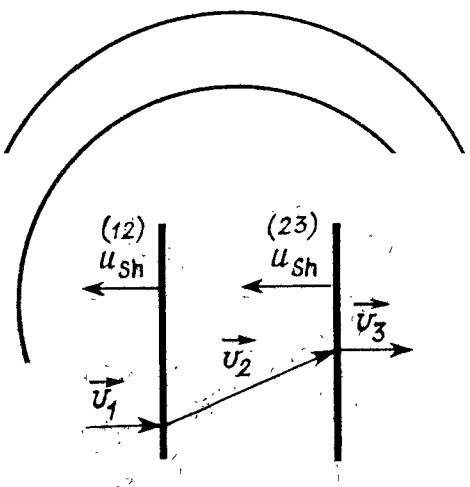
Р. В. ПОЛОВИН, В. П. ДЕМУЦКИЙ

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ



ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ

Р. В. ПОЛОВИН, В. П. ДЕМУЦКИЙ

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

МОСКВА
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
1987

УДК 537.84

Половин Р. В., Демуцкий В. П. Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 208 с.

Изложено современное состояние магнитной гидродинамики. Краткость достигнута за счет того, что авторы ограничились рассмотрением нетрудоемких, но характерных задач, которые являются моделью более сложных задач. Содержание монографии: магнитогидродинамические эффекты и их приложения (без математики), законы сохранения, изотропные и анизотропные процессы переноса, оценка кинетических коэффициентов, магнитогидродинамические волны, непрерывный спектр, распад волн, нелинейные волны, равновесные конфигурации, магнитные ловушки, устойчивость по Ляпунову, метод собственных функций, энергетический принцип, стохастическая неустойчивость, сильные разрывы, эволюционность, разрывы с выделением и поглощением энергии, структура разрывов, ионизирующая ударная волна, течения в каналах, магнитная аэродинамика, турбулентность, гидромагнитное динамо.

Для научных работников (инженеров – исследователей и физиков), не являющихся специалистами по магнитной гидродинамике, а также для преподавателей вузов и студентов.

Табл. 2. Ил. 50. Библиогр. 163.

Рецензент А. Б. Ватажин

П $\frac{1704040000\text{-}309}{051\,(01)\text{-}87}$ 8-87

© Энергоатомиздат, 1987

"В магнитогидродинамике настолько легко ошибиться, что не следует верить результату длинных и сложных математических выкладок, если нельзя понять его физического смысла; в то же время нельзя также полагаться на длинную и сложную цепь физических доводов, если нельзя продемонстрировать ее математически".

Чандрасекар С. Замечания к статьям Э. Ферми. В кн.: Ферми Э. Научные труды. Том 2. М.: Наука, 1972, с. 588.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория должна удовлетворять двум несовместимым требования .

1) ее результаты должны совпадать с экспериментальными данными;

2) она должна быть понятной.

Зачастую вторым требованием жертвуют ради первого. Однако такая точная, но необозримая, связанная с приближенными вычислениями на ЭВМ, теория описывает только одно частное решение уравнений и притом на конечном интервале времени. Иными словами, она описывает отдельные эксперименты, но не дает толчка для появления принципиально новых идей: неожиданных экспериментов и неожиданных технических приложений. Кроме того, численное решение не указывает путей повышения КПД и области оптимального использования МГД-машин, которые уже применяются в промышленности. Приближенные методы отказываются служить, когда нужно определить характер решения в течение бесконечно большого промежутка времени.

Поэтому в ряде случаев прибегают к другой крайности: заменяют математические выкладки "рассуждениями на пальцах". Однако печальный опыт изобретателей вечного двигателя показывает, что качественные рассуждения должны подкрепляться количественным анализом.

Мы выбираем "золотую середину": математическое исследование упрощенной модели явления. Ценность решений, полученных для простых задач, состоит в том, что они служат скелетом для построения приближенных решений более сложных задач. Объединение гидродинамики и электромагнетизма не только порождает новые трудности в решении задач, но и приводит к новым физическим явлениям. Решения же простых задач служат как бы мостом для проникновения в глубь новых физических процессов.

Цель настоящей книги – ввести читателя в круг представлений магнитной гидродинамики (МГД), познакомить с методами, которые в ней используются, подготовить к чтению оригинальной литературы. Этой целью определяются отбор материала и характер изложения. Мы ограничились сравнительно небольшим числом нетрудоемких узловых во-

просов, но разобрали их подробно, с обоснованием сделанных допущений и принятых методов исследования, подробными выкладками и анализом результатов. Лишь в отдельных случаях ради полноты освещения важных вопросов рассмотрены задачи, требующие громоздкого решения. В этих случаях читатель отсылается к соответствующей литературе. Ссылки на литературные источники приводятся для того, чтобы помочь читателю найти материал, расширяющий и дополняющий текст книги.

Литература по магнитной гидродинамике огромна. Только список журналов, в которых публикуются статьи по магнитной гидродинамике (включая приложения, т. е. практически все журналы по физике, математике, технике), состоит из нескольких тысяч названий. Чтобы удержать размер данной книги в разумных пределах, в ряде случаев практикуется неявное цитирование основополагающих работ, а именно даются ссылки на более поздние работы (в основном обзорного характера), в которых цитируются пионерские работы.

Мы просим прощения у авторов, имена которых не были явно упомянуты в данной книге.

Мы старались сделать книгу легко читаемой и доступной для лиц, которые не являются специалистами по магнитной гидродинамике. Вместе с тем мы не жалели места для примеров, поясняющих излагаемый материал и его значение, в частности для приложений. Главное внимание уделяется идейной стороне вопроса, физической картине, не заслоненной деталями, однако разъясняются также различные теоретические тонкости.

Тема книги оказалась на стыке нескольких глубоких и обширных дисциплин – электродинамики, гидродинамики, физики плазмы, термодинамики, аэродинамики, астрофизики, реологии, не говоря уже о прикладных дисциплинах – электротехнике, химической технологии, проблеме управляемого термоядерного синтеза, реактивной технике. Это узловое расположение темы определило необходимость включения в текст фрагментов с элементарным изложением ряда основных вопросов. Некоторые из этих фрагментов могут показаться специалистам по данной дисциплине излишними, но они необходимы для понимания сути дела специалистам по другим дисциплинам и студентам.

В первых двух параграфах основные идеи и приложения магнитной гидродинамики изложены максимально упрощенно, практически без использования математики.

Книга носит теоретический характер, однако, по нашему мнению, краткость и простота изложения сделают ее "теорминимумом" по магнитной гидродинамике и для экспериментаторов (физиков и инженеров-исследователей). Широта охвата, сжатость и доступность изложения, а также обширный предметный указатель позволяют пользоваться книгой как справочным пособием по магнитной гидродинамике.

По характеру изложения в книге ближе всего подходит гл. 8 из [1]. Но из-за чересчур малого объема много важных вопросов остались в [1] "за кадром". Первое издание книги [2] знаменовало рождение

магнитной гидродинамики, однако собственно магнитной гидродинамике в ней посвящена только гл. 3. Важной вехой в литературе по магнитной гидродинамике явилась монография [3], но с момента ее опубликования прошло много времени. Это же относится и к монографиям [4–8]. (Несмотря на название около половины книги [4] посвящено довольно фундаментальному изложению теории.) Более глубокому изложению теории, рассчитанному на специалистов, посвящены книги [14, 17, 24, 26–28, 119, 128, 148, 158, 159], а также монографические обзоры [21, 69–70а, 72, 82, 87, 101, 121, 125].

Большое влияние на становление отечественной магнитной гидродинамики оказал обзор [160].

Отметим также монографии общефизического характера, посвященные приложениям магнитной гидродинамики [1, 3, 4, 9, 23, 31, 71, 143, 153, 161–163].

Мы глубоко признательны А. И. Ахиезеру, А. С. Бакаю, Е. М. Лифшицу и В. В. Яновскому за полезное обсуждение ряда вопросов, возникших при написании книги.

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{B}$	–	магнитная индукция
c_A	–	альфвеновская скорость
c_p	–	удельная теплоемкость единицы массы при постоянном давлении
c_v	–	удельная теплоемкость единицы массы при постоянном объеме
c_s	–	скорость звука
D	–	коэффициент диффузии
$\mathbf{E}$	–	напряженность электрического поля
$\mathbf{H}$	–	напряженность магнитного поля
Ha	–	число Гартмана
$\mathbf{j}$	–	плотность тока
Kn	–	Число Кнудсена
$\mathbf{k}$	–	волновой вектор
l	–	длина свободного пробега
m_e	–	масса электрона
m_i	–	масса иона
n	–	число частиц в единице объема
Pe	–	число Пекле
$\mathbf{P}$	–	вектор Пойнтинга
p	–	давление
$\mathbf{q}$	–	плотность потока тепла
Re	–	число Рейнольдса
Re_m	–	магнитное число Рейнольдса
Si	–	число Сирса
Sh	–	шир
S_Ω	–	энтропия объема Ω
s	–	удельная энтропия
T	–	температура
u_{ij}	–	тензор деформации
V_A	–	фазовая скорость альфвеновской волны
V_F	–	фазовая скорость быстрой магнитозвуковой волны
V_s	–	фазовая скорость медленной магнитозвуковой волны
$\mathbf{v}$	–	скорость среды
v_{ij}	–	тензор скоростей деформации
v_T	–	тепловая скорость
$\mathbf{W}$	–	плотность потока энергии
w_{ij}	–	тензор ускорений деформации
ϵ	–	диэлектрическая проницаемость
ϵ_m	–	удельная внутренняя энергия
ζ	–	коэффициент объемной (второй) вязкости

η – коэффициент сдвиговой (первой) вязкости
κ – коэффициент теплопроводности
λ – длина волны
μ – магнитная проницаемость
ν – частота столкновений
ν_m – магнитная вязкость
π_{ij} – тензор плотности потока импульса
π_{ij}^{ρ} – гидродинамическая часть тензора
π_{ij}^{B} – полевая часть тензора
ρ – плотность
ρ_e – плотность зарядов
σ – проводимость
σ_{ij} – тензор напряжений
σ_{ij}' – тензор вязкости
τ – характерное время
χ – коэффициент температуропроводности
ω – частота
$\omega_\alpha = e_\alpha B/(m_\alpha c)$ – циклотронная частота

Глава 1

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

1.1. Магнитогидродинамические приближения

При движении электропроводной жидкости или ионизованного газа (плазмы) в магнитном поле индуцируется электрическое поле и возникает электрический ток. В свою очередь взаимодействие тока с магнитным полем вызывает изменение движения жидкости и изменение магнитного поля.

Магнитная гидродинамика – это раздел механики сплошных сред, изучающий движение проводящих (электропроводных) сред в присутствии магнитного поля [8а]. Иными словами, магнитная гидродинамика изучает физику жидких (или газообразных) проводников в магнитном поле. Наряду с этим определением, в котором указан предмет исследования, но не указано применяемое приближение (магнитная гидродинамика в *широком смысле*), под магнитной гидродинамикой понимают низкочастотный предел, когда пренебрегают не только кинетическими эффектами, возникающими из-за теплового разброса частиц, но и раздельным движением различных компонент плазмы (электронов, различных сортов ионов и нейтральных частиц). В магнитной гидродинамике в узком смысле (МГД-модель) среда рассматривается как единая жидкость, имеющая в каждой точке пространства $\mathbf{r}(x, y, z)$ и в каждый момент времени t определенные плотность ρ, давление p и скорость v. Кроме этих чисто гидродинамических величин состояние среды характеризуется магнитной индукцией $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. (Мы полагаем магнитную проницаемость μ равной единице, не делая различия между магнитной индукцией $\mathbf{B}$ и напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$.)

Гидродинамическим описанием можно пользоваться, если характерная для рассматриваемого процесса частота ω значительно меньше частоты столкновений отдельных частиц ν: $\omega \ll \nu$. Если ввести понятие характерной длины L (размеры объекта), характерного времени τ – времени пролета длины L ионами, имеющими тепловую скорость v_{Ti}:

$$\tau \sim L/v_{Ti},$$

то характерная частота

$$\omega \sim 1/\tau \sim v_{Ti}/L$$

и условие $\omega \ll \nu$ принимает вид $l \ll L$.

Введя *число Кнудсена*

$$\mathrm{Kn} = l/L, \tag{1.1}$$

можно сказать, что гидродинамическое описание справедливо при малых числах Кнудсена, $\mathrm{K} \ll 1$. При этом каждый сорт частиц α (электроны, ионы, нейтралы) описывается своими плотностью ρ_α, давлением p_α и скоростью $\mathbf{v}_\alpha$. Это — *многожидкостная магнитная гидродинамика.* В частности, полностью ионизованной плазме, состоящей только из электронов и одного сорта ионов, соответствует *двухжидкостная магнитная гидродинамика.*

Если характерная частота ω значительно меньше частоты обмена энергией между электроном и ионом ν_{ei}, то давления электронов p_e и ионов p_i успевают выравняться и плазма характеризуется единым давлением p. При этом вследствие того, что электрон значительно легче иона, плотность массы ρ и скорость среды $\mathbf{v}$ определяются ионами, а плотность тока $\mathbf{j}$ — электронами. Такую жидкость, рассматриваемую как единое целое, называют *простой.*

Таким образом, магнитная гидродинамика в узком смысле является низкочастотным пределом магнитной гидродинамики в широком смысле. Важность низкочастотного предела обусловлена тем, что малым частотам соответствуют большие длины волн. Поэтому в низкочастотные движения вовлекаются большие массы вещества. Что же касается высокочастотных, т. е. коротковолновых, процессов, то им соответствуют мелкие детали движения, как бы рябь на поверхности воды. Кроме того, интерференция различных частот, т. е. различных длин волн, содержащихся в волновом пакете, приводит к затуханию коротковолновых компонент. Этот эффект хорошо известен в акустике — вдали от оркестра слышен только барабан. Поэтому попрошествии большого промежутка времени и на большом расстоянии от источника главную роль играют длинноволновые члены соответствующих уравнений.

В дальнейшем под магнитной гидродинамикой будем понимать магнитную гидродинамику в узком смысле.

При медленных движениях среды электроны успевают сместиться в сторону увеличения электрического потенциала таким образом, что градиент этого потенциала обратится в нуль. При этом электрическое поле $\mathbf{E}'$ в собственной системе отсчета* ([2], с. 89)

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B} \tag{1.2}$$

равно нулю, т. е.

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B} \tag{1.3}$$

---

* Эффектами поляризации и намагничивания среды пренебрегаем, отождествляя электрическую индукцию [1] $\mathbf{D}$ с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитную индукцию $\mathbf{B}$ с напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}$. Иными словами, полагаем диэлектрическую проницаемость ϵ и магнитную проницаемость μ равными единице.

(скорость плазмы полагаем нерелятивистской, $v \ll c$, и пренебрегаем поэтому членами порядка v^2/c^2).

Из (1.3) видно, что электрическое поле в нерелятивистской магнитной гидродинамике значительно меньше магнитного:

$$E \sim (v/c)B. \tag{1.4}$$

Поэтому магнитное поле не зависит от системы отсчета.

Из соотношения (1.4) видно, что в нерелятивистской магнитной гидродинамике энергия магнитного поля $B^2/(8\pi)$ значительно больше энергии электрического поля $E^2/(8\pi)$, и последней можно пренебречь.

Одножидкостное гидродинамическое приближение хорошо описывает широкий круг явлений в неионизованных газах. Напротив, одножидкостная магнитная гидродинамика удовлетворительно описывает экспериментальные факты только в космических масштабах. В случае лабораторной плазмы одножидкостная магнитная гидродинамика является довольно грубым приближением к действительности. Что же касается проводящих жидкостей в земных условиях (жидкие металлы, морская вода), то они хорошо описываются в рамках одножидкостной модели.

В магнитной гидродинамике изменяются привычные связи между различными электрическими величинами. Так, в электротехнике ток определяется в основном электрическим полем (закон Ома), а магнитное поле вызывает только малые поправки. Напротив, в магнитной гидродинамике ток определяется в основном магнитным полем.

В самом деле, оценим различные члены в уравнении Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{1.5}$$

Пользуясь соотношением (1.4), получаем

$$|\operatorname{rot} \mathbf{B}| \sim \frac{B}{L}, \quad \frac{1}{c}\left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right| \sim \frac{v}{c^2\tau}B,$$

где L – характерная длина, а τ – характерное время. Замечая, что отношение L/τ равно характерной скорости V и что v тоже порядка V, находим

$$\frac{1}{c}\left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right| \Big/ |\operatorname{rot} \mathbf{B}| \sim V^2/c^2.$$

Следовательно, в нерелятивистском случае ($V \ll c$) током смещения в правой части уравнений (1.5) можно пренебречь. Таким образом, уравнение (1.5) позволяет выразить плотность тока через магнитную индукцию:

$$\mathbf{j} = (c/4\pi)\operatorname{rot} \mathbf{B}. \tag{1.6}$$

Если характерная скорость порядка или больше скорости звука, то следует учитывать сжимаемость среды, т. е. полагать плотность ρ переменной. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, иногда вместо "магнитная гидродинамика" говорят "магнитная газодинамика". В ряде случаев термины магнитогидродинамический и магнитогазодинамический заменяют эквивалентными – *гидромагнитный* и *газомагнитный*. Мы будем именовать магнитогидродинамическую среду "жидкостью" или "плазмой" в зависимости от приложений и сложившихся традиций.

Заметим, что приближением магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости иногда пользуются вне пределов его применимости. Это связано с тем, что учет сжимаемости сильно усложняет МГД-эффекты, тогда как в несжимаемой жидкости эти эффекты проявляются более ярко.

В термоядерных исследованиях уравнения магнитной гидродинамики широко использовались в конце 50-х годов как первое приближение. Затем центр тяжести переместился на более точную, но более сложную кинетическую теорию. Но кинетическое описание содержит слишком много информации. Для нетривиальной геометрии систему кинетических уравнений невозможно решить даже численно.

В 70-х годах в связи с переходом в термоядерных исследованиях к большим плотностям плазмы и более сложным методам удержания возродился интерес к магнитной гидродинамике.

1.2. Магнитогидродинамические эффекты

Из уравнений § 1.1 вытекает целый ряд физических выводов и инженерных приложений. Прежде всего из уравнения (1.3) видно, что движение проводящей среды поперек магнитного поля создает разность электрических потенциалов. Этот эффект может быть использован для создания *магнитогидродинамических генераторов* [4, 5] электроэнергии, в которых осуществляется прямой переход тепловой энергии в электрическую. Чтобы газ стал электропроводным, его нагревают до нескольких тысяч градусов, что вызывает ионизацию, т. е. превращение газа в плазму. Основное преимущество МГД-генераторов перед тепловыми (например, газовыми турбинами) состоит в том, что плазма имеет высокую температуру T, а это приводит к повышению максимального КПД, равного, как известно ([6], с. 77),

$$\eta_{\max} = 1 - T_0/T,$$

где T_0 – температура окружающей среды, а T – температура рабочего тела. Для повышения $\eta_{\max}$ нужны высокие температуры T, чего невозможно достичь в газовой турбине, так как при высокой температуре ее лопасти теряют прочность и разрушаются.

Другим приложением соотношения (1.3) являются *магнитогидродинамические расходомеры* [7] и *измерители скорости*. Преимущест-

вом МГД-расходомера является его малая инерционность. Отсутствие контакта с измеряемой жидкостью делают его незаменимым при измерении расхода как слишком "нежных" (кровь), так и слишком агрессивных (жидкие металлы) жидкостей.

Из (1.3) следует также, что плазма, помещённая в скрещенные электрическое и магнитное поля, приходит в движение. Если, например, электрическое поле направлено вдоль оси y, а магнитное – вдоль оси z, то составляющая скорости среды вдоль оси x

$$v_x = cE_y/B_z. \tag{1.7}$$

Такое движение, перпендикулярное электрическому и магнитному полям, называют *дрейфовым*, а его скорость – *дрейфовой скоростью.* Этот эффект используют для создания *магнитогидродинамических движителей* [8] для ракет. При этом плазме можно придать скорость, значительно большую скорости звука, с которой вылетают газы из сопла обычной ракеты. Поэтому сила тяги, развиваемая единицей массы топлива в магнитогидродинамическом реактивном движителе, значительно больше, чем в тепловом.

Движение электропроводной жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях используют также для создания *магнитогидродинамических насосов кондукционного* типа, от английского conduction – проводимость; движение жидкости сопровождается током проводимости с плотностью j_y, направленным поперек трубы и вызванным электрическим полем E_y. Преимущество МГД-насосов над обычными состоит в том, что в них нет контакта подвижных механических частей с перекачиваемой жидкостью и их легко можно герметизировать, что существенно для расплавленных высокотемпературных, радиоактивных и химически агрессивных металлов.

Если магнитное поле направлено вдоль оси плазменного цилиндра, а электрическое – по радиусу, то плазма приходит во вращение по азимуту, что придает ей устойчивость. Такую конфигурацию называют *гомополяром.*

Если проводник пересекает магнитные силовые линии, то в нем индуцируется электрическое поле. С другой стороны, в системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью, электрическое поле равно нулю. Это означает, что жидкость как бы "приклеена" к магнитным силовым линиям или магнитные силовые линии "вморожены" в жидкость [3].

Закон вмороженности [1, 9–13] имеет многочисленные применения. Этот закон позволяет понять и предсказать ряд космических эффектов. Так, из Солнца вытекает плазменный поток (солнечный ветер), не имеющий магнитного поля. Встречаясь с магнитным полем Земли, он по закону вмороженности обтекает его, как жидкость обтекает твердое тело. При этом вокруг Земли образуется *магнитная каверна*, внутри которой сконцентрировано магнитное поле, но куда не проникает солнечный ветер [13а].

Рассмотрим теперь напряжения в жидкости, возникающие из-за существования магнитных силовых линий. Как известно [13б], магнитные силовые линии стремятся сократить свою длину и оттолкнуться друг от друга в поперечном (относительно **B**) направлении. Вследствие закона вмороженности эти напряжения непосредственно передаются жидкости.

Поэтому в плазме кроме обычного гидростатического давления p возникает еще добавочное поперечное (относительно **B**) давление тем большее, чем больше напряженность магнитного поля **B**. Это поперечное давление магнитного поля используется для магнитного удержания горячей плазмы без соприкосновения с твердыми стенками, что необходимо для осуществления управляемых термоядерных реакций [10].

Благодаря поперечному давлению движущееся н е о д н о р о д н о е магнитное поле приводит в движение электропроводящую жидкость. Этот эффект используется для создания *магнитогидродинамических насосов* [*индукционного* типа; название отражает тот факт, что магнитное поле в жидкости создается путем индукции за счет внешнего (бегущего) электромагнитного поля]. На этом же принципе основана работа *магнитогидродинамических движителей* морских судов, а также *асинхронных* плазменных *двигателей.* (Подробнее о технических применениях магнитной гидродинамики см. [14–17, 18–32].)

Стремление магнитной силовой линии сократить свою длину приводит к тому, что силовая линия ведет себя как натянутая струна – она стремится выпрямиться. Если в одном месте изогнуть магнитную силовую линию, то она выпрямится, но благодаря конечной массе вмороженной в нее жидкости "проскочит" положение равновесия и изогнется в противоположную сторону. Таким образом, магнитное поле, а вместе с ним и жидкость ведут себя как упругое тело. Этот эффект способствует стабилизации равновесных МГД-конфигураций. Далее, вследствие продольного натяжения при растяжении магнитных силовых линий производится работа, которая идет на увеличение индукции магнитного поля. Но при турбулентном движении любые две близкие частицы жидкости с течением времени в среднем расходятся. В результате силовые линии растягиваются, а магнитное поле усиливается ([1], с. 351). Этим объясняется возникновение магнитного поля звезд и планет – гидромагнитное динамо (подробнее об этом см. в гл. 8).

1.3. Законы сохранения

Переходя к математическому описанию изменения МГД-величин ρ, p, **v**, **B** во времени, заметим, что при этом исследуется эволюция "того же" магнитного поля и "той же" жидкости. Это означает, что несмотря на изменения что-то должно остаться прежним. Отсюда следует, что должны существовать законы сохранения.

Выведем эти законы, полагая жидкость и д е а л ь н о й, т. е. пренебрегая всеми диссипативными эффектами (вязкостью, теплопроводностью и электрическим сопротивлением). При этом МГД-эффекты проявляются наиболее ярко.

Начнем с *закона сохранения массы.* Масса единицы объема жидкости равна ее плотности ρ. Чтобы найти массу единицы объема поля, воспользуемся соотношением Эйнштейна между массой m и энергией $\mathcal{E} = mc^2$ и выражением для энергии единицы объема поля $(E^2 + B^2)/(8\pi)$. Так как $E \sim vB/c$, то в нерелятивистском случае масса единицы объема поля по порядку равна B^2/c^2. Полагая, что плотность магнитной энергии $B^2/(8\pi)$ того же порядка, что и плотность гидродинамической энергии $\rho v^2/2$ (где ρ – плотность вещества):

$$B^2/(8\pi) \sim \rho v^2/2, \tag{1.8}$$

видим, что отношение массы поля к массе вещества в единице объема имеет порядок

$$(B^2/c^2)/\rho \sim v^2/c^2$$

и в нерелятивистском пределе массой поля можно пренебречь. Поэтому увличение массы в некотором неподвижном объеме Ω за бесконечно малое время dt равно

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho d\mathbf{r} dt. \tag{1.9}$$

Эта величина равна потоку массы, в т е к а ю щ е м у в объем Ω извне. Плотность потока массы жидкости равна $\rho\mathbf{v}$. Плотность потока массы поля согласно соотношению Эйнштейна равна плотности потока энергии, деленной на c^2. Как известно, плотность потока энергии электромагнитного поля равна вектору Пойнтинга

$$\mathbf{P} = (c/4\pi)\, \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \tag{1.10}$$

Поэтому плотность потока массы поля равна $\mathbf{P}/c^2$. Для оценки этой величины преобразуем вектор Пойнтинга с помощью соотношения (1.3):

$$\mathbf{P} = [B^2\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}]/4\pi. \tag{1.11}$$

Мы видим, что плотность потока массы поля имеет порядок vB^2/c^2, и в нерелятивистском случае этой величиной можно пренебречь по сравнению с плотностью потока массы вещества $\rho\mathbf{v}$. Следовательно, увеличение массы в объеме Ω за время dt равно

$$-\iint_{\Sigma} \rho \mathbf{v} d\boldsymbol{\Sigma} dt, \tag{1.12}$$

где Σ – замкнутая поверхность, ограничивающая объем Ω, и $d\boldsymbol{\Sigma}$ – век-

тор бесконечно малого элемента площади этой поверхности [знак минус в формуле (1.12) появился из-за того, что вектор направлен вдоль внешней нормали к поверхности]. Приравнивая выражения (1.9) и (1.12), получаем *закон сохранения массы в интегральной форме*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Omega}\rho\, d\mathbf{r}+\iint\limits_{\Sigma}\rho\mathbf{v}d\boldsymbol{\Sigma}=0. \tag{1.13}$$

Если ρ и $\mathbf{v}$ – непрерывно дифференцируемые функции координат в объеме Ω, то поверхностный интеграл можно преобразовать в объемный, пользуясь формулой Остроградского

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{U}d\boldsymbol{\Sigma}=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{U}d\mathbf{r},$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция координат. При этом закон сохранения массы принимает вид

$$\iiint\limits_{\Omega}(\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}\rho\mathbf{v})d\mathbf{r}=0.$$

Полагая объем Ω бесконечно малым, получаем закон сохранения массы в *дифференциальной форме*

$$\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}=0, \tag{1.14}$$

называемый также *уравнением непрерывности.*

Перейдем теперь к *уравнению баланса импульса.* Импульс единицы объема жидкости равен $\rho\mathbf{v}$, т. е. плотности потока массы. Как было показано выше, в нерелятивистском случае плотностью потока массы поля, т. е. плотностью импульса поля, можно пренебречь. Поэтому скорость увеличения i-й компоненты импульса в объеме Ω

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Omega}\rho v_i\, d\mathbf{r}. \tag{1.15}$$

Эта величина равна сумме скорости т е к а н и я i-й компоненты импульса вещества и поля в объем Ω

$$-\iint\limits_{\Sigma}\pi_{ij}\,d\Sigma_j \tag{1.16}$$

и i-й компоненте внешней силы F_i:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Omega}\rho v_i\,d\mathbf{r}=-\iint\limits_{\Sigma}\pi_{ij}\,d\Sigma_j+F_i. \tag{1.17}$$

Здесь π_{ij} – тензор плотности потока импульса, состоящий из гидродинамической части ([33], с. 27)

$$\pi_{ij}^{(\rho)}=\rho v_i v_j+p\delta_{ij} \tag{1.18}$$

и полевой части ([1], с. 315, [2], с. 111)

$$\pi_{ij}^{(B)} = \frac{B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{B_i B_j}{4\pi}\ ; \tag{1.19}$$

$$\pi_{ij} = \pi_{ij}^{(\rho)} + \pi_{ij}^{(B)} \tag{1.20}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование).

Внешнюю силу полагаем потенциальной:

$$\mathbf{F} = -\iiint_{\Omega} \rho \nabla G d\mathbf{r}, \tag{1.21}$$

где G – потенциал внешнего поля, относящийся к единице массы жидкости. Этот потенциал может описывать взаимодействие жидкости со стенкой или гравитационное взаимодействие.

Пользуясь соотношением (1.8), находим, что в отличие от массы и импульса электромагнитного поля, которыми можно было пренебречь в нерелятивистском пределе, плотность потока импульса поля имеет такой же порядок, что и плотность потока импульса жидкости:

$$\pi_{ij}^{(B)} \sim \pi_{ij}^{(\rho)}.$$

Из выражений (1.15)–(1.21) следует уравнение баланса импульса в *интегральной форме*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} \rho v_i d\mathbf{r} = -\iint_{\Sigma} \rho v_i v_j d\Sigma_j - \iint_{\Sigma} p\delta_{ij} d\Sigma_j -$$

$$-\iint_{\Sigma}\left(\frac{B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{B_i B_j}{4\pi}\right) d\Sigma_j - \iiint_{\Omega} \rho (\nabla G)_i d\mathbf{r}. \tag{1.22}$$

Если подынтегральные выражения в уравнении баланса импульса (1.22) непрерывно дифференцируемы, то его можно привести с помощью теоремы Остроградского к *дифференциальной форме*:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_i v_j + p\delta_{ij} + \frac{B^2}{8\pi}\delta_{ij} - \frac{B_i B_j}{4\pi}\right) - \rho\frac{\partial G}{\partial x_i} = 0. \tag{1.23}$$

При отсутствии внешней силы ($\nabla G = 0$) получаем *закон сохранения импульса в дифференциальной форме*:

$$\partial(\rho v_i)/\partial t + \partial \pi_{ij}/\partial x_j = 0. \tag{1.24}$$

Перейдем далее к уравнению *баланса энергии*. Увеличение энергии жидкости и поля в объеме Ω в единицу времени

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon_m + G\right) + \frac{B^2}{8\pi}\right] d\mathbf{r} \tag{1.25}$$

(ϵ_m – внутренняя энергия единицы массы жидкости) равно сумме энергии жидкости

$$-\iint\limits_{\Sigma} \rho\,(v^2/2 + \epsilon_m)\,\mathbf{v}\,d\boldsymbol{\Sigma} \tag{1.26}$$

и энергии электромагнитного поля

$$-\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{P}\,d\boldsymbol{\Sigma} \tag{1.27}$$

[$\mathbf{P}$ – вектор Пойнтинга (1.10)], втекающих в единицу времени в объем Ω, а также работы, произведенной в единицу времени над объемом Ω давлением жидкости

$$-\iint\limits_{\Sigma} p\,\mathbf{v}\,d\boldsymbol{\Sigma} \tag{1.28}$$

и внешней силой

$$\iiint\limits_{\Omega} \rho\mathbf{v}(-\nabla G)\,d\mathbf{r}. \tag{1.29}$$

Таким образом, уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Omega}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon_m + G\right) + \frac{B^2}{8\pi}\right]d\mathbf{r} + \iint\limits_{\Sigma}\mathbf{W}\,d\boldsymbol{\Sigma} = -\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathbf{v}\,\nabla G\,d\mathbf{r}, \tag{1.30}$$

где $\mathbf{W}$ – плотность потока энергии:

$$\mathbf{W} = \rho\mathbf{v}(v^2/2 + \epsilon_m) + p\mathbf{v} + [B^2\mathbf{v} - (\mathbf{B}\mathbf{v})\,\mathbf{B}]/4\pi. \tag{1.31}$$

Если подынтегральные выражения в (1.30) непрерывно дифференцируемы, то уравнение баланса энергии можно привести к дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon_m\right) + \frac{B^2}{8\pi} + \rho G\right] + \operatorname{div}\mathbf{W} = -\rho\mathbf{v}\,\nabla G. \tag{1.32}$$

Если внешняя сила отсутствует, уравнение баланса энергии (1.30) превращается в закон сохранения энергии в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\Omega}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon_m\right) + \frac{B^2}{8\pi}\right]d\mathbf{r} = -\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{W}\,d\,\Sigma, \tag{1.33}$$

а уравнение (1.32) – в закон сохранения энергии в *дифференциальной форме*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon_m\right) + \frac{B^2}{8\pi}\right] + \operatorname{div}\mathbf{W} = 0. \tag{1.34}$$

Законы сохранения массы, импульса и энергии (1.14), (1.24), (1.34) представляют собой модификацию соответствующих законов обычной (немагнитной) гидродинамики на случай и д е а л ь н о проводящей жидкости.

Перейдем, наконец, к электромагнитным законам сохранения. Первым из них является закон *отсутствия магнитных зарядов*, имеющий в интегральной форме вид

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{B}\, d\boldsymbol{\Sigma} = 0 \tag{1.35}$$

или в *дифференциальной* форме (в области непрерывной дифференцируемости $\mathbf{B}$) – вид

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{1.36}$$

Это выражение можно рассматривать как закон "сохранения отсутствия" магнитных зарядов.

Но специфическим для магнитной гидродинамики является закон *сохранения магнитного потока* Φ через любой замкнутый материальный контур L, движущийся вместе с жидкостью. В интегральной форме этот закон имеет вид

$$d\Phi/dt = 0, \tag{1.37}$$

где

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{B}\, d\boldsymbol{\Sigma} \tag{1.38}$$

и Σ – произвольная поверхность, натянутая на контур L.

Чтобы доказать равенство (1.37), представим полную производную $d\Phi/dt$ в виде

$$d\Phi/dt = \partial\Phi/\partial t + \Delta\Phi/\Delta t, \tag{1.39}$$

где $\partial\Phi/\partial t$ описывает изменение магнитного потока через неподвижный контур вследствие изменения магнитного поля, а $\Delta\Phi/\Delta t$ – изменение магнитного потока через движущийся контур при неизменном магнитном поле.

Пользуясь уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t \tag{1.40}$$

и соотношением

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\boldsymbol{\Sigma} = \int_{L} \mathbf{E}\, d\mathbf{L}, \tag{1.41}$$

находим

$$\partial\Phi/\partial t = -c \int_{L} \mathbf{E}\, d\mathbf{L}. \tag{1.42}$$

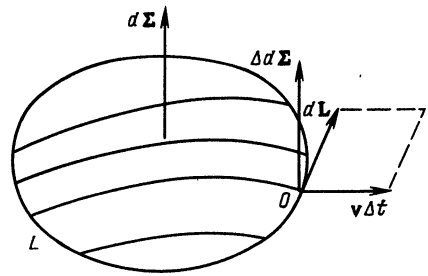


Рис. 1.1. Изменение магнитного потока вследствие движения жидкого контура L

Приращение $\Delta\Phi$ в формуле (1.39) вызывается появлением новых элементов площади $\Delta d\boldsymbol{\Sigma}$ за время Δt. Как видно из рис. 1.1, $\Delta d\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{v}\Delta t \times d\mathbf{L}$. Поэтому $\Delta\Phi = \int\limits_L \mathbf{B}(\mathbf{v}\times d\mathbf{L})\Delta t$.

Пользуясь тождеством $\mathbf{B}(\mathbf{v}\times d\mathbf{L}) = -(\mathbf{v}\times\mathbf{B})d\mathbf{L}$, получаем

$$\Delta\Phi/\Delta t = -\int\limits_L (\mathbf{v}\times\mathbf{B})d\mathbf{L}. \tag{1.43}$$

Складывая (1.42) и (1.43) и учитывая равенства (1.39) и (1.3), приходим к соотношению (1.37). Таким образом, закон сохранения магнитного потока в *интегральной* форме имеет вид

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{B}\, d\boldsymbol{\Sigma} = 0. \tag{1.44}$$

С помощью соотношений (1.39)–(1.44) этот закон можно представить в *дифференциальной* форме:

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{1.45}$$

Закон сохранения магнитного потока является математическим выражением закона *вмороженности*, рассмотренного на интуитивном уровне в предыдущем параграфе.

1.4. Идеальная магнитная гидродинамика

Полученные в § 1.3 законы сохранения позволяют сформулировать полную систему уравнений идеальной магнитной гидродинамики. В законы сохранения входят девять неизвестных функций координат и времени: три компоненты скорости жидкости $\mathbf{v}$, три компоненты вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ и три термодинамические функции (плотность жидкости ρ, ее давление p и удельная внутренняя энергия ϵ_m). Однако не все эти функции независимы.

Как известно, все термодинамические величины зависят только от двух независимых величин. Такую среду называют *двухпараметрической* ([13], с. 216). С точки зрения эксперимента в качестве независи-

мых параметров удобно выбрать плотность и температуру. Напротив, классификация МГД-волн упрощается, если независимыми параметрами являются давление и энтропия. Примером многопараметрической среды может служить деформируемое твердое тело в теории упругости. Состояние такого тела характеризуется семью переменными параметрами – шестью компонентами тензора деформаций u_{ij} и температурой T.

Мы видим, что в идеальной магнитной гидродинамике состояние характеризуется восемью функциями координат и времени: $p(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и $s(\mathbf{r}, t)$ (векторная функция равносильна трем скалярным). Три компоненты $\mathbf{B}$ связаны между собой согласно уравнению (1.36), поэтому независимыми будут с е м ь функций. Входящая в уравнение (1.14) плотность ρ выражается через p и s (где s – удельная энтропия) с помощью уравнения состояния

$$\rho = \rho(p, s), \tag{1.46}$$

которое получается из термодинамического рассмотрения и которое полагаем известным.

В некоторых случаях еще более сузим класс рассматриваемых сред, полагая, что среда – *идеальный газ*, уравнение состояния которого имеет вид [6]

$$p = 2nkT$$

(уравнение Клапейрона), где n – число частиц (электронов или равное ему число ионов) в единице объема; k – постоянная Больцмана. Если к тому же теплоемкость постоянна (такой газ называют совершенным [13]), то удельная энтропия (см. [6], § 80)

$$s = c_v \ln(p/\rho^{\gamma}), \tag{1.47}$$

где $\gamma = c_p/c_v$; для одноатомного газа $\gamma = 5/3$.

Определим c_v в случае плазмы, в единице объема которой находится n_e электронов с массой m_e и n_i ионов с массой m_i. Из формулы $\langle mv^2/2 \rangle = (3/2)kT$ следует, что теплоемкость, приходящаяся на одну частицу, равна $(3/2)\,k$. Поэтому на единицу объема приходится теплоемкость $(3/2)\,k(n_e + n_i)$ и, следовательно, удельная теплоемкость равна

$$c_v = (3/2)k(n_e + n_i)/(m_e n_e + m_i n_i). \tag{1.48}$$

Учитывая условие квазинейтральности $n_e \simeq n_i$ и большую массу ионов в сравнении с массой электронов ($m_i \gg m_e$), представим равенство (1.48) в виде

$$c_v = 3k/m_i. \tag{1.49}$$

Первым уравнением идеальной магнитной гидродинамики является закон сохранения массы (1.14), вторым – уравнение движения, которое следует из уравнения баланса импульса (1.23) с учетом сохранения

массы:

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla p + \mathbf{F}^{(B)} + \mathbf{F}^{(E)}, \tag{1.50}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)$ – полная производная по времени; $\mathbf{F}^{(B)} = (\mathbf{j}/c)\times\mathbf{B}$ – магнитная сила, часто называемая силой Лоренца или пондеромоторной силой (от латинского ponderis – давящий). Компоненты этой силы равны

$$F_i^{(B)} = \frac{B_j}{4\pi}\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.51}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование); $\mathbf{F}^{(E)}$ – внешняя сила:

$$\mathbf{F}^{(E)} = -\rho\,\nabla G. \tag{1.52}$$

В случае, когда среда находится в поле сил тяжести, характеризуемом ускорением $\mathbf{g}$,

$$\nabla G = -\mathbf{g}. \tag{1.53}$$

Уравнение движения (1.50) можно представить в виде

$$\rho dv_i/dt = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j + F_i^{(E)}; \tag{1.54}$$

здесь σ_{ij} – тензор напряжений, состоящий из гидродинамической части $\sigma_{ij}^{(0)}$ и магнитной части $\sigma_{ij}^{(B)}$; $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(B)}$, где

$$\sigma_{ij}^{(0)} = -p\delta_{ij}, \tag{1.55}$$

а $\sigma_{ij}^{(B)} = -\pi_{ij}^{(B)}$ из формулы (1.19).

Равенство (1.55) означает, что жидкость действует на ограничивающую ее поверхность Σ с силой, направленной в каждой точке по нормали к поверхности. Это равносильно предположению об идеальности ([13], с. 161). Как показано в § 1.5, в вязкой жидкости возникают компоненты силы вдоль касательной к поверхности Σ, что приводит к диссипации энергии.

Для выяснения смысла тензора $\sigma_{ij}^{(B)}$ выберем ось z параллельно магнитному полю ($B_x = B_y = 0$; $B_z = B$). Тогда отличными от нуля компонентами $\sigma_{ij}^{(B)}$ будут

$$\sigma_{xx}^{(B)} = \sigma_{yy}^{(B)} = -B^2/(8\pi); \quad \sigma_{zz}^{(B)} = B^2/(8\pi). \tag{1.56}$$

Сравнивая эти выражения с тензором напряжений идеального газа (1.55), видим, что магнитное поле оказывает на плазму поперечное (относительно $\mathbf{B}$) давление

$$p_{\perp}^{(B)} = B^2/(8\pi). \tag{1.57}$$

В то же время давление вдоль магнитного поля отрицательно:

$$p_{\parallel}^{(B)} = -B^2/(8\pi). \tag{1.58}$$

Эти эффекты уже упоминались в § 1.3.

Третьим уравнением идеальной магнитной гидродинамики является закон вмороженности (1.45). Расписанный в компонентах, этот закон имеет вид

$$\partial B_i/\partial t = (\partial/\partial x_j)(v_i B_j - v_j B_i). \tag{1.59}$$

Для получения четвертого уравнения идеальной магнитной гидродинамики упростим закон сохранения энергии (1.34). Пользуясь уравнением Гиббса

$$T\,ds = d\epsilon_m - (p/\rho^2)\,d\rho \tag{1.60}$$

(s – удельная энтропия; T – температура) и уравнениями (1.14), (1.36), (1.45), (1.50), получаем *закон сохранения энтропии* ([1], с. 314):

$$ds/dt = 0. \tag{1.61}$$

Это равенство означает, что в приближении идеальной магнитной гидродинамики удельная энтропия сохраняется:

$$s = \text{const}. \tag{1.62}$$

Подчеркнем, что удельная энтропия в различных точках может быть различной. Аналогично удельная энтропия в данной точке п р о с т р а н с т в а м о ж е т изменяться с течением времени. Равенства (1.61), (1.62) означают лишь, что удельная энтропия постоянна в каждой м а т е р и а л ь н о й точке, перемещающейся вместе с жидкостью.

Из закона сохранения энтропии в и д е а л ь н о й магнитной гидродинамике следует соотношение между дифференциалами давления и плотности

$$dp/d\rho = c_s^2, \tag{1.63}$$

где c_s – скорость звука. В частности, входящий в уравнение движения градиент давления можно преобразовать в градиент плотности:

$$\nabla p = c_s^2\,\nabla\rho.$$

И наоборот, входящие в уравнение непрерывности производные плотности можно преобразовать в производные давления:

$$\partial\rho/\partial t = (1/c_s^2)\,\frac{\partial p}{\partial t}; \quad \partial\rho/\partial x_i = (1/c_s^2)\partial p/\partial x_i.$$

Оставшийся нерассмотренным закон отсутствия магнитных зарядов (1.36) не описывает эволюцию во времени МГД-величин, так как не содержит производную по t. Этот закон является ограничением, нала-

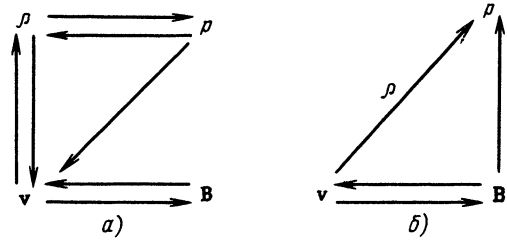


Рис. 1.2. Причинно-следственная цепь в идеальной магнитной гидродинамике:
а – сжимаемая жидкость;
б – несжимаемая жидкость

гаемым на начальное магнитное поле при $t = 0$. Согласно закону вмороженности (1.45) при этом (1.36) будет выполняться и в любой последующий момент времени t.

Таким образом, полная система уравнений *идеальной* магнитной гидродинамики имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0;\\
&\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{B_j}{4\pi}\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right);\\
&\frac{\partial B_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i B_j - v_j B_i);\\
&ds/dt = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.64)$$

Учитывая, что одно векторное уравнение равносильно трем скалярным, имеем восемь уравнений для восьми неизвестных функций ρ, $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$, s.

Уравнения идеальной магнитной гидродинамики можно получить также из вариационного принципа [34–37].

Первое и третье уравнения системы (1.64) означают, что эволюция плотности ρ и магнитного поля $\mathbf{B}$ определяется скоростью $\mathbf{v}$. Из второго уравнения видно, что эволюция скорости определяется плотностью, давлением и магнитным полем. Из четвертого уравнения (1.64) следует, что изменения плотности и давления связаны друг с другом. Таким образом, в идеальной магнитной гидродинамике причинно-следственная связь имеет вид, изображенный на рис. 1.2,*а*.

Эта причинно-следственная цепь имеет несколько иной вид в случае, когда не происходит изменения плотности со временем:

$$\partial \rho / \partial t = 0,$$

в то время как в различных точках пространства плотность может быть различной: $\nabla \rho \neq 0$. Поэтому в уравнениях (1.64) плотность жидкости ρ следует рассматривать как заданную функцию координат. В этом случае первое уравнение в (1.64) принимает вид

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \qquad (1.65)$$

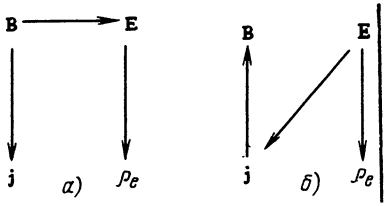


Рис. 1.3. Продолжение причинно-следственной цепи:

а – магнитная гидродинамика; *б* – электротехника

Отсюда следует, что из трех компонент вектора скорости **v** только две независимы. Исключая затем из второго векторного уравнения (1.64) градиент давления ∇p, получаем два скалярных уравнения для двух независимых компонент v_1 и v_2 вектора скорости. Объединив их с третьим векторным уравнением (1.64), получим пять уравнений, определяющих пять величин v_1, v_2, B_x, B_y, B_z. Третью же компоненту скорости найдем из уравнения (1.65). Таким образом, в этом случае давление жидкости не оказывает влияния на скорость и магнитное поле. Напротив, оно само определяется одной из компонент второго уравнения (1.64). Соответствующая причинно-следственная связь для такой жидкости изображена на рис. 1.2,*б*.

Уравнения идеальной магнитной гидродинамики определяют не все электродинамические величины, а только магнитную индукцию **B**. Остальные величины (напряженность электрического поля **E**, плотность заряда ρ_e и плотность тока **j**) находятся следующим образом. Определив из уравнений (1.64) $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, найдем напряженность электрического поля из соотношения

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B},$$

после чего плотность заряда ρ_e и плотность тока **j** получим из уравнений Максвелла (с отброшенным током смещения):

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}; \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Таким образом, в магнитной гидродинамике причинно-следственная цепь для электродинамических величин имеет вид, изображенный на рис. 1.3,*а*. Это сильно отличается от причинно-следственной цепи в обычной электротехнике, где электрическое поле **E** вызывает ток с плотностью **j**, благодаря которому возникает магнитное поле с индукцией **B** (см. рис. 1.3,*б*).

1.5. Изотропные процессы переноса

Процессом переноса называют перераспределение массы, импульса, энергии, электрического заряда и магнитного поля, связанное с беспорядочным движением частиц, не описываемым макроскопическими уравнениями идеальной магнитной гидродинамики. Процессы переноса воз-

никают вследствие столкновений отдельных частиц (см. § 1.7) или турбулентных пульсаций (§ 7.1).

Столкновения частиц приводят к дополнительному потоку импульса в уравнении (1.17), обусловленному переносом импульса $m\mathbf{v}$ от слоя, движущегося с большей скоростью, к слоям с меньшей скоростью. Поэтому появляется добавка σ'_{ij} к тензору напряжений в уравнении движения (1.54):

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{B_j}{4\pi}\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}. \tag{1.66}$$

Как будет видно далее, добавка σ'_{ij} описывает вязкость. "Вязкий" тензор напряжений σ'_{ij} вызывает появление дополнительного члена в законе сохранения энергии (1.34):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon_m\right) + \frac{B^2}{8\pi}\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho v_i\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon_m\right) + \right.$$
$$\left. + v_i p + \frac{B^2 v_i - B_i B_j v_j}{4\pi} - v_j \sigma'_{ji} + q_i\right] = 0. \tag{1.67}$$

Кроме дополнительного члена, связанного с σ'_{ij}, в плотности потока энергии появляется слагаемое q_i, описывающее поток энергии, вызываемый столкновениями и не сводящийся к вязкому тензору напряжений. Как увидим позже, вектор $\mathbf{q}$ является плотностью потока тепла. Потоки $v_j\sigma'_{ji}$ и q_i, как будет показано ниже, приводят к возрастанию энтропии, т. е. к диссипации энергии. Так как эти потоки не связаны с макроскопическим движением жидкости и магнитного поля, они получили название *термодинамических потоков.*

Мы рассмотрели термодинамические потоки в законах сохранения импульса и энергии. В законе же сохранения массы эти потоки вызываются химическими реакциями, приводящими к изменению массы данного вещества. Будем считать, что такие реакции отсутствуют. Это означает, что столкновения не могут нарушить уравнение непрерывности (1.14).

Что же касается отсутствия электрического поля в системе отсчета плазмы, то столкновения частиц или турбулентность приводят к тому, что плазма не полностью экранирует электрическое поле и поэтому электрическое поле $\mathbf{E}'$ в системе отсчета плазмы становится отличным от нуля: $\mathbf{E}' \neq 0$. Это приводит к появлению дополнительного члена $\mathbf{E}'$ в уравнении (1.3):

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B} + \mathbf{E}' \tag{1.68}$$

и тем самым к появлению дополнительного члена в уравнении (1.45):

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - c \operatorname{rot} \mathbf{E}'. \tag{1.69}$$

Как показано ниже, поле $\mathbf{E}'$ также приводит к росту энтропии, т. е. к диссипации энергии. По аналогии с вязкостью и потоком тепла поле $\mathbf{E}'$ также называют *термодинамическим потоком*, хотя согласно уравнению (1.41) его следовало бы назвать термодинамической циркуляцией.

Процессы переноса делают среду неидеальной, что проявляется в диссипации механической и электромагнитной энергии. Эти процессы сопровождаются возрастанием энтропии, поэтому пользоваться уравнением (1.61) в неидеальной среде нельзя.

Из уравнений (1.14), (1.59), (1.60), (1.66)–(1.68) следует выражение для скорости роста энтропии единицы объема ρs:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho s v_i + \frac{q_i}{T}\right) = \frac{v_{ij}\sigma'_{ij}}{T} - \frac{q_i}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{j_i E'_i}{T}, \qquad (1.70)$$

где v_{ij} – тензор *течения*, называемый также тензором *скоростей деформации*:

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

(рассмотрение ограничено малыми деформациями). Поэтому скорость изменения энтропии S_Ω в объеме Ω равна [13]

$$\partial S_\Omega/\partial t = \partial_e S_\Omega/\partial t + \partial_i S_\Omega/\partial t,$$

где $\partial_e S_\Omega/\partial t$ – увеличение энтропии вследствие потока ее через поверхность, ограничивающую объем Ω:

$$\partial_e S_\Omega/\partial t = -\iint_\Sigma (\rho \mathbf{v} s + \mathbf{q}/T)\, d\boldsymbol{\Sigma},$$

а $\partial_i S_\Omega/\partial t$ – производство энтропии вследствие диссипативных процессов:

$$\frac{\partial_i S_\Omega}{\partial t} = \iiint_\Omega \left[\frac{j_j E'_j}{T} - \frac{q_j}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{v_{jk}\sigma'_{jk}}{T}\right] d\Omega. \qquad (1.71)$$

Согласно второму началу термодинамики производство энтропии должно быть положительным (точнее, неотрицательным): $\partial_i S_\Omega/\partial t \geqslant 0$ (*закон возрастания энтропии*). Подчеркнем, что при этом может убывать как энтропия единицы объема ρs, так и удельная энтропия s.

Так как

$$\mathbf{j} = (c/4\pi)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B},$$

то в правую часть (1.71) линейно входят градиенты магнитогидродинамических величин $\partial B_i/\partial x_j$, $\partial T/\partial x_i$, $\partial v_i/\partial x_j$, называемые *термодинамическими силами*.

При малом отклонении от состояния равновесия E_i', q_i и σ_{ij}' являются линейными функциями j_i, $\partial T/\partial x_i$, v_{ij}. Эти зависимости таковы, что не нарушаются при преобразованиях координат. Поэтому зависимостью могут быть связаны только такие линейные комбинации, которые преобразуются одинаковым образом (*принцип Кюри*).

Магнитное поле не влияет на столкновение частиц, а следовательно, и на процессы переноса, если для рассматриваемого сорта частиц α выполняется неравенство

$$|\omega_\alpha|\tau_\alpha \ll 1, \tag{1.72}$$

где $\omega_\alpha = e_\alpha B/(m_\alpha c)$ – циклотронная частота и τ_α – время свободного пробега частиц сорта α. При этом уравнения переноса не должны нарушаться при любых преобразованиях вращения и отражения.

Из градиентов МГД-величин можно образовать скляр v_{ii}, полярные векторы j_i и $\partial T/\partial x_i$ и остаток тензора $v_{ij}^{(d)}$, имеющий нулевой след,

$$v_{ij}^{(d)} = v_{ij} - (1/3)\,\delta_{ij} v_{kk} \tag{1.73}$$

и называемый *девиатором*.

Согласно принципу Кюри наиболее общие линейные уравнения переноса имеют вид

$$E_i' = \frac{1}{\sigma} j_i + \alpha\,\partial T/\partial x_i; \tag{1.74}$$

$$q_i = \pi j_i - \kappa\,\partial T/\partial x_i; \tag{1.75}$$

$$\sigma_{ii}' = 3\zeta v_{ii}; \tag{1.76}$$

$$\sigma_{ij}'^{(d)} = 2\eta v_{ij}^{(d)}. \tag{1.77}$$

Здесь σ – коэффициент *электропроводности*; α описывает электрическое поле, вызванное потоком температуры (эффект *Зеебека*); π описывает тепловой поток, вызванный электрическим током (эффект *Пельтье*), κ – коэффициент *теплопроводности*; η – динамический коэффициент *сдвиговой вязкости*, или *первой вязкости*, и ζ – динамический коэффициент *объемной вязкости*, или *второй вязкости*.

Уравнение (1.74) является обобщенным законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}' \tag{1.78}$$

на случай неоднородно нагретой среды.

Среду, вязкость которой определяется соотношениями (1.76), (1.77), называют *ньютоновской жидкостью*, а уравнение теплопроводности (1.75) при пренебрежении эффектом Пельтье – *законом Фурье*.

Введение в уравнения (1.74), (1.75) каких-либо дополнительных членов, например пропорциональных ∇p, в рамках одножидкостной магнитной гидродинамики противоречит закону возрастания энтропии, так как в выражении (1.71) появились бы члены

с произведениями $\mathbf{j}\nabla p$ и $\nabla T \nabla p$. Поскольку эти члены могут быть как положительными, так и отрицательными, выражение (1.71) не всегда было бы положительным, что невозможно ([33], с. 230, [1], с. 146). В частности, член, пропорциональный ∇p в "обобщенном электрическом поле", ошибочен. При использовании подобного закона Ома можно не только допустить количественную ошибку, но и получить качественно неверный результат [38].

Сказанное выше относится также и к бесстолкновительным процессам переноса (бесстолкновительная диссипация, бесстолкновительные ударные волны) в рамках одножидкостной модели. Что же касается двухжидкостной гидродинамики, то к ней формула (1.71) неприменима. В двухжидкостной гидродинамике уравнения переноса содержат градиент давления.

Вследствие обилия различных параметров в плазме возможна ситуация, когда квадрат одной термодинамической силы (градиента) будет того же порядка, что и другая сила, т. е. возникает необходимость пользоваться нелинейной теорией переноса. Например, закон Ома (1.74) зачастую пишут в виде

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B} + \frac{1}{ne} \nabla p_e = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \tag{1.79}$$

где $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{j}/(ne)$.

Так как $\mathbf{j} = (c/4\pi)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}$ и $\partial \mathbf{B}/\partial t = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, то последний член в правой части формулы (1.79) квадратичен относительно градиента $\boldsymbol{B}$.

Из *принципа симметрии кинетических коэффициентов* Онзагера ([39], с.43) следует соотношение между коэффициентами Зеебека и Пельтье:

$$\pi = \alpha T. \tag{1.80}$$

Подставляя (1.74)–(1.80) в (1.71), находим скорость производства энтропии единицы объема:

$$\frac{\partial_i S}{\partial t} = \frac{j_k^2}{\sigma T} + \frac{\kappa}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} v_{ll}^2 + \frac{2\eta}{T} \left[v_{lk}^{(d)} \right]^2. \tag{1.81}$$

Таким образом, коэффициенты электропроводности, теплопроводности, объемной и сдвиговой вязкости описывают диссипацию энергии. Их называют *диссипативными коэффициентами.* Из выражения (1.81) следует, что все диссипативные коэффициенты положительны:

$$\sigma > 0; \quad \kappa > 0; \quad \zeta > 0; \quad \eta > 0. \tag{1.82}$$

Эти неравенства имеют простой физический смысл, а именно: ток течет в направлении электрического поля; вектор плотности теплового потока направлен противоположно градиенту температуры; чтобы уменьшить объем жидкости, к ее границе следует приложить силу, на-

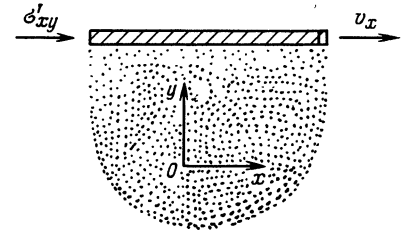


Рис. 1.4. Направление движения пластинки под действием вязких напряжений

правленную внутрь; если пластинка граничит с неподвижной жидкостью, то для приведения пластинки в движение в своей плоскости ($y = 0$) следует приложить силу σ'_{xy} (на единицу площади) в направлении движения (т. е. вдоль оси x, рис. 1.4).

Заметим, что течение, изображенное на рис. 1.4, при котором отлична от нуля только одна (недиагональная) компонента тензора течения, часто используют для измерения коэффициента вязкости η. Поэтому его называют *вискозиметрическим*.

Перейдем теперь к эффектам Зеебека и Пельтье. Эти эффекты не сопровождаются диссипацией энергии, так как коэффициенты α и π не входят в формулу (1.81). Поэтому коэффициенты Зеебека и Пельтье в различных жидкостях могут иметь различные знаки. Это означает, что градиент температуры вызывает электрическое поле либо в том же направлении, либо в противоположном. Аналогично электрический ток вызывает тепловой поток, направленный или параллельно току, или антипараллельно ему.

Для определения роли коэффициентов Зеебека и Пельтье в магнитогидродинамических эффектах заметим, что каждый член уравнений идеальной магнитной гидродинамики (1.64) содержит либо одну производную во времени $\partial/\partial t$, либо одну производную по координате $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ или $\partial/\partial z$. В однородной среде ($\mathbf{v} = \text{const}$, $\mathbf{B} = \text{const}$, $p = \text{const}$, $s = \text{const}$) зависимость от координат и времени бесконечно малых возмущений (линейных волн) имеет вид

$$f(x, y, z, t) = \text{const} \cdot \exp(\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t). \qquad (1.83)$$

Это означает, что дифференцирование по времени равносильно умножению на $-\mathrm{i}\omega$. Аналогично дифференцирование по x равносильно умножению на $\mathrm{i}k_x$, а дифференцирование по y или z — умножению на $\mathrm{i}k_y$ или на $\mathrm{i}k_z$. При переходе от величины ω, $\mathbf{k}$ к новым величинам $C\omega$, $C\mathbf{k}$ уравнения идеальной магнитной гидродинамики не изменяются, так как произвольная константа C сокращается. Это означает, что фазовая скорость волны $V_\Phi = \omega/k$ не зависит от частоты ω. Зависимость фазовой скорости от частоты $V_\Phi = V_\Phi(\omega)$ называют дисперсией. Таким образом, в идеальной магнитной гидродинамике дисперсия отсутствует.

Возвращаясь к недиссипативным кинетическим коэффициентам α и π, видим, что каждый из них входит в соотношения (1.74), (1.75), определяющие $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{q}$, множителем при первой производной по коор-

динате какой-нибудь МГД-величины. В свою очередь величины $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{q}$ входят в уравнения магнитной гидродинамики под знаком производной (по координате). Таким образом, недиссипативные коэффициенты входят в уравнения магнитной гидродинамики в качестве множителя при производной второго порядка. В случае линейной волны (1.83) при недиссипативном коэффициенте стоит множитель $k_i k_j$, а это означает наличие дисперсии. Поэтому недиссипативные кинетические коэффициенты α и π называют *дисперсионными.*

Определим теперь, какое влияние оказывают столкновения на закон вмороженности (1.45). Из закона Ома (1.78) и равенства (1.69) находим "уравнение движения" магнитного поля:

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) - (c/\sigma)\operatorname{rot}\mathbf{j}. \tag{1.84}$$

Пользуясь уравнением Максвелла (1.59), в котором отброшен ток смещения, тождеством $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{B}) - \Delta\mathbf{B}$, а также уравнением Максвелла (1.36), приведем уравнение (1.84) к виду

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \nu_m \Delta\mathbf{B}, \tag{1.85}$$

где ν_m – *магнитная вязкость*:

$$\nu_m = c^2/(4\pi\sigma). \tag{1.86}$$

Первый член в правой части уравнения (1.85) описывает приклеенность магнитных силовых линий к жидкости (см. § 1.3). Для того чтобы определить влияние второго члена, рассмотрим случай, когда в правой части (1.85) можно отбросить первый член. При этом уравнение (1.85) принимает вид уравнения диффузии:

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = \nu_m \Delta\mathbf{B}. \tag{1.87}$$

Рассмотрим простейший случай, когда магнитное поле зависит только от одной пространственной координаты x. Тогда y-компонента уравнения диффузии (1.87) примет вид

$$\partial B_y/\partial t = \nu_m \partial^2 B_y/\partial x^2. \tag{1.88}$$

В точках максимума B_y выполняется условие $\partial^2 B_y/\partial x^2 < 0$. Согласно уравнению (1.88) в этих точках $\partial B_y/\partial t < 0$, т. е. B_y убывает. Аналогично в точках минимума B_y возрастает. Таким образом, всякие "неровности" B_y стремятся сгладиться, т. е. B_y стремится к постоянному значению во всем пространстве. Иными словами, происходит диффузия магнитного поля из областей с большим $|\mathbf{B}|$ в область малого поля. При этом магнитная вязкость ν_m играет роль коэффициента диффузии.

Достаточно большое магнитное поле

$$|\omega_\alpha|\tau_\alpha \gg 1 \tag{1.89}$$

влияет на акт столкновения частиц и тем самым на свойства симметрии величин E_i', σ_{ij}' и q_i. Плазму в этом случае называют *замагниченной.*

Свойства симметрии изменяются также при турбулентных процессах переноса, если в плазме существует среднее магнитное поле $\langle \mathbf{B} \rangle$ или если плазма вращается с угловой скоростью Ω.

В сильном магнитном поле з а в и с и м о с т и между E_i', σ_{ij}', q_i и j_i, v_{ij}, $\partial T/\partial x_i$ остаются неизменными не при любых вращениях и отражениях.

Полагая для определенности, что м а г н и т н о е п о л е **B** направлено вдоль оси z, находим, что о н о не изменяется только при поворотах $R(\varphi)$ на произвольный угол φ вокруг оси z и при отражениях σ_h относительно плоскости $z = 0$. [Напомним, что вектор **B** аксиален ([2], с. 34). В теории групп эту совокупность преобразований называют группой $C_{\infty h}$ ([40, с. 445), но мы не будем пользоваться теорией групп.]

Рассмотрим теперь, как преобразуются под действием преобразований группы $C_{\infty h}$ различные линейные комбинации величин j_i, $\partial T/\partial x_i$ и v_{ij}.

Компонента полярного вектора j_z не изменяется при вращении $R(\varphi)$ и меняет знак при отражении σ_h:

$$R(\varphi)\, j_z = j_z; \quad \sigma_h j_z = -j_z. \tag{1.90}$$

Линейные комбинации $j_x \pm \mathrm{i} j_y$ умножаются на $\exp(\pm \mathrm{i}\varphi)$ при вращениях $R(\varphi)$ и не изменяются при отражениях σ_h:

$$R(\varphi)\,(j_x \pm \mathrm{i} j_y) = \exp(\pm \mathrm{i}\varphi)\,(j_x \pm \mathrm{i} j_y), \quad \sigma_h (j_x \pm \mathrm{i} j_y) = j_x \pm \mathrm{i} j_y. \tag{1.91}$$

Точно так же преобразуются $\partial T/\partial z$ и $\partial T/\partial x \pm \mathrm{i}\,\partial T/\partial y$.

Рассмотрим теперь преобразования симметричного полярного тензора второго ранга v_{ij}. Компонента v_{zz}, а также комбинация $v_{xx} + v_{yy}$ не изменяются под действием операторов $R(\varphi)$ и σ_h:

$$\left.\begin{aligned} &R(\varphi)\, v_{zz} = v_{zz}; \quad \sigma_h v_{zz} = v_{zz}; \\ &R(\varphi)(v_{xx} + v_{yy}) = v_{xx} + v_{yy}; \\ &\sigma_h (v_{xx} + v_{yy}) = v_{xx} + v_{yy}. \end{aligned}\right\} \tag{1.92}$$

Из компонент тензора v_{ij} можно образовать линейные комбинации $v_{xz} \pm \mathrm{i} v_{yz}$ и $v_{xx} - v_{yy} \pm 2\mathrm{i} v_{xy}$, которые под действием $R(\varphi)$ и σ_h при-

обретают скалярные множители:

$$\left.\begin{aligned} &R(\varphi)\,(v_{xz} \pm \mathrm{i} v_{yz}) = \exp(\pm \mathrm{i}\varphi)(v_{xz} \pm \mathrm{i} v_{yz}); \\ &\sigma_h\,(v_{xz} \pm \mathrm{i} v_{yz}) = -\,(v_{xz} \pm \mathrm{i} v_{yz}); \end{aligned}\right\} \quad (1.93)$$

$$\left.\begin{aligned} &R(\varphi)(v_{xx} - v_{yy} \pm 2\mathrm{i} v_{xy}) = \exp(\pm 2\mathrm{i}\varphi)(v_{xx} - v_{yy} \pm 2\mathrm{i} v_{xy}); \\ &\sigma_h\,(v_{xx} - v_{yy} \pm 2\mathrm{i} v_{xy}) = v_{xx} - v_{yy} \pm 2\mathrm{i} v_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (1.94)$$

Согласно принципу Кюри наиболее общие л и н е й н ы е *уравнения переноса* имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &E_x' \pm \mathrm{i} E_y' = (\eta_t \pm \mathrm{i}\eta_t')\,(j_x \pm \mathrm{i} j_y) + (\alpha_t \pm \mathrm{i}\alpha_t')(\partial T/\partial x \pm \mathrm{i}\,\partial T/\partial y); \\ &q_x \pm \mathrm{i} q_y = (\pi_t \pm \mathrm{i}\pi_t')\,(j_x \pm \mathrm{i} j_y) - (\kappa_t \pm \mathrm{i}\kappa_t')(\partial T/\partial x \pm \mathrm{i}\,\partial T/\partial y); \end{aligned}\right\} \quad (1.95)$$

$$E_z' = \eta_l j_z + \alpha_l \partial T/\partial z; \quad q_z = \pi_l j_z - \kappa_l \partial T/\partial z; \quad (1.96)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xx}' + \sigma_{yy}' = \zeta_t (v_{xx} + v_{yy}) + \zeta_{tl} v_{zz}; \\ &\sigma_{zz}' = \zeta_{lt} (v_{xx} + v_{yy}) + \zeta_l v_{zz}; \end{aligned}\right\} \quad (1.97)$$

$$\sigma_{xz}' \pm \mathrm{i}\,\sigma_{yz}' = (\zeta_1 \pm \mathrm{i}\zeta_1')(v_{xz} \pm \mathrm{i} v_{yz}); \quad (1.98)$$

$$\sigma_{xx}' - \sigma_{yy}' \pm 2\mathrm{i}\,\sigma_{xy}' = (\zeta_2 \pm \mathrm{i}\zeta_2')(v_{xx} - v_{yy} \pm 2\mathrm{i} v_{xy}), \quad (1.99)$$

где η_t, η_t', η_l, α_t, α_t', α_l, π_t, π_t', π_l, κ_t, κ_t', κ_l, ζ_l, ζ_{lt}, ζ_{tl}, ζ_t, ζ_1, ζ_1', ζ_2, ζ_2' – вещественные постоянные, называемые *анизотропными коэффициентами переноса* или *кинетическими коэффициентами*. Значения этих коэффициентов не могут быть получены в рамках макроскопической теории, т. е. в рамках гидродинамики и термодинамики. Эти коэффициенты можно вычислить исходя из кинетического уравнения.

Кинетические коэффициенты зависят от каких-либо двух термодинамических переменных, например ρ и T, и от напряженности магнитного поля B.

Отделяя в формулах (1.95)–(1.99) вещественные части от мнимых, получаем

$$\left.\begin{aligned} &E_x' = \eta_t j_x - \eta_t' j_y + \alpha_t \partial T/\partial x - \alpha_t' \partial T/\partial y; \\ &E_y' = \eta_t' j_x + \eta_t j_y + \alpha_t' \partial T/\partial x + \alpha_t \partial T/\partial y; \\ &E_z' = \eta_l j_z + \alpha_l \partial T/\partial z; \\ &q_x = \pi_t j_x - \pi_t' j_y - \kappa_t \partial T/\partial x + \kappa_t' \partial T/\partial y; \\ &q_y = \pi_t' j_x + \pi_t j_y - \kappa_t' \partial T/\partial x - \kappa_t \partial T/\partial y; \\ &q_z = \pi_l j_z - \kappa_l \partial T/\partial z; \end{aligned}\right\} \quad (1.100)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma'_{xx} &= \frac{\zeta_t + \zeta_2}{2} v_{xx} + \frac{\zeta_t - \zeta_2}{2} v_{yy} + \frac{\zeta_{tl}}{2} v_{zz} - \zeta'_2 v_{xy};\\
\sigma'_{yy} &= \frac{\zeta_t - \zeta_2}{2} v_{xx} + \frac{\zeta_t + \zeta_2}{2} v_{yy} + \frac{\zeta_{tl}}{2} v_{zz} + \zeta'_2 v_{xy};\\
\sigma'_{zz} &= \zeta_{lt} v_{xx} + \zeta_{lt} v_{yy} + \zeta_l v_{zz};\\
\sigma'_{xy} &= \frac{\zeta'_2}{2} v_{xx} - \frac{\zeta'_2}{2} v_{yy} + \zeta_2 v_{xy};\\
\sigma'_{xz} &= \zeta_1 v_{xz} - \zeta'_1 v_{yz};\\
\sigma'_{yz} &= \zeta'_1 v_{xz} + \zeta_1 v_{yz}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (1.101)
$$

Из этих соотношений виден физический смысл различных кинетических коэффициентов. Коэффициенты η_t и η_l описывают *поперечное* (относительно магнитного поля) и *продольное электрические сопротивления*, η'_t описывает ток, текущий перпендикулярно электрическому и магнитному полям (эффект *Холла* [1], с. 134); $\varkappa_t$ и $\varkappa_l$ описывают поперечную замагниченную и *продольную теплопроводность*, $\varkappa'_t$ – плотность теплового потока, перпендикулярного градиенту температуры и магнитному полю (эффект *Ледюка–Риги* [1], с. 149), или дрейфовый поток тепла [41]; α_t и α_l – поперечный и продольный эффект *Зеебека*, α'_t – эффект *Нернста* [42]; π_t и π_l – поперечный и продольный эффекты *Пельтье*, π'_t – эффект *Эттингсхаузена*; наконец, ζ_t, ζ_l, ζ_{tl}, ζ_{lt}, ζ_1, ζ'_1, ζ_2, ζ'_2 – коэффициенты анизотропной вязкости [43].

Первые три формулы (1.100) представляют собой *обобщенный закон Ома.*

Если градиент температуры отсутствует ($\nabla T = 0$), то из первых трех формул (1.100) можно найти плотность тока:

$$
j_x = \sigma_t E'_x + \sigma_H E'_y; \quad j_y = -\sigma_H E'_x + \sigma_t E'_y; \quad j_z = \sigma_l E'_z, \qquad (1.102)
$$

где σ_t, σ_H, σ_l – *поперечная*, *холловская* и *продольная* электропроводности, равные

$$
\sigma_t = \frac{\eta_t}{\eta_t^2 + (\eta'_t)^2}; \quad \sigma_H = \frac{\eta'_t}{\eta_t^2 + (\eta'_t)^2}; \quad \sigma_l = \frac{1}{\eta_l}. \qquad (1.103)
$$

Плотность тока $\mathbf{j}_H = (\sigma_H E'_y, -\sigma_H E'_x, 0)$, текущего перпендикулярно как электрическому полю $\mathbf{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z)$, так и магнитному полю $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, называют *током Холла.*

Из соотношений Онсагера следует ([39], с. 293), что

$$
\pi_t = \alpha_t T; \quad \pi_l = \alpha_l T; \qquad (1.104)
$$

$$
\pi'_t = -T\alpha'_t, \qquad (1.105)
$$

а также

$$\zeta_{tl} = 2\zeta_{lt}. \tag{1.106}$$

(Последнее равенство может быть получено и другим путем – при исследовании зависимости коэффициентов вязкости от магнитного поля, см. [39], с. 297.)

Подставляя соотношения (1.100), (1.101) в (1.71) и учитывая соотношения Онсагера (1.104)–(1.106), находим скорость производства энтропии:

$$\frac{\partial_i S}{\partial t} = \frac{\eta_t (i_x^2 + i_y^2) + \eta_l i_z^2}{T} + \frac{\kappa_t [(\partial T/\partial x)^2 + (\partial T/\partial y)^2] + \kappa_l (\partial T/\partial z)^2}{T^2} +$$

$$+ \frac{1}{T}\left[\frac{\zeta_t + \zeta_2}{2}(v_{xx}^2 + v_{yy}^2) + \zeta_l v_{zz}^2 + 2\zeta_2 v_{xy}^2 + 2\zeta_1 (v_{xz}^2 + v_{yz}^2) + \right.$$

$$\left. + (\zeta_t - \zeta_2) v_{xx} v_{yy} + 2\zeta_{lt}(v_{xx} + v_{yy}) v_{zz}\right]. \tag{1.107}$$

Из принципа возрастания энтропии следует, что

$$\eta_t > 0; \quad \eta_l > 0; \quad \kappa_t > 0; \quad \kappa_l > 0; \quad \zeta_1 > 0; \quad \zeta_2 > 0. \tag{1.108}$$

Кроме того, квадратичная форма относительно v_{xx}, v_{yy} и v_{zz} всегда должна быть неотрицательной, т. е.

$$\zeta_l \geqslant 0; \quad \zeta_t \geqslant 0; \quad \zeta_l \zeta_t \geqslant 2\zeta_{lt}^2. \tag{1.109}$$

Что же касается коэффициентов η_t', κ_t', α_l, α_t, α_t', ζ_1', ζ_2', то они могут иметь любую величину и любой знак. Коэффициент ζ_{lt} также может иметь любой знак, но его абсолютное значение ограничено третьим неравенством (1.109). Кинетические коэффициенты η_t, η_l, κ_t, κ_l, ζ_1, ζ_2, ζ_t, ζ_l, ζ_{lt} согласно (1.107) определяют диссипацию энергии. Поэтому их называют *диссипативными*. Коэффициенты η_t', κ_t', α_l, α_t, α_t', ζ_1', ζ_2' не связаны с диссипацией энергии, и их называют *дисперсионными*.

1.7. Оценка кинетических коэффициентов

Приведем приближенную оценку кинетических коэффициентов. (Подробнее о кинетических коэффициентах см. [8, 11, 44].) Будем полагать, что плазма состоит только из электронов и однозарядных ионов (*простая плазма*) и что температуры электронов и ионов одинаковы (*изотермическая плазма*).

Начнем с определения длин свободного пробега l_e и l_i электронов и ионов. Как известно, длина свободного пробега

$$l \sim 1/(n\sigma_{\text{tot}}), \tag{1.110}$$

где n – число частиц в единице объема и σ_{tot} – полное сечение рассеяния:

$$\sigma_{\text{tot}} \sim a_{\text{вз}}^2 \tag{1.111}$$

($a_{\text{вз}}$ — радиус взаимодействия). Строго говоря, вследствие медленного спадания с расстоянием кулоновского потенциала

$$U = e_1 e_2 / r \tag{1.112}$$

полное сечение рассеяния σ_{tot} формально равно бесконечности. Однако на расстояниях, превышающих дебаевский радиус

$$r_D = \sqrt{T/(4\pi e^2 n)} \tag{1.113}$$

(T — температура в энергетических единицах), поле точечного заряда экранируется зарядами противоположного знака.

Для приближенной оценки радиуса сил взаимодействия $a_{\text{вз}}$ можно принять в качестве $a_{\text{вз}}$ такое расстояние, на котором потенциальная энергия взаимодействия (1.112) равна средней кинетической энергии частиц T:

$$T \sim e^2 / a_{\text{вз}}.$$

При такой грубой оценке теряется множитель $\ln(r_D/a_{\text{вз}})$, называемый кулоновским логарифмом. Он слабо зависит от температуры и плотности плазмы и обычно по порядку равен 10 ([11], с. 23).

Из (1.110) и (1.111) следует, что длины свободного пробега электронов и ионов одинаковы:

$$l_e \sim l_i \sim T^2/ne^4 \equiv l. \tag{1.114}$$

Перейдем теперь к временам свободного пробега электронов τ_e и ионов τ_i:

$$l_\alpha \sim v_\alpha \tau_\alpha, \quad \alpha = e, i, \tag{1.115}$$

где v_α — тепловая скорость частиц сорта α:

$$v_e \sim \sqrt{T/m_e}; \quad v_i \sim \sqrt{T/m_i}. \tag{1.116}$$

Из формул (1.114)–(1.116) находим

$$\tau_\alpha \sim T^{3/2}\sqrt{m_\alpha}/(ne^4). \tag{1.117}$$

Заметим, что вследствие большого различия масс электронов m_e и ионов m_i время изменения импульса и энергии иона при столкновении с электроном значительно больше времени, определяемого формулой (1.117). Для определения этого времени, которое обозначим τ_{ei}, напишем закон сохранения энергии и импульса при столкновении электрона с ионом:

$$\left.\begin{aligned} m_e v_e + m_i v_i &= m_e(v_e + \Delta v_e) + m_i(v_i + \Delta v_i); \\ m_e v_e^2 + m_i v_i^2 &= m_e(v_e + \Delta v_e)^2 + m_i(v_i + \Delta v_i)^2. \end{aligned}\right\} \tag{1.118}$$

Замечая, что $m_e \ll m_i$ и $v_e \gg v_i$, получаем

$$\Delta v_e \sim v_e; \quad \Delta v_i \sim \frac{m_e}{m_i} v_e \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_i.$$

Поэтому нужно $\sqrt{m_i/m_e}$ столкновений иона с электроном, чтобы ион потерял энергию и импульс, следовательно,

$$\tau_{ei} \sim \sqrt{m_i/m_e}\, \tau_i. \tag{1.119}$$

Мы видим, что времена свободного пробега τ_e, τ_i и τ_{ei} имеют различный порядок:

$$\tau_e : \tau_i : \tau_{ei} \sim 1 : \sqrt{m_i/m_e} : m_i/m_e. \tag{1.120}$$

Из этого соотношения следует, что быстрее всего происходит релаксация электронов, т. е. переход от начального неравновесного распределения по скоростям к равновесному распределению (распределению Максвелла). Значительно медленнее происходит процесс релаксации ионов. И, наконец, медленнее всего происходит выравнивание температур электронов и ионов.

Средняя макроскопическая скорость плазмы

$$\mathbf{v} = (m_e n_e \mathbf{v}_e + m_i n_i \mathbf{v}_i)/(m_e n_e + m_i n_i). \tag{1.121}$$

Если характерные размеры неоднородности L значительно больше дебаевского радиуса (1.113), то плотность электронов с большой точностью равна плотности ионов:

$$n_e = n_i = n. \tag{1.122}$$

Отметим, что это равенство отнюдь не означает, что электрическое поле $\mathbf{E}'$ в системе отсчета, связанной с плазмой, равно нулю. Даже при незначительном нарушении равенства (1.122) вследствие больших относительных размеров неоднородности возникают столь большие электрические поля, что это равенство снова восстанавливается. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, соотношение (1.122) называют *условием квазинейтральности*. При выполнении равенства (1.122) из формулы (1.121) с учетом неравенства $m_i \gg m_e$ следует, что скорость плазмы совпадает со скоростью ионов:

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_i. \tag{1.123}$$

Поэтому плотность электрического тока в системе отсчета плазмы определяется электронами:

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_e. \tag{1.124}$$

Оценим теперь скалярную электропроводность σ. Сила $-e\mathbf{E}'$, действующая на электрон, вызывает появление импульса $m_e v_e$, который теряется при столкновении с ионом за время порядка τ_e. В стацио-

нарном состоянии

$$-e\mathbf{E}' \sim m_e \mathbf{v}_e/\tau_e .$$

Подставляя найденное отсюда $\mathbf{v}_e$ в (1.124), находим электропроводность:

$$\sigma \sim e^2 n \tau_e/m_e. \tag{1.125}$$

Рассмотрим теперь влияние магнитного поля на электропроводность. Очевидно, продольное электрическое сопротивление η_l не зависит от магнитного поля. Поэтому

$$\eta_l = 1/\sigma. \tag{1.126}$$

Для оценки поперечного сопротивления η_t и коэффициента Холла η_t' напишем уравнение движения электрона в предположении стационарности и с учетом потери импульса при столкновении с ионами:

$$-e\mathbf{E}' - \frac{e\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B} - \frac{m_e \mathbf{v}_e}{\tau_e} = 0. \tag{1.127}$$

Направляя ось z вдоль $\mathbf{B}$, умножая на i y-ю компоненту уравнения (1.127) и складывая с x-й компонентой, получаем

$$j_x \pm \mathrm{i} j_y = \frac{e^2 n \tau_e (E_x' \pm \mathrm{i} E_y')}{m_e (1 \mp \mathrm{i}\omega_e \tau_e)} , \tag{1.128}$$

где $\omega_e = eB/(m_e c)$.

Сравнивая (1.128) с (1.95), находим, что поперечное электрическое сопротивление по порядку равно продольному:

$$\eta_t \sim \eta_l , \tag{1.129}$$

а коэффициент Холла

$$\eta_t' = -B/(enc). \tag{1.130}$$

Таким образом, коэффициент Холла не зависит от частоты столкновений. В частности, он остается конечным в бесстолкновительной плазме (при $\tau_e = \infty$).

Оценим теперь коэффициенты теплопроводности. Продольный коэффициент теплопроводности κ_l будет таким же, как и коэффициент теплопроводности κ при отсутствии магнитного поля. Для оценки его рассмотрим плотность теплового потока q_x, проходящего через плоскость $x = 0$. Влево движутся частицы сорта a из точки $x + \Delta x$ с энергией $T(x + \Delta x)$ и скоростью $\Delta x/\tau_a$. Они дают вклад в плотность теплового потока, равный $-n(\Delta x/\tau_a)\, T(x+\Delta x)$. Аналогично плотность теплового потока за счет частиц, движущихся вправо, равна $n(\Delta x/\tau_a)\, T(x - \Delta x)$. Поэтому суммарная плотность теплового потока равна

$$q_x \sim -n \frac{\Delta x}{\tau_a} \left[T(x + \Delta x) - T(x - \Delta x)\right] \approx - \frac{n(\Delta x)^2}{\tau_a} \frac{\partial T}{\partial x} . \tag{1.131}$$

Подставляя вместо Δx длину свободного пробега l и сравнивая (1.131) с (1.75), находим вклады κ_e и κ_i в коэффициент теплопроводности электронов и ионов [39, 44]:

$$\kappa_e \sim nl^2/\tau_e; \quad \kappa_i \sim nl^2/\tau_i. \tag{1.132}$$

Согласно (1.120)

$$\kappa_e/\kappa_i \sim \sqrt{m_i/m_e}, \tag{1.33}$$

т. е. продольная теплопроводность определяется электронами.

Для нахождения коэффициента поперечной теплопроводности $\kappa_t = \kappa_t^{(e)} + \kappa_t^{(i)}$ нужно в формуле (1.131) взять в качестве Δx ларморовский радиус

$$r_\alpha = v_\alpha/\omega_\alpha, \tag{1.134}$$

где $v_\alpha = \sqrt{T/m_\alpha}$.

Так как

$$r_\alpha/l \sim 1/(\omega_\alpha \tau_\alpha), \tag{1.135}$$

то

$$\kappa_t^{(e)} \sim \kappa_e/(\omega_e \tau_e)^2; \quad \kappa_t^{(i)} \sim \kappa_i/(\omega_i \tau_i)^2. \tag{1.136}$$

Отсюда следует

$$\kappa_t^{(e)}/\kappa_t^{(i)} \sim \sqrt{m_e/m_i}. \tag{1.137}$$

Это означает, что основной вклад в поперечную теплопроводность вносят ионы [11]. (Утверждение Маршалла о том, что вклад электронов и ионов одинаков, основано на ошибке при вычислении интеграла столкновений, см. об этом [45].)

Из формулы (1.136) видно также, что поперечная теплопроводность обратно пропорциональна квадрату магнитного поля:

$$\kappa_t \sim 1/B^2. \tag{1.138}$$

Оценивать коэффициент κ_t' не будем, так как в изотермической плазме вклады в него от электронов и ионов взаимно уничтожаются [44].

Перейдем далее к коэффициенту Зеебека α. Этот коэффициент определяет напряженность электрического поля E_x', возникающего вследствие градиента температуры $\partial T/\partial x$. Происхождение этого поля следующее. Вследствие столкновений электроны действуют друг на друга с силой $m_e v_e/\tau_e$. Если $\nabla T = 0$, то эти силы от электронов, приходящих справа и слева, взаимно уравновешиваются. Если же $\partial T/\partial x > 0$, то электроны, приходящие справа из точки $x+l$, будут в среднем иметь не такую скорость, как электроны, приходящие слева из точки $x-l$. Так как время свободного пробега зависит от скорости, то возникает

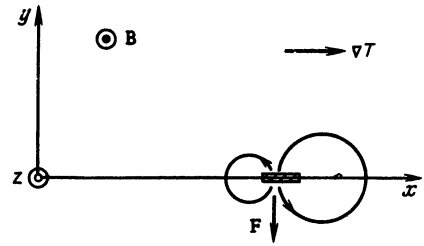


Рис. 1.5. Возникновение пропорциональной градиенту температуры силы, действующей на замагниченные электроны

средняя сила. Эта сила будет составлять долю $l\frac{\partial T/\partial x}{T}$ силы $m_e v_e/\tau_e$, т. е.

$$F_x \sim \frac{l}{T}\,\frac{m_e v_e}{\tau_e}\,\frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{1.139}$$

Сила F, действующая на электрон, равносильна электрическому полю F/e. Поэтому $E_x' \sim (1/e)\partial T/\partial x$ и коэффициент α в формуле (1.74) равен

$$\alpha \sim 1/e \tag{1.140}$$

(e – заряд электрона).

При наличии сильного магнитного поля ($\omega_e \tau_e \gg 1$) электроны вращаются по ларморовским кружкам. Заменяя в выражении (1.139) длину свободного пробега l радиусом ларморовской окружности (1.134) и замечая, что сила перпендикулярна градиенту температуры и магнитному полю (см. рис. 1.5), получаем

$$\alpha_t \simeq 0; \quad \alpha_t' \sim 1/(e(\omega_e \tau_e)). \tag{1.141}$$

В следующем приближении ([19], с. 301)

$$\alpha_t \sim 1/(e(\omega_e \tau_e)^2). \tag{1.142}$$

Рассмотрим, наконец, изотропную вязкость. Если v_y зависит от x, то возникает поток y-импульса вдоль оси x с плотностью

$$\sigma_{xy}' \sim mn\,\frac{\Delta x}{\tau}\,[v_y(x-\Delta x) - v_y(x)] \sim mn\,\frac{(\Delta x)^2}{\tau}\,\frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Отсюда следует коэффициент сдвиговой вязкости [39]

$$\eta_\alpha \sim m_\alpha n l^2/\tau_\alpha \sim nT\tau_\alpha. \tag{1.143}$$

Таким образом, сдвиговая вязкость определяется ионами.

Кинетическое рассмотрение показывает, что объемная вязкость любого одноатомного газа, в том числе простой плазмы, равна нулю [39].

Отличная от нуля объемная вязкость возникает, когда в среде существуют "скрытые параметры" — внутренние степени свободы. Такой внутренней степенью свободы является, например, степень ионизации плазмы или колебания атомов многоатомной молекулы. При сжатии плазмы ее температура увеличивается и существовавшая ранее степень ионизации оказывается неравновесной. Происходящее затем увеличение степени ионизации до равновесного значения сопровождается ростом энтропии, что на макроскопическом уровне проявляется как объемная вязкость ([46], с. 69).

Такой медленно релаксирующей внутренней степенью свободы в одножидкостной магнитной гидродинамике могла бы быть разность температур электронов и ионов. Однако если характерная длина λ значительно превосходит дебаевский радиус r_D, то плотности электронов и ионов будут все время равны друг другу ($n_e = n_i$). Что же касается энтропий s_e и s_i, то при определении коэффициента объемной вязкости их следует считать постоянными, так как учет роста энтропий привел бы к эффектам, квадратичным по термодинамическим силам.

Далее, в одножидкостной магнитной гидродинамике следует полагать температуры электронов и ионов в начальный момент равными ($T_e = T_i$). Так как температура определяется плотностью и энтропией, $T_\alpha = T_\alpha(n_\alpha, s_\alpha)$, $\alpha = e, i$, то плазма будет изотермической и в дальнейшем. Поскольку магнитогидродинамическое приближение справедливо при $\lambda \gg r_D$, объемная вязкость равна сумме объемных вязкостей электронов и ионов, т. е. нулю.

Вернемся теперь к простой плазме. Как уже отмечалось, для нее объемная вязкость равна нулю. Это означает, что $\sigma'_{ll} = 0$. При этом из (1.97), (1.106) вытекает, что при любых значениях v_{ij} должно выполняться равенство

$$(\zeta_t + \zeta_{lt})(v_{xx} + v_{yy}) + (2\zeta_{lt} + \zeta_l)v_{zz} = 0,$$

откуда следует

$$\zeta_t + \zeta_{lt} = 0; \quad 2\zeta_{lt} + \zeta_l = 0. \tag{1.144}$$

Величина ζ_l не зависит от магнитной индукции, так как при ее вычислении можно полагать, что скорости частиц параллельны магнитному полю, т. е. что в тензоре скоростей деформации единственной отличной от нуля компонентой является v_{zz} ([39], с. 296). Поэтому согласно (1.143), (1.144)

$$\zeta_t \sim \zeta_{lt} \sim \zeta_l \sim nT\tau_i. \tag{1.145}$$

Обозначая $\eta_0 = (3/2)\,\zeta_l$ и используя условие $v_{kk} = 0$, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} = \eta_0 (v_{xx} + v_{yy}); \\ &\sigma'_{zz} = \eta_0 v_{zz}. \end{aligned}\right\} \tag{1.146}$$

Как показывают вычисления, анизотропные коэффициенты вязкости имеют порядок [44]

$$\zeta_1 \sim \zeta_2 \sim \eta_\alpha / (\omega_\alpha \tau_\alpha)^2; \tag{1.147}$$

$$\zeta_1' \sim \zeta_2' \sim \eta_\alpha / (\omega_\alpha \tau_\alpha) \sim nT/\omega_\alpha. \tag{1.148}$$

Отсюда непосредственно следует, что анизотропные коэффициенты вязкости также определяются ионами.

Дисперсионные коэффициенты вязкости ζ_1' и ζ_2' отличны от нуля и при отсутствии столкновений. Их происхождение то же, что и члена $-\nabla p$ в уравнении движения идеальной жидкости, а именно, они описывают изменение суммарного импульса частиц в объеме $d\Omega$, вызванного тем, что частицы, попадающие в объем $d\Omega$ извне или покидающие этот объем, несут с собой определенный импульс. При прямолинейном движении частиц это изменение импульса описывается членом $-\nabla p$ в уравнении движения. Наличие магнитного поля $\mathbf{B}$ приводит к тому, что в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$, заряженные частицы вращаются по ларморовским окружностям. Поэтому изменение импульса описывается не только членом $-\nabla p$, соответствующим бесконечному ларморовскому радиусу, но и добавочными членами, пропорциональными дисперсионным коэффициентам вязкости: ζ_1' и ζ_2'. Таким образом, дисперсионные коэффициенты вязкости соответствуют учету *конечности ларморовского радиуса* ионов.

При выводе выражений (1.125), (1.126), (1.132), (1.136), (1.140)–(1.143), (1.145), (1.147) для диссипативных кинетических коэффициентов молчаливо предполагалось, что длина свободного пробега l значительно меньше характерной макроскопической длины:

$$l \ll \lambda. \tag{1.149}$$

Между тем в космической и термоядерной плазме зачастую выполняется противоположное условие:

$$l \gg \lambda. \tag{1.150}$$

Такую плазму называют *бесстолкновительной.*

В теории устойчивости такой плазмы играют существенную роль дисперсионные коэффициенты η_t' и ζ_2' [38].

1.8. Неидеальная магнитная гидродинамика

Обычно основными диссипативными коэффициентами являются электропроводность σ, сдвиговая вязкость η и теплопроводность κ. Кроме того, эти коэффициенты можно считать изотропными. В этом случае при отсутствии внешних сил уравнение движения, законы вмороженности и возрастания энтропии принимают вид

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{B_j}{4\pi}\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right); \tag{1.151}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot} \mathbf{B}); \tag{1.152}$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = 2\eta \, [v_{ij}^{(d)}]^2 + \operatorname{div}(\kappa \nabla T) + \nu_m \frac{(\operatorname{rot} \mathbf{B})^2}{4\pi}, \tag{1.153}$$

где ν_m – магнитная вязкость (1.86). К этим уравнениям следует добавить

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \tag{1.154}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \tag{1.155}$$

$$\rho = \rho(p, s). \tag{1.156}$$

Если η = const и ν_m = const, то уравнения (1.151) и (1.152) упрощаются:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{B_j}{4\pi} \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) + \eta \Delta v_i; \tag{1.157}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}. \tag{1.158}$$

Теперь оценим различные члены [47] в уравнениях одножидкостной магнитной гидродинамики (1.151)–(1.156). Эти оценки различны для стационарных волновых движений ([1], с. 319)

Начнем с волновых движений плазмы. Представим уравнение движения (1.151) в виде

$$\rho \partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\nu, \tag{1.159}$$

где $\mathbf{F}_i = -\rho(\mathbf{v} \nabla)\mathbf{v}$ – сила инерции; $\mathbf{F}_m = (1/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}$ – магнитная сила; $\mathbf{F}_p = -\nabla p$ – сила давления; $(F_\nu)_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ – сила вязкости.

Постоянные составляющие величин будем отмечать индексом нуль, а переменные – тильдой. Полагаем $v_0 = 0$; $E_0 = 0$; $j_0 = 0$. Пренебрегая в уравнении (1.158) диссипативным членом $\nu_m \Delta \mathbf{B}$, находим

$$\omega \tilde{B} \sim \tilde{v} B_0 / \lambda, \tag{1.160}$$

где ω – характерная частота колебания, а λ – характерная длина (длина волны). Из формулы (1.160) находим фазовую скорость волны $V_\Phi \sim \lambda \omega$

$$V_\Phi \sim \tilde{v} B_0 / \tilde{B}. \tag{1.161}$$

Магнитогидродинамические эффекты существенны тогда, когда в уравнении движения (1.159) основной силой является $\mathbf{F}_m$. При этом $\rho_0 \omega \tilde{v} \sim B_0 \tilde{B} / \lambda$, откуда $V_\Phi \sim B_0 \tilde{B} / (\rho_0 \tilde{v})$.

Сравнивая этот результат с формулой (1.161), находим порядок фазовой скорости МГД-волны:

$$V_{\Phi} \sim B_0/\sqrt{\rho_0}. \tag{1.162}$$

Скорость такого порядка называют *альфвеновской* и обозначают c_A:

$$c_A \sim B_0/\sqrt{\rho_0}. \tag{1.163}$$

Подставляя (1.162) в (1.161), находим

$$\widetilde{v} \sim \widetilde{B}/\sqrt{\rho_0}. \tag{1.164}$$

Это соотношение означает закон равнораспределения между кинетической и потенциальной энергией в МГД-волне:

$$\rho_0 \widetilde{v}^2 \sim \widetilde{B}^2. \tag{1.165}$$

Замечая, что $\widetilde{p} \sim \widetilde{\rho} c_s^2$, где c_s – скорость обычного (гидродинамического) звука – равна

$$c_s \sim \sqrt{p_0/\rho_0}, \tag{1.166}$$

получаем

$$F_m/F_p \sim \beta; \tag{1.167}$$

$$F_m/F_v \sim \mathrm{Re}_v, \tag{1.168}$$

где

$$\beta \sim B_0^2/p_0 \tag{1.169}$$

и

$$\mathrm{Re}_v \sim \lambda c_A/\nu \tag{1.170}$$

– *число Рейнольдса* в случае, когда характерная скорость равна альфвеновской;

$$F_i/F_m \sim \widetilde{B}/B_0; \tag{1.171}$$

$\nu = \eta/\rho$ – *кинематическая вязкость.*

Заметим, что, пользуясь числом Рейнольдса, формуле (1.143), определяющей вязкость жидкости, можно придать простой смысл:

$$lc_s/\nu = 1. \tag{1.172}$$

Это означает, что если характерный размер равен длине свободного пробега, а характерная скорость – скорости звука, то число Рейнольдса равно единице.

В уравнении (1.152) первый член справа описывает движение магнитных силовых линий вместе со средой, а второй член – диффузию магнитных силовых линий, способствующую выравниванию величины магнитного поля в различных точках пространства. Отношение этих членов

имеет порядок

$$|\mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})|/\nu_m|\Delta\mathbf{B}| \sim \mathrm{Re}_m, \tag{1.173}$$

где

$$\mathrm{Re}_m \sim \lambda c_A/\nu_m \tag{1.174}$$

– *магнитное число Рейнольдса* для волновых движений.

Для оценки плотности теплового потока $\mathbf{q}$ в законе сохранения энергии (1.67) сравним его с плотностью потока внутренней энергии $\rho\mathbf{v}\epsilon_m$, для чего введем *число Пекле*

$$\mathrm{Pe} = |\rho\mathbf{v}\epsilon_m|/|\mathbf{q}|. \tag{1.175}$$

Учитывая, что $\epsilon_m = c_p T$, $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$, где κ – коэффициент теплопроводности, получаем для числа Пекле оценку

$$\mathrm{Pe} = \lambda\nu/\chi, \tag{1.176}$$

где $\chi = \kappa/(\rho c_p)$ – температуропроводность.

Для выяснения физического смысла числа Рейнольдса Re_ν, магнитного числа Рейнольдса Re_m и числа Пекле рассмотрим уравнения (1.151)–(1.153) в случае, когда можно пренебречь силой инерции, а в их правых частях основную роль играют члены с коэффициентами вязкости $\nu = \eta/\rho$, магнитной вязкости ν_m и температуропроводности χ, причем все эти коэффициенты – константы. В этом случае уравнения (1.151)–(1.153) имеют, вообще говоря, вид уравнений диффузии:

$$\partial\mathbf{v}/\partial t = \nu\Delta\mathbf{v}; \tag{1.177}$$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \nu_m\Delta\mathbf{B}; \tag{1.178}$$

$$\partial T/\partial t = \chi\Delta T. \tag{1.179}$$

Если λ – характерная длина, то из этих уравнений следует, что время диффузии скорости

$$\tau_\nu = \lambda^2/\nu, \tag{1.180}$$

время диффузии магнитного поля

$$\tau_m = \lambda^2/\nu_m \tag{1.181}$$

и время диффузии температуры

$$\tau_T = \lambda^2/\chi. \tag{1.182}$$

Характерные для магнитной гидродинамики число Рейнольдса, магнитное число Рейнольдса и число Пекле имеют вид отношений соответственно τ_ν, τ_m и τ_T к характерному времени τ:

$$\mathrm{Re}_\nu = \tau_\nu/\tau; \tag{1.183}$$

$$\mathrm{Re}_m = \tau_m/\tau; \tag{1.184}$$

$$\mathrm{Pe} = \tau_T/\tau. \tag{1.185}$$

Очевидно, приближение идеальной магнитной гидродинамики справедливо при выполнении неравенств $\mathrm{Re}_\nu \gg 1$; $\mathrm{Re}_m \gg 1$; $\mathrm{Pe} \gg 1$.

Отметим, что в бесстолкновительной плазме $\omega_e \tau_e = \infty$, и поэтому процессы переноса анизотропны.

Оценим роль холловского члена. Пользуясь (1.130) и (1.164) и полагая $\tilde{j} \sim (c/L)\tilde{B}$, получаем

$$|\eta_t' \mathbf{j}|/|(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}| \sim \omega/\omega_i. \tag{1.186}$$

И если характерная частота значительно меньше ионной циклотронной частоты ($\omega \ll \omega_i$), то эффектом Холла можно пренебречь. Заметим, что в это соотношение не входит частота столкновений ω_e. Поэтому холловский член существен в бесстолкновительной плазме, когда диссипативными процессами можно пренебречь. Такое приближение учитывает дисперсию, возникающую при приближении частоты колебаний ω к резонансному значению ω_i, равному частоте ларморовского вращения ионов. Это приближение называют магнитной гидродинамикой с *ионной дисперсией.*

Как показано в § 1.7, в бесстолкновительной плазме остаются конечными также два дисперсионных коэффициентов вязкости: ζ_1' и ζ_2'. Отношение соответствующих слагаемых в вязкой силе $\partial\sigma_{ij}'/\partial x_j$ к силе инерции $v_j\,\partial v_i/\partial x_j$ равно

$$\left|\frac{\partial\sigma_{ij}'}{\partial x_j}\right| \Big/ \left|v_j\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right| \sim \frac{1}{\mathrm{Re}'}, \tag{1.187}$$

где Re' – дисперсионное число Рейнольдса, равное

$$\mathrm{Re}' = \lambda v/\nu_{1,2}', \tag{1.188}$$

$\nu_{1,2}'$ – дисперсионная кинематическая вязкость:

$$\nu_{1;2}' = \zeta_{1,2}'/\rho.$$

Пользуясь оценкой (1.148), находим

$$1/\mathrm{Re}' \sim v_i^2/(\lambda\omega_i v), \tag{1.189}$$

где $v_i = \sqrt{T_i/m_i}$ – тепловая скорость ионов. Полагая в формуле (1.189) $v \sim v_i$ и вводя ларморовский радиус иона

$$r_{Li} = v_i/\omega_i, \tag{1.190}$$

получаем

$$1/\mathrm{Re}' \sim r_{Li}/\lambda. \tag{1.191}$$

Таким образом, отношение членов, содержащих дисперсионные коэффициенты вязкости, к инерционному члену равно отношению ларморсвского радиуса иона к характерной длине. Поэтому приближение, в котором учитываются дисперсионные коэффициенты вязкости ζ_1' и ζ_2', называют магнитной гидродинамикой с учетом *конечности ларморовского радиуса* ионов.

Перейдем теперь к оценкам различных членов при стационарном $(\partial/\partial t = 0)$ обтекании неподвижного тела. Так как скорость среды на бесконечности равна v_0, а на поверхности обтекаемого тела есть точки, в которых скорость обращается в нуль, то

$$\tilde{v} \sim v_0. \tag{1.192}$$

Ток смещения при стационарном обтекании отбрасывается тривиально, так как $\partial/\partial t = 0$.

Будем различать два случая.

1. Малые индуцированные магнитные поля:

$\tilde{B} \leqslant B_0$.

Из (1.152) находим

$$\tilde{B}/B_0 \sim \mathrm{Re}_m, \tag{1.193}$$

где

$$\mathrm{Re}_m = \lambda v_0 / \nu_m \tag{1.194}$$

– *магнитное число Рейнольдса* стационарного обтекания.

Соотношение (1.193) означает, что индуцированным магнитным полем $\tilde{B}$ можно пренебречь при малом магнитном числе Рейнольдса (1.194). Такое приближение называют *безындукционным*.

Определим теперь отношение магнитной силы к силе инерции. Из (1.159)

$$|\mathbf{F}_m| / |\mathbf{F}_i| \sim \mathrm{Si}, \tag{1.195}$$

где Si – *число Сирса*:

$$\mathrm{Si} = \lambda V_A^2 / \nu_m v_0. \tag{1.196}$$

Отношение магнитной силы к другим силам равно

$$|\mathbf{F}_m| / |\mathbf{F}_p| \sim (c_A^2 / c_s^2)\,\mathrm{Re}_m, \tag{1.197}$$

$$|\mathbf{F}_m| / |\mathbf{F}_\nu| \sim \mathrm{Ha}^2, \tag{1.198}$$

где Ha – *число Гартмана*:

$$\mathrm{Ha} = \lambda c_A / \sqrt{\nu \nu_m}. \tag{1.199}$$

2. Большие индуцированные магнитные поля:

$$\tilde{B} \gg B_0. \tag{1.200}$$

Из (1.152) находим

$$\mathrm{Re}_m \sim 1. \tag{1.201}$$

Оценки (1.195)–(1.198) имеют такой же вид, как и в случае малых индуцированных магнитных полей, если считать магнитное число Рейнольдса (1.194) порядка единицы.

Глава 2

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

2.1. Уравнения магнитогидродинамических волн

Решения уравнений МГД, зависящие от времени t и одной пространственной координаты z, называют *одномерными волнами*. Одномерные волны возникают в тех областях трехмерного пространства (x, y, z), в которых можно пренебречь зависимостью МГД-величин от двух других пространственных переменных (x и y).

Система уравнений идеальной магнитной гидродинамики (1.64) в случае одномерных волн принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho}\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho}\frac{\partial B_y}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{B_x}{4\pi\rho}\frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{B_y}{4\pi\rho}\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial B_x}{\partial t} - B_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + B_x \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial B_y}{\partial t} - B_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c_s^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial s}{\partial t} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0;\\
&\rho = \rho(p; s).
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

(Шестое уравнение этой системы – это уравнение непрерывности с учетом седьмого уравнения для энтропии.)

Из последнего уравнения (2.1) следует

$$B_z = \text{const}. \tag{2.2}$$

Поэтому одномерная волна характеризуется семью МГД-переменными: v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, p, s.

Систему уравнений (2.1) удобно представить в матричном виде:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{7} Z_{ij}(\psi) \frac{\partial \psi_j}{\partial z} = 0, \tag{2.3}$$

или сокращенно

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + Z(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \tag{2.4}$$

где ψ – "вектор" МГД-состояния, т. е. совокупность семи величин:

$$\psi = (v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, p, s) \tag{2.5}$$

и Z – матрица вида

$$Z = \begin{bmatrix} v_z & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_z & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_z & \frac{B_x}{4\pi\rho} & \frac{B_y}{4\pi\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -B_z & 0 & B_x & v_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_z & B_y & 0 & v_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c_s^2 & 0 & 0 & v_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_z \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

В *двумерных волнах* все МГД-величины зависят от двух пространственных координат, например x и y, и времени. При этом система уравнений (1.14), (1.36), (1.45), (1.50), (1.61) имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + X \frac{\partial \psi}{\partial x} + Y \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{2.7}$$

Заметим, что в двумерных волнах соотношение (2.2) не выполняется, поэтому вектор состояния ψ содержит три компоненты $\mathbf{B}$, связанные зависимостью $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, т. е. состоит из восьми компонент:

$$\psi = (v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z, p, s). \tag{2.8}$$

Аналогично *трехмерные* волны, в которых МГД-величины зависят от трех координат x, y, z и времени t, описываются системой уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + X\frac{\partial \psi}{\partial x} + Y\frac{\partial \psi}{\partial y} + Z\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{2.9}$$

В одномерной волне (2.1) единственная пространственная координата z, от которой зависел вектор состояния ψ, была декартовой, поэтому вектор состояния в фиксированный момент времени t имел одинаковые значения на плоскости $z = \text{const}$. Такую одномерную волну называют плоской. Если же единственная пространственная координата, от которой зависит ψ, является радиусом в цилиндрической или сферической системе координат, то и волну называют соответственно *цилиндрической* или *сферической.*

2.2. Линейные волны

В волнах малой амплитуды вектор состояния ψ мало изменяется. Поэтому при рассмотрении таких волн можно пренебречь квадратами возмущений компонент вектора состояния $\delta\psi_i$, т. е. система уравнений магнитной гидродинамики будет линейной относительно возмущений $\delta\psi_i$. Такие волны называют *линейными.* В линейном приближении уравнение плоской одномерной волны (2.4) принимает вид

$$\partial\delta\psi/\partial t + Z(\psi)\,\partial\delta\psi/\partial z = 0, \tag{2.10}$$

где ψ – невозмущенный вектор состояния.

Рассмотрим одномерные линейные волны в о д н о р о д н о й среде, т. е. в случае, когда $\psi = \text{const}$. Выберем такую систему координат, в которой матрица Z имеет максимально простой вид.

Если система координат движется со скоростью жидкости, то невозмущенная скорость в этой системе координат $\mathbf{v} = 0$. Вращая далее систему координат вокруг оси z, можно добиться, чтобы $B_y = 0$. Тогда матрица (2.6) упрощается:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_x}{4\pi\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -B_z & 0 & B_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c_s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Здесь и далее p и $\mathbf{B}$ – давление и магнитная индукция, соответствующие однородному равновесному состоянию среды.

В плоской одномерной волне зависимость возмущения вектора состояния от координаты и времени имеет вид

$$\delta\psi = r \exp\left[\mathrm{i}(kz - \omega t)\right], \tag{2.12}$$

где r – семимерный вектор, определяющий амплитуду волны. Подстановка этого выражения в (2.10) дает

$$Zr = Vr, \tag{2.13}$$

где $V = \omega/k$ – фазовая скорость волны.

Таким образом, амплитуды колебаний различных МГД-величин являются компонентами собственного вектора r матрицы Z, а собственные значения V этой матрицы – фазовыми скоростями этих волн. Для нахождения V следует приравнять нулю детерминант системы (2.13)

$$\det(Z - VI) = 0, \tag{2.14}$$

где I – единичная матрица седьмого порядка. Это уравнение имеет семь корней, и, следовательно, существует семь типов плоских волн. Это прежде всего две *альфвеновские* волны с фазовыми скоростями $\epsilon_A V_A$, где

$$V_A = c_A |\cos\theta|. \tag{2.15}$$

Здесь $\epsilon_A = 1$ для волн, бегущих вправо (в положительном направлении оси z), и $\epsilon_A = -1$ для волн, бегущих влево; c_A – альфвеновская скорость:

$$c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}, \tag{2.16}$$

и θ – угол между направлением невозмущенного магнитного поля $\mathbf{B}$ и направлением распространения волны.

Затем две *быстрые магнитозвуковые* волны с фазовыми скоростями $\epsilon_F V_F$ (fast),

$$V_F(\theta) = \sqrt{\frac{c_A^2 + c_s^2 + \sqrt{(c_A^2 + c_s^2)^2 - 4c_A^2 c_s^2 \cos^2\theta}}{2}}. \tag{2.17}$$

Здесь c_s – скорость звука; $c_s = \sqrt{(\partial p/\partial\rho)_s}$; $\epsilon_F = \pm 1$ в зависимости от направления распространения волны.

Далее, две *медленные магнитозвуковые* волны с фазовыми скоростями $\epsilon_S V_S$ (slow):

$$V_S(\theta) = \sqrt{\frac{c_A^2 + c_s^2 - \sqrt{(c_A^2 + c_s^2)^2 - 4c_A^2 c_s^2 \cos^2\theta}}{2}}, \quad \epsilon_S = \pm 1. \tag{2.18}$$

И, наконец, *энтропийная* волна с нулевой фазовой скоростью

$$V_E = 0. \tag{2.19}$$

Фазовые скорости $V_A(\theta)$, $V_F(\theta)$, $V_S(\theta)$ альфвеновской и магнитозвуковых волн зависят от угла θ между направлением распространения волны $\mathbf{k}$ и направлением магнитного поля $\mathbf{B}$. Из формул (2.15), (2.17), (2.18) непосредственно видно, что фазовая скорость альфвеновской волны убывает от максимального значения, равного альфвеновской скорости c_A при $\theta = 0$, до нуля при $\theta = \pi/2$:

$$\left.\begin{aligned} &V_A(0) = c_A; \quad V_A(\pi/2) = 0; \\ &dV_A(\theta)/d\theta < 0, \quad 0 < \theta < \pi/2. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Скорость медленной магнитозвуковой волны также убывает с ростом θ от наименьшей из величин c_A или c_s до нуля:

$$\left.\begin{aligned} &V_S(0) = \min(c_A, c_s); \quad V_S(\pi/2) = 0; \\ &dV_S/d\theta < 0, \quad 0 < \theta < \pi/2, \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

тогда как скорость быстрой магнитозвуковой волны возрастает с ростом θ от наибольшей из величин c_A или c_s до значения $\sqrt{c_A^2 + c_s^2}$:

$$\left.\begin{aligned} &V_F(0) = \max(c_A, c_s); \qquad V_F(\pi/2) = \sqrt{c_A^2 + c_s^2}; \\ &dV_F/d\theta > 0, \quad 0 < \theta < \pi/2. \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Кроме того, скорость альфвеновской волны заключена между скоростями медленной и быстрой магнитозвуковых волн:

$$V_S(\theta) \leqslant V_A(\theta) \leqslant V_F(\theta). \tag{2.23}$$

График зависимости фазовой скорости от угла θ между вектором магнитного поля и направлением распространения волны называют *фазовой полярой*. (Значения фазовой скорости отложены на лучах, проведенных под углом θ к вектору магнитного поля.) На рис. 2.1 изображены фазовые поляры [9] в случае, когда $c_A > c_s$. [Если $c_A < c_s$, то альфвеновская поляра $V_A(\theta)$ проходит не через точку *2*, а через точку *1*.]

В предельных случаях $c_A \gg c_s$ и $c_A \ll c_s$ фазовые поляры превращаются в окружности:

$$\left.\begin{aligned} &V_F = c_A; \quad V_S = c_s |\cos\theta|; \quad c_A \gg c_s; \\ &V_F = c_s; \quad V_S = c_A |\cos\theta|; \quad c_A \ll c_s. \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Амплитуды возмущений величин $\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z, \delta B_x, \delta B_y, \delta p, \delta s$ в каждой из МГД-волн образуют правый собственный вектор r матрицы Z. Обозначая альфвеновскую, быструю и медленную магнитозвуковые и энтропийную волны соответственно верхними индексами A, F, S и E,

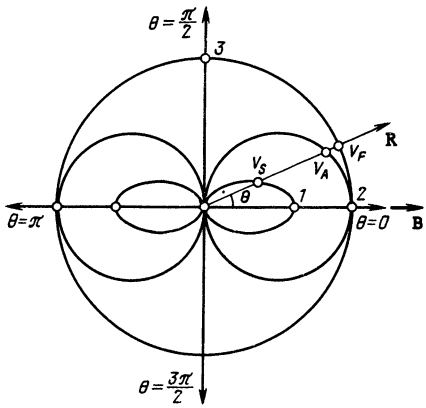


Рис. 2.1. Зависимость скоростей распространения быстрой магнитозвуковой (V_F), альфвеновской (V_A) и медленной магнитозвуковой (V_S) волн от угла θ между направлением распространения волны k и направлением магнитного поля B (фазовые поляры)

находим из (2.13):

$$\left.\begin{aligned} r^{(A)} &= [0, c_A\,|\cos\theta|, 0, 0, -\epsilon_A B_z \operatorname{sgn} B_z, 0, 0]; \\ r^{F} &= \left[\frac{\epsilon_F V_F c_A^2\,|\sin\theta\cos\theta|}{V_A^2 - V_F^2}, 0, \epsilon_F V_F, \frac{B_x V_F^2}{V_F^2 - V_A^2}, 0, \rho c_s^2, 0\right]; \\ r^{(S)} &= \left[\frac{\epsilon_S V_S c_A^2\,|\sin\theta\cos\theta|}{V_A^2 - V_S^2}, 0, \epsilon_S V_S, \frac{B_x V_S^2}{V_S^2 - V_A^2}, 0, \rho c_s^2, 0\right]; \\ r^{(E)} &= [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]. \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Так как собственный вектор определен с точностью до скалярного множителя, каждая из МГД-волн характеризуется одним независимым параметром, в качестве которого можно выбрать амплитуду отличного от нуля возмущения любой из МГД-величин.

Из (2.25) следует, что в альфвеновской волне равны нулю возмущения тех компонент скорости и магнитной индукции, которые лежат в плоскости невозмущенного магнитного поля B и направления распространения волны k (плоскость xz), а также возмущения давления и энтропии, т. е. в альфвеновской волне:

$$\delta v_x = \delta v_z = \delta B_x = \delta p = \delta s = 0, \quad \delta v_y \neq 0, \quad \delta B_y \neq 0.$$

Равенство нулю возмущения давления в альфвеновской волне связано с отсутствием возмущения продольной (относительно направления распространения волны) компоненты скорости δv_z ($\delta v_z = 0$). Иными словами, альфвеновская волна является поперечной. Таким образом, в отличие от обычной (немагнитной) гидродинамики в магнитной гидродинамике существуют поперечные волны. Это связано с упоминавшейся ранее упругостью магнитных силовых линий.

В магнитозвуковых волнах $r^{(F)}$ и $r^{(S)}$ равны нулю возмущения y-компонент скорости и магнитной индукции, перпендикулярных B

и $\mathbf{k}$, а также возмущение энтропии, т. е. в магнитозвуковых волнах

$$\delta v_y = \delta B_y = \delta s = 0;$$

$$\delta v_x \neq 0; \quad \delta v_z \neq 0; \quad \delta B_x \neq 0; \quad \delta p \neq 0.$$

Иными словами, магнитозвуковые волны являются плоскополяризованными, изэнтропийными и продольно-поперечными.

Из выражений (2.25) следует также, что в быстрой магнитозвуковой волне ($V_F > V_A$) возмущения δB_x и δp имеют одинаковые знаки, а в медленной ($V_S < V_A$) – противоположные. Это означает, что в быстрой волне возмущения гидростатического p и магнитного $B^2/(8\pi)$ давлений складываются, а в медленной волне вычитаются.

Заметим, что учет тока Холла (1.100) приводит к "перепутыванию" x-х и y-х компонент магнитной индукции, и в этом случае линейные волны не разделяются на альфвеновские и магнитозвуковые.

Наконец, в энтропийной волне возмущена только энтропия: $\delta s \neq 0$; $\delta \mathbf{v} = 0$; $\delta \mathbf{B} = 0$; $\delta p = 0$.

Рассмотрим более подробно случай вырождения, когда МГД-волны распространяются вдоль магнитного поля ($\theta = 0$).

Если $c_A > c_s$, то медленная магнитозвуковая волна превращается в звуковую (т. е. становится такой же, как и в отсутствие магнитного поля):

$$r^{(S)} = [0, 0, \epsilon_S c_s, 0, 0, \rho c_s^2, 0].$$

Что же касается быстрой магнитозвуковой волны, то компоненты $\delta\psi_1 = \delta v_x$ и $\delta\psi_4 = \delta B_x$ ее вектора возмущений в (2.25) представляют собой неопределенность типа 0/0. Для раскрытия этой неопределенности сделаем предельный переход $\theta \to 0$. При этом

$$V_F^2 - V_A^2 = c_A^4 \theta^4 / (c_A^2 - c_s^2)$$

и $\delta v_x \to \infty$, $\delta B_x \to \infty$. Введя другую нормировку так, чтобы при $\theta \to 0$ величины δv_x и δB_x стремились к конечному пределу, получим, что δv_z и δp стремятся к нулю. Учитывая также, что $B_x = B \sin\theta \operatorname{sgn} B_z$, находим

$$r^{(F)} = [-\epsilon_F c_A, 0, 0, B \operatorname{sgn} B_z, 0, 0, 0].$$

Таким образом, в этом случае быстрая волна превращается в альфвеновскую, но с другой поляризацией. Если же $c_A < c_s$, то при $\theta \to 0$ быстрая волна превращается в звуковую, а медленная – в альфвеновскую.

Перейдем теперь к несжимаемой ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) жидкости, которой соответствует предельный переход $c_s \to \infty$. В этом случае фазовые скорости магнитозвуковых волн определяются второй формулой (2.24). При этом быстрая магнитозвуковая волна невозможна, а в медленной отличны от нуля только возмущения δv_x и δB_x и эта волна отличается от

альфвеновской только тем, что у нее отличны от нуля x-е, а не y-е компоненты возмущения скорости и магнитного поля:

$$\delta v_x = \epsilon_S \delta B_x / \sqrt{4\pi\rho}. \tag{2.26}$$

Найденные выше скорости МГД-волн относятся к системе отсчета, в которой плазма покоится. Чтобы найти фазовые скорости волн $V_{\text{ф}}^{(j)}$, бегущих в направлении оси z в жидкости, движущейся со скоростью v, нужно к правым частям (2.15), (2.17)–(2.19) прибавить продольную компоненту скорости среды v_z:

$$V_{\text{ф}}^{(j)} = v_z + V_j. \tag{2.27}$$

Заметим, что произвольное одномерное возмущение МГД-величин $\delta v(z)$, $\delta B_x(z)$, $\delta B_y(z)$, $\delta p(z)$, $\delta s(z)$ распадается на семь волн: быструю магнитозвуковую, альфвеновскую и медленную магнитозвуковую волны, бегущие вправо, такие же три волны, бегущие влево, и энтропийную волну, покоящуюся относительно среды.

До сих пор мы исследовали волны в идеальной среде, т. е. в случае, когда можно пренебречь диссипативными процессами.

Чтобы проиллюстрировать влияние диссипации на распространение волн, рассмотрим простейший пример, когда единственным диссипативным процессом является электрическое сопротивление, т. е. когда электропроводность σ конечна. При этом магнитная вязкость (1.86) отлична от нуля. Для простоты ограничимся исследованием альфвеновской волны. Уравнения (1.151), (1.152) будут тогда иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \delta v_y}{\partial t} + \frac{B_z}{4\pi\rho}\frac{\partial \delta B_y}{\partial z} = 0; \\ &\frac{\partial \delta B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial \delta v_y}{\partial z} = \nu_m \frac{\partial^2 \delta B_y}{\partial z^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

Ищем решение в виде

$$\delta v_y, \delta B_y = \text{const} \exp\left[\mathrm{i}(kz - \omega t)\right]. \tag{2.29}$$

Подставив (2.29) в (2.28), получим дисперсионное уравнение

$$k^2 = \omega^2 / (V_A^2 - \mathrm{i}\omega\nu_m). \tag{2.30}$$

Полагая магнитную вязкость малой ($\omega\nu_m \ll V_A^2$) и разлагая выражение (2.30) в ряд по степеням ν_m, находим [1], удерживая только первую степень ν_m,

$$k = \frac{\omega}{V_A} + \frac{\mathrm{i}\omega^2}{2V_A^3}\nu_m. \tag{2.31}$$

Длина затухания

$$\delta = 1/\mathrm{Im}\, k \tag{2.32}$$

равна

$$\delta = 2V_A^3/(\omega^2 \nu_m). \tag{2.33}$$

Если же постоянное магнитное поле отсутствует ($V_A = 0$), то из дисперсионного уравнения (2.30) следует длина затухания

$$\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}, \tag{2.34}$$

равная глубине проникновения при скин-эффекте [1].

Об отражении и преломлении МГД-волн см. [49, 50].

Распространение МГД-волн в неоднородной среде можно исследовать методом *геометрической оптики* [51, 52]. При этом в точке, где совпадают фазовые скорости волн двух типов, происходит *трансформация* [53] волны одного типа в волну другого типа.

Кроме МГД-волн с фиксированными амплитудой и фазой, которые возбуждаются внешними источниками, в МГД-среде возникают волны со случайными фазой и амплитудой, обусловленные тепловыми флуктуациями. Нелинейное взаимодействие между волной с фиксированной фазой и флуктуацией приводит к *рассеянию*, т. е. к изменению частоты и волнового вектора исходной волны. При этом может произойти также трансформация волн [54].

2.3. Непрерывный спектр

МГД-волны, распространяющиеся в плазме, затухают вследствие диссипации. При этом плазма нагревается, что, в частности, является необходимой предпосылкой управляемого термоядерного синтеза. В ряде случаев, однако, эксперименты обнаружили значительно более сильное затухание, чем это должно было быть, если бы процессы диссипации были обусловлены столкновениями частиц. Значительное поглощение энергии волны нельзя было также объяснить затуханием Ландау [39], так как оно имеет место в случае, когда фазовая скорость волны равна тепловой скорости частиц. Если же фазовая скорость волны значительно превосходит среднюю квадратическую скорость частиц, то затухание Ландау экспоненциально мало. Поглощение волны не могло быть вызвано турбулентным нагревом плазмы, так как уровень шумов был мал.

Как оказалось, затухание волны было значительным вследствие того, что спектр частот был непрерывным.

Чтобы разъяснить механизм поглощения волны в случае непрерывного спектра, рассмотрим простейшую ситуацию, когда невозмущенное поле с магнитной индукцией $\mathbf{B}$ направлено вдоль оси z, а его величина зависит от координаты x:

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0(x)).$$

Для того чтобы плазма находилась в равновесии, необходимо, как это следует из уравнений (1.64), чтобы давление плазмы $p_0(x)$ удовлетворяло условию

$$p_0 + B_0^2/(8\pi) = \text{const}.$$

Рассмотрим распространение в такой плазме альфвеновской волны, фазовая скорость которой направлена вдоль оси z. В этой волне из всех МГД-величин отличны от нуля лишь y-компоненты возмущений скорости и магнитного поля δv_y и δB_y, причем зависимость этих величин от координаты x определяется функцией $B_0(x)$, а зависимость от z и t имеет вид $\exp(ikz - i\omega t)$. Кроме того, величины δv_y и δB_y в такой волне не зависят от y. Из (2.1) находим, что частота ω и волновое число k связаны между собой дисперсионным уравнением

$$\omega = \pm kc_A(x), \tag{2.35}$$

где $c_A(x) = B_0(x)/\sqrt{4\pi\rho_0(x)}$; $k = 2\pi/\lambda$; λ – длина волны.

В однородной плазме, где c_A не зависит от x, дисперсионное уравнение (2.35) определяет два значения ω, т. е. дискретный спектр. В неоднородной плазме альфвеновская скорость c_A зависит от x и $|\omega|$ принимает все значения от $\min c_A$ до $\max c_A$. Такую зависимость называют непрерывным спектром ([10], с. 96).

В случае непрерывного спектра волны, движущиеся в точках с различными координатами x, имеют различные частоты ω. Это приводит к тому, что волны (в двух точках с близкими значениями координаты x) имеют сильно различающиеся фазы $\omega t + \varphi$. Так как в эксперименте проявляются средние значения МГД-величин по некоторому интервалу $x - \Delta$, $x + \Delta$, то можно сказать, что возмущение стремится к нулю при $t \to \infty$. В самом деле, усредненное значение $\delta B_y(x, t)$ равно

$$\langle \delta B_y(x,z,t)\rangle = \frac{1}{2\Delta}\int_{x-\Delta}^{x+\Delta} \delta B_y(x,z,t)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\Delta}\int_{x-\Delta}^{x+\Delta} a(x)\exp[ikz - i\omega(x)t]\,dx, \tag{2.36}$$

где $\omega(x)$ задается дисперсионным уравнением (2.35) и $a(x)$ – функция, определяемая начальными условиями при $t = 0$. Перейдем в интеграле (2.36) от переменной x к переменной ω:

$$\langle \delta B_y(x,z,t)\rangle = \frac{\exp(ikz)}{2\Delta}\int_{\omega_-}^{\omega_+} b(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega, \cdot \tag{2.37}$$

где $b(\omega) = \dfrac{a[x(\omega)]}{d\omega/\partial x}$; $x(\omega)$ – функция, обратная $\omega(x)$; $\omega_\pm = \omega(x \pm \Delta)$.

Интегрируя (2.37) по частям, получаем

$$\langle \delta B_y(x,z,t)\rangle = \frac{\exp(ikz)}{2\Delta}\left[-\frac{b(\omega)\exp(-i\omega t)}{it}\Bigg|_{\omega_-}^{\omega_+} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{it}\int_{\omega_-}^{\omega_+} b'(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega\right].$$

Вследствие наличия t в знаменателе это выражение стремится к нулю при $t \to \infty$. Это поглощение волны имеет ту же природу, что и затухание Ландау, при котором волна поглощается из-за того, что частицы с различными скоростями излучают волны с различной частотой; в случае же непрерывного спектра волны в различных точках x имеют различную частоту.

2.4. Неустойчивость магнитогидродинамических волн

МГД-волны неустойчивы [55] и распадаются, превращаясь друг в друга [56, 57]. Рассмотрим этот процесс на примере распада альфвеновской волны малой амплитуды [58].

Будем пользоваться уравнениями идеальной магнитной гидродинамики. В нулевом приближении будем считать давление $p^{(0)}$, энтропию $s^{(0)}$ и магнитную индукцию $\mathbf{B}^{(0)}$ постоянными. Направления координатных осей выберем таким образом, чтобы невозмущенное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}^{(0)}$ лежало в плоскости xz, т. е. $B_y^{(0)} = 0$.

В первом приближении в отрицательном направлении оси z (влево) движется альфвеновская волна с синусоидальным профилем магнитного поля и скорости. В системе отсчета, движущейся вместе с волной, волна покоится, поэтому

$$B_y^{(1)} = B^{(1)}\sin(k^{(1)}z), \tag{2.38}$$

где $k^{(1)} = 2\pi/L$ и L – длина волны (период). Остальные компоненты возмущения магнитного поля в альфвеновской волне малой амплитуды согласно (2.25) равны нулю:

$$B_x^{(1)} = B_z^{(1)} = 0. \tag{2.39}$$

Так как альфвеновская волна движется влево, то в формуле (2.25) следует положить $\epsilon_A = -1$. Полагая для определенности $B_z^{(0)} > 0$, получаем

$$\left.\begin{aligned} &v_x^{(1)} = 0;\ v_y^{(1)} = \frac{B^{(1)}\sin(k^{(1)}z)}{\sqrt{4\pi\rho^{(0)}}};\ v_z^{(1)} = 0;\\ &p^{(1)} = s^{(1)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

Заметим, что в системе отсчета, в которой плазма покоится ($\mathbf{v}^{(0)} = 0$), альфвеновская волна движется влево со скоростью

$$V_A = B_z^{(0)} / \sqrt{4\pi\rho^{(0)}}. \tag{2.41}$$

Напротив, в системе отсчета, связанной с волной, плазма движется вправо со скоростью V_A:

$$v_x^{(0)} = v_y^{(0)} = 0; \quad v_z^{(0)} = V_A. \tag{2.42}$$

Это значение скорости и является нулевым приближением.

Во втором приближении возникают возмущения МГД-величин в альфвеновской волне. Ограничиваясь для простоты одномерными возмущениями, которые зависят только от одной продольной координаты z и не зависят от поперечных координат x и y, будем исходить из системы уравнений одномерных МГД-волн (2.13), в которой матрица $Z(\psi)$ зависит от суммы МГД-величин нулевого и первого приближений:

$$\partial\psi^{(2)}/\partial t + Z(\psi^{(0)} + \psi^{(1)})\,\partial\psi^{(2)}/\partial z = 0. \tag{2.43}$$

Так как коэффициенты этой системы дифференциальных уравнений не зависят явно от времени, то зависимость решений ψ^2 от t имеет характер $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. При этом система уравнений (2.43) принимает вид

$$\omega\psi^{(2)} = -\mathrm{i}Z(\psi^{(0)} + \psi^{(1)})\,d\psi^{(2)}/dz. \tag{2.44}$$

Таким образом, задача об устойчивости альфвеновской волны свелась к задаче о собственных значениях оператора $-\mathrm{i}Z(\psi^{(0)} + \psi^{(1)})\,d/dz$. Если хотя бы одно собственное значение ω этого оператора имеет положительную мнимую часть ($\mathrm{Im}\,\omega > 0$), то исходная альфвеновская волна неустойчива. В противном случае имеет место устойчивость.

Соотношение (2.44) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В отличие от уравнений с постоянными коэффициентами, решения которых имеют вид $\psi^{(2)}(z) = \mathrm{const}\exp(-\mathrm{i}kz)$, решение уравнения с периодическими коэффициентами согласно теореме Флоке можно представить в форме

$$\psi^{(2)}(z) = \exp(\mathrm{i}kz)\,\pi(z), \tag{2.45}$$

где $\pi(z)$ — периодическая вектор-функция с тем же периодом, что и коэффициенты уравнения:

$$\pi(r + L) = \pi(z). \tag{2.46}$$

Из соотношений (2.45), (2.46) следует, что в случае уравнений с периодическими коэффициентами волновое число k определено не одно-

значно, а с точностью до слагаемого $k^{(1)} = 2\pi/L$. Иными словами, волновые числа $k^{(\mathrm{I})}$ и $k^{(\mathrm{II})} = k^{(\mathrm{I})} + k^{(1)}$ следует считать равными друг другу. На геометрическом языке это означает, что дисперсионное уравнение $D(\omega, k) = 0$, связывающее частоту с волновым числом, определено не на плоскости (k, ω), где $-\infty < k < +\infty$, $-\infty < \omega < +\infty$, а в полосе $0 \leqslant k \leqslant k^{(1)}$, $-\infty < \omega < +\infty$, в которой отождествлены точки $(0, \omega)$ и $(k^{(1)}, \omega)$. Можно сказать, что дисперсионное уравнение определено на поверхности цилиндра, у которого образующая параллельна оси ω, а длина окружности поперечного сечения равна $k^{(1)}$.

Определим собственные значения ω с помощью теории возмущений. В нулевом приближении

$$Z(\psi^{(0)}) = \begin{bmatrix} v_z & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_z & 0 & 0 & -\frac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_z & \frac{B_x}{4\pi\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -B_z & 0 & B_x & v_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_z & 0 & 0 & v_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho c_s^2 & 0 & 0 & v_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_z \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

где согласно (2.42) $v_z = V_A$.

Оператор $-\mathrm{i}Z(\psi^{(0)})\, d/dz$ действует на компоненты вектора состояния $\psi^{(2)}$ двояким образом. Во-первых, эти компоненты дифференцируются по z и умножаются на $-\mathrm{i}$, и, во-вторых компоненты $\psi^{(2)}$ преобразуются согласно правилам матричного умножения (слева) на матрицу $Z(\psi^{(0)})$.

Чтобы можно было воспользоваться хорошо разработанной квантовомеханической теорией возмущений*, необходимо перейти к новому представлению, в котором оператор, соответствующий $Z(\psi^{(0)})$, был бы самосопряженным, т. е. для любых векторов состояния ξ и η выполнялось бы соотношение

$$(\xi, Z\eta) = (Z\xi, \eta). \quad (2.48)$$

Здесь (ξ, η) – скалярное произведение, которое определяется естест-

---

* Собственно говоря, в этой теории нет ничего квантовомеханического. Это просто математическая теория возмущений, но физики обычно знакомы с ней из квантовой механики.

венным образом:

$$(\xi\eta) = \lim_{\zeta\to\infty} \int_{-\zeta}^{\zeta} \sum_i \xi_i^*(z)\,\eta_i(z)\,dz, \tag{2.49}$$

и суммирование производится по всем компонентам ξ_i, η_i векторов ξ и η. Оператор $-\mathrm{i}\,d/dz$ самосопряженный. Что же касается оператора $Z(\psi^{(0)})$, то он несамосопряженный, так как матрица (2.47) несимметрична. Чтобы сделать матричное уравнение (2.44) самосопряженным, перейдем от вектора состояния $\psi^{(2)} = (v_x^{(2)}, v_y^{(2)}, v_z^{(2)}, B_x^{(2)}, B_y^{(2)}, p^{(2)}, s^{(2)})$ к новому вектору состояния $\varphi^{(2)} = (v_x^{(2)}, v_y^{(2)}, v_z^{(2)}, \alpha B_x^{(2)}, \alpha B_y^{(2)}, \gamma p^{(2)})$, где константы α и γ необходимо доопределить. (Ограничимся здесь рассмотрением изэнтропийных возмущений и опустим седьмую компоненту вектора состояния.) В новом представлении уравнение (2.44) принимает вид

$$\omega\varphi^{(2)} = (H^{(0)} + H^{(1)})\varphi^{(2)}, \tag{2.50}$$

где $H^{(0)}$ соответствует нулевому приближению $\varphi^{(0)}$, а $H^{(1)}$ учитывает поправку, линеаризованную относительно $\psi^{(1)}$. Выберем теперь константы α и γ таким образом, чтобы невозмущенный оператор $H^{(0)}$ стал самосопряженным. Для этого достаточно положить $\alpha = 1/\sqrt{4\pi\rho^{(0)}}$, $\gamma = 1/(\rho^{(0)} c_s^{(0)})$. Таким образом, в качестве вектора состояния следует взять выражение [56]

$$\varphi^{(2)} = \left(v_x^{(2)}, v_y^{(2)}, v_z^{(2)}, \frac{B_x^{(2)}}{\sqrt{4\pi\rho^{(0)}}}, \frac{B_y^{(2)}}{\sqrt{4\pi\rho^{(0)}}}, \frac{p^{(2)}}{\rho^{(0)} c_s^{(0)}}\right). \tag{2.51}$$

При этом

$$H^{(0)} = \begin{bmatrix} v_z & 0 & 0 & -c_{Az} & 0 & 0 \\ 0 & v_z & 0 & 0 & -c_{Az} & 0 \\ 0 & 0 & v_z & c_{Ax} & 0 & c_s \\ -c_{Az} & 0 & c_{Ax} & v_z & 0 & 0 \\ 0 & -c_{Az} & 0 & 0 & v_z & 0 \\ 0 & 0 & c_s & 0 & 0 & v_z \end{bmatrix} \mathrm{i}\frac{d}{dz}. \tag{2.52}$$

(Здесь $c_A = B^{(0)}/\sqrt{4\pi\rho^{(0)}}$.)

У оператора $H^{(1)}$ отличны от нуля элементы

$$\left.\begin{aligned} H_{26}^{(1)} &= \mathrm{i}\frac{c_{Az}}{c_s}\frac{dv_y^{(1)}}{dz}; \quad H_{23}^{(1)} = \mathrm{i}\frac{dv_y^{(1)}}{dz}; \\ H_{35}^{(1)} &= H_{53}^{(1)} = \mathrm{i}\frac{dv_y^{(1)}}{dz} + \mathrm{i}v_y^{(1)}\frac{d}{dz}. \end{aligned}\right\} \tag{2.53}$$

Видно, что оператор $H^{(1)}$ несамосопряжен, так как $H^{(1)}_{26} \neq H^{(1)}_{62} = 0$ и $H^{(1)}_{23} \neq H^{(1)}_{32} = 0$. Но так и должно быть, потому что в противном случае оператор $H^{(0)} + H^{(1)}$ был бы самосопряженным и его собственные значения ω были бы заведомо вещественными, т. е. альфвеновская волна всегда была бы устойчивой. Для применимости квантовомеханической теории возмущений достаточно, чтобы был самосопряженным только невозмущенный оператор $H^{(0)}$.

Собственные векторы невозмущенного оператора $H^{(0)}$ соответствуют альфвеновским и магнитозвуковым (быстрым и медленным) волнам в однородной среде. Для простоты ограничимся случаем $c_s \ll c_A$. При этом

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(A)} &= \exp(\mathrm{i}k_A z)\,[0, 1, 0, 0, -\epsilon_A, 0]; \\ \varphi^{(F)} &= \exp(\mathrm{i}k_F z)\left[\epsilon_F c_{Az}, 0, -\epsilon_F c_{Ax}, -c_A, 0, -c_s \frac{c_{Ax}}{c_A}\right]; \\ \varphi^{(S)} &= \exp(\mathrm{i}k_S z)\left[\epsilon_S \frac{c_{Ax}^2}{c_A}, 0, \epsilon_S \frac{c_{Ax}c_{Az}}{c_A}, -\frac{c_{Ax}^2}{c_A^2}c_s, 0, c_{Ax}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (2.54)$$

Соответствующие собственным векторам $\varphi^{(A)}$, $\varphi^{(F)}$, $\varphi^{(S)}$ собственные значения $\omega_A^{(0)}$, $\omega_F^{(0)}$ и $\omega_S^{(0)}$ являются частотами альфвеновской, быстрой и медленной магнитозвуковых волн в системе отсчета, связанной с исходной альфвеновской волной. В § 2.2 эти частоты были найдены в системе отсчета, в которой покоится не волна, а плазма. Обозначив частоты в системе отсчета плазмы $\Omega_A^{(0)}$, $\Omega_F^{(0)}$ и $\Omega_S^{(0)}$, получим

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_A^{(0)} = \epsilon_A k_A V_A; \quad \Omega_F^{(0)} = \epsilon_F k_F V_F; \\ &\Omega_S^{(0)} = \epsilon_S k_S \frac{c_{Az}}{c_A} c_s. \end{aligned}\right\} \quad (2.55)$$

Исходная альфвеновская волна бежит влево со скоростью V_A, поэтому частота $\Omega^{(0)}$ в системе отсчета плазмы связана с частотой ω^0 в системе отсчета волны соотношением

$$\omega^{(0)} = \Omega^{(0)} + kV_A. \quad (2.56)$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \omega_A^{(0)} &= k_A V_A (1 + \epsilon_A); \\ \omega_F^{(0)} &= k_F V_A (1 + \epsilon_F); \\ \omega_S^{(0)} &= k_S V_A (1 + \epsilon_S c_s/c_A). \end{aligned}\right\} \quad (2.57)$$

В частности, для альфвеновской волны

$$\omega_A^{(0)} = \begin{cases} 2k_A V_A & \text{при } \epsilon_A = 1; \\ 0 & \text{при } \epsilon_A = -1. \end{cases} \quad (2.58)$$

Верхняя строка в этом равенстве соответствует возмущению, движущемуся вправо, т. е. в направлении, противоположном исходной альфвеновской волне, а нижняя – возмущению альфвеновской волны, движущемуся в ту же сторону, что и исходная волна. Частота второго возмущения равна нулю, так как оно покоится в системе отсчета, движущейся вместе с исходной волной. Поэтому в дальнейшем будем полагать $\epsilon_A = 1$.

Если собственные значения $\omega^{(0)}$ невозмущенного оператора $H^{(0)}$ невырождены, то поправка $\omega^{(1)}$ ($\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)}$), как известно, равна

$$\omega^{(1)} = (\varphi^{(0)}, H^{(1)}\varphi^{(0)}). \tag{2.59}$$

В альфвеновских волнах равны нулю компоненты φ_1, φ_3, φ_4, φ_6 вектора состояния, а в магнитозвуковых волнах φ_2 и φ_5, и вычисленная с использованием (2.53) поправка к частоте $\omega^{(1)}$ равна нулю.

Иная ситуация возникает при вырожденных собственных значениях $H^{(0)}$, когда два различных собственных вектора $\varphi^{(\mathrm{I})}$ и $\varphi^{(\mathrm{II})}$ соответствуют одному и тому же собственному значению $\omega^{(0)}$. В этом случае поправка $\omega^{(1)}$ к частоте определяется квантовомеханическим секулярным уравнением

$$\det\left[(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu)})\omega^{(1)} - (\varphi^{(\mu)}, H^{(1)}\varphi^{(\nu)})\right] = 0, \quad \mu, \nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}. \tag{2.60}$$

Если решение $\omega^{(1)}$ этого квадратного уравнения имеет положительную мнимую часть ($\mathrm{Im}\,\omega^{(1)} > 0$), то исходная волна $\varphi^{(0)}$ неустойчива относительно распада на волны $\varphi^{(\mathrm{I})}$ и $\varphi^{(\mathrm{II})}$. Можно показать, что при распаде альфвеновской волны в случае $\beta \ll 1$ наибольший инкремент будет при распаде на альфвеновскую и медленную магнитозвуковые волны. При этом

$$\omega_S^{(0)} = \omega_A^{(0)}. \tag{2.61}$$

Обозначая это общее значение частоты $\omega = \omega_S^{(0)} = \omega_A^{(0)}$ и полагая для определенности $\omega > 0$, получаем из (2.57), (2.58) соответствующие волновые числа:

$$k_A = \frac{\omega}{2V_A}, \quad k_S = \frac{\omega}{V_A(1 + \epsilon_S c_s/c_A)}. \tag{2.62}$$

Учитывая, что $k_S > k_A$, находим, что коэффициенты секулярного уравнения (2.60) отличны от нуля только при выполнении соотношения

$$k_S = k_A + k^{(1)}. \tag{2.63}$$

Равенства (2.61) и (2.63) называют *распадными условиями.*

Решая секулярное уравнение (2.60), находим поправку $\omega^{(1)}$ к ча-

стоте $\omega^{(0)}$:

$$\omega^{(1)} = \pm \sqrt{\frac{2\pi^2}{L^2} \epsilon_S \frac{c_{Az}^2}{c_A c_s} \frac{[B^{(1)}]^2}{4\pi\rho^{(0)}}} \,. \tag{2.64}$$

Исходная альфвеновская волна неустойчива относительно распада, если подкоренное выражение в (2.64) отрицательно, для чего необходимо, чтобы $\epsilon_S = -1$, т. е. чтобы образовавшаяся вследствие возмущения медленная магнитозвуковая волна двигалась в ту же сторону, что и исходная альфвеновская волна.

Обычно распадное условие (2.61) пишут в системе отсчета плазмы. Вычитая из равенства (2.61) соотношение (2.63), умноженное на V_A, получаем *распадное условие* [56] в лабораторной системе отсчета:

$$\Omega_S^{(0)} = \Omega_A^{(0)} + \Omega_A^{(1)}, \tag{2.65}$$

где

$$\Omega_A^{(1)} = -k^{(1)} V_A. \tag{2.66}$$

Распадные условия станут более наглядными, если воспользоваться квантовомеханическим языком. А именно, волне с частотой Ω и волновым числом k будем сопоставлять частицу с энергией $\hbar|\Omega|$ и импульсом $\hbar k$ ($\hbar$ – постоянная Планка). Пользуясь формулами (2.56), (2.62), находим

$$\Omega_A^{(0)} = \frac{\omega}{2}; \quad \Omega_S^{(0)} = \frac{\epsilon_S (c_s/c_A)\omega}{1 + \epsilon_S c_s/c_A} \,. \tag{2.67}$$

Таким образом, при $\epsilon_S = -1$, когда исходная альфвеновская волна распадается, условие (2.65) можно представить в виде

$$\hbar|\Omega_A^1| = \hbar|\Omega_A^{(0)}| + \hbar|\Omega_S^{(0)}|, \tag{2.68}$$

Напротив, при $\epsilon_S = 1$, когда распад невозможен,

$$\hbar|\Omega_A^{(1)}| = \hbar|\Omega_A^{(0)}| - \hbar|\Omega_S^{(0)}|,$$

т. е.

$$\hbar|\Omega_A^{(1)}| < \hbar|\Omega_A^{(0)}| + \hbar|\Omega_S^{(0)}|. \tag{2.69}$$

Равенство (2.68) означает, что у исходной "альфвеновской частицы" хватает энергии для распада на две новые "частицы", а неравенство (2.69) означает, что энергии для распада не хватает, т. е. распад невозможен.

Рассмотренный выше распад альфвеновской волны может быть использован для бесстолкновительного нагрева плазмы [63]. Действительно, благодаря распадной неустойчивости энергия альфвеновской волны переходит в энергию МГД-волн, которая затем медленно переходит к частицам.

2.5. Слабые разрывы

Рассмотрим сначала одномерные волны большой амплитуды, описываемые нелинейными уравнениями вида (2.1). Так как скорость МГД-волн конечна, то внешнее возмущение, действующее конечное время на конечном отрезке оси z, вызывает изменение МГД-величин в каждый последующий конечный момент времени t не везде, а только в некоторой ограниченной части плоскости (t, z). Линию в этой плоскости, отделяющую возмущенную область от невозмущенной, называют фронтом волны. Фронт волны

$$t = \tau(z) \tag{2.70}$$

разделяет плоскость (t, z) на две области (рис. 2.2):

1) область позади фронта волны

$$t > \tau(z) \text{ (область } 2), \tag{2.71}$$

до точек которой возмущение уже дошло (и поэтому отлично от нуля);

2) область впереди фронта волны

$$t < \tau(z) \text{ (область } 1), \tag{2.72}$$

до точек которой возмущение еще не дошло (и поэтому равно нулю). В случае одной пространственной координаты фронт волны состоит из двух линий и соответственно область *1* состоит из двух частей – выше и ниже области *2*.

На фронте волны некоторые производные МГД-величин $\partial\psi_i/\partial t$ терпят разрыв, тогда как сами величины ψ_i непрерывны. Иными словами, фронт волны есть *линия слабого разрыва*. На этой линии $z = \zeta(t)$ должно выполняться определенное условие: задание вектора ψ на $z = \zeta(t)$ не позволяет однозначно определить ψ вне этой линии. Такую линию называют *характеристикой*.

Для нахождения характеристики $z = \zeta(t)$ введем отклонение ξ точки (t, z) от характеристики

$$\xi = z - \zeta(t). \tag{2.73}$$

Переходя в уравнении МГД-волн (2.4) от независимых переменных (t, z) к независимым переменным (t, ξ), получаем

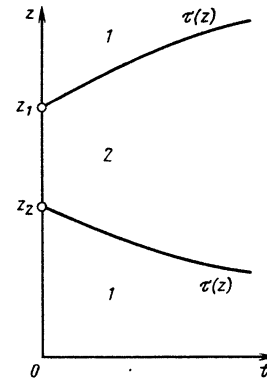
$$\left(Z - I\frac{d\zeta}{dt}\right)\frac{\partial\psi(t,\xi)}{\partial\xi} = -\frac{\partial\psi(t,\xi)}{\partial t}. \tag{2.74}$$

Если задано уравнение характеристики и значение ψ на ней, то правая часть (2.74) определена. Значения ψ вне характеристики можно определить, если найти $\partial\psi(t, \xi)/\partial\xi$. Последнее невозможно, если детерминант системы (2.74) равен нулю:

$$\det(Z - Id\zeta/dt) = 0. \tag{2.75}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.14), определяющим фазовые

Рис. 2.2. Фронт одномерной нелинейной волны



скорости V распространения линейных волн, если положить

$$d\zeta/dt = V. \qquad (2.76)$$

Последнее означает, что тангенс угла наклона характеристики к оси t равен фазовой скорости распространения линейной волны. Семи фазовым скоростям (2.15), (2.17)–(2.19) соответствуют семь характеристик.

Таким образом, существует семь типов характеристик, т. е. семь типов слабых разрывов: две быстрые магнитозвуковые характеристики, симметричные относительно оси z, которым соответствуют два быстрых слабых разрыва, распространяющихся со скоростью V_F в противоположных направлениях; две медленные и две альфвеновские характеристики, также симметричные относительно оси z, которым соответствуют слабые разрывы, распространяющиеся в противоположные стороны со скоростями V_S и V_A соответственно; наконец, энтропийная характеристика, совпадающая с траекторией движения бесконечно малого элемента жидкости.

Итак, линия слабого разрыва является характеристикой. Однако не каждая характеристика есть линия слабого разрыва.

Заметим, что производные МГД-величин вдоль характеристики $\partial\psi(t, \xi)/\partial\xi\big|_{\xi=0}$ ($i = 1, 2, \ldots, 7$) не независимы, а связаны между собой определенным соотношением. Для получения этого соотношения умножим слева матричное уравнение (2.74) на левый собственный вектор l матрицы Z, соответствующий собственному значению $d\zeta/dt$ и определяемый уравнением

$$l(Z - I\,d\zeta/dt) = 0. \qquad (2.77)$$

При этом из (2.74) следует, что вектор $\partial\psi(t, \xi)/\partial t\big|_{\xi=0}$ ортогонален вектору l:

$$l\,\frac{\partial\psi(t,\xi)}{\partial t}\bigg|_{\xi=0} = \sum_{i=0}^{7} l_i\,\frac{\partial\psi_i(t,\xi)}{\partial t}\bigg|_{\xi=0} = 0. \qquad (2.78)$$

Таким образом, производные МГД-величин вдоль характеристики $\dfrac{\partial\psi_i(t,\xi)}{\partial t}\bigg|_{\xi=0}$ связаны между собой соотношением (2.78).

Равенство (2.76) означает, что произвольное одномерное возмущение МГД-величин распадается на семь возмущений, каждое из которых распространяется с местной фазовой скоростью одной из линейных МГД-волн

$$V_{\Phi} = \omega/k. \tag{2.79}$$

С другой стороны, известно [33], что возмущение распространяется с групповой скоростью волны

$$V_{\text{гр}} = d\omega/dk. \tag{2.80}$$

В случае одномерных МГД-волн эти скорости совпадают, так как дисперсия отсутствует, т. е. фазовая скорость (2.79) не зависит от волнового числа k.

Перейдем теперь к д в у м е р н ы м МГД-волнам, в которых возмущения зависят от x, y и t. Для простоты ограничимся случаем, когда векторы **v** и **B** также лежат в плоскости x, y, т. е.

$$v_z = 0, \quad B_z = 0. \tag{2.81}$$

Можно показать ([57], vol 1, P. 75), что в этом случае линии слабого разрыва магнитозвуковых волн движутся от начала координат плоскости x, y с групповой скоростью

$$\mathbf{V}_{\text{гр}} = d\omega/d\mathbf{k}, \tag{2.82}$$

где

$$\omega = V(\theta)k; \tag{2.83}$$

$V(\theta)$ – фазовая скорость быстрой магнитозвуковой волны, в которой зависимость возмущений от координат и времени имеет вид

$$\delta\psi = \text{const}\exp\left[\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\right], \tag{2.84}$$

где

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}; \quad \theta = \operatorname{arctg}(k_y/k_x). \tag{2.85}$$

График групповой скорости в полярной системе координат называют *групповой полярой*. Быстрой и медленной магнитозвуковым фазовым полярам соответствуют быстрая и медленная групповые поляры. Их уравнения имеют громоздкий вид и здесь не приводятся. Групповые поляры магнитозвуковых волн изображены на рис. 2.3. Буквами F и S обозначены быстрая и медленная групповые поляры (последняя состоит из двух не связанных между собой частей, имеющих вид криволинейных треугольников с точками возврата в вершинах). Групповые поляры симметричны относительно осей координат, и их размеры определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} &01 = \min(c_A, c_s); \quad 02 = \max(c_A, c_s); \\ &03 = \sqrt{c_A^2 + c_s^2}; \quad 04 = \frac{c_A c_s}{\sqrt{c_A^2 + c_s^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.86}$$

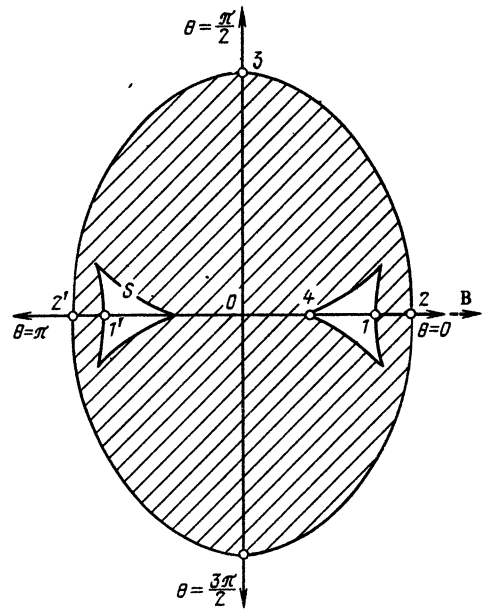


Рис. 2.3. Групповые поляры магнитозвуковых волн. Область, в которой возмущения магнитогидродинамических волн отличны от нуля, заштрихована

Нетрудно показать ([10], с. 48), что проекция групповой скорости на направление распространения волны равна фазовой скорости:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{гр}}\mathrm{k}/k = V. \qquad (2.86а)$$

В отличие от одномерного возмущения двумерное магнитозвуковое возмущение не распадается на быструю и медленную волны и на волны, бегущие вправо и влево. Напротив, в двумерном случае возмущение распространяется в виде единой волны.

Можно показать [57, 60–62], что в двумерных магнитозвуковых волнах возмущение внутри медленных групповых поляр S равно нулю. Такие области называют *лакунами.*

Групповая поляра альфвеновской волны вырождается в две точки 1 и 1′, если $c_A < c_s$, и в точки 2 и 2′, если $c_A > c_s$.

В случае трехмерных магнитозвуковых волн поверхность фронта волны получается вращением быстрой групповой поляры вокруг направления магнитного поля **B**. Сечение этой поверхности плоскостью, проходящей через **B** (осевое сечение), совпадает с рис. 2.3. Вращение медленной групповой поляры S вокруг **B** образует поверхность слабого разрыва. Однако в отличие от двумерных возмущений в трехмерном случае возмущение внутри двух поверхностей S (см. рис. 2.3) отлично от нуля, т. е. у трехмерных магнитозвуковых волн лакуны отсутствуют [62].

Таким образом, в магнитной гидродинамике лакуны существуют в случае двух пространственных координат и отсутствуют в случае трех пространственных координат. Это связано с тем, что фазовая скорость медленных магнитозвуковых волн обращается в нуль (при $\theta = \pi/2$). Если же фазовые скорости всех волн всюду отличны от нуля (например, в обычной гидродинамике), то положение обратное: лакуны существуют в трехмерном пространстве и отсутствуют в двумерном.

При распространении магнитозвуковой волны от точечного источника в трехмерном пространстве энергия возмущения отлична от нуля в области, заключенной внутри быстрой групповой поляры. Размеры этой области растут прямо пропорционально времени. При отсутствии диссипации суммарная энергия возмущения остается постоянной, поэтому амплитуда волны со временем убывает. Что же касается альфвеновской волны, то для нее вся энергия возмущения сосредоточена в двух точках (точки *1* и *1'* на рис. 2.3, если $c_A < c_s$, и точки *2* и *2'*, если $c_A > c_s$). Это означает, что энергия волны каналируется вдоль силовых линий магнитного поля. Поэтому амплитуда альфвеновской волны не меняется с течением времени (при отсутствии диссипации). Таким образом, на большом расстоянии от источника "выживают" только альфвеновские волны.

Если на границе плазмы с вакуумом приложено магнитное поле, перпендикулярное плоскости раздела, и со стороны вакуума вдоль нормали падает на границу раздела звуковая или электромагнитная волна, то в плазме возникают проходящие волны (магнитозвуковые и альфвеновская), также распространяющиеся вдоль нормали. Такая картина имеет место, если скорость альфвеновской волны отлична от скорости звука. Если же $c_A = c_s$, то прошедшие волны движутся не только вдоль нормали, а целиком заполняют внутренность конуса с осью вдоль нормали и с углом полураствора, равным $\operatorname{arctg}(1/2) \approx 27°$. Это явление называют *конической рефракцией* ([64], [57], p. 58).

2.6. Автомодельные волны

Переходя к более подробному исследованию одномерных н е л и н е й н ы х МГД-волн, ограничимся рассмотрением *автомодельных волн*, у которых все компоненты вектора состояния ψ_i, т. е. все МГД-величины, зависят от координаты z и времени t только посредством комбинации

$$u = z/t. \tag{2.87}$$

Особая роль, которую играют автомодельные волны в идеальной магнитной гидродинамике, связана с тем, что МГД-уравнения (1.64) не содержат параметров с размерностью длины. Эти уравнения содержат плотность, давление и магнитную индукцию, из которых можно образовать величины $\sqrt{p/\rho}$ и $B/\sqrt{\rho}$ с размерностью скорости, но нельзя образовать никаких комбинаций с размерностью длины (или времени). Поэтому если начальные и граничные условия также не содержат параметров с размерностью длины, то возникающие волны будут автомодельными ([33], с. 435).

В случае автомодельных волн уравнения в частных производных (2.4) превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения

$$[Z(\psi) - uI]\, d\psi/du = 0. \tag{2.88}$$

Для того чтобы это матричное уравнение имело ненулевое векторное решение $d\psi/du$, необходимо равенство детерминанта матрицы нулю:

$$\det(Z - uI) = 0. \tag{2.89}$$

Это алгебраическое уравнение относительно u совпадает с уравнением (2.14), определяющим фазовые скорости V линейных волн:

$$u \equiv z/t = V_{\text{ф}}^{(j)}(\psi). \tag{2.90}$$

Поэтому различные типы автомодельных волн соответствуют различным типам линейных волн.

Дифференциальные уравнения автомодельных волн (2.88) совпадают с алгебраическими уравнениями линейных волн (2.90), если положить

$$d\psi/du = r(\psi)\, a(\psi), \tag{2.91}$$

где r – один из собственных векторов матрицы Z и a – некоторый скаляр, зависящий от ψ. Это означает, что дифференциальные уравнения автомодельных волн имеют вид [65]

$$d\psi_1/r_1 = d\psi_2/r_2 = \ldots = d\psi_7/r_7. \tag{2.92}$$

Перейдем теперь к исследованию различных типов автомодельных волн. В нелинейной волне, каковой является автомодельная волна, нельзя разделить вектор состояния ψ на два слагаемых, описывающих невозмущенное состояние и возмущение. Поэтому нельзя непосредственно воспользоваться выражениями (2.25) для компонент собственных векторов, полученных в предположении, что среда покоится и невозмущенное магнитное поле лежит в плоскости xz. При отказе от этих предположений собственные векторы матрицы $Z\psi$ принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
r^{(A)} &= [-c_{Ay},\, c_{Ax},\, 0,\, \epsilon B_y \operatorname{sgn} B_z,\, -\epsilon B_x \operatorname{sgn} B_z,\, 0,\, 0]\,; \\
r^{(F)} &= \left[\frac{\epsilon V_F c_{Ax} c_{Az}}{c_A^2 - V_F^2},\, \frac{\epsilon V_F c_{Ay} c_{Az}}{c_A^2 - V_F^2},\, \epsilon V_F,\, \frac{B_x V_F^2}{V_F^2 - c_A^2},\, \frac{B_y V_F^2}{V_F^2 - c_A^2},\, \rho c_s^2,\, 0\right]; \\
r^{(S)} &= \left[\frac{\epsilon V_S c_{Ax} c_{Az}}{c_A^2 - V_S^2},\, \frac{\epsilon V_S c_{Ay} c_{Az}}{c_A^2 - V_S^2},\, \epsilon V_S,\, \frac{B_x V_S^2}{V_S^2 - c_A^2},\, \frac{B_y V_S^2}{V_S^2 - c_A^2},\, \rho c_s^2,\, 0\right]; \\
r^{E} &= [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
\end{aligned}\right\} \tag{2.93}$$

где ось z по-прежнему параллельна или антипараллельна направлению движения волны.

Начнем исследование с магнитозвуковых автомодельных волн. Из формул (2.5), (2.92), (2.93) следует

$$\left.\begin{aligned}
&dv_x/dp = \epsilon V_{F,S}\, c_{Ax}\, c_{Az}/\left[\rho c_s^2\,(c_A^2 - V_{F,S}^2)\right];\\
&dv_y/dp = \epsilon V_{F,S}\, c_{Ay}\, c_{Az}/\left[\rho c_s^2\,(c_A^2 - V_{F,S}^2)\right];\\
&dv_z/dp = \epsilon V_{F,S}/(\rho c_s^2);\\
&dB_x/dp = B_x V_{F,S}^2/\left[\rho c_s^2\,(V_{F,S}^2 - c_A^2)\right];\\
&dB_y/dp = B_y V_{F,S}^2/\left[\rho c_s^2 (V_{F,S}^2 - c_A^2)\right];\\
&ds/dp = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.94)$$

Последнее уравнение означает, что s = const, т. е. магнитозвуковые автомодельные волны являются изэнтропийными.

Если выбрать систему отсчета таким образом, чтобы в начальный момент времени $v_y = B_y = 0$, то, как видно из второго и пятого уравнений (2.94), равенство нулю этих величин сохранится и в дальнейшем. Это означает, что магнитозвуковые автомодельные волны плоскополяризованы.

В рассмотренных в предыдущем параграфе линейных волнах не происходило систематического изменения МГД-величин: вектор возмущения $\delta\psi$ колебался относительно невозмущенного значения ψ, которое оставалось постоянным. Напротив, в нелинейных волнах, в том числе и в автомодельных, происходит систематическое изменение МГД-величин. В частности, из уравнения (2.90) следует, что при фиксированном $z > 0$ с ростом t МГД-величины изменяются таким образом, что фазовая скорость V_Φ уменьшается:

$$\partial V_\Phi/\partial t < 0. \qquad (2.95)$$

Можно показать, что при условии [9, 63]

$$[d(\rho c_s)/dp]_{s=\text{const}} > 0, \qquad (2.96)$$

обычно выполняющемся для газов (в частности, это условие выполняется для совершенного газа), в магнитозвуковых автомодельных волнах давление и плотность убывают с течением времени:

$$p(t_2) < p(t_1), \quad \rho(t_2) < \rho(t_1) \text{ при } t_2 > t_1. \qquad (2.97)$$

Продольное магнитное поле B_z остается постоянным, как и в любых одномерных плоских волнах, движущихся вдоль оси z. Что же касается поперечного магнитного поля $|B_x|$, то оно убывает в быстрых автомодельных колоннах:

$$\Delta|B_x| < 0 \qquad (2.98)$$

и возрастает в медленных волнах:

$$\Delta|B_x| > 0. \qquad (2.99)$$

Поперечная компонента скорости v_x изменяется согласно формулам (2.94), (2.97). Поэтому в быстрых автомодельных волнах

$$\operatorname{sgn} \Delta v_x = \epsilon \operatorname{sgn}(B_x B_z), \tag{2.100}$$

тогда как в медленных волнах

$$\operatorname{sgn} \Delta v_x = -\epsilon \operatorname{sgn}(B_x B_z). \tag{2.101}$$

Быстрая автомодельная волна, впереди которой поперечное магнитное поле B_x отлично от нуля, а позади обращается в нуль, называется *волной выключения*. Аналогично медленная волна, впереди которой поперечное магнитное поле равно нулю, а позади отлично от нуля, называется *волной включения*.

Если амплитуда медленной автомодельной волны достаточно велика, то позади нее давление и плотность среды обращаются в нуль. Это явление называют *кавитацией*. Можно показать [9, 63], что в быстрых автомодельных волнах кавитация невозможна.

Перейдем теперь к альфвеновским автомодельным волнам. Из формул (2.91)–(2.93) следует

$$\left.\begin{aligned} &dv_x/dv_y = -c_{Ay}/c_{Ax};\\ &dv_z/dv_y = 0;\\ &dB_x/dv_y = \epsilon B_y \operatorname{sgn} B_z/c_{Ax};\\ &dB_y/dv_y = -\epsilon B_x \operatorname{sgn} B_z/c_{Ax};\\ &dp/dv_y = 0;\\ &ds/dv_y = 0; \end{aligned}\right\} \tag{2.102}$$

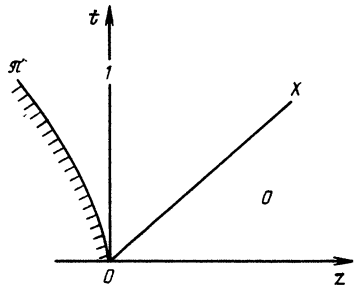
$$B_x^2 + B_y^2 = \text{const};\quad v_z = \text{const},\quad p = \text{const};\quad s = \text{const}. \tag{2.103}$$

Из (2.103) в свою очередь вытекает, что фазовая скорость альфвеновской автомодельной волны, равная $V_{\text{ф}}^A = v_z + \epsilon|B_z|/\sqrt{4\pi\rho}$, также не меняется с течением времени, что противоречит соотношению (2.95). Поэтому а в т о м о д е л ь н а я а л ь ф в е н о в с к а я в о л н а н е с у щ е с т в у е т.

Аналогично доказывается, что н е с у щ е с т в у е т а в т о м о д е л ь н ы х э н т р о п и й н ы х в о л н.

Таким образом, существует только четыре типа автомодельных МГД-волн – быстрая и медленная магнитозвуковые, движущиеся как вправо, так и влево.

В ряде работ рассматривается более широкий класс нелинейных МГД-волн – *простые волны*. Так называют решения МГД-уравнений, в которых все компоненты вектора состояния зависят от координаты z и времени t посредством комбинации $z - Vt$, где V – скорость распространения волны, являющаяся функцией МГД-величин. В обычной (не-



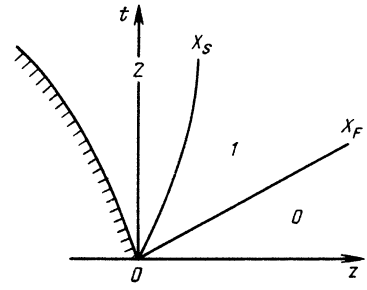


Рис. 2.4. Волны, образующиеся при движении поршня (обычная гидродинамика)

Рис. 2.5. Волны, образующиеся при движении поршня (магнитная гидродинамика)

магнитной) гидродинамике при отсутствии сильных разрывов возмущение области покоя ($\mathbf{v} = 0$; $p = \text{const}$; $s = \text{const}$) приводит к образованию простых волн. Например, если выдвигать поршень из газа, то с областью постоянного течения 0 граничит вдоль характеристики X

$$dz/dt = v_z + c_s \tag{2.104}$$

простая волна, доходящая до поршня π (см. область *1* на рис. 2.4). Напротив, при движении поршня в МГД-среде из начальной точки $z = 0$, $t = 0$ исходят две характеристики: "быстрая" X_F

$$dz/dt = v_z + V_F \tag{2.105}$$

и "медленная" X_S

$$dz/dt = v_z + V_S \tag{2.106}$$

(рис. 2.5). В области *1*, заключенной между обеими характеристиками, возникает быстрая простая волна ([63], с. 90), однако в области *2*, заключенной между медленной характеристикой и поршнем, движение среды, вообще говоря, не описывается простой волной. Поэтому медленные простые, но не автомодельные волны, практически невозможны.

Об изменении МГД-величин в автомодельных волнах см. [66, 67].

Глава 3

МАГНИТНАЯ ГИДРОСТАТИКА

3.1. Равновесные конфигурации

Магнитная гидростатика – это раздел магнитной гидродинамики, изучающий механическое равновесие проводящей среды в магнитном поле [8а]. Такое равновесие необходимо, в частности, для осуществления управляемой термоядерной реакции.

В термоядерных установках плазма удерживается не твердыми стенками, а магнитным полем. Конфигурацию, способную долго удерживать плазму в ограниченной части пространства, называют *магнитной ловушкой*. Обзор теории магнитных ловушек приведен в [48, 68, 69, 70].

Если пренебречь диффузией, т. е. полагать $\mathbf{v} = 0$, и считать плазму стационарной, то уравнение движения и уравнения Максвелла принимают вид

$$\nabla p = \frac{1}{c}\,\mathbf{j} \times \mathbf{B}; \tag{3.1}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}; \tag{3.2}$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0. \tag{3.3}$$

Первое из этих уравнений выражает закон сохранения импульса макроскопической системы, который всегда должен соблюдаться несмотря на различные факторы, не учитываемые в модели идеальной стационарной одножидкостной магнитной гидродинамики: колебания, дрейфовые движения, диффузию и т. п. ([69, с. 124–125). Остальные уравнения не связаны с каким-либо приближением: (3.3) справедливо всегда, а (3.2) – для любых стационарных состояний.

Линию, касательная к которой в любой точке $\mathbf{r}(x, y, z)$ параллельна магнитному полю $\mathbf{B}(x, y, z)$, называют *магнитной силовой линией.* Ее уравнения имеют вид

$$dx/B_x = dy/B_y = dz/B_z. \tag{3.4}$$

Линия, у которой касательная в любой точке параллельна вектору плотности тока $\mathbf{j}(x, y, z)$, описывается уравнениями

$$dx/j_x = dy/j_y = dz/j_z \tag{3.5}$$

и называется *токовой линией.*

Согласно (3.1) магнитные силовые линии и токовые линии лежат на поверхностях:

$$p(x, y, z) = \text{const}. \tag{3.6}$$

Если давление плазмы изменяется в пространстве, т. е. если уравнение (3.6) определяет поверхность, а не часть трехмерного пространства, то магнитная силовая линия, исходящая из некоторой точки (x_0, y_0, z_0), при неограниченном продолжении либо замыкается, либо заполняет поверхность (3.6), которая поэтому называется *магнитной поверхностью* [13б].

Если в некоторой части трехмерного пространства Ω давление плазмы одинаково, $\nabla p = 0$ (в частности, если оно настолько мало, что им можно

пренебречь), то магнитная сила $(1/c)\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ согласно (3.1) обращается в нуль. Такие конфигурации называют *бессиловыми*. Примером бессилового магнитного поля является конфигурация

$$B_x = B_0 \cos(\mathrm{Sh}\, z),\quad B_y = B_0 \sin(\mathrm{Sh}\, z);\quad B_z = 0,\quad B_0 = \mathrm{const}. \tag{3.7}$$

Величина Sh характеризует перекрещенность магнитных силовых линий, называется *широм* (от английского shear – ножницы) и определяется как производная по нормали n к магнитной поверхности от угла α между направлением магнитного поля B и некоторой фиксированной прямой, касательной к магнитной поверхности:

$$\mathrm{Sh} = \lambda\, d\alpha/dn$$

(здесь λ – характерная длина).

В случае бессилового поля магнитная силовая линия при неограниченном продолжении, как правило, заполняет всю трехмерную область Ω, т. е. в бессиловом поле магнитных поверхностей, вообще говоря, не существует [70а].

Простейшей магнитной ловушкой является плазменный цилиндр, боковая поверхность которого удерживается магнитным полем. Такую конфигурацию называют *пинчем* (от английского pinch – сжатие). Из условий равновесия (3.1)–(3.3) следует, что в аксиально симметричном пинче отличны от нуля только компоненты магнитного поля B_z и B_θ и компоненты плотности тока j_z, j_θ, причем зависят они от r:

$$B_r = 0;\quad j_r = 0;\quad \partial/\partial z = 0;\quad \partial/\partial\theta = 0.$$

Компоненты B_z и j_z магнитного поля и тока называют продольными, а компоненты B_θ и j_θ – азимутальными.

Реальный пинч всегда ограничен в направлении оси z, однако для простоты будем считать его бесконечным в этом направлении, пренебрегая явлениями на торцах.

В случае аксиально симметричного пинча условие равновесия (3.3) удовлетворяется тождественно, а из (3.1), (3.2) следует [67]

$$\langle p\rangle + \frac{\langle B_i^2\rangle}{8\pi} = \frac{\langle B_e^2\rangle}{8\pi} + \frac{I^2}{2\pi c^2 a^2}, \tag{3.8}$$

где угловые скобки означают усреднение по поперечному сечению пинча радиусом a:

$$\langle p\rangle = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\pi r p(r)\, dr \tag{3.9}$$

[мы полагаем $p(a) = 0$]; B_i и B_e – внутреннее и внешнее продольные магнитные поля; I – ток в шнуре; c – скорость света.

Двум членам в правой части (3.8) соответствуют два способа удержания плазмы. Если $I^2 \gg \langle B_e^2\rangle$, то плазма удерживается током, текущим

внутри нее. Если же $\langle B_e^2 \rangle \gg I^2$, то плазма удерживается внешним магнитным полем, создаваемым токами, текущими в проводниках, расположенных вне плазмы.

Соответственно двум способам удержания плазмы существуют два частных случая пинча [10]:

1) *z-пинч*: $j_z \neq 0$, $j_\theta = 0$.

При этом $B_\theta \neq 0$; $B_z = 0$ и плазма удерживается собственным (убывающим при $r \to \infty$) магнитным полем B_θ. Выражение (3.8) принимает вид условия равновесия Беннетта:

$$\langle p \rangle = I^2/(2\pi c^2 a^2); \tag{3.10}$$

2) *θ-пинч*: $j_\theta \neq 0$, $j_z = 0$.

Плазма удерживается внешним (отличным от нуля при $r \to \infty$) магнитным полем B_z. При этом

$$B_\theta = 0, \quad I = 0.$$

В общем случае в пинче отличны от нуля $j_z(r)$, $j_\theta(r)$, $B_z(r)$, $B_\theta(r)$. В силу аксиальной симметрии магнитные силовые линии (3.4) являются винтовыми линиями:

$$z = \theta r B_z(r)/(B_\theta(r)).$$

Шаг h винтовой линии зависит от r и равен

$$h(r) = 2\pi r B_z(r)/(B_\theta(r)). \tag{3.11}$$

В хвосте магнитосферы Земли происходит изменение направления магнитного поля на противоположное на сравнительно небольшом расстоянии λ. Моделью этой равновесной конфигурации является *плоский пинч*. Магнитное поле в этом случае имеет единственную отличную от нуля компоненту

$$B_z = B_0 \operatorname{th}(x/\lambda) \tag{3.12}$$

и изменяется от $B_z = -B_0$ при $x \to -\infty$ до $B_z = B_0$ при $x \to +\infty$, причем при $|x| \gg \lambda$ магнитное поле можно считать однородным. Полагая, что все величины зависят только от x, находим из условий равновесия (3.1), (3.2)

$$j_x = 0; \quad j_y = -\frac{B_0 c}{4\pi\lambda \operatorname{ch}^2(x/\lambda)}; \quad j_z = 0; \tag{3.13}$$

$$p = B_0^2/(8\pi \operatorname{ch}^2(x/\lambda)). \tag{3.14}$$

Максимальное давление $p_{max} = B_0^2/(8\pi)$ и максимальная плотность тока достигаются в центральной плоскости $x = 0$ плоского пинча; при $|x| \gg \lambda$ плотность тока и давление бесконечно малы.

3.2. Аксиально-симметричные конфигурации

В пинче осуществляется изоляция плазмы от боковых стенок. Однако плазма может уходить через торцы. Чтобы уменьшить этот уход, напряженность магнитного поля на торцах делают значительно большей, чем в середине ловушки. Такие области большого магнитного поля называют *магнитными пробками* [11] (см. рис. 3.1).

Принцип запирающего действия магнитных пробок состоит в следующем. При движении частицы в медленно меняющемся внешнем магнитном поле всегда существует величина, которая приближенно остается постоянной. Такая почти сохраняющаяся величина называется адиабатическим инвариантом [70б].

Адиабатическим инвариантом при движении заряженной частицы в медленно меняющемся магнитном поле является магнитный момент частицы

$$\mu_\perp = v_\perp^2/(2B), \tag{3.15}$$

где $v_\perp$ – поперечная относительно магнитного поля компонента скорости частицы.

Из уравнения движения частицы в магнитном поле

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

следует, что полная скорость частицы $v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2$ остается постоянной:

$$\frac{d}{dt}v^2 = 0.$$

Согласно равенству $\mu_\perp \approx$ const при увеличении магнитной индукции B поперечная компонента скорости $v_\perp$ увеличивается, пока не достигнет значения сохраняющейся полной скорости v. Так как $v_\perp \leqslant v$, дальнейшее увеличение $v_\perp$ невозможно, т. е. невозможно дальнейшее движение частицы в направлении увеличения магнитной индукции, и частица отразится от магнитной пробки.

В связи с вышеизложенным ловушки с магнитными пробками называют *адиабатическими.* В иностранной литературе, кроме того, пользуются терминами "пробкотроны", "магнитные бутылки" и "пиротроны".

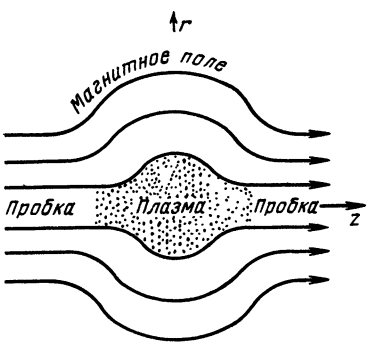


Рис. 3.1. Ловушка с магнитными пробками

Заметим, что частицы, скорость которых образует достаточно малый угол α с магнитным полем $\mathbf{B}(\sin\alpha < \sqrt{B/B_m}$, B_m – магнитное поле в пробках), выходят из пробкотрона. Поэтому пробкотроны называют *открытыми ловушками.*

Простейшие ловушки с магнитными пробками аксиально симметричны. Поэтому приступим к общему исследованию равновесных аксиально-симметричных конфигураций, у которых МГД-величины $\mathbf{B}$, $\mathbf{j}$ и p зависят только от двух цилиндрических координат r и z и не зависят от азимута θ. Аксиально-симметричное векторное поле $\mathbf{A}(r, z)$ называют *тороидальным*, если отлична от нуля только его азимутальная компонента A_θ: $A_\theta \neq 0$; $A_r = 0$; $A_z = 0$. Если же компонента A_θ равна нулю ($A_\theta = 0$; $A_r \neq 0$; $A_z \neq 0$), то поле называют *полоидальным* (от слова "полюс" – силовые линии в этом случае лежат в меридиональных плоскостях, как у магнитного диполя [71]). В общем случае, когда отличны от нуля все три компоненты A_r, A_θ, A_z, векторное поле называют *винтовым.* О разложении магнитного поля на тороидальное и полоидальное при отсутствии аксиальной симметрии см. [12].

Из условий равновесия (3.1)–(3.3) следует, что если плотность тока тороидальна, то магнитное поле полоидально, и наоборот. Если же магнитное поле тороидально, то можно сделать более сильное утверждение: не только плотность тока полоидальна, но и вся конфигурация является z-пинчем. Чтобы это доказать, нужно исключить градиент давления из r-й и z-й компонент уравнения (3.1) и воспользоваться уравнениями (3.2), (3.3).

Учитывая равенство

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j},$$

приведенные утверждения можно сформулировать иначе: ротор полоидального поля тороидален, а ротор тороидального поля полоидален.

Семь скалярных условий равновесия (3.1)–(3.3) можно свести к одному скалярному уравнению [72]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 16\pi^3 r^2 \frac{dp}{d\psi} + \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{d(I^2)}{d\psi} = 0, \tag{3.16}$$

где ψ – магнитный поток через круг радиусом r, находящийся на высоте z:

$$\psi(r, z) = \int_0^r B(z, \rho)\, 2\pi\rho\, d\rho \tag{3.17}$$

и I – ток, протекающий через тот же круг:

$$I(r, z) = \int_0^r j_z(\rho, z)\, 2\pi\rho\, d\rho. \tag{3.18}$$

Соотношение (3.16) называют *уравнением Грэда–Шафранова* [48].

Величины ψ и I определяют магнитное поле:

$$B_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \psi}{\partial r};\quad B_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \psi}{\partial z};\quad B_\theta = \frac{2I}{cr}, \tag{3.19}$$

а вместе с ним и плотность тока $\mathbf{j}$:

$$\left.\begin{aligned} j_r &= -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial I}{\partial z};\quad j_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial I}{\partial r};\\ j_\theta &= -\frac{c}{8\pi^2 r}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

или в силу (3.16)

$$j_\theta = 2\pi r \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{cr}\frac{d(I^2)}{d\psi}. \tag{3.21}$$

Из соотношений (3.19), (3.20) видно, что $(\mathbf{B}\,\nabla\psi) = 0$, $(\mathbf{j}\,\nabla\psi) = 0$, т. е. что градиент ψ ортогонален магнитным силовым линиям и линиям тока. Это означает, что на магнитной поверхности вместе с давлением p постоянны также ψ и I (такие величины называют *поверхностными*). Поскольку магнитная поверхность может быть определена заданием одной из сохраняющихся на ней величин, например ψ, две другие будут функциями ψ:

$$p = p(\psi),\quad I = I(\psi). \tag{3.22}$$

Уравнение Грэда–Шафранова (3.16) имеет много простых точных решений, что позволяет а н а л и т и ч е с к и исследовать широкий класс равновесных плазменных конфигураций. В частности, уравнение (3.16) л и н е й н о, если

$$dp/d\psi = \text{const},\quad d(I^2)/d\psi = \text{const}. \tag{3.23}$$

При этом одно из простейших решений уравнения Грэда–Шафранова имеет, как легко убедиться, вид

$$\psi = a_z z^2 + a_R (r^2 - R^2)^2, \tag{3.24}$$

где a_z и a_R – постоянные, равные

$$a_z = -\frac{4\pi^2}{c^2}\frac{d(I^2)}{d\psi},\quad a_R = -2\pi^3 \frac{dp}{d\psi}. \tag{3.25}$$

Магнитная поверхность ψ = const такой конфигурации ограничивает тело, топологически подобное бублику и называемое *тороидом*. Если *меридиональное сечение* (θ = const) тороида является кругом, то такой тороид называют *тором*.

Решение (3.24) описывает семейство вложенных друг в друга магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$. Самую внутреннюю поверхность, вырождающуюся в окружность, называют *магнитной осью.* В случае конфигурации (3.24) магнитная ось определяется уравнениями

$$z = 0; \quad r = R. \tag{3.26}$$

Давление плазмы монотонно возрастает от нуля на внешней магнитной поверхности до некоторого максимального значения на магнитной оси. В окрестности магнитной оси $r \approx R$ уравнение магнитной поверхности (3.24) принимает вид

$$\psi = a_z z^2 + 4R^2 a_R (r - R)^2. \tag{3.27}$$

Если

$$a_z a_r > 0, \tag{3.28}$$

то магнитные поверхности вблизи магнитной оси (3.26) представляют собой семейство вложенных друг в друга тороидов эллиптического меридионального сечения. В частности, при $a_z = 4R^2 a_R$ эти тороиды имеют круглое поперечное сечение, т. е. являются торами. Если же a_z и a_r имеют противоположные знаки, то магнитные поверхности, близкие к линии (3.26), пересекаются с меридиональной плоскостью по гиперболе. При этом не существует равновесной плазменной конфигурации, целиком расположенной вблизи магнитной оси.

О различных магнитных ловушках, описываемых уравнением Грэда–Шафранова (3.16), см. [69, 70, 72].

3.3. Замкнутые магнитные ловушки

Чтобы полностью исключить уход плазмы через торцы пинча, его изгибают, соединяя противоположные торцы и превращая тем самым пинч в тороид. Такие ловушки называют *замкнутыми.*

Простейшая модель тороида – пинч длиной L, у которого отождествлены противоположные торцы, т. е. $\mathbf{B}(r, z+L) = \mathbf{B}(r, z)$; $p(r, z+L) = p(r, z)$. При этом продольное магнитное поле пинча превращается в тороидальное, а азимутальное поле пинча – в полоидальное поле тороида. Однако в такой модели периодического по z пинча не учитывается эффект тороидальности [48].

В замкнутых магнитных ловушках зачастую образуются сложные плазменные конфигурации с несколькими магнитными осями. Часть пространства, заполненная магнитными поверхностями, содержащими внутри себя д а н н у ю магнитную ось и не содержащими другие магнитные оси, называют *областью влияния* магнитной оси. Граничную магнитную поверхность, разделяющую различные области влияния, называют *сепаратрисой.* Сепаратриса отделяет также замкнутые магнитные поверхности (расположенные в конечной части пространства)

от магнитных поверхностей, уходящих в бесконечность. Таким образом, сепаратриса разделяет магнитные поверхности с различной топологией ([73], с. 49).

Если плазма удерживается внешними магнитными полями, то тороидальную ловушку называют *стелларатором* [11, 59] (от английского stellar – звездный; эта ловушка предназначена для осуществления термоядерных реакций, подобных звездным). Если же плазма удерживается магнитным полем азимутального тока, текущего внутри плазмы, то ловушка называется *токамаком* [74, 75] (сокращенное выражение "*то*роидальная *ка*мера и *маг*нитная *к*атушка" ([73], с. 9).

Функцию

$$\psi(\mathbf{r}) = \text{const}, \tag{3.29}$$

определяющую магнитные поверхности, называют *поверхностной функцией.*

Основными характеристиками тороидальных конфигураций [66] являются объем

$$\Omega = \int d\tau, \tag{3.30}$$

ограниченный поверхностью (3.29), продольный (тороидальный) поток Φ магнитного поля через поперечное сечение магнитной поверхности и поперечный поток χ, проходящий по малому обходу тора между манитной осью и магнитной поверхностью. Все эти величины зависят друг от друга и, так же как и ψ, представляют собой поверхностные функции.

Важные характеристики магнитных поверхностей – *число вращения*

$$\mu_h = d\chi/d\Phi \tag{3.31}$$

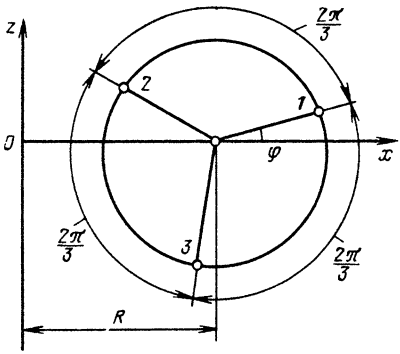
и *удельный объем* магнитного поля

$$\Omega'(\Phi) = d\Omega/d\Phi. \tag{3.32}$$

Если число вращения рационально:

$$\mu_h = m/n \tag{3.33}$$

(m и n – целые положительные числа), то магнитная силовая линия возвратится в первоначальную точку, сделав n оборотов по большому обходу тора и m оборотов по малому обходу. Такую замкнутую магнитную силовую линию называют *магнитной осью n-го порядка.* Магнитную поверхность, образованную осями n-го порядка, называют *рациональной* [70б]. Она состоит из отдельных непересекающихся магнитных силовых линий, так же как цилиндр состоит из отдельных образующих. Напротив, *иррациональная* магнитная поверхность (у которой число вращения иррационально) состоит из единственной магнитной силовой линии, которая никогда не возвращается в исходную точку, т. е. является незамкнутой. Неограниченно продолжаясь, эта маг-



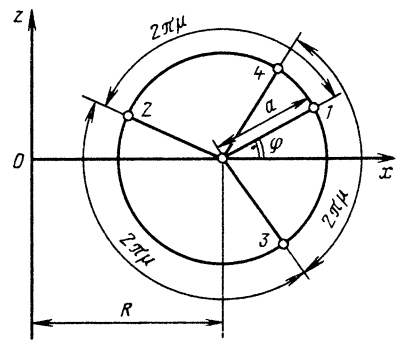


Рис. 3.2. Точки пересечения магнитной силовой линии с меридиональной полуплоскостью в случае рациональной магнитной поверхности

Рис. 3.3. Точки пересечения магнитной силовой линии с меридиональной полуплоскостью в случае иррациональной магнитной поверхности

нитная силовая линия непрерывно заполняет всю иррациональную магнитную поверхность.

Например, пусть точка, пробегающая магнитную силовую линию, вращается в плоскости (ξ, z) по окружности радиусом a с центром в точке $\xi = R$, $z = 0$:

$$\xi = R + a\cos(\mu_h \alpha + \varphi); \quad z = a\sin(\mu_h \alpha + \varphi), \tag{3.34}$$

где φ – начальное значение фазы; α – параметр, пробегающий все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Пусть плоскость (ξ, z) в свою очередь вращается вокруг оси z:

$$x = \xi\cos\alpha; \quad y = \xi\sin\alpha. \tag{3.35}$$

Тогда точка с координатами (x, y, z) при изменении α описывает линию, навивающуюся на тор, полученный вращением окружности

$$(x - R)^2 + z^2 = a^2 \tag{3.36}$$

вокруг оси z.

Если, например, $\mu_h = 1/3$, то при $\alpha = 0, 2\pi, 4\pi$ магнитная силовая линия проходит через сечение тора меридиональной полуплоскостью $y = 0$, $x > 0$. Эти точки пересечения магнитной силовой линии с меридиональной полуплоскостью обозначены на рис. 3.2 цифрами *1*, *2*, *3*. При этом все магнитные силовые линии замыкаются после трехкратного обхода тора. Каждая магнитная силовая линия пересекает меридиональную полуплоскость в трех точках, соответствующих углам φ, $\varphi + 2\pi/3$, $\varphi + 4\pi/3$. Различным значениям φ соответствуют различные силовые линии,

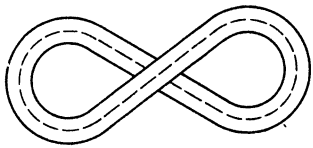


Рис. 3.4. Стелларатор типа восьмерки

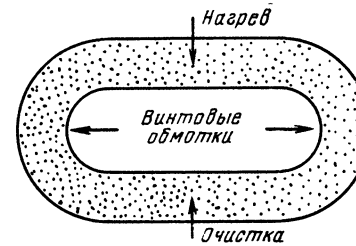
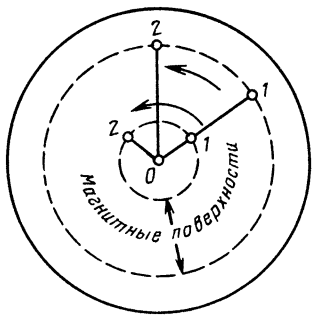


Рис. 3.5. Стелларатор типа рейстрек



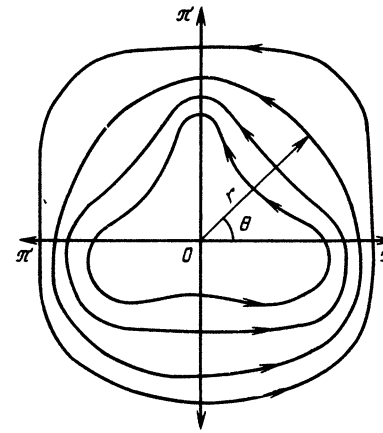


Рис. 3.6. Вращательное преобразование:

0 – магнитная ось; *1* – точка пересечения магнитной силовой линии с меридиональной плоскостью (совпадающей с плоскостью чертежа); *2* – магнитная силовая линия после одного обхода по большому радиусу тора

Рис. 3.7. Гофрированный тор ("вид сверху"):

r, θ – цилиндрические координаты; плоскость чертежа совпадает с плоскостью $z = 0$; магнитные силовые линии обозначены линиями со стрелками; π – области магнитных пробок

которые при изменении φ от нуля до $2\pi/3$ заполняют всю поверхность тора.

Если же число вращения иррационально, то при изменении α одна магнитная силовая линия заполняет всю поверхность тора. Последовательные точки пересечения магнитной силовой линии с меридиональной полуплоскостью отмечены на рис. 3.3 цифрами *1*, *2*, *3*, *4*.

Преобразование, переводящее последовательные точки пересечения магнитной силовой линии с меридиональной полуплоскостью друг в друга (*1* → *2* → *3* → *4*), называют *вращательным*.

Для осуществления вращательного преобразования изгибают тор в виде восьмерки, выводя магнитную ось из одной плоскости (рис. 3.4), или используют специальные дополнительные винтовые обмотки, создающие полоидальное магнитное поле (B_r, B_z). При этом иногда для облегчения нагревания плазмы и очистки от примесей в тор вставляют два прямолинейных участка, придавая ему форму беговой дорожки (racetrack – *рейстрек*, рис. 3.5).

Если число вращения μ_h изменяется при переходе от одной магнитной поверхности к другой (рис. 3.6), то осуществляется перекрещенность магнитных силовых линий, т. е. шир.

Своеобразным гибридом тороидальной ловушки и пробкотрона является *гофрированный тор* [76] (по-английски bumby torus), представляющий собой тор, в котором аксиальная симметрия нарушена несколькими магнитными пробками (рис. 3.7). В гофрированном торе угол вращательного преобразования равен нулю, т. е. все магнитные силовые линии замкнуты.

О различных магнитных ловушках для термоядерного синтеза см. [78].

3.4. Диффузия плазмы

Вследствие столкновений происходит диффузия плазмы из магнитной ловушки. Чтобы определить скорость диффузии v, рассмотрим стационарную равновесную конфигурацию, в которой магнитное поле направлено вдоль оси z и все величины зависят только от одной пространственной координаты x. Из закона Ома

$$\mathbf{E} + (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\sigma$$

находим

$$v_x = cE_y/B_z - cj_y/\sigma B_z . \tag{3.37}$$

Так как мы полагаем, что $\partial B_z/\partial t = 0$, то из уравнения Максвелла

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

следует $dE_y/dx = 0$. Учитывая условия на $\pm\infty$, $E_y(\pm\infty) = 0$, получаем

$$E_y = 0. \tag{3.38}$$

Величину j_y в выражении (3.37) находим с помощью условия равновесия $\nabla p = (1/c) j \times \mathbf{B} : j_y = (c/B_z)\, dp/dx$. Поэтому соотношение (3.37) принимает вид

$$v_x = -(c^2/\sigma B_z^2)\, dp/dx . \tag{3.39}$$

Подставляя $p = nT$ и полагая $T = \text{const}$, найдем скорость v_x диффузии

поперек магнитного поля $B_z = B$:

$$v_x = -(D_\perp/n)\,\frac{dn}{dx}\,, \tag{3.40}$$

где $D_\perp$ – коэффициент поперечной диффузии:

$$D_\perp = c^2 nT/(\sigma B^2)\,. \tag{3.41}$$

Так как

$$\sigma \sim e^2 n\tau_e/m_e\,,$$

то коэффициент поперечной диффузии прямо пропорционален частоте столкновений электронов $\nu_e \sim 1/\tau_e$ и обратно пропорционален квадрату магнитного поля.

С другой стороны, из кинетической теории известно, что коэффициент диффузии

$$D = \Delta^2/\tau, \tag{3.42}$$

где τ – время свободного пробега частицы и Δ – расстояние, на которое смещается частица за время свободного пробега. В частности, при диффузии поперек магнитного поля смещение Δ равно ларморовскому радиусу

$$\rho_B = v_T/\omega_B\,, \tag{3.43}$$

где $v_T = \sqrt{T/m}$ – тепловая скорость частицы и $\omega_B = eB/(mc)$ – частота ларморовского вращения.

Из приведенных формул видно, что коэффициент диффузии плазмы $D_\perp$ равен коэффициенту диффузии электронов:

$$D_e = \rho_e^2/\tau_e\,, \tag{3.44}$$

где ρ_e – ларморовский радиус электронов. Что же касается коэффициента диффузии ионов D_i, то, как следует из формул (3.42), (3.43), в изотермической плазме ($T_e = T_i$) он значительно превосходит коэффициент диффузии электронов:

$$D_i/D_e \sim \sqrt{m_i/m_e}\,. \tag{3.45}$$

Однако плазма в целом диффундирует медленнее, а именно, со скоростью диффузии электронов. Это объясняется тем, что согласно уравнению Максвелла $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -(1/c)\,\partial\mathbf{B}/\partial t$ напряженность электрического поля E_x в установившемся режиме равна нулю. Возникающая в начале диффузии напряженность поля E_x сдерживает ионы, и в установившемся режиме плазма диффундирует со скоростью, определяемой коэффициентом диффузии электронов (3.44) [11]. Такую диффузию называют *амбиполярной* [3].

Сказанное выше относится к диффузии плазмы поперек магнитного поля. Что же касается диффузии плазмы при отсутствии магнитного поля или вдоль магнитного поля, то, отождествляя в формуле (3.42)

смещение Δ с длиной свободного пробега и пользуясь соотношениями (1.114), (1.117), находим, что коэффициент диффузии электронов значительно больше коэффициента диффузии ионов. Поэтому диффузионный процесс при отсутствии магнитного поля или вдоль магнитного поля идет со скоростью диффузии ионов [3, 79].

Формула (3.41) определяет коэффициент диффузии спокойной плазмы. В турбулентной плазме диффузия может происходить гораздо быстрее.

Более подробно о диффузии плазмы см. [80, 81].

Глава 4

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

4.1. Устойчивость непрерывной конфигурации по Ляпунову

Давление $p(\mathbf{r})$, магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, а вместе с ним и плотность тока $\mathbf{j} = (c/4\pi)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}$, удовлетворяющие условиям равновесия (3.1)–(3.3), нельзя создать абсолютно точно. В любой момент времени t_0 неизбежно возникают малые возмущения этих величин δp, $\delta\mathbf{B}$, $\delta\mathbf{j}$. При этом, вообще говоря, нарушаются условия равновесия. Поэтому возмущения магнитогидродинамических величин $\delta p(t)$, $\delta\mathbf{B}(t)$, $\delta\rho(t)$, $\delta\mathbf{v}(t)$ зависят от времени t.

Магнитогидродинамическую равновесную конфигурацию называют *устойчивой по Ляпунову*, если малое возмущение МГД-величин $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$, p, s, возникшее в произвольный момент времени t_0, остается малым в любой последующий момент $t > t_0$.

Проиллюстрируем устойчивость по Ляпунову на примере математического маятника. Существуют два положения равновесия маятника: 1) маятник направлен вертикально вниз ($\theta = 0$); 2) маятник направлен вертикально вверх ($\theta = 180°$) (θ – угол между нитью подвеса маятника при его колебании и вертикалью, направленной вниз). На практике осуществляется только первое положение равновесия (вертикально вниз). Различие между первым и вторым положениями равновесиями в том, что нижнее положение равновесия устойчиво, а верхнее неустойчиво. При устойчивости малые отклонения от положения равновесия всегда остаются малыми, тогда как при неустойчивости они с течением времени неограниченно возрастают (точнее, до тех пор, пока не нарушится предположение о малости отклонения).

Для устойчивости равновесного состояния необходимо, чтобы сила, возникающая при малом смещении из положения равновесия, возвращала систему в прежнее состояние, т. е. чтобы сила эта была направлена противоположно смещению.

Быстрее всего развиваются крупномасштабные возмущения, эволюция которых описывается в рамках идеальной магнитной гидродинамики ([10], с. 171).

Из соображений размерности следует, что при $c_A > c_s$ инкремент нарастания неустойчивости в рамках магнитной гидродинамики идеальной среды имеет порядок c_A/λ, где λ – характерный размер плазменной установки. При $c_A < c_s$ инкремент нарастания неустойчивости имеет порядок c_s/λ. Поэтому характерное время τ развития неустойчивости в рамках идеальной магнитной гидродинамики имеет порядок

$$\tau \sim \min(\lambda/c_A, \lambda/c_s). \tag{4.1}$$

Более медленно развиваются диссипативные гидродинамические неустойчивости и еще медленнее – кинетические неустойчивости, обусловленные тепловым разбросом скоростей частиц. В настоящей главе мы в основном ограничимся рассмотрением устойчивости в приближении идеальной магнитной гидродинамики.

Многие результаты исследования устойчивости можно вывести качественно из свойств магнитных силовых линий. Как показано в § 1.4, силы, создаваемые магнитным полем, таковы, что силовые линии магнитного поля имеют тенденцию сокращаться и одновременно отталкиваться друг от друга.

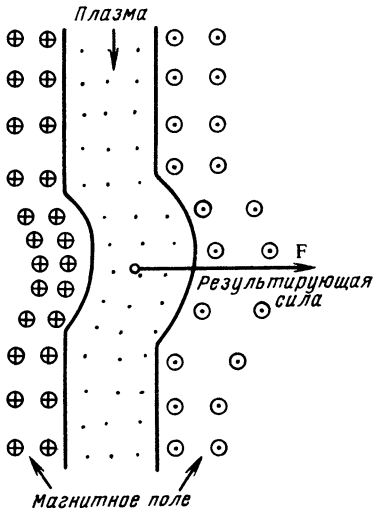
В качестве примера рассмотрим устойчивость пинча с резкой границей относительно изгибания. При случайном изгибе магнитные силовые линии сгущаются на вогнутой стороне пинча и становятся реже на выпуклой его стороне. Результирующая сила $\mathbf{F}$ стремится еще более изогнуть пинч (рис. 4.1). Поэтому пинч неустойчив относительно изгибания.

Если же пинч поместить в проводящий кожух, то при случайном приближении его к кожуху магнитные силовые линии в этом месте сгущаются (рис. 4.2) и результирующая сила стремится оттолкнуть пинч от кожуха, т. е. вернуть его в прежнее (равновесное) положение. Таким образом, кожух оказывает на пинч стабилизирующее действие [13б].

Тенденция магнитных силовых линий к сокращению приводит к тому, что они стремятся выпрямиться. Поэтому наложение внешнего продольного магнитного поля B_z также стабилизирует пинч.

Неустойчивость пинча с резкой границей, стянутого магнитным полем собственного тока, тесно связана с убыванием магнитного поля по мере удаления от границы плазмы наружу. Особенно наглядно это видно при рассмотрении локальных возмущений границы. Если внутри плазмы магнитного поля нет, то при равновесии давление плазмы на границе пинча уравновешивается внешним магнитным полем: $p = B^2/(8\pi)$ (B – поле на границе пинча).

Пусть теперь возмущение границы плазмы имеет вид плоского желоба, причем прямые, образующие желоб, параллельны магнитным силовым линиям. Такой желоб как бы просовывается между магнитными силовыми линиями, немного их раздвигая. Поскольку возмущение магнитного поля мало, для создания желоба требуется малая энергия.



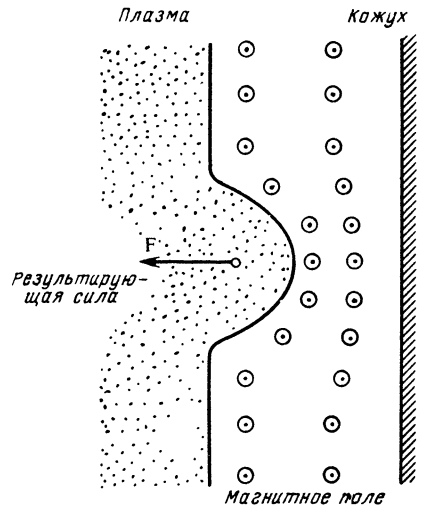


Рис. 4.1. Качественное доказательство неустойчивости пинча относительно изгибания

Рис. 4.2. Стабилизация пинча проводящим кожухом (качественное рассмотрение)

Если магнитное поле уменьшается с удалением от границы плазмы, то вершина желоба попадает в область меньшего магнитного поля и вытягивается еще дальше ([82], с. 141). Таким образом, плазма с резкой границей, удерживаемая внешним магнитным полем, нарастающим наружу, неустойчива. Эту неустойчивость называют *желобковой.*

Желобковая неустойчивость возникает в любой плазменной конфигурации, в которой магнитное поле убывает к периферии. Устойчивы магнитные ловушки, у которых наименьшее магнитное поле расположено внутри ловушки. Их называют ловушками с *минимумом* B, или с *магнитной ямой* [83]. Заметим, что при сложной геометрии магнитного поля критерий "минимума B" теряет силу [84, 85].

Легко видеть, что если граница плазмы выпуклая, то при движении наружу магнитное поле уменьшается. Чтобы убедиться в этом, положим для простоты, что область, занятая плазмой, имеет форму цилиндра и что $B_r = B_z = 0$. Полагая также, что $B_\theta \equiv B$ не зависит ни от θ, ни от z, находим из уравнения $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0$

$$B = \mathrm{const}/r, \tag{4.2}$$

т. е. с ростом r магнитная индукция убывает. Если же граница плазмы вогнута, то магнитная индукция нарастает к периферии. Поэтому плазменная конфигурация с выпуклой границей неустойчива, а с вогнутой устойчива [82] (рис. 4.3).

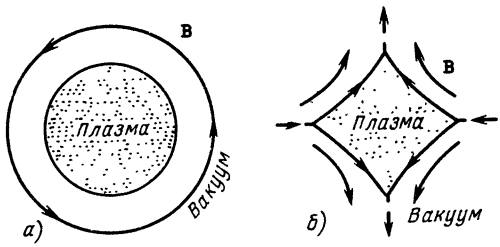


Рис. 4.3. Влияние формы границы на устойчивость плазменной конфигурации:

а – граница выпукла – плазма неустойчива; *б* – граница вогнута – плазма устойчива

В ловушке с магнитными пробками обязательно существуют выпуклые участки границы (см. рис. 3.1), поэтому локальные возмущения плазмы могут привести к неустойчивости. Что же касается тора, то на внешнем его обводе граница выпукла, а на внутреннем вогнута. Поэтому неустойчивость начинает развиваться на внешней границе. Из-за сходства тора с накачанным автомобильным баллоном такую неустойчивость называют *баллонной*. Подробнее об этом см. [86–90].

В случае винтового пинча с $j_z \neq 0$, $j_\theta \neq 0$ пинч, искривившись по винтовой линии, может проникнуть между силовыми линиями поля, не искривив их [11]. Подобное возмущение границы пинча с вакуумом невозможно, если длина волны возмущения λ больше шага спирали, определяемого формулой

$$h(r) = 2\pi r B_z / B_\theta. \tag{4.3}$$

Для пинча с резкой границей при $r = a$ условие устойчивости (4.3) принимает вид

$$\lambda < h(a). \tag{4.4}$$

Это условие называют *критерием устойчивости Крускала–Шафранова* [11]. Из критерия Крускала–Шафранова следует, что пинч устойчив, если напряженность магнитного поля B_z, придающего ему жесткость, достаточно велика.

В тороидальной магнитной ловушке возмущение периодично по тороидальной координате ζ с периодом $2\pi R$, т. е. на большом обходе тора укладывается целое число волн:

$$2\pi R = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.5}$$

Поэтому условие устойчивости Крускала–Шафранова принимает вид

$$q(a) > 1, \tag{4.6}$$

где $q(r)$ – безразмерный параметр, равный отношению шага спирали (4.3) к периметру большого обхода тора, т. е. величина, обратная числу вращения:

$$q(r) = rB_\zeta / RB_\theta. \tag{4.7}$$

Неравенство (4.6) означает, что конфигурация тем более устойчива, чем больше $q(a)$. Поэтому величину $q(a)$ называют *запасом устойчивости.*

Отношение большого радиуса тора к малому, R/a, называют *аспектным отношением.* Из равенств (4.6), (4.7) видно, что малое аспектное отношение благоприятствует устойчивости плазмы.

Полоидальное магнитное поле B_θ можно выразить через ток I_ζ, текущий в плазме:

$$I_\zeta = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{j}\, d\boldsymbol{\Sigma}$$

(Σ – область меридионального сечения, занятая плазмой). Интегрируя уравнение Максвелла $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ по поперечному сечению тора $\zeta = \mathrm{const}$ и используя условие (4.7), получаем максимальный (критический) ток $I_{\mathrm{кр}}$, который может течь в токамаке, не нарушая его устойчивости:

$$I_{\mathrm{кр}} = (ca^2/2R)B_\zeta \qquad (4.8)$$

(здесь B_ζ – напряженность тороидального магнитного поля). Этот критический ток называют *током Шафранова–Крускала* [91].

Чтобы стабилизировать плазму, ее окружают *охраняющими проводниками* [92] с током, делающими границу плазмы вогнутой (рис. 4.4); эти проводники называют также *стержнями Иоффе.*

Другой способ стабилизации плазмы – ловушка со *встречными полями*, называемая также ловушкой с *остроконечной геометрией* [93] (или picket-fence – частокол), у которой граница плазмы всюду вогнута (см. рис. 4.3,*б*).

Для стабилизации желобковой неустойчивости создают также перекрещенность магнитных силовых линий (шир).

До сих пор мы рассматривали неустойчивость идеальной плазмы, у которой электропроводность бесконечна, а вязкость и теплопроводность отсутствуют. Диссипативные эффекты приводят к затуханию колебаний (возмущений) и тем самым оказывают стабилизирующее действие. Однако явная или неявная зависимость диссипативных коэффициентов от пространственных координат создает дополнительную неравновесность и тем самым в ряде случаев делает плазму неустойчи-

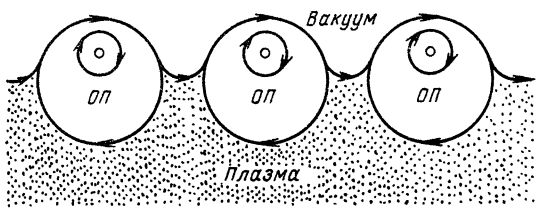


Рис. 4.4. Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников (ОП)

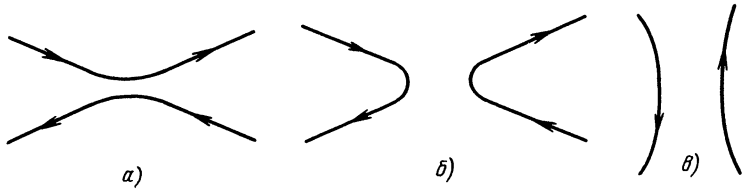


Рис. 4.5. Перезамыкание магнитных силовых линий

вой. Такие неустойчивости называют *диссипативными.* Неустойчивость, вызванную пространственной неоднородностью электропроводности, называют *токово-конвективной* [94], а неустойчивость, вызванную зависимостью электропроводности от температуры, — *перегревной* [82].

Дестабилизирующее действие конечной электропроводности связано также с тем, что конечное значение проводимости σ позволяет частице диффундировать через магнитное поле, попадая в область с меньшей потенциальной энергией, недоступную при $\sigma = \infty$.

В приближении бесконечной электропроводности из закона вмороженности следует, что при движении плазмы топология магнитных силовых линий не может измениться [48]. Однако, когда противоположно направленные магнитные силовые линии подходят близко друг к другу (рис. 4.5,*а*), возможны разрыв и перезамыкание магнитных силовых линий (рис. 4.5,*б*). Но такое перезамыкание привело бы к большой кривизне магнитных силовых линий (рис. 4.5,*б*). В свою очередь большая кривизна их вызывает большую силу, стремящуюся отодвинуть магнитные силовые линии друг от друга (рис. 4.5,*в*). Таким образом, разрыв и последующее перезамыкание антипараллельных магнитных силовых линий приводит к неустойчивости. Необходимое для этого нарушение закона вмороженности происходит благодаря конечности электрического сопротивления $1/\sigma$ и малости расстояния между магнитными силовыми линиями. Эту неустойчивость называют *тиринг-модой* [11] (от английского tearing – разрыв).

Подробнее об устойчивости равновесных МГД-конфигураций см. [11, 48, 73, 77, 86, 87, 95–98]. О стабилизации неустойчивости см. [99].

4.2. Метод собственных функций

При строгом исследовании устойчивости (по Ляпунову) равновесной плазменной конфигурации уравнения магнитной гидродинамики линеаризуют относительно малых возмущений равновесного состояния. В получающихся при этом дифференциальных уравнениях (в частных производных по x, y, z, t) для возмущений коэффициенты не зависят явно от времени, поэтому они имеют частные решения, зависящие от времени как $(-i\omega t)$ и называемые *собственными волнами.* В силу линейности

уравнений для малых возмущений общее решение, соответствующее произвольному начальному возмущению (при $t = 0$), является суперпозицией (линейной комбинацией) собственных волн. Если у всех собственных волн $\operatorname{Im}\omega < 0$, то исследуемое состояние равновесия устойчиво. Если же хотя бы у одной собственной волны $\operatorname{Im}\omega > 0$, то равновесие неустойчиво, причем инкремент неустойчивости равен $\operatorname{Im}\omega$.

Проиллюстрируем изложенный метод собственных колебаний на примере исследования устойчивости плазмы, находящейся в поле тяжести. В этом случае уравнение движения (1.50) имеет вид

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B} + \rho\mathbf{g}, \tag{4.9}$$

где $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, которое считаем постоянным и направленным вертикально вниз: $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ (ось z направлена вертикально вверх). Полагаем, что к плазме приложено постоянное во времени магнитное поле $\mathbf{B}_0(z)$, направленное вдоль оси x (в горизонтальной плоскости) и зависящее только от z: $\mathbf{B}_0 = (B_0(z), 0, 0)$. При этих предположениях условие равновесия имеет вид

$$\frac{dp_0}{dz} + \frac{B_0}{4\pi}\frac{dB_0}{dz} = -\rho_0 g. \tag{4.10}$$

Линеаризуем уравнения идеальной магнитной гидродинамики относительно возмущений δv_x, δv_y, δv_z, δB_x, δB_y, δB_z, δp. Для простоты полагаем возмущение плотности равным нулю ($\delta p = 0$). Так как в полученных для возмущений дифференциальных уравнениях коэффициенты явно не зависят от x, y и t, то возмущения можно искать в виде $\exp(\mathrm{i}k_{\parallel}x + \mathrm{i}k_{\perp}y - \mathrm{i}\omega t)f(z)$.

Заметим, что магнитное поле оказывает стабилизирующее действие, так как изгибание магнитных силовых линий сопровождается затратой энергии. Поэтому наиболее опасны в отношении неустойчивости те возмущения, при которых не происходит изгибания магнитных силовых линий, т. е. для которых $k_{\parallel} = 0$. Выражая из системы уравнений для возмущений все возмущения δv_x, δv_y, δB_x, δB_y, δB_z, δp через δv_z, получаем [100]

$$\frac{d^2\delta v_z}{dz^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{d\delta v_z}{dz} - k^2\left(1 + \frac{g}{\omega^2}\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\right)\delta v_z = 0, \quad k \equiv k_{\perp}. \tag{4.11}$$

Это уравнение легко решается, если

$$\rho_0(z) = \text{const}\exp(\alpha z). \tag{4.12}$$

При движении вверх в этом случае невозмущенная плотность возрастает, если $\alpha > 0$, и убывает, если $\alpha < 0$ (напомним, что сила тяжести направлена вниз).

Для однозначного определения решения уравнения (4.11) нужно дополнить его двумя граничными условиями. Предположим, что при $z = +h$ и $z = -h$ плазма ограничена абсолютно твердыми горизонтальными стенками. Это означает, что нормальная составляющая возмущения скорости δv_z на этих стенках равна нулю:

$$\delta v_z (\pm h) = 0. \tag{4.13}$$

При условии (4.12) коэффициенты уравнений (4.11) постоянны, поэтому его решение имеет вид

$$\delta v_z = A_1 \exp(r_1 z) + A_2 \exp(r_2 z), \tag{4.14}$$

где r_1 и r_2 – корни квадратного уравнения

$$r^2 + ar - k^2 (1 + ag/\omega^2) = 0, \tag{4.15}$$

а A_1, A_2 – некоторые постоянные. Подставив (4.14) в (4.13), найдем условие разрешимости полученной для A_1 и A_2 системы уравнений

$$2(r_1 - r_2)h = 2\pi i n, \tag{4.16}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Учитывая, что

$$r_1 + r_2 = -a; \quad r_1 r_2 = -k^2 (1 + ag/\omega^2), \tag{4.17}$$

и исключая из (4.16), (4.17) r_1 и r_2, получаем дисперсионное уравнение, связывающее частоту колебания ω с волновым вектором $k \equiv k_\perp$:

$$\omega^2 = - \frac{4gak_\perp^2}{a^2 + 4k_\perp^2 + \pi^2 n^2/h^2}. \tag{4.18}$$

Из (4.18) следует, что при $a < 0$, т. е. при "нормальном" расположении плазмы, когда более плотные слои находятся внизу, частота ω вещественна и равновесие устойчиво. В обратном случае $\omega^2 < 0$, что свидетельствует об экспоненциальном нарастании амплитуды возмущений со временем, т. е. о неустойчивости.

Отсутствие магнитного поля в дисперсионном уравнении (4.18) связано с тем, что мы ограничились рассмотрением колебаний с $k_\parallel = 0$, при которых не происходит изгибания магнитных силовых линий.

Метод собственных волн применим только тогда, когда в системе дифференциальных уравнений для возмущений равновесного состояния коэффициенты при старших производных не обращаются в нуль. Такие системы дифференциальных уравнений называют *регулярными*. В регулярных дифференциальных уравнениях имеется дискретный спектр собственных частот ω_n, причем n пробегает различные целочисленные значения [см., например, формулу (4.18)]. Только в этом случае произвольное возмущение $f(\mathbf{r}, t)$ можно представить в виде

ряда по собственным волнам $f_n(\mathbf{r})\exp(-i\omega_n t)$, $n=0, 1, 2, \ldots$:

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_n t). \tag{4.19}$$

Если же возмущения описываются нерегулярными уравнениями, т. е. если один из коэффициентов при старших производных обращается в нуль в некоторой точке $\mathbf{r}$, то, во-первых, возникает *непрерывный спектр* собственных значений $\omega(a)$ в некотором интервале $a \leqslant a \leqslant b$ и, во-вторых, собственные волны не должны удовлетворять граничным условиям (например, не должны убывать на бесконечности или могут иметь разрывы производных в особой точке). (Непрерывный спектр для вещественных ω рассмотрен в § 2.3.)

Наличие непрерывного спектра приводит к тому, что зависимость возмущения от времени уже не имеет вида суммы

$$f(t) = \Sigma a_n \exp(-i\omega_n t), \tag{4.20}$$

соответствующей формуле (4.19), а выражается интегралом

$$f(t) = \int_{a_1}^{a_2} a(a) \exp(-i\omega(a) t)\, da. \tag{4.21}$$

Если в случае дискретного спектра в сумме (4.20) хотя бы у одного ω_n появляется положительная мнимая часть ($\operatorname{Im}\omega_n > 0$), то вся дискретная сумма неограниченно возрастает при $t \to \infty$, т. е. имеет место неустойчивость. Напротив, в случае непрерывного спектра факт существования положительной мнимой части частоты ($\operatorname{Im}\omega(a) > 0$, $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$) отнюдь не означает неустойчивости.

Пусть, например, когда параметр a пробегает отрезок вещественной оси (a_1, a_2), частота $\omega(a)$ описывает некоторый контур L в плоскости комплексного переменного, причем

$$\operatorname{Im}\omega(a_1) = 0; \quad \operatorname{Im}\omega(a_2) = 0; \quad \operatorname{Im}\omega(\xi) > 0; \quad a_1 < \xi < a_2.$$

Заменяя в формуле (4.21) переменную интегрирования a на ω, получаем

$$f(t) = \int_L b(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega, \tag{4.22}$$

где $b(\omega) = a[a(\omega)]\, da/d\omega$.

Если между контуром L и вещественной осью ω ($\operatorname{Im}\omega = 0$) нет особых точек подынтегрального выражения (4.22), то $f(t)$ не изменится, если контур L деформировать в отрезок $\omega(a_1) \leqslant \omega \leqslant \omega(a_2)$ вещественной оси ω

$$f(t) = \int_{\omega(a_1)}^{\omega(a_2)} b(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega. \tag{4.23}$$

Интегрируя это выражение по частям, получаем

$$f(t) = \frac{ib(\omega)}{t} \exp(-i\omega t)\Big|_{\omega(\alpha_1)}^{\omega(\alpha_2)} - \frac{i}{t}\int_{\omega(\alpha_1)}^{\omega(\alpha_2)} b'(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega. \quad (4.24)$$

При $t \to \infty$ возмущение $f(t)$ стремится к нулю, т. е. имеет место устойчивость.

Если же между контуром L и вещественной осью ω имеется особая точка $\omega_0 = \omega_1 + i\omega_2$ ($\omega_2 > 0$) подынтегральной функции в (4.22), то при деформации контура к вещественной оси не должна пересекаться особая точка, так как в ней подынтегральное выражение неаналитично. Поэтому при деформации контура L в отрезок вещественной оси (a, b) появляется вклад от особой точки вида $\exp(\omega_2 t)\exp(-i\omega_1 t)$, что означает наличие неустойчивости.

4.3. Энергетический принцип

Метод собственных колебаний позволяет аналитически получить критерий устойчивости по Ляпунову равновесной плазменной конфигурации только в простейших случаях, так как для этого нужно решить дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Однако если поставить более скромную задачу, а именно – отказаться от определения собственной частоты колебаний и искать только условие устойчивости, то можно получить аналитическое решение в более сложных случаях. Для этого следует воспользоваться энергетическим принципом, которому и посвящен настоящий параграф.

Для того чтобы состояние равновесия $x = x_0$ было устойчивым, необходимо, чтобы при отклонении материальной точки от состояния x_0 на нее действовала сила, возвращающая ее в положение равновесия. Это означает, что если на материальную точку, имеющую координату x, действует сила $F(x)$, то необходимое условие равновесия имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &F(x) < 0, \quad x > x_0; \\ &F(x) > 0, \quad x < x_0. \end{aligned}\right\} \quad (4.25)$$

Вводя потенциальную энергию $W(x)$ и замечая, что

$$F(x) = -\,dW/dx, \quad (4.26)$$

преобразуем условие устойчивости (4.25):

$$\left.\begin{aligned} &dW/dx > 0, \quad x > x_0; \\ &dW/dx < 0, \quad x < x_0. \end{aligned}\right\} \quad (4.27)$$

Эти условия, очевидно, являются условиями минимума функции $W(x)$, что составляет содержание *энергетического принципа*: для того чтобы состояние равновесия системы $x = x_0$ было устойчивым, необходимо,

чтобы в этом состоянии потенциальная энергия $W(x)$ рассматриваемой системы имела минимум:

$$W(x_0) < W(x), \quad x \neq x_0. \tag{4.28}$$

При малых отклонениях от положения равновесия, которое для простоты записи будем считать расположенным в точке $x_0 = 0$, сила есть линейная функция отклонения x:

$$F(x) = fx, \tag{4.29}$$

где f – константа (в случае устойчивости она отрицательна). Проинтегрировав соотношение (4.26) с учетом (4.29), можно выразить энергию системы через силу:

$$W(x) = -F(x)x/2. \tag{4.30}$$

В случае плазмы полная энергия W_t, приходящаяся на единицу объема, равна

$$dW_t/d\Omega = \rho v^2/2 + p/(\gamma - 1) + B^2/(8\pi) + \rho\Phi, \tag{4.31}$$

где $\gamma = c_p/c_v$; Φ – потенциал внешней силы, приходящийся на единицу массы. Отбрасывая кинетическую энергию $\rho v^2/2$ и интегрируя по объему Ω, получаем потенциальную энергию плазменной конфигурации:

$$W = \int_{\Omega} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi} + \rho\Phi \right) d\Omega. \tag{4.32}$$

Однако минимум выражения (4.32) достигается для тривиальной конфигурации $p = 0$, $B = 0$ (вакуум без магнитного поля). Этот парадоксальный результат получился потому, что мы искали абсолютный минимум, тогда как для нахождения устойчивой равновесной конфигурации по минимуму W нужно учитывать связи, налагаемые уравнениями магнитной гидродинамики.

Чтобы учесть эти связи, рассмотрим малое смещение $\xi(\mathbf{r})$ элемента жидкости в точке $\mathbf{r}$, соответствующей равновесному положению, приводящее к малым возмущениям МГД-величин. Линеаризуя уравнения магнитной гидродинамики относительно малых возмущений, получим [84]

$$\partial\delta\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) = 0; \tag{4.33}$$

$$\rho_0 \partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{F}; \tag{4.34}$$

$$\partial\delta p/\partial t + \mathbf{v}\nabla p_0 = -\gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{v}; \tag{4.35}$$

$$\partial\delta\mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0), \tag{4.36}$$

где индексом 0 отмечено невозмущенное значение МГД-величины ($\mathbf{v}_0 \mp$

$= 0$); $\delta\rho$, $\mathbf{v}$, δp, $\delta\mathbf{B}$ – малые возмущения; $\mathbf{F}$ – объемная сила:

$$\mathbf{F} = -\nabla\delta p + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0 \times \delta\mathbf{B} + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\delta\mathbf{B} \times \mathbf{B}_0 - \nabla\Phi\delta\rho. \tag{4.37}$$

Замечая, что $\mathbf{v} = \partial\boldsymbol{\xi}/\partial t$, и интегрируя уравнения (4.33), (4.35), (4.36) по времени, находим

$$\left.\begin{aligned} &\delta\rho = -\,\mathrm{div}\,(\rho_0\boldsymbol{\xi});\\ &\delta p = -\,\boldsymbol{\xi}\nabla p_0 - \gamma p_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi};\\ &\delta\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0). \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

Подставляя (4.38) в (4.37), получаем, что смещение $\boldsymbol{\xi}$ вызывает силу

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla(\boldsymbol{\xi}\nabla p_0 + \gamma p_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0 \times \mathrm{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\,[\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)] \times \mathbf{B}_0 + \nabla\Phi\,\mathrm{div}(\rho_0\boldsymbol{\xi}). \tag{4.39}$$

Пользуясь формулой (4.30) и интегрируя получаемое выражение по объему Ω, находим потенциальную энергию $W(\boldsymbol{\xi})$, вызванную смещением $\boldsymbol{\xi}$. Для выделения в выражении для $W(\boldsymbol{\xi})$ заведомо положительных членов проинтегрируем его по частям, полагая для простоты, что плазма занимает достаточно большой (бесконечный) объем и что на его границе (на бесконечности) давление p_0 и смещение $\boldsymbol{\xi}$ стремятся к нулю. При этом воспользуемся также векторным тождеством $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$. В результате для потенциальной энергии получим выражение

$$W(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi})\,(\gamma p_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}\nabla p_0) + \frac{1}{4\pi}\,[\mathrm{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)] \cdot$$

$$\cdot\,[\mathrm{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) - \boldsymbol{\xi} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0] - (\boldsymbol{\xi}\nabla\Phi)\,\mathrm{div}\,(\rho_0\xi)\Big\} d\mathbf{r}. \tag{4.40}$$

Для устойчивости плазменной конфигурации необходимо, чтобы любое смещение $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$ приводило к увеличению потенциальной энергии

$$W(\boldsymbol{\xi}) > 0. \tag{4.41}$$

В силу произвольности смещения $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$ это означает, что подынтегральное выражение должно быть положительным в любой точке $\mathbf{r}$:

$$(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi})\,(\gamma p_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}\nabla p_0) + \frac{1}{4\pi}\,[\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)]\,[\mathrm{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) -$$

$$- \boldsymbol{\xi} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0] - (\boldsymbol{\xi}\nabla\Phi)\,\mathrm{div}\,\rho_0\boldsymbol{\xi} > 0. \tag{4.42}$$

В самом деле, если это неравенство нарушено в некоторой точке $\mathbf{r}$, то в силу непрерывности левой части (4.42) оно нарушено и в некоторой окрестности D точки $\mathbf{r}$. Выбрав смещение $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$ отличным от нуля в обла-

сти D и равным нулю вне D, мы тем самым нарушим условие устойчивости (4.41).

Вообще говоря, условие (4.41) необходимо, но не достаточно для устойчивости. Оно означает только, что при отклонении системы от состояния равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть ее в равновесное состояние. Однако плазма может "проскочить" равновесное положение и отклониться в противоположную сторону еще больше, чем прежде. Последовательное повторение таких "проскоков" с постоянно возрастающей амплитудой означает неустойчивость равновесного состояния. Такую неустойчивость называют *колебательной* (в английской литературе она именуется очень неудачным термином overstability). С колебательной неустойчивостью сталкивался каждый, кому приходилось регулировать температуру воды в душе.

Математически колебательная неустойчивость проявляется в том, что частота колебаний ω имеет отличную от нуля не только мнимую часть $\operatorname{Im}\omega = \gamma > 0$, но и вещественную часть $\operatorname{Re}\omega = \omega_0 \neq 0$. При этом зависимость возмущения от времени имеет вид

$$\operatorname{Re}(\exp(-i\omega t)) = \exp(\gamma t)\cos(\omega_0 t).$$

Однако если пренебречь диссипацией, т. е. пользоваться уравнениями идеальной магнитной гидродинамики, то колебательная неустойчивость, как мы покажем, невозможна. Это означает, что в рамках идеальной магнитной гидродинамики неравенство (4.42) – не только необходимое, но и достаточное условие устойчивости.

Чтобы доказать невозможность колебательной неустойчивости в рамках идеальной магнитной гидродинамики, воспользуемся уравнением движения

$$\rho_0 \partial^2 \boldsymbol{\xi} / \partial t^2 = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}), \tag{4.43}$$

где $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ – сила, определяемая выражением (4.39). Полагая зависимость смещения от времени в виде $\exp(-i\omega t)$, из (4.43) получаем

$$-\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}), \tag{4.44}$$

т. е. ω^2 является собственным значением дифференциального оператора (4.39). Можно показать, что этот оператор самосопряженный [82], откуда следует, что его собственные значения ω^2 вещественны. Поэтому ω может быть вещественным либо чисто мнимым, т. е. в рамках идеальной магнитной гидродинамики колебательная неустойчивость невозможна.

Таким образом, в рамках идеальной магнитной гидродинамики неравенство (4.42) – необходимое и достаточное условие устойчивости.

Энергетический принцип широко используется при исследовании устойчивости равновесных плазменных конфигураций [41, 72, 82, 87, 101]. Проиллюстрируем его на примере исследования равновесия электропроводной жидкости в поле тяжести с постоянным ускорением $\mathbf{g}$,

рассмотренном в § 4.2. Отказ от нахождения собственных колебаний и инкремента неустойчивости, лежащий в основе энергетического принципа, позволяет решить более общую задачу. А именно, откажемся от трех ограничений, которые были сделаны в § 4.2. Во-первых, будем считать жидкость сжимаемой ($\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \neq 0$); во-вторых, зависимость $\rho_0(z)$ будем полагать не экспоненциальной, а произвольной; в-третьих, откажемся от требования, чтобы возмущение не изгибало магнитную силовую линию. Полагая, как и прежде, что магнитное поле $\mathbf{B}_0(z)$ направлено вдоль оси x, и пользуясь условиями равновесия (4.10), представляем потенциальную энергию возмущения (4.40) в виде

$$W(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ \gamma p_0 \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right)^2 + \right.$$
$$+ \frac{B_0^2}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial x} \right)^2 \right] -$$
$$\left. - 2g\rho_0 \xi_z \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right) - \frac{d\rho_0}{dz} g \xi_z^2 \right\} d\mathbf{r}. \tag{4.45}$$

При получении этого выражения мы проинтегрировали по частям член $\xi_x \partial \xi_z / \partial x$. Чтобы найти знак $W(\boldsymbol{\xi})$, приведем подынтегральное выражение в (4.45) к сумме или разности квадратов различных величин:

$$W(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ \gamma p_0 \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} - g\rho_0 \frac{\xi_z}{\gamma p_0} \right)^2 + \right.$$
$$+ \frac{B_0^2}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial x} \right)^2 \right] -$$
$$\left. - g \left(\frac{g\rho_0^2}{\gamma p_0} + \frac{d\rho_0}{dz} \right) \xi_z^2 \right\} d\mathbf{r}. \tag{4.46}$$

Наиболее опасны в отношении неустойчивости те деформации $\boldsymbol{\xi}(x, y, z)$, которые приводят к наименьшему значению $W(\boldsymbol{\xi})$. Из подынтегрального выражения (4.46) видно, что наиболее опасны деформации, у которых

$$\frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \xi_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \xi_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{g\rho_0 \xi_z}{\gamma p_0} = 0.$$

При этом

$$W\xi = -\frac{g}{2} \int_\Omega \left(\frac{g\rho_0^2}{\gamma p_0} + \frac{d\rho_0}{dz} \right) \xi_z^2 \, d\mathbf{r}. \tag{4.47}$$

Замечая, что квадрат скорости звука равен $c_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, получаем из

(4.47) условие устойчивости:

$$-d\rho_0/dz > \rho_0 g/c_s^2. \tag{4.48}$$

Это означает, что при $d\rho_0/dz > 0$ плазменная конфигурация неустойчива. Если же $d\rho_0/dz < 0$, то для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы абсолютное значение градиента плотности было достаточно велико.

В случае несжимаемой среды $c_s \to \infty$ и условие устойчивости (4.48) переходит в неравенство

$$d\rho_0/dz < 0, \tag{4.49}$$

обобщающее условие, полученное в § 4.2, на случай неэкспоненциальной зависимости равновесной плотности от координаты.

Для пинча энергетический принцип приводит к *критерию устойчивости Сайдема* [82]

$$-\frac{8\pi r}{B_z^2}\frac{dp}{dr} < \frac{r^2}{q^2}\left(\frac{dq}{dr}\right)^2, \tag{4.50}$$

где величина $q(r)$ определяется формулой (4.7).

Правая часть неравенства (4.50) имеет простую связь с широм, выражение для которого в случае пинча имеет вид

$$\mathrm{Sh} = r\,d\alpha/dr, \tag{4.51}$$

где α – угол между направлением магнитного поля и плоскостью z = = const. Пользуясь очевидным равенством $q = (r/R)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, находим

$$\frac{r}{q}\frac{dq}{dr} = 1 + \left(\frac{B_z}{B_\theta} + \frac{B_\theta}{B_z}\right)\mathrm{Sh}.$$

Критерий Сайдема имеет простой физический смысл [87]. Так как давление пинча убывает к периферии, то левая часть неравенства (4.50) положительна, безразмерна и характеризует скорость убывания давления. Этот эффект (убывание давления к периферии) вызывает неустойчивость. В правой части неравенства (4.50) стоит безразмерная величина, характеризующая быстроту (скорость) изменения шага спирали с ростом радиуса. Этот эффект описывает стабилизирующее действие шира.

Для приблизительных оценок критерий Сайдема (4.50) можно преобразовать следующим образом: $-r(dp/dr) \sim p$, $(r/q)(dq/dr) \sim \mathrm{Sh}$. Обозначив $8\pi p/B_z^2 = \beta$, получим из (4.50) условие устойчивости

$$\beta < \mathrm{Sh}^2. \tag{4.52}$$

Критерий Сайдема является конкретизацией условия устойчивости плазмы относительно желобковой неустойчивости в случае цилиндрической геометрии.

Если же плазма имеет форму тора круглого сечения, то критерий устойчивости упрощается и принимает вид [102]

$$q^2(r) > 1. \tag{4.53}$$

Энергетический принцип можно распространить и на исследование стационарных течений [103].

4.4. Стохастическая неустойчивость

Для того чтобы плазма удерживалась магнитной ловушкой, недостаточно ее устойчивости по Ляпунову. Так как давление плазмы постоянно вдоль магнитных силовых линий, то для удержания плазмы необходимо, чтобы при наличии возмущения магнитные силовые линии не уходили из области, занятой плазмой, в бесконечность. В тороидальной магнитной ловушке силовая линия неограниченно продолжается в тороидальной области, и даже малые возмущения могут увести ее из тороидальной области в бесконечность либо привести к качественной перестройке системы магнитных поверхностей.

В равновесной конфигурации магнитная силовая линия, неограниченно продолжаясь, заполняет некоторое множество точек Ω_B. Это множество точек представляет собой либо замкнутую кривую, либо магнитную поверхность, либо трехмерную область. Если при произвольных малых возмущениях МГД-величин магнитная силовая линия целиком остается вблизи множества Ω_B, то равновесную конфигурацию называют *стохастически устойчивой.*

Рассмотрим стохастическую устойчивость тороидальной магнитной ловушки [104, 105]. Для простоты заменим тороидальную ловушку пинчем, у которого выполняются условия периодичности

$$\mathbf{B}(r, \theta, z) = \mathbf{B}(r, \theta, z + 2\pi R),$$

где R – большой радиус тора и (r, θ, z) – цилиндрические координаты.

Невозмущенная конфигурация имеет вид

$$B_r = 0; \quad B_\theta = B_\theta(r); \quad B_z = \text{const}. \tag{4.54}$$

Вдоль магнитной силовой линии выполняются соотношения

$$dr/dz = 0; \quad d\theta/dz = 1/(Rq(r)), \tag{4.55}$$

где $q(r)$ – запас устойчивости, определяемый формулой (4.7). Эта система дифференциальных уравнений имеет, очевидно, два интеграла:

$$r = \text{const} \tag{4.56}$$

и

$$\theta = z/(Rq(r)) + \text{const}. \tag{4.57}$$

Соотношение (4.56) описывает семейство магнитных поверхностей –

концентрических круговых цилиндров, для которых ось z является общей осью. Соотношение (4.57) описывает винтовую поверхность, пересечение которой с магнитной поверхностью (4.56) определяет отдельную магнитную силовую линию.

Магнитные силовые линии (4.56), (4.57) обладают винтовой симметрией, которая заключается в том, что точки (r, θ, z) и $(r, \theta + L/(qR), z + L)$ лежат на одной и той же силовой линии (здесь L – произвольная длина).

Число вращения согласно (4.57) равно

$$\mu_h = \frac{1}{q(r)}\, 2\pi. \tag{4.58}$$

Пусть возмущение магнитного поля равно $\mathbf{b}(r, \theta, z)$. Это векторное поле, очевидно, должно быть периодичным по θ и z:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{b}(r, \theta + 2\pi, z) = \mathbf{b}(r, \theta, z), \\ &\mathbf{b}(r, \theta, z + 2\pi R) = \mathbf{b}(r, \theta, z). \end{aligned}\right\} \tag{4.59}$$

Поэтому его можно разложить в ряд Тейлора по r и в ряд Фурье по θ и z:

$$\mathbf{b}(r, \theta, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_{lmn}\, r^l \exp(\mathrm{i}m\theta) \exp(\mathrm{i}nz/R). \tag{4.60}$$

Если возмущение мало, то оно вызывает лишь малую деформацию магнитных силовых линий. Исключение составляет "резонансный" случай, когда возмущение магнитного поля $\mathbf{b}(r, \theta, z)$ обладает такой же винтовой симметрией, как и невозмущенное магнитное поле, т. е. когда

$$m/q + n = 0. \tag{4.61}$$

Рассмотрим для простоты случай, когда в сумме (4.60) содержится всего одна степень r и всего одна тригонометрическая функция:

$$\left.\begin{aligned} &b_r = \epsilon B_0 (r/a)^l \sin(m\theta - kz); \\ &b_\theta = \epsilon B_0 (r/a)^l \sin(m\theta - kz + \psi), \end{aligned}\right\}$$

где ϵ – малый коэффициент; a – радиус плазменного цилиндра, соответствующий малому радиусу тора (добавленный для того, чтобы ϵ было безразмерным); $k = -n/R$ и ψ – некоторая постоянная фаза, являющаяся аргументом θ-й компоненты векторного коэффициента $\mathbf{a}_{lmn}$. Полагая, кроме того, что $b_z = 0$, и пользуясь уравнением Максвелла

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r b_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0,$$

находим

$$l = m - 1; \quad \psi = \pi/2.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} b_r &= \epsilon B_0 (r/a)^{m-1} \sin(m\theta - kz); \\ b_\theta &= \epsilon B_0 (r/a)^{m-1} \cos(m\theta - kz); \\ b_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.62}$$

Уравнения магнитных силовых линий (3.4) с учетом возмущения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} dr/dz &= \epsilon (r/a)^{m-1} \sin(m\theta - kz); \\ \frac{d\theta}{dz} &= \frac{1}{Rq(r)} + \frac{\epsilon}{r}\left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \cos(m\theta - kz). \end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

Для интегрирования этих уравнений введем новую переменную $\zeta = \cos(m\theta - kz)$. Дифференцируя выражение для ζ по z и пользуясь уравнениями (4.63), находим

$$\frac{\epsilon r^m}{a^{m-1}} \frac{d\zeta}{dr} + \frac{\epsilon m r^{m-1}}{a^{m-1}} \zeta + \left[\frac{m}{Rq(r)} - k\right] r = 0,$$

откуда следует уравнение магнитных поверхностей

$$\frac{\epsilon r^m \cos(m\theta - kz)}{a^{m-1}} + \int_{r_0}^{r} \left[\frac{m}{Rq(r)} - k\right] r\, dr = \text{const} \tag{4.64}$$

(здесь r_0 – некоторое фиксированное значение r).

При малых значениях ϵ сильная деформация магнитной поверхности имеет место, когда подынтегральное выражение в формуле (4.64) обращается в нуль:

$$m/(Rq(r)) - k = 0, \tag{4.65}$$

что соответствует условию резонанса

$$q(r) = -m/n. \tag{4.66}$$

Это условие выполняется на любой рациональной магнитной поверхности при соответствующих значениях целых чисел m и n.

Выберем в качестве r_0 в интеграле (4.64) корень уравнения (4.66). Разлагая подынтегральное выражение в (4.64) в степенной ряд в окрестности r_0, получаем при $r \approx r_0$

$$\epsilon a \left(\frac{r_0}{a}\right)^{m-1} \cos(m\theta - kz) - \frac{mq'(r_0) r_0}{2q^2(r_0) R} (r - r_0)^2 = \text{const}. \tag{4.67}$$

Предположим для определенности, что $q'(r_0) > 0$. Выберем произволь-

ное значение z_0 и значение θ_1 таким образом, чтобы

$$m\theta_1 - kz_0 = 0. \tag{4.68}$$

Разлагая $\cos(m\theta - kz_0)$ в ряд по степеням $\theta - \theta_1$, находим уравнения линий пересечения магнитных поверхностей с плоскостью $z = z_0$ вблизи точки (r_0, θ_1):

$$\epsilon m\left(\frac{r_0}{a}\right)^{m-2}(\theta - \theta_1)^2 + \frac{q'(r_0)}{Rq^2(r_0)}(r - r_0)^2 = \text{const}. \tag{4.69}$$

Это – семейство концентрических эллипсов (рис. 4.6).

Выберем теперь такое θ_2, чтобы

$$m\theta_2 - kz_0 = \pi. \tag{4.70}$$

Вблизи точки (r_0, θ_2) магнитные поверхности пересекают плоскость $z = z_0$ по линиям

$$\epsilon m\left(\frac{r_0}{a}\right)^{m-2}(\theta - \theta_2)^2 - \frac{q'(r_0)}{Rq^2(r_0)}(r - r_0)^2 = \text{const}. \tag{4.71}$$

Это – семейство концентрических гипербол (см. рис. 4.6).

Если константа в правой части уравнения (4.71) обращается в нуль, то гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых

$$(\theta - \theta_2)\sqrt{\epsilon m\left(\frac{r_0}{a}\right)^{m-2}} \pm (r - r_0)\sqrt{\frac{q'(r_0)}{Rq^2(r_0)}} = 0. \tag{4.72}$$

По этим прямым с плоскостью $z = z_0$ пересекается сепаратриса.

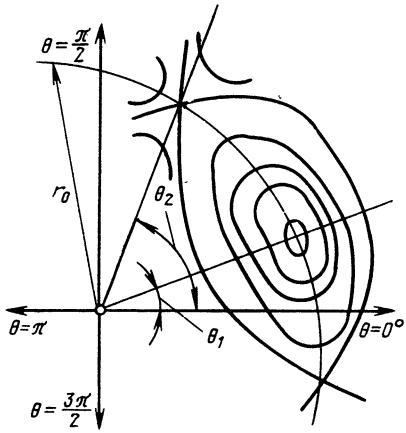
Каждая рациональная магнитная поверхность расщепляется на семейство вложенных друг в друга магнитных поверхностей, внутри которых находится новая магнитная ось (r_0, θ_1). Область влияния такой дополнительной магнитной оси называют *магнитным островом*. Таким образом, возникает бесконечное множество магнитных островов (рис. 4.7).

Заметим, что в идеальной магнитной гидродинамике благодаря условию вмороженности топология магнитного поля не может измениться. Поэтому образование магнитных островов возможно только за счет конечной (хотя и большой) электропроводности, т. е. это одно из проявлений тиринг-моды ([73], с. 149).

Число магнитных островов в любом малом элементе объема бесконечно, поэтому магнитное поле, так же как и давление, является "патологической" негладкой [98] функцией пространственных координат.

Оценим теперь размеры отдельного острова. Для этого аппроксимируем его эллипсом. Как известно, эллипс с полуосями a_r и a_θ описывается уравнением

$$(\theta - \theta_i)^2/a_\theta^2 + (r - r_0)^2/a_r^2 = 1, \quad i = 1, 2. \tag{4.73}$$



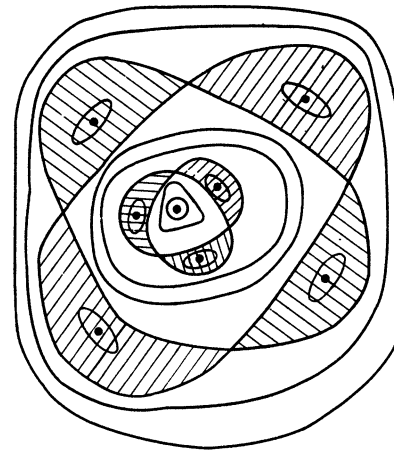


Рис. 4.6. Резонансное возмущение рациональной магнитной поверхности

Рис. 4.7. Расщепление рациональных магнитных поверхностей (магнитные острова заштрихованы)

Из равенств (4.68), (4.70) видно, что по порядку

$$a_\theta \sim 1/m. \tag{4.74}$$

Сравнивая это соотношение с уравнениями (4.69), (4.73) и отбрасывая предположение $q'(r_0) > 0$, т. е. заменяя q' величиной $|q'|$, находим радиальный размер магнитного острова:

$$a_r \sim \sqrt{\frac{\epsilon}{m}\,\frac{Rq^2}{|q'|}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{m-2}}. \tag{4.75}$$

Оценим далее радиальное расстояние Δr между магнитными островами. Пусть рациональная дробь m/n в формуле (4.66) изменилась на $\Delta(m/n)$, оставшись рациональной. При этом корень r_0 уравнения (4.66) получил приращение Δr. Полагая $|\Delta r| \ll r_0$ и $\Delta(m/n) \sim 1$, получаем $q'(r_0)\Delta r \sim R$. Поэтому радиальное расстояние между магнитными островами равно

$$\Delta r \sim R/(q'(r_0)). \tag{4.76}$$

При $a_r < |\Delta r|$ магнитные острова не пересекаются. В этом случае магнитные силовые линии ограничены нерасщепившимися иррациональными магнитными поверхностями и расщепление рациональных магнитных поверхностей не приводит к уходу частиц из ловушки [98], т. е. равновесная конфигурация стохастически устойчива.

Если же $a_r > |\Delta r|$, то магнитные острова пересекаются. При этом форма магнитной силовой линии становится крайне нерегулярной и сама она уходит из объема, занятого плазмой, т. е. равновесная конфигурация становится стохастически неустойчивой.

Таким образом, условие стохастической неустойчивости имеет вид [107]

$$a_r/|\Delta r| > 1.$$

Это условие называют *критерием Чирикова* [108].

Пользуясь оценками (4.75), (4.76), находим условие стохастической неустойчивости магнитных силовых линий:

$$(r_0/a)^{m-2}(\epsilon/m)q^2|q'|R > 1. \tag{4.77}$$

Мы видим, что шир, пропорциональный $|q'|$, в отношении стохастической неустойчивости является дестабилизирующим фактором [109].

Стохастическая неустойчивость всегда имеет место вблизи сепаратрисы [70б, 110]. Заметим, что расщепление рациональных магнитных поверхностей приводит к сильному увеличению диффузии и потерь тепла из плазмы [111, 112].

Глава 5

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И РАЗРЫВЫ

5.1. Граничные условия на поверхности разрыва

До сих пор мы рассматривали такие решения МГД-уравнений идеальной среды, в которых вектор состояния ψ был непрерывной функцией координат и времени. Однако зачастую эта зависимость – разрывная. Разрывные решения возникают, как показано ниже, при пересечении характеристик одного типа. В магнитной гидродинамике существует семь типов характеристик (см. § 2.5): две быстрые магнитозвуковые, две медленные магнитозвуковые, две альфвеновские и энтропийная. Тангенсы углов наклона этих характеристик к оси t в плоскости (z, t) равны $v_z \pm V_F$; $v_z \pm V_S$; $v_z \pm V_A$ и v_z. Вдоль каждой из характеристик переносится согласно (2.78) одно соотношение между семью МГД-величинами $v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, p, s$. В каждую точку фазовой плоскости (z, t) эти семь характеристик переносят из областей начальных и граничных условий семь соотношений, которые и определяют вектор состояния ψ в точке z в момент времени t. Если же в точке (z, t) пересекаются две характеристики одного типа, получаются восемь соотношений для семи МГД-величин, т. е. возникает противоречие. Это противоречие разрешается тем, что в случае пересечения характеристик одного типа образуется с и л ь н ы й р а з р ы в, на котором разрывны не только производные МГД-величин по координате и времени, но и сами эти величины.

Сильные разрывы возникают также при столкновении двух газовых масс, при внезапном включении электромагнитного поля, при обтекании планет солнечным ветром, при вспышках звезд и т. д.

Так как на поверхности разрыва дифференциальные уравнения (1.64) теряют силу вследствие недифференцируемости разрывных величин, то эти уравнения не определяют скачков МГД-величин на поверхности разрыва. Для определения этих скачков следует исходить из интегральных законов сохранения или интегральных уравнений баланса (1.13), (1.17), (1.30). Что же касается *уравнений Максвелла* (1.36), (1.40), то их также следует представить в *интегральной форме* [9]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} + c\int_L \mathbf{E}\,d\mathbf{L} = 0; \tag{5.1}$$

$$\iint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0. \tag{5.2}$$

В формуле (5.1) L – произвольный замкнутый контур, а S – произвольная (незамкнутая) поверхность, натянутая на этот контур; в формуле (5.2) S – произвольная замкнутая поверхность.

Выберем в качестве объема Ω бесконечно малый параллелепипед с высотой Δn и площадью основания ΔQ. При этом основания параллелепипеда расположены по разные стороны от поверхности разрыва и параллельны ей; саму поверхность разрыва на бесконечно малом участке можно считать плоской; мы пользуемся системой координат, движущейся вместе с разрывом. Устремляя затем Δn к нулю так, чтобы основания параллелепипеда стремились к поверхности разрыва, получаем граничные условия на поверхности сильного разрыва [1, 9]

$$\Delta \rho v_n = 0; \tag{5.3}$$

$$\Delta \pi_{in} = 0; \tag{5.4}$$

$$\Delta W_n = 0; \tag{5.5}$$

$$\Delta \mathbf{E}_t = 0; \tag{5.6}$$

$$\Delta B_n = 0. \tag{5.7}$$

Здесь индексом n обозначена нормальная к поверхности разрыва компонента вектора или тензора: t – их тангенциальная компонента; индекс i может совпадать либо с n, либо с t; Δ обозначает скачок соответствующей величины при переходе через поверхность разрыва (разность значений этой величины за фронтом разрыва и перед ним).

Выбирая в качестве плоскости $z = 0$ плоскость, касательную к поверхности разрыва (т. е. ось z направлена по нормали к поверхности разрыва), представим граничные условия (5.3)–(5.7) в развернутом

виде:

$$\Delta \rho v_z = 0; \tag{5.8}$$

$$\Delta (\rho v_x v_z - B_x B_z/4\pi) = 0; \tag{5.9}$$

$$\Delta (\rho v_y v_z - B_y B_z/4\pi) = 0; \tag{5.10}$$

$$\Delta [\rho v_z^2 + p + (B_x^2 + B_y^2)/(8\pi)] = 0; \tag{5.11}$$

$$\Delta \left[\rho v_z \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon \right) + v_z p + \frac{B^2 v_z - B_z (\mathbf{vB})}{4\pi} \right] = 0; \tag{5.12}$$

$$\Delta (v_x B_z - v_z B_x) = 0; \tag{5.13}$$

$$\Delta (v_y B_z - v_z B_y) = 0; \tag{5.14}$$

$$\Delta B_z = 0. \tag{5.15}$$

Число граничных условий (5.8)–(5.15) на поверхности разрыва равно восьми, т. е. совпадает с числом МГД-переменных v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z, p, s. Благодаря этому можно не рассматривать диссипативные процессы в тех весьма тонких слоях вещества, которые заменяются поверхностями разрыва. Несмотря на наличие диссипации на разрывах полагаем среду идеальной везде, кроме поверхности разрыва.

Граничные условия (5.8)–(5.15) справедливы только в системе отсчета, в которой разрыв покоится. В лабораторной системе отсчета, в которой поверхность разрыва перпендикулярна оси z и движется вдоль этой оси со скоростью u_s, нужно всюду в граничных условиях заменить v_z на $v_z - u_s$. Заметим, что система отсчета, движущаяся со скоростью v_z, неинерциальна вследствие наличия ускорения $\partial v_z/\partial t$. Однако в течение бесконечно малого интервала времени Δt смещения частиц будут порядка Δt, тогда как поправки к ним вследствие ускорения будут порядка $(\Delta t)^2$. Поэтому при рассмотрении граничных условий ускорение можно не учитывать ([33], с. 392).

Как уже отмечалось выше, в магнитной гидродинамике число граничных условий (5.8)–(5.15), т. е. число законов сохранения, равно восьми, что совпадает с числом МГД-переменных $(v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z, p, s)$. Это совпадение является счастливым обстоятельством, значительно упрощающим исследование разрывов. В самом деле, для определения скачков МГД-величин Δv_x, Δv_y, Δv_z, ΔB_x, ΔB_y, ΔB_z, Δp, Δs нет необходимости исследовать структуру переходного слоя, описываемую дифференциальными или интегродифференциальными уравнениями, а достаточно рассмотреть систему граничных условий, имеющих алгебраический, т. е. более простой, характер. В более сложных ситуациях число законов сохранения может быть меньше числа переменных, описывающих состояние среды. В этом случае недостающие граничные условия находятся путем исследования переходного слоя (см. ионизационную ударную волну, § 5.15).

О граничных условиях на поверхности раздела между электропроводной жидкостью и твердым телом см. [14].

5.2. Классификация сильных разрывов

В магнитной гидродинамике существуют различные типы сильных разрывов, не являющиеся частным случаем один другого [1].

Рассмотрим сначала общий случай, когда нормальное к поверхности разрыва магнитное поле отлично от нуля: $B_z \neq 0$. При этом возможны следующие варианты.

1) Разрывы, покоящиеся относительно среды:

$$v_{z1} = v_{z2} = 0$$

(индексами 1 и 2 обозначены параметры среды перед фронтом разрыва и за ним.) Из граничных условий (5.8)–(5.15) следует, что на таком разрыве непрерывны скорость среды, напряженность магнитного поля и давление:

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{B} = \Delta p = 0; \quad \Delta s \neq 0. \tag{5.16}$$

Этот разрыв называют *контактным.*

Разрывы, движущиеся относительно среды, в свою очередь разделяются на два различных типа в зависимости от того, изменяется плотность среды на разрыве или нет.

2) Разрывы, движущиеся относительно среды, на которых плотность среды не меняется:

$$v_z \neq 0; \quad \Delta \rho = 0. \tag{5.17}$$

Из граничных условий следует, что такой разрыв движется относительно среды впереди и позади него с альфвеновской скоростью

$$v_{z1} = v_{z2} = \pm V_A. \tag{5.18}$$

Такой разрыв называют *альфвеновским.* На альфвеновском разрыве модуль вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{B}$ не изменяется:

$$\Delta |\mathbf{B}| = 0, \tag{5.19}$$

а сам вектор только поворачивается вокруг нормали к поверхности разрыва на некоторый угол. Поэтому альфвеновский разрыв называют также вращательным. Что же касается вектора скорости среды $\mathbf{v}$, то его нормальная составляющая согласно (5.18) не меняется, а изменение тангенциальной, т. е. поперечной, компоненты $\mathbf{v}_t$ определяется формулой

$$\Delta \mathbf{v}_t = -\epsilon \frac{\Delta \mathbf{B}_t}{\sqrt{4\pi\rho}} \operatorname{sgn} B_z. \tag{5.20}$$

Так как на альфвеновском разрыве изменяется только поперечная компонента скорости $\mathbf{v}_t$, то его называют также *поперечным.* Энтропия на альфвеновском разрыве не изменяется. Учитывая также равенство

(5.17), находим, что на альфвеновском разрыве непрерывны все термодинамические величины:

$$\Delta s = \Delta p = 0. \tag{5.21}$$

Обычно альфвеновский разрыв не плоскополяризованный, т. е. векторы $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ и нормаль к поверхности разрыва не лежат в одной плоскости. Исключение составляет случай, когда вектор магнитного поля поворачивается на разрыве на 180°.

3) Разрывы, движущиеся относительно среды, на которых плотность среды изменяется:

$$v_z \neq 0, \quad \Delta\rho \neq 0. \tag{5.22}$$

На этих разрывах энтропия возрастает:

$$\Delta s > 0. \tag{5.23}$$

Можно показать [9, 63, 113], что если кроме условия (2.96) выполняется также неравенство

$$(\partial s/\partial p)_{\rho=\text{const}} > 0, \tag{5.24}$$

что имеет место почти для всех веществ, то на таком разрыве возрастают плотность и давление:

$$\Delta\rho > 0, \quad \Delta p > 0. \tag{5.25}$$

Разрывы этого типа называют *ударными волнами*, а неравенства (5.25) составляют содержание *теоремы Цемплена.*

Ударные волны плоскополяризованы. Действительно, из граничных условий на фронте ударной волны следует, что векторы $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ и нормаль к поверхности разрыва лежат в одной плоскости, а часть тангенциальной скорости, перпендикулярная этой плоскости, не изменяется на разрыве. Поэтому можно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы по обе стороны разрыва выполнялось условие

$$v_y = B_y = 0. \tag{5.26}$$

Скорость среды v_{z1} относительно разрыва, равная скорости ударной волны относительно среды впереди нее, зависит от амплитуды ударной волны, т. е. от абсолютного значения скачка какой-либо МГД-величины, например $\Delta\rho$. При стремлении амплитуды ударной волны к нулю ее скорость стремится к фазовой скорости линейной магнитозвуковой волны—быстрой V_F или медленной V_S. В случае, когда

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} v_{z1} = \lim_{\Delta\rho\to 0} v_{z2} = V_F, \tag{5.27}$$

ударную волну называют *быстрой*. Если же

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} v_{z1} = \lim_{\Delta\rho\to 0} v_{z2} = V_S, \tag{5.28}$$

ударную волну называют *медленной*.

В силу соотношения (5.27) величины $|v_{z1} - V_{F1}|$ или $|v_{z2} - V_{F2}|$ также можно принять в качестве амплитуды быстрой ударной волны. Аналогично амплитудой медленной ударной волны может быть величина $|v_{z1} - V_{S1}|$ или $|v_{z2} - V_{S2}|$.

Зависимость между значениями термодинамических величин p_1, s_1 впереди ударной волны и их значениями p_2, s_2 позади ударной волны называют *ударной адиабатой* или *адиабатой Гюгонио*. В магнитной гидродинамике ударная адиабата зависит также от напряженности магнитного поля как от параметра.

Рассмотрим несколько частных случаев ударных МГД-волн.

В *параллельной* ударной волне вектор индукции магнитного поля по обе стороны поверхности разрыва параллелен направлению распространения, т. е. нормали к поверхности разрыва:

$$\mathbf{B}_{t1} = \mathbf{B}_{t2} = 0. \tag{5.29}$$

Граничные условия параллельной ударной МГД-волны ничем не отличаются от граничных условий в обычной (немагнитной) гидродинамике. В частности, в параллельной ударной волне

$$\Delta \mathbf{v}_t = 0. \tag{5.30}$$

Поэтому можно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы скорость среды по обе стороны поверхности разрыва была направлена вдоль нормали к ней, т. е.

$$\mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} = 0. \tag{5.31}$$

Такую же систему отсчета можно выбрать и для *перпендикулярной ударной волны*, в которой магнитное поле по обе стороны от поверхности разрыва перпендикулярно нормали к ней, т. е. $B_n = 0$. Это означает, что при распространении таких волн в покоящейся среде скорость среды позади ударной волны параллельна направлению распространения. В связи с этим для параллельных и перпендикулярных ударных волн используют общий термин – *продольные ударные волны*.

Ударную волну, у которой по обе стороны от поверхности разрыва магнитное поле не является ни параллельным, ни перпендикулярным нормали, называют *косой ударной волной*.

В особой ударной волне тангенциальная компонента магнитного поля $\mathbf{B}_t$ равна нулю по одну сторону от поверхности разрыва и отлична от нуля по другую сторону. Если условие

$$\mathbf{B}_t = 0$$

выполняется впереди волны, т. е.

$$\mathbf{B}_{t1} = 0, \quad \mathbf{B}_{t2} \neq 0, \tag{5.32}$$

то особую ударную волну называют *волной включения*. Если же выполняются условия

$$\mathbf{B}_{t1} \neq 0, \quad \mathbf{B}_{t2} = 0, \tag{5.33}$$

то особую ударную волну называют *волной выключения*.

Перейдем теперь к вырожденному случаю, когда нормальное к поверхности разрыва магнитное поле равно нулю: $B_z = 0$. При этом фазовые скорости альфвеновских и медленных магнитозвуковых волн равны нулю:

$$V_A = V_S = 0. \tag{5.34}$$

В этом случае возможны варианты.

1) Разрывы, покоящиеся относительно среды:

$$v_{z1} = v_{z2} = 0.$$

При этом условия (5.8)–(5.10), (5.12)–(5.15) выполняются тождественно, а граничное условие (5.11) принимает вид

$$\Delta\left(p + \frac{B_x^2 + B_y^2}{8\pi}\right) = 0. \tag{5.35}$$

Такой разрыв называют *тангенциальным*. На нем шесть МГД-величин v_x, v_y, B_x, B_y, p, s связаны единственным граничным условием (5.35). Поэтому скачки пяти МГД-величин независимы. Такой большой произвол (при $B_z \neq 0$ на любом разрыве независимым был скачок о д н о й из МГД-величин) объясняется тем, что в силу (5.34) тангенциальный разрыв представляет собой слившиеся пять разрывов: две медленные магнитозвуковые волны ("бегущие" в противоположные стороны с нулевыми скоростями), два альфвеновских разрыва и один контактный разрыв.

Примером тангенциального разрыва является граница между магнитосферой Земли и солнечным ветром. Если плазма в магнитной ловушке имеет резкую границу, то эта граница также является тангенциальным разрывом.

2) Разрывы, движущиеся относительно среды: $v_z \neq 0$. Это быстрая ударная волна. При стремлении амплитуды волны $\Delta\rho$ к нулю скорость ее распространения, равная v_z, стремится к фазовой скорости быстрой магнитозвуковой волны:

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} v_{z1} = \lim_{\Delta\rho\to 0} v_{z2} = V_F = \sqrt{c_A^2 + c_s^2}. \tag{5.36}$$

5.3. Устойчивость разрывов по Ляпунову

Проиллюстрируем исследование на устойчивость разрывов по Ляпунову на примере тангенциального разрыва [1].

Пусть плоскость разрыва совпадает с плоскостью $z = 0$. Скорость жидкости направлена вдоль оси x, причем в полупространстве $z > 0$ она равна v_1, а в полупространстве $z < 0$ v_2. Жидкость находится в однородном магнитном поле с напряженностью $\mathbf{B}$, также направленном вдоль оси x. Линеаризуя уравнения идеальной магнитной гидродинамики относительно возмущений скорости $\delta\mathbf{v}$, магнитного поля $\delta\mathbf{B}$ и давления δp, получаем для возмущений систему дифференциальных уравнений в частных производных (для простоты полагаем жидкость несжимаемой).

В каждом из полупространств $z > 0$ и $z < 0$ эта система уравнений имеет постоянные коэффициенты, и ее решение является суперпозицией экспонент:

$$\delta A = \text{const} \exp(\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t). \tag{5.37}$$

Для простоты ограничимся возмущениями, у которых $k_y = 0$. Система уравнений для амплитуд возмущений распадается на систему двух уравнений, содержащих δv_y, δB_y, и систему пяти уравнений для возмущений δv_x, δv_z, δB_x, δB_z, δp. [Собственно говоря, для этих пяти возмущений из (1.64) получим шесть уравнений, но одно из них является следствием остальных.] Первая система уравнений (для δv_y, δB_y) всегда приводит к устойчивым колебаниям, поэтому ее не будем рассматривать. Выражая с помощью второй системы уравнений величины δB_x, δp через δB_z:

$$\delta B_x = -(k_z/k_x)\delta B_z; \tag{5.38}$$

$$\delta p = \frac{\rho k_z (\omega - k_x v)^2}{k_x^3 c_A} \delta B_z \tag{5.39}$$

и аналогично δv_x, δv_z, получаем дисперсионное уравнение

$$[(\omega - k_x v)^2 - k_x^2 c_A^2](k_z^2 + k_x^2) = 0. \tag{5.40}$$

Приравнивая в этом уравнении нулю первый множитель, получаем вещественные значения ω, что соответствует устойчивости. Приравнивание нулю второго множителя дает

$$k_z = \pm \mathrm{i} k_x. \tag{5.41}$$

Возмущения должны убывать при удалении от поверхности разрыва, поэтому следует положить

$$k_{z1} = \mathrm{i}k_x; \quad k_{z2} = -\mathrm{i}k_x, \tag{5.42}$$

где индекс 1 относится к области $z > 0$, а индекс 2 – к области $z < 0$.

На границе областей 1 и 2 должны выполняться условия

$$\Delta\left(\delta p + \frac{B}{4\pi}\delta B_x\right) = 0; \quad \delta B_{n1} = 0, \quad \delta B_{n2} = 0, \tag{5.43}$$

где индексом n отмечена нормальная к поверхности разрыва компонента вектора.

Пусть $\zeta(x, t)$ – смещение поверхности разрыва вдоль оси z при возмущении. Тогда уравнение возмущений поверхности разрыва имеет вид

$$z - \zeta(x, t) = 0.$$

Учитывая, что возмущение $\zeta(x, t)$ имеет вид (5.37) (с $k_y = 0$), найдем, что нормаль $\mathbf{n}$ к возмущенной поверхности разрыва имеет компоненты

$$\mathbf{n} = (-\mathrm{i}k\zeta, 0, 1)$$

(мы отпустили индекс x у величины k_x и пренебрегли квадратом величины ζ). Поэтому

$$\delta B_n = \delta B_z - \mathrm{i}kB\zeta. \tag{5.44}$$

Подставляя (5.38), (5.39), (5.42), (5.44) в (5.43), получаем дисперсионное уравнение

$$(\omega - kv_1)^2 + (\omega - kv_2)^2 = k^2B^2/(2\pi\rho). \tag{5.45}$$

Это уравнение имеет вещественные корни ω, если

$$B/\sqrt{4\pi\rho} > (1/2)\,|v_1 - v_2|. \tag{5.46}$$

Полученное неравенство является условием устойчивости тангенциального разрыва по Ляпунову. Видим, что достаточно большое магнитное поле стабилизирует неустойчивость.

Неоднородность скорости вызывает неустойчивость течения, что приводит к турбулентности, вызывающей рост магнитного поля (см. § 1.2). Выражение (5.46) показывает, что этот рост прекращается [71], когда энергия магнитного поля $B^2/(8\pi)$ нарастает до такого же порядка, что и кинетическая энергия $(1/2)\,\rho(v_1 - v_2)^2$.

Аналогичное исследование показывает, что в идеальном газе продольная быстрая ударная МГД-волна устойчива по Ляпунову [114].

О взаимодействии МГД-разрывов с волнами малой амплитуды см. [49, 114а, 106].

Интересно отметить, что при отражении магнитозвуковой волны от границы между магнитосферой Земли и солнечным ветром (рассматриваемой как тангенциальный разрыв) коэффициент отражения может быть больше единицы [115]. При этом энергия черпается из кинетической энергии солнечного ветра.

5.4. Эволюционность разрывов

Задания граничных условий на разрыве недостаточно, чтобы единственым образом определить разрывное течение. Эта трудность встречалась и в обычной (немагнитной) гидродинамике. Так, при выдвигании поршня из трубы граничные условия допускают возможность двух решений: возникновение автомодельной волны и ударной волны разрежения. Однако второе решение, формально допускаемое граничными условиями, неосуществимо, так как в ударной волне разрежения убывает энтропия.

В магнитной гидродинамике в ударных волнах разрежения энтропия также убывает, поэтому такие волны невозможны [9, 63]. Однако существует слишком большое число МГД-волн сжатия, поэтому задача о движении электропроводной среды при заданных начальных и граничных условиях в ряде случаев имеет не одно решение, что противоречит принципу причинности. Например, если вдвигать идеально проводящий поршень в покоящуюся МГД-среду, в которой магнитное поле направлено вдоль нормали к поршню, то формально возможны два решения [63]:

1) такая же ударная волна сжатия, как и в отсутствие магнитного поля (параллельная ударная МГД-волна, см. § 5.6);

2) две особые (см. § 5.7) ударные МГД-волны сжатия—волна включения и волна выключения.

На ударных волнах сжатия энтропия возрастает [9, 63], поэтому условие возрастания энтропии, с помощью которого в обычной гидродинамике удавалось исключить "лишние" решения, в магнитной гидродинамике слишком слабо.

В действительности, однако, могут осуществляться не все ударные волны, на которых выполняются граничные условия и происходит возрастание энтропии. Для того чтобы ударная волна могла осуществиться на практике, необходимо, чтобы она была устойчивой относительно расщепления на несколько разрывных или атомодельных волн. Такие волны, устойчивые относительно расщепления, называют *эволюционными*. В эволюционных волнах бесконечно малое возмущение МГД-величин эволюционирует с течением времени, оставаясь малым. При этом волна может быть и неустойчивой по Ляпунову. В этом случае эволюция возмущения происходит по закону $\exp(\gamma t)$ $(\gamma > 0)$, где γ – инкремент неустойчивости, но в течение достаточно малого промежутка времени $(0, t)$ возмущение остается малым. Неэволюционная же волна м г н о в е н н о (в модели идеальной среды) расщепляется. При этом возмущение сразу же делается конечным, т. е. не малым (см. рис. 5.1).

Перейдем теперь к исследованию условий эволюционности ударной волны ([63, 116–118]).

Пусть при $t = 0$ в окрестности плоскости разрыва $z = 0$ возникли возмущения МГД-величин δv_{1x}, δv_{1y}, δv_{1z}, δB_{1x}, δB_{1y}, δp_1, δs_1, δv_{2x},

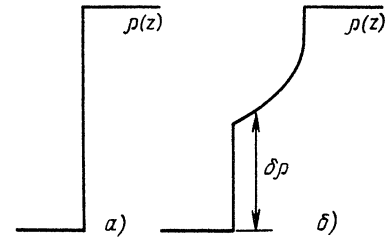


Рис. 5.1. Расщепление неэволюционной ударной волны:

а – профиль плотности $\rho(z)$ в исходной волне (волна движется справа налево); *б* – профиль плотности в расщепившейся волне; $\delta\rho$ – возмущение плотности

δv_{2y}, δv_{2z}, δB_{2x}, δB_{2y}, δp_2, δs_2. При этом граничные условия на поверхности разрыва нарушаются, в результате чего возникают МГД-волны, р а с х о д я щ и е с я в обе стороны от поверхности разрыва. После отхождения волн МГД-величины должны стать такими, чтобы выполнялись граничные условия. Именно из этих равенств и определяются амплитуды образовавшихся (расходящихся) волн.

Если число неизвестных возмущений (расходящихся волн; напомним, что каждая волна определяется одним независимым параметром) равно числу уравнений (н е з а в и с и м ы х граничных условий на поверхности разрыва), то задача об эволюции начального возмущения имеет единственное решение. В этом случае исходный разрыв эволюционный. Если же число расходящихся волн (число неизвестных) больше или меньше числа уравнений (граничных условий), то задача о малом возмущении разрыва либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решения вовсе. Но подобная ситуация невозможна, и такой вариант означал бы, что неправомерно исходное предположение о малости возмущений, т. е. разрыв неэволюционен и расщепляется.

Для нахождения условий эволюционности линеаризуем граничные условия (5.8)–(5.15), записанные в лабораторной системе координат (замена $v_z \to v_z - u_s$), относительно возмущений δv_x, δv_y, δv_z, δB_x, δB_y, δp, δs. При этом скорость ударной волны испытывает возмущение δu_s. Переходя снова в систему отсчета, в которой разрыв покоится (т. е. полагая $u_s = 0$), и ориентируя оси координат таким образом, чтобы невозмущенные компоненты магнитного поля B_y и скорости v_y обратились в нуль, получаем систему уравнений для возмущений:

$$\Delta\left[v_z\delta\rho + \rho(\delta v_z - \delta u_s)\right] = 0; \tag{5.47}$$

$$\Delta\left[v_x v_z\delta\rho + \rho v_z\delta v_x + \rho v_x(\delta v_z - \delta u_s) - (B_z/4\pi)\delta B_x\right] = 0; \tag{5.48}$$

$$\Delta\left[\rho v_z\delta v_y - (B_z/4\pi)\delta B_y\right] = 0; \tag{5.49}$$

$$\Delta\left[v_z^2\delta\rho + 2\rho v_z(\delta v_z - \delta u_s) + \delta p + (B_x/4\pi)\delta B_x\right] = 0; \tag{5.50}$$

$$\Delta\Big\{v_z(v^2/2+\epsilon)\delta\rho + \rho(v^2/2+\epsilon)(\delta v_z - \delta u_s) + \rho v_z v_x\delta v_x +$$
$$+\rho v_z^2(\delta v_z - \delta u_s) + \rho v_z\delta\epsilon + v_z\delta p + p(\delta v_z - \delta u_s) + (1/4\pi)\left[2B_x v_z\delta B_x +\right.$$
$$\left.+B_x^2(\delta v_z - \delta u_s) - B_x B_z\delta v_x - v_x B_z\delta B_x - B_z^2(\delta v_z - \delta u_s)\right]\Big\} = 0; \tag{5.51}$$

$$\Delta [B_z \delta v_x - v_z \delta B_x - B_x (\delta v_z - \delta u_s)] = 0; \tag{5.52}$$

$$\Delta [B_z \delta v_y - v_z \delta B_y] = 0; \tag{5.53}$$

$$\delta B_z = 0. \tag{5.54}$$

Уравнения (5.47)–(5.53) распадаются на две группы: 1) равенства (5.49), (5.53), содержащие только возмущения δv_y и δB_y, соответствующие альфвеновским волнам, движущимся в направлении оси z; 2) равенства (5.47), (5.48), (5.50)–(5.53), содержащие только возмущения δv_x, δv_z, δB_x, δp, δs, соответствующие магнитозвуковым и энтропийным волнам, движущимся в направлении той же оси z, и возмущение скорости разрыва δu_s.

Исследуем сначала эволюционность разрыва относительно возмущений, описываемых первой группой уравнений (5.49), (5.53). Так как эти соотношения не содержат возмущения скорости разрыва δu_s, то они независимы, т. е. число независимых уравнений равно двум. Поэтому для эволюционных разрывов число неизвестных, равное числу амплитуд волн, расходящихся по обе стороны поверхности разрыва, также должно равняться двум. Вспоминая, что ось z направлена вдоль нормали к поверхности разрыва, находим, что по обе стороны разрыва существуют четыре различные альфвеновские волны с фазовыми скоростями (относительно разрыва) $v_{z1} + V_{A1}$, $v_{z1} - V_{A1}$, $v_{z2} + V_{A2}$, $v_{z2} - V_{A2}$. (Ось z ориентирована таким образом, чтобы $v_{z1} > 0$, $v_{z2} > 0$; индексы 1, 2 относятся соответственно к области 1 впереди ударной волны и 2 позади волны; $V_A = |B_z|/\sqrt{4\pi\rho}$.) Расходящимся волнам в области 1 соответствует отрицательная, а в области 2 – положительная фазовая скорость.

Волна в среде 1 с фазовой скоростью $z_{z1} + V_{A1}$ будет сходящейся при любых значениях v_{z1} и V_{A1}. Что же касается волны с фазовой скоростью $v_{z1} - V_{A1}$, то она будет сходящейся при $v_{z1} > V_{A1}$ и расходящейся (т. е. распространяющейся от разрыва) при $v_{z1} < V_{A1}$. Точно так же в среде 2 волна с фазовой скоростью $v_{z2} + V_{A2}$ всегда будет расходящейся, а волна со скоростью $v_{z2} - V_{A2}$ будет расходящейся при $v_{z2} > V_{A2}$ и сходящейся при $v_{z2} < V_{A2}$.

Отсюда следует, что существуют две области эволюционности относительно альфвеновских возмущений:

$$1)\ v_{z1} > V_{A1};\quad v_{z2} > V_{A2} \tag{5.55}$$

(ни одной расходящейся волны в области 1 и две расходящиеся волны в области 2);

$$2)\ v_{z1} < V_{A1};\quad v_{z2} < V_{A2} \tag{5.56}$$

(одна расходящаяся волна в области 1 и одна расходящаяся волна в области 2, см. рис. 5.2).

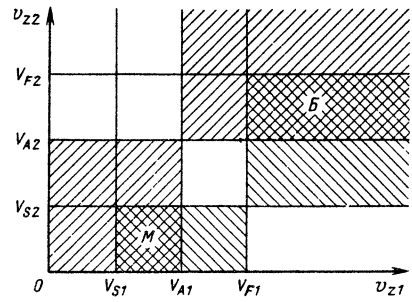


Рис. 5.2. Области эволюционности ударных волн: штриховка с наклоном вправо – области эволюционности относительно альфвеновских возмущений; штриховка с наклоном влево – области эволюционности относительно магнитозвуковых и энтропийных возмущений; двойная штриховка – области эволюционности относительно всех возмущений; *Б* – быстрая ударная волна; *М* – медленная ударная волна (границы областей изображены схематично, так как V_{S2}, V_{A2} и V_{F2} – функции v_{z1})

Ударные волны, для которых выполняются условия (5.55), называют *сверхальфвеновскими*, а ударные волны, для которых выполняются условия (5.56), – *доальфвеновскими.*

Найдем далее условия эволюционности ударных волн относительно магнитозвуковых возмущений. Так как уравнения (5.47), (5.48), (5.50)–(5.52) содержат возмущенную скорость разрыва δu_s, то после ее исключения остаются четыре независимых уравнения для возмущений δv_x, δv_z, δB_x, δp, δs. Таким образом, для эволюционного разрыва число расходящихся магнитозвуковых и энтропийных волн должно равняться четырем. Поскольку при выбранном нами направлении оси z ($v_{z1} > 0$, $v_{z2} > 0$) от разрыва будет расходиться только одна энтропийная волна (в среде 2), эволюционными будут ударные волны, от которых расходятся три магнитозвуковые волны.

Учитывая, что фазовые скорости магнитозвуковых волн в среде 1 равны $v_{z1} \pm V_{F1}$ и $v_{z1} \pm V_{S1}$, а в среде 2 $v_{z2} \pm V_{F2}$ и $v_{z2} \pm V_{S2}$, находим две области эволюционности ударных волн относительно магнитозвуковых и энтропийных возмущений [63]:

$$1)\ V_{F1} < v_{z1};\quad V_{S2} < v_{z2} < V_{F2}; \tag{5.57}$$

$$2)\ V_{S1} < v_{z1} < V_{F1};\quad v_{z2} < V_{S2} \tag{5.58}$$

(см. рис. 5.2). Область (5.57) соответствует быстрым ударным волнам, область (5.58) – медленным ударным волнам.

Таким образом, скорость быстрой ударной волны относительно среды впереди нее больше скорости быстрой магнитозвуковой волны в этой среде, а относительно среды позади нее – меньше скорости быстрой магнитозвуковой волны; аналогичная картина и для медленных ударных волн.

Пользуясь неравенствами $V_S \leqslant V_A \leqslant V_F$, заключаем, что быстрые ударные волны – сверхальфвеновские, а медленные – доальфвеновские.

До сих пор мы рассматривали условия эволюционности относительно возмущений, зависящих только от z и t. Учет возмущений общего

вида, зависящих также от x и y, приводит к таким же условиям эволюционности.

Аналогично можно показать, что другие типы разрывов — альфвеновские, тангенциальные и контактные — всегда эволюционны.

Подчеркнем существенное различие между неэволюционностью и неустойчивостью. Неустойчивые состояния могут возникнуть при эволюции магнитогидродинамической среды под действием внутренних причин. Они либо стабилизируются нелинейными эффектами, либо существуют некоторое время (иногда довольно продолжительное), пока флуктуации достигнут критического значения, после чего неустойчивые состояния разрушаются. Что же касается неэволюционных разрывов, то они не могут возникнуть сами собой. Неэволюционные разрывы могут образоваться только под действием внешних факторов (например, при столкновении газовых масс). Они существуют лишь одно мгновение — как разрывы в начальных условиях, после чего немедленно расщепляются на несколько ударных или автомодельных волн.

5.5. Скачки магнитогидродинамических величин на различных волнах

В ударных волнах малой амплитуды скачки всех МГД-величин, кроме энтропии, имеют одинаковый порядок:

$$\Delta v_x \sim \Delta v_y \sim \Delta v_z \sim \Delta B_x \sim \Delta B_y \sim \Delta p. \tag{5.59}$$

Скачок же энтропии имеет третий порядок малости в сравнении с другими величинами ([1], с. 342):

$$\Delta s \sim (\Delta p)^3. \tag{5.60}$$

Поэтому в первом приближении ударные волны малой амплитуды можно считать изэнтропическими, $\Delta s = 0$. При этом скачки МГД-величин Δv_x, Δv_y, Δv_z, ΔB_x, ΔB_y, Δp в первом приближении будут такими же, как и в линейной волне. В этом приближении различие между скачками в ударной и автомодельной волнах состоит только в том, что ударные волны — это волны сжатия, $\Delta p > 0$, тогда как автомодельные — волны разрежения, $\Delta p < 0$.

Из граничного условия (5.8) и теоремы Цемплена ($\rho_2 > \rho_1$) следует, что в ударной волне $v_{n1} > v_{n2}$, т. е.

$$\Delta v_n < 0 \tag{5.61}$$

(индекс n означает проекцию вектора на направление нормали к поверхности разрыва). Далее, представив граничные условия (5.9), (5.13) в виде

$$j_n \Delta(\mathbf{B}_t/\rho) = B_n \Delta \mathbf{v}_t; \tag{5.62}$$

$$j_n \Delta \mathbf{v}_t = (B_n/4\pi)\Delta \mathbf{B}_t, \tag{5.63}$$

где $j_n = \rho v_n$ – сохраняющаяся на разрыве величина, получим

$$(j_n^2/B_n)\,\Delta(\mathbf{B}_t/\rho) = (B_n/4\pi)\,\Delta\mathbf{B}_t, \tag{5.64}$$

т. е.

$$\rho_1(v_{n1}^2 - V_{A1}^2)\mathbf{B}_{t1} = \rho_2(v_{n2}^2 - V_{A2}^2)\mathbf{B}_{t2}. \tag{5.65}$$

Из этого равенства и условий эволюционности (5.55), (5.56) следует, что на ударной волне тангенциальное магнитное поле $\mathbf{B}_t$ не изменяет направления (на противоположное).

Представляя равенство (5.64) в виде

$$\left(\frac{j_n^2}{B_n\rho_1} - \frac{B_n}{4\pi}\right)\mathbf{B}_{t1} = \left(\frac{j_n^2}{B_n\rho_2} - \frac{B_n}{4\pi}\right)\mathbf{B}_{t2} \tag{5.66}$$

и учитывая теорему Цемплена ($\rho_2 > \rho_1$), находим, что на быстрых ударных волнах тангенциальное магнитное поле увеличивается, а на медленных уменьшается.

Давление на ударных МГД-волнах увеличивается. В случае ударных волн малой интенсивности этот вывод следует из теоремы Цемплена и из соотношения $\Delta p = c_s^2\,\Delta\rho$.

Выберем теперь ось z вдоль нормали к поверхности разрыва, а ось x таким образом, чтобы векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{v}$ лежали в плоскости (xz).

Из граничного условия (5.63) находим, что Δv_x имеет такой же знак, как и $B_z B_x$ (для ударной волны, движущейся влево, т. е. в отрицательном направлении оси z; если же волна движется вправо, знак Δv_x будет противоположным знаку $B_z B_x$).

Мерой интенсивности ударной волны является величина p_2/p_1. Она изменяется от единицы для волн малой интенсивности до бесконечности для волн бесконечно большой интенсивности. Что же касается степени сжатия ρ_2/ρ_1, то она изменяется от единицы до значения (для идеального газа)

$$\rho_2/\rho_1 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1),$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме. Для одноатомного идеального газа $\gamma = 5/3$ и максимальное сжатие равно $\rho_2/\rho_1 = 4$.

Обстоятельное исследование скачков различных МГД-величин на ударных волнах произвольной амплитуды изложено в [9, 119, 120].

Рассмотрим теперь 180-градусный альфвеновский разрыв. На таком разрыве компонента скорости v_z не изменяется: $\Delta v_z = 0$ (ось z направлена по нормали к разрыву), а направление тангенциального магнитного поля B_x меняется на противоположное: $\operatorname{sgn}\Delta B_x = -\operatorname{sgn} B_x$. Знак Δv_x определяется формулой (5.20): $\operatorname{sgn}\Delta v_x = \epsilon \operatorname{sgn}(B_x B_z)$.

Таблица 5.1. **Направление изменения МГД-величин в волнах различных типов (ось z направлена по нормали к поверхности разрыва, волна движется в положительном направлении оси z, $B_z > 0$, $B_x > 0$)**

Тип волны	Знаки		
	ΔB_x	Δv_z	Δv_x
Быстрая ударная	+	+	–
Быстрая автомодельная	–	–	+
180-градусный альфвеновский разрыв	–	0	+
Медленная ударная	–	+	+
Медленная автомодельная	+	–	–

Полученные результаты вместе с формулами (2.98)–(2.101) для автомодельных волн собраны в табл. 5.1. Для простоты приведены знаки изменений МГД-величин при $\epsilon = 1$ (волна движется в положительном направлении оси z): $B_x > 0$, $B_z > 0$. В противном случае ΔB_x, Δv_z, Δv_x следует заменить величинами $(\operatorname{sgn} B_x)\,\Delta B_x$, $\epsilon \Delta v_z$ и $\epsilon \operatorname{sgn}(B_x B_z)\,\Delta v_x$.

5.6. Параллельные ударные волны

Рассмотрим более подробно условия эволюционности в простейшем случае параллельной ударной волны. Как показано в § 5.2, в этом случае можно выбрать систему отсчета, в которой магнитное поле и скорость среды по обе стороны поверхности разрыва параллельны нормали к поверхности разрыва:

$$\mathbf{B}_{t1} = \mathbf{B}_{t2} = \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} = 0. \tag{5.67}$$

При этом магнитное поле выпадает из граничных условий, т. е. граничные условия ничем не отличаются от граничных условий в обычной (немагнитной) гидродинамике. Однако наложение магнитного поля, параллельного нормали к поверхности разрыва, приводит в некотором интервале параметров к нарушению условий эволюционности, что проявляется в расщеплении ударной волны.

Для идеального газа с отношением удельных теплоемкостей $c_p/c_v = 5/3$ граничные условия (5.8)–(5.15) в случае параллельной ударной волны принимают вид

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}; \tag{5.68}$$

$$p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n2}^2; \tag{5.69}$$

$$\frac{v_{n1}^2}{2} + \frac{5}{2}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_{n2}^2}{2} + \frac{5}{2}\frac{p_2}{\rho_2}. \tag{5.70}$$

Из этих условий находим

$$\rho_2 = \rho_1 v_{n1}/v_{n2}; \tag{5.71}$$

$$p_2 = p_1 + \rho_1 v_{n1}(v_{n1} - v_{n2}); \tag{5.72}$$

$$v_{n2} = (v_{n1}^2 + 3c_{s1}^2)/(4v_{n1}), \tag{5.73}$$

где c_{s1} – скорость звука впереди ударной волны. Уравнение (5.73), связывающее нормальные компоненты скорости за фронтом волны v_{n2} и перед фронтом волны v_{n1}, определяет *линию Гюгонио.*

Для определения областей эволюционности параллельной ударной волны нужно найти скорости

$$V_{A2} = |B_n|/\sqrt{4\pi\rho_2} \tag{5.74}$$

и

$$c_{s2} = \sqrt{5p_2/3\rho_2} \tag{5.75}$$

как функции v_{n1}. Эти зависимости согласно (5.71), (5.72) имеют вид

$$V_{A2} = \frac{\sqrt{v_{n1}^2 + 3c_{s1}^2}}{2v_{n1}} V_{A1}; \tag{5.76}$$

$$c_{s2} = \frac{\sqrt{(5v_{n1}^2 - c_{s1}^2)(v_{n1}^2 + 3c_{s1}^2)}}{4v_{n1}}. \tag{5.77}$$

Рассмотрим сначала случай, когда впереди ударной волны альфвеновская скорость меньше скорости звука:

$$V_{A1} < c_{s1}. \tag{5.78}$$

Так как направление распространения волны параллельно магнитному полю, скорости медленной и быстрой магнитозвуковых волн совпадают с альфвеновской скоростью и скоростью звука соответственно:

$$V_{S1} = V_{A1}, \quad V_{F1} = c_{s1}. \tag{5.79}$$

При этом линия Гюгонио и линии V_{A2} и c_{s2} как функции v_{n1} расположены, как показано на рис. 5.3. Видно, что в этом случае параллельная ударная волна быстрая и что условия эволюционности выполняются на всем участке $v_{n1} > v_{n2}$, т. е. в волне сжатия.

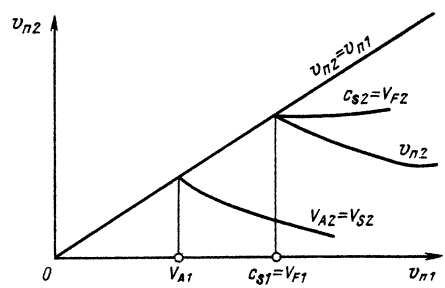


Рис. 5.3. Условия эволюционности параллельной ударной волны при $V_{A1} < c_{s1}$. Области неэволюционности отсутствуют

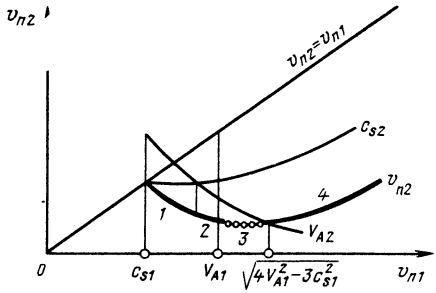


Рис. 5.4. Условия эволюционности параллельной ударной волны при $V_{A1} > c_{s1}$:
——— – зависимость v_{n2} от v_{n1} (области эволюционности – сплошная линия, область неэволюционности – точки); —— – зависимости c_{s2} и V_{A2} от v_{n1}

Более сложная картина возникает в случае, когда впереди параллельной ударной волны альфвеновская скорость превышает скорость звука:

$$V_{A1} > c_{s1}. \tag{5.80}$$

Для этого случая графики функций $v_{n2}(v_{n1})$, $V_{A2}(v_{n1})$ и $c_{s2}(v_{n1})$ изображены на рис. 5.4. Видно, что на участках *1* и *2* параллельная ударная волна является медленной (эволюционной) ударной волной. Различие между участками *1* и *2* состоит в том, что на участке *1* $V_{S2} = c_{s2}$, а на участке *2* $V_{S2} = V_{A2}$. На участке *3* параллельная ударная волна неэволюционная и, наконец, на участке *4* это быстрая (эволюционная) ударная волна.

Из формул (5.73), (5.76) следует, что абсцисса точки пересечения линий $v_{n2}(v_{n1})$ и $V_{A2}(v_{n1})$ равна

$$v_{n1} = \sqrt{4V_{A1}^2 - 3c_{s1}^2}.$$

Поэтому параллельная ударная волна при выполнении неравенства (5.80) неэволюционна, если

$$V_{A1} < v_{n1} < \sqrt{4V_{A1}^2 - 3c_{s1}^2}. \tag{5.81}$$

5.7. Особые ударные волны

Как указывалось в § 5.2, особые ударные волны могут быть двух типов – волнами включения и волнами выключения.

Рассмотрим сначала волну включения:

$$\mathbf{B}_{t1} = 0; \quad \mathbf{v}_{t1} = 0. \tag{5.82}$$

Из граничных условий (5.9), (5.13) следует

$$v_{n2} = \pm V_{A2}. \tag{5.83}$$

Аналогично для волны выключения

$$\mathbf{B}_{t2} = 0; \quad \mathbf{v}_{t2} = 0 \tag{5.84}$$

справедливо равенство

$$v_{n1} = \pm V_{A1}. \tag{5.85}$$

Таким образом, с той стороны от поверхности особой ударной волны, где тангенциальное магнитное поле отлично от нуля, особая ударная волна движется относительно среды с альфвеновской скоростью.

Исследуем эволюционность особых ударных волн. Рассмотрим волну включения. Пользуясь граничным условием (5.8) и соотношением (5.83) и полагая для определенности, что волна движется влево ($v_n > 0$), получаем

$$v_{n1} = (\rho_2/\rho_1)v_{n2} \mp \sqrt{\rho_2/\rho_1}\, V_{A1}. \tag{5.86}$$

В силу теоремы Цемплена ($\rho_2 > \rho_1$) из (5.86) следует

$$v_{n1} > V_{A1}. \tag{5.87}$$

Из четырех альфвеновских возмущений с фазовыми скоростями $v_{n1} \pm V_{A1}$, $v_{n2} \pm V_{A2}$ от разрыва отходит лишь одна волна со скоростью $v_{n2} + V_{A2}$. (Так как $v_{n2} - V_{A2} = 0$, то вторая волна справа – сходящаяся.) Условие эволюционности относительно альфвеновских возмущений состоит в том, что число расходящихся волн должно равняться двум, откуда следует вывод о неэволюционности волны включения. С другой стороны, волна включения обязательно должна образоваться в ряде ситуаций. Например, при расщеплении параллельной ударной волны в области неэволюционности, рассмотренном в предыдущем параграфе, одна из образующихся ударных волн является волной включения.

Разрешение этого противоречия состоит в том, что при наложении бесконечно малого возмущения напряженность тангенциального магнитного поля $\mathbf{B}_t$ становится отличной от нуля. Поэтому особую ударную волну следует рассматривать как предельный случай неособой ударной волны, когда угол между вектором магнитного поля и нормалью к плоскости разрыва стремится к нулю.

Так как в ударной волне включения поперечное магнитное поле возрастает, а в волне выключения убывает, то волна включения является быстрой, а волна выключения – медленной ударной волной.

Волна включения существует не при всех значениях скорости v_{n1}, так как при достаточно малых и достаточно больших ее значениях поперечное магнитное поле $\mathbf{B}_{t2}$ позади волны становится мнимым. В самом деле, в случае уравнения состояния идеального газа с показателем адиабаты Пуассона $\gamma = 5/3$ из граничных условий следует

$$\frac{3B_{t2}^2}{8\pi} = \frac{\rho_1(v_{n1}^2 - V_{A1}^2)(4V_{A1}^2 - 3c_{s1}^2 - v_{n1}^2)}{V_{A1}^2}. \tag{5.88}$$

Так как левая часть этого равенства положительна и выполняется соотношение (5.87), то справедливы неравенства (5.81). Таким обра-

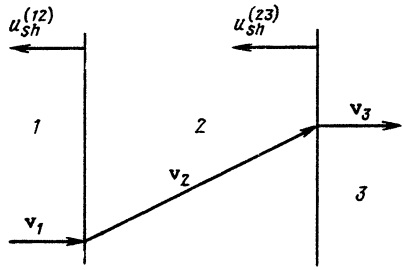


Рис. 5.5. Расщепление неэволюционной параллельной ударной волны на две особые волны:

1 – область впереди волны включения; *2* – область между двумя особыми волнами; *3* – область позади волны включения (ударные волны движутся справа налево, магнитное поле B везде параллельно скорости v)

зом, условия неэволюционности совпадают с условиями расщепления ударной волны.

Заметим, что для расщепления ударной волны необходимо также, чтобы образовавшиеся волны расходились друг от друга (рис. 5.5). Пользуясь формулой (5.83) и замечая, что абсолютная скорость разрыва относительно среды равна скорости среды относительно разрыва, находим, что скорость образовавшейся ударной волны, разделяющей области *1* и *2*, $u_{sh}^{(1\,2)}$, относительно среды в области *2* равна

$$u_{sh}^{(1\,2)} = V_{A\,2}. \tag{5.89}$$

Согласно (5.89) скорость волны, разделяющей области *2* и *3*, относительно среды в области *2* равна

$$u_{sh}^{(2\,3)} = V_{A\,2}. \tag{5.90}$$

Образовавшиеся ударные волны расходятся друг от друга, если $u_{sh}^{(1\,2)} > u_{sh}^{(2\,3)}$. Однако согласно (5.89) и (5.90) $u_{sh}^{(1\,2)} = u_{sh}^{(2\,3)}$. Поэтому, строго говоря, параллельная ударная волна не может расщепиться на две особые ударные волны. Но если наложить бесконечно малое возмущение магнитного поля $\mathbf{B}_t$, то образовавшиеся волны будут расходиться.

В самом деле, так как волна включения быстрая, то $u_{sh}^{(1\,2)} > V_{A\,2}$ (при наличии возмущения $\mathbf{B}_t$). Точно так же, поскольку волна выключения медленная, $u_{sh}^{(2\,3)} < V_{A\,2}$. Поэтому $u_{sh}^{(1\,2)} > u_{sh}^{(2\,3)}$, т. е. образовавшиеся волны расходятся.

5.8. Порядок следования волн

До сих пор мы изучали изолированные разрывы и автомодельные волны. Они возникают при внезапном включении магнитного поля, движении через среду твердого тела, а также при столкновении газовых масс. Однако, как правило, при этом образуется не одна, а несколько волн различного типа. Покажем теперь, что не может возбуждаться несколько быстрых волн (ударных или автомодельных), движущихся в одну сторону. Аналогична картина и для медленных волн. Кроме того,

различные МГД-волны следуют друг за другом в строго определенной последовательности.

Рассмотрим сначала случай, когда в одном направлении движутся две быстрые ударные волны. Пусть движущаяся впереди ударная волна имеет скорость относительно среды за ней $u_{sh}^{(1)}$, а движущаяся за ней вторая волна имеет скорость $u_{sh}^{(2)}$ относительно среды перед волной. Иначе говоря, $u_{sh}^{(1)}$ и $u_{sh}^{(2)}$ – скорости первой и второй ударных волн относительно среды между ними. И если V_F – скорость быстрой магнитозвуковой волны в этой среде, то согласно условиям эволюционности должны выполняться неравенства

$$u_{sh}^{(1)} < V_F; \quad u_{sh}^{(2)} > V_F. \tag{5.91}$$

Из этих неравенств следует, что $u_{sh}^{(2)} > u_{sh}^{(1)}$. Иными словами, вторая волна догоняет первую, и поэтому они не имеют общего источника, т. е. две быстрые ударные волны, образовавшиеся от одного источника, не могут двигаться в одну сторону.

Рассмотрим теперь быструю автомодельную волну. Скорость ее относительно среды равна V_F, поэтому в одном направлении не могут двигаться ни две быстрые автомодельные волны, ни одна быстрая ударная и одна быстрая автомодельная волны.

Повторяя аналогичные рассуждения для медленных волн, можно показать, что один источник не может создавать две медленные (ударные или автомодельные) волны, движущиеся в одну сторону.

Что же касается волн различных типов, то альфвеновский разрыв догоняет медленную волну (ударную или автомодельную), а быстрая ударная или автомодельная волна догоняет разрывные или автомодельные волны всех типов.

Таким образом, если МГД-волны образованы одним источником, то в одном направлении может двигаться не более трех волн: впереди движется быстрая волна (ударная или автомодельная), за ней следует альфвеновский разрыв и, наконец, за ними движется медленная (ударная или автомодельная) волна. Разумеется, некоторые из перечисленных волн могут отсутствовать.

При столкновении двух ударных МГД-волн образуется разрыв, на котором не выполняются граничные условия. Такой разрыв сразу же расщепляется на ряд разрывных или автомодельных волн. Как следует из предыдущего рассмотрения, число образующихся при этом волн равно семи: три волны, движущиеся вправо, – быстрая, альфвеновская и медленная, три волны тех же типов, движущиеся влево, и между ними контактный разрыв, покоящийся относительно среды; быстрые и медленные волны могут быть либо ударными, либо автомодельными.

5.9. Задача о поршне

Возбуждение различных ударных и автомодельных волн, а также альфвеновского разрыва проиллюстрируем на примере задачи о поршне. Эта задача представляет самостоятельный интерес в магнитной аэродинамике при обтекании твердого тела электропроводной средой в присутствии магнитного поля. При этом поверхность тела можно на малом участке аппроксимировать плоским поршнем. В термоядерных исследованиях роль поршня играют электромагнитные силы, возникающие при пропускании электрического разряда через плазму.

Пусть в идеально проводящей среде движется идеально проводящее твердое тело (поршень), расположенное в полупространстве $z < 0$ и движущееся в направлении оси x со скоростью u_x. Проводящая среда занимает полупространство $z > 0$. Определим характер возникающих при движении поршня волн, ориентировав координатные оси таким образом, чтобы вектор магнитного поля лежал в плоскости xz, причем $B_x > 0$, $B_z > 0$.

Так как магнитные силовые линии вморожены в среду и в поршень (в силу идеальной проводимости), то при $u_x < 0$ они деформируются так, как показано на рис. 5.6. Изгибание магнитных силовых линий приводит к появлению упругих сил натяжения, которые направлены в сторону вогнутости силовой линии. Эти силы вызывают появление быстрой и медленной волн, движущихся от поршня в положительном направлении оси z. Волны эти могут быть либо ударными, либо автомодельными. При $u_x < 0$, как видно из рис. 5.6,*а*, равнодействующая возникающих сил направлена от поршня, поэтому в области между обеими волнами среда движется вправо, т. е. от поршня, $v_z > 0$. В области впереди быстрой волны среда покоится ($v_z = 0$), так как до нее возмущение еще не дошло. В области позади медленной волны среда также покоится, так как на поверхности поршня должно выполняться граничное условие $v_z = u_z = 0$. Таким образом, в быстрой волне среда должна ускоряться в положительном направлении оси z, а в медленной – замедляться. Это означает, что быстрая волна – это волна сжатия, т. е. ударная, а медленная – волна разрежения, т. е. автомодельная. Альфвеновская волна (180-градусный разрыв) в данном случае не возникает, так как тангенциальное магнитное поле B_x вблизи поршня и на бесконечности (т. е. в невозмущенной области) имеет один и тот же знак. (Напомним, что в ударной и автомодельной волнах знак B_x не изменяется, а на 180-градусной альфвеновском разрыве он изменяется на противоположный.)

При движении поршня вверх ($u_x > 0$) с малой скоростью равнодействующая возникающих сил упругости направлена к поршню (см. рис. 5.6,*б*). В области между возникшими при этом быстрой и медленной волнами среда движется к поршню ($v_z < 0$), т. е. в быстрой волне она замедляется, а в медленной ускоряется. Такой характер движения

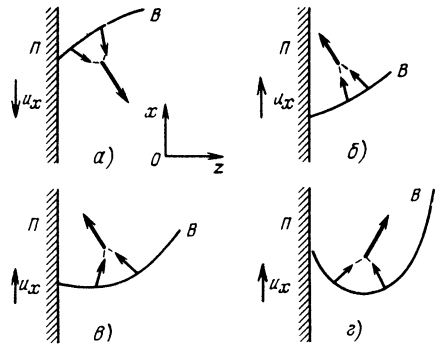


Рис. 5.6. Деформация магнитных силовых линий при движении поршня в поперечном направлении вниз (*а*) и вверх (*б–г*) (случай *б*) соответствует достаточно малой скорости поршня, а случай *г*) – достаточно большой скорости поршня) :

П – поршень; *B* – одна из магнитных силовых линий; тонкие стрелки – упругие силы натяжения, жирная стрелка – результирующая этих сил; *а* – поршень движется вниз; *б*, *в*, *г* – поршень движется вверх

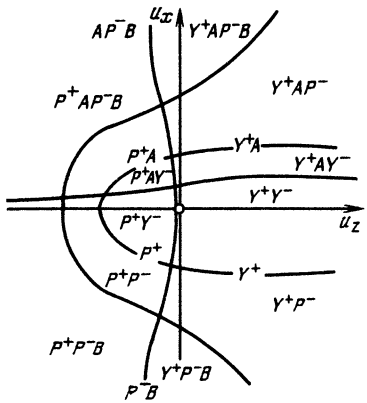


Рис. 5.7. Волны, возникающие при движении поршня:

u_z – продольная компонента скорости поршня; u_x – поперечная компонента; Y^+, Y^-, P^+, P^-, A, B – соответственно наличие быстрой и медленной ударных волн, быстрой и медленной волн разрежения (автомодельных), альфвеновского разрыва и образования вакуума (кавитация)

среды может быть обеспечен лишь в случае, если быстрая волна автомодельная, а медленная – ударная.

При увеличении скорости поршня u_x ($u_x > 0$) знак B_x вблизи поршня изменяется (см. рис. 5.6,*в*), что влечет за собой появление кроме быстрой автомодельной и медленной ударной волн еще и альфвеновского разрыва между ними.

При дальнейшем увеличении скорости поршня u_x значение $|B_x|$ вблизи поршня становится больше, чем на бесконечности. При этом равнодействующая сил натяжения направлена от поршня (рис. 5.6,*г*), что приводит к возникновению быстрой ударной волны и медленной волны разрежения (автомодельной). Так как знаки B_x в невозмущенной среде и вблизи поршня противоположны, то между этими волнами возникает также альфвеновский разрыв.

При достаточно большом значении u_x амплитуда медленной волны разрежения становится настолько большой, что плотность среды позади волны обращается в нуль, т. е. наступает кавитация.

Картину движения среды в случае, когда отлична от нуля и z-компонента скорости поршня ($u_z \neq 0$), можно получить, исходя из рассмот-

ренного случая $u_z = 0$. Именно, при увеличении составляющей скорости u_z ($u_z > 0$) амплитуда волны сжатия (ударной) увеличивается, а амплитуда волны разрежения (автомодельной) уменьшается. При некотором критическом значении u_z, зависящем от значения u_x, волна разрежения превращается в волну сжатия, т. е. в медленную ударную волну. Аналогично уменьшение u_z приводит к превращению ударной волны в волну разрежения. Дальнейшее уменьшение u_z приводит к возникновению кавитации.

Типы волн, возникающих при движении поршня [9] [63] [120а] с произвольной скоростью (u_x, u_z) (в случае $B_y = u_y = 0$), изображены на рис. 5.7. Топологическая картина различных областей на этом рисунке не зависит от значения напряженности магнитного поля. При изменении B_x и B_z происходит только деформация линий, разграничивающих различные области.

Четырем ситуациям, изображенным на рис. 5.6, соответствуют точки рис. 5.7, расположенные на оси ординат $(u_z = 0)$.

5.10. Расщепление разрыва

При столкновении двух газовых масс, а также ударных волн друг с другом или со стенкой образуется разрыв, на котором не выполняются граничные условия (5.3)—(5.7). Такой разрыв расщепляется на ряд МГД-волн.

Рассмотрим образовавшиеся волны через малый промежуток времени, когда они еще мало успели отойти от прежней поверхности разрыва. На небольшом участке поверхность разрыва можно считать плоской, а все МГД-величины по каждую сторону от поверхности разрыва — постоянными. При этом, как отмечалось в § 2.6, образовавшиеся непрерывные волны могут быть только автомодельными. Поэтому при расщеплении первоначального разрыва образуется ряд разрывных или автомодельных волн.

Мы ограничимся рассмотрением расщепления разрыва малой амплитуды. Как уже отмечалось, в первом приближении по амплитудам образовавшихся волн соотношения между скачками МГД-величин на ударных и автомодельных волнах одинаковы. В этом приближении различие между ударной и автомодельной волнами состоит только в том, что на ударной волне давление возрастает, а на автомодельной убывает.

Обозначая $\Delta\psi$ скачок вектора МГД-состояния $\psi = (v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, p, s)$ в первоначальном разрыве и $\Delta_k\psi$ — скачок вектора ψ в образовавшейся волне k-го типа, получаем, очевидно, равенство

$$\Delta\psi = \sum_{k=1}^{7} \Delta_k \psi. \tag{5.92}$$

[Под скачком $\Delta\psi$ или $\Delta_k\psi$ понимаем в этом параграфе разность $\psi(z+0) - \psi(z-0)$ между значениями ψ с п р а в а и с л е в а от раз-

рыва и соответствующие выражения для $\Delta_k\psi$. Во всех же остальных параграфах $\Delta_k\psi$ – это разность между значениями вектора ψ п о з а д и и в п е р е д и волны.]

В первом приближении по $\Delta\psi$ все образовавшиеся волны линейные, поэтому согласно (2.12), (2.13)

$$\Delta_k\psi = \eta_k r^{(k)}, \tag{5.93}$$

где $r^{(k)}$ – правый собственный вектор матрицы (2.6), соответствующий k-й волне, и η_k – искомые числа, зависящие от $\Delta\psi$ и определяющие амплитуду k-й волны. При этом энтропийная волна является контактным разрывом.

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{7} \eta_k r^{(k)} = \Delta\psi. \tag{5.94}$$

Это векторное уравнение, расписанное в компонентах, представляет собой систему семи линейных алгебраических уравнений для семи неизвестных амплитуд η_k. Знак η_k определяет характер волны, т. е. является ли волна ударной или автомодельной. А именно, поскольку шестая компонента вектора ψ – это плотность и согласно (2.25) шестая компонента собственного вектора $\psi_6^{(F)}$ или $\psi_6^{(S)}$, равная ρc_s^2, положительна, то k-я волна будет ударной, если $\eta_k \epsilon < 0$, и автомодельной, если $\eta_k \epsilon > 0$ (напомним, что $\epsilon = 1$ для волн, движущихся вправо, и $\epsilon = -1$ для волн, движущихся влево).

Пусть, например, на покоящуюся плазму (v = 0) с параметрами B_x, B_z, p, s ($B_y = 0$), расположенную в полупространстве $z > 0$, налетает из области $z < 0$ плазма с такими же значениями параметров B_x, B_z, p, s ($B_y = 0$) и скоростью v_z ($v_x = v_y = 0$). Тогда

$$\psi(z + 0) = (0, 0, 0, B_x, B_z, p, s); \tag{5.95}$$

$$\psi(z - 0) = (0, 0, v_z, B_x, B_z, p, s). \tag{5.96}$$

Поэтому

$$\Delta\psi = (0, 0, -v_z, 0, 0, 0, 0) \tag{5.97}$$

и система уравнений (5.94) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{V_F c_{Ax} c_{Az}}{c_A^2 - V_F^2}\eta_+^{(F)} - \frac{V_F c_{Ax} c_{Az}}{c_A^2 - V_F^2}\eta_-^{(F)} + \\
&+ \frac{V_S c_{Ax} c_{Az}}{c_A^2 - V_S^2}\eta_+^{(S)} - \frac{V_S c_{Ax} c_{Az}}{c_A^2 - V_S^2}\eta_-^{(S)} = 0; \\
&c_{Ax}\eta_+^{(A)} + c_{Ax}\eta_-^{(A)} = 0; \\
&V_F\eta_+^{(F)} - V_F\eta_-^{(F)} + V_S\eta_+^{(S)} - V_S\eta_-^{(S)} = -v_z;
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{B_x V_F^2}{V_F^2 - c_A^2}\,\eta_+^{(F)} + \frac{B_x V_F^2}{V_F^2 - c_A^2}\,\eta_-^{(F)} + \\
&+ \frac{B_x V_S^2}{V_S^2 - c_A^2}\,\eta_+^{(S)} + \frac{B_x V_S^2}{V_S^2 - c_A^2}\,\eta_-^{(S)} = 0; \\
&-B_x \eta_+^{(A)} + B_x \eta_-^{(A)} = 0; \\
&\rho c_s^2 \eta_+^{(F)} + \rho c_s^2 \eta_-^{(F)} + \rho c_s^2 \eta_+^{(S)} + \rho c_s^2 \eta_-^{(S)} = 0; \\
&\eta^{(E)} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (5.98)$$

где $\eta_{\pm}^{(F)}$, $\eta_{\pm}^{(S)}$, $\eta_{\pm}^{(A)}$, $\eta^{(E)}$ – соответственно амплитуды быстрой, медленной, альфвеновской и энтропийной волн; нижними индексами "+" и "–" отмечены соответственно волны, бегущие вправо и влево. Решая эту систему уравнений, находим

$$\eta_\epsilon^{(F)} = -\epsilon \frac{v_z (V_F^2 - c_A^2)}{2V_F (V_F^2 - V_S^2)}; \qquad (5.99)$$

$$\eta_\epsilon^{(S)} = -\epsilon \frac{v_z (c_A^2 - V_S^2)}{2V_S (V_F^2 - V_S^2)}; \qquad (5.100)$$

$$\eta_\epsilon^{(A)} = 0, \quad \eta_\epsilon^{(E)} = 0. \qquad (5.101)$$

Так как $\epsilon\eta_\epsilon^{(F,S)} < 0$, то все четыре магнитозвуковые волны, образующиеся при столкновении двух плазм с одинаковыми указанными выше параметрами, как и следовало ожидать, ударные.

Общее решение задачи о распаде произвольного разрыва дано в [121а] (см. [9]). О работах, посвященных распаду разрыва, образующегося при столкновении ударных МГД-волн, и о расщеплении неэволюционных ударных волн см. [62].

5.11. Разрывы с выделением или поглощением энергии

До сих пор мы полагали, что на поверхности разрыва не происходит выделения или поглощения энергии. Однако такая энергия может выделяться на разрыве вследствие химической реакции (горение), конденсации, рекомбинации или поглощения излучения [61, 121б, 122]. Напротив, при ионизации [123], диссоциации и излучении* энергия поглощается [57]. Чтобы учесть эти процессы, следует добавить в закон сохранения энергии выделяемую (поглощаемую) единицей массы в еди-

---

* Мы имеем в виду разрывы, в которых излучение не компенсируется поглощением в близлежащих к разрыву слоях вещества. В противном случае энергия сохраняется и излучение влияет лишь на форму уравнения состояния.

ницу времени энергию q. Разрывы с выделением энергии ($q > 0$) называют *экзотермическими*, а разрывы с поглощением энергии ($q < 0$) – *эндотермическими*.

Рассмотрим сначала экзотермические и эндотермические разрывы в обычной (немагнитной) гидродинамике. Законы сохранения массы, импульса и энергии на поверхности разрыва имеют вид

$$\Delta \rho v_n = 0; \tag{5.102}$$

$$\Delta (p + \rho v_n^2) = 0; \tag{5.103}$$

$$\Delta \mathbf{v}_t = 0; \tag{5.104}$$

$$\Delta (w + v^2/2) = q, \tag{5.105}$$

где w – тепловая функция единицы массы. (Мы пользуемся системой отсчета, в которой разрыв покоится.) В случае детонации или горения величина q равна химической энергии, выделяемой единицей массы. При этом впереди волны температура настолько мала, что скорость химической реакции практически равна нулю, несмотря на то что состоянию термодинамического (химического) равновесия соответствовала бы смесь, компоненты которой прореагировали друг с другом [33]. При достаточном же повышении температуры реакция протекает практически мгновенно.

Если нагрев газа за счет химической энергии происходит посредством теплопроводности, то ширина *фронта горения* [33]

$$\delta = \sqrt{\chi \tau_c}, \tag{5.106}$$

где χ – коэффициент теплопроводности и τ_c – время, в течение которого ддится химическая реакция. За это время горение успевает распространиться на расстояние порядка δ. Поэтому порядок скорости волны горения составляет

$$U = \delta/\tau_c = \sqrt{\chi/\tau_c}. \tag{5.107}$$

В свою очередь коэффициент теплопроводности

$$\chi = l v_T, \tag{5.108}$$

где l – длина свободного пробега молекулы и $v_T = l/\tau$ – тепловая скорость (τ – время свободного пробега). Представив соотношение (5.108) в виде $\chi = v_T^2 \tau$, преобразуем выражение (5.107):

$$U = v_T \sqrt{\tau/\tau_c}. \tag{5.109}$$

С другой стороны, тепловая скорость v_T по порядку равна скорости звука c_s. Поэтому из (5.109) следует

$$U = c_s \sqrt{\tau/\tau_c}. \tag{5.110}$$

Так как далеко не каждое столкновение молекул сопровождается химической реакцией, то

$$\tau < \tau_c . \tag{5.111}$$

Поэтому из соотношения (5.110) следует неравенство

$$U < c_s , \tag{5.112}$$

т. е. фронт волны горения распространяется с дозвуковой скоростью.

Однако сверхзвуковое горение может быть осуществлено при протекании термоядерных реакций, когда нагрев среды до температуры поджигания происходит не через столкновения, а путем лучистой теплопроводности.

Выделение энергии на поверхности разрыва происходит не только за счет химической реакции. Энергия может выделяться также за счет рекомбинации или конденсации. Такие разрывы образуются при течении газа в сопле, сопровождающемся его охлаждением. Их называют *конденсационными* и *рекомбинационными разрывами.*

Энергия выделяется на разрыве также при поглощении электромагнитного излучения нейтральным газом. Такие разрывы называют *фотоионизационными*, или *ионизационным фронтом*, так как часть поглощаемой энергии излучения расходуется на ионизацию газа (а также на нагрев образующейся при этом плазмы). Фотоионизационные разрывы возникают в межзвездном газе, а также в лабораторных условиях под действием лазерного излучения. В последнем случае фотоионизационный разрыв называют также *разрядом.* При этом выделяемая энергия q, стоящая в правой части закона сохранения энергии (5.105), равна [122]

$$q = S_1 / (\rho_1 U), \tag{5.113}$$

где S_1 – энергия излучения, падающая на единицу поверхности (перпендикулярную направлению распространения излучения) в единицу времени (энергией ионизации пренебрегаем); ρ_1 – плотность среды впереди волны; U – скорость волны относительно среды впереди нее.

Фотоионизационный разрыв называется разрывом *R-типа* [124], если его скорость относительно невозмущенного газа сверхзвуковая, и разрывом *D-типа*, если эта скорость дозвуковая. Разрыв называют *слабым*, если скорость среды относительно поверхности разрыва с обеих сторон дозвуковая либо сверхзвуковая, т. е. если величина $1 - |v_z|/c_s$ не меняет знака при переходе через поверхность разрыва. В противном случае разрыв называют сильным.

Отличительная особенность рассмотренных разрывов – волн горения, конденсации, рекомбинации и фотоионизационных разрывов – состоит в том, что скорость их распространения определяется параметрами невозмущенной среды и интенсивностью потока излучения. В случае конденсационных скачков скорость распространения разрыва определяется из дополнительного условия – "термодинамическое состояние газа перед

скачком должно быть как раз тем, которое соответствует началу быстрой конденсации пара (это условие представляет собой определенное соотношение между давлением и температурой газа)" ([33], с. 606).

Возможен и совсем иной механизм распространения горения, при котором нагрев газа происходит в ударной волне, которая в свою очередь поддерживается за счет химической реакции. Этот механизм называют *детонацией.*

Все рассмотренные выше разрывы – экзотермические. Из эндотермических разрывов следует прежде всего назвать *ионизационную ударную волну*, в которой газ, нагретый ударной волной, расходует энергию на ионизацию молекул. Повышение температуры в ударной волне может привести также к потере энергии на *диссипацию* и *излучение.*

Рассмотрим теперь условия эволюционности экзотермических и эндотермических разрывов. Условия эволюционности таких разрывов, сопровождающихся ударными волнами, такие же, как и условия эволюционности ударной волны, так как число законов сохранения и число независимых переменных те же:

$$c_{s1} < v_1; \quad v_2 < c_{s2}. \tag{5.114}$$

Это – условия эволюционности волн детонации, ионизующих ударных волн и ударных волн, сопровождающихся излучением.

Если же разрыв не сопровождается ударной волной, то скорость его распространения фиксирована, так как она определяется свойствами среды. Поэтому условия эволюционности таких разрывов имеют вид

$$v_1 < c_{s1}; \quad v_2 < c_{s2} \tag{5.115}$$

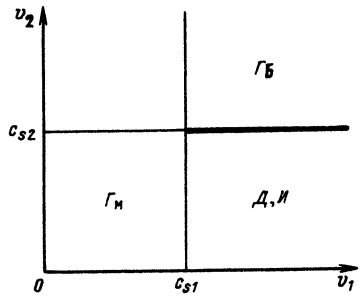
или

$$c_{s1} < v_1; \quad c_{s2} < v_2 \tag{5.116}$$

(рис. 5.8). Эти неравенства – условия эволюционности разрывов, сопровождающихся горением, термоядерными реакциями, конденсацией и фотоионизацией. В случае фотоионизации условия (5.115) соответствуют разрыву D-типа, а условия (5.116) – разрыву R-типа. Видно, что разрывы обоих этих типов могут быть только слабыми.

Заметим, что косую волну детонации иногда называют сверхзвуковым горением, которое согласно неравенству (5.112) невозможно. Такая волна детонации, однако, выглядит как сверхзвуковое горение в гидравлическом приближении, когда все гидродинамические величины усредняют по поперечному сечению трубы, в которой происходит химическая реакция. Косая волна детонации образуется при сжатии газа в угловой точке. При этом (рис. 5.9) $v_{n2} = c_{s2}$, тогда как $v_1 > c_{s1}$ и $v_2 > c_{s2}$.

Перейдем теперь к магнитной гидродинамике [61, 121]. МГД-законы сохранения плотности потока массы и импульса, а также уравнения Максвелла не изменяются при учете выделения (или поглощения) энер-



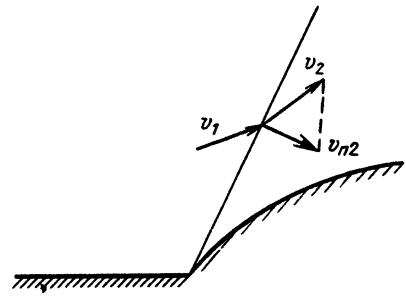


Рис. 5.8. Области эволюционности экзотермических и эндотермических разрывов в обычной гидродинамике:

Д – волна детонации; *И* – ионизующая ударная волна; $Г_М$ – дозвуковое (медленное) горение; $Г_Б$ – сверхзвуковое (быстрое) горение. Жирная линия соответствует режиму Чепмена – Жуге

Рис. 5.9. Косая волна детонации, которая (в обычной гидродинамике) в гидравлическом приближении выглядит как сверхзвуковое горение

гии на поверхности разрыва. Поэтому граничные условия (5.3), (5.4), (5.6), (5.7) справедливы и для экзотермических (или эндотермических) разрывов. Что же касается закона сохранения энергии (5.5), то в нем следует учесть энергию q, выделяемую (или поглощаемую) на поверхности разрыва:

$$\Delta W_n = q. \tag{5.117}$$

Рассмотрим сначала случай, когда впереди разрыва среда ионизована, т. е. электропроводна. При этом в случае волны горения скорость ее распространения не является независимым параметром и волна эволюционна, если общее число МГД-волн малой амплитуды, расходящихся по обе стороны поверхности разрыва, равно семи. Это условие выполняется в четырех случаях:

1) *медленное горение*:

$$v_{n1} < V_{S1}; \quad v_{n2} < V_{S2}; \tag{5.118}$$

2) *доальфвеновское горение*:

$$V_{S1} < v_{n1} < c_{A1}; \quad V_{S2} < v_{n2} < c_{A2}; \tag{5.119}$$

3) *сверхальфвеновское горение*:

$$c_{A1} < v_{n1} < V_{F1}; \quad c_{A2} < v_{n2} < V_{F2}; \tag{5.120}$$

4) *быстрое горение*:

$$V_{F1} < v_{n1}; \quad V_{F2} < v_{n2} \tag{5.121}$$

(рис. 5.10).

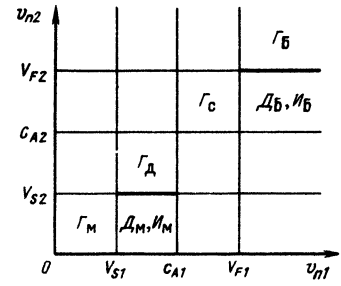


Рис. 5.10. Области эволюционности экзотермических и энедотермических разрывов в магнитной гидродинамике:

$Г_М$ – медленное горение; $Г_Д$ – доальфвеновское горение; $Г_С$ – сверхальфвеновское горение; $Г_Б$ – быстрое горение; $Д_М$ – медленная детонация; $Д_Б$ – быстрая детонация; $И_М$ – медленная ионизация; $И_Б$ – быстрая ионизация; жирные линии соответствуют режиму Чепмена–Жуге

Так как скорости распространения детонационных и ионизационных волн зависят от их амплитуды, условия эволюционности этих разрывов такие же, как и условия эволюционности ударных МГД-волн (при $q = 0$). Двум скоростям распространения малых возмущений – скоростям быстрой и медленной магнитозвуковых волн – соответствуют две детонационные волны: *быстрая*, для которой

$$V_{F1} < v_{n1}; \quad V_{A2} < v_{n2} \leqslant V_{F2}, \tag{5.122}$$

и *медленная*, для которой

$$V_{S1} < v_{n1} < V_{A1}; \quad v_{n2} \leqslant V_{S2}. \tag{5.123}$$

Эти неравенства определяют также две ионизационные волны – быструю и медленную (см. рис. 5.10).

Третьей скорости распространения малых возмущений – альфвеновской – не может соответствовать ни детонационная, ни ионизирующая ударная волна, так как на альфвеновском разрыве среда не нагревается.

Если магнитное поле параллельно направлению распространения волны, то ионизирующую ударную волну, волну детонации или горения называют *параллельной*. Если же магнитное поле перпендикулярно направлению распространения волны, то волну называют *перпендикулярной*. В общем случае, когда вектор магнитного поля составляет острый угол с направлением распространения волны, волну называют косой.

В случае перпендикулярной ионизирующей волны или волны детонации $B_n = 0$, поэтому скорости альфвеновской и медленной магнитозвуковой волн также обращаются в нуль. При этом остается только одна быстрая волна (детонации или ионизирующая), для которой условия эволюционности принимает вид

$$\sqrt{c_{s1}^2 + c_{A1}^2} < v_{n1}; \quad v_{n2} \leqslant \sqrt{c_{s2}^2 + c_{A2}^2}. \tag{5.124}$$

Как и в обычной гидродинамике, в магнитной гидродинамике особую роль играет детонация в *режиме Чепмена–Жуге*, при которой амплитуда ударной волны минимальна. Этот режим осуществляется, когда ударная волна возникает только за счет энергии, выделяющейся при химической реакции.

Таблица 5.2. **Направление изменения МГД-величин в экзотермических и энедотермических разрывах различных типов (ось z направлена по нормали к поверхности разрыва, волна движется в положительном направлении оси z, $B_z > 0$, $B_x > 0$)**

Горение	Детонация или ионизация	Знаки		
		ΔB_x	Δv_z	Δv_x
Быстрое	Быстрая	+	–	+
Сверхальфвеновское	–	–	+	–
Доальфвеновское	Медленная	–	+	+
Медленное	–	+	–	–

В ударной волне происходит переход кинетической энергии газа в тепловую энергию, поэтому минимальной амплитуде ударной волны соответствует максимальное значение скорости среды v_{n2} позади фронта волны. Иными словами, режиму Чепмена–Жуге соответствует знак равенства в условиях эволюционности (5.122), (5.123), т. е.

$$V_{F1} < v_{n1}; \quad v_{n2} = V_{F2} \tag{5.125}$$

для быстрой волны и

$$V_{S1} < v_{n1} < V_{A1}, \quad v_{n2} = V_{S2} \tag{5.126}$$

для медленной детонационной волны.

Если же

$$v_{n2} < V_{F2} \text{ или } v_{n2} < V_{S2}, \tag{5.127}$$

то детонацию называют *пересжатой.* Такой режим детонации осуществляется, если ударная волна поддерживается не только энергией химической реакции, но и каким-то внешним механизмом, например вдвигаемым поршнем.

Различие между разными режимами горения, детонации и ионизации заключается в разном направлении изменения МГД-величин – скорости и магнитного поля. Направив ось z вдоль нормали к поверхности разрыва так, чтобы волна двигалась в положительном направлении оси z, выбрав плоскость xz так, чтобы

$$B_x > 0; \quad B_y = 0; \quad B_z > 0 \tag{5.128}$$

и повторив выкладки, произведенные в § 5.5, найдем знаки скачков ΔB_x, Δv_x и Δv_z (табл. 5.2). Если неравенства (5.128) нарушены или волна движется в противоположном направлении, то величины ΔB_x, Δv_x и Δv_z в табл. 5.2 следует заменить на $(\operatorname{sgn} B_x)\Delta B_x$, $-\operatorname{sgn}(B_x B_z)\Delta v_x$ и $-\Delta v_x$.

5.12. Структура разрывов

Изучая разрывы в магнитной гидродинамике, мы до сих пор предполагали, что МГД-среда – идеальная. При учете же диссоциации (вязкости, теплопроводности и выделения джоулева тепла) никаких разрывов, в принципе, не может быть и все течения непрерывны. Однако при малой диссипации происходит очень быстрый (в узком слое) непрерывный переход от одного состояния к другому, который приближенно можно рассматривать как разрыв.

Коэффициенты диссипации входят в уравнения неидеальной магнитной гидродинамики множителями при производных МГД-величин. В ударной волне эти производные обращаются в бесконечность. Поэтому диссипативные члены не малы, а представляют собой неопределенность типа $0\cdot\infty$, т. е. ими нельзя пренебрегать. При учете малой диссипации сильные разрывы размываются в узкие переходные зоны, в которых МГД-величины изменяются быстро, но непрерывно. Изменение параметров среды в переходной зоне называют *структурой ударной волны.*

Для описания переходной зоны, т. е. структуры разрыва, нужно в уравнения идеальной магнитной гидродинамики (1.64) включить диссипативные члены. Полагая, что диссипативные коэффициенты изотропны, и учитывая только сдвиговую вязкость η, электропроводность σ и теплопроводность κ, получаем из (1.151), (1.152), (1.67):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho v_i v_j + p\delta_{ij} - \frac{1}{4\pi}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}B^2\delta_{ij}\right) - \right.$$

$$\left. - \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\right] = 0; \qquad (5.129)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[B_i v_j - B_j v_i + \nu_m\left(\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - \frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)\right] = 0; \qquad (5.130)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{v^2}{2} + \rho\epsilon_m + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho v_i\left(\epsilon_m + \frac{v^2}{2}\right) + pv_i - \right.$$

$$- \eta v_j\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) + \frac{v_i B^2 - B_i v_j B_j}{4\pi} +$$

$$\left. + \frac{\nu_m}{4\pi}B_j\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right) - \kappa\frac{\partial T}{\partial x_i}\right] = 0. \qquad (5.131)$$

Члены, пропорциональные η, ν_m и κ и описывающие диссипацию, содержат производные МГД-величин по координатам более высокого (второго) порядка, чем члены, описывающие идеальную среду. При отбрасывании (пренебрежении) диссипативных членов понижается порядок дифференциальных уравнений, что приводит к понижению

числа постоянных интегрирования, а это в свою очередь делает невозможным удовлетворение граничных условий. Поэтому при решении системы уравнений идеальной магнитной гидродинамики с неизбежностью возникают разрывные решения.

Поясним сказанное на примере. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\epsilon d^2\psi/dz^2 + \psi\, d\psi/dz = 0, \quad \epsilon > 0, \tag{5.132}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\psi(-\infty) = -1, \quad \psi(+\infty) = 1. \tag{5.133}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\psi = \mathrm{th}\,(z/2\epsilon). \tag{5.134}$$

С другой стороны, при малых ϵ представляется естественным отбросить в уравнении (5.132) первый член и решать укороченное уравнение

$$\psi\, d\psi/dz = 0, \quad \epsilon \to 0. \tag{5.135}$$

Его решение имеет вид

$$\psi = C, \tag{5.136}$$

где C – константа. Такое решение не может удовлетворить двум граничным условиям (5.133). Однако оно удовлетворяет уравнению (5.132) при $|z| \gg \epsilon$. В самом деле, переходя к пределу $\epsilon \to 0$ в точном решении (5.134), получаем

$$\psi = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0; \\ -1, & \text{если } z < 0. \end{cases} \tag{5.137}$$

Это решение в области $z > 0$ соответствует приближенному решению (5.136) при $C = 1$, а в области $z < 0$ – приближенному решению при $C = -1$.

Таким образом, при $\epsilon \to 0$ непрерывное решение (5.134) стремится к разрывному решению (5.137).

Аналогичная ситуация имеет место и в магнитной (так же, как и в обычной) гидродинамике, когда переходим от уравнений реальной среды, учитывающих диссипацию энергии, к уравнениям идеальной среды. При этом из непрерывных решений дифференциальных уравнений реальной среды возникают разрывные решения дифференциальных уравнений идеальной среды. Существенно здесь то, что разрывные решения правильно описывают состояние среды везде, кроме узкого слоя вблизи поверхности разрыва.

Функция $\psi(z)$, описывающая переход от состояния $\psi(-\infty)$ по одну сторону разрыва к состоянию $\psi(+\infty)$ по другую его сторону, является *структурой разрыва.*

Видно, что для нахождения структуры разрыва необходим учет диссипации.

Структура МГД-разрыва определяется системой дифференциальных уравнений неидеальной магнитной гидродинамики (1.151)–(1.156). Однако чтобы не затемнять основную идею, рассмотрим математическую модель, основанную на использовании одного дифференциального уравнения [63]

$$\partial\psi/\partial t + Z(\psi)\,\partial\psi/\partial z = D\partial^2\psi/\partial z^2 \tag{5.138}$$

для одной МГД-величины ψ.

Скалярная величина $Z(\psi)$ совпадает с фазовой скоростью распространения малых возмущений, $Z(\psi) = V(\psi)$, а величина D определяет диссипацию энергии ($D > 0$). (Заметим, что в § 2.2 величина $Z(\psi)$ была оператором, а ее собственные значения совпадали с фазовой скоростью распространения малых возмущений.)

Рассмотрим ударную волну, движущуюся вдоль оси z со скоростью $U > 0$ относительно среды впереди нее.

Вследствие диссипации амплитуда ударной волны, определяемая скачком одной из МГД-величин, убывает с течением времени. Поэтому задача о структуре ударной волны нестационарна, т. е. все МГД-величины зависят не только от пространственной координаты z, но и от времени t. Однако обычно упрощают задачу, полагая, что разрыв создается поршнем, движущимся с постоянной скоростью. При этом сила, поддерживающая скорость поршня постоянной, производит работу, компенсирующую диссипацию энергии. Поэтому амплитуду разрыва полагают постоянной, а профиль структуры – не зависящим от времени. Иными словами, рассматривают *установившуюся ударную волну*. Это означает, что величина ψ зависит от z и t не порознь, а через комбинацию

$$\xi = Ut - z. \tag{5.139}$$

Поэтому

$$\partial\psi/\partial t = Ud\psi/d\xi; \quad \partial\psi/\partial z = -d\psi/d\xi. \tag{5.140}$$

(Области пространства, расположенной впереди ударной волны, соответствует $\xi = -\infty$, а области позади ударной волны соответствует $\xi = +\infty$.) Подставляя соотношения (5.140) в уравнение (5.138), получаем

$$Ud\psi/d\xi - V(\psi)\,d\psi/d\xi = Dd^2\psi/d\xi^2. \tag{5.141}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$U\eta - \int_0^{\eta} V(\eta')\,d\eta' = Dd\eta/d\xi, \tag{5.142}$$

где $\eta = \psi - \psi_1$ и ψ_1 – значение величины ψ впереди ударной волны (т. е. в невозмущенной области, в которой $\eta = 0$, $d\eta/d\xi = 0$).

Будем рассматривать ударные волны малой амплитуды; тогда функцию $V(\eta)$ можно разложить в ряд по степени η и ограничиться первыми двумя членами разложения:

$$V(\eta) = V(0) + \eta (dV/d\eta)_0 . \tag{5.143}$$

Подставляя это разложение в уравнение (5.142) и полагая $V(0) > 0$, $(dV/d\eta)_0 > 0$, $\eta > 0$, получаем

$$\eta = (1/2)\eta_0 [1 + \mathrm{th}(\xi/L)], \tag{5.144}$$

где

$$L = \frac{2D}{U - V(0)}; \quad \eta_0 = \frac{2[U - V(0)]}{(dV/d\eta)_0} . \tag{5.145}$$

Из приведенных формул видно, что $U > V(0)$. Это означает, что ударная волна движется относительно невозмущенной среды со скоростью, превышающей скорость распространения малых возмущений в ней. Формула (5.144) показывает также, что профиль ударной волны малой амплитуды имеет вид гиперболической тангенсоиды. Величина L, определяемая выражением (5.145), является, очевидно, шириной ударной волны.

Для выяснения физического смысла первой формулы (5.145) заметим, что уравнение (5.138) моделирует уравнение движения, причем коэффициент D играет роль кинематической вязкости $\nu = \eta/\rho$, $D = \nu$. Пользуясь соотношением (1.172) и приравнивая по порядку $V(0)$ к скорости звука c_s, получаем [125]

$$L = l/(M - 1), \tag{5.146}$$

где l – длина свободного пробега и M – число Маха:

$$M = U/V(0). \tag{5.147}$$

Число Маха может служить мерой амплитуды ударной волны, изменяясь от единицы для волн бесконечно малой амплитуды до бесконечности для волн бесконечно большой амплитуды.

Из (5.146) следует, что при стремлении амплитуды ударной волны к нулю ($M \to 1$) ее ширина L неограниченно возрастает. При увеличении же амплитуды ударной волны ее ширина убывает, что приводит, в конце концов, к неприменимости одножидкостной гидродинамики. При этом возникает необходимость рассматривать движение электронов и ионов раздельно. При дальнейшем увеличении амплитуды ударной волны, когда ее ширина L становится порядка длины свободного пробега, неприменимо вообще гидродинамическое описание (даже многожидкостное). При этом следует пользоваться кинетической теорией, а гидродинамика может использоваться только для качественного описания структуры ударной волны.

Условие применимости гидродинамического описания, как отмечалось в § 1.1, состоит в том, что число Кнудсена (1.1) должно быть малым, т. е. $\mathrm{Kn} \ll 1$. Пользуясь соотношениями (1.172), (5.147) и полагая $V(0) \sim c_s$, находим, что для применимости гидродинамического описания необходимо, чтобы число Маха было значительно меньше числа Рейнольдса:

$$M \ll \mathrm{Re}. \tag{5.148}$$

Гиперболический тангенс в (5.144) является универсальной структурой ударной волны, если ее амплитуда бесконечно мала. При увеличении амплитуды ударной волны следует удерживать отброшенные члены в разложении (5.143). Это приводит к тому, что профиль ударной волны отклоняется от гиперболического тангенса и может даже стать немонотонным, в частности может иметь осцилляторную структуру.

В плазме возможны ударные волны, ширина которых L значительно меньше длины свободного пробега l. Например, при обтекании Земли солнечным ветром образуется ударная волна, ширина которой порядка 100 км, тогда как длина свободного пробега в межпланетной плазме равна 100 000 000 км. В этом случае диссипация кинетической энергии происходит не в результате парных столкновений, а вследствие коллективных эффектов. Такую ударную волну называют *бесстолкновительной*. Проблема бесстолкновительных ударных волн была поставлена и получила наиболее последовательное развитие в работах Р. З. Сагдеева [125].

Аномально большая диссипация может быть также обусловлена МГД-турбулентностью (см. § 7.2).

5.13. Структура перпендикулярной ударной волны

Рассмотрим теперь более детально структуру ударной МГД-волны. Для простоты ограничимся случаем перпендикулярной ударной волны, когда магнитное поле перпендикулярно направлению распространения волны, которое выберем в качестве оси z ($B_z = 0$). Кроме того, для простоты предположим, что теплопроводность среды κ равна нулю. С учетом вязкости и электрического сопротивления законы сохранения массы, импульса и энергии и уравнения Максвелла после интегрирования по z принимают вид

$$\rho v = j_\rho; \tag{5.149}$$

$$j_\rho v + p + B^2/(8\pi) - \mu\, dv/dz = j_v; \tag{5.150}$$

$$j_\rho\left(\frac{v^2}{2} + \epsilon_m\right) + pv + \frac{vB^2}{(4\pi)} - \mu v\,\frac{dv}{dz} - \frac{\nu_m}{4\pi} B\,\frac{dB}{dz} = j_\epsilon; \tag{5.151}$$

$$Bv - \nu_m\, dB/dz = cE, \tag{5.152}$$

где j_ρ, j_v, j_ϵ и E – постоянные интегрирования, имеющие смысл плот-

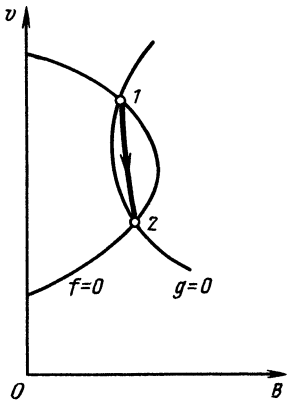


Рис. 5.11. Структура перпендикулярной ударной волны:

точка *1* – состояние впереди волны; *2* – состояние позади волны. Интегральная кривая, описывающая структуру ударной волны, изображена жирной линией со стрелкой. Стрелка указывает направление перемещения точки (B, v) при возрастании координаты z от $z = -\infty$ впереди волны до $z = +\infty$ позади волны

ности потока массы, импульса, энергии и электрического поля; $\epsilon = (p/\rho)/(\gamma-1)$ – внутренняя энергия единицы массы; $\mu = (4/3)\eta + \zeta$ (индексы z и x у величин v_z и B_x опускаем).

Выражая p и dB/dz из уравнений (5.150), (5.151), (5.152) и подставляя полученные соотношения в (5.151), (5.152), получаем систему дифференциальных уравнений, описывающих структуру ударной волны:

$$\mu dv/dz = f(v,B); \tag{5.153}$$

$$\nu_m\, dB/dz = g(v,B), \tag{5.154}$$

где

$$f(v,B) = \frac{\gamma+1}{2} j_\rho v - \gamma\left(j_v - \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{\gamma-1}{v}\left(j_\epsilon - \frac{cBE}{4\pi}\right); \tag{5.155}$$

$$g(v,B) = Bv - cE. \tag{5.156}$$

Линии $f(v, B) = 0$ и $g(v, B) = 0$ на плоскости (B, v) изображены на рис. 5.11. В точках *1* и *2* пересечения этих линий производные dv/dz и dB/dz одновременно обращаются в нуль. Эти точки (B_1, v_1) и (B_2, v_2) соответствуют состояниям впереди $(z \to -\infty)$ и позади $(z \to +\infty)$ ударной волны. Так как ударная волна – это волна сжатия $(\rho_2 > \rho_1)$, в силу закона сохранения массы (5.149) $v_1 > v_2$. В направлении, перпендикулярном магнитному полю, скорость альфвеновской волны равна нулю. Поэтому перпендикулярная ударная волна быстрая и, как было показано в § 5.5, в ней магнитное поле возрастает, т. е. $B_2 > B_1$ (см. рис. 5.11).

В точках *1* и *2* правые части уравнений (5.153), (5.154) обращаются в нуль. Иными словами, состояниям впереди и позади ударной волны соответствуют особые точки системы дифференциальных уравнений (5.153), (5.154). Структура перпендикулярной ударной волны

$$v = v(z); \quad B = B(z) \tag{5.157}$$

есть решение системы уравнений (5.153), (5.154), выходящее из начальной точки *1* и приходящее в конечную точку *2* (см. рис. 5.11).

Исследуем теперь поведение интегральных кривых вблизи особых точек *1* и *2*.

Входящие в выражения (5.155), (5.156) плотности потоков массы, импульса и энергии j_ρ, j_v, j_ϵ выразим через МГД-величины v_i, B_i впереди ударной волны ($i = 1$) или позади волны ($i = 2$). Замечая, что при $z \to \pm\infty$ производные dv/dz и dB/dz обращаются в нуль, находим из законов сохранения (5.149), (5.150), (5.151)

$$\left.\begin{aligned} j_\rho &= \rho_i v_i; \\ j_v &= j_\rho v_i + p_i + B_i^2/(8\pi); \\ j_\epsilon &= j_\rho \left(\frac{v_i^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_i}{\rho_i} \right) + \frac{v_i B_i^2}{4\pi}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{5.158}$$

Представим теперь величины B и v в виде

$$B = B_i + \tilde{B}_i; \quad v = v_i + \tilde{v}_i; \quad |\tilde{B}_i| \ll |B_i|; \quad |\tilde{v}_i| \ll |v_i|. \tag{5.159}$$

Подставив выражения (5.158), (5.159) в формулы (5.155), (5.156) и разложив в ряд по степеням $\tilde{B}_i$, $\tilde{v}_i$, получим, ограничиваясь линейными членами,

$$\left.\begin{aligned} \mu \frac{d\tilde{v}_i}{dz} &= \frac{\rho_i}{v_i}(v_i^2 - c_{si}^2)\tilde{v}_i + \frac{B_i}{4\pi}\tilde{B}_i; \\ \nu_m \frac{d\tilde{B}_i}{dz} &= B_i \tilde{v}_i + v_i \tilde{B}_i. \end{aligned}\right\} \tag{5.160}$$

Особая точка $\tilde{v}_i = 0$, $\tilde{B}_i = 0$ системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} d\tilde{v}_i/dz &= a_{11}\tilde{v}_i + a_{12}\tilde{B}_i; \\ dB_i/dz &= a_{21}\tilde{v}_i + a_{22}\tilde{B}_i, \end{aligned}\right\} \tag{5.161}$$

как известно ([127], с. 81), является седлом, если корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{5.162}$$

вещественны и противоположного знака, т. е. если выполняются условия

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} < 0. \tag{5.163}$$

При этом в особую точку $\tilde{v}_i = 0, \tilde{B}_i = 0$ приходят только две интегральные

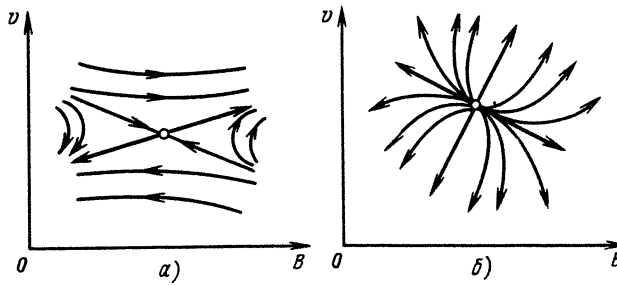


Рис. 5.12. Расположение интегральных кривых вблизи особой точки: *а* – седловая точка; *б* – неустойчивый узел

кривые в двух взаимно противоположных направлениях (рис. 5.12,*а*). Аналогично из особой точки выходят только две интегральные кривые. Такую исключительную интегральную кривую, которая приходит в седловую точку или выходит из нее, называют *сепаратрисой.*

Если же корни характеристического уравнения (5.162) вещественны и одного знака, т. е. если

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0, \tag{5.164}$$

то особая точка является узлом. При этом в случае

$$a_{11} + a_{22} > 0 \tag{5.165}$$

все интегральные кривые выходят из особой точки (неустойчивый узел, см. рис. 5.12,*б*).

В перпендикулярной ударной волне согласно уравнениям (5.160)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{\rho_i (v_i^2 - V_{Fi}^2)}{\mu \nu_m}, \tag{5.166}$$

где V_{Fi} – скорость распространения быстрой магнитозвуковой волны в направлении, перпендикулярном магнитному полю, равная $V_{Fi} = \sqrt{c_{si}^2 + c_{Ai}^2}$; $c_{si}^2 = \gamma p_i/\rho_i$; $c_{Ai}^2 = B_i^2/(4\pi\rho_i)$.

Кроме того, второе неравенство (5.164) всегда выполняется. Что же касается величины $a_{11} + a_{22}$, то она равна

$$a_{11} + a_{22} = \rho_i (v_i^2 - c_{si}^2)/\mu\nu_i + \nu_i/\nu_m. \tag{5.167}$$

Из выражений (5.166), (5.167) следует, что в случае перпендикулярной ударной МГД-волны особые точки системы дифференциальных уравнений (5.161) могут быть только двух типов: либо седловая точка,

либо неустойчивый узел (полагаем $\nu_i > 0$). Особые точки иных типов [127] – фокус или устойчивый узел – невозможны.

Рассмотрим сначала случай, когда ударная волна движется относительно среды впереди нее со сверхмагнитозвуковой скоростью, а относительно среды позади нее – с домагнитозвуковой скоростью:

$$V_{F1} < \nu_1; \quad \nu_2 < V_{F2}. \tag{5.168}$$

Тогда точка *2* является седлом, а точка *1* – неустойчивым узлом. В точку *2* (рис. 5.11) сверху, т. е. со стороны бóльших значений ν, входит единственная интегральная кривая (сепаратриса). Двигаясь вдоль нее в противоположном направлении (т. е. в направлении уменьшения z*), мы обязательно придем в точку *1*, так как из нее выходят все интегральные кривые. Эта интегральная кривая и описывает структуру ударной волны. Неравенства (5.168) совпадают с условиями эволюционности, поэтому задача о нахождении структуры ударной волны всегда имеет решение и притом единственное.

Перейдем теперь к структуре неэволюционной ударной волны.

Если скорость волны относительно среды позади нее сверхмагнитозвуковая, т. е.

$$V_{F2} < \nu_2, \tag{5.169}$$

то особая точка *2* является неустойчивым узлом. В эту точку не приходит ни одна интегральная кривая, т. е. задача о структуре ударной волны в этом случае не имеет решения.

Если же скорость ударной волны домагнитозвуковая с обеих сторон волны:

$$\nu_1 < V_{F1}; \quad \nu_2 < V_{F2}, \tag{5.170}$$

то обе особые точки *1* и *2* являются седловыми. При этом одна из двух интегральных кривых, выходящих из точки *1*, может совпасть с одной из двух интегральных кривых, приходящих в точку *2*, только при некоторых исключительных значениях параметров ρ_1, ν_1, p_1, B_1 впереди ударной волны. Бесконечно малое изменение состояния впереди волны разрушает ее структуру. Иными словами, сепаратриса в общем случае не может идти из седловой точки в седловую.

Таким образом, задача о структуре неэволюционной перпендикулярной ($B_z = 0$) ударной волны не имеет решения.

Если отказаться от предположения о равенстве нулю продольного магнитного поля B_z, то возможна ситуация, когда при нарушении условий эволюционности граничных условий будет меньше, чем уравнений [128]. В этом случае задача о структуре ударной волны имеет бесконечное множество решений, что свидетельствует о неустойчивости волны относительно расщепления.

---

* Ось z направлена из области *1* (перед фронтом волны) в область *2*.

Впервые задача о структуре ударной волны при произвольной ориентации магнитного поля и произвольных значениях диссипативных коэффициентов была решена в [128а–128в]. Подробнее об этом см. [9, 128] и цитируемые там работы.

Модель стационарной ударной волны, структура которой не зависит от времени, неприменима к альфвеновским и тангенциальным разрывам. С течением времени в результате диссипации ширина этих разрывов увеличивается, а амплитуда уменьшается ([1], с. 339).

5.14. Изомагнитный скачок

Интересное явление возникает в предельном случае, когда обычная вязкость стремится к нулю, в то время как магнитная вязкость остается постоянной:

$$\mu \to 0; \quad \nu_m \neq 0. \tag{5.171}$$

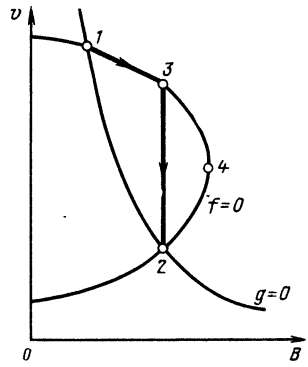
В пределе $\mu \to 0$ линия, соответствующая структуре ударной волны на рис. 5.11, стремится согласно (5.153) к линии $f = 0$ и в предельном случае $\mu = 0$ совпадает с ней.

Как показано ниже, если точка *2* лежит на участке линии $f = 0$, где $dv/dB > 0$ (рис. 5.13), то при $\mu = 0$ непрерывный переход из точки *1* в точку *2* невозможен. В самом деле, при движении по кривой $f = 0$ производная dB/dz должна сохранять постоянный знак, так как в противном случае точка, где $dB/dz = 0$ (точка *4* на рис. 5.13), согласно уравнению (5.154) должна лежать на кривой $g = 0$. Но пересечение кривой $g(v, B) = 0$ с кривой $f(v, B) = 0$ в точке, где $dB/dz = 0$, может произойти только при каких-то исключительных значениях параметров ρ_1, v_1, p_1, B_1 впереди волны, и при любом бесконечно малом возмущении этих величин кривая $g(v, B)$ уже не будет проходить через точку *4*. Поэтому при движении из точки *1* в точку *2* нельзя проходить через точку *4*.

Так как вдоль интегральной кривой производная dB/dz сохраняет постоянный знак, то согласно уравнению (5.154) интегральная кривая не может пересечь линию $g(v, B) = 0$. Поэтому линия, соответствующая структуре волны, вначале совпадает с дугой *1–3* линии $f(v, B) = 0$, а затем с вертикальным отрезком *3–2*. На рис. 5.13 она изображена жирной линией со стрелками.

В точке z_0, соответствующей точке *3* на рис. 5.13, скорость изменяется скачком от значения v_3 до окончательного значения v_2 за разрывом, тогда как магнитное поле не изменяется. Такой скачок называют *изомагнитным* [129]. При малой, но отличной от нуля вязкости изомагнитный разрыв размывается в узкий переходный слой, в котором очень быстро изменяется скорость среды, тогда как магнитное поле изменяется очень мало.

Рис. 5.13. Изомагнитный скачок



Как видно из рис. 5.13, условие возникновения изомагнитного скачка состоит в том, что ударная волна должна иметь достаточно большую амплитуду.

В рассмотренном случае нулевой теплопроводности и поперечного магнитного поля изомагнитный скачок может возникнуть только в конце структуры ударной волны. В общем же случае изомагнитный скачок бывает как в начале, так и внутри структуры волны.

Впервые изомагнитный скачок фигурировал и анализировался в [9, 130, 130а].

Общее исследование структуры ударных волн в случаях, когда некоторые диссипативные коэффициенты обращаются в нуль, выполнено в [130, 131].

5.15. Ионизующая волна в непроводящем газе при наличии магнитного поля

Своеобразная ситуация возникает в случае, когда ионизующая ударная волна движется в среде при наличии магнитного поля, а электропроводность газа впереди волны равна нулю [132]:

$$\sigma_1 = 0. \tag{5.172}$$

При достаточно большой амплитуде волны газ впереди волны в результате фотоионизации становится проводящим. При этом задача сводится к магнитогидродинамическим ударным волнам, рассмотренным выше.

Если же подобной предварительной ионизации среды нет, то непроводящий газ перед фронтом ударной волны не взаимодействует с магнитным полем, в то время как возникновение электропроводности приводит к связыванию гидродинамических и электромагнитных волн в единые МГД-волны. Напряженность магнитного поля позади ударной волны зависит от того, насколько быстро возрастает электропроводность газа. Поэтому значения МГД-величин (температуры, плотности, манитного поля) позади ударной волны не определяются однозначно законами сохранения, а зависят от структуры волны.

Математически сказанное выше выражается в том, что граничное условие

$$\Delta E_t = 0 \tag{5.173}$$

не связывает между собой МГД-величины s, p, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ по обе стороны

поверхности разрыва, так как закон Ома

$$\mathbf{E} = -(1/c)\mathbf{v}\times\mathbf{B} + (1/\sigma)\mathbf{j} \tag{5.174}$$

имеет место только при $\sigma \neq 0$, т. е. позади волны. Впереди же волны, где газ непроводящий ($\sigma_1 = 0$), электрическое поле связано только с магнитным полем $\mathbf{B}$ и не зависит от гидродинамических переменных s, p, $\mathbf{v}$. Поэтому граничное условие (5.173) в этом случае не накладывает никаких ограничений на МГД-переменные.

Вследствие этого ионизующая волна в непроводящем газе в отличие от ионизующей волны в плазме, вообще говоря, не является плоскополяризованной, т. е. магнитное поле $\mathbf{B}_1$ впереди волны, поле $\mathbf{B}_2$ позади волны и нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности разрыва не обязательно лежат в одной плоскости. Такую ионизующую волну называют *спиральной* (skew). Плоскополяризованную ионизующую волну называют *косой* (oblique).

Рассмотрим этот вопрос более подробно, для чего исследуем структуру ионизующей волны.

Позади волны можно так ориентировать оси xy и двигать систему отсчета с такой скоростью вдоль оси y, чтобы

$$B_y(+\infty) = 0; \quad v_y(+\infty) = 0. \tag{5.175}$$

В области плазмы (позади волны) справедлив закон Ома (5.174). С учетом уравнения Максвелла (без тока смещения)

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

x-я компонента закона Ома имеет вид

$$E_x + \frac{1}{c}(v_y B_z - v_z B_y) = -\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{dB_y}{dz} \tag{5.176}$$

(в предположении, что все МГД-величины зависят только от z).

Далее, из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -(1/c)\,\partial\mathbf{B}/\partial t$ с учетом $\partial/\partial t = 0$ (рассматривается стационарная структура волны) следует

$$E_x = \text{const}. \tag{5.177}$$

Для определения этой константы положим в уравнении (5.176) $z \to +\infty$. Пользуясь соотношением (5.175) и замечая, что при $z \to +\infty$ величина B_y стремится к постоянному значению, т. е. $dB_y/dz \to 0$, получаем

$$E_x(+\infty) = 0.$$

Поэтому равенство (5.177) упрощается:

$$E_x(z) = 0, \quad -\infty < z < \infty. \tag{5.178}$$

При этом уравнение (5.176) принимает вид

$$v_y B_z - v_z B_y + \nu_m dB_y/dz = 0. \tag{5.179}$$

Выразим теперь v_y через B_y. Из закона сохранения импульса (5.10) и условий на бесконечности (5.175) следует

$$v_y = B_y B_z / (4\pi\rho v_z). \tag{5.180}$$

Подставляя это выражение в (5.179), находим

$$\left(\frac{B_z^2}{4\pi\rho v_z} - v_z \right) B_y + \nu_m \frac{dB_y}{dz} = 0. \tag{5.181}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$B_y(z) = B_y(z_0) \exp \left\{ - \frac{1}{\nu_m} \int_{z_0}^{z} \left[\frac{B_z^2}{4\pi\rho(\xi) v_z(\xi)} - v_z(\xi) \right] d\xi \right\}, \tag{5.182}$$

где z_0 произвольно. Если подынтегральное выражение отрицательно:

$$B_z^2 / (4\pi\rho v_z) < v_z, \tag{5.183}$$

то первое граничное условие (5.175) выполняется только в случае $B_y(z_0) = 0$, т. е. только для косой волны. Поэтому спиральная волна возможна лишь при доальфвеновском течении позади волны [133, 133а]:

$$v_{z2} < V_{A2}. \tag{5.184}$$

Если же скорость среды позади ионизующей волны сверхальфвеновская:

$$V_{A2} < v_{z2}, \tag{5.185}$$

то

$$B_y(+\infty) = 0,$$

т. е. ионизующая волна плоскополяризована.

В произвольной системе координат, в которой первое равенство (5.175) не имеет места, условие плоской поляризации можно записать в виде

$$\Delta(\mathbf{B}_t / B_t) = 0. \tag{5.186}$$

Это равенство является дополнительным граничным условием, справедливым при выполнении неравенства (5.185) и несправедливым при выполнении противоположного неравенства (5.184). Замечая, что от того, какое неравенство – (5.184) или (5.185) – выполняется, зависит число альфвеновских волн, расходящихся от разрыва в области позади волны, мы видим, что число граничных условий определяется числом расходящихся волн.

Перейдем теперь к исследованию изменения остальных МГД-переменных в ионизующей ударной волне.

Предположим [126], что электропроводность является функцией только температуры T, причем

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(T) = 0 \text{ при } T < T^*; \\ &\sigma(T) > 0 \text{ при } T > T^*, \end{aligned}\right\} \tag{5.187}$$

где T^* – температура ионизации. Это приближение называют *T^*-моделью*. Однако для простоты рассмотрим не общий случай произвольной ориентации магнитного поля, а предположим, что ионизующая ударная волна перпендикулярна, т. е.

$$B_z = 0. \tag{5.188}$$

Так как скорость альфвеновской волны в направлении, перпендикулярном полю, равна нулю, то скорость среды позади волны сверхальфвеновская. Поэтому, как мы только что показали, волна плоскополяризована.

Обозначив z^* координату z, при которой достигается температура T^*, перепишем соотношения (5.187) в виде

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(z) = 0 \text{ при } z < z^*; \\ &\sigma(z) > 0 \text{ при } z > z^*. \end{aligned}\right\} \tag{5.189}$$

Иными словами, среда не проводит электричества (т. е. является нейтральным газом) при $z < z^*$ и проводит электричество (т. е. является плазмой) при $z > z^*$.

В области плазмы ($z > z^*$, $T > T^*$) структура ионизующей ударной волны описывается уравнениями (5.150)–(5.152). Для определения критической температуры T^* исключим из этих уравнений производные dv/dz и dB/dz:

$$j\rho \frac{v^2}{2} + \left(\frac{B^2}{8\pi} - j_v\right) v + \left(j_\epsilon - \frac{cEB}{4\pi}\right) = \frac{j\rho}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}. \tag{5.190}$$

Выразим давление и плотность, стоящие в правой части этого равенства, через температуру. Учтем, что $p = p_e + p_i$. Для идеального газа $p_\alpha = n_\alpha T$ ($\alpha = e, i$; температура здесь в энергетических единицах).

Учитывая условие квазинейтральности $n_e = n_i$ и малость массы электрона в сравнении с массой иона $m_e \ll m_i$, получаем

$$p/\rho = 2T/m_i. \tag{5.191}$$

Подставляя это выражение в (5.190), получаем уравнение линии $T = T^*$ на плоскости (B, v) [126]:

$$j\rho \frac{v^2}{2} + \left(\frac{B^2}{8\pi} - j_v\right) v + \left(j_\epsilon - \frac{cEB}{4\pi}\right) = \frac{2j\rho}{(\gamma - 1)m_i} T^*. \tag{5.192}$$

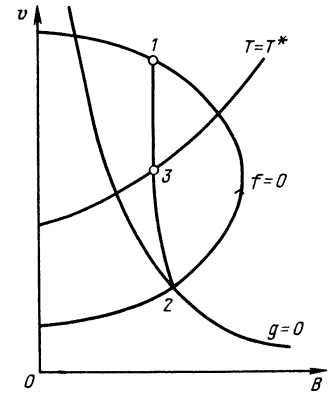


Рис. 5.14. Дополнительное граничное условие в случае ионизующей ударной волны

Задавая состояние (p_2, ρ_2, B_2, v_2) позади ионизующей ударной волны (точка *2* на рис. 5.14) и интегрируя уравнения (5.153), (5.154), получаем структуру ионизующей ударной волны вплоть до пересечения интегральной кривой с линией $T = T^*$ в некоторой точке *3*. Выше этой точки B = const, так как $\sigma = 0$. Точка *1* пересечения прямой B = const с линией $f = 0$ соответствует состоянию впереди ионизующей ударной волны. Поэтому впереди ударной волны поперечное магнитное поле $B_1 = B_3$. Это и есть недостающее граничное условие [126].

В отличие от ударной МГД-волны ($T_1 > T^*$), в которой граничные условия не зависят от диссипативных коэффициентов, дополнительное граничное условие ионизующей ударной волны определяется не только состоянием среды ρ_2, p_2, B_2 позади волны и ее амплитудой v_2, но и диссипативными коэффициентами — вязкостью ν, электропроводностью σ и теплопроводностью κ:

$$B_1 = F(\rho_2, p_2, B_2, v_2, \nu, \sigma, \kappa), \tag{5.193}$$

где F — некоторая функция. Аналогичное дополнительное условие существует и при $B_z \neq 0$:

$$B_{1x} = G(\rho_2, p_2, B_{2x}, B_z, v_{2x}, v_{2z}, \nu, \sigma, \kappa), \tag{5.194}$$

где G — какая-то другая функция.

Однако граничное условие (5.193) или (5.194) не соответствует экспериментальной ситуации, так как впереди волны магнитное поле B_1 может быть произвольным. Это кажущееся противоречие разрешается тем, что впереди ионизующей ударной волны, движущейся с дозвуковой скоростью, распространяется электромагнитная волна [126], которая изменяет E и B таким образом, чтобы перед ионизующей волной выполнялось условие (5.193) или (5.194). Эта электромагнитная волна не взаимодействует со средой, так как впереди ионизующей волны электропроводность равна нулю ($\sigma = 0$). Поэтому

$$E_{\text{л}} = E_0 + \Delta E; \quad B_1 = B_0 + \Delta B, \tag{5.195}$$

где $E_{\text{л}}$ — электрическое поле в лабораторной системе отсчета в области между электромагнитной и ионизующей волнами (y-компонента); E_0 и B_0 — напряженность электрического и магнитного полей в невоз-

мущенном газе впереди электромагнитной волны (в лабораторной системе отсчета) и ΔE, ΔB – скачки электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Связь между ΔE и ΔB находим с помощью уравнения Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = (1/c)\,\partial \mathbf{E}/\partial t.$$

Беря y-компоненту этого уравнения, получаем

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial E_y}{\partial t}\,. \tag{5.196}$$

В электромагнитной волне, движущейся влево, B_x и E_y зависят от z и t через $\xi = z + ct$. Опуская индексы x и y у B_x и E_y, находим из (5.196)

$$dB/d\xi = +\,dE/d\xi,$$

откуда, интегрируя, получим

$$\Delta B = +\,\Delta E. \tag{5.197}$$

В системе отсчета ионизующей волны, движущейся со скоростью v_1, y-компонента электрического поля E связана с полем $E_\text{л}$ в лабораторной системе соотношением ([2], с. 89)

$$E = E_\text{л} - v_1 B_1/c. \tag{5.198}$$

Однако поле $E_\text{л}$ не должно превышать максимального значения $E_{1\max}$, при котором начинается волна ионизации [123, 132], а также значения $E_{2\max}$, при котором возникает электрический пробой в нейтральном газе.

Исследуем теперь эволюционность ионизующей ударной волны.

Рассмотрим сначала возмущения величин p, s, v_x, v_z, B_x и E_y. Эти возмущения вызывают появление волн с фазовыми скоростями v_{z1}, $v_{z1} + c_{s1}$, $v_{z1} - c_{s1}$, c, $-c$, v_{z2}, $v_{z2} + V_{S2}$, $v_{z2} - V_{s2}$, $v_{z2} + V_{F2}$, $v_{z2} - V_{F2}$, и, кроме того, сама скорость разрыва получит возмущение δU. При этом возникают только те волны, которые расходятся от разрыва. Иными словами, в области *1* левее (впереди) разрыва скорость волны (расходящейся от разрыва) должна быть отрицательной, тогда как в области *2* правее (позади) разрыва она должна быть положительной. Неизвестные величины (амплитуды расходящихся волн) должны удовлетворять шести граничным условиям (5.8), (5.9), (5.11), (5.193) и y-компоненте условия (5.6) на поверхности возмущенного разрыва. Поэтому число расходящихся волн от поверхности эволюционной ионизующей волны должно равняться пяти [126, 133б].

В случае перпендикулярной ударной волны $V_S = 0$, поэтому волна $v_{z2} - V_{S2}$ расходится от разрыва.

Таким образом, заведомо, при любых значениях v_{z1} и v_{z2}, расходятся от разрыва волны с фазовыми скоростями $-c$, v_{z2}, $v_{z2} + V_{S2}$ $v_{z2} - V_{S2}$ $v_{z2} + V_{F2}$, т. е. пять волн. Следовательно, для эволюционности ионизующего разрыва все остальные волны, в частности со скоростями $v_{z1} - c_{s1}$ и $v_{z2} - V_{F2}$, должны быть сходящимися. Поэтому условия эволюционности ионизующей волны имеют вид

$$c_{s1} < v_{z1}; \quad v_{z2} < V_{F2}, \tag{5.199}$$

т. е. эволюционная перпендикулярная ионизующая ударная волна движется со сверхзвуковой скоростью относительно среды впереди нее и с домагнитозвуковой скоростью относительно среды позади нее.

Перейдем теперь к исследованию эволюционности ионизующей ударной волны относительно возмущений параметров v_y, B_y и E_x. Эти возмущения не зависят от рассмотренных выше и вызывают появление волн с фазовыми скоростями относительно разрыва, равными v_{z1}, c, $-c$, $v_{z2} + V_{A2}$, $v_{z2} - V_{A2}$, причем скорость разрыва остается прежней (невозмущенной). Амплитуды расходящихся волн должны удовлетворять граничному условию (5.10) и x-й компоненте условия (5.6).

В случае перпендикулярной ионизующей ударной волны $V_A = 0$, поэтому выполняется условие (5.185), т. е. волна плоско поляризована. При этом равенство (5.186) является дополнительным граничным условием.

Таким образом, возмущения v_y, B_y и E_x удовлетворяют трем граничным условиям.

В линейном приближении при возмущении величин v_y, B_y и E_x скорость разрыва не изменяется. Поэтому число расходящихся волн от эволюционного разрыва должно равняться трем, что всегда выполняется, так как $V_{A2} = 0$.

Это означает, что перпендикулярная ионизующая ударная волна всегда является эволюционной относительно альфвеновских возмущений.

В [133а] доказана общая теорема, согласно которой число необходимых для эволюционности МГД-разрыва граничных условий следует из анализа его структуры (если последняя существует). Обобщение этого положения на случай произвольных сред дано в [134].

Первыми работами по ионизующим ударным волнам стали [126, 134а, 134б], в которых проведен анализ в случае магнитного поля, параллельного фронту волны, и [134в], где рассмотрен случай произвольной ориентации магнитного поля.

Заметим, что использованная нами упрощенная T^*-модель, основанная на предположении (5.187), имеет ограниченную область применимости [126, 132].

Хорошее согласие с произведенными экспериментами имеет кинетическая модель ионизующей ударной волны, выходящая за рамки магнитной гидродинамики [129].

Обзор работ, посвященных ионизующим волнам в непроводящем газе при наличии магнитного поля, см. в [121, 129, 132].

Глава 6

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

6.1. Граничные условия на поверхности твердой стенки

При теоретическом исследовании МГД-течения в канале или вблизи твердого тела возникает вопрос о граничных условиях на поверхности стенки.

Очевидно, на поверхности неподвижной стенки отсутствует нормальная к поверхности компонента скорости жидкости:

$$v_n = 0. \tag{6.1}$$

Кроме того, из уравнения Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следует непрерывность на поверхности стенки нормальной к ней компоненты магнитного поля:

$$\Delta B_n = 0. \tag{6.2}$$

Перейдем теперь к граничным условиям для тангенциальных компонент скорости жидкости $\mathbf{v}_t$ и магнитного поля $\mathbf{B}_t$.

В обычной гидродинамике, если жидкость вязкая ($\nu \neq 0$), то имеет место условие прилипания

$$\mathbf{v}_t = 0. \tag{6.3}$$

Если же вязкость отсутствует ($\nu = 0$), то в обычной гидродинамике тангенциальная компонента скорости среды на поверхности стенки может быть любой, т. е. граничное условие (6.3) не выполняется. Точнее говоря, если кинематическая вязкость жидкости пренебрежимо мала ($\nu \to 0$), то у поверхности обтекаемого тела образуется бесконечно тонкий пограничный слой, в котором тангенциальная компонента скорости среды изменяется от нуля (на поверхности) до некоторого значения $\mathbf{v}_t$.

Аналогично в обычной электродинамике при отличном от нуля электрическом сопротивлении $1/\sigma$ тангенциальная компонента магнитного поля $\mathbf{B}_t$ непрерывна на поверхности раздела двух сред:

$$\Delta \mathbf{B}_t = 0. \tag{6.4}$$

Если же электрическое сопротивление одной из сред равно нулю, то на поверхности раздела может образоваться поверхностный ток $\mathbf{i}$. Из уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{B}\, d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iiint_{\Omega} \mathbf{j}\, d\mathbf{r},$$

выбрав в качестве объема Ω бесконечно тонкий слой вблизи поверхности раздела, получим граничное условие

$$\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{B}_t = (4\pi/c)\mathbf{i},$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности раздела. Так как поверхностный ток

может быть произвольным, то в бесконечно проводящей среде или на бесконечно проводящей стенке граничное условие (6.4) может нарушиться. Таким образом, в идеальной гидродинамике ($\nu = 0$) и в идеальной электродинамике ($\sigma = \infty$) величины $\mathbf{v}_t$ и $\Delta\mathbf{B}_t$ на границе жидкости и твердого тела могут быть любыми. Казалось бы, при аналогичных условиях ($\nu = 0$, $\sigma = \infty$) это утверждение справедливо и в магнитной гидродинамике, но это не так, если

$$B_n \neq 0. \tag{6.5}$$

Прежде всего, для идеально проводящей стенки и среды из соотношения $\mathbf{E} + (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B} = 0$ и равенств на границе раздела

$$\mathbf{E}_t = 0; \quad v_n = 0 \tag{6.6}$$

следует условие прилипания (6.3).

Если же стенка не идеально проводящая, то равенство (6.6) не имеет места, однако вследствие связи между гидродинамическими и электродинамическими процессами в проводящей жидкости величины $\mathbf{v}_t$ и $\mathbf{B}_t$ связаны друг с другом.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим задачу об обтекании проводящей жидкостью, расположенной в полуплоскости $x > 0$, твердой неподвижной стенки, расположенной в полуплоскости $x < 0$. Пусть скорость жидкости направлена вдоль оси z, т. е. $v_x = 0$; $v_y = 0$, а вектор магнитного поля лежит в плоскости xz, т. е. $B_y = 0$. Будем считать, что все МГД-величины зависят только от расстояния до стенки.

Из уравнения Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ находим $B_x \equiv B_n = \text{const}$ (n – нормаль к стенке). Уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\operatorname{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B}}{4\pi\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}$$

в данном случае принимает вид

$$\frac{B_n}{4\pi\rho}\frac{dB_z}{dx} + \nu\frac{d^2v_z}{dx^2} = 0. \tag{6.7}$$

Из уравнения вмороженности

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m\Delta\mathbf{B}$$

следует

$$B_n\frac{dv_z}{dx} + \nu_m\frac{d^2B_z}{dx^2} = 0. \tag{6.8}$$

Переобозначая v_z и B_z на v_t и B_t, сводим уравнения (6.7) и (6.8) к одно-

му уравнению

$$\frac{d^3B_t}{dx^3} - \frac{B_n^2}{4\pi\rho\nu\nu_m}\frac{dB_t}{dx} = 0, \tag{6.9}$$

решение которого с учетом конечности $B_t(\infty)$ имеет вид

$$B_t(x) = A_1 \exp(-kx) + A_2, \tag{6.10}$$

где

$$k^2 = B_n^2/(4\pi\rho\nu\nu_m). \tag{6.11}$$

Подставляя (6.10) в (6.8), находим

$$v_t(x) = \frac{\nu_m k}{B_n} A_1 \exp(-kx) + A_3. \tag{6.12}$$

На поверхности неподвижного обтекаемого тела (при $x=0$) должно выполняться граничное условие

$$v_t(0) = 0. \tag{6.13}$$

Пользуясь этим условием, находим [14] из (6.10) и (6.12)

$$\mathbf{v}_t(\infty) = \sqrt{\nu_m/\nu}\,\Delta\mathbf{B}_t/\sqrt{4\pi\rho}, \tag{6.14}$$

где $\Delta\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_t(\infty) - \mathbf{B}_t(0)$.

Ширина переходного слоя δ согласно (6.10), (6.12) равна $1/k$, т. е.

$$\delta = \sqrt{4\pi\rho\nu\nu_m}/B_n. \tag{6.15}$$

При $\nu \to 0$ или $\nu_m \to 0$ значение δ также стремится к нулю. При этом значения $\mathbf{v}_t$ и $\Delta\mathbf{B}_t$ определяют соответствующие граничные условия на стенке.

Если $\nu_m \ll \nu$, то $\mathbf{v}_t = 0$, а $\Delta\mathbf{B}_t$ произвольно, если же $\nu_m \gg \nu$, то произвольно $\mathbf{v}_t$, а $\Delta\mathbf{B}_t$ равно нулю.

О магнитогидродинамическом пограничном слое см. [14, 31].

6.2. Течение Гартмана

Простейшим МГД-течением в канале, служащим моделью многих инженерных приложений, является течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом конечной электропроводности между двумя параллельными плоскостями. Если ширину канала обозначить $2l$, а ось x направить по нормали к плоскостям, то границам течения будет соответствовать координата $x = \pm l$. Ось z выберем параллельной плоскостям и направим ее вдоль вектора скорости жидкости $\mathbf{v} = (0, 0, v)$. При этом течение будет поддерживаться наличием постоянного градиента давления $\partial p/\partial z$. Такое течение, являющееся МГД-аналогом плоского течения Пуазейля, называют *течением Гартмана.*

Из уравнения непрерывности (1.14) и предположения о несжимаемости ($\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) следует $\partial v_z/\partial z = 0$, т. е. что скорость жидкости не зави-

сит от координаты z. Будем считать, что и остальные величины, кроме давления, не зависят от z и более того — что все величины не зависят от координаты y и времени t (стационарное течение). Иначе говоря, все параметры среды, кроме давления, являются функцией одной переменной x.

Из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ следует, что $B_x = B_0 = \text{const}$. Далее, из z-компоненты уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \nu_m \Delta\mathbf{B}$$

и предположения о стационарности $(\partial/\partial t = 0)$ вытекает

$$B_0 \frac{dv_z}{dx} + \nu_m \frac{d^2 B_z}{dx^2} = 0. \tag{6.16}$$

Взяв z-компоненту уравнения движения

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B} + \eta\Delta\mathbf{v},$$

получим (с учетом стационарности)

$$\frac{B_0}{4\pi}\frac{dB_z}{dx} + \eta\frac{d^2 v_z}{dx^2} = \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{6.17}$$

Градиент давления постоянен $(\partial p/\partial z = \text{const})$, поэтому, дифференцируя (6.17), с учетом (6.16) получаем

$$\frac{d^3 v_z}{dx^3} - \frac{\mathrm{Ha}^2}{l^2}\frac{dv_z}{dx} = 0, \tag{6.18}$$

где

$$\mathrm{Ha} = lc_A / \sqrt{\nu\nu_m} \tag{6.19}$$

— *число Гартмана* (здесь $c_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$; $\nu = \eta/\rho$).

Решая уравнение (6.18) с граничными условиями $v_z(\pm l) = 0$, находим

$$v_z(x) = A\left(\operatorname{ch}\mathrm{Ha} - \operatorname{ch}\frac{\mathrm{Ha}\,x}{l}\right), \tag{6.20}$$

где A — оставшаяся неопределенной постоянная интегрирования. Для определения константы A предположим, что при $x \to \pm\infty$ индуцированное магнитное поле B_z обращается в нуль. Это соответствует тому, что суммарный электрический ток, протекающий через канал, равен нулю. (Формулировка граничных условий в общем случае приведена в [14].) Стационарное магнитное поле в твердой стенке постоянно, поэтому B_z должно обращаться в нуль в материале стенки при $x = \pm l$. Полагая электропроводность материала стенки конечной, видим, что для жидкости

должно выполняться граничное условие $B_z(\pm l) = 0$. Определяя B_z из уравнения (6.17) и пользуясь полученным выше граничным условием для B_z, находим

$$A = -\frac{l^2}{\eta \,\mathrm{Ha}\,\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Таким образом,

$$v_z(x) = -\frac{l^2}{\eta \,\mathrm{Ha}\,\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}} \frac{\partial p}{\partial z}\left(\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{ch}\,\frac{\mathrm{Ha}\,x}{l}\right). \tag{6.21}$$

Наибольший интерес представляет средняя скорость жидкости ([1], с. 321):

$$\langle v_z(x)\rangle \equiv \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} v_z(x)\,dx = -\frac{l^2}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{cth}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}} - \frac{1}{\mathrm{Ha}^2}\right). \tag{6.22}$$

Из этого выражения следует прежде всего, что жидкость движется в сторону убывания давления. В самом деле, неравенство $\langle v_z(x)\rangle > 0$ при $\partial p/\partial z < 0$ означает, что

$$\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha} < \mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}. \tag{6.23}$$

Последнее же неравенство легко доказывается сравнением коэффициентов разложения в ряд по степеням Ha в левой и правой его частях.

В случае непроводящей жидкости $\mathrm{Ha} \to 0$ и выражение (6.22) превращается в формулу Пуазейля ([33], с. 75):

$$\langle v_z\rangle_0 = -\frac{1}{3}\frac{l^2}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{6.24}$$

Если градиент давления создается внешними силами, т. е. является заданной величиной, то магнитное поле уменьшает среднюю скорость течения

$$\langle v_z\rangle < \langle v_z\rangle_0. \tag{6.25}$$

Это соотношение доказывается аналогично неравенству (6.23).

Уменьшение средней скорости течения под действием магнитного поля, описываемое неравенством (6.25), можно рассматривать *как кажущуюся вязкость* η_{ef} в формуле Пуазейля

$$\langle v_z\rangle_0 = -\frac{1}{3}\frac{l^2}{\eta_{\mathrm{ef}}}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{6.26}$$

Согласно неравенству (6.22)

$$\eta_{\mathrm{ef}} = \frac{\eta}{3(\mathrm{cth}\,\mathrm{Ha}/\mathrm{Ha} - 1/\mathrm{Ha}^2)}. \tag{6.27}$$

Нетрудно убедиться, что $\eta_{ef} > \eta$, т. е. что магнитное поле всегда увеличивает кажущуюся вязкость. Выражение для η_{ef} имеет простой вид в двух предельных случаях: $Ha \to 0$ и $Ha \to \infty$, а именно

$$\eta_{ef} = \begin{cases} \eta(1 + Ha^2/15) & \text{при } Ha \ll 1; \\ \eta\, Ha/3 & \text{при } Ha \gg 1. \end{cases} \tag{6.28}$$

Эффект увеличения кажущейся вязкости в магнитном поле используется для создания МГД-затворов, которые способы быстро перекрывать течение жидкости без вхождения в механический контакт с ней.

Рассмотрим теперь, как влияет магнитное поле на градиент скорости. Из выражения (6.21) находим

$$\frac{dv_z}{dx} = \frac{l}{\eta\, \mathrm{sh}\, Ha} \frac{\partial p}{\partial z} \mathrm{sh} \frac{Ha\, x}{l} . \tag{6.29}$$

При отсутствии магнитного поля число Гартмана $Ha \to 0$ и

$$\left(\frac{dv_z}{dx}\right)_0 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} x . \tag{6.30}$$

Так как при $x \to 0$ в силу неравенства $Ha < \mathrm{sh}\, Ha$

$$\left| \frac{dv_z}{dx} \right| < \left| \left(\frac{dv_z}{dx}\right)_0 \right| . \tag{6.31}$$

то вблизи центра канала $(x \to 0)$ магнитное поле делает профиль скоростей более пологим. Заметим, что при $x = 0$

$$dv_z/dx = 0; \quad (dv_z/dx)_0 = 0,$$

т. е. скорость среды достигает максимального значения в центре канала. При этом максимальные значения скорости при отсутствии и при наличии магнитного поля равны соответственно

$$(v_{z\,max})_0 = -\frac{1}{2} \frac{l^2}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} ;$$

$$v_{z\,max} = -\frac{l^2}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\mathrm{ch}\, Ha - 1}{Ha\, \mathrm{sh}\, Ha} .$$

Легко показать, пользуясь разложениями ch Ha и sh Ha в ряд по степеням Ha, что при одинаковых градиентах давления $(v_{z\,max})_0 > v_{z\,max}$.

Рассматривая скорости при наличии магнитного поля v_z и при отсутствии его $(v_z)_0$ вблизи стенок канала, т. е. в области $x = \pm l(1 - \epsilon)$, где $l\epsilon$ – расстояние до стенки, находим

$$v_z = \epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{Ha\, \mathrm{ch}\, Ha}{\mathrm{sh}\, Ha}; \quad (v_z)_0 = \epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2.$$

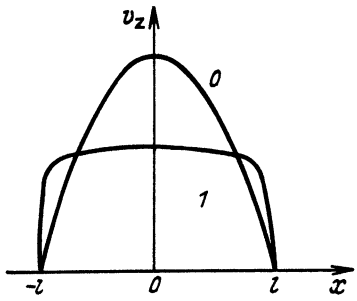


Рис. 6.1. Профиль скорости течения в канале: 0 – при отсутствии магнитного поля; *1* – при наличии магнитного поля

Сравнение этих выражений с использованием неравенства (6.23) приводит к неравенству

$$v_z > (v_z)_0 \tag{6.32}$$

при $x \to \pm l$. Это означает, что профиль скоростей вблизи стенки при наличии магнитного поля становится более крутым.

Зависимость $v_z(x)$ при отсутствии и при наличии магнитного поля изображена на рис. 6.1.

Движение электропроводной жидкости в магнитном поле вызывает возникновение электрического поля, т. е. разности потенциалов. Этот эффект лежит в основе работы МГД-генератора электричества. Рассмотрим его подробнее.

Из закона Ома

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$$

находим

$$E_y = -v_z B_0/c + j_y/\sigma. \tag{6.33}$$

Входящую в эту формулу плотность тока определим с помощью уравнения Максвелла

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}; \quad j_y = -\frac{c}{4\pi}\frac{dB_z}{dx}. \tag{6.34}$$

В свою очередь dB_z/dx выражаем из уравнения (6.17). Таким образом, находим индуцированное электрическое поле

$$E_y = \frac{l^2 B_0}{c\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{cth\,Ha}}{\mathrm{Ha}} - \frac{1}{\mathrm{Ha}^2}\right). \tag{6.35}$$

Отметим, что напряженность индуцированного электрического поля не зависит от x.

Возникновение индуцированного электрического поля E_y лежит также в основе работы МГД-расходомера. Его работа основана на пропор-

циональности между средней скоростью жидкости $\langle v_z \rangle$ и индуцированным электрическим полем E_y. В самом деле, сравнивая формулы (6.22) и (6.35), находим

$$E_y = -\frac{B_0}{c} \langle v_z \rangle. \tag{6.36}$$

Поэтому, измеряя индуцированное электрическое поле E_y, можно определить среднюю скорость жидкости $\langle v_z \rangle$, а умножая последнюю на площадь поперечного сечения канала A, найти расход жидкости

$$Q(v_z) = cAE_y/B_0. \tag{6.37}$$

Существенно отметить, что значение индуцированного электрического поля E_y не зависит от электропроводности жидкости.

Напротив, если к электропроводной жидкости, находящейся в магнитном поле $B_x = B_0$, приложено извне электрическое поле E_y, то возникнет градиент давления, определяемый формулой (6.35), который в свою очередь вызывает движения среды со средней скоростью, определяемой формулой (6.22). Этот эффект лежит в основе работы МГД-насоса кондукционного типа.

Обзор работ, посвященных МГД-течениям в каналах, см. в [14, 62].

6.3. Идеальная магнитная аэродинамика

Рассмотрим сначала стационарное обтекание бесконечно малого тела в обычной (немагнитной) гидродинамике. Возмущения давления и скорости, вызванные обтекаемым телом, распространяются от него во все стороны со скоростью звука c_s относительно жидкости и в то же время сносятся вниз по течению со скоростью жидкости v. Картина обтекания будет совершенно различной в зависимости от того, является ли течение дозвуковым ($v < c_s$) или сверхзвуковым ($v > c_s$). При дозвуковом обтекании возмущение распространяется быстрее, чем сносится, и поэтому при $t \to \infty$ возмущенная область заполняет все пространство. Это проиллюстрировано на рис. 6.2,*а*, где окружности *1*, *2*, *3* изображают фронт возмущения от обтекаемого тела в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$.

Напротив, при сверхзвуковом течении возмущения от обтекаемого тела сносятся настолько быстро, что все фронты возмущения от $t = 0$ до $t = \infty$ заполняют только сектор (рассматриваем плоское течение, см. рис. 6.2,*б*). Огибающая всех фронтов возмущений состоит из двух полупрямых, исходящих из точки 0 (местоположение возмущающего тела) и обозначенных буквами C. Так как эти прямые отделяют область возмущения от невозмущенной области, то они являются характеристиками. В отличие от нестационарных течений, при которых характеристики существуют всегда (см. § 2.5), при стационарном течении в обычной гидродинамике характеристики существуют только при $v > c_s$.

Как видно из рис. 6.2,*б*, в обычной гидродинамике характеристики направлены вниз по течению. Угол μ между характеристикой и вектором

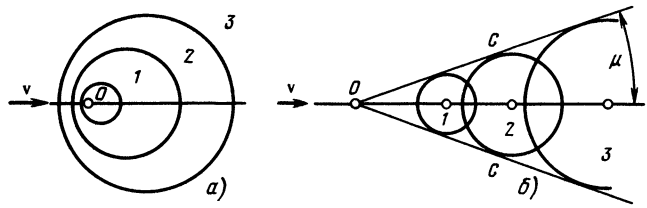


Рис. 6.2. Положение фронта возмущения от обтекаемого тела в последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$ (обычная, т. е. немагнитная, гидродинамика) для случаев дозвукового обтекания (*а*) ($v < c_s$) и сверхзвукового обтекания $v > c_s$ (*б*)

скорости жидкости v называется *углом Маха.* Этот угол, очевидно, равен

$$\mu = \arcsin(c_s/v). \tag{6.38}$$

При дозвуковом обтекании тела возмущения, распространяясь вверх по течению, изменяют состояние газа, т. е. течение заранее подстраивается к обтекаемому телу. Напротив, при сверхзвуковом обтекании все возмущения сносятся вниз по течению и газ набегает на препятствие "слепо". Только "наткнувшись" на обтекаемое тело (или возникшую впереди него ударную волну), газ изменяет свою скорость и плотность. Во всей остальной области пространства вверх по течению газ движется так, как если бы обтекаемого тела вообще не было ([33], с. 385).

Способ нахождения характеристик ясен из рис. 6.2,*б*. Для этого нужно построить фронт волны, испущенной из точки 0, в момент $t = 1$ (окружность радиусом c_s с центром в точке, определяемой концом вектора v, проведенного из точки 0); затем из точки 0 — конца вектора $(-\mathbf{v})$ — провести касательные полупрямые к построенному фронту волны. Эти полупрямые и будут характеристиками. Скорость тела относительно неподвижной среды $\mathbf{v_в}$ связана со скоростью среды в системе отсчета, в которой обтекаемое тело покоится, очевидным соотношением

$$\mathbf{v_в} = -\mathbf{v}. \tag{6.39}$$

Поэтому характеристика является касательной, проведенной из конца вектора $\mathbf{v_в}$ к фронту волны (рис. 6.3,*а*). При дозвуковом течении ($v_в < c_s$) из конца вектора $\mathbf{v_в}$ невозможно провести касательную к фронту волны (окружность радиусом $c_s > v_в$). Это свидетельствует об отсутствии характеристик при дозвуковом течении (рис. 6.3,*б*).

Заметим, что при сверхзвуковом обтекании выполняется условие черенковского излучения звуковых волн:

$$v_в \sin\mu = c_s. \tag{6.40}$$

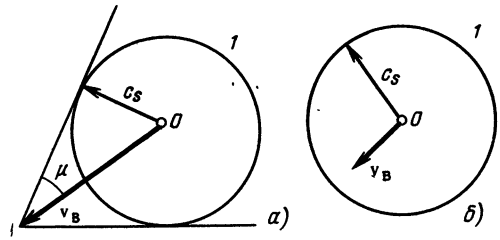


Рис. 6.3. Построение характеристик (обычная гидродинамика)

Так как $|\sin\mu| \leqslant 1$, излучение звуковых волн возможно только при сверхзвуковом движении:

$$v_в > c_s. \qquad (6.41)$$

При переходе от сверхзвукового обтекания бесконечно малого тела к обтеканию тела конечных размеров характеристики превращаются в волны конечной амплитуды – ударные или автомодельные [33].

В магнитной гидродинамике фронты возмущений являются быстрой и медленной групповой полярами (см. рис. 2.3). Строя характеристики способом, использованным для рис. 6.3, находим, что число и тип характеристик будут определяться тем, в какую область попадет конец вектора $\mathbf{v}_в$ [9].

Если конец вектора $\mathbf{v}_в$ расположен вне быстрой групповой поляры, то существуют две быстрые и две медленные характеристики (рис. 6.4). Если же конец вектора $\mathbf{v}_в$ расположен между быстрой и медленной групповыми полярами, то быстрых характеристик нет и существуют две медленные характеристики (рис. 6.5). Наконец, если конец вектора $\mathbf{v}_в$ лежит внутри одной из двух ветвей медленной групповой поляры, то существуют четыре медленные характеристики (рис. 6.6). Заметим, что быстрая и медленная характеристики могут быть направлены как вниз, так и вверх по течению.

В силу условия (2.86а) при движении в МГД-среде бесконечно малого тела излучаются те магнитозвуковые волны, которые удовлетворяют условию черенковского излучения [135–137].

Если угол Маха острый, то характеристика направлена вниз по течению. При тупом угле Маха характеристика направлена вверх по течению.

Как уже отмечалось, альфвеновская групповая поляра является вырожденной – она состоит из двух точек, расположенных симметрично по обе стороны начала координат на расстоянии c_A (рис. 6.7,*а*, *б*). Эти точки можно рассматривать как окружности бесконечно малого радиуса. Всегда существуют две альфвеновские характеристики (см. рис. 6.7), причем в случае сверхальфвеновского течения ($v_в > c_A$) обе характеристики направлены вниз по течению, тогда как при дозвуковом течении ($v_в < c_A$) одна из характеристик направлена вверх, а другая – вниз по течению.

Если перейти от обтекания бесконечно малого тела к обтеканию тела конечных размеров, то быстрые и медленные магнитозвуковые харак-

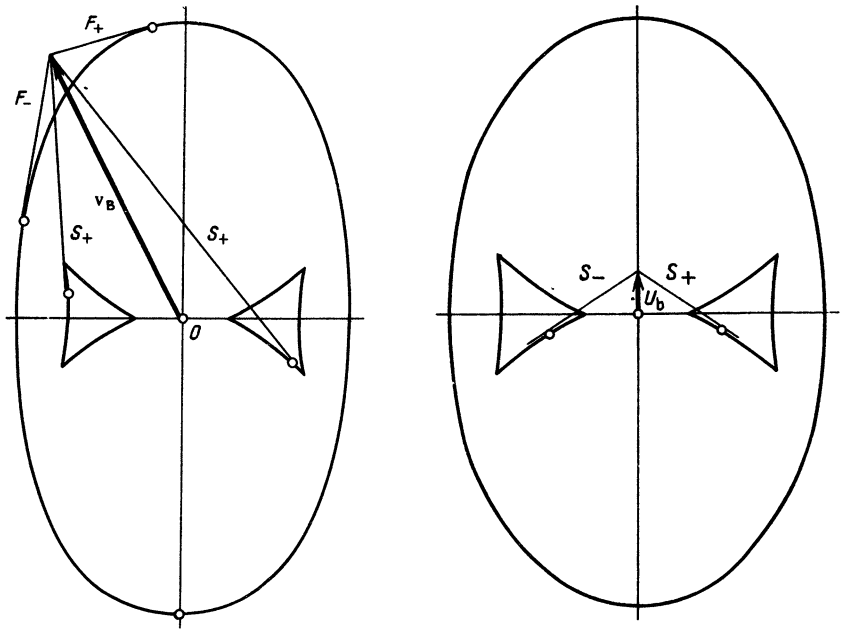


Рис. 6.4. Возникновение двух быстрых и двух медленных характеристик в магнитной гидродинамике

Рис. 6.5. Возникновение двух медленных характеристик

теристики превращаются либо в ударные, либо в автомодельные волны [9, 138, 138а].

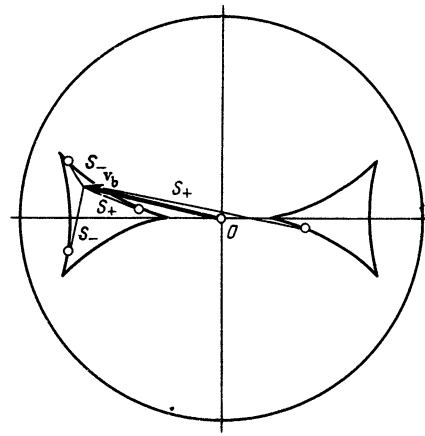
Остановимся более подробно на частном случае обтекания тел, когда скрость среды v параллельна магнитному полю B [139]. При этом две медленные характеристики всегда будут касаться медленной магнитозвуковой поляры в точках возврата. Эти характеристики параллельны скорости и поэтому не являются пределом (при стремлении размеров обтекаемого тела к нулю) ни ударных, ни автомодельных волн. Подобные характеристики называют *вырожденными*, в дальнейшем при подсчете числа характеристик их учитывать не будем. Если начало вектора $\mathbf{v}_B$ совпадает с началом координат, т. е. помещено в центр групповой поляры (см. рис. 6.4–6.6), то при $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$ возможны три случая:

1) конец вектора $\mathbf{v}_B$ лежит вне быстрой групповой поляры. Существуют две быстрые характеристики (см. рис. 6.4);

2) конец вектора $\mathbf{v}_B$ расположен между медленной и быстрой групповыми полярами. Характеристики отсутствуют (см. рис. 6.5);

3) конец вектора $\mathbf{v}_B$ расположен внутри одной из ветвей медленной

Рис. 6.6. Возникновение четырех медленных характеристик



групповой поляры. Существуют две медленные характеристики (см. рис. 6.6).

Заметим, что, когда векторы **v** и **B** параллельны, быстрые характеристики всегда направлены вниз, а медленные – вверх по течению.

МГД-течение в случае **v**|| **B**, когда существуют характеристики, называют *гиперболическим*, течение же, при котором характеристики отсутствуют, называется *эллиптическим*.

Пользуясь формулами (2.86), находим:

1) если

$$v < c_s c_A / \sqrt{c_s^2 + c_A^2}\,, \tag{6.42}$$

то течение эллиптическое (точка *1* на рис. 6.8);

2) если

$$c_s c_A / \sqrt{c_s^2 + c_A^2} < v < \min(c_s, c_A)\,, \tag{6.43}$$

то течение гиперболическое, причем обе характеристики медленные и направлены вверх по течению (точка *2* на рис. 6.8);

3) если

$$\min(c_s, c_A) < v < \max(c_s, c_A)\,, \tag{6.44}$$

то течение эллиптическое (точка *3* на рис. 6.8);

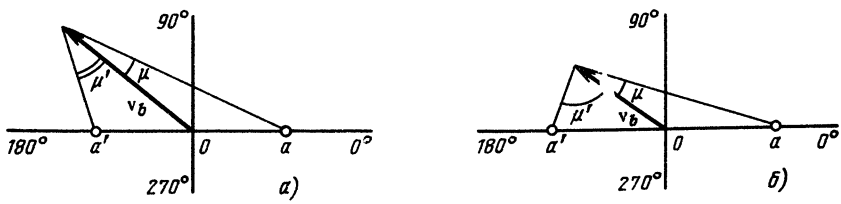


Рис. 6.7. Возникновение альфвеновских характеристик:
а – сверхальфвеновское течение; *б* – доальфвеновское течение

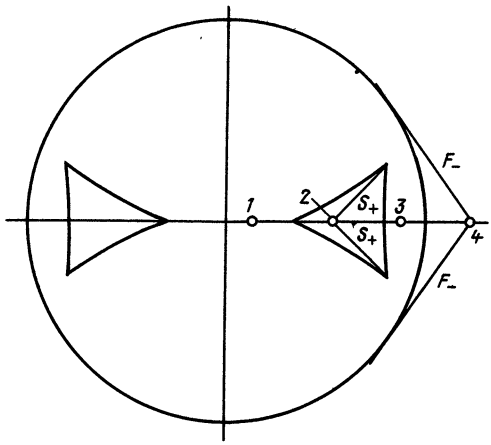


Рис. 6.8. Случаи гиперболического и эллиптического течений

4) если

$$\max(c_s, c_A) < v, \quad (6.45)$$

то течение гиперболическое, причем обе характеристики направлены вниз по течению (точка *4* на рис. 6.8).

Что касается альфвеновских характеристик, то в случае, когда скорость жидкости параллельна магнитному полю, они всегда вырожденные, т. е. совпадают с линиями тока.

Благодаря наличию магнитного давления $B^2/(8\pi)$ в магнитной гидродинамике возможно стационарное обтекание, когда поток ионизованного газа обтекает пустое пространство, в котором находится магнитное поле, экранирующее твердое тело. Таким способом осуществляется полная изоляция тела от обтекаемого его потока плазмы [140, 140а] (см. рис. 6.9). Это явление называют *кавитацией.*

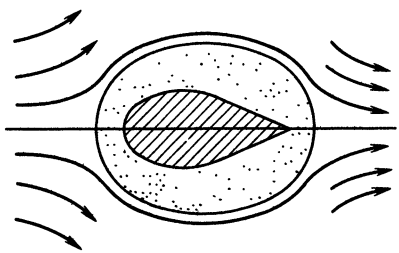


Рис. 6.9. Магнитная изоляция обтекаемого тела (обтекаемое тело обозначено штриховкой, магнитное поле — точками)

Подробно об обтекании тел идеальной бесконечно проводящей жидкостью в присутствии магнитного поля см. [141, 142].

6.4. Неидеальная магнитная аэродинамика

Для иллюстрации особенностей неидеального течения рассмотрим простейший случай стационарного течения ($\partial/\partial t = 0$) несжимаемой жидкости, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, когда существенна только вязкость, а двумя другими диссипативными процессами — теплопроводностью и электрическим сопротивлением — можно пренебречь. Кроме того, предположим, что

скорость среды всюду параллельна магнитному полю

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \tag{6.46}$$

и отношение скорости среды $\mathbf{v}(x, y, z)$ к альфвеновской скорости

$$c_A(x,y,z) = B(x,y,z)/\sqrt{4\pi\rho} \tag{6.47}$$

постоянно, т. е. не зависит от координат [9]:

$$v/c_A = \text{const}. \tag{6.48}$$

Пользуясь векторным тождеством $\text{rot}\,\mathbf{B}\times\mathbf{B} = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} - (1/2)\,\nabla B^2$ и сделанными предположениями, преобразуем уравнение движения

$$\rho\,\partial\mathbf{v}/\partial t + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + (1/4\pi)\,\text{rot}\,\mathbf{B}\times\mathbf{B} + \eta\Delta\mathbf{v}$$

к виду

$$\rho(1 - c_A^2/v^2)(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p_B + \eta\Delta\mathbf{v}. \tag{6.49}$$

где p_B – "полное" давление:

$$p_B = p + B^2/(8\pi).$$

В силу стационарности задачи и параллельности векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ уравнение вмороженности $\partial\mathbf{B}/\partial t = \text{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ удовлетворяется тождественно. Также тождественно удовлетворяется уравнение Максвелла $\text{div}\,\mathbf{B} = 0$.

Из уравнения (6.49) видно, что при условиях (6.46), (6.48) стационарное магнитогидродинамическое течение со скоростью $\mathbf{v}$, плотностью ρ, давлением p и магнитным полем $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$ равносильно течению с плотностью

$$\rho_0 = (1 - c_A^2/v^2)\rho, \tag{6.50}$$

давлением $p_0 = p_B$ и той же скоростью $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$.

В силу положительности плотностей ρ и ρ_0 ($\rho > 0$, $\rho_0 > 0$) соотношение (6.50) можно рассматривать как плотность только при сверхальфвеновском течении ($v > c_A$). В случае же доальфвеновского течения, $v < c_A$, МГД-течение с параметрами $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$, ρ, p равносильно гидродинамическому течению с параметрами $\mathbf{v}_0$, ρ_0, p_0 и противоположно направленными векторами скорости и градиента давления:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}; \quad \rho_0 = (c_A^2/v^2 - 1)\rho; \\ &p_0 = \text{const} - p_B; \quad \mathbf{B} = \text{const}\cdot\mathbf{v}_0. \end{aligned}\right\} \tag{6.51}$$

Так как в обычной гидродинамике позади обтекаемого тела образуется турбулентный след ([33] § 36), при рассматриваемом доальфвеновском течении в магнитной гидродинамике турбулентный след образуется в п е р е д и обтекаемого тела [143].

Поскольку турбулентный след впереди тела образуется только при доальфвеновском течении, можно сказать, что в этом случае возмущения выносятся вперед альфвеновскими волнами.

В общем случае, когда условие параллельности скорости жидкости и магнитного поля (6.46) не выполняется, при доальфвеновском обтекании тела в магнитной гидродинамике наряду с "аномальным" турбулентным следом впереди обтекаемого тела образуется "нормальный" турбулентный след позади тела.

Выше рассмотрена только возможность стационарного МГД-течения (6.51) с обращенной скоростью без исследования устойчивости (или эволюционности) такого течения. Учитывая результаты § 5.4, можно утверждать, что соответствие (6.51) неосуществимо при наличии ударных волн.

В случае сверхзвукового обтекания непроводящего тела с увеличением числа Сирса (1.186) увеличивается расстояние до о т о ш е д ш е й ударной волны впереди тела и падает лобовое сопротивление [144].

При конечной электропроводности также возможна кавитация [145]. Общая картина сверхзвукового обтекания тел исследована в [142].

Глава 7

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

7.1. Турбулентное состояние

Как уже отмечалось в гл. 3, равновесное состояние плазмы зачастую неустойчиво. А именно, если градиенты МГД-величин превышают определенные критические значения, называемые порогом неустойчивости, то малые возмущения нарастают во времени по закону $\exp(\gamma t)\cos(\omega t)$, причем это выражение для зависимости возмущения от времени пригодно лишь в течение короткого промежутка времени после возникновения возмущения. При дальнейшем росте возмущения становится неприменимой линейная теория. Нелинейные эффекты приводят к стабилизации неустойчивости, т. е. установлению некоторой постоянной амплитуды колебаний с частотой ω. При дальнейшем увеличении градиентов становится неустойчивым и это периодическое движение. В результате возникает движение, характеризуемое двумя различными частотами. Если еще больше увеличивать градиенты МГД-величин, то появляются все новые и новые частоты ([33] § 27). В зависимости от конкретных условий осуществляется тот или иной порядок возникновения турбулентности ([105] § 7.4), т. е. та или иная последовательность новых частот. В результате движение приобретает сложный и запутанный характер. Такое движение, беспорядочное на макроскопическом (гидродинамическом) уровне, в котором одновременно возбуждается большое число колебаний, называют *турбулентным*. Напротив, упорядоченное движение спокойной плазмы, при котором она движется как бы отдельными слоями, обладающими различными, но определенными скоростями, называют *ламинарным* (от латинского lamina – пластинка).

Турбулентность возникает, когда "силы инерции" $\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в левой части уравнения движения (1.151), вызывающие неустойчивость ламинарного течения, становятся больше "сил вязкости" $\eta\Delta\mathbf{v}$, сглаживающих возмущения. Это означает, что турбулентность возникает при достаточно большом числе Рейнольдса, равном отношению этих членов. Аналогично в уравнении вмороженности (1.152) "силы инерции" $\mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ вызывают движение магнитных силовых линий вслед за возмущениями скорости, а "силы магнитной вязкости" $\nu_m\Delta\mathbf{B}$ стабилизируют возмущение магнитного поля. Поэтому для возникновения МГД-турбулентности необходимо, чтобы магнитное число Рейнольдса, равное отношению этих членов, было достаточно большим.

Вследствие нелинейности МГД-уравнений возмущения вида $\exp(i\mathbf{kr})$ с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ вызывают появление новых возмущений вида $\exp(2i\mathbf{kr})$ с длиной волны $\lambda/2$. В свою очередь возмущения $\exp(2i\mathbf{kr})$ вызывают новые возмущения вида $\exp(3i\mathbf{kr})$ и $\exp(4i\mathbf{kr})$ с длинами волн $\lambda/3$ и $\lambda/4$. Поэтому при турбулентности происходит передача энергии от крупномасштабных компонент движения к мелкомасштабным.

В турбулентной жидкости резко возрастают процессы переноса импульса, теплоты и магнитного поля. Соответствующие коэффициенты переноса – вязкость, теплопроводность и электрическое сопротивление – уже не определяются столкновениями согласно формулам § 1.7, а становятся существенно больше этих значений. Такие бесстолкновительные коэффициенты переноса называют *аномальными* (подробнее об этом см. [10, 11, 146, 146а]).

Как уже отмечалось, турбулентность возникает при неустойчивости исходного ламинарного состояния плазмы.

Наличие неустойчивости делает точное решение уравнений магнитной гидродинамики не только безнадежно сложным, но и бесполезным. Решения, соответствующие начальным условиям, различающимся неконтролируемо малыми значениями, уже через небольшой промежуток времени могут существенно отличаться друг от друга. Это заставляет перейти к статистическому описанию состояния плазмы или жидкости, т. е. считать значения скорости, напряженности магнитного поля, давления и энтропии случайными функциями координат и времени [147]. Такая случайная величина W, например компонента скорости v_i, компонента напряженности магнитного поля B_i, давление p или энтропия s, характеризуется функцией распределения $f(w)$, так что вероятность того, что значение W заключено в интервале $w<W<w+dw$, равна $f(w)dw$:

$$P(w<W<w+dw)=f(w)dw.$$

При этом среднее значение W, которое обозначим $\langle W\rangle$, может быть теоретически определено путем усреднения по статистическому ансамблю, а именно

$$\langle W\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} wf(w)dw. \qquad (7.1)$$

Эта величина – среднее значение – уже не случайная, а детерминированная. При различного рода вычислениях удобно выделить из W детерминированную часть $\langle W \rangle$, представив W в виде суммы

$$W = \langle W \rangle + \widetilde{W}, \tag{7.2}$$

где $\widetilde{W}$ – чисто случайный остаток, называемый *пульсацией* (или *флуктуацией*). Согласно (7.2) среднее значение пульсации равно нулю:

$$\langle \widetilde{W} \rangle = 0. \tag{7.3}$$

Что же касается среднего значения квадрата пульсации $\langle \widetilde{W}^2 \rangle$, то эта величина равна нулю, только если $\widetilde{W} = 0$, т. е. когда величина W детерминирована. При наличии случайности среднее значение квадрата пульсации отлично от нуля (и положительно):

$$\langle \widetilde{W}^2 \rangle > 0. \tag{7.4}$$

Величина $\langle \widetilde{W}^2 \rangle$ характеризует интенсивность турбулентности.

Рассмотрим теперь зависимость между двумя случайными величинами W_1 и W_2, например между двумя компонентами скорости v_x и v_y. Мерой их зависимости, как известно из теории вероятностей, является среднее от произведения их флуктуаций $\langle \widetilde{W}_1 \widetilde{W}_2 \rangle$, называемое *корреляцией*. Если величины W_1 и W_2 независимы, то их корреляция равна нулю:

$$\langle \widetilde{W}_1 \widetilde{W}_2 \rangle = \langle \widetilde{W}_1 \rangle \langle \widetilde{W}_2 \rangle = 0.$$

При турбулентном движении случайные величины W_1 и W_2 являются функциями координат и времени: $W = W(x_1, x_2, x_3, t)$. Поэтому возникает вопрос не только о зависимости между различными величинами W_1 и W_2, но и о зависимости между значениями одной и той же случайной величины в различные моменты времени или в различных точках пространства. Для описания этих зависимостей вводят в рассмотрение *корреляцию во времени*

$$\langle \widetilde{W}(x_1, x_2, x_3, t) \widetilde{W}(x_1, x_2, x_3, t + \tau) \rangle \tag{7.5}$$

и различные *корреляции в пространстве*, например

$$\langle \widetilde{W}(x_1, x_2, x_3, t) \widetilde{W}(x_1 + l, x_2, x_3, t) \rangle. \tag{7.6}$$

В дальнейшем для упрощения записи формул будем опускать зависимость от координат в корреляциях во времени и зависимость от времени и одинаковых в обоих сомножителях координат в корреляциях в пространстве, т. е. писать вместо (7.5) и (7.6) соответственно

$$\langle \widetilde{W}(t) \widetilde{W}(t + \tau) \rangle \text{ и } \langle \widetilde{W}(x_1) \widetilde{W}(x_1 + l) \rangle.$$

Согласно (7.4) при $\tau = 0$ корреляция во времени отлична от нуля. С другой стороны, при достаточно больших τ величины $\widetilde{W}(t)$ и

$\widetilde{W}(t+\tau)$ — практически независимые случайные величины, поэтому их корреляция равна нулю. Время τ_c, по истечении которого корреляция $\langle \widetilde{W}(t)\widetilde{W}(t+\tau)\rangle$ практически становится равной нулю, называют *временем корреляции*. Таким образом,

$$\langle \widetilde{W}(t)\widetilde{W}(t+\tau)\rangle \begin{cases} \approx \langle \widetilde{W}^2(t)\rangle & \text{при } |\tau| \ll \tau_c; \\ \ll \langle W^2(t)\rangle & \text{при } |\tau| \gg \tau_c. \end{cases} \tag{7.7}$$

В случае *экспоненциальной корреляции* во времени

$$\langle \widetilde{W}(t)\widetilde{W}(t+\tau)\rangle = a\exp[-b(\tau)], \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const} \tag{7.8}$$

в качестве времени корреляции τ_c можно, очевидно, выбрать величину $1/b$:

$$\tau_c = 1/b. \tag{7.9}$$

Полагая в формуле (7.8) $\tau = 0$, находим, что величина a, входящая в корреляцию, равна

$$a = \langle \widetilde{W}^2(t)\rangle. \tag{7.10}$$

Из формул (7.8), (7.9), (7.10) следует выражение для времени корреляции (в случае экспоненциальной корреляции);

$$\tau_c = \frac{\int_0^\infty \langle \widetilde{W}(t)\widetilde{W}(t+\tau)\rangle d\tau}{\langle \widetilde{W}^2(t)\rangle}. \tag{7.11}$$

Это определение непосредственно переносится на случай произвольной корреляции двух величин W_1 и W_2:

$$\tau_c^{(1,2)} = \frac{\int_0^\infty \langle \widetilde{W}_1(t)\widetilde{W}_2(t+\tau)\rangle d\tau}{\langle \widetilde{W}_1(t)\widetilde{W}_2(t)\rangle}. \tag{7.12}$$

При исследовании корреляции в пространстве аналогичным образом определяется длина корреляции l_{jc}:

$$l_{jc} = \frac{\int_0^\infty \langle \widetilde{W}(x_j)\widetilde{W}(x_j+l)\rangle dl}{\langle \widetilde{W}^2(x_j)\rangle}, \tag{7.13}$$

где x_j — одна из пространственных координат.

Экспериментально среднее значение $\langle W\rangle$ определяется иначе, а именно: усреднение производится либо по времени

$$\langle W(t)\rangle = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} W(t+\tau)d\tau, \tag{7.14}$$

либо по пространству

$$\langle W(x_j)\rangle = \frac{1}{2X}\int_{-X}^{X} W(x_j+\xi)\,d\xi. \qquad (7.15)$$

В (7.14) T – интервал времени, большой по сравнению со временем корреляции τ_c величины W и малый по сравнению с характерным временем изменения $\langle W(t)\rangle$, равным

$$|\langle W(t)\rangle| \Big/ \left|\frac{d\langle W(t)\rangle}{dt}\right|.$$

Аналогично в (7.15) X – длина, большая по сравнению с длиной корреляции l_{jc} и малая по сравнению с характерной длиной изменения $\langle W(x_j)\rangle$, равной

$$\frac{|\langle W(x_j)\rangle|}{|d\langle W(x_j)\rangle/dx_j|}.$$

Будем считать, что все три способа усреднения (7.1), (7.14) и (7.15) приводят к одному и тому же результату. В теории вероятностей это предположение называют *эргодической гипотезой*. Турбулентность, для которой справедлива эргодическая гипотеза, называют *развитой*.

Динамика МГД-турбулентности формально описывается теми же уравнениями (1.151)–(1.156), что и динамика ламинарного состояния. Однако при турбулентности все МГД-величины случайны. Усредняя уравнения (1.151)–(1.156), получаем уравнения, описывающие эволюцию средних величин (моментов 1-го порядка), т. е. $\partial\langle v_i\rangle/\partial t$; $\partial\langle B_i\rangle/\partial t$; $\partial\langle\rho\rangle/\partial t$. В правых частях соответствующих уравнений при этом будут стоять моменты 2-го порядка: $\langle B_iB_j\rangle$; $\langle v_iv_j\rangle$; $\langle\rho v_i\rangle$.

Дифференциальные уравнения для

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle B_iB_j\rangle;\quad \frac{\partial}{\partial t}\langle v_iv_j\rangle;\quad \frac{\partial}{\partial t}\langle\rho v_i\rangle$$

содержат в правых частях моменты 3-го порядка и т. д. Таким образом, получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений, не поддающуюся в общем виде ни аналитическому, ни численному решению. Поэтому проблема турбулентности является наименее изученным разделом магнитной гидродинамики. В связи с этим большую роль играют различные упрощенные модели турбулентности.

Неустойчивости, вызывающие рост турбулентных пульсаций, обусловлены исходными градиентами МГД-величин – плотности, температуры, скорости и напряженности магнитного поля. С другой стороны, процессы диссипации – электрическое сопротивление, вязкость и теплопроводность – вызывают затухание пульсаций. Если эти два процесса – неоднородность и диссипация – взаимно уравновешиваются, то статистические характеристики турбулентности не зависят от времени. Иными

словами, любые средние $\langle W_1(t_1) \dots W_n(t_n)\rangle$ не изменяются при смещении времени на произвольную величину τ, т. е. при замене $t_1 \to t_1 + \tau, \dots$ $\dots t_n \to t_n + \tau$

$$\langle W(t_1) \dots W_n(t_n)\rangle = \langle W_1(t_1 + \tau) \dots W_n(t_n + \tau)\rangle. \tag{7.16}$$

Такую турбулентность называют *стационарной.* В частности, при стационарной турбулентности среднее от любой величины $W(t)$ не зависит от t:

$$W(t) = \langle W\rangle, \tag{7.17}$$

а корреляция двух произвольных величин W_1 и W_2 в моменты времени t_1 и t_2 зависит от разности моментов времени t_1 и t_2:

$$\langle W_1(t_1)W_2(t_2)\rangle = \varphi(t_1 - t_2), \tag{7.18}$$

где φ – некоторая детерминированная функция.

Как уже указывалось, при турбулентности происходит переход энергии пульсаций от первоначального масштаба (т. е. характерной длины) L к более мелким масштабам λ. При $\lambda \ll L$ можно считать, что статистические характеристики турбулентности не изменяются при смещении любой пространственной координаты x_j на произвольную величину $\xi_j \ll L$, т. е.

$$\langle W_1(x_j) \dots W_n(x_j)\rangle = \langle W_1(x_j + \xi_j) \dots W_n(x_j + \xi_j)\rangle. \tag{7.19}$$

В частности, среднее любой величины $W(\mathbf{r})$ не зависит от r:

$$\langle W(\mathbf{r})\rangle = \langle W\rangle, \tag{7.20}$$

а корреляция двух произвольных величин W_1 и W_2 в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ зависит только от разности радиусов-векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$:

$$\langle W_1(\mathbf{r}_1)W_2(\mathbf{r}_2)\rangle = \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{7.21}$$

где ψ – некоторая детерминированная функция. Такую турбулентность называют *локально-однородной.*

Если в пространстве не существует какого-либо выделенного направления, то при $\lambda \ll L$ статистические свойства турбулентности не зависят от направления в пространстве. Такую турбулентность называют *локально-изотропной.* Если же статистические свойства турбулентного движения не изменяются при отражении относительно произвольной плоскости, то турбулентность называют *отражательно-инвариантной.* Изотропность нарушается, если в рассматриваемой области существует детерминированный полярный вектор, например электрическое поле **E**. С другой стороны, существование детерминированного аксиального вектора (например, магнитной индукции поля **B** или угловой скорости вращения $\boldsymbol{\Omega}$) вызывает нарушение отражательной инвариантности. Турбулентность, не являющуюся отражательно-инвариантной, называют гиротропной (от греческого "γιρεω" – вращаюсь).

Несмотря на случайный характер турбулентного движения нельзя утверждать, что наиболее вероятно равномерное распределение энергии по различным степеням свободы [147]. Турбулентное состояние неравновесно. Это объясняется тем, что существуют источники и стоки турбулентной энергии. При МГД-турбулентности энергия электрического поля в v^2/c^2 раз меньше энергии магнитного поля (v – пульсация гидродинамической скорости, c – скорость света).

7.2. Аномальная электропроводность

Вычислим аномальную электропроводность ([148], с. 39), полагая структуру МГД-турбулентности заданной. Для этого воспользуемся уравнением

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{j}. \tag{7.22}$$

Предположим, что электрическое сопротивление отсутствует, т. е. что электропроводность σ бесконечна:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0. \tag{7.23}$$

Представим вектор скорости $\mathbf{v}$ в виде суммы среднего значения $\langle\mathbf{v}\rangle$ и флуктуации $\tilde{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{v} = \langle\mathbf{v}\rangle + \tilde{\mathbf{v}}, \tag{7.24}$$

и аналогично для других векторов:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \langle\mathbf{E}\rangle + \tilde{\mathbf{E}};\\ \mathbf{B} &= \langle\mathbf{B}\rangle + \tilde{\mathbf{B}}.\end{aligned}\right\} \tag{7.25}$$

При этом, очевидно,

$$\langle\tilde{\mathbf{E}}\rangle = 0;\quad \langle\tilde{\mathbf{v}}\rangle = 0;\quad \langle\tilde{\mathbf{B}}\rangle = 0. \tag{7.26}$$

Перепишем уравнение (43.2) в компонентах, после чего усредним его:

$$\langle E_i\rangle + \frac{1}{c}\,\epsilon_{ijk}\langle v_j\rangle\langle B_k\rangle + \frac{1}{c}\,\epsilon_{ijk}\langle\tilde{v}_j\tilde{B}_k\rangle = 0. \tag{7.27}$$

Сравнивая это уравнение с (7.22), видим, что корреляция $(1/c)\langle\tilde{v}_j\tilde{B}_k\rangle$ играет для усредненного движения роль эффективной величины $(1/\sigma)\mathbf{j}$, т. е. описывает аномальную электропроводность.

Перейдя к нахождению этой корреляции, определим величину $\tilde{B}_k$ из уравнения

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{7.28}$$

Усредняя это равенство, получаем

$$\frac{\partial \langle B_k \rangle}{\partial t} = (\delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln}) \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle v_n \rangle \langle B_p \rangle + \langle \tilde{v}_n \tilde{B}_p \rangle). \tag{7.29}$$

Вычитая (7.29) из (7.28), находим

$$\frac{\partial \tilde{B}_k}{\partial t} = (\delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln}) \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle v_n \rangle \tilde{B}_p + \tilde{v}_n \langle B_p \rangle). \tag{7.30}$$

Будем считать, что средняя гидродинамическая скорость значительно меньше средней альфвеновской скорости:

$$\langle v \rangle \ll \langle B \rangle / \sqrt{4\pi\rho}. \tag{7.31}$$

В теории турбулентности среда обычно полагается несжимаемой. При этом согласно соотношению (2.26) флуктуации гидродинамической и альфвеновской скорости – одного порядка:

$$\tilde{v} \sim \tilde{B} / \sqrt{4\pi\rho}. \tag{7.32}$$

Из этих предположений следует, что $\langle v_n \rangle \tilde{B}_p \ll \tilde{v}_n \langle B_p \rangle$, т. е. что уравнение (7.30) можно упростить:

$$\frac{\partial \tilde{B}_k}{\partial t} = (\delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln}) \frac{\partial}{\partial x_l} (\tilde{v}_n \langle B_p \rangle), \tag{7.33}$$

или после интегрирования по времени

$$\tilde{B}_k(t) = \tilde{B}_k(-\infty) + (\delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln}) \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{-\infty}^{t} \tilde{v}_n(\tau) \langle B_p(\tau) \rangle d\tau. \tag{7.34}$$

Поэтому искомая корреляция $\langle \tilde{v}_j \tilde{B}_k \rangle$ равна

$$\langle \tilde{v}_j(t) \tilde{B}_k(t) \rangle = \langle \tilde{v}_j(t) \tilde{B}_k(-\infty) \rangle + \\ + \left((\delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln}) \int_{-\infty}^{t} \left(\langle \tilde{v}_j(t) \frac{\partial \tilde{v}_n(\tau)}{\partial x_l} \rangle \langle B_p(\tau) \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. + \langle \tilde{v}_j(t) \tilde{v}_n(\tau) \rangle \frac{\partial \langle B_p(\tau) \rangle}{\partial x_l} \right) d\tau. \tag{7.35}$$

Так как время корреляции конечно, то случайные величины $\tilde{v}_j(t)$ и $\tilde{B}_k(-\infty)$ независимы, т. е.

$$\langle \tilde{v}_j(t) \tilde{B}_k(-\infty) \rangle = \langle \tilde{v}_j(t) \rangle \langle \tilde{B}_k(-\infty) \rangle = 0. \tag{7.36}$$

Таким образом, первый член в правой части уравнения (7.35) равен нулю. Замечая, что $\partial B_l / \partial x_l = 0$, и учитывая несжимаемость жидкости,

$\partial v_l/\partial x_l = 0$, перепишем равенство (7.35) в виде

$$\langle \tilde{v}_j(t)\tilde{B}_k(t)\rangle = \int_{-\infty}^{t} \langle \tilde{v}_j(t)\,\frac{\partial \tilde{v}_k(\tau)}{\partial x_l}\,\rangle \langle B_l(\tau)\rangle d\tau -$$

$$- \int_{-\infty}^{t} \langle \tilde{v}_j(t)\tilde{v}_l(\tau)\rangle \frac{\partial \langle B_k(\tau)\rangle}{\partial x_l}\, d\tau. \qquad (7.37)$$

Вычислим теперь входящую в эту формулу корреляцию:

$$\langle \tilde{v}_j(t)\frac{\partial \tilde{v}_k(\tau)}{\partial x_l}\rangle \equiv \langle \tilde{v}_j(\mathbf{r},t)\frac{\partial \tilde{v}_k(\mathbf{r},\tau)}{\partial x_l}\rangle. \qquad (7.38)$$

Для вычисления корреляции пространственной производной следует рассмотреть корреляцию скоростей в различных точках пространства $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}$

$$\langle \tilde{v}_j(\mathbf{r},t)\tilde{v}_k(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi},\tau)\rangle. \qquad (7.39)$$

Будем считать турбулентность однородной. При этом корреляция (7.39) не зависит от $\mathbf{r}$. Если к тому же турбулентность отражательно-инвариантна, то корреляция (7.39) не изменится при замене $\boldsymbol{\xi}$ на $-\boldsymbol{\xi}$, т. е. будет четной функцией $\boldsymbol{\xi}$:

$$\langle \tilde{v}_j(\mathbf{r},t)\tilde{v}_k(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi},\tau)\rangle = \langle \tilde{v}_j(\mathbf{r},t)\tilde{v}_k(\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi},\tau)\rangle. \qquad (7.40)$$

Пусть $\boldsymbol{\xi}$ содержит единственную отличную от нуля компоненту ξ_l. Тогда, учитывая, что $\partial/\partial x_l = \partial/\partial \xi_l$

$$\frac{\partial \tilde{v}_k(\mathbf{r},\tau)}{\partial x_l} = \lim_{\xi\to 0} \frac{\tilde{v}_k(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi},\tau) - \tilde{v}_k(\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi},\tau)}{2\xi_l}$$

и из соотношения (7.40) следует

$$\langle \tilde{v}_j(\mathbf{r},t)\frac{\partial v_k(\mathbf{r},\tau)}{\partial x_l}\rangle = 0. \qquad (7.41)$$

Таким образом, уравнение (7.37) упрощается:

$$\langle \tilde{v}_j(t)\tilde{B}_k(t)\rangle = -\int_{-\infty}^{t} \langle \tilde{v}_j(t)\tilde{v}_l(\tau)\rangle \frac{\partial \langle B_k(\tau)\rangle}{\partial x_l}\, d\tau. \qquad (7.42)$$

Полагая турбулентность изотропной:

$$\langle \tilde{v}_j(t)\tilde{v}_l(\tau)\rangle = \frac{1}{3}\delta_{jl}\langle \tilde{\mathbf{v}}(t)\tilde{\mathbf{v}}(\tau)\rangle \qquad (7.43)$$

и введя новую переменную интегрирования $t_1 = t - \tau$, преобразуем уравнение (7.42) к виду

$$\langle \tilde{v}_j(t)\tilde{B}_k(t)\rangle = -\frac{1}{3}\int_0^{\infty} \langle \tilde{\mathbf{v}}(0)\tilde{\mathbf{v}}(t_1)\rangle \frac{\partial \langle B_k(t-t_1)\rangle}{\partial x_j} dt_1. \qquad (7.44)$$

Выражение $\langle \tilde{\mathbf{v}}(0)\tilde{\mathbf{v}}(t_1)\rangle$ обращается в нуль, если t_1 превосходит время корреляции τ_c. Полагая, что характерное время изменения среднего магнитного поля $\langle B_k(t-t_1)\rangle$ значительно больше τ_c, можно в (7.44) вынести множитель $\langle B_k(t-t_1)\rangle$ за знак интеграла, заменив в нем $t-t_1$ на t:

$$\langle \tilde{v}_j(t)\tilde{B}_k(t)\rangle = -\frac{1}{3}\frac{\partial\langle B_k(t)\rangle}{\partial x_j}\int_0^\infty \langle \tilde{\mathbf{v}}(0)\tilde{\mathbf{v}}(t_1)\rangle dt_1. \tag{7.45}$$

Пользуясь определением времени корреляции

$$\tau_c = \int_0^\infty \langle \tilde{\mathbf{v}}(0)\tilde{\mathbf{v}}(t_1)\rangle dt_1 / \langle \tilde{\mathbf{v}}^2\rangle, \tag{7.46}$$

получаем

$$\langle \tilde{v}_j(t)\tilde{B}_k(t)\rangle = -\frac{\tau_c\langle \tilde{\mathbf{v}}^2\rangle}{3}\frac{\partial\langle B_k(t)\rangle}{\partial x_j}. \tag{7.47}$$

Таким образом, уравнение (7.27) принимает вид

$$\langle E_i\rangle + \frac{1}{c}\epsilon_{ijk}\langle v_j\rangle\langle B_k\rangle = \frac{\epsilon_{ijk}\langle \tilde{\mathbf{v}}^2\rangle\tau_c}{3c}\frac{\partial\langle B_k\rangle}{\partial x_j},$$

или в векторной форме

$$\langle \mathbf{E}\rangle + \frac{1}{c}\langle \mathbf{v}\rangle \times \langle \mathbf{B}\rangle = \frac{\langle \tilde{\mathbf{v}}^2\rangle\tau_c}{3c}\,\mathrm{rot}\,\langle \mathbf{B}\rangle.$$

Замечая, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}$, получаем, наконец,

$$\langle \mathbf{E}\rangle + \frac{1}{c}\langle \mathbf{v}\rangle \times \langle \mathbf{B}\rangle = \langle \mathbf{j}\rangle / \sigma^{(T)}, \tag{7.48}$$

где $\sigma^{(T)}$ – аномальная электропроводность, возникающая вследствие турбулентности:

$$\sigma^{(T)} = 3c^2/(4\pi\tau_c\langle \tilde{\mathbf{v}}^2\rangle). \tag{7.49}$$

Видно, что турбулентная электропроводность тем меньше, чем больше величина $\langle \tilde{\mathbf{v}}^2\rangle$, которую можно рассматривать как меру интенсивности турбулентности. Иными словами, аномальное электрическое сопротивление $1/\sigma^{(T)}$ возрастает с ростом энергии турбулентных пульсаций $(1/2)\langle \mathbf{v}^2\rangle$.

7.3. Слабая турбулентность

Как уже отмечалось, турбулентность возникает вследствие неустойчивости исходного состояния. При этом в линейном приближении возмущения магнитогидродинамических величин имеют вид

$$\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \mathrm{i}\omega t + \gamma t), \tag{7.50}$$

где ω – частота колебания; γ – инкремент нарастания неустойчивости и k_0 – волновой вектор возмущения, соответствующий максимальному значению γ. Так как $\gamma > 0$, то с течением времени это возмущение нарастает настолько, что в уравнениях магнитной гидродинамики следует удерживать нелинейные члены, квадратичные по возмущениям (7.50). Как отмечалось выше, при этом энергия турбулентных пульсаций передается от первоначального колебания с волновым числом k_0 к колебаниям со все бо́льшими и бо́льшими волновыми числами $k \gg k_0$. Иными словами, энергия пульсаций передается от колебания с длиной волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, называемой *основным масштабом турбулентности*, к колебаниям со все более мелкими длинами волн $\lambda \ll \lambda_0$. Этот процесс прекращается, когда диссипативные члены становятся такого же порядка, как и нелинейные члены. Вязкая диссипация существенна при числе Рейнольдса порядка единицы:

$$\lambda v(k)/\nu \sim 1, \text{ т. е. } v(k)/k\nu \sim 1, \tag{7.51}$$

где $v(k)$ – пульсация скорости, соответствующая длине волны λ. Условие (7.51) определяет максимальное волновое число k_ν.

С другой стороны, джоулева диссипация становится существенной при таких волновых числах, когда магнитное число Рейнольдса имеет порядок единицы:

$$c_A(k)/k\nu_m \sim 1, \tag{7.52}$$

где $c_A(k)$ – пульсация альфвеновской скорости; $c_A(k) = B(k)/\sqrt{4\pi\rho}$, а $B(k)$ – пульсация напряженности магнитного поля. Условие (7.52) определяет другое волновое число, k_σ. В области

$$k \ll k_\nu, k_\sigma \tag{7.53}$$

нелинейные члены, обусловленные инерцией, значительно превосходят диссипативные члены. Поэтому эту область называют инерционной.

В обычной гидродинамике несжимаемой жидкости отлично от нуля только возмущение ротора скорости, которое покоится относительно среды. Напротив, в магнитной гидродинамике условие несжимаемости делает невозможной только быструю магнитозвуковую волну, а медленная магнитозвуковая волна превращается при этом в альфвеновскую волну с другой поляризацией (см. § 3.1). Поэтому при МГД-турбулентности в среде возбуждается большое количество волн, движущихся относительно жидкости с альфвеновской скоростью.

При малом уровне турбулентности, когда нелинейные члены в уравнениях магнитной гидродинамики уже следует учитывать, но они все еще невелики, турбулентное состояние можно рассматривать как газ слабо взаимодействующих волн-плазмонов, имеющих случайные фазы [148]. Такую турбулентность называют слабой. Используемый в теории слабой турбулентности метод – сугубо приближенный, так как фазы волн полагаются независимыми случайными величинами, равно-

мерно распределенными в интервале $(0, 2\pi)$, и рассматривается минимальное число взаимодействующих волн (три волны). Хотя обычно в плазме квантовые эффекты ничтожны, удобно пользоваться языком квантовой теории, рассматривая волны как частицы. Такое рассмотрение позволяет написать законы сохранения энергии

$$\sum_i \hbar\omega_i = \sum_f \hbar\omega_f \tag{7.54}$$

и импульса

$$\sum_i \hbar\mathbf{k}_i = \sum \hbar\mathbf{k}_f, \tag{7.55}$$

где ω_i, $\mathbf{k}_i$ – частоты и волновые векторы волн, существовавших до столкновения (взаимодействия), а ω_f, $\mathbf{k}_f$ – частоты и волновые векторы волн, возникших в результате столкновения; $\hbar$ – постоянная Планка. Так как турбулентность слабая, то чем больше частиц участвует в процессе столкновения, т. е. чем больше слагаемых содержится в обеих частях равенств (7.54) или (7.55), тем меньше вероятность такого процесса. Поэтому наибольшую вероятность имеют процессы взаимодействия минимального числа волн. Из равенств (7.54), (7.55) следует, что наименьшее число взаимодействующих волн равно трем, т. е. наибольшую вероятность имеют трехплазмонные процессы, для которых

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3; \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \tag{7.56}$$

При этом либо две волны 1 и 2 сливаются в одну волну 3, либо волна 3 распадается на волны 1 и 2, либо волна 1 поглощает волну 2, изменяя свою частоту ω_1 на ω_3 и волновой вектор $\mathbf{k}_1$ на $\mathbf{k}_3$, либо волна 3 испускает волну 2.

Иногда закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ запрещает трехплазмонные процессы. В этом случае наибольшую вероятность имеют четырехплазмонные процессы, для которых

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4; \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4. \tag{7.57}$$

В МГД-приближении, т. е. в низкочастотном пределе, в плазме распространяются волны трех типов: альфвеновская, быстрая магнитозвуковая и медленная магнитозвуковая. Распад альфвеновской волны на альфвеновскую и медленную магнитозвуковую ($A \to A + S$) в случае, когда $\beta \equiv 8\pi p/B^2 \ll 1$ и векторы $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ параллельны, был исследован в § 2.4. Полученный там инкремент неустойчивости $\omega^{(1)}$, определяемый формулой (2.54), и является вероятностью распада в единицу времени. В общем случае вероятности распада имеют громоздкий вид [63]. Можно показать, что в случае $\beta \ll 1$ наиболее существенны следующие процессы взаимодействия волн:

$$A \rightleftarrows A + S; \quad A \rightleftarrows F + S; \quad F \rightleftarrows F + S; \quad F \rightleftarrows A + S.$$

7.4. Сильная турбулентность

При большом уровне турбулентности пульсации МГД-величин становятся настолько большими, что нелинейные члены в уравнениях для возмущения исходного состояния становятся такого же порядка, что и линейные. При этом вероятность распада волн не зависит от числа волн, участвующих во взаимодействии, и турбулентность уже нельзя рассматривать как газ слабо взаимодействующих плазмонов. Чтобы исследовать такую сильную турбулентность, воспользуемся спектральным методом, а именно, разложим компоненты скорости $v_i(\mathbf{r}, t)$ и магнитной индукции $B_i(\mathbf{r}, t)$ в интеграл Фурье:

$$v_i(\mathbf{r}, t) = \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\,\xi_i(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}; \tag{7.58}$$

$$B_i(\mathbf{r}, t) = \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\,\eta_i(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}. \tag{7.59}$$

В этих формулах не отражена зависимость векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ от времени, чтобы не усложнять и без того громоздкие последующие выражения. Так как векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ – случайные величины, то и их преобразования Фурье $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ также случайны. Вещественность скорости $\mathbf{v}$ и магнитного поля $\mathbf{B}$ влечет за собой соотношения

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\xi}(-k); \quad \boldsymbol{\eta}^*(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\eta}(-\mathbf{k}), \tag{7.60}$$

где звездочкой отмечены комплексно сопряженные величины.

Корреляции различных компонент скорости $\langle v_i(\mathbf{r}) v_j(\mathbf{r})\rangle$ и магнитного поля $\langle B_i(\mathbf{r}) B_j(\mathbf{r})\rangle$ можно выразить через компоненты Фурье:

$$\langle v_i(\mathbf{r}) v_j(\mathbf{r})\rangle = \int\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}'\mathbf{r})]\,\langle \xi_i(\mathbf{k})\,\xi_j^*(\mathbf{k}')\rangle; \tag{7.61}$$

$$\langle B_i(\mathbf{r}) B_j(\mathbf{r})\rangle = \int\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' \exp[i(\mathbf{k}r - \mathbf{k}'\mathbf{r})]\,\langle \eta_i(\mathbf{k})\,\eta_j^*(\mathbf{k}')\rangle. \tag{7.62}$$

Если характерная длина пульсаций $\lambda = 2\pi/k$ значительно меньше осчовного масштаба турбулентности $\lambda_0 = 2\pi/k_0$:

$$\lambda \ll \lambda_0, \text{ т. е. } k_0 \ll k, \tag{7.63}$$

то статистические характеристики турбулентности, т. е. всевозможные средние, не зависят от пространственной координаты, т. е. турбулентность – локально-однородная. Если в рассматриваемом объеме отсутствует какое-либо выделенное направление, то статистические характеристики турбулентности не зависят от направления в пространстве, т. е. турбулентность – локально-изотропная. Для локальной изотропности турбулентности необходимо, чтобы отсутствовали какие-либо детерминированные векторы, например угловая скорость Ω, т. е. чтобы средние значения векторов равнялись нулю:

$$\langle \mathbf{v}\rangle = 0; \quad \langle \mathbf{B}\rangle = 0 \tag{7.64}$$

и чтобы смешанные моменты, например $\langle B_i(\mathbf{r}_1) B_j(\mathbf{r}_2)\rangle$, зависели только от вектора смещения $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

В случае однородной турбулентности из (7.61) видно, что корреляция $\langle \xi_i(\mathbf{k})\, \xi_j^*(\mathbf{k}')\rangle$ отлична от нуля только при $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, т. е. она содержит множителем дельта-функцию $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$. При изотропной турбулентности корреляция $\langle \xi_i(\mathbf{k})\, \xi_j^*(\mathbf{k}')\rangle$ определяется только вектором $\mathbf{k}$, поэтому

$$\langle \xi_i(\mathbf{k})\, \xi_j^*(\mathbf{k}')\rangle = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,[a(\mathbf{k})\,\delta_{ij} + b(\mathbf{k})\,k_i k_j], \tag{7.65}$$

где $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$ – некоторые скалярные функции, для которых эта формула служит определением. Подставляя это выражение в (7.61), получаем

$$\langle v_i(\mathbf{r})\, v_j(\mathbf{r})\rangle = \int [a(\mathbf{k})\,\delta_{ij} + b(\mathbf{k})\,k_i k_j]\, d\mathbf{k}. \tag{7.66}$$

Это выражение можно упростить, если учесть, что влияние сжимаемости жидкости существенно тогда, когда средняя квадратическая флуктуация скорости $\sqrt{\langle v^2\rangle}$ сравнима со скоростью звука c_s. Обычно выполняется условие

$$\langle v^2\rangle \ll c_s^2, \tag{7.67}$$

поэтому жидкость можно считать несжимаемой и, следовательно, полагать дивергенцию скорости равной нулю:

$$\langle (\operatorname{div}\mathbf{v})^2\rangle = 0. \tag{7.68}$$

Для вычисления левой части этого выражения продифференцируем формулу (7.58):

$$\partial v_i/\partial x_k = \mathrm{i}\int \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\, k_k\, \xi_i(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{7.69}$$

Поэтому

$$\left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial v_j}{\partial x_l}\right\rangle = \int\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' \exp[\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}]\, k_k k_l \langle \xi_i(\mathbf{k})\, \xi_j^*(\mathbf{k}')\rangle. \tag{7.70}$$

Подставляя в правую часть равенства выражение для $\langle \xi_i(\mathbf{k})\, \xi_j^*(\mathbf{k}')\rangle$ из (7.65), находим

$$\left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial v_j}{\partial x_l}\right\rangle = \int d\mathbf{k}\, k_k k_l [a(\mathbf{k})\,\delta_{ij} + b(\mathbf{k})\,k_i k_j]. \tag{7.71}$$

Умножая это равенство на $\delta_{ik}\,\delta_{jl}$ и суммируя по k и l, получаем с учетом (7.68)

$$\int k^2\,[a(k) + k^2 b(\mathbf{k})]\, d\mathbf{k} = 0.$$

Так как это равенство должно соблюдаться при любых значениях $a(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$, то условие несжимаемости (7.68) означает, что

$$b(\mathbf{k}) = -a(k)/k^2. \tag{7.72}$$

Следовательно, корреляцию скорости (7.66) можно упростить:

$$\langle v_i(\mathbf{r}) v_j(\mathbf{r}) \rangle = \int (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \tag{7.73}$$

Выражение (7.71) для корреляции производных скорости также упрощается:

$$\left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} \right\rangle = \int \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) k_k k_l a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \tag{7.74}$$

Определим теперь физический смысл функции $a(\mathbf{k})$. Свертка выражения (7.73) по индексам i и j дает

$$\langle v^2/2 \rangle = \int a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \tag{7.75}$$

Левая часть этого равенства представляет собой кинетическую энергию турбулентных пульсаций единицы массы жидкости. Следовательно, $a(\mathbf{k})d\mathbf{k}$ – это часть кинетической энергии пульсаций, приходящаяся на бесконечно малый элемент объема $d\mathbf{k} \equiv dk_x\, dk_y\, dk_z$ в пространстве волновых векторов $\mathbf{k}$. Поэтому $a(\mathbf{k})$ называют *трехмерным спектром кинетической энергии турбулентных пульсаций.*

Однако для того, чтобы $a(\mathbf{k})$ можно было трактовать как плотность кинетической энергии, необходимо, чтобы эта величина всегда была неотрицательной:

$$a(\mathbf{k}) \geqslant 0. \tag{7.76}$$

Чтобы убедиться в том, что это так и есть, подставим (7.72) в (7.65) и, свернув полученное соотношение по индексам i, j, найдем

$$\langle \xi(\mathbf{k}) \xi^*(\mathbf{k}') \rangle = 2\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') a(\mathbf{k}). \tag{7.77}$$

Затем проинтегрируем это выражение по $\mathbf{k}'$ по бесконечно малому шару радиусом ϵ с центром в конце вектора $\mathbf{k}$:

$$\langle |\xi(\mathbf{k})|^2 \rangle (4/3)\pi\epsilon^3 = 2a(\mathbf{k}), \tag{7.78}$$

откуда непосредственно следует справедливость неравенства (7.76).

Вернемся теперь к спектру энергии пульсаций. При изотропной турбулентности удобно перейти от трехмерного спектра к одномерному. Для этого выпишем в явном виде выражение для $d\mathbf{k}$:

$$d\mathbf{k} = dk_x\, dk_y\, dk_z = k^2 \sin\theta\, dk\, d\varphi\, d\theta$$

и проинтегрируем (7.65) по θ и φ в пределах $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Обозначая

$$F(k) = 4\pi k^2 a(k), \tag{7.79}$$

получаем

$$\langle v^2/2 \rangle = \int_0^\infty F(k) dk. \tag{7.80}$$

Строго говоря, гипотеза об изотропности справедлива при достаточно больших волновых числах:

$$k > k_0, \tag{7.81}$$

поэтому в формуле (7.80) интегрирование следует производить от k_0 до бесконечности:

$$\langle v^2/2 \rangle = \int_{k_0}^{\infty} F(k)dk. \tag{7.82}$$

Величину $F(k)$ называют *одномерным спектром кинетической энергии турбулентных пульсаций.*

Аналогично находим корреляцию компонент магнитного поля:

$$\langle B_i(\mathbf{r})B_j(\mathbf{r}) \rangle = 4\pi\rho \int_{k_0}^{\infty} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) G(k)dk; \tag{7.83}$$

$$\left\langle \frac{B^2}{8\pi\rho} \right\rangle = \int_{k_0}^{\infty} G(k)dk, \tag{7.84}$$

где неотрицательная функция $G(k)$ является *одномерным спектром магнитной энергии единицы массы жидкости.* Совокупность спектральных плотностей $F(k)$ и $G(k)$ называют *одномерным спектром турбулентности.*

Зная спектр $F(k)$ и $G(k)$, можно определить среднюю энергию w, диссипируемую в единице массы жидкости в единицу времени. В самом деле, в несжимаемой жидкости пульсациями температуры можно пренебречь; тогда из (1.81)

$$w = 2\nu \langle v_{ij}^2 \rangle + \frac{1}{\sigma\rho} \langle j_i^2 \rangle, \tag{7.85}$$

или в раскрытом виде

$$w = \nu \left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 \right\rangle + \nu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\rangle + \frac{\nu_m}{4\pi\rho} \left\langle \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)^2 \right\rangle -$$

$$- \frac{\nu_m}{4\pi\rho} \left\langle \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right\rangle. \tag{7.86}$$

Из (7.83) находим

$$\left\langle \frac{\partial B_i}{\partial x_k} \frac{\partial B_j}{\partial x_l} \right\rangle = 4\pi\rho \int_{k_0}^{\infty} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) k_k k_l G(k)dk. \tag{7.87}$$

Подставляя (7.74), (7.79), (7.87) в (7.86), находим диссипируемую энергию

$$w = 2\nu \int_{k_0}^{\infty} k^2 F(k)dk + 2\nu_m \int_{k_0}^{\infty} k^2 G(k)dk. \tag{7.88}$$

7.5. Спектр турбулентности

Турбулентные пульсации основного масштаба $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ вызываются внешними агентами (градиентами температуры, скорости и др.). Поэтому спектр основного масштаба k_0 зависит от способа возбуждения турбулентности. Что же касается более мелких пульсаций, для которых

$$k_0 \ll k, \tag{7.89}$$

то их спектр не зависит от способа возбуждения, т. е. является *универсальным.* Найдем этот спектр в инерционном интервале, т. е. при пренебрежении вязкостью и электрическим сопротивлением.

При стационарной турбулентности энергия w, диссипируемая в единице массы жидкости в единицу времени, входит в инерционный интервал со стороны малых волновых чисел k и выходит в сторону больших волновых чисел. При стационарной турбулентности эта энергия не зависит от масштаба:

$$dw/dk = 0. \tag{7.90}$$

Для несжимаемой жидкости согласно соотношению (2.26) кинетическая энергия турбулентных пульсаций равна магнитной энергии:

$$\langle \rho v^2/2 \rangle = \langle B^2/(8\pi) \rangle. \tag{7.91}$$

Это означает, что спектры кинетической и магнитной энергии (7.80) и (7.84) одинаковы:

$$F(k) = G(k). \tag{7.92}$$

Рассмотрим сначала случай, когда среднее магнитное поле отсутствует [64]:

$$\langle \mathbf{B} \rangle = 0, \tag{7.93}$$

т. е. когда магнитное поле является *мелкомасштабным.*

Передача энергии w через инерционный интервал происходит благодаря рассеянию волн на волнах. Время существования случайной волны равно времени корреляции какой-либо магнитогидродинамической величины, например скорости $\langle \mathbf{v}(0)\mathbf{v}(t) \rangle$. Поэтому

$$w = A_k t_k, \tag{7.94}$$

где t_k – время корреляции в масштабе k, а A_k – коэффициент пропорциональности, также зависящий от k. Очевидно,

$$t_k = 1/(kv_k), \tag{7.95}$$

где v_k – пульсация скорости, связанная со спектром $F(k)$ соотношением

$$v_k = \sqrt{F(k)k}, \tag{7.96}$$

вытекающим из формулы (7.82).

Коэффициент A_k определяется величинами v_k и k. Его можно найти из соображений размерности. Так как размерность передаваемой энергии равна

$$[w] = l^2/t^3 \tag{7.97}$$

(l и t – единицы длины и времени), то

$$A_k = v_k^4 k^2. \tag{7.98}$$

Таким образом,

$$w = v_k^3 k, \tag{7.99}$$

откуда

$$F(k) = G(k) = w^{2/3}/k^{5/3}. \tag{7.100}$$

В обычной гидродинамике этот спектр называют *законом Колмогорова–Обухова.*

Строгий вывод спектра (7.100) в магнитной гидродинамике произведен в [149].

Перейдем теперь к случаю, когда среднее магнитное поле отлично от нуля [149а]:

$$\langle \mathbf{B} \rangle \neq 0, \tag{7.101}$$

т. е. когда магнитное поле *крупномасштабное.*

При этом возмущения МГД-величин движутся со скоростью порядка альфвеновской и соотношение (7.95) принимает вид

$$t_k = 1/(kc_A). \tag{7.102}$$

Повторив рассуждения, приведшие к формуле (7.100), получим

$$F(k) = G(k) = w^{1/2} c_A^{1/2}/k^{3/2}. \tag{7.103}$$

Спектры (7.100) и (7.103) простираются не до бесконечности. При больших значениях k становятся существенными вязкость и джоулевы потери. Максимальное значение k, равное $k_{\max}$, определяется по порядку величины из условия, что обычное или магнитное число Рейнольдса равно единице. Замечая, что $v_k \sim \sqrt{F(k)k}$; $c_A \sim \sqrt{G(k)k}$, находим, что флуктуации скорости обрываются при

$$k_v = (w/\nu^3)^{1/4}, \tag{7.104}$$

а флуктуации магнитного поля – при

$$k_B = (w/\nu_m^3)^{1/4}. \tag{7.105}$$

Заметим, что основная энергия турбулентных пульсаций содержится не в инерционном интервале, а в области $kL \sim 1$.

О спектре гидродинамической турбулентности вне инерционного интервала см. [150].

Глава 8

ГИДРОМАГНИТНОЕ ДИНАМО

8.1. Ламинарное динамо

Динамо (точнее, динамомашина) – устаревшее название генератора электрического тока. Под *гидромагнитным динамо* в настоящее время понимают механизм, способный генерировать магнитное поле при движении проводящей среды. Такие поля существуют у ряда планет, звезд и в межзвездном пространстве. Магнитное поле вызывается движением проводящей жидкости и в свою очередь само воздействует на это движение. Однако в первом приближении можно считать движение жидкости заданным. Это приближение называют *кинематическим динамо.*

В конце § 1.2 было показано, что при растяжении магнитной силовой линии напряженность магнитного поля возрастает, чем объясняется возникновение магнитного поля звезд. При этом энергия магнитного поля черпается из кинетической энергии вращения звезды и энергии распада радионуклидов [151]. С другой стороны, джоулева диссипация токов приводит к уменьшению напряженности магнитного поля, т. е. противодействует эффекту динамо [1].

Пусть, например, "затравочное", т. е. начальное, магнитное поле направлено вдоль оси y, а его напряженность постоянна и равна B_0. [Это поле может создаваться током с плотностью $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{v}^{(e)})$, возникшим из-за различия скоростей электронов и ионов, вызываемых градиентами МГД-величин. Различие скоростей может быть обусловлено отличием электронной вязкости от ионной. Оно возникает также в результате гиромагнитного эффекта, вызванного вращением Земли вокруг своей оси [151].) Для простоты будем считать, что скорость среды, поддерживаемая внешними источниками, не зависит от времени и равна

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \begin{cases} v_0 \cos\left(\dfrac{\pi}{L} y\right), & -\dfrac{L}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{L}{2}; \\ 0, & y < -L/2 \text{ или } y > L/2; \end{cases} \\ v_y = v_z = 0. \end{array}\right\} \qquad (8.1)$$

Компонента скорости v_x, зависящая от координаты y, моделирует дифференциальное вращение звезды, т. е. вращение, при котором различные участки звезды имеют различную скорость. Например, земная кора вращается быстрее, чем ее расплавленные недра [152].

В формуле (8.1) ось x направлена вдоль параллели, ось y – вдоль меридиана, а ось z – по радиусу. Таким образом, затравочное магнитное поле B_0 полоидально.

Из уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B} = 0 \qquad (8.2)$$

находим напряженность стационарного магнитного поля, вызванного движением среды со скоростью (8.1):

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \begin{cases} \dfrac{2B_0 v_0}{\pi v_m}\left(y - \dfrac{L}{2}\sin\dfrac{\pi}{L}y\right), & -\dfrac{L}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{L}{2}; \\ 0, \quad y < -\dfrac{L}{2} \text{ или } y > \dfrac{L}{2}; \end{cases} \\ B_y &= B_0; \quad B_z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

[интегрирование второго уравнения (8.2) проведено с учетом того, что плотность тока $\mathbf{j} = (c/4\pi)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}$ всюду конечна, т. е. что напряженность магнитного поля B_y непрерывна при $y = \pm L/2$].

Таким образом, напряженность возникшего в среде магнитного поля B_x значительно превосходит напряженность затравочного поля B_0, если велико магнитное число Рейнольдса, т. е. если $Lv_0/\nu_m \gg 1$.

Если поле скоростей (8.1) моделирует ситуацию на шаре (звезде или Земле), то возникшее магнитное поле B_x тороидально. Приведенный пример показывает возможность усиления магнитного поля, т. е. возникновение сильного тороидального поля из слабого полоидального. Для объяснения г е н е р и р о в а н и я магнитного поля необходима обратная связь, при которой из тороидального поля в свою очередь образуется более сильное полоидальное поле.

Однако приведенный механизм нельзя признать удовлетворительным даже для объяснения усиления магнитного поля, если процесс стационарен. Дело в том, что в рассматриваемом примере ламинарного стационарного гидромагнитного динамо движение среды и магнитное поле были п л о с к и м и, т. е. векторы **v** и **B** лежали в одной плоскости (плоскость $z = 0$):

$$v_z = 0; \quad B_z = 0. \qquad (8.4)$$

При этом магнитное поле простиралось в направлении оси x до бесконечности. Если же рассмотреть реальную ситуацию, в которой магнитное поле сосредоточено в конечной части пространства, то п л о с к о е стационарное гидромагнитное динамо невозможно (см. [71], с. 218). Это утверждение называют *теоремой антидинамо* [153].

Чтобы убедиться в этом, заметим, что система замкнутых магнитных силовых линий, расположенных на плоскости, имеет особые точки типа центра (см. рис. 8.1). Воспользуемся уравнением Максвелла в интеграль-

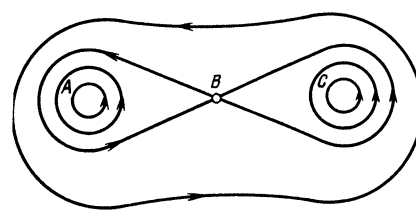


Рис. 8.1. Особые точки системы замкнутых магнитных силовых линий на плоскости:
A и *C* – центры; *B* – седло

ной форме

$$\iint_S j_z\,dx\,dy = (c/4\pi)\int_L B dL, \tag{8.5}$$

где L – одна из замкнутых магнитных силовых линий, топологически эквивалентная окружности, а S – область, заключенная внутри нее. Правая часть этого равенства отлична от нуля, поэтому j_z не может тождественно равняться нулю:

$$j_z \not\equiv 0. \tag{8.6}$$

С другой стороны,

$$\left.\begin{aligned} j_z &= \sigma\left\{E_z + \frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_z\right\}; \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

где φ и $\mathbf{A}$ – скалярный и векторный потенциалы. Так как в плоском стационарном случае все величины не зависят ни от z, ни от t, то

$$E_z \equiv 0. \tag{8.8}$$

Далее, в особой точке

$$\mathbf{B} = 0. \tag{8.9}$$

Подставляя эти выражения в (8.7), получаем

$$j_z \equiv 0,$$

что противоречит соотношению (8.6).

Таким образом, плоское гидромагнитное динамо невозможно, т. е. гидромагнитное динамо всегда трехмерно.

Аналогично можно доказать невозможность аксиально-симметричного динамо. Однако у Земли и других планет магнитная ось близка к оси вращения, поэтому отклонение от аксиальной симметрии мало [154, 155].

На рис. 8.2 показан пример трехмерного динамо-механизма [148, 156]. Проводящий жидкий тор, имеющий начальное тороидальное магнитное поле (рис. 8.2,*а*), деформируется, превращаясь в "восьмерку" (рис. 8.2,*б*). Затем окружности восьмерки совмещаются друг с другом (рис. 8.2,*в*). Если окружности на рис. 8.2,*а* и *в* имеют одинаковый диаметр, то описанная деформация сопровождается растяжением магнитных силовых линий вдвое, что в свою очередь вызывает увеличение напряженности магнитного поля. Заметим, что поле не просто увеличивается, но у него кроме тороидальной составляющей появляются еще малые полоидальные составляющие, так как топология силовых линий на рис. 8.2,*в* отличается от их топологии на рис. 8.2,*а*. Эти "лиш-

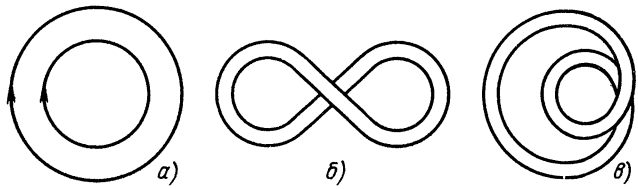


Рис. 8.2. Ламинарное гидромагнитное динамо

ние" поля уничтожаются в результате диффузии магнитного поля ([148], с. 13).

Усиление магнитного поля нужно представлять не столько как растягивание магнитных силовых линий, сколько как отщепление от них петель, которые далее растягиваются и вновь разделяются ([77]), с. 222).

Обзор различных теорий ламинарного гидромагнитного динамо см. в [151, 154].

8.2. Турбулентное динамо

Турбулентное движение жидкости влияет на магнитное поле двояким образом: с одной стороны, при турбулентности магнитные силовые линии растягиваются, что приводит к увеличению магнитного поля; с другой стороны, турбулентность увеличивает диссипацию, приводя к затуханию магнитного поля.

МГД-турбулентность делает несостоятельной теорему антидинамо. Турбулентность приводит к ряду новых эффектов, играющих большую роль в теории гидромагнитного динамо.

При выводе закона Ома (7.48) для турбулентности молчаливо полагалось, что турбулентность отражательно инвариантна. Благодаря этому обратился в нуль первый интеграл в уравнении (7.37). Рассмотрим теперь более сложный случай, когда соотношение (7.40) не имеет места, т. е. турбулентность гиротропна [13].

Полагая турбулентность гиротропной и однородной, находим, что тензор (7.39) имеет вид

$$\langle \tilde{v}_j(\mathbf{r}, t)\tilde{v}_k(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}, \tau)\rangle = a_1\delta_{jk} + a_2\xi_j\xi_k + a_3\epsilon_{jkl}\xi_l, \qquad (8.10)$$

где величины a_1, a_2, a_3 зависят только от $|\boldsymbol{\xi}|$. Иными словами, a_1 и a_2 — скаляры, а a_3 — псевдоскаляр. Кроме того, a_1, a_2, a_3 зависят, разумеется, также от t и τ.

Замечая, что дифференцирование по ξ_l можно заменить дифференцированием по x_l

$$\frac{\partial \tilde{v}_k(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_l} = \frac{\partial \tilde{v}_k(\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial x_l},$$

и полагая после дифференцирования $\xi = 0$, получаем из (8.10)

$$\langle \tilde{v}_j(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \tilde{v}_k(\mathbf{r}, \tau)}{\partial x_l} \rangle = a_3 \epsilon_{jkl}. \tag{8.11}$$

Поэтому первый интеграл в правой части равенства (7.37) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{t} \langle \tilde{v}_j(t) \frac{\partial \tilde{v}_k(\tau)}{\partial x_l} \rangle \langle B_l(\tau) \rangle d\tau = \epsilon_{jkl} \int_{-\infty}^{t} a_3(t, \tau) \langle B_l(\tau) \rangle d\tau. \tag{8.12}$$

Поступая аналогично выводу формулы (7.45), находим

$$\int_{-\infty}^{t} \langle \tilde{v}_j(t) \frac{\partial \tilde{v}_k(\tau)}{\partial x_l} \rangle \langle B_l(\tau) \rangle d\tau = \frac{\epsilon_{jkl}}{2} \alpha \langle B_l(t) \rangle, \tag{8.13}$$

где

$$\alpha = 2 \int_0^{\infty} a_3(t_1) dt_1. \tag{8.14}$$

Таким образом, при гиротропной турбулентности уравнение (7.48) принимает более сложный вид:

$$\langle \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{c} \langle \mathbf{v} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \frac{\alpha}{c} \langle \mathbf{B} \rangle = \frac{\langle \mathbf{j} \rangle}{\sigma^{(T)}},$$

откуда следует (при $\alpha = \text{const}$)

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \operatorname{rot}(\langle \mathbf{v} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \alpha \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle + \nu_m^{(T)} \Delta \langle \mathbf{B} \rangle, \tag{8.15}$$

где $\nu_m^{(T)} = c^2/(4\pi\sigma^{(T)})$.

Если оставить в правой части уравнения (8.15) только член, пропорциональный α, то получим

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \alpha \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle. \tag{8.16}$$

Отсюда видно, что при гиротропной турбулентности создается магнитное поле, параллельное ротору поля. Этот процесс, называемый *α-эффектом*, играет большую роль в теории гидромагнитного динамо. А именно, благодаря α-эффекту тороидальное магнитное поле генерирует полоидальное поле, осуществляя, таким образом, обратную связь, которой недоставало в теории ламинарного динамо, изложенной в § 8.1.

Выясним теперь физический смысл α-эффекта. Из формулы (8.11) находим

$$a_3 = -\frac{1}{6} \langle \tilde{\mathbf{v}}(t) \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}}(\tau) \rangle. \tag{8.17}$$

Поэтому согласно (8.14) [156]

$$\alpha = -\frac{1}{3}\langle \tilde{\mathbf{v}}(t)\,\mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{v}}(t)\rangle \tau_c . \qquad (8.18)$$

Таким образом, псевдоскаляр α является мерой спиральности турбулентного поля скоростей.

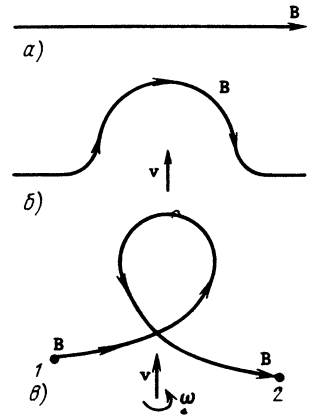


Рис. 8.3. α-Эффект

α-Эффект можно проиллюстрировать следующим образом [12]. Пусть вначале магнитное поле располагается в плоскости чертежа и направлено слева направо (рис. 8.3,*а*). Затем под действием сосредоточенной в одном месте скорости v, расположенной в плоскости чертежа и направленной вверх, поле деформируется (рис. 8.3,*б*). Если скорость обладает ротором ω = rot v, расположенным в плоскости чертежа и направленным вверх, то течение жидкости выводит магнитную силовую линию из плоскости чертежа, так что точка *1* располагается впереди, а точка *2* — позади плоскости чертежа (рис. 8.3,*в*). Такая петля соответствует rot B, параллельному первоначальному магнитному полю (рис. 8.3,*а*).

Мы видим, что когда векторы v и rot v параллельны, происходит уменьшение первоначального магнитного поля, сопровождающееся увеличением rot B. Это означает, что при параллельных v и rot v величина α отрицательна.

α-Эффект не только является недостающим звеном при построении теории ламинарного динамо, но и играет самостоятельную роль в теории турбулентного динамо [157]. Чтобы иллюстрировать следствия α-эффекта, пренебрежем в уравнении (8.15) членом со средней скоростью $\langle \mathbf{v} \rangle$. Опуская символы усреднения $\langle\,\rangle$, получаем

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = \alpha\ \mathrm{rot}\ \mathbf{B} + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \qquad (8.19)$$

где ν_m — суммарная магнитная вязкость, включающая как джоулевы потери, так и турбулентное электрическое сопротивление.

Уравнение (8.19) проще всего решить, разлагая решение в интеграл Фурье:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\, d\mathbf{k}. \qquad (8.20)$$

При этом уравнение в частных производных превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\mathbf{B}(\mathbf{k}, t)}{dt} = \mathrm{i}\alpha \mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) - k^2 \nu_m \mathbf{B}(\mathbf{k}, t). \qquad (8.21)$$

В силу отсутствия магнитных зарядов ($\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$) выполняется условие

$$\mathbf{kB}(\mathbf{k}, t) = 0. \tag{8.22}$$

Направим ось z вдоль вектора $\mathbf{k}$. Тогда магнитное поле согласно (8.22) будет иметь только две отличные от нуля компоненты B_x и B_y и векторное уравнение (8.21) сведется к двум скалярным

$$\left.\begin{aligned} dB_x/dt &= -\mathrm{i}k\alpha B_y - k^2\nu_m B_x; \\ dB_y/dt &= \mathrm{i}k\alpha B_x - k^2\nu_m B_y. \end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

Эта система уравнений имеет экспоненциальные решения вида $\mathbf{B} \sim \exp(\gamma t)$, причем

$$\gamma = k\alpha - k^2\nu_m \tag{8.24}$$

(затухающие решения с $\gamma < 0$ отброшены).

Таким образом, крупномасштабные магнитные поля, для которых

$$k < \alpha/\nu_m, \tag{8.25}$$

возрастают, тогда как мелкомасштабные поля, для которых выполняется противоположное неравенство, убывают. Заметим, что стационарного решения нет: поле либо генерируется, либо диссипирует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Физматгиз, 1967.

3. Альвен Г., Фельтхаммер К. Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967.

4. Вулис Л. А., Генкин А. Л., Фоменко Б. А. Теория и расчет магнитогазодинамических течений. М.: Атомиздат, 1971.

5. Недоспасов А. В. Физика МГД-генераторов// Успехи физ. наук. 1977. Т. 23. Вып. 2. С. 333–348.

6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Физматгиз, 1964.

7. Бесконтактный контроль потока жидких металлов/ В. Э. Циркунов, Б. Д. Жейгур, Г. Я. Сермонс, Р. К. Калнинь, Рига: Зинатне, 1973.

8. Чернетский А. В. Введение в физику плазмы. М.: Атомиздат, 1969.

8а. Основные понятия магнитной гидродинамики. МГД-устройства и МГД-установки: Сборник рекомендуемых терминов. М.: Наука, 1982.

9. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.

10. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М.: Физматгиз, 1976.

11. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.

12. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980.

13. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Физматгиз, 1970. Т. 1.

13а. Франк-Каменецкий Д. А. Плазма – четвертое состояние вещества. М.: Атомиздат, 1961.

13б. Шафранов В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 2.

14. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Физматгиз, 1970.

15. Верте Л. А. Магнитная гидродинамика в металлургии. М.: Металлургия, 1975.

16. Повх И. Л., Чекин Б. В. Магнитогидродинамическая сепарация. Киев: Наукова думка, 1978.

17. Баринберг А. Д. Магнитогидродинамические аппараты защиты, контроля и управления. М.: Энергия, 1978.

18. Бирзвалк Ю. А. Основы теории и расчета кондукционных МГД-генераторов постоянного тока. Рига: Зинатне, 1968.

19. Лиелпетер Я. Я. Жидкометаллические индукционные МГД-машины. Рига: Зинатне, 1969.

20. Васильев Л. Г., Хожаинов А. И. Магнитная гидродинамика в судовой технике. Л.: Судостроение, 1967.

21. Кирко И. М. Жидкий металл в электромагнитном поле. Л.: Энергия, 1964.

22. Повх И. Л., Капуста А. Б., Чекин Б. В. Магнитная гидродинамика в металлургии. М.: Металлургия, 1974.

23. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. М.: Мир, 1968.

24. Тананаев А. В. Гидравлика МГД-машин. М.: Атомиздат, 1970.
25. Янтовский Е. И. О схемах гидродинамических генераторов электроэнергии// Магнитная гидродинамика. 1969. № 2. С. 29–37.
26. Арефьев К. М., Палеев И. И. Основы термоэлектронного и магнитогидродинамического преобразования энергии. М.: Атомиздат, 1970.
27. Колечников П. М. Электродинамическое ускорение плазмы. М.: Атомиздат, 1971.
28. Роза Р. Магнитогидродинамическое преобразование энергии. М.: Мир, 1970.
29. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М.: Мир, 1965.
30. Лиелаусис О. А. Гидродинамика жидкометаллических МГД-устройств. Рига: Зинатне, 1967.
31. Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Физматгиз, 1970.
32. Бертинов А. И., Метлин В. Б. Магнитогидродинамические опоры// Магнитная гидродинамика. 1969. № 2. С. 3–18.
33. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1954.
34. Merches I. Variational principle in magnetohydrodynamics// Phys. Fluids, 1969, Vol. 12, N 10. P. 2225–2227.
35. Newcomb W. A. Lagrangian and Hamiltonian methods in magnetohydrodynamics// Nucl. Fus. Suppl. 1962, N 2. P. 451–463.
36. Penfield P. Hamilton's principle for fluids// Phys. Fluids. 1966. Vol. 9, N 6. P. 1184–1194.
37. Seliger R. L., Whitham G. B. Variational principles in continuum mechanics// Proc. Roy. Soc. 1958. Vol. A305, N 1480. P. 1–25.
38. Рудаков Л. И. Влияние вязкости плазмы в магнитном поле на устойчивость плазмы// Ядерный синтез. 1962. Т. 2. № 1–2. С. 107–108.
39. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Физматгиз, 1979.
40. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1974.
41. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Турбулентные процессы в тороидальных системах// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Лентовича. М.: Атомиздат, 1967. Вып. 5.
42. Де Гроот С. Р. Термодинамика необратимых процессов. М.: ГИТТЛ, 1956.
43. Де Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
44. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1963. Вып. 1.
45. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1966.
46. Vanghar-Williams R. W., Haas F. A. An error in the thermal conductivity for a fully ionized gas// Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 6, N 4. P. 165–166.
47. Половин Р. В., Черкасова К. П. Об уравнениях магнитной гидродинамики// Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. Киев: Изд-во АН УССР, 1963.
48. Freidberg J. P. Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems// Rev. Mod. Phys. 1982. Vol. 54, N 4. P. 801–902.
49. Pridmore-Brown D. C. Reflection and refraction of magneto-acoustic waves at an interface// Phys. Fluids. 1963. Vol. 6, N 6. P. 803–805.
50. Косачевский Л. Я. Отражение магнитозвуковых волн// Прикл. матем. и теорет. физ. 1970. № 1. С. 56–61.
51. Berstein I. B. Geometric optics an ideal magnetohydrodynamic fluid// J. Plasma Phys. 1971. Vol. 5, N 3. P. 303–313.
52. Bazer J., Fleichman O. Propagation of weak hydromagnetic discontinuities// Phys. Fluids, 1959. Vol. 2, N 4. P. 366–378.

53. Моисеев С. С., Смилянский В. Р. К вопросу о трансформации волн в магнитной гидродинамике// Магнитная гидродинамика. 1965. № 2. С. 23–30.

54. Ситенко А. Г., Кирочкин Ю. А. О рассеянии и трансформации волн на флуктуациях в магнитной гидродинамике// Журн. техн. физ. 1963. Т. 33, № 11. С. 1354–1365.

55. Галеев А. А., Ораевский В. Н. О неустойчивости альфвеновских волн// Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 1. С. 71–73.

56. Ораевский В. Н. Устойчивость нелинейных установившихся колебаний плазмы// Ядерный синтез. 1964. Т. 4, № 4. С. 263–271.

57. Plasma electrodynamics/ A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko// Oxford: Pergamon Press, 1975. Vol. 1.

58. Половин Р. В., Демуцкий В. П. О характере распадной неустойчивости// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1981. Т. 81, вып. 5. С. 1707–1713.

59. Волков Е. Д., Супруненко В. А., Шишкин А. А. Стелларатор. Киев: Наукова думка, 1983.

60. Weitzner H. Green's function for two-dimentional magnetohydrodynamic waves. II// Phys. Fluids. 1961. Vol. 4, N 10. P. 1246–1250.

61. Половин Р. В., Черкасова К. П. Магнитогидродинамические волны// Успехи физ. наук. 1966. Т. 39, вып. 4. С. 593–617.

62. Черкасова К. П. Обобщенный закон Ома и эволюционные течения в магнитной гидродинамике. Дис. канд. физ-мат. наук. Харьков, Физико-технический институт АН УССР, 1966.

63. Электродинамика плазмы/ А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов. М.: Физматгиз, 1974.

64. Сивухин Д. В. О конической рефракции магнитозвуковых волн// Магнитная гидродинамика. 1966. № 1. С. 35–42.

65. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Простые волны в магнитной гидродинамике// Журн. техн. физ. 1959. Т. 29, № 8. С. 933–938.

66. Куликовский А. Г. О волнах Римана в магнитной гидродинамике// Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 6. С. 987–990.

67. Любарский Г. Я., Половин Р. В. Простые магнитозвуковые волны// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1958. Т. 35, № 2. С. 509// Укр. физ. журн. 1958. Т. 3, № 5. С. 567–570.

68. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1967. Вып. 5.

69. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. Равновесие плазмы с током в тороидальных системах// Там же/ Под ред. А. М. Леонтовича, Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11.

70. Rosenbluth M. N., Bussac M. N. MHD stability of spheromak// Nucl. Fus. 1979. Vol. 19, N 4. P. 489–498.

70а. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Геометрия магнитного поля// Вопросы теории плазмы.: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1963. Вып. 2.

70б. Бакай А. С., Степановский Ю. П. Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981.

71. Пикельнер С. П. Основы космической электродинамики. М.: Физматгиз, 1966.

72. Соловьев Л. С. Гидромагнитная неустойчивость замкнутых плазменных конфигураций// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1972. Вып. 6.

73. Бейтман Г. МГД-неустойчивости. М.: Энергоиздат, 1982.

74. Mukhovatov V. S., Shafranov V. D. Plasma equilibrium in a Tokamak// Nucl. Fus. 1971. Vol. 11, N 6. P. 605–633.

75. Хеглер М., Кристиансен М. Введение в управляемый термоядерный синтез. М.: Мир, 1980.

76. Кадомцев Б. Б. Магнитные ловушки с "гофрированным" полем// Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3.

77. Calvao R. M. O. Mercier stability of non-circular cross-section configurations// Nucl. Fus. 1975. Vol. 15, N 5. P. 785–792.

78. World Survey of Major Facilities in controlled fusion research// Nucl. Fus. 1976. Spec. Suppl.

79. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Физматгиз, 1973.

80. Гурин А. А., Пасечник Л. Л., Попович А. С. Диффузия плазмы в магнитном поле. Киев: Наукова думка, 1979.

81. Жданов В. М., Ютманов П. Н. Диффузия и перенос тепла в многокомпонентной полностью ионизованной плазме// Прикл. матем. и теорет. физ. 1980. № 4. С. 24–35.

82. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 2.

83. Фюрт Г. Стабилизация плазмы в тороидальных системах с помощью минимума среднего B// Физика высокотемпературной плазмы. М.: Мир, 1972.

84. Grad H. Minimum B as a plasma stability criterion// Phys. Rev. Lett. 1966. Vol. 16, N 25. P. 1147–1150.

85. Скорняков Г. В. Некоторые вопросы топологии магнитного поля// Ядерный синтез. 1962. Т. 2, № 3–4. С. 121–124.

86. Погуце О. П., Юрченко Э. И. Влияние шира на устойчивость плазмы в токамаке// Физика плазмы. 1979. Т. 5. Вып. 4. С. 786–794.

87. Погуце О. П., Юрченко Э. И. Баллонные эффекты и устойчивость плазмы в токамаке// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича, Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11.

88. Михайловский А. Б. К теории баллонных мод в токамаке с большим β// Физика плазмы. 1978. Т. 4, вып. 6. С. 1226–1236.

89. Погуце О. П., Чудин Н. В., Юрченко Э. И. Устойчивость баллонных мод в токамаке с некруглым сечением// Физика плазмы. 1980. Т. 6, вып. 3. С. 621–629.

90. Coppi B. Topology ballooning modes// Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 39, N 15. P. 939–942.

91. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Устойчивость плазмы// Успехи физ. наук. 1961. Т. 73, вып. 4. С. 701–766.

92. Брагинский С. И., Кадомцев Б. Б. Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников// Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций: Сб. статей. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3.

93. Spalding I. J. Gusp containment and thermonuclear reactions.// Nucl. Fus. 1968. Vol. 8, N 3. P. 161–171.

94. Furth H. P., Killken J., Rosenbluth M. N. Finite-resistivity instabilities of a sheet pinch// Phys. Fluids. 1963. Vol. 6, N 4. P. 459–484.

95. Zakharov L. E. High-wave-number MHD-mode stability in high pressure tokamaks// Plasma physics and controlled nuclear fusion research. Seventh conference proceedings, Innsbruck, 1978/ International atomic energy agency, Vienna, 1979.

96. Коврижных Л. М., Щепетов С. В. Существует ли предельное давление в стелларараторе?// Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33, вып. 9. С. 441–444.

97. Михайловский А. Б., Шафранов В. Д. Эффект самостабилизации плазмы высокого давления в тороидальных ловушках// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1974. Т. 66, вып. 1, С. 190–199.

98. Grad H. Toroidal containment of a plasma// Phys. Fluids. 1967. Vol. 10, N 1. P. 137–154.

99. Арсенин В. В., Чуянов В. А. Подавление неустойчивостей плазмы методом обратных связей// Успехи физ. наук. 1977. Т. 123, вып. 1. С. 83–129.

100. Krall N. A., Trivelpiece A. W. Principles of plasma physics. N. Y. McGraw Hill Book Co., 1973. 674 p.

101. Михайловский А. Б. Развитие гидромагнитных неустойчивостей токамаков// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1979. Вып. 9.

102. Шафранов В. Д., Юрченко Э. И. Критерий желобковой неустойчивости плазмы в тороидальной геометрии// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1967. Т. 53, вып. 3. С. 1157–1166.

103. Marginal stability condition for stationary nondissipative motions/ G. Laval, R. Pellat, M. Cotsaftis, M. Trocheris.// Nucl. Fus. 1964. Vol. 1, N 1. P. 25–29.

104. Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities/ M.N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, J. B. Taylor, G. M. Zaslavsky// Ibid. 1966. Vol. 6, N 4. P. 297–300.

105. Лихтенбург А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

106. Westphal K. O., McKenzie J. F. Interaction of magnetohydrodynamic shock waves// Phys. Fluids, 1969. Vol. 12, N 6. P. 1228–1236.

107. Chirikov B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems// Phys. Rep. 1979. Vol. 52, N 5. P. 263–279.

108. Zaslavsky G. M. Stochasticity in quantum system// Ibid. 1981. Vol. 80, N 3. P. 157–250.

109. Finn J. M. The distruction of magnetic surfaces in tokamaks by current perturbations.// Nucl. Fus. 1975. Vol. 15, N 5. P. 845–854.

110. Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M. Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities: part II.// Ibid. 1967. Vol. 7, N 4. P. 253–266.

111. Magnetic "islandography" in tokamaks// Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research Seventh Conference Proceedings, Inssbruck, 1978// Nucl. Fus. Suppl. 1979, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1979. Vol. 1.

112. Kadomtsev B. B., Pogutse O. P. Electron heat conductivity of the plasma across a "braided" magnetic field// Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Seventh Conference Proceedings, Innsbruck, 1978// Nucl. Fus. Suppl. 1979. International Atomic Energy Agency, Vienna, 1979. Vol. 1.

113. Иорданский С. В. Теорема Цемплена в магнитной гидродинамике// Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 4. С. 610–612.

114. Gardner C. S., Kruskal M. D. Stability of plane magnetohydrodynamic shocks// Phys. Fluids, 1964. Vol. 7, N 5. P. 700–706.

114а. Цинцадзе Н. Л. К теории взаимодействия и трансформации электромагнитных волн в неравновесной плазме: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Тбилиси, Институт физики АН ГССР. 1965.

115. Fejer J. A. Hydromagnetic reflection and refraction at a field velocity discontinuity// Phys. Fluids. 1963. Vol. 6, N 4. P. 508–512.

116. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1958. Т. 35, вып. 3. С. 731–737.

117. Конторович В. М. О взаимодействии малых возмущений с разрывами в магнитной гидродинамике и об устойчивости ударных волн// Там же, вып. 5. С. 1216–1225.

118. Сыроватский С. И. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике// Там же. Т. 35, вып. 6. С. 1466–1470.

119. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics. N. Y.: Academic Press, 1964.

120. Erickson W. B., Bazer J. On certain properties of hydromagnetic shocks// Phys. Fluids, 1960. Vol. 3, N 4. P. 631–640.

120а. Бармин А. А., Гогосов В. В. Задача о поршне в магнитной гидродинамике// Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 5. С. 1041–1043.

121. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле// Гидромеханика. Т. 5. Итоги науки. М.: ВИНИТИ, 1971.

121а. Гогосов В. В. Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике// Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25, № 1. С. 148–170.

121б. Бармин А. А. Исследование поверхностей разрыва с выделением (поглощением) энергии в магнитной гидродинамике// Прикладная математика и механика. 1962, вып. 5. С. 801–810.

122. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов. М.: Наука, 1974.

123. Велихов Е. И., Дыхне А. М. Волна неравновесной ионизации в газе// Proc. Seventh International Conference on Phenomena in Ionized Gases (Beograd, 1965), Beograd, Gradevinska kniga. 1966. Vol. 2.

124. Lasker B. M. Ionization fronts for H II regions with magnetic fields// Astrophys. J. 1966. Vol. 146, N 2. P. 471–479.

125. Sagdeev R. Z. The 1976 Oppenheimer lectures: Critical problems in plasma astrophysics. II. Singular layers and reconnection// Rev. Mod. Phys. 1979. Vol. 51, N 1. P. 11–20.

126. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизующих газ// Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 1. С. 52–55.

127. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Физматгиз, 1976.

128. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике. М.: Атомиздат, 1968.

128а. Germain P. Contribution a la the'orie des ondes de choc en magn'etodynamique des fluids: Office National d'Etudes of de Recherches Aeronautiques// Publicution N 97, Paris, Dec. 1959; Shock Waves and shock-wave structure in magneto-fluid dynamics// Rev. Mod. Phys. 1960. Vol. 32, N 4. P. 951–958.

128б. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Структура наклонной магнитогидродинамической ударной волны// Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25, Т 1. С. 125–131.

128в. Куликовский А. Г. О структуре ударных волн в магнитной гидродинамике при произвольном законе диссипации// Там же. 1962. Т. 26, № 2. С. 273–279.

129. Liberman M. A., Velikovich A. L. Physics of ionizing shock waves in a magnetic fields// Phys. Rep. 1982. Vol. 84, N 1. P. 1–84.

130. Любарский Г. Я. О существовании ударных волн малой интенсивности// Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, № 3. С. 511–519.

130а. Куликовский А. Г. О структуре ударных волн// Там же. 1962. Т. 26, № 2. С. 631–641.

131. Дементий О. И., Дементий С. В. Фазовые скорости и разрывная структура ударной волны// Прикл. матем. и теорет. физ. 1978. № 6. С. 25–32.

132. Liberman M. A., Velikovich A. L. The theory of ionizing shock waves in a magnetic field// J. Plasma Phys. 1981. Vol. 26, part 1. P. 28–81.

133. Leonard B. P. Magnetic structure of ionizing shock waves// J. Plasma Phys. 1972. Vol. 7, part 1. P. 133–185.

133а. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об ударных волнах, ионизующих газ при наличии произвольно ориентированного магнитного поля: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (к 60-летию акад. Л. И. Седова). М.: Физматгиз, 1969.

133б. Chu C. K. Dynamics of ionizing shock waves: shocks in transverse magnetic fields// Phys. Fluids. 1964. Vol. 7, N 8. P. 1349–1357.

134. Куликовский А. Г. О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами: Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике// Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32, № 6. С. 1125–1131.

134а. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Простейшие задачи, содержащие ионизующий газ ударную волну в электромагнитном поле// Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 3. С. 525–528.

134б. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. О возможных типах разрывов со скачком проводимости// Изв. АН СССР, ОТН. 1959. № 4. С. 130–131.

134в. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об ударных волнах, ионизующих газ находящийся в электромагнитном поле// Докл. АН СССР. 1968. Т. 178, № 1 С. 55–58.

135. Гульельми А. В. МГД-волны в околоземной плазме. М.: Наука, 1979.
136. Докучаев В. П., Логачева В. Д. О возбуждении магнитозвуковых волн движущимися излучателями// Журн. тех. физ. 1965. Т. 35. С. 794–802.
137. Морозов А. И. Черенковская генерация магнитозвуковых волн// Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 4.
138. Коган М. Н. Некоторые свойства магнитогидродинамических течений в ударных волнах// Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Рига: Изд-во АН Латв. ССР, 1962. Т. 2.
138а. Любимов Г. А. Стационарное обтекание угла потоком бесконечно проводящего газа// Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 4. С. 733–735.
139. Коган М. Н. Ударные волны в магнитной газодинамике// ПММ. 1959. Т. 23, вып. 3. С. 557–563.
140. Жигулев В. Н. О явлении магнитного "отжатия" потока проводящей среды// Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 3. С. 521–523.
140а. Куликовский А. Г. Об обтекании намагниченных тел проводящей жидкостью// Докл. АН СССР. 1957. Т. 117, № 2. С. 199–202.
141. Chu C. K. Linearized hyperbolic steady magnetohydrodynamic flow past noncondycting walls// Phys. Fluids. 1964. Vol. 7, N 5. P. 707–714.
142. Ладыженский М. Д. Гиперзвуковое обтекание тел в магнитной гидродинамике// Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, № 6. С. 993–1005.
143. Cabannes H. Theoretical magnetofluiddynamics. N. Y.: Academic Press, 1970.
144. Oguchi H. Blunt body viscous layer vith and without a magnetic field// Phys. Fluids. 1960. Vol. 3, N 4. P. 567–580.
145. Ладыженский М. Д. О магнитогидродинамическом гиперзвуковом обтекании клина// Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, № 1. С. 55–60.
146. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы// Вопросы теории плазмы: Сб. статей/ Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4.
146а. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме// Там же.
147. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. М.: Физматгиз. Ч. 1, 1965; Ч. 2, 1967.
148. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980.
149. Моисеев С. С., Тур А. В., Яновский В. В. О спектре однородной турбулентности в проводящей несжимаемой жидкости// Журн. техн. физ. 1977. Т. 47, № 3. С. 473–481.
149а. Kraichnan D. H. Inertial range spectrum of hydromagnetic turbulence// Phys. Fluids. 1965. Vol. 8, N 7. P. 1395–1387.
150. Яглом А. М. Асимптотическое поведение спектра турбулентности при различных моделях спектрального переноса энергии. М.: Физматгиз, 1969.
151. Яновский Б. М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.
152. Дайэл П., Паркин К. Магнетизм Луны// Успехи физ. наук. 1972. Т. 108, вып. 1. С. 177–191.
153. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М.: Мир, 1964.
154. Бродский Ю. А. Анализ задачи гидромагнитного динамо с использованием теории возмущений/ Журн. эксперим. и теорет. физ. 1982. Т. 82, вып. 3. С. 709–724.
155. Брагинский С. И. К теории гидромагнитного динамо// Там же. 1964. Т. 47, вып. 6. С. 2178–2193.
156. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б. О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентный механизм "динамо") // Успехи физ. наук. 1972. Т. 106, вып. 3. С. 431–457.
157. Вайншнейт С. И. О генерации крупномасштабного магнитного поля турбулентной жидкостью// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1970. Т. 58, вып. 1. С. 153–159.

158. Баранов Б. Б., Краснобаев К. В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Физматгиз, 1977.
159. Горбацкий В. Г. Космическая газодинамика. М.: Физматгиз, 1977.
160. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика// Успехи физ. наук. 1957. Т. 62. С. 247.
161. Новиков И. И. Прикладная магнитная гидродинамика. М.: Атомиздат, 1969.
162. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М.: Мир, 1964.
163. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомодельные волны 68
Альфвеновская волна 50
– скорость 43
Амплитуда ударной волны 109
Антидинамо 187
Асинхронный плазменный двигатель 13
Аспектное отношение 89
α-эффект 190

Безындукционное приближение 46
Бессиловые конфигурации 74

Вискозиметрическое течение 29
Вмороженности закон 19
Волны включения 71
– выключения 71
– двумерные 48
– одномерные 47
– сферическая 49
– трехмерные 49
– цилиндрические 49
Вращательное преобразование 82
Вращения число 70
Вязкость кажущаяся 158
– кинематическая 43
– магнитная 30, 42

Гартмана течение 156
– число 157
Геометрическая оптика 55
Гидростатика магнитная 72
Гомополяр 12
Горение быстрое 134
– доальфвеновское 134
– медленное 134
– сверхальфвеновское 134
Греда – Шафранова уравнение 77
Гюгонио адиабата 110
– линия 121

Двухпараметрическая среда 19
Девиатор 27
Детонация 133
– пересжатая 136
Детонационная волна быстрая 136
– – медленная 136
– – параллельная 135
– – перпендикулярная 135
Динамо кинематическое 186
– магнитное 186
Дисперсионные коэффициенты 30
Диссипативные коэффициенты 28
Диссипация 133
Дифференциальные уравнения нерегулярные 92
– – регулярные 92
Диффузия амбиполярная 84
Дрейфовая скорость 12
Дрейфовое движение 12

Жидкость простая 9

Закон возрастания энтропии 26
Закон отсутствия магнитных зарядов в дифференциальной форме 18
– в интегральной форме 18
Закон сохранения магнитного потока в дифференциальной форме 18
– в интегральной форме 19
– – массы в дифференциальной форме 15
– – – в интегральной форме 15
– – импульса в дифференциальной форме 16
– – энергии в дифференциальной форме 17
– – – в интегральной форме 16
– – энтропии 22
Запас устойчивости 89

Идеальный газ 20
Излучение 133

Изомагнитный скачок 146
Инерционная область 178
Ионизирующая волна косая 148
– – спиральная 148

Каверна 12
Кнудсена число 9
Колмогорова–Обухова закон 185
Коническая рефракция 68
Корреляция во времени 171
– в пространстве 170
– экспоненциальная 171
Коэффициент вязкости объемной второй 27
– – сдвиговой первой 27
– теплопроводности 27
– электропроводности 27
Коэффициенты переноса анизотропные 32
– – аномальные 169
– – кинетические 32
Критерий устойчивости Крускала–Шафранова 88
– – Сайдема 99
Кюри принцип 27

Лакуны 67
Ламинарное движение 168
Линейная теория переноса 27
Линия силовая магнитная 73
Линия слабого разрыва 66
Ловушка магнитная 73
– адиабатическая 76
– со встречными полями 89
– замкнутая 79
– с магнитными пробками 76
– с минимумом 87
– с остроконечной геометрией 89
– открытая 77

Магнитная бутылка 76
Магнитная гидродинамика двужидкостная 9
– – идеальная 22
– – с ионной дисперсией 45
– – многожидкостная 9
– – в узком смысле 8
– – с учетом конечности ларморовского радиуса ионов 46
– в широком смысле 8
Магнитное поле крупномасштабное 185
– мелкомасштабное 184
Магнитный остров 103
Магнитогидродинамические генераторы
– движители 12
– измерители скорости 11
– насосы индукционного типа 13
– насосы кондукционного типа 12
– расходомеры 11
Магнитогидродинамическое течение гиперболическое 165
– – эллиптическое 165
Магнитозвуковые волны быстрые 50
– – медленные 50
Максвелла уравнения в интегральной форме 106
Маха угол 162

Непрерывный спектр 93
Неустойчивость баллонная 88
– диссипативная 90
– желобковая 87
– колебательная 97
– перегревная 90
– токово-конвективная 90
Ньютоновская жидкость 27

Область влияния магнитной оси 79
Ома закон обобщенный 27
Ось магнитная 79
– – n-го порядка 80
Основной масштаб турбулентности 178

Пекле число 44
Пинч плоский 74
Пиротрон 76
Плазма бесстолкновительная 41
– замагниченная 31
– изотермическая 34
– простая 34
Поверхность иррациональная 80
– магнитная 73
– рациональная 80
Поверхностные величины 78
– функции 80
Поле винтовое 77
– полоидальное 77
– тороидальное 77
Поляра групповая 66
– фазовая 51
Принцип симметрии кинетических коэффициентов Онзагера 28
Пробки магнитные 76

Пробкотрон 76
Процесс переноса 24
Пуазейля формула 158
Пульсация 170

Разрыв альфвеновский 108
– *D*-типа 132
– конденсационный 132
– контактный 108
– поперечный сильный 105
– – слабый 132
– рекомбинационный 132
– *R*-типа 132
– тангенциальный 111
– экзотермический 131
– эндотермический 131
Разряд 132
Распадные условия 63
Рассеяние волны 55
Рейнольдса число 43
– магнитное 44
Рейстрек 83

Сепаратриса 79
Сечение меридиональное 78
Сирса число 46
Собственные волны 90
Спектр турбулентности одномерный 183
– – трехмерный 182
– – универсальный 184
Стелларатор 80
Стохастически устойчивая конфигурация 100
Структура ударного разрыва 138
– ударной волны 137

Тензор скоростей деформации 26
– – течения 26
Теплопроводность поперечная 33
– продольная 33
Термодинамические потоки 25
– силы 26
Тиринг-мода 90
Токамак 80
Тор 78
– гофрированный 83
Тороид 78
Трансформация волн 55
Турбулентное движение 168
Турбулентность гиротропная
– локально-изотропная 173
– локально-однородная 173
– отражательно-инвариантная 173
– развитая 172
– слабая 177
– стационарная 173

Ударная адиабата 110
Ударная волна бесстолкновительная 141
– – быстрая 111
– – включения 111
– – выключения 111
– – доальфвеновская 117
– – ионизационная 133
– – косая 110
– – медленная 110
– – особая 110
– – параллельная 110
– – перпендикулярная 110
– – продольная 110
– – сверхальфвеновская 117
– – установившаяся 139
– – эволюционная 114
Удельный объем 80
Уравнение баланса импульса в дифференциальной форме 16
– – – в интегральной форме 16
– – баланса энергии 17
– непрерывности 15
Уравнение переноса линейные 32
Условие квазинейтральности 36
Устойчивость по Ляпунову 85

Флуктуация 170
Фронт горения 131
– ионизационный 132
– фотоионизационный 132
Фурье закон 27

Характеристика 64
Холла ток 33

Цемплена теорема 109

Чемпена–Жуге режим 135
Чирикова критерий 105

Шафранова–Крускала ток 89
Шир 74

Электрическое сопротивление поперечное 33
– – продольное 33
Электропроводность поперечная 33
– продольная 33
– холловская 33
Энергетический принцип 94
Энтропийная волна 51
Эргодическая гипотеза 172
Эффект Зеебека 33
– Ледюка–Риги 33
– Нернста 33
– Пельтье 33
– Холла 33
– Эттингсхаузена 33
Яма магнитная 87

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Основные обозначения 6
Глава 1. Основные соотношения 8
1.1. Магнитогидродинамические приближения 8
1.2. Магнитогидродинамические эффекты 11
1.3. Законы сохранения 13
1.4. Идеальная магнитная гидродинамика 19
1.5. Изотропные процессы переноса 24
1.6. Анизотропные процессы переноса 31
1.7. Оценка кинетических коэффициентов 34
1.8. Неидеальная магнитная гидродинамика 41
Глава 2. Магнитогидродинамические волны 47
2.1. Уравнения магнитогидродинамических волн 47
2.2. Линейные волны 49
2.3. Непрерывный спектр 55
2.4. Неустойчивость магнитогидродинамических волн 57
2.5. Слабые разрывы 64
2.6. Автомодельные волны 68
Глава 3. Магнитная гидростатика 72
3.1. Равновесные конфигурации 72
3.2. Аксиально-симметричные конфигурации 76
3.3. Замкнутые магнитные ловушки 79
3.4. Диффузия плазмы 83
Глава 4. Устойчивость равновесных конфигураций 85
4.1. Устойчивость непрерывной конфигурации по Ляпунову 85
4.2. Метод собственных функций 90
4.3. Энергетический принцип 94
4.4. Стохастическая неустойчивость 100
Глава 5. Ударные волны и разрывы 105
5.1. Граничные условия на поверхности разрыва 105
5.2. Классификация сильных разрывов 108
5.3. Устойчивость разрывов по Ляпунову 112
5.4. Эволюционность разрывов 114
5.5. Скачки магнитогидродинамических величин на различных волнах 118
5.6. Параллельные ударные волны 120
5.7. Особые ударные волны 122
5.8. Порядок следования волн 124
5.9. Задача о поршне 126
5.10. Расщепление разрыва 128
5.11. Разрывы с выделением или поглощением энергии 130
5.12. Структура разрывов 137
5.13. Структура перпендикулярной ударной волны 141
5.14. Изомагнитный скачок 146
5.15. Ионизующая волна в непроводящем газе при наличии магнитного поля 147

Глава 6. Стационарные течения 154
6.1. Граничные условия на поверхности твердой стенки 154
6.2. Течение Гартмана 156
6.3. Идеальная магнитная аэродинамика 161
6.4. Неидеальная магнитная аэродинамика 166
Глава 7. Турбулентиость 168
7.1. Турбулентное состояние 168
7.2. Аномальная электропроводность 174
7.3. Слабая турбулентность 177
7.4. Сильная турбулентность 180
7.5. Спектр турбулентности 184
Глава 8. Гидромагнитное динамо 186
8.1. Ламинарное динамо 186
8.2. Турбулентное динамо 189
Список литературы 193
Предметный указатель 201

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Револьд Васильевич Половин
Виктор Петрович Демуцкий

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Редактор *З. Д. Андреенко*
Художественные редакторы *А. А. Белоус, А. Т. Кирьянов*
Технический редактор *Н. М. Брудная*
Корректор *С. Ю. Торокина*
Оператор *М. А. Панфилова*
ИБ № 1708

Набор выполнен в Энергоатомиздате на Композере ИБМ-82. Подписано в печать 30.10.86. Т-22743. Формат 60x88 1/16. Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,74. Усл. кр.-отт. 12,98. Уч.-изд. л. 13,45. Тираж 3560 экз. Заказ 747. Цена 2 р.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 9 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 109033, Москва, Ж-33, Волочаевская ул., 40

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ готовит к изданию в 1988 году следующие книги:

Ключарев А. Н., Янсон М. Л. Элементарные процессы в плазме щелочных металлов. – 15,5 л.: ил. – (В обл.)

Посвящена систематическому изложению современного состояния эксперимента и теории в области исследований элементарных процессов с участием атомов и молекул щелочных металлов. Делаются выводы общего характера об эффективности этих процессов в зависимости от параметров среды, сорта частиц – партнеров по соударениям, а также их влиянию на макроскопические характеристики щелочной плазмы. В своей значительной части монография основывается на материалах исследований, выполненных под руководством и при участии авторов в течение последних десяти лет.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в области физики плазмы, плазмохимии, газовых лазеров.

Рожанский В. А., Цендин Л. Д. Столкновительный перенос в частично ионизованной плазме. – 15,5 л.: ил. – (В обл.)

Изложено современное состояние исследований классических (обусловленных парными столкновениями) процессов переноса частиц и энергии в частично ионизованной плазме. Приведены решения разнообразных задач, возникающих в физике ионосферы, газовых разрядов и полупроводников. Они отличаются граничными условиями, степенью нелинейности (отклонением возмущенной концентрации от фоновой), влиянием магнитного поля, формой начальной неоднородности, степенью ионизации плазмы и т. д. Решающую роль во всех рассмотренных явлениях играют самосогласованные электрические поля и вызываемые ими токи, анализу которых уделяется особое внимание.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по физике плазмы, газовых разрядов, ионосферы.

Предварительные заказы на эти книги принимают все магазины научно-технической литературы.

Для получения книг по предварительным заказам покупателю необходимо оставить в книжном магазине почтовую открытку с указанием обратного адреса, автора и названия книги, номера книги по плану.

Организации могут заказать книги через магазины гарантийными письмами.

Книжные магазины принимают предварительные заказы до 1 ноября 1987 г.

Своевременное оформление заказов – гарантия того, что Вы приобретете интересующую Вас книгу.