расположена на наветренной, а другая — на подветренной стороне тела. Для задания начальных условий обычно используют решение, полученное в первой из этих плоскостей. В плоскости симметрии

$$G = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0. \qquad (7.114)$$

Невязкий поток и свойства жидкости также симметричны относительно плоскости симметрии. Из соотношений (7.114) следует, что уравнение движения в проекции на ось $x$ и уравнение энергии сводятся к двумерным уравнениям. Однако задача остается трехмерной, так как в уравнении неразрывности член с производной в поперечном направлении отличен от нуля. Раскрыв в уравнении (7.100) член с производной в поперечном направлении и учтя соотношения (7.114), приведем уравнение неразрыв-

[1] Пример расчета течения без плоскости симметрии приведен также в работе [37] в списке дополнительной литературы на стр. 712. — *Прим. перев.*

ности к виду

$$\frac{x}{h_1 h_3}\frac{\partial (h_3 F)}{\partial x}+\frac{F}{2h_1}(1+\beta_1)+\frac{\partial V}{\partial \eta}+\frac{xG_z}{h_3 u_{1,e}}\frac{\partial u_{3,e}}{\partial z}=0, \qquad (7.115)$$

где

$$G_z=\frac{\partial u_3/\partial z}{\partial u_{3,e}/\partial z}.$$

Уравнение движения в проекции на ось $z$ (7.112) не позволяет получить какую-либо полезную информацию, так как всюду в плоскости симметрии $G=0$. Однако, дифференцируя это уравнение по $z$ и учитывая условия симметрии, получаем уравнение, из решения которого можно определить требуемую величину $G_z$:

$$\frac{xF}{h_1}\frac{\partial G_z}{\partial x}+V\frac{\partial G_z}{\partial \eta}+xFG_zK_3=\beta_9(\theta-FG_z)+$$
$$+\beta_{10}(\theta-G_z^2)+x\theta K_3+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\rho\bar{\mu}}{(\rho\mu)_e}\frac{\partial G_z}{\partial \eta}\right]. \qquad (7.116)$$

Вводя обозначение $W_{e,z}=\partial u_{3,e}/\partial z$, представим параметры $\beta_9$ и $\beta_{10}$ в виде

$$\beta_9=\frac{x}{h_1 W_{e,z}}\frac{\partial W_{e,z}}{\partial x}, \quad \beta_{10}=\frac{xW_{e,z}}{h_3 u_{1,e}}.$$

Величину $W_{e,z}$ надо найти из решения для невязкого течения. Уравнение (7.116) для $G_z$ имеет тот же общий вид, что исходное уравнение движения в проекции на ось $z$. Его решение в плоскости симметрии может быть найдено маршем вдоль оси $x$.

Произвольный параметр $W_e$, по которому обезразмеривается скорость вторичного течения, должен быть выбран так, чтобы исключить возникновение особенности. Выше мы предполагали, что в передней критической точке и в плоскости симметрии $W_e=u_{3,e}$, а в остальной части течения $W_e=u_{1,e}$.

### 7.7.3. Некоторые особенности методов расчета трехмерных течений

Решение уравнений трехмерного пограничного слоя связано с рядом довольно сложных моментов, с которыми мы не сталкивались ранее при анализе двумерных течений. Решить уравнения невязкого течения и определить градиент давления, входящий в уравнения пограничного слоя, в трехмерном случае обычно намного труднее, чем в двумерном. Вычисление метрических коэффициентов и получение другой информации, необходимой для расчета течения в криволинейной ортогональной системе ко-

ординат, связанной с обтекаемым телом, для тел сложной формы также может оказаться непростой задачей. Модель турбулентности должна носить более общий характер, чтобы с ее помощью можно было определять еще одну составляющую тензора вязких напряжений. При построении конечно-разностных аналогов уравнений особое внимание надо обратить на следующие два момента: (1) необходимо учесть области влияния и зависимости уравнений трехмерного пограничного слоя и (2) разностная аппроксимация производных в поперечном направлении

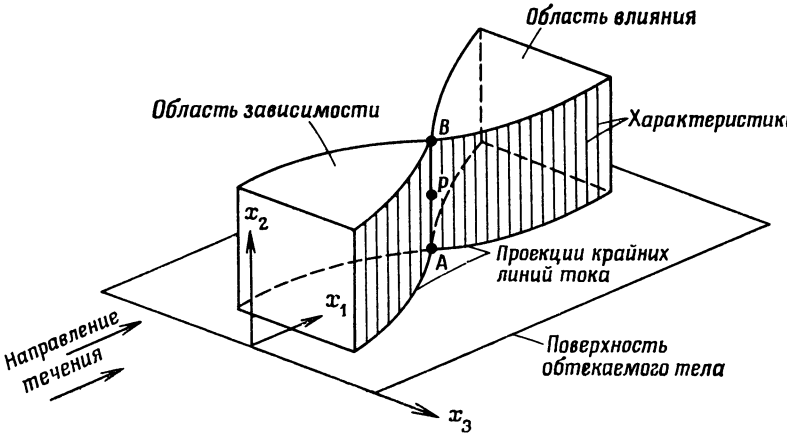



Рис. 7.24. Области зависимости и влияния уравнений трехмерного пограничного слоя.

должна позволять получать устойчивое решение при положительной и отрицательной скорости вторичного течения.

В плоскости $x$, $z$ уравнения трехмерного пограничного слоя имеют гиперболический характер, поэтому условие устойчивости их решения во многом похоже на условие Куранта — Фридрихса — Леви (КФЛ), которое подробно обсуждалось нами при анализе методов расчета волнового уравнения. Большую роль в формулировке и интерпретации принципа влияния для трехмерного пограничного слоя сыграли работы [Raetz, 1957; Der, Raetz, 1962; Wang, 1971; Kitchens et al., 1975]. Так как развитая ими концепция относится одновременно к областям влияния и зависимости, то ее обычно называют принципом влияния. Для правильного построения разностных схем необходимо уметь определять области зависимости, поэтому именно этому вопросу мы уделим основное внимание.

Рассмотрим точку $P$, расположенную внутри пограничного слоя (рис. 7.24). Принцип влияния сводится к тому, что вслед-

ствие диффузии влияние решения в точке $P$ мгновенно достигает всех точек линии, нормальной к обтекаемой поверхности и проходящей через точку $P$ (линии $AB$ на рис. 7.24), а влияние вниз по потоку связано с конвекцией вдоль всех линий тока, проходящих через эту точку. Нормали к обтекаемой поверхности образуют характеристические поверхности, а скорость распространения возмущений в этом направлении бесконечна. Возмущения в любой точке линии $AB$ передаются мгновенно вдоль всей этой линии и сносятся вниз по потоку *всеми* линиями тока, проходящими через $AB$. Две крайние линии тока, проходящие через $AB$, определяют горизонтальный размер клиновидной *области влияния* точек линии $AB$.

Любые возмущения решения на линии $AB$ могут сказаться лишь в области, ограниченной характеристиками (нормалями к стенке), проходящими через две эти крайние линии тока. Обычно одной из крайних линий тока является предельная линия тока, а другой — линия тока невязкого потока. Очевидно, параметры потока на линии $AB$ определяются тем, что происходит выше по потоку, а *область зависимости* — характеристиками, проходящими через две крайние линии тока, расположенные вверх по потоку от $AB$ [1]. Возмущения в любой точке этой клиновидной области вверх по потоку могут оказать влияние на течение на линии $AB$. *Крайними* называются линии тока, проходящие через $AB$ и составляющие максимальный и минимальный угол с плоскостью $x_3 = \text{const}$ (или $z = \text{const}$). Область зависимости определяет минимальный размер области, в которой необходимо задать начальные данные для определения решения на линии $AB$.

Принцип влияния можно сформулировать и для других уравнений в частных производных. Разностный шаблон, используемый для аппроксимации производных на линии $AB$, должен учитывать характер области зависимости, т. е. область зависимости разностного уравнения должна быть не меньше области зависимости исходного уравнения в частных производных. Мы уже показали, что для случая гиперболических уравнений в частных производных это требование приводит к условию КФЛ. Точная количественная формулировка условий, следующих из анализа областей зависимости, определяется используемым шаблоном. Например, если при определении решения на $(n+1)$-м слое производная $\partial G/\partial z$ аппроксимируется центральными разностями на $n$-м слое (шаг $\Delta z$ постоянен), то из прин-

[1] Эта формулировка принципа влияния не всегда справедлива (см. [9] в списке дополнительной литературы на стр. 712). — *Прим. перев.*

ципа влияния следуют условия устойчивости

$$F > 0, \quad \left| \frac{h_1 \Delta x G}{h_3 \Delta z F} \right| \leqslant 1. \tag{7.117}$$

Неравенство (7.117) эквивалентно требованию о том, чтобы локальный угол между линией тока и плоскостью $z = \text{const}$ лежал внутри угла, тангенс которого определяется параметрами сетки и равняется $h_3 \Delta z/(h_1 \Delta x)$. Нам бы хотелось, чтобы условия (7.117) выполнялись на заданном шаге по $x$, причем шаг $\Delta x$ определяется параметрами течения на предыдущем слое. Очевидно, что проводить итерации лишь для того, чтобы определить максимально допустимый шаг невыгодно, поэтому обычно новый шаг по $x$ находят по последним уже вычисленным значениям $G$ и $F$. При этом для того, чтобы учесть возможное изменение величин $G$ и $F$ на шаге $\Delta x$, приходится вводить некоторый коэффициент запаса. Для определения с помощью неравенства (7.117) величины максимально допустимого шага по маршевой координате, это неравенство необходимо применять во всех внутренних узлах, расположенных в данном слое по $x$, и только потом устанавливать новый шаг $\Delta x$. При расчете течений, в которых знак величины $G$ не меняется, можно построить разностные схемы, обеспечивающие автоматическое выполнение накладываемых принципом влияния ограничений. Ниже мы проиллюстрируем это на примере схемы Кранка — Николсона расчета трехмерного пограничного слоя.

Для трехмерных пограничных слоев надо проводить и анализ устойчивости разностных схем. Появление в уравнении движения дополнительной конвективной производной обычно оказывает влияние на устойчивость разностной схемы. Условие устойчивости схемы, вероятно, изменится при переходе от двумерного течения к трехмерному. Анализ устойчивости надо проводить независимо от анализа областей зависимости, что прекрасно показано в работе Китченса и др. [Kitchens et al., 1975]. Для некоторых схем условия, следующие из анализа областей зависимости, совпадают с условиями, полученными из анализа устойчивости разностной схемы методом Неймана. Но так бывает не всегда.

Китченс и др. [Kitchens et al.,. 1975] показали, что для четырех исследованных ими разностных схем наблюдается рост ошибок независимо от того, удовлетворяет разностная схема условию, следующему из принципа влияния, или нет. Некоторые разностные схемы позволяли получить гладкое и по виду «устойчивое» решение даже тогда, когда ошибки в определении параметров были велики. Для других разностных схем нарушение условий, накладываемых принципом влияния, может вызвать

неустойчивость решения, характеризуемую большими осцилляциями решения, даже если анализ устойчивости на возникновение таких осцилляций не указывает. Возможно построить абсолютно неустойчивые разностные схемы, удовлетворяющие ограничениям, накладываемым областями влияния.

Опишем кратко несколько наиболее часто используемых схем расчета трехмерного пограничного слоя. При этом индексами $n$, $j$, $k$ будем обозначать номера узлов по координатным осям $x_1$, $x_2$, $x_3$ (или $x$, $\eta$, $z$). Решение уравнений мы будем искать при переходе от плоскости, соответствующей $n$-му шагу по маршевой координате, в плоскость, соответствующую $(n+1)$-му шагу по маршевой координате. Решение на $(n+1)$-м слое будем находить, начиная со значений $k=1$ (обычно этому значению $k$ соответствует плоскость симметрии) и определяя решение при всех $j$. В результате при заданных $n$ и $k$ найдем решение на линии, нормальной к обтекаемой поверхности. После этого индекс $k$ увеличивается на единицу и решение получается в другом «столбце» (ряде точек, расположенных на нормали к поверхности). Таким образом, на $(n+1)$-м слое осуществляется расчет маршевым методом в направлении вторичного течения. В приведенных ниже разностных соотношениях неизвестными являются значения величин на слоях $n+1$, $k$.

**Схема Кранка — Николсона.** Несколько исследователей использовали обобщенную на трехмерный случай схему Кранка — Николсона. Из анализа областей влияния и зависимости следует, что ее можно применять для расчета течений лишь тогда, когда скорость вторичного течения не меняет знак. Поместим центр разностного шаблона в точку $n+1/2$, $j$, $k-1/2$. На рис. 7.25(а) разностный шаблон изображен так, как он виден сверху, со стороны потока (т. е. показаны лишь точки в плоскости $x, z$). Заштрихованная область приблизительно показывает максимальный размер области зависимости, допускаемый таким шаблоном. Светлым кружком обозначена точка, значения параметров в которой неизвестны, а крестиком — положение центра шаблона. При отрицательной скорости вторичного течения условия, накладываемые принципом влияния, не могут быть выполнены, так как при переходе к столбцу $n+1, k$, используемый шаблон не допускает передачи возмущений в направлении, противоположном направлению оси $z$. С другой стороны, до тех пор пока $G \geqslant 0$, принцип влияния не накладывает никаких ограничений на шаг $\Delta x$, так как при $F > 0$, $G \geqslant 0$ любая линия тока лежит внутри шаблона.

Было предложено несколько вариантов схемы Кранка — Николсона. Чаще всего член уравнения вида $\partial/\partial\eta\,(a\partial\phi/\partial\eta)$ аппрок-

симируется по тем же формулам, что и в двумерном случае, но при этом дополнительно проводится осреднение между столбцами $k$ и $k-1$. Члены уравнений, содержащие производные $\partial\phi/\partial x$ и $\partial\phi/\partial\eta$, тоже аппроксимируются по формулам, используемым в двумерной схеме Кранка — Николсона, но с дополнительным осреднением между столбцами $k$ и $k-1$. Производные в поперечном направлении (например, в члене уравнения

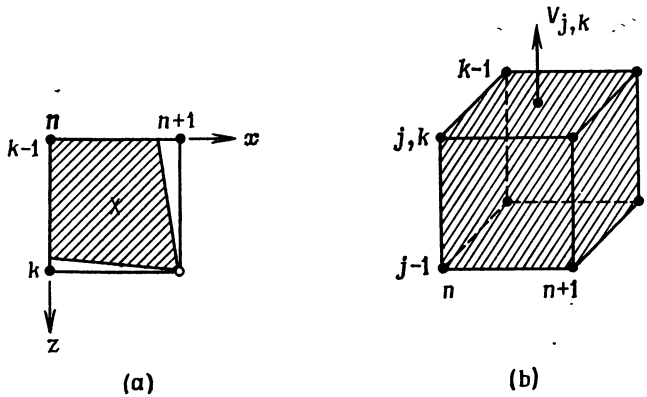



Рис. 7.25. Схема Кранка — Николсона. (a) Проекция шаблона на плоскость $x$, $z$; (b) контрольный объем для уравнения неразрывности.

(7.111), помеченном цифрой (1)) аппроксимируются следующим образом:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{j,k-1/2}^{n+1/2} \approx \frac{\phi_{j,k}^{n+1}+\phi_{j,k}^{n}-\phi_{j,k-1}^{n+1}-\phi_{j,k-1}^{n}}{2\Delta z}.$$

Если обтекается криволинейная поверхность, то параметры кривизны $K_1$ и $K_3$ отличны от нуля и необходимо найти аппроксимационные соотношения для членов уравнения (7.111), помеченных цифрами (2) и (3). Аналогичные члены появляются в уравнениях пограничного слоя и в том случае, когда непреобразованные уравнения записываются в ортогональной криволинейной системе координат (см. гл. 5). Эти члены уравнений не содержат производных от искомых неизвестных и в соответствии с определением, приведенным в п. 7.3.1, являются источниковыми членами. Члены уравнения (7.111), помеченные цифрами (4) и (5), — два новых источниковых члена, появляющихся при переходе к неизвестным $F$ и $G$. Конечно-разностные аналоги членов уравнения (7.111), помеченных цифрами (2) — (5), и конвективных членов необходимо линеаризовать. Для этого можно воспользоваться любым из методов, описанных в п. 7.3.3, хотя ли-

неаризация при совместном решении уравнений в трехмерном случае обычно не проводится. Источниковые члены записываются в центре шаблона (в точке $(n+1/2,\ j,\ k-1/2)$). Для этого проводится осреднение по соседним узлам разностной сетки. Например, член уравнения (7.111), помеченный цифрой (2), можно представить в виде

$$(FGxK_1)^{n+1}_{j,\,k-1/2} \approx x^{n+1/2}K^{n+1/2}_{1_{k-1/2}}\left(F^{n}_{j,\,k}+F^{n}_{j,\,k-1}+F^{n+1}_{j,\,k}+F^{n+1}_{j,\,k-1}\right)\times$$
$$\times\left(G^{n}_{j,\,k}+G^{n}_{j,\,k-1}+G^{n+1}_{j,\,k-1}+\widehat{G}^{n+1}_{j,\,k}\right)/16. \qquad (7.118)$$

Единственной алгебраической неизвестной в этом соотношении является $F^{n+1}_{j,\,k}$, а линеаризация состояла в том, что величина $\widehat{G}^{n+k}_{j,\,k}$ рассматривалась как известная. Величина $\widehat{G}^{n+1}_{j,\,k}$ может быть найдена путем экстраполяции, итерационной замены коэффициентов или методом запаздывающих коэффициентов, хотя метод запаздывающих коэффициентов применяется в трехмерном случае не часто. Очевидно, существует определенная свобода в выборе метода линеаризации различных членов уравнений. В правой части уравнения (7.111) есть и другие источниковые члены, но их линеаризацию проводить не надо. Итак, каждое уравнение движения заменяется системой линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных во всех узлах столбца $n+1,\ k$. Эту систему уравнений можно решать прогонкой, так как ее матрица коэффициентов трехдиагональная.

Чаще всего при расчете трехмерного пограничного слоя уравнение неразрывности для определения неизвестных $V^{n+k}_{j,\,k}$ решается независимо от уравнений движения. Решение уравнения неразрывности проводится после того, как величины $F$ и $G$ найдены из уравнений движения. Для построения конечно-разностного аналога уравнения неразрывности обычно выбирают контрольный объем с центром в точке $(n+1/2,\ j-1/2,\ k-1/2)$. Этот контрольный объем показан на рис. 7.25(b). Средние значения $F$ и $G$ в центре каждой грани контрольного объема обычно находят как среднее этих величин в четырех вершинах этой грани. При решении уравнений движения необходимо знать значения $V$ лишь в точках $n+1/2,\ j,\ k-1/2$. Благодаря этому объем вычислений обычно удается сократить, если положить значение $V$, определенное при помощи уравнения неразрывности, равным значению в центре проекции контрольного объема на плоскость $x,\ z$. В памяти ЭВМ значениям $V$, вычисленным в точках $n+1/2,\ j,\ k-1/2$ физического пространства, обычно присваивают индекс $n+1,\ j,\ k$.

На рис. 7.25(b) указаны индексы, которые обычно применяют при размещении неизвестных в памяти ЭВМ, и показана

точка, в которой вычисляют величину $V_{j,k}^{n+1}$. Сетки, в которых неизвестные определяются в различных точках, обычно называют сетками с расположением узлов в шахматном порядке. В рассматриваемом нами случае все неизвестные, кроме $V$, определяются в узлах регулярной сетки. В гл. 8 мы приведем другие примеры использования сеток с расположением узлов в шахматном порядке. В принципе схема Кранка — Николсона может формально иметь второй порядок точности (погрешность аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta\eta)^2, (\Delta z)^2)$. Точность этой схемы может снижаться вследствие линеаризации уравнений и применения неравномерных сеток.

**Схема зигзаг.** Схема зигзаг, предложенная Краузе [Krause, 1969], широко применяется для расчета течений, в которых по-

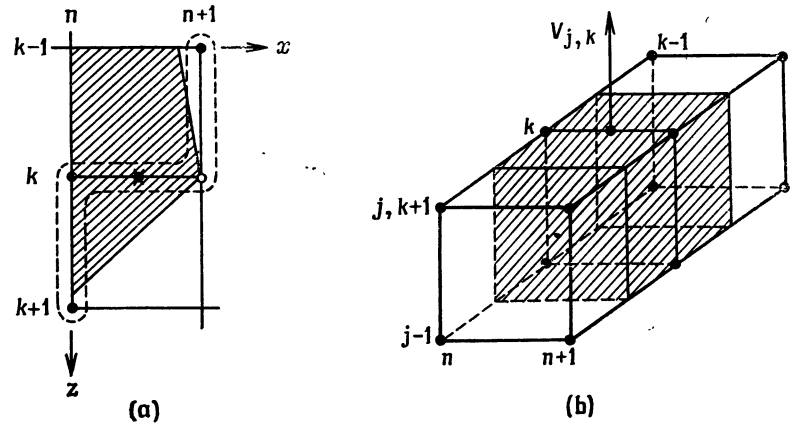



Рис. 7.26. Схема зигзаг. (a) Проекция шаблона на плоскость $x$, $z$; (b) контрольный объем для уравнения неразрывности.

перечная составляющая скорости меняет знак. В этом случае используется разностный шаблон, центр которого расположен в точке $n + 1/2$, $j$, $k$. Проекция шаблона на плоскость $x$, $z$ показана на рис. 7.26(a). Как и раньше, заштрихованной областью приближенно показан максимальный размер области зависимости такого шаблона. Отметим, что этот шаблон позволяет учесть информацию о течении в обоих направлениях оси $z$ от точки $n + 1$, $j$, $k$. Следовательно, используя такой шаблон, можно рассчитывать потоки с направленным в любую сторону вторичным течением, если только направление потока остается в пределах зоны зависимости шаблона. Так же как в случае схемы Кранка — Николсона, при $F > 0$, $G \geqslant 0$ ограничения на шаги сетки отсутствуют. Однако такие ограничения появляются

в том случае, когда вторичное течение направлено в сторону, противоположную направлению оси $z$. Для схемы зигзаг ограничения на шаги разностной сетки, следующие из принципа влияния, имеют вид

$$F > 0, \quad \frac{\Delta x h_1 G}{\Delta z h_3 F} \geqslant -1.$$

Здесь необходимо отметить, что допустимое направление потока можно изменить путем изменения отношения шагов сетки $\Delta z/\Delta x$.

Схема зигзаг алгебраически проще схемы Кранка — Николсона. В основном это объясняется тем, что при построении конечно-разностных аналогов уравнений осреднение проводится лишь между $n$ и $n+1$, тогда как между двумя слоями по $k$ оно не проводится. При использовании схемы зигзаг конечно-разностные аналоги членов уравнений вида $\partial/\partial\eta(a\partial\phi/\partial\eta)$ и $\partial\phi/\partial x$ строятся так же, как в двумерной схеме Кранка — Николсона. Производные в поперечном направлении, входящие в уравнения движения, аппроксимируются по значениям неизвестных в узлах, обведенных на рис. 7.26(а) штриховыми линиями. При постоянном шаге $\Delta z$ соответствующий конечно-разностный аналог производной имеет вид

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{j,k}^{n+1/2} \approx \frac{\phi_{j,k+1}^{n} - \phi_{j,k}^{n} + \phi_{j,k}^{n+1} - \phi_{j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z}. \tag{7.119}$$

Так как при последовательном расчете в направлении оси $z$ мы переходим от столбца с номером $(n+1, k-1)$ к столбцу с номером $(n+1, k)$, то единственной неизвестной в соотношении (7.119) является $\phi_{j,k}^{n+1}$. Линеаризация получившихся уравнений проводится почти так же, как в случае схемы Кранка — Николсона. Полученные уравнения имеют более компактный вид, так как осреднение проводится по двум точкам, а не по четырем. Например, член уравнения (7.111), помеченный цифрой (2), можно представить в виде

$$(FGxK_1)_{j,k}^{n+1/2} = \frac{x^{n+1/2} K_{1_k}^{n+1/2} \left(F_{j,k}^{n} + F_{j,k}^{n+1}\right)\left(G_{j,k}^{n} + \hat{G}_{j,k}^{n+1}\right)}{4}. \tag{7.120}$$

Схема зигзаг приводит к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которую можно решить прогонкой.

Конечно-разностный аналог уравнения неразрывности можно построить путем рассмотрения контрольного объема с центром в точке $(n+1/2, j-1/2, k)$, как показано на рис. 7.26(b). Среднее значение $F$ на грани контрольного объема, параллельной

плоскости $\eta, z$, можно найти при помощи осреднения лишь в направлении оси $\eta$, так как центр грани совпадает с сеточной линией, на которой $k$ постоянно. Среднее значение $G$ на грани, параллельной плоскости $x, \eta$, определяется путем осреднения по схеме зигзаг (или по диагонали). Проиллюстрируем процедуру осреднения на примере члена $\partial(aG)/\partial z$, входящего в уравнение неразрывности схемы Краузе. Если шаг сетки $\Delta z$ постоянен, то

$$\left.\frac{\partial (aG)}{\partial z}\right|^{n+1/2}_{j-1/2,\,k} \approx \{[(aG)^n_{j,\,k+1} + (aG)^n_{j-1,\,k+1} + (aG)^{n+1}_{j,\,k} + (aG)^{n+1}_{j-1,\,k}] - [(aG)^n_{j,\,k} + (aG)^n_{j-1,\,k} + (aG)^{n+1}_{j,\,k-1} + (aG)^{n+1}_{j-1,\,k-1}]\}/4\Delta z. \tag{7.121}$$

При использовании схемы зигзаг величина $V$ определяется из уравнения неразрывности в центре верхней грани контрольного объема (эта грань параллельна плоскости $x$, $z$), т. е. в точке $(n+1/2,\ j,\ k)$. В памяти ЭВМ эту величину обычно располагают в элементе массива с номером $(n+1, j, k)$, как показано на рис. 7.26(b). Схема зигзаг Краузе имеет ту же погрешность аппроксимации, что и схема Кранка — Николсона. Более подробно схемы Кранка — Николсона и зигзаг описаны в работе Блоттнера и Эллиса [Blottner, Ellis, 1973].

**Различные модификации схемы зигзаг.** Опишем кратко две модификации схемы зигзаг, позволяющие рассчитывать потоки с положительным и отрицательным вторичным течением. Уонг [Wang, 1973] предложил двухшаговый метод второго порядка точности, который не требует линеаризации членов уравнений движения. Как и для любого другого двухшагового метода, начальные условия должны быть заданы в этом случае на двух слоях по маршевой координате. Поэтому один или несколько первых шагов проводят обычно по другой разностной схеме. Проекция на плоскость $x$, $z$ шаблона, используемого для построения двухшаговой разностной схемы, показана на рис. 7.27.

Заштрихованная область показывает, как и ранее, приближенный размер зоны зависимости такого шаблона. Для нахождения решения необходимо знать значения величин на $n$-м и $(n-1)$-м слоях. Схема является явной и центрированной относительно точки $(n, j, k)$. Производные по $x$ и $z$ аппроксимируются в точке $(n, j, k)$ центральными разностями. Производные вида $\partial/\partial\eta\,(a\partial\phi/\partial\eta)$ представляются как среднее разностных производных в точках $(n+1,\ j,\ k)$ и $(n-1,\ j,\ k)$. Ограничения на шаги разностной сетки, накладываемые принципом влияния, имеют вид

$$F > 0, \quad \left|\frac{\Delta x h_1 G}{\Delta z h_3 F}\right| \leqslant 1.$$

При $F > 0$ никаких других формальных ограничений на устойчивость нет.

Китченс и др. [Kitchens et al., 1975] провел сопоставление четырех различных разностных схем расчета трехмерного пограничного слоя. Он показал, что одна из предложенных схем (схема D) отличается небольшим ростом ошибки и удачными условиями устойчивости. Кроме того, результаты, полученные по этой схеме, по-видимому, мало чувствительны к нарушению усло-

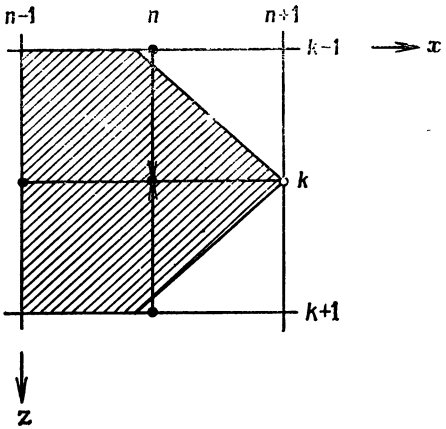



Рис. 7.27. Двухшаговая схема.

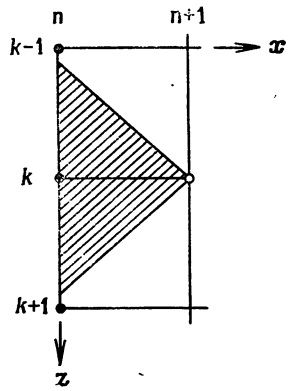



Рис. 7.28. Схема D [Kitchens et al., 1975].

вий, накладываемых принципом влияния. На рис. 7.28 показана проекция шаблона, используемого при построении этой схемы, на плоскость $x$, $z$. Приближенный размер области зависимости рассматриваемой схемы показан заштрихованной областью. Описываемый метод неявный. Производные по $x$ аппроксимируются в точке $(n + 1/2, j, k)$ центральными разностями, но при этом благодаря специальной аппроксимации производных из неустойчивой схемы удается получить устойчивую. При аппроксимации производной $\partial\phi/\partial x$ значение неизвестной в узле $(n, j, k)$ заменяется средним значением величин $\phi^n_{j,\,k+1}$ и $\phi^n_{j,\,k-1}$. Следовательно, на сетке с равномерным шагом мы получим

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi^{n+1}_{j,\,k} - 0.5\left(\phi^n_{j,\,k+1} + \phi^n_{j,\,k-1}\right)}{\Delta x}.$$

Производные в поперечном направлении $z$ аппроксимируются в точке $(n, j, k)$ центральными разностями. Производные вида $\partial/\partial\eta(a\partial\phi/\partial\eta)$ заменяются средними значениями разностных про-

изводных в узлах $(n+1, j, k)$ и $(n, j, k)$. Погрешность аппроксимации такой схемы составляет $O(\Delta x, (\Delta z)^2/\Delta x, (\Delta\eta)^2, (\Delta z)^2)$ [Kitchens et al., 1975]. Для этого метода ограничения на шаги разностной сетки, накладываемые принципом влияния, имеют тот же вид, что и для двухшаговой схемы. В рассматриваемом случае ограничения, накладываемые условиями устойчивости и принципом влияния, совпадают.

### 7.7.4. Примеры расчетов

В этом разделе опишем результаты расчетов модельного трехмерного течения, показанного на рис. 7.23. Расчеты были проведены по схеме зигзаг для случая ламинарного течения несжимаемой жидкости, т. е. решались уравнения (7.110)—(7.112). В последних по $z$ узлах разностной сетки расчеты проводились по схеме Кранка — Николсона, что позволяло избежать необходимости задавать условия на $(k+1)$-м слое по $z$. Результаты расчетов такого течения, проводившихся несколькими исследователями, описаны в ряде работ (укажем, например, на работу Цебеци [Cebeci, 1975]). В рассматриваемом случае скорость невязкого потока определяется соотношениями

$$u_{1,e} = u_\infty\left(1 + a^2\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right), \quad u_{3,e} = -2u_\infty a^2\frac{\gamma_3}{\gamma_1^2}.$$

Здесь $u_\infty$ — характерная скорость набегающего потока, $\gamma_1 = (x-x_0)^2 + z^2$, $\gamma_2 = -(x-x_0)^2 + z^2$, $\gamma_3 = (x-x_0)z$; $x_0$ — расстояние от оси цилиндра до передней кромки пластины, $a$ — радиус цилиндра. Координаты $x$ и $z$ отсчитываются от передней кромки пластины и линии симметрии соответственно. Полезно выписать выражение для значения величины $\partial u_{3,e}/\partial z$ в плоскости симметрии:

$$\left.\frac{\partial u_{3,e}}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{-2u_\infty a^2}{(x-x_0)^3}.$$

Расчеты были проведены для случая $u_\infty = 30.5$ м/с, $a = 0.061$ м, $x_0 = 0.457$ м на сетке с шагами $\Delta x = 0.0061$ м, $\Delta\eta = 0.28$, $\Delta z = 0.0061$ м. Типичные профили скорости для рассматриваемого течения показаны на рис. 7.29. В частности, заметим, что максимум вторичных течений расположен вблизи стенки на трети толщины пограничного слоя. Зависимость угла поворота потока (в плоскости $x$, $z$) от расстояния до стенки показана на рис. 7.30(а). Максимальный скос потока наблюдается вблизи стенки. Направление вектора скорости меняется по нормали к стенке примерно на 13°. Следовательно, в этой точке такой же

угол раскрытия имеет и область зависимости (см. рис. 7.24). На рис. 7.30(b) показано изменение коэффициента трения вдоль

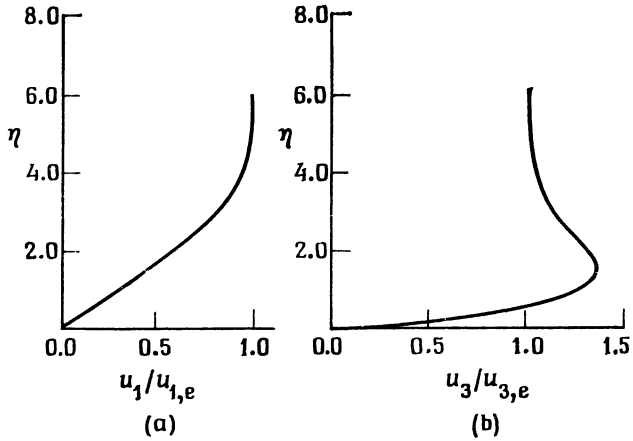



Рис. 7.29. Профили скорости в трехмерном пограничном слое на пластине с установленным на ней цилиндром при $x = 0.219$ м, $z = 0.079$ м. (a) Профиль продольной составляющей скорости; (b) профиль поперечной составляющей скорости.

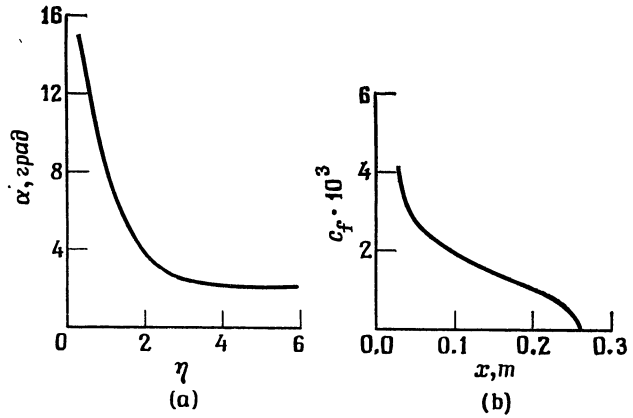



Рис. 7.30. Трехмерный пограничный слой на пластине с установленным на ней цилиндром. (a) Изменение по нормали к поверхности угла между направлением потока и плоскостью $x$, $\eta$ при $x = 0.219$ м, $z = 0.079$ м; (b) изменение коэффициента трения вдоль плоскости симметрии.

оси $x$. Цилиндр, установленный на пластине, приводит к отрыву потока в плоскости симметрии при $x \approx 0.26$ м. Если расчет пограничного слоя проводится традиционными методами, то реше-

ние в плоскости симметрии вниз по потоку от этой точки найти нельзя, так как в ней равны нулю составляющие скорости по обеим осям $x$ и $z$. В дальнейшем было бы интересно проверить, позволяют ли обратные методы расчета пограничного слоя пройти через особые точки и в трехмерном случае [1].

### 7.7.5. Заключительные замечания

В этой главе мы рассмотрели лишь несколько наиболее характерных схем, которые используются для расчета трехмерных пограничных слоев. На практике используются и другие разностные схемы, некоторые из них описаны в работах [Wang, 1974; Kitchens et al., 1975; Blottner, 1975b]. Цебеци [Cebeci, 1975] обобщил блочный метод Келлера на трехмерный случай. В своей более поздней работе [Cebeci et al., 1979a] он воспользовался аппроксимацией производных, аналогичной аппроксимации производных в схеме зигзаг, что позволило ему провести расчет течения, в котором поперечная составляющая скорости меняет знак. В настоящее время нет такой разностной схемы, которая была бы лучше других для любых течений. Для того чтобы эффективно провести расчет во всей области течения, в некоторых случаях используют одновременно несколько разностных схем. Начинать составление программы расчета трехмерного пограничного слоя мы рекомендуем со схемы зигзаг. Имея такую программу, можно пытаться улучшать ее, используя преимущества, которыми обладают другие схемы, приведенные выше.

Важным вопросом при описании трехмерных течений является моделирование турбулентности. Большинство расчетов трехмерного пограничного слоя проведено в предположении, что турбулентная вязкость — скаляр, который может быть найден по обобщенной модели пути смешения Прандтля, описанной в гл. 5 (см. уравнение (5.131a)). В нескольких более поздних работах во внешней части пограничного слоя использовалась «неизотропная» модель турбулентности [McLean, Randall, 1979; Lin et al., 1981]. Полученные в последнее время экспериментальные данные подтверждают, что при описании кажущихся турбулентных напряжений по гипотезе Буссинеска коэффициент вязкости в члене с вязкими напряжениями в поперечном направлении во внешней части пограничного слоя может оказаться существенно меньше (на множитель 0.4—0.7) коэффициента вязкости в члене с вязкими напряжениями в продольном направлении.

---

[1] Обратные методы позволяют пройти особую точку и в трехмерном случае (см. [26] в списке дополнительной литературы). — *Прим. перев.*

По-видимому, для более точного моделирования турбулентности в трехмерных течениях необходимы дальнейшие исследования.

По всей вероятности, теория трехмерного пограничного слоя успешнее всего применялась в последние годы для анализа обтекания крыльев. Для таких течений разработаны и подробно описаны специальные улучшенные алгоритмы [Cebeci et al., 1977; McLean, Randall, 1979]. При анализе трехмерных течений можно проводить и расчет вязко-невязкого взаимодействия, хотя определение формы тела вытеснения является в этом случае более сложной задачей. Расчеты вязко-невязкого взаимодействия при обтекании крыльев проведены Маклином и Рандаллом [McLean, Randall, 1979]. В трехмерном случае обычно не удается воспользоваться простым интегралом Коши (7.83) для описания влияния на течение небольших изменений формы поверхности, поэтому при каждом итеративном прохождении всего течения приходится заново рассчитывать невязкий поток. Однако вместо того, чтобы проводить расчет невязкого обтекания тела вытеснения, удобнее сохранить форму тела, а влияние вязкости описать распределенными источниками и стоками [Lighthill, 1958].

В п. 7.4.4 фактически использование именно концепции Лайтхилла распределенных источников и стоков позволило в случае двумерных течений несжимаемой жидкости свести задачу воздействия на течение небольших вязких возмущений к интегралу Коши (7.83). Если невязкое течение описывается полным уравнением потенциала, то распределенные источники и стоки (интенсивность которых определяется производными толщины вытеснения по касательным к обтекаемой поверхности координатам) являются новыми граничными условиями для нормальной составляющей скорости (на поверхности тела задается вдув или отсос). Основное преимущество такого подхода при расчете дозвуковых течений прямыми методами состоит в том, что при решении эллиптических уравнений в частных производных на каждой итерации, проводимой для расчета взаимодействия, не нужно заново вычислять матрицу коэффициентов и обратную ей матрицу. Все известные до сих пор расчеты вязко-невязкого взаимодействия для полностью трехмерных течений проведены с использованием обычных прямых методов расчета пограничного слоя. Мало что известно о возможности применения обратной задачи для анализа трехмерных пограничных слоев.

Укажем на несколько работ обзорного или общего характера, знакомство с которыми полезно для того, чтобы шире посмотреть на современное состояние методов расчета трехмерного пограничного слоя: [Wang, 1974, 1975; Buchnell et al., 1976; Blottner, 1975b; Kitchens et al., 1975].

## § 7.8. Нестационарные пограничные слои

Часто, особенно при расчете летательных аппаратов, желательно знать поведение нестационарного пограничного слоя. Вычислительные аспекты таких задач в настоящее время понятны, однако остается ряд сомнительных моментов, связанных с моделированием турбулентности. Мы ограничимся рассмотрением двумерных нестационарных пограничных слоев, хотя многие результаты распространимы и на трехмерный случай.

Уравнения двумерного нестационарного пограничного слоя приведены в гл. 5 (уравнения (5.116)—(5.118)). Они отличаются от соответствующих стационарных уравнений лишь членами $\rho \partial u/\partial t$ в уравнении движения и $\partial \rho/\partial t$ в уравнении неразрывности. Нестационарные уравнения также являются параболическими, причем маршевой координатой является время. Значения неизвестных $u$, $v$ и $H$, а также свойства жидкости необходимо запоминать во всех узлах области, занятой потоком. Начальные значения $u$, $v$ и $H$ должны быть заданы для всех $x$ и $y$. Граничные условия могут меняться по времени. Обычно граничные условия задают в виде

1. При $x = x_0$ $u(t, x_0, y)$ и $H(t, x_0, y)$ задаются для всех $y$ и $t$.
2. При $y = 0$ $u(t, x, 0) = v(t, x, 0) = 0$.
3. $\lim\limits_{y \to \infty} u(t, x, y) = u_e(t, x)$.

Основной задачей является создание метода расчета, позволяющего получать достаточно точное и устойчивое решение при возникновении возвратного течения ($u < 0$). С этой точки зрения задача расчета двумерного нестационарного пограничного слоя аналогична задаче расчета трехмерного стационарного пограничного слоя, во всяком случае в той ее части, которая состояла в выборе конечно-разностного аналога уравнений, позволяющего рассчитывать пограничные слои с отрицательными вторичными течениями. Если в нестационарной задаче возникает возвратное течение, то необходимо воспользоваться разностной аппроксимацией производных, допускающей передачу возмущений вверх по потоку. Для двумерных нестационарных пограничных слоев это условие не было сформулировано в виде принципа влияния, но физически очевидно, что пренебрегать возможностью конвективного переноса возмущений в направлении течения нельзя. Более того, уравнения двумерного стационарного пограничного слоя являются параболическими уравнениями, а из этого снова следует, что информация обязательно должна распространяться в маршевом направлении, которое совпадает с направлением составляющей скорости по оси $x$. Иначе стационарное решение не

может быть получено из анализа переходного нестационарного решения.

При возникновении возвратного течения для аппроксимации производной $\partial u/\partial x$ чаще всего используют адаптированную на нестационарный случай схему зигзаг, которую Краузе предложил для расчета трехмерных пограничных слоев. Такая разностная аппроксимация производной проиллюстрированна на рис. 7.31. Используя обозначения, показанные на этом рисунке, запишем для сетки с постоянным шагом $\Delta x$ конечно-разностный

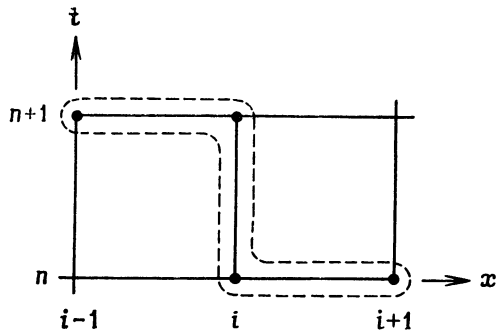



Рис. 7.31. Схема зигзаг, используемая при расчете нестационарных течений для аппроксимации производных в продольном направлении.

аналог производной в продольном направлении в том случае, когда эта производная аппроксимируется по схеме зигзаг:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u^{n+1}_{i,j} - u^{n+1}_{i-1,j} + u^{n}_{i+1,j} - u^{n}_{i,j}}{2\Delta x}. \qquad (7.122)$$

Индекс $j$ связан с координатой, нормальной к обтекаемой поверхности. Разностную производную (7.122) можно использовать при построении конечно-разностной схемы, центрированной относительно точки $n + 1/2$, $i$, $j$. Такую разностную схему можно рассматривать как модификацию схемы зигзаг, предложенной Краузе для расчета трехмерных стационарных пограничных слоев, на случай расчета двумерного нестационарного пограничного слоя.

Блочный метод Келлера с аппроксимацией производных по схеме зигзаг, который применялся для расчета трехмерных пограничных слоев, был модифицирован в аналогичный метод расчета нестационарных пограничных слоев. Эта схема применима и в том случае, когда возникает возвратное течение [Cebeci et al., 1979a].

При возникновении возвратного течения к неплохим результатам приводят и схемы с разностями против потока, предложенные Телионисом и др. [Telionis et al., 1973] и Мёрфи и Прентером [Murphy, Prenter, 1981]. В методе Мёрфи и Прентера производные по нормали к обтекаемой поверхности аппроксимируются с четвертым порядком точности.

Полезный обзор работ, посвященных расчету нестационарного пограничного слоя, проведен Блоттнером [Blottner, 1975]. Рекомендуем ознакомиться также с работами [Telionis et al., 1973; Tsahalis, Telionis, 1974; Telionis, Tsahalis, 1976; Cebeci et al., 1979b; Phillips, Ackerberg, 1973; Murphy, Prenter, 1981].

## Задачи

**7.1.** Проверьте условия устойчивости, приведенные в п. 7.3.2 для двух вариантов простой явной схемы расчета уравнений пограничного слоя.

**7.2.** Пусть на $(n+1)$-м слое по маршевой координате необходимо вычислить величину $(\partial u/\partial y)^2$, где $u$ — неизвестная. Рассматривается течение вязкой жидкости, $x$ — маршевая координата, а $y$ — расстояние, отсчитываемое по нормали к стенке. Используя линеаризацию по Ньютону, постройте такой конечно-разностный аналог величины $(\partial u/\partial y)^2$, который не препятствовал бы итерационному решению алгебраических уравнений прогонкой и на каждой итерации был линеен относительно неизвестных.

**7.3.** Покажите, что уравнения (7.20) и (7.21) действительно сводятся к системе алгебраических уравнений с блочной трехдиагональной матрицей. Выпишите элементы блоков матрицы.

**7.4.** Проверьте соотношение (7.24).

**7.5.** Обобщите соотношение (7.24) на случай сетки с непостоянными шагами $\Delta x$ и $\Delta y$ так, чтобы сохранить второй порядок точности схемы.

**7.6.** Рассмотрите неявный конечно-разностный аналог уравнения движения пограничного слоя

$$u_j^n \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} + v_j^n \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta y} = \frac{\nu}{(\Delta y)^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right).$$

Как вы думаете, появятся ли при решении прогонкой полученной системы уравнений ограничения, связанные с величиной сеточного числа Рейнольдса при $u > 0$, $v > 0$? Обоснуйте ваш ответ.

**7.7.** Повторите задачу 7.6 для разностного уравнения, полученного при замене второго слагаемого выражением

$$v_j^n \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta y}.$$

**7.8.** Постройте гибридную конечно-разностную аппроксимацию величины $v\partial u/\partial y$ при $v_j^n < 0$, аналогичную (7.27).

**7.9.** Проверьте условие устойчивости (7.30).

**7.10.** Проделайте все необходимые шаги для решения уравнения теплопроводности блочным методом Келлера. Проверьте уравнения (7.38)—(7.40).

**7.11.** Покажите, что система уравнений (7.48) и (7.49) действительно является системой уравнений с блочной трехдиагональной матрицей, при этом блоки имеют размер $2 \times 2$. Проверьте, действительно ли эта система уравнений имеет вид, допускающий решение методом модифицированной прогонки. Напомним, что метод модифицированной прогонки был описан в п. 7.3.3 как метод совместного решения уравнений движения и неразрывности.

**7.12.** Решите задачу 4.25 модифицированным блочным методом (соотношения (7.37)).

**7.13.** Выберите неявную схему (полностью неявную, Кранка — Николсона, модифицированную блочную схему). Напишите программу расчета на ЭВМ уравнений ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на пластине в физических координатах (схема А) и в преобразованных координатах (схема В) (уравнения (7.52) и (7.53)). Проведите линеаризацию разностных уравнений при помощи либо метода запаздывающих коэффициентов, либо экстраполяции коэффициентов $v$ и $u$. Уравнения движения и неразрывности решайте независимо. Решение полученной системы уравнений с трехдиагональной матрицей проведите прогонкой. Для схемы В выберите шаг $\Delta\eta = 0.3$, а для схемы А — из соотношения $\rho u_\infty \Delta y/\mu = 60$. При расчете по схеме А толщина пограничного слоя будет расти с ростом $x$, поэтому в ходе расчета придется добавлять к расчетной области дополнительные узлы. Размер шага по маршевой координате можно увеличивать пропорционально толщине пограничного слоя. Для схемы А размер первого шага по маршевой координате выбирается из условия $\Delta x = \rho u_\infty (\Delta y)^2/2\mu$.

Сопоставьте схемы А и В по точности и простоте программирования. Для сравнения численного решения с точным выберите в качестве точного решения автомодельное решение уравнений пограничного слоя, представленное в виде таблицы в монографии Шлихтинга [Schlichting, 1979]. Вычислите коэффициент трения

$$c_f = \mu (\partial u/\partial y)_w / (\rho u_e^2/2)$$

из полученного вами численного решения. Величину $(\partial u/\partial y)_w$ найдите, построив интерполяционный полином второго порядка для прилежащих к стенке узлов. Ограничьтесь проведением 75 шагов в продольном направлении. Проверьте чувствительность метода к величине шага по маршевой координате. Проведите расчеты при $\Delta x = 1\delta, 2\delta, 4\delta$. Для схемы В проверьте, как задание начальных условий влияет на точность полученных результатов. Для этого сначала проведите расчет в продольном направлении, задав в качестве начального условия для уравнения движения $v = 0$ при $x = 0$, а потом повторите этот расчет, определяя $v$ при $x = 0$ итерационно (используя уравнение неразрывности).

**7.14.** Повторите задачу 7.13 со следующими изменениями: выберите неявную разностную схему и форму записи уравнений пограничного слоя (в физических или преобразованных координатах). В качестве схемы А выберите схему с линеаризацией методом запаздывающих коэффициентов, а в качестве схемы В — схему с линеаризацией по Ньютону при совместном решении уравнений неразрывности и движения.

**7.15.** Повторите задачу 7.13, используя уравнения пограничного слоя, записанные в физических или преобразованных координатах. Пусть далее схема А — любая неявная схема, выбранная вами, а схема В — явная схема (Дюфорта — Франела, «классики» или явная схема переменных направлений).

**7.16.** Модифицируйте разностную схему, использованную при решении задач 7.13—7.15, так, чтобы она позволила рассчитывать пограничный слой с заданным градиентом давления. Проверьте свою разностную схему, сравнив

рассчитанные вами профили скорости с автомодельными решениями Фолкнера — Скан (см. монографию Шлихтинга [Schlichting, 1979]), полученными для потенциального течения с $u_e(x) = u_1 x^m$ ($u_1$, $m$ — константы, $x$ — продольная координата). Проведите сравнение при $m = 1/3$ и 0.0654. В качестве $u_1$ вы можете задать любую удобную вам величину.

**7.17.** Модифицируйте разностную схему, использованную при решении задач 7.13—7.15, так, чтобы она позволила рассчитывать пограничный слой с вдувом или отсосом. Проверьте свою разностную схему, сравнив рассчитанные профили скорости с результатами Хартнетта и Эккерта [Hartnett, Eckert, 1957], полученными при вдуве и отсосе и заданными соотношениями $v_w(x)\sqrt{\mathrm{Re}_x}/u_\infty = 0.25$ и $-2.5$ соответственно.

**7.18.** Постройте разностную схему для решения уравнений ламинарного пограничного слоя сжимаемой жидкости. Уравнение энергии решайте независимо от остальных уравнений. Напишите программу для ЭВМ и рассчитайте число Стантона и коэффициент трения для пластины, обтекаемой воздухом, при $M_e = 4$, $T_w/T_\infty = 2$. Зависимость коэффициента вязкости от температуры задайте по формуле Сазерленда (5.40). Число Прандтля Pr и коэффициент теплопроводности $c_p$ считайте постоянными (Pr = 0.75, $c_p = 1 \cdot 10^3$ Дж/кг·К). Сравните результаты расчетов с аналитическими данными ван Дриста [van Driest, 1952] (данные по теплообмену можно найти в работе Кейза и Крауфорда [Kays, Crawford, 1980]).

**7.19.** Модифицируйте разностную схему, использованную при решении задач 7.13—7.15, так, чтобы она позволила рассчитывать турбулентный пограничный слой несжимаемой жидкости на пластине. Используйте алгебраическую модель турбулентности, приведенную в гл. 5. Проведите расчет для случая $u_\infty = 33$ м/с, $\nu = 1.51 \cdot 10^{-5}$ м$^2$/с. Постройте профили скорости, рассчитанные вами, в координатах «закона стенки» и сравните их с приведенным на рис. 5.7. Сравните рассчитанные значения $c_f$ с измеренными Вигхардтом и Тилльманом [Wieghardt, Tillmann, 1951]. Последние приведены в следующей таблице:

| $x$, м | $c_f$ | $x$, м | $c_f$ |
|---|---|---|---|
| 0.087 | 0.00534 | 0.637 | 0.00337 |
| 0.187 | 0.00424 | 0.787 | 0.00317 |
| 0.287 | 0.00386 | 0.937 | 0.00317 |
| 0.387 | 0.00364 | 1.087 | 0.00308 |
| 0.487 | 0.00345 | | |

**7.20.** Проверьте соотношение (7.79).

**7.21.** Найдите конкретный вид членов $Q_j^n$ и $R_j^n$ в уравнении (7.94), полученном при применении метода Дюфорта — Франкела к расчету внутренних течений.

**7.22.** Проверьте соотношение (7.97) для полностью неявного метода.

**7.23.** Проверьте соотношение (7.100).

**7.24.** Проверьте соотношение (7.104).

**7.25.** Выведите (7.116).

**7.26.** Напишите конкретный вид уравнений (7.110)—(7.112) в декартовой системе координат для случая трехмерного ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Постройте конечно-разностный аналог этих уравнений, используя метод Кранка — Николсона. Поясните, как вы будете проводить линеаризацию разностных уравнений.

**7.27.** Повторите задачу 7.26 для схемы зигзаг, предложенной Краузе.

**7.28.** Выберите подходящую неявную разностную схему расчета уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя в плоскости симметрии модельного течения, описанного в п. 7.7.4. Сопоставьте рассчитанный коэффициент трения с данными Цебеци [Cebeci, 1975] и (или) с рис. 7.30(b).

**7.29.** Проведите расчет модельного течения, описанного в п. 7.7.4, по схеме Кранка — Николсона при помощи сетки, описанной в том же разделе. Сравните результаты расчетов с данными Цебеци [Cebeci, 1975].

**7.30.** Напишите разностную схему зигзаг решения уравнений двумерного нестационарного пограничного слоя несжимаемой жидкости.

Глава 8

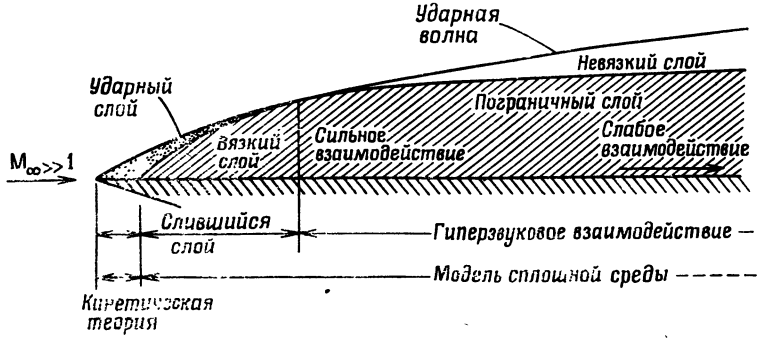
# Численные методы решения параболизованных уравнений Навье — Стокса

## § 8.1. Введение

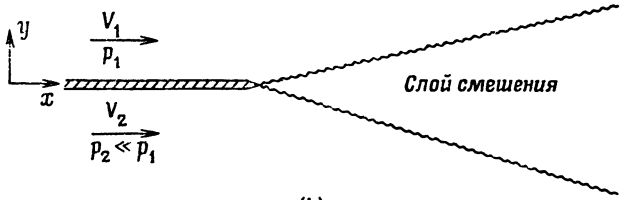
Уравнениями пограничного слоя можно пользоваться для расчета многих течений вязкой жидкости, как было показано в гл. 7. Имеется, однако, ряд важных задач динамики вязкой жидкости, которые не могут быть решены при помощи уравнений пограничного слоя. В этих задачах допущения пограничного слоя просто несправедливы. Например, если имеет место полное слияние вязкого и невязкого потоков, то их нельзя рассчитывать независимо друг от друга, как это делается в теории пограничного слоя. Поэтому приходится решать систему уравнений, справедливую как в невязкой, так и в вязкой областях течения.

На рис. 8.1 изображены некоторые поля течений, для описания которых уравнения пограничного слоя непригодны. Гиперзвуковое течение разреженного газа вблизи заостренной входной кромки плоской пластины (рис. 8.1(а)) является классическим примером вязкого потока, который нельзя рассчитывать при помощи уравнений пограничного слоя. Фактически в непосредственной близости от входной кромки газ нельзя даже считать сплошной средой, так что в этой части поля течения неприменимы и уравнения Навье — Стокса. В области слившегося слоя, когда газ уже можно рассматривать как сплошную среду, ударная волна и вязкий слой слиты в одно целое и неотличимы друг от друга. Ниже по течению ударный слой можно рассматривать как разрыв и между ним и вязким слоем возникает явно выраженная область невязкого потока. Отсюда начинается область взаимодействия, которая далее делится на области сильного и слабого взаимодействия.

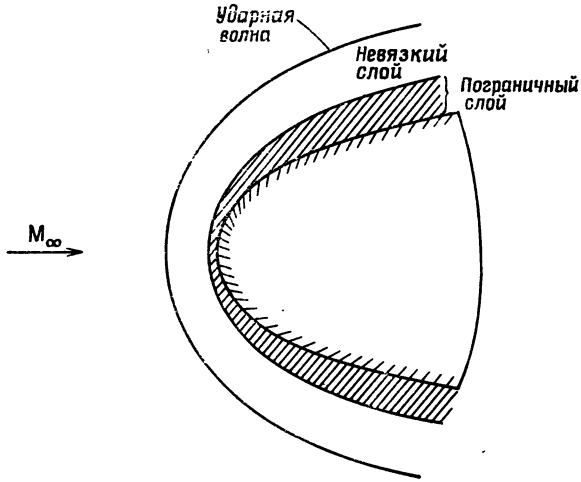
Течение в области слабого взаимодействия по мере продвижения вниз по потоку в конечном счете развивается в классическое прандтлевское погранслойное течение. Очевидно, уравнениями пограничного слоя нельзя пользоваться в области слившихся слоев, так как вязкий слой и ударная волна слиты друг с другом абсолютно неразличимо. В начале области сильного взаимодействия вязкое течение нельзя рассчитывать независимо от невязкого из-за того, что они сильно взаимодействуют друг с


Ударная волна
Невязкий слой
Ударный слой
Пограничный слой
Вязкий слой
Сильное взаимодействие
Слабое взаимодействие
$M_\infty >> 1$
Слившийся слой
Гиперзвуковое взаимодействие
Модель сплошной среды
Кинетическая теория

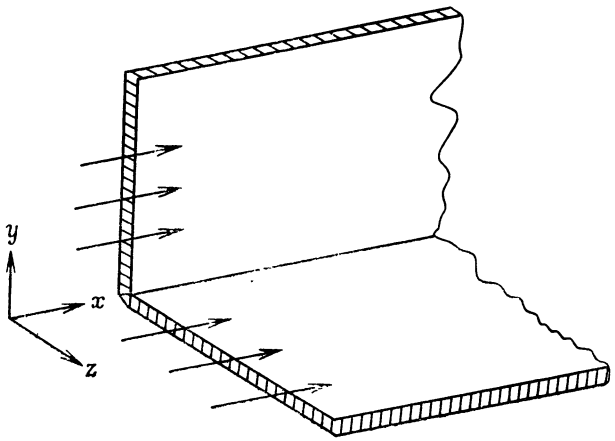
(a)


y
x
$V_1$
$p_1$
$V_2$
$p_2 \ll p_1$
Слой смешения

(b)


Ударная волна
Невязкий слой
Пограничный слой
$M_\infty$

(c)




(d)

Рис. 8.1. Примеры течений, для описания которых уравнения пограничного слоя неприменимы. (a) Обтекание входной кромки плоской пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа; (b) слой смешения с сильным поперечным градиентом давления; (c) обтекание затупленного тела сверхзвуковым потоком на больших высотах; (d) течение в двугранном угле.

другом. В области слабого взаимодействия уже возможен расчет вязкой и невязкой частей поля течения независимым образом, но это следует делать путем итераций, как показано в гл. 7. Другими словами, сначала рассчитываются уравнения пограничного слоя с приближенно заданными граничными условиями на внешней границе. Затем можно рассчитать невязкую часть течения с поправкой на толщину вытеснения, что дает новые уточненные условия на внешней границе для следующей итерации в пограничном слое. Эту процедуру можно повторять, пока решение во всей области не будет меняться от итерации к итерации. За исключением случаев очень слабого взаимодействия, замечено, что такая итерационная процедура часто менее эффективна, чем решение уравнений, пригодных как для вязкой, так и для невязкой областей поля течения [Davis, Rubin, 1980].

На рис. 8.1(b) изображено течение в слое смешения, для которого уравнения пограничного слоя (уравнения тонкого сдвигового слоя) неприменимы. Поперек слоя смешения существует сильный градиент давления. Следовательно, обычные уравнения пограничного слоя (уравнения тонкого сдвигового слоя), содержащие уравнение движения в нормальном направлении в виде

$$\partial p/\partial y = 0, \tag{8.1}$$

в этом случае непригодны и требуется более полное уравнение движения в нормальном направлении. Другой пример поля течения, которое нельзя описать уравнениями пограничного слоя — сверхзвуковое обтекание затупленного тела на больших высотах (рис. 8.1(c)). В пространстве между ударной волной и телом (т. е. в ударном слое) существует сильное взаимодействие между пограничным слоем и невязким течением, поэтому для расчета такого течения используют уравнения, пригодные для обеих областей (вязкого и невязкого течений).

На рис. 8.1(d) изображено течение в двугранном угле (угле, образованном двумя пересекающимися плоскостями). Это наш последний пример течения, когда уравнения пограничного слоя неприменимы. Как показано в гл. 7, в уравнения пограничного слоя включаются производные только по одной, так называемой нормальной координате. Вблизи вершины двугранного угла производные, входящие в вязкие члены, по обоим нормальным направлениям будут величинами одного порядка. Такого рода конфигурации часто встречаются, например, в каналах прямоугольного сечения и в местах сочленения крыло — фюзеляж.

Очевидно, что полные уравнения Навье — Стокса можно использовать для расчета полей течений, изображенных на рис. 8.1, как впрочем и любого другого течения, для которого неприменимы уравнения пограничного слоя. В некоторых случаях только их и можно применять. К сожалению, уравнения Навье — Стокса с трудом поддаются решению, поскольку это сопряжено с большими затратами машинного времени и памяти. Особенно это верно в отношении уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости, которые образуют смешанную систему эллиптически-параболических уравнений для стационарных течений и гиперболически-параболических уравнений для нестационарных течений. Обычно даже для расчета стационарного течения применяется зависящая от времени процедура решения, т. е. нестационарные уравнения Навье — Стокса интегрируются по времени до тех пор, пока не будет достигнуто установившееся решение. Таким образом, при расчете трехмерного течения с использованием уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа необходимо решать четырехмерную (три пространственных измерения и время) задачу. Методы решения полных уравнений Навье — Стокса будут обсуждаться в гл. 9.

К счастью, во многих задачах расчета вязких течений, в которых уравнения пограничного слоя нельзя применять, можно решать систему уравнений, которая по сложности занимает промежуточное положение между полными уравнениями Навье — Стокса и уравнениями пограничного слоя. Эти уравнения принадлежат к классу так называемых *уравнений Навье —*

*Стокса в приближении тонкого слоя* или *параболизованных уравнений Навье — Стокса.* В этот класс попадает несколько систем уравнений. Назовем некоторые из них: уравнения Навье — Стокса в приближении тонкого слоя, параболизованные уравнения Навье — Стокса, частично параболизованные уравнения Навье — Стокса, уравнения вязкого ударного слоя, конические уравнения Навье — Стокса.

Системы уравнений этого класса характеризуются тем, что их можно применять как в невязкой, так и в вязкой областях поля течения. Кроме того, во всех этих уравнениях содержится ненулевой градиент давления в нормальном направлении. Это совершенно необходимо для того, чтобы течения в вязкой и невязкой областях можно было бы решать одновременно.

Когда эти уравнения используются вместо полных уравнений Навье — Стокса, это имеет два очень больших преимущества. Во-первых, эти уравнения состоят из меньшего количества членов, что приводит к сокращению времени счета. Во-вторых, что более важно, в стационарном случае большинство систем этого класса состоит из гиперболически-параболических уравнений по координате в направлении основного потока (при соблюдении некоторых условий). Другими словами, уравнения Навье — Стокса «параболизуются» в продольном направлении. Как следствие этого их можно решать маршевыми методами типа применяемых в теории пограничного слоя, что уменьшает число измерений с четырех до трех пространственных. Тем самым достигается существенная экономия памяти и уменьшается время счета. В этой главе мы обсудим вывод уравнений, относящихся к типу уравнений Навье — Стокса в приближении тонкого слоя, и некоторые методы их решения.

## § 8.2. Уравнения Навье — Стокса в приближении тонкого слоя

Формально нестационарные уравнения пограничного слоя можно получить, пренебрегая в полных уравнениях Навье — Стокса членами порядка $1/\mathrm{Re}_L^{1/2}$ и выше. Вследствие такого анализа порядка величин все вязкие члены с производными по направлению, параллельному поверхности тела, опускают, так как они существенно меньше вязких членов с производными по направлению, нормальному к стенке. Помимо этого, уравнение движения в нормальном направлении сводится к совсем простому уравнению типа уравнения (8.1) в декартовой системе координат, означающему, что нормальный градиент давления очень мал. В приближении тонкого слоя в нестационарных уравнениях Навье — Стокса вязкими членами с производными по

направлениям, параллельным поверхности тела, также пренебрегают, но остальные члены в уравнениях движения сохраняются. Одно из основных достоинств сохранения членов, которыми обычно пренебрегают в теории пограничного слоя, заключается в возможности прямого расчета отрывных и возвратных течений. Без труда рассчитываются также и течения с большими градиентами давления в нормальном направлении типа изображенных на рис. 8.1.

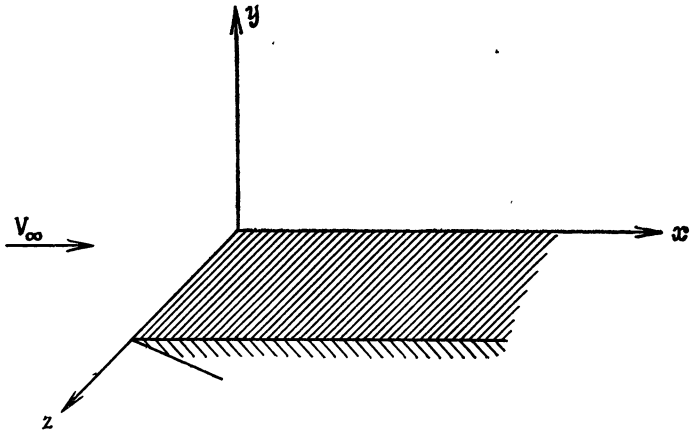



Рис. 8.2. Направление осей системы координат при обтекании плоской пластины.

Концепция приближения тонкого слоя возникает также из детального рассмотрения типичных случаев численного решения полных уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса [Baldwin, Lomax, 1978]. В этих расчетах значительная часть ресурсов ЭВМ тратится на вычисление нормальных градиентов в пограничном слое, так как для этого необходима сетка с очень малым шагом. В результате градиенты в направлениях, параллельных поверхности тела, обычно не разрешаются адекватным образом, даже если соответствующие вязкие члены и сохраняются в уравнениях. Следовательно, при численном решении уравнений Навье — Стокса во многих случаях имеет смысл опускать члены, которые не разрешаются адекватным образом, при условии что они малы. Эти соображения приводят к уравнениям Навье — Стокса в приближении тонкого слоя.

Упрощая полные уравнения Навье — Стокса в соответствии с приближением тонкого слоя, для изображенного на рис. 8.2 течения получаем в декартовой системе координат следующие уравнения:

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0. \tag{8.2}$$

*Уравнение движения по координате x*

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho uv-\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho uw)=0. \tag{8.3}$$

*Уравнение движения по координате y*

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p+\rho v^2-\frac{4}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho vw)=0. \tag{8.4}$$

*Уравнение движения по координате z*

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho uw-\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}(p+\rho w^2)=0. \tag{8.5}$$

*Уравнение энергии*

$$\frac{\partial E_t}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(E_t u+pu)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_t v+pv-\mu u\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{4}{3}\mu v\frac{\partial v}{\partial y}-\right.$$
$$\left.-\mu w\frac{\partial w}{\partial y}-k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}(E_t w+pw)=0. \tag{8.6}$$

Эти уравнения записаны для случая ламинарного течения, но их легко модифицировать и для турбулентного течения, используя методику § 5.4.

Для тел более сложной формы необходимо отобразить поверхность тела из физического пространства на вычислительное и уже в нем применять приближение тонкого слоя. Зададим это отображение преобразованием общего вида

$$\begin{aligned}\xi&=\xi(x,\ y,\ z,\ t),\\ \eta&=\eta(x,\ y,\ z,\ t),\\ \zeta&=\zeta(x,\ y,\ z,\ t),\\ t&=t,\end{aligned} \tag{8.7}$$

и пусть поверхность тела определяется уравнением $\eta=0$ (рис. 8.3). Преобразованные уравнения в строго дивергентной форме имеют вид

$$\left(\frac{\mathbf{U}}{J}\right)_t+\left(\frac{\mathbf{U}\xi_t+\mathbf{E}\xi_x+\mathbf{F}\xi_y+\mathbf{G}\xi_z}{J}\right)_\xi+\left(\frac{\mathbf{U}\eta_t+\mathbf{E}\eta_x+\mathbf{F}\eta_y+\mathbf{G}\eta_z}{J}\right)_\eta+$$
$$+\left(\frac{\mathbf{U}\zeta_t+\mathbf{E}\zeta_x+\mathbf{F}\zeta_y+\mathbf{G}\zeta_z}{J}\right)_\zeta=0, \tag{8.8}$$

где $J$ — якобиан преобразования и $\mathbf{U}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ определяются уравнениями (5.44). Теперь применим приближение тонкого

слоя к преобразованным уравнениям Навье — Стокса. В рамках этого приближения можно пренебречь всеми вязкими членами, содержащими частные производные по направлениям $\xi$ и $\zeta$. По-

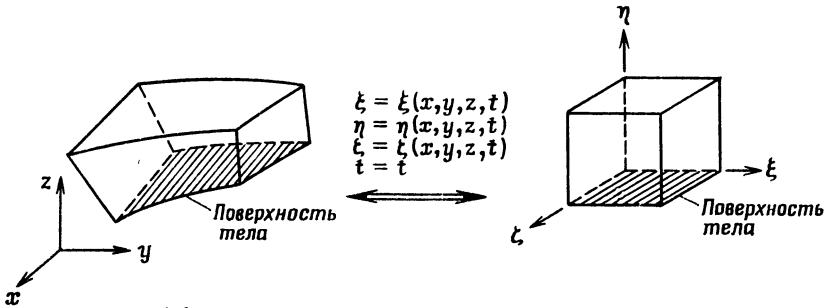



Рис. 8.3. Отображение физической области течения (a) на вычислительную (b).

лученные уравнения тонкого слоя можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \eta}, \tag{8.9}$$

где

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}/J,$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (E_t + p) U - \xi_t p \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (E_t + p) V - \eta_t p \end{bmatrix}, \tag{8.10}$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (E_t + p) W - \zeta_t p \end{bmatrix}$$

и все вязкие члены содержатся в

$$\mathbf{S}_2 = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} 0 \\ \mu\left(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2\right)u_\eta + \frac{\mu}{3}\left(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta + \eta_z w_\eta\right)\eta_x \\ \mu\left(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2\right)v_\eta + \frac{\mu}{3}\left(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta + \eta_z w_\eta\right)\eta_y \\ \mu\left(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2\right)w_\eta + \frac{\mu}{3}\left(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta + \eta_z w_\eta\right)\eta_z \\ \left(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2\right)\left[\frac{\mu}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)_\eta + kT_\eta\right] + \\ + \frac{\mu}{3}\left(\eta_x u + \eta_y v + \eta_z w\right)\left(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta + \eta_z w_\eta\right) \end{bmatrix}. \tag{8.11}$$

Для компактности выражения (8.10) записаны через контравариантные компоненты скорости $U$, $V$ и $W$, которые определяются в виде

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \\ V &= \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \\ W &= \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w; \end{aligned} \tag{8.12}$$

$U$, $V$, $W$ суть контравариантные компоненты скорости в направлениях, нормальных к поверхности постоянства $\xi$, $\eta$ и $\zeta$ соответственно.

Хотя уравнения Навье — Стокса в приближении тонкого слоя существенно проще полных уравнений Навье — Стокса, все же требуются значительные ресурсы ЭВМ для их численного решения. Уравнения тонкого слоя образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений в частных производных относительно времени. Следовательно, для их решения можно использовать методы решения уравнений, зависящих от времени, как это обычно делают при решении уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Поэтому отложим обсуждение конечно-разностных методов решения уравнений тонкого слоя до гл. 9, в которой будут подробно рассматриваться методы решения полных уравнений Навье — Стокса.

## § 8.3. Параболизованные уравнения Навье — Стокса

Параболизованные уравнения Навье — Стокса получили в последнее время широкое распространение, потому что их применение позволяет весьма эффективно рассчитывать сложные стационарные трехмерные сверхзвуковые течения вязкого газа.

Эффективность такого расчета обусловлена применением маршевых по координате конечно-разностных схем, тогда как для решения полных уравнений Навье — Стокса применяются маршевые по времени схемы. Поэтому затраты ресурсов ЭВМ на решение параболизованных уравнений Навье — Стокса во всем поле течения для сверхзвукового потока сравнимы с затратами на расчет только невязкой части поля течения по уравнениям Эйлера или только вязкой части по уравнениям пограничного слоя. Далее, поскольку параболизованные уравнения Навье — Стокса справедливы и в вязкой, и в невязкой областях течения, взаимодействие последних автоматически учитывается в расчетах по этим уравнениям.

Термин «параболизованные» уравнения Навье — Стокса несколько неточен, так как на самом деле эти уравнения при выполнении некоторых условий образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений. Эти условия включают требования того, чтобы внешний невязкий поток был сверхзвуковым, а продольная компонента скорости всюду была положительна. Заметим, что последнее исключает возможность расчета отрыва в продольном направлении, хотя отрыв в поперечном направлении возможен. Еще одно ограничение связано с наличием продольного градиента давления в уравнении движения вдоль продольной координаты. Если этот член включать во всем поле течения, тогда происходит передача влияния вверх по потоку в дозвуковой части пограничного слоя, что делает маршевый метод плохо обусловленным. Это ведет к экспоненциально растущим решениям, часто называемым *расходящимися*. Было предложено несколько способов преодоления этого затруднения, и вкратце они будут обсуждены ниже.

### 8.3.1. Вывод параболизованных уравнений Навье — Стокса

В общем случае вывод параболизованных уравнений Навье — Стокса из полных уравнений Навье — Стокса является не таким строгим, как вывод уравнений пограничного слоя. По этой причине возникло несколько слегка отличающихся версий параболизованных уравнений Навье — Стокса. Их различие обусловлено типом рассматриваемого течения. Однако во всех случаях нормальные градиенты давления в уравнениях сохраняются, а вторые производные по продольному направлению опускаются.

Одно из самых ранних исследований с использованием параболизованных уравнений выполнили Рудман и Рубин [Rudman, Rubin, 1968]. Они рассчитали сверхзвуковое ламинарное течение в окрестности входной кромки плоской пластины (см.

рис. 8.1(а)). Рудман и Рубин получили параболизованные уравнения из полных уравнений Навье — Стокса при помощи разложения в ряд. Такой метод упрощения уравнений Навье — Стокса является альтернативой методу, основанному на анализе порядка величин и использованному в гл. 5 для вывода уравнений пограничного слоя. При разложении в ряд переменные сначала обезразмеривают по некоторым локальным характерным параметрам течения, чтобы можно было оценить порядок величин разных членов в уравнениях Навье — Стокса. Затем производят разложение в ряд. Рудман и Рубин предложили делать это в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
u &= V_\infty (u_0^* + \varepsilon u_1^* + \ldots), \\
v &= V_\infty \delta^* (v_0^* + \varepsilon v_1^* + \ldots), \\
p &= p_\infty p_{\text{ref}}^* (p_0^* + \varepsilon p_1^* + \ldots), \\
\rho &= \rho_\infty \rho_{\text{ref}}^* (\rho_0^* + \varepsilon \rho_1^* + \ldots), \\
T &= T_\infty T_{\text{ref}}^* (T_0^* + \varepsilon T_1^* + \ldots), \\
\mu &= \mu_\infty \mu_{\text{ref}}^* (\mu_0^* + \varepsilon \mu_1^* + \ldots), \\
x &= x^* L, \quad y = y^* \delta, \quad \delta = \delta^* L,
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

где член с нижним индексом ref есть характерный местный параметр течения, обезразмеренный по параметру свободного потока, $L$ — характерная длина по координате $x$ и $\delta$ — характерная длина по координате $y$. Первый член разложения, обозначенный нижним индексом 0, используется для получения решения нулевого порядка, тогда как для получения решения первого порядка необходимы и первый, и второй члены. Для относительно тонкой возмущенной области, показанной на рис. 8.1 (а), нормальные к поверхности градиенты много больше градиентов в направлениях, параллельных поверхности, и $\delta^*$ можно полагать малой величиной.

Подставляя это разложение в двумерные стационарные уравнения Навье — Стокса, получаем следующие безразмерные уравнения (для удобства нижний индекс 0 опущен):

*Уравнение неразрывности*

$$
\frac{\partial \rho^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \rho^* v^*}{\partial y^*} = O(\varepsilon). \tag{8.14}
$$

*Уравнение движения по координате x*

$$
\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\Delta^2 \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \\
+ \frac{1}{(\delta^*)^2 \operatorname{Re}_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + O\left[\varepsilon, (\operatorname{Re}_{\text{ref}})^{-1}\right]. \tag{8.15}
$$

*Уравнение движения по координате y*

$$\rho^* u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\left(\frac{\Delta}{\delta^*}\right)^2 \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{(\delta^*)^2 \mathrm{Re}_{\mathrm{ref}}}\left[\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^*}\left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)\right] + O\left[\varepsilon, (\mathrm{Re}_{\mathrm{ref}})^{-1}\right]. \quad (8.16)$$

*Уравнение энергии*

$$\Delta^2\left[\rho^* u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + (\gamma - 1) p^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}} \frac{1}{(\delta^*)^2 \mathrm{Re}_{\mathrm{ref}}} \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)\right] = \frac{\gamma - 1}{(\delta^*)\,\mathrm{Re}_{\mathrm{ref}}}\left\{\mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2 + \right.$$
$$+ (\delta^*)^2\left[\frac{4}{3}\mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2 + \frac{4}{3}\mu^*\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2 - \frac{4}{3}\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*}\frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \right.$$
$$\left. + 2\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right] + \varepsilon\left[\mu_1^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2 + 2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\frac{\partial u_1^*}{\partial y^*}\right]\Big\} +$$
$$+ O\left[\Delta^2 (\mathrm{Re}_{\mathrm{ref}})^{-1},\ (\delta^*)^2 (\mathrm{Re}_{\mathrm{ref}})^{-1},\ \frac{\varepsilon^2 (\mathrm{Re}_{\mathrm{ref}})^{-1}}{(\delta^*)^2}\right]. \quad (8.17)$$

В выписанных выше уравнениях

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{ref}} = (\rho_\infty V_\infty L/\mu_\infty)\ (\rho^*_{\mathrm{ref}}/\mu^*_{\mathrm{ref}}),\ \Delta^2 = T^*_{\mathrm{ref}}/M^2_\infty \gamma,$$

а газ полагается совершенным.

Следующий шаг состоит в том, чтобы выявить члены, которыми можно пренебречь по сравнению с другими в уравнениях (8.14)—(8.17). Для этого необходимо оценить порядки величин $\mathrm{Re}_{\mathrm{ref}}$, $\Delta^2$ и $(\Delta/\delta^*)^2$ в различных областях поля течения. Из теории пограничного слоя известно, что в тонком вязком слое величина $\mathrm{Re}_{\mathrm{ref}}$ имеет порядок $1/(\delta^*)^2$. К тому же на начальном участке вязкого слоя $\Delta^2$ пропорционально $(M^2_\infty)^{-1}$, так как здесь $T^*_{\mathrm{ref}} = 1$. Для сжимаемой жидкости из теории пограничного слоя [Schlichting, 1968] следует, что $\Delta^2$ может достигать максимального значения порядка $(\gamma - 1)/(2A\gamma)$, где $A$ изменяется от $\mathrm{Pr}^{-1/2}$ для случая адиабатической стенки примерно до 4 в пределе холодной стенки. Поэтому для большинства случаев мы можем положить, что $\Delta^2 \ll 1$ при $M_\infty \geqslant 5$. Рудман и Рубин [Rudman, Rubin, 1968] показали, что $(\Delta/\delta^*)^2 \sim 1$ в области слившихся слоев. Ниже по течению в области сильного взаимодействия $(\Delta/\delta^*)^2$ очень велико вблизи стенки и уменьшается до величины порядка единицы на внешней границе пограничного слоя. Теперь с учетом информации об относительных величинах $\mathrm{Re}_{\mathrm{ref}}$, $\Delta^2$ и $(\Delta/\delta^*)^2$ в различных областях поля течения можно упростить уравнения (8.14)—(8.17). Выписывая систему урав-

нений нулевого порядка ($M_\infty \geqslant 5$), мы можем пренебречь членами порядка $(\delta^*)^2$, $\Delta^2$ и $\varepsilon$, но обязаны сохранить члены порядка $(\Delta/\delta^*)^2$. Поэтому уравнения неразрывности и движения по координате $y$ уже не упрощаются. С другой стороны, уравнение движения по координате $x$ упрощается, поскольку можно опустить член с продольным градиентом давления, а уравнение энергии сводится к уравнению

$$\partial u^*/\partial y^* = 0. \tag{8.18}$$

Объединяя уравнение (8.18) с уравнением движения по координате $x$, находим

$$u^* = \text{const} = 1 \text{ или } u = V_\infty. \tag{8.19}$$

Очевидно, что этот результат тривиален (применим только для невозмущенного потока), и мы вынуждены сохранять члены более высокого порядка [$(\delta^*)^2$, $\Delta^2$ и $\varepsilon$], чтобы уравнение энергии имело смысл. Отметим, что можно избавиться от многих членов высокого порядка при помощи уравнения (8.19). Окончательно уравнения нулевого порядка в размерной форме запишутся в виде

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \tag{8.20}$$

*Уравнение движения по координате x*

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{8.21}$$

*Уравнение движения по координате y*

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{8.22}$$

*Уравнение энергии*

$$\rho u c_v \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_v \frac{\partial T}{\partial y} = -p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2. \tag{8.23}$$

Уравнения нулевого порядка справедливы на начальном участке поля течения вокруг входной кромки, когда $M_\infty \geqslant 5$, тогда как уравнения первого порядка — при $M_\infty \geqslant 2$. Уравнения нулевого порядка были получены в пренебрежении членами порядка $(\delta^*)^2$, $\Delta^2$ и $\varepsilon$. Так как $\varepsilon$ — коэффициент при членах пер-

вого порядка, их порядок будет определяться наибольшей из величин $(\delta^*)^2$ и $\Delta^2$. Как показали Рудман и Рубин, чтобы величину $(\delta^*)^2$ можно было полагать очень малой ($\leqslant 0.05$), следует считать уравнения нулевого порядка непригодными выше точки, в которой $\chi_\infty/M_\infty^2 \approx 2$, где $\chi_\infty$ — параметр сильного взаимодействия, определенный как

$$\chi_\infty = \left(\frac{\mu_w T_\infty}{\mu_\infty T_w}\right)^{1/2} (M_\infty^3 \operatorname{Re}_{x\infty})^{-1/2}.$$

Поэтому в настоящей задаче обтекания входной кромки плоской пластины необходимо иметь начальное приближение для входного участка. Точно так же обстоит дело и во всех других задачах, в которых решаются параболизованные уравнения Навье — Стокса. В рассматриваемой задаче допустимо пользоваться начальным приближением, локализованным вблизи входной кромки, поскольку это оказывает малое влияние вниз по потоку. Так происходит оттого, что только малый расход проходит между пластиной и ударным слоем именно в этом начальном сечении по сравнению с расходом между пластиной и ударной волной в сечениях, расположенных ниже по потоку. В других задачах начальное приближение будет оказывать некоторый эффект на течение вниз по потоку и во многих случаях начальное приближение следует определять точно.

В параболизованных уравнениях Навье — Стокса, полученных Рудманом и Рубином, отсутствует член с продольным градиентом давления, чтобы не было влияния вверх по потоку в дозвуковой части пограничного слоя. В результате эти уравнения обнаруживают строго параболическое поведение в области пограничного слоя. Именно по этой причине Дэвис и Рубин [Davis, Rubin, 1980] называют эти уравнения параболическими уравнениями Навье — Стокса вместо параболизованных. Последний же термин они используют для обозначения системы уравнений, содержащих продольный градиент давления.

Параболизованные уравнения Навье — Стокса, которые вывели Рудман и Рубин, использовались для расчета течений в окрестности входной кромки для двух- и трехмерных конфигураций, включая плоские пластины, двухгранные углы, конусы и концы крыльев (библиографию см. в [Lin, Rubin, 1973b]). Трехмерные уравнения получаются аналогично двумерным. Сначала обезразмеривают координаты $x$, $y$, $z$ по $L$, $\delta_y$ и $\delta_z$ соответственно. Скорости $u$, $v$, $w$ обезразмеривают по $V_\infty$, $V_\infty\delta_y^*$ и $V_\infty\delta_z^*$ соответственно, где $\delta_y^* = \delta_y/L$ и $\delta_z^* = \delta_z/L$. Члены порядка $(\delta_z^*)^2$, $(\delta_y^*)^2$, $\delta_y^*\delta_z^*$ и т. д. считаются малыми. После подстановки в уравнения Навье — Стокса разложения в ряд и отбрасывания

членов более высокого порядка малости получаем трехмерные уравнения нулевого порядка

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \tag{8.24}$$

*Уравнение движения по координате x*

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{8.25}$$

*Уравнения движения по координате y*

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right). \tag{8.26}$$

*Уравнения движения по координате z*

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right). \tag{8.27}$$

*Уравнение энергии*

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w c_v \frac{\partial T}{\partial z} = -p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z} + \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] + \right. \\ \left. + \frac{4}{3}\mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right]\right). \tag{8.28}$$

Параболизованные уравнения Навье — Стокса, очень похожие на выведенные Рудманом и Рубином, получены независимо в работе [Cheng et al., 1970]. Причем эти уравнения содержат член с продольным градиентом давления. Вероятно, наиболее общая форма параболизованных уравнений Навье — Стокса [Lubard , Helliwell, 1973, 1974] получена в предположении, что вязкие члены с производными в продольном направлении (включая тепловые потоки) полагают малыми по сравнению с вязкими членами с производными в нормальном и поперечном направлениях. Иными словами, вязкие члены с производными в продольном направлении считаются порядка $O(1)$, тогда как вязкие члены с производными в нормальном и поперечном направлениях порядка $O\left(\mathrm{Re}_L^{1/2}\right)$. Следовательно, эти параболизо-

ванные уравнения Навье — Стокса получаются путем простого отбрасывания из стационарных уравнений Навье — Стокса всех вязких членов, содержащих частные производные в продольном направлении. Результирующая система уравнений в декартовой системе координат выглядит так ($x$ — продольное направление):

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \tag{8.29}$$

*Уравнение движения по координате x*

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{8.30}$$

*Уравнение движения по координате y*

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{8.31}$$

*Уравнение движения по координате z*

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{8.32}$$

*Уравнение энергии*

$$\rho u c_v \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w c_v \frac{\partial T}{\partial z} = -p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z}\Big) + \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{4}{3}\mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right]. \tag{8.33}$$

Интересно сравнить эту систему параболизованных уравнений с той, которую получили Рудман и Рубин (уравнения (8.24)—(8.28)). Заметим, что уравнения неразрывности и энергии одинаковы, а уравнения движения отличаются. В частности, как отмечалось выше, уравнение движения по координате $x$ содержит продольный градиент давления.

Теперь мы можем записать параболизованные уравнения Навье — Стокса в системе координат общего вида. Полные уравнения Навье — Стокса в этой системе координат записываются

в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{U}}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{1}{J}\left[\xi_x(\mathbf{E}_i-\mathbf{E}_v)+\xi_y(\mathbf{F}_i-\mathbf{F}_v)+\xi_z(\mathbf{G}_i-\mathbf{G}_v)\right]\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\frac{1}{J}\left[\eta_x(\mathbf{E}_i-\mathbf{E}_v)+\eta_y(\mathbf{F}_i-\mathbf{F}_v)+\eta_z(\mathbf{G}_i-\mathbf{G}_v)\right]\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\frac{1}{J}\left[\zeta_x(\mathbf{E}_i-\mathbf{E}_v)+\zeta_y(\mathbf{F}_i-\mathbf{F}_v)+\zeta_z(\mathbf{G}_i-\mathbf{G}_v)\right]\right\}=0, \tag{8.34}$$

где

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_i=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (E_t+p)u\end{bmatrix},\quad \mathbf{E}_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}-q_x\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_i=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (E_t+p)v\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{yz}\\ u\tau_{xy}+v\tau_{yy}+w\tau_{yz}-q_y\end{bmatrix}, \tag{8.35}$$

$$\mathbf{G}_i=\begin{bmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (E_t+p)w\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zz}\\ u\tau_{xz}+v\tau_{yz}+w\tau_{zz}-q_z\end{bmatrix},$$

$$E_t=\rho\left(e+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right),$$

$$\tau_{xx}=\frac{2}{3}\mu\left[2(\xi_x u_\xi+\eta_x u_\eta+\zeta_x u_\zeta)-(\xi_y v_\xi+\eta_y v_\eta+\zeta_y v_\zeta)-\right.$$
$$\left.-(\xi_z w_\xi+\eta_z w_\eta+\zeta_z w_\zeta)\right],$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu\,[2(\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta) - (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta) -$$
$$- (\xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta)],$$
$$\tau_{zz} = \frac{2}{3}\mu\,[2(\xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta) - (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x v_\zeta) -$$
$$- (\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta)],$$
$$\tau_{xy} = \mu\,(\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta + \zeta_y u_\zeta + \xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta + \zeta_x v_\zeta), \qquad (8.36)$$
$$\tau_{xz} = \mu\,(\xi_z u_\xi + \eta_z u_\eta + \zeta_z u_\zeta + \xi_x w_\xi + \eta_x w_\eta + \zeta_x w_\zeta),$$
$$\tau_{yz} = \mu\,(\xi_z v_\xi + \eta_z v_\eta + \zeta_z v_\zeta + \xi_y w_\xi + \eta_y w_\eta + \zeta_y w_\zeta),$$
$$q_x = -k\,(\xi_x T_\xi + \eta_x T_\eta + \zeta_x T_\zeta),$$
$$q_y = -k\,(\xi_y T_\xi + \eta_y T_\eta + \zeta_y T_\zeta),$$
$$q_z = -k\,(\xi_z T_\xi + \eta_z T_\eta + \zeta_z T_\zeta).$$

Отметим, что обычно векторы **E**, **F** и **G** расщепляют на невязкую (нижний индекс $i$) и вязкую (нижний индекс $v$) части. Почему это делают, станет ясно из последующего описания процедуры численного решения параболизованных уравнений Навье — Стокса. Последние в криволинейных координатах теперь можно получить, просто опуская нестационарные и вязкие члены с производными по продольному направлению $\xi$. В результате получаем уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial \zeta} = 0, \qquad (8.37)$$

где

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{J}(\xi_x \mathbf{E}_i + \xi_y \mathbf{F}_i + \xi_z \mathbf{G}_i),$$
$$\mathbf{F}_3 = \frac{1}{J}[\eta_x(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}'_v) + \eta_y(\mathbf{F}_i - \mathbf{F}'_v) + \eta_z(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}'_v)]. \qquad (8.38)$$
$$\mathbf{G}_3 = \frac{1}{J}[\zeta_x(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}'_v) + \zeta_y(\mathbf{F}_i - \mathbf{F}'_v) + \zeta_z(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}'_v)]$$

и штрих используется для указания на то, что члены, содержащие частные производные по направлению $\xi$, опущены. Поэтому сдвиговые напряжения и тепловые потоки в уравнениях (8.35)

будут выражаться в виде

$$
\begin{aligned}
\tau'_{xx} &= {}^2/_3\mu\,[2(\eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta) - (\eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta) - (\eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta)],\\
\tau'_{yy} &= {}^2/_3\mu\,[2(\eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta) - (\eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta) - (\eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta)],\\
\tau'_{zz} &= {}^2/_3\mu\,[2(\eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta) - (\eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta) - (\eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta)],\\
\tau'_{xy} &= \mu\,(\eta_y u_\eta + \zeta_y u_\zeta + \eta_x v_\eta + \zeta_x v_\zeta),\\
\tau'_{xz} &= \mu\,(\eta_z u_\eta + \zeta_z u_\zeta + \eta_x w_\eta + \zeta_x w_\zeta),\\
\tau'_{yz} &= \mu\,(\eta_z v_\eta + \zeta_z v_\zeta + \eta_y w_\eta + \zeta_y w_\zeta),\\
q'_x &= -k\,(\eta_x T_\eta + \zeta_x T_\zeta),\\
q'_y &= -k\,(\eta_y T_\eta + \zeta_y T_\zeta),\\
q'_z &= -k\,(\eta_z T_\eta + \zeta_z T_\zeta).
\end{aligned}
\tag{8.39}
$$

Во многих приложениях [Schiff, Steger, 1979] для параболизованных уравнений Навье — Стокса можно использовать приближение тонкого слоя. В рамках этого допущения результирующими уравнениями будут просто стационарные уравнения Навье — Стокса в приближении тонкого слоя. После перехода к криволинейным координатам их можно записать как

$$
\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \eta}, \tag{8.40}
$$

где $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{G}_2$ и $\mathbf{S}_2$ определяются уравнениями (8.10) и (8.11).

#### 8.3.2. Продольный градиент давления

Градиент давления в уравнении движения в продольном направлении обеспечивает передачу информации вверх по потоку через дозвуковые части поля течения, например в пограничном слое. Вследствие этого маршевый по пространственной координате метод решения оказывается плохо обусловленным и во многих случаях приводит к экспоненциально растущим решениям (расходящимся решениям). Эти расходящиеся решения характеризуются либо увеличением давления на стенке, как это бывает при отрыве, либо уменьшением давления на стенке, как в веере волн разрежения. Аналогичное поведение [Lighthill, 1953] наблюдается для уравнений пограничного слоя, когда продольный градиент давления не задается. Единственное отличие состоит в том, что в случае параболизованных уравнений Навье — Стокса уравнение движения в нормальном направлении допускает взаимодействие через давление между критической

дозвуковой частью пограничного слоя и внешним невязким течением.

Чтобы лучше понять, отчего возникают расходящиеся решения, исследуем влияние продольного градиента давления на математическую природу параболизованных уравнений Навье — Стокса. Для простоты ограничимся двумерным случаем совершенного газа с постоянной вязкостью. В рамках этих допущений уравнения (8.29) — (8.33) могут быть представлены в векторном виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}=\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y}, \tag{8.41}$$

где

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2+\omega p \\ \rho u v \\ \left[\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{\rho}{2}(u^2+v^2)\right]u \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2+p \\ \left[\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{\rho}{2}(u^2+v^2)\right]v \end{bmatrix}, \tag{8.42}$$

$$\mathbf{F}_v=\mu\begin{bmatrix} 0 \\ u_y \\ \frac{4}{3}v_y \\ uu_y+\frac{4}{3}vv_y+\frac{k}{\mu}T_y \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что в уравнении движения по координате $x$ в качестве множителя перед градиентом давления в продольном направлении имеется параметр $\omega$. Так, если $\omega$ равно нулю, то продольный градиент давления в уравнении отсутствует, если же $\omega$ равно единице, то полностью сохранен.

Если сначала рассматривать предельный случай невязкой жидкости, то уравнение (8.41) сводится к уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}=0, \tag{8.43}$$

которое эквивалентно

$$[A_1]\,\mathbf{Q}_x+[B_1]\,\mathbf{Q}_y=0, \tag{8.44}$$

где

$$[A_1]=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho u & 0 & \omega \\ 0 & 0 & \rho u & 0 \\ 0 & \rho u^2+\frac{\gamma p}{\gamma-1} & \rho u v & \frac{\gamma u}{\gamma-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix},$$

$$[B_1]=\begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 1 \\ 0 & \rho u v & \rho v^2+\frac{\gamma p}{\gamma-1} & \frac{\gamma p}{\gamma-1} \end{bmatrix}. \tag{8.45}$$

Это гиперболические уравнения относительно переменной $x$, при условии что собственные значения матрицы $[A_1]^{-1}[B_1]$ вещественны (см. § 2.5). Собственные значения этой матрицы суть

$$\lambda_{1,2}=\frac{v}{u}, \quad \lambda_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{8.46}$$

где

$$a=[\gamma-\omega(\gamma-1)]u^2-\omega a^2,$$
$$b=-uv[1+\gamma-\omega(\gamma-1)],$$
$$c=v^2-a^2$$

и $a$ — скорость звука. Если продольный градиент давления сохраняется полностью (т. е. $\omega=1$), то легко показать, что все собственные значения вещественны, когда $u^2+v^2\geqslant a^2$ или $M\geqslant 1$. Это обычное требование, которому необходимо удовлетворить, чтобы уравнения Эйлера можно было интегрировать маршевой по пространственной координате процедурой. Однако, как только в уравнении сохраняется хотя бы часть градиента давления (т. е. $0\leqslant\omega\leqslant 1$), собственные значения будут оставаться вещественными даже в дозвуковых областях, если

$$\omega\leqslant\frac{\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)M_x^2}, \tag{8.47}$$

где $M_x=u/a$. Это ограничение на продольный градиент давления получено в предположении, что нормальная компонента скорости $v$ много меньше продольной компоненты $u$.

Рассмотрим далее предельный случай вязкой жидкости, игнорируя в уравнении (8.41) члены с первыми производными по $y$. Полученные при этом уравнения можно записать в виде

$$[A_2]\mathbf{Q}_x=[B_2]\mathbf{Q}_{yy}, \tag{8.48}$$

где

$$[A_2]=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ u^2 & 2\rho u & 0 & \omega \\ uv & \rho v & \rho u & 0 \\ \dfrac{u(u^2+v^2)}{2} & \dfrac{\gamma p}{\gamma-1}+\dfrac{\rho(3u^2+v^2)}{2} & \rho uv & \dfrac{\gamma u}{\gamma-1} \end{bmatrix},$$

$$[B_2]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{3} & 0 \\ \dfrac{-\gamma p}{(\gamma-1)\rho^2\,\mathrm{Pr}} & u & \dfrac{4}{3}v & \dfrac{\gamma}{(\gamma-1)\rho\,\mathrm{Pr}} \end{bmatrix}. \tag{8.49}$$

Это параболические уравнения относительно переменной $x$, если собственные значения матрицы $[A_2]^{-1}[B_2]$ вещественны и положительны (см. § 2.5). Собственные значения должны быть положительными, чтобы положительная вязкость приводила к демпфированию в продольном направлении. Собственные значения можно найти из следующего уравнения (полагая, что $u \neq 0$):

$$\lambda\left(\frac{\rho u}{\mu}\lambda-\frac{4}{3}\right)\left(\left(\frac{\rho u}{\mu}\lambda\right)^2\{M_x^2[\gamma-\omega(\gamma-1)]-\omega\}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\rho u}{\mu}\lambda\right)\left\{\left[\omega(\gamma-1)-\gamma\left(\frac{1+\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}}\right)\right]M_x^2+\frac{\omega}{\mathrm{Pr}}\right\}+\frac{\gamma M_x^2}{\mathrm{Pr}}\right)=0. \tag{8.50}$$

Было показано [Vigneron et al., 1978], что определяемые из этого уравнения собственные значения будут вещественными и положительными, если

$$u>0, \tag{8.51}$$

$$\omega<\frac{\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)M_x^2}. \tag{8.52}$$

Из неравенства (8.51) следует запрет на обратные течения, тогда как неравенство (8.52) накладывает ограничение на продольный градиент давления, прежде задаваемое выражением (8.47). Из этого мы заключаем, что неустойчивость, обусловленная наличием продольного градиента давления в параболизованных уравнениях Навье — Стокса, имеет фактически невязкую природу.

Отметим, что правая часть неравенства (8.52), обозначенная через $f(M_x)$, является функцией местного числа Маха по про-

дольной скорости $M_x$, которая равна 1, когда $M_x = 1$, и больше 1, когда $M_x > 1$ (рис. 8.4). Отсюда следует, что при $M_x > 1$ продольный градиент давления может быть полностью включен в уравнение движения. Однако при $M_x < 1$ только часть этого члена, а именно $\omega \partial p/\partial x$, следует оставить с тем, чтобы собственные значения оставались вещественными и положительными. Заметим также, что $\omega$ стремится к нулю вблизи

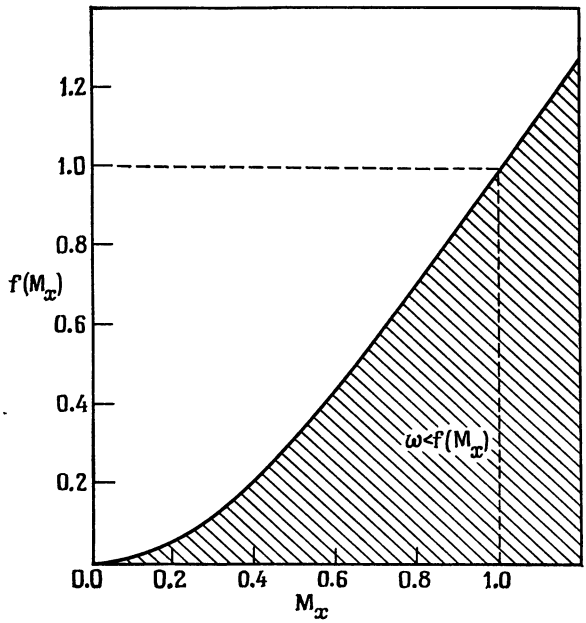



Рис. 8.4. Ограничение на изменение продольного градиента давления в дозвуковых областях потока.

стенки, где $M_x = 0$. Таким образом, мы видим, что решения параболизованных уравнений Навье — Стокса, полученные маршевым методом по пространственной координате, подвержены неустойчивостям (расходящиеся решения), когда продольный градиент давления полностью сохраняется в дозвуковых частях пограничного слоя, так как тем самым вводится в них элемент эллиптичности. Предложены различные способы преодоления этой трудности, и мы их сейчас обсудим.

Самый очевидный способ борьбы с неустойчивостью — полностью отбросить градиент давления в дозвуковых зонах. Это даст устойчивую маршевую схему, но и приведет к ошибкам для полей течений с большими продольными градиентами давления. Следует, однако, заметить, что вариации давления в про-

дольном направлении будут по-прежнему сказываться на численном решении в случае, если давление определяется из уравнения движения по координате $y$ и уравнения энергии. Альтернативный подход состоит в задании изменения продольного градиента давления. Очевидно, приравнивание нулю градиента давления — один из путей того, как это можно осуществить. Если продольный градиент давления определен, его можно исключить из матриц $[A_1]$ и $[A_2]$ в уравнениях (8.44) и (8.48) и рассматривать как источниковый член в задаче нахождения собственных значений. Следовательно, продольный градиент давления уже не будет влиять на математическую природу уравнений. При решении уравнений пограничного слоя продольный градиент давления обычно известен из расчета внешнего течения невязкой жидкости или в случае внутренних течений определяется из закона сохранения массы. К сожалению, при решении параболизованных уравнений Навье — Стокса продольный градиент давления заранее неизвестен и должен вычисляться в процессе решения.

В некоторых работах продольный градиент давления был сохранен и в дозвуковых зонах и аппроксимировался разностями назад, которые рассчитываются с использованием информации с предыдущего слоя по маршевой координате. Например, когда рассчитывается решение на слое $i+1$, производная $\partial p/\partial x$ представляется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x}, \tag{8.53}$$

т. е. это есть разность назад первого порядка. Лубард и Хеллиуэлл [Lubard, Helliwell, 1973] исследовали устойчивость (расходимость), используя разности назад для продольного градиента давления в уравнениях движения и энергии. Они применили неявную разностную схему и показали при помощи анализа устойчивости по Фурье, что неустойчивость будет иметь место, если

$$\Delta x < (\Delta x)_{\min}. \tag{8.54}$$

Это условие устойчивости очень необычно, так как обыкновенно из анализа устойчивости по Фурье вытекает, что неустойчивость будет иметь место, если $\Delta x$ больше некоторого $(\Delta x)_{\max}$. Когда такой анализ был произведен для двумерных параболизованных уравнений Навье — Стокса (8.48)—(8.49), то оказалось, что

$$(\Delta x)_{\min} = \frac{{}^1/_4 (\rho u/\mu)\left[\left(1/M_x^2\right) - 1\right](\Delta y)^2}{\gamma \sin^2(\beta/2)}, \tag{8.55}$$

где $\beta$ — волновое число $(k_m \Delta y)$. Лубард и Хеллиуэлл показали также, что если продольный градиент давления аппроксимировать на неявном слое, как и все остальные члены параболизованных уравнений, то минимальный допустимый шаг $(\Delta x)_{\min}$ удваивается. Чтобы объяснить столь необычное условие устойчивости, Рубин [Rubin, 1981] высказал предположение, что $(\Delta x)_{\min}$ является размером области передачи эллиптического взаимодействия вверх по потоку. Если $(\Delta x) > (\Delta x)_{\min}$, то это взаимодействие как бы «не замечается» и маршевая процедура устойчива. В противном случае, если $(\Delta x) < (\Delta x)_{\min}$, численное решение пытается учесть это эллиптическое взаимодействие, что ведет к расходящимся решениям, поскольку передача влияния вверх по потоку в маршевой процедуре запрещена. Рубин и Лин [Rubin, Lin, 1980] показали, что размер области эллиптического взаимодействия имеет порядок толщины дозвуковой зоны. Поэтому если дозвуковая зона сравнительно большая, то минимальная допустимая величина $\Delta x$ может быть слишком велика для осуществления точных (или устойчивых) вычислений.

Другой метод учета градиента давления в продольном направлении называется *приближением подслоя*. Первыми его предложили Рубин и Лин [Rubin, Lin, 1971], а позже он был применен для параболизованных уравнений Навье — Стокса Шиффом и Стегером [Schiff, Steger, 1979]. В приближении подслоя градиент давления в вязкой дозвуковой области вычисляется в точке вне подслоя, в которой скорость сверхзвуковая. Такое приближение основано на том, что в тонком дозвуковом вязком подслое $\partial p/\partial y$ пренебрежимо мало. Так как градиент давления задается в дозвуковой зоне, то маршевый по пространственной координате метод даст, видимо, устойчивое решение. Однако, как наблюдали Шифф и Стегер, в некоторых случаях возможны всё же расходящиеся решения. Они могут быть обусловлены взаимодействием через давление сверхзвуковых и дозвуковых областей, которое описывается нормальным уравнением движения и уравнением энергии.

Новый метод учета продольного градиента давления предложили Виньерон и др. [Vigneron et al., 1978a]. В этом подходе в дозвуковой вязкой зоне часть продольного градиента давления $\omega(\partial p/\partial x)$ в уравнении сохраняется, а остальная $(1 - \omega)(\partial p/\partial x)$ либо опускается, либо рассчитывается на явном слое при помощи разностей назад или приближения подслоя. Уравнение (8.41) переписывается в виде.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y}, \tag{8.56}$$

где

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0\\(1-\omega)\,p\\0\\0\end{bmatrix} \tag{8.57}$$

и $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_v$ определяются уравнениями (8.42). Параметр $\omega$ вычисляется по уравнению (8.47) с некоторым коэффициентом запаса $\sigma$:

$$\omega=\frac{\sigma\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)M_x^2}. \tag{8.58}$$

Виньерон и др. [Vigneron et al., 1978b] для анализа устойчивости использовали метод Фурье. Для уравнения (8.56) с опущенным членом $\partial\mathbf{F}/\partial y$ они применили простую неявную схему (неявную схему Эйлера), а производная $\partial\mathbf{P}/\partial x$ аппроксимировалась разностью назад. Как и ожидалось, они обнаружили, что если рассчитываемый на явном слое градиент давления опущен, то маршевый по пространственной координате метод будет всегда давать устойчивое решение, так как уравнения остаются гиперболически-параболическими. Если этот член остается, то возникает неустойчивость, когда $\Delta x$ меньше некоторого $(\Delta x)_{\min}$. Оказалось, что при $\omega=0$ $(\Delta x)_{\min}$ задается зависимостью (8.55), что подтверждает результаты более ранних работ Лубарда и Хеллиуэлла. Существуют и другие способы представления продольного градиента давления [Lin, Rubin, 1979; Buggeln et al., 1980; Yanenko et al., 1980].

Во многих задачах механики жидкости эллиптические эффекты передачи влияния вверх по потоку сравнительно малы и в упомянутых выше методах удается предотвратить возникновение неустойчивостей, причем довольно точное решение получается за одно-единственное прохождение поля течения. В других задачах, в которых влияние распространения возмущений вверх по потоку велико (из-за отрыва, наличия следа или ударной волны и т. п.), эти методы оказываются несостоятельными. В результате возникает неустойчивость или предпринимаемые для ее подавления меры приводят к большим ошибкам. В этих случаях можно использовать процедуру *глобальной релаксации по давлению* [Rubin, Lin, 1980]. В ней сначала задается некоторое распределение давления во всем поле течения для определения градиента давления в каждой точке. Начальное распределение давления можно получить, либо полагая предельный градиент давления равным нулю, либо применяя

метод Виньерона с $\partial P/\partial x = 0$, либо беря достаточно большие $\Delta x$. Зная градиент давления, параболизованные уравнения Навье — Стокса можно решить с помощью устойчивой конечно-разностной маршевой процедуры при условии, что градиент давления аппроксимируется надлежащим образом. Это решение дает новое распределение давления, которое можно использовать для расчета градиента давления, необходимого при следующем прохождении расчетной области. Такая итерационная процедура продолжается до получения сходимости. Для адекватного моделирования эллиптического характера поля течения градиент давления должен влиять на течение вверх по потоку. Этого можно добиться, аппроксимируя его разностями вперед, т. е. когда вычисляется решение на слое $i + 1$, градиент давления представляют в дискретном виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_{i+2} - p_{i+1}}{\Delta x}. \tag{8.59}$$

Такого рода дискретизация возможна только при использовании глобальной релаксационной процедуры по давлению, так как обычно $p_{i+2}$ нам неизвестно. Рубин и Лин исследовали устойчивость, когда $\partial p/\partial x$ аппроксимируется разностью вперед, и показали, что имеет место безусловная устойчивость. Однако мы приближаемся к границе устойчивости, когда дозвуковые области становятся очень большими.

Глобальная релаксационная процедура по давлению представляется многообещающей для задач, в которых влияние вверх по потоку существенно. Однако следует помнить, что эта процедура требует значительно больших затрат машинного времени, нежели типичные расчеты параболизованных уравнений Навье — Стокса с одним прохождением поля течения. В некоторых случаях затраты машинного времени сравнимы с теми, которые требуются для расчета полных уравнений Навье — Стокса. Следовательно, для этих задач параболизованные уравнения Навье — Стокса уже не обладают никакими преимуществами по сравнению с полными уравнениями Навье — Стокса.

#### 8.3.3. Численное решение параболизованных уравнений Навье — Стокса

Как отмечалось ранее, параболизованные уравнения Навье — Стокса образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений относительно координаты $x$ в продольном направлении при выполнении следующих условий:

1) невязкий поток сверхзвуковой;
2) продольная компонента скорости всюду отлична от нуля;

3) градиент давления в уравнении движения по продольной координате либо опущен, либо неустойчивость подавляется одним из способов, описанных в предыдущем разделе.

Если эти условия соблюдены, параболизованные уравнения Навье — Стокса можно решать конечно-разностными методами, сходными с теми, которые используются для решения параболических уравнений пограничного слоя. Поэтому устойчивая маршевая по пространственной координате процедура может использоваться для получения решения во всей расчетной области, начиная с поверхности задания начальных данных и далее вниз по потоку до выходного сечения.

Некоторые из решений параболизованных уравнений Навье — Стокса, опубликованных ранее, были получены с использованием явных схем. Это было сделано скорее для удобства, нежели из соображений эффективности, так как в гл. 7 было показано, что неявные схемы для уравнений этого типа более эффективны. В более поздних работах для решения параболизованных уравнений Навье — Стокса применялись самые разные неявные алгоритмы: неявная схема переменных направлений Писмена — Ракфорда [Nardo, Cresci, 1971], неявные схемы с итерациями [Rubin, Lin, 1972; Lubard, Helliwell, 1973]. Схема предиктор-корректор с итерациями, которую предложили Рубин и Лин, была описана в п. 4.5.10, где она применяется для решения трехмерного линейного уравнения Бюргерса

$$u_x + cu_y + du_z = \mu(u_{yy} + u_{zz}). \tag{8.60}$$

Линейное трехмерное уравнение Бюргерса — полезная модель параболизованных уравнений Навье — Стокса, однако, разумеется, она не передает нелинейный характер последних. Так, когда схема предиктор-корректор с итерациями применяется к параболизованным уравнениям, то возникают нелинейные члены типа $(u^{m+1}_{i+1,\,j,\,k})^2$, где $m$ — номер итерации, $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$, $z = k\Delta z$. Они линеаризуются методом Ньютона — Рафсона (см. п. 7.3.3), т. е. если $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_l)$, то

$$f^{m+1} = f^m + \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^m (x_k^{m+1} - x_k^m), \tag{8.61}$$

где $x_k$ обозначает зависимые переменные. Применение этой формулы к нелинейному члену $(u^{m+1}_{i+1,\,j,\,k})^2$ дает

$$(u^{m+1}_{i=1,\,j,\,k})^2 = 2u^{m+1}_{i+1,\,j,\,k}u^m_{i+1,\,j,\,k} - (u^m_{i+1,\,j,\,k})^2. \tag{8.62}$$

После линеаризации таким способом всех нелинейных членов получаемую систему алгебраических уравнений (на итерации

$m+1$) можно решать при помощи эффективной процедуры для блочных трехдиагональных систем. Итерирование продолжается, пока не будет получено сходящееся решение в сечении $i+1$. Этот метод неявный по координате $y$, градиенты по которой наибольшие, но явный по координате $z$ (см. п. 4.5.10), что приводит к следующему условию устойчивости для трехмерных параболизованных уравнений Навье — Стокса:

$$\Delta x \leqslant \Delta z \left| \frac{w}{u} \right|. \tag{8.63}$$

До недавнего времени параболизованные уравнения Навье — Стокса решались при помощи неявных разностных схем с итерациями вроде той, которая была описана выше. Виньерон и др. [Vigneron et al., 1978a] впервые предложили более эффективную неявную приближенно факторизованную схему без итераций. Этот алгоритм, принадлежащий к классу неявных схем переменных направлений, разработан целой группой авторов [Lindemuth, Killeen, 1973, McDonald, Briley, 1975; Beam, Warming, 1978] и приспособлен для решения зависящих от времени уравнений, например уравнений Навье — Стокса. Чтобы разобраться в нем, применим его для решения трехмерных параболизованных уравнений Навье — Стокса, записанных в декартовых координатах ($x$ — продольное направление) в случае совершенного газа. Тогда

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z \tag{8.64}$$

и уравнения (8.37), (8.38) сводятся к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0, \tag{8.65}$$

где

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_v, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_i - \mathbf{G}_v. \tag{8.66}$$

Векторы $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{F}_v$ и $\mathbf{G}_v$ задаются выражениями (8.35) и содержат параболизованные члены со сдвиговыми напряжениями и тепловыми потоками

$$\begin{gathered}
\tau_{xx} = {}^2/_3\mu\,(-v_y - w_z), \\
\tau_{yy} = {}^2/_3\mu\,(2v_y - w_z), \\
\tau_{zz} = {}^2/_3\mu\,(2w_z - v_y), \\
\tau_{xy} = \mu u_y, \quad \tau_{xz} = \mu u_z, \quad \tau_{yz} = \mu\,(v_z + w_y), \\
q_x = 0, \quad q_y = -kT_y, \quad q_z = -kT_z.
\end{gathered} \tag{8.67}$$

Чтобы, следуя Виньерону, представить градиент давления в направлении течения, $\mathbf{E}$ можно заменить $\mathbf{E}' + \mathbf{P}$; тогда уравне-

ние (8.65) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0, \tag{8.68}$$

где

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \omega p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ (E_t + p) u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1 - \omega) p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.69}$$

Решение уравнения (8.65) получается маршевым по координате $x$ методом с использованием следующей разностной формулы, предложенной Бимом и Уормингом [Beam, Warming, 1978]:

$$\Delta^i \mathbf{E} = \frac{\theta_1 \Delta x}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta^i \mathbf{E}) + \frac{\Delta x}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E}^i) + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta^{i-1} \mathbf{E} + \\ + O\left[\left(\theta_1 - \frac{1}{2} - \theta_2\right) (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right], \tag{8.70}$$

где

$$\Delta^i \mathbf{E} = \mathbf{E}^{i+1} - \mathbf{E}^i \tag{8.71}$$

и $x = i\Delta x$. Эта разностная формула общего вида за счет выбора параметров $\theta_1$ и $\theta_2$ позволяет получать многие обычные разностные схемы, которые перечисляются в табл. 8.1. Для параболизованных уравнений Навье — Стокса используется обычно либо неявная схема Эйлера первого порядка ($\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$), либо трехточечная схема второго порядка с разностями назад ($\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 1/2$). Как показали Бим и Уорминг, неявная центрированная по времени схема второго порядка ($\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 0$) приводит к неустойчивости в случае ее применения к параболическим уравнениям. Отметим, что в табл. 8.1

**Таблица 8.1. Разностные схемы для уравнения (8.70)**

| $\theta_1$ | $\theta_2$ | Схема | Ошибка аппроксимации в уравнении (8.70) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | Явная схема Эйлера | $O[(\Delta x)^2]$ |
| 0 | −1/2 | Схема с перешагиванием (явная) | $O[(\Delta x)^3]$ |
| 1/2 | 0 | Неявная центрированная по времени схема | $O[(\Delta x)^3]$ |
| 1 | 0 | Неявная схема Эйлера | $O[(\Delta x)^2]$ |
| 1 | 1/2 | Неявная трехточечная схема с разностями назад | $O[(\Delta x)^3]$ |

приводится ошибка аппроксимации для $\Delta^i\mathbf{E}$. Когда в разностной схеме производная $\partial\mathbf{E}/\partial x$ заменяется на $\Delta^i\mathbf{E}/\Delta x$, ошибка делится на $\Delta x$.

Подстановка уравнения (8.65) в (8.70) дает

$$\Delta^i\mathbf{E} = -\frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\Delta^i\mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Delta^i\mathbf{G})\right] - \\ - \frac{\Delta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{F}^i) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{G}^i)\right] + \frac{\theta_2}{1+\theta_2}\Delta^{i-1}\mathbf{E}, \quad (8.72)$$

где член с ошибкой аппроксимации опущен. Это разностное соотношение записано в так называемой дельта-форме, упомянутой в п. 4.4.7. Дельта-члены $\Delta^i\mathbf{E}$, $\Delta^i\mathbf{F}$ и $\Delta^i\mathbf{G}$, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta^i\mathbf{E} &= \Delta^i\mathbf{E}' + \Delta^i\mathbf{P}, \\ \Delta^i\mathbf{F} &= \Delta^i\mathbf{F}_i - \Delta^i\mathbf{F}_v, \\ \Delta^i\mathbf{G} &= \Delta^i\mathbf{G}_i - \Delta^i\mathbf{G}_v, \end{aligned} \quad (8.73)$$

линеаризуются разложением в ряд Тейлора. Чтобы линеаризовать невязкие дельта-члены $\Delta^i\mathbf{E}'$, $\Delta^i\mathbf{F}_i$ и $\Delta^i\mathbf{G}_i$, воспользуемся тем фактом, что $\mathbf{E}'$, $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{G}_i$ являются функциями только вектора $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}. \quad (8.74)$$

Например, $\mathbf{F}_i$ можно выразить через компоненты вектора $\mathbf{U}$ следующим образом:

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} U_3 \\ \dfrac{U_2U_3}{U_1} \\ \dfrac{U_3^2}{U_1} + (\gamma-1)\left(U_5 - \dfrac{U_2^2+U_3^2+U_4^2}{2U_1}\right) \\ \dfrac{U_3U_4}{U_1} \\ \left[U_5 + (\gamma-1)\left(U_5 - \dfrac{U_2^2+U_3^2+U_4^2}{2U_1}\right)\right]\dfrac{U_3}{U_1} \end{bmatrix}. \quad (8.75)$$

Следовательно, мы легко можем разложить $\mathbf{E}'$, $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{G}_i$ в ряд

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{E}')^{i+1} &= (\mathbf{E}')^i + \left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i \Delta^i \mathbf{U} + O\left[(\Delta x)^2\right], \\
(\mathbf{F}_i')^{i+1} &= (\mathbf{F}_i)^i + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}}\right)^i \Delta^i \mathbf{U} + O\left[(\Delta x)^2\right], \\
(\mathbf{G}_i)^{i+1} &= (\mathbf{G}_i)^i + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{U}}\right)^i \Delta^i \mathbf{U} + O\left[(\Delta x)^2\right]
\end{aligned}
\tag{8.76}
$$

или

$$
\begin{aligned}
\Delta^i \mathbf{E}' &= [Q]^i \Delta^i \mathbf{U} + O\left[(\Delta x)^2\right], \\
\Delta^i \mathbf{F}_i &= [R]^i \Delta^i \mathbf{U} + O\left[(\Delta x)^2\right], \\
\Delta^i \mathbf{G}_i &= [S]^i \Delta^i \mathbf{U} + O\left[(\Delta x)^2\right],
\end{aligned}
\tag{8.77}
$$

где $[Q]$, $[R]$ и $[S]$ — матрицы Якоби $\partial \mathbf{E}'/\partial \mathbf{U}$, $\partial \mathbf{F}_i/\partial \mathbf{U}$ и $\partial \mathbf{G}_i/\partial \mathbf{U}$:

$$
\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\omega(\gamma-1)-2}{2}u^2 + \frac{\omega(\gamma-1)}{2}(v^2+w^2) & [2-\omega(\gamma-1)]u & -\omega(\gamma-1)v & -\omega(\gamma-1)w & \omega(\gamma-1) \\
-uv & v & u & 0 & 0 \\
-uw & w & 0 & u & 0 \\
\left[-\frac{\gamma E_t}{\rho} + (\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)\right]u & \frac{\gamma E_t}{\rho} - (\gamma-1)\frac{3u^2+v^2+w^2}{2} & -(\gamma-1)uv & -(\gamma-1)uw & \gamma u
\end{bmatrix},
\tag{8.78}
$$

$$
\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-uv & v & u & 0 & 0 \\
\frac{\gamma-1}{2}(u^2+w^2) + \frac{\gamma-3}{2}v^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \\
-vw & 0 & w & v & 0 \\
\left[-\frac{\gamma E_t}{\rho} + (\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)\right]v & -(\gamma-1)uv & \frac{\gamma E_t}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2+3v^2+w^2) & -(\gamma-1)vw & \gamma v
\end{bmatrix},
\tag{8.79}
$$

$$
\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-uw & w & 0 & u & 0 \\
-vw & 0 & w & v & 0 \\
\frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2) + \frac{\gamma-3}{2}w^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & (3-\gamma)w & \gamma-1 \\
\left[-\frac{\gamma E_t}{\rho} + (\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)\right]w & -(\gamma-1)uw & -(\gamma-1)vw & \frac{\gamma E_t}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2+3w^2) & \gamma w
\end{bmatrix}.
\tag{8.80}
$$

Выражение для матрицы Якоби $\partial \mathbf{E}'/\partial \mathbf{U}$ получено в предположении, что $\omega$ локально не зависит от $U$.

Вязкие дельта-члены можно линеаризовать методом, который предложил Стегер [Steger, 1977]. В нем коэффициенты вязкости $\mu$ и теплопроводности $k$ считаются локально не зависящими от $\mathbf{U}$ и пренебрегают вязкими членами со смешанными производными. В результате элементы $\mathbf{F}_v$ и $\mathbf{G}_v$ имеют следующий общий вид:

$$f_k = \alpha_k \frac{\partial}{\partial y}(\beta_k), \quad g_k = \alpha_k \frac{\partial}{\partial z}(\beta_k), \tag{8.81}$$

где $\alpha_k$ не зависит от $\mathbf{U}$, а $\beta_k$ — функция $\mathbf{U}$. Эти элементы линеаризуются следующим образом:

$$\begin{aligned} f^{i+1} &= f^i + \alpha_k^i \frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{l=1}^{5}\left(\frac{\partial \beta_k}{\partial U_l}\right)^i \Delta^i U_l\right] + O\left[(\Delta x)^2\right], \\ g^{i+1} &= g^i + \alpha_k^i \frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{l=1}^{5}\left(\frac{\partial \beta_k}{\partial U_l}\right)^i \Delta^i U_l\right] + O\left[(\Delta x)^2\right], \end{aligned} \tag{8.82}$$

так что можно записать

$$\begin{aligned} \Delta^i \mathbf{F}_v &= [V]^i \Delta^i \mathbf{U} + O\left[(\Delta x)^2\right], \\ \Delta^i \mathbf{G}_v &= [W]^i \Delta^i \mathbf{U} + O\left[(\Delta x)^2\right], \end{aligned} \tag{8.83}$$

где $[V]$ и $[W]$ — матрицы Якоби $\partial \mathbf{F}_v/\partial \mathbf{U}$ и $\partial \mathbf{G}_v/\partial \mathbf{U}$:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}} = \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_y\left(\frac{u}{\rho}\right) & \partial_y\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}\partial_y\left(\frac{v}{\rho}\right) & 0 & \frac{4}{3}\partial_y\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 & 0 \\ -\partial_y\left(\frac{w}{\rho}\right) & 0 & 0 & \partial_y\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 \\ -\partial_y\left(\frac{u^2}{\rho}\right) - \frac{4}{3}\partial_y\left(\frac{v^2}{\rho}\right) - \partial_y\left(\frac{w^2}{\rho}\right) & \left(1-\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\right)\partial_y\left(\frac{u}{\rho}\right) & \left(\frac{4}{3}-\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\right)\partial_y\left(\frac{v}{\rho}\right) & \left(1-\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\right)\partial_y\left(\frac{w}{\rho}\right) & \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\partial_y\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ -\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\partial_y\left[\frac{p}{(\gamma-1)\rho^2} - \frac{u^2+v^2+w^2}{2\rho}\right] & & & & \end{bmatrix}, \tag{8.84}$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \mathbf{U}} = \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_z\left(\frac{u}{\rho}\right) & \partial_z\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_z\left(\frac{v}{\rho}\right) & 0 & \partial_z\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}\partial_z\left(\frac{w}{\rho}\right) & 0 & 0 & \frac{4}{3}\partial_z\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 \\ -\partial_z\left(\frac{u^2}{\rho}\right) - \partial_z\left(\frac{v^2}{\rho}\right) - \frac{4}{3}\partial_z\left(\frac{w^2}{\rho}\right) & \left(1-\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\right)\partial_z\left(\frac{u}{\rho}\right) & \left(1-\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\right)\partial_z\left(\frac{v}{\rho}\right) & \left(\frac{4}{3}-\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\right)\partial_z\left(\frac{w}{\rho}\right) & \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\partial_z\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ -\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\partial_z\left[\frac{p}{(\gamma-1)\rho^2} - \frac{u^2+v^2+w^2}{2\rho}\right] & & & & \end{bmatrix}. \tag{8.85}$$

В (8.84) и (8.85) $\partial_y$ и $\partial_z$ обозначают частные производные $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$.

Подставляя теперь (8.73), (8.77) и (8.83) в уравнение (8.72), получаем

$$\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)\right]^i\right\}\Delta^i \mathbf{U} =$$
$$= -\frac{\Delta x}{1+1\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{F}^i) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{G}^i)\right] + \frac{\theta_2}{1+\theta_2}\Delta^{i-1}\mathbf{E} - \Delta^i \mathbf{P}, \quad (8.86)$$

где запись

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)\right]\Delta^i \mathbf{U}$$

обозначает

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)\Delta^i \mathbf{U}\right]$$

и частные производные в $\partial \mathbf{F}_v/\partial \mathbf{U}$ и $\partial \mathbf{G}_v/\partial \mathbf{U}$ следует брать от всех членов в них входящих, включая $\Delta^i \mathbf{U}$. Заметим, что в уравнении (8.86) все неявные члены находятся в левой части, а явные — в правой. Включенный в правую часть уравнения градиент давления $\Delta^i \mathbf{P}$, взятый на явном слое, можно аппроксимировать соответствующей разностью назад. В соответствии с неявной схемой Эйлера такой конечно-разностной формулой первого порядка является

$$\Delta^i \mathbf{P} = \Delta^{i-1}\mathbf{P} + O(\Delta x)^2, \quad (8.87)$$

тогда как в схемах второго порядка с разностями назад можно использовать следующую формулу:

$$\Delta^i \mathbf{P} = 2\Delta^{i-1}\mathbf{P} - \Delta^{i-2}\mathbf{P} + O[(\Delta x)^3]. \quad (8.88)$$

Левая часть уравнения (8.86) приближенно факторизуется таким образом:

$$\left\{\left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)^i\right]\left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i\right]^{-1} \times\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)^i\right]\right\}\Delta^i \mathbf{U} =$$
$$= \text{Правая часть уравнения (8.86).} \quad (8.89)$$

Точность этого факторизованного выражения можно определить, выполняя перемножение и сравнивая результат с левой

частью уравнения (8.86). Проделав это, получим

$$\left\{\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)\right]\right\}^i +$$

$$+\left(\frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)^i \left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i\right]^{-1} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)^i \Big\} \Delta^i \mathbf{U} = \text{Правая часть уравнения (8.86)}, \quad (8.90)$$

так что

Левая часть уравнения (8.89) =

$$= \text{Левая часть уравнения (8.86)} + O\left[(\Delta x)^2\right]. \quad (8.91)$$

Следовательно, приближенная факторизация не влияет на формальную точность конечно-разностного алгоритма.

Частные производные $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ в уравнении (8.89) аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности. Например, невязкий член

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}}\right)^i \Delta^i \mathbf{U}$$

дискретизируется как

$$\frac{\left[(\partial \mathbf{F}_i/\partial \mathbf{U})^i \Delta^i \mathbf{U}\right]_{j+1} - \left[(\partial \mathbf{F}_i/\partial \mathbf{U})^i \Delta^i \mathbf{U}\right]_{j-1}}{2\Delta y}, \quad (8.92)$$

а каждый элемент вязкого члена

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)^i \Delta^i \mathbf{U},$$

имеющий вид

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha \frac{\partial}{\partial y}(\beta \Delta^i U_l)\right],$$

дискретизируется как

$$\frac{\left\{\alpha\left[\partial(\beta\Delta^i U_l)/\partial y\right]\right\}_{j+1/2} - \left\{\alpha\left[\partial(\beta\Delta^i U_l)/\partial y\right]\right\}_{j-1/2}}{\Delta y} \simeq$$

$$\simeq \frac{\alpha_{j+1/2}\left[(\beta\Delta^i U_l)_{j+1} - (\beta\Delta^i U_l)_j\right] - \alpha_{j-1/2}\left[(\beta\Delta^i U_l)_j - (\beta\Delta^i U_l)_{j-1}\right]}{(\Delta y)^2} \simeq$$

$$\simeq \frac{(\alpha_j + \alpha_{j+1})\left[(\beta\Delta^i U_l)_{j+1} - (\beta\Delta^i U_l)_j\right] - (\alpha_j + \alpha_{j-1})\left[(\beta\Delta^i U_l)_j - (\beta\Delta^i U_l)_{j-1}\right]}{2(\Delta y)^2}. \quad (8.93)$$

Задаваемый уравнением (8.89) алгоритм реализуется следующим образом:

*Шаг 1*

$$\left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)^i\right]\Delta^i \mathbf{U}_1 = \\ = \text{Правая часть уравнения (8.86).} \quad (8.94)$$

*Шаг 2*

$$\Delta^i \mathbf{U}_2 = \left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i \Delta^i \mathbf{U}_1. \quad (8.95)$$

*Шаг 3*

$$\left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)^i\right]\Delta^i \mathbf{U} = \Delta^i \mathbf{U}_2. \quad (8.96)$$

*Шаг 4*

$$\mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + \Delta^i \mathbf{U}. \quad (8.97)$$

На шаге 1 из решения системы уравнений (8.94) определяется векторная величина $\Delta^i \mathbf{U}_1$:

$$\left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i\right]^{-1}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial \mathbf{U}}\right)^i + \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}}\right)^i\right]\Delta^i \mathbf{U}.$$

Эта система уравнений имеет блочную трехдиагональную структуру

$$\begin{bmatrix} [B_1] & [C_1] & & & & 0 \\ [A_2] & [B_2] & [C_2] & & & \\ & [A_3] & [B_3] & [C_3] & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & [A_{K-1}] & [B_{K-1}] & [C_{K-1}] \\ 0 & & & & [A_K] & [B_K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Delta^i U_1]_1 \\ [\Delta^i U_1]_2 \\ [\Delta^i U_1]_3 \\ \vdots \\ [\Delta^i U_1]_{K-1} \\ [\Delta^i U_1]_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathrm{RHS}]_1 \\ [\mathrm{RHS}]_2 \\ [\mathrm{RHS}]_3 \\ \vdots \\ [\mathrm{RHS}]_{K-1} \\ [\mathrm{RHS}]_K \end{bmatrix} \quad (8.98)$$

где $[A]$, $[B]$ и $[C]$ — матрицы размером $5 \times 5$, $[\Delta^i \mathbf{U}_1]$ и $[\mathrm{RHS}]$ — вектор-столбцы, элементы которых суть компоненты векторов $\Delta^i \mathbf{U}_1$ и правой части уравнения (8.86). Эту систему можно решать, используя процедуру, описанную в приложении В. Определив $\Delta^i \mathbf{U}_1$, на шаге 2 этот вектор-столбец умножают на $(\partial \mathbf{E}'/\partial \mathbf{U})^i$, что позволяет избежать в процессе решения необходимости вычисления обратной матрицы $[(\partial \mathbf{E}'/\partial \mathbf{U})^i]^{-1}$. На шаге 3 блочная трехдиагональная система решается по направлению $y$. Наконец, на шаге 4 вектор неизвестных в слое $i+1$ (т. е. $\mathbf{U}^{i+1}$) определяют просто добавлением $\Delta^i \mathbf{U}$ к вектору

неизвестных в слое $i$. Затем можно из $\mathbf{U}^{i+1}$ найти примитивные переменные:

$$\begin{aligned}
\rho^{i+1} &= U_1^{i+1},\\
u^{i+1} &= \frac{U_2^{i+1}}{U_1^{i+1}},\\
v^{i+1} &= \frac{U_3^{i+1}}{U_1^{i+1}},\\
w^{i+1} &= \frac{U_4^{i+1}}{U_1^{i+1}},\\
e^{i+1} &= \frac{U_5^{i+1}}{U_1^{i+1}} - \frac{(u^{i+1})^2 + (v^{i+1})^2 + (w^{i+1})^2}{2}.
\end{aligned} \tag{8.99}$$

В алгоритмах такого типа для подавления высокочастотных осцилляций часто приходится добавлять сглаживание. Это легко осуществляется добавлением к правой части уравнения (8.86) на явном слое диссипативного члена четвертого порядка

$$-\varepsilon_e\left[(\Delta y)^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4}(\mathbf{U}^i) + (\Delta z)^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4}(\mathbf{U}^i)\right]. \tag{8.100}$$

На формальную точность алгоритма добавление члена четвертого порядка малости не влияет. Отрицательный знак перед ним необходим для того, чтобы демпфирование было положительным [см. уравнение (4.21)]. Для устойчивости сглаживающий коэффициент $\varepsilon_e$ должен быть меньше 1/16. Члены с четвертыми производными рассчитываются по следующим конечно-разностным выражениям:

$$\begin{aligned}
(\Delta y)^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4}(\mathbf{U}^i) &\approx \mathbf{U}^i_{j+2,\,k} - 4\mathbf{U}^i_{j+1,\,k} + 6\mathbf{U}^i_{j,\,k} - 4\mathbf{U}^i_{j-1,\,k} + \mathbf{U}^i_{j-2,\,k},\\
(\Delta z)^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4}(\mathbf{U}^i) &\approx \mathbf{U}^i_{j,\,k+2} - 4\mathbf{U}^i_{j,\,k+1} + 6\mathbf{U}^i_{j,\,k} - 4\mathbf{U}^i_{j,\,k-1} + \mathbf{U}^i_{j,\,k-2}.
\end{aligned} \tag{8.101}$$

Шифф и Стегер [Schiff, Steger, 1979] разработали неитерационный неявный алгоритм, аналогичный только что описанному. В этом алгоритме, а также в алгоритме, разработанном Виньероном и др. [Vigneron et al., 1978], решение получают при помощи вычислительных плоскостей (т. е. поверхностей, на которых определяют решение), нормальных к оси тела. Большинство конфигураций могут быть рассчитаны подобным образом. Однако в случае тел, поверхность которых сильно наклонена по отношению к набегающему потоку, осевая компонента

скорости в невязкой области может стать дозвуковой, что делает дальнейшие вычисления невозможными. Чтобы обойти эту трудность, было предложено [Tannehill et al., 1982] использовать описанную выше разностную схему для параболизованных уравнений Навье — Стокса, записанных в неортогональных координатах общего вида (8.37) — (8:39)). В результате ориентация каждой поверхности решения ($\xi = \text{const}$) в достаточной степени остается произвольной, так что она может быть выбрана наиболее подходящим для данной задачи образом. Обычно оптимальная ориентация достигается тогда, когда эта поверхность почти перпендикулярна местному направлению потока. Аналогичным образом для достижения оптимальной ориентации вычислительных плоскостей в метод Лубарда — Хеллиуэлла была введена неортогональная система координат [Helliwell et al., 1980].

Были предложены и другие неявные алгоритмы решения параболизованных уравнений Навье — Стокса, использующие соответствующим образом расщепленную неявную линеаризованную блочную (LBI) схему [McDonald, Briley, 1975; Briley, McDonald, 1980] и неявную факторизованную схему с итерациями [Li, 1981]. Неявная линеаризованная блочная схема Макдональда и Брайли имеет такую же структуру, что и схема Бима — Уорминга в дельта-форме.

## § 8.4. Методы решения параболизованных и частично параболизованных уравнений Навье — Стокса для дозвуковых течений

В предыдущих разделах рассматривались течения, которые являются сверхзвуковыми в большей части рассматриваемой области. В данном параграфе мы обсудим два подхода, используемых для дозвуковых течений. В обоих рассматриваются параболизованные уравнения Навье — Стокса и отличаются они только тем, как в них рассчитывается давление.

### 8.4.1. Параболические процедуры для трехмерных внутренних течений

Этот подход применяют для внутренних течений, в которых можно выделить преобладающее направление. Компонента скорости в этом основном направлении должна быть положительной, т. е. обратное течение в направлении основного потока запрещено. На компоненты скорости вторичного течения ограничений нет. Как и для всех форм параболизованных уравнений Навье — Стокса, диффузией в продольном направлении пренебрегают.

Прежде чем продолжить наше рассмотрение, заметим, что параболизованные уравнения Навье — Стокса будут допускать для дозвуковых течений передачу влияния в продольном направлении через градиент давления, о чем шла речь в п. 8.3.2. В настоящем подходе эллиптический характер поведения в продольном направлении подавляется применением аппроксимации, которая впервые была предложена в работе [Gosman, Spalding, 1971]. Этот подход удобно рассмотреть на примере прямого канала прямоугольного сечения. Тогда уравнения сохранения могут быть записаны в декартовой системе координат. Аналогичным образом рассматриваются течения в искривленных каналах с постоянным поперечным сечением, но при этом должна быть использована другая система координат. Брили и Макдональд [Briley, McDonald, 1979] распространили трехмерную параболическую модель течения на случай более общей геометрии.

Пусть ось канала совпадает с направлением оси $x$. Тогда координатные плоскости $(y, z)$ перпендикулярны направлению основного течения. Запишем уравнения в виде, пригодном как для ламинарных, так и для турбулентных течений. Переменные будем считать величинами, осредненными по времени. Аналогичным образом мы поступали в гл. 7. При выборе параболизованных уравнений Рейнольдса ламинарной и турбулентной диффузией в продольном направлении будем пренебрегать. Более того, поскольку мы рассматриваем только дозвуковые задачи, то будем считать, что $\overline{\rho' u'}/\bar{\rho}\bar{u}$, $\overline{\rho' v'}/\bar{\rho}\bar{v}$ и $\overline{\rho' w'}/\bar{\rho}\bar{w}$ столь малы, что нет различия между величинами, осредненными обычным способом и с использованием плотности в качестве весовой функции. Членами с флуктуациями давления в уравнении энергии также будем пренебрегать. Символами $\tau$ и $q$ будем обозначать напряжения и тепловые потоки соответственно как молекулярного, так и турбулентного происхождения. За исключением членов с градиентами давления, уравнения трехмерной параболической процедуры выводятся из уравнений (5.68), (5.73) и (5.84). После упрощающих допущений они выглядят так:

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \tag{8.102a}$$

$$\int_A \rho u \, dA = \text{const (полный расход газа)}, \tag{8.102b}$$

*Уравнение движения по координате x*

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}. \tag{8.103}$$

*Уравнение движения по координате y*

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}. \quad (8.104)$$

*Уравнение движения по координате z*

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}. \quad (8.105)$$

*Уравнение энергии*

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w c_p \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(-q_y) + \frac{\partial}{\partial z}(-q_z) + \\ + \beta T u \frac{d\hat{p}}{dx} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (8.106)$$

*Уравнение состояния*

$$\rho = \rho(\rho, T). \quad (8.107)$$

В аппроксимации давления по Госману и Сполдингу [Gosman, Spalding, 1971] давление $\hat{p}$ определяется только при помощи уравнения движения по координате $x$, причем считают, что оно изменяется *только по направлению x*. Давление $\hat{p}$ будет найдено по заданному полному расходу массы. Во многом это сходно с тем, как поступают в случае двумерных и осесимметричных течений, рассчитываемых по уравнениям тонкого сдвигового слоя. С другой стороны, давление $p$, входящее в уравнения движения по направлениям $y$ и $z$, изменяется в поперечном сечении канала. Предполагают, что статическое давление в канале равно сумме $\hat{p}$ и $p$.

Физические соображения в пользу такой процедуры разложения давления состоят в том, что изменения давления поперек канала столь малы, что включение их в уравнение движения в продольном направлении дает пренебрежимо малый эффект. Поэтому в проекции уравнения движения на продольное направление пренебрегают изменениями давления в поперечном сечении. С другой стороны, эти малые изменения давления включают в уравнения движения по направлениям $y$ и $z$, так как они играют важную роль в распределении обычно малых компонент скорости по направлениям, нормальным к стенкам. Для определения $\hat{p}$ не требуется информация снизу по потоку; $\hat{p}$ есть функция только $x$ и может быть найдено однозначно в каждом поперечном сечении по заданному полному расходу и уравнениям движения. Это позволяет свести задачу к параболической. С другой стороны, так как $p$ зависит как от $y$, так и от $z$, то для дозвуковых течений уравнения являются эллиптическими в плоскости $y$, $z$. Фактически для $p(y, z)$ в поперечном

сечении можно вывести уравнение Пуассона из уравнений движения по направлениям $y$ и $z$. Глобальная процедура вычислений требует тогда решения эллиптических уравнений в каждой поперечной плоскости, а при продвижении по координате $x$ решение получают, используя параболическую процедуру.

В соответствии с гипотезой Буссинеска напряжения в приведенных выше уравнениях рассчитываются (с учетом соглашения о суммировании по повторяющимся индексам) по формулам

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_T)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) - \frac{2}{3}\rho\bar{k}\delta_{ij}. \quad (8.108)$$

Делая аналогичные допущения, для тепловых потоков получаем такие выражения:

$$q_y = -\left(k + \frac{\mu_T c_p}{\mathrm{Pr}_T}\right)\frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\left(k + \frac{\mu_T c_p}{\mathrm{Pr}_T}\right)\frac{\partial T}{\partial z}.$$

Дальнейшие упрощения уравнения (8.108) связаны с предположением о несжимаемости жидкости для некоторых специфических приложений, что дает $\tau_{ij} = (\mu + \mu_T)\partial u_i/\partial x_j$. Для замыкания системы уравнений следует использовать подходящую математическую модель турбулентности для $\mu_T$ и $\mathrm{Pr}_T$. Граничные условия являются обычными для течения в каналах.

Кратко опишем наиболее распространенную стратегию решения. Заметим, что для заданного поля давления уравнения движения и энергии будут полностью параболическими и можно получить решение, используя маршевые процедуры решения уравнений движения по направлениям $x$, $y$ и $z$ для определения $u$, $v$ и $w$ соответственно. Решая уравнение энергии, находим $T$, а из уравнения состояния — плотность. Компоненты скорости не будут удовлетворять уравнению неразрывности, кроме случая, когда распределение давления в плоскости поперечного сечения является точным. Это, конечно, затрудняет задачу — ведь уравнения движения, энергии и состояния образуют естественную систему, пользуясь которой получают решение для компонент скорости и плотности. Менее очевидно то, как можно воспользоваться уравнениями движения и неразрывности, чтобы найти правильное распределение давления. Были созданы работоспособные процедуры коррекции поля давления, которые будут обсуждаться ниже. Численный алгоритм решения уравнений сохранения, в котором одно уравнение решается отдельно от других, причем по очереди для каждой переменной, называется *подходом с сегрегированием*.

В принципе уравнения, образующие замкнутую систему, можно было бы решать одновременно каким-либо прямым методом

и затем посредством итераций делать поправку на то, что входящие в эту систему переменные связаны друг с другом нелинейным образом. Однако в настоящее время наиболее эффективно работающие программы решения прямым методом [Buneman, 1969; Schwartztrauber, Sweet, 1977; Bank, 1977] применимы только для специального класса уравнений и граничных условий, что сильно ограничивает их пригодность для настоящей задачи. Другие прямые методы не очень экономичны. С другой стороны, был достигнут значительный прогресс в итерационных методах решения систем алгебраических уравнений того типа, который возникает в данной задаче. Используя сильно неявные процедуры [Stone, 1968; Schneider, Zedan, 1981; Rubin, Khosla, 1981], можно разработать более эффективные алгоритмы одновременного расчета давления и скорости в трехмерных параболизованных уравнениях. Сильно неявные процедуры для этих уравнений в настоящее время находятся в начальной стадии разработки.

Большинство решений трехмерных параболизованных уравнений, о которых сообщено в литературе, было получено согласно методу с сегрегированием, предложенному Патанкаром и Сполдингом [Patankar, Spalding, 1972] и реализованному в процедуре SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations). Недавно было предложено несколько существенных улучшений на некоторых этапах этой процедуры, которые будут упомянуты ниже. Метод Патанкара и Сполдинга [Patankar, Spalding, 1972] в свою очередь опирается на более ранние работы [Harlow, Welch, 1965; Amsden, Harlow,1970; Chorin, 1968]. Стратегия подхода с сегрегированием следующая: верхний индекс $n+1$ относится к текущему сечению вдоль продольной координаты.

1. Линеаризуя коэффициенты уравнения (8.103) подходящим образом, давление $\hat{p}^{n+1}$ можно определить так же, как и для двумерных и осесимметричных течений в каналах, которые рассчитываются при помощи уравнений пограничного слоя (см. § 7.5) с учетом требования сохранения полного массового расхода. Затем можно определить $u_{l,k}^{n+1}$ из конечно-разностного решения уравнения (8.103). Далее по уравнению энергии можно найти $T_{l,k}^{n+1}$, а по уравнению состояния определить $\rho_{l,k}^{n+1}$. Неявная схема переменных направлений очень хорошо зарекомендовала себя для решения уравнений движения и энергии.

2. Используя принятое распределение давления, можно определить предварительные значения $v$ и $w$ из решения уравнений (8.104) и (8.105) маршевым методом (рекомендуется опять вос-

пользоваться неявной схемой переменных направлений), так же как при решении уравнения движения по координате $x$.

3. Эти предварительные решения для $v$ и $w$ в плоскости поперечного сечения обычно не удовлетворяют уравнению неразрывности, записанному в разностном виде. Применяя уравнение неразрывности к предварительным решениям для компонент скорости, можно рассчитать дисбаланс массы в каждой точке сетки. Будем теперь искать способ подстроить поле давления в поперечном сечении так, чтобы устранить этот дисбаланс массы. Именно по тому, как вычисляются поправки скорости и давления, и отличаются трехмерные параболические методы друг от друга. Некоторые авторы [Briley, 1974; Ghia et al., 1977b; Ghia, Sokhey, 1977a] следовали гипотезе Чорина [Chorin, 1968] и считали подправленный поток безвихревым в плоскости поперечного сечения, причем был введен потенциал, связанный с давлением, так чтобы обратить в нуль дисбаланс массы. Для такого потенциала можно выписать уравнение Пуассона, исходя из уравнения неразрывности. Обозначим нижним индексом $p$ предварительные значения скоростей, а нижним индексом $c$ скорректированные (подправленные) их значения и потребуем, чтобы

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}[\rho (v_p + v_c)] + \frac{\partial}{\partial z}[\rho (w_p + w_c)] = 0. \qquad (8.109)$$

Здесь продольный градиент давления и производные от предварительных значений скоростей известны в момент времени, когда определяются поправки, и могут быть объединены в источниковый член $S_\phi$. Таким образом, мы можем определить потенциал $\hat{\phi}$ как $\rho v_c = \partial\hat{\phi}/\partial y$, $\rho w_c = \partial\hat{\phi}/\partial z$ и записать уравнение (8.109) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial z^2} = S_\phi. \qquad (8.110)$$

Тогда искомые поправки и скорости могут быть вычислены по распределению $\hat{\phi}$, полученному из решения уравнения Пуассона в поперечной плоскости. В этом подходе завихренность исходных полей скорости $v_p$ и $w_p$ сохраняется.

В оригинальном подходе Патанкара и Сполдинга предполагалось, что поправки к скорости определяются поправками к давлению в соответствии с очень приближенными уравнениями движения, в которых продольные конвективные члены уравновешены членами с давлением. Символически это записывается

в виде

$$\rho u \frac{\partial v_c}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{8.111}$$

$$\rho u \frac{\partial w_c}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial z}. \tag{8.112}$$

Здесь $p'$ можно считать просто некоторой потенциальной функцией (подобно $\hat{\phi}$), которая используется для образования поправок к скорости, удовлетворяющих уравнению неразрывности. В некоторых схемах (как и в оригинальной схеме Патанкара и Сполдинга [Patankar, Spalding, 1972]) $p'$ считается текущей поправкой, которая добавляется к предварительному значению давления. Так как в предыдущем сечении по продольной координате поправки к скорости можно считать нулевыми, то уравнения (8.111) и (8.112) можно интерпретировать как

$$v_c = -A \frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{8.113}$$

$$w_c = -B \frac{\partial p'}{\partial z}, \tag{8.114}$$

где $A$ и $B$ — коэффициенты, в выражения для которых входят $\rho$, $u$ и $\Delta x$. Производные от $p'$, конечно, дискретизируются. Следует отметить сходство между уравнениями (8.113)—(8.114) и приведенными выше представлениями для поправок скоростей через потенциал $\hat{\phi}$. Теперь уравнения (8.113) и (8.114) можно подставить в уравнение неразрывности и получить уравнение Пуассона в виде

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = S_{p'}. \tag{8.115}$$

Искомые поправки к скоростям теперь можно получить путем численного решения уравнения (8.115) с использованием уравнений (8.113) и (8.114). Этот подход известен как $p'$-процедура для получения поправок к скорости. Были предложены усовершенствования этой процедуры, в которых пытались пользоваться более полной формой уравнения движения в связи с определением поправок к $p'$. Некоторые модификация $p'$-подхода описаны в работе [Raithby, Schneider, 1979].

4. На следующем шаге обновляется давление. Только что рассчитанные поправки к скорости не требуются для удовлетворения полного уравнения движения. Теперь необходимо построить уточненное поле давления в поперечном сечении, которое при использовании полных уравнений движения будет порождать распределение скоростей, удовлетворяющее уравнению

неразрывности. Для этого применяется несколько способов. Скорректированные значения скоростей можно использовать в дискретизированных уравнениях движения для получения градиентов давления, согласованных с новыми значениями скоростей. Символически это запишется в виде

$$\partial p/\partial y = F_1, \tag{8.116}$$

$$\partial p/\partial z = F_2. \tag{8.117}$$

Одну из оценок «наилучшего» обновленного поля давления можно получить, решая уравнение Пуассона, выведенное из уравнений (8.116) и (8.117):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z} = S_p. \tag{8.118}$$

Правая часть уравнения (8.118) вычисляется по дискретизированным уравнениям движения при помощи скорректированных скоростей и трактуется как некоторый источниковый член. Патанкар [Patankar, 1980] предложил несколько отличную формулировку, которая также приводит к уравнению Пуассона для обновленного давления (алгоритм SIMPLER). Алгоритм SIMPLER есть SIMLE пересмотренный (revised). Решая любое из выписанных выше уравнений Пуассона, особое внимание следует обратить на численное представление граничных условий. Дискретизация и метод решения должны обеспечивать выполнение теоремы Гаусса (см. п. 3.3.7). Более подробный пример представления граничных условий для уравнения Пуассона будет приведен в п. 8.4.3.

Рейсби и Шнейдер [Raithby, Schneider, 1979] предложили схему расчета обновленного давления, которая не требует решения второго уравнения Пуассона. Они назвали ее PUMPIN (Pressure Update from Multiple Path Integration). Ее идея состоит в том, что изменение давления от точки к точке можно рассчитывать интегрированием уравнений (8.116) и (8.117) при помощи скорректированных скоростей в уравнениях движения при вычислении $F_1$ и $F_2$. Для правильно скорректированных величин скорости $v$ и $w$ изменение давления между двумя любыми точками в плоскости поперечного сечения, вычисленное по этой процедуре, не зависит от пути интегрирования. Если значения скоростей $v$ и $w$ скорректированы не совсем точно (точность будет только тогда, когда достигнута сходимость), то результаты будут различаться для двух разных путей между двумя точками. Одну точку мы можем взять в качестве опорной и вычислять давление в других точках поперечного сечения осреднением величин, получаемых интегрированием по нескольким разным путям между опорной точкой и интересующей нас

точкой. Рейсби и Шнейдер [Raithby, Schneider, 1979] сообщили, что удалось получить хорошие результаты, осредняя давления при интегрировании только по двум путям от опорной точки до рассматриваемой: (a) сначала вдоль $y = \text{const}$ и затем вдоль $z = \text{const}$; (b) сначала вдоль $z = \text{const}$ и затем вдоль $y = \text{const}$.

Давление можно также обновлять совсем простым способом, принимая за добавляемую к давлению поправку величину $p'$, получаемую из процедуры Патанкара и Сполдинга [Patankar, Spalding, 1972] (см. уравнение (8.115).

5. Так как не удается удовлетворить одновременно уравнениям движения и неразрывности, шаги (2)—(4) обычно повторяют с итерированием в каждом поперечном сечении, прежде чем перейти к следующему. Обычно применяется нижняя релаксация для поправок к скорости и давлению, т. е. при переходе от шага (3) к шагу (4) только некоторая определенная доля вычисленных поправок прибавляется к предварительным значениям $v$ и $w$. Величина этой доли меняется от метода к методу. Аналогично перед переходом к шагу (2) подстраивают давление, добавляя только часть рассчитанной поправки. Иногда для организации такого итерационного процесса пользуются зависящими от времени уравнениями. Так как шаги (2)—(4) итерируются, то принято прекращать решение промежуточного уравнения Пуассона для поправок к скорости и давлению (особенно в последнем случае) на первых итерациях, не дожидаясь полной сходимости. Пока сходимость в целом получена не будет, мало пользы в стремлении получить наилучшее распределение давления, основанное на неправильном распределении скорости. Итерирование шагов (2)—(4) заканчивается, когда поле давления устанавливается, что приводит к решениям уравнений движения, удовлетворяющим уравнению неразрывности в пределах заданных отклонений, т. е. когда нет нужды более корректировать скорость.

6. После достижения сходимости шаги (1)—(5) повторяются в следующем сечении, расположенном ниже по потоку.

Рейсби и Шнейдер [Raithby, Schneider, 1979] сообщили о сравнительном исследовании описанных выше методов коррекции скорости и давления. Главным достоинством метода считается число итераций шагов (2)—(5), необходимое для достижения сходимости. Представляют интерес затраты процессорного времени для различных алгоритмов, но об этом ничего не сообщается. Зафиксировав метод обновления давления, они отмечают, что все методы получения поправок к скорости рабо-

тают удовлетворительно. Различие между ними по требуемому числу итераций мало.

Когда, наоборот, фиксировался какой-то один метод получения поправок к скорости и сравнивались разные методы коррекции давления, авторы заметили, что $p'$-метод Патанкара и Сполдинга [Patankar, Spalding, 1972] требует значительно большего числа итераций для достижения сходимости, нежели другие методы. Методы, использующие уравнение Пуассона, и PUMPIN-процедура требуют примерно вдвое меньшего числа итераций, чем $p'$-метод. В PUMPIN-методе требуется наименьшее число итераций, отнесенное к заданному диапазону отклонений. По результатам исследования работы [Raithby, Schneider, 1979] не рекомендуется пользоваться $p'$-методом. К такому же выводу приходит и Патанкар [Patankar, 1980], предлагая свой SIMPLER-алгоритм, использующий уравнение Пуассона вместо $p'$-метода обновления давления. Возможно, $p'$-метод может конкурировать с другими методами, если за критерий качества принять процессорное время, а не число итераций.

Известны расчеты [Patankar, Spalding, 1972; Caretto et al., 1972; Briley, 1974; Ghia et al., 1977b; Ghia, Sokhey, 1977a; Patankar et al., 1974], выполненные по трехмерной параболической модели. В случае течений в каналах с переменным сечением для частичного учета влияния эллиптичности в направлении основного течения были сделаны предположения с целью включения в анализ давления невязкого потока, определяемого заранее. Использовались как регулярные сетки, так и сетки с расположением узлов в шахматном порядке. Концепции математической модели, по-видимому, хорошо выработаны. Вероятно, нужны дальнейшие усовершенствования алгоритма, особенно это относится к сильно неявному алгоритму, который лучше приспособлен для одновременного решения уравнений, чем для раздельного подхода с сегрегированием. Не очень хорошо известны свойства трехмерной параболической процедуры для течений, скорость которых близка к звуковой.

### 8.4.2. Параболические процедуры для трехмерных свободных сдвиговых и других течений

Применение обсуждаемой в предыдущем разделе процедуры не ограничено только внутренними течениями. Главная особенность трехмерной параболической модели заключается в разделении членов с градиентами давления по продольному и поперечным направлениям. В случае внутренних течений градиент давления в направлении основного течения определяется из условия постоянства расхода массы. Основные элементы этой

процедуры можно использовать при расчете трехмерных течений других видов, если градиентом давления в продольном направлении можно пренебречь или если он известен заранее. Такая ситуация возникает при истечении дозвуковой свободной струи через сопло прямоугольного сечения в среду, которая либо покоится, либо движется в направлении оси сопла. Форма такой струи в поперечном сечении постепенно меняется в продольном направлении и, наконец, становится круглой. Для таких течений разумным является предположение о пренебрежении продольным градиентом давления. Малые изменения давления в поперечной плоскости можно рассматривать точно так же, как и в случае трехмерных внутренних течений. Были выполнены расчеты (McGuirk, Rodi, 1977; Hwang, Pletcher, 1978] в трехмерном случае по параболической модели в предположении $d\hat{p}/dx = 0$. Имеется пример трехмерного расчета течения со свободной поверхностью с использованием параболической процедуры [Raithby, Schneider, 1980].

### 8.4.3. Модель частично параболизованных уравнений Навье — Стокса

Модель частично параболизованных уравнений Навье — Стокса для дозвуковых уравнений основана на уравнениях, которые концептуально близки к параболизованным уравнениям Навье — Стокса. Диффузия в продольном направлении — единственный физический процесс, который исключают из рассмотрения, а соответствующие члены в уравнениях Навье — Стокса опускают. До настоящего времени эта модель находила применение лишь в случае несжимаемой жидкости, причем оставляемые в уравнениях члены с вязкими напряжениями берут в упрощенном виде по сравнению с тем, который был использован в п. 8.3.2. В приложениях параболизованных уравнений Навье — Стокса, имеющих сверхзвуковые области, влияние снизу вверх по потоку подавляется одним из способов, описанных в п. 8.3.2. В модели частично параболизованных уравнений эти эллиптические эффекты проявляются через поле давления, вычисленное на текущий момент времени. Поэтому модель является только частично параболизованной. Ее эллиптические свойства, связанные с полем давления, сохраняются. Последнее требует, чтобы решение, которое получают, последовательно переходя от одного сечения к другому в продольном направлении, уточнялось бы итерированием.

Уравнения частично параболизованной модели суть уравнения (8.102) — (8.107), в которых $d\hat{p}/dx$ заменено на $dp/dx$. Основное течение направлено вдоль оси $x$. Эта модель впервые была предложена Пратапом и Сполдингом [Pratap, Spalding,

1976]. Предложены и другие модели частично параболизованных уравнений Навье — Стокса [Dodge, 1977; Moore, Moore, 1979; Chilukuri, Pletcher, 1980].

Сначала полагали, что применение модели будет ограничено случаем, когда обратные течения в продольном направлении отсутствуют. При этом требуются трехмерные массивы только для хранения значений давления (и значений источникового члена уравнений Пуассона, если последнее приходится решать для давления), но не для компонент скорости. В этом состоит основное преимущество частично параболизованных уравнений Навье — Стокса по сравнению с этими же уравнениями в их полном виде с точки зрения вычислений. Не так давно Мадаван и Плетчер [Madavan, Pletcher, 1982] показали, что модель частично параболизованных уравнений Навье — Стокса можно распространить на двумерные приложения с обратными течениями в продольном направлении. При этом требуется хранить еще и компоненты скорости в областях обратных течений и в непосредственной близости от них. Додж [Dodge, 1977] также считает, что его модель частично параболизованных уравнений Навье — Стокса может быть использована в задачах, в которых возникают обратные течения в продольном направлении.

Следуя [Chilukuri, Pletcher, 1980], опишем кратко модель частично параболизованных уравнений Навье — Стокса, которую можно применять для двумерных стационарных ламинарных течений несжимаемой жидкости, причем будут учтены модификации, предложенные в работе [Madavan, Pletcher, 1982]. Такое течение описывается следующими частично параболизованными уравнениями Навье — Стокса:

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{8.119}$$

*Уравнение движения по координате x*

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{8.120}$$

*Уравнение движения по координате y*

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{8.121}$$

При рассмотрении течений в ортогональных системах координат часто применяются сетки с расположением узлов в шахматном порядке. Впервые сетка такого вида была предложена в работе [Harlow, Welch, 1965]. Именно такую сетку мы будем

использовать в нашем двумерном примере модели частично параболизованных уравнений Навье — Стокса.

Идея состоит в том, что для каждой компоненты скорости определяется своя сетка, как показано на рис. 8.5. Во избежание путаницы на рисунке обозначены только узлы сетки (жирной точкой), в которых берутся значения скалярных величин (давление и поправки к потенциалу скорости $\hat{\phi}$ в нашем примере).

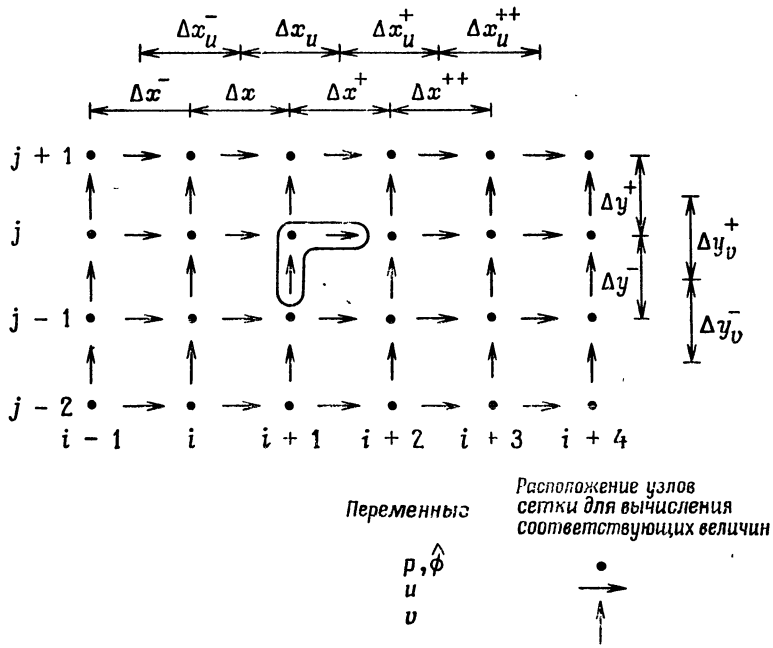



Рис. 8.5. Расположение точек, в которых вычисляются переменные, на сетке с расположением узлов в шахматном порядке.

Компоненты скорости вычисляются в точках, расположенных на гранях контрольного объема, который можно нарисовать вокруг точек, в которых берут величины давления. Точки, в которых вычисляются компоненты скорости, расположены на середине отрезка между соседними точками, в которых вычисляется давление. Для неравномерной сетки это означает, что точки, в которых вычисляют давление, не обязательно являются геометрическим центром такого контрольного объема. Точки, в которых вычисляются компоненты скорости, указаны на рис. 8.5 стрелками: вертикальные обозначают точки для $v$, горизонтальные — точки для $u$. Удобно обозначать переменные одним на-

бором индексов, несмотря на то что различные переменные вычисляются в разных точках. Таким образом, обозначение $(i+1, j)$ относится к набору из трех несовпадающих точек, которые обведены кривой в форме бумеранга на рис. 8.5. На сетке с расположением узлов в шахматном порядке точка $v_{i+1,j}^{n+1}$ расположена ниже точки $p_{i+1,j}$, а точка $u_{i+1,j}$ — правее точки $p_{i+1,j}$.

На сетке с расположением узлов в шахматном порядке поле скорости можно аппроксимировать со вторым порядком (при равномерной по пространственным координатам сетке) в узлах, обозначенных жирной точкой, используя компоненты скорости в смежных точках. Такая конфигурация придает разностной аппроксимации еще и свойство консервативности. К тому же разность давлений между двумя соседними точками становится естественной движущей силой для компонент скорости, расположенных между этими точками. Другими словами, простая аппроксимация производных давления разностями вперед является «центральной» по отношению к «точкам», в которых вычисляются компоненты скорости. Это позволяет выписать уравнение Пуассона для давления, которое автоматически удовлетворяет теореме Гаусса о дивергенции, если специальным образом задавать граничные условия, что проще осуществляется на сетке с расположением узлов в шахматном порядке. Патанкар [Patankar, 1980] дал прекрасное и подробное обсуждение преимуществ применения расчетных сеток такого типа для задач, подобных рассмотренной выше.

Границы вычислительной области удобнее всего располагать вдоль линий сетки, в узлах которых вычисляются нормальные к границе компоненты скорости. Это показано на рис. 8.6 для нижней границы. Фиктивные точки расположены вне физических границ, что необходимо для реализации подходящих граничных условий. Пусть, например, мы хотим задать на нижней границе (рис. 8.6) условие прилипания. Компонента скорости $v$ берется как раз на линии, совпадающей с физической границей, поэтому задаем просто $v_{i+1,j}=0$. Задание компоненты скорости $u$ не столь очевидно, так как точки, в которых она вычисляется, не лежат на этой границе. Имеется несколько возможностей. Главное, чтобы касательная компонента скорости была равной нулю в местах расположения физической границы. Этого можно добиться, либо дискретизируя специальным образом уравнения сохранения для контрольного объема на границе, либо накладывая ограничение на решение вблизи границы так, чтобы его экстраполяция на границу удовлетворяла условию прилипания. Имеется еще и третья возможность, так чаще всего и поступают, — можно задавать скорость в фиктивных точках, лежащих ниже границы так, чтобы $(u_{i+1,1}+u_{i+1,2})/2=0$.

Это отчасти напоминает граничное условие отражения для невязких течений, обсуждаемое в гл. 6. Значения скорости в фиктивных точках будут затем использоваться, как это требуется, в уравнениях движения во внутренней области. Значения потенциала, используемые для коррекции скорости, получают часто при помощи точек, лежащих вне физических границ. Нам нет необходимости вычислять в этих точках давление для границ, на которых скорость задается так, как это будет описано ниже. Подробности задания граничных условий на сетке с расположением узлов в шахматном порядке можно найти в работе [Amsden, Harlow, 1970].

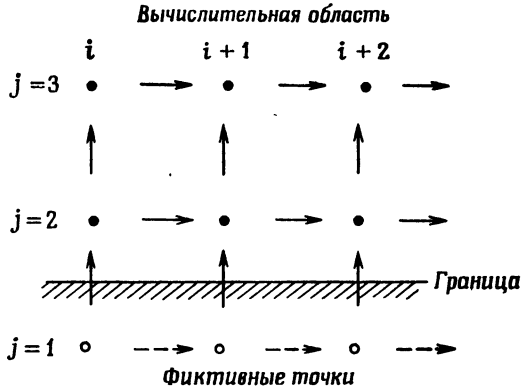



Рис. 8.6. Расчетная сетка с расположением узлов в шахматном порядке вблизи границы.

Существует некоторый выбор в представлении конвективных производных в уравнениях движения. В приводимой ниже схеме используются трехточечные аппроксимации второго порядка с разностями против потока для конвективных членов вида $u\partial\phi/\partial x$. Для членов вида $v\partial\phi/\partial y$ будет использована гибридная схема (см. п. 7.3.3). Эти разностные выражения линеаризуются экстраполяцией коэффициентов по значениям в двух соседних сечениях, расположенных выше по потоку. Когда возникает обратное течение, направление «ветра» меняется на противоположное и это учитывается при аппроксимации производных в продольном направлении и при экстраполяции коэффициентов.

Ниже приняты следующие обозначения. Верхний индекс $n+1$ относится к текущей глобальной итерации (т. е. прохождению расчетной области в процессе численного интегрирования), нижний индекс $i+1$ обозначает текущее сечение по про-

дольной координате, а нижний индекс $j$ — точки сетки по направлению $y$. Для течения в положительном направлении оси $x$ коэффициент $u^{n+1}_{i+1,\,j}$ экстраполируется следующим образом:

$$\hat{u}^{n+1}_{i+1,\,j} = \left(1 + \frac{\Delta x_u}{\Delta x_u^-}\right) u^{n+1}_{i,\,j} - \frac{\Delta x_u}{\Delta x_u^-}\, u^{n+1}_{i-1,\,j}.$$

Знак $\wedge$ указывает на то, что $\hat{u}^{n+1}_{i+1,\,j}$ — известная величина, определяемая путем экстраполяции. Экстраполированная величина $\hat{v}^{n+1}_{i+1,\,j}$ получается аналогичным образом. Если величина $\hat{u}^{n+1}_{i+1,\,j}$ в приведенном выше выражении становится отрицательной, то считают, что в точке $(i+1,\,j)$ возникает обратное течение. При этом в рассматриваемой модели $\hat{u}^{n+1}_{i+1,\,j}$ заменяют на $u^{n}_{i+1,\,j}$, а $\hat{v}^{n+1}_{i+1,\,j}$ — на $v^{n}_{i+1,\,j}$, т. е. используют значения компонент скорости с предыдущей итерации, которые хранятся для точек внутри и вблизи зоны обратного течения. В качестве альтернативы такой замены используется экстраполяция в соответствии с выражением

$$\hat{u}^{n+1}_{i+1,\,j} = \left(1 + \frac{\Delta x_u^+}{\Delta x_u^{++}}\right) u^{n}_{i+2,\,j} - \frac{\Delta x_u^+}{\Delta x_u^{++}}\, u^{n}_{i+3,\,j}.$$

Величину $\hat{v}^{n+1}_{i+1,\,j}$ также можно получить экстраполяцией в область обратного течения. Конвективные производные в продольном направлении представляются следующим образом. При отсутствии обратного течения

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+1}_{i+1,\,j} \approx \hat{u}^{n+1}_{i+1,\,j}\left(\frac{\Delta x_u^- + 2\,\Delta x_u}{\Delta x_u\left(\Delta x_u^- + \Delta x_u\right)}\, u^{n+1}_{i+1,\,j} - \right.$$
$$\left. - \frac{\Delta x_u^- + \Delta x_u}{\Delta x_u^-\,\Delta x_u}\, u^{n+1}_{i,\,j} + \frac{\Delta x_u}{\Delta x_u^-\left(\Delta x_u^- + \Delta x_u\right)}\, u^{n+1}_{i-1,\,j}\right), \tag{8.122}$$

и в области обратного течения

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+1}_{i+1,\,j} \approx -\hat{u}^{n+1}_{i+1,\,j}\left(\frac{\Delta x_u^{++} + 2\,\Delta x_u^+}{\Delta x_u\left(\Delta_u^{++} + \Delta x_u^+\right)}\, u^{n+1}_{i+1,\,j} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta x_{uu}^{++} + \Delta x_u^+}{\Delta x_u^{++}\,\Delta x_u^+}\, u^{n}_{i+2,\,j} - \frac{\Delta x_u^+}{\Delta x_u^{++}\left(\Delta x_u^{++} + \Delta x_u^+\right)}\, u^{n}_{i+3,\,j}\right). \tag{8.123}$$

Член $v\partial u/\partial y$ аппроксимируется по гибридной схеме:

$$\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n+1}_{i+1,\,j} \approx \left[\hat{v}^{n+1}_{i+1,\,j}\left(u^{n+1}_{i+1,\,j}-u^{n+1}_{i+1,\,j-1}\right)\frac{\Delta y^+}{\Delta y^+ + \Delta y^-} + \right.$$

$$\left. + \hat{v}^{n+1}_{i+1,\,j+1}\frac{u^{n+1}_{i+1,\,j+1}-u^{n+1}_{i+1,\,j}}{\Delta y^+}\frac{\Delta y^-}{\Delta y^+ + \Delta y^-}\right] W +$$

$$+ \hat{v}^{n+1}_{i+1\ \ j}\frac{u^{n+1}_{i+1,\,j}-u^{n+1}_{i+1,\,j-1}}{\Delta y^-}(1-W)\,A +$$

$$+ \hat{v}^{n+1}_{i+1,\,j+1}\frac{u^{n+1}_{i+1,\,j+1}-u^{n+1}_{i+1,\,j}}{\Delta y^+}(1-W)\,B. \qquad (8.124)$$

Величины $W$, $A$ и $B$ определяются следующим образом. Пусть

$$\mathrm{Re}^+_m = \frac{\hat{v}^{n+1}_{i+1,\,j+1}\Delta y^-}{\nu}, \qquad \mathrm{Re}^-_m = \frac{\hat{v}^{n+1}_{i+1,\,j}\Delta y^+}{\nu},$$

$\mathrm{Re}_c$ — критическое сеточное число Рейнольдса, равно 1.9 (см. п. 7.3.3).

Когда $\mathrm{Re}^+_m > \mathrm{Re}_c$, $W = \mathrm{Re}_c/\mathrm{Re}^+_m$, $A = 1$, $B = 0$.

Когда $\mathrm{Re}^+_m < -\mathrm{Re}_c$, $W = \mathrm{Re}_c/\mathrm{Re}^-_m$, $A = 0$, $B = 1$.

Когда $\mathrm{Re}^-_m < \mathrm{Re}_c < \mathrm{Re}^+_m$, $W = 1$, $A = 0$, $B = 0$.

Таким образом, эта схема представляет собой взвешенное среднее центральных разностей и разностей вверх по потоку при умеренных и больших сеточных числах Рейнольдса и вырождается в схему с центральными разностями при малых сеточных числах Рейнольдса.

Вторая производная дискретизируется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{n+1}_{i+1,\,j} \approx \frac{2}{\Delta y^+ + \Delta y^-}\left(\frac{u^{n+1}_{i+1,\,j+1}-u^{n+1}_{i+1,\,j}}{\Delta y^+} - \frac{u^{n+1}_{i+1,\,j}-u^{n+1}_{i+1,\,j-1}}{\Delta y^-}\right). \qquad (8.125)$$

Производная давления в уравнении движения в продольном направлении аппроксимируется в виде

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|^n_{i+1,\,j} \approx \frac{p^n_{i+2,\,j}-p^n_{i+1,\,j}}{\Delta x^+}, \qquad (8.126)$$

что обеспечивает влияние на $u^{n+1}_{i+1,\,j}$ давления из точки, расположенной ниже по потоку.

Уравнение движения по координате $y$ дискретизируется аналогичным образом. Так как используется сетка с расположением узлов в шахматном порядке, то $v^{n+1}_{i+1,\,j}$ вычисляют не в тех же самых точках, что и $u^{n+1}_{i+1,\,j}$. Расчет коэффициентов в разностном уравнении движения по координате $y$ должен производиться с учетом этого. Так, например, при аппроксимации члена $u\partial v/\partial x$ коэффициент должен рассчитываться как среднее $u$ двух $j$ слоев. При аппроксимации производной давления используются значения давления по обе стороны от точки, где вычисляют величину

$$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|^{n}_{i+1,\,j} \approx \frac{p^{n}_{i+1,\,j} - p^{n}_{i+1,\,j-1}}{\Delta y^{-}}. \tag{8.127}$$

При решении уравнений движения используют наилучшую оценку поля давления. Подробности того, как ее получают, будут даны ниже. При заданном давлении уравнения движения являются параболическими и решаются раздельно — уравнение движения по оси $x$ для $u^{n+1}_{i+1,\,j}$ и уравнение движения по оси $y$ для $v^{n+1}_{i+1,\,j}$. Для неизвестных в сечении $i+1$ имеем трехдиагональную систему алгебраических уравнений, которую можно решить методом прогонки. Как отмечалось при обсуждении трехмерной параболической процедуры, решение для компонент скорости не будет удовлетворять уравнению неразрывности, пока мы не определим правильное поле давления. Поэтому компоненты скорости, полученные из решения уравнений движения, являются предварительными. Полагают, что поправки к скорости выражаются через потенциал $\hat{\phi}$ таким образом, что подправленные компоненты скорости удовлетворяют уравнению неразрывности, т. е.

$$\frac{\partial (u_p + u_c)}{\partial x} + \frac{\partial (v_p + v_c)}{\partial y} = 0, \tag{8.128}$$

где $u_c$ и $v_c$ — поправки к компонентам скорости, $u_p$ и $v_p$ — предварительные значения компонент скорости, полученные из уравнений движения в сечении $i+1$. Определим потенциал $\hat{\phi}$:

$$u_c = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}, \qquad v_c = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y}, \tag{8.129}$$

тогда

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = -\frac{\partial u_p}{\partial x} - \frac{\partial v_p}{\partial y} = S_{\phi}. \tag{8.130}$$

Соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\Delta x_u}\left(\frac{\hat{\phi}_{i+2,\,j}-\hat{\phi}_{i+1,\,j}}{\Delta x^+}-\frac{\hat{\phi}_{i+1,\,j}-\hat{\phi}_{i,\,j}}{\Delta x}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Delta y_v^+}\left(\frac{\hat{\phi}_{i+1,\,j+1}-\hat{\phi}_{i+1,\,j}}{\Delta y^+}-\frac{\hat{\phi}_{i+1,\,j}-\hat{\phi}_{i+1,\,1-1}}{\Delta y^-}\right)=$$

$$=-2\frac{(u_p)_{i+1,\,j}-(u_p)_{i,\,j}}{\Delta x+\Delta x^+}-2\frac{(v_p)_{i+1,\,j+1}-(v_p)_{i+1,\,j}}{\Delta y_v^+ + \Delta y_v^-}=(S_\phi)_{i+1,\,j}. \tag{8.131}$$

Такое алгебраическое уравнение можно выписать для потенциала в каждой точке сетки поперек потока: $j = 2, 3, \ldots, NJ$, где $j = 2$ есть первая точка $\hat{\phi}$ сетки сразу над нижней границей, а $j = NJ$ есть точка $\hat{\phi}$ сразу под верхней границей. Таким образом, мы имеем трехдиагональную систему уравнений для неизвестных функций $\hat{\phi}_{i+1,\,j}$, если $\hat{\phi}_{i,\,j}$ и $\hat{\phi}_{i+2,\,j}$ известны. Чтобы вычислить $\hat{\phi}_{i,\,j}$ и $\hat{\phi}_{i+2,\,j}$, делают следующие допущения:

(a) $\hat{\phi}_{i,j}=\hat{\phi}_{i+1,\,j}$, означающее, что поправки к скорости равны нулю в сечении $i$, в котором сохранение массы уже обеспечено.

(b) $\hat{\phi}_{i+2,\,j}=0$, означающее, что $(v_c)_{i+2,\,j}$ равно нулю, как должно быть, когда достигается сходимость. Любое другое допущение относительно $\hat{\phi}_{i+2,\,j}$ будет несовместимо с требованиями сходимости. Граничные условия, необходимые для решения трехдиагональной системы относительно $\hat{\phi}_{i+1,\,j}$, выбираются так, чтобы они были совместимы с заданными граничными условиями для скорости. Например, если скорость задается на верхней и нижней границах, то $v_c$ будет равно нулю на этих границах. Тогда граничными условиями для $\hat{\phi}_{i+1,\,j}$ будут $\hat{\phi}_{i+1,\,1}=\hat{\phi}_{i+1,\,2}$ и $\hat{\phi}_{i+1,\,NJ}=\hat{\phi}_{i+1,\,NJ+1}$.

После того как $\hat{\phi}_{i+1,\,j}$ найдены, определяем поправки к скорости при помощи разностных аппроксимаций выражений (8.129), а именно

$$(u_c)_{i+1,\,j}=-\frac{\phi_{i+1,\,j}}{\Delta x^+},\quad (v_c)_{i+1,\,j}=\frac{\phi_{i+1,\,j}-\phi_{i+1,\,j-1}}{\Delta y^-}.$$

Теперь скорректированные скорости удовлетворяют уравнению неразрывности в каждой точке сечения $i+1$, но не удовлетворяют точно уравнениям движения, пока не будет достигнута сходимость.

Между двумя глобальными итерациями поле давления обновляется путем решения уравнения Пуассона для давления

методом последовательной верхней релаксации по точкам. При этом уравнение Пуассона получают из уравнений движения; т. е. можно записать

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = G1,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = G2.$$

При дискретизации приведенных выше уравнений величины $G1$, $G2$ вычисляются в центре отрезка между точками, которые используются для аппроксимации производных давления, стоящих в левой части. Следовательно, точки $G1$ совпадают с точками $u$, а $G2$ — с точками $v$. Тогда

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial G1}{\partial x} + \frac{\partial G2}{\partial y} = S_p, \tag{8.132}$$

где $G1$ и $G2$ вычисляются с использованием *скорректированных* скоростей, удовлетворяющих уравнению неразрывности. Это порождает поле давления, которое вынуждает в конце концов решения уравнений движения сходиться при локальном сохранении массы. Источниковые члены $S_p$ рассчитываются и хранятся в памяти ЭВМ во время всей глобальной итерации. Обычно делается одно уточнение поля давления методом последовательной верхней релаксации во время прохождения поля течения сверху вниз. Нетрудно обновить давление релаксацией по одной линии, прежде чем переходить к определению скорости в следующем сечении по $i$. Еще несколько уточнений методом последовательной верхней релаксации делают в конце глобальной итерации. К хорошим результатам приводит использование параметра верхней релаксации, равного 1.7. Однако источниковый член обычно уточняется методом нижней релаксации с параметром 0.2—0.65, а на первых глобальных итерациях даже с еще меньшим параметром.

Все граничные условия для уравнения Пуассона для давления являются граничными условиями Неймана, которые получаются из уравнений движения. В соответствии с теоремой Гаусса имеем

$$\iint S_p\,dx\,dy = \int \frac{\partial p}{\partial n}\,dC,$$

где $C$ — граница области течения и $\partial p/\partial n$ — задаваемое на ней граничное условие Неймана. Для сходимости процедуры решения уравнения Пуассона необходимо удовлетворить разностному эквиваленту этого равенства. На сетке с расположением узлов в шахматном порядке это делают, связав давление в гранич-

ных $p$-точках с давлением внутри области через заданные на границе производные уравнением, в которое неявным образом входит номер итерации метода последовательной верхней релаксации по точкам. Такой прием полностью устраняет зависимость от заданного на границе давления [Miyakoda, 1962] при решении уравнения Пуассона для давления. Когда дискретизация $S_p$ обладает свойством консервативности, итерационный процесс будет сходиться. Дискретизация уравнения (8.132) в $p$-точке, смежной с нижней границей и лежащей внутри области, иллюстрирует такое задание граничных условий:

$$\frac{1}{\Delta x_u}\left(\frac{p^k_{i+2,\,2}-p^k_{i+1,\,2}}{\Delta x^+}-\frac{p^{k+1}_{i+1,\,2}-p^{k+1}_{i,\,2}}{\Delta x}\right)+$$
$$+\frac{1}{\Delta y^+_v}\left(\frac{p^{k+1}_{i+1,\,3}-p^{k+1}_{i+1,2}}{\Delta y^+}-\frac{p^{k+1}_{i+1,\,2}-p^{k+1}_{i+1,\,1}}{\Delta y^-}\right)=$$
$$=\frac{G1_{i+1,\,2}-G1_{i,\,2}}{\Delta x_u}+\frac{G2_{i,\,3}-G2_{i,\,2}}{\Delta y^+_v}. \qquad (8.133)$$

Здесь $k$ — номер итерации в процедуре последовательной верхней релаксации решения уравнения Пуассона, $k+1$ обозначает текущую итерацию. Граничное условие для уравнения Пуассона на нижней границе берут таким: $(\partial p/\partial y)_w = G2$, т. е. производная давления на границе оценивается по уравнению движения. Дискретизируют его следующим образом:

$$\frac{p^{k+1}_{i+1,\,2}-p^{k+1}_{i+1,\,1}}{\Delta y^-}=G2_{i+1,\,2}, \qquad (8.134)$$

где величины давления на текущей итерации входят в неявном виде. Теперь можно исключить из уравнения Пуассона давление $p^{k+1}_{i+1,\,1}$ в фиктивной точке под нижней границей, подставляя уравнение (8.134) в (8.133). Это дает

$$\frac{1}{\Delta x_u}\left(\frac{p^k_{i+2,\,2}-p^{k+1}_{i+1,\,2}}{\Delta x^+}-\frac{p^{k+1}_{i+1,\,2}-p^{k+1}_{i,\,2}}{\Delta x}\right)+\frac{1}{\Delta y^+_v}\left(\frac{p^{k+1}_{i+1,\,3}-p^{k+1}_{i+1,\,2}}{\Delta y^+}\right)=$$
$$=\frac{G1_{i+1,\,2}-G1_{i,\,2}}{\Delta x_u}+\frac{G2_{i,\,3}}{\Delta y^+_v}. \qquad (8.135)$$

Рассмотрение дискретизации $S_p$ подтверждает, что требование, вытекающее из теоремы Гаусса, в случае нашей процедуры удовлетворяется. При вычислении $\iint S_p\,dx\,dy$ остаются только члены со значениями $G1$ и $G2$ на границах, остальные $G$ уничто-

жаются. Эти $G1$ и $G2$ на границах в точности равны $\int (\partial p/\partial n)\, dC$, когда граничные условия выражаются через $G1$ и $G2$, как это видно из уравнений (8.134) и (8.135).

Подытожим кратко основные этапы процедуры решения частично параболизованных уравнений Навье — Стокса.

1. Из решения уравнения движения получают первое приближение профилей скорости в сечении $i+1$, используя для этого определенное некоторым образом начальное поле давления. Для первой глобальной итерации это начальное поле давления можно получить при следующих предположениях: (a) $\partial p/\partial x = -\rho u_e (du_e/dx)$ и $\partial p/\partial y = 0$ или (b) $\partial p/\partial y = 0$; а также при использовании метода секущих для определения $\partial p/\partial x$ (см. п. 7.4.3), при котором будет глобально сохраняться поток массы, что очень схоже с тем, как поступают при расчете внутренних течений по уравнениям пограничного слоя. На последующих глобальных итерациях давление вниз по потоку можно подстраивать при помощи метода секущих в каждом $i$-м сечении так, чтобы выполнялся глобально закон сохранения массы поперек потока. Это приводит к тому, что дисбаланс массы поперек потока обращается в нуль и в некоторых случаях даже возникает сходимость по скорости. Для получения решения в области обратного течения аппроксимация Флюгге-Лотц (см. п. 7.4.2) применяется только на первой глобальной итерации.

2. Чтобы локально удовлетворить уравнению неразрывности, корректируют значения компонент скорости, используя для этого потенциал $\hat{\phi}$.

3. Теперь, выполняя один шаг метода последовательной верхней релаксации по линии поперек потока, обновляют давление в сечении $i+1$. На этой стадии расчета реализация этой релаксации не является обязательной, так как все поле давления будет уточняться в конце глобальной итерации.

4. Шаги (1)—(3) повторяют в каждом поперечном сечении, пока не будет достигнута выходная граница расчетной области по продольной координате.

5. После прохождения маршем всей расчетной области уточняют поле давления, решая уравнение Пуассона методом последовательной верхней релаксации. Это завершает одну глобальную итерацию. Следующую глобальную итерацию начинают с входной границы расчетной области, используя обновленное поле давления. Процесс продолжают до тех пор, пока поправки к скорости не станут малыми, т. е. полученное поле давления вырабатывает по уравнениям движения такие величины компо-

нент скорости, которые удовлетворяют уравнению неразрывности.

Результаты расчетов по модели частично параболизованных уравнений Навье — Стокса показаны на рис. 8.7 и 8.8. Чилукури и Плетчер [Chilukuri, Pletcher, 1980] обнаружили, что решения

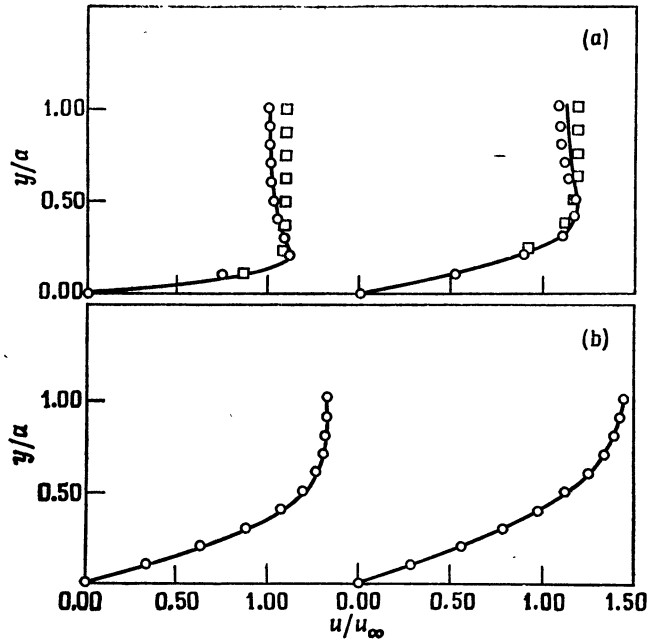



Рис. 8.7. Расчет ламинарного течения во входном участке двумерного канала при Re = 75. (a) ——— модель частично параболизованных уравнений Навье — Стокса [Chilukuri, Pletcher, 1980] ($x/a = 0.1989$ для левой ветви и $x/a = 0.999$ для правой); O полные уравнения Навье — Стокса [McDonald et al., 1972] ($x/a = 0.2$ для левой ветви и $x/a = 1.0$ для правой); □ уравнения пограничного слоя [Nelson, Pletcher, 1974] ($x/a = 0.18525$ для левой ветви и $x/a = 1.0191$ для правой). (b) ——— то же, что и (a), только $x/a = 4.0115$ (левая ветвь), $x/a = 8.928$ (правая ветвь), O то же, что и (a), только $x/a = 4.0$ (левая ветвь), $x/a = 8.8$ (правая ветвь).

частично параболизованных уравнений Навье — Стокса для ламинарного течения во входном участке канала хорошо согласуются с решениями полных уравнений Навье — Стокса при числах Рейнольдса, подсчитанных по размеру канала, меньших 10. На рис. 8.7 сравнивались профили скорости, полученные при решении частично параболизованных уравнений Навье — Стокса с профилями, полученными при решении полных уравнений

Навье — Стокса [McDonald et al., 1972] и уравнений пограничного слоя [Nelson, Pletcher, 1974] при каналовом числе Рейнольдса ($\mathrm{Re} = u_\infty a/\nu$, $a$ — полуширина канала), равном 75. Результаты в данном конкретном случае не выявили преимуществ расчетов по частично параболизованным и полным уравнениям Навье — Стокса по сравнению с расчетами по уравнениям пограничного слоя. В расчетах по модели частично параболизованных уравнений Навье — Стокса сетка состояла из 32 узлов

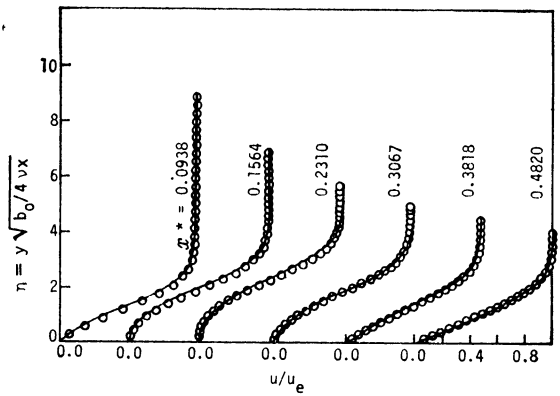



Рис. 8.8. Расчет ламинарного отрывного течения с присоединением ($x^* = b_1 x/b_0$, $b_0 = 30.48$ м/с, $b_1 = 300$ с$^{-1}$); ——— модель частично параболизованных уравнений Навье — Стокса [Madavan, Pletcher, 1982]; ○ полные уравнения Навье — Стокса [Brilley, 1971].

в продольном направлении и 18 в поперечном. Рассогласование в выполнении уравнения неразрывности в любом сечении сводилось к менее чем 1 % от массового расхода в канале за 7 глобальных итераций.

Результаты расчетов по модели частично параболизованных уравнений Навье — Стокса для отрывных внешних течений [Madavan, Pletcher, 1982] сравниваются с численными решениями уравнений Навье — Стокса [Briley, 1971] (рис. 8.8). Поток отрывается под влиянием внешнего течения, тормозящегося по линейному закону. Где-то ниже точки отрыва скорость внешнего потока становится постоянной, что приводит к присоединению оторвавшегося потока. Обратное течение существует примерно на трети протяженности всей расчетной области в продольном направлении. В расчетах по модели частично параболизованных уравнений Навье — Стокса сетка состояла из 35 узлов в продольном и 32 узлов в поперечном направлениях. Потребовалось сделать 16 глобальных итераций, чтобы свести рас-

согласование по уравнению неразрывности до 1 % от массового расхода в любом сечении канала, и 43 глобальных итерации, чтобы уменьшить эту цифру до 0.05 %.

## § 8.5. Уравнения вязкого ударного слоя

Уравнения вязкого ударного слоя являются еще более приближенными, чем параболизованные уравнения Навье — Стокса. По сложности они занимают промежуточное положение между параболизованными уравнениями Навье — Стокса и уравнениями пограничного слоя. Главное достоинство уравнений вязкого ударного слоя в том, что они остаются гиперболически-параболическими в продольном и поперечном направлениях. Поэтому уравнения вязкого ударного слоя можно решать маршевым методом по обоим направлениям аналогично тому, как это делают в случае трехмерных уравнений пограничного слоя. Совсем наоборот обстоит дело в случае параболизованных уравнений Навье — Стокса, которые необходимо решать сразу во всей плоскости поперечного сечения. Следовательно, уравнения вязкого ударного слоя могут быть решены (в большинстве случаев) с меньшими затратами машинного времени, нежели параболизованные уравнения Навье — Стокса.

Еще одно достоинство уравнений вязкого ударного слоя состоит в том, что их можно использовать для расчета дозвукового течения вязкой жидкости вблизи затупленной носовой части, где параболизованные уравнения Навье — Стокса неприменимы. Следовательно, для тел с затупленной носовой частью можно использовать уравнения вязкого ударного слоя, чтобы получить начальное приближение, необходимое для дальнейших расчетов по модели параболизованных уравнений Навье — Стокса. Основным недостатком уравнений вязкого ударного слоя является то, что их нельзя применять для расчетов течений с отрывом в поперечном направлении. Это связано с тем, что они не являются эллиптическими в поперечной плоскости.

Идея применения уравнений типа вязкого ударного слоя для расчета обтекания затупленных тел при больших числах Маха впервые была высказана в работах [Cheng, 1963; Davis, Flügge-Lotz, 1964]. Как уже отмечалось, решение уравнений типа уравнений вязкого ударного слоя исключает необходимость явного определения погранслойных эффектов второго порядка — завихренности и толщины вытеснения. Более того, здесь отсутствуют трудности сращивания вязкого и невязкого решений, когда происходит слияние пограничного слоя с внешним невязким течением.

В работах, где применяли уравнения вязкого ударного слоя, самым успешным был метод Дэвиса [Davis, 1970]. Он решал осесимметричные уравнения вязкого ударного слоя, чтобы рассчитать гиперзвуковое ламинарное обтекание гиперболоида. Дэвис вывел уравнения вязкого ударного слоя следующим образом. Сначала приводятся к безразмерному виду уравнения Навье — Стокса с переменными порядка единицы в пограничном слое при больших числах Рейнольдса. Аналогично получается другая система уравнений путем приведения к безразмерному виду уравнений Навье — Стокса с переменными порядка единицы в невязкой части поля течения. В обеих системах сохраняются члены вплоть до второго порядка по параметру $\varepsilon$:

$$\varepsilon = \left[\frac{\mu_{\text{ref}}}{\rho_\infty V_\infty r_{\text{nose}}}\right]^{1/2}, \tag{8.136}$$

где коэффициент вязкости $\mu_{\text{ref}}$ рассчитывается по характерной температуре:

$$T_{\text{ref}} = V_\infty^2 / c_{p_\infty}. \tag{8.137}$$

Затем эти две системы уравнений сравниваются и объединяются в одну, уравнения которой пригодны в области между телом и ударной волной с точностью до членов второго порядка малости. В двумерном ($m = 0$) и осесимметричном ($m = 1$) случаях в системе координат, связанной с телом (см. рис. 5.3), безразмерные уравнения вязкого ударного слоя записываются в следующем виде:

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*}\left[(r^* + \eta^* \cos\phi)^m \rho^* u^*\right] + \frac{\partial}{\partial \eta^*}\left[(1 + K^*\eta^*)(r^* + \eta^* \cos\phi)^m \rho^* v^*\right] = 0. \tag{8.138}$$

*Уравнение движения по координате* $\xi$

$$\rho^*\left[\frac{u^*}{1 + K^*\eta^*}\frac{\partial u^*}{\partial \xi^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial \eta^*} + \frac{K^* u^* v^*}{1 + K^*\eta^*}\right] + \frac{1}{1 + K^*\eta^*}\frac{\partial p^*}{\partial \xi^*} = \\ = \frac{\varepsilon^2}{(1 + K^*\eta^*)^2 (r^* + \eta^* \cos\phi)^m}\frac{\partial}{\partial \eta^*}\left[(1 + K^*\eta^*)^2 (r^* + \eta^* \cos\phi)^m \tau^*\right], \tag{8.139}$$

где

$$\tau^* = \mu^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta^*} - \frac{K^* u^*}{1 + K^*\eta^*}\right).$$

*Уравнение движения по координате* $\eta$

$$\rho^*\left[\frac{u^*}{1 + K^*\eta^*}\frac{\partial v^*}{\partial \xi^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial \eta^*} - \frac{K^*(u^*)^2}{1 + K^*\eta^*}\right] + \frac{\partial p^*}{\partial \eta^*} = 0. \tag{8.140}$$

*Уравнение энергии*

$$\rho^*\left(\frac{u^*}{1+K^*\eta^*}\frac{\partial T^*}{\partial \xi^*}+v^*\frac{\partial T^*}{\partial \eta^*}\right)-\frac{u^*}{1+K^*\eta^*}\frac{\partial p^*}{\partial \xi^*}-v^*\frac{\partial p^*}{\partial \eta^*}=\frac{\varepsilon^2(\tau^*)^2}{\mu^*}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{(1+K^*\eta^*)(r^*+\eta^*\cos\phi)^m}\frac{\partial}{\partial \eta^*}\left[(1+K^*\eta^*)(r^*+\eta^*\cos\phi)^m\frac{\mu^*}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial T^*}{\partial \eta^*}\right]. \tag{8.141}$$

Эти уравнения были обезразмерены следующим образом:

$$\xi^*=\frac{\xi}{r_{\text{nose}}},\quad \eta^*=\frac{\eta}{r_{\text{nose}}},\quad r^*=\frac{r}{r_{\text{nose}}},\quad K^*=\frac{K}{r_{\text{nose}}},$$
$$u^*=\frac{u}{V_\infty},\quad v^*=\frac{v}{V_\infty},\quad T^*=\frac{T}{T_{\text{ref}}}, \tag{8.142}$$
$$\rho^*=\frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2},\quad \rho^*=\frac{\rho}{\rho_\infty},\quad \mu^*=\frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}.$$

В предположении тонкого ударного слоя нормальное уравнение движения сводится к уравнению движения по координате $\eta$ в приближении тонкого ударного слоя

$$\frac{\partial p^*}{\partial \eta^*}=\frac{K^*\rho^*(u^*)^2}{1+K^*\eta^*}. \tag{8.143}$$

Приведенные выше уравнения легко можно переписать для декартовой системы координат в двух измерениях, полагая

$$m=0,\quad K^*=0,\quad x^*=\xi^*,\quad y^*=\eta^*. \tag{8.144}$$

Записанные в декартовой системе координат уравнения вязкого ударного слоя можно сравнить с параболизованными уравнениями Навье — Стокса [уравнения (8.29) — (8.33)]. Оказывается, что уравнения неразрывности и движения по координате $x$ в этом случае совпадают, а уравнения движения по координате $y$ и уравнение энергии вязкого ударного слоя проще соответствующих параболизованных уравнений Навье — Стокса.

В методе решения, который впервые предложил Дэвис, переменные в уравнениях вязкого ударного слоя относят к параметрам потока за ударной волной. Это позволяет использовать одну и ту же сетку в направлении, нормальном к поверхности тела, для всего поля течения вокруг тела. Используя приближение тонкого слоя, рассчитывают начальное приближение. В этом приближении уравнения вязкого ударного слоя являются полностью параболическими, что позволяет применять стандартные алгоритмы решения уравнений пограничного слоя. В последующих глобальных итерациях используется уже полное уравнение движения по нормальному направлению. К тому же на первой глобальной итерации считают, что ударная волна

является концентрической. Такое допущение возможно, так как рассматривались только тела в форме гиперболоида из-за трудностей, обусловленных разрывом кривизны в случае конфигураций типа сфера—конус. На второй итерации угол наклона ударной волны рассчитывался по толщине ударного слоя, вычисленной на первой итерации.

Решение маршевым методом начинали, исходя из приближенно найденного решения на линии тока вблизи критической точки. Это решение получалось из уравнений вязкого ударного слоя, которые в этом случае сводились к обыкновенным дифференциальным уравнениям вдоль $\xi = 0$. Решение в каждом последующем сечении по $\xi$ получалось путем решения каждого из уравнений вязкого ударного слоя отдельно в такой последовательности:

1) уравнение энергии;
2) уравнение движения по координате $\xi$;
3) уравнение неразрывности;
4) уравнение движения по координате $\eta$.

Метод Дэвиса оказался неудовлетворительным по нескольким причинам. Прежде всего его применение ограничено телами с аналитически заданной формой (например, гиперболоид). Эту трудность первыми разрешили Майнер и Льюис [Miner, Lewis, 1975], которым удалось рассчитать обтекание конфигурации сфера—конус. Они в качестве начального приближения взяли форму ударной волны такой, какой она получается из решения задачи об обтекании затупленного тела невязким газом, а вблизи сочленения сфера—конус воспользовались переходной функцией, чтобы получить гладкое распределение кривизны. Позднее Сривастава и др. [Srivastava et al., 1978] преодолели это ограничение за счет дискретизации специального вида, аппроксимирующей резкое изменение параметров, когда функция, задающая поверхность, терпит разрыв.

Другой недостаток оригинального метода Дэвиса — плохая сходимость формы ударной волны, когда последняя утолщается. Эту трудность преодолели Сривастава и др. [Srivastava et al., 1978, 1979], которые заметили, что релаксационный процесс, связанный с формой ударной волны, аналогичен взаимодействию толщины вытеснения и внешнего невязкого течения в теории сверхзвукового взаимодействующего пограничного слоя. В результате проблему сходимости формы ударной волны удалось разрешить при помощи неявного метода переменных направлений [Werle, Vatsa, 1974] для взаимодействующих пограничных слоев.

Еще один недостаток метода Дэвиса состоит в том, что с его помощью нельзя получить решение в области дальнего следа

за тонкими телами. Это является следствием того, что уравнения вязкого ударного слоя решаются раздельно. В частности, два уравнения с первым порядком аппроксимации (неразрывности и движения в нормальном направлении) вводили неустойчивости, которые росли в продольном направлении. Решая уравнения неразрывности и движения в нормальном направлении совместно, Васкевицу и др. [Waskiewicz et al., 1978] удалось справиться с проблемой неустойчивости. Этого же добились Хосни и др. [Hosny et al., 1978], решая все квазилинеаризованные уравнения вязкого ударного слоя одновременно.

Когда все названные выше трудности удалось преодолеть, стало возможно применение уравнений вязкого ударного слоя к более сложным задачам. Мёррей и Льюис [Murray, Lewis, 1978] использовали их для расчета обтекания трехмерных тел общей формы под углом атаки. Их алгоритм с успехом применялся и во многих других задачах. Не так давно в работах, выполненных под руководством Льюиса, были учтены эффекты турбулентности [Szema, Lewis, 1980] и свойства реальных газов [Thareja et al., 1982; Swaminathan et al., 1983].

## § 8.6. Конические уравнения Навье — Стокса

При рассмотрении конического приближения течений невязкой жидкости пользуются тем обстоятельством, что в поле течения, окруженного коническими границами, отсутствует масштаб длины в коническом направлении. В результате не происходит изменений параметров течения в радиальном направлении и трехмерная задача течения невязкой жидкости сводится к двумерной. Это приводит к автомодельному решению, которое одно и то же для всех постоянных значений радиуса и масштабируется линейно при изменении радиуса. Приближение конического течения строго справедливо только для течений невязкой жидкости. Однако даже в таком поле течения эксперимент обнаруживает вязкие области, над которыми доминирует коническое невязкое течение.

В этих случаях Андерсон [Anderson, 1982] предложил быстрое вычисление теплопередачи и трения при помощи решения нестационарных уравнений Навье — Стокса методом установления на единичной сфере с производными в радиальном направлении, равными нулю. Таким образом, уравнения Навье — Стокса решаются в локальном коническом приближении. Мы будем называть уравнения, которые решаются подобным образом, *коническими* уравнениями Навье — Стокса. Местное число Рейнольдса определяется по радиусу, на котором производятся вычисления. В результате решение не является автомодельным в

смысле конического течения невязкой жидкости, а масштабируется по местному числу Рейнольдса, которое входит в результирующую систему уравнений.

Сначала конические уравнения Навье — Стокса использовались [McRae, 1976] для расчета обтекания конуса ламинарным потоком под большим углом атаки. Позже они применялись для расчета ламинарного обтекания дельтовидного крыла [Vigneron et al., 1978; Bluford, 1978] и трехмерного течения в двугранном угле [Tannehill, Anderson, 1980]. Модель вихревой вязкости и конические уравнения Навье — Стокса использовались в работе [McRae, Hussaini, 1978] для расчета турбулентного обтекания конуса под большим углом атаки. Во всех названных случаях (кроме одного, когда невязкое течение не было полностью коническим) рассчитанные вязкая и невязкая структуры удивительно хорошо совпадали с имеющимися экспериментальными данными.

Конические уравнения Навье — Стокса оказались полезными еще и потому, что дают вполне хорошие начальные приближения для расчетов по модели параболизованных уравнений Навье — Стокса обтекания конических (или заостренных) тел. Шифф и Стегер [Schiff, Steger, 1979] включили маршевый с шагами назад метод в свой алгоритм решения параболизованных уравнений Навье — Стокса, что эквивалентно решению конических уравнений Навье — Стокса в соответствии с описанным выше методом установления. При этом параметры потока сначала принимаются равными их значениям в свободном потоке и уравнения решаются маршем от $x = x_0$ до $x = x_0 + \Delta x$ при помощи той же явной схемы, которая применялась при решении параболизованных уравнений Навье — Стокса, но с $\partial p/\partial x = 0$. После каждого шага по маршевой координате решение масштабируется по уже имеющимся параметрам потока в точке $x = x_0$. Вычисления повторяются до тех пор, пока параметры потока не перестанут изменяться.

Конические уравнения Навье — Стокса получают из полных уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial z^*} = 0, \tag{8.145}$$

где $\mathbf{U}^*$, $\mathbf{E}^*$, $\mathbf{F}^*$ и $\mathbf{G}^*$ — безразмерные векторы, определяемые выражениями (5.46). К этим уравнениям применяется сначала коническое преобразование вида

$$\begin{aligned} \alpha &= [(x^*)^2 + (y^*)^2 + (z^*)^2]^{1/2}, \\ \beta &= \frac{y^*}{x^*}, \quad \gamma = \frac{z^*}{x^*}, \quad \tau = t^*, \end{aligned} \tag{8.146}$$

Полученные преобразованные уравнения можно записать в строго дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\alpha^2}{\lambda^3}\mathbf{U}^*\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\alpha^2}{\lambda^4}(\mathbf{E}^*+\beta\mathbf{F}^*+\gamma\mathbf{G}^*)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\alpha}{\lambda^2}(-\beta\mathbf{E}^*+\mathbf{F}^*)\right]+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{\alpha}{\lambda^2}(-\gamma\mathbf{E}^*+\mathbf{G}^*)\right]=0, \quad (8.147)$$

где $\lambda=(1+\beta^2+\gamma^2)^{1/2}$. Допущение местной конической автомодельности требует, чтобы

$$\frac{\partial\mathbf{E}^*}{\partial\alpha}=0, \quad \frac{\partial\mathbf{F}^*}{\partial\alpha}=0, \quad \frac{\partial\mathbf{G}^*}{\partial\alpha}=0. \quad (8.148)$$

Тогда уравнение (8.147) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\alpha^2}{\lambda^3}\mathbf{U}^*\right)+\frac{2\alpha}{\lambda^4}(\mathbf{E}^*+\beta\mathbf{F}^*+\gamma\mathbf{G}^*)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\alpha}{\lambda^2}(-\beta\mathbf{E}^*+\mathbf{F}^*)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{\alpha}{\lambda^2}(-\gamma\mathbf{E}^*+\mathbf{G}^*)\right]=0. \quad (8.149)$$

Решение рассчитывается на сферической поверхности радиуса $r^*=r/L$, равного единице. На этой поверхности $\alpha=1$, так как

$$r^*=[(x^*)^2+(y^*)^2+(r^*)^2]^{1/2}=\alpha.$$

Следовательно, уравнение (8.149) можно переписать в виде

$$\frac{\partial\mathbf{U}_4}{\partial\tau}+\frac{\partial\mathbf{F}_4}{\partial\beta}+\frac{\partial\mathbf{G}_4}{\partial\gamma}+\mathbf{H}_4=0, \quad (8.150)$$

где

$$\mathbf{U}_4=\frac{\mathbf{U}^*}{\lambda^3}, \quad \mathbf{F}_4=\frac{-\beta\mathbf{E}^*+\mathbf{F}^*}{\lambda^2},$$
$$\mathbf{G}_4=\frac{-\gamma\mathbf{E}^*+\mathbf{G}^*}{\lambda^2}, \quad \mathbf{H}_4=\frac{2(\mathbf{E}^*+\beta\mathbf{F}^*+\gamma\mathbf{G}^*)}{\lambda^4}. \quad (8.151)$$

Частные производные в вязких членах $\mathbf{E}^*$, $\mathbf{F}^*$ и $\mathbf{G}^*$ легко преобразуются при помощи соотношений

$$\frac{\partial}{\partial x^*}=-\beta\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}-\gamma\lambda\frac{\partial}{\partial\gamma},$$
$$\frac{\partial}{\partial y^*}=\lambda\frac{\partial}{\partial\beta}, \quad (8.152)$$
$$\frac{\partial}{\partial z^*}=\lambda\frac{\partial}{\partial\gamma}.$$

Поэтому выражения для сдвиговых напряжений и тепловых потоков, заданные уравнениями (5.47), принимают следующий

вид:

$$\tau^*_{xx} = \frac{2\mu^*}{3\,\mathrm{Re}_L}(-2\beta\lambda u^*_\beta - 2\gamma\lambda u^*_\gamma - \lambda v^*_\beta - \lambda w^*_\gamma),$$

$$\tau^*_{yy} = \frac{2\mu^*}{3\,\mathrm{Re}_L}(2\lambda v^*_\beta + \beta\lambda u^*_\beta + \gamma\lambda u^*_\gamma - \lambda w^*_\gamma),$$

$$\tau^*_{zz} = \frac{2\mu^*}{3\,\mathrm{Re}_L}(2\lambda w^*_\gamma + \beta\lambda u^*_\beta + \gamma\lambda u^*_\gamma - \lambda v^*_\beta),$$

$$\tau^*_{xy} = \frac{\mu^*}{\mathrm{Re}_L}(\lambda u^*_\beta - \beta\lambda v^*_\beta - \gamma\lambda v^*_\gamma),$$

$$\tau^*_{xz} = \frac{\mu^*}{\mathrm{Re}_L}(\lambda u^*_\gamma - \beta\lambda w^*_\beta - \gamma\lambda w^*_\gamma), \qquad (8.153)$$

$$\tau^*_{yz} = \frac{\mu^*}{\mathrm{Re}_L}(\lambda v^*_\gamma + \lambda w^*_\beta),$$

$$q^*_x = \frac{\mu^*}{(\gamma-1)\,M^2_\infty\,\mathrm{Re}_L\,\mathrm{Pr}}(-\beta\lambda T^*_\beta - \gamma\lambda T^*_\gamma),$$

$$q^*_y = \frac{\mu^*}{(\gamma-1)\,M^2_\infty\,\mathrm{Re}_L\,\mathrm{Pr}}\lambda T^*_\beta,$$

$$q^*_z = \frac{\mu^*}{(\gamma-1)\,M^2_\infty\,\mathrm{Re}_L\,\mathrm{Pr}}\lambda T^*_\gamma.$$

Отметим, что в выражениях для сдвиговых напряжений и тепловых потоков фигурирует число Рейнольдса $\mathrm{Re}_L$. Оно рассчитывается по формуле

$$\mathrm{Re}_L = \rho_\infty V_\infty L/\mu_\infty, \qquad (8.154)$$

где $L$ — радиус сферической поверхности, на которой вычисляется решение. Следовательно, решения конических уравнений Навье — Стокса прямо зависят от величины радиуса $r = L$, на котором они вычисляются. Это и отличает их от невязких решений, которые не зависят от $r$ и поэтому являются действительно коническими.

Конические уравнения Навье — Стокса можно решать, используя зависящие от времени алгоритмы, которые будут рассматриваться в гл. 9 в связи с решением двумерных уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости. Поэтому отложим обсуждение разностных схем для решения конических уравнений Навье — Стокса. В заключение следует напомнить, что конические уравнения Навье — Стокса являются весьма приближенной формой полных уравнений Навье — Стокса, поэтому ими нельзя пользоваться в тех случаях, когда требуется высокая степень точности.

## Задачи

**8.1.** Проверьте уравнение (8.8).

**8.2.** Выведите уравнения (8.9) — (8.11).

**8.3.** Сведите записанные в декартовой системе координат уравнения в приближении тонкого слоя к системе уравнений на границе, на которой нет проскальзывания ($y = 0$). Предположите, что стенка поддерживается при постоянной температуре $T_w$.

**8.4.** Сведите записанные в криволинейной системе координат уравнения в приближении тонкого слоя (уравнения (8.9)—(8.11)) к системе уравнений на границе, на которой нет проскальзывания ($\eta = 0$). Предположите, что стенка поддерживается при постоянной температуре $T_w$.

**8.5.** Получите уравнение (8.15) из (5.19).

**8.6.** Получите уравнение (8.16) из (5.19).

**8.7.** Получите уравнение (8.17) из (5.31).

**8.8.** Получите уравнение (8.23) из (8.17).

**8.9.** Выведите уравнения ламинарного сжимаемого пограничного слоя из уравнений (8.14)—(8.17). Заметим, что $\Delta^2 \sim O(1)$ и $(\Delta/\delta^*)^2 \gg 1$.

**8.10.** Используйте приближение тонкого слоя для уравнений (8.37)—(8.39) и покажите, что они эквивалентны уравнениям (8.40), (8.10) и (8.11).

**8.11.** Проверьте, что уравнение (8.44) эквивалентно уравнению (8.43).

**8.12.** Покажите, что собственные значения уравнения (8.44) задаются уравнением (8.45). *Подсказка*: $|\lambda[I] - [A_1]^{-1}[B_1]| = |[A_1]^{-1}|\,|\lambda[A_1] - [B_1]|$.

**8.13.** Выведите уравнение (8.47).

**8.14.** Проверьте уравнения (8.48)—(8.49).

**8.15.** Выведите уравнение (8.50).

**8.16.** Для параметров потока $M_x = 0.6$, $\mathrm{Re}/L = \rho u/\mu = 1000/m$, $\gamma = 1.4$, $\mathrm{Pr} = 0.72$ решите уравнение (8.50) и покажите, что его корни будут вещественными, если $\omega = 0.4$, что удовлетворяет уравнению (8.52).

**8.17.** Решите задачу 8.16 с $\omega = 0.5$ и покажите, что по крайней мере один корень уравнения (8.50) не будет вещественным и положительным.

**8.18.** Если все собственные значения уравнения (8.50) вещественные, то покажите, что они положительные, если удовлетворены условия, заданные уравнениями (8.51) и (8.52).

**8.19.** Поместите множитель $\omega$ перед членом в уравнениях энергии и движения в продольном направлении и оцените условия, при которых уравнение (8.44) остается гиперболическим, если $\omega < 1$. Считайте, что $v \ll u$.

**8.20.** Линеаризуйте следующие члены, используя уравнение (8.61).

(a) $u^{m+1}_{i+1,\,j,\,k} v^{m+1}_{i+1,\,j,\,k}$;

(b) $\left(u^{m+1}_{i+1,\,j,\,k}\right)^2 v^{m+1}_{i+1,\,j,\,k}$;

(c) $\left(u^{m+1}_{i+1,\,j,\,k}\right)^3 v^{m+1}_{i+1,\,j,\,k}$.

(d) $u^{m+1}_{i+1,\,j,\,k} v^{m+1}_{i+1,\,j,\,k} w^{m+1}_{i+1,\,j,\,k}$;

(e) $u^{m+1}_{i+1,\,j,\,k} \left(v^{m+1}_{i+1,\,j,\,k}\right)^2 w^{m+1}_{i+1,\,j,\,k}$.

**8.21.** Выведите выражение для матрицы Якоби $\partial \mathbf{E}^*/\partial \mathbf{U}$, заданное уравнением (8.78).

**8.22.** Выведите уравнение для матрицы Якоби $\partial \mathbf{F}/\partial \mathbf{U}$, заданное выражением (8.79).

**8.23.** Выведите выражение для матрицы Якоби $\partial \mathbf{G}/\partial \mathbf{U}$, заданное уравнением (8.80).

**8.24.** Если приближенно положить, что $\omega \approx \gamma M_x^2$, выведите выражение для матрицы Якоби $\partial \mathbf{E}^*/\partial \mathbf{U}$, уже не считая $\omega$ не зависящим от $\mathbf{U}$.

**8.25.** Выведите выражение для матрицы Якоби $\partial \mathbf{F}_v/\partial \mathbf{U}$, заданное уравнением (8.84).

**8.26.** Выведите выражение для матрицы Якоби $\partial \mathbf{G}_v/\partial \mathbf{U}$, заданное уравнением (8.85).

**8.27.** Элементы матрицы $[C]_k$ в уравнении (8.98) можно представить в виде $(c_{lm})_k$, где $l = 1, 2, \ldots, 5$ и $m = 1, 2, \ldots, 5$. Определите элемент $(c_{24})_k$.

**8.28.** Определите элемент $(c_{32})_k$ в задаче 8.27.

**8.29.** Определите элемент $(c_{43})_k$ в задаче 8.27.

**8.30.** Элементы матрицы $[B]_k$ в уравнении (8.98) можно представить в виде $(b_{lm})_k$, где $l = 1, 2, \ldots, 5$ и $m = 1, 2, \ldots, 5$. Определите элемент $(b_{24})_k$.

**8.31.** Определите элемент $(b_{43})_k$ в задаче 8.30.

**8.32.** Определите элементы $(a_{33})_k$, $(b_{33})_k$ и $(c_{33})_k$ матриц $[A]_k$, $[B]_k$ и $[C]_k$ в уравнении (8.98).

**8.33.** Воспользуйтесь разностной формулой (8.70) для двумерного параболизованного уравнения Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0$$

и постройте алгоритм, аналогичный заданному уравнениями (8.94)—(8.97) для трехмерного параболизованного уравнения Навье—Стокса.

**8.34.** Разработайте детали алгоритма коррекции скорости для трехмерной параболизованной процедуры в случае течения сжимаемой жидкости в канале прямоугольного сечения. Используйте метод потенциала $\hat{\phi}$ и $p'$-метод. Воспользуйтесь сеткой с расположением узлов в шахматном порядке.

**8.35.** Дискретизируйте уравнение движения по координате $y$ для модели частично параболизованных уравнений Навье—Стокса, следуя процедуре, описанной в п. 8.4.3 для уравнения движения по координате $x$.

**8.36.** Покажите, что описанная для уравнения Пуассона для давления в модели частично параболизованных уравнений Навье-Стокса формули-

ровка задачи удовлетворяет следующему условию:

$$\iint S_p \, dx \, dy = \int \frac{\partial p}{\partial n} \, dC.$$

**8.37.** Предложите способ распространения модели частично параболизованных уравнений Навье—Стокса на трехмерные течения.

**8.38.** Объясните, как формулировать граничные условия на границе, которая является линией симметрии (например, ось двумерного канала), в случае применения сетки с расположением узлов в шахматном порядке. Объясните в терминах алгоритма прогонки.

**8.39.** Примените к уравнению (8.145) преобразование переменных $\alpha = x^*$, $\beta = y^*/x^*$, $\gamma = z^*/x^*$, $\tau = t^*$ и выведите конические уравнения Навье—Стокса, которые используйте далее к расчету решения в сечении $x = L$, где $\alpha = x^* = 1$.

Глава 9

# Численные методы решения уравнений Навье — Стокса

## § 9.1. Введение

Для некоторых задач расчета течения вязкой жидкости нельзя получить точное решение при помощи упрощенных уравнений, обсуждавшихся в гл. 6—8. К примерам таких задач относятся взаимодействие ударной волны с пограничным слоем, обтекание входной кромки, некоторые волновые течения в следе и другие течения с сильным вязко-невязким взаимодействием и большими отрывными зонами. В этих случаях необходимо решать полные уравнения Навье — Стокса (или осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса). К сожалению, эти уравнения очень сложны, и их решение требует больших затрат машинного времени. Если, однако, жидкость несжимаема, то уравнения существенно упрощаются и соответственно уменьшается время, необходимое для их решения.

Нестационарные уравнения Навье — Стокса для сжимаемой жидкости образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений, а для несжимаемой жидкости — эллиптически-параболических уравнений. Поэтому приходится использовать разные численные методы решения уравнений Навье — Стокса в этих двух случаях, что и будет предметом обсуждения в настоящей главе.

## § 9.2. Уравнения Навье — Стокса для сжимаемой жидкости

Для сжимаемой жидкости уравнения Навье — Стокса в отсутствие массовых сил и подвода тепла извне можно записать (см. п. 5.1.5) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0, \tag{9.1}$$

где векторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ задаются следующими выражениями:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \tag{9.2}$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2+p-\tau_{xx} \\ \rho uv-\tau_{xy} \\ \rho uw-\tau_{xz} \\ (E_t+p)u-u\tau_{xx}-v\tau_{xy}-w\tau_{xz}+q_x \end{bmatrix}, \tag{9.3}$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv-\tau_{xy} \\ \rho v^2+p-\tau_{yy} \\ \rho vw-\tau_{yz} \\ (E_t+p)v-u\tau_{xy}-v\tau_{yy}-w\tau_{yz}+q_y \end{bmatrix}, \tag{9.4}$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw-\tau_{xz} \\ \rho vw-\tau_{yz} \\ \rho w^2+p-\tau_{zz} \\ (E_t+p)w-u\tau_{xz}-v\tau_{yz}-w\tau_{zz}+q_z \end{bmatrix}, \tag{9.5}$$

а компоненты тензора сдвиговых напряжений и вектора теплового потока имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{xx}&=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\ \tau_{yy}&=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\ \tau_{zz}&=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\ \tau_{xy}&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\tau_{yx},\\ \tau_{xz}&=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\tau_{zx},\\ \tau_{yz}&=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\tau_{zy},\\ q_x&=-k\frac{\partial T}{\partial x},\quad q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y},\quad q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Эти уравнения можно записать в криволинейной ортогональной системе координат $x_1$, $x_2$, $x_3$, используя формулы из п. 5.1.7. Уравнения Навье — Стокса для сжимаемой жидкости можно также записать и в криволинейной неортогональной системе

координат $\xi$, $\eta$, $\zeta$, выполняя преобразование координат (см. п. 5.6.2)

$$\xi = \xi(x, y, z),$$
$$\eta = \eta(x, y, z), \tag{9.7}$$
$$\zeta = \zeta(x, y, z).$$

Вид преобразованных уравнений (8.34) — (8.36) приведен в гл. 8.

В § 8.2 обсуждалось приближение тонкого слоя уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости. В его рамках в полных уравнениях Навье — Стокса можно опустить ряд членов. Однако при этом сохраняется математическая природа исходных уравнений, поэтому как те, так и другие уравнения решаются сходным образом. В гл. 8 приведены уравнения Навье — Стокса в приближении тонкого слоя, записанные в декартовой системе координат (уравнения (8.2) — (8.6)) и в криволинейной неортогональной системе координат (уравнения (8.9) — (8.12)).

Для турбулентных течений пользуются осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье — Стокса. Используя гипотезу Буссинеска (см. п. 5.4.2), уравнения Навье — Стокса можно заменить на модельные осредненные по Рейнольдсу уравнения подстановкой $\mu + \mu_T$ вместо коэффициента вязкости $\mu$ и подстановкой $k + k_T$ вместо коэффициента теплопроводности $k$, где $\mu_T$ — вихревая вязкость и $k_T$ — коэффициент турбулентной теплопроводности. Коэффициент турбулентной теплопроводности $k_T$ можно выразить через вихревую вязкость $\mu_T$ и турбулентное число Прандтля $\mathrm{Pr}_T$ следующим образом:

$$k_T = c_p \mu_T / \mathrm{Pr}_T. \tag{9.8}$$

Методы расчета $\mu_T$ подробно были описаны в § 5.4.

Как уже говорилось, нестационарные уравнения Навье — Стокса для сжимаемой жидкости образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений относительно времени. Если в этих уравнениях опустить нестационарные члены, то полученная смешанная система будет гиперболически-эллиптического типа, решать которую трудно из-за несходства методов численного решения уравнений гиперболического и эллиптического типов. Поэтому едва ли не все успешные случаи решения уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости связаны с нестационарной формой этих уравнений. Стационарное решение получают установлением по времени. Этот подход связан с решением *зависящих от времени* уравнений и будет обсуждаться в данной главе.

Для решения зависящих от времени уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости использовались как явные,

так и неявные схемы. Почти все эти схемы имеют второй порядок точности по пространству и либо первый, либо второй по времени. Если требуется получить точную картину развития течения во времени, то порядок схемы по времени должен быть по крайней мере вторым. Если же нас интересует только установившееся решение, то часто выгодно пользоваться не только точными по времени схемами, так как установление можно получить за меньшее число шагов по времени. Ввиду большой дополнительной сложности имеется мало сообщений о применении схем третьего порядка (и выше) в расчетах уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости. Многие понимают, что выбор схем второго порядка является оптимальным, поскольку бóльшая точность требует существенно больших затрат машинного времени. Имеется превосходная обзорная статья [Peyret, Viviand, 1975] по расчетам уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости, выполненным до 1976 г. Теперь перейдем к подробному обсуждению методов решения уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости.

### 9.2.1. Явный метод Мак-Кормака

Применение схемы Мак-Кормака [MacCormack, 1969] к уравнениям Навье — Стокса для сжимаемой жидкости (9.1) приводит к следующему алгоритму:

*Предиктор*

$$\overline{\mathbf{U}^{n+1}_{i,j,k}} = \mathbf{U}^{n}_{i,j,k} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{E}^{n}_{i+1,j,k} - \mathbf{E}^{n}_{i,j,k}\right) - \\ - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\mathbf{F}^{n}_{i,j+1,k} - \mathbf{F}^{n}_{i,j,k}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\mathbf{G}^{n}_{i,j,k+1} - \mathbf{G}^{n}_{i,j,k}\right). \quad (9.9)$$

*Корректор*

$$\mathbf{U}^{n+1}_{i,j,k} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{U}^{n}_{i,j,k} + \overline{\mathbf{U}^{n+1}_{i,j,k}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{\mathbf{E}^{n+1}_{i,j,k}} - \overline{\mathbf{E}^{n+1}_{i-1,j,k}}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\overline{\mathbf{F}^{n+1}_{i,j,k}} - \overline{\mathbf{F}^{n+1}_{i,j-1,k}}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\overline{\mathbf{G}^{n+1}_{i,j,k}} - \overline{\mathbf{G}^{n+1}_{i,j,k-1}}\right)\right], \quad (9.10)$$

где $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$ и $z = k\Delta z$. Эта явная схема имеет второй порядок как по пространству, так и по времени. В этом варианте схемы на шаге предиктор для аппроксимации всех пространственных производных используются разности вперед, а на шаге корректор — разности назад. Разности вперед и назад можно последовательно чередовать как на шагах предиктор — корректор, так и при аппроксимации производных по трем пространственным координатам. Это устраняет любое рассогласова-

ние, обусловленное дискретизацией односторонними разностями. Пример подобного чередования приведен в табл. 9.1.

**Таблица 9.1.** Последовательность аппроксимации для схемы Мак-Кормака [1]

| Шаг | Предиктор | | | Корректор | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$-производная | $y$-производная | $z$-производная | $x$-производная | $y$-производная | $z$-производная |
| 1 | В | В | В | Н | Н | Н |
| 2 | Н | Н | В | В | В | Н |
| 3 | В | В | Н | Н | Н | В |
| 4 | Н | В | Н | В | Н | В |
| 5 | В | Н | В | Н | В | Н |
| 6 | Н | В | В | В | Н | Н |
| 7 | В | Н | Н | Н | В | В |
| 8 | Н | Н | Н | В | В | В |
| 9 | В | В | В | Н | Н | Н |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |

[1]) В — разность вперед; Н — разность назад.

Производные в вязких членах **E**, **F** и **G** следует правильно дискретизировать, чтобы сохранить второй порядок точности. Делают это следующим образом. Имеющиеся в **E** производные по координате $x$ аппроксимируются разностями противоположного направления относительно тех, которые используются при аппроксимации $\partial \mathbf{E}/\partial x$, тогда как производные по направлениям $y$ и $z$ аппроксимируются центральными разностями. Аналогично производные по координате $y$ в **F** и производные по координате $z$ в **G** аппроксимируются разностями противоположного направления относительно тех, которые используются при аппроксимации $\partial \mathbf{F}/\partial y$ и $\partial \mathbf{G}/\partial z$ соответственно. Смешанные производные в **F** и **G** аппроксимируются центральными разностями. Рассмотрим, например, компоненту вектора **F**, которая соответствует уравнению движения по координате $x$:

$$F_2 = \rho uv - \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \mu \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9.11}$$

На шаге предиктор, задаваемом уравнением (9.9), она дискретизируется в виде

$$(F_2)^n_{i,j,k} = (\rho uv)^n_{i,j,k} - \mu^n_{i,j,k} \frac{u^n_{i,j,k} - u^n_{i,j-1,k}}{\Delta y} - \mu^n_{i,j,k} \frac{v^n_{i+1,j,k} - v^n_{i-1,j,k}}{2\Delta x}, \tag{9.12}$$

а на шаге корректор, задаваемом уравнением (9.10), — в виде

$$(F_2)^{\overline{n+1}}_{i,\,j-1,\,k} = (\rho u v)^{\overline{n+1}}_{i,\,j-1,\,k} - \mu^{\overline{n+1}}_{i,\,j-1,\,k} \frac{u^{\overline{n+1}}_{i,\,j,\,k} - u^{\overline{n+1}}_{i,\,j-1,\,k}}{\Delta y} - \\ - \mu^{\overline{n+1}}_{i,\,j-1,\,k} \frac{v^{\overline{n+1}}_{i+1,\,j-1,\,k} - v^{\overline{n+1}}_{i-1,\,j-1,\,k}}{2\Delta x}. \qquad (9.13)$$

Из-за большой сложности уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости невозможно получить аналитическое выражение критерия устойчивости для схемы Мак-Кормака, когда она применяется к этим уравнениям. Можно, однако, воспользоваться эмпирической формулой [Tannehill et al., 1975]

$$\Delta t \leqslant \frac{\sigma\,(\Delta t)_{\text{КФЛ}}}{1 + 2/\text{Re}_L}, \qquad (9.14)$$

где $\sigma$ — коэффициент запаса ($\approx 0.9$), $(\Delta t)_{\text{КФЛ}}$ определяется по критерию Куранта — Фридрихса — Леви для невязкой жидкости [MacCormack, 1971]

$$(\Delta t)_{\text{КФЛ}} \leqslant \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} + a\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}\right)^{-1}, \qquad (9.15)$$

$\text{Re}_\Delta$ — минимальное сеточное число Рейнольдса:

$$\text{Re}_\Delta = \min(\text{Re}_{\Delta x},\ \text{Re}_{\Delta y},\ \text{Re}_{\Delta z}), \qquad (9.16)$$

где

$$\text{Re}_{\Delta x} = \frac{\rho\,|u|\,\Delta x}{\mu},\quad \text{Re}_{\Delta y} = \frac{\rho\,|v|\,\Delta y}{\mu},\quad \text{Re}_{\Delta z} = \frac{\rho\,|w|\,\Delta z}{\mu} \qquad (9.17)$$

и $a$ — местная скорость звука: $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$.

Перед очередным шагом по времени для всех точек сетки по уравнению (9.14) можно рассчитать $\Delta t$. Затем наименьшее из $\Delta t$ используется для получения решения на следующем временно́м слое. Если нас интересует только установившееся решение, то, чтобы ускорить сходимость, Ли [Li, 1973] предложил во всех точках сетки использовать максимальное $\Delta t$ из рассчитываемых по (9.14). Для ускорения сходимости можно воспользоваться процедурой последовательной верхней релаксации по линиям, описанной в п. 4.5.6.

После каждого шага предиктор или корректор можно найти примитивные переменные $\rho$, $u$, $v$, $w$, $e$, $p$, $T$, «декодируя» век-

тор **U**:

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\\ U_5\end{bmatrix} \tag{9.18}$$

следующим образом:

$$\rho=U_1,\quad u=\frac{U_2}{U_1},\quad v=\frac{U_3}{U_1},\quad w=\frac{U_4}{U_1},$$
$$e=\frac{U_5}{U_1}-\frac{u^2+v^2+w^2}{2},\quad p=p(\rho,\ e),\quad T=T(\rho,\ e). \tag{9.19}$$

Мак-Кормак [MacCormack, 1971] модифицировал исходный вариант своей схемы, введя в нее расщепление по времени. Применение этого модифицированного метода к вязкому уравнению Бюргерса (см. п. 4.5.8) расщепляет исходную схему Мак-Кормака на последовательность одномерных операций. В результате условие устойчивости, рассчитываемое для одномерной схемы, менее ограничительно, чем для трехмерной схемы. Таким образом, становится возможным продвигаться по каждому направлению с максимально возможным шагом по времени. Это особенно ценно, когда допустимые шаги по времени ($\Delta t_x$, $\Delta t_y$, $\Delta t_z$) сильно разнятся из-за большого различия шагов сетки по разным координатам ($\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$). Чтобы применить этот алгоритм к уравнению (9.19), определим одномерные разностные операторы $L_x(\Delta t_x)$ $L_y(\Delta t_y)$ и $L_z(\Delta t_z)$ следующим образом. Применение оператора $L_x(\Delta t_x)$ к $\mathbf{U}^*_{i,j,k}$:

$$U^{**}_{i,j,k}=L_x(\Delta t_x)\,U^*_{i,j,k} \tag{9.20}$$

эквивалентно двухшаговой формуле

$$\overline{\mathbf{U}}^{**}_{i,j,k}=\mathbf{U}^*_{i,j,k}-\frac{\Delta t_x}{\Delta x}\left(\mathbf{E}^*_{i+1,j,k}-\mathbf{E}^*_{i,j,k}\right),$$
$$\mathbf{U}^{**}_{i,j,k}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{U}^*_{i,j,k}+\overline{\mathbf{U}}^{**}_{i,j,k}-\frac{\Delta t_x}{\Delta x}\left(\overline{\mathbf{E}}^{**}_{i,j,k}-\overline{\mathbf{E}}^{**}_{i-1,j,k}\right)\right]. \tag{9.21}$$

В этих выражениях используются фиктивные временные верхние индексы * и **. Операторы $L_y(\Delta t_y)$ и $L_z(\Delta t_z)$ определяются аналогичным образом. Другими словами, применение оператора $L_y(\Delta t_y)$ к $\mathbf{U}^*_{i,j,k}$:

$$\mathbf{U}^{**}_{i,j,k}=L_y(\Delta t_y)\,\mathbf{U}^*_{i,j,k} \tag{9.22}$$

эквивалентно

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{\overline{**}}_{i,j,k} &= \mathbf{U}^{*}_{i,j,k} - \frac{\Delta t_y}{\Delta y}\left(\mathbf{F}^{*}_{i,j+1,k} - F^{*}_{i,j,k}\right),\\ \mathbf{U}^{**}_{i,j,k} &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{U}^{*}_{i,j,k} + \mathbf{U}^{\overline{**}}_{i,j,k} - \frac{\Delta t_y}{\Delta y}\left(\mathbf{F}^{\overline{**}}_{i,j,k} - \mathbf{F}^{\overline{**}}_{i,j-1,k}\right)\right],\end{aligned} \tag{9.23}$$

а применение оператора $L_z(\Delta t_z)$ к $\mathbf{U}^{*}_{i,j,k}$:

$$\mathbf{U}^{**}_{i,j,k} = L_z(\Delta t_z)\,\mathbf{U}^{*}_{i,j,k} \tag{9.24}$$

эквивалентно

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{\overline{**}}_{i,j,k} &= \mathbf{U}^{*}_{i,j,k} - \frac{\Delta t_z}{\Delta z}\left(\mathbf{G}^{*}_{i,j,k+1} - \mathbf{G}^{*}_{i,j,k}\right),\\ \mathbf{U}^{**}_{i,j,k} &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{U}^{*}_{i,j,k} + U^{\overline{**}}_{i,j,k} - \frac{\Delta t_z}{\Delta z}\left(\mathbf{G}^{\overline{**}}_{i,j,k} - \mathbf{G}^{\overline{**}}_{i,j,k-1}\right)\right].\end{aligned} \tag{9.25}$$

Как упоминалось в п. 4.5.8, последовательность операторов является согласованной, если для каждого оператора суммы шагов по времени равны, и имеет второй порядок точности, если она симметрична. В применении к уравнению (9.1) последовательность, удовлетворяющая этому критерию, задается выражением

$$\mathbf{U}^{n+2}_{i,j,k} = L_x(\Delta t_x)\,L_y(\Delta t_y)\,L_z(\Delta t_z)\,L_z(\Delta t_z)\,L_y(\Delta t_y)\,L_x(\Delta t_x)\,\mathbf{U}^{n}_{i,j,k}. \tag{9.26}$$

Другая последовательность, удовлетворяющая этому критерию и применяемая, когда $\Delta y \ll \min(\Delta x, \Delta z)$, задается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{n+2}_{i,j,k} = L_x(\Delta t_x)\left[L_y\left(\frac{\Delta t_y}{m}\right)\right]^m L_z(\Delta t_z)\,L_z(\Delta t_z)\times\\ \times\left[L_y\left(\frac{\Delta t_y}{m}\right)\right]^m L_x(\Delta t_x)\,\mathbf{U}^{n}_{i,j,k},\end{aligned} \tag{9.27}$$

где $m$ — целое.

Алгоритм, полученный в результате применения последовательностей операторов, таких, как уравнения (9.26) и (9.27), устойчив, если размер шага по времени в аргументе каждого из операторов не превосходит разрешенного для этого оператора максимального значения. Так как не представляется возможным проанализировать устойчивость каждого из операторов применительно к полным уравнениям Навье — Стокса, для них можно использовать одномерные эмпирические критерии устой-

чивости

$$\Delta t_x \leqslant \frac{\sigma \Delta x}{(|u|+a)(1+2/\mathrm{Re}_{\Delta x})},$$
$$\Delta t_y \leqslant \frac{\sigma \Delta y}{(|v|+a)(1+2/\mathrm{Re}_{\Delta y})}, \qquad (9.28)$$
$$\Delta t_z \leqslant \frac{\sigma \Delta z}{(|w|+a)(1+2/\mathrm{Re}_{\Delta z})},$$

где $\sigma$ — коэффициент запаса и $a$ — местная скорость звука.

Численные расчеты уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости иногда «разваливаются» из-за осцилляций, которые являются следствием неадекватного измельчения сетки в областях больших градиентов. Во многих случаях измельчение сетки в этих областях лишено практического смысла, особенно если они сильно удалены от рассматриваемой области. Для таких ситуаций Мак-Кормак и Болдуин [MacCormack, Baldwin, 1975] разработали сглаживающую схему четвертого порядка, являющуюся альтернативой сглаживающей схеме четвертого порядка, заданной уравнением (8.100). При сглаживании по Мак-Кормаку к оператору $L_x(\Delta t_x)$ добавляются диссипативные члены следующим образом:

$$\mathbf{U}^{\overline{**}}_{i,j,k} = \mathbf{U}^{*}_{i,j,k} - \frac{\Delta t_x}{\Delta x}\left(\mathbf{E}^{*}_{i+1,j,k} + \mathbf{S}^{*}_{i+1,j,k} - \mathbf{E}^{*}_{i,j,k} - \mathbf{S}^{*}_{i,j,k}\right),$$
$$\mathbf{U}^{**}_{i,j,k} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{U}^{*}_{i,j,k} + \mathbf{U}^{\overline{**}}_{i,j,k} - \frac{\Delta t_x}{\Delta x}\left(\mathbf{E}^{\overline{**}}_{i,j,k} + \mathbf{S}^{\overline{**}}_{i,j,k} - \mathbf{E}^{\overline{**}}_{i-1,j,k} - \mathbf{S}^{\overline{**}}_{i-1,j,k}\right)\right], \qquad (9.29)$$

где

$$\mathbf{S}^{*}_{i,j,k} = \varepsilon_e\left[\left(|u^{*}_{i,j,k}| + a^{*}_{j,j,k}\right)\times\right.$$
$$\left.\times \frac{|\delta_x^2 p^{*}_{i,j,k}|}{\left(p^{*}_{i+1,j,k} + 2p^{*}_{i,j,k} + p^{*}_{i-1,j,k}\right)}\left(\mathbf{U}^{*}_{i,j,k} - \mathbf{U}^{*}_{i-1,j,k}\right)\right], \qquad (9.30)$$
$$\mathbf{S}^{\overline{**}}_{i,j,k} = \varepsilon_e\left[\left(|u^{\overline{**}}_{i,j,k}| + a^{\overline{**}}_{i,j,k}\right)\times\right.$$
$$\left.\times \frac{|\delta_x^2 p^{\overline{**}}_{i,j,k}|}{\left(p^{\overline{**}}_{i+1,j,k} + 2p^{\overline{**}}_{i,j,k} + p^{\overline{**}}_{i-1,j,k}\right)}\left(\mathbf{U}^{\overline{**}}_{i+1,j,k} - \mathbf{U}^{\overline{**}}_{i,j,k}\right)\right]$$

и для устойчивости $0 \leqslant \varepsilon_e \leqslant 0.5$. Таким образом, в уравнения Навье — Стокса добавляется член с искусственной вязкостью

вида

$$\varepsilon_e (\Delta x)^4 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{|u|+a}{4p}\left|\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right]. \tag{9.31}$$

Величина этого сглаживающего члена очень мала всюду, за исключением областей резких осцилляций давления, в которых аппроксимация без сглаживания приводит к ошибочным результатам.

Явная схема Мак-Кормака годится для расчета как стационарных, так и нестационарных течений в диапазонах от малых до умеренных чисел Рейнольдса. Однако ее применение не дает

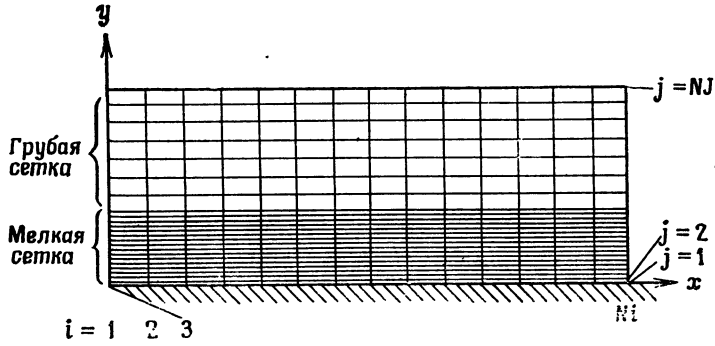



Рис. 9.1. Расчетная сетка для течения на плоской пластине при больших числах Рейнольдса.

удовлетворительных результатов в случае течений при больших числах Рейнольдса, когда области с преобладающим влиянием вязкости становятся тонкими. Для таких течений сетка должна сильно измельчаться, чтобы разрешить вязкие области надлежащим образом. Это в свою очередь приводит к малым шагам по времени и, следовательно, к большим временам счета, если используется явная схема, например схема Мак-Кормака. Чтобы показать это, рассмотрим двумерное течение на плоской пластине при больших числах Рейнольдса. Тогда вблизи поверхности пластины требуется очень мелкая сетка для разрешения пограничного слоя, а в невязкой части поля течения можно пользоваться более грубой сеткой, как показано на рис. 9.1. На грубой сетке можно использовать расщепленную по времени схему Мак-Кормака

$$\mathbf{U}_{l,j}^{n+1} = L_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right) L_y(\Delta t)\, L_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \mathbf{U}_{l,j}^{n}, \tag{9.32}$$

где

$$\Delta t \leqslant \min\left(2\Delta t_x,\ \Delta t_y\right)_{\text{гр. с}}. \tag{9.33}$$

На мелкой сетке может быть использована следующая последовательность операторов:

$$U_{i,j}^{n+1} = \left[L_y\left(\frac{\Delta t}{2m}\right) L_x\left(\frac{\Delta t}{m}\right) L_y\left(\frac{\Delta t}{2m}\right)\right]^m \mathbf{U}_{i,j}^n, \tag{9.34}$$

где $m$ — наименьшее целое, удовлетворяющее условию

$$\frac{\Delta t}{m} \leqslant \min\left(\Delta t_x,\ 2\Delta t_y\right)_{\text{м. с.}}. \tag{9.35}$$

При больших числах Рейнольдса область мелкой сетки становится очень тонкой, что требует, чтобы $\Delta y$ было мало. Это приводит к очень малым $\Delta t_y$ в операторе $L_y$ и очень большим целым $m$. Следовательно, существенная часть машинного времени тратится на расчет в области измельченной сетки. Для преодоления этой трудности Мак-Кормак [MacCormack, 1976] разработал гибридную версию своей схемы, названную *схемой Мак-Кормака быстрого счета*. Эта гибридная схема является частично явной и частично неявной. Для течения на плоской пластине, о котором шла речь выше, схему быстрого счета можно реализовать, если заменить оператор $L_y(\Delta t/2m)$ в уравнении (9.34) на

$$L_{yH}\left(\frac{\Delta t}{2m}\right) L_{yP}\left(\frac{\Delta t}{2m}\right),$$

в котором оператор $L_{yH}$ действует на невязкую (гиперболическую) часть уравнений Навье — Стокса, т. е. на

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_H}{\partial y} = 0, \tag{9.36}$$

где $\mathbf{F}_H$ определен как

$$\mathbf{F}_H = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (E_t + p)\, v \end{bmatrix}. \tag{9.37}$$

Оператор $L_{yP}$ действует на вязкую (параболическую) часть уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_P}{\partial y} = 0, \tag{9.38}$$

где $\mathbf{F}_P = \mathbf{F} - \mathbf{F}_H$. Уравнение (9.36) решают с оператором $L_{yH}$ либо методом характеристик, либо при помощи первоначальной версии схемы Мак-Кормака [Li, 1977; Shang, 1977]. Уравнение (9.38) решают с оператором $L_{yP}$ при помощи неявной схемы, на-

пример схемы Кранка — Николсона или схемы Лаасонена. Таким образом, уравнения (9.36) и (9.38) можно решать с шагом по времени, не ограниченным вязким критерием устойчивости. Оказалось, что схема быстрого счета обладает (10—100)-кратным быстродействием по сравнению с расщепленной по времени схемой для течений при больших числах Рейнольдса. Правда, ввиду ее сложности довольно трудно составить программу расчета на ЭВМ по этой схеме. Позднее Мак-Кормак [MacCormack, 1981] разработал неявную версию своей исходной схемы, о чем речь пойдет в п. 9.2.4.

### 9.2.2. Другие явные схемы

Помимо схемы Мак-Кормака для решения уравнений Навье — Стокса в случае сжимаемой жидкости можно использовать и другие явные схемы, включая схему «классики» (п. 4.2.12), схему «чехарда» (Дюфорта — Франкела (п. 4.5.2)), схему Браиловской (п. 4.5.3), схему Аллена — Чена (п. 4.5.4), схему Лакса — Вендроффа (п. 4.5.5). Эти схемы обсуждались ранее в связи с применением для решения либо уравнения теплопроводности, либо вязкого уравнения Бюргерса. Когда эти схемы применяются к уравнениям Навье — Стокса для сжимаемой жидкости, которые имеют более сложный вид по сравнению с только что названными уравнениями, то возникают некоторые трудности. Например, представляет определенную сложность аппроксимация членов со смешанными производными в схеме «классики». Если их дискретизировать обычным способом, применяя уравнение (3.51), то эта схема перестает быть явной, так как требуется обращение матриц. Этого можно избежать, если брать члены со смешанными производными с предыдущего по времени слоя.

Все названные выше схемы, за исключением схемы Лакса — Вендроффа, имеют первый порядок аппроксимации по времени, поэтому их нельзя использовать для точных расчетов изменяющегося во времени поля течения. Кроме того, все эти схемы имеют ограничение на максимальный размер шага по времени, вытекающее из условия устойчивости. Однако условия устойчивости для схем «классики» и Аллена — Чена не зависят от вязкости, что выделяет их в лучшую сторону среди прочих схем. Для схемы «классики» допустимый размер шага по времени, обусловленный условием Куранта — Фридрихса — Леви, в случае двумерной задачи запишется в виде

$$(\Delta t)_{\text{КФЛ}} \leqslant \frac{\Delta x}{|u|+|v|+2\sqrt{a}}, \tag{9.39}$$

если $\Delta x = \Delta y$. Важное преимущество схемы Браиловской состоит в том, что она требует вычисления вязких членов только на одном шаге двухшаговой процедуры. В обзоре [Peyret, Viviand, 1975] можно найти и другие явные схемы решения уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости.

### 9.2.3. Схема Бима — Уорминга

Разностная схема Бима — Уорминга [Beam, Warming, 1978] решения уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости относится к классу неявных схем переменных направлений, предложенных в рабочих [Lindemuth, Killeen, 1973; McDonald, Briley, 1975]. Можно показать, что при выполнении некоторых условий все эти схемы эквивалентны. В п. 4.5.7 обсуждалось применение схемы Брили — Макдональда к вязкому уравнению Бюргерса.

Для простоты ограничимся случаем двумерных уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости и применим схему Бима — Уорминга к этим уравнениям, записанным в следующей векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{W}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_y)}{\partial y}, \tag{9.40}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E_t + p)\, u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E_t + p)\, v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\mu(2u_x - v_y) \\ \mu(u_y + v_x) \\ \mu v(u_y + v_x) + \frac{2}{3}\mu u(2u_x - v_y) + kT_x \end{bmatrix}, \tag{9.41}$$

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(u_y + v_x) \\ \frac{2}{3}\mu(2v_y - u_x) \\ \mu u(u_y + v_x) + \frac{2}{3}\mu v(2v_y - u_x) + kT_y \end{bmatrix}.$$

В схеме Бима — Уорминга решение получают установлением по времени в соответствии со следующей разностной формулой:

$$\Delta^n \mathbf{U} = \frac{\theta_1 \Delta t}{1+\theta_2} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta^n \mathbf{U}) + \frac{\Delta t}{1+\theta_2} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{U}^n) + \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \Delta^{n-1}\mathbf{U} + \\ + O\left[\left(\theta_1 - \frac{1}{2} - \theta_2\right)(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3\right], \qquad (9.42)$$

где $\Delta^n \mathbf{U} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$. Эта общая разностная формула при соответствующем выборе параметров $\theta_1$ и $\theta_2$ описывает многие обычные разностные схемы, как мы видели в п. 8.3.3. В случае уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости обычно используют либо неявную схему Эйлера ($\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$) с первым порядком аппроксимации по времени, либо трехточечную неявную схему с разностями назад ($\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 1/2$) со вторым порядком аппроксимации по времени.

Подставляя (9.40) в уравнение (9.42), получаем

$$\Delta^n \mathbf{U} = \\ = \frac{\theta_1 \Delta t}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\Delta^n \mathbf{E} + \Delta^n \mathbf{V}_1 + \Delta^n \mathbf{V}_2) + \frac{\partial}{\partial y}(-\Delta^n \mathbf{F} + \Delta^n \mathbf{W}_1 + \Delta^n \mathbf{W}_2)\right] + \\ + \frac{\Delta t}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\mathbf{E}^n + \mathbf{V}_1^n + \mathbf{V}_2^n) + \frac{\partial}{\partial y}(-\mathbf{F}^n + \mathbf{W}_1^n + \mathbf{W}_2^n)\right] + \\ + \frac{\theta_2}{1+\theta_2}\Delta^{n-1}\mathbf{U} + O\left[\left(\theta_1 - \frac{1}{2} - \theta_2\right)(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3\right]. \qquad (9.43)$$

Эта разностная формула в так называемой дельта-форме уже обсуждалась ранее. Дельта-члены линеаризуются путем разложения в ряд Тейлора. Например, $\Delta^n \mathbf{E}$ линеаризуется при помощи соотношения

$$\mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{E}^n + \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{U}}\right)^n (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) + O\left[(\Delta t)^2\right]. \qquad (9.44)$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\Delta^n \mathbf{E} = [A]^n \Delta^n \mathbf{U} + O\left[(\Delta t^2\right], \qquad (9.45)$$

где $[A]$ — матрица Якоби $\partial \mathbf{E}/\partial \mathbf{U}$:

$$[A] = -\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3-\gamma}{2}u^2 + \frac{1-\gamma}{2}v^2 & (\gamma-3)u & (\gamma-1)v & (1-\gamma) \\ \hline uv & -v & -u & 0 \\ \hline \frac{\gamma E_t u}{\rho} + (1-\gamma)u(u^2+v^2) & -\frac{\gamma E_t}{\rho} + \frac{\gamma-1}{2}(3u^2+v^2) & (\gamma-1)uv & -\gamma u \end{array}\right] \qquad (9.46)$$

и $\gamma$ — отношение удельных теплоемкостей. Матрица Якоби выписана в предположении совершенного газа. Аналогичным образом можно линеаризовать и $\Delta^n\mathbf{F}$:

$$\Delta^n\mathbf{F} = [B]^n\,\Delta^n\mathbf{U} + O\,[(\Delta t)^2], \tag{9.47}$$

где $[B]$ — матрица Якоби $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U}$:

$$[B] = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ uv & -v & -u & 0 \\ \frac{3-\gamma}{2}v^2 + \frac{1-\gamma}{2}u^2 & (\gamma-1)u & (\gamma-3)v & 1-\gamma \\ \frac{\gamma E_t v}{\rho} + (1-\gamma)v(u^2+v^2) & (\gamma-1)uv & -\frac{\gamma E_t}{\rho} + \frac{\gamma-1}{2}(3v^2+u^2) & -\gamma v \end{bmatrix}. \tag{9.48}$$

Вязкий дельта-член $\Delta^n\mathbf{V}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)$ линеаризуют, записывая

$$\begin{aligned}\Delta^n\mathbf{V}_1 &= \left(\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\mathbf{U}}\right)^n\Delta^n\mathbf{U} + \left(\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\mathbf{U}_x}\right)^n\Delta^n\mathbf{U}_x + O\,[(\Delta t)^2] = \\ &= [P]^n\,\Delta^n\mathbf{U} + [R]^n\,\Delta^n\mathbf{U}_x + O\,[(\Delta t)^2] = \\ &= ([P] - [R_x])^n\,\Delta^n\mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x}([R]^n\,\Delta^n\mathbf{U}) + O\,(\Delta t)^2],\end{aligned} \tag{9.49}$$

где $[P]$ — матрица Якоби $\partial\mathbf{V}_1/\partial\mathbf{U}$, $[R]$ — матрица Якоби $\partial\mathbf{V}_1/\partial\mathbf{U}_x$ и $[R_x] = \partial[R]/\partial x$. Эти матрицы можно записать в следующем виде:

$$[P] - [R_x] = -\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u\left(\frac{4}{3}\mu\right)_x & \left(\frac{4}{3}\mu\right)_x & 0 & 0 \\ -v\mu_x & 0 & \mu_x & 0 \\ -u^2\left(\frac{4}{3}\mu\right)_x - v^2\mu_x & u\left(\frac{4}{3}\mu\right)_x & v\mu_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{9.50}$$

$$[R] = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}\mu u & \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 \\ -\mu v & 0 & \mu & 0 \\ -\left(\frac{4}{3}\mu - \frac{k}{c_v}\right)u^2 - \left(\mu - \frac{k}{c_v}\right)v^2 - \frac{k}{c_v}\frac{E_t}{\rho} & \left(\frac{4}{3}\mu - \frac{k}{c_v}\right)u & \left(\mu - \frac{k}{c_v}\right)v & \frac{k}{c_v} \end{bmatrix}. \tag{9.51}$$

Матрица Якоби $[P] - [R_x]$ выписана в предположении, что $\mu$ и $k$ локально не зависят от $\mathbf{U}$. Аналогично $\Delta^n \mathbf{W}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_y)$ линеаризуется в виде

$$\Delta^n \mathbf{W}_2 = ([Q] - [S_y])^n \Delta^n \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial y}([S]^n \Delta^n \mathbf{U}) + O[(\Delta t)^2], \quad (9.52)$$

где

$$[Q] - [S_y] = -\frac{1}{\rho}\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u\mu_y & \mu_y & 0 & 0 \\ -v\left(\frac{4}{3}\mu\right)_y & 0 & \left(\frac{4}{3}\mu\right)_y & 0 \\ -v^2\left(\frac{4}{3}\mu\right)_y - u^2\mu_y & u\mu_y & v\left(\frac{4}{3}\mu\right)_y & 0 \end{array}\right], \quad (9.53)$$

$$[S] = \frac{1}{\rho}\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu u & \mu & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}\mu v & 0 & \frac{4}{3}\mu & 0 \\ -\left(\frac{4}{3}\mu - \frac{k}{c_v}\right)v^2 - \left(\mu - \frac{k}{c_v}\right)u^2 - \frac{k}{c_v}\frac{E_t}{\rho} & \left(\mu - \frac{k}{c_v}\right)u & \left(\frac{4}{3}\mu - \frac{k}{c_v}\right)v & \frac{k}{c_v} \end{array}\right]. \quad (9.54)$$

Члены со смешанными производными вычисляются на явном слое без потери точности, если просто заметить, что

$$\begin{aligned} \Delta^n \mathbf{V}_2 &= \Delta^{n-1}\mathbf{V}_2 + O[(\Delta t)^2], \\ \Delta^n \mathbf{W}_1 &= \Delta^{n-1}\mathbf{W}_1 + O[(\Delta t)^2] \end{aligned} \quad (9.55)$$

при постоянном шаге $\Delta t$. Вычисление таким способом членов со смешанными производными приводит к блочной трехдиагональной форме уравнений. Описанный в п. 8.3.3 вариант линеаризации [Steger, 1977] вязких членов можно использовать вместо линеаризации, заданной уравнениями (9.49) и (9.52). Метод Стегера особенно полезен, когда при решении уравнений Навье — Стокса выполняется преобразование координат.

Подставляя (9.45), (9.47), (9.49), (9.52) и (9.55) в уравнение (9.43), получаем

$$\left\{[I]+\frac{\theta_1\Delta t}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}([A]-[P]+[R_x])^n-\frac{\partial^2}{\partial x^2}[R]^n+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial y}([B]-[Q]+[S_y])^n-\frac{\partial^2}{\partial y^2}[S]^n\right]\right\}\Delta^n\mathbf{U}=$$
$$=\frac{\Delta t}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-\mathbf{E}+\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)^n+\frac{\partial}{\partial y}(-\mathbf{F}+\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2)^n\right]+$$
$$+\frac{\theta_1\Delta t}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Delta^{n-1}\mathbf{V}_2)+\frac{\partial}{\partial y}(\Delta^{n-1}\mathbf{W}_1)\right]+\frac{\theta_2}{1+\theta_2}\Delta^{n-1}\mathbf{U}+$$
$$+O\left[\left(\theta_1-\frac{1}{2}-\theta_2\right)(\Delta t)^2,\ (\Delta t)^3\right], \qquad (9.56)$$

где $[I]$ — единичная матрица. В уравнении (9.56) выражения типа

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}([A]-[P]+[R_x])^n\right]\Delta^n\mathbf{U}$$

означают

$$\frac{\partial}{\partial x}[([A]-[P]+[R_x])^n\Delta^n\mathbf{U}].$$

Левая часть уравнения (9.56) факторизуется следующим образом:

$$\left\{[I]+\frac{\theta_1\Delta t}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}([A]-[P]-[R_x])^n-\frac{\partial^2}{\partial x^2}[R]^n\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{[I]+\frac{\theta_1\Delta t}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}([B]-[Q]+[S_y])^n-\frac{\partial^2}{\partial y^2}[S]^n\right]\right\}\Delta^n\mathbf{U}=$$
$$=\text{Левая часть уравнения (9.56)}+O[(\Delta t)^3], \qquad (9.57)$$

и окончательный вид схемы Бима — Уорминга таков:

$$\text{Левая часть уравнения (9.57)}=\text{Правая часть уравнения (9.56)}. \qquad (9.58)$$

Частные производные в этом алгоритме вычисляются со вторым порядком точности по центральным разностям.

Схема Бима — Уорминга реализуется следующим образом:

*Шаг 1*

$$\left\{[I]+\frac{\theta_1\Delta t}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}([A]-[P]+[R_x])^n-\frac{\partial^2}{\partial x^2}[R]^n\right]\right\}\Delta^n\mathbf{U}_1=$$
$$=\text{Правая часть уравнения (9.56)}. \qquad (9.59)$$

*Шаг 2*

$$\left\{[I]+\frac{\theta_1\Delta t}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}([B]-[Q]+[S_y])^n-\frac{\partial^2}{\partial y^2}[S]^n\right]\right\}\Delta^n\mathbf{U}=\Delta^n\mathbf{U}_1. \tag{9.60}$$

*Шаг 3*

$$\mathbf{U}^{n+1}=\mathbf{U}^n+\Delta^n\mathbf{U}. \tag{9.61}$$

На шаге 1 $\Delta^n\mathbf{U}_1$ суть оставшиеся члены левой части уравнения (9.57). Уравнения (9.59) и (9.60) суть системы уравнений, которые имеют блочную трехдиагональную структуру, аналогичную структуре уравнения (8.98) с той лишь разницей, что в случае двумерных уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости блоки суть матрицы размером $4\times 4$.

Уорминг и Бим [Warming, Beam, 1977] исследовали устойчивость своей схемы для двумерного волнового уравнения

$$u_t+c_1u_x+c_2u_y=0 \tag{9.62}$$

и для уравнения диффузии

$$u_t=au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}. \tag{9.63}$$

Последнее уравнение параболическое, если $b^2<4ac$ и $(a, c)>0$. Уорминг и Бим обнаружили, что для уравнения (9.62) схема безусловно устойчива, если $\theta_2>0$, а для уравнения (9.63) она безусловно устойчива при $\theta_2\geqslant 0.385$. Заметим, что ни схема «чехарда» ($\theta_1=0$, $\theta_2=-1/2$), ни неявная схема с центрированными разностями по времени ($\theta_1=1/2$, $\theta_2=0$) не являются безусловно устойчивыми для уравнения (9.63). Однако трехточечная схема с разностями назад ($\theta_1=1$, $\theta_2=1/2$) безусловно устойчива, и ее можно использовать, когда необходим второй порядок аппроксимации по времени.

Чтобы успешно реализовать вычисления с приближенно заданными начальными данными и подавлять возникающие высокочастотные осцилляции, часто бывает необходимо в схему Бима — Уорминга вводить демпфирование. Это можно осуществить добавлением в правую часть уравнения (9.56) на явном слое диссипативного члена четвертого порядка вида (8.100). Кроме того, если интерес представляет только установившееся решение, то в левую часть уравнения (9.56) на неявном слое можно добавлять сглаживающий член второго порядка. Порядок последнего члена может быть вторым, поскольку он не оказывает влияния на установившееся решение, когда $\Delta^n\mathbf{U}=0$. После добавления сглаживающих членов разностная схема принимает следующий окончательный вид:

*Шаг 1*

$$\left\{[I]+\frac{\theta_1\Delta t}{1+\theta_2}\left[\bar{\delta}_x\left([A]-[P]+[R_x]\right)^n-\delta_x^2[R]^n-\varepsilon_i\delta_x^2\right]\right\}\Delta^n\mathbf{U}_1=$$

$$=\text{Правая часть уравнения (9.56)}-\varepsilon_e\left(\delta_x^4+\delta_y^4\right)\mathbf{U}^n. \quad (9.64)$$

*Шаг 2*

$$\left\{[I]+\frac{\theta_1\Delta t}{1+\theta_2}\left[\bar{\delta}_y\left([B]-[Q]+[S_y]\right)^n-\delta_y^2[S]^n-\varepsilon_i\delta_y^2\right]\right\}\Delta^n\mathbf{U}=\Delta^n\mathbf{U}_1. \quad (9.65)$$

*Шаг 3*

$$\mathbf{U}^{n+1}=\mathbf{U}^n+\Delta^n\mathbf{U}, \quad (9.66)$$

где $\bar{\delta}$, $\delta^2$ и $\delta^4$ — обычные операторы с центральными разностями, а $\varepsilon_e$ и $\varepsilon_i$ — коэффициенты при сглаживающих членах на явном и неявном слоях соответственно. Используя анализ Фурье устойчивости, можно показать, что для устойчивости схемы коэффициент при сглаживающем члене на явном слое должен лежать в диапазоне

$$0\leqslant\varepsilon_e\leqslant\frac{1+2\theta_2}{8(1+\theta_2)}. \quad (9.67)$$

Была исследована [Désidéri et al., 1978] возможность максимализации скорости сходимости зависящего от времени решения за счет выбора отношения коэффициентов при сглаживающих членах. Оказалось, что скорость сходимости схемы Бима — Уорминга (с дискретизацией по Эйлеру на неявном слое) для уравнений Эйлера оптимальна, когда

$$\varepsilon_i/\varepsilon_e=2. \quad (9.68)$$

Бим и Уорминг показали, что их схема может быть значительно упрощена, если $\mu$ считать постоянной величиной. Тогда $(\mu_x, \mu_y)=0$ и уравнения (9.50) и (9.53) сводятся к уравнениям

$$[P]-[R_x]=0, \quad [Q]-[S_y]=0.$$

Если требуется только установившееся решение, то Таннехил и др. [Tannehill et al., 1978] предложили вязкие члены в левой части схемы (т. е. $[P]$, $[R_x]$, $[R]$, $[Q]$, $[S_y]$, $[S]$) положить равными нулю, при условии что в ней оставляют сглаживание на неявном слое ($\varepsilon_i>0$). При этом используется тот факт, что левая часть уравнения (9.57) стремится к нулю по мере установления решения. Это существенно упрощает схему Бима — Уорминга, особенно если используется система координат, отличная от декартовой. Полагают, что такую упрощенную схему можно применять для вычислений в диапазоне чисел Рейнольд-

са от умеренных до очень больших, так как скорость сходимости при этом не изменяется, как показывают тесты. Чтобы еще уменьшить затраты машинного времени, система связанных друг с другом уравнений Навье — Стокса в приближении тонкого слоя была преобразована [Chaussee, Pulliam, 1981] к диагональному виду, после чего они решаются независимо одно от другого.

#### 9.2.4. Неявная схема Мак-Кормака

Мак-Кормак [MacCormack, 1981] разработал неявный аналог своей схемы, состоящий из двух шагов. На первом используется первоначальный вариант схемы Мак-Кормака, тогда как на втором — неявная схема, что устраняет какие-либо ограничения в связи с устойчивостью. В результате получаются либо верхние, либо нижние блочные двухдиагональные системы уравнений, которые решать проще, чем обычные трехдиагональные системы. Объясним неявную схему Мак-Кормака на примере линейного уравнения Бюргерса

$$u_t = -cu_x + \mu u_{xx}, \quad c > 0, \quad \mu > 0. \tag{9.69}$$

Исходная явная схема Мак-Кормака для уравнения (9.69) (см. п. 4.5.6) приводит к следующим уравнениям:

*Предиктор*

$$(\Delta u_i^n)_{\text{expl}} = \frac{-c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{\mu \Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \tag{9.70}$$

$$(\overline{u_i^{n+1}})_{\text{expl}} = u_i^n + (\Delta u_i^n)_{\text{expl}}. \tag{9.71}$$

*Корректор*

$$(\Delta \overline{u_i^{n+1}})_{\text{expl}} = \frac{-c\Delta t}{\Delta x}(\overline{u_i^{n+1}} - \overline{u_{i-1}^{n+1}}) + \frac{\mu \Delta t}{(\Delta x)^2}(\overline{u_{i+1}^{n+1}} - 2\overline{u_i^{n+1}} + \overline{u_{i-1}^{n+1}}), \tag{9.72}$$

$$(u_i^{n+1})_{\text{expl}} = \frac{1}{2}[u_i^n + (\overline{u_i^{n+1}})_{\text{expl}} + (\Delta \overline{u_i^{n+1}})_{\text{expl}}]. \tag{9.73}$$

Эти уравнения записаны в дельта-форме с

$$\Delta u_i^n = u_i^{n+1} - u_i^n \quad \text{и} \quad x = i\Delta x. \tag{9.74}$$

Нижний индекс expl употребляется для указания того, что данная величина вычисляется по явной схеме Мак-Кормака. Неявная схема Мак-Кормака является неявным аналогом уравнений (9.70)—(9.74) и задается следующими уравнениями:

*Предиктор*

$$\left(1+\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x}\right)\overline{\Delta u_i^{n+1}}=(\Delta u_i^n)_{\text{expl}}+\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x}\overline{\Delta u_{i+1}^{n+1}}, \tag{9.75}$$

$$\overline{u_i^{n+1}}=u_i^n+\overline{\Delta u_i^{n+1}}. \tag{9.76}$$

*Корректор*

$$\left(1+\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x}\right)\Delta u_i^{n+1}=(\overline{\Delta u_i^{n+1}})_{\text{expl}}+\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x}\Delta u_{i-1}^{n+1}, \tag{9.77}$$

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}(u_i^n+\overline{u_i^{n+1}}+\Delta u_i^{n+1}), \tag{9.78}$$

где $(\Delta u_i^n)_{\text{expl}}$ и $(\overline{\Delta u_i^{n+1}})_{\text{expl}}$ определяются по уравнениям (9.70) и (9.72) соответственно, а $\lambda$ выбирается таким образом, чтобы

$$\lambda\geqslant\max\left[\left(c+\frac{2\mu}{\Delta x}-\frac{\Delta x}{\Delta t}\right),\quad 0.0\right]. \tag{9.79}$$

Эта схема безусловно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации как по времени, так и по пространству, при условии что величина $\mu\Delta t/(\Delta x)^2$ ограничена при стремлении $\Delta t$ и $\Delta x$ к нулю. Это легко показать, так как члены, добавленные к исходной схеме Мак-Кормака второго порядка для получения уравнений (9.75) и (9.78), сами имеют третий порядок. То есть уравнение (9.75) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\overline{\Delta u_i^{n+1}}&=(\Delta u_i^n)_{\text{expl}}+\frac{\lambda\Delta t}{\Delta x}(\overline{\Delta u_{i+1}^{n+1}}-\overline{\Delta u_i^{n+1}})=\\&=(\Delta u_i^n)_{\text{expl}}+\lambda(\Delta t)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+O[(\Delta t)^3]\end{aligned} \tag{9.80}$$

и аналогично уравнение (9.77) в виде

$$\Delta u_i^{n+1}=(\overline{\Delta u_i^{n+1}})_{\text{expl}}-\lambda(\Delta t)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+O[(\Delta t)^3]. \tag{9.81}$$

Подставляя (9.76), (9.80) и (9.81) в уравнение (9.78), получаем

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}[2u_i^n+(\Delta u_i^n)_{\text{expl}}+(\overline{\Delta u_i^{n+1}})_{\text{expl}}]+O[(\Delta t)^3] \tag{9.82}$$

или

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}[u_i^n+(\overline{u_i^{n+1}})_{\text{expl}}+(\overline{\Delta u_i^{n+1}})_{\text{expl}}]+O[(\Delta t)^3]. \tag{9.83}$$

Таким образом, мы показали, что

$$\text{Уравнение (9.78)}=\text{Уравнение (9.73)}+O[(\Delta t)^3]. \tag{9.84}$$

Уравнения (9.75) и (9.77) приводят к двухдиагональным системам алгебраических уравнений, которые легко решаются за

один проход всей расчетной области. Например, уравнение (9.75) можно записать в виде

$$\Delta u_i^{\overline{n+1}} = \frac{(\Delta u_i^n)_{\text{expl}} + (\lambda \Delta t/\Delta x)\,\Delta u_{i+1}^{\overline{n+1}}}{1 + \lambda \Delta t/\Delta x}, \tag{9.85}$$

так что если мы идем от правой границы ($i = NI$), где $u$ известно, к левой ($i = 1$), мы можем непосредственно определить $\Delta u_i^{\overline{n+1}}$. Это напоминает процедуру, используемую в явных схемах переменных направлений из п. 4.2.10.

Параметр $\lambda$ выбирают из рассмотрения предела устойчивости исходной явной схемы Мак-Кормака, задаваемого в приближенном виде

$$(\Delta t)_{\text{expl}} \leqslant \frac{\Delta x}{c + 2\mu/\Delta x}. \tag{9.86}$$

Если $\Delta t < (\Delta t)_{\text{expl}}$, то

$$c + \frac{2\mu}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \leqslant 0 \tag{9.87}$$

и из уравнения (9.79) следует, что $\lambda$ равно нулю. В этом случае нет необходимости для обеспечения устойчивости на втором шаге применять неявные процедуры и неявная схема Мак-Кормака сводится к исходной явной. Но если $\Delta t > (\Delta t)_{\text{expl}}$, то $\lambda$ выбирается таким образом, чтобы

$$\lambda \geqslant c + \frac{2\mu}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{9.88}$$

Когда неявную схему Мак-Кормака используют для решения двумерных уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0, \tag{9.89}$$

это дает следующий алгоритм.

*Предиктор*

$$(\Delta \mathbf{U}_{i,j}^n)_{\text{expl}} = -\Delta t \left( \frac{\Delta_x \mathbf{E}_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta_y \mathbf{F}_{i,j}^n}{\Delta y} \right), \tag{9.90}$$

$$\left([I] - \frac{\Delta t \Delta_x [A']}{\Delta x}\right)\left([I] - \frac{\Delta t \Delta_y [B']}{\Delta y}\right) \Delta \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} = (\Delta \mathbf{U}_{i,j}^n)_{\text{expl}}, \tag{9.91}$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}}. \tag{9.92}$$

*Корректор*

$$(\Delta \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}})_{\text{expl}} = -\Delta t \left( \frac{\nabla_x \mathbf{E}_{i,j}^{\overline{n+1}}}{\Delta x} + \frac{\nabla_y \mathbf{F}_{i,j}^{\overline{n+1}}}{\Delta y} \right), \tag{9.93}$$

$$\left( [I] + \frac{\Delta t \nabla_x [A']}{\Delta x} \right) \left( [I] + \frac{\Delta t \nabla_y [B']}{\Delta y} \right) \Delta \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = (\Delta \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}})_{\text{expl}}, \tag{9.94}$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i,j}^{n} + \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} + \Delta \mathbf{U}_{i,j}^{n+1}). \tag{9.95}$$

В этих уравнениях $\Delta_x$, $\Delta_y$, $\nabla_x$ и $\nabla_y$ обозначают обычные разности вперед и назад по пространству, а $\Delta$ — разность вперед по времени $\Delta_t$. Тогда выражение типа

$$\left( [I] - \frac{\Delta t \Delta_y [B']}{\Delta y} \right) \Delta \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}}$$

эквивалентно

$$\Delta \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \Delta_y ([B'] \Delta \mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}}).$$

Вязкие члены в $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ дискретизируются так же, как и в явной схеме Мак-Кормака. Матрицы $[A']$ и $[B']$ имеют положительные собственные значения и связаны с матрицами Якоби $[A] = \partial \mathbf{E}/\partial \mathbf{U}$ и $[B] = \partial \mathbf{F}/\partial \mathbf{U}$ (как будет показано ниже).

Без учета вязких членов и в предположении совершенного газа матрицы Якоби $[A]$ и $[B]$ можно диагонализировать:

$$\begin{aligned} [A] &= [S_x]^{-1} [\Lambda_A] [S_x], \\ [B] &= [S_y]^{-1} [\Lambda_B] [S_y], \end{aligned} \tag{9.96}$$

где

$$[S_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & \rho a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\rho a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 \\ \alpha\beta & -u\beta & -v\beta & \beta \end{bmatrix}, \tag{9.97}$$

$$[S_y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho a & 1 \\ 0 & 0 & -\rho a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 \\ \alpha\beta & -u\beta & -v\beta & \beta \end{bmatrix}, \tag{9.98}$$

$$[\Lambda_A] = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-a \end{bmatrix}, \tag{9.99}$$

$$[\Lambda_B]=\begin{bmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-a \end{bmatrix} \tag{9.100}$$

и $\alpha = (u^2+v^2)/2$, $\beta = \gamma - 1$, $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ — скорость звука. Матрицы $[A']$ и $[B']$ отличаются от матриц $[A]$ и $[B]$ тем, что их собственные значения все положительны и в них приближенно включен учет вязких эффектов. Эти матрицы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} [A'] &= [S_x]^{-1}[D_A][S_x], \\ [B'] &= [S_y]^{-1}[D_B][S_y], \end{aligned} \tag{9.101}$$

где

$$[D_A]=\begin{bmatrix} d_{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{A_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{A_4} \end{bmatrix}, \tag{9.102}$$

$$[D_B]=\begin{bmatrix} d_{B_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{B_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{B_3} & 0 \\ -0 & 0 & 0 & d_{B_4} \end{bmatrix}, \tag{9.103}$$

$$\begin{aligned} d_{A_1} &= \max\left[\left(|u| + \frac{2\nu}{\rho\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right), 0.0\right], \\ d_{A_2} &= \max\left[\left(|u+a| + \frac{2\nu}{\rho\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right), 0.0\right], \\ d_{A_3} &= \max\left[\left(|u| + \frac{2\nu}{\rho\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right), 0.0\right], \\ d_{A_4} &= \max\left[\left(|u-a| + \frac{2\nu}{\rho\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right), 0.0\right], \\ d_{B_1} &= \max\left[\left(|v| + \frac{2\nu}{\rho\Delta y} - \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right), 0.0\right], \\ d_{B_2} &= \max\left[\left(|v| + \frac{2\nu}{\rho\Delta y} - \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right), 0.0\right], \\ d_{B_3} &= \max\left[\left(|v+a| + \frac{2\nu}{\rho\Delta y} - \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right), 0.0\right], \\ d_{B_4} &= \max\left[\left(|v-a| + \frac{2\nu}{\rho\Delta y} - \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right), 0.0\right], \\ \nu &= \max\left({}^4/_3\mu,\ k\right). \end{aligned} \tag{9.104}$$

Если в некоторой области течения $\Delta t$ удовлетворяет условиям устойчивости для явной схемы

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{|u|+a}{\Delta x}+\frac{2\nu}{\rho(\Delta x)^2}\right]^{-1},$$
$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{|v|+a}{\Delta y}+\frac{2\nu}{\rho(\Delta y)^2}\right]^{-1}, \tag{9.105}$$

то $d_A$ и $d_B$ в соответствии с уравнениями (9.104) равны нулю и неявная схема Мак-Кормака сводится к своему явному аналогу. В противном случае для обеспечения устойчивости не обойтись без неявной части схемы Мак-Кормака. Результирующие разностные уравнения суть верхняя или нижняя блочные двухдиагональные системы, которые легко решаются. Например, уравнение (9.91) можно записать в виде

$$\left([I]+\frac{\Delta t}{\Delta x}[A']^n_{i,j}\right)\Delta\mathbf{U}^*_{i,j}=(\Delta\mathbf{U}^n_{i,j})_{\text{expl}}+\frac{\Delta t}{\Delta x}[A']^n_{i+1,j}\Delta\mathbf{U}^*_{i+1,j}, \tag{9.106}$$

где

$$\Delta\mathbf{U}^*_{i,j}=\left([I]-\frac{\Delta t\Delta_y[B']}{\Delta y}\right)\Delta\mathbf{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}.$$

Уравнение (9.106) есть верхняя блочная двухдиагональная система, которая может быть решена, если двигаться для каждого $j$ в сторону уменьшения $i$. Определив $\Delta\mathbf{U}^*_{i,j}$ для всех $(i, j)$, находим $\Delta U^{\overline{n+1}}_{i,j}$ из соотношения

$$\left([I]+\frac{\Delta t}{\Delta y}[B']^n_{i,j}\right)\Delta\mathbf{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}=\Delta\mathbf{U}^*_{i,j}+\frac{\Delta t}{\Delta y}[B']^n_{i,j+1}\Delta\mathbf{U}^{\overline{n+1}}_{i,j+1}, \tag{9.107}$$

Последнее разностное уравнение также представляет собой верхнюю блочную двухдиагональную систему, которая может быть решена, если двигаться для каждого $i$ в сторону уменьшения $j$. Чтобы показать, как решают уравнение (9.107) в некоторой точке $(i, j)$, перепишем его в виде

$$\left([I]+\frac{\Delta t}{\Delta y}[S_y]^{-1}[D_B][S_y]\right)\Delta\mathbf{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}=\mathbf{W}, \tag{9.108}$$

где $\mathbf{W}$ есть правая часть уравнения (9.107), а $[B']^n_{i,j}$ заменено на $[S_y]^{-1}[D_B][S_y]$. Уравнение (9.108) эквивалентно уравнению

$$\left([S_y]+\frac{\Delta t}{\Delta y}[D_B][S_y]\right)\Delta\mathbf{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}=[S_y]\mathbf{W}=\mathbf{X} \tag{9.109}$$

или

$$\left([I]+\frac{\Delta t}{\Delta y}[D_B]\right)[S_y]\Delta\mathbf{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}=\mathbf{X}. \tag{9.110}$$

Отсюда получаем уравнение

$$[S_y]\Delta\mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} = \left([I] + \frac{\Delta t}{\Delta y}[D_B]\right)^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \tag{9.111}$$

которое решают как

$$\Delta\mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} = [S_y]^{-1}\mathbf{Y}. \tag{9.112}$$

Процедуру решения уравнения (9.107) можно подытожить так:

1. $\mathbf{W}$ = Правая часть уравнения (9.107),
2. $\mathbf{X} = [S_y]\mathbf{W}$,
3. $\mathbf{Y} = ([I] + (\Delta t/\Delta y)[D_B])^{-1}\mathbf{X}$,
4. $\Delta\mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} = [S_y]^{-1}\mathbf{Y}$.

Отметим, что обращение матрицы на шаге 3 тривиально, поскольку она диагональная. К тому же необходимую на шаге 4 матрицу $[S_y]^{-1}$ легко получить из уравнения (9.98). Член $(\Delta t/\Delta y)[B']_{i,j}^{n}\Delta\mathbf{U}_{i,j}^{n+1}$ в $W$ определяется теперь для следующей точки $(i, j-1)$ в процедуре прохождения расчетной области с использованием равенства

5. $\dfrac{\Delta t}{\Delta y}[B']_{i,j}^{n}\Delta\mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}} = \mathbf{W} - \Delta\mathbf{U}_{i,j}^{\overline{n+1}}$.

В начальной стадии некоторых расчетов может оказаться необходимым увеличение $\nu$ для предотвращения возникновения неустойчивостей, вызываемых длительными процессами установления.

Неявная схема Мак-Кормака для уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости имеет второй порядок точности как по пространству, так и по времени, при условии что $\nu\Delta t/\rho(\Delta x)^2$ и $\nu\Delta t/\rho(\Delta y)^2$ остаются ограниченными при стремлении $\Delta x$, $\Delta y$ и $\Delta t$ к нулю. Основное достоинство этой схемы в том, что вместо обычной блочной трехдиагональной системы уравнений здесь решают блочную двухдиагональную систему. Недостаток схемы связан с трудностями в постановке граничных условий, отличных от граничных условий типа Дирихле.

## § 9.3. Уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости

Уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости можно получить из их аналога для сжимаемой жидкости, полагая жидкость несжимаемой ($M = 0$, $a = \infty$). Следовательно, в случае несжимаемой жидкости мы имеем частный случай уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости, и возни-

кает резонный вопрос: почему эти уравнения в том и другом случаях рассматриваются отдельно? Иными словами, почему нельзя пользоваться уравнениями Навье — Стокса для сжимаемой жидкости, чтобы рассчитывать течения несжимаемой жидкости? Главная причина этого состоит в том, что требуются чрезмерно большие затраты машинного времени, что в свою очередь обусловлено не только большей сложностью уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости по сравнению с их аналогом для несжимаемой, но и ограничением на шаг по времени. Для объяснения последнего фактора напомним, что в явных методах решения уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости шаг по времени ограничен условием устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{(|u|/\Delta x) + (|v|/\Delta y) + a\sqrt{[1/(\Delta x)^2] + [1/(\Delta y)^2]}}. \qquad (9.113)$$

Из этого следует, что $\Delta t$ стремится к нулю при приближении скорости звука $a$ к бесконечности, что характерно для несжимаемой жидкости. Поэтому для расчета течения действительно несжимаемой жидкости таким способом потребуется бесконечно большое количество машинного времени. Неявные методы, такие, как схема Бима — Уорминга, допускают бóльшие значения $\Delta t$, но при этом ошибка аппроксимации становится слишком большой, поэтому его максимальное значение берут обычно в 5—10 раз меньше значения, задаваемого уравнением (9.113). Таким образом, даже при помощи неявной схемы практически невозможно рассчитывать течение действительно несжимаемой жидкости, применяя для этого уравнения Навье — Стокса для сжимаемой жидкости. Перейдем теперь к обсуждению методов решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости.

Уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами в отсутствие массовых сил и подвода тепла извне (см. гл. 5) записываются следующим образом:

*Уравнение неразрывности*

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \qquad (9.114)$$

*Уравнение движения*

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}. \qquad (9.115)$$

*Уравнение энергии*

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \Phi. \qquad (9.116)$$

Эти уравнения (одно векторное и два скалярных) образуют смешанную эллиптически-параболическую систему относительно неизвестных $(\mathbf{V}, p, T)$. Отметим, что температура входит только в уравнение энергии, так что мы можем рассматривать это уравнение отдельно от других. Во многих приложениях изменение температуры либо незначительно, либо не представляет важности, поэтому нет необходимости решать уравнение энергии. Если же мы хотим определить распределение температуры, то это легко осуществимо, так как при уже рассчитанном поле $\mathbf{V}$ нестационарное уравнение энергии есть параболическое уравнение с частными производными. Имея это в виду, уделим основное внимание методам решения уравнений неразрывности и движения.

Запишем в декартовой системе координат двумерные уравнения Навье — Стокса (без уравнения энергии):

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{9.117}$$

*Уравнение движения по координате x*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{9.118}$$

*Уравнение движения по координате y*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{9.119}$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость. Эти уравнения записаны относительно так называемых *примитивных переменных* $p$, $u$, $v$. В одном из самых распространенных методов решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости примитивные переменные заменяются на завихренность $\zeta$ и функцию тока $\psi$. Мы обсудим этот метод решения в п. 9.3.1. Альтернативный метод состоит в решении уравнений (9.117) — (9.119) в том виде, в каком они записаны. Мы будем называть его *подходом с использованием примитивных переменных* и обсудим его в п. 9.3.2.

### 9.3.1. Подход с использованием завихренности и функции тока

Подход с использованием завихренности и функции тока в качестве независимых переменных является одним из самых распространенных методов решения двумерных уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости. В нем делают замену переменных, переходя от компонент скорости к завихрен-

ности $\zeta$ и функции тока $\psi$. В гл. 5 вектор завихренности был определен в виде

$$\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{V}. \tag{9.120}$$

Его величина

$$\zeta = |\boldsymbol{\zeta}| = |\nabla \times \mathbf{V}| \tag{9.121}$$

в декартовых двумерных координатах есть

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{9.122}$$

В этой же системе координат функция тока $\psi$ определяется как

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v. \tag{9.123}$$

Используя новые независимые переменные, два уравнения движения (9.118) и (9.119) можно скомбинировать (исключая из них давление), что дает

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \tag{9.124}$$

или

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta. \tag{9.125}$$

Это параболическое уравнение с частными производными называется *уравнением переноса завихренности.* Одномерная форма этого уравнения

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \tag{9.126}$$

представляет собой *одномерное адвективно-диффузионное уравнение*, которое часто используется как модельное. Кроме того, для моделирования переноса завихренности можно использовать нелинейное уравнение Бюргерса. Фактически описанные в § 4.5 численные методы решения нелинейного уравнения Бюргерса можно применять для уравнения переноса завихренности.

Подставляя (9.123) в (9.122), получают дополнительное уравнение для независимых переменных $\zeta$ и $\psi$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta, \tag{9.127}$$

или

$$\nabla^2 \psi = -\zeta. \tag{9.128}$$

Это эллиптическое уравнение с частными производными является не чем иным, как *уравнением Пуассона.* Методы его решения обсуждались в § 4.3.

В результате такой замены переменных мы смогли разделить смешанную эллиптически-параболическую систему уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости на одно параболическое уравнение (уравнение переноса завихренности) и одно эллиптическое уравнение (уравнение Пуассона). Обычно эти уравнения решают методом установления по времени, состоящим из следующих основных шагов:

1. В момент времени $t = 0$ задают начальные значения $\zeta$ и $\psi$.
2. Решают уравнение переноса завихренности для $\zeta$ в каждой внутренней точке расчетной сетки в момент времени $t + \Delta t$.
3. Решая итерационным методом уравнение Пуассона, находят новые значения $\psi$ во всех точках сетки по новым значениям $\zeta$ во внутренних точках.
4. Находят компоненты скорости по соотношениям $u = \psi_y$ и $v = -\psi_x$.
5. Определяют значения $\zeta$ на границах по значениям $\zeta$ и $\psi$ во внутренних точках.
6. Если решение не сходится, то возвращаются к шагу 2.

По завершении только что описанной процедуры определяются компоненты скорости в каждом узле расчетной сетки. Для определения давления в каждом узле сетки необходимо решать еще одно уравнение, называемое *уравнением Пуассона для давления*. Последнее получают, дифференцируя по $x$ уравнение (9.118):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u), \quad (9.129)$$

дифференцируя по $y$ уравнение (9.119):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v) \quad (9.130)$$

и складывая результаты:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla^2 p + \nu\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u) + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v)\right]. \quad (9.131)$$

Используя уравнение неразрывности, сведем уравнение (9.131) к виду

$$\nabla^2 p = 2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{9.132}$$

В терминах функции тока это уравнение можно переписать в виде

$$\nabla^2 p = S, \tag{9.133}$$

где

$$S = 2\rho\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]. \tag{9.134}$$

Таким образом, мы получили уравнение Пуассона для давления, аналогичное (9.128). Если $S$ дискретизировать подходящим

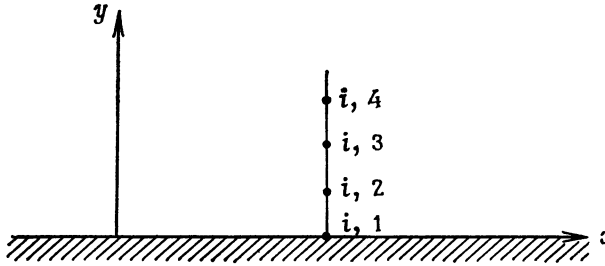



Рис. 9.2. Расположение узлов сетки по нормали к поверхности плоской пластины, расположенной в плоскости $y = 0$.

образом, то все обсуждавшиеся в § 4.3 методы решения уравнения (9.128) будут применимы и к уравнению (9.133). Подходящая разностная аппроксимация второго порядка величины $S$ задается следующим образом:

$$S_{i,j} = 2\rho_{i,j}\left[\left(\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}\right)\left(\frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}\right) - \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta x\,\Delta y}\right)^2\right]. \tag{9.135}$$

В случае стационарной задачи уравнение Пуассона для давления решают только один раз, т. е. после того как вычислены установившиеся значения $\zeta$ и $\psi$. Если требуется определить только значение давления на стенке, нет необходимости решать уравнение Пуассона во всей области течения. Вместо него можно решать более простое уравнение для давления на стенке, которое получают, записывая уравнение движения в направлении, параллельном стенке, для жидкости, находящейся вблизи стенки. Пусть стенка расположена в плоскости $y = 0$ декартовой системы координат (рис. 9.2), тогда уравнение движения

в направлении, параллельном стенке (уравнение движения по координате $x$), есть

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_w = \mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_w, \tag{9.136}$$

или

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_w = -\mu \left.\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|_w, \tag{9.137}$$

которое дискретизируется следующим образом:

$$\frac{p_{i+1,\,1} - p_{i-1,\,1}}{2\Delta x} = -\mu\left(\frac{-3\zeta_{i,\,1} + 4\zeta_{i,\,2} - \zeta_{i,\,3}}{2\Delta y}\right). \tag{9.138}$$

Чтобы воспользоваться уравнением (9.138), необходимо знать давление хотя бы в одной точке на поверхности стенки. Давление в соседней точке можно определить при помощи аппроксимации первого порядка с односторонней разностью для $\partial p/\partial x$ в уравнении (9.137). После чего по уравнению (9.138) можно найти давление во всех остальных точках стенки. В случае системы координат, связанной с поверхностью стенки, запишем уравнение (9.137) в виде

$$\left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_w = -\mu \left.\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right|_w, \tag{9.139}$$

где $s$ измеряется вдоль поверхности тела, а $n$ — по нормали к ней.

Описанный ранее метод установления для решения уравнения переноса завихренности и уравнения Пуассона требует, чтобы были заданы подходящие выражения для $\psi$ и $\zeta$ на границах. Задание граничных условий для этих величин очень важно, так как они непосредственным образом влияют на устойчивость и точность решения. Рассмотрим постановку граничных условий на стенке, расположенной в плоскости $y = 0$. На поверхности стенки $\psi$ есть константа, которую обычно полагают равной нулю. Чтобы найти $\zeta$ на стенке, разложим $\psi$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(i,\ 1)$, расположенной на стенке:

$$\psi_{i,\,2} = \psi_{i,\,1} + \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{i,\,1} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right|_{i,\,1} (\Delta y)^2 + \ldots. \tag{9.140}$$

Поскольку на непроницаемой границе

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{i,\,1} = u_{i,\,1} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right|_{i,\,1} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,\,1} \tag{9.141}$$

и по определению (9.122)

$$\zeta_{i,\,1} = \underbrace{\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{i,\,1}}_{0} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,\,1} = -\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right|_{i,\,1}, \tag{9.142}$$

то уравнение (9.140) можно переписать как

$$\psi_{i,2} = \psi_{i,1} - \frac{1}{2}\zeta_{i,1}(\Delta y)^2 + O[(\Delta y)^3],$$

или

$$\zeta_{i,1} = \frac{2(\psi_{i,1} - \psi_{i,2})}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y). \tag{9.143}$$

Это выражение первого порядка для $\zeta_{i,1}$ часто дает лучшие результаты, нежели выражения более высокого порядка, подверженные неустойчивостям при бóльших числах Рейнольдса. Например, следующее выражение второго порядка, впервые использованное Йенсеном [Jensen, 1959], приводит к неустойчивым вычислениям в диапазоне от умеренных до больших чисел Рейнольдса:

$$\zeta_{i,1} = \frac{7\psi_{i,1} - 8\psi_{i,2} + \psi_{i,3}}{2(\Delta y)^2} + O[(\Delta y)^2]. \tag{9.144}$$

Брили [Briley, 1970] объяснял неустойчивость, замечая, что выражение для $\psi$ в виде полинома, принятое при выводе уравнения (9.144), не согласуется с вычислениями $u = \partial\psi/\partial y$ в точке $(i, 2)$ по центральной разности. Вычисляя $u$ в точке $(i, 2)$ по выражению

$$u_{i,2} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{i,2} = \frac{-5\psi_{i,1} + 4\psi_{i,2} + \psi_{i,3}}{4\Delta y} + O[(\Delta y)^2], \tag{9.145}$$

которое согласуется с уравнением (9.144), Брили обнаружил, что его вычисления устойчивы даже при больших числах Рейнольдса.

Классической задачей с замкнутыми границами является расчет течения в полости с движущейся стенкой, показанной на рис. 9.3. В этой задаче вязкая несжимаемая жидкость в полости приводится в движение движущейся верхней стенкой. Граничные условия для этой задачи указаны на рис. 9.3. Задача о течении в полости с движущейся стенкой является прекрасным тестом для сравнения разных методов решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости. Обычным тестовым условием является условие $\mathrm{Re}_l = 100$, где

$$\mathrm{Re}_l = Ul/\nu \tag{9.146}$$

и $l$ — ширина полости. Подробные результаты вычислений можно найти в работах [Burggraf, 1966; Bozeman, Dalton, 1973; Rubin, Harris, 1975], результаты эксперимента — в работах [Mills, 1965; Pan, Acrivos, 1967].

Очень важно правильное задание значений $\zeta$ и $\psi$ на границах различного типа, таких, как линии симметрии, свободные

поверхности, входная и выходная плоскости, линии, на которых задается условие непротекания, и т. д.; кроме того, следует быть особенно внимательным, чтобы правильно моделировать физику течения. В монографии Роуча [Roache, 1972] имеется превосходный обзор постановки граничных условий самого разного типа.

Альтернативный способ решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости, записанных в переменных завих-

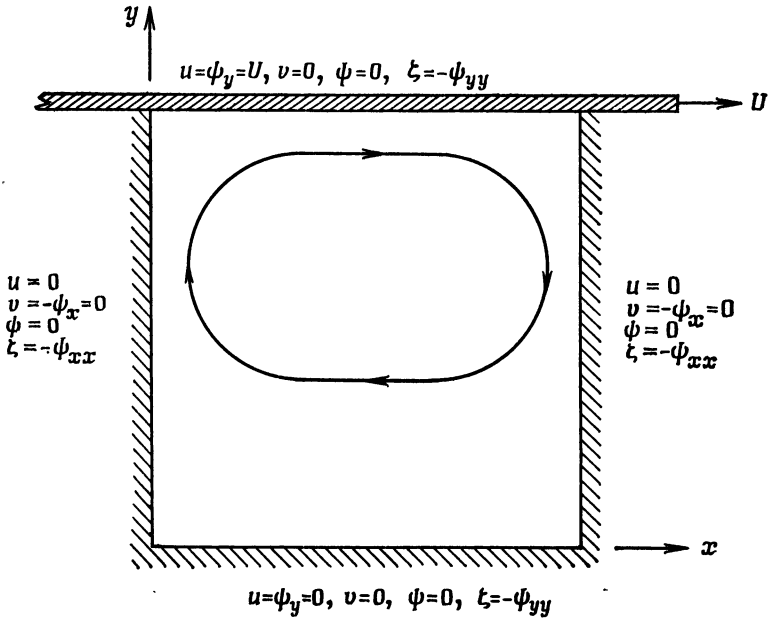



Рис. 9.3. Задача о течении в полости с движущейся стенкой.

ренность — функция тока, связан с использованием стационарного уравнения переноса завихренности

$$u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\nu\nabla^2\zeta. \tag{9.147}$$

Это эллиптическое уравнение можно решать методами, аналогичными применяемым для уравнения Пуассона. Такой подход с успехом использовался некоторыми специалистами, но оказалось, что он приводит к неустойчивостям. Поэтому вместо решения стационарных уравнений рекомендуется пользоваться методом установления.

Распространение подхода с использованием завихренности и функции тока в качестве независимых переменных на трехмер-

ные задачи осложнено тем, что для действительно трехмерного течения нельзя ввести функцию тока. Однако в этом случае существует векторный потенциал [Aziz, Hellums, 1967] (не путать с потенциалом скорости)

$$\psi = \psi_x \mathbf{i} + \psi_y \mathbf{j} + \psi_z \mathbf{k}, \tag{9.148}$$

удовлетворяющий уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \tag{9.149}$$

при этом

$$\mathbf{V} = \nabla \times \psi \tag{9.150}$$

и

$$u = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z},$$

$$v = -\frac{\partial \psi_z}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z},$$

$$w = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}.$$

После подстановки (9.150) в уравнение (9.120) получаем

$$\nabla \times (\nabla \times \psi) = \zeta. \tag{9.151}$$

Так как векторный потенциал может быть выбран произвольно так, чтобы он удовлетворял условию

$$\nabla \cdot \psi = 0,$$

уравнение (9.151) можно упростить, что дает

$$\nabla^2 \psi = -\zeta. \tag{9.152}$$

Это векторное уравнение Пуассона приводит к трем скалярным уравнениям Пуассона, которые необходимо решать на каждом временно́м шаге. Аналогичным образом уравнение переноса завихренности в случае трехмерной задачи является векторным, которое распадается на три скалярных параболических уравнения для определения компонент завихренности $\zeta_x$, $\zeta_y$, $\zeta_z$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_x}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta_x}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta_x}{\partial y} + w\frac{\partial \zeta_x}{\partial z} - \zeta_x\frac{\partial u}{\partial x} - \zeta_y\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta_z\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\nabla^2\zeta_x,\\
&\frac{\partial \zeta_y}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta_y}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + w\frac{\partial \zeta_y}{\partial z} - \zeta_x\frac{\partial v}{\partial x} - \zeta_y\frac{\partial v}{\partial y} - \zeta_z\frac{\partial v}{\partial z} = \nu\nabla^2\zeta_y,\\
&\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta_z}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta_z}{\partial y} + w\frac{\partial \zeta_z}{\partial z} - \zeta_x\frac{\partial w}{\partial x} - \zeta_y\frac{\partial w}{\partial y} - \zeta_z\frac{\partial w}{\partial z} = \nu\nabla^2\zeta_z.
\end{aligned} \tag{9.153}$$

Таким образом, на каждом временно́м слое мы вынуждены решать три параболических и три эллиптических уравнения с частными производными. Поэтому при решении трехмерных задач подход с использованием завихренности и функции тока в каче-

стве независимых переменных не дает преимуществ по сравнению с подходом с использованием примитивных переменных.

Прежде чем перейти к обсуждению второго из только что упомянутых подходов, опишем кратко еще один, являющийся гибридом двух названных. В этом гибридном подходе зависимыми переменными являются компоненты вектора завихренности $\zeta_x$, $\zeta_y$, $\zeta_z$ и компоненты вектора скорости $u$, $v$, $w$. Компоненты вектора завихренности получают из решения уравнения (9.153), а компоненты вектора скорости определяют, решая следующее уравнение:

$$\nabla^2 \mathbf{V} = -\nabla \times \boldsymbol{\zeta}. \tag{9.154}$$

Последнее векторное уравнение получают путем умножения уравнения, определяющего завихренность, на оператор $\nabla$ и упрощения полученного двойного векторного произведения $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \times \boldsymbol{\zeta}$.

Агарвал [Agarwal, 1981] установил, что при использовании гибридного подхода нет необходимости в применении сетки с расположением узлов в шахматном порядке, что требуется в подходе с использованием примитивных переменных. К тому же постановка граничных условий проще в гибридном подходе, нежели в подходе с использованием векторного потенциала, описанного выше.

### 9.3.2. Подход с использованием примитивных переменных

Подход с использованием завихренности и функции тока в качестве независимых переменных теряет свою привлекательность, когда его применяют к трехмерным течениям, так как в этом случае не существует одной функции тока (как обсуждалось в предыдущем параграфе). Поэтому в трехмерных задачах уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости решают также путем использования примитивных переменных $u$, $v$, $w$, $p$. В декартовой системе координат безразмерные уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в примитивных переменных имеют следующий вид:

*Уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0. \tag{9.155}$$

*Уравнение движения по координате x*

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \\ = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right). \tag{9.156}$$

*Уравнение движения по координате y*

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = \\ = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}}\right). \qquad (9.157)$$

*Уравнение движения по координате z*

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \\ = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right). \qquad (9.158)$$

Эти уравнения приведены к безразмерному виду с использованием следующих соотношений:

$$u^* = \frac{u}{V_\infty}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2}, \\ v^* = \frac{v}{V_\infty}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad t^* = \frac{tV_\infty}{L}, \qquad (9.159) \\ w^* = \frac{w}{V_\infty}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad \mathrm{Re}_L = \frac{V_\infty L}{\nu_\infty}.$$

Одним из первых для решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости, записанных относительно примитивных переменных, был предложен *метод искусственной сжимаемости* [Chorin, 1967]. В этом методе в уравнение неразрывности включен член с искусственной сжимаемостью, который обращается в нуль, когда решение устанавливается во времени. При этом уравнения Навье — Стокса образуют смешанную систему гиперболически-параболических уравнений, которая решается обычным методом установления. Проиллюстрируем его на примере уравнений (9.155)—(9.158). Уравнение неразрывности заменяется следующим уравнением:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}^*}{\partial \tilde{t}^*} + \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0, \qquad (9.160)$$

где $\tilde{\rho}^*$ — искусственная плотность и $\tilde{t}^*$ — фиктивное время, аналог реального времени в течениях сжимаемой жидкости. Искусственная плотность связана с давлением так называемым искусственным уравнением состояния

$$p^* = \tilde{\rho}^*/\beta, \qquad (9.161)$$

где $\beta$ — коэффициент искусственной сжимаемости, который будет определен ниже. Отметим, что установившееся решение не

зависит от $\tilde{\rho}$ и $\tilde{t}^*$, так как $\partial\tilde{\rho}^*/\partial\tilde{t}^* \to 0$. После замены $t^*$ на $\tilde{t}^*$ в уравнениях (9.156)—(9.158) и подстановки (9.161) в уравнение (9.160) мы можем дискретизировать полученные уравнения и решать их относительно $\tilde{t}^*$ до тех пор, пока не наступит установление, что дает решение для несжимаемой жидкости. Очевидно, этот метод годится только для стационарных течений, так как не является точным по времени.

Для облегчения дискретизации уравнения (9.155)—(9.158) и (9.160)—(9.161) можно записать в следующей векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \tilde{t}^*} + \frac{\partial \mathbf{e}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \mathbf{f}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \mathbf{g}^*}{\partial z^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}\right)[D]\,\mathbf{u}^*, \tag{9.162}$$

где

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} p^* \\ u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{u^*}{\beta} \\ p^* + (u^*)^2 \\ u^*v^* \\ u^*w^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{v^*}{\beta} \\ u^*v^* \\ p^* + (v^*)^2 \\ v^*w^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{w^*}{\beta} \\ u^*w^* \\ v^*w^* \\ p^* + (w^*)^2 \end{bmatrix}, \tag{9.163}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В оригинальной работе Чорина для их решения используется схема Дюфорта — Франкела («чехарда» (см. п. 4.5.2)). Он получил для явной схемы такое условие устойчивости:

$$\Delta\tilde{t}^* \leqslant \frac{2\beta^{1/2}\Delta^*_{\min}}{N^{1/2}(1+\sqrt{5})}, \tag{9.164}$$

где $N$ — число пространственных измерений и $\Delta^*_{\min}$ — минимум $(\Delta x^*, \Delta y^*, \Delta z^*)$. Можно получить дополнительную связь между $\Delta\tilde{t}^*$ и $\beta$, замечая, что искусственное уравнение состояния (9.161) предполагает существование искусственной скорости звука $\tilde{a}^*$:

$$\tilde{a}^* = 1/\beta^{1/2}. \tag{9.165}$$

Так как максимальное искусственное число Маха $\tilde{M}_{max}$, построенное по этой искусственной скорости звука, должно быть меньше единицы, получается следующее дополнительное соотношение:

$$\tilde{M}_{max} = \frac{V^*_{max}}{\tilde{a}^*} = \beta^{1/2} V^*_{max} < 1, \tag{9.166}$$

где $V^*_{max}$ — максимальное значение $V^*$, выраженное в виде

$$V^* = \sqrt{(u^*)^2 + (v^*) + (w^*)^2}. \tag{9.167}$$

Таким образом, для двух параметров $\Delta\tilde{t}^*$ и $\beta$ следует задать значения, удовлетворяющие условиям (9.164) и (9.166). Можно увеличить скорость сходимости путем выбора оптимальных значений $\Delta\tilde{t}^*$ и $\beta$, но делать это следует методом проб и ошибок в каждой конкретной задаче. В большинстве случаев значение $\tilde{M}_{max} = 0.5$ дает удовлетворительные результаты.

Обычно при решении уравнения (9.162) рекомендуется использовать неявную разностную схему. Для расчета завихренных следов в несжимаемой жидкости Стегер и Катлер [Steger, Kutler, 1976] применяли к уравнению (9.162) неявную приближенно факторизованную схему Бима — Уорминга (см. п. 9.2.3). Оказалось, что если $\beta$ слишком мало, то приближенная факторизация вводит в решение большие ошибки.

Только что описанный метод искусственной сжимаемости является одним из методов решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в примитивных переменных. В наиболее распространенном из них вместо уравнения неразрывности решается уравнение Пуассона для давления. Это делается для того, чтобы выделить в одно уравнение влияние давления, что позволяет соответствующим образом моделировать эллиптическую природу течения. Уравнение Пуассона для давления выводят точно так же, как и уравнение (9.131). Его можно записать в безразмерном виде

$$\nabla^2 p^* = S^*_p - \frac{\partial D^*}{\partial t}, \tag{9.168}$$

где

$$S^*_p = \frac{d}{dx^*}\left[-(u^*u^*_x + v^*u^*_y + w^*u^*_z) + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}(u^*_{xx} + u^*_{yy} + u^*_{zz})\right] +$$
$$+ \frac{d}{dy^*}\left[-(u^*v^*_x + v^*v^*_y + w^*v^*_z) + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}(v^*_{xx} + v^*_{yy} + v^*_{zz})\right] +$$
$$+ \frac{d}{dz^*}\left[-(u^*w^*_x + v^*w^*_y + w^*w^*_z) + \frac{1}{\mathrm{Re}_L}(w^*_{xx} + w^*_{yy} + w^*_{zz})\right]$$

и $D^* = u_x^* + v_y^* + w_z^*$ — скорость относительного объемного расширения элементарного жидкого объема в данной точке, причем $u_x^* = \partial u^*/\partial x^*$. Чтобы учесть различия между промежуточным решением и окончательным решением уравнения Пуассона по достижению сходимости, производную от скорости относительного объемного расширения полагают неравной нулю. Уравнение (9.168) впервые было использовано в *методе маркеров и ячеек* решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости [Harlow, Welch, 1965; Welch et al., 1966].

В другом подходе [Ghia et al., 1977b, 1979, 1981] неявная схема переменных направлений применяется для решения уравнений движения (9.156)—(9.158), а уравнение Пуассона для давления решается методом последовательной верхней релаксации. В начале расчета градиенты давления в уравнениях движения задаются приближенно. После вычисления компонент скорости по уравнениям движения из уравнения Пуассона определяют давление. Затем рассчитывают градиенты давления и подставляют их значения в уравнения движения, по которым находят новые значения компонент скорости. Эта процедура повторяется до тех пор, пока решение не сойдется.

Таким способом были рассчитаны течения в полости и канале. В обеих задачах для уравнения Пуассона на границах задавался градиент давления в нормальном направлении $dp/dn$, который вычислялся по соответствующему уравнению движения. Таким образом, для определения давления необходимо решать задачу Неймана, причем ее решение должно удовлетворять следующему интегральному требованию, вытекающему из теоремы Гаусса — Остроградского:

$$\iint_A \nabla^2 p \, dA = \oint_C \frac{\partial p}{\partial n} \, ds, \tag{9.169}$$

где $C$ — замкнутая граница области $A$, в которой мы ищем решение, а $s$ — длина дуги вдоль $C$. Пока решение не установится, требование (9.169) точно удовлетворяться не будет. Для учета этого несоответствия источниковый член $S_p^*$ в уравнении (9.168) в каждой точке сетки можно подправлять на величину $\Delta S_p^*/A^*$, где

$$\Delta S_p^* = \iint_{A^*} S_p^* \, dA^* - \oint_C \frac{\partial p^*}{\partial n^*} \, ds^* \tag{9.170}$$

и $A^*$, $n^*$, $s^*$ — безразмерные величины. В работах [Briley, 1974; Ghia et al., 1981] для получения решения задачи Неймана с успехом была использована дискретизация этого интегрального соотношения.

Чтобы показать, как вычисляется нормальный градиент давления на границе, поместим стенку в плоскости $y=0$ (рис. 9.4). Под поверхностью стенки разместим слой фиктивных узлов (сетка обычная, а не с расположением узлов в шахматном порядке). На поверхности стенки уравнение движения по координате $y$ (9.157) сводится к уравнению

$$\left.\frac{\partial p^*}{\partial y^*}\right|_{i,1} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\left.\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right|_{i,1}. \tag{9.171}$$

Последнее можно дискретизировать, используя аппроксимации второго порядка с центральными разностями

$$\frac{p^*_{i,2}-p^*_{i,0}}{2\Delta y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\left(\frac{v^*_{i,2}-\overbrace{2v^*_{i,1}}^{0}+v^*_{i,0}}{(\Delta y^*)^2}\right), \tag{9.172}$$

где $v^*_{i,0}$ — значение $v^*$ в фиктивном узле, которое можно опре-

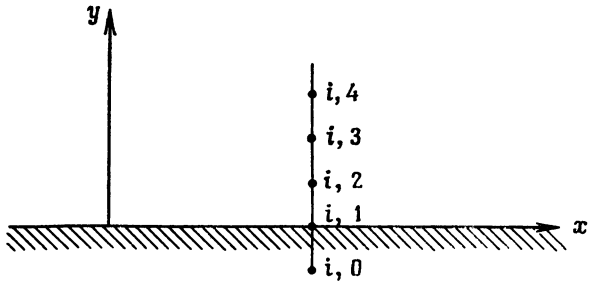



Рис. 9.4. Расположение узлов расчетной сетки при определении граничных условий для давления.

делить из уравнения неразрывности, принимающего на стенке следующий простой вид:

$$\left.\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right|_{i,1} = 0. \tag{9.173}$$

Аппроксимируя его с третьим порядком точности

$$\left.\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right|_{i,1} = \frac{-2v^*_{i,0}-\overbrace{3v^*_{i,1}}^{0}+6v^*_{i,2}-v^*_{i,3}}{6\,(\Delta y^*)} + O\left[(\Delta y^*)^3\right] = 0, \tag{9.174}$$

вычислим $v^*_{i,0}$, сохраняя при этом второй порядок в уравнении (9.172). Точно так же определяют градиенты давления на других границах при решении уравнения Пуассона для давления.

Описанный в п. 8.4.1 метод SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations — полунеявный метод для связанных через давление уравнений) [Patankar, Spalding, 1972] для решения дозвуковых параболизованных уравнений Навье — Стокса можно также применять и в случае уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости (см. [Caretto et al., 1972; Patankar, 1975, 1981]). Этот метод имеет в своей основе циклическую последовательность операций «предположение — коррекция» при решении уравнений. Используя некоторое начальное поле давления, сначала вычисляют компоненты скорости по уравнениям движения. Затем давление и компоненты скорости корректируются так, чтобы удовлетворить уравнению неразрывности. Этот процесс продолжают, пока решение не сойдется.

Истинное значение давления представляется в виде

$$p = p_0 + p', \tag{9.175}$$

где $p_0$ — вычисляемое (или промежуточное) значение давления, а $p'$ — корректирующая поправка. Аналогично истинные значения компонент скорости для двумерного случая представляются как

$$u = u_0 + u', \quad v = v_0 + v', \tag{9.176}$$

где $u_0$, $v_0$ — вычисляемые (или промежуточные) значения компонент скорости, $u'$, $v'$ — поправки к ним. Поправки к давлению связаны с поправками к компонентам скорости приближенными уравнениями движения

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x}, \\ \rho \frac{\partial v'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial y}. \end{aligned} \tag{9.177}$$

Так как поправки к компонентам скорости на предыдущей итерации считаются равными нулю, то последние уравнения движения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u' &= -A \frac{\partial p'}{\partial x}, \\ v' &= -A \frac{\partial p'}{\partial y}, \end{aligned} \tag{9.178}$$

где $A$ — приращение фиктивного времени, деленное на плотность. Подставим (9.176) в (9.178), а результат — в уравнение неразрывности. Тогда получаем

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) + A\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{9.179}$$

или

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{A}(\nabla \cdot \mathbf{V}_0), \tag{9.180}$$

где $\mathbf{V}_0$ — вычисленный вектор скорости. Это уравнение Пуассона можно решить относительно поправки к давлению. Заметим, что если вычисленный вектор скорости $\mathbf{V}_0$ удовлетворяет уравнению неразрывности в каждой точке, то и поправки к давлению $p'$ будут равны нулю в каждой точке. В описываемом алгоритме SIMPLE используется дискретная форма уравнения (9.180), как показано в работе [Raithby, Schneider, 1979].

В заключение можно сказать, что процедура SIMPLE состоит из следующих шагов:

1. Приближенно задать давление $p_0$ в каждом узле сетки.
2. Для нахождения компонент скорости $u_0$ и $v_0$ решить уравнение движения. Патанкар и Сполдинг рекомендуют использовать блочный итерационный метод на сетке с расположением узлов в шахматном порядке.
3. Решить уравнение для поправок к давлению (т. е. уравнение (9.180)), чтобы найти $p'$ в каждом узле сетки.
4. Подправить давление и компоненты скорости в соответствии с уравнениями (9.175) и (9.178):

$$p = p_0 + p',$$

$$u = u_0 - \frac{A}{2\Delta x}(p'_{i+1,\,j} - p'_{i-1,\,j}),$$

$$v = v_0 - \frac{A}{2\Delta y}(p'_{i,\,j+1} - p'_{i,\,j-1}).$$

5. Заменить предыдущие промежуточные значения давления и компонент скорости $u_0$, $v_0$, $p_0$ новыми скорректированными значениями $p$, $u$, $v$ и вернуться к шагу 2. Повторять этот процесс, пока решение не сойдется.

Процедура SIMPLE с успехом была использована для решения целого ряда задач расчета течений несжимаемой жидкости. Однако в некоторых случаях скорость сходимости оказалась недостаточно быстрой. Это связано с тем, что уравнение для поправок к давлению дает завышенные значения $p'$, даже если соответствующие поправки к компонентам скорости вполне правдоподобны. Поэтому уравнение (9.175) часто заменяют уравнением $p = p_0 + \alpha_p p'$, где $\alpha_p$ — параметр нижней релаксации. По этой же причине в уравнениях движения также используется нижняя релаксация. В описываемой постановке задачи нижнюю релаксацию можно осуществлять, варьируя параметр $A$ в уравнениях (9.178) и (9.180).

Поскольку сразу невозможно определить оптимальное значение параметров нижней релаксации, процедура SIMPLE была модифицирована с целью увеличения скорости сходимости [Patankar, 1981]. Модифицированная процедура получила название SIMPLER (SIMPLE revised). В ней поправки к скорости вычисляются так же, как и в процедуре SIMPLE, но используются полные уравнения Пуассона для давления. Кроме того, сначала приближенно задается поле скорости, а не поле давления. Так как вычисляемое в процедуре SIMPLER давление близко к правильному, то необходимость в нижней релаксации становится заметно менее настоятельной и сходимости решения добиваются за меньшее число итераций. В большинстве случаев совокупные затраты машинного времени снижаются на 30—50 %, несмотря на то что SIMPLER требует примерно на 30 % больше вычислений на одной итерации, чем SIMPLE.

## Задачи

**9.1.** Покажите, как дискретизируются все члены уравнения движения по координате $y$, когда явная схема Мак-Кормака используется для решения двумерных уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости.

**9.2.** Решите задачу 9.1 для двумерного уравнения энергии.

**9.3.** Дискретизируйте уравнение движения по координате $r$ в случае применения явной схемы Мак-Кормака для уравнений Навье — Стокса, записанных в цилиндрической системе координат (см. п. 5.1.7).

**9.4.** В задаче 9.1 используйте схему Аллена — Чена вместо схемы Мак-Кормака.

**9.5.** Выпишите матрицу Якоби $[A]$, заданную уравнением (9.46).

**9.6.** Выпишите матрицу Якоби $[B]$, заданную уравнением (9.48).

**9.7.** Выпишите матрицу Якоби $[R]$, заданную уравнением (9.51).

**9.8.** Выпишите матрицу Якоби $[S]$, заданную уравнением (9.54).

**9.9.** Выпишите матрицу $[P]$—$[R_x]$, заданную уравнением (9.50).

**9.10.** Выпишите матрицу $[Q]$—$[S_y]$, заданную уравнением (9.53).

**9.11.** Определите множитель перехода для явной схемы Мак-Кормака, применяемой к линеаризованному уравнению Бюргерса. Удовлетворяет ли уравнение (9.86) условию $|G| \leqslant 1$ для всех значений $\beta$, когда $\nu = 1/2$ и $r = 1/4$?

**9.12.** Решите задачу 9.11 для $\nu = 1$ и $r = 1/2$.

**9.13.** Воспользуйтесь неявной схемой Мак-Кормака для решения линеаризованного уравнения Бюргерса с начальным $u(x, 0) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ и граничными $u(0, t) = 100$, $u(1, t) = 0$ условиями на сетке, состоящей из 21 узла. Найдите установившееся решение для $r = 0.5$, $\nu = 0.5$ и сравните численное решение с аналитическим.

**9.14.** Выпишите матрицу Якоби $[A]$ в уравнении (9.96) и покажите, что она равна $[S_x]^{-1}[\Lambda_A][S_x]$.

**9.15.** Выпишите матрицу Якоби $[B]$ в уравнении (9.96) и покажите, что она равна $[S_y]^{-1}[\Lambda_B][S_y]$.

**9.16.** Выведите уравнение (9.124).

**9.17.** Решите задачу о квадратной полости для $\mathrm{Re}_l = 50$. Воспользуйтесь схемой ВВЦП для решения уравнения переноса завихренности и методом последовательной верхней релаксации для решения уравнения Пуассона. Используйте сетку размером $8 \times 8$ и аппроксимацию первого порядка для завихренности на стенке.

**9.18.** Решите задачу 9.17 для $\mathrm{Re}_l = 100$ на сетке $15 \times 15$.

**9.19.** Выведите уравнение переноса завихренности для трехмерной декартовой системы координат.

**9.20.** Используйте метод искусственной сжимаемости для решения задачи течения в полости квадратной формы при $\mathrm{Re}_l = 100$. Воспользуйтесь схемой Дюфорта — Франкела («чехарда») для решения определяющих уравнений на сетке размером $15 \times 15$. Определите давление на стенке, подходящим образом аппроксимируя записанное на стенке уравнение движения в направлении по нормали.

# Глава 10

# Методы построения расчетных сеток

## § 10.1. Введение

Решение системы дифференциальных уравнений с частными производными можно значительно упростить применением хорошо построенной расчетной сетки. Верно и другое, что расчет на сетке, не очень хорошо соответствующей данной задаче, может дать неудовлетворительный результат. В некоторых приложениях неадекватный выбор размещения узлов расчетной сетки может приводить к неустойчивости или отсутствию сходимости. Одной из центральных проблем при численном решении уравнений с частными производными является построение расчетных сеток.

Ранние работы по конечно-разностным методам были ограничены задачами, для которых можно было подобрать подходящую систему координат и в ней решать определяющие уравнения. По мере накопления опыта расчетов сложных полей течений стали применять преобразования координат общего вида для отображения физической области на вычислительную. Этот путь весьма многообещающий. Например, поверхность тела может быть выбрана в качестве границы вычислительной плоскости, что облегчает постановку граничных условий на поверхности тела. Обычно эти преобразования применяют, когда хотят получить равномерную сетку в вычислительной плоскости, хотя узлы сетки в физическом пространстве могут быть расположены неравномерно. Эта ситуация иллюстрируется на рис. 10.1. Когда выполняют преобразование координат, то дифференциальное уравнение принимает вид, куда входят метрические коэффициенты преобразования. Это можно понять на следующем простом примере.

**Пример 10.1.** Пусть мы решаем такое простое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} + y = 0$$

в некоторой области с соответствующими начальными и граничными условиями. Поскольку вычисления обычно производятся в вычислительной области, то преобразование, связывающее

физическую и вычислительную области, можно задать следующим образом:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$

Исходное дифференциальное уравнение с частными производными при переходе от физических координат $x$, $y$ к координатам в вычислительной плоскости $\xi$, $\eta$ преобразуется при помощи правила дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi_x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\xi_y + \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta_y. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Тогда оно принимает вид

$$(\xi_x + c\xi_y)\frac{\partial u}{\partial \xi} + (\eta_x + c\eta_y)\frac{\partial u}{\partial \eta} + y(\xi, \eta) = 0. \tag{10.2}$$

Это уравнение решается в вычислительной плоскости на равномерной сетке. Понятно, что необходимо установить связь меж-

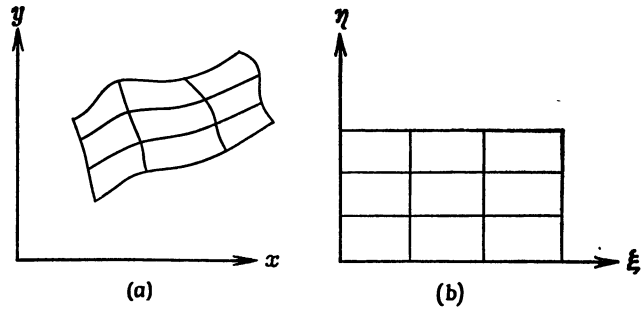



Рис. 10.1. Отображение физической плоскости на вычислительную: (a) физическая плоскость; (b) вычислительная плоскость.

ду координатами в физической и вычислительной плоскостях. Эту связь и задают метрические коэффициенты преобразования (члены $\xi_x$, $\xi_y$, $\eta_x$ и $\eta_y$ в рассматриваемом уравнении с частными производными).

Задача построения расчетной сетки заключается в нахождении отображения, которое переводит узлы сетки из физической области (D) в вычислительную область (CD). Это отображение должно удовлетворять некоторым требованиям. Можно назвать некоторые из них:

1. Отображение должно быть однозначным.
2. Линии сетки должны быть гладкими, что обеспечивает непрерывность производных.

3. Сетка должна быть достаточно густой в тех частях области D, где ожидают возникновения больших численных ошибок.

4. Следует избегать излишней скошенности ячеек сетки, которая, как было показано [Raithby, 1976], иногда приводит к чрезмерной ошибке аппроксимации.

Построение расчетных сеток в случае одного измерения сравнительно просто. Имеется много функций (либо других методов), которые можно использовать для построения сетки. К тому же в одномерных задачах не возникает проблема границ сложной формы. Поэтому большинство исследований, касающихся вопросов построения расчетных сеток, было выполнено для случая двух измерений. В настоящей главе будет приведено много примеров для случая двух измерений. Построение расчетных сеток в пространстве трех измерений является трудной задачей и существует не так много методов, дающих удовлетворительные результаты.

Методы построения расчетных сеток грубо можно разделить на три класса:

1. Методы теории функций комплексного переменного.
2. Алгебраические методы.
3. Методы, основанные на решении дифференциальных уравнений.

Методы теории функций комплексного переменного обладают тем преимуществом, что используемые в них преобразования являются полностью или частично аналитическими. К сожалению, применение этих методов ограничено случаем двух измерений, и по этой причине в нашей книге они рассматриваться не будут.

Желающих ознакомиться с приложениями этих методов отсылаем к работам [Churchill, 1948; Moretti, 1979; Davis, 1979]. Алгебраические методы и методы, основанные на решении дифференциальных уравнений, можно применять в сложных трехмерных задачах. Из всех методов построения расчетных сеток эти два являются самыми многообещающими и широко распространенными. В настоящей главе будут рассмотрены приложения этих методов и приведены примеры построения расчетных сеток.

## § 10.2. Алгебраические методы

Для адекватного разрешения вязкого пограничного слоя размещение узлов сетки вблизи твердых границ мы задавали в гл. 5 при помощи алгебраических выражений. В другом при-

мере было использовано нормализующее преобразование области, чтобы сообразовать размещение узлов сетки с положением поверхности тела и ударной волны в физическом пространстве. Все это примеры простых алгебраических отображений. При построении сетки таким способом используются известные функции в одном, двух или трех измерениях, чтобы перевести физическую область произвольной формы в прямоугольную вычислительную область. Хотя вычислительная область и не обязательно должна быть прямоугольной, обычно простоты ради применяются именно прямоугольные области.

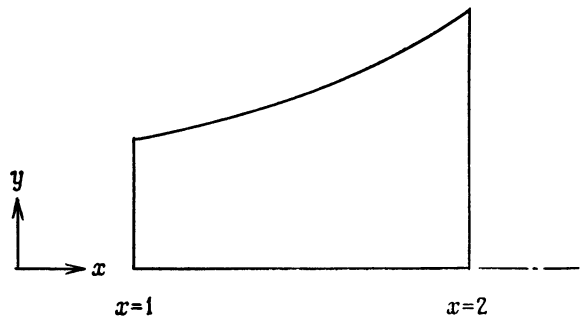



Рис. 10.2. Конфигурация сопла.

Простейшая процедура, пригодная для построения адаптированной к границе области расчетной сетки, есть обсуждаемое в § 5.6 нормализующее преобразование.

Пусть необходимо построить сетку для расчета течения в расширяющемся сопле, изображенном на рис. 10.2. Положение стенки сопла задается функцией

$$y = x^2, \quad 1.0 \leqslant x \leqslant 2.0. \tag{10.3}$$

В этом примере сетку легко построить, выбирая постоянным шагом по координате $x$ и деля каждый отрезок между осью сопла и стенкой на одинаковое количество частей. Эта процедура описывается следующими зависимостями:

$$\xi = x, \quad \eta = y/y_{\max}, \tag{10.4}$$

где $y_{\max}(x)$ — уравнение стенки сопла. При этом значения $x$ и $y$ легко находят по заданным значениям $\xi$ и $\eta$. Построенная в физической области сетка изображена на рис. 10.3.

Следует быть внимательным при расчете метрических коэффициентов преобразования. В частности, производные $\eta_x$ и $\eta_y$,

рассчитываемые по уравнениям (10.4), имеют вид

$$\eta_x = -\frac{y}{y_{\max}^2}\frac{dy_{\max}}{dx} = -\frac{2\eta}{\xi}, \tag{10.5}$$

$$\eta_y = \frac{1}{y_{\max}} = \frac{1}{\xi^2}. \tag{10.6}$$

В только что рассмотренном примере преобразование было аналитическим и с его помощью сразу получили распределение

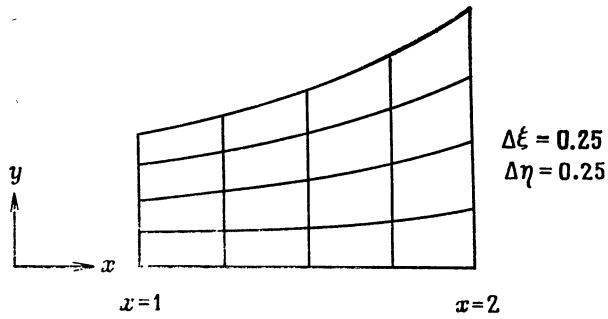



Рис. 10.3. Расчетная сетка в физической плоскости.

узлов сетки. Можно было бы построить такое же преобразование, задавая точки в физической плоскости вдоль линий постоянства $\xi$ и $\eta$ и численно вычисляя метрические коэффициенты с использованием центральных разностей. Это имеет то преимущество, что можно задавать точки в любом месте физической плоскости. В этом случае преобразование будет численным, а не алгебраическим.

Если преобразование задается численным образом, то $x_\xi$, $x_\eta$, $y_\xi$ и $y_\eta$ рассчитываются разностными методами. В дифференциальном уравнении, которое следует решить, фигурируют величины $\xi_x$, $\xi_y$, $\eta_x$ и $\eta_y$. Их определяют из выражений

$$\begin{gathered}\xi_x = \frac{y_\eta}{J}, \qquad \xi_y = -\frac{x_\eta}{J},\\ \eta_x = -\frac{y_\xi}{J}, \qquad \eta_y = \frac{x_\xi}{J},\\ J = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta.\end{gathered} \tag{10.7}$$

Подробнее об этом будет говориться ниже, где рассматриваются методы построения расчетных сеток путем решения дифференциальных уравнений.

**Пример 10.2.** Вычислить метрические коэффициенты только что рассмотренного простого нормализующего преобразования аналитически и численно.

Метрические коэффициенты будем вычислять в точке (1.75, 2.2969) (см. рис. 10.3). Аналитический расчет по уравнению (10.5) дает

$$\eta_x = -\frac{2\,(0.75)}{1.75} = -0.85714.$$

Численный расчет будем проводить по уравнению (10.7). Сначала вычислим якобиан

$$J = \underbrace{x_\xi}_{1} y_\eta - \underbrace{y_\xi}_{0} x_\eta = \frac{3.0625 - 1.53125}{2\,(0.25)} = 3.06250,$$

затем

$$y_\xi = \frac{3 - 1.6875}{0.5} = 2.6250$$

и, наконец,

$$\eta_x = -\frac{2.6250}{3.0625} = -0.85714.$$

В этом примере численный и аналитический расчеты дают одинаково хорошие результаты. Конечно же, это не всегда так.

**Пример 10.3.** Изображенная на рис. 10.4 область в форме трапеции отображается на прямоугольную область, заданную следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1+\xi}{2}\,\frac{3-\eta}{2}, \\ y &= \frac{\eta+1}{2}. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Здесь физическая область отображается на прямоугольник с центром в начале координат. Это пример нормализующего преобразования по одному направлению и последующего параллельного переноса. Понятно, что любая четырехугольная форма может быть отражена на прямоугольник в вычислительной области использованием нормализующего преобразования.

Для построения требуемых расчетых сеток можно использовать очень сложные алгебраические функции. Смит и Вейгель [Smith, Weigel, 1980] разработали гибкий метод построения сеток. В нем две несвязанные границы отображаются из плоскости прямоугольных физических координат на вычислительную плоскость. Пусть в физической плоскости две несвязанные гра-

ницы задаются уравнениями

$$x_{B1} = x_1(\xi), \quad y_{B1} = y_1(\xi),$$
$$x_{B2} = x_2(\xi), \quad y_{B2} = y_2(\xi). \tag{10.9}$$

В вычислительной плоскости $\xi$ изменяется на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ и преобразование определяется так, что при $\eta = 0$

$$x_{B1} = x_1(\xi) = x(\xi, 0),$$
$$y_{B1} = y_1(\xi) = y(\xi, 0)$$

и при $\eta = 1$

$$x_{B2} = x_2(\xi) = x(\xi, 1),$$
$$y_{B2} = y_2(\xi) = y(\xi, 1). \tag{10.10}$$

Некоторая функция, определенная при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и зависящая

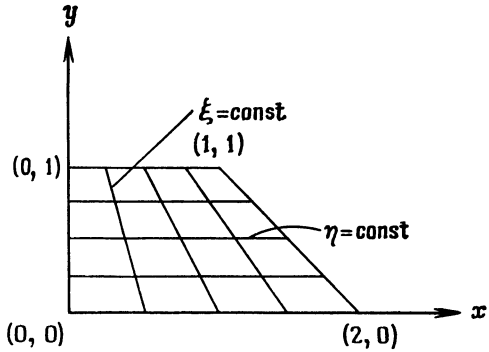



Рис. 10.4. Область в форме трапеции в физической плоскости.

от параметров на двух границах, задается алгебраическими выражениями в виде

$$x = x(\xi, \eta) = F\left(x_1, \frac{dx_1}{d\eta}, \ldots, x_2, \frac{dx_2}{d\eta}, \ldots\right),$$
$$y = y(\xi, \eta) = G\left(y_1, \frac{dy_1}{d\eta}, \ldots, y_2, \frac{dy_2}{d\eta}, \ldots\right). \tag{10.11}$$

Смит и Вейгель предлагают использовать полиномы второй или третьей степени. Если выбрать линейную функцию, то

$$x = x_1(\xi)(1 - \eta) + x_2(\xi)\eta,$$
$$y = y_1(\xi)(1 - \eta) + y_2(\xi)\eta. \tag{10.12}$$

**Пример 10.4.** Чтобы на практике показать применение этого подхода, отобразим трапецию, задаваемую уравнениями

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1 + x,$$

на вычислительную плоскость. В этом случае для верхней и нижней границ можно записать

$$x_{B1} = x_1(\xi) = \xi, \quad y_{B1} = y_1(\xi) = 0,$$
$$x_{B2} = x_2(\xi) = \xi, \quad y_{B2} = y_2(\xi) = 1 + \xi.$$

Это приводит к отображению, заданному уравнениями (10.12) и имеющему вид

$$x = \xi, \quad y = (1 + \xi)\eta. \tag{10.13}$$

Такая параметризация дает простое нормализующее преобразование, обсуждавшееся выше. В этом примере и правая, и левая границы также отображаются корректно. Так получилось случайно, и в более общих случаях этого не происходит. Выбирая нелинейную функцию при параметризации уравнения, задающего границу, можно получить другое распределение узлов сетки. Например, если $x_1 = \xi^2$, $x_2 = \xi^2$, то $x = \xi^2$, $y = \eta(1+\xi^2)$.

Если используются полиномы третьей степени, то вид преобразования становится таким:

$$\begin{aligned} x &= x_1(\xi) f_1(\eta) + x_2(\xi) f_2(\eta) + \frac{dx_1}{d\eta}(\xi) f_3(\eta) + \frac{dx_2}{d\eta}(\xi) f_4(\eta), \\ y &= y_1(\xi) f_1(\eta) + y_2(\xi) f_2(\eta) + \frac{dy_1}{d\eta}(\xi) f_3(\eta) + \frac{dy_2}{d\eta}(\xi) f_4(\eta), \end{aligned} \tag{10.14}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\eta) &= 2\eta^3 - 3\eta^2 + 1, \\ f_2(\eta) &= -2\eta^3 + 3\eta^2, \\ f_3(\eta) &= \eta^3 - 2\eta^2 + \eta, \\ f_4(\eta) &= \eta^3 - \eta^2. \end{aligned}$$

То, что в выражение для преобразования входят производные от функций, задающих границы в физической плоскости, делает отображение более гибким. Например, можно добиться ортогональности сетки на границе в физической плоскости [Kowalski, 1980].

В большинстве задач границы задаются не аналитическими функциями, а просто набором точек. В этом случае, чтобы выполнить отображение, граница должна быть аппроксимирована подходящей кривой. Айсман и Смит [Eiseman, Smith, 1980] обсуждают возможные способы реализации этого и рекомендуют напряженные сплайны, так как аппроксимации более высокого порядка, включая кубические сплайны, дают волнистость на границах. Посредством параметра натяжения напряженного сплайна можно управлять этим явлением.

Описанный в данном разделе метод двух границ (или двух поверхностей) является только одним из алгебраических методов построения расчетных сеток. Применяются и другие методы этого типа, например *метод многих поверхностей* [Eiseman, 1979]. Он аналогичен методу двух поверхностей, но определяет структуру сетки на любом количестве промежуточных контрольных поверхностей. В последнее время большое внимание уделяют методу трансфинитной интерполяции [Gordon, Hall, 1973], который подробно описан в работе [Rizzi, Eriksson, 1981] и напоминает метод двух поверхностей, когда координаты и производные задаются на границах. Основное преимущество использования алгебраических отображений состоит в том, что они являются прямыми и метрические коэффициенты можно вычислять аналитически. К тому же их можно применять в трехмерных задачах. Требуется, правда, проявить изобретательность, чтобы получить сетку с адекватным размещением узлов.

## § 10.3. Методы, основанные на решении дифференциальных уравнений

В предыдущем параграфе были описаны алгебраические методы построения расчетных сеток. Приемлемой является любая процедура, применение которой приводит к построению пригодной сетки. Методы, основанные на решении дифференциальных уравнений, относятся к числу самых развитых. При использовании дифференциального уравнения для построения сетки можно учесть свойства решения этого уравнения. Для этой цели часто применяют уравнения Лапласа и Пуассона.

Причину выбора уравнения Лапласа лучше можно понять, если рассмотреть задачу стационарной теплопроводности в двух измерениях с граничными условиями Дирихле. Решение этой задачи дает гладкие (вторые производные существуют и непрерывны) и непересекающиеся изотермы. Число изотерм в данной области может быть увеличено добавлением источникового члена. Если изотермы брать за линии сетки, последние будут гладкими и непрерывными. Величиной источникового члена можно управлять их сгущением в любой области.

Томпсон и др. [Thompson et al., 1974] много работали над применением эллиптических уравнений с частными производными для построения сеток. Эта процедура аналогична той, которую использовал Уинслоу [Winslow, 1966]; она преобразует физическую плоскость в вычислительную, причем отображение осуществляется в соответствии с уравнением Пуассона. Это отображение строится требуемым заданием точек сетки $(x, y)$ на границе физической области. Тогда распределение внутрен-

них узлов определяют из решения уравнений

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta), \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{10.15}$$

где $\xi$, $\eta$ — координаты в вычислительной области, а через члены $P$ и $Q$ осуществляется управление размещением узлов внутри $D$. Затем в уравнениях (10.15) за независимые переменные принимают координаты $\xi$, $\eta$ в вычислительной плоскости, после чего мы имеем систему двух эллиптических уравнений вида

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2(Px_\xi + Qx_\eta), \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2(Py_\xi + Qy_\eta), \end{aligned} \tag{10.16}$$

где

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2,$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi.$$

Эту систему решают на равномерной сетке в вычислительной плоскости $(\xi, \eta)$, что дает координаты $(x, y)$ каждого узла в физическом пространстве. Для простых связных областей граничные условия Дирихле могут быть использованы во всех точках границы. Такой метод построения сетки имеет много достоинств. Сетка получается гладкой, преобразование однозначным, а границы сложной формы легко обрабатываются. Конечно, метод имеет и свои недостатки. Задание $P$ и $Q$ является непростой задачей, трудно управлять размещением узлов сетки во внутренней части, да и границы области могут изменяться со временем. В последнем случае сетка должна перестраиваться после каждого шага по времени, что может приводить к большим затратам машинного времени.

Простой пример приложения метода Томпсона изображен на рис. 10.5. Область между двумя концентрическими окружностями отображается на прямоугольник в вычислительной плоскости. На рисунке показаны полученные в результате расчета линии постоянства $\xi$ и $\eta$ в физическом пространстве. Внутренняя окружность имеет радиус $r_0$, наружная — радиус $r_1$. В этой задаче окружности разрезают по радиусу $\theta = 0$ и внутренность между ними отображается на прямоугольник с изменениями координат от 1 до $\xi_{max}$ и от 1 до $\eta_{max}$ в вычислительной плоскости. Здесь отображение определяют из уравнений Лапласа

$$\nabla^2 \xi = 0, \quad \nabla^2 \eta = 0$$

с граничными условиями

$$r = r_0, \quad \eta = 1; \qquad \theta = 0, \quad \xi = 1;$$
$$r = r_1, \quad \eta = \eta_{\max}; \quad \theta = 2\pi, \quad \xi = \xi_{\max}.$$

Решение имеет вид

$$x = R\cos\phi, \quad y = R\sin\phi,$$

где

$$R = r_0\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{(\eta-1)/(\eta_{\max}-1)}, \quad \phi = \frac{\xi - 1}{\xi_{\max} - 1}\,2\pi.$$

Интересно, что в этом случае решение не дает равномерной сетки в физической области. Сетка оказывается набором концен-

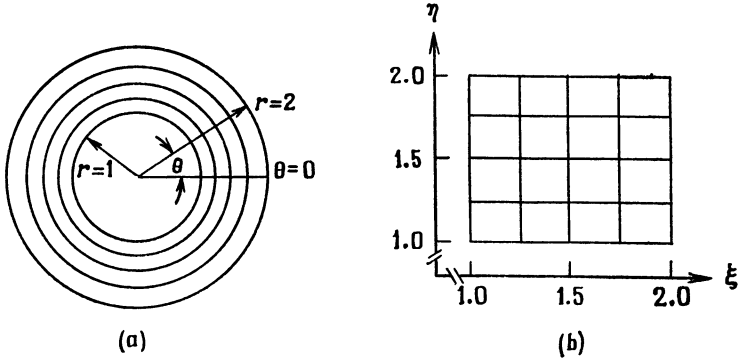



Рис. 10.5. Применение метода Томпсона: (a) физическая плоскость; (b) вычислительная плоскость.

трических окружностей. Чтобы сделать эти окружности равноотстоящими друг от друга, следует задать $P = 0$ и $Q = 1/\eta$ (см. задачу 10.9).

Как отмечалось ранее, одна из трудностей применения этого метода заключается в контроле размещения узлов внутри области. Для получения желаемого распределения узлов необходимо располагать методикой задания $P$ и $Q$. Миддлкофф и Томас [Middlecoff, Thomas, 1979] разработали методику, которая обеспечивает приближенный контроль размещения узлов сетки путем оценки $P$ и $Q$ по требуемому распределению точек на границе.

Чтобы пояснить эту идею, предположим, что требуется решить уравнение (10.15) с условиями Дирихле. Выберем следующую форму записи $P$ и $Q$:

$$\begin{aligned} P &= \phi(\xi, \eta)(\xi_x^2 + \xi_y^2), \\ Q &= \psi(\xi, \eta)(\eta_x^2 + \eta_y^2), \end{aligned} \tag{10.17}$$

где $\phi$ и $\psi$ будут определены ниже из граничных условий. С учетом этого исходную систему уравнения (10.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha(x_{\xi\xi} + \phi x_\xi) - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma(x_{\eta\eta} + \psi x_\eta) = 0, \\ \alpha(y_{\xi\xi} + \phi y_\xi) - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma(y_{\eta\eta} + \psi y_\eta) = 0. \end{aligned} \tag{10.18}$$

Приравнивая выражения, стоящие в скобках, нулю на границе, определяем функции $\phi$ и $\psi$. Миддлкофф и Томас требуют, например, чтобы вдоль границы $\xi = \text{const}$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} x_{\eta\eta} + \psi x_\eta = 0, \\ y_{\eta\eta} + \psi y_\eta = 0, \end{aligned} \tag{10.19}$$

а вдоль границы $\eta = \text{const}$ — условия

$$\begin{aligned} x_{\xi\xi} + \phi x_\xi = 0, \\ y_{\xi\xi} + \phi y_\xi = 0. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Поскольку $x$ и $y$ известны во всех точках границы, то функции $\phi$ и $\psi$ могут быть определены с использованием центрально-разностной аппроксимации для всех производных, входящих в уравнения (10.19) и (10.20). Следует отметить, что $\phi$ и $\psi$ определяют по одному из уравнений каждой пары (10.19) и (10.20). Обычно если $\phi$ находят по одному из уравнений (10.20), то другое при этом отлично от нуля. То же справедливо и в отношении функции $\psi$, которую определяют из уравнений (10.19). Используя такой подход, находят функции $\phi$ и $\psi$ на границе, а внутри области значения этих функций получают простой экстраполяцией. Данная методика дает способ управления распределением внутренних узлов по требуемому их распределению на границе. Предложены и другие методы контроля распределения узлов сетки. Можно рекомендовать работы [Thompson et al., 1975; Thompson, 1980], где дан обзор наиболее удачных из них.

Для построения расчетных сеток могут быть использованы уравнения с частными производными других типов. Стегер и Соренсон [Steger, Sorenson, 1980] описали метод, использующий систему гиперболических уравнений для построения сетки вокруг некоторого тела. При этом внешняя граница заранее не указывается. Поверхность тела образует внутреннюю границу, и система гиперболических уравнений решается маршевым методом в направлении от тела, что не требует задания внешней границы. Стегер и Соренсон предлагают *метод дуг* и *метод объемов*, приводящие к построению ортогональных сеток. Остановимся подробнее на последнем.

В случае двух измерений якобиан преобразования дает отношение площадей ячеек сеток в физической и вычислительной плоскостях. Если считать, что размеры ячейки сетки в вычисли-

тельной плоскости равны единице ($\Delta\xi = \Delta\eta = 1$), то ее площадь также равна единице. Тогда величина

$$x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta = J \tag{10.21}$$

есть площадь ячейки сетки в физической области. Если $J$ считать функцией координат, то уравнение (10.21) можно использовать как одно из уравнений для контроля сетки в физической области. Второе уравнение получаем из условия ортогональности линий сетки к границе в физическом пространстве. Поэтому вдоль границы $\xi(x, y) = \text{const}$ можем записать

$$d\xi = 0 = \xi_x\, dx + \xi_y\, dy$$

или

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\xi=\text{const}} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{y_\eta}{x_\eta}. \tag{10.22}$$

Вдоль линии $\eta = \text{const}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\eta=\text{const}} = -\frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{y_\xi}{x_\xi}. \tag{10.23}$$

Если линии постоянства $\xi$ и $\eta$ перпендикулярны, то на плоскости $x$, $y$ должно выполняться соотношение между тангенсами углов наклона этих линий

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{c=\text{const}} = -1 \Big/ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\eta=\text{const}}$$

или с учетом (10.22), (10.23)

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0. \tag{10.24}$$

Система уравнений (10.21) и (10.24) линеаризуется разложением в ряд вокруг некоторого известного состояния $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Один из членов уравнения (10.21) запишется так:

$$\begin{aligned} x_\xi y_\eta &= (\tilde{x} + x - \tilde{x})_\xi (\tilde{y} + y - \tilde{y})_\eta = \\ &= \tilde{x}_\xi \tilde{y}_\eta + \tilde{y}_\eta (x_\xi - \tilde{x}_\xi) + \tilde{x}_\xi (y_\eta - \tilde{y}_\eta) + O(\Delta^2) = \\ &= \tilde{y}_\eta x_\xi + \tilde{x}_\xi y_\eta - \tilde{x}_\xi \tilde{y}_\eta + O(\Delta^2). \end{aligned} \tag{10.25}$$

Если остальные члены линеаризовать аналогичным образом, то получим

$$[A]\,\mathbf{w}_\xi + [B]\,\mathbf{w}_\eta = \mathbf{f}, \tag{10.26}$$

где

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \tilde{x}_\eta & \tilde{y}_\eta \\ \tilde{y}_\eta & -\tilde{y}_\eta \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} \tilde{x}_\xi & \tilde{y}_\xi \\ -\tilde{y}_\xi & \tilde{x}_\xi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ J + \tilde{J} \end{bmatrix}. \tag{10.27}$$

Собственные значения матрицы $[B]^{-1}[A]$ должны быть вещественными, если система гиперболическая в направлении $\eta$. Они равны

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\tilde{x}_\eta^2 + \tilde{y}_\eta^2}{\tilde{x}_\xi^2 + \tilde{y}_\xi^2}}. \tag{10.28}$$

Последнее равенство доказывает, что уравнение (10.26) гиперболическое по координате $\eta$ и его можно решать маршевым методом по направлению $\eta$ до тех пор, пока $\tilde{x}_\xi^2 + \tilde{y}_\xi^2 \neq 0$.

В описываемой процедуре построения сетки предполагается, что поверхность $\eta = 0$ совпадает с поверхностью тела и вдоль

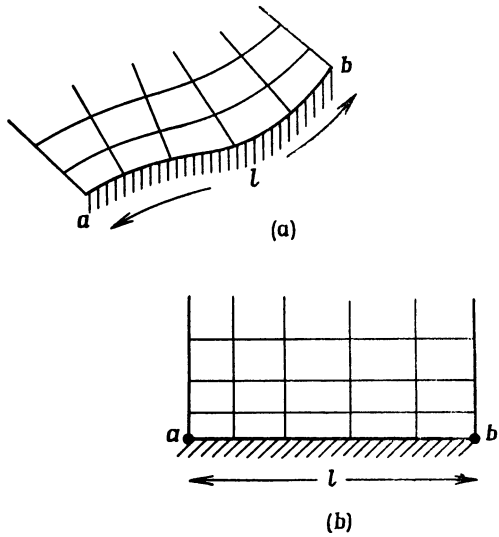



Рис. 10.6. Вычисление площади элементарной ячейки вблизи поверхности: (a) сетка в физической области; (b) сетка в вычислительной плоскости с заданной площадью ячейки.

нее задано распределение узлов сетки. Далее требуется определить $J$ в уравнении (10.21). Стегер и Соренсон предлагают это делать, строя прямую линию длиной, равной длине тела $l$ вдоль поверхности, и снося на эту прямую распределение узлов, заданное на поверхности тела. Затем проводят следующую линию $\eta = \text{const}$, параллельную первой, как это требуется. После чего величину $J$ легко определяют по значению площади ячейки сетки. На рис. 10.6 иллюстрируется эта процедура. Теперь систему уравнений (10.27) решают, как это обычно принято для гиперболических уравнений.

Поскольку в этом методе мы задаем величину $J$, то гладкую сетку удается построить, если только $J$ удачно подобрано. И наоборот, неудачный выбор $J$ может привести к изломам или распространению по сетке информации о положении граничных узлов с искажениями. К тому же имеющиеся на границе разрывы данных передаются на такой сетке. С другой стороны, этим методом сетка строится быстро и является ортогональной. На

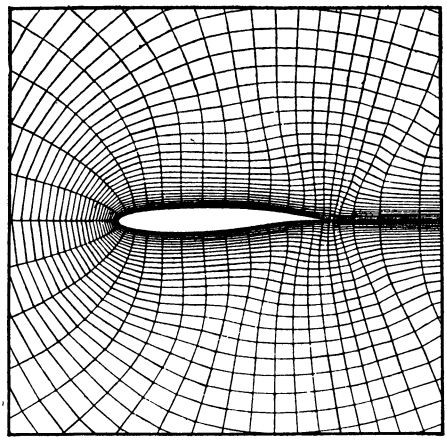


Рис. 10.7. Расчетная сетка, построенная вокруг профиля.

рис. 10.7 показана сетка, построенная вокруг типичного профиля. Здесь расположение точек вблизи тела позволяет разрешить вязкий пристенный слой.

Из обсуждения представленных в этом разделе методов становится ясно, что можно предложить неограниченное число схем построения сеток. Приемлема любая система уравнений, решение которой дает пригодную сетку. Все описанные выше методы требуют, чтобы расположение узлов сетки было известно прежде, чем мы приступим к решению уравнений с частными производными, описывающих течение жидкости. В следующем разделе мы приведем несколько соображений относительно построения сетки, при котором размещение ее узлов является частью решения всей задачи расчета течения.

## § 10.4. Адаптивные сетки

В предыдущем разделе были представлены методы построения расчетных сеток, которые характерны тем, что сама процедура построения предваряла численное решение уравнений с

частными производными. Одна из трудностей решения уравнений с частными производными на фиксированной сетке заключается в том, что ее узлы размещаются в физической области до того, как станут известны подробности решения. Вследствие этого сетка может оказаться не самой лучшей для данной конкретной задачи.

Термин «самая лучшая» нуждается в пояснении. Во многих задачах представляют интерес подвижные и подстраивающиеся к изменениям формы области сетки. Пример тому задача сверхзвукового обтекания затупленного тела. Обычно скачок выделяется как граница, и такая граница изменяет со временем свое положение, когда требуется получить установившееся решение определяющих уравнений. В этом случае перемещение узлов внутри области может быть масштабировано по движению границы и это дает приемлемые результаты. Во многих задачах такой подход является достаточным. В других задачах мы хотели бы изменять положения узлов сетки, чтобы добиться адекватного разрешения поля течения как при неподвижных, так и подвижных границах. Это удобно потому, что мы можем сгущать узлы сетки в областях больших градиентов параметров потока, заранее ничего не зная о решении. Такие области возникают часто в результате большого изменения масштабов длины поля течения. Конечно, должна быть разработана подходящая методика адаптации сетки.

Лучше всего осуществлять адаптацию сетки таким образом, чтобы при этом уменьшалась ошибка в решении. Руководствуясь этим соображением, можно изменить положение некоторых узлов сетки с тем, чтобы получить «наилучшее» решение, используя некоторый выбранный способ измерения ошибки. Обычно это снимает вопрос о разрешении решения, так как там, где возникают большие ошибки при использовании неподвижной сетки, и требуется высокое разрешение. В этом параграфе мы приведем примеры схем с адаптивными сетками с целью рассмотрения вопросов разрешения и уменьшения ошибки.

Когда речь идет о методике построения адаптирующейся к решению сетки, следует иметь в виду два момента. Для того чтобы их понять, вновь обратимся к простому одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{10.29}$$

В вычислительной плоскости $\tau$, $\xi$ это уравнение примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (\xi_t + c\xi_x)\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \tag{10.30}$$

когда преобразование задается следующим образом:

$$\tau = t, \quad \xi = \xi(t, x). \tag{10.31}$$

В уравнении (10.30) коэффициенты $\xi_t$ и $\xi_x$ задают связь между физической и преобразованной плоскостями. Они используются для определения преобразования, связывающего две эти области. Если разрешить уравнения (10.31) относительно $x_\tau$ и $x_\xi$, то получим

$$x_\xi = \frac{1}{\xi_x}, \quad x_\tau = -\frac{\xi_t}{\xi_x}. \tag{10.32}$$

Величины $x_\tau$ и $x_\xi$ суть скорость движения узлов сетки и расстояние между узлами в физическом пространстве.

Один из методов построения адаптивных сеток [Dwyer et al., 1979, 1980; Klopfer, McRae, 1981a] состоит в том, чтобы задавать положения узлов после каждого шага интегрирования или после выполнения некоторого числа шагов. В соответствии с этим значения $x$ или координаты узлов в физическом пространстве могут быть заданы там, где этого требует критерий разрешения или какой-либо еще. Так как $x_\xi$ тогда становится известным, то известна и величина $\xi_x$, а $x_\tau$ получается при помощи центральных разностей. После чего вычисляют $\xi_t$, и, таким образом, все, что нам необходимо для интегрирования уравнения (10.30), мы имеем. В этом методе скорость узлов сетки рассчитывается с запаздыванием.

Другой способ построения адаптивных сеток заключается в постулировании закона, задающего скорость движения узлов сетки. В нем в качестве определяющего критерия можно использовать разрешение, ошибку в решении или что-либо еще. Удобно задавать $\xi_t$ в вычислительной плоскости. В любой момент времени величина $\xi_t$ известна, и скорость узлов сетки в физическом пространстве $x_\tau$ получают из уравнений (10.32). Зная $x_\tau$, ее можно интегрировать совместно с определяющим уравнением, что дает новые положения узлов сетки. Достоинство этого метода состоит в том, что вычисления положения узлов сетки и их скорости совпадают по времени (нет отставания по времени при вычислениях этих величин).

Существуют самые разнообразные подходы к построению адаптивных сеток. Однако внимательное рассмотрение идей, положенных в их основу, показывает, что они во многом сходны. В следующем разделе кратко будут описаны вариационный метод, методы эквираспределения и задания скорости. Будут приведены некоторые результаты, полученные с использованием адаптивных сеток.

### 10.4.1. Вариационный метод

Брэкбилл и Зальтцман (Brackbill, Saltzman, 1980; Brackbill, 1982] разработали новый метод построения адаптивных сеток с использованием вариационного подхода. При помощи вариационных принципов в нем минимизируется функция, включающая в себя меры гладкости, ортогональности и объема. Мерой гладкости преобразования может служить интеграл

$$I_s = \int_D [(\nabla\xi)^2 + (\nabla\eta)^2]\, dV. \tag{10.33}$$

Мера ортогональности определяется интегралом

$$I_0 = \int_D (\nabla\xi \cdot \nabla\eta)^2 J^3 dV \tag{10.34}$$

и мера объема элементарной ячейки рассматриваемой сетки — интегралом

$$I_v = \int_D w J\, dV, \tag{10.35}$$

где $w$ — некоторая заданная весовая функция.

Преобразование, связывающее $D$ и $CD$, определяется минимизацией линейной комбинации трех выписанных выше интегралов. Эта линейная комбинация с множителями $\lambda_v$ и $\lambda_0$ записывается в следующем виде:

$$I = I_s + \lambda_v I_v + \lambda_0 I_0. \tag{10.36}$$

Чтобы минимизировать $I$, необходимо составить уравнения Эйлера — Лагранжа [Weinstock, 1952]. Например, для меры гладкости можно записать

$$I_s = \iint \left(\frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J}\right) d\xi\, d\eta, \tag{10.37}$$

используя в качестве независимых переменных координаты в вычислительной плоскости. Составим уравнения Эйлера — Лагранжа для $I_s$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x_\xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x_\eta}\right)\left(\frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J}\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial y_\xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y_\eta}\right)\left(\frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J}\right) = 0. \end{aligned} \tag{10.38}$$

Если выполнить дифференцирование, то эти уравнения можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} A(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) - B(\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) = 0, \\ -B(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) + C(\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) = 0. \end{aligned} \tag{10.39}$$

Коэффициенты $A$, $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ суть функции метрических коэффициентов. Мы предлагаем читателю выписать их в качестве упражнения (см. задачу 10.16). Если $B^2 - AC \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0, \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0. \end{aligned} \tag{10.40}$$

Эти уравнения определяют отображение, предложенное Уинслоу и являющееся основой работ авторского коллектива во главе с Томпсоном. Если минимизируется $I$, определяемое уравнением (10.36), то каждый из интегралов $I_v$ и $I_0$ дает свой вклад в уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала (10.36), которые имеют в этом случае значительно более сложный вид, нежели уравнения (10.40).

Вариационный подход подводит надежную математическую основу под процедуру построения сетки, но приводит к необходимости решать большее число уравнений в частных производных. Приходится помимо определяющих уравнений движения жидкости решать еще и уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала. В приведенном здесь примере адаптивную сетку строят, выполняя перестроение после каждой итерации или после каждого шага по времени, при этом скорость узлов вычисляют по разностям назад. Вариационный подход является мощным инструментом построения расчетных сеток. К его недостаткам следует отнести большую трудоемкость, обусловленную необходимостью решения уравнений, определяющих генерацию сетки. Если используется линейная комбинация интегралов типа (10.36), необходимо еще и подбирать коэффициенты $\lambda$. Однако, подбирая их подходящим образом, удалось получить отличные результаты.

### 10.4.2. Метод эквираспределения

Во многих приложениях адаптивных сеток требуется перемещать узлы сетки в одном направлении. Поэтому рассмотрим минимизацию функционала $I_v$, определяемого уравнением (10.35), для одномерного случая

$$I_v = \int_D w x_\xi \, dx. \tag{10.41}$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа для этого функционала имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial \xi_x}\right)\left[\frac{w(x)}{\xi_x}\right] = 0. \tag{10.42}$$

Брэкбилл и Зальтцман проинтегрировали уравнение (10.42) и получили

$$w x_\xi^2 = C_1 \quad \text{или} \quad \sqrt{w}\, x_\xi = w_1 x_\xi = C_1. \tag{10.43}$$

Отсюда видно, что произведение шага сетки и весовой функции должно оставаться постоянным в физическом пространстве (закон постоянства $w_1 x_\xi$ вдоль линий сетки назван «эквираспределением). В свою очередь уравнение (10.43) можно проинтегрировать и получить координаты либо в физической плоскости, либо в вычислительной. Пусть $x = 0$ при $\xi = 0$ и $x = x_{\max}$ при $\xi = \xi_{\max}$. Тогда интегрирование уравнения (10.43) дает либо координату в вычислительной плоскости

$$\xi = \xi_{\max} \int_0^x w_1\, dx \Big/ \int_0^{x_{\max}} w_1\, dx, \tag{10.44}$$

либо координату в физической плоскости

$$x = x_{\max} \int_0^\xi (1/w_1)\, d\xi \Big/ \int_0^{\xi_{\max}} (1/w_1)\, d\xi. \tag{10.45}$$

Уравнение (10.44) было использовано в качестве закона построения адаптивной сетки в работах [Dwyer et al., 1979, 1980]. Применение этого закона во многих задачах горения и тепло- и массообмена дало отличные результаты. При этом весовая функция $w_1$ выбиралась в виде линейной комбинации производных некоторой интересующей нас зависимой переменной. Если в качестве таковой выбирают статическую температуру, то

$$w_1 = 1 + a\left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| + b\left|\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|. \tag{10.46}$$

Положение узлов сетки в физической плоскости определяется по уравнению (10.45), как и в работе [Gnoffo, 1980]. В этой работе закон движения узлов сетки вдоль одной координаты использовался при решении уравнений Навье—Стокса с той лишь разницей, что в выражение для весовой функции входили только первые производные зависимой величины.

Уайт [White, 1982] использовал идею эквираспределения при решении одномерных задач. В его работе закон эквираспределения был сформулирован так: произведение длины дуги и ве-

совой функции остается постоянным. В сущности это есть закон, определяемый уравнением (10.44) или (10.45), но для одной координаты двумерной задачи. Однако в примере Уайта длина дуги бралась вдоль поверхности, которую задает решение для интересующей нас зависимой переменной. Была выбрана следующая весовая функция:

$$w_1 = 1 + a|\varkappa|, \tag{10.47}$$

где $\varkappa$ — кривизна вышеупомянутой поверхности. Такой подход обеспечивает автоматическое сгущение узлов сетки в областях больших градиентов, а густотой сгущения узлов в областях большой кривизны можно управлять изменением константы $a$.

### 10.4.3. Методы задания скорости узлов сетки

Не так давно Хайндман и Спенсер [Hindman, Spencer, 1983] разработали метод построения сетки с заданием скорости ее узлов, в который включена также и идея эквираспределения. Поскольку методы построения расчетных сеток путем решения дифференциального уравнения являются наиболее распространенными, представляется разумным продифференцировать уравнение (10.43) для получения дифференциального уравнения второго порядка, которому удовлетворяет закон построения сетки. Это дает

$$x_{\xi\xi} + \frac{w_{1\xi} x_\xi}{w_1} = 0. \tag{10.48}$$

Для определения распределения узлов сетки это стационарное уравнение может быть решено на любом временно́м слое. В подходе, который предложили Хайндман и Спенсер, стационарное уравнение, определяющее закон построения сетки, дифференцируют по времени и полученное уравнение решают относительно скорости движения узлов сетки $x_\tau$. В нашем примере ее находят из уравнения

$$x_{\tau\xi\xi} + \frac{w_{1\xi}}{w_1} x_{\tau\xi} = -\frac{x_\xi}{w_1}\left(w_{1\xi\tau} - \frac{w_{1\xi} w_{1\tau}}{w_1}\right). \tag{10.49}$$

Один из способов построения сетки на следующем временно́м слое — простое интегрирование скорости движения ее узлов. Стационарное уравнение служит только отправной точкой для получения уравнения (10.49). Однако если используется при этом адаптивная сетка, то процесс построения последней начинает релаксировать. Лучше решать уравнение (10.49) относительно скорости движения узлов, чтобы полученные значения использовать при интегрировании уравнений с частными

производными, определяющих физические процессы. При этом скорости движения узлов интегрируются для получения приближенных положений узлов. Затем решается стационарное уравнение (10.48) при помощи этих приближенных значений в качестве начального приближения. Применение такой процедуры обеспечивает корректность значений скоростей узлов сетки, при этом стационарное уравнение, задающее закон построения сетки, будет корректным образом удовлетворено. Главная трудность применения этой процедуры в том, чтобы получить подходящие оценки производных по времени от весовой функции $w_{1\tau}$. Проще это сделать численным образом. Во всех случаях, кроме простого скалярного уравнения, очень трудно получить аналитическое выражение этого члена.

Ранее Хайндман и др. [Hindman et al., 1979] использовали аналогичный метод при построении составной структуры решения уравнений Эйлера. Уравнения в разных частях поля течения решались в различных вычислительных областях, связанных через границы, которые могут быть либо проницаемыми, либо непроницаемыми. Движение узлов сетки вызывается только движением границ. Значения скорости движения узлов сетки получают дифференцированием по времени уравнений (10.16). Это приводит к системе уравнений с частными производными вида

$$[s]\,\mathbf{w}_\tau = \mathbf{r}, \tag{10.50}$$

где вектор $\mathbf{w}$ записывается в виде

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{10.51}$$

$[s]$ — матрица коэффициентов, вектор $\mathbf{r}$ — функция, управляющая построением сетки. Новые положения узлов сетки на каждой итерации или временно́м слое получают интегрированием скорости движения узлов. Во всех рассмотренных случаях этот метод срабатывал очень хорошо. Отметим, однако, что в этой работе не осуществлялось управление сгущением узлов внутри областей ($P$ и $Q$ были равны нулю).

Рай и Андерсон [Rai, Anderson, 1980, 1982] разработали метод, в котором скорость движения узлов сетки регулируется путем вычисления локальной ошибки в численном решении. Это можно делать, сгущая узлы в областях с большими ошибками и, наоборот, делая их более редкими в областях, где ошибки численного решения малы. Разумно также полагать, что чем большее расстояние разделяет любые две точки, тем в меньшей степени они влияют друг на друга. Если опять мы будем обозначать координаты в физической плоскости через $x$, $t$, а в вы-

числительной — через $\xi$, $\tau$, то уравнение для скорости движения узлов можно записать в таком виде:

$$(\xi_t)_i = k\left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{|e|_j - |e|_{\text{av}}}{r_{ij}^n} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|e|_j - |e|_{\text{av}}}{r_{ij}^n}\right), \qquad (10.52)$$

$$(x_\tau)_i = -(\xi_t)_i/(\xi_x)_i,$$

где $e$ — некоторая мера локальной ошибки, а нижний индекс av означает усреднение по всем узлам сетки, $r_{ij}^n$ — расстояние между узлами $i$ и $j$, возведенное в степень $n$. Константа $k$ в этом уравнении произвольна, так как не существует физического закона, связывающего скорость движения узлов и ошибку. Одна из основных трудностей применения этого метода состоит в определении подходящим образом меры ошибки. Рай и Андерсон предлагают взять за нее ошибку аппроксимации в дифференциальном приближении разностной схемы. Чтобы иметь лучшее разрешение, они использовали также градиенты вместо локальной ошибки. Благодаря достаточно общему представлению скорости движения узлов в уравнении (10.52), любой разумный выбор $e$ можно использовать для управления движением сетки. Следует считать, что уравнение (10.52) задает метод равномерного распределения ошибки по сетке. При этом вычисляемую скорость узлов можно интерпретировать как остаточный член численного решения на сетке, удовлетворяющей некоторому закону эквираспределения.

Хотя одномерные примеры не отражают всей сложности задач построения сеток более высокой размерности, они все же демонстрируют эффект применения адаптивных сеток. Нестационарное вязкое уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx} \qquad (10.53)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

и граничными условиями

$$u(t, 0) = 1, \quad u(t, 1) = 0$$

решали, используя в уравнении (10.52) градиенты в качестве $e$, т. е. меры локальной ошибки. Результаты численного решения уравнения Бюргерса можно сравнить с точным аналитическим решением

$$u = \bar{u}\,\text{th}\left[\frac{\text{Re}}{2}(1 - x)\right],$$

где $\bar{u}$ находят из решения

$$(\bar{u}-1)/(\bar{u}+1)=e^{-\bar{u}\,\mathrm{Re}}, \quad \mathrm{Re}=1/\mu.$$

Последнее описывает стационарный случай, причем его наклон на правом конце интервала тем круче, чем больше число Рейнольдса. На рис. 10.8 и 10.9 показаны результаты расчета при двух разных значениях числа Рейнольдса. Очевидно, что применение адаптивных сеток приводит к уменьшению ошибки в обоих примерах. Следует отметить, что решение сглаживается

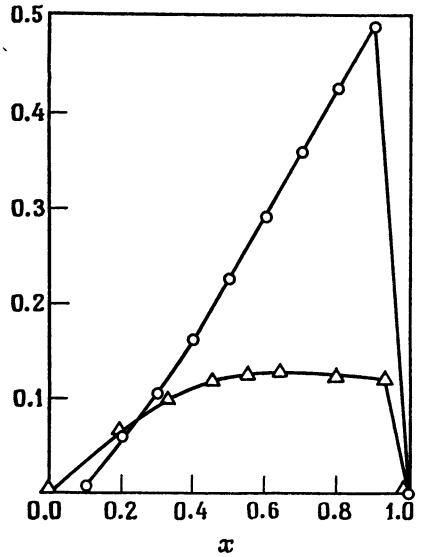



Рис. 10.8. Величина ошибки в процентах в расчете при Re = 2; $x$ — физическая координата; ○ неадаптивная сетка, △ адаптивная сетка.

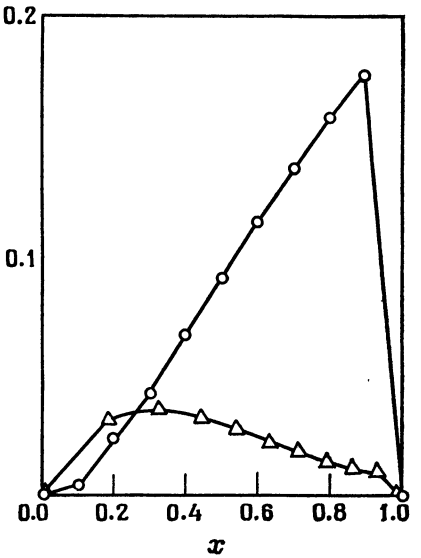



Рис. 10.9. Величина ошибки в процентах в расчете при Re = 3; обозначения см. в подписях к рис. 10.8.

прежде, чем успевают выработаться градиенты. Это обеспечивает лучший контроль за движением узлов сетки. Если сглаживание не производить, то полученные результаты расчета будут сильно осциллировать.

Метод построения расчетной сетки путем задания скорости движения узлов легко распространить на случай двух измерений. Если для $\xi_t$ воспользоваться уравнением типа уравнения (10.52), то можно вывести аналогичное выражение для $\eta_t$, в котором величины зависят только от производных по направлениям $\xi$ или $\eta$, причем $\eta_t$ зависит только от производных зависи-

мых переменных по направлению $\eta$. Для преобразования вида

$$t=\tau, \quad \xi=\xi(x, y, t), \quad \eta=\eta(x, y, t)$$

получаем

$$x_\tau=\frac{\xi_y\eta_t-\eta_y\xi_t}{J}, \quad y_\tau=\frac{\eta_x\xi_t-\xi_x\eta_t}{J}, \tag{10.54}$$
$$J=\xi_x\eta_y-\eta_x\xi_x.$$

Уравнения (10.54) позволяют вычислять скорость движения узлов сетки в физическом пространстве. На рис. 10.10 изображена сетка, использованная в задаче расчета сверхзвукового обтекания цилиндра невязкой жидкостью. Эта задача была решена с использованием как неподвижной, так и адаптивной сеток. При построении адаптивной сетки использовалась информация о величине градиента численного решения (рис. 10.11).

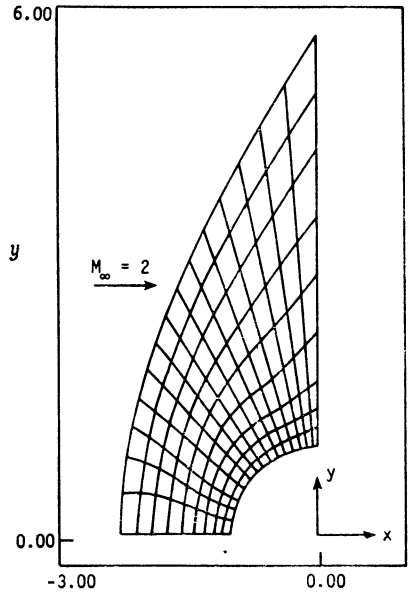



Рис. 10.10. Адаптивная сетка для задачи расчета обтекания цилиндра в физических координатах $x$, $y$.

Так как точное решение задачи неизвестно, то за основу при сравнении было взято численное решение, полученное на неподвижной сетке размером $19\times19$. Можно видеть, что ошибки численного решения уменьшаются даже в том случае, когда адаптивная сетка не слишком отличается от неподвижной. Очевидно, что схемы с применением адаптивных сеток пригодны и для трехмерных задач. Однако для построения полностью трехмерной сетки требуется совсем другое уравнение для скорости движения узлов.

Иногда бывает трудно подобрать подходящую меру величины ошибки для контроля построения сетки. Как отмечалось ранее, такой мерой, видимо, является первый член ошибки аппроксимации дифференциального приближения разностной схемы. Клопфер и Макрэй [Klopfer, McRae, 1981b] получили ошибку аппроксимации дифференциальных приближений разностных схем для решения уравнений Эйлера. Они использовали ее в качестве меры ошибки численного решения при построении сетки в примерах с одним измерением. В некоторых

случаях это дает даже более точное представление для ошибки и может оказаться полезным и в многомерных задачах. Интерес представляет лишь первый член ошибки аппроксимации дифференциального приближения уравнения в частных производных. Порядок производной в этом члене зависит от используемой разностной схемы. Например, если для уравнения первого порядка используется схема второго порядка, то первый член

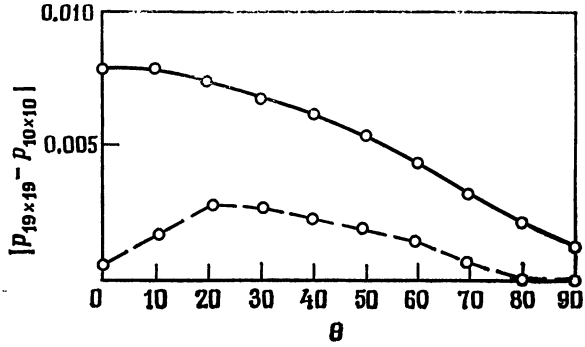



Рис. 10.11. Распределение давления в задаче обтекания цилиндра; θ — физическая координата; ——— неподвижная сетка размером 10 × 10; — — — — адаптивная сетка размером 10 × 10.

ошибки аппроксимации есть производная третьего порядка и локальная ошибка численного решения будет пропорциональна третьей производной. В результате сетка для некоторой конкретной задачи будет единственной в своем роде и будет зависеть от выбранной разностной схемы. Тем не менее применение такой сетки приводит к уменьшению ошибки.

Другой задачей, представляющей интерес с точки зрения применения адаптивных сеток, является задача, в которой отслеживается положение скачка. Пусть мы ищем установившееся решение двумерных уравнений Эйлера. Условия Гюгонио — Рэнкина для стационарного течения образуют требуемые соотношения параметров потока при переходе через любой разрыв, а требование слабого решения дифференциального уравнения в частных производных обеспечивает математическую связь между параметрами потока и углом наклона скачка. Если уравнения после установления по времени записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0, \tag{10.55}$$

то условия на скачке (см. § 4.4) задаются выражением

$$[\mathbf{E}] \cos \alpha_1 + [\mathbf{F}] \cos \alpha_2 = 0, \tag{10.56}$$

где $\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha_2$ — направляющие косинусы между единичными нормалями к скачку и осями $x$ и $y$ соответственно. Для исключения осцилляций скачок следует расположить так, чтобы $\cos\alpha_2 = 0$. В этом случае

$$[\mathbf{E}] = 0. \tag{10.57}$$

Это означает, что вектор $\mathbf{E}$ непрерывен при переходе через скачок. Последнее выражение должно быть подходящим образом дискретизировано. Это можно осуществить, применяя конечно-разностные методы, в которых построение сетки сообразуется с

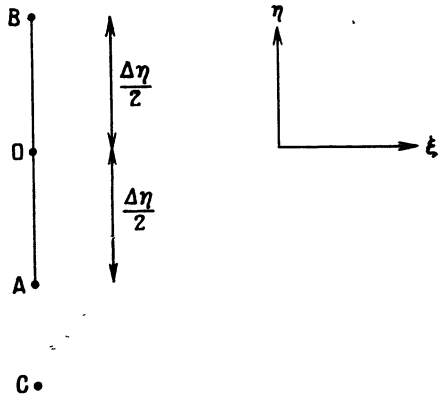



Рис. 10.12. Распределение узлов в вычислительной плоскости при адаптации сетки к положению скачка.

положением скачка. Поскольку мы требуем, чтобы $\cos\alpha_2 = 0$, то необходимо координатные линии только одного семейства направить вдоль скачка [MacCormack, Paullay, 1972].

Метод [Rai, Anderson, 1981] выстраивания линий одного семейства координат вдоль скачка основан на генерации скоростей узлов сетки, которые производят эффективное вращение сегментов линий, соединяющих узлы сетки, к направлению, параллельному поверхностям уровня одного из параметров потока. Рассмотрим показанное на рис. 10.12 распределение узлов в вычислительной плоскости. Пусть точка $O$ есть середина сегмента, соединяющего точки $A$ и $B$, и $h$ — любая физическая переменная, например давление.

Согласно этому методу, скорость в любой точке $C$ записывается в виде

$$(\xi_C)_t = \frac{K\,|h_\xi|\,|h_\eta|\,(-1)^k}{r_{OC}^n}, \tag{10.58}$$

где $|h_\xi|$ и $|h_\eta|$ — абсолютные значения градиентов $h$ вдоль и по нормали к линии $AB$, $K$ и $n$ — константы, $r_{OC}$ — расстояние между точками $O$ и $C$ и $k$ задается следующим образом:

$$k=\begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{sign}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\right)\operatorname{sign}(\eta_O-\eta_C)<0, \\ 2, & \text{если } \operatorname{sign}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\right)\operatorname{sign}(\eta_O-\eta_C)>0, \end{cases} \tag{10.59}$$

а sign означает знак аргумента. Если положить, что $h_\xi$ и $h_\eta$ положительны, а точка $C$ находится ниже точки $A$, то скорость узлов $(\xi_C)_t$ также положительна, что указывает на сгущение узлов сетки в области с большими градиентами. Полную скорость узла получаем суммированием вкладов от всех сегментов

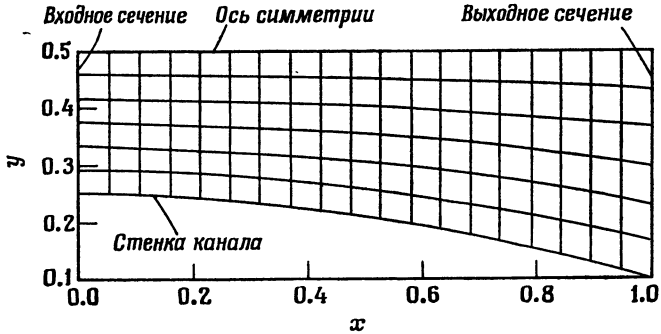



Рис. 10.13. Неподвижная сетка для расчета течения в двумерном канале в физических координатах $x$, $y$.

в поле течения. Таким образом, линия сегмента вращается в направлении областей с большими градиентами и это вращение прекращается, когда эта линия становится параллельной поверхности постоянства $h$, так как в этом случае либо $h_\xi=0$, либо $h_\eta=0$. Эта процедура позволяет локально адаптировать положение координатной линии к размещению областей с большими градиентами.

Примеры, демонстрирующие этот метод, приведены на рис. 10.13 и 10.14. На рис. 10.13 изображен двумерный канал, положение стенки которого задается уравнением

$$y=0.25+(y_{\text{exit}}-0.25)\,x^2.$$

Число Маха на входе равно 1.5, а давление на выходе выбирается таким, чтобы при $x=0.5$ располагался прямой скачок (расчет по одномерной теории). Поле течения рассчитывалось по зависящим от времени двумерным уравнениям Эйлера, записанным в дивергентной форме.

На рис. 10.14 приведено распределение давления вдоль центральной линии канала, рассчитанное на неподвижной и адаптивной сетках. Осцилляции, имеющие место в расчетах на неподвижной сетке, типичны для методов сквозного счета второго порядка. Однако они отсутствуют в установившемся решении при использовании сетки, адаптированной к положению скачка.

Можно привести еще один пример: однородный сверхзвуковой свободный поток с косым скачком, который также демонстрирует свойство этой схемы выстраивать сетку динамически

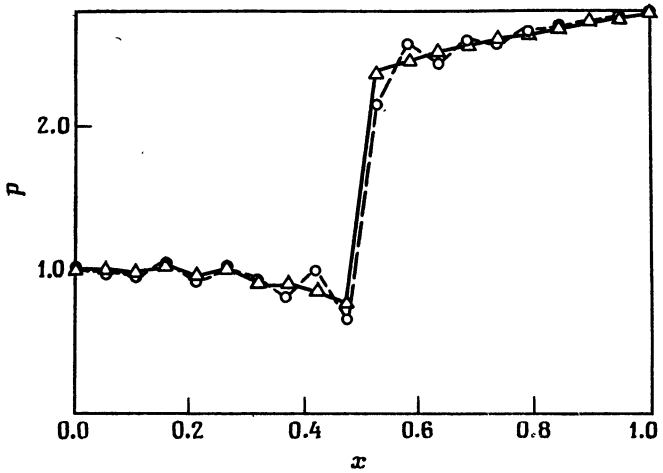



Рис. 10.14. Распределение давления вдоль оси симметрии канала; —Δ— решение, полученное на адаптивной сетке размером $20 \times 7$; ——○—— решение, полученное на неподвижной сетке размером $20 \times 7$; $y_{\text{exit}} = 0.1$.

в процессе решения, сообразуясь с положением скачка. Это течение изображено на рис. 10.15. Так как задача является полностью сверхзвуковой, то мы не испытываем трудностей с заданием граничных условий на выходе и решаем уравнения Эйлера, зависящие от времени, записанные в дивергентной форме, на сетке, показанной на рисунке. Локально адаптированная к скачку сетка изображена на рис. 10.16. На рис. 10.17 показаны профили давления при $y = 0$, рассчитанные на неподвижной и адаптивной сетках. Отметим еще раз удивительный факт отсутствия осцилляций у численного решения, полученного на сетке, адаптированной к положению скачка. Подход с использованием сеток последнего типа имеет очевидные преимущества при использовании схем сквозного счета.

В настоящем разделе мы ввели понятие о сетках, адаптированных к решению. Численное решение уравнений с частными

производными на адаптивных сетках приводит к существенному улучшению точности. Помимо изложенных методов находят

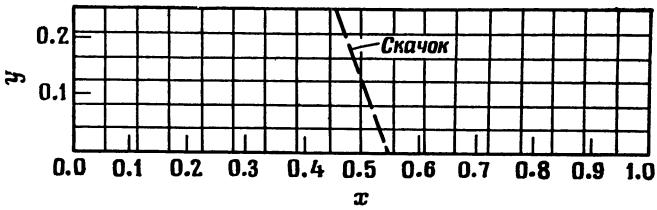



Рис. 10.15. Неподвижная сетка для задачи расчета однородного сверхзвукового течения с косым скачком.

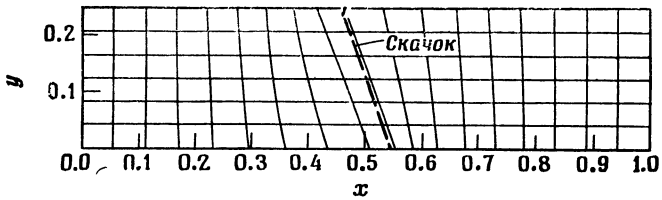



Рис. 10.16. Сетка, адаптированная к положению скачка, для задачи расчета однородного сверхзвукового течения с косым скачком.

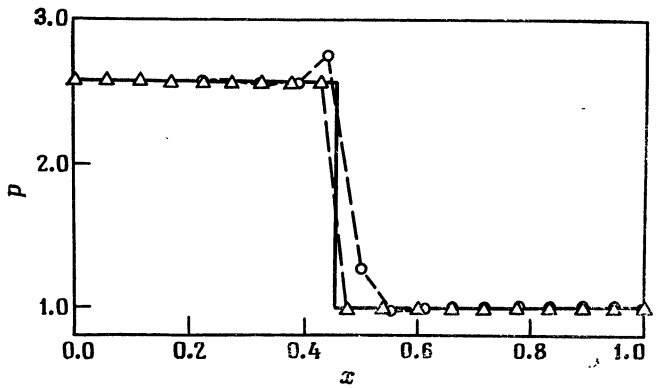



Рис. 10.17. Распределение давления в плоскости $y = 0$ для однородного сверхзвукового течения с косым скачком, ——— аналитическое решение; —△— решение, полученное на адаптивной сетке размером 19 × 7; ——○—— решение, полученное на неподвижной сетке размером 19 × 7.

применение и другие подходы. Идеи, используемые при конструировании схем с адаптивными сетками, ограничены лишь возможностями человеческого воображения, и любая схема, приводящая к более точным результатам, является приемлемой.

## § 10.5. Дополнительные соображения

Закончим главу о построении расчетных сеток замечанием, что сетка, построенная для решения некоторой конкретной задачи, должна быть соответствующим образом связана с дифференциальными уравнениями в частных производных. Эта связь осуществляется через метрические коэффициенты преобразования, возникающие в этих уравнениях.

Рассмотрим уравнения Навье — Стокса для сжимаемой жидкости, записанные в строго дивергентной форме (см. уравнение (5.240)). Пусть исходная система координат прямоугольная. Перейдем от нее к криволинейной системе координат ($\tau$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$) и для простоты ограничимся рассмотрением уравнений течения невязкой жидкости. В случае двух измерений уравнения (5.240) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\mathbf{U}}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(y_\tau x_\eta - x_\tau y_\eta)\,\mathbf{U} + y_\eta \mathbf{E} - x_\eta \mathbf{F}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[(x_\tau y_\xi - y_\tau x_\xi)\,\mathbf{U} - y_\xi \mathbf{E} + x_\xi \mathbf{F}\right] = 0. \quad (10.60)$$

Заменим теперь дифференциальные операторы конечно-разностными операторами $\Gamma$ и запишем дискретный аналог уравнения (5.240) для однородного течения (т. е. заменим зависимые переменные постоянными величинами). Это приводит к следующим соотношениям:

$$\Gamma_\tau\left(\frac{1}{J}\right)+\Gamma_\xi\,(y_\tau x_\eta - x_\tau y_\eta)^{(1)}+\Gamma_\eta\,(x_\tau y_\xi - y_\tau x_\xi)^{(1)} = 0, \quad (10.61)$$

$$\Gamma_\xi\,(y_\eta^{(2)}) - \Gamma_\eta\,(y_\xi^{(2)}) = 0, \quad (10.62)$$

$$\Gamma_\xi\,(x_\eta^{(2)}) - \Gamma_\eta\,(x_\xi^{(2)}) = 0. \quad (10.63)$$

Нижний индекс разностного оператора обозначает дискретизацию по времени или пространству, а верхние индексы (1) и (2) указывают на два различных численных представления одной и той же величины.

Уравнения (10.62) и (10.63) тождественно удовлетворяются, если они дискретизируются по той же схеме, что и уравнение (10.61). Уравнение (10.61) представляет собой дискретизацию тождества, названного Томасом и Ломбардом [Thomas, Lombard, 1978] геометрическим законом сохранения. Дифференциальный аналог этого выражения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\,(y_\tau x_\eta - x_\tau y_\eta)+\frac{\partial}{\partial\eta}\,(x_\tau y_\xi - y_\tau x_\xi) = 0,$$

и его следует дискретизировать точно так же, как и уравнения однородного течения (уравнение (10.61)). Очевидно, это уравне-

ние не дает полезной информации, если сетка не меняется со временем.

Уравнения (10.61)—(10.63) являются следствием определенной формы записи уравнений (10.60). Если воспользоваться слабо дивергентной формой записи определяющих уравнений, а не строго дивергентной формой Вивьяна, то получится совсем другое ограничение на метрические коэффициенты. Если используется недивергентная форма записи определяющих уравнений, то не возникает специальных разностных соотношений, наложенных на метрические коэффициенты и полученных вследствие преобразования координат.

Два набора метрических коэффициентов, обозначенных индексами (1) и (2), требуют дальнейшего обсуждения. Метрические коэффициенты, обозначенные индексом (2), следует вычислять с учетом ограничений, накладываемых уравнениями (10.62) и (10.63). Вычисление метрик с индексами (1) остается свободным от ограничений. Хайндман и др. [Hindman et al., 1981] показали, что корректный способ вычисления метрических коэффициентов с индексами (1) определяется точностью интегрирования якобиана в уравнении (10.61) при сравнении с его действительными значениями, вычисляемыми при отображении.

Приведенный выше пример показывает, что форма записи интегрируемых уравнений может накладывать дополнительные ограничения на способ вычисления метрических коэффициентов. Хайндман [Hindman, 1981] предложил использовать форму записи уравнений, аналогичную использованной в уравнении (10.60), даже в схемах сквозного счета. При этом метрические коэффициенты не входят в потоковые члены, вследствие чего геометрические ограничения не возникают. Этот пример должен послужить предостережением о том, что требуется большая осторожность при решении любой системы, когда построение расчетной сетки и процесс решения уравнений связаны.

## Задачи

**10.1.** Проверьте уравнения (10.7), задающие преобразование метрических коэффициентов.

**10.2.** Пусть физическая область определена на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$, а верхняя и нижняя границы задаются уравнениями

$$y_{\text{up}} = 1 + 0.2 \sin \pi x, \quad y_{\text{low}} = 0.1 \cos \pi x$$

соответственно. Получите преобразование, приводящее к равномерному распределению узлов сетки между верхней и нижней границами. Воспользуйтесь простым нормализующим преобразованием.

**10.3.** В задаче 10.2 интервал изменения $x$ задается двумя линиями $x = \text{const}$. Если левая и правая границы суть $y_L = 10x$, $y_R = 4(x - 1)$ соот-

ветственно, а верхняя и нижняя границы остаются прежними, то найдите для этого случая нормализующее преобразование, приводящее к равномерной сетке в физической области. Почему оно имеет гораздо более сложный вид, чем преобразование из задачи 10.2?

**10.4.** Решите задачу 10.2 алгебраическим методом, описанным в примере 10.4. Чтобы проверить ваши результаты, используйте сначала линейные функции, а затем кубические.

**10.5.** Решите задачу 10.3, используя линейные функции и метод, описанный в примере 10.4.

**10.6.** Пусть система уравнений с частными производными решается на прямоугольной области $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Будем считать поверхность $F(t, x, y) = 0$ скачком, причем его положение рассчитывается в процессе решения. Получите преобразование, переводящее физическую область на две прямоугольные вычислительные области, граничащие по поверхности $F(t, x, y) = 0$. Считайте поверхность гладкой и всегда пересекающей левую и правую границы физической области.

**10.7.** Проверьте преобразование, задаваемое уравнениями (10.14), и функции $f_i$.

**10.8.** Метод Томпсона построения расчетных сеток основан на использовании уравнений (10.15). Получите уравнения (10.16), представляющие собой запись уравнений (10.15), в которой за независимые переменные приняты координаты $\xi$, $\eta$ в вычислительной плоскости.

**10.9.** Покажите, что отображение, задаваемое уравнениями $\nabla^2\xi = 0$, $\nabla^2\eta = 1/\eta$, переводит окружности, расположенные в физической плоскости на одинаковом расстоянии друг от друга, на равномерную прямоугольную сетку в вычислительной плоскости.

**10.10.** Покажите, что решение уравнений Коши — Римана является решением уравнения Лапласа, но обратное утверждение справедливо не всегда.

**10.11.** Решите задачу 10.3, используя для получения отображения метод Миддлкоффа и Томаса (уравнения (10.19) и (10.20)) с целью более эффективного определения $P$ и $Q$. Обсудите полученные результаты и укажите на трудности, имеющиеся при выборе $\phi$ и $\psi$.

**10.12.** На интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ существует стационарное аналитическое решение одномерного уравнения Бюргерса [уравнение (10.53)]. Решите это уравнение численно на адаптивной сетке методом, который предложил Дуайер. Используйте любой разумный критерий определения шага сетки в физической области и схему второго порядка.

**10.13.** Решите задачу 10.12, используя метод, предложенный Андерсоном и Раем. При построении сетки воспользуйтесь информацией о величине градиента некоторой переменной. Повторите решение, используя информацию о величине третьей производной.

**10.14.** Получите выражения для скорости движения узлов сетки уравнения (10.54).

**10.15.** Продемонстрируйте корректность требований, задаваемых уравнениями (10.61) — (10.63).

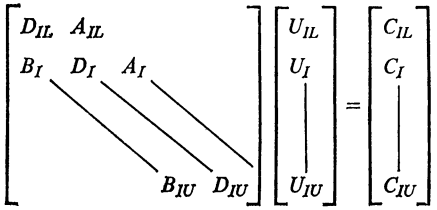
**10.16.** Выполните дифференцирование в уравнениях (10.38) и получите выражения для коэффициентов в уравнении (10.39).

**10.17.** Выведите уравнения Эйлера, когда для построения расчетной сетки используется вариационный метод, минимизируя меру ортогональности, задаваемую уравнением (10.34).

# Приложение А

## Подпрограмма решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей

Подпрограмма SY предназначена для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки, который описан в гл. 4. Для использования этой подпрограммы система уравнений должна быть записана в следующей форме:




(А.1)

Обращение к подпрограмме SY имеет вид

CALL SY (*IL*, *IU*, *B*, *D*, *A*, *C*).

*B*, *D*, *A* и *C* — идентификаторы одномерных массивов вещественных переменных *B*(*I*), *D*(*I*), *A*(*I*), *C*(*I*); *IL* и *IU* — целые переменные без индексов. Элементы массивов с индексами от *IL* до *IU* определяются следующим образом:

*B* — коэффициент, расположенный под главной диагональю (слева от нее),
*D* — коэффициент, расположенный на главной диагонали,
*A* — коэффициент, расположенный над главной диагональю (справа от нее),
*C* — составляющая вектора констант.

Уравнения системы расположены в соответствии со значениями индекса. Переменная *IL* — индекс первого уравнения системы, а переменная *IU* — индекс последнего уравнения системы. Общее число уравнений системы равно $IU - IL + 1$. *Вектор* **U**, *являющийся решением системы уравнений, записывается программой на место массива* **C**. Следовательно, постоянный вектор **C** после работы подпрограммы не сохраняется. Массив *D* при работе подпрограммы также изменяется. Массивы *A* и *B* остаются неизменными.

## Текст подпрограммы SY

```
C...
      SUBROUTINE SY(IL,IU,BB,DD,AA,CC)
      DIMENSION AA(1),BB(1),CC(1),DD(1)
C...
C...SUBROUTINE SY SOLVES TRIDIAGONAL SYSTEM BY
C...IL = SUBSCRIPT OF FIRST EQUATION
C...IU = SUBSCRIPT OF LAST EQUATION
C...BB = COEFFICIENT BEHIND DIAGONAL
C...DD = COEFFICIENT ON DIAGONAL
C...AA = COEFFICIENT AHEAD OF DIAGONAL
C...CC = ELEMENT OF CONSTANT VECTOR
C...
C...ESTABLISH UPPER TRIANGULAR MATRIX
C...
      LP = IL+1
      DO 10 I = LP,IU
      R = BB(I)/DD(I-1)
      DD(I) = DD(I)-R*AA(I-1)
   10 CC(I) = CC(I)-R*CC(I-1)
C...
C...BACK SUBSTITUTION
C...
      CC(IU) = CC(IU)/DD(IU)
      DO 20 I = LP,IU
      J = IU-I+IL
   20 CC(J) = (CC(J)-AA(J)*CC(J+1))/DD(J)
C...
C...SOLUTION STORED IN CC
C...
      RETURN
      END
```

# Приложение В

## Подпрограмма решения системы уравнений с блочной трехдиагональной матрицей

Здесь описаны подпрограммы решения системы уравнений с блочной трехдиагональной матрицей, разработанные Чакраварти (Sukumar R. Chakravarthy) в исследовательском центре компании «Рокуэлл Интернейшнл». Подпрограмма NBTRIP предназначена для решения системы уравнений с блочной трехдиагональной матрицей вида

$$\begin{bmatrix} B_{IL} & C_{IL} & & & \\ A_I & B_I & C_I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{IU} & B_{IU} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{IL} \\ X_I \\ \vdots \\ X_{IU} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{IL} \\ D_I \\ \vdots \\ D_{IU} \end{bmatrix}. \tag{B.1}$$

Подпрограмма PBTRIP предназначена для решения системы уравнений с периодической блочной трехдиагональной матрицей вида

$$\begin{bmatrix} B_{IL} & C_{IL} & & & A_{IL} \\ A_I & B_I & C_I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ C_{IU} & & A_{IU} & B_{IU} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{IL} \\ X_I \\ \vdots \\ X_{IU} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{IL} \\ D_I \\ \vdots \\ D_{IU} \end{bmatrix}. \tag{B.2}$$

При каждом $I$ блоки $A$, $B$ и $C$ являются матрицами размера $N \times N$, где $N$ — любое целое число, большее 1. Отметим, что при $N = 1$ для решения системы уравнений можно воспользоваться алгоритмом прогонки, приведенным в приложении А. Вектор $D$

в правой части уравнения при каждом $I$ имеет длину $N$. Суммарное число точек, для которых матрица определена (обозначим это число точек через $NI$), равно

$$NI = (IU - IL + 1). \qquad \text{(B.3)}$$

Матрицы $A$, $B$ и $C$ имеют размерности: $A(N, N, NI)$, $B(N, N, NI)$, $C(N, N, NI)$, а вектор $D$ — размерность $D(N, NI)$.

Обращение к подпрограмме NBTRIP имеет вид

CALL NBTRIP ($A$, $B$, $C$, $D$, $IL$, $IU$, $ORDER$).

Соответствующие аргументы определяются следующим образом:

$A$ — блочная матрица, расположенная под главной диагональю,
$B$ — блочная матрица, расположенная на главной диагонали,
$C$ — блочная матрица, расположенная над главной диагональю,
$D$ — вектор правых частей,
$IL$ — минимальное значение $I$, для которого матрица определена,
$IU$ — максимальное значение $I$, для которого матрица определена,
$ORDER$ — $N$ ($ORDER$ должно быть целым числом, большим 1).

Вектор $X$ решения системы уравнений записывается подпрограммой на место вектора $D$. Обращение к подпрограмме PBTRIP имеет вид

CALL PBTRIP ($A$, $B$, $C$, $D$, $IL$, $IU$, $ORDER$).

Все аргументы имеют тот же смысл, что и в подпрограмме NBTRIP. Однако если $ORDER$ больше 5, то в подпрограмме необходимо изменить размерности массивов $AD$ и $CD$ (размерность этих массивов должна быть не меньше, чем $ORDER$ ** 2, что указано в комментариях к тексту подпрограммы).

В подпрограммах NBTRIP и PBTRIP выделение главного элемента при решении систем уравнений методом исключения не производится. Отметим, что для каждого значения $N$ можно создать специальную подпрограмму решения системы уравнений с блочной трехдиагональной матрицей, которая будет работать быстрее, чем общая подпрограмма, приведенная ниже [1].

## Текст подпрограммы NBTRIP

```
C ..
C...SUBROUTINE TO SOLVE NON-PERIODIC BLOCK TRIDIAGONAL
C...SYSTEM OF EQUATIONS WITHOUT PIVOTING STRATEGY
C...WITH THE DIMENSIONS OF THE BLOCK MATRICES BEING
C...N x N (N IS ANY NUMBER GREATER THAN 1).
C...
      SUBROUTINE NBTRIP(A,B,C,D,IL,IU,ORDER)
C...
      DIMENSION A(1),B(1),C(1),D(1)
      INTEGER ORDER,ORDSQ
C...
C...A = SUB DIAGONAL MATRIX
C...B =     DIAGONAL MATRIX
C...C = SUP DIAGONAL MATRIX
C...D = RIGHT HAND SIDE VECTOR
```

[1] В подпрограммах NBTRIP и PBTRIP используются при работе другие подпрограммы, текст которых также приведен в приложении. Укажем на их основные функции, приведенные в комментариях к программе.

Подпрограмма LUDECO представляет матрицу $A$ в виде произведения верхней ($U$) и нижней ($L$) треугольных матриц. Результат записывается на место матрицы $A$. Главный элемент при этом не выделяется.

Подпрограмма MULPUT(*A,B,C,ORDER*) производит умножение вектора $B$ на матрицу $A$ и вычитает полученное произведение из другого вектора $C$. Результат расчета запоминается в $C$, поэтому массив $C$ при работе программы изменяется.

Подпрограмма LUSOLV(*A,B,C,ORDER*) решает систему алгебраических уравнений $A*C = B$ и записывает решение в $C$. Матрица $A$ должна быть заранее представлена в виде произведения верхней ($U$) и нижней ($L$) треугольных матриц. — *Прим. перев.*

```
C...IL = LOWER VALUE OF INDEX FOR WHICH MATRICES ARE DEFINED
C...IU = UPPER VALUE OF INDEX FOR WHICH MATRICES ARE DEFINED
C...      (SOLUTION IS SOUGHT FOR BTRI(A,B,C)*X = D
C...      FOR INDICES OF X BETWEEN IL AND IU (INCLUSIVE).
C...      SOLUTION WRITTEN IN D VECTOR (ORIGINAL CONTENTS
C...      ARE OVERWRITTEN)).
C...ORDER = ORDER OF A,B,C MATRICES AND LENGTH OF D VECTOR
C...      AT EACH POINT DENOTED BY INDEX I
C...      (ORDER CAN BE ANY INTEGER GREATER THAN 1).
C...
C...THE MATRICES AND VECTORS ARE STORED IN SINGLE SUBSCRIPT FORM
C...
      ORDSQ = ORDER**2
C...
C...FORWARD ELIMINATION
C...
      I = IL
      I0MAT = 1+(I-1)*ORDSQ
      I0VEC = 1+(I-1)*ORDER
      CALL LUDECO(B(I0MAT),ORDER)
      CALL LUSOLV(B(I0MAT),D(I0VEC),D(I0VEC),ORDER)
      DO 100 J=1,ORDER
      I0MATJ = I0MAT+(J-1)*ORDER
      CALL LUSOLV(B(I0MAT),C(I0MATJ),C(I0MATJ),ORDER)
  100 CONTINUE
  200 CONTINUE
      I = I+1
      I0MAT = 1+(I-1)*ORDSQ
      I0VEC = 1+(I-1)*ORDER
      I1MAT = I0MAT-ORDSQ
      I1VEC = I0VEC-ORDER
      CALL MULPUT(A(I0MAT),D(I1VEC),D(I0VEC),ORDER)
      DO 300 J=1,ORDER
      I0MATJ = I0MAT+(J-1)*ORDER
      I1MATJ = I1MAT+(J-1)*ORDER
      CALL MULPUT(A(I0MAT),C(I1MATJ),B(I0MATJ),ORDER)
  300 CONTINUE
      CALL LUDECO(B(I0MAT),ORDER)
      CALL LUSOLV(B(I0MAT),D(I0VEC),D(I0VEC),ORDER)
      IF(I.EQ.IU) GO TO 500
      DO 400 J=1,ORDER
      I0MATJ = I0MAT+(J-1)*ORDER
      CALL LUSOLV(B(I0MAT),C(I0MATJ),C(I0MATJ),ORDER)
  400 CONTINUE
      GO TO 200
  500 CONTINUE
C...
C...BACK SUBSTITUTION
C...
      I = IU
  600 CONTINUE
      I = I-1
      I0MAT = 1+(I-1)*ORDSQ
      I0VEC = 1+(I-1)*ORDER
      I1VEC = I0VEC+ORDER
      CALL MULPUT(C(I0MAT),D(I1VEC),D(I0VEC),ORDER)
      IF (I.GT.IL) GO TO 600
C...
      RETURN
      END
```

## Текст подпрограммы PBTRIP

```
C...
C...SUBROUTINE TO SOLVE PERIODIC BLOCK TRIDIAGONAL
C...SYSTEM OF EQUATIONS WITHOUT PIVOTING STRATEGY.
C...EACH BLOCK MATRIX MAY BE OF DIMENSION N WITH
C...N ANY NUMBER GREATER THAN 1.
C...
      SUBROUTINE PBTRIP(A,B,C,D,IL,IU,ORDER)
      DIMENSION A(1),B(1),C(1),D(1)
      DIMENSION AD(25),CD(25)
      INTEGER ORDER,ORDSQ
C...
C...A = SUB DIAGONAL MATRIX
C...B =     DIAGONAL MATRIX
C...C = SUP DIAGONAL MATRIX
C...D = RIGHT HAND SIDE VECTOR
C...IL = LOWER VALUE OF INDEX FOR WHICH MATRICES ARE DEFINED
C...IU = UPPER VALUE OF INDEX FOR WHICH MATRICES ARE DEFINED
C...      (SOLUTION IS SOUGHT FOR BTRI(A,B,C)*X = D
C...      FOR INDICES OF X BETWEEEN IL AND IU (INCLUSIVE).
C...      SOLUTION WRITTEN IN D VECTOR (ORIGINAL CONTENTS
C...      ARE OVERWRITTEN)).
C...ORDER = ORDER OF A,B,C MATRICES AND LENGTH OF D VECTOR
C...      AT EACH POINT DENOTED BY INDEX I
C...      (ORDER CAN BE ANY INTEGER GREATER THAN 1)
C...      (ARRAYS AD AND CD MUST BE AT LEAST OF LENGTH ORDER**2)
C...      (CURRENT LENGTH OF 25 ANTICIPATES MAXIMUM ORDER OF 5).
C...
      IS = IL+1
      IE = IU-1
      ORDSQ = ORDER**2
      IUMAT = 1+(IU-1)*ORDSQ
      IUVEC = 1+(IU-1)*ORDER
      IEMAT = 1+(IE-1)*ORDSQ
      IEVEC = 1+(IE-1)*ORDER
C...
C...FORWARD ELIMINATION
C...
      I = IL
      IOMAT = 1+(I-1)*ORDSQ
      IOVEC = 1+(I-1)*ORDER
      CALL LUDECO(B(IOMAT),ORDER)
      CALL LUSOLV(B(IOMAT),D(IOVEC),D(IOVEC),ORDER)
      DO 10 J=1,ORDER
      IOMATJ = IOMAT+(J-1)*ORDER
      CALL LUSOLV(B(IOMAT),C(IOMATJ),C(IOMATJ),ORDER)
      CALL LUSOLV(B(IOMAT),A(IOMATJ),A(IOMATJ),ORDER)
   10 CONTINUE
C...
      DO 200 I = IS,IE
      IOMAT = 1+(I-1)*ORDSQ
      IOVEC = 1+(I-1)*ORDER
      I1MAT = IOMAT-ORDSQ
      I1VEC = IOVEC-ORDER
      DO 20 J=1,ORDSQ
```

```
      I0MATJ = J-1+I0MAT
      IUMATJ = J-1+IUMAT
      AD(J) = A(I0MATJ)
      CD(J) = C(IUMATJ)
      A(I0MATJ) = 0.0
      C(IUMATJ) = 0.0
   20 CONTINUE
      CALL MULPUT(AD,D(I1VEC),D(I0VEC),ORDER)
      DO 22 J=1,ORDER
      I0MATJ = I0MAT+(J-1)*ORDER
      I1MATJ = I1MAT+(J-1)*ORDER
      CALL MULPUT(AD,C(I1MATJ),B(I0MATJ),ORDER)
      CALL MULPUT(AD,A(I1MATJ),A(I0MATJ),ORDER)
   22 CONTINUE
      CALL LUDECO(B(I0MAT),ORDER)
      CALL LUSOLV(B(I0MAT),D(I0VEC),D(I0VEC),ORDER)
      DO 24 J=1,ORDER
      I0MATJ = I0MAT+(J-1)*ORDER
      CALL LUSOLV(B(I0MAT),C(I0MATJ),C(I0MATJ),ORDER)
      CALL LUSOLV(B(I0MAT),A(I0MATJ),A(I0MATJ),ORDER)
   24 CONTINUE
      CALL MULPUT(CD,D(I1VEC),D(IUVEC),ORDER)
      DO 26 J=1,ORDER
      IUMATJ = IUMAT+(J-1)*ORDER
      I1MATJ = I1MAT+(J-1)*ORDER
      CALL MULPUT(CD,A(I1MATJ),B(IUMATJ),ORDER)
      CALL MULPUT(CD,C(I1MATJ),C(IUMATJ),ORDER)
   26 CONTINUE
  200 CONTINUE
C...
      DO 30 J=1,ORDSQ
      IUMATJ = J-1+IUMAT
      AD(J) = A(IUMATJ)+C(IUMATJ)
   30 CONTINUE
      CALL MULPUT(AD,D(IEVEC),D(IUVEC),ORDER)
      DO 32 J=1,ORDER
      IUMATJ = IUMAT+(J-1)*ORDER
      IEMATJ = IEMAT+(J-1)*ORDER
      CALL MULPUT(AD,C(IEMATJ),B(IUMATJ),ORDER)
      CALL MULPUT(AD,A(IEMATJ),B(IUMATJ),ORDER)
   32 CONTINUE
      CALL LUDECO(B(IUMAT),ORDER)
      CALL LUSOLV(B(IUMAT),D(IUVEC),D(IUVEC),ORDER)
C...
C...BACK SUBSTITUTION
C...
      DO 40 IBAC = IL,IE
      I = IE-IBAC+IL
      I0MAT = 1+(I-1)*ORDSQ
      I0VEC = 1+(I-1)*ORDER
      I1VEC = I0VEC+ORDER
      CALL MULPUT(A(I0MAT),D(IUVEC),D(I0VEC),ORDER)
      CALL MULPUT(C(I0MAT),D(I1VEC),D(I0VEC),ORDER)
   40 CONTINUE
C...
      RETURN
      END
```

```
C...
C...SUBROUTINE TO CALCULATE L-U DECOMPOSITION
C...OF A GIVEN MATRIX A AND STORE RESULT IN A
C...(NO PIVOTING STRATEGY IS EMPLOYED)
C...
      SUBROUTINE LUDECO(A,ORDER)
C...
      DIMENSION A(ORDER,1)
      INTEGER ORDER
C...
      DO 8 JC=2,ORDER
    8 A(1,JC) = A(1,JC)/A(1,1)
      JRJC = 1
   10 CONTINUE
      JRJC = JRJC+1
      JRJCM1 = JRJC-1
      JRJCP1 = JRJC+1
      DO 14 JR=JRJC,ORDER
      SUM = A(JR,JRJC)
      DO 12 JM=1,JRJCM1
   12 SUM = SUM-A(JR,JM)*A(JM,JRJC)
   14 A(JR,JRJC) = SUM
      IF (JRJC.EQ.ORDER) RETURN
      DO 18 JC = JRJCP1,ORDER
      SUM = A(JRJC,JC)
      DO 16 JM=1,JRJCM1
   16 SUM = SUM-A(JRJC,JM)*A(JM,JC)
   18 A(JRJC,JC) = SUM/A(JRJC,JRJC)
      GO TO 10
      END


C...
C...SUBROUTINE TO MULTIPLY A VECTOR B BY A MATRIX A,
C...SUBTRACT RESULT FROM ANOTHER VECTOR C AND STORE
C...RESULT IN C.  THUS VECTOR C IS OVERWRITTEN.
C...
      SUBROUTINE MULPUT(A,B,C,ORDER)
C...
      DIMENSION A(1),B(1),C(1)
      INTEGER ORDER
C...
      DO 200 JR=1,ORDER
      SUM = 0.0
      DO 100 JC=1,ORDER
      IA = JR+(JC-1)*ORDER
  100 SUM = SUM+A(IA)*B(JC)
  200 C(JR) = C(JR)-SUM
C...
      RETURN
      END
```

```
C...
C...SUBROUTINE TO SOLVE LINEAR ALGEBRAIC SYSTEM OF
C...EQUATIONS A*C=B AND STORE RESULTS IN VECTOR C.
C...MATRIX A IS INPUT IN L-U DECOMPOSITION FORM.
C...(NO PIVOTING STRATEGY HAS BEEN EMPLOYED TO
C...COMPUTE THE L-U DECOMPOSITION OF THE MATRIX A).
C...
      SUBROUTINE LUSOLV(A,B,C,ORDER)
C...
      DIMENSION A(ORDER,1),B(1),C(1)
      INTEGER ORDER
C...
C...FIRST L(INV)*B
C...
      C(1) = C(1)/A(1,1)
      DO 14 JR=2,ORDER
      JRM1 = JR-1
      SUM = B(JR)
      DO 12 JM=1,JRM1
   12 SUM = SUM-A(JR,JM)*C(JM)
   14 C(JR) = SUM/A(JR,JR)
C...
C...NEXT U(INV) OF L(INV)*B
C...
      DO 18 JRJR=2,ORDER
      JR = ORDER-JRJR+1
      JRP1 = JR+1
      SUM = C(JR)
      DO 16 JMJM = JRP1,ORDER
      JM = ORDER-JMJM+JRP1
   16 SUM = SUM-A(JR,JM)*C(JM)
   18 C(JR) = SUM
C...
      RETURN
      END
```

# Приложение С

## Модифицированный сильно неявный метод

В этом приложении описан модифицированный сильно неявный метод (MSI) решения эллиптических уравнений в частных производных [Schneider, Zedan, 1981]. Основная идея метода приведена в гл. 4, а в этом приложении более подробно описаны его основные особенности. Шнейдер и Зедан (Schneider, Zedan, 1981] предложили этот метод для решения системы алгебраических уравнений, полученных при дискретизации эллиптического уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial u}{\partial y}\right) = q(x, y). \qquad \text{(C.1)}$$

Если $u$ — температура, то это уравнение описывает двумерный стационарный процесс распространения тепла. В приведенном уравнении $k_x$ и $k_y$ — коэффициенты теплопроводности в направлении осей $x$ и $y$ соответственно, а $q(x, y)$ — источниковый член, описывающий подвод тепла. Отметим, что уравнения вида (С.1) описывают и многие другие физические процессы. При $k_x = k_y = \text{const}$ и $q(x, y) \neq 0$ уравнение (С.1) является уравнением Пуассона, а при $k_x = k_y = \text{const}$ и $q(x, y) = 0$ уравнение (С.1) сводится к уравнению Лапласа. В работе Шнейдера и Зедана [Schneider, Zedan, 1981] приведены численные примеры, относящиеся лишь к уравнению Лапласа. При этом представлены результаты расчетов задач с граничными условиями Дирихле, Неймана и Робинса (смешанное граничное условие).

Алгоритм разработан для решения уравнений, полученных при аппроксимации уравнения (С.1) по девятиточечной схеме. Уравнения, полученные при пятиточечной аппроксимации, рассматриваются при этом как частный случай. При использовании девятиточечной схемы (см. соотношение (4.114)) конечно-разностный аналог уравнения (1.1) можно записать в виде

$$A^1_{i,j} u_{i,j+1} + A^2_{i,j} u_{i+1,j+1} + A^3_{i,j} u_{i+1,j} + A^4_{i,j} u_{i+1,j-1} + A^5_{i,j} u_{i,j-1} + A^6_{i,j} u_{i-1,j-1} + A^7_{i,j} u_{i-1,j} + A^8_{i,j} u_{i-1,j+1} + A^9_{i,j} u_{i,j} = q_{i,j}. \qquad \text{(C.2)}$$

Индексы $i$, $j$ указывают на номер узла разностной сетки, а не на номер строки и столбца матрицы. Верхние индексы указывают на номер коэффициента в разностном уравнении для произвольной точки $(i, j)$. Если используется пятиточечная аппроксимация уравнения, то

$$A^2_{i,\,i} = A^4_{i,\,j} = A^6_{i,\,j} = A^8_{i,\,j} = 0.$$

Разностные уравнения можно записать в виде

$$[A]\,\mathbf{u} = \mathbf{C}, \tag{C.3}$$

причем матрица коэффициентов имеет вид

$$[A] = \begin{bmatrix} A^9_{i,j} & A^3_{i,j} & & & A^8_{i,j} & A^1_{i,j} & A^2_{i,j} & & \\ A^7_{i,j} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ A^6_{i,j} & A^5_{i,j} & A^4_{i,j} & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & A^6_{i,j} & A^5_{i,j} & A^4_{i,j} & & A^7_{i,j} & A^9_{i,j} \end{bmatrix}.$$

Для последующих ссылок диагонали, на которых расположены элементы, имеющие одно и то же значение индекса $i$ (расположенные в одном столбце точек сетки), помечены звездочкой. Построим теперь матрицу

$$[B] = [A + P],$$

которую можно представить как произведение верхней $(U)$ и нижней $(L)$ треугольных матриц. Кроме того, потребуем, чтобы девять исходных коэффициентов (от $A^1_{i,\,j}$ до $A^9_{i,\,j}$) при переходе к матрице $[A + P]$ не изменились. Матрицы $[L]$ и $[U]$ имеют вид

$$[L] = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ a_{i,j} & b_{i,j} & c_{i,j} & d_{i,j} & e_{i,j} \end{bmatrix},$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & f_{i,j} & g_{i,j} & h_{i,j} & s_{i,j} \\ & * & & & * \end{bmatrix}.$$

Звездочкой по-прежнему обозначены диагонали, соответствующие узлам сетки с одинаковым значением индекса $i$.

Условие сохранения при переходе к матрице $[B]$ девяти коэффициентов, образующих матрицу $[A]$, позволяет получить следующие уравнения для определения элементов матриц $[L]$ и $[U]$:

$$a_{i,j} = A^6_{i,j}, \tag{C.3a}$$

$$a_{i,j}f_{i-1,j-1} + b_{i,j} = A^5_{i,j}, \tag{C.3b}$$

$$b_{i,j}f_{i,j-1} + C_{i,j} = A^4_{i,j}, \tag{C.3c}$$

$$a_{i,j}h_{i-1,j-1} + b_{i,j}g_{i,j-1} + d_{i,j} = A^7_{i,i}, \tag{C.3d}$$

$$a_{i,j}s_{i-1,j-1} + b_{i,j}h_{i,j-1} + c_{i,j}g_{i+1,j-1} + d_{i,j}f_{i-1,j} + e_{i,j} = A^9_{i,j}, \tag{C.3e}$$

$$b_{i,j}s_{i,j-1} + c_{i,j}h_{i+1,j-1} + e_{i,j}f_{i,j} = A^3_{i,j}, \tag{C.3f}$$

$$d_{i,j}h_{i-1,j} + e_{i,j}g_{i,j} = A^8_{i,j}, \tag{C.3g}$$

$$d_{i,j}s_{i-1,j} + e_{i,j}h_{i,j} = A^1_{i,j} \tag{C.3h}$$

$$e_{ij}s_{i,j} = A^2_{i,j}. \tag{C.3i}$$

Модифицированная матрица коэффициентов $[B] = [A + P]$ имеет вид

$$[B] = \begin{bmatrix} \phi^4_{i,j} & A^8_{i,j} & A^1_{i,j} & A^2_{i,j} \\ & & & * \\ A^6_{i,j} & A^5_{i,j} & A^4_{i,j} & \phi^1_{i,j} & \phi^2_{i,j} & A^7_{i,j} & A^9_{i,j} & A^3_{i,j} & \phi^3_{i,j} \\ * & & & & & & * & & \end{bmatrix}.$$

Звездочка имеет тот же смысл, что и раньше.

Элементы матрицы $[B]$, обозначенные коэффициентами $\phi^1_{i,j}$, $\phi^2_{i,j}$, $\phi^3_{i,j}$ и $\phi^4_{i,j}$, определяются соотношениями

$$\phi^1_{i,j} = c_{i,j} f_{i+1,j-1}, \tag{C.4a}$$

$$\phi^2_{i,j} = a_{i,j} g_{i-1,j-1}, \tag{C.4b}$$

$$\phi^3_{i,j} = c_{i,j} s_{i+1,j-1}, \tag{C.4c}$$

$$\phi^4_{i,j} = d_{i,j} g_{i-1,j}. \tag{C.4d}$$

Разностный шаблон, определяемый матрицей $[B]$, схематически показан на рис. С.1.

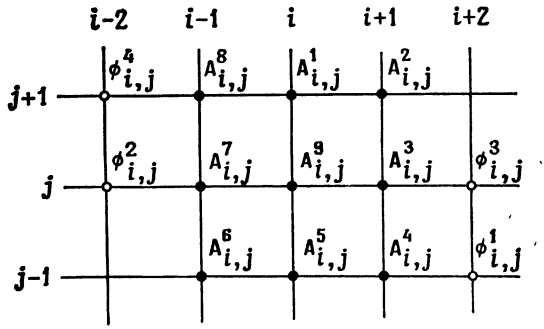



Рис. С1. Шаблон для решения модифицированным сильно неявным методом уравнений, полученных при применении девятиточечной схемы. Если применяется пятиточечная схема, то точки, обозначенные $A^2_{i,j}$, $A^4_{i,j}$, $A^6_{i,j}$, $A^8_{i,j}$, $\phi^2_{i,j}$, $\phi^3_{i,j}$, исчезают.

Шнейдер и Зедан [Schneider, Zedan, 1981] воспользовались разложением в ряд Тейлора для того, чтобы выразить значения $u_{i-2,j}$, $u_{i+2,j}$, $u_{i+2,j-1}$ и $u_{i-2,j+1}$ через значения $u$ в узлах исходного девятиточечного шаблона. Это позволило частично избавиться от влияния дополнительных членов $(\phi_{i,j})$ матрицы $[B]$. Указанные разложения имеют вид

$$u_{i-2,j} = -u_{i,j} + 2u_{i-1,j} \tag{C.5a}$$

$$u_{i+2,j} = -u_{i,j} + 2u_{i+1,j} \tag{C.5b}$$

$$u_{i+2,j-1} = -2u_{i,j} + 2u_{i+1,j} + u_{i,j-1}, \tag{C.5c}$$

$$u_{i-2,j+1} = -2u_{i,j} + 2u_{i-1,j} + u_{i,j+1}. \tag{C.5d}$$

К столь же хорошим результатам может привести использование и любой другой экстраполяционной формулы для определения значений неизвестных вне исходного разностного шаблона.

Использование того или иного приближения влияет лишь на скорость сходимости итерационного процесса, а не на окончательный результат, получающийся, когда процесс сойдется.

Итерационный параметр $\alpha$ вводится для того, чтобы частично избавиться от влияния элементов $\phi_{i,j}$, появляющихся в $[B]$. Это достигается использованием модифицированной девятиточечной схемы, которая имеет вид

$$\begin{aligned}
&A^5_{i,j}u_{i,j-1} + A^7_{i,j}u_{i-1,j} + A^9_{i,j}u_{i,j} + A^1_{i,j}u_{i,j+1} + A^3_{i,j}u_{i+1,j} + \\
&+ A^6_{i,j}u_{i-1,j-1} + A^8_{i,j}u_{i-1,j+1} + A^2_{i,j}u_{i+1,j+1} + \\
&+ A^4_{i,j}u_{i+1,j-1} + \phi^1_{i,j}[u_{i+2,j-1} - \alpha(-2u_{i,j} + 2u_{i+1,j} + u_{i,j-1})] + \\
&+ \phi^2_{i,j}[u_{i-2,j} - \alpha(-u_{i,j} + 2u_{i-1,j})] + \\
&+ \phi^3_{i,j}[u_{i+2,j} - \alpha(-u_{i,j} + 2u_{i+1,j})] + \\
&+ \phi^4_{i,j}[u_{i-2,j+1} - \alpha(-2u_{i,j} + 2u_{i-1,j} + u_{i,j+1})] = q_{i,j}. \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}$$

Уравнения (С.3) и (С.4) модифицируются с учетом вводимого соотношениями (С.6) частичного сокращения членов и преобразуются так, чтобы элементы матриц $[L]$ и $[U]$ выражались явно:

$$a_{i,j} = A^6_{i,j}, \qquad \text{(C.7a)}$$

$$b_{i,j} = \frac{A^5_{i,j} - a_{i,j}f_{i-1,j-1} - \alpha A^4_{i,j}f_{i+1,j-1}}{1 - \alpha f_{i,j-1}f_{i+1,j-1}}, \qquad \text{(C.7b)}$$

$$c_{i,j} = A^4_{i,j} - b_{i,j}f_{i,j-1}, \qquad \text{(C.7c)}$$

$$d_{i,j} = \frac{A^7_{i,j} - a_{i,j}h_{i-1,j-1} - b_{i,j}g_{i,j-1} - 2\alpha a_{i,j}g_{i-1,j-1}}{1 + 2\alpha g_{i-1,j}}, \qquad \text{(C.7d)}$$

$$\begin{aligned}
e_{i,j} = {} & A^9_{i,j} - a_{i,j}s_{i-1,j-1} - b_{i,j}h_{i,j-1} - c_{i,j}g_{i+1,j-1} - \\
& - d_{i,j}f_{i-1,j} + \alpha(2\phi^1_{i,j} + \phi^2_{i,j} + \phi^3_{i,j} + 2\phi^4_{i,j}), \qquad \text{(C.7e)}
\end{aligned}$$

$$f_{i,j} = \frac{A^3_{i,j} - b_{i,j}s_{i,j-1} - c_{i,j}h_{i+1,j-1} - 2\alpha(\phi^1_{i,j} + \phi^3_{i,j})}{e_{i,j}}, \qquad \text{(C.7f)}$$

$$g_{i,j} = \frac{A^8_{i,j} - d_{i,j}h_{i-1,j}}{e_{i,j}}, \qquad \text{(C.7g)}$$

$$h_{i,j} = \frac{A^1_{i,j} - d_{i,j}s_{i-1,j} - \alpha\phi^4_{i,j}}{e_{i,j}}, \qquad \text{(C.7h)}$$

$$s_{i,j} = \frac{A^2_{i,j}}{e_{i,j}}. \qquad \text{(C.7i)}$$

Величины $\alpha_{i,j}$, входящие в эти соотношения, вычисляются по формулам (С.4) с использованием значений $a$, $b$, $c$, $d$, $f$, $g$ и $s$, вычисленных по формулам (С.7). Отметим, что входящие в (С.7) значения $\phi_{i,j}$ должны быть вычислены сразу после нахождения величины $d_{i,j}$. Результаты, полученные Шнейдером и Зеданом [Schneider, Zedan, 1981], показывают, что модифицированный сильно неявный метод мало чувствителен к выбору значения параметра $\alpha$. Хорошие результаты получаются при расчетах с параметром $\alpha$, лежащим между 0.3 и 0.6.

Здесь важно отметить, что если сильно неявный метод используется для решения уравнений, полученных при использовании пятиточечной схемы, то

$$A^2_{i,j} = A^4_{i,j} = A^6_{i,j} = A^8_{i,j} = 0. \tag{С.8}$$

и в результате

$$a_{i,j} = s_{i,j} = \phi^2_{i,j} = \phi^3_{i,j} = 0. \tag{С.9}$$

Итерационный процесс решения уравнений организуется следующим образом. Сначала добавим к обеим частям уравнения (С.3) величину $[P]\,\mathbf{U}$. Тогда получим

$$[A + P]\,\mathbf{u} = \mathbf{C} + [P]\,\mathbf{u}. \tag{С.10}$$

Значения неизвестных в правой части возьмем с $n$-й итерации, что приводит к соотношению

$$[A + P]\,\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{C} + [P]\,\mathbf{u}^n. \tag{С.11}$$

Представив матрицу $[A + P]$ в виде произведения матриц $[L]$ и $[U]$, получим

$$[L]\,[U]\,\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{C} + [P]\,\mathbf{u}^n. \tag{С.12}$$

Введя промежуточный вектор $\mathbf{V}^{n+1}$ по формуле

$$\mathbf{V}^{n+1} = [U]\,\mathbf{u}^{n+1}, \tag{С.13}$$

придем к следующему двухшаговому итерационному процессу:

*Шаг 1*

$$[L]\,\mathbf{V}^{n+1} = C + [P]\,\mathbf{u}^n, \tag{С.14a}$$

*Шаг 2*

$$[U]\,\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{V}^{n+1}. \tag{С.14b}$$

Элементами матрицы $[P]$ являются просто $\phi^1$, $\phi^2$, $\phi^3$, $\phi^4$ (при использовании пятиточечной схемы только $\phi^1$ и $\phi^4$). Они вычисляются по соотношениям (С.4).

Можно поступить и по-другому, введя вектор разности

$$\delta^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \tag{С.15}$$

и вектор невязки

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{C} - [A]\,\mathbf{u}^n. \tag{C.16}$$

Тогда уравнение (С.11) примет вид

$$[A + P]\,\delta^{n+1} = \mathbf{R}^n. \tag{C.17}$$

Заменив $[A + P]$ произведением $[L]\,[U]$, получим

$$[L][U]\,\delta^{n+1} = \mathbf{R}^n.$$

Введя промежуточный вектор $\mathbf{W}^{n+1}$ по формуле

$$\mathbf{W}^{n+1} = [U]\,\delta^{n+1}, \tag{C.18}$$

снова придем к двухшаговому итерационному процессу:

*Шаг 1*

$$[L]\,\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{R}^n, \tag{C.19a}$$

*Шаг 2*

$$[U]\,\delta^{n+1} = \mathbf{W}^{n+1}. \tag{C.19b}$$

Итерационные процессы, описываемые соотношениями (С.14) и (С.19), состоят из прямой подстановки для определения $\mathbf{V}^{n+1}$ или $\mathbf{W}^{n+1}$ и обратной подстановки для нахождения $\mathbf{U}^{n+1}$ и $\delta^{n+1}$. Коэффициенты уравнения в ходе итерационного процесса не меняются. После каждой итерации правая часть шага 1 меняется и итерационный процесс повторяется.

## Обозначения

| | |
|---|---|
| $a$ | скорость звука |
| $\mathbf{A}$ | вектор площади |
| $c$ | скорость распространения волны |
| $c_f$ | коэффициент трения |
| $c_p$ | удельная теплоемкость при постоянном давлении |
| $c_v$ | удельная теплоемкость при постоянном объеме |
| $d\mathbf{r}$ | дифференциал радиус-вектора |
| $e$ | внутренняя энергия единицы массы |
| $E_t$ | полная энергия единицы объема (если учитываются лишь внутренняя и кинетическая энергии, то $E_t = \rho(e + V^2/2)$) |
| $\mathbf{f}$ | сила, действующая на единицу массы |
| $f_x$, $f_y$, $f_z$ | составляющие силы, действующей на единицу массы, в декартовой системе координат |
| $F$ | произвольная функция |
| $\mathbf{g}$ | вектор ускорения силы тяжести |
| $G$ | коэффициент (множитель) перехода |
| $\mathbf{G}$ | безразмерный вектор потока |
| $h$ | высота |
| $h$ | энтальпия единицы массы ($h = e + p/\rho$) |
| $h_1$, $h_2$, $h_3$ | коэффициенты Ламе криволинейной ортогональной системы координат |
| $H$ | полная энтальпия ($H = h + V^2/2$) |
| $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ | единичные векторы криволинейной системы координат |
| $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ | единичные векторы декартовой системы координат |
| $I$ | безразмерная энтальпия |
| $J$ | якобиан |
| $k$ | коэффициент теплопроводности |
| $\bar{k}$ | кинетическая энергия турбулентности |
| $k_m$ | волновое число |
| $k_T$ | коэффициент турбулентной теплопроводности |
| $K$ | местная кривизна тела |
| $K$ | $\Delta y_+/\Delta y_-$ |

| | |
|---|---|
| $l$ | путь (длина) смешения |
| $l_\varepsilon$ | масштаб, определяемый диссипацией |
| $l_{1,2}$ | составляющие вектора **L** |
| $L$ | характерный размер |
| **L** | собственный вектор |
| $\dot{m}$ | массовый расход |
| M | число Маха |
| $M_x$ | местное число Маха, определенное по составляющей скорости в направлении основного потока |
| $n$ | расстояние по нормали |
| **n** | единичный вектор нормали |
| $p$ | давление |
| Pr | число Прандтля |
| $Pr_T$ | турбулентное число Прандтля |
| $q$ | интенсивность линейного источника или стока |
| **q** | вектор теплового потока |
| $Q$ | подвод тепла извне к единице объема |
| $r$ | $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2$ |
| $r$ | радиус; расстояние, отсчитываемое вдоль радиуса |
| $R$ | газовая постоянная |
| Re | число Рейнольдса |
| $Re_L$ | число Рейнольдса, определенное по параметрам набегающего потока и характерному размеру $L$ ($Re_L = \rho_\infty V_\infty L/\mu_\infty$) |
| $Re_{\Delta x}$ | сеточное число Рейнольдса (для уравнения Бюргерса $Re_{\Delta x} = c\Delta x/\mu$) |
| $s$ | энтропия единицы массы |
| $s$ | длина дуги |
| $S$ | источниковый член |
| $t$ | время |
| $T$ | температура |
| $u^+$ | безразмерная скорость, используемая в теории турбулентных течений |
| $u, v, w$ | составляющие скорости в декартовой системе координат |
| $u_1, u_2, u_3$ | составляющие скорости в произвольной системе координат |
| $u_r, u_\theta, u_z$ | составляющие скорости в цилиндрической системе координат |
| $u_r, u_\theta, u_\phi$ | составляющие скорости в сферической системе координат |
| $U, V, W$ | контравариантные составляющие скорости |
| $U_\infty$ | составляющая скорости набегающего потока в направлении оси $x$ |
| **V** | вектор скорости |

| | |
|---|---|
| $V$ | модуль вектора скорости |
| $\mathbf{w}$ | вектор примитивных переменных |
| $x, y, z$ | декартовы координаты |
| $x_1, x_2, x_3$ | произвольные криволинейные координаты |
| $y^+$ | безразмерная координата, используемая в теории турбулентных течений |
| $\alpha$ | коэффициент термодиффузии |
| $\alpha, \beta, \gamma$ | конические координаты |
| $\beta$ | коэффициент искусственной сжимаемости |
| $\beta$ | коэффициент растяжения |
| $\beta$ | $k_m \Delta x$ |
| $\beta$ | $\sqrt{M^2 - 1}$ |
| $\beta$ | безразмерный градиент давления ($\beta = (x/u_e) du_e/dx$) |
| $\beta_x$ | $k_m \Delta x$ |
| $\beta_y$ | $k_m \Delta y$ |
| $\gamma$ | отношение теплоемкостей |
| $\Gamma$ | конечно-разностный оператор; циркуляция |
| $\delta$ | характерный размер в направлении оси $y$ |
| $\delta$ | толщина пограничного слоя |
| $\delta$ | центрально-разностный оператор, определяемый формулой (3.14) |
| $\delta_u$ | измерение $u$ на двух последовательных итерациях |
| $\bar{\delta}$ | центрально-разностный оператор, определяемый формулой (3.13) |
| $\hat{\delta}$ | центрально-разностный оператор, определяемый формулой (4.100) |
| $\delta^*$ | толщина вытеснения |
| $\delta_{ij}$ | символ Кронекера |
| $\Delta$ | оператор разностей вперед, определяемый формулой (3.9) |
| $\Delta x_+$ | $x_{j+1} - x_j$ |
| $\Delta x_-$ | $x_j - x_{j-1}$ |
| $\Delta y_+$ | $y_{j+1} - y_j$ |
| $\Delta y_-$ | $y_j - y_{j-1}$ |
| $\Delta^n( )$ | $( )^{n-1} - ( )^n$ |
| $\eta$ | переменная, имеющая смысл безразмерного расстояния |
| $\varepsilon$ | скорость диссипации энергии турбулентности |
| $\varepsilon_i$ | коэффициент в неявном сглаживающем члене |
| $\varepsilon_e$ | коэффициент в явном сглаживающем члене |
| $\zeta$ | вектор завихренности ($\zeta = \nabla \times \mathbf{V}$) |

| | |
|---|---|
| $\zeta$ | модуль вектора завихренности |
| $\theta$ | угол, отсчитываемый в окружном направлении |
| $\theta$ | толщина потери импульса |
| $\theta$ | параметр, определяющий тип разностной схемы |
| $\theta_1$, $\theta_2$ | параметры, определяющие тип разностной схемы |
| $\varkappa$ | коэффициент объемной вязкости |
| $\varkappa$ | постоянная Кармана |
| $\lambda$ | собственное значение |
| $\lambda$ | обобщенный коэффициент диффузии |
| $\bar{\lambda}$ | $\lambda_T + \lambda$ |
| $\mu$ | коэффициент вязкости в уравнении Бюргерса |
| $\mu$ | коэффициент динамической вязкости |
| $\mu$ | оператор осреднения, определяемый формулой (3.16) |
| $\bar{\mu}$ | $\mu + \mu_T$ |
| $\mu'$ | второй коэффициент вязкости |
| $\mu_T$ | коэффициент турбулентной вязкости |
| $\xi$, $\eta$, $\zeta$ | преобразованные координаты |
| $\pi$ | 3.14159... |
| $\Pi_{ij}$ | тензор вязких напряжений |
| $\rho$ | плотность |
| $\rho$ | искусственная плотность |
| $\sigma$ | угол наклона ударной волны |
| $\tau$ | преобразованное время |
| $\tau$ | вязкие напряжения |
| $\tau_{ij}$ | тензор вязких напряжений |
| $\nu$ | коэффициент кинематической вязкости ($\nu = \mu/\rho$) |
| $\nu$ | $c\Delta t/\Delta x$ |
| $\phi$ | потенциал скорости |
| $\phi$ | угол в сферической системе координат |
| $\phi$ | фазовый угол |
| $\phi$ | обобщенная переменная |
| $\phi$, $\psi$ | функции для группы граничных точек |
| $\Phi$ | диссипативная функция |
| $\chi$ | параметр сильного взаимодействия |
| $\chi$ | параметр, характеризующий градиент давления ($\chi = (-1/\rho)\,dp/dx$) |
| $\psi$ | функция тока |
| $\psi$ | векторный потенциал |
| $\omega$ | часть члена с градиентом давления в продольном направлении |
| $\omega$, $\bar{\omega}$ | параметры верхней релаксации |
| $\nabla$ | оператор разностей назад, определяемый формулой (3.11) |

| | |
|---|---|
| $\nabla$ | дифференциальный оператор |
| $\nabla^2$ | оператор Лапласа ($\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$) |

*Нижние индексы*

| | |
|---|---|
| $B$ | значение на границе |
| КФЛ | условия Куранта — Фридриха — Леви |
| $e$ | точное значение |
| $i$ | внутренний |
| $i$ | невязкий член |
| $i$, $j$, $k$ | номера узла сетки по осям $x$, $y$, $z$ |
| $l$ | нижнее значение |
| inv | обозначает невязкое значение |
| lam | имеет ту же форму, что и в случае ламинарного течения |
| min | минимум |
| max | максимум |
| $n$ | нормаль или нормальная составляющая |
| nose | значение на головной части |
| 0 | промежуточное (или оцененное) значение |
| 0 | начальное значение |
| 0 | внешнее значение |
| ref | характерное значение |
| $t$ | значение на ударной волне |
| stag | значение в точке торможения |
| s | тангенциальное направление или тангенциальная составляющая |
| $t$ | тепловой |
| $T$ | турбулентный |
| turb | турбулентная величина |
| $u$ | верхнее значение |
| $v$ | вязкий член |
| $w$ | значение на стенке |
| $x$ | частная производная по $x$ |
| $y$ | частная производная по $y$ |
| $z$ | частная производная по $z$ |
| $x$, $y$, $z$ | составляющие по осям $x$, $y$, $z$ |
| 1 | условия перед скачком |
| 2 | условия за скачком |
| $\infty$ | значение в набегающем потоке |

*Верхние индексы*

| | |
|---|---|
| $i$ | индекс в маршевом направлении |
| $m$ | номер итерации |
| $n$ | номер шага по времени |

| | |
|---|---|
| $*$ | фиктивный номер шага по времени |
| $**$ | фиктивный номер шага по времени |
| $*$ | безразмерное значение параметра |
| $\hat{}$ | значение переменной на предыдущей итерации |
| $\sim$ | среднемассовое значение переменной (см. 5.64)) |
| $'$ | пульсационные значения величин в турбулентном потоке; традиционно осредненные переменные |
| $'$ | возмущенные значения параметров |
| $'$ | поправочный член |
| $''$ | пульсационные значения величин в турбулентном потоке; осредненные по массе переменные |
| $-$ | среднее по времени значение |

# Литература


Abbet M. J. (1973). Boundary Condition Calculation Proceedures for Inviscid Supersonic Flow Fields. — Proc. AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Palm Springs, California, p. 153—172.

Adams (Jr.) J. C., Hodge B. K. (1977). The Calculation of Compressible, Transitional, Turbulent, and Relaminarizational Boundary Layers Over Smooth and Rough Surfaces Using an Extended Mixing Length Hypothesis. — AIAA Paper 77-682, Albuquerque, New Mexico.

Agarwal R. K. (1981). A Third-Order-Accurate Upwing Scheme for Navier-Stokes Solution in Three Dimensions. — Proc. ASME/AIAA Conference on Computers in Flow Predictions and Fluid Dynamics Experiments, Washington, D. C., p. 73—82.

Allen D. N. de G. (1954). Relaxation Methods. — New York: McGraw-Hill.

Allen D. Southwell R. V. (1955). Relaxation Methods Applied to Determine the Motion, in Two Dimensions, of a Viscous Fluid Past a Fixed Cylinder. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., v. 8, p. 129—145.

Allen J. S., Cheng S. I. (1970). Numerical Solutions of the Compressible Navier-Stokes Equations for the Laminar Near Wake. — Phys. Fluids, v. 13, p. 37—52.

Ames Research Staff (1953). Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow. — NACA Report 1135.

Ames W. F. (1977). Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2d ed. — New York: Academic.

Amsden A. A., Harlow F. H. (1970). The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows. — Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-4370, Los Alamos, New Mexico.

Anderson J. D. (1982). Modern Compressible Flow. — New York: McGraw-Hill.

Aziz K., Hellums J. D. (1967). Numerical Solution of the Three-dimensional Equations of Motion for Laminar Natural Convection. — Phys. Fluids, v. 10, p. 314—324.

Bailey F. R., Ballhaus W. F. (1972). Relaxation Methods for Transonic Flow about Wing-Cylinder Combinations and Lifting Swept Wings. — Proc. Third Int. Conf. Num. Methods Fluid Mech., Lecture Notes in Physics, v. 19. — New York: Springer-Verlag, p. 2—9.

Baker R. J., Launder B. E. (1974). The Turbulent Boundary Layer with Foreign Gas Injection: II — Predictions and Measurements in Severe Streamwise Pressure Gradients. — Int. J. Heat Mass Transfer, v. 17, p. 293—306.

Baldwin B. S., Lomax H. (1978). Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. — AIAA Paper 78-257, Huntsville Alabama.

Bank R. E (1977). Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems: II — The Variable Coefficient Case. — SIAM J. Numer. Anal., v. 5, p. 950—970.

Barakat H Z., Clark J. A. (1966). On the Solution of the Diffusion Equations by Numerical Methods. — Trans. ASME, Ser. C. J. Heat Transfer, v. 87-88,

p. 421—427. [Имеется перевод: Баракат, Кларк. О численном решении уравнений диффузии. — Тр Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1966, № 4, с. 97.]

Barbin A. R., Jones J. B. (1963). Turbulent Flow in the Inlet Region of a Smooth Pipe. — Trans. ASME, J. Basic Engng., v. 85, p. 29—34. [Имеется перевод: Барбин, Джоунс. Турбулентное течение в начальном участке гладкой трубы. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Техническая механика, 1963, № 1, с. 34—42.]

Beam R. M., Warming R. F. (1976). An Implicit Finite-Diference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form. — J. Comp. Phys., v. 22, p. 87—110.

Beam R. M., Warming R. F. (1978). An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. — AIAA Journal, v. 16 p. 393—401. [Имеется перевод: Бим Р. М. Уорминг Р. Ф. Неявная факторизованная разностная схема для уравнения Навье — Стокса сжимаемого газа. — Ракетная техн. и космон., 1978, т. 16, № 4, с. 145—156.]

Beckwith I. E., Callagher J. J. (1961) Local Heat Transfer and Recovery Temperatures on a Yawed Cylinder at a Mach Number of 4.15 and High Reynolds Numbers. — NASA TR R-104.

Benton E. R, Platzman G. W. (1972). A Table of Solutions of the One-Dimensional Burgers Equation. — Quart. Appl. Math., v. 30, p. 195—212.

Birch S. F. (1976). A Critical Reynolds Number Hypothesis and Its Relation to Phenomenological Turbulence Models. — Proc. 1976 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, Stanford, California, p. 152—164.

Birkhoff G., Varga R. S., Young D. (1962). Alternating Direction Implicit Methods. — Advances in Computers, v. 3. — New York: Academic, p. 189—273.

Blottner F. G. (1974). Variable Grid Scheme Applied to Turbulent Boundary Layers. — Comput. Methods Appl. Mech. Engng., v. 4, p. 179—194.

Blottner F. G. (1975a). Investigation of Some Finite-Difference Technique for Solving the Boundary Layer Equations. — Comput. Methods Appl. Mech. Engng., v. 6, p. 1—30.

Blottner F. G. (1975b). Computational Techniques for Boundary Layers. — AGARD Lecture Series No. 73 on Computational Methods for Inviscid and Viscous Two- and Three-dimensional Flowfields, p. (3-1)—(3-51).

Blottner F. G. (1977). Numerical Solution of Slender Channel Laminar Flows. — Comput. Methods Appl. Mech. Engng., v. 11, p. 319—339.

Blottner F. G., Ellis M. A. (1973). Finite-Difference Solution of the Incompressible Three-dimensional Boundary Layer Equations for Blunt Body. — Comp. Fluids, v. 1. — Oxford: Pergamon, p. 133—158.

Bluford G. S. (1978). Navier-Stokes Solution of Supersonic and Hypersonic Flow Field Around Delta Wings. — AIAA Paper 78-1136, Seattle, Washington.

Boussinesq J. (1877). Essai Sur La Théorie Des Eaux Courantes. — Mem. Présentés Acad. Sci., v. 23, Paris, p. 46.

Bozeman J. D., Dalton C. (1973). Numerical Study of Viscous Flow in a Cavity. — J. Comp. Phys, v. 12, p. 348—363.

Brackbill J. U. (1982). Coordinate System Control: Adaptive Meshes. — Numerical Grid Generation, Proceedings of a Symposium on the Numerical Generation of Curvilinear Coordinate Systems and their Use in the Numerical Solution of Partial Differential Equations (J. F. Thompson, ed.). — New York: Elsevier, p. 277—294.

Brackbill J. U., Saltzman J. (1980). An Adaptive Computation Mesh for the Solution of Singular Perturbation Problems. — Numerical Grid Generation Techniques. NASA Conference Publication 2166, p. 193—196.

Bradshaw P., Ferriss D. H., Altwell N.D. (1967). Calculation of Boundary Layer Development Using the Turbulent Energy Equation. — J. Fluid Mech., v. 28, p. 593—616.

Bradshaw P., Dean R. B., McEligot D. M. (1973). Calculation of Interacting Turbulent Shear Layers: Duct Flow. — J. Fluid Engng., v. 95, p. 214—219. [Имеется перевод: Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Теоретические основы инженерных расчетов, 1973, № 2, с. 115.]

Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. — ДАН СССР, т. 160, № 5, с. 1042—1045.

Briley W. R. (1970). A Numerical Study of Laminar Separation Bubbles using the Navier-Stokes Equations. — United Aircraft Research Laboratories, Report J110614-1, East Hartford, Connecticut.

Briley W. R. (1971). A Numerical Study of Laminar Separation Bubbles using the Navier-Stokes Equations. — J. Fluid Mech., v. 47, p. 713—736.

Briley W. R. (974). Numerical Method for Predictiong Three-dimensional Steady Viscous Flow in Ducts. — J. Comp. Phys., v. 14, p. 8—28.

Briley W. R., McDonald H. (1973). Solution of the Three-dimensional Compressible Navier-Stokes Equations by an Implicit Technique. — Proc. Fourth Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Boulder Colorado. — Lecture Notes in Physics, v. 35. — New York: Springer-Verlag, p. 105—110. [Имеется перевод: Брили У. Р., Макдональд Х. Неявный метод решения уравнений Навье — Стокса для трехмерных сжимаемых течений. — В сб.: Численное решение задач гидромеханики. — М.: Мир, 1977, с. 194—202.]

Briley W. R., McDonald H. (1975). Numerical Prediction of Incompressible Separation Bubbles. — J. Fluid Mech., v. 69, p. 631—656.

Briley W. R., McDonald H. (1979). Analysis and Computation of Viscous Subsonic Primary and Secondary Flows. — AIAA Paper 79-1453, Williamsburg, Virginia.

Briley W. R., McDonald H. (1980). On the Structure and Use of Linearized Block Inplicit Schemes. — J. Comp. Phys., v. 34, p. 54—73.

Brown S. N., Stewartson K. (1969). Laminar Separation. — Annu. Rev. Fluid Mech., v. 1. Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, p. 45—72.

Buggeln R. C., McDonald H., Kreskovsky J. P., Levy R. (1980). Computation of Three-dimensional Viscous Supersonic Flow in Inlets. — AIAA Paper 80-0194, Pasadena, California.

Buneman O. (1969). A Compact Non-Iterative Poisson Solver. — Institute for Plasma Research SUIPR Report 294, Stanford University, California.

Burgers J. M. (1948). A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. — Adv. Appl. Mech., v. 1, p. 171—199. [Имеется перевод: Бюргерс И. М. Об одной математической модели, иллюстрирующей теорию турбулентности. — В сб.: Проблемы механики. — М.: ИЛ, 1955, с. 422—445.]

Burggraf O. R. (1966). Analytical and Numerical Siadies of the Structure of Steady Separated Flows. — J. Fluid Mech., v. 24, p. 113—151.

Burggraf O. R., Werle M. J., Rizzetta D., Vatsa V. N. (1979). Effect of Reynolds Number on Laminar Separation of Supersonic Stream. — AIAA Journal, v. 17, p. 336—343. [Имеется перевод: Бургграфф О. Р., Ризетта Д., Верле М. Дж., Ватса В. Н. Влияние числа Рейнольдса на характеристики отрыва ламинарного сверхзвукового потока. — Ракетная техн. и космон., 1979, с. 21—31.]

Burstein S. Z., Mirin A. A. (1970). Third Order Difference Methods for Hyperbolic Equations. — J. Comp. Phys., v. 5, p. 547—571. [См. также: Берстейн С., Мирин А. Разностные методы для гиперболических уравнений, использующие для пространственных переменных и времени разностные

операторы расщепления третьего порядка точности. — В сб.: Численные методы в механике жидкости. — М.: Мир, 1973, с. 120—125.]

Bushnell D. M., Cary (Jr.) A. M., Holly B. B. (1975). Mixing Length in Low Reynolds Number Compressible Turbulent Boundary Layers. — AIAA Journal, v. 13, p. 1119—1121. [Имеется перевод: Бушнелл, Кэри мл., Холли. Длина пути перемешивания в сжимаемом пограничном слое при малых числах Рейнольдса. — Ракетная техн. и космон., 1975, № 8, с. 186.]

Bushnell D. M., Cary (Jr.). A. M., Harris J. E. (1976) Calculation Methods for Compressible Turbulent Boundary Layers. — von Kármán Institute for Fluid Dynamics. — Lecture Series 86 on Compressible Turbulent Boundary Layers, v. 2, Rhode Saint Genese, Belgium.

Buzbee B. L., Golub G. H., Nielson C. W. (1970). On Direct Methods for Solving Poisson's Equations. — SIAM J. Numer. Anal., v. 7, p. 627—656.

Caretto L. S., Gosman A. D., Patankar S. V., Spalding D (1972). Two Calculation Procedures for Steady, Three-dimensional Flows with Recirculation. — Proc. Third Int. Conf. Num. Methods Fluid Mech. — Lecture Notes in Physics, v. 19. — New York: Springer-Verlag, p. 60—68.

Carter J. E. (1971). Numerical Solutions of the Supersonic, Laminar Flow over a Two-dimensional Compression Corner. — Ph. D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg.

Carter J. E. (1978). A New Boundary-Layer Interaction Technique for Separated Flows. — NASA TM-78690.

Carter J. E. (1981). Viscous-Inviscid Interaction Analysis of Transonic Turbulent Separated Flow. — AIAA Paper 81-1241, Palo Alto, California.

Carter J. E., Wornom S. F. (1975). Forward Marching Procedure for Separated Boundary Layer Flows. — AIAA Journal, v. 13, p. 1101—1103. [Имеется перевод: Картер, Уорном. Схема численного интегрирования по потоку уравнений пограничного слоя с отрывом. — Ракетная техн. и космон., 1975, № 8, с. 167.]

Carter J. E., Edwards D. E., Werle M. J. (1980). A New Coordinate Transformation for Turbulent Boundary Layer Flows. — Numerical Grid Generation Techniques, NASA Conference Publication 2166, p. 197—212.

Cebeci T. (1975). Calculation of Three-dimensional Boundary Layers-II. Three-dimensional Flows in Cartesian Coordinates.— AIAA Journal, v. 13, p. 1056—1064. [Имеется перевод: Цебеци. Расчет трехмерных пограничных слоев. II. Трехмерные течения в декартовых координатах. — Ракетная техн. и космон. 1975, № 8, с. 113.]

Cebeci T. (1976). Separated Flows and Their Representation by Boundary Layer Equations. — Report ONR-CR215-234-2, Office of Naval Research, Arlington, Virginia.

Cebeci T., Chang K. C. (1978). A General Method for Calculating Momentum and Heat Transfer in Laminar and Turbulent Duct Flows. — Numer. Heat Transfer, v. 1, p. 39—68.

Cebeci T., Smith A. M. O. (1974). Analysis of Turbulent Boundary Layers. — New York: Academic.

Cebeci T., Kaups K., Mosinskis G. J., Rehn J. A. (1973). Some Problems of the Calculation of Three-dimensional Boundary-Layer Flows on General Configurations. — NASA CR-2285.

Cebeci T., Kaups K., Ramsey J. A. (1977). A General Method for Calculating Three-dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Arbitrary Wings. — NASA CR-2777.

Cebeci T., Khattab A. A., Stewartson K. (1979a). Prediction of Three-dimensional Laminar and Turbulent Boundary Layers on Bodies of Revolution at High Angles of Attack. — Proc. Second Symposium on Turbulent Shear Flows. — London: Imperial College, p. 15.8—15.13. [Имеется перевод: Себеси Т., Хаттаб А. К., Стюартсон К. Расчет трехмерных ламинарных и

турбулентных пограничных слоев на телах вращения при больших углах атаки. — В сб.: Турбулентные сдвиговые течения 2. — М.: Машиностроение, 1983, с. 196—207.]

Cebeci T., Carr L. W., Bradshaw P. (1979b). Preduction of Unsteady Turbulent Boundary Layers with Flow Reversal. — Proc. Second Symposium on Turbulent Shear Flows, Imperial College, London, p. 14.23—14.28.

Chakravarthy S. R. (1979). The Split-Coefficient Matrix Method for Hyberbolic Systems of Gasdynamic Equations. — Ph. D. dissertation, Department of Aerospace Engineering, Iowa State University, Ames.

Chakravarthy S. R., Anderson D. A., Salas M. D. (1980). The Split-Coefficient Matrix Method for Hyperbolic Systems of Gasdynamic Equations. — AIAA Paper 80-0268, Pasadena, California.

Chambers T. L., Wilcox D. C. (1976). A Critical Examination of Two-Equation Turbulence Closure Models. — AIAA Paper 76-352, San Diego, California.

Chan Y. Y. (1972). Compressible Turbulent Boundary Layer Computations Based on an Extended Mixing Length Approach. — Canadian Aeronautics and Spase Institute Transactions, v. 5, p. 21—27.

Chapman A. J. (1974). Heat Transfer, 3d ed. — New York: Macmillan.

Chapman D. R. (1975). Introductory Remarks. — NASA SP-347, p. 4—7.

Chapman D. R. (1979). Computational Aerodynamics Development and Outlook. — AIAA Journal, v. 17, p. 1293—1313. [Имеется перевод: Чепмен Д. Р. Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития. Драйдеровская лекция (обзор). — Ракетная техн. и космон., 1980, т. 18, № 2, с. 3—32.]

Chaussee D. S., Pulliam T. H. (1981). Two-dimensional Inlet Simulation Using a Diagonal Implicit Algorithm. — AIAA Journal, v. 19, p. 153—159. [Имеется перевод: Шоссе Д. С., Пуллиам Т. Х. Численное моделирование работы плоского воздухозаборника с помощью диагональной неявной схемы. — Ракетная техн. и космон , 1981, т. 19, № 3, с. 33—41.]

Cheng H. K. (1963). The Blunt-Body Problem in Hypersonic Flow at Low Reynolds Number. — Cornell Aeronautical Laboratory, AF-1285-A-10, Buffalo, New York.

Cheng H. K., Chen S. Y., Mobley R., Huber C. R. (1970). The Viscous Hypersonic Slender-Body Problem: A Numerical Approach Bassed on a System of Composite Equations. — The Rand Corporation, RM-6193-PR, Santa Monica, California.

Chilukuri R., Pletcher R. H. (1980). Numerical Solutions to the Partially Parabolized Navier-Stokes Equations for Developing Flow in a Channel. — Numer. Heat Transfer, v. 3, p. 169—188.

Chorin A. J. (1967). A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. — J. Comp. Phys., v. 2, p. 12—26.

Chorin A. J. (1968). Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. — Math Comput., v. 22, p. 745—762.

Chow L. C., Tien C. L. (1978). An Examination of Four Differencing Schemes for Some Elliptic — Type Convection Equations. — Numer. Heat Transfer, v. 1, p. 87—100.

Chung T. J. (1978). Finite Element Analysis in Fluid Dynamics. — New York: McGraw-Hill.

Churchill R. V. (1941). Fourier Series and Boundary Value Problems. — New York: McGraw-Hill.

Churchill R. V. (1948). Introduction to Complex Variables. — New York: McGraw-Hill.

Churchill R. V. (1960). Introduction to Complex Variables and Applications, 2d ed. — New York: McGraw-Hill.

Churchill S. W. (1974). The Interpretation and Use of Rate Data: The Rate Concept. — Washington, D. C.: Hemisphere.

Cole J. D., Messiter A. F. (1957). Explansion Procedures and Similarity Laws for Transonic Flow. — Z. Angew. Math. Phys., v. 8, p. 1—25.

Coles D. E. (1953). Measurements in the Boundary Layer on a Smooth Flat Plate in Supersonic Flow, III. Measurements in a Flat Plate Boundary Layer at the Jet Propulsion Laboratory. — Jet Propulsion Laboratory Report 20-71, California Institute of Technology, Pasadena, California.

Courant R., Friedrichs K. O. (1948). Supersonic Flow and Shock Waves. — New York: Interscience Publishers. [Имеется перевод: Курант Р, Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. — М.: ИЛ, 1950.]

Courant R., Friedrichs K. O., Lewy H. (1928). Über die Partiellen Differenzengleichungen der Matematishen Physik. — Math. Annalen, v. 100, p. 32—74; см. также: On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. — IBM J. Res. Dev., 1967, v. 11, p. 215—234.

Crank J., Nicolson P. (1947). A Practical Method for Numerical Evalution of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat-Conduction Type. — Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 43, p. 50—67.

Crawford M. E., Kays W. M. (1975). STAN5 — A Program for Numerical Computation of Two-dimensional Internal/External Boundary Layer Flows. — Report No. HMT-23, Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, California.

Crowley W. P. (1967). Second-Order Numerical Advection. — J. Comp. Phys., v. 1, p. 471—484.

Daly B. J., Harlow F. H. (1970). Transport Equations in Turbulence. — Phys. Fluids, v. 13, p. 2634—2649. [См. также: Дал Б., Харлоя Ф. Учет турбулентных эффектов при численном решении газодинамических задач. — В сб.: Численные методы механики жидкости. — М.: Мир, 1973, с. 277—287.]

Dancey C L., Pletcher R. H. (1974). A Boundary Layer Finite Difference Method for Calculating Through the Separation Point an into the Region of Recirculation in Incompressible Laminar Flow. — Engineering Research Institute Technical Report 74103/HTL-2, Iowa State University, Ames.

Davis R. T. (1963). Laminar Compressible Flow Past Axisymmetric Blunt Bodies (Results of a Second Order Theory). — Ph. D. dissertation, Stanford University, California.

Davis R. T. (1970). Numerical Solution of the Hypersonic Viscous Shock-Layer Equations. — AIAA Journal, v. 8, p. 843—851. [Имеется перевод: Дэвис Р. Численное решение уравнений гиперзвукового вязкого слоя. — Ракетная техн. и космон., 1970, т. 8, № 5, с. 3—13.]

Davis R. T. (1979). Numerical Methods for Coordinate Generation Based on Schwarz-Christoffel Transformation. — AIAA Paper 79-1463, Williamsburg, Virginia.

Davis R. T., Flügge-Lotz I. (1964). Second-Order Boundary-Layer Effects in Hypersonic Flow Past Axisymmetric Blunt Bodies. — J. Fluid Mech., v. 20, p. 593—623.

Davis R. T., Rubin S. G. (1980). Non-Navier-Stokes Viscous Flow Computations. — Comput. Fluids, v. 8, p. 101—131.

Daywitt J. E., Anderson D. A. (1974). Analysis of Time-Dependent Finite-Difference Technique for Shock Interaction and Blunt-Body Flows.— Engineering Research Institute Technical Report 74074, Iowa State University, Ames.

Deardorff J. W. (1970). A Numerical Study of Three-dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers. — J. Fluid Mech., v. 41, p. 453—480

De Neef T., Moretti G. (1980). Shock Fitting for Everybody. — Comput. Fluids, v. 8, p. 327—334.

Der (Jr.), Raetz G. S. (1962). Solution of General Three-dimensional Laminar

Boundary Layer Problems by an Exact Numerical Method, Inst. Aerospace Sci., Paper 62-70, New York.
Désidéri J.-A., Tannehill J. C. (1977a). Over-Relaxation Applied to the MacCormack Finite-Difference Scheme. — J. Comp. Phys., v. 23, p. 313—326.
Désidéri J.-A., Tannehill J. C. (1977b). Time-Accuracy of the Over-Relaxed MacCormack Finite-Difference Scheme. — ERI Report 77251, Iowa State University, Ames.
Désidéri J.-A., Steger J. L., Tannehill J. C. (1978). On Improving the Iterative Convergence Properties of an Implicit Approximate-Factorization Finite Difference Algorithm. — NASA Technical Memoriandum 78495.
Dodge P. R. (1977). Numerical Method for 2D and 3D Viscous Flows. — AIAA Journal, v. 15, p. 961—965. [Имеется перевод: Додж. Численный метод расчета 2-х и 3-х мерных течений вязкой жидкости. — Ракетная техн. и космон., 1977, т. 15, № 7, с. 82.]
Donaldson C. duP. (1972). Calculation of Turbulent Shear Flows for Atmospheric and Vortex Motions. — AIAA Journal, v. 10, p. 4—12. [Имеется перевод: Дональдсон. Расчет турбулентных течений в атмосфере и изолированном вихре. — Ракетная техн. и космон., 1972, № 1, с. 4.]
Donaldson C. duP., Rosenbaum H. (1968). Calculation of Turbulent Shear Flows Through Closure of the Reynolds Equations by Invariant Modeling.— Aero. Res. Assoc. of Princeton Report 127.
Dorrance W. H. (1962). Viscous Hypersonic Flow. — New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод: Дорренс У. Гиперзвуковые течения вязкого газа. — М.: Мир, 1966.]
Douglas (Jr.) J. (1955). On the Numerical Integration of $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = \partial u/\partial t$ by Implicit Methods. — J. Soc. Ind. Appl. Math., v. 3, p. 42—65.
Douglas J., Gunn J. E. (1964). A General Formulation of Alternating Direction Methods — Part I. Parabolic and Hyperbolic Problems. — Numerische Math., v. 6, p. 428—453.
Douglas J., Rachford H. H. (1956). On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables. — Trans. Amer. Math. Soc., v. 82, p. 421—439.
DuFort E. C., Frankel S. P. (1953). Stability Conditions in the Numerical Treatment of Parabolic Differential Equations. — Mathematical Tables and Other Aids to Computation, v. 7, p. 135—152.
Dwyer H. A. (1971). Hypersonic Boundary Layer Studies on a Spinning Sharp Cone at Angle of Attack. — AIAA Paper 71-57, New York.
Dwyer H. A., Sanders B. R. (1975). A Physically Optimum Difference Scheme for Three-dimensional Boundary Layers. — Proc. Fourth Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Lecture Notes in Physics, v. 35. — New York: Springer-Verlag, p. 144—150. [Имеется перевод: Дуайер Х. А., Сандерс Б. Р. Физически оптимальная разностная схема для трехмерных пограничных слоев. — В сб.: Численное решение задач гидромеханики. — М.: Мир, 1977, с. 107—116.]
Dwyer H. A., Kee R. J., Sanders B. R. (1979). An Adaptive Grid Method for Problems in Fluid Mechanics and Heat Transfer. — AIAA Paper 79-1464 Williamsburg, Virginia. [Имеется перевод: Дуайер Х. А., Ки Р. Дж., Сандерс Б. Р. Метод построения адаптивных сеток для задач гидродинамики и теплопроводности — Ракетная техн. и космон., 1980, т. 18, № 10, с. 70—80.]
Dwyer H. A., Raiszadeh F., Otey G. (1980). A Study of Reactive Diffusion Problems with Stiff Integrators and Adaptive Grids. — Proc. Seventh Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Lecture Notes in Physics, v. 141. — New York: Springer-Verlag, p. 170—175.
Eiseman P. (1979). A Multi-Surface Method Coordinate Generation. — J. Comp. Phys., v. 33, p. 118—150.

Eiseman P. K., Smith R. E. (1980). Mesh Generation Using Algebraic Techniques. — Numerical Grid Generation Techniques, NASA Conference Publication 2166, p. 73—120.
Emery A. F., Gessner F. B. (1976). The Numerical Prediction of the Turbulent Flow and Heat Transfer in the Entrance Region of a Parallel Plate Duct. — J. Heat Transfer, v. 98, p. 594—600. [Имеется перевод: Эмери, Гесснер. Численный расчет турбулентного течения и характеристик теплоотдачи на начальном участке плоскопараллельного канала. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1976, № 2, с. 146.]
Evans M. E., Harlow F. H. (1957). The Particle-in-Cell Method for Hydrodynamic Calculations. — Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-2139, Los Alamos, New Mexico.
Favre A. (1965). Équations des Gaz Turbulents Compressibles: 1. Formes Générales. — J. Mécanique, v. 4, p. 361—390.
Fike C. T. (1970). PL/1 for Scientific Programmers. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
Forsythe G. E., Wasow W. (1960). Finite Difference Methods for Partial Differential Equations.— New York: Wiley. [Имеется перевод: Вазов В. Р., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: ИЛ, 1963.]
Frankel S. P. (1950). Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations. — Mathematical Tables and Other Aids to Computation. v. 4, p. 65—75.
Friedrich C. M., Forstall (Jr.) W. (1953). A Numerica Method for Computing the Diffusion Rate of Coaxial Jets. — Proceedings of the Third Midwestern Conference on Fluid Mechanics, Univ. of Minnesota Inst. of Technol., Minneapolis, Minnesota, p. 635—649.
Fröberg C. (1969). Introduction to Numerical Analysis, 2d. ed. — Reading, Massachussetts: Addison-Wesley, p. 21—28.
Fromm J. D. (1968). A Method for Reducing Dispersion in Convective Difference Schemes. — J. Comp. Phys., v. 3, p. 176—189.
Gabutti B. (1982). On Two Upwind Finite-Difference Schemes for Hyperbolic Equations in Nonconservative Form. — Comput. Fluids (будет опубликовано).
Garabedian P. R. (1964). Partial Differential Equations. — New York: Wiley.
Gardner W. D. (1982). The Independent Inventor.— Datamation, v. 28, p. 12—22.
Gary J. (1962). Numerical Computation of Hydrodynamic Flows Which Contain a Shock. — Courant Institute of Mathematical Sciences Report NYO 9603, New York University.
Gary J. (1969). The Numerical Solution of Partial Differential Equations. — National Center for Atmospheric Research, NCAR Manuscript 69-54, Boulder, Colorado.
Gault D. E. (1955). An Experimental Investigation of Regions of Separated Laminar Flow. — NACA TN-3505.
Ghia K. N., Sokhey J. S. (1977a). Laminar Incompressible Viscous Flow in Curved Ducts of Regular Cross-Sections. — J. Fluids Engng., v. 99, p. 640—648. [Имеется перевод: Гиа, Сокхи. Ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в криволинейных каналах с геометрически правильной формой поперечного сечения. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Теоретические основы инженерных расчетов, 1975, № 4, с. 144—152.]
Ghia K. N., Hankey (Jr.) W. L., Hodge J. K. (1977b). Study of Incompressible Navier-Stokes Equations in Primitive Variables Using Implicit Numerical Technique. — AIAA Paper 77-648. Albuquerque. New-Mexico.
Ghia K. N., Hankey (Jr.) W. L., Hodge J. K. (1979). Use of Primitive Variables in the Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations. — AIAA Journal, v. 17, p. 298—301. [Имеется перевод: Гхиа К. Н., Хэнки В. Л. мл.,

Ходж Дж. К. Решение уравнений Навье — Стокса в обычных переменных. — Ракетная техн. и космон., 1979, № 3, с. 89—92.]

Ghia U., Ghia K. N., Struderus C. J. (1977). Three-dimensional Laminar Incompressible Flow in Straight Polar Ducts. — Comput. Fluids, v. 5, p. 205—218.

Ghia U., Ghia K. N., Rubin S. G., Khosla P. K. (1981). Study of Incompressible Flow Separation Using Primitive Variables. — Comput. Fluids, v. 9, p. 123—142.

Gnoffo P. A. (1980). Complete Supersonic Flowfields Over Blunt Bodies in a Generalized Orthogonal Coordinate System. — NASA TM 81784.

Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики. — Матем. сб., 1959, т. 47, вып. 3, с. 271—306.

Goldstein S. (1948). On Laminar Boundary Layer Flow near a Position of Separation. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., v. 1, p. 43—69.

Gordon P. (1969). The Diagonal Form of Quasi-Linear Hyperbolic Systems as a Basis for Difference Equations. — General Electric Company Final Report, Naval Ordnance Laboratory Contact No. N60921-7164, p. II.D-1, II.D-22.

Gordon W., Hall C. (1973). Construction of Curvilinear Coordinate Systems and Application to Mesh Generation. — Internat. J. Numerical Methods in Engng., v. 7, p. 461—477.

Gosman A. D., Spalding D. B. (1971). The Prediction of Confined Three-dimensional Boundary Layers. — Salford Symposium on Internal Flows, Paper 19, Inst. Mech. Engrs., London.

Greenspan D. (1961). Introduction to Partial Differential Equations. — New York: McGraw-Hill.

Grossman B. (1979). Numerical Procedure for the Computation of Irrotational Conical Flows. — AIAA Journal, v. 17, p. 828—837. [Имеется перевод: Гроссман Б. Численный метод расчета потенциальных конических течений. — Ракетная техн. и космон., 1979, № 3, с. 39—49.]

Grossman B., Siclari M. J. (1980). The Nonlinear Supersonic Potentional Flow over Delta Wings. — AIAA Paper 80-0269, Pasadena, California.

Hadamard J. (1952). Lectures on Cauchy's Problems in Linear Partial Differential Equations. — New York: Dover.

Hafez M., South J., Murman E. (1979). Artificial Compressibility Methods for Numerical Solutions of Transonic Full Potential Equations. — AIAA Journal, v. 17, p. 838—844. [Имеется перевод: Хафез М., Саут Дж., Мэрмен Э. Применение методов искусственной сжимаемости для численного решения полного уравнения потенциала в трансзвуковом диапазоне скоростей. — Ракетная техн. и космон., 1979, т. 17, № 8, с. 50—58.]

Hall M. G. (1991). Computational Fluid Dynamics — A Revolutionery Force in Aerodynamics. — AIAA Paper 81-1014, Palo-Alto, Califernia.

Hanjalić K., Launder V. E. (1972). A Reynolds Stress Model of Turbulence and Ist Application to Asymmetric Shear Flows. — J. Fluid Mech., v. 52, p. 609—638.

Hansen A. G. (1964). Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Harlow F. H., Fromm J. E. (1965). Computer Experiments in Fluid Dynamics. — Sci. American, v. 212, p. 104—110.

Harlow F. H., Nakayama P. I. (1968). Transport of Turbulence Energy Decay Rate. — Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3854, Los Alamos, New Mexico.

Harlow F. H., Welch J. E. (1965). Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. — Phys. Fluids, v. 8, p. 2182—2189.

Harris J. E. (1971). Numerical Solution of the Equations for Compressible Laminar, Transitional, and Turbulent Boundary Layers and Comparisons with Experimental Data. — NASA TR-R 368.
Harten A. (1978). The Artificial Compression Method for Computation of Shocks and Contact Discontinuities: III. Self-Adjusting Hybrid Schemes. — Math. Comput. v. 32, p. 363—389.
Hartnett P., Eckert E. R. G. (1957). Mass-Transfer Cooling in a Laminar Boundary Layer with Constant Fluid Properties. — Trans. ASME, v. 79, p. 247—234.
Hayes W. D. (1966). La Seconde Approximation Pour les Écoulements Transsoniques Non Visqueux. — J. Mécanique, v. 5, p. 163—206.
Hayes W. D., Probstein R. F. (1966). Hypersonic Flow Theory, 2d ed. — New York: Academic. [Имеется перевод 1-го изд.: Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. — М.: ИЛ, 1962.]
Healzer J. M., Moffat R. J., Kays W. M. (1974). The Turbulent Boundary Layer on a Rough Porous Plate: Experimental Heat Transfer with Uniform Blowing, Thermosciences Division, Report No. HMT-18. Department of Mechanical Engineering, Stanford University, California.
Helliwell W. S. Dickinson R. P., Lubard S. C. (1980). Viscous Flow over Arbitrary Geometries at High Angle of Attack. — AIAA Paper 80-0064, Pasadena, California. [Имеется перевод: Хелливел В. С., Дикинсон Р. П., Лубард С. К. Обтекание тел произвольной формы вязким потоком под большими углами атаки. — Ракетная техн. и космон., 1981, т. 19, № 3, с. 81—89.]
Hellwig G. (1977). Partial Differential Equations: An Introduction. — Stuttgart: B. G. Teubner.
Herring H. J., Mellor G. L. (1968). A Method of Calculating Compressible Turbulent Boundary Layers. — NASA CR-1144.
Hess J. L., Smith A. M. O. (1967). Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies. — Progress in Aeronaut. Sci., v. 8, New York: Pergamon, p. 1—138.
Hildebrand F. B. (1956). Introduction to Numerical Analysis. — New York: McGraw-Hill.
Hindman R. G. (1981). Geometrically Induced Errors and Their Relationship to the Form of the Governing Equations and the Treatment of Generalized Mappings. — AIAA Paper 81-1008, Palo Alto, California.
Hindman R. G. Spencer J. (1983). A new Approach to Truly Adaptive Grid Generation. — AIAA Paper 83-0450, Reno, Nevada.
Hindman R. G., Kutler P., Anderson D. A. (1979). A Two-dimensional Unsteady Euler Equation Solver for Flow Regions with Arbitrary Boundaries. — AIAA Paper 79-1465, Williamsburg, Virginia.
Hindman R. G., Kutler P., Anderson D. A. (1981). Two-dimensional Unsteady Equation Solver for Arbitrarily Shaped Flow Regions. — AIAA Journal, v. 19, p. 424—431. [Имеется перевод: Хиндман Р. Дж., Кутлер П., Андерсон Д. Метод решения нестационарных двумерных уравнений Эйлера для областей течения произвольной формы. — Ракетная техн. и космон., 1981, № 6, с. 10—19]
Hinze J. O. (1975). Turbulence, 2d ed. — New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод 1-го изд.: Хинце И. О. Турбулентность. — М.: Физматгиз, 1963.]
Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B. (1954). Molecular Theory of Gases and Liquids. — New York: Wiley. [Имеется перевод: Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: ИЛ, 1961.]
Hirsh R. S., Rudy (1974). The Role of Diagonal Dominance and Cell Reynolds Number in Implicit Methods for Fluid Mechanics Problems. — J. Comp Phys, v. 16, p. 304—310.

Hirt C. W. (1968). Heuristic Stability Theory for Finite-Difference Equations. — J. Comp. Phys., v. 2, p. 339—355.

Hockney R. W. (1965). A Fast Direct Solution of Poisson's Equation using Fourier Analysis. — J. Assoc. Comput. Mach., v. 12, p. 95—113.

Hockney R. W. (1970). The Potential Calculation and Some Applications. — Methods in Computational Physics, v. 9. — New York: Academic, p. 135—211.

Holst T. L. (1979). Implicit Algorithm for the Conservative Transonic Full-Potential Equation Using an Arbitrary Mesh.— AIAA Journal, v. 17, p. 1038—1045. [Имеется перевод: Холст Т. Неявная консервативная схема для расчета трансзвуковых течений на произвольной сетке. — Ракетная техн. и космон., 1979, т. 17, № 10, с. 19—29.]

Holst T. L. (1980). Fast Conservative Algorithm for Solving the Transonic Full-Potential Equation. — AIAA Journal, v. 18, p. 1431—1439. [Имеется перевод: Холст Т. Ускоренный численный метод решения уравнения для полного потенциала скорости трансзвукового потока на основе консервативной схемы. — Ракетная техн. и космон., 1980, т. 18, с. 29—40.]

Holst T. L., Ballhaus W. F. (1979). Fast Conservative Schemes for the Full-Potential Equation Applied to Transonic Flows. — AIAA Journal, v. 17, p. 145—152. [Имеется перевод: Холст Т., Боллхауз У. Консервативные методы быстрого расчета полного уравнения потенциала для скорости в применении к трансзвуковым течениям. — Ракетная техн. и космон., 1979, т. 17, № 2, с. 23—33.]

Hong S. W. (1974). Laminar Flow Heat Transfer in Ordinary and Augmented Tubes. — Ph. D. dissertation, Iowa State University, Ames.

Hornbeck R. W. (1963). Laminar Flow in the Entrance Region of a Pipe. — Appl. Sci. Res., Sec. A, v. 13, p. 224—232.

Hornbeck R. W. (1973). Numerical Marching Techniques for Fluid Flows with Heat Transfer. — NASA SP-297.

Horstman C. C. (1977). Turbulence Model for Non-Equilibrium Advence Pressure Gradient Flows. — AIAA Journal, v. 15, p. 131—132. [Имеется перевод: Хорстман. Модель турбулентности для расчета неравномерных течений при положительном градиенте давления. — Ракетная техн. и космон., 1977, № 2, с. 5.]

Hosny W. M., Davis R. T., Werle M. J. (1978). Improvements to the Solution of the Viscous Shock Layer Equations. — Department of Aerospace Engineering and Applied Mechanics. — Report AFL 78-11-45, University of Cincinnati, Ohio.

Howarth L. (1938). On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 164, p. 547—579.

Howarth L. (1951). The Boundary Layer Three-dimensional Flow. Part I: Derivation of the Equations for Flow along a General Curved Surface. — Philos. Mag., v. 42, p. 239—243.

Hwang S. S., Pletcher R. H. (1978). Prediction of Turbulent Jets and Plumes in Flowing Ambients. — Engineering Research Institute Technical Report 79003/HTL-15, Iowa State University, Ames.

James M. L., Smith G. M., Wolford J. C. (1967). Applied Numerical Methods for Digital Computation with FORTRAN. — International Textbook Company, Scranton, Pennsylvania.

Jameson A. (1974). Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings Including Flows at Mach 1. — Comm. Pure and Appl. Math., v. 27, p. 283—309.

Jameson A. (1975). Transonic Potential Flow Calculations using Conservation Form. — Proc. AIAA 2nd Computation Fluid Dynamics Conference, Hartford, Connecticut, p. 148—161.

Jeffrey A., Taniuti T. (1964). Nonlinear Wave Propagation with Applications to Physics and Magneto-Hydrodynamics. — New York: Academic.
Jensen V. G. (1959). Viscous Flow Round a Sphere at Low Reynolds Number ($\leqslant 40$). — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 249, p. 346—366.
Jobe C. E. (1974). The Numerical Solution of the Asymptotic Equations of Trailing Edge Flow. — Technical Report AFFDL-TR-74-46, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Dayton, Ohio.
Jobe C. E., Burgraff O. R. (1974). The Numerical Solution of the Asymptotic Equations of Trailing Edge Flow. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 340, p. 91—111.
Johnson F., Rubbert P. (1975). Advanced Panel-Type Influence Coefficient Methods Applied to Subsonic Flows. — AIAA Paper 75-50, Pasadena, California.
Johnson G. M. (1980). An Alternative Approach to the Numerical Simulation of Steady Inviscid Flow. — Proc. Seventh Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Lecture Notes in Physics, v. 141. — New York: Springer-Verlag, p. 236—241.
Jones W. R., Launder B. E. (1972). The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence. — Int. J. Heat Mass Transfer, v. 15, p. 301—314.
Karamcheti K. (1966). Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics. — New York: Wiley.
Kays W. M. (1972). Heat Transfer to the Transpired Turbulent Boundary Layer. — Int. J. Heat Mass Transfer, v. 15, p. 1023—1044.
Kays W. M., Grawford M. E. (1980). Convective Heat and Mass Transfer. 2d ed. — New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод 1-го изд.: Конвективный тепло- и массообмен. — М.: Энергия, 1972.]
Kays W. M., Moffat R. J. (1975). The Rehavior of Transpired Turbulent Boundary Layers. — Studies in Convection: Theory, Measurement, and Applications, v. 1. — New York: Academic, p. 223—319.
Keller H. B. (1970). A New Difference Scheme for Parabolic Problems. — Numerical Solutions of Partial Differential Equations, v. 2 (J. Bramble, ed.), New York: Academic.
Keller H. B., Cebeci T. (1972). Accurate Numerical Methods for Boundary-Layer Flows. II: Two-dimensional Turbulent Flows. — AIAA Journal, v. 10, p. 1193—1199. [Имеется перевод: Келлер, Себеси. Точный численный расчет течения в пограничном слое. II. Плоское турбулентное течение. — Ракетная техн. и космон., 1972, № 9, с. 73.]
Kentzer C. P. (1970). Discretization of Boundary Conditions on Moving Discontinuities. — Proc. Second Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Lecture Notes in Physics, vol. 8. — New York: Springer-Verlag, p. 108—113. [Имеется перевод: Кенцер Ч. Дискретизация граничных условий на движущихся разрывах. В сб.: Численные методы в механике жидкости. — М.: Мир, 1973, с. 62—72.]
Kitchens (Jr.) C. W. Sedney R. and Gerber N. (1975). The Role of the Zone of Dependence Concept in Tree-dimensional Boundary-Layer Calculations. — Proc. AIAA 2nd Computational Fluid Dynamics Conference, Hartford, Connecticut, p. 102—112.
Klineberg J. M., Steger J. L. (1974). On Laminar Boundary Layer Separation. — AIAA Paper 74-94, Washington, D. C.
Klinksiek W. F., Pierce F. J. (1973). A Finite-Difference Solution of the Two- and Three-dimensional Incompressible Turbulent Boundary Layer Equations. — J. Fluids Engng., v. 95, p. 445—458.
Klopfer G. H., McRae D. S. (1981a). The Nonlinear Modified Equation Approach to Analyzing Finite-Difference Schemes. — AIAA Paper 81-1029, Palo Alto, California.
Klopfer G. H., McRae D. S. (1981b). Nonlinear Analysis of the Truncation Er-

rors in Finite-Difference Schemes for the Full System of Euler Equations.— AIAA Paper 81-0193, St. Louis, Missouri.
Klunker E. (1971). Contributions to Methods for Calculating the Flow about Thin Lifting Wings at Transenic Speeds — Analytical Expression for the Far Field. — NASA TN D-6530.
Knechtel E. D. (1959). Experimental Investigation at Transonic Speeds of Pressure Distributions over Wedge and Circular Arc Sections and Evaluation of Perforated-Wall Interference. — NASA TN D-15.
Korkegi R. H. (1956). Transition Studies and Skin-Friction Measurements on an Insulated Flat Plate at a Mach Number of 5,8. — J. Aeronaut. Sci., v. 25, p. 97—192.
Kowalski E. J. (1980). Boundary-Fitted Coordinate Systems for Arbitrary Computational Regions. — Numerical Crid Generation Techniques, NASA Conference Publication 2166, p. 331—353.
Krause E. (1969). Comment on «Solution of a Three-dimensional Boundary-Layer Flow with Separation». — AIAA Journal, v. 7, p. 575—576. [Имеется перевод: Краузе. Замечания к статье «Решение задачи о трехмерном пограничном слое с отрывом». — Ракетная техн. и космон., 1969, № 3, с. 222.]
Kreskovsky J. P., Shamroth S. J., McDonald H. (1974). Parametric Study of Relaminarization of Turbulent Boundary Layers on Nozzle Walls. — NASA CR-2370.
Kutler P., Lomax H. (1971). The Computation of Supersonic Flow Fields about Wing-Body Combinations by «Shock-Capturing» Finite Difference Techniques. — Proc. Second Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Lecture Notes in Physics, v. 8. — Berlin: Springer-Verlag, p. 24—29. [Имеется перевод: Кутлер П., Ломекс Г. Расчет сверхзвуковых течений около комбинации крыло — тело с помощью конечно-разностного метода «улавливания скачка». — В сб.: Численные методы механики жидкости. — М.: Мир, 1973, с. 126—134.]
Kutler P., Warming R. F., Lomax H. (1973). Computation of Space Shuttle Flowfields using Noncentered Finite-Difference Schemes. — AIAA Journal, v. 11, p. 196—204. [Имеется перевод: Кутлер, Уорминг, Ломакс. Расчет обтекания транспортного космического корабля с использованием нецентральных разностных схем. — Ракетная техн. и космон., 1973, № 2, с. 86.]
Kwon O. K., Pletcher R. H. (1979). Prediction of Incompressible Separated Boundary Layers Including Viscous-Inviscid Interaction. — J. Fluids Engng., v. 101, p. 466—472. [Имеется перевод: Квон, Плетчер. Расчет несжимаемых пограничных оторвавшихся слоев с учетом вязко-невязкого взаимодействия. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. D. Теоретические основы инженерных расчетов, 1979, № 4, с. 171.]
Kwon O. K., Pletcher R. H. (1981). Prediction of the Incompressible Flow over a Rearward-Facing Step — Engineering Research Institute Technical Report 82019/HTL-26, Iowa State University, Ames.
Laasonen P. (1949). Über eine Methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung. — Acta Math., v. 81, p. 309—317.
Larkin B. K. (1964). Some Stable Explicit Difference Approximations to the Diffusion Equation. — Math. Comput., v. 18, p. 196—202.
Launder B. E. (1979). Stress-Transport Closures: Into the Third Generation. — Proc. First Symposium on Turbulent Shear Flows. — New York: Springer-Verlag. [Имеется перевод: Лаундер Б. Е. Модели замыкания для напряжений — третье поколение. — В сб.: Турбулентные сдвиговые течения 1. — М.: Машиностроение, 1982, с. 270—279.]
Launder B. E., Spalding D. B. (1972). Mathematical Models of Turbulence. — New York: Academic.
Launder B. E., Spalding D. B. (1974). The Numerical Computation of Turbulent Flows. — Comput. Methods Appl. Mech. Engng., v. 3, p. 269—289.

Lax P. D. (1954). Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computatien. — Comms. Pure and Appl. Math., v. 7, p. 159—193.
Lax P. D., Wendroff B. (1960). Systems of Conservation Laws. — Comms. Pure and Appl. Math., v. 13, p. 217—237.
Leonard B. P. (1979a) A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quandratic Upstream Interpolation. — Comput. Methods Appl. Mech. Engng., v. 19, p. 59—98.
Leonard B. P. (1979b). A Survey of Finite Differences of Opinion on Numerical Muddling of the Incomprehensible Defective Confusion Equation. — Finite Element Methods for Convective Dominated Flows, AMD, v. 34, The American Society of Mechanical Engineers.
Levine R. D. (182). Supercomputers. — Sci. American, v. 246, p. 118—135. [Имеется перевод: Левайн Р. Д. Суперкомпьютеры. — В сб.: Современный компьютер. — М.: Мир, 1986, с. 9—29.]
LeBail R. C. (1972). Use of Fast Fourier Transforms for Solving Partial Differential Equations in Physics. — J. Comp. Phys., v. 9, p. 440—465.
Li C. P. (1973). Numerical Solution of Viscous Reacting Blunt Body Flows of a Multicomponent Mixture. — AIAA Paper 73-202, Washington, D. C.
Li C. P. (1977). A Numerical Study Separated Flows Induced by Shock-Wave/Boundary-Layer Interaction. — AIAA Paper 77-168, Los Angeles, California.
Li C. P. (1981). Application of an Implicit Technique to the Shock-Layer Flow Around General Bodies. — AIAA Paper 81-0191, St. Louis, Missuri; см. также AIAA Journal, 1982, v. 20, p. 175—183. [Имеется перевод: Ли К. П. Расчет неявным методом ударного слоя около произвольного тела. — Ракетная техн. и космон., 1982, т. 20, № 12, с. 18—29.]
Liebmann L. (1918). Die Angenäherte Ermittelung Harmonischer Funktionen und Konformer Abbildungen. — Sitzungsber., Math. Phys. Kl. Bayer. Akad. Wiss., v. 3, p. 385.
Liepmann H. W., Roshko A (1957). Elements of Gasdynamics. — New York: Wiley. [Имеется перевод: Липман Г. В., Рошко А. Элементы газовой динамики. — М.: ИЛ, 1962.]
Lighthill M. J. (1953). On Boundary Layers and Upstream Infuence. II. Supersonic Flows without Separation. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 217, p. 478—507.
Lighthill M. J. (1958). On Displacement Thickness. — J. Fluid Mech., v. 4, p. 383—392.
Lin T. C., Rubin S. G. (1973a). Viscous Flow over Spinning Cones at Angle of Attack. — AIAA Journal, v. 12, p. 975—985. [Имеется перевод: Лин, Рубин. Обтекание вращающихся конусов под углом атаки. — Ракетная техн. и космон., 1974, т 12, № 7, с. 117—128.]
Lin T. C., Rubin S. G. (1973b). Viscous Flow over a Cone at Moderate Incidence: I. Hypersonic Tip Region. — Comput. Fluids, v. 1, p. 37—57.
Lin T. C., Rubin S. G. (1979). A Numerical Model for Supersonic Viscous Flow over a Slender Reentery Vehicle. — AIAA Paper 79-0205, New Orleans, Louisiana.
Lin T. C., Rubin S. G., Widhopf G. F. (1981). A Two-Layer Model for Coupled Three Dimensional Viscous and Inviscid Flow Calculations. — AIAA Paper 81-0118, St. Louis, Missouri.
Lindemuth I., Killeen J. (1973). Alternating Direction Implicit Techniques for Two Dimensional Magnetohydrodynamics Calculations. — J. Comp. Phys., v. 13, p. 181—208.
Lock R. C. (1970). Test Cases for Numerical Methods in Two-dimensional Transonic Flows. — AGARD Report 575.
Lubard S. C., Helliwell W. S. (1973). Calculation of the Flow on a Cone at High Angle of Attack. — R & D Associates Technical Report, RDA-TR-150, Santa Monica, California.

Lubard S. C., Helliwell W. S. (1974). Calculation of the Flow on a Cone at High Angle of Attack. — AIAA Journal, v. 12, p. 965—974. [Имеется перевод: Лубард, Хелливел. Расчет обтекания конуса под большим углом атаки. — Ракетная техн. и космон., 1974, т. 12, № 7, с. 105—116.]

Ludford (1951). The Behavior at Infinity of the Potential Function of a Two-dimensional Subsonic Comppressible Fow. — J. Math. Phys., v. 30, p. 131—159.

Lugt H. J., Ohring S. (1974). Efficiency of Numerical Methods in Solving the Time-Dependent, Two-dimensional Naview-Stokes Equations. — Numerical Methods in Fluid Dynamics, Peutech, London.

Macagno E. O. (1965). Some New Aspects of Similarity of Hydrautics. — La Houille Blanche, v. 20, p. 751—759.

MacCormack R. W. (1969). The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering. — AIAA Paper 69—354, Cincinnati, Ohie.

MacCormack R. W. (1971). Numerical Solution of the Interaction of a Shock Wave with a Laminar Boundary Layer. — Proc. Second Int. Conf. Num. Methods Fuid Dyn., Lecture Notes in Physics, v. 8. — New York: Springer-Verlag, p. 151—163.

MacCormack R. W. (1976). An Efficient Numerical Method for Solving the Time-Dependent Compressible Navier-Stokes Equations at High Reynolds Number. — NASA TM X-73, 129.

MacCormack R. W. (1981). A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow. — AIAA Paper 81-0110, St. Louis, Missouri. [Имеется перевод: Маккормак Р. В. Численный метод решения уравнений вязких течений. — Аэрокосмическая техника, 1983, т. 1, № 4, с. 114—123.]

MacCormack R. W., Baldwin B. S. (1975). A Numerical Method for Solving the Navier-Stokes Equations with Application to Shock-Boundary Layer Interactions. — AIAA Paper 75-1, Pasadena, California. [См. также: Болдуин Б., Мак-Кормак Р. Взаимодействие сильной ударной волны с турбулентным пограничным слоем. — В сб: Численное решение задач гидромеханики. — М.: Мир, 1977, с. 174—183.]

MacCormack R. W., Paullay A. J. (1972). Computational Efficiency Achieved by Time Splitting of Finite Difference Operators. — AIAA Paper 72-154, San Diego, California.

Madavan N. K., Pletcher R. H. (1982). Prediction of Incompressible Laminar Separated Flows Using the Partially Parabolized Navier-Stokes Equations. — Engineering Research Institute Technical Report 82127/HTL-27, Iowa State University, Ames.

Madni I. K., Pletcher R. H. (1975a). A Finite-Difference Analysis of Turbulent, Axisymmetric, Buoyant Jets and Plumes. — Engineering Research Institute Technical Report 76096/HTL-10, Iowa State University, Ames.

Madni I. K., Pletcher R. H. (1975b). Prediction of Turbulent Jets in Coflowing and Quiescent Ambients. — J. Fluids Engng. v. 97, p. 558—567. [Имеется перевод: Мэдни, Плетчер. Расчет спутных и затопленных турбулентных струй. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Теоретические основы инженерных расчетов, 1975, № 4, с. 284—294.]

Madni I. K., Pletcher R. H. (1977a). Prediction of Turbulent Forced Plumes Issuing Vertically into Stratified or Uniform Ambients. — J. Heat Transfer, v. 99, p. 99—104. [Имеется перевод: Мэдни, Плетчер. Расчет вынужденных турбулентных восходящих потоков в стратифицированной и однородной окружающих средах. — Тр Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1977, № 1, с. 105.]

Madni I. K., Pletcher R. H. (1977b). Buoyant Jets Discharging Nonvertically into a Uniform, Quiescent Ambient — A Finite-Difference Analysis and Turbulence Modeling — J. Heat Transfer, v. 99, p. 641—647. [Имеется перевод: Мэдни, Плетчер. Затопленные струи, истекающие под углом в однородную

покоящуюся среду. Расчет методом конечной разности и моделирование турбулентности. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1977, № 4, с. 148.]

Malik M. R., Pletcher R. H. (1978). Computation of Annular Turbulent Flows with Heat Transfer and Property Variations. — Heat Transfer 1978, Proc. Sixth Int. Heat Transfer Conference, v. 2, Hemisphere, Washington, D. C., p. 537—542.

Malik M. R., Pletcher R. H. (1981). A Study of Some Turbulence Models for Flow and Heat Transfer in Ducts of Annular Cross-Section. — J. Heat Transfer, v. 103, p. 146—152.

Marconi F. (1980). Supersonic, Inviscid, Conical Corner Flowfields. — AIAA Journal, v. 18, p. 78—84. [Имеется перевод: Маркони Ф. Сверхзвуковое невязкое коническое обтекание внутреннего двугранного угла. — Ракетная техн. и космон., 1980, № 3, с. 94—162.]

Martin E. D., Lomax H. (1975). Rapid Finite-Difference Computation of Subsonic and Slightly Supercritical Aerodynamic Flows. — AIAA Journal, v. 13, p. 579—586. [Имеется перевод: Мартин, Ломакс. Конечно-разностные методы быстрого расчета дозвуковых и трансзвуковых течений в аэродинамике. — Ракетная техн. и космон., 1975, т. 13, № 5, с. 45.]

McDonald H. (1970). Mixing Length and Kinematic Eddy Viscosity in a Low Reynolds Number Boundary Layer. — United Aircraft Research Laboratory Report J2 14453-1, East Hartford, Connecticut.

McDonald H. (1978). Prediction of Boundary Layers in Aircraft Gas Turbine.— The Aerothermodynamics of Aircraft Gas Turbine Engines, Air Force Aero Propulsion Laboratory Report AFAPL-TR-78-52, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.

McDonald H., Briley W. R. (1975). Three-dimensional Supersonic Flow of a Viscous and Inviscid Gas. — J. Comp. Phys., v. 19, p. 150—178.

McDonald H., Camerata F. J. (1968). An Extended Mixing Length Approach for Computing the Turbulent Boundary Layer Development. — Proc. Computation of Turbulent Boundary Layers-1968 AFOSR-IFP-Stanford Conference, v. 1, Stanford University, California, p. 83—98.

McDonald H., Fish R. W. (1973). Practical Calculations of Transitional Boundary Layers. — Int. J. Heat Mass Transfer, v. 16, p. 1729—1744.

McDonald H., Kreskovsky J. P. (1974). Effect of Free Stream Turbulence on the Turbulent Boundary Layer. — Int. J. Heat Mass Transfer, v. 17, p. 705—716.

McDonald J. W., Denny V. E., Mills A. F., (1972). Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations in Inlet Regions. — J. Appl. Mech., v. 39, p. 873—878. [Имеется перевод: Макдональд, Денни, Миллс. Численные решения уравнений Навье — Стокса для течения во входном участке трубы и канала. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех. сер. Е, Прикл. мех, 1972, № 4, с. 17.]

McEligot D. M., Smith S. B., Bankston C. A. (1970). Quasi-Developed Turbulent Pipe Flow with Heat Transfer. — J. Heat Transfer, v. 92, p. 641—650. [меется перевод: МакЭлигот, Смит, Бэнкстон. Квазиразвитое турбулентное течение в трубе при наличии теплообмена. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1970, № 4, с. 67.]

McGuirk J. J., Rodi W. (1977). The Calculation of Three-dimensional Turbulent Free Jets. — Proc. Symposium on Turbulent Shear Flows, Pennsylvania State University, University Park. [Имеется перевод: МакГирк Дж. Дж., Роди В. Расчет трехмерных турбулентных свободных струй. — В сб.: Турбулентные сдвиговые течения. 1. — М.: Машиностроение, 1982, с. 72—88.]

McLean J. D., Randall J. L. (1979). Computer Program to Calculate Three-dimensional Boundary Layer Flows over Wings with Wall Mass Transfer. — NASA CR-3123.

McRae D. S. (1976). A Numerical Study of Supersonic Cone Flow at High Angle of Attack. — AIAA Paper 76-97, Washington, D. C.
McRae D. S., Hussaini M. Y. (1978). Numerical Simulation of Supersonic Cone Flow at High Angle of Attack. — ICASE Report 78-21.
Middlecoff J. F., Thomas P. D. (1979). Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations. — AIAA Paper 79-1462, Williamsburg, Virginia.
Mills R. D. (1965). Numerical Solutions of the Viscous Flow Equations for a Class of Closed Flows. — J. Roy. Aeronaut. Soc., v. 69, p. 714—718.
Minaie B. N., Pletcher R. H. (1982) A Study of Turbulence Models for Predicting Round and Plane Heated Jets. — Heat Transfer 1982, Proc. Seventh Int. Heat Transfer Conference, v. 3, Hemisphere, Washington, D. C., p. 383—388.
Miner E. W., Lewis C. H. (1975). Hypersonic Ionizing Air Viscous Shock-Layer Flows over Sphere Cones. — AIAA Journal, v. 13, p. 80—88. [Имеется перевод: Майнер, Льюис. Течения в вязком ударном слое при обтекании гиперзвуковым потоком ионизированного воздуха сферически затупленных конусов. — Ракетная техн. и космон., 1975, № 1, с. 106.]
Mitchell A. R., Griffiths D. F. (1980). The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. — Chichester: Wiley.
Miyakoda K. (1962). Contribution to the Numerical Weather Prediction — Computation with Finite Difference. — Japan J. Geophys., v. 3, p. 75—190.
Moore J., Moore J. G. (1979). A Calculation Procedure for Three-dimensional Viscous, Compressible Duct Flow. Parts I and II. — J. Fluids Eng., v. 101, p. 415—428. [Имеется перевод: Мур Джон, Мур Джоан. Метод расчета трехмерного вязкого сжимаемого течения в канале. Часть I. Невязкое течение. Часть II. Потери полного давления в канале прямоугольного сечения. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Теоретические основы инженерных расчетов, 1979, № 4, с. 114.]
Moretti G. (1969). Importance of Boundary Conditions in the Numerical Treatment of Hyperbolic Equations. — Phys. Fluids, Supplement II., v. 12, p. 13—20.
Moretti G. (1971). Complicated One-dimensional Flows. — Polytechnical Institute of New York, PIBAL Report No. 71-25.
Moretti G. (1974). On the Matter of Shock Fitting. — Proc. Fourth Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Boulder, Colorado, Lecture Notes in Physics, v. 35. — New York: Springer-Verlag, p. 287—292. [Имеется перевод: Моретти Дж. К вопросу о выделении скачка. — В сб.: Численное решение задач гидромеханики. — М.: Мир, 1977, с. 55—63.]
Moretti G. (1975). A Circumspect Exploration of a Difficult Feature of Multidimensional Imbedded Shock. — Proc. AIAA 2nd Computational Fluid Dynamics Conference Hartford, Connecticut, p. 10—16.
Moretti G. (1978). An Old-Integration Scheme for Compressible Flows Revisited, Refurbished and Put to Work. — Polytechnic Institute of New York, M/AE Report No. 78-22.
Moretti G. (1979). Conformal Mappings for the Computation of Steady Three-dimensional Supersonic Flows. — Numerical/Laboratory Computer Methods in Fluid Mechanics (A. A. Pouring and V. I. Shah, eds.) — New York: ASME, p. 13—28.
Moretti G., Abbett M. (1966). A Time-Dependent Computational Method for Blunt Body Flows. — AIAA Journal, v. 4, p. 2136—2141. [Имеется перевод: Моретти, Эббет. Расчет обтекания затупленных тел методом установления. — Ракетная техн. и космон., 1966, № 12, с. 72—79.]
Moretti G., Bleich G. (1968). Three-dimensional Inviscid Flow about Supersonic Blunt Cones at Angle of Attack. — Sandia Laboratories Report SC-RR-68-3728. — New Mexico: Albuquerque.

Moretti P. M., Kays W. M. (1965). Heat Transfer to a Turbulent Boundary Layer with Varying Free-Stream Velocity and Varying Surface Temperature — An Experimental Study. — Int. J. Heat Mass Transfer, v. 8, p. 1187—1202.

Murman E. M., Cole J. D. (1971). Calculation Plane Steady Transonic Flows.— AIAA Journal, v. 9, p. 114—121. [Имеется перевод: Мурмен, Коул. Расчет плоских установившихся трансзвуковых течений. — Ракетная техн. и космон., 1971, т. 9, № 1, с. 137.]

Murphy J. D., Prenter P. M. (1981). A Hybrid Computing Scheme for Unsteady Turbulent Boundary Layers. — Proc. Third Symposium on Turbulent Shear Flows, University of California, Davis, p. 8.26—8.34.

Murray A. L., Lewis C. H. (1978). Hypersonic Tree-dimensional Viscous Shock-Layer Flows over Blunt Bodies. — AIAA Journal, v. 16, p. 1279—1286. [Имеется перевод: Мюррей А. Л., Льюис К. Х. Применение приближения вязкого ударного слоя к расчету трехмерного гиперзвукового обтекания затупленных тел. — Ракетная техн и космон., 1978, № 12, с. 81—90.]

Napolitano M., Werle M. J., Davis R. T. (1978). A Numerical Technique for the Triple-Deck Problem. — AIAA Paper 78-1133, Seattle, Washington. [Имеется перевод: Наполитано М., Верле М. Дж., Дэвис Р. Т. Численное решение задач с использованием трехслойной схемы течения. — Ракетная техн. и космон., 1979, т. 13, № 17, с. 35—44.]

NASA (1972). Free Turbulent Shear Flows, v. 1. — In: Proc. Langley Working Conference on Free Turbulent Schear Flows, NASA SP-321.

Nardo C. T., Cresci R. J. (1971). An Alternating Directional Implicit Scheme for Three-dimensional Hypersonic Flows. — J. Comp. Phys., v. 8, p. 268—284.

Nelson R. M., Pletcher R. H. (1974). An Explicit Scheme for the Calculation of Confined Turbulent Flows with Heat Transfer. — Proc. 1974 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. — Stanford, California: Stanford University Press, p. 154—170.

Ng K. H., Spalding D. B. (1972). Turbulence Model for Boundary Layers Near Wals. — Phys. Fluids, v. 15, p. 20—30.

O'Brien G. G., Hyman M. A., Kaplan S. (1950). A Study of the Numerical Solution of Partial Differential Equations. — J. Math. Phys., v. 29, p. 223—251.

Orszag S. A., Israeli M. (1974). Numerical Simulation of Viscous Incompressible Flows.— Annual Review of Fluid Mechanics, v. 6, Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, p. 281—318.

Owczarek J. A. (1964). Fundamentals of Gas Dynamics. — Scranton, Pennsylvania: International Textbook Company.

Palumbo D. J., Rubin E L. (1972). Solution of the Two-dimensional, Unsteady Compressible Naviae-Stokes Equations using a Second-Order Acculare Numerical Scheme. — J. Comp. Phys., v. 9, p. 466—495.

Pan F., Acrivos A. (1967). Oteady Flows in Rectangular Cavities. — J. Fluid Mech., v. 28, p. 643—655.

Patankar S. V. (1975). Numerical Prediction of Three-dimensional Flows. — Studies in Convection: Theory, Measurement, and Applications (B. E. Launder, ed.), v. 1. — New York: Academic, p. 1—78.

Patankar S. V. (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. — Washington, D. C.: Hemisphere. [Имеется перевод: Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984.]

Patankar S. V. (1981). A Calculation Procedure for Two-dimensional Elliptic Situations. — Numer. Heat Transfer, v. 4, p 409—425.

Patankar S. V., Spalding D. B. (1970). Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, 2d ed. — London: Intertext Books. [Имеется перевод: Патан-

кар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях. — М.: Энергия, 1971.]

Patankar S. V., Spalding D. B. (1972). A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows. — Int. J. Heat Mass Transfer, v. 15, p. 1787—1806.

Patankar S. V., Pratap V. S., Spalding D. B. (1974). Prediction of Laminar Flow and Heat Transfer in Helically Coiled Pipes. — J. Fluid Mech., v. 62, p. 539—551.

Patankar S. V., Basu D. K., Alpay S. A. (1977). Prediction of the Three-dimensional Velocity Field of a Deflected Turbulent Jet. — J. Fluids Engng., v. 99, p. 758—762. [Имеется перевод: Патанкар, Басю, Альпей. Численный расчет трехмерного поля искривленной турбулентной струи. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Теоретические основы инженерных расчетов, 1977, № 4, с. 268—273.]

Patankar S. V., Ivanović M., Sparrow E. M. (1979). Analysis of Turbulent Flow and Heat Transfer in Internally Finned Tubes and Annuli. — J. Heat Transfer, v. 101, p. 29—37. [Имеется перевод: Патанкар, Иванович, Сперроу. Анализ турбулентного течения и теплообмен в трубах и кольцевых каналах с внутренними ребрами.— Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1979, № 1, с. 33.]

Patel V. C., Choi D. H. (1979). Calculation of Three-dimensional Laminar and Turbulent Boundary Layers on Bodies of Revolution at Incidence. — Proc. Second Symposium on Tubulent Shear Flows, Imperial College, London, p. 15.14—15.24. [Имеется перевод: Патель В. К., Чой Д. Г. Расчет трехмерных ламинарных и турбулентных пограничных слоев на телах вращения, установленных под углом атаки к набегающему потоку. — В сб.: Турбулентные сдвиговые течения. 2. — М.: Машиностроение, 1983, с. 207—229.]

Peacemen D. W., Rachford H. H. (1955). The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations. — J. Soc. Ind. Appl. Math., v. 3, p. 28—41.

Peyret R., Viviand H. (1975). Computation of Viscous Compressible Flows Based on the Navier-Stokes Equations. — AGARD-AG-212.

Phillips J. H., Ackerberg R. C. (1973). A Numerical Method for Integrating the Unsteady Boundary-Layer Equations When There are Regions of Backflow. — J. Fluid Mech., v. 58, p. 561—579.

Pletcher R. H. (1969). On a Finite-Difference Solution for the Constant-Property Turbulent Boundary Layer. — AIAA Journal, v. 7, p. 305—311. [Имеется перевод: Плетчер. О конечно-разностном решении уравнений турбулентного пограничного слоя при течении жидкости с постоянными свойствами. — Ракетная техн. и космон., 1969, т. 7, № 2, с. 138—146.]

Pletcher R. H. (1970). On a Solution for Turbulent Boundary Layer Flows with Heat Transfer, Pressure Gradient and Wall Blowing or Suction. — Heat Transfer 1970, Proc. Fourth Int. Heat Transfer Conference, v. 1. — Amsterdam: Elsevier.

Pletcher R. H. (1971). On a Calculation Method for Compressible Boundary Layers with Heat Transfer. — AIAA Paper 71-165, New York.

Pletcher R. H. (1974). Prediction of Transpired Turbulent Boundary Layers. — J. Heat Transfer, v. 96, p. 89—94. [Имеется перевод: Плетчер. Расчет турбулентного пограничного слоя на проницаемой стенке. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1974, № 1, с. 92.]

Pletcher R. H. (1976). Prediction of Turbulent Boundary Layers at Low Reynolds Numbers. — AIAA Journal, v. 14, p. 696—698. [Имеется перевод: Плетчер. Расчет турбулентного пограничного слоя при небольших числах Рейнольдса. — Ракетная техн. и космон., 1976, № 5, с. 181.]

Pletcher R. H. (1978). Prediction of Incompressible Turbulent Separating Flow. — J. Fluids Engng., v. 100, p. 427—433. [Имеется перевод: Плетчер. Расчет несжимаемого отрывного течения. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Теоретические основы инженерных расчетов, 1978, № 4, с. 139—146.]

Pletcher R. H., Dancey C. L. (1976). A Direct Method of Calculating Through Separated Regions in Boundary Layer Flow. — J. Fluids Engng., v. 98, p. 568—572. [Имеется перевод: Плетчер, Дэнси Прямой метод расчета областей отрыва в пограничном слое. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. D, Теоретические основы инженерных расчетов, 1976, № 3, с. 347.]

Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. — Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа», 1966, № 6.

Prandtl L. (1926). Ueber die ausgebildete Turbulenz. — Proceedings of the 2nd International Congress for Applied Mechanics, Zürich, p. 62—74.

Pratap B. S., Spalding D. B. (1976). Fluid Flow and Heat Transfer in Three-dimensional Duct Flows. — Int J. Heat Mass Transfer, v. 19, p. 1183—1188.

Pulliam T. H., Steger J. L. (1978). On Implicit Finite-Difference Simulations. of Three Dimensional Flow.— AIAA Paper 78-10, Huntsville, Alabama.

Raetz G. S. (1957). A Method of Calculating Three-dimensional Laminar Boundary Layers of Steady Compressible Flow.—Report No. NAI-58-73 (BLC-114), Northrop Corporation.

Rai M. M. (1982). A Philosophy for Construction of Solution Adaptive Grids, Ph. D. dissertation, Iowa State University, Ames.

Rai M. M., Anderson D. A. (1980). Grid Evolution in Time Asymptotic Problems. — Numerical Grid Generation Techniques, NASA Conference Publication 2166, p. 409—430.

Rai M. M. Anderson D. A. (1981). The Use of Adaptive Grids in Coniunction with Shock Capturing Methods. — AIAA Paper 81-1012, St. Louis, Missouri.

Rai M. M., Anderson D. A. (1982). Application of Adaptive Grids to Fluid Flow Problems with Asymptotic Solutions, AIAA Journal, v. 20, p. 496—502. [Имеется перевод: Рэй М. М., Андерсон Д. А. Применение адаптивных сеток при решении гидродинамических задач методом установления. — Ракетная техн. и космон., 1982, т. 90, № 5, с. 41—49.]

Raithby G. D. (1976). Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow. — Comput. Methods Appl. Mech. Engng., v. 9, p. 153—164.

Raithby G. D., Schneider G. E. (1979). Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity-Pressure Coupling. — Numer. Heat Transfer, v. 2, p. 417—440.

Raithby G. D., Schneider G. E. (1980). The Prediction of Surface Discharge Jets by a Three-dimensional Finite-Difference Model. — J. Heat Transfer, v. 102, p. 138—145. [Имеется перевод: Рейтби, Шнайдер. Трехмерная конечно-разностная модель поверхностной струи. — Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1980, № 1, с. 155.]

Raithby G. D., Torrance K. E. (1974). Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow. — Comput. Fluids, v. 2, p. 191—206.

Rakich J. V. (1978). Computational Fluid Mechanics — Course Notes. — Department of Mechanical and Aerospace Engineering, North Carolina State University, Raleigh.

Ralston A. (1965). A First Course in Numerical Analysis. — New York: McGraw-Hill.

Revhner T. A. (1968). Finite-Difference Solution ef the Compressible Turbulent Boundary Layer Equations. — Proc. Computation of Turbulent Layers —

1968 AFOSR-IFP-Stanford Conference, v. 1, Stanford University, California, p. 375—383.
Reyhner T. A., Flügge-Lotz I. (1968). The Interaction of Shock Wave with Laminar Boundary Layer. — Int. J. Non-Linear Mech., v. 3, p. 173—199.
Reynolds A. J. (1975). The Prediction of Turbulent Prandtl and Schmidt Numbers. — Int. J. Heat and Mass Transfer, v. 18, p. 1055—1069.
Richardson L. F. (1910). The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations with Application to the Stress in a Masonry Dam. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 210, p. 307—357.
Richtmyer R. D. (1957). Difference Methods for Initial-Value Problems. — New York: Interscience Publishers.
Richtmyer R. D., Morton K. W. (1967). Difference Methods for Initial-Value Problems, 2d ed. — New York: Interscience Publishers, Wiley. [Имеется перевод: Рихтмайер Р, Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.]
Rizzi A., Eriksson L. E. (1981). Transfinite Mesh Generation and Damped Euler Equation Algorithm for Transonic Flow around Wing-Body Configurations. — Proc. AIAA 5th Computational Fluid Dynamics Conference, Palo Alto, California, p. 43—69.
Roache P. J. (1972). Computational Fluid Dynamics. — New Mexico: Hermosa, Albuquerque. [Имеется перевод: Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.]
Roberts G. O. (1971). Computational Meshes for Boundary Layer Porblems. — Proc. Second Int., Conf Num. Methods Fluid Dyn., Lecture Notes in Physics, v. 8. — New York: Springer-Verlag, p. 171—177.
Rodi W. (1975). A Review of Experimental Data of Uniform Density Free Turbulent Boundary Layers. — Studies in Convection: Theory, Measurement, and Applications, v. 1 (B. E. Launder, ed.). — New York: Academic.
Rotta J. (1951). Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. — Z. Phys., v. 129, p. 547—572.
Rouleau W. T., Osterle J. F. (1955). The Application of Finite Difference Methods to Boundary-Layer Type Flows. — J. Aeronaut. Sci., v. 22, p. 249—254.
Rubbert P. E., Saaris G. R. (1972). Review and Evaluation of a Three-dimensional Lifting Potential Flow Analysis Method for Arbitrary Configurations. — AIAA Paper 72-188, San Diego, California.
Rubesin M. W. (1976). A One-Equation Model of Turbulence for Use with the Compressible Navie-Stokes Equations. — NASA TM X-73-128.
Rubesin M. W. (1977). Numerical Turbulence Modeling. — AGARD Lecture Series No. 86 on Computational Fluid Dynamics, p. 3-1—3-37.
Rubin S. G. (1981). A Review of Marching Procedures for Parabolized Navie-Stokes Equations. — Proc. Symposium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows. — New York: Springer-Verlag, p. 171—186.
Rubin S. G., Harris J. E. (1975). Numerical Studies of Incompressible Viscous Flow in a Driven Cavity. — NASA SP-378.
Rubin S. G., Khosla P. K. (1981). Navier-Stokes Calculation with a Coupled Strongly Implicit Method — I, Finite-Difference Solutions. — Comput. Fluids, v. 9, p. 163—180.
Rubin S. G., Lin T C. (1971). Numerical Methods for Two- and Three-dimensional Viscous Flow Problems: Application to Hypersonic Leading Edge Equations. — Polytechnic Institute of Brooklyn, PIBAL Report 71-8. — New York: Farmingdale.
Rubin S. G., Lin T. C. (1972). A Numerical Method for Thee-dimensional Viscous Flow: Application to the Hypersonic Leading Edge. — J. Comput. Phys., v. 9, p. 339—364.

Rubin S. G., Lin A. (1980). Marching with the PNS Equations. — Proc. 22nd Israel Annual Conference on Aviation and Astronautics. Tel Aviv, Israel, p. 60—61; см. также Isr. J. Technol., 1980, v. 18.

Rudman S., Pubin S. G. (1968). Hypersonic Viscous Flow over Slender Bodies with Sharp Leading Edges. — AIAA Journal, v. 6, p. 1883—1889. [Имеется перевод: Рудмен, Рубин. Гиперзвуковое вязкое обтекание удлиненных тел с острой передней кромкой. — Ракетная техн. и космон., 1968, № 10, с. 72.]

Русанов В. В. Разностные схемы третьего порядка для сквозного счета разрывных решений. — ДАН СССР, 1968, т. 180, с. 1303—1305.

Saffman P. G., Wilcox D. C. (1974). Turbulence Model Predictions for Turbulent Boundary Layers. — AIAA Journal, v. 12, p. 541—546. [Имеется перевод: Сэффмен, Уилкокс. Модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя. — Ракетная техн. и космон., 1974, № 4, с. 160.]

Salas M. D. (1975). The Anatomy of Floating Shock Fitting. — Proc. AIAA 2nd Computational Fluid Dynamics Conference, Hartford, Connecticut, p. 47—54.

Salas M. D. (1979). Flow Properties for a Spherical Body at Low Supersonic Speeds, presented at the Symposium on Computers in Aerodynamics, Twenty-Fifth Anniversary of the Aerodynamics Laboratories, Polytechnic Institute of New York.

Саульев В. К. Об одном способе численного интегрирования уравнений диффузии. — ДАН СССР, 1957, т. 115, с. 1077—1079.

Schiff L. B., Steger J. L. (1979). Numerical Simulation of Steady Supersonic Viscous Flow. — AIAA Paper 79-0130, New Orleans, Louisiana. [Имеется перевод: Шифф Л. Б., Стегер Дж. Л. Численный расчет стационарных сверхзвуковых вязких течений. — Ракетная техн. и космон., 1980, т. 18, № 12, с. 16—29.]

Schlichting H. (1968). Boundary-Layer Theory, 6th ed., translated by J. Kestin. — New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.]

Schlichting H. (1979). Boundary-Layer Theory, 7th ed., translated by J. Kestin — New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.]

Schneider G. E., Zedan M. (1981). A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems. — Numer. Heat Transfer, v. 4, p. 1—19.

Schubauer G. B., Tchen C. M. (1959). Section B of *Turbulent Flows and Heat Transfer*, v. 5. — In: High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion. — New Jersey: Princeton University Press.

Schumann U. (1980). Fast Elliptic Solvers and their Application in Fluid Dynamics. — Computational Fluid Dynamics. — Washington, D. C.: Hemisphere, p. 402—430.

Schwartztrauber P. N., Sweet R. A. (1977). The Direct Solution of the Discrete Poisson Equation on a Disc. — SIAM J. Numer. Anal., v. 5, p. 900—907.

Shah R. K., London A. L. (1978). Laminar Flow Forced Convection in Ducts.— New York: Academic.

Shang J. S. (1977). An Implicit-Explicit Method for Solving the Navier-Stokes Equations. — AIAA Paper 77-646, Albuquerque, New Mexico. [Имеется перевод: Шенг Дж. С. Неявно-явный метод численного решения уравнений Навье — Стокса. — Ракетная техн. и космон., 1978, т. 16, № 5, с. 102—109.]

Shang J. S., Hankey (Jr.) W. L. (1975). Supersonic Turbulent Separated Flows Utilizing the Navier-Stokes Equations. — Flow Separation, AGARD-CCP-168.

Shankar V. (1981). Treatment of Conical and Nonconical Supersonic Flows by an Implicit Marching Scheme Applied to the Full Potential Equation. — Proc. ASME/AIAA Conference on Computers in Flow Predictions and Fluid Dynamics Experiments, Washington, D. C., p. 163—170.

Shankar V., Chakravarthy S. (1981). An Implicit Marching Procedure for the Treatment of Supersonic Flow Fields using the Conservative Full Potential Equation. — AIAA Paper 81-1004, Palo Alto, California.

Shankar V., Osher S. (1982). An Efficient Full Potential Implicit Method Based on Characteristics for Analysis on Surepsonic Flows. — AIAA Paper 82-0974, St. Louis, Missouri.

Shapiro A. H. (1953). The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, v. 1. — New York: Ronald Press.

Sichel M. (1963). Structure of Weak Non-Hugoniot Shocks. — Phys. Fluids, v. 6, p. 653—663.

Smith R. E., Weigel B. L. (1980). Analytic and Approximate Boundary Fitted Coordinate Systems for Fluid Flow Simulation. — AIAA Paper 80-0192, Pasadena, California.

Southwell R. V. (1940). Relaxation Methods in Engineering Science. — London: Oxford University Press.

Spalding D. B. (1972). A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives. — Int. J. Numer. Methods Engng., v. 4, p. 551—559.

Srivastava B. N., Werle M. J., Davis R. T. (1978). Viscous Shock-Layer Solutions of Hypersonic Sphere Cones. — AIAA Journal, v. 16, p. 137—144. [Имеется перевод: Сривастава Б. Н., Верле М. Дж., Дэвис Р. Т. Решение уравнений вязкого ударного слоя для гиперзвукового течения около сферически затупленных тел. — Ракетная техн. и космон., 1978, т. 16, № 2, с.55—64.]

Srivastava B. N., Werle M. J., Davis R. T. (1979). Numerical Solutions of Hypersonic Viscous Shock-Layer Equations. — AIAA Journal v. 17, p. 107—110. [Имеется перевод: Сривастава Б. Н., Верле М. Дж., Дэвис Р. Т. Численное решение уравнений гиперзвукового ударного слоя. — Ракетная техн. и космон., 1979, № 1, с. 125—127.]

Steger J. L. (1977). Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Geometries with Application to Airfoils.— AIAA Paper 77-665, Albuquerque, New Mexico.

Steger J. L. (1978). Coefficient Matrices for Implicit Finite-Difference Solution of the Inviscid Fluid Conservation Law Equations. — Comput. Methods Appl. Mech. Engng., v. 13, p. 175—188.

Steger J. L. (1981). A Preliminary Study of Relaxation Methods for the Inviscid Conservative Gasdynamics Equations using Flux Splitting. — NASA Contractor Report 3415.

Steger J. L., Kutler P. (1976). Implicit Finite-Difference Procedures for the Computation of Vortex Wakes. — AIAA Paper 76-385, San Diego, California.

Steger J. L., Sorenson R. L. (1980). Use of Hyperbolic Partial Differential Equations to Generate Body Fitted Coordinates. — Numerical Grid Generation Techniques, NASA Conference Publication 2166, p. 463—478.

Steger J. L., Warming R. F. (1979). Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Apppication to Finite-Difference Methods. — NASA TM D-78605.

Steinhoff J., Jameson A. (1981). Multiple Solution of the Transonic Potential Flow Equation. — Proc. AIAA 5th Computational Fluid Dynamics Conference, Palo Alto, California, p. 347—353.

Stephenson P. L. (1976). A Theoretical Study of Heat Transfer in Two-dimensional Turbulent Flow in a Curcular Pipe and Between Parallel and Diverging Plates. — Int. J. Heat Mass Transfer, v. 19, p. 413—423.
Stewartson K. (1974). Multistructured Boundary Layers on Flat Plates and Related Bodies. — Advances in Applied Mechanics v. 14. — New York: Academic, p. 145—239.
Stone H. L. (1968). Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Equations. — SIAM J. Numer. Anal. v. 5, p. 530—558.
Swaminathan S., Kim M. D., Lewis C. H. (1983). Three-dimensional Nonequilibrium Viscous Shock-Layer Flows over Complex Geometries. — AIAA Paper 83-0212, Reno, Nevada.
Szema K. Y., Lewis C. H. (1980). Three-dimensional Hypersonic Laminar, Transitional and/or Turbulent Shock-Layer Flows. — AIAA Paper 80-1457, Snowmass, Colorado.
Tannehill J. C., Anderson D. A. (1980). Computation of Three dimensional Supersonic Viscous Flows in Internal Corners. — Technical Report AFWAL-TR-80-3017.
Tannehill J. C., Vigneron Y. C., Rakich J. V. (1978). Numerical Solution of Two-dimensional Turbulent Blunt Body Flows with an Impinging Shock.— AIAA Paper 78-1209, Seattle, Washington. [Имеется перевод: Таннехил Дж. К, Винерон И. К., Рэкич Дж. В. Численный расчет двумерного турбулентного течения около плохо обтекаемого тела при взаимодействии с падающей ударной волной. — Ракетная техн. и космон., 1979, т. 17, № 12, с. 13—15.]
Tannehill J. C., Holst T. L., Rakich J. V. (1975). Numerical Computation of Two-dimensional Viscous Blunt Body Flows with an Impinging Shock. — AIAA Paper 75-154, Pasadena, California. [Имеется перевод: Таннехил, Холст, Рэкич. Численное исследование двумерного вязкого обтекания (течения), развивающегося при взаимодействии затупленных тел с внешней ударной волной. — Ракетная техн. и космон., 1976, т. 14, № 2, с. 94—103.]
Tannehill J. C., Venkatapathy E., Rakich J. V. (1975). Numerical Solution of Supersonic Viscous Flow over Blunt Delta Wings. — AIAA Journal, v. 20, p. 203—210. [Имеется перевод: Таннехил Дж. К., Венкатапатхи Э., Рэкич Дж. В. Расчет сверхзвукового вязкого обтекания затупленных треугольных крыльев.— Ракетная техн. и космон., 1982, т. 20, № 3, с. 33—43.]
Taylor A. E. (1955). Advanced Calculus. — Boston: Ginn and Company.
Telionis P. D., Tsahalis D. Th. (1976). Unsteady Turbulent Boundary Layers and Separation. — AIAA Journal, v. 14, p. 468—474. [Имеется перевод: Телионис, Цахалис. Нестационарные турбулентные пограничные слои и проблема отрыва. — Ракетная техн. и космон., 1976, № 4, с. 64.]
Telionis P. D., Tsahalis D. Th., Werle M. J. (1973). Numerical Investigation of Unsteady Boundary-Layer Separation. — Phys. Fluids, v. 16, p. 968—973.
Thareja R., Szema K. Y., Lewis C. H. (1982). Effects of Chemical Equilibrium on Three-dimensional Viscous Shock-Layer Analysis of Hypersonic Laminar or Turbulent Flows. — AIAA Paper 82-0305, Orlando, Florida.
Thom A., Apelt C. J. (1961). Field Computations in Engineering and Physics. — Princeton, New Jersey: C. Van Nostrand.
Thomas L. H. (1949). Elliptic Problems in Linear Difference Equations over a Network. — New York: Watson Sci. Comput. Lab. Rept., Columbia University.
Thomas P. D., Lombard C. K. (1978). The Geometric Conservation Law — A Link between Finite-Difference and Finite-Volume Methods of Flow Computation on Moving Grids. — AIAA Paper 78-1208, Seattle, Washington.
Thomas P. D., Vinokur M., Bastianon R. A., Conti R. J. (1972). Numerical Solution for Three-dimensional Inviscid Supersonic Flow. — AIAA Journal, v. 10, p. 887—894. [Имеется перевод: Томас, Винокур, Бастианон, Конти.

Численный метод расчета пространственного невязкого сверхзвукового течения. — Ракетная техн. и космон., 1972, № 7, с. 47.]
Thommen H. U. (1966). Numerical Integration of the Navier-Stokes Equations.— Z. Angew. Math. Phys., v. 17, p. 369—384.
Thompson J. F. (1980). Numerical Solution of Flow Problems Using Body-Fitted Coordinate Systems. — Computational Fluid Dynamics, v. 1 (W. Kollmann, ed). — Washington, D. C.: Hemisphere.
Thompson J. F., Thames F. C., Mastin C. W. (1974). Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing any Number of Arbitrary Two-dimensional Bodies. — J. Comp. Phys., v. 15, p. 299—319.
Thompson J. F., Thames F. C., Mastin C. W., Shanks S. P. (1975). Use of Numerically Generated Body-Fitted Coordinate Systems for Solution of the Navier-Stokes Equations. — Proc. AIAA 2nd Computational Fluid Dynamics Conference, Hartford, Connecticut, p. 68—80.
Ting L. (1965). On the Initial Conditions for Boundary Layer Equations. — J. Math. Phys., v. 44, p. 353—367.
Tsahalis D. Th. Telionis D. P. (1974). Oscillating Laminar Boundary Layers and Unsteady Separation. — AIAA Journal, v. 12, p. 1469—1475. [Имеется перевод: Осциллирующие ламинарные пограничные слои и нестационарный отрыв. — Ракетная техн. и космон., 1974, № 11, с. 17.]
van Driest E. R. (1951). Turbulent Boundary Layer in Compressible Fluids. — J. Aeronaut. Sci., v. 18, p. 145—160.
van Driest E. R. (1952). Investigation of Laminar Boundary Layer in Compressible Fluids Using the Crocco Method. — NACA TN-2597.
van Driest E. R. (1956). On Turbulent Flow Near a Wall. — J. Aeronaut. Sci., v. 23, p. 1007—1011.
van Dyke M. (1969). Higher-Order Boundary-Layer Theory. — Annual Review of Fluid Mechanics, v. 1, Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, p. 265—292.
Varga R. S. (1962). Matrix Iterative Numerical Analysis. — New York: Wiley.
Vigneron Y. C., Rakich J. V., Tannehill J. C. (1978a). Calculation of Supersonic Viscous Flow over Delta Wings with Sharp Subsonic Leading Edges. — AIAA Paper 78-1137, Seattle, Washington.
Vigneron Y. C., Rakich J. V., Tannehill J. C. (1978b). Calculation of Supersonic Viscous Flow over Delta Wings with Sharp Subsonic Leading Edges. — NASA TM-78500.
Vinokur M. (1974). Conservation Equations of Gas-Dynamics in Curvilinear Coordinate Systems. — J. Comp. Phys., v. 14, p. 105—125.
Viviand H. (1974). Conservative Forms of Gas Dynamics Equations. — Recherche Aérospatiale, No. 1974-1, p. 65—68.
von Neumann J, Richtmyer R. D. (1950). A Method for the Numerical Calculation of Hyperdynamic Shocks. — J. Appl. Phys., v. 21, p. 232—237.
Wachspress E. L. (1966). Iterative Solution of Elliptic Systems. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
Wang K .C. (1971). On the Determination of the Zones of Influence and Dependence for Three-dimensional Boundary-Layer Equations.— J. Fluid Mech., v. 48, pt. 2, p. 397—404.
Wang K. C. (1972). Separation Patterns of Boundary Layer over an Inclined Body of Revolution. — AIAA Journal, v. 10, p. 1044—1050. [Имеется перевод: Уонг. Отрыв пограничного слоя при обтекании тел вращения под углом атаки. — Ракетная техн. и космон., № 8, с. 90.]
Wang K. C. (1973). Three-dimensional Laminar Boundary Layer over a Body of Revolution at Incidence, Part VI: General Methods and Results of the Case at High Incidence. — MML TR 73-02c, Martin Marietta Laboratories, Baltimore, Maryland.

Wang K. C. (1974). Boundary Layer over a Blunt Body at High Incidence with an Open-Type of Separation. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, v. 340, p. 33—55.

Wang K. C. (1975). Boundary Layer over a Blunt Body at Low Incidence with Circumferential Reversed Flow. — J. Fluid Mech., v. 72, pt. 1, p. 49—65.

Warming R. F., Beam R. M. (1975). Upwind Second-Order Difference Schemes and Applications in Unsteady Aerodynamic Flow. — Proc. AIAA 2nd Computational Fluid Dynamics Conference, Hartford, Connecticut, p. 17—28.

Warming R. F., Beam R. M. (1977). On the Construction and Application of Implicit Factored Schemes for Conservation Laws. — Symposium on Computational Fluid Dynamics, New York; см. также: SIAM AMS Proceedings, v. 11, 1978, p. 85—129.

Warming R. F., Hyett B. J. (1974). The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of Finite-Difference Methods. — J. Comp. Phys., v. 14, p. 159—179.

Warming R. F., Kutler P., Lomax H. (1973). Second- and Third-Order Noncentered Difference Schemes for Nonlinear Hyperbolic Equations. — AIAA Journal, v. 11, p. 189—196. [Имеется перевод: Уорминг, Кутлер, Ломакс. Нецентральные разностные схемы второго и третьего порядка точности для решения нелинейных уравнений гиперболического типа. — Ракетная техн. и космон., 1973, № 2, с. 76.]

Waskiewicz J. D., Murray A. L., Lewis C. H. (1978). Hypersonic Viscous Shock-Layer Flow over a Highly Cooled Sphere. — AIAA Journal, v. 16, p. 189—192. [Имеется перевод: Васкевич Дж. Д., Мюррей А. Л., Льюис К. Х. Гиперзвуковой вязкий ударный слой около интенсивно охлажденной сферы. — Ракетная техн. и космон., 1978, т. 16, № 2, с. 123—125.]

Weinstock R. (1952). Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering. — New York: McGraw-Hill.

Welch J. E., Harlow F. H., Shannon J. P., Daly B. J. (1966). The MAC Method. — Los Alamos Scientific Laboratory Report LA 3425, Los Alamos. New Mexico.

Werle M. J., Bertke S. D. (1972). A Finite-Difference Method for Boundary Layers with Reverse Flow. — AIAA Journal, v. 10, p. 1250—1252.

Werle M. J., Dwoyer D. L. (1972). Laminar Hypersonic Interacting Boundary Layers: Subcritical Branching in the Strong Interaction Regime. — ARL 72-0011, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio.

Werle M. J., Vatsa V. N. (1974). A New Method for Supersonic Boundary Layer Separations. — AIAA Journal, v. 12, p. 1491—1497. [Имеется перевод: Уерл, Ватса. Новый метод расчета отрыва сверхзвуковых пограничных слоев. — Ракетная техн. и космон., 1974, № 11, с. 451.]

Werle M. J., Verdon J. M. (1979). Solution for Supersonic Trailing Edges Including Separation. — AIAA Paper 79-1544, Williamsburg, Virginia.

Werle M. J., Polak A., Bertke S. D. (1973). Supersonic Boundary-Layer Separation and Reattachment — Finite-Difference Solutions. — Report No. AFL 72-12-1, Department of Aerospace Engineering, University of Cincinnati, Ohio.

White (Jr.) A. B. (1982). On the Numerical Solution of Initial/Boundary-Value Problems in One Space Dimension. — SIAM J. Numer. Anal., v. 19, p. 683—697.

White F. M. (1974). Viscous Fluid Flow. — New York: McGraw-Hill.

Whitham G. B. (1974). Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley. [Имеется перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.]

Whittaker E. T. Watson G. N. (1927). A Course in Modern Analysis, 4th ed. (reprinted 1962. Cambridge University Press). [Имеется перевод: Уитте-

кер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. I, II. — М.: Физматгиз, 1963.]
Wieghardt K., Tillman W. (1951). On the Turbulent Friction Layer for Rising Pressure. — NASA TM-1314.
Wigton L. B., Holt M. (1981). Viscous-Inviscid Interaction in Transonic Flow.— AIAA Paper 81-1003, Palo Alto, California.
Wilcox D. C.. Traci R. M. (1976). A Complete Model of Turbulence. — AIAA Paper 76-351, San Diego, California.
Williams J. C. (1977). Incompressible Boundary Layer Separation, Annual Review of Fluid Mechanics, v. 9, Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, p. 113—144.
Winslow A. (1966). Numerical Solution of the Quasi-linear Poisson Equation.— J. Comp. Phys., v. 1, p. 149—172.
Wolfstein M. (1969). The Velocity and Temperature Distribution in One-dimensional Flow with Turbulence Augmentation and Pressure Gradient. — Int. J. Heat Mass Transfer, v. 12, p. 301—318.
Wornom S. F. (1977). A Critical Study of Higher-Order Numerical Methods for Solving the Boundary-Layer Equations. — Proc. AIAA 3rd Computational Fluid Dynamics Conference, Albuquerque, New Mexico.
Wu J. C. (1961). On the Finite-Difference Solution of Laminar Boundary Layer Problems. — Proc. 1961 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. — Stanford, California: Stanford University Press.
Wylie (Jr.) C. R. (1951). Advanced Engineering Mathematics. — New York: McGraw-Hill.
Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967.
Yanenko N. N., Kovenya V. M., Tarnavsky G. A., Cherny S. G. (1980). Economical Methods for Solving the Problems of Gas Dynamics. — Proc. Seventh Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Lecture Notes in Physics, v. 141. — New York:Springer-Verlag, p. 448—453.
Young D. (1954). Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type. — Trans. Amer. Math. Soc., v. 76, p. 92—111.
Zachmanoglou E. C. Thoe D. W. (1976). Introduction to Partial Differential Equations with Applications. — Baltimore: Williams & Wilkins.

*Дополнительная литература*

1. Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л. Асимптотическая теория отрывных течений. Под ред. В. В. Сычева — М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1987. — 256 с.
2. Аукин М. К., Тагиров Р. К. Конечно-разностная схема второго порядка для расчета трехмерных сверхзвуковых течений идеального газа. — АН СССР, Москва. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1989 (в печати).
3. Ганжело А. Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений невязкого газа методом сквозного счета второго порядка точности. — Уч. записки ЦАГИ, 1986, т. 17, № 2, с. 27—32.
4. Ганжело А. Н., Крайко А. Н., Макаров В. Е., Тилляева Н. И. О повышении точности численного решения газодинамических задач. — В сб.: Современные проблемы аэродинамики. — М.: Машиностроение, 1987.
5. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. — М.: Наука, 1979. — 368 с.
6. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики.—М.: Наука, 1976. — 400 с.

7. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. — М.: Наука, 1977. — 439 с.
8. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 392 с.
9. Гуревич Ю. Г., Шальман Е. Ю. Некоторые эффекты, возникающие при управлении пограничным слоем на участке поверхности. — Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1978, № 4, с. 3—9.
10. Дэвис Р. Л., Ни Р.-Х., Боули У. У. Расчет сжимаемых ламинарных течений с помощью маршевых (по времени) одно- и двухшаговых схем и многосеточного метода. — Аэрокосмическая техника, т. 3, № 8, 1985, с. 84—94.
11. Иванов М. Я., Нигматуллин Р. З. Неявная схема С. К. Годунова повышенной точности для численного интегрирования уравнений Эйлера. — АН СССР, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, т. 27, 1987, № 11, с. 1725—1735.
12. Иванов М. Я., Крупа В. Г., Нигматуллин Р. Я. Неявная схема С. К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье — Стокса. — АН СССР, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1989, т. 29, № 6, с. 889—901.
13. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука, 1981. — 304 с.
14. Колган В. П. Конечно-разностная схема для расчета двумерных разрывных решений нестационарной газовой динамики. — Уч. записки ЦАГИ, 1975, т. 6, № 1, с. 9—14.
15. Копченов В. И., Крайко А. Н. Монотонная разностная схема второго порядка аппроксимации для гиперболических схем с двумя независимыми переменными — АН СССР, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, т. 23, 1983, № 4, с. 848—859.
16. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: В 2-х т./Под ред. И. А. Кибеля. — М.: Физматгиз, 1963. Часть 1 — 584 с. Часть 2 — 728 с.
17. Крайко А. Н. Некоторые вопросы построения численных алгоритмов для расчета течений идеального газа. — В сб.: Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики. — М.: Наука, 1987, с. 33—55.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10-ти т. Т. VI. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. — 736 с.
19. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
20. Марчук Г. И. Методы расщепления. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 264 с.
21. Наполитано М. Расчет отрывных течений с большими числами Рейнольдса на основе решения уравнений Навье — Стокса и приближенных уравнений. — Аэрокосмическая техника, 1987, № 12, с. 3—9.
22. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1983. — 288 с.
23. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. — Л.: Гидрометеоиздат, 1986. — 352 с.
24. Петухов И. В. Численный расчет двухмерных течений в пограничном слое. — В сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. — М.: Наука, 1964, с. 304—325.
25. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Численные методы газовой динамики. — М.: Высш. шк., 1987. — 232 с.
26. Редвен С. Ф., Ликудис С. Г. Расчеты обратным методом несжимаемого течения в турбулентном пограничном слое на эллипсоиде. — Аэрокосмическая техника, 1987, № 5, с. 67—76.

27. Родионов А. В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений. — АН СССР. Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1987, т. 27, № 4, с. 585—593.
28. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
29. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 592 с.
30. Седов Л. И. Механика сплошной среды: В 2-х т. — М.: Наука, 1984.
31. Тилляева Н. И. Обобщение модифицированной схемы С. К. Годунова на пространственные нерегулярные сетки. — Уч. записки ЦАГИ, 1986, т. 17, № 2, с. 18—26.
32. Тилляева Н. И. Модификация разностной схемы С. К. Годунова, сохраняющая аппроксимацию при решении задач газовой динамики на произвольных нерегулярных сетках. — Уч. записки ЦАГИ, 1986, т. 17, № 2, с. 25—33.
33. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М., 1972. — 735 с.
34. Трехмерные турбулентные пограничные слои. Пер. с англ./Под ред. Х. Фернхольца, Е. Краузе. — М.: Мир, 1985. — 384 с.
35. Хиршель Э., Кордулла В. Сдвиговые течения сжимаемой жидкости. Численный расчет пограничного слоя: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 248 с.
36. Черный Г. Г. Газовая динамика. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988. — 424 с.
37. Шальман Е. Ю. Пограничный слой на круговом секторе. — Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1982, № 1, с. 35—41.
38. Шевелев Ю. Д. Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. — М.: Наука, 1986. — 366 с.
39. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 544 с.
40. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения. — Новосибирск: Наука, 1979. — 219 с.

## Именной указатель


Аббетт (M. J. Abbett) 332
Агарвал (R. K. Agarwal) 620
Адамар (J. Hadamard) 39
Айсман (P. K. Eiseman) 637
Аллен (D. Allen) 19, 417
Аллен (J. S. Allen) 198
Андерсон (J. D. Anderson) 578, 651

Баракат (H. Z. Barakat) 144, 483
Барбин (A. R. Barbin) 471
Бейли (F. R. Bailey) 375
Берстейн (S. Z. Burstein) 128, 182
Бим (R. M. Beam) 125, 185, 186, 542, 602
Блоттнер (F. G. Blottner) 408, 410, 421, 427, 436, 479, 486, 490, 501
Болдуин (B. S. Baldwin) 593
Боллхауз (W. F. Ballhaus) 365—368, 375
Браиловская И. Ю. 197
Брили (W. R. Briley) 550, 551, 617
Брэдшоу (P. Bradshaw) 400
Брэкбилл (J. V. Brackbill) 647, 649
Бунеман (O. Buneman) 157
Бургграф (O. R. Burggraf) 465, 466
Буссинеск (G. Bossinesq) 261
Бюргерс (J. M. Burgers) 170

Вазов (W. Wasow) 20
Васкевиц (J. D. Waskiewicz) 578
Ватсон (G. N. Watson) 51
Вахспресс (E. L. Wachspress) 167
Вейгель (B. L. Weigel) 635
Вейндрофф (B. Wendroff) 21
Вивьян (H. Viviand) 197, 299, 323, 324
Вигтон (L. B. Wigton) 461
Вигхардт (K. Wieghardt) 511
Винокур (M. Vinokur) 299, 302, 323
Виньерон (Y. C. Vigneron) 537, 538, 549
By (J. C. Wu) 401

Габутти (B. Gabutti) 342
Ганн (J. E. Gunn) 143
Гари (J. Gary) 21
Гиршфельдер (J. O. Hirschfelder) 217
Гогиш Л. В. 445
Годунов С. К. 6, 177
Гольдштейн (S. Goldstein) 444, 445
Гордон (P. Gordon) 336
Госман (A. D. Gosman) 552
Гриффин (Griffin) 335
Гриффитс (D. F. Griffiths) 167

Де Ниф (T. de Neef) 350, 351
Джеймсон (A. Jameson) 356, 358, 359, 368, 369, 371
Джонс (W. P. Jones) 471
Джоуб (C. E. Jobe) 460
Додж (P. R. Dodge) 561
Дорранс (W. H. Dorrance) 217
Дрист ван (E. R. van Driest) 511
Дуглас (J. Douglas) 20, 143
Дэвис (R. T. Davis) 410, 526, 576
Дэнси (C. L. Dancy) 420
Дюфорт (E. C. DuFort) 59, 419

Зальтцман (J. Saltzman) 647, 649
Зедан (M. Zedan) 169, 673, 676, 678

Йенсен (V. G. Jensen) 617

Картер (J. E. Carter) 198, 456, 460, 461
Катлер (P. Kutler) 623
Квон (O. K. Kwon) 452, 460
Кейз (W. M. Kays) 439, 511
Кенцер (C. P. Kentzer) 335
Келлер (H. B. Keller) 145, 423, 427
Китченс (C. W. Kitchens) 495, 502
Кларк (J. A. Clark) 144, 483
Клаузер (Clauser) 265
Клебанофф (Klebanoff) 301
Клопфер (G. H. Klopfer) 654
Колмогоров А. Н. 272

Коул (J. D. Cole) 355, 372—374
Коулз (D. E. Coles) 439
Кранк (J. Crank) 136
Крауфорд (M. E. Crawford) 511
Кроули (W. P. Crouley) 208
Курант (R. Courant) 19

Лаасонен (P. Laasonen) 135
Лайтхилл (M. J. Lighthill) 459, 464
Лакс (P. D. Lax) 20, 175, 316
Ламб (H. Lamb) 234
Ларкин (B. K. Larkin) 145, 483
Лаундер (B. E. Launder) 275, 279
Леви (H. Lewy) 19
Левин (R. D. Levine) 21
Леонард (B. P. Leonard) 196
Ли (C. P. Li) 590
Либман (L. Liebmann) 19
Лин (T. C. Lin) 206, 537, 540
Лок (R. C. Lock) 369
Ломбард (C. K. Lombard) 660
Лондон (A. L. London) 467
Лубард (S. C. Lubard) 536—538
Лугт (H. J. Lugt) 157
Льюис (C. H. Lewis) 577, 578

Мадаван (N. K. Madavan) 561
Майнер (E. W. Miner) 577
Макдональд (H. McDonald) 413, 468, 551
Мак-Кормак (R. W. MacCormack) 21, 588, 591, 593, 595, 596, 604
Маклин (J. D. McLean) 506
Макрэй (D. S. McRae) 654
Мёрман (E. M. Murman) 355, 372—374
Мёррей (A. L. Murray) 578
Мёрфи J. D. Murphy) 509
Миддлкофф (J. F. Middlecoff) 640
Мирин (A. A. Mirin) 128, 182
Митчелл (A. R. Mitchell) 167
Моретти (G. Moretti) 21, 336, 349—351, 439
Мортон (K. W. Morton) 20, 42, 101

Накаяма (P. I. Nakayama) 275
Нг (K. H. Ng) 276
Нейланд В. Я. 445
Нейман фон (J. von Neumann) 20
Николсон (P. Nicolson) 136

Оринг (S. Ohring) 157
Ошер (S. Osher) 364

Патанкар (S. V. Patankar) 415, 472, 554, 556, 558, 559
Палумбо (D. J. Palumbo) 199
Пейрет (R. Peyret) 197
Писмен (D. W. Peaceman) 20, 167
Плетчер (R. H. Pletcher) 420, 423, 435, 452, 460, 468, 561
Полежаев В. М. 205
Прандтль (L. Prandtl) 246, 272, 279
Пратап (V. S. Pratap) 560
Прентер (P. M. Prenter) 509

Рай (M. M. Rai) 203, 651
Ракфорд (H. H. Rachford) 20
Рандалл (J. L. Randall) 506
Рейнер (T. A. Reyhner) 448
Рейсби (G. D. Raithby) 473, 557, 558
Рихтмайер (R. D. Richtmyer) 20, 42, 101, 137
Ричардсон (L. E. Richardson) 18, 19, 135
Ротта (J. Rotta) 278
Роуди (W. Rodi) 483
Роуч (P. J. Roache) 151, 157, 191
Рубезин (M. W. Rubesin) 276
Рубин (S. G. Rubin) 522—524, 526—528, 537, 540
Руди (W. Rudy) 415
Рудман (S. Rudman) 522
Русанов В. В. 128

Саульев В. К. 144, 483
Саусвелл (R. V. Southwell) 19, 417
Смит (R. E. Smith) 266, 460, 635, 637
Соренсон (R. L. Sorenson) 641, 643
Спенсер (J. Spencer) 650
Сполдинг (D. B. Spalding) 275, 276, 412, 415, 552, 554—556, 558, 560
Сривастава (B. N. Srivastava) 577
Стегер (J. L. Steger) 325, 327, 328, 330, 335, 537, 545, 549, 623, 641
Стейнхофф (J. Steinhoff) 371
Степанов Г. Ю. 445
Стоун (H. L. Stone) 168, 169
Стюартсон (K. Stewartson) 464
Сычёв В. В. 445
Сэффман (P. G. Saffman) 276

Телионис (D. P. Telionis) 509
Томас (L. H. Thomas) 120, 155
Томас (P. D. Thomas) 325, 640, 660
Томмен (H. U. Thommen) 199
Томпсон (J. F. Thompson) 638
Трейси (R. M. Traci) 276

Уайт (F. M. White) 398
Уайт (A. B. White, Jr.) 649
Уизем (G. B. Whitham) 308
Уилкокс (D. C. Wilcox) 276

Уинслоу (A. Winslow) 638
Уиттекер (E. T. Whittaker) 51
Уонг (K. C. Wang) 501
Уорминг (R. F. Warming) 113, 117, 125, 184—186, 325—328, 342, 343, 542, 602

Фавр (A. Favre) 236
Флюгге-Лотц (I. Flügge-Lotz) 448
Франкел (S. P. Frankel) 20, 59, 419
Фридрихс (K. O. Friedrichs) 19
Фромм (J. F. Fromm) 126
Форсайт (G. E. Forsythe) 20

Хайет (B. J. Hyett) 113, 117
Хайндман (R. G. Hindman) 650, 651, 661
Харрис (J. E. Harris) 413
Хартен (A. Harten) 357
Хартнетт (J. P. Hartnett) 511
Хеллвиг (G. Hellwig) 44
Хеллиуэлл (W. S. Helliwell) 537—538
Хесс (J. L. Hess) 460
Хёрш (R. S. Hirsh) 415
Хинце (J. O. Hinze) 235
Хокни (R. W. Hockney) 157
Холл (M. G. Hall) 21
Холст (T. L. Holst) 365, 368, 370
Холт (M. Holt) 461
Хонг (S. W. Hong) 421
Хорнбек (R. W. Hornbeck) 484
Хосни (W. M. Hosney) 578
Хэрлоу (F. H. Harlow) 275

Цебеци (T. Cebeci) 259, 266, 423, 427, 456, 503, 505, 512

Чакравартхи (S. R. Chakravarthy) 9
Чанг (T. J. Chung) 399
Чемберз (T. L. Chambers) 276
Чен (S. I. Cheng) 198
Чепмен (D. R. Chapman) 235
Чилукури (R. Chilukuri) 468, 572
Чорин (A. J. Chorin) 555, 622

Шанкар (V. Shankar) 364
Шах (R. K. Shah) 467
Шифф (L. B. Schiff) 537, 549, 579
Шлихтинг (H. Schlichting) 217, 398, 510, 511
Шнейдер (G. E. Schneider) 169, 557, 558, 673, 676, 678

Эймс (W. F. Ames) 165
Эллис (M. A. Ellis) 501

Яненко Н. Н. 144

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


адаптивные сетки (adaptive grids) 644—659
алгебраические методы построения сеток (algebraic grid generation methods) 632—638
апериодическая матрица (aperiodic matrix) 99

баротропная жидкость (barotropic fluid) 232
баротропное течение (— flow) 232
безразмерный вид уравнений (nondimensional form of equations) 227
блочный метод *Келлера* (Keller box method) 145
— — — для уравнений пограничного слоя (— — — for boundary layer equations) 423—431, 442
— — — — уравнения теплопроводности (— — — — heat equation) 145, 423—431

векторная форма уравнений (vector form of equations) 226
— — — Эйлера (— — — Euler equations) 287
волновая скорость «wave speed) 91, 106
волновое уравнение второго порядка (wave equation of second order) 28—29, 32—34, 92, 106—131
— — первого порядка (— — — first order) 41, 45
— число (— number) 89, 115
второй закон термодинамики (second law of thermodynamics) 285
вязко-невязкое взаимодействие (viscous-inviscid interaction) 457—466

геометрический закон сохранения (geometric conservation law) 300
гиперболическое уравнение (hyperbolic equation) 29, 31
гипотеза Буссинеска (Boussinesq approximation) 262
глобальная релаксация по давлению (global pressure pelaxation procedure) 538

девятиточечная схема (nime-point formula) 148
детерминированные стационарные задачи (jury problems) 22
дивергентная форма уравнений (conservation form) 63
дисперсия (dispersion) 112
диссипация (dissipation) 122
диффузия (diffusion) 112
длина волны (wave length) 89

задача *Дирихле* (Dirichlet problem) 40
— *Коши* (Cauchy —) 34
— *Неймана* (Neumann —) 40
— *Робина* (Robin —) 41
— *Рэлея* (Rayleigh —) 36
закон сохранения импульса (momentum equation) 14
— стенки (wall functions) 434

изоэнергетическое течение (isoenergetic —) 285
изэнтропическое течение (isentropic flow) 286
интегральные методы (integral methods) 76—78, 398
интерполяция функций полиномами (polinomial fitting) 72—76
искусственная вязкость (artificial viscosity) 112, 356—359
итерационные методы (iterative methods) 157
— — точечные (явные) 157, 163
— — блочные (неявные) 157

каноническая форма уравнений (canonical form) 29

кинетическая теория (kinetic theory) 217
конечно-разностная сетка (finite-difference grid) 49
конечно-разностные операторы (difference operators) 52—54
конечные разности вперед (правые) (forward difference) 51—52
— — назад (левые) (backward —) 51—52
— — центральные (central —) 51—52
— — для смешанных производных (difference approximations for mixed derivatives) 57
конические уравнения *Навье — Стокса* („conical" Navier — Stokes equations) 578
комбинированный метод А (combined method A) 137
— — В 137
консервативность конечно-разностной схемы (conservative property) 64
корректно поставленная задача (well-posed problem) 35, 39
коэффициент кинематической вязкости (kinematic viscosity) 250
— перехода (amplification factor) 90
— температуропроводности (thermal diffusity) 250
коэффициенты *Фурье* (Fourier coefficients) 96
криволинейные ортогональные координаты (orthogonal curvilinear coordinates) 229—234

линеаризация методом запаздывающих коэффициентов (linearization by lagging the coefficients) 407
— по *Ньютону* (— by Newton) 408—409
— простой итерационной заменой коэффициентов (— by simple iterative update of coefficients) 407
— *Стеггера* (Steger —) 545
— экстраполяцией коэффициентов (—by extrapolating) 412

маршевая координата (marching coordinate) 50
маршевые задачи (— problems) 18, 26, 330
матрица перехода (amplification matrix) 96
— *Якоби* (Jacobian —) 96, 327
матричный метод (matrix method) 98
метод *Аллена—Чена* (Allen—Cheng —) 198
— — для уравнений *Навье—Стокса* 596
— — — — уравнения *Бюргерса* 198
— *Бима—Уорминга*
— — — — вязкого уравнения *Бюргерса* 202
— — — — невязкого уравнения *Бюргерса* 2, 185
— — — — параболизованных уравнений *Навье—Стокса* 640
— — — — уравнений *Навье—Стокса* 597
— — — — — *Эйлера* 325
— *Брайловской* (Brailovskaya —)
— — для уравнений *Навье—Стокса* 596
— — — уравнения *Бюргерса* 197
— *Брили—Макдональда*
— — — для уравнений *Навье—Стокса* 596
— — — — уравнения *Бюргерса* 201—202
— ВВЦП (FTCS) —) 191
— *Гаусса—Зейделя* (Gauss — Seidel iteration) 63, 158
— двух поверхностей (two-surface method) 638
— дуг (arc length orthogonality scheme) 641
— *Дэвиса* (Davis technique) 454, 576—578
— *Дюфорта—Франкела*
— — — для уравнений *Навье—Стокса* 596, 622
— — — — — пограничного слоя 419
— — — — уравнения *Бюргерса* 197
— — — — — теплопроводности 59
— замещенных уравнений (surrogate equation) 330
— исключения *Гаусса* (Gaussian elimination) 151
— искусственной сжимаемости (artificial compressibility method) 621
— «классики» (hopscotch —) 596
— — для уравнений *Навье—Стокса* 596
— — — уравнения теплопроводности 145
— контрольного объема (control volume —) 66, 79—82
— *Кранка—Николсона*
— — — для уравнений пограничного слоя 404—419, 496—501

— — — — уравнения теплопроводности 70, 136—138, 141
— *Лакса*
— — для волнового уравнения 91, 97, 117
— — — невязкого уравнения *Бюргерса* 175
— *Лакса—Вендроффа*
— — — для волнового уравнения 104, 123
— — — — вязкого уравнения *Бюргерса* 199
— — — — невязкого уравнения *Бюргерса* 177
— — — — уравнений *Навье—Стокса* 596
— *Либмана см.* метод *Гаусса—Зейделя*
— *Мак-Кормака* 124, 125
— — быстрого счета (rapid solver —) 595
— — неявный для уравнений *Навье—Стокса* 606
— — — — уравнения *Бюргерса* 604
— — с верхней релаксацией (— — with over-relaxation) 200
— — — расщеплением по времени (time-split — —) 202
— — — — — — для уравнений *Навье—Стокса* 591
— — — — — — — уравнения *Бюргерса* 202
— многих поверхностей (multisurface —) 638
— *Неймана* (von Neumann —) 20
— нижней релаксации (under-relaxation —) 161—163
— *Ньютона—Рафсона—Канторовича* (Newton—Raphson method) 408, 451, 540
— объемов (volume orthogonality scheme) 641
— последовательной верхней релаксации (succesive over-relaxation (SOR) —) 20, 160
— — — — по строкам (— — — by lines) 164
— приближенной факторизации (approximate factorization) 326
— прогонки (Thomas algorithm) 120, 155
— разделения переменных (separation of variables) 40
— расщепления матричных коэффициентов (split coefficient matrix (SCM) method) 335—352
— *Ричардсона* (Richardson —) 19, 135
— *Русанова* (*Берстейна—Мирина*) (Rusanov (Burstein—Mirin) —)
— — для волнового уравнения 128
— — — невязкого уравнения *Бюргерса* 180
— секущих (variable secand procedure) 450, 451
— с перешагиванием «чехарда» (leap frog method) 121
— сращиваемых асимптотических разложений (multistructured asymptotic expansion) 464, 465
— *Томпсона* (Thompson method) 638, 639
— *Уорминга—Катлера—Ломакса* (Warming—Kutler—Lomax —)
— — — — для волнового уравнения 182
— — — — — — невязкого уравнения *Бюргерса* 130
— *Фурье* (Fourier analysis) 88—95
— характеристик (method of characteristic) 304—316
методы дробных шагов, или методы расщепления (splitting or fractional-step methods) 143, 326
— решения уравнения потенциала (methods for solving the potential equation) 352—371
— сквозного счета (shock-capturing —) 316—335
— — — граничные условия (boundary conditions) 330
— — — — — отражение (reflection) 331
— — — — — *Аббет* (Abbett) 332
— — — — — *Кенцер* (Kentzer) 335
модели рейнольдсовых напряжений (Reynolds stress models) 261, 278—279
— с одним обыкновенным уравнением (one-half equation models) 270—272
— — — уравнением (one-equation —) 272—273
моделирование крупных вихрей (large eddy simulation) 262
— турбулентности (turbulence modeling) 260—279
модель с двумя уравнениями (two-equation turbulent model) 275
— — одним уравнением и одним обыкновенным уравнением (one and one-half equation —) 275

— турбулентной вязкости (turbulent viscosity —) 261
модификации схемы зигзаг (some variations zig-zag scheme) 501
модифицированная прогонка (modified tridiagonal algorithm) 411
— теория Ньютона (— Newtonian theory) 15
модифицированное уравнение (—equation) 109
модифицированный блочный метод (— box method) 423
— неявный метод (— strongly-implicit (MSI) procedure) 169

неитерационный неявный алгоритм (noniterative implicit algorithm) 549
некорректно поставленная задача (ill-posed problem) 34
необходимое условие устойчивости *Неймана* (Neumann necessary condition) 97
нерегулярные сетки (irregular meshes) 82—86
нестационарные пограничные слои (unsteady boundary layers) 507—509
неявная схема (implicit scheme) 58
— (схемная) искусственная вязкость (implicit artificial viscosity) 112
— центрированная по времени схема (trapezoidal rule) 327
— — — — — с расщеплением потоков (— — with split flux) 329
неявные методы переменных направлений (alternating direction implicit (ADI) schemes) 20, 141—143, 166—168, 205
неявный метод Эйлера (Euler implicit method) 118—121

область влияния (zone of influence) 494
— зависимости (— — dependence) 494
— слабого взаимодействия (weak-interaction region) 513
обратные конечно-разностные методы (inverse finite-difference methods) 449—456
особенность *Гольдштейна* (Goldstein singularity) 445
отношение теплоемкостей (ratio of specific heats) 15
отрывные пузыри (bubble) 445
— течения (separated flows) 445

параболизованные уравнения *Навье—Стокса* (parabolized Navier—Stokes equations) 516—517, 521
параболическое уравнение (parabolic equation) 29, 35
параметр подобия (similarity parameter) 372
— релаксации (relaxation) 161
первый закон термодинамики (first law of thermodynamics) 222
погрешность аппроксимации (trancation error) 51, 57, 59
— округления (round-off —) 61
подход с сегрегированием (segregated approach) 553, 554
полностью неявный метод (fully implicit method) 404
потенциал скорости (velocity potential) 283
порядок погрешности аппроксимации (order of the truncation error) 59
последовательная верхняя релаксация по строкам (SOR by lines) 164—166
постоянная *Кармана* (von Kármán constant) 263
правило *Крамера* (Cramer rule) 151
преобразование координат для пограничного слоя (coordinate transformations for boundary layer) 431
— *Леви—Лиза* (Levy—Lees —) 427
— *Степанова—Мангелера* (Mangler —) 427
приближение подслоя (sublayer approximation) 537
— тонкого вязкого слоя (thin-shear-layer —) 479
— *Флюгге-Лотц* (FLARE —) 448, 449, 452, 456
продольный градиент давления (streamwise pressure gradient) 531—539
простая явная схема (simple explicit scheme) 58
простой неявный метод (— implicit (Laasonen) —) 135
— явный метод (— explicit —) 131—134
процедура SIMPLE 554, 557, 626—628
— SIMPLER 557
ПФ2-схема (AF2-scheme) 367
процедуры осреднения (averaging procedure) 236
прямые методы (direct methods) 444

путь смешения (mixing length) 222
пятиточечная схема (five-point formula) 147

разности против потока (upwind differencies) 125—126
разностные схемы с выделением скачков (shock-fitting schemes) 21, 316
— — — размазыванием скачков (shock-capturing —) 21
релаксационная схема *Саусвелла* (Southwell relaxation scheme) 19
релаксационные методы (relaxation schemes) 18
решение *Даламбера* волнового уравнения (D'Alambert solution of the wave equation) 33

самонастраивающийся метод 3-го порядка точности (tuned third-order methods) 183—185
сверхзвуковое течение (supersonic flow) 360—365
свободные сдвиговые течения (free-shear flows) 480—484
сглаживающая схема 4-го порядка (fourth-order smoothing scheme) 593
сетки с неравномерным шагом (unequal grid spacing) 435
сеточный шаблон (grid points) 355—357
сильно неявные методы (strongly-implicit methods) 168—169
символ *Кронекера* (Kronecker delta function) 220
скорость диссипации (dissipation rate) 275
смешанная краевая задача (mixed boundary value problem) 41
собственные значения матрицы (eigenvalues of matrix) 42
современные прямые методы (advanced-direct methods) 156—157
согласованность разностных схем (consistency) 59
соотношения *Гюгонио—Рэнкина* (Rankine—Hugoniot equation) 291, 348—351, 655
стационарные задачи (equilibrium problems) 22
схема приближенной факторизации (AF scheme) 367
— PUMPIN 557—558
сходимость итерационного процесса (iteration convergence) 63
— решения маршевых задач 61

теорема *Коши—Ковалевской*
— *Лакса* об эквивалентности (Lax equivalence theorem) 61
теория Ньютона для совершенного газа (Newtonian flow of a perfect gas) 13
толщина вытеснения (displacement thickness) 266
трансзвуковые течения (transonic flows) 289, 353, 365—375
трехмерные пограничные слои (three-dimensional boundary layers) 484—506
— — — уравнения 486
трехпалубная модель (triple-deck theory) 445, 464, 465
трехточечная аппроксимация вторых производных (three-point second derivative approximation) 55

ударные волны (shock waves) 14, 290, 655
уравнение *Бернулли* 282—283
— *Бюргерса* 45
— — вязкое (— — viscous) 45, 540—541
— — двумерное (— — 2-D) 202
— — невязкое (— — inviscid) 45
— — обобщенное (— — generalized) 190
— — трехмерное (— — 3-D) 189—206
— *Гельмгольца* 46
— *Гудерлея—Кармана* 372
— конвекции и диффузии (convection and diffusion) 46
— *Кортевега де Вриза* (Korteweg de Vries) 46
— *Крокко* (Crocco —) 286
— *Лапласа* 18, 23—25, 30, 40, 147, 284, 375—382, 638
— неразрывности (continuity equation) 217—218, 280—281
— — в форме *Рейнольдса* (Reynolds form of the — —) 238
— *Прандтля—Глауэрта* (Prandtl—Glauert —) 289, 305—312, 372, 375
— *Пуассона* (Poisson —) 46, 147, 614, 638
— состояния (equation of state) 224—226

— теплопроводности (heat equation) 27, 57, 70, 94, 98, 131—146
— *Трикоми* (Tricomi —) 45
— характеристик (characteristics —) 31, 35, 43, 306
— энергии (energy —) 222—224
— — в форме *Рейнольдса* 241—243
— — для невязкой жидкости 284—285
уравнения вязкого ударного слоя (viscous shock-layer equations) 517, 574—578
— количества движения (momentum equations) 219
— — — в форме *Рейнольдса* 239—241
— — — для невязкой жидкости 281—184
— *Коши—Римана* (Cauchy—Riemann equations) 42
— *Навье—Стокса* 221, 226, 299, 585—628
— *Рейнольдса* 235—246, 587
— совместности (compatibility —) 307
— *Эйлера* 279—291, 313, 316
условие *Жуковского—Кутты* (Kutta condition) 373
— Куранта—Фридрихса—Леви (CFL stability requirement) 19, 92—94, 325, 339, 356
— согласованности (consistency) 59
— устойчивости (stability) 59, 87—101, 414
— — систем уравнений 95

формула *Гаусса—Остроградского* (divergence theorem) 65
— *Лагранжа* для ускорения (Lagrange acceleration formula) 283
— *Прандтля* 263

характеристики уравнения (characteristics of the equation) 32, 92, 134
характеристические координаты 32, 38
характерный масштаб длины (characteristic velocity scale) 261
— — скорости (— length —) 261

центральные разности (central differencies) 52
— разностные операторы (central-difference operators) 53
центрированная по времени неявная схема (time-centered implicit method) 127

частично параболизованные уравнения *Навье—Стокса* (partially parabolized model) 560—574
число *Куранта* (Courant number) 91
— *Пекле* (Peclet —) 192
— — сеточное (mesh — —) 416
— *Прандтля* 266
— *Рейнольдса* 264
— — сеточное (mesh — —) 192, 416
— Стантона (Stanton —) 440

эллиптическое уравнение (elliptic equation) 29, 38
энтальпия (enthalpy) 317
энтропия (entropy) 285, 352, 353

$(\bar{k}-\varepsilon)$-модель 275—277
$\lambda$-схема *Моретти* 336

# Содержание т. 1

**Предисловие к русскому изданию**
**Предисловие**

**Глава 1. Введение**

§ 1.1. Общие замечания. § 1.2. Сравнение экспериментального, теоретического и вычислительного подходов. § 1.3. Исторический обзор.

**Глава 2. Уравнения в частных производных**

§ 2.1. Введение. § 2.2. Физическая классификация уравнений. § 2.3. Математическая классификация уравнений. § 2.4. Корректно поставленные задачи. § 2.5. Системы уравнений. § 2.6. Другие представляющие интерес уравнения в частных производных. Задачи.

**Глава 3. Основы метода конечных разностей**

§ 3.1. Введение. § 3.2. Метод конечных разностей. § 3.3. Конечно-разностная аппроксимация уравнений в частных производных. § 3.4. Различные методы построения конечно-разностных схем. § 3.5. Применение нерегулярных сеток. § 3.6. Устойчивость конечно-разностных схем. Задачи.

**Глава 4. Применение метода конечных разностей для решения модельных уравнений**

§ 4.1. Волновое уравнение. § 4.2. Уравнение теплопроводности. § 4.3. Уравнение Лапласа. § 4.4. Уравнение Бюргерса (невязкое течение). § 4.5. Уравнение Бюргерса (вязкое течение). § 4.6. Заключительные замечания. Задачи.

**Глава 5. Основные уравнения механики жидкости и теплообмена**

§ 5.1. Основные уравнения. § 5.2. Уравнения Рейнольдса для турбулентных течений. § 5.3. Уравнения пограничного слоя. § 5.4. Введение в моделирование турбулентности. § 5.5. Уравнения Эйлера. § 5.6. Преобразование основных уравнений. Задачи.

**Глава 6. Численные методы решения уравнений невязкой жидкости**

§ 6.1. Введение. § 6.2. Метод характеристик. § 6.3. Методы сквозного счета. § 6.4. Метод расщепления матричных коэффициентов. § 6.5. Методы решения уравнения потенциала. § 6.6. Уравнения малых возмущений для трансзвуковых течений. § 6.7. Методы решения уравнения Лапласа. Задачи.

# Оглавление

**Глава 7. Численные методы решения уравнений типа уравнений пограничного слоя** . . . . . 397

§ 7.1. Введение . . . . . 397
§ 7.2. Краткое сравнение различных методов расчета пограничного слоя . . . . . 398
§ 7.3. Конечно-разностные методы расчета двумерных и осесимметричных стационарных внешних течений . . . . . 399
§ 7.4. Обратные методы, отрывные течения и вязко-невязкое взаимодействие . . . . . 444
§ 7.5. Методы расчета внутренних течений . . . . . 466
§ 7.6. Свободные сдвиговые течения . . . . . 480
§ 7.7. Трехмерные пограничные слои . . . . . 484
§ 7.8. Нестационарные пограничные слои . . . . . 507

Задачи . . . . . 509

**Глава 8. Численные методы решения параболизованных уравнений Навье — Стокса** . . . . . 513

§ 8.1. Введение . . . . . 513
§ 8.2. Уравнения Навье — Стокса в приближении тонкого слоя . . . 517
§ 8.3. Параболизованные уравнения Навье — Стокса . . . . . 521
§ 8.4. Методы решения параболизованных и частично параболизованных уравнений Навье — Стокса для дозвуковых течений . . . 550
§ 8.5. Уравнения вязкого ударного слоя . . . . . 574
§ 8.6. Конические уравнения Навье — Стокса . . . . . 578

Задачи . . . . . 582

**Глава 9. Численные методы решения уравнений Навье — Стокса** . . . 585

§ 9.1. Введение . . . . . 585
§ 9.2. Уравнения Навье — Стокса для сжимаемой жидкости . . . . 585
§ 9.3. Уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости . . . 610

Задачи . . . . . 628

**Глава 10. Методы построения расчетных сеток** . . . . . 630

§ 10.1. Введение . . . . . 630
§ 10.2. Алгебраические методы . . . . . 632
§ 10.3. Методы, основанные на решении дифференциальных уравнений 638
§ 10.4. Адаптивные сетки . . . . . 644
§ 10.5. Дополнительные соображения . . . . . 660

Задачи . . . . . 661

**Приложение А.** Подпрограмма решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей . . . . . 663

**Приложение В.** Подпрограмма решения системы уравнений с блочной трехдиагональной матрицей . . . . . 665

**Приложение С.** Модифицированный сильно неявный метод . . . . . 673

**Обозначения** . . . . . 680

**Литература** . . . . . 686

**Именной указатель** . . . . . 715

**Предметный указатель** . . . . . 718

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Научное издание

Дейл Андерсон, Джон Таннехилл, Ричард Плетчер

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА
И ТЕПЛООБМЕН

В двух томах. Т. 2

Заведующий редакцией чл.-корр. АН СССР В. И. Арнольд

Зам. зав. редакцией А. С. Попов

Ст. научн. редактор П. Я. Корсоюцкая

Мл. научн. редактор Р. И. Пяткина,

Художник М. Н. Кузьмина

Художественный редактор В. И. Шаповалов

Технический редактор А. Л. Гулина

Корректор Н. А. Гиря

ИБ № 7491

Сдано в набор 06.06.89. Подписано к печати 04.12.89. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 10,5 бум. л. Усл. печ. л. 21,0. Усл. кр.-отт. 21,0. Уч. изд. л. 20,90. Изд. № 1/7088. Тираж 7800 экз. Зак. 279. Цена 1 р. 80 к.

Издательство «МИР» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по печати. 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Набрано в Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 191126, г. Ленинград, Социалистическая ул., 14.