УДК 52+53
К78
ББК 22.313

Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.

К78 Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984, 320 с., ил.

Авторы книги, крупные специалисты из ГДР, представили разработанный ими новый подход к рассмотрению сложных проблем взаимодействия и генерации магнитных и электрических полей в проводящих средах. Детально изложены основные уравнения, методы усреднения, теория усиления полей турбулентными движениями и различные приложения в электродинамике, астрофизике и геофизике.

Для специалистов по физике плазмы, астрофизиков и геофизиков, включая студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

К $\frac{1705040000 - 402}{041(01) - 83}$ 83 — 84, ч. 1.

ББК 22.313
530.1

Редакция литературы по космическим исследованиям, астрономии и геофизике

© Academie Verlag, Berlin, 1980.
© Перевод на русский язык с авторскими дополнениями, "Мир", 1984.

Предисловие

редактора перевода

В настоящее время теория генерации магнитных полей в турбулентной среде достигла известной степени завершенности. Появился целый ряд обзоров и монографий, которые написаны авторами — создателями этой теории. Сюда следует прежде всего отнести монографии Паркера [13*], Моффата [12*], Вайнштейна, Зельдовича и Рузмайкина [26*]. Вайнштейна [25**], Зельдовича и Рузмайкина [27**], работы Брагинского и, конечно, монографию Краузе и Рэдлера, предлагаемую вниманию советского читателя. Все эти монографии практически почти не перекрываются, несмотря на то, что посвящены близким вопросам. Поэтому не случайно издательство "Мир" вслед за переводом монографий Моффата и Паркера предприняло издание на русском языке данной книги, написанной видными немецкими учеными, лауреатами Государственной премии ГДР.

Краузе и Рэдлер наряду со Штеенбеком являются создателями последовательной и стройной теории усиления магнитного поля турбулентными движениями, хотя целый ряд таких механизмов уже был рассмотрен ранее Паркером [184, 185], Брагинским [18, 19] и др. Наиболее важные ограничения динамо-теории были сформулированы Каулингом [45] и Зельдовичем [299].

Содержание книги значительно шире, чем собственно проблема турбулентного динамо. Магнитная гидродинамика средних полей предназначена для описания широкого круга магнитных и гидродинамических явлений в турбулентных средах и очень важна не только для проблем астрофизики, но также для ряда практических задач, связанных, например, с проектированием ядерных реакторов, в которых имеется жидкий проводящий теплоноситель и возникает магнитное поле.

Монография Краузе и Рэдлера отличается от других не только выбором конкретных вопросов, но и стилем изложения. Для книги характерна подробность всех математических выкладок и обстоя-

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Турбулентность и крупномасштабные структуры

Астрофизические и геофизические исследования стимулировали все возрастающий интерес к поведению электромагнитных полей в электрически проводящих жидкостях, участвующих в нерегулярных, особенно турбулентных, движениях. Предметом пристального внимания стали важные проблемы, связанные с существованием магнитного поля Земли и цикла солнечной активности. Было показано, что их возникновение тесно связано с турбулентными движениями в ядре Земли и в конвективной зоне Солнца.

Элементарные наблюдения породили общее убеждение, что турбулентные движения разрушают структуры всех видов. Например, магнитные поля в солнечных пятнах разрушаются в течение недель. Согласно оценкам, не учитывающим турбулентность, продолжительность их существования должна составлять более тысячи лет. Их быстрый распад объясняется влиянием турбулентного движения вещества в солнечной конвективной зоне.

Замечательный результат новых исследований состоит в том, что турбулентность не всегда является причиной разрушения крупномасштабных структур, но при определенных условиях может их создавать. Как показал Бирман [16], именно анизотропная турбулентность ответственна за неоднородное вращение конвективной зоны Солнца и других звездных объектов. Подобным же образом турбулентные движения могут привести к генерации крупномасштабных магнитных полей. Френкель [66], а также Гуревич и Лебединский [90] высказали идею о том, что конвективные движения ответственны за существование магнитных полей Земли и солнечных пятен. Паркер [184] был первым, кто предложил механизм генерации. Решающим здесь является эффект индукции "циклонической[1)] тур-

[1)] Паркер называет циклонической турбулентность, статистические свойства которой не инвариантны относительно отражений. — *Прим. ред.*

булентности", который имеет место в конвективных слоях вращающихся тел. Если этот эффект проявляется в комбинации с неоднородным вращением, то возможно самовозбуждение крупномасштабных магнитных полей.

Процессы, описанные Бирманом и Паркером, представляют собой примеры того, как мелкомасштабные турбулентные движения приводят к появлению крупномасштабных структур. Их общей чертой является так называемый обратный каскад, т.е. течение энергии от малых масштабов к большим. Это противоположно тому, что обычно происходит в турбулентном движении. Другие примеры такого типа были обнаружены недавно в гидродинамике и стали известны как "явления отрицательной вязкости".

Сравнительно общая теория была развита на основе теоретических идей Штеенбека [250], который исследовал поведение средних электромагнитных полей, т.е. крупномасштабных компонент электромагнитных полей в электропроводящей среде с турбулентным движением. Эта теория называется обычно "электродинамикой средних полей". В рамках этой теории наиболее четко выявляются условия для генерации крупномасштабных магнитных полей мелкомасштабной турбулентностью. Полностью беспорядочная, т.е. однородная, изотропная и зеркально-симметричная турбулентность влияет только на скорость распада средних магнитных полей, приводя к его усилению почти во всех физически интересных случаях. Самым слабым возможным отклонением турбулентности от полностью беспорядочной является случай однородной и изотропной турбулентности, но без зеркальной симметрии. В этом случае правовинтовые и левовинтовые спиральные движения встречаются с различной вероятностью. Однородная, изотропная, но зеркально-несимметричная турбулентность приводит к весьма необычному эффекту появления средней электродвижущей силы, параллельной магнитному полю, – так называемому α-эффекту. Легко понять, что при достаточно сильном α-эффекте магнитное поле, показанное на рис. 1.1, может противостоять омическим потерям.

В конвективных слоях вращающихся тел силы Кориолиса приводят к спиральной структуре движений, причем существуют области, где преобладает один тип спирального движения, вызывая тем самым α-эффект. Таким образом, открывается прямой путь для объяснения происхождения космических магнитных полей.

Другая теория, которая объясняет генерацию магнитного поля как результат более или менее нерегулярных движений, была предло-

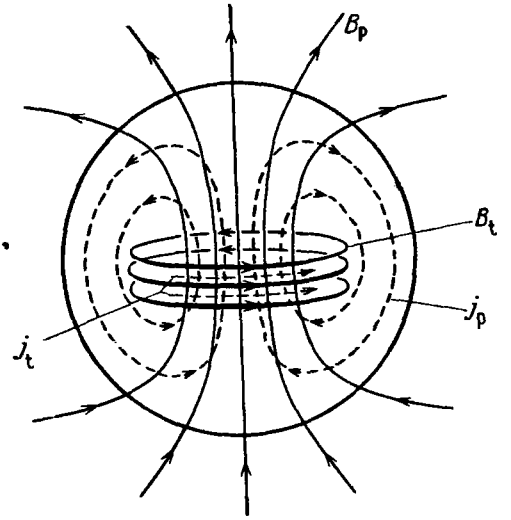


Рис. 1.1. Возможная конфигурация самоподдерживающегося магнитного поля в проводящей среде с α-эффектом, т.е. с законом Ома в виде $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \alpha\mathbf{B})$. Проводящая сфера погружена в пустое непроводящее пространство. Магнитное поле **B** является осесимметричным. Оно состоит из полоидальной части $\mathbf{B}_p$ с силовыми линиями в меридиональных плоскостях и тороидальной части $\mathbf{B}_t$ с круговыми силовыми линиями вокруг оси симметрии. Вследствие α-эффекта поле $\mathbf{B}_t$ создает тороидальный ток $\mathbf{j}_t$ (пунктирные линии). Этот ток вызывает полоидальное магнитное поле $\mathbf{B}_p$, которое, в свою очередь, создает полоидальный ток $\mathbf{j}_p$ (пунктирные линии), сопровождаемый тороидальным магнитным полем $\mathbf{B}_t$.

жена и разработана Брагинским [18, 19,20]. Она стала известна как теория "почти симметричного динамо" так как в ней использовалось предположение о слабом отклонении крупномасштабного поля от осевой симметрии вращающегося проводящего тела. Эта теория широко обсуждалась в связи с проблемой происхождения магнитного поля Земли.

1.2. Об общей идее магнитной гидродинамики средних полей

Эта книга посвящена магнитной гидродинамике средних полей и ее приложению к проблеме динамо, известной как теория турбулентного динамо.

Магнитная гидродинамика средних полей изучает поведение средних электромагнитных и гидродинамических полей в турбулентной проводящей среде. Она включает в себя электродинамику средних полей,

которая ограничивается случаем заданных гидродинамических скоростей и не учитывает влияния электромагнитных полей на движения.

Эта теория будет развита на основе обычной магнитной гидродинамики и ограничена рядом условий применимости, которые необходимы для ее обоснования. Во всех случаях предполагается, что пространство евклидово. Рассматриваемое вещество является непрерывной жидкой средой с достаточно высокой электрической проводимостью. Его скорость предполагается малой по сравнению со скоростью света в вакууме.

Дадим теперь краткое изложение главной идеи и некоторых особенностей магнитной гидродинамики средних полей. Мы начнем с основных уравнений магнитной гидродинамики, которые состоят из уравнений Максвелла, соответствующих уравнений состояния и уравнения Навье – Стокса. Из этих уравнений с помощью операции усреднения будут выведены соответствующие уравнения для средних полей. Преобразованные таким образом нелинейные члены уравнений будут описывать усредненную связь флуктуирующих величин со средними полями. При этом будет использоваться известный подход к уравнениям Навье – Стокса, при котором вводятся так называемые напряжения Рейнольдса. Соответствующей величиной в электродинамике средних полей является средняя величина электродвижущей силы, которая возникает при взаимодействии флуктуаций скорости и магнитного поля. Эту величину в дальнейшем будем называть турбулентной электродвижущей силой. Одна из главных проблем состоит в нахождении турбулентной электродвижущей силы как функционала от среднего магнитного поля для получения замкнутой системы уравнений.

Детальные результаты могут быть получены при этом только путем введения ограничивающих предположений. Почти во всех случаях будет рассматриваться двухмасштабная турбулентность, т.е. будет предполагаться, что характерные время и длина флуктуаций малы по сравнению с соответствующими величинами для средних полей. Свойство двухмасштабности обеспечивает упрощенную функциональную зависимость турбулентной электродвижущей силы от среднего магнитного поля. Оно гарантирует также, что правила усреднения по ансамблю применимы при усреднении по пространству и времени.

Нами часто будет использоваться корреляционное приближение второго порядка, в котором турбулентная электродвижущая сила и другие подобные величины вычисляются с использованием статистических моментов только до второго порядка включительно. При этом от-

брасываются моменты третьего и высших порядков. Надо, однако, отметить, что корреляционное приближение второго порядка не является неотъемлемой особенностью магнитной гидродинамики средних полей, скорее это лишь первый шаг в процессе итераций. Даже этот первый шаг дает сравнительно полное представление о рассматриваемых физических процессах. Приближения высшего порядка требуют значительно больших математических усилий. ▪

1.3. Технические замечания

В дальнейшем везде будет использоваться международная система единиц. В дополнение к единице тесла (Тл) для магнитной индукции используется также гаусс (Гс); 1 Тл = 10^4 Гс.

По поводу математических соотношений сделаем следующие замечания.

Векторные уравнения иногда будут записываться не только в обычном символическом виде, но и в компонентах. Если не оговорено особо, то эти представления относятся к декартовой системе координат и используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Интегралы без указания пределов означают интегрирование по всему пространству и времени.

Как обычно, комплексно-сопряженные величины обозначаются звездочкой. Усреднение будет обозначаться верхней чертой. В некоторых из последних глав, где рассматриваются только усредненные величины, черта опускается.

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СРЕДНИХ ПОЛЕЙ

2.1. Основные уравнения

Наше рассмотрение основано на нерелятивистской магнитной гидродинамике. Обозначим через $\mathbf{B}$ магнитную индукцию [1], $\mathbf{H}$ – магнитное поле, $\mathbf{E}$ – электрическое поле, $\mathbf{j}$ – плотность электрического тока, μ – магнитную проницаемость, σ – электрическую проводимость и $\mathbf{u}$ – скорость жидкости; μ и σ будут считаться постоянными.

Мы будем использовать магнитогидродинамическое приближение, т.е. полагаем, что эти поля связаны уравнениями:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{2.2}$$

Эти уравнения определяют $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ при заданном $\mathbf{u}$.

Из них следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu\sigma}\Delta\mathbf{B}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{2.3}$$

Если величина $\mathbf{B}$ найдена из этих уравнений, то $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ могут быть получены из уравнений (2.1) и (2.2).

Здесь, как и в большинстве следующих глав, поле скоростей $\mathbf{u}$ считается заданным. Таким образом, мы избегаем рассмотрения влияния магнитного поля на движение жидкости, хотя иногда этот эффект будет обсуждаться качественно. Наконец, в гл. 10 приводится обзор результатов, полученных до настоящего времени в магнитогидродинамике средних полей.

---

[1] В данной книге величина $\mathbf{B}$ часто называется "магнитным полем", хотя имеет смысл магнитной индукции. — *Прим. ред.*

2.2. Операции усреднения

В турбулентной среде все рассматриваемые поля нерегулярно изменяются во времени и пространстве. Пусть F является таким флуктуирующим полем, рассматриваемым как случайная функция. Соответствующее среднее поле $\overline{F}$ определяется как ожидаемое значение F для ансамбля одинаковых систем, а F' использовано для обозначения разности $F - \overline{F}$. Справедливы следующие соотношения, называемые соотношениями Рейнольдса:

$$\overline{F} = \overline{F} + F', \quad \overline{\overline{F}} = \overline{F}, \quad \overline{F'} = 0,$$

$$\overline{F + G} = \overline{F} + \overline{G}, \quad \overline{FG} = \overline{F}\,\overline{G}, \quad \overline{FG'} = 0, \tag{2.4}$$

где G – другое флуктуирующее поле. Оператор усреднения коммутирует с операторами дифференцирования и интегрирования как в пространстве, так и во времени.

Вместо усреднения по ансамблю можно также определить средние значения посредством интегрирования по пространству или времени. Некоторые из соотношений (2.4) выполняются тогда только приближенно, хотя они будут тем точнее, чем меньше средние значения изменяются в рассматриваемой области интегрирования. Нам нет необходимости ссылаться на характер операции усреднения в дальнейшем; будут использоваться только свойства (2.4) и упомянутые правила коммутации.

Например, наблюдения солнечной поверхности позволяют получить сведения как о поле скоростей, так и о магнитном поле, свидетельствующие о наличии флуктуаций различного вида с различными масштабами. Существуют 1) гранулы с диаметрами около 1000 км и временами жизни несколько минут, 2) супергранулы с диаметрами около 30000 км и временами жизни около суток, 3) гигантские ячейки с диаметрами порядка солнечного радиуса и временами жизни несколько месяцев, 4) солнечные пятна с диаметрами от нескольких сотен до нескольких десятков тысяч километров и временами жизни от нескольких часов до нескольких месяцев. Поскольку среднее магнитное поле Солнца обусловливает солнечный цикл, то оно имеет временной масштаб ~ 22 года. Естественно предполагать, что пространственный его масштаб – порядка солнечного радиуса. Эти данные позволяют прийти к выводу, что нетрудно найти подходящий временной масштаб для операции усреднения, составляющий, например, один год, но это невозможно сделать для усреднения по пространственным координатам.

Следует заметить, что исследование Солнца дает возможность построить ансамбль, если рассматривать Солнце в течение одного цикла как один член ансамбля. Затем можно выполнить усреднение по ряду циклов.

2.3. Уравнения для средних полей

Задача электродинамики средних полей заключается в определении величин $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{H}}$, $\overline{\mathbf{E}}$ и $\overline{\mathbf{j}}$, когда известны поле $\overline{\mathbf{u}}$ и некоторые свойства $\mathbf{u}'$.

Усредняя уравнения (2.1) и (2.2), получаем

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{j}}, \quad \operatorname{div}\overline{\mathbf{B}} = 0, \tag{2.5}$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \mu\overline{\mathbf{H}}, \quad \overline{\mathbf{j}} = \sigma(\overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{u}} \times \overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}). \tag{2.6}$$

Эти уравнения были бы одинаковы с (2.1) и (2.2), если бы не было единственного нового члена $\overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}$, возникшего из-за нелинейности, который приводит к дополнительной электродвижущей силе в законе Ома для средних полей. Мы будем говорить о "турбулентной электродвижущей силе" и, следуя Робертсу [227], введем обозначение

$$\mathcal{E} = \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}. \tag{2.7}$$

Чтобы определить величины $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{H}}$, $\overline{\mathbf{E}}$ и $\overline{\mathbf{j}}$, мы должны знать не только поле $\overline{\mathbf{u}}$, но эту электродвижущую силу $\mathcal{E}$.

Рассмотрим теперь электродвижущую силу $\mathcal{E}$ более детально. Подставляя $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}'$ и $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ в уравнение (2.3), получим:

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - \operatorname{rot}(\overline{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}') - \operatorname{rot}(\mathbf{u}' \times \mathbf{B}') - \frac{1}{\mu\sigma}\Delta\mathbf{B}' = -\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\overline{\mathbf{u}} \times \overline{\mathbf{B}}) +$$

$$+ \operatorname{rot}(\mathbf{u}' \times \overline{\mathbf{B}}) + \frac{1}{\mu\sigma}\Delta\overline{\mathbf{B}}, \quad \operatorname{div}(\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}') = 0. \tag{2.8}$$

Эти уравнения определяют величину $\mathbf{B}'$, если $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$ известны. Можно поэтому рассматривать $\mathcal{E}$ как функционал от $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{u}}$ и (так как $\mathcal{E}$ является средним полем) от средних статистических свойств величины $\mathbf{u}'$. Разумеется, решение уравнений (2.8) зависит от начальных и граничных условий, налагаемых на поле $\mathbf{B}'$, но мы отложим на будущее обсуждение этих условий.

Вернемся к уравнениям (2.5) и (2.6). Поскольку турбулентная электродвижущая сила $\mathcal{E}$ как функционал от $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$ известна,

появляется возможность определить величины $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{H}}$, $\overline{\mathbf{E}}$ и $\overline{\mathbf{j}}$ из известных полей $\overline{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$. Следовательно, определение этого функционала является решающей проблемой в развитии электродинамики средних полей.

2.4. Общие свойства турбулентной электродвижущей силы

Характерным свойством турбулентности является то, что величины типа $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{B}'$, взятые в некоторой пространственно-временной точке, коррелируют с некоторой другой величиной в другой точке пространства-времени, если только разделение точек как в пространстве, так и во времени не слишком велико. Таким образом, для определения $\mathcal{G}$ в некоторой пространственно-временной точке необходимо знать величины $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$ только в некоторой окрестности этой точки. Следовательно, начальные и граничные условия, налагаемые на $\mathbf{B}'$, не будут влиять на значения величины $\mathcal{G}$, если мы примем, что начало отсчета времени и границы лежат вне указанной окрестности. Дальнейшие исследования основаны на этом допущении.

Как уже упоминалось, величина $\mathbf{B}'$ может быть определена из уравнений (2.8), из которых следует, что $\mathbf{B}'$ является линейным функционалом от среднего магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}$. Очевидно, что такое же утверждение справедливо и для турбулентной электродвижущей силы $\mathcal{G}$, определяемой уравнением (2.7). Нельзя полностью исключить возможности существования нетривиального решения уравнений (2.8) для величины $\mathbf{B}'$, когда $\overline{\mathbf{B}} = 0$. Такая возможность показана в работах [72, 100]. В этом случае следует ожидать, что $\mathcal{G}$ может быть неоднородным линейным функционалом от среднего магнитного поля $\overline{\mathbf{B}}$ [220] Начальные и граничные условия также могут быть ответственными за неоднородность, но они несущественны при том предположении, которое было сделано в начале этого раздела. Однако в дальнейшем мы большей частью принимаем ту точку зрения, что величина $\mathbf{B}'$, а с ней и турбулентная электродвижущая сила $\mathcal{G}$, обязаны своим существованием взаимодействию флуктуирующего поля скоростей $\mathbf{u}'$ со средним магнитным полем $\overline{\mathbf{B}}$ и, следовательно, что $\mathcal{G}$ является линейным однородным функционалом от $\overline{\mathbf{B}}$.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РАССМОТРЕНИЕ ПРОСТОГО ПРИМЕРА

3.1. Исходные предпопожения

В качестве введения мы исследуем теперь довольно простой случай, позволяющий, однако, прояснить фундаментальные вопросы и вывести некоторые важные результаты.

Как уже упоминалось, для определения турбулентной электродвижущей силы $\mathcal{E}$ в определенной пространственно-временной точке необходимо знать среднее поле $\overline{\mathbf{B}}$ только в соответствующей окрестности. Мы предполагаем, что достаточно хорошее описание обеспечивается самими компонентами $\overline{\mathbf{B}}$ и их первыми пространственными производными.

В дальнейшем предполагается, что среда в среднем покоится, т.е. $\overline{\mathbf{u}} = 0$, и что турбулентность $\mathbf{u}'$ в статистическом смысле является однородной, изотропной и стационарной. Иногда мы будем также полагать, что турбулентность зеркально-симметрична.

3.2. Однородность, изотропность и зеркальная симметрия турбулентных полей

Однородное турбулентное поле определено тем свойством, что каждое среднее, полученное при условии однородности, не зависит от координат или, другими словами, любая такая величина остается инвариантной при пространственной трансляции поля. Для стационарной турбулентности то же самое справедливо по отношению ко времени. Мы говорим об изотропном турбулентном поле, если не существует никакого выделенного направления. Такое поле определяется тем свойством, что любая характеризующая его средняя величина не изменяется, если поле испытывает произвольное вращение вокруг любой оси. Наконец, мы будем говорить о зеркально-симметричном турбулентном поле, если средние величины, полученные из него, инвариантны при отражении поля в произвольной плоскости.

Требование, чтобы указанные свойства проявлялись лишь в специальных условиях, сопряжено с менее жесткими ограничениями. Например, турбулентное поле может быть изотропным лишь в одной точке, или же оно может проявлять зеркальную симметрию только по отношению к специальной плоскости или набору плоскостей. Примером такого поля является турбулентное движение в солнечной конвективной зоне: средние свойства этого поля остаются неизменными только при отражениях в экваториальной плоскости или любой из меридиональных плоскостей Солнца.

Может случиться, что в турбулентном движении левовращательные движения более вероятны, чем правовращательные, или наоборот. В этом случае мы будем говорить о "винтовой" турбулентности [265] или, используя английский эквивалент, введенный Моффатом [169], говорить, что турбулентность имеет спиральность. Отражение преобразует левый винт в правый и наоборот. Следовательно, если турбулентное поле является зеркально-симметричным хотя бы по отношению к одной плоскости, оно не может иметь спиральность; т.е. движения, связанные с левым винтом, так же вероятны, как и движения правовинтовые.

Заслуживают внимания некоторые соотношения между однородностью, изотропией и зеркальной симметрией. Однородное турбулентное поле не обязательно изотропно, а изотропное поле не обязательно зеркально-симметрично. Однако если однородное поле изотропно хотя бы в одной точке, то оно изотропно во всех точках. Кроме того, если поле, изотропное в одной точке, зеркально-симметрично по отношению хотя бы к одной плоскости, проходящей через эту точку, то оно зеркально-симметрично по отношению к любой плоскости, проходящей через эту точку. Напротив, турбулентное поле однородно, если оно изотропно в любой точке; поле изотропно в одной точке, если оно зеркально-симметрично по отношению к любой плоскости, проходящей через эту точку. Последние утверждения справедливы вследствие того, что любая трансляция может быть осуществлена как два вращения вокруг двух параллельных осей и любое вращение можно представить как два отражения в плоскостях, содержащих ось вращения.

Поскольку однородная изотропная турбулентность существует в природе, то трудно найти убедительные соображения, почему бы ей не быть зеркально-симметричной. По этой причине в литературе по гидродинамической турбулентности слово "изотропия" часто исполь-

зуется для описания изотропного зеркально-симметричного случая. Важно отметить, что теория динамо в однородной и изотропной среде основана на отсутствии зеркальной симметрии.

3.3. Законы симметрии

Зеркальная симметрия является фундаментальным свойством основных уравнений классической физики. Основанием этого является представление, что из любой реальной системы другая реальная система может быть получена при отражении ее в произвольной плоскости или в произвольной точке. Тем не менее в определение некоторых величин включена правосторонность. Такими величинами являются векторные произведения или величины, определенные операцией получения ротора rot, а также скалярно-векторное произведение трех векторов, имеющее смысл объема. Так как требование правосторонности не инвариантно по отношению к отражениям, то эти величины по своим трансформационным свойствам отличаются от тех величин, определение которых не требует условия правосторонности. Справедливы следующие соотношения для отражения в некоторой точке:

$$\mathbf{a}^{\mathrm{ref}} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^{\mathrm{ref}} \times \mathbf{b}^{\mathrm{ref}} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{a}^{\mathrm{ref}} = \mathrm{rot}\, \mathbf{a}, \tag{3.1}$$

$$v^{\mathrm{ref}} = (\mathbf{a}^{\mathrm{ref}} \times \mathbf{b}^{\mathrm{ref}}) \cdot \mathbf{c}^{\mathrm{ref}} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -v\,.$$

Здесь $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – произвольные векторы, v обозначает объем параллелепипеда, определяемого векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Индекс "$\mathrm{ref}$" обозначает отраженную величину.

Наши основные уравнения (2.1) и (2.2) связывают величины, которые имеют различные трансформационные свойства при отражении системы координат. Пусть $\mathbf{E}, \mathbf{j}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ – решения уравнений (2.1) и (2.2) для заданного поля скоростей $\mathbf{u}$. Если мы осуществляем отражение относительно точки, то, очевидно, величина $\mathbf{u}$, описывающая движение частиц, должна изменить знак, а с ней $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, в то время как величины $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, согласно (3.1) и (2.1), остаются неизменными. Поэтому имеем при отражении относительно точки $\mathbf{x} = 0$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{u}(-\mathbf{x}, t), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{E}^{\mathrm{ref}}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{E}(-\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{j}^{\mathrm{ref}}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{j}(-\mathbf{x}, t),$$

но

$$\mathbf{H}^{\mathrm{ref}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(-\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{B}^{\mathrm{ref}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(-\mathbf{x}, t). \tag{3.3}$$

Векторы, которые ведут себя как величины (3.2), обычно называются полярными векторами, а те, которые подобны $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, – аксиальными векторами. Другие синонимы включают в себя "псевдо-" и "косо-" для величин, которые зависят от использования правосторонности, например скаляр, подобный объему v, называется псевдоскаляром.

Для турбулентности представляет интерес псевдоскаляр, определяемый средним

$$h = \overline{\mathbf{u}' \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}'}. \tag{3.4}$$

Очевидно, условие $h \neq 0$ указывает на то, что турбулентность имеет спиральность. В случае зеркальной симметрии величина h должна быть, с одной стороны, неизменной, так как все статистические свойства поля $\mathbf{u}'$ не изменяются при отражении, а с другой – должна изменить знак, так как h – псевдоскаляр. Поэтому для зеркально-симметричной турбулентности $h = 0$.

Законы симметрии часто являются полезным средством для упрощения общего представления решения основных уравнений. Если мы знаем, что $F + G = 0$ является интегралом движения уравнений и G является псевдовеличиной, а F – нет, то $F - G = 0$ также будет решением. Следовательно, результат $F = 0$ и $G = 0$ также справедлив.

Возможно, что нам придется иметь дело с произведением различных величин. Как следует из (3.1), (3.2) и (3.3), скалярное произведение полярного и аксиального векторов является псевдоскаляром, а векторное произведение этих величин есть полярный вектор, в частности турбулентная электродвижущая сила $\mathcal{E}$ является, конечно, полярным вектором.

3.4. Структура турбулентной электродвижущей силы

Как уже было указано, турбулентная электродвижущая сила $\mathcal{E}$ является функционалом от $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$. Рассмотрим ее в некоторой точке пространства – времени. Согласно предположениям, введенным в разд. 3.1, она может зависеть только от самой величины $\overline{\mathbf{B}}$, от ее первых пространственных производных в данной точке и от значений турбулентной скорости $\mathbf{u}'$ в окрестности этой точки. Естественно, что рассматриваются лишь средние величины, связанные с полем скоростей $\mathbf{u}'$.

Заметим, что величина $\mathcal{E}$ изменяется в пространстве только если изменяются поле $\overline{\mathbf{B}}$ и его первые производные. Это является следствием однородности поля $\mathbf{u}'$.

Учтем теперь, что $\mathcal{G}$ – векторная величина. Единственными векторами, из которых можно построить $\mathcal{G}$, являются $\overline{\mathbf{B}}$, $\mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{B}} \times \mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{B}}$, $(\overline{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\overline{\mathbf{B}}$, ..., где точками обозначены соответствующие векторы более высокого порядка по $\overline{\mathbf{B}}$. Легко видеть, что величина $\mathbf{u}'$ не дает вклада: так как $\mathbf{u}'$ – изотропное случайное поле, то любая средняя величина, полученная из него, должна быть инвариантной относительно любых вращений. Единственный вектор с таким свойством есть нулевой вектор.

Замечая, наконец, что $\mathcal{G}$ есть линейный функционал от $\overline{\mathbf{B}}$, находим единственно возможное представление:

$$\mathcal{G} = \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'} = \alpha \overline{\mathbf{B}} - \beta\, \mathrm{rot}\, \overline{\mathbf{B}}. \tag{3.5}$$

Величины α и β являются постоянными, определяемыми полем турбулентной скорости $\mathbf{u}'$.

Соотношение (3.5) выведено из основных уравнений (2.1) и (2.2), и, следовательно, к нему применимы все законы симметрии, рассмотренные в предыдущем разделе. Таким образом, приходим к выводу, что коэффициент β является скаляром, в то время как α – псевдоскаляр. Допустим теперь, что поле $\mathbf{u}'$ зеркально-симметрично, т.е. одинакова вероятность как некоторой данной реализации ансамбля этого поля, так и реализации, полученной из данной зеркальным отражением. Тогда, с одной стороны, величины α и β не должны измениться, если выполнить отражение, так как ансамбль не изменился, но, с другой стороны, коэффициент α должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром. Поэтому для однородной, изотропной и зеркально-симметричной турбулентности $\alpha = 0$. Это доказательство аналогично тому, которое было приведено для спиральности h, определяемой выражением (3.4).

3.5. Закон Ома

Возвращаясь теперь к уравнениям для средних полей (2.5) и (2.6) и подставляя выражение (3.5), находим соотношение

$$\overline{\mathbf{j}} = \sigma_T (\overline{\mathbf{E}} + \alpha \overline{\mathbf{B}}), \tag{3.6}$$

которое является законом Ома для средних полей. Здесь турбулентная проводимость σ_T дается формулой

$$\sigma_T = \frac{\sigma}{1 + \mu\sigma\beta} \tag{3.7}$$

Закон Ома в виде (3.6), вместо прежнего выражения (2.6), и уравнение (2.5) образуют полную систему уравнений, которая определяет величины $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{H}}$, $\overline{\mathbf{E}}$ и $\overline{\mathbf{j}}$, если α и β известны.

В случае зеркальной симметрии, $\alpha = 0$, уравнения для средних полей, т.е. уравнения (2.5) и (2.6) с законом Ома в виде (3.6), формально совпадают с уравнениями (2.1) и (2.2) для неусредненных полей при $\mathbf{u} = 0$. Единственным различием является замена молекулярной проводимости σ на турбулентную σ_T. Отношение σ_T/σ может быть найдено, если известна величина β.

В зеркально-несимметричном случае в выражении закона Ома для средних полей появляется электродвижущая сила $\alpha\overline{\mathbf{B}}$, которая параллельна ($\alpha > 0$) или антипараллельна ($\alpha < 0$) средней магнитной индукции $\overline{\mathbf{B}}$. Этот новый эффект вызван турбулентным движением и называется α-эффектом. Как мы увидим ниже, он играет важную роль в динамо-теории.

3.6. Предварительные шаги для определения коэффициентов α и β при частных предположениях

Начнем с уравнений (2.8), принимая $\overline{\mathbf{u}} = 0$. Если вычесть из них уравнения, вытекающие из (2.3) при усреднении, то получим

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma}\Delta\mathbf{B}' - \operatorname{rot}(\mathbf{u}' \times \mathbf{B}' - \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}) = \operatorname{rot}(\mathbf{u}' \times \overline{\mathbf{B}}),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}' = 0.$$

Однако, чтобы определить $\mathbf{B}'$ из этих уравнений, необходимы дальнейшие предположения для исключения нелинейных членов. В определенном смысле, который будет уточнен позже, потребуем, чтобы турбулентность была малой, и опустим все члены высокого порядка по $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{B}'$. Таким образом, заменим (3.8) на выражение

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma}\Delta\mathbf{B}' = \operatorname{rot}(\mathbf{u}' \times \overline{\mathbf{B}}), \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{3.9}$$

Более того, ограничим наши исследования двумя предельными случаями, которые допускают дополнительное математическое упрощение и являются важными с точки зрения физики. В первом случае пренебрегаем диссипативными эффектами и вместо (3.9) будем рассматривать уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{u}' \times \overline{\mathbf{B}}), \quad \operatorname{div}\mathbf{B}' = 0. \tag{3.10}$$

Во втором случае, напротив, диссипативные эффекты принимаются настолько сильными, чтобы можно было считать величину $\mathbf{B}'$

стационарной в любой момент времени. Поэтому можно опустить в выражении (3.9) производную по времени и прийти к уравнениям

$$\Delta \mathbf{B}' = -\mu\sigma \operatorname{rot}(\mathbf{u}' \times \overline{\mathbf{B}}), \quad \operatorname{div}\mathbf{B}' = 0. \tag{3.11}$$

Прежде чем сформулировать условия, при которых выполняются принятые упрощения, заметим, что они не являются фундаментальной частью магнитной гидродинамики средних полей. Например, замечательное соотношение (3.5) на них не основано. Однако эти упрощения позволяют вычислить некоторые модели довольно простым образом.

Введем теперь два масштаба, характеризующих изменения поля турбулентных скоростей $\mathbf{u}'$ во времени и пространстве, т.е. время корреляции τ_{cor} и длину корреляции λ_{cor}. Поскольку флуктуационная часть магнитного поля $\mathbf{B}'$ возникает вследствие взаимодействия поля $\mathbf{u}'$ со средним магнитным полем $\overline{\mathbf{B}}$, которое слабо зависит от времени и координат, то масштабы τ_{cor} и λ_{cor} характеризуют также поле $\mathbf{B}'$.

Наше первое упрощение – отбрасывание членов второго порядка по флуктуациям оправдано, если по крайней мере один из членов $\partial \mathbf{B}'/\partial t$ или $(\mu\sigma)^{-1}\Delta \mathbf{B}'$ является большим по сравнению с членом $\operatorname{rot}(\mathbf{u}' \times \mathbf{B}' - \mathbf{u}' \times \mathbf{B}')$. Это имеет место, если

$$\min(\mathrm{Rm}, S) \ll 1, \tag{3.12}$$

где Rm является магнитным числом Рейнольдса

$$\mathrm{Rm} = \mu\sigma u' \lambda_{cor}, \tag{3.13}$$

а S – число Струхаля

$$S = u' \frac{\tau_{cor}}{\lambda_{cor}}. \tag{3.14}$$

При определении Rm и S мы использовали обозначение u' для среднеквадратичной флуктуации скорости, т.е.

$$u' = \sqrt{\overline{\mathbf{u}'^2}}. \tag{3.15}$$

Теория, которая основана на уравнениях (3.9) и справедлива, если выполняется неравенство (3.12), будет называться далее "корреляционным приближением второго порядка", другое ее название – "теория сглаживания первого порядка" или "пренебрежение кумулянтами третьего порядка". Первое и последнее названия станут более понятными, если учесть, что нас интересует именно величина $\mathbf{u}' \times \mathbf{B}$ (а не $\mathbf{B}'$).

Принимая, что один из двух членов в левой части уравнения (3.9) больше другого, мы пришли к уравнениям (3.10),(3.11), которые описывают два предельных случая. Первый случай, очевидно, характеризуется неравенством

$$\tau_{cor} \ll \mu\sigma\lambda_{cor}^2 . \tag{3.16}$$

Это предел большой проводимости. Во втором случае выполняется обратное неравенство

$$\tau_{cor} \gg \mu\sigma\lambda_{cor}^2 . \tag{3.17}$$

Это предел малой проводимости.

Из выражений (3.13) и (3.14) получаем связь

$$Rm = \frac{\mu\sigma\lambda_{cor}^2}{\tau_{cor}} S . \tag{3.18}$$

Условие (3.12) с учетом этой связи показывает, что корреляционное приближение второго порядка выполняется при условии $S \ll 1$ в пределе большой проводимости и при $Rm \ll 1$ в пределе малой проводимости. В первом случае нет ограничения на магнитное число Рейнольдса Rm; в частности, Rm может быть очень большим, как это часто бывает для космических объектов. Так как в общем случае предполагают $S \approx 1$, то результаты, полученные в корреляционном приближении второго порядка в пределе большой проводимости являются лишь экстраполяцией от $S \ll 1$ к $S \approx 1$. Как мы далее увидим, такая экстраполяция иногда приводит к удовлетворительному количественному согласию с наблюдениями.

3.7. Предел большой проводимости

Уравнения (3.10), описывающие этот случай, имеют следующее формальное решение:

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}'(\mathbf{x}, t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{rot}\,(\mathbf{u}''(\mathbf{x}, t'') \times \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t''))\,dt'', \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B}'(\mathbf{x}, t_0) = 0, \tag{3.19}$$

где t_0 – произвольный момент времени. Согласно предыдущим предположениям, интервал $t - t_0$ должен быть выбран настолько большим, чтобы не было корреляции между $\mathbf{u}''(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{B}'(\mathbf{x}, t_0)$. Более того, удобно принять начало отсчета времени настолько далеким, чтобы

исчезла любая начальная флуктуация магнитного поля. Таким образом, примем

$$t - t_0 \gg \mu\sigma\lambda_{\text{cor}}^2 \gg \tau_{\text{cor}} . \tag{3.20}$$

Решение уравнений (3.10) в этом случае принимает вид:

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}, t) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{rot}(\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t') \times \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t'))\, dt' . \tag{3.21}$$

Вычислим теперь турбулентную электродвижущую силу $\mathcal{G}$, умножая выражение (3.21) на $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ и выполняя усреднение. Окончательное выражение не зависит от t_0, поскольку выполнено условие (3.20). Следовательно, можно положить $t_0 = -\infty$ и получить

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{t} \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \times \operatorname{rot}(\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t') \times \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t'))}\, dt' . \tag{3.22}$$

Подынтегральное выражение существенно отлично от нуля лишь в интервале $t - t' < \tau_{\text{cor}}$. Согласно предположениям разд. 3.1, величина $\overline{\mathbf{B}}$ не изменяется в этом интервале времени, и, следовательно, вместо $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t')$ можно подставить $\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$. Если, наконец, заменить t' на $t - \tau$, то придем к следующему выражению:

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \int_{0}^{\infty} \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \times \operatorname{rot}(\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t - \tau) \times \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t))}\, d\tau . \tag{3.23}$$

Представим теперь компоненты выражения (3.23) в правой декартовой системе координат x_1, x_2, x_3. Для однородной и изотропной турбулентности, как мы уже знаем, выражение (3.23) имеет вид (3.5). Поэтому при вычислении, например, компоненты $\mathcal{G}_1$ надо выписать только члены с $\overline{B}_1$, $\partial\overline{B}_3/\partial x_2$ и $\partial\overline{B}_2/\partial x_3$, а остальные – $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$, $\partial\overline{B}_1/\partial x_1$, ... , могут быть сразу опущены. В итоге получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 &= -(w_{312} - w_{213})\overline{B}_1 - w_{22}\frac{\partial\overline{B}_3}{\partial x_2} + w_{33}\frac{\partial\overline{B}_2}{\partial x_3} , \\
\mathcal{G}_2 &= -(w_{123} - w_{321})\overline{B}_2 - w_{33}\frac{\partial\overline{B}_1}{\partial x_3} + w_{11}\frac{\partial\overline{B}_3}{\partial x_1} , \\
\mathcal{G}_3 &= -(w_{231} - w_{132})\overline{B}_3 - w_{11}\frac{\partial\overline{B}_2}{\partial x_1} + w_{22}\frac{\partial\overline{B}_1}{\partial x_2} ,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

где использованы обозначения

$$w_{ijk} = \int_0^\infty \overline{u_i^e(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_k'(\mathbf{x}, t-\tau)}{\partial x_j}} d\tau, \tag{3.25}$$

$$w_{ij} = \int_0^\infty \overline{u_i'(\mathbf{x}, t) u_j^e(\mathbf{x}, t-\tau)} d\tau. \tag{3.26}$$

Сравнивая формулы (3.24) с (3.5), сразу же находим, что

$$\alpha = -(w_{312} - w_{218}) = -(w_{128} - w_{321}) = -(w_{231} - w_{132}) = \tag{3.27}$$

$$= -\frac{1}{3}(w_{128} + w_{231} + w_{312} - w_{132} - w_{321} - w_{213})$$

и

$$\beta = w_{11} = w_{22} = w_{33} = \frac{1}{3}(w_{11} + w_{22} + w_{33}). \tag{3.28}$$

Подставляя выражения (3.25) и (3.26) в формулы (3.27) и (3.28), находим окончательно

$$\alpha = -\frac{1}{3} \int_0^\infty \overline{\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t-\tau)} d\tau, \tag{3.29}$$

и

$$\beta = \frac{1}{3} \int_0^\infty \overline{\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t-\tau)} d\tau. \tag{3.30}$$

При выводе этих формул мы использовали тот факт, что выражение (3.24) имеет структуру (3.5). Структуру выражения (3.24) можно установить и непосредственно, так как из соображений изотропии легко найти соотношения симметрии для коэффициентов w_{ijk} и w_{ij}. Эти коэффициенты не должны изменяться при произвольном вращении. Если, например, произведено вращение системы координат на 90° вокруг оси x_3, то x_1 переходит в x_2, а u_1^e — в u_2^e, но x_2 переходит в $-x_1$ и u_2^e — в $-u_2^e$; x_3 и u_3^e остаются неизменными. Из выражений (3.25) и (3.26) находим тогда, что $w_{123} = -w_{213}$ и $w_{222} = -w_{111}$, а также $w_{111} = w_{222}$, что дает $w_{111} = w_{222} = 0$. Аналогично находим $w_{11} = w_{22}$ и $w_{13} = w_{23}$, но также $w_{23} = -w_{13}$, т.е. $w_{13} = w_{23} = 0$. Таким путем непосредственно находятся выражения (3.24), (3.29) и (3.30).

Интересное свойство псевдоскалярности коэффициента α становится очевидным из вида подынтегрального выражения в (3.29),

которое связано с величиной h, определенной формулой (3.4). В случае турбулентности, для которой правовинтовые движения являются более вероятными, чем левовинтовые, коэффициент α отрицателен, в обратном случае он положительный.

Оценивая интегралы (3.29) и (3.30), получим по порядку величины

$$\alpha = -\frac{1}{3}\overline{\mathbf{u}^* \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}^*}\tau_{cor} = -\frac{1}{3} h \tau_{cor}, \tag{3.31}$$

и (см. работы [100, 207])

$$\beta = \frac{1}{3} u^{*2} \tau_{cor}. \tag{3.32}$$

Подставляя оценку (3.32) в формулу (3.7), приходим к выражению

$$\sigma_T = \frac{\sigma}{1 + \frac{1}{3}\mu\sigma u^{*2}\tau_{cor}}, \tag{3.33}$$

из которого видно, что турбулентная проводимость σ_T меньше молекулярной проводимости σ.

3.8. Применения к солнечной конвективной зоне

Интересным примером является солнечная конвективная зона. Наблюдения гранул приводят к характерным масштабам турбулентных движений

$$\lambda_{cor} = 10^6 \text{ м}, \quad \tau_{cor} \equiv 3 \cdot 10^2 \text{ с}; \quad u^* = 3 \cdot 10^2 \text{ м/с}. \tag{3.34}$$

Проводимость обычно принимают равной $\sigma = 3 \cdot 10^3 \Omega^{-1}/\text{м}$, а для магнитной проницаемости возьмем вакуумное значение $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Время распада магнитного поля с характерной длиной λ_{cor} порядка $\mu\sigma\lambda_{cor}^2 \approx 3 \cdot 10^9 \text{с} = 100$ лет; следовательно, хорошо выполняется условие (3.16) для предела большой проводимости. Из этих оценок находим

$$\mathrm{Rm} = 10^6, \quad S = 10^{-1}, \tag{3.35}$$

так что условие (3.12) также достаточно хорошо выполнено.

Если использовать оценку (3.33), несмотря на то что S меньше 1 (но не очень мало по сравнению с единицей), то найдем

$$\frac{1}{3}\mu\sigma u^{*2}\tau_{cor} \approx 10^4, \tag{3.36}$$

и, таким образом, для солнечной конвективной зоны

$$\sigma_T = 10^{-4}\sigma. \tag{3.37}$$

Это значение турбулентной проводимости согласуется с оценками времени изменения крупномасштабного магнитного поля Солнца. Крупномасштабное магнитное поле Солнца, которое определяет цикл солнечной активности, является переменным полем с периодом около 22 лет, равным удвоенному периоду цикла. Характерным масштабом длины $\bar{\lambda}$ этого поля является глубина скин-слоя, которая должна быть по порядку величины не меньше чем размеры наибольших солнечных пятен, т.е. несколько десятков тысяч километров. Принимая $\bar{\lambda} \approx 50 \cdot 10^8$ км и используя оценку турбулентной проводимости, получим правильное по порядку величины значение характерного масштаба времени $\tau = \mu\sigma_T\bar{\lambda}^2 \approx 30$ лет. При использовании молекулярной проводимости этот временной масштаб будет в 10^4 раз больше, т.е., очевидно, слишком большим. Таким образом, здесь имеется хорошее количественное согласие.

Если использовать формулу (3.37) для оценки времени распада солнечных пятен, то снова получается хорошее количественное согласие. Однако в солнечных пятнах на конвективные движения сильно влияет магнитное поле, иначе едва ли можно понять их потемнение. При выводе формулы (3.37) это влияние не учитывалось, поэтому процесс распада солнечных пятен будет обсуждаться позже.

3.9. Предел малой проводимости

Этот случай описывается уравнением (3.11). Будем рассматривать все пространство, но сначала допустим, что поле $\mathbf{u}'$ отлично от нуля только в ограниченной области и, следовательно, флуктуации магнитного поля $\mathbf{B}'$ стремятся к нулю на бесконечности. Тогда решение уравнения (3.11) дается выражением

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot}'(\mathbf{u}'(\mathbf{x}', t) \times \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}', t))}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}\, d\mathbf{x}'. \tag{3.38}$$

Умножим это выражение на $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ и усредним. После подстановки $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ находим для турбулентной электродвижущей силы

$$\mathcal{E} = \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \times \operatorname{rot}(\mathbf{u}'(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \times \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t))}\, \frac{d\boldsymbol{\xi}}{\xi}. \tag{3.39}$$

Теперь мы можем отказаться от предположения, что $\mathbf{u}$ должно быть отличным от нуля только в ограниченной области, так как

$$\overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)} \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty .$$

Замечая, что величина $\overline{\mathbf{B}}$ слабо изменяется на расстояниях порядка λ_{cor}, подставим

$$\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t) = \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \operatorname{grad}_x)\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) \tag{3.40}$$

в выражение (3.39) и, выполняя векторные операции как в предыдущем разделе, получим

$$\mathcal{E}_1 = -(w_{312} - w_{213})\overline{B}_1 - (w_{22} + w_{3223} + w_{2211} + w_{2222})\frac{\partial \overline{B}_3}{\partial x_2} + \\ + (w_{33} + w_{2332} + w_{3311} + w_{3333})\frac{\partial \overline{B}_2}{\partial x_3}, \tag{3.41}$$

$$\mathcal{E}_2 = -(w_{123} - w_{321})\overline{B}_2 - (w_{33} + w_{1331} + w_{3322} + w_{3333})\frac{\partial \overline{B}_1}{\partial x_3} + \\ + (w_{11} + w_{3113} + w_{1122} + w_{1111})\frac{\partial \overline{B}_3}{\partial x_1},$$

$$\mathcal{E}_3 = -(w_{231} - w_{132})\overline{B}_3 - (w_{11} + w_{2112} + w_{1133} + w_{1111})\frac{\partial \overline{B}_2}{\partial x_1} + \\ + (w_{22} + w_{1221} + w_{2233} + w_{2222})\frac{\partial \overline{B}_1}{\partial x_2}.$$

где величины w_{ij}, w_{ijk} и w_{ijkl} определены выражениями

$$w_{ij} = \frac{\mu\sigma}{4\pi}\int \overline{u_i'(\mathbf{x}, t)\, u_j'(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)}\,\frac{d\boldsymbol{\xi}}{\xi}, \tag{3.42}$$

$$w_{ijk} = \frac{\mu\sigma}{4\pi}\int \overline{u_i'(\mathbf{x}, t)\,\frac{\partial u_k'(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi_j}}\,\frac{d\boldsymbol{\xi}}{\xi}, \tag{3.43}$$

$$w_{ijkl} = \frac{\mu\sigma}{4\pi}\int \overline{u_i'(\mathbf{x}, t)\xi_j\,\frac{\partial u_k'(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi_l}}\,\frac{d\boldsymbol{\xi}}{\xi}. \tag{3.44}$$

Подобие между формулами (3.41) и аналогичными выражениями (3.24) в пределе большой проводимости существует только для членов, пропорциональных $\overline{\mathbf{B}}$, для членов с частными производными появляются более сложные добавочные величины w_{ijkl}. Сравнивая выражения

(3.41) и (3.5), получаем

$$\alpha = -(w_{312} - w_{213}) = -(w_{123} - w_{321}) = -(w_{231} - w_{132}) \tag{3.45}$$
$$= -\frac{1}{3}(w_{123} - w_{132} + w_{231} - w_{213} + w_{312} - w_{321}),$$

а также

$$\beta = (w_{22} + w_{3223} + w_{2211} + w_{2222}) = (w_{33} + w_{2332} + w_{3311} + w_{3333})$$
$$= (w_{33} + w_{1331} + w_{3322} + w_{3333}) = (w_{11} + w_{3113} + w_{1122} + w_{1111})$$
$$= (w_{11} + w_{2112} + w_{1133} + w_{1111}) = (w_{22} + w_{1221} + w_{2211} + w_{2222})$$
$$= \frac{1}{3}(w_{11} + w_{22} + w_{33} + w_{1111} + w_{1133} + w_{2211} + w_{2222} +$$
$$+ w_{1331} + w_{2112} + w_{3322} + w_{3223} + w_{3333}), \tag{3.46}$$

или в векторной записи

$$\alpha = -\frac{\mu\sigma}{12\pi}\int \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\cdot \operatorname{rot}\mathbf{u}'(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi},t)}\,\frac{d\boldsymbol{\xi}}{\xi}, \tag{3.47}$$

$$\beta = \frac{\mu\sigma}{12\pi}\int \overline{(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x},t))(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi},t))}\,\frac{d\boldsymbol{\xi}}{\xi^3}. \tag{3.48}$$

Другая форма соотношений (3.47) и (3.48) для коэффициентов α и β может быть получена из представления поля турбулентной скорости с помощью векторных потенциалов. Если определить поля $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, φ соотношениями

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{a}_1 - \nabla\varphi, \quad \operatorname{div}\mathbf{a}_1 = 0 \tag{3.49}$$

$$\text{и } \mathbf{a}_1 = \operatorname{rot}\mathbf{a}_2, \quad \varphi = \operatorname{div}\mathbf{a}_2, \tag{3.50}$$

то получим

$$\mathbf{u}^* = -\Delta\mathbf{a}_2. \tag{3.51}$$

При вычислении коэффициента α удобно считать поле $\overline{\mathbf{B}}$ постоянным. При этом

$$\operatorname{rot}(\Delta\mathbf{a}_2\times\overline{\mathbf{B}}) = \operatorname{rot}\Delta(\mathbf{a}_2\times\overline{\mathbf{B}}) = \Delta\operatorname{rot}(\mathbf{a}_2\times\overline{\mathbf{B}}). \tag{3.52}$$

Тогда уравнения (3.11) можно записать в виде

$$\Delta\mathbf{B}' = \mu\sigma\Delta\operatorname{rot}(\mathbf{a}_2\times\overline{\mathbf{B}}), \quad \operatorname{div}\mathbf{B}' = 0 \tag{3.53}$$

и получить следующее решение:

$$\mathbf{B}^* = \mu\sigma\operatorname{rot}(\mathbf{a}_2\times\overline{\mathbf{B}}) + \mathbf{c}, \tag{3.54}$$

где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор с равным нулю средним значением, если поле $\mathbf{a}_2$ обладает этим же свойством. Следовательно, можно положить $\mathbf{c} = 0$. Умножая выражение (3.54) на турбулентную скорость $\mathbf{u}^*$, получим

$$\mathcal{E} = \mu\sigma\,\overline{\mathbf{u}^* \times \operatorname{rot}(\mathbf{a}_2 \times \overline{\mathbf{B}})}. \tag{3.55}$$

Используя те же приемы, что и при выводе формулы (3.29), находим

$$\alpha = -\frac{\mu\sigma}{3}\,\overline{\mathbf{u}^* \cdot \operatorname{rot}\mathbf{a}_2}\,, \tag{3.56}$$

или, учитывая соотношения (3.49) и (3.50),

$$\alpha = -\frac{\mu\sigma}{3}\left(\overline{\mathbf{a}_1 \cdot \operatorname{rot}\mathbf{a}_1} - \overline{\mathbf{a}_1 \cdot \nabla\varphi}\right). \tag{3.57}$$

Последний член в (3.57) исчезает, так как при учете (3.49) он равен $\overline{\operatorname{div}(\mathbf{a}_1\varphi)}$, а величина $\overline{\mathbf{a}_1\varphi}$ является постоянной вследствие принятой однородности поля $\mathbf{u}^*$. Таким образом, окончательно получаем

$$\alpha = -\frac{\mu\sigma}{3}\,\overline{\mathbf{a}_1 \cdot \operatorname{rot}\mathbf{a}_1}\,. \tag{3.58}$$

Легко увидеть эквивалентность этой формулы и (3.47), если записать величину $\mathbf{a}_2$ как решение уравнения Пуассона (3.51) в хорошо известном интегральном виде, и подставить затем в (3.56).

Таким же способом можно определить коэффициент β, учитывая зависимость $\overline{\mathbf{B}}$ от координат. В этом случае имеем

$$\beta = \frac{\mu\sigma}{3}\left(\overline{\mathbf{a}_1^2} - \overline{\varphi^2}\right). \tag{3.59}$$

Интересно отметить, что

$$\beta = -\frac{\mu\sigma}{3}\,\overline{\varphi^2} < 0, \tag{3.60}$$

если

$$\mathbf{u}^* = -\operatorname{grad}\varphi\,, \tag{3.61}$$

т.е. если $\mathbf{u}^*$ является потенциальным случайным полем. Это свойство можно легко получить и непосредственно из выражения (3.48). Если подставить (3.61), то получим

$$\beta = \frac{\mu\sigma}{12\pi}\int \xi_i\,\overline{\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}\,\xi_j\,\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial\xi_j}}\,\frac{d\boldsymbol{\xi}}{\xi^3} =$$

$$= \frac{\mu\sigma}{12\pi} \int \xi_i \xi_j \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\left(\varphi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi_j} \right)} - \right.$$

$$\left. - \overline{\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}} \right] \frac{\partial \xi}{\xi^3} .$$

Здесь и в дальнейшем принято, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Первый член в квадратных скобках исчезает, так как $\mathbf{u}^*$ и, следовательно, φ являются однородными полями. Введя корреляционную функцию

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \overline{\varphi(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t+\tau)}, \tag{3.62}$$

которая является функцией только от $\xi = \sqrt{\boldsymbol{\xi}^2}$, получим

$$\beta = -\frac{\mu\sigma}{12\pi} \int \frac{\xi_i \xi_j}{\xi^3} \frac{\partial^2 \Phi(\xi, 0)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} d\boldsymbol{\xi} = -\frac{\mu\sigma}{12\pi} \int \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} d\boldsymbol{\xi} =$$

$$= -\frac{\mu\sigma}{3} \int_0^\infty \xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} d\xi = -\frac{\mu\sigma}{3} \Phi(0,0) = -\frac{\mu\sigma}{3} \overline{\varphi^{*2}}. \tag{3.63}$$

Подстановка значения β из (3.60) в формулу (3.7) дает в этом случае

$$\sigma_T = \frac{\sigma}{1 - \overline{(\mu\sigma\varphi)^2}/3}, \tag{3.64}$$

т.е. турбулентная проводимость больше, чем молекулярная проводимость. Реализация такой турбулентности обеспечивается хаотической суперпозицией звуковых волн.

Следует отметить, что, согласно выражениям (3.12), (3.17) и (3.18),

$$\overline{(\mu\sigma\varphi)^2} \approx (\mu\sigma u^* \lambda_{\text{cor}})^2 = \mathrm{Rm}^2 \ll 1. \tag{3.65}$$

Поэтому в формуле (3.64) нет никакой сингулярности.

Ограничимся случаем турбулентности в несжимаемой среде и используем полученные выше результаты для нахождения порядка величины β из формулы (3.48). Так как $\overline{(\boldsymbol{\xi}\mathbf{u}^*)(\boldsymbol{\xi}\mathbf{u}^*)} = \xi^2 u^{*2}/3$, находим

$$\beta = \frac{1}{9} \mu\sigma u^{*2} \lambda_{\text{cor}}^2 \tag{3.66}$$

$$\sigma_T = \frac{\sigma}{1 + (\mu\sigma u^* \lambda_{cor})^2/9} \,. \tag{3.67}$$

Этот результат был впервые опубликован Штеенбеком [251] в 1963 г.

3.10. Иллюстрация α-эффекта и α-эксперимент

Возникновение турбулентной электродвижущей силы $\alpha\vec{\mathbf{B}}$, которая пропорциональна среднему магнитному полю, представляет собой качественно новый эффект. Поэтому целесообразно пояснить его физический смысл на иллюстративных примерах. Более того, существует экспериментальная проверка, подтверждающая этот эффект.

Для первой иллюстрации введем декартову систему координат (рис. 3.1), где оси x и z лежат в плоскости рисунка, а ось y перпендикулярна к ней. Пусть $\bar{\mathbf{B}}$ есть магнитное поле, параллельное оси y, а u^* – скорость, соответствующая левовинтовому спиральному дви-

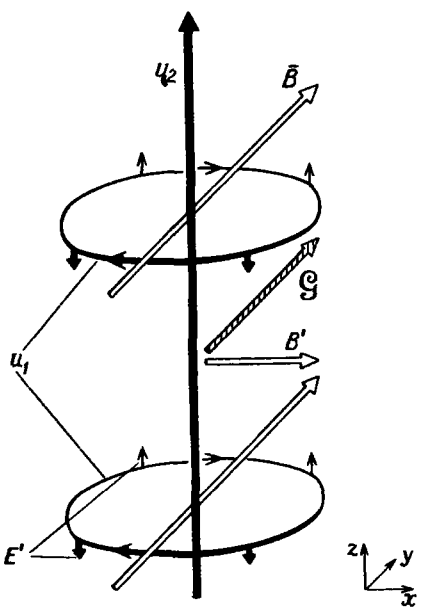


Рис. 3.1. Схематический рисунок, показывающий, что спиральное движение $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ в однородном магнитном поле $\bar{\mathbf{B}}$ приводит к появлению электродвижущей силы $\mathcal{E}$, параллельной магнитному полю (α-эффект).

жению. Представим $\mathbf{u}'$ в виде суммы $\mathbf{u}' = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, где $\mathbf{u}_1$ описывает вращательное движение вокруг оси z, а $\mathbf{u}_2$ – движение параллельно направлению оси z. Взаимодействие вращательного движения $\mathbf{u}_1$ со средним магнитным полем приводит к появлению электрической напряженности $\mathbf{E}' = \mathbf{u}_1 \times \overline{\mathbf{B}}$, которая направлена параллельно оси z, вниз в передней части окружности (см. рис. 3.1) и вверх – в задней части. Поле $\mathbf{E}'$ вызывает ток $\mathbf{j}'$ с тем же самым направлением. Этот ток создает магнитное поле $\mathbf{B}'$, которое направлено вдоль оси x. Векторное произведение компоненты $\mathbf{u}_2$ и магнитного поля $\mathbf{B}'$ направлено вдоль оси y, т.е. параллельно приложенному среднему магнитному полю $\overline{\mathbf{B}}$.

То же самое получается, если сначала рассмотреть взаимодействие $\mathbf{u}_2$ со средним магнитным полем. Это остается справедливым также в том случае, если ось спирального движения повернута в плоскости (x,z). Спиральное движение с произвольным направлением оси можно рассматривать как сумму двух спиральных движений; одного с осью в плоскости (x,z) и другого с осью, параллельной среднему магнитному полю. Все спиральные движения первого типа приводят к появлению электродвижущей силы $\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'$, параллельной среднему магнитному полю. Таким образом, четко видно, что хаотически распределенные левовинтовые спиральные движения вызывают среднюю электродвижущую силу, параллельную среднему магнитному полю. Для хаотически распределенных правовинтовых спиральных движений электродвижущая сила антипараллельна среднему магнитному полю.

Продемонстрировав α-эффект в пределе малой проводимости, приведем также иллюстрацию эффекта в пределе большой проводимости. В этом случае силовая трубка среднего магнитного поля локальным спиральным движением деформируется в фигуру, подобную перекрученной букве Ω (рис. 3.2). Ток $\mathbf{j}$, текущий через петлю Ω, имеет из-за закручивания компоненту, которая антипараллельна первоначальному магнитному полю при правовинтовом спиральном движении, как показано на рис. 3.2. Левовинтовое спиральное движение приводит к току, параллельному среднему магнитному полю. Итак, снова обнаруживаем, что в общем случае локальные спиральные движения, которые случайным образом появляются в проводящей жидкости, создают ток, параллельный или антипараллельный приложенному среднему магнитному полю.

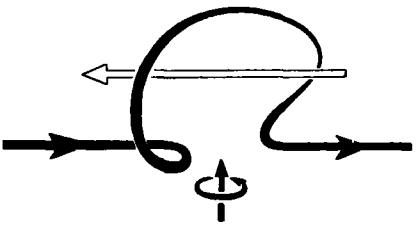


Рис. 3.2. Магнитная силовая трубка под действием спирального движения приобретает форму скрученной буквы Ω. Петля сопровождается током, который в случае правовинтовых спиральных движений имеет компоненту, антипараллельную магнитному полю.

Этот пример подобен тому, который приводил Паркер [184] для объяснения эффекта так называемой циклонической турбулентности. В дальнейшем мы увидим, что эффект Паркера и на самом деле можно интерпретировать как специальный случай α-эффекта.

Рассмотрим теперь сосуд (рис. 3.3) с проводящей жидкостью, находящейся в состоянии турбулентного движения. Турбулентность должна быть однородной и изотропной, но иметь спиральность, т.е. один из видов спирального движения должен быть более вероятен, чем другой. Примем, например, что большую вероятность имеют левовинтовые спиральные движения. Пусть магнитное поле $\bar{\mathbf{B}}$ направлено слева направо. В этих условиях должен проявляться α-эффект и, следовательно, должно существовать электрическое поле, параллельное магнитному полю. Оно приводит к возникновению положительного заряда на левой стенке сосуда и отрицательного – на правой. Снаружи мы можем измерить разность потенциалов в направлении, параллельном магнитному полю.

Доказательство существования α-эффекта было получено в экспериментах [255, 256], как это схематически показано на рис. 3.4.

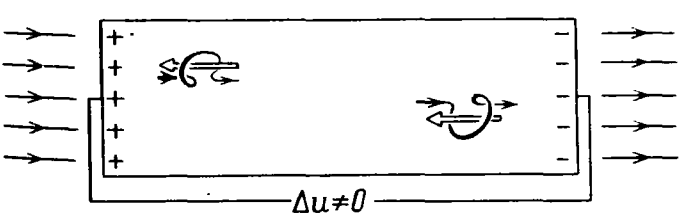


Рис. 3.3. Мелкомасштабные спиральные движения в сосуде приводят к разности потенциалов вдоль магнитного поля.

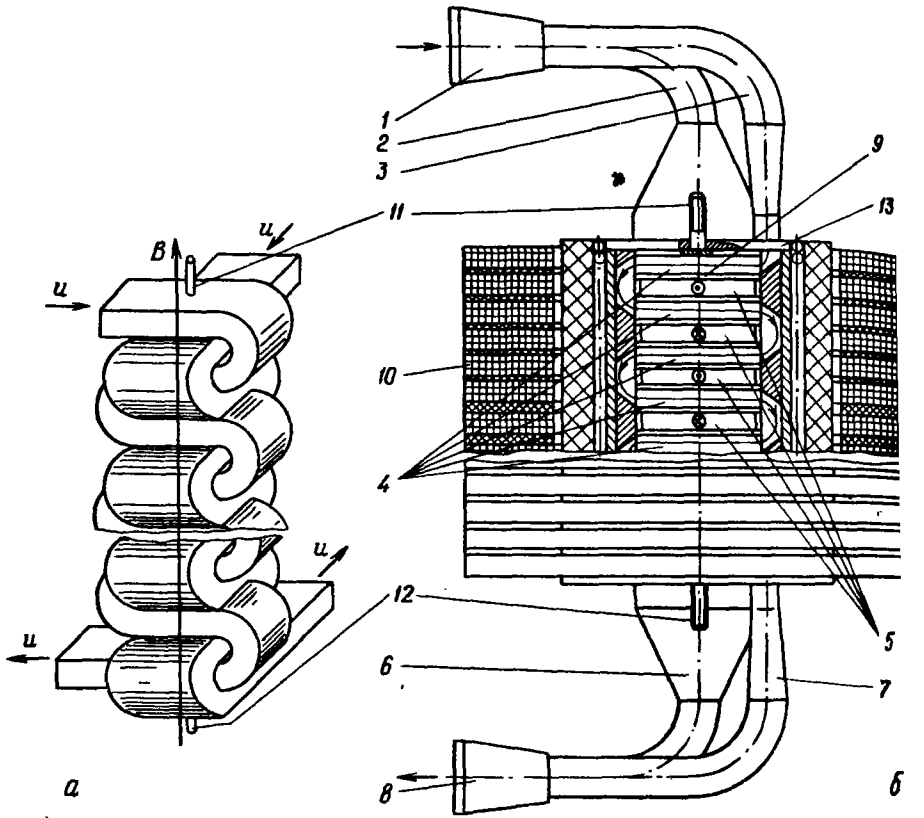


Рис. 3.4. α-эксперимент. *а*) Характер течения жидкости. *б*) Схема установки: *1* — главный вход жидкого натрия; *2* — *3* — входы в каналы течения; *4* — течение в плоскости рисунка; *5* — течение, перпендикулярное плоскости рисунка (⊙ — соответствует течению к наблюдателю, ⊕ — течение от наблюдателя); 6 — 7 — выходы из двух каналов течения; *8* — главный выход течения жидкого натрия; *9* — медные пластины, разделяющие каналы; *10* — катушка, генерирующая магнитное поле; *11* — *12* — электроды, между которыми измерялась разность потенциалов, создаваемая α-эффектом; *13* — стенка из нержавеющей стали.

В качестве рабочей жидкости использовался жидкий натрий, течение которого поддерживалось зеркально-несимметричным. Система медных пластин создавала два канала, которые навивались ортогонально друг к другу (см. рис. 3.4, *а*). Таким образом, направление течения было ступенчато закручено относительно направления магнитного поля $\vec{B}$; ясно, что такое движение не зеркально-симметрично.



Рис. 3.5. Фотография "α-ящика", т.е. сосуда, являющегося главной частью α-эксперимента. Часть внешней оболочки снята, чтобы можно было видеть внутри медные стенки, которые обеспечивают спиральное течение жидкого натрия.

Условия, представленные на рис. 3.4, соответствуют правовинтовому спиральному движению. Жидкий натрий тек через сосуд из нержавеющей стали. На рис. 3.5 показана фотография этого сосуда. Часть внешней стенки снята, чтобы можно было видеть медные стенки внутри сосуда, вынуждающие двигаться жидкость с необходимой спиральностью.

Рассмотрим упрощенную модель явления, позволяющую определить электродвижущую силу $\mathcal{E}$. Пусть $u(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, есть профиль скорости в одном канале и

$$u^* = \frac{1}{l} \int_0^l u(x)\,dx\,. \tag{3.68}$$

Определим периодическую, с периодом $4l$, функцию $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} u(x)/u^*, & 0 \leqslant x < l; \\ 0, & l \leqslant x < 2l; \\ -u(x-2l)/u^*, & 2l \leqslant x < 3l; \\ 0, & 3l \leqslant x \leqslant 4l\,. \end{cases} \tag{3.69}$$

По определению имеем

$$\int_0^l \varphi(x)\,dx = 1\,. \tag{3.70}$$

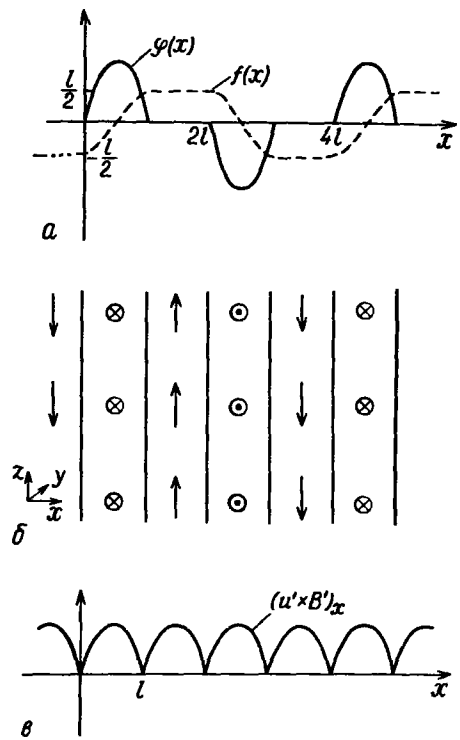


Рис. 3.6. Упрощенная модель α-эксперимента. *а*) Профиль y-компоненты поля скоростей в зависимости от x-координаты; *б*) схема течения; в) профиль x-компоненты индуцированной электродвижущей силы.

Поле скоростей в эксперименте представляется в виде

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'(0, \varphi(x), \pm\varphi(x-l)). \tag{3.71}$$

Положительный знак z-компоненты соответствует левовинтовому спиральному движению, если $\varphi(x) \geqslant 0$ для $0 \leqslant x \leqslant l$ (рис. 3.6.). Определим также функцию f согласно формуле

$$f(x) = \int_0^x \varphi(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}. \tag{3.72}$$

Имеем

$$\int_0^{4l} f(x)dx = 0, \tag{3.73}$$

т.е. среднее значение функции f на интервале $0 \leqslant x \leqslant 4l$ равно нулю.

Флуктуирующее магнитное поле вычисляется из уравнения (3.11). Используя формулы (3.71), (3.72), (3.73) и полагая

$\bar{\mathbf{B}} = (\bar{B}, 0, 0)$, $\bar{B} = \text{const}$, находим

$$B_x^* = 0,$$

$$B_y^* = -\mu\sigma u' \bar{B} f(x), \tag{3.74}$$

$$B_z^* = \mp \mu\sigma u' \bar{B} f(x-l).$$

Отсюда получаем для векторного произведения

$$(u^* \times \mathbf{B}^*)_x = \pm\mu\sigma u'^2 \bar{B}[f(x)\varphi(x-l) - \varphi(x) f(x-l)]. \tag{3.75}$$

На рис. 3.6 эта электродвижущая сила взята для случая, когда знак z-компоненты в (3.71) положителен. Она имеет направление, параллельное $\bar{\mathbf{B}}$ при положительном знаке в (3.71) и антипараллельное $\bar{\mathbf{B}}$ для отрицательного знака. Из формулы (3.75) получаем для разности потенциалов вдоль одного канала

$$\Delta U = \int_0^l (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}')_x \, dx = \pm \frac{1}{2} \mu\sigma u'^2 l^2 \bar{B}, \tag{3.76}$$

а для разности потенциалов вдоль всего сосуда с n каналами имеем

$$U = \pm \frac{1}{2} \mu\sigma u^{*2} l^2 \bar{B} n. \tag{3.77}$$

Два знака соответствуют двум типам спирального движения.

Результат эксперимента лучше всего виден на рис. 3.7. На этом рисунке дано отношение измеренного напряжения U_m к теоретическому значению U из (3.77), как функция числа Стюарта

$$N = \frac{\bar{B}^2 \sigma l}{\rho u^*}. \tag{3.78}$$

Здесь ρ обозначает плотность жидкости. Четко видно, что отношение этих величин не случайно. Для малых N, когда скорость жидкости велика, а магнитное поле мало, измеренное напряжение U_m составляло около 20% от теоретического значения (3.77). Это следствие граничных эффектов, так как мы принимали, что модель безгранична в y- и z-направлениях. Было обнаружено также, что если число Стюарта возрастает, то напряжение уменьшается. Это отражает влияние магнитного поля на поле скоростей. Интересно отметить, что отношение U_m/U не зависело от магнитного числа Рейнольдса $\mathrm{Rm} = \mu\sigma l u^*$. В эксперименте проверялись два предсказания форму-

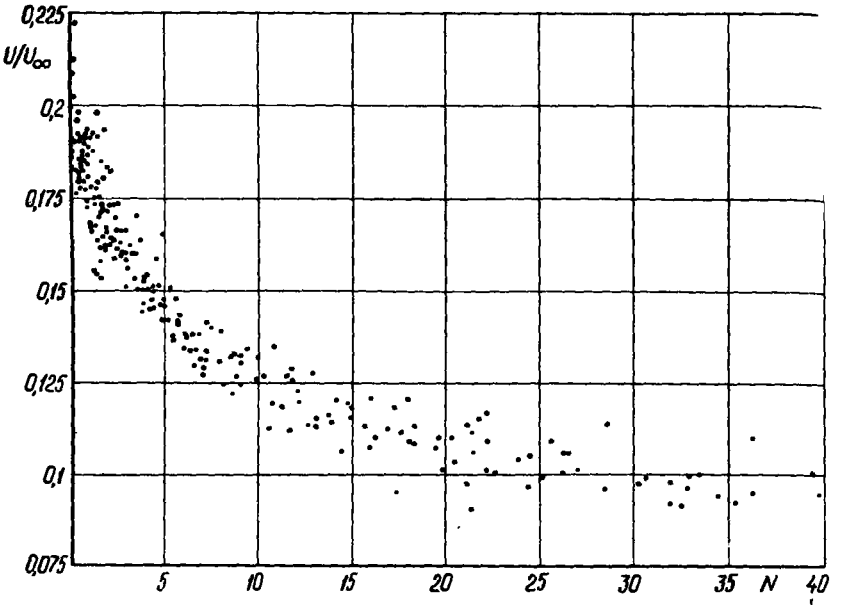


Рис. 3.7. **Зависимость разности потенциалов, измеренной вдоль магнитного поля, от числа Стюарта.**

лы (3.77), критичных для справедливости теории: 1) знак разности потенциалов U_m между электродами не зависит от типа движения, 2) он меняется на противоположный, если приложенное магнитное поле изменяет свое направление на противоположное. Рис. 3.8 показывает для ряда значений магнитного поля, что U_m действительно пропорционально u^{*2}. Из рис. 3.9 видно, что напряжение U_m пропорционально магнитному полю, если поле мало. Для больших приложенных полей эффект становится нелинейным.

Как было отмечено выше, легко показать, что α-эффект тесно связан с динамо-возбуждением. Соединим проволокой два конца сосуда, изображенного на рис. 3.3, и намотаем ее вокруг сосуда таким образом, чтобы обмотка создавала поле с тем же направлением, что и $\bar{\mathbf{B}}$. Тогда для достаточно сильного α-эффекта эта установка будет действовать как динамо с самовозбуждением. Другая иллюстрация дана на рис. 3.10. Два полых кольца должны содержать в себе проводящую среду, в которой возможен α-эффект. Примем, что в кольце I есть магнитное поле $\mathbf{B}_0$. Оно вызывает вследствие α-эффекта ток $\mathbf{j}_1$. Этот ток создает магнитное поле $\mathbf{B}_1$ в кольце II. Поле $\mathbf{B}_1$

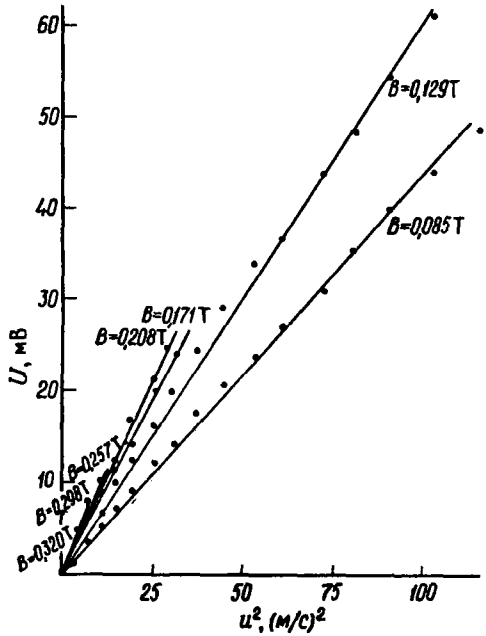


Рис. 3.8. Разность потенциалов, создаваемая α-эффектом, в зависимости от квадрата скорости при различных значениях приложенного магнитного поля.

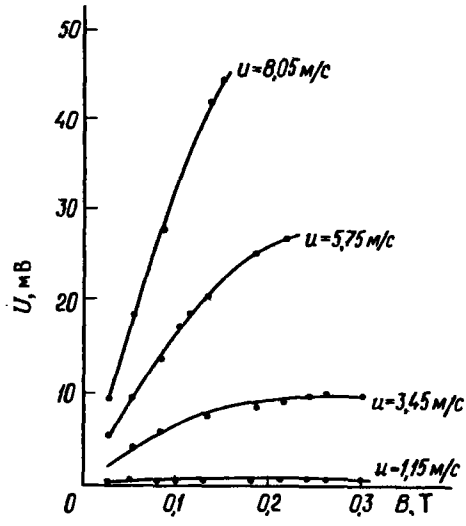


Рис. 3.9. Разность потенциалов, создаваемая α-эффектом, в зависимости от значений магнитного поля для ряда значений скорости течения.

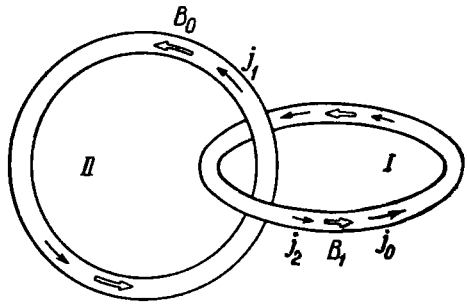


Рис. 3.10. Модель, иллюстрирующая самовозбуждение магнитного поля в среде с законом Ома в виде $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \alpha\mathbf{B})$.

вызывает ток $\mathbf{j}_2$, который создает магнитное поле $\mathbf{B}_2$ в кольце I. Ясно, что поле $\mathbf{B}_2$ поддерживает поле $\mathbf{B}_0$. Мы, следовательно, можем ожидать, что поля поддерживают друг друга при достаточно сильном α-эффекте, несмотря на наличие омических потерь. Энергия джоулева тепла, производимого токами, берется от энергии турбулентного движения, имеющего спиральность.

Напомним, наконец, что более реалистическая модель такого вида была описана в разд. 1.2.

3.11. Средний квадрат флуктуаций

Для изучения предела большой проводимости необходимо более детально рассмотреть физическую картину явлений. Примем за основу, что поле $\mathbf{B}'$ генерируется при взаимодействии поля скоростей $\mathbf{u}'$ со средним магнитным полем $\bar{\mathbf{B}}$. В рамках корреляционного приближения второго порядка эта генерация осуществляется за время порядка τ_{cor}, создавая, согласно (3.10), элементарное поле $\mathbf{B}'_{e1}$ порядка

$$B'_{e1} \approx \frac{u'\tau_{cor}}{\lambda_{cor}} \bar{B}. \qquad (3.79)$$

Затем флуктуационное поле скоростей $\mathbf{u}'$ изменяется почти полностью и, взаимодействуя с $\bar{\mathbf{B}}$, производит новое элементарное поле $\mathbf{B}'_{e1}$, которое нескоррелировано с предыдущим и т.д. Каждое такое элементарное поле будет существовать в течение времени порядка $\mu\sigma\lambda_{cor}^2$, которое, согласно (3.16), больше τ_{cor}. Следовательно, реально существующее поле $\mathbf{B}'$ является суперпозицией таких нескоррелиро-

ванных элементарных полей $\mathbf{B}'_{e1}$, число которых n приблизительно равно

$$n \approx \frac{\mu\sigma\lambda_{cor}^2}{\tau_{cor}} . \tag{3.80}$$

Поскольку $\mathbf{B}'$ является статистической суммой n нескоррелированных полей $\mathbf{B}'_{e1}$, то по порядку величины оно равно $\sqrt{n}$ от величины одного элементарного поля, т.е., согласно (3.79) и (3.80),

$$B' \approx \sqrt{n} B'_{e1} \approx \sqrt{\mu\sigma u'^2 \tau_{cor}}\, \bar{B}, \tag{3.81}$$

или

$$\overline{\mathbf{B}'^2} \approx \mu\sigma u'^2 \tau_{cor} \bar{\mathbf{B}}^2 . \tag{3.82}$$

Эта оценка была получена в работе Штеенбека и Краузе [262]. Подобный же результат был получен Паркером [196]:

$$\overline{\mathbf{B}'^2} \approx \mathrm{Rm}\bar{\mathbf{B}}^2 , \tag{3.83}$$

что находится в согласии с (3.82), если $S \approx 1$, как это было принято Паркером. Наконец, можно отметить результат, полученный Моссом [179]. Произведя численное моделирование с двумерной турбулентностью, Мосс нашел

$$\overline{\mathbf{B}'^2} \approx (\mathrm{Rm})^{0,7} \bar{\mathbf{B}}^2 . \tag{3.84}$$

Прямое сравнение этого результата с (3.82) невозможно из-за другого значения параметра S, принятого Моссом.

Оценку (3.82) можно получить непосредственно из выражения (3.21), если считать интервал $t - t_0$ временем жизни элементарного поля, т.е. $t = t_0 - \mu\sigma\lambda_{cor}^2$. Получим тогда

$$\overline{\mathbf{B}'^2} = \int_{t-\mu\sigma\lambda_{cor}^2}^{t} \int_{t-\mu\sigma\lambda_{cor}^2}^{t} \overline{\mathrm{rot}(\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t') \times \bar{\mathbf{B}}) \cdot \mathrm{rot}(\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t'') \times \bar{\mathbf{B}})} dt' dt'' \tag{3.85}$$

Подынтегральное выражение существенно отлично от нуля только в полосе шириной τ_{cor} вдоль линии $t' = t''$ в плоскости (t', t''). Таким образом, находим для изотропного случая

$$\overline{\mathbf{B}'^2} \approx (\mu\sigma\lambda_{cor}^2 \tau_{cor})\left(\frac{u'^2}{\lambda_{cor}^2} \bar{\mathbf{B}}^2\right),$$

что согласуется с (3.82).

При этих вычислениях мы использовали только качественные рассуждения. Отметим, однако, что оценка (3.82) и аналогичные ей оценки для случая малой проводимости получены строго в гл. 7.

В пределе малой проводимости оценка $\overline{\mathbf{b}'^2}$, аналогичная (3.82), непосредственно следует из (3.54), если ограничиваться случаем несжимаемой жидкости. Получаем из (3.54)

$$\overline{\mathbf{b}'^2} = \mu^2\sigma^2\overline{(\bar{\mathbf{B}}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{a}_2\cdot(\bar{\mathbf{B}}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{a}_2} =$$

$$= \mu^2\sigma^2\{\bar{B}_1^2[\overline{(\frac{\partial a_{21}}{\partial x_1})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_1})^2}] +$$

$$+ \bar{B}_2^2[\overline{(\frac{\partial a_{21}}{\partial x_2})^2} + \ldots] + \ldots\},$$

что переходит для изотропного случая в

$$\overline{\mathbf{b}'^2} = q\bar{\mathbf{B}}^2, \tag{3.86}$$

где

$$\frac{q}{\mu^2\sigma^2} = \overline{(\frac{\partial a_{21}}{\partial x_1})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_1})^2} =$$

$$= \overline{(\frac{\partial a_{21}}{\partial x_2})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_2})^2} = \overline{(\frac{\partial a_{21}}{\partial x_3})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_3})^2} +$$

$$+ \overline{(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_3})^2} = \frac{1}{3}[\overline{(\frac{\partial a_{21}}{\partial x_1})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_1})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{21}}{\partial x_2})^2} +$$

$$+ \overline{(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_2})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{21}}{\partial x_3})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{22}}{\partial x_3})^2} + \overline{(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_3})^2}]. \tag{3.87}$$

Получаем, следовательно, в качестве оценки порядка величины

$$\frac{q}{\mu^2\sigma^2} = \frac{1}{3}\,3\frac{\overline{\mathbf{a}_2^2}}{\lambda_{\text{cor}}^2} = \frac{\overline{\mathbf{a}_2^2}}{\lambda_{\text{cor}}^2} \approx u'^2\lambda_{\text{cor}}^2 \tag{3.88}$$

и

$$\overline{\mathbf{b}'^2} \approx \mathrm{Rm}^2\,\bar{\mathbf{B}}^2\,. \tag{3.89}$$

Глава 4. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ

4.1. Вводные замечания. Определения

Рассмотрение двух предельных случаев в предыдущей главе показывает, что в общем случае необходимы более эффективные математические методы. Теперь мы станем широко использовать тензорное исчисление. При этом будут часто встречаться изотропные тензоры в евклидовом пространстве, т.е. тензор Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

и антисимметричный тензор Леви – Чивиты

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1,\ i,\ j,\ k = 1, 2, 3;\ 3, 1, 2;\ 2, 3, 1, \\ 0,\ i = j,\ i = k,\ j = k, \\ -1,\ i,\ j,\ k = 2, 1, 3;\ 3, 2, 1;\ 1, 3, 2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Усреднение произведений компонент векторов приводит к введению корреляционных тензоров, таких, например, как двухточечный и двухвременной тензор поля скоростей

$$Q_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \overline{u_i^*(\mathbf{x}, t)\, u_k^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)}, \tag{4.3}$$

смешанный корреляционный тензор поля скоростей и магнитного поля

$$P_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \overline{u_i^*(\mathbf{x}, t)\, B_k^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)} \tag{4.4}$$

и корреляционный тензор магнитного поля

$$B_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \overline{B_i^*(\mathbf{x}, t)\, B_k^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)}. \tag{4.5}$$

Эти корреляционные тензоры фактически уже использовались в предыдущей главе. Например, величина h, которая определена формулой (3.4), при учете (4.2) и (4.3) может быть представлена в виде

$$h = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial Q_{ik}}{\partial \xi_j} \Big| \xi = 0, \tau = 0. \tag{4.6}$$

С тензором Q_{ik} тесно связаны величины w_{ik} и w_{ijk}, определенные формулами (3.25) и (3.26):

$$w_{ij} = \int_0^\infty Q_{ij}(\mathbf{x}, 0, t, -\tau)\, d\tau, \tag{4.7}$$

$$w_{ijk} = \int_0^\infty \frac{\partial Q_{ik}(\mathbf{x}, 0, t, -\tau)}{\partial x_j}\, d\tau. \tag{4.8}$$

Аналогичные соотношения можно написать для величин, определяемых выражениями (3.42), (3.43) и (3.44).

Более того, соотношения симметрии (3.27) и (3.28) для компонент тензоров w_{ijk} и w_{ij} отражают связь между этими тензорами и изотропными тензорами. Легко проверить соотношения

$$w_{ijk} = -\frac{\alpha}{2} \varepsilon_{ijk}, \quad w_{ij} = \beta \delta_{ij}. \tag{4.9}$$

Заметим, наконец, что турбулентная электродвижущая сила может быть представлена как

$$\mathcal{E}_i = \varepsilon_{ijk} P_{jk}(\mathbf{x}, 0, t, 0), \tag{4.10}$$

а средний квадрат флуктуаций магнитного поля — в виде

$$\overline{\mathbf{b}^2} = B_{ii}(\mathbf{x}, 0, t, 0). \tag{4.11}$$

Имеются веские причины для введения корреляционных тензоров более высокого ранга; например, корреляционного тензора третьего ранга для скоростей

$$Q_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \eta, t, \tau, \sigma) = \overline{u_i^*(\mathbf{x}, t)\, u_j^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)\, u_k^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} + \eta, t + \tau + \sigma)}, \tag{4.12}$$

смешанного тензора третьего ранга

$$P_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \eta, t, \tau, \sigma) = \overline{u_i^*(\mathbf{x}, t)\, u_j^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)\, B_k^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} + \eta, t + \tau + \sigma)} \tag{4.13}$$

и соответствующих величин четвертого ранга

$$Q_{ijkl}(\mathbf{x}, \xi, \eta, \zeta, t, \tau, \sigma, \rho) = \overline{u_i^*(\mathbf{x}, t)\, u_j^*(\mathbf{x}+\xi, t+\tau)} \times \overline{u_k^*(\mathbf{x}+\xi+\eta, t+\tau+\sigma)\, u_l^*(\mathbf{x}+\xi+\eta+\zeta, t+\tau+\sigma+\rho)}, \quad (4.14)$$

$$P_{ijkl}(\mathbf{x}, \xi, \eta, \zeta, t, \tau, \sigma, \rho) = \overline{u_i^*(\mathbf{x}, t)\, u_j^*(\mathbf{x}+\xi, t+\tau)} \times \overline{u_k^*(\mathbf{x}+\xi+\eta, t+\tau+\sigma) B_l^*(\mathbf{x}+\xi+\eta+\zeta, t+\tau+\sigma+\rho)}. \quad (4.15)$$

Далее появятся корреляционные тензоры P_{ij}, P_{ijk}, P_{ijkl} при фиксированных, равных нулю значениях некоторых координат. Поэтому введем дополнительно тензоры p_{ij}, p_{ijk} и p_{ijkl}, определяемые из соотношений

$$p_{ij}(\mathbf{x}, t) = P_{ij}(\mathbf{x}, 0, t, 0), \quad p_{ijk}(\mathbf{x}, \xi, t, \tau) = P_{ijk}(\mathbf{x}, \xi, 0, t, \tau, 0), \quad (4.16)$$

$$p_{ijkl}(\mathbf{x}, \xi, \eta, t, \tau, \sigma) = P_{ijkl}(\mathbf{x}, \xi, \eta, 0, t, \tau, \sigma, 0).$$

Согласно этим определениям, турбулентная электродвижущая сила задается выражением

$$\mathcal{E}_i = \varepsilon_{ijk} p_{ik}. \quad (4.17)$$

Далее нам будет удобно для части операторов, входящих в уравнение индукции (2.3), ввести особые обозначения

$$\mathfrak{D}_{jn} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta\right)\delta_{jn} - \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{u}_m \quad (4.18)$$

и

$$\mathfrak{D}_{jmn} = \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (4.19)$$

В этих формулах $\mathbf{x}$ и t являются координатами, по которым производится дифференцирование. Однако, применяя эти операторы к какому-либо корреляционному тензору частного вида, всегда будем считать, что дифференцирование выполняется по отношению к последним пространственным или временным координатам, т.е., например, в явной записи

$$\mathfrak{D}_{jn}P_{in} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \eta\frac{\partial^2}{\partial\xi_p\partial\xi_p}\right)\delta_{jn} - \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\bar{u}_m(\mathbf{x}+\xi, t+\tau)\right] \times P_{in}(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)$$

и $$\mathcal{D}_{jn} P_{ipn} = [(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \eta \frac{\partial^2}{\partial \eta_r \partial \eta_r}) \delta_{jn} - \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{lmn} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \xi_k} \overline{u}_m(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, t + \tau + \sigma)] P_{ipn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma),$$

но $$\mathcal{D}_{jn} P_{ipn} = [(\frac{\partial}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial^2}{\partial \xi_r \partial \xi_r}) \delta_{jn} - \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{lmn} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \xi_k} \overline{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)] p_{ipn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau).$$

Как видно из этих формул, аргументами поля средних скоростей всегда являются суммы соответствующих координат.

4.2. Иерархия уравнений для корреляционных тензоров

Начнем с уравнения индукции (2.3), которое записываем теперь в виде

$$\mathcal{D}_{jn} B_n = \mathcal{D}_{jmn} u^*_m B_n. \tag{4.20}$$

Производя усреднение, получаем уравнение

$$\mathcal{D}_{jn} \overline{B}_n = \mathcal{D}_{jmn} p_{mn}, \tag{4.21}$$

где справа появляется корреляционный тензор.

Заменим теперь в уравнении (4.20) аргументы $\mathbf{x}, t$ на $\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$, $t + \tau$ и возьмем производные по отношению к $\boldsymbol{\xi}$ и τ. Дополнительно заменим справа индексы m и n на n и p. Умножая получившееся уравнение на $u^*_m(\mathbf{x}, t)$ и производя усреднение, получаем

$$\mathcal{D}_{jn} P_{mn} = \mathcal{D}_{jnp}(Q_{mn} \overline{B}_p) + \mathcal{D}_{jnp} p_{mnp} \tag{4.22}$$

В уравнении (4.21) для среднего магнитного поля – статистического момента первого порядка – появляется корреляционный тензор второго порядка, т.е. статистический момент второго порядка. В уравнении (4.22) для корреляционного тензора P_{mn} появляется корреляционный тензор третьего порядка, т.е. статистический момент третьего порядка. Эти соотношения можно продолжить. Таким образом, находим иерархию уравнений для неизвестных величин $\overline{B}_n$, P_{mn}, P_{mnp}, ..., где первые уравнения имеют вид

$$\mathcal{D}_{jn} \overline{B}_n = \mathcal{D}_{jmn} p_{mn},$$

$$\mathfrak{D}_{jn} P_{mn} = \mathfrak{D}_{j\,np}(Q_{mn}\overline{B}_p) + \mathfrak{D}_{j\,np} P_{mnp},$$
$$\mathfrak{D}_{jp} P_{mnp} = \mathfrak{D}_{j\,pq}(Q_{mnp}\overline{B}_q) - \mathfrak{D}_{j\,p}(Q_{mn}\overline{B}_p) + \mathfrak{D}_{jpq} P_{mnpq}. \qquad (4.23)$$

Система (4.23) состоит из бесконечного числа уравнений. Для решения конечной системы необходима какая-то процедура замыкания. Это хорошо известная общая проблема теории турбулентности, которая до сих пор еще удовлетворительно не решена. Мы не будем обсуждать проблемы этого типа.

Выведем из (4.23) конечную систему уравнений, учитывая возмущающую турбулентную скорость $\mathbf{u}'$ с точностью до некоторого определенного порядка. Таким образом, мы имеем дело только со слабой турбулентностью. Однако полученные из такой теории эффекты, как показано в предыдущей главе, могут стать очень большими, плавно меняя свою величину в зависимости от параметров.

4.3. Корреляционное приближение второго порядка

Этот случай соответствует теории, которая учитывает возмущенное турбулентное поле скоростей $\mathbf{u}'$ только до второго порядка включительно. Отбрасывая второй член в правой части второго уравнения системы (4.23), который является членом третьего порядка, получаем

$$\mathfrak{D}_{jn}\overline{B}_n(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{D}_{j\,mn} P_{mn}(\mathbf{x}, t), \qquad (4.24)$$

$$\mathfrak{D}_{jn} P_{mn}(\mathbf{x}, \xi, t, \tau) = \mathfrak{D}_{j\,np}(Q_{mn}(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)\,\overline{B}_p(\mathbf{x} + \xi, t + \tau)).$$

Дополнительно имеются уравнения, которые учитывают, что магнитное поле соленоидальное:

$$\frac{\partial B_n(\mathbf{x}, t)}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial P_{mn}(\mathbf{x}, \xi, t, \tau)}{\partial \xi_n} = 0, \qquad (4.25)$$

и, наконец, имеется граничное условие

$$P_{mn}(\mathbf{x}, \xi, t, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to -\infty. \qquad (4.26)$$

Это условие является очевидным из определения (4.4) величины P_{mn}. Оно означает, что не существует корреляции между полем скоростей в момент времени t и магнитным полем в значительно более ранний момент времени.

Уравнения (4.24), (4.25) и (4.26) являются основными уравнениями электродинамики средних полей в рамках корреляционного

приближения второго порядка. Чтобы оправдать (Краузе и Робертс [131]) пренебрежение кумулянтом третьего порядка во втором уравнении системы (4.23), заметим, что

$$p_3 \leqslant u^* p_2, \tag{4.27}$$

где p_2 и p_3 обозначают порядки величин тензоров P_{mn} и P_{mnp}. Равенство выполняется только в случае полной корреляции. Соответственно порядок величины члена третьего порядка $\mathcal{D}_{jnp} P_{mnp}$ может быть оценен как

$$|\mathcal{D}_{jnp} P_{mnp}| \approx \frac{p_3}{\lambda_{cor}} \leqslant \frac{u^* p_2}{\lambda_{cor}} . \tag{4.28}$$

С другой стороны, величина члена второго порядка может быть оценена выражением

$$|\mathcal{D}_{jn} P_{mn}| \gtrsim \max \left\{ \frac{p_2}{\tau_{cor}} , \frac{p_2}{\mu\sigma\lambda^2_{cor}} \right\}, \tag{4.29}$$

где знак "$>$" включен только для того, чтобы избежать обсуждения члена, содержащего среднюю скорость в операторе $\mathcal{D}_{jn}$.

Сравнивая теперь оценки (4.28) и (4.29), приходим к выводу, что корреляционное приближение второго порядка применимо, если $u^* p_2/\lambda_{cor} \ll p_2/\tau_{cor}$ или $u^* p_2/\lambda_{cor} \ll p_2/\mu\sigma\lambda^2_{cor}$ или выполняются оба неравенства одновременно. Следовательно, имеем условие, которое гарантирует применимость корреляционного приближения второго порядка:

$$\min (\mathrm{Rm}, S) \ll 1, \tag{4.30}$$

уже упоминавшееся в предыдущей главе. Число Струхаля S и магнитное число Рейнольдса Rm определены выражениями (3.13) и (3.14)

4.4. Корреляционные приближения высших порядков

Как и в случае корреляционного приближения второго порядка, можно развить теории, учитывающие корреляции более высокого порядка. Так, если пренебречь членами четвертого порядка в третьем уравнении системы (4.23), то придем к следующим уравнениям:

$$\mathcal{D}_{jn} \overline{B}_n(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D}_{jmn} p_{mn}(\mathbf{x}, t), \tag{4.31}$$

$$\mathcal{D}_{jn} P_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \mathcal{D}_{jnp} (Q_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) \overline{B}_p(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)) +$$

$$+ \mathcal{D}_{jnp} p_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau),$$

$$\mathfrak{D}_{jp} P_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma) = \mathfrak{D}_{jpq}(Q_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma) \times$$

$$\times \bar{B}_q(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, t + \tau + \sigma))$$

с дополнительными условиями соленоидальности

$$\frac{\partial \bar{B}_n(\mathbf{x}, t)}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial P_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)}{\partial \xi_n} = 0, \quad \frac{\partial P_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma)}{\partial \eta_p} = 0$$

и с граничными условиями (4.32)

$$P_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to -\infty,$$

$$P_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma) \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to -\infty. \tag{4.33}$$

Напишем, наконец, аналогичную систему уравнений и условий для корреляционного приближения четвертого порядка:

$$\mathfrak{D}_{jn} \bar{B}_n(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{D}_{jmn} P_{mn}(\mathbf{x}, t), \tag{4.34}$$

$$\mathfrak{D}_{jn} P_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \mathfrak{D}_{jnp}(Q_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) \bar{B}_p(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)) +$$

$$+ \mathfrak{D}_{jnp} P_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau),$$

$$\mathfrak{D}_{jp} P_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma) = \mathfrak{D}_{jpq}(Q_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma) \times$$

$$\times \bar{B}_q(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, t + \tau + \sigma)) -$$

$$- Q_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) \mathfrak{D}_{jp} \bar{B}_p(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, t + \tau + \sigma) + \mathfrak{D}_{jpq} P_{mnpq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma),$$

$$\mathfrak{D}_{jq} P_{mnpq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, t, \tau, \sigma, \rho) =$$

$$= \mathfrak{D}_{jqr}(Q_{mnpq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, t, \tau, \sigma, \rho) \bar{B}_r(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta}, t + \tau + \sigma + \rho)).$$

$$\frac{\partial \bar{B}_n(\mathbf{x}, t)}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial P_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)}{\partial \xi_n} = 0, \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial P_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma)}{\partial \eta_p} = 0, \quad \frac{\partial P_{mnpq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, t, \tau, \sigma, \rho)}{\partial \zeta_q} = 0.$$

$$P_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to -\infty,$$

$$P_{mnp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \tau, \sigma) \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to -\infty, \tag{4.36}$$

$$P_{mnpq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, t, \tau, \sigma, \rho) \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to -\infty.$$

4.5. Тензорная функция Грина уравнения индукции

Для нахождения общих решений уравнений, которые были выведены в предыдущих разделах, введем тензорную функцию Грина $G_{jp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$, уравнения индукции, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $G_{ip}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = 0$, если $t < \tau$;

2) $G_{jp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) \to 0$, если $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \to \infty$;

3) $\mathfrak{D}_{jk} G_{kp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta\right)\delta_{jk} - \varepsilon_{jlm}\varepsilon_{mnk}\frac{\partial}{\partial x_l}\bar{u}_k(\mathbf{x}, t)\}$

$\times G_{kp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \delta_{kp}\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau)$ при $t > \tau$.

Здесь $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau)$ обозначает δ-функцию Дирака.

Легко показать, что выражение

$$B_k(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty \int G_{kp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)\, q_p(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, d\boldsymbol{\xi} d\tau \qquad (4.37)$$

является решением уравнения

$$\mathfrak{D}_{jk} B_k = q_j \qquad (4.38)$$

для $t > t_0$ с начальным условием $B_k(\mathbf{x}, t_0) = 0$. Действительно, подействуем оператором $\mathfrak{D}_{jk}$ на поле (4.37) и учтем условие 3):

$$\mathfrak{D}_{jk} B_k = \int_{t_0}^\infty \int \mathfrak{D}_{jk} G_{kp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)\, q_p(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, d\boldsymbol{\xi} d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^\infty \int \delta_{jp}\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau)\, q_p(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, d\boldsymbol{\xi} d\tau = q_j(\mathbf{x}, t). \qquad (4.39)$$

Кроме того, покажем, что задача с начальным значением

$$\mathfrak{D}_{jk} B_k = 0 \text{ при } t > \tau, \quad B_k(\mathbf{x}, \tau) = B_k^{(0)}(\mathbf{x}) \qquad (4.40)$$

имеет решение в виде

$$B_k(\mathbf{x}, t) = \int G_{kp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)\, B_p^{(0)}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}. \qquad (4.41)$$

Чтобы убедиться в этом, замечаем, во-первых, что

$$\mathfrak{D}_{jk} B_k = \int \mathfrak{D}_{jk} G_{kp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)\, B_p^{(0)}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} = \qquad (4.42)$$

$$= \int \delta_{jp}\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau)\, B_p^{(0)}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} = B_j^{(0)}(\mathbf{x})\, \delta(t - \tau)$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение (4.40) удовлетворяется для $t > \tau$. Во-вторых, находим при любом положительном ε

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \mathfrak{D}_{jk} B_k \, dt = B_j^{(0)}(\mathbf{x}). \tag{4.43}$$

В пределе $\varepsilon \to 0$ и при учете явного вида оператора $\mathfrak{D}_{jk}$ получаем

$$B_j(\mathbf{x}, \tau+\varepsilon) - B_j(\mathbf{x}, \tau-\varepsilon) + O(\varepsilon) = B_j^{(0)}(\mathbf{x}),$$

так как по определению $B_j(\mathbf{x}, \tau-\varepsilon) = 0$, а

$$\lim_{\varepsilon \to 0} B_j(\mathbf{x}, \tau+\varepsilon) = B_j^{(0)}(\mathbf{x}).$$

Таким образом, показано, что выражение (4.41) является решением уравнения индукции при заданном начальном значении магнитного поля.

Мы не будем обсуждать общую проблему существования тензора G_{jp} и другие подобные проблемы. В дальнейшем мы ограничимся специальными типами поля средней скорости, для которых дадим явный вид тензора G_{jp}. Упомянем, однако, об одной интересной проблеме. Тензор G_{jp} может иметь свойство

$$G_{jp} \to 0 \quad \text{при} \quad t - \tau \to \infty, \tag{4.44}$$

а может и не иметь его. Если он не обладает свойством (4.44), то проблема с начальным значением уравнения индукции (4.40) имеет незатухающие решения. Иначе говоря, это означает, что первоначальное магнитное поле не исчезает вследствие омической диссипации. Индукционное действие поля средней скорости превышает потери магнитной энергии из-за омических потерь, и, следовательно, магнитное поле или остается стационарным, или неограниченно растет. В обоих этих случаях говорят о модели динамо с самовозбуждением.

По соглашению мы исключаем возможность того, что самовозбуждающееся динамо обусловливается полем средних скоростей. Ограничим себя такими полями средних скоростей, для которых выполняется условие (4.44). При этом ограничении мы можем решить неоднородное уравнение (4.38), где $q(\mathbf{x}, t)$ является заданной и ограниченной для $-\infty < t < +\infty$ функцией:

$$B_k(\mathbf{x}, t) = \int\int G_{kp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) \, q_p(\boldsymbol{\xi}, \tau) \, d\boldsymbol{\xi} d\tau. \tag{4.45}$$

Если поле $\mathbf{B}$, определяемое выражениями (4.37) или (4.45), представляет собой магнитное поле, то оно должно быть соленоидальным. Проверим теперь для обоих этих случаев, что $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, если $\operatorname{div}\mathbf{q}=0$.

Из свойства 3) тензора Грина и определения (4.18) оператора $\mathcal{D}_{jk}$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{D}_{jk}G_{kp}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta\right)\frac{\partial G_{kp}}{\partial x_k}=-\frac{\partial\delta(\mathbf{x}-\xi,\,t-\tau)}{\partial\xi_p} \tag{4.46}$$

и затем из выражения (4.37)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta\right)\operatorname{div}\mathbf{B}=\int_{t_0}^{\infty}\int\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta\right)\frac{\partial G_{kp}}{\partial x_k}\,q_p(\xi,\tau)\,d\xi d\tau=$$

$$=-\int_{t_0}^{\infty}\int\frac{\partial\delta(\mathbf{x}-\xi,\,t-\tau)}{\partial\xi_p}\,q_p(\xi,\tau)\,d\xi d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{\infty}\int\delta(\mathbf{x}-\xi,\,t-\tau)\,\frac{\partial q_p(\xi,\tau)}{\partial\xi_p}\,d\xi d\tau=\operatorname{div}\mathbf{q}.$$

Таким образом, мы нашли, что $\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta\right)\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, если $\operatorname{div}\mathbf{q}=0$.

Хорошо известно, что решение $U(\mathbf{x},t)$ уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta\right)U(\mathbf{x},t)=0 \tag{4.47}$$

тождественно равно нулю для $t>t_0$, если оно равно нулю для $t=t_0$.

Поле $\mathbf{B}$, определяемое выражением (4.37), равно нулю для $t=t_0$, следовательно, и $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ для $t=t_0$. Поэтому имеем $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ для всех $t\geqslant t_0$, если $\operatorname{div}\mathbf{q}=0$. То же самое имеет место для поля (4.45), если интеграл достаточно быстро сходится в пределе $t_0\to-\infty$.

4.6. Применение тензорной функции Грина к уравнениям электродинамики средних полей

С помощью тензорной функции Грина можно преобразовать уравнения, выведенные из иерархии (4.23), в интегродифференциальные уравнения. Например, в случае корреляционного приближения второго порядка находим из второго уравнения системы (4.24)

$$P_{mn}(\mathbf{x},\xi,\,t,\tau)=\int\int G_{np}\,(\mathbf{x}+\xi,\mathbf{x}+\xi',\,t+\tau,\,t+\tau')\,\times$$

$$\times\,\mathcal{D}_{pqr}(Q_{mq}(\mathbf{x},\xi',\,t,\tau')\,\overline{B}_r\,(\mathbf{x}+\xi',\,t+\tau'))\,d\xi'\,d\tau'. \tag{4.48}$$

Если заметить, что $\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}$ и $t+\tau$ являются аргументами оператора $\mathcal{D}_{jp}$ во втором уравнении (4.24), становится понятным появление этих аргументов в тензоре Грина в правой части выражения (4.48). Согласно утверждению в конце предыдущего раздела, величина P_{mn}, определяемая (4.48), удовлетворяет второму условию (4.25). Более того, так как $\overline{Q_{mq}} \to 0$, если $\tau' \to -\infty$, то удовлетворяется и условие (4.26). Следовательно, можно заменить основные уравнения корреляционного приближения второго порядка (4.24), (4.25), и (4.26) на эквивалентную систему

$$\mathcal{D}_{jn}\overline{B}_n(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D}_{jmn}\, p_{mn}(\mathbf{x}, t),$$

$$p_{mn}(\mathbf{x}, t) = \int\int G_{np}(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t, t+\tau)\mathcal{D}_{pqr}(Q_{mq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) \times \overline{B}_r(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t+\tau))\, d\boldsymbol{\xi}\, d\tau,$$

$$\frac{\partial \overline{B}_k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} = 0. \qquad (4.49)$$

Система (4.49) имеет очевидное преимущество над системой (4.24) и другими уравнениями: второе уравнение (4.49) прямо определяет величину p_{mn}, в то время как второе уравнение (4.24) определяет величину P_{mn}, которая непосредственно не имеет отношения к нашей задаче – определению среднего магнитного поля. Поэтому можно представить основные уравнения корреляционного приближения второго порядка в виде следующей системы интегродифференциальных уравнений:

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta\right)\delta_{jn} - \varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_k}u_m(\mathbf{x}, t)\right\}\overline{B}_n(\mathbf{x}, t) =$$

$$= -\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{pqr}\,\varepsilon_{rst}\frac{\partial}{\partial x_k}\int\int\frac{\partial G_{np}(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t, t+\tau)}{\partial \xi_q} \times Q_{ms}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)\,\overline{B}_t(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t+\tau)\, d\boldsymbol{\xi}\, d\tau,$$

$$\frac{\partial \overline{B}_k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} = 0. \qquad (4.50)$$

Подобную процедуру можно применить также в приближениях высших порядков. Так, в случае корреляций третьего порядка получаем

систему

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta\right)\delta_{jn}-\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u}_m(\mathbf{x},t)\right\}\overline{B}_n(\mathbf{x},t)=$$

$$=-\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{j'k'l'}\varepsilon_{l'm'n'}\frac{\partial}{\partial x_k}\iint\frac{\partial G_{nj'}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi},t,t+\tau)}{\partial\xi_{k'}}\times$$

$$\times\left\{Q_{mm'}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t,\tau)\overline{B}_{n'}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi},t+\tau)-\right.$$

$$\left.-\varepsilon_{j''k''l''}\varepsilon_{l''m''n''}\iint\frac{\partial\overline{G}_{n'j''}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta},t+\tau,t+\tau+\sigma)}{\partial\eta_{k''}}\times\right.$$

$$\left.\times Q_{mm'm''}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},t,\tau,\sigma)\overline{B}_{n''}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta},t+\tau+\sigma)\,d\boldsymbol{\eta}\,d\sigma\right\}d\boldsymbol{\xi},$$

$$\frac{\partial\overline{B}_n(\mathbf{x},t)}{\partial x_n}=0. \qquad (4.51)$$

Для случая корреляционного приближения четвертого порядка имеем:

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}-\eta\Delta\right)\delta_{jn}-\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u}_m(\mathbf{x},t)\right\}\overline{B}_n(\mathbf{x},t)=$$

$$=-\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{j'k'l'}\varepsilon_{l'm'n'}\frac{\partial}{\partial x_k}\iint\frac{\partial\overline{G}_{nj'}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi},t,t+\tau)}{\partial\xi_{k'}}\times$$

$$\times\left\{Q_{mm'}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t,\tau)\overline{B}_{n'}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi},t+\tau)-\right.$$

$$\left.-\varepsilon_{j''k''l''}\varepsilon_{l''m''n''}\iint\frac{\partial G_{n'j''}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta},t+\tau,t+\tau+\sigma)}{\partial\eta_{k''}}\times\right.$$

$$\times\left[Q_{mm'm''}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},t,\tau,\sigma)\overline{B}_{n''}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta},t+\tau+\sigma)-\right.$$

$$-\varepsilon_{j'''k'''l'''}\varepsilon_{l'''m'''n'''}\times$$

$$\times\iint\frac{\partial G_{n''j'''}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta},\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\zeta},t+\tau+\sigma,t+\tau+\sigma+\rho)}{\partial\zeta_{k'''}}\times$$

$$\times\left(Q_{mm'm''m'''}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},t,\tau,\sigma,\rho)-Q_{mm'}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t,\tau)\times\right.$$

$$\left.\times Q_{m''m'''}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta},\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\zeta},t+\tau+\sigma,t+\tau+\sigma+\rho)\right)\times$$

$$\times \overline{B}_n^{m} (x + \xi + \eta + \zeta,\ t + \tau + \sigma + \rho)\, d\zeta\, d\rho] d\eta d\sigma \} d\xi d\tau,$$

$$\frac{\partial \overline{B}_n(x,\ t)}{\partial x_n} = 0. \qquad (4.52)$$

Если теперь снова вспомнить, что величина $\overline{\mathbf{B}}$ описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\overline{\mathbf{u}} \times \overline{\mathbf{B}}) - \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \overline{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \mathcal{E}, \qquad (4.53)$$

то становится очевидным следующее представление турбулентной электродвижущей силы

$$\mathcal{E}_l = \iint K_{lt}(x, \xi, t, \tau)\, \overline{B}_t (x - \xi, t - \tau)\, d\xi d\tau. \qquad (4.54)$$

Выражение для тензора K_{lt} можно получить методами этой главы, причем ограничение приближением низкого порядка вызывается только быстро возрастающей сложностью вычислений.

В случае корреляционного приближения второго порядка из формулы (4.50) [правая часть (4.50), согласно (4.53), является ротором $\mathcal{E}$] получаем

$$K_{lt}(x, \xi, t, \tau) = \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{rst} \frac{\partial G_{np}(x, x - \xi, t,\ t - \tau)}{\partial \xi_q} \times$$

$$\times Q_{ms}(x, -\xi, t, -\tau), \qquad (4.55)$$

а для приближения третьего порядка из (4.51) следует

$$K_{lt}(x, \xi, t, \tau) = \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{j'k'l'} \varepsilon_{l'm'n'} \Big[\frac{\partial G_{nj'}(x, x - \xi,\ t,\ t - \tau)}{\partial \xi_{k'}} \times$$

$$\times Q_{mm'}(x, -\xi, t, -\tau) \delta_{n''t} + \varepsilon_{j''k''l''} \varepsilon_{l''m''t} \times$$

$$\times \iint \frac{\partial G_{nj''}(x, x - \xi'', t,\ t - \tau'')}{\partial \xi''_{k''}} \times$$

$$\times \frac{\partial G_{n'j'}(x - \xi'', x - \xi,\ t - \tau'', t - \tau)}{\partial \xi_{k''}} \times$$

$$\times Q_{mm'm''}(x, -\xi'',\ \xi'' - \xi, t, -\tau'', \tau'' - \tau) d\xi'' d\tau'' \Big]. \qquad (4.56)$$

Мы не станем приводить здесь тензор K_{lt} для приближения четвертого порядка, который можно легко получить из (4.52).

В разд. 2.4 мы уже указывали, что турбулентная электродвижущая сила $\mathcal{E}$ является линейным функционалом от среднего поля $\bar{\mathbf{B}}$. Соотношение (4.54) вместе с (4.55) и (4.56), определяющими вид тензора K_{lt}, дает теперь явное представление этого функционала для различных уровней приближения.

4.7. О сходимости корреляционного приближения

Чтобы математически подтвердить корреляционное приближение, рассмотрим сначала сходимость ряда приближений для магнитного поля, получаемого из уравнения индукции.

Для случая отсутствия поля средней скорости тензор G_{jp}, введенный в разд. 4.5, имеет вид

$$G_{jp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \delta_{jp} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau), \tag{4.57}$$

где
$$G(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu\sigma x^2}{4t}\right), & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.58}$$

Запишем уравнение индукции (2.3) в следующем виде:

$$\frac{\partial B_j}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \Delta B_j = \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{lmn} \frac{\partial u_m B_n}{\partial x_k}. \tag{4.59}$$

Используя функцию Грина (4.57), можно от этого уравнения перейти к интегральному уравнению

$$B_j(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t_0) B_j(\mathbf{x}', t_0)\, d\mathbf{x}' -$$

$$- \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{lmn} \int_{t_0}^{t} \int \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')}{\partial x'_k} u_m(\mathbf{x}', t') B_n(\mathbf{x}', t')\, d\mathbf{x}' dt'. \tag{4.60}$$

Определим последовательность полей $\mathbf{B}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ следующим образом: $\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ – произвольное поле,

$$B_j^{(\nu)}(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t_0) B_j(\mathbf{x}', t_0)\, d\mathbf{x}' -$$

$$- \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{lmn} \int_{t_0}^{t} \int \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')}{\partial x'_k} u_m(\mathbf{x}', t') B_n^{(\nu-1)}(\mathbf{x}', t') \times$$

$$\times\, d\mathbf{x}' dt', \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{4.61}$$

Очевидно, что $B_j^{(\nu)}(\mathbf{x}, t_0) = B_j(\mathbf{x}, t_0)$ для любого $\nu \geqslant 1$ и что в случае сходимости поле

$$\mathbf{B}^{(\infty)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\nu \to \infty} \mathbf{B}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t)$$

является решением уравнения (4.60) и, следовательно, решением уравнения индукции (4.59). Таким образом, поле $\mathbf{B}^{(\infty)}(\mathbf{x}, t)$ представляет собой решение уравнения индукции для задачи с начальным значением.

Мы не будем здесь детально проверять сходимость этого ряда, а ограничимся некоторыми замечаниями. Из ряда (4.61) можно получить другой ряд, определяемый как

$$\mathbf{b}^{(0)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{x}, t), \tag{4.62}$$

$$\mathbf{b}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}^{(\nu-1)}(\mathbf{x}, t), \quad \nu \geqslant 1,$$

и представить $\mathbf{B}^{(\infty)}$ в виде

$$\mathbf{B}^{(\infty)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{b}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t). \tag{4.63}$$

Ряд (4.63), как показано в работах [112, 113], абсолютно сходится для произвольных начальных значений t и t_0 и ограниченного поля скоростей $\mathbf{u}$. При этом требуются также определенные условия относительно непрерывности и дифференцируемости функций, используемых в задаче, которые мы не будем здесь конкретизировать.

Если теперь построить ряд $\mathbf{B}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t)$, полагая

$$B_j^{(0)}(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t_0)\, B_j(\mathbf{x}', t_0)\, d\mathbf{x}', \tag{4.64}$$

то из (4.61) можно получить следующее представление:

$$B_j^{(\nu)}(\mathbf{x}, t) = \int G_{jp}^{(\nu)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t_0)\, B_p(\mathbf{x}', t_0)\, d\mathbf{x}', \tag{4.65}$$

где тензоры $G_{jp}^{(\nu)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t_0)$ определяются выражениями:

$$G_{jp}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t_0) = \delta_{jp} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t_0),$$

$$G_{jp}^{(\nu)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t_0) = \delta_{jp} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t_0) +$$

$$+\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\int_{t_0}^{t}\int\frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{x}'',\,t-t'')}{\partial x_k}\,u_m(\mathbf{x}'',t'')\times$$

$$\times\,G_{np}^{(\nu-1)}(\mathbf{x}'',\mathbf{x}',t'',t_0)\,d\mathbf{x}''dt''. \qquad (4.66)$$

Сходимость последовательных тензоров $G_{jp}^{(\nu)}$ обеспечена сходимостью последовательности $\mathbf{B}^{(\nu)}$. Следовательно, рекуррентное соотношение (4.66) дает возможность представить тензор G_{jp}, введенный в разд. 4.5, в виде

$$G_{jp}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t_0)=\lim_{\nu\to\infty}G_{jp}^{(\nu)}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t_0). \qquad (4.67)$$

Это представление гарантирует существование тензора G_{jp} для любого ограниченного поля скоростей.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{\partial B_j}{\partial t}-\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial \bar{u}_m B_n}{\partial x_k}-\frac{1}{\mu\sigma}\Delta B_j=\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial u'_m B_n}{\partial x_k}, \qquad (4.68)$$

и пусть $G_{jp}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t')$ является тензором Грина левой части этого уравнения. Уравнение (4.68) можно заменить интегральным уравнением

$$B_j(\mathbf{x},t)=\int G_{jp}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t_0)\,B_p(\mathbf{x}',t_0)\,d\mathbf{x}'-$$

$$-\varepsilon_{pkl}\varepsilon_{lmn}\iint\frac{\partial G_{jp}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t')}{\partial x'_k}\,u'_m(\mathbf{x}',t')\,B_n(\mathbf{x}',t')\,d\mathbf{x}'dt' \qquad (4.69)$$

и определить подобно (4.61) последовательность полей $\tilde{\mathbf{B}}^{(\nu)}(\mathbf{x},t)$ соотношениями: $\tilde{\mathbf{B}}^{(0)}(\mathbf{x},t)$ – произвольное поле,

$$\tilde{B}_j^{(\nu)}(\mathbf{x},t)=\int G_{jp}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t_0)\,B_p(\mathbf{x}',t_0)\,d\mathbf{x}'-$$

$$-\varepsilon_{pkl}\varepsilon_{lmn}\int_{t_0}^{t}\int\frac{\partial G_{jp}(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t')}{\partial x'_k}\,u'_m(\mathbf{x}',t')\times$$

$$\times\,\tilde{B}_n^{(\nu-1)}(\mathbf{x}',t')\,d\mathbf{x}'dt'. \qquad (4.70)$$

Нет необходимости снова проверять сходимость этой последовательности. Можно также определить последовательность

$$\tilde{\mathbf{b}}^{(0)}(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{B}}^{(0)}(\mathbf{x}, t), \quad \tilde{\mathbf{b}}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{B}}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{B}}^{(\nu-1)}(\mathbf{x}, t) \tag{4.71}$$

и представить поле $\mathbf{B}^{(\infty)}$ в виде ряда

$$\mathbf{B}^{(\infty)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{b}}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t), \tag{4.72}$$

как это было сделано после выражения (4.61). Ряд (4.72) также можно получить подстановкой $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ в (4.61) и выполнением некоторых преобразований. Поскольку доказано, что ряд (4.63) абсолютно сходится, то же самое верно для ряда (4.72).

Теперь очевидно, что корреляционное приближение основано на сходящейся процедуре: мы находим последовательность $\tilde{\mathbf{B}}^{(\nu)}(\mathbf{x}, t)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, полагая в формулах (4.70) $\tilde{\mathbf{B}}^{(0)} = \bar{\mathbf{B}}$, и определяем поля

$$\mathcal{E}^{(n)} = \overline{\mathbf{u}' \times \tilde{\mathbf{B}}^{(n)}}. \tag{4.73}$$

Предполагая возможность изменения порядка операций перехода к пределу и усреднения, получаем, что последовательность (4.73) также сходится. Следовательно, можно представить турбулентную электродвижущую силу в виде предела

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{n \to \infty} \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \times \tilde{\mathbf{B}}^{(n)}(\mathbf{x}, t)}. \tag{4.74}$$

Глава 5. ДВУХМАСШТАБНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

5.1. Вводные замечания

Мы указывали в разд. 2.2., что не будем ссылаться на природу операции усреднения, используя только свойства (2.4) и правила коммутации. Однако если теория применена к описанию определенного наблюдения или измерения, то в большинстве случаев должно производиться усреднение по пространству или времени. В этом случае, в частности, правила усреднения

$$\overline{\overline{F}} = \overline{F}, \quad \overline{F'} = 0 \tag{5.1}$$

выполняются только приближенно. Они выполняются тем лучше, чем меньше характерные масштабы флуктуаций по сравнению с масштабами средних полей.

Поэтому, имея в виду приложения теории, уместно требовать, чтобы выполнялись неравенства

$$\lambda_{cor} \ll \overline{\lambda} \tag{5.2}$$

или

$$\tau_{cor} \ll \overline{\tau} \tag{5.3}$$

или оба этих неравенства одновременно. Здесь и далее $\overline{\lambda}$ и $\overline{\tau}$ обозначают характерные пространственный и временной масштабы средних полей. Если выполнено одно из неравенств (5.2), (5.3) или оба сразу, то говорят о двухмасштабной турбулентности.

Уже в разд. 2.4 было показано, что турбулентная электродвижущая сила является функционалом от величин $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}'$ и что реальный вклад в $\mathcal{E}$ дают только те их значения, которые взяты из некоторой окрестности рассматриваемой пространственно-временной точки. В случае двухмасштабной турбулентности, т.е. когда выполнены неравенства (5.2), и (5.3), величину $\mathbf{B}$ удобно представить рядом Тейлора и получить выражение для $\mathcal{E}$ в виде

$$\mathcal{G}_i = \overline{(\mathbf{u}' \times \mathbf{B}')_i} = g^{(00)}_{ij}\overline{B}_j + g^{(10)}_{ijk}\frac{\partial \overline{B}_j}{\partial x_k} + g^{(20)}_{ijkl}\frac{\partial^2 \overline{B}_j}{\partial x_k \partial x_l} + \ldots$$

$$\ldots + g^{(01)}_{ij}\frac{\partial \overline{B}_j}{\partial t} + g^{(11)}_{ijk}\frac{\partial^2 \overline{B}_j}{\partial x_k \partial t} + \ldots + g^{(\kappa\nu)}_{ijkl\ldots n}\frac{\partial^{(\kappa+\nu)}\overline{B}_j}{\partial x_k \partial x_l \ldots \partial x_n \partial t^{(\nu)}} \tag{5.4}$$

Тензорные коэффициенты $g^{(\kappa\nu)}_{i\ldots n}$ являются функционалами от $\bar{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$. Если в разложении (5.4) учтены пространственные производные вплоть до порядка κ, а временные – до порядка ν, то ожидаемая ошибка имеет порядок

$$O\{(\frac{\lambda_{cor}}{\bar{\lambda}})^{\kappa}, (\frac{\tau_{cor}}{\bar{\tau}})^{\nu}\}.$$

Если учитывается обратная реакция магнитного поля, то поля скоростей $\bar{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$ зависят от $\bar{\mathbf{B}}$. Важно отметить, что в этом случае разложение (5.4) не нарушается; только тензоры $g^{(\kappa\nu)}_{ij\ldots n}$ являются теперь функционалами от $\bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}'$ и $\bar{\mathbf{B}}$.

5.2. Изотропные тензоры

Изотропия турбулентности должна отражаться в структуре тензоров $g_{i\ldots n}$. Для изотропной турбулентности все связанные с ней средние величины остаются при вращениях неизменными. Тензоры с этим свойством называются изотропными тензорами.

Мы уже знаем изотропные тензоры, например тензор Кронекера δ_{ij}. Этот тензор имеет одинаковые компоненты во всех координатных системах; понятно, что это эквивалентно свойству иметь неизменные компоненты при произвольном вращении. Тензор ε_{ijk} является примером изотропного тензора третьего ранга, а произведение тензоров $\delta_{ij}\delta_{kl}$ является изотронным тензором четвертого ранга.

Проверим теперь следующие соотношения, которые важны для наших дальнейших выводов.

1) Если тензор второго ранга a_{ij} изотропный, то

$$a_{ij} = \alpha\delta_{ij}. \tag{5.5}$$

2) Если тензор третьего ранга a_{ijk} изотропный, то

$$a_{ijk} = \beta\varepsilon_{ijk}. \tag{5.6}$$

3) Если тензор четвертого ранга a_{ijkl} изотропный, то

$$a_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{5.7}$$

Обозначим матрицу вращения через D_{ij}, причем имеем

$$D_{ij}D_{kj} = \delta_{ik}, \quad D_{ij}D_{il} = \delta_{jl}. \tag{5.8}$$

Компоненты тензора преобразуются при вращении по правилу

$$a_{ij}^{(\mathrm{rot})} = D_{ik}D_{jl}a_{kl} \tag{5.9}$$

и, следовательно, для изотропного тензора второго ранга при произвольных вращениях выполняются соотношения

$$a_{ij} = D_{ik}D_{jl}a_{kl}. \tag{5.10}$$

Рассмотрим сначала вращение на 180° вокруг оси x_3:

$$(D_{ij}^{(3)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Подставляя матрицу (5.11) в соотношение (5.10), находим

$$a_{13} = -a_{13}, \quad a_{31} = -a_{31}, \quad a_{23} = -a_{23}, \quad a_{32} = -a_{32} \tag{5.12}$$

и другие соотношения, которые тождественно выполнены. Соотношения (5.12) означают, что

$$a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0. \tag{5.13}$$

Если теперь совершить вращение на 180° вокруг оси x_2

$$(D_{ij}^{(2)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

то получим дополнительно

$$a_{12} = a_{21} = 0. \tag{5.15}$$

Рассмотрим далее вращение пространства на 90° вокруг оси x_3:

$$(\tilde{D}_{ij}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Подставляя матрицу (5.16) в формулу (5.10), получим

$$a_{ii} = a_{22}. \tag{5.17}$$

Аналогичным образом, рассматривая вращение на 90° вокруг оси x_2, найдем

$$a_{11} = a_{33}. \tag{5.18}$$

Формулы (5.12), (5.13), (5.15) и (5.17), (5.18) показывают, что изотропный тензор второго ранга действительно имеет вид (5.5).

Аналогично можно доказать утверждение 2). Для изотропного тензора третьего ранга должно выполняться соотношение

$$a_{ijk} = D_{il} D_{jm} D_{kn} a_{lmn}. \tag{5.19}$$

Рассмотрим сначала те компоненты, которые имеют одинаковые два или три индекса. Подставляя $D^{(3)}_{ij}$ или $D^{(2)}_{ij}$ в выражение (5.19), находим соотношения, которые показывают, что эти компоненты равны своим противоположным значениям и, следовательно, равны нулю. Таким образом, не равными нулю могут быть только компоненты с разными индексами. Применяя теперь матрицу $D^{(3)}_{ij}$, которая определяется (5.16), к вычислению компоненты a_{123}, находим

$$a_{123} = -a_{213}. \tag{5.20}$$

Рассматривая также вращения на 90° вокруг осей x_1 и x_2, получаем, что перестановка любой пары индексов приводит к изменению знака компоненты. Таким образом, изотропный тензор третьего ранга имеет вид (5.6).

Для изотропного тензора четвертого ранга a_{ijkl} должно выполняться соотношение

$$a_{ijkl} = D_{im} D_{jn} D_{kp} D_{lq} a_{mnpq}. \tag{5.21}$$

Рассматривая вращения на 180° вокруг координатных осей, можно легко убедиться, что исчезают все компоненты, кроме тех, которые имеют четное число одинаковых индексов. Производя вращения на 90° вокруг координатных осей, получаем из (5.21), что можно переставить местами любые два индекса без изменения знака компоненты. В результате находим четыре группы одинаковых компонент

$$a_{1111} = a_{2222} = a_{3333} = A,$$

$$a_{1122} = a_{2211} = a_{1133} = a_{3311} = a_{2233} = a_{3322} = B,$$

$$a_{1212} = a_{2121} = a_{1313} = a_{3131} = a_{2323} = a_{3232} = C, \qquad (5.22)$$
$$a_{1221} = a_{2112} = a_{1331} = a_{3113} = a_{2332} = a_{3223} = D.$$

Интересно отметить, что в (5.22) имеется четыре свободных параметра, в то время как в (5.7) их только три. Для окончательного решения рассмотрим произвольное вращение пространства вокруг оси x_3, задаваемое матрицей

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (5.23)$$

где φ – угол вращения. Подставляя (5.23) в соотношение (5.21), получим для компоненты a_{1111} выражение

$$a_{1111} = a_{1111}\cos^4\varphi + a_{2222}\sin^4\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,(a_{1122} + a_{2211} + a_{1212} + a_{2121} + a_{1221} + a_{2112}). \qquad (5.24)$$

При учете обозначений (5.22) и тождества $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi = 1 - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ это выражение принимает вид

$$A = A + 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,(-A + B + C + D), \qquad (5.25)$$

откуда ввиду произвольности φ следует

$$A = B + C + D. \qquad (5.26)$$

В согласии с (5.7) число свободных параметров уменьшилось до трех. Легко видеть, что (5.22) и (5.26) тождественно совпадают с (5.7), если принять $B = a$, $C = b$, $D = c$.

Что касается изотропных тензоров произвольного ранга, то укажем только, что такие тензоры четного ранга представляют в виде суммы произведений δ-тензоров, а тензоры нечетного ранга – в виде суммы тензоров, каждый из которых есть произведение одного ε-тензора на δ-тензоры.

Приведем теперь пример использования соотношений 1) и 3). Рассмотрим интегралы

$$\int f(\xi)\xi_i\,\xi_j\,d\xi \quad \text{и} \quad \int f(\xi)\,\xi_i\,\xi_j\,\xi_k\xi_l\,d\xi,$$

где $f(\xi)$ – функция от $\xi = \sqrt{\xi^2}$, исчезающая достаточно быстро при $\xi \to \infty$, чтобы обеспечивалась сходимость интегралов. Очевидно, что оба интеграла являются изотропными тензорами, поэтому, согласно соотношениям 1) и 3), имеем

$$\int f(\xi)\,\xi_i\,\xi_j\,d\xi = A\delta_{ij}$$

$$\int f(\xi)\,\xi_i\,\xi_j\,\xi_k\xi_l\,d\xi = B\,(\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}). \qquad (5.27)$$

Во втором выражении мы использовали симметрию интеграла относительно всех четырех индексов. Суммируя по парам индексов в (5.27), получаем

$$\int f(\xi)\xi^2\,d\xi = 3A, \quad \int f(\xi)\,\xi^4\,d\xi = 15B, \qquad (5.28)$$

и окончательно имеем

$$\int f(\xi)\,\xi_i\,\xi_j\,d\xi = \delta_{ij}\,\frac{1}{3}\int f(\xi)\,\xi^2\,d\xi, \qquad (5.29)$$

$$\int f(\xi)\,\xi_i\,\xi_j\,\xi_k\xi_l\,d\xi = (\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\,\frac{1}{15}\int f(\xi)\xi^4\,d\xi. \qquad (5.30)$$

5.3. Структуры тензоров $g_{ij\ldots n}$

Рассмотрим две физические системы, повернутые относительно друг друга, и процессы, происходящие в этих системах. Согласно общим законам физики, все процессы в этих системах происходят одинаковым образом. Поэтому тензоры, описывающие физические величины в какой-либо данной системе, должны получаться из соответствующих тензоров в повернутой системе в результате преобразования вращения. Фундаментальные связи между физическими величинами не зависят от выбора той или иной системы. Следовательно, связи между тензорами должны осуществляться тензорами, которые инвариантны относительно вращения, т.е. изотропными тензорами. В нашем частном случае тензоры $g_{ij\ldots n}$, введенные в (5.4), должны быть связаны посредством изотропных тензоров с тензорными величинами, характеризующими турбулентное движение.

Хорошо известно, что можно получить реальную физическую систему с помощью отражения какой-либо другой системы, как это уже обсуждалось в разд. 3.3. Поэтому фундаментальные соотношения, связывающие физические величины, должны оставаться неизменными относительно операции отражения. Ранее мы отмечали, что существуют векторные величины с различным поведением при отражениях – полярные и аксиальные векторы. Чтобы обобщить это определение, рассмотрим тензор n-го ранга $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, полученный произведением n векторов, из которых k – аксиальные, а $(n-k)$ – полярные векторы. При отражении, согласно (3.2) и (3.3), этот тен-

зор преобразуется следующим образом:

$$a^{(\mathrm{ref})}_{i_1 \ldots i_n}(\mathbf{x}, t) = (-1)^{n-k} a_{i_1 \ldots i_n}(-\mathbf{x}, t). \qquad (5.31)$$

Если k нечетно, то по определению имеем псевдотензор, а для k четного – тензор. Таким образом, тензор произвольного ранга при отражении преобразуется по закону

$$a^{(\mathrm{ref})}_{i_1 \ldots i_n}(\mathbf{x}, t) = (-1)^n a_{i_1 \ldots i_n}(-\mathbf{x}, t), \qquad (5.32)$$

и псевдотензор преобразуется как

$$a^{(\mathrm{ref})}_{i_1 \ldots i_n}(\mathbf{x}, t) = (-1)^{n+1} a_{i_1 \ldots i_n}(-\mathbf{x}, t). \qquad (5.33)$$

Так как тензоры δ_{ij} и ε_{ijk} по определению постоянны, то, согласно (5.32) и (5.33), δ_{ij} является тензором, а ε_{ijk} – псевдотензором

Вследствие различного поведения тензоров и псевдотензоров при отражениях две тензорные величины могут быть равными, только если обе они или тензоры, или псевдотензоры. Так как турбулентная электродвижущая сила $\mathcal{G}$ является полярным вектором, а среднее магнитное поле – аксиальным вектором, то все величины $g_{ij \ldots n}$, введенные в (5.4), должны быть псевдотензорами.

5.4. Примеры турбулентных электродвижущих сил

Структура функционала, описывающего связь между $\mathcal{G}$ и $\overline{\mathbf{B}}$, становится более ясной при учете результатов предыдущего раздела. В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда в ряде (5.4) достаточно учитывать только пространственные производные вплоть до первого порядка. В этом случае ожидаемая ошибка имеет порядок величины $0\{(\lambda_{\mathrm{cor}}/\lambda)^2, \tau_{\mathrm{cor}}/\bar{\tau}\}$. Упрощая обозначения

$$a_{ik} = g^{(00)}_{ik}, \quad b_{ijl} = g^{(10)}_{ijl}, \qquad (5.34)$$

получим вместо ряда (5.4) следующее выражение:

$$\mathcal{G}_i = a_{ik} \overline{B}_k + b_{ikl} \frac{\partial \overline{B}_k}{\partial x_l}, \qquad (5.35)$$

где a_{ik} и b_{ikl} – псевдотензоры, зависящие от $\overline{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$.

В качестве первого примера возьмем однородное изотропное и стационарное поле турбулентных скоростей $\mathbf{u}'$ с равной нулю средней скоростью ($\overline{\mathbf{u}} = 0$). В данном случае пригодны для построения

a_{ik} и b_{ikl} только изотропные тензоры, и поэтому, согласно разд. 5.2, имеем

$$a_{ik} = \alpha\delta_{ik}, \quad b_{ikl} = \beta\varepsilon_{ikl}, \tag{5.36}$$

где α является псевдоскаляром. Таким образом, для турбулентной электродвижущей силы получаем выражение

$$\mathcal{E} = \alpha\overline{\mathbf{B}} - \beta \operatorname{rot} \overline{\mathbf{B}}, \tag{5.37}$$

совпадающее с формулой (3.5). Если принять, что турбулентное поле $\mathbf{u}'$ зеркально-симметрично, то коэффициент α исчезает, так как он должен изменить свой знак при отражении, в то время как поле $\mathbf{u}'$ не изменяется.

Следует отметить, что для описания реальной достаточно развитой турбулентности, не подверженной внешнему влиянию, хорошим приближением является модель однородной, изотропной и зеркально-симметричной турбулентности. Например, этим свойством обладает турбулентность, возбуждаемая в однородном течении решеткой на некотором расстоянии от решетки. Неизвестны условия, когда такая турбулентность не зеркально-симметрична. Поэтому предыдущий пример является академическим. Тем не менее мы будем его обсуждать, поскольку он интересен в динамо-теории. Как мы увидим в одном из последующих примеров, на самом деле существует реальная турбулентность с неисчезающим коэффициентом α, но только неизотропная.

В качестве другого примера возьмем снова $\overline{\mathbf{u}} = 0$, а турбулентное движение примем анизотронным. Анизотропия обусловлена векторным полем $\mathbf{g}$, которое может быть полем градиента интенсивности турбулентности или полем градиента плотности. Ограничимся при получении псевдотензоров a_{ij} и b_{ijk} линейными выражениями относительно величины $\mathbf{g}$. Таким образом получим

$$a_{ik} = \gamma\varepsilon_{ikl}g_l, \quad b_{ikl} = \beta\varepsilon_{ikl} \tag{5.38}$$

Для турбулентной электродвижущей силы это дает

$$\mathcal{E} = -\beta \operatorname{rot} \overline{\mathbf{B}} - \gamma\, \mathbf{g} \times \overline{\mathbf{B}}. \tag{5.39}$$

Электродвижущая сила, перпендикулярная $\mathbf{g}$ и $\overline{\mathbf{B}}$, в дальнейшем будет интерпретирована как эффект накачки.

В нашем третьем примере средним движением может быть твердотельное вращение, а на турбулентность $\mathbf{u}'$ будут влиять среднее движение $\overline{\mathbf{u}}$ и угловая скорость Ω. В линейном по $\overline{\mathbf{u}}$ и Ω приближении

получаем

$$a_{ik} = \gamma' \varepsilon_{ikl} \bar{u}_l,$$

$$b_{ikl} = \beta \varepsilon_{ikl} - \beta_1 \Omega_i \delta_{kl} - \beta_2 \Omega_k \delta_{il} - \beta_3 \Omega_l \delta_{ik}. \qquad (5.40)$$

Отсюда для турбулентной электродвижущей силы найдем

$$\mathcal{E} = -\beta \operatorname{rot} \bar{\mathbf{B}} - \gamma' \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}} - \beta_3 (\Omega \cdot \operatorname{grad}) \bar{\mathbf{B}} - \beta_2 \operatorname{grad} (\Omega \cdot \bar{\mathbf{B}}). \qquad (5.41)$$

Член с β_1 не вносит вклада вследствие соленоидальности поля $\bar{\mathbf{B}}$. Предположим, что можно пренебречь влиянием среднего движения, т.е. $\gamma' = 0$. Тогда в обоих последних примерах мы имеем дело с турбулентностью, определяемой только одной векторной величиной. Но, поскольку в первом случае $\mathbf{g}$ – полярный вектор, а в другом Ω – аксиальный вектор, мы получаем совершенно разные результаты.

Формула (5.41) описывает турбулентную электродвижущую силу для случая турбулентности, находящейся под действием кориолисовой силы. Ее можно переписать в виде

$$\mathcal{E} = -\beta \operatorname{rot} \bar{\mathbf{B}} - \gamma' \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}} + \mu \beta_3 \Omega \times \bar{\mathbf{j}} - (\beta_3 + \beta_2) \operatorname{grad} (\Omega \cdot \bar{\mathbf{B}}). \qquad (5.42)$$

Как мы в дальнейшем увидим, электродвижущая сила, пропорциональная $\Omega \times \bar{\mathbf{j}}$, может привести к действию динамо.

Наш четвертый пример тесно связан с турбулентными движениями в конвективном слое вращающегося тела. Здесь следует учесть, что помимо угловой скорости выделенным является радиальное направление. Эта выделенность следует уже из геометрических соображений; более того, градиент плотности или градиент интенсивности турбулентности или оба вместе должны быть параллельными радиальному направлению. Таким образом, имеем турбулентность при наличии полярных векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{g}$ и аксиального вектора Ω. Снова предполагая линейность, получим

$$a_{ik} = -\alpha_1' (\mathbf{g} \cdot \Omega) \delta_{ik} - \alpha_2' g_i \Omega_k - \alpha_3' g_k \Omega_i + \gamma \varepsilon_{ikl} g_l + \gamma'' \varepsilon_{ikl} \bar{u}_l, \qquad (5.43)$$

$$b_{ikl} = \beta \varepsilon_{ikl} - \beta_1 \Omega_i \delta_{kl} - \beta_2 \Omega_k \delta_{il} - \beta_3 \Omega_l \delta_{ik}. \qquad (5.44)$$

Следовательно, для турбулентной электродвижущей силы в конвективном слое вращающегося тела находим выражение:

$$\mathcal{E} = -\beta \operatorname{rot} \bar{\mathbf{B}} - \gamma \mathbf{g} \times \bar{\mathbf{B}} - \gamma'' \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}} - \beta_3 (\Omega \cdot \operatorname{grad}) \bar{\mathbf{B}} - \beta_2 \operatorname{grad} (\Omega \cdot \bar{\mathbf{u}}) -$$

$$-\alpha_1'(\mathbf{g}\cdot\Omega)\bar{\mathbf{B}}-\alpha_2'(\mathbf{g}\cdot\bar{\mathbf{B}})\Omega-\alpha_3'(\Omega\cdot\bar{\mathbf{B}})\mathbf{g}. \tag{5.45}$$

Особо отметим появление электродвижущей силы $-\alpha_1'(\mathbf{g}\cdot\Omega)\bar{\mathbf{B}}$, которая параллельна среднему магнитному полю. В отличие от первого примера здесь ясно видно, что эта электродвижущая сила может быть вполне естественным явлением в конвективном слое вращающегося тела.

Из предыдущего рассмотрения структуры $\mathcal{G}$ мы не сделали каких либо выводов об отличии от нуля коэффициентов α, β, γ, — Этот вопрос требует дополнительных исследований.

5.5. Представление тензоров $g_{ij\ldots n}$

Прежде чем получать результаты, объединяя выводы этой и предыдущей глав, хотелось бы оценить, насколько мы продвинулись.

Соотношения (5.37), (5.39), (5.41) и (5.42) дают довольно конкретные выражения для турбулентной электродвижущей силы $\mathcal{G}$. Неизвестными величинами являются только скаляры α_1', α_2', α_3', β, β_1, β_2, β_3, γ, γ'''. Существенно, что эти выражения для $\mathcal{G}$ получены при довольно слабом ограничении: использовалось лишь свойство двухмасштабности турбулентности.

Окончательное определение $\mathcal{G}$ требует, конечно, общего решения проблемы турбулентности, которого пока не существует. Однако, поскольку в нашем случае неопределенны только несколько скаляров, то недостаточность теории турбулентности является делом второстепенным.

Используем теперь результаты предыдущей главы, чтобы получить более явные выражения для псевдотензоров $g_{ij\ldots n}$. Представляя $\bar{\mathbf{B}}$ в (4.45) формулой Тейлора и сравнивая результаты с (5.4), легко получаем

$$a_{ij}=g_{ij}^{(00)}=\iint K_{ij}(\mathbf{x},\xi,t,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{5.46}$$

$$b_{ijk}=g_{ijk}^{(10)}=-\iint K_{ij}(\mathbf{x},\xi,t,\tau)\,\xi_k\,d\xi d\tau \tag{5.47}$$

и в общем случае

$$g_{ij}^{(0\nu)}=\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\iint K_{ij}(\mathbf{x},\xi,t,\tau)\,\tau^\nu\,d\xi d\tau, \tag{5.48}$$

$$g_{ijk}^{(1\nu)}=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\iint K_{ij}(\mathbf{x},\xi,t,\tau)\,\xi_k\,\tau^\nu\,d\xi d\tau, \tag{5.49}$$

$$g^{(\kappa\nu)}_{ijk\ldots n} = \frac{(-1)^{\kappa+\nu}}{\kappa!\,\nu!} \iint K_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau)\, \xi_k \ldots \xi_n \tau^{\nu}\, d\boldsymbol{\xi} d\tau. \quad (5.50)$$

Тензор K_{ij} можно взять, например, в виде (4.55) или в другом виде для более высоких приближений.

Для того чтобы дать представление о некоторых из будущих выводов, получим выражения для коэффициентов α и β для однородной изотропной и стационарной турбулентности с нулевой средней скоростью. Используя корреляционное приближение второго порядка, получаем из (5.46), (5.47), (4.55) и (4.57) выражения

$$a_{ij} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqj} \iint \frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_n} Q_{lq}(-\boldsymbol{\xi}, -\tau)\, d\boldsymbol{\xi} d\tau, \quad (5.51)$$

$$b_{ijk} = -\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqj} \iint \frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_n} \xi_k Q_{lq}(-\boldsymbol{\xi}, -\tau)\, d\boldsymbol{\xi} d\tau. \quad (5.52)$$

Так как для однородной турбулентности корреляционный тензор Q_{lq}, определяемый из (4.3), не зависит от переменных $\mathbf{x}$ и t, то просто запишем

$$Q_{lq}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \overline{u'_l(\mathbf{x}, t)\, u'_q(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)} \quad (5.53)$$

и, заменяя $\mathbf{x}$ и t на $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$ и $t - \tau$, получаем свойство симметрии

$$Q_{lq}(-\boldsymbol{\xi}, -\tau) = Q_{ql}(\boldsymbol{\xi}, \tau). \quad (5.54)$$

Мы уже знаем, что $a_{ij} = \alpha\delta_{ij}$. Поэтому, производя суммирование в (5.51), получаем

$$\alpha = \frac{1}{3}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqi} \iint \frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_n} Q_{ql}(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, d\boldsymbol{\xi} d\tau =$$

$$= \frac{1}{3}\varepsilon_{nlq} \iint \frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_n} Q_{ql}(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, d\boldsymbol{\xi} d\tau =$$

$$= -\frac{1}{3} \iint G(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, \varepsilon_{nlq} \frac{\partial Q_{ql}(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_n} d\boldsymbol{\xi} d\tau.$$

Используя теперь определение (5.53) корреляционного тензора, получим окончательно [112]

$$\alpha = -\frac{1}{3} \iint G(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}'(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau)}\, d\boldsymbol{\xi} d\tau. \quad (5.55)$$

Эта формула обобщает как формулу (3.29), так и (3.47). Предыдущие результаты являются предельными случаями формулы (5.55). Рассмотрим сначала предел большой проводимости, характеризуемый неравенством $\tau_{cor} \ll \mu\sigma\lambda_{cor}^2$. Относительно интегрирования по пространству замечаем, что функция $G(\xi, \tau)$ существенно отлична от нуля только при $\xi \lesssim \sqrt{\tau/\mu\sigma}$. Поскольку скалярное произведение в подынтегральном выражении исчезает, если $\tau > \tau_{cor}$, то получаем $\xi \lesssim \sqrt{\tau_{cor}/\mu\sigma} \ll \lambda_{cor}$ для области, где подынтегральное выражение существенно отлично от нуля в пределе большой проводимости. В этой области скалярное произведение не изменяется, и мы приходим к формуле (3.29), поскольку

$$\int G(\xi, \tau)\, d\xi = 1. \tag{5.56}$$

В противоположном случае $\mu\sigma\lambda_{cor}^2 \ll \tau_{cor}$ можно считать постоянным скалярное произведение $\overrightarrow{\mathbf{u}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u}}$ и произвести интегрирование по τ. Так как имеет место

$$\int G(\xi, \tau) d\tau = \frac{\mu\sigma}{4\pi\xi}, \tag{5.57}$$

то получаем формулу (3.47).

Тензор b_{ijk}, как мы уже знаем, имеет вид $\beta\varepsilon_{ijk}$. Поэтому, умножая выражение (5.52) на ε_{ijk}, получим

$$\beta = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk} b_{ijk} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqj} \iint \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi_n} \times$$

$$\times \xi_k Q_{ql}(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= -(\delta_{kl}\delta_{nq} + \delta_{kq}\delta_{nl}) \frac{1}{6} \iint \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi_n} \xi_k Q_{ql}(\xi, \tau)\, d\xi d\tau. \tag{5.58}$$

Учтем теперь, что функция G зависит только от величины ξ, т.е.

$$\frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi_n} = \frac{\xi_n}{\xi} \cdot \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi}. \tag{5.59}$$

В результате получим

$$\beta = -\frac{1}{3} \iint \frac{1}{\xi} \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} \overline{(\xi \cdot \mathbf{u}(x, t))(\xi \cdot \mathbf{u}(x + \xi, t + \tau))}\, d\xi d\tau. \tag{5.60}$$

Эта формула подтверждает как формулу (3.30), так и формулу (3.48) и обобщает их.

Можно прийти к другой формуле, если ввести продольную корреляционную функцию f, определяемую выражением

$$\xi_k Q_{kl}(\xi, \tau) = f(\xi, \tau)\,\xi_l. \tag{5.61}$$

Подставляя (5.59) и (5.61) в выражение (5.58), находим

$$\beta = -\frac{1}{3}\iint \xi \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} f(\xi, \tau)\, d\xi d\tau. \tag{5.62}$$

Эта формула была получена Рэдлером [207].

Глава 6. ОДНОРОДНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

6.1. Вводные замечания

Начнем более детальное обсуждение с рассмотрения однородной и стационарной турбулентности. Для такой турбулентности все средние величины являются постоянными в пространстве и во времени и, в частности, постоянны тензоры $\xi_{ij\ldots n}$, введенные в предыдущей главе.

Более того, поскольку между полем турбулентных скоростей и полем средней скорости существует тесная связь, мы принимаем постоянным поле средней скорости $\mathbf{u}$, т.е. $\overline{\mathbf{u}} = 0$ в собственной системе координат. Тензор Грина G_{ij} в этом случае хорошо известен и задается выражениями (4.57) и (4.58).

Ранее уже отмечалось, что двухточечный и двухвременной корреляционный тензор Q_{ij} является функцией только относительных координат ξ, τ и удовлетворяет условию симметрии (5.54). Имеется еще и другое условие. Пусть x_ν, t_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, являются пространственно-временными точками. Тогда для любого набора комплексных чисел $c_{i\nu}$, $i = 1, 2, 3$; $\nu = 1, \ldots, N$, выполняется очевидное неравенство

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{N} c_{i\nu} u_i'(x_\nu, t_\nu)\Big)\Big(\sum_{\mu=1}^{N} c^*_{k\mu} u'_k(x_\mu, t_\mu)\Big) \geqslant 0. \tag{6.1}$$

Произведя операции умножения и усреднения, получаем

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{N} c_{i\nu} c^*_{k\mu} Q_{ik}(\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_\mu, t_\nu - t_\mu) \geqslant 0. \tag{6.2}$$

Это неравенство составляет содержание теоремы Бохнера [17] (см. также [50])[1], которая утверждает, что величина Q_{ik} может быть кор-

[1] Эта теорема в русской литературе обычно называется теоремой Бохнера — Хинчина, поскольку Хинчин доказал ее одновременно и независимо. — *Прим. ред.*

реляционным тензором однородного и стационарного случайного поля u' тогда и только тогда, когда она является положительно определенной в смысле (6.2).

Если к тому же турбулентность изотропная, то для построения коррелятора Q_{ik} в нашем распоряжении имеются только изотропные тензоры δ_{ik} и ε_{ikl} и вектор ξ. Поэтому общее выражение для Q_{ik} имеет вид

$$Q_{ik}(\xi, \tau) = A(\xi, \tau)\delta_{ik} + B(\xi, \tau)\xi_i\xi_k + C(\xi, \tau)\varepsilon_{ikl}\xi_l \qquad (6.3)$$

Функции A, B, C зависят только от величины $\xi = \sqrt{\xi^2}$ и, следовательно, образуют четную функцию по переменной ξ. Выражение (5.54) тогда означает, что они являются четными функциями также и по временной переменной τ. Теорема Бохнера налагает дополнительные ограничения на эти функции, но мы не станем здесь их выписывать, т.к. более удобным оказывается использовать представление Фурье для рассматриваемых величин.

6.2. Преобразование Фурье однородных стационарных случайных полей

Пусть $F(\mathbf{x}, t)$ – функция координат и времени. Ее преобразование Фурье $\hat{F}(\mathbf{k}, \omega)$ определяется выражением

$$\hat{F}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint F(\mathbf{x}, t)\exp[-i(\mathbf{kx} - \omega t)]d\mathbf{x}dt. \qquad (6.4)$$

Имеет место формула обращения

$$F(\mathbf{x}, t) = \iint \hat{F}(\mathbf{k}, \omega)\exp[i(\mathbf{kx} - \omega t)]d\mathbf{k}d\omega. \qquad (6.5)$$

Отметим несколько основных свойств:

1) Если $F(\mathbf{x}, t)$ вещественная функция, то

$$\hat{F}(-\mathbf{k}, -\omega) = \hat{F}^*(\mathbf{k}, \omega). \qquad (6.6)$$

2) Образ Фурье произведения двух функций $F(\mathbf{x}, t)$ и $G(\mathbf{x}, t)$ задается интегралом свертки

$$\widehat{(F \cdot G)}(\mathbf{k}, \omega) = (\hat{F} * \hat{G})(\mathbf{k}, \omega) = \iint \hat{F}(\mathbf{k}', \omega')\hat{G}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')d\mathbf{k}'d\omega' \qquad (6.7)$$

3) Полагая в (6.7) $\mathbf{k} = 0$ и $\omega = 0$, получим теорему Парсеваля

$$\iint F(\mathbf{x}, t)G(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}dt = (2\pi)^4 \iint \hat{F}(\mathbf{k}, \omega)\hat{G}^*(\mathbf{k}, \omega)d\mathbf{k}d\omega, \qquad (6.8)$$

или в терминах скалярного произведения

$$(F,\ G) = (2\pi)^4(\hat{F},\ \hat{G}). \tag{6.9}$$

Для однородного и стационарного случайного поля, подобного $u'(\mathbf{x},\ t)$, преобразование Фурье в классическом смысле не определено, так как поле u' не стремится к нулю при стремлении переменных $\mathbf{x}$ и t к бесконечности. Оно, однако, может быть определено в форме функционала, т.е. символ $(F,\ \varphi)$ понимается не как скалярное произведение функций F и φ, а как функционал $(F,\ \cdot)$, действующий на конечную функцию φ. Теорема Парсеваля берется в качестве определения образа Фурье $(\hat{F},\ \cdot)$ функционала $(F,\ \cdot)$:

$$(\hat{F},\ \hat{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\ (F,\ \varphi). \tag{6.10}$$

Образ Фурье $\hat{\varphi}$ существует в классическом смысле, так как функция φ является конечной функцией, т.е. равна нулю вне некоторой конечной области. В целях удобства будем снова писать F и $\hat{F}$ вместо $(F,\ \cdot)$ и $(\hat{F},\ \cdot)$.

Теперь мы в состоянии работать с преобразованиями Фурье однородных и стационарных случайных полей. Полезно также иметь в виду, что функции φ в определении $\hat{F}$ не обязательно должны быть конечными функциями, но могут также экспоненциально уменьшаться при стремлении переменных $\mathbf{x}$ и t к бесконечности. Таким образом, если F является однородным и стационарным случайным полем (рассматриваемым как функционал), а функция G достаточно быстро убывает на бесконечности, то преобразование Фурье этого поля $\hat{F}$ определяется формулой:

$$(\hat{F},\ \hat{G}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\ \iint F(\mathbf{x},\ t)G(\mathbf{x},\ t)d\mathbf{x}dt\ . \tag{6.11}$$

Возьмем в качестве полезного примера $F(\mathbf{x},\ t) \equiv 1$. Из формул (6.11) и (6.4) получаем

$$(\hat{F},\ \hat{G}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\ \iint G(\mathbf{x},\ t)d\mathbf{x}dt\ = \hat{G}(0,\ 0), \tag{6.12}$$

т.е. образ Фурье $\hat{F}$ оказывается δ-функцией Дирака $\delta(\mathbf{k},\ \omega) \equiv \delta(\mathbf{k})\delta(\omega)$.

В качестве другого примера возьмем $F(\mathbf{x},\ t) = x_j$. В этом случае

$$(\hat{F},\ \hat{G}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\ \iint x_j G(\mathbf{x},\ t)d\mathbf{x}dt\ = \left(i\frac{\partial \hat{G}(\mathbf{k},\ \omega)}{\partial k_j}\right)_{\mathbf{k}=0,\ \omega=0},$$

т.е. функционал $\hat{F}$ пропорционален производной δ-функции Дирака.

Таким образом, имеем соотношения

$$F(\mathbf{x}, t) = 1, \quad \hat{F}(\mathbf{k}, \omega) = \delta(\mathbf{k}, \omega), \tag{6.13}$$

$$F(\mathbf{x}, t) = x_j, \quad \hat{F}(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{\partial \delta(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_j}. \tag{6.14}$$

В качестве третьего примера приведем формулы

$$F(\mathbf{x}, t) = x_i x_j, \quad \hat{F}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\partial^2 \delta(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_i \partial k_j}. \tag{6.15}$$

6.3. Основное соотношение, связывающее средние от образов Фурье с образом Фурье корреляционного тензора

Для функционалов $\hat{u}_i$, $\hat{u}_j$ имеем в вышеуказанном смысле

$$\overline{(\hat{u}_i, \hat{F})(\hat{u}_j, \hat{G})} = \frac{1}{(2\pi)^8} \overline{\iiiint u'_i(\mathbf{x}, t) F(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' \times} \times dt' d\mathbf{x} dt = \frac{1}{(2\pi)^8} \iiiint Q_{ij}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t) F(\mathbf{x}, t) \times \times G(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x} dt d\mathbf{x}' dt'. \tag{6.16}$$

Принимая во внимание, что преобразование Фурье корреляционного тензора $Q_{ij}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t)$ по переменным $\mathbf{x}'$, t' равно $\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}', \omega') \times \times \exp[-i(\mathbf{k}'\mathbf{x} - \omega' t)]$, и используя фурье-образы вещественных функций F и G, получаем

$$\overline{(\hat{u}_i, \hat{F})(\hat{u}_j, \hat{G})} = \iint \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}', \omega') \hat{F}(\mathbf{k}', \omega') \hat{G}^*(\mathbf{k}', \omega') d\mathbf{k}' d\omega' = = \iiiint \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}', \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega + \omega') \hat{F}^*(\mathbf{k}, \omega) \hat{G}^*(\mathbf{k}', \omega') d\mathbf{k}' d\omega' d\mathbf{k} d\omega \tag{6.17}$$

Обозначим через S пространство вещественных функций. Тогда формулы (6.16) и (6.17) определяют функционалы на произведении пространств $S \times S$:

$$\frac{1}{(2\pi)^8} \overline{(u'_i \times u'_j, F \times G)} = \overline{(\hat{u}_i \times \hat{u}_j, \hat{F} \times \hat{G})}$$

(с очевидным символическим обозначением), где $\overline{\hat{u}_i \times \hat{u}_j}$ обозначает преобразование Фурье функционала $\overline{u'_i \times u'_j}$. Эти функционалы явля-

ются интегральными преобразованиями с ядрами

$$\overline{u_i'(\mathbf{x}, t)u_j'(\mathbf{x}', t')} = Q_{ij}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t),$$

$$\overline{\hat{u}_i(\mathbf{k}, \omega)\hat{u}_i(\mathbf{k}', \omega')} = \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}', \omega')\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}', \omega + \omega'). \qquad (6.18)$$

6.4. Теорема Бохнера

Тензор $Q_{ij}(\xi, \tau)$ вещественный, поэтому, согласно (6.6), выполняется равенство

$$\hat{Q}_{ij}(-\mathbf{k}, -\omega) = \hat{Q}^*_{ij}(\mathbf{k}, \omega). \qquad (6.19)$$

Более того, из соотношения симметрии (5.54) получаем

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}_{ji}(-\mathbf{k}, -\omega). \qquad (6.20)$$

Комбинируя выражения (6.19) и (6.20), находим

$$\hat{Q}_{ji}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}^*_{ij}(\mathbf{k}, \omega), \qquad (6.21)$$

т.е. преобразование Фурье корреляционного тензора эрмитово.

Неравенство (6.2) можно представить в виде

$$\iint \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \sum_{\nu,\mu=1}^{N} c_{i\nu} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x}_\nu - \omega t_\nu)] c^*_{j\mu} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{x}_\mu - \omega t_\mu)] \times$$

$$\times d\mathbf{k}\, d\omega \geqslant 0. \qquad (6.22)$$

Если ввести новые величины

$$X_i = \sum_{\nu=1}^{N} c_{i\nu} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x}_\nu - \omega t_\nu)], \qquad (6.23)$$

то можно вместо (6.22) записать

$$\iint \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) X_i(\mathbf{k}, \omega) X^*_j(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}\, d\omega \geqslant 0. \qquad (6.24)$$

Это неравенство выполняется для произвольных $c_{i\nu}$, $\mathbf{x}_\nu$, t_ν тогда и только тогда, когда

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) X_i X^*_j \geqslant 0, \qquad (6.25)$$

т.е. если величина $\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ является положительно определенным эрмитовым тензором. Эта форма теоремы Бохнера значительно удобнее, чем выражение (6.2).

6.5. Изотропная турбулентность

Выражением (6.3) мы уже ввели корреляционный тензор второго ранга для однородной, изотропной и стационарной турбулентности. Имея в виду определить преобразование Фурье этого тензора, напишем соотношения

$$\widehat{B\xi_i\,\xi_j} = -\frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial k_i\,\partial k_j}, \qquad \widehat{C\xi_i} = i\frac{\partial \hat{C}}{\partial k_i}, \tag{6.26}$$

которые легко вывести из (6.7), (6.14) и (6.15) при учете формулы

$$(\hat{F} * \frac{\partial \hat{G}}{\partial k_i}) = \frac{\partial}{\partial k_i}(\hat{F} * \hat{G}), \tag{6.27}$$

выполняющиеся для произвольных функций $\hat{F}$ и $\hat{G}$.

Из формул (6.3) и (6.26) получаем выражение для преобразования Фурье корреляционного тензора второго ранга в случае однородной изотропной и стационарной турбулентности:

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},\,\omega) = \hat{A}(k,\,\omega)\delta_{ij} - \frac{\partial^2 \hat{B}(k,\,\omega)}{\partial k_i\,\partial k_j} + i\,\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \hat{C}(k,\,\omega)}{\partial k_k}. \tag{6.28}$$

Функции $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ зависят только от абсолютной величины вектора $\mathbf{k}$. Поэтому после выполнения дифференцирования получаем

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},\,\omega) = (\hat{A} - \frac{1}{k}\frac{\partial \hat{B}}{\partial k})\delta_{ij} - (\frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial k^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial \hat{B}}{\partial k}) \times$$
$$\times \frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{i}{k}\frac{\partial \hat{C}}{\partial k}\varepsilon_{ijk}k_k. \tag{6.29}$$

Найдем теперь ограничения, которые теорема Бохнера налагает на функции $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$. Для простоты запишем

$$\hat{Q}_{pq}(\mathbf{k},\,\omega) = \hat{F}(\mathbf{k},\,\omega)\delta_{pq} + \hat{G}(k,\,\omega)k_p k_q + i\hat{H}(k,\,\omega)\varepsilon_{pqj}k_j, \tag{6.30}$$

где

$$\hat{F} = \hat{A} - \frac{1}{k}\frac{\partial \hat{B}}{\partial k}, \qquad \hat{G} = -\frac{1}{k^2}(\frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial k^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial \hat{B}}{\partial k}),$$
$$\hat{H} = \frac{1}{k}\frac{\partial \hat{C}}{\partial k}. \tag{6.31}$$

Величина $\hat{Q}_{ij}$ положительно определена тогда и только тогда, когда 1) след матрицы $\hat{Q}_{ij}$ неотрицателен, т.е.

$$3\hat{F} + k^2\hat{G} \geqslant 0, \tag{6.32}$$

2) след тензора алгебраических дополнений $\hat{q}_{ij}$, определяемого выражением

$$\hat{q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}\hat{Q}_{mp}\hat{Q}_{nq}, \tag{6.33}$$

неотрицателен, т.е.

$$\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}\hat{Q}_{mp}\hat{Q}_{nq} = 4\hat{F}(\hat{F} + k^2\hat{G}) + 2(\hat{F}^2 - k^2\hat{H}^2) \geqslant 0, \tag{6.34}$$

3) определитель тензора Q_{ij} неотрицателен, т.е.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\hat{Q}_{ip}\hat{Q}_{jq}\hat{Q}_{kr} = 6(\hat{F} + k^2\hat{G})(\hat{F}^2 - k^2\hat{H}^2) \geqslant 0. \tag{6.35}$$

Условия (6.32), (6.34) и (6.35) можно заменить более удобными условиями

$$\hat{F} + k^2\hat{G} \geqslant 0, \quad \hat{F} \geqslant |k\hat{H}|. \tag{6.36}$$

Ясно, что условия (6.32), (6,34) и (6.35) вытекают из (6.36). Чтобы проверить обратную теорему, примем, что условия (6.32), (6.34) и (6.35) выполнены, а одно из условий (6.36) не выполнено. Тогда вследствие условия (6.35) должно нарушиться и второе из условий (6.36). Выражение (6.34) приводит к условию $\hat{F} < 0$, что дает $2\hat{F} + (\hat{F} + k^2\hat{G}) < 0$ в противоречие (6.32). Следовательно, согласно теореме Бохнера, тензор $\hat{Q}_{ij}$, определяемый выражением (6.3), является корреляционным тензором второго ранга однородного изотропного и стационарного случайного поля тогда и только тогда, когда

$$\hat{A} - \frac{\partial^2\hat{B}}{\partial k^2} \geqslant 0, \quad \hat{A} - \frac{1}{k}\frac{\partial\hat{B}}{\partial k} \geqslant \left|\frac{\partial\hat{C}}{\partial k}\right|. \tag{6.37}$$

Это следует из условий (6.36) при учете обозначений (6.31).

6.6. Два частных случая: турбулентность в несжимаемой жидкости и спучайные звуковые волны

Для случая турбулентности в несжимаемой жидкости имеем

$$\frac{\partial u_i'(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = 0, \tag{6.38}$$

и, следовательно, корреляционный тензор удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial Q_{ij}(\xi, \tau)}{\partial \xi_i} = 0, \quad \frac{\partial Q_{ij}(\xi, \tau)}{\partial \xi_j} = 0. \tag{6.39}$$

В пространстве Фурье условие несжимаемости означает

$$k_i \hat{u}_i(\mathbf{k}, \omega) = 0, \tag{6.40}$$

и для корреляционного тензора

$$k_i \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad k_j \hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \tag{6.41}$$

Если, к тому же, турбулентность изотропная, то из (6.29) находим

$$\hat{A} - \frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial k^2} = 0. \tag{6.42}$$

В этом случае выражение для корреляционного тензора упрощается:

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}(k, \omega)(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) + \frac{i}{k} \frac{\partial \hat{C}(k, \omega)}{\partial k} \varepsilon_{ijk} k_k, \tag{6.43}$$

где

$$k^2 \hat{Q}(k, \omega) = \hat{A}(k, \omega) - \frac{1}{k} \frac{\partial \hat{B}(k, \omega)}{\partial k}. \tag{6.44}$$

Согласно теореме Бохнера (6.37), имеем

$$\hat{Q}(k, \omega) \geqslant \left| \frac{1}{k^2} \frac{\partial \hat{C}(k, \omega)}{\partial k} \right|, \tag{6.45}$$

т.е. величина $\hat{Q}$ является неотрицательной функцией.

Условие несжимаемости в ξ-пространстве легко получается подстановкой выражения (6.3) в (6.39):

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial B}{\partial \xi} + 4B = 0. \tag{6.46}$$

Используя понятие продольной корреляционной функции f, введенной в (5.61), это условие можно записать в виде

$$A = f + \frac{\xi}{2} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad B = -\frac{1}{2\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi}. \tag{6.47}$$

В качестве второго примера рассмотрим турбулентность, которая представляет собой случайные звуковые волны, имеющие потенциал:

$$u'_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \tag{6.48}$$

Функция Φ является однородной случайной функцией. Для корреляционного тензора находим:

$$Q_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \overline{\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t+\tau)}{\partial \xi_j}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\left[\Phi(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t+\tau)}{\partial \xi_j}\right]} - \overline{\Phi(\mathbf{x}, t) \times \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t+\tau)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}} = -\frac{\partial^2 R(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \tag{6.49}$$

где R является корреляционной функцией:

$$R(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \overline{\Phi(\mathbf{x}, t)\Phi(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t+\tau)}. \tag{6.50}$$

В фурье-представлении имеем

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = k_i k_j \hat{R}(\mathbf{k}, \omega), \tag{6.51}$$

и теорема Бохнера (6.36) просто означает, что

$$\hat{R}(\mathbf{k}, \omega) \geqslant 0. \tag{6.52}$$

6.7. Преобразование Фурье тензорной функции Грина. Вычисление интегралов в предельных случаях

Как уже говорилось, в этой главе мы ограничиваемся случаем, когда нет среднего течения. Тензорная функция Грина в этом случае известна и выражается формулами (4.57) и (4.58). Специальная зависимость ее от аргументов позволяет написать

$$G_{jp}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = G_{jp}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}, t-\tau) \tag{6.53}$$

и ввести ее преобразование Фурье с помощью формулы

$$G_{jp}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}, t-\tau) = \iint \hat{G}_{jp}(\mathbf{k}, \omega)\exp\{i[\mathbf{k}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) - \omega(t-\tau)]\}\,d\mathbf{k}\,d\omega, \tag{6.54}$$

где $\hat{G}_{jp}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{jp}\hat{G}(\mathbf{k}, \omega)$. (6.55)

Функцию $\hat{G}(\mathbf{k},\omega)$ можно легко вычислить из фурье-преобразованного условия 3) в разд. 4.5, которое, согласно (6.4), означает

$$(-i\omega + \eta k^2)\hat{G}_{jp} = \frac{\delta_{jp}}{(2\pi)^4} . \qquad (6.56)$$

Следовательно, получим

$$\hat{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{\eta k^2 - i\omega} . \qquad (6.57)$$

Уже в разд. 5.5 было видно, что наши исследования приводят к интегралам, подынтегральная функция которых является произведением функции Грина и некоторых функций от координат и времени. Пусть A обозначает такой интеграл. Согласно теореме Парсеваля (6.8), можно написать

$$A = \iint G(\xi, \tau)F(\xi, \tau)d\xi\, d\tau = (2\pi)^4 \iint \hat{G}(\mathbf{k}, \omega)\hat{F}^*(\mathbf{k}, \omega)d\mathbf{k}d\omega \qquad (6.58)$$

или в явном виде

$$A = \int_0^\infty \int \left(\frac{\mu\sigma}{4\pi\tau}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu\sigma\xi^2}{4\tau}\right)F(\xi, \tau)d\xi\, d\tau = \iint \frac{\hat{F}^*(\mathbf{k}, \omega)}{\eta k^2 - i\omega}\, d\mathbf{k}\, d\omega. \qquad (6.59)$$

Часто необходимо знать величину A в одном из предельных случаев: в пределе большой проводимости, т.е. когда $\tau_{cor} \ll \mu\sigma\lambda^2_{cor}$ или $\eta = (\mu\sigma)^{-1} \to 0$, или в пределе малой проводимости, когда $\tau_{cor} \gg \mu\sigma\lambda^2_{cor}$ или $\eta = (\mu\sigma)^{-1} \to \infty$.

Подставляя $\zeta = \sqrt{\mu\sigma}\,\xi$ в выражение (6.59), получаем

$$A = \int_0^\infty \int \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}}\, e^{-\zeta^2/4\tau} F\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\mu\sigma}}, \tau\right)d\zeta\, d\tau \to$$

$$\to \int_0^\infty \int \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}}\, e^{-\zeta^2/4\tau} F(0, \tau)\, d\zeta\, d\tau = \int_0^\infty F(0, \tau)d\tau, \quad \sigma \to \infty. \qquad (6.60)$$

Следовательно, в пределе большой проводимости имеем

$$A = \int_0^\infty F(0, \tau)d\tau = \iint \frac{\hat{F}^*(\mathbf{k}, \omega)}{-i\omega}\, d\mathbf{k}d\omega. \qquad (6.61)$$

В случае когда интеграл в фурье-пространстве не существует, необходима специальная интерпретация соотношения (6.61). Пусть $\psi(t)$ является интегралом с δ-функцией вида

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt'. \tag{6.62}$$

Тогда

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{-i\omega}. \tag{6.63}$$

Можно понимать теперь второй интеграл в (6.61) как величину, фурье-образ которой является преобразованием Фурье функционала $(2\pi)^4\psi(t)\delta(\mathbf{x})$. Тогда по определению преобразования Фурье функционалов первый интеграл в (6.61) равен второму.

Подставляя в формуле (6.59) $\rho = \mu\sigma/4\tau$, находим

$$A = \frac{\mu\sigma}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty\int \frac{e^{-\rho\xi^2}}{\sqrt{\rho}} F\left(\xi, \frac{\mu\sigma}{4\rho}\right) d\xi\, d\rho \to \frac{\mu\sigma}{4\pi^{3/2}} \int_0^\infty\int \frac{e^{-\rho\xi^2}}{\sqrt{\rho}} F(\xi, 0) d\xi d\rho$$

если $\sigma \to 0$. Выполняя интегрирование по переменной ρ, получим в пределе малой проводимости

$$A = \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int \frac{F(\xi, 0)}{\xi} d\xi = \mu\sigma \iint \frac{\hat{F}^*(\mathbf{k}, \omega)}{k^2}\, d\mathbf{k}\, d\omega. \tag{6.64}$$

В этом случае равенство двух интегралов очевидно, так как функция A является регулярным решением уравнения

$$\Delta A(\xi) = -\mu\sigma F(\xi, 0). \tag{6.65}$$

Существует хорошо известное представление

$$A(0) = \frac{\mu\sigma}{4\pi} \int \frac{F(\xi, 0)}{\xi} d\xi. \tag{6.66}$$

Пусть $A(\xi)$ представлено интегралом Фурье

$$A(\xi) = \int \tilde{A}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\xi}\, d\mathbf{k}. \tag{6.67}$$

Тогда из уравнения (6.65) следует

$$\tilde{A}(\mathbf{k}) = \frac{\mu\sigma}{k^2} \int \hat{F}(\mathbf{k}, \omega) d\omega \tag{6.68}$$

и поэтому

$$A(0) = \int \tilde{A}(\mathbf{k})d\mathbf{k} = \mu\sigma \iint \frac{\hat{F}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2} d\mathbf{k}\, d\omega . \qquad (6.69)$$

Поскольку функция $F(\xi, 0)$ вещественна, то равенство интегралов в (6.64) становится очевидным.

■

Глава 7. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СРЕДНИХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ СРЕДНЕГО ТЕЧЕНИЯ

7.1. Определение тензора a_{ij}

В разд. 5.5. мы уже получили представление тензора a_{ij} в рамках корреляционного приближения второго порядка. Принимая во внимание теорему Парсеваля (6.8) и соотношение симметрии (5.54), имеем, согласно (5.51),

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= \varepsilon_{ilm} f_{mnp} \varepsilon_{pqj} \int\int \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi_n} Q_{ql}(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\
&= -\varepsilon_{ilm} f_{mnp} \varepsilon_{pqj} \int\int G(\xi, \tau) \frac{\partial Q_{ql}(\xi, \tau)}{\partial \xi_n} d\xi d\tau = \\
&= i \varepsilon_{ilm} f_{mnp} \varepsilon_{pqj} \int\int \frac{k_n \hat{Q}_{lq}(\mathbf{k}, \omega)}{\eta k^2 - i\omega} d\mathbf{k} d\omega .
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Особый интерес представляет величина α, определяемая выражением

$$
\alpha = \frac{1}{3} a_{ii} , \tag{7.2}
$$

которое справедливо также в неизотропном случае. Произведя суммирование по индексам в (7.1), находим

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{1}{3} \varepsilon_{nlq} \int\int G(\xi, \tau) \frac{\partial Q_{ql}(\xi, \tau)}{\partial \xi_n} d\xi d\tau = \\
&= -\frac{1}{3} \int\int G(\xi, \tau) \overline{\mathbf{u}'(x, t) \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{u}'(\mathbf{x} + \xi, t + \tau)} d\xi d\tau = \\
&= +\frac{i}{3} \varepsilon_{nlq} \int\int \frac{k_n \hat{Q}_{lq}(\mathbf{k}, \omega)}{\eta k^2 - i\omega} d\mathbf{k} d\omega .
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Первые две строки в этом выражении показывают, что определение

величины α из (7.2) приводит снова к той же формуле, как и в изотропном случае [см. (5.55)]; последняя строка следует из теоремы Парсеваля.

Как показывает анализ, произведенный в разд. 5.4, было бы интересно знать, симметричен ли тензор a_{ij}. Для этого рассмотрим вектор $\gamma\mathbf{g}$, определяемый выражением

$$\gamma g_k = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk} a_{ij}. \tag{7.4}$$

Удобно считать $\mathbf{g}$ единичным вектором. Из формулы (7.1) получаем

$$\gamma g_k = -\frac{1}{2}\iint G(\xi,\tau)\left[\frac{\partial Q_{kl}(\xi,\tau)}{\partial \xi_l} + \frac{\partial Q_{lk}(\xi,\tau)}{\partial \xi_l}\right] d\xi\, d\tau. \tag{7.5}$$

Используя условие симметрии (5.54) и произведя замену ξ на $-\xi$ во втором члене подынтегрального выражения, можно переписать (7.5) в следующем виде:

$$\gamma g_k = -\frac{1}{2}\iint G(\xi,\tau)\left[\frac{\partial Q_{kl}(\xi,\tau)}{\partial \xi_l} - \frac{\partial Q_{kl}(\xi,-\tau)}{\partial \xi_l}\right] d\xi\, d\tau. \tag{7.6}$$

Это выражение показывает, что величина a_{ij} симметрична, т.е. $\gamma = 0$, для ряда интересных случаев:

1) тензор a_{ij} симметричен для турбулентности в несжимаемой жидкости;
2) тензор a_{ij} симметричен для турбулентности с корреляционным тензором, четным относительно τ.

Эти утверждения непосредственно следуют из (7.6). Интересным примером справедливости утверждения 2) является изотропная турбулентность. Учитывая соотношения (6.58) и (6.64), легко получить, что

3) тензор a_{ij} симметричен в пределе малой проводимости.

Комбинируя утверждения 1) и 3), подтверждаем результат Моффата [169] о том, что тензор a_{ij} симметричен для турбулентности в несжимаемой жидкости в пределе малой проводимости.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 \tag{7.7}$$

в корреляционном приближении второго порядка приводит к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\overline{u'_k(x,\ t)\rho'(x+\xi,\ t+\tau)} + \bar{\rho}\frac{\partial}{\partial \xi_l} Q_{kl}(\xi, \tau) = 0, \qquad (7.8)$$

если плотность ρ представить в виде $\bar{\rho} + \rho'$. Это соотношение позволяет переписать выражение (7.6) в виде:

$$\gamma \mathfrak{g} = \frac{1}{2\bar{\rho}} \iint G(\xi, \tau) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \tau}\overline{u'(x,\ t)[\rho'(x+\xi,\ t+\tau) + \rho'(x+\xi, t-\tau)]}\, d\xi\, d\tau, \qquad (7.9)$$

из которого, учитывая (6.61), получаем в пределе большой проводимости

$$\gamma \mathfrak{g} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\overline{u'(x,\ t)\rho'(x,\ t)} \approx \bar{u} = 0, \qquad (7.10)$$

так как мы принимаем из физических соображений, что средний перенос массы отсутствует, т.е. $\overline{\rho u} = \bar{\rho}\bar{u} + \overline{\rho' u'} = 0$.

Таким образом, можно добавить четвертое утверждение:

4) тензор a_{ij} симметричен в пределе большой проводимости.

7.2. Эффект накачки

Если учитывать только ту часть турбулентной электродвижущей силы $\mathfrak{G}$, которая обусловлена антисимметричной частью тензора a_{ij}, то, согласно определению величины $\mathfrak{g}$ из (7.4), поведение среднего магнитного поля описывается уравнением

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\gamma \mathfrak{g} \times \bar{B}) - \frac{1}{\mu\sigma}\Delta \bar{B} = 0. \qquad (7.11)$$

Из этого уравнения видно, что действие $\mathfrak{G}$ на среднее магнитное поле совпадает с действием постоянного поля скоростей $u = -\gamma \mathfrak{g}$, т.е. среднее магнитное поле может переноситься через турбулентную среду со скоростью $-\gamma \mathfrak{g}$, хотя никакого среднего движения жидкости не существует. Следуя Дробышевскому и Юфереву [61], мы называем такое действие турбулентности "эффектом накачки".

Дробышевский и Юферев численными расчетами показали существование эффекта накачки для несжимаемого стационарного ячеистого движения. Поскольку такое движение напоминает хаотическое

движение в пределе малой проводимости, следует ожидать, что утверждения 1) и 3), полученные в предыдущем разделе, справедливы лишь приближенно. То, что дело обстоит именно так, было показано Моффатом [173], который рассмотрел электродвижущую силу в рамках приближения третьего порядка. Выведем поэтому выражение для γ_g на основе корреляционного приближения третьего порядка.

Согласно формулам (4.56), (4.57) и (5.46) для однородной стационарной турбулентности, имеем

$$a_{ij} = -\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{npj}\int\int G(\xi,\tau)\frac{\partial Q_{pk}(\xi,\tau)}{\partial\xi_m}\,d\xi d\tau + \\ + \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{npq}\varepsilon_{qrs}\varepsilon_{stj}\int\int\int\int G(\xi,\tau)G(\xi',\tau')\times \\ \times\frac{\partial^2 Q_{kpt}(-\xi,-\xi',-\tau,-\tau')}{\partial\xi_m\partial\xi'_r}\,d\xi\,d\tau\,d\xi'\,d\tau', \tag{7.12}$$

где корреляционный тензор третьего ранга Q_{kpt} определен выражением (4.12). Для него выполняется очевидное соотношение

$$Q_{kpt}(-\xi,-\xi',-\tau,-\tau') = Q_{tpk}(\xi',\xi,\tau',\tau). \tag{7.13}$$

Следовательно, из формул (7.4), (7.12) и (7.13) получаем

$$\gamma_{gj} = -\frac{1}{2}\int\int G(\xi,\tau)\left[\frac{\partial Q_{il}(\xi,\tau)}{\partial\xi_l} - \frac{\partial Q_{jl}(\xi,-\tau)}{\partial\xi_l}\right]d\xi\,d\tau + \\ + \frac{1}{2}\int\int\int\int G(\xi,\tau)G(\xi',\tau')\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\partial\xi'_l}\left[Q_{ljk}(\xi,\xi',\tau,\tau') - \right. \\ \left. - Q_{kjl}(\xi,\xi',\tau,\tau') - Q_{jlk}(\xi,\xi',\tau,\tau) - Q_{lkj}(\xi,\xi',\tau,\tau')\right]d\xi\,d\xi'\,d\tau\,d\tau'. \tag{7.14}$$

Для однородной турбулентности в несжимаемой жидкости корреляционный тензор третьего ранга удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial Q_{pqz}(\xi,\xi',\tau,\tau')}{\partial\xi_p} = 0, \tag{7.15}$$

$$\frac{\partial Q_{pqz}(\xi,\xi',\tau,\tau')}{\partial\xi_q} = \frac{\partial Q_{pqz}(\xi,\xi',\tau,\tau')}{\partial\xi'_q}, \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial Q_{pqr}(\xi, \xi', \tau, \tau')}{\partial \xi'_r} = 0, \tag{7.17}$$

которые легко получаются из определения (4.12) при учете условия $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Таким образом, для случая турбулентности в несжимаемой жидкости имеем

$$\gamma g_j = \frac{1}{2} \iiint G(\xi, \tau) G(\xi', \tau') \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi'_l} [Q_{lj\,k}(\xi, \xi', \tau, \tau') -$$

$$- Q_{jl\,k}(\xi, \xi', \tau, \tau') - Q_{lkj}(\xi, \xi', \tau, \tau')] d\xi d\xi' d\tau d\tau'. \tag{7.18}$$

Модель, изученная Дробышевским и Юферевым, а также Моффатом, является одним из примеров, когда не равна нулю величина γ, определяемая из формулы (7.18).

7.3. Действие динамо для случая однородной турбулентности

Симметричная часть тензора a_{ij} описывает качественно новые черты поведения магнитного поля: динамо-действие турбулентного движения превышает омическую диссипацию, обеспечивая таким образом рост или, в случае равновесия, сохранение магнитных полей.

Легче всего можно понять эту ситуацию, рассматривая однородную изотропную турбулентность при наличии спиральности, т.е. когда турбулентная электродвижущая сила $\mathcal{E}$ задается формулой (5.37) с $\alpha \neq 0$, а среднее магнитное поле описывается уравнениями

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \alpha \operatorname{rot} \bar{\mathbf{B}} + \eta_T \Delta \bar{\mathbf{B}}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0, \tag{7.19}$$

где введен коэффициент полной магнитной диффузии

$$\eta_T = \eta + \beta. \tag{7.20}$$

В гл. 3 с помощью физических аргументов уже была показана возможность возбуждения динамо в турбулентной среде, обладающей спиральностью. Здесь мы начнем с представления

$$\mathbf{B} = \hat{\bar{\mathbf{B}}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\bar{\mathbf{B}}} = 0, \tag{7.21}$$

и будем искать незатухающие решения уравнения (7.19), т.е. решения с $\operatorname{Re}(-i\omega) = 0$. Подставляя (7.21) в (7.19), получим следующую

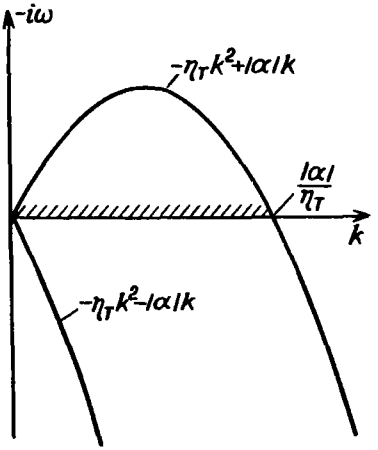


Рис. 7.1. Две ветви решения дисперсионного уравнения для однородной, изотропной и зеркально-несимметричной турбулентности. Растущие моды существуют для волновых векторов, амплитуда которых меньше, чем $|\alpha|/\eta_T$.

алгебраическую систему

$$(p\delta_{ij} - i\alpha\varepsilon_{ipj}k_p)\hat{\bar{B}}_j = 0, \quad p = -i\omega + \eta_T k^2. \tag{7.22}$$

Условие разрешимости этой системы приводит к дисперсионному уравнению

$$\det(p\delta_{ij} - i\alpha\varepsilon_{ipj}k_r) = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}(p\delta_{il} - i\alpha\varepsilon_{ipl}k_p)(p\delta_{jm} - i\alpha\varepsilon_{jqm}k_q) \times$$

$$\times(p\delta_{kn} - i\alpha\varepsilon_{krn}k_r) = p^3 - \alpha^2k^2p = p(p+\alpha k)(p-\alpha k) = 0 \tag{7.23}$$

с двумя решениями

$$-i\omega = -\eta_T k^2 + |\alpha|k, \quad -i\omega = -\eta_k k^2 - |\alpha|k. \tag{7.24}$$

Третий корень, $p = 0$, не соответствует соленоидальному полю. Первое из решений (7.24) положительно для достаточно малых значений k, т.е. оно описывает поля, растущие со временем. На рис. 7.1 показаны две ветви решения дисперсионного уравнения.

Таким образом, мы получили фундаментальный вывод: зеркально-несимметричная, однородная и изотропная турбулентность обеспечивает действие динамо.

Рассмотрим теперь общий случай однородной турбулентности, когда электродвижущая сила $\mathcal{E}$ имеет вид (5.35). Представим тензор a_{ij} в виде суммы симметричной и антисимметричной частей

$$a_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma\varepsilon_{ijk}g_k. \tag{7.25}$$

Тогда уравнение индукции для среднего поля принимает вид:

$$\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\alpha_{kl} + \gamma\varepsilon_{klm}g_m)\overline{B}_l + b_{klm}\frac{\partial \overline{B}_l}{\partial x_m}\right] + \eta\Delta\overline{B}_i. \tag{7.26}$$

Подставляя снова (7.21), получим новую алгебраическую систему

$$(q\delta_{il} - i\varepsilon_{ijk}k_j\alpha_{kl} + \varepsilon_{ijk}k_j b_{klm}k_m)\hat{\overline{B}}_l = 0, \tag{7.27}$$

где

$$q = p + i(\gamma\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}) = -i\omega + \eta k^2 - i(\gamma\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}). \tag{7.28}$$

Исследуя динамо-возбуждение однородной турбулентностью, будем пренебрегать тензором b_{klm}, так как его вклад второго порядка по $\mathbf{k}$. Поэтому, если найдены растущие решения, всегда можно сказать, что они существуют для достаточно малых значений волнового вектора $\mathbf{k}$.

Пренебрегая в (7.27) тензором b_{klm}, приходим к системе

$$(q\delta_{jl} - ik_p\varepsilon_{jpk}\alpha_{kl})\hat{\overline{B}}_l = 0, \tag{7.29}$$

где незатухающие решения соответствуют $\mathrm{Re}(q) > 0$. Эта задача впервые была рассмотрена Моффатом [169], а позднее Краузе [117].

Для определителя системы (7.29) находим

$$\det(q\delta_{jl} - ik_p\varepsilon_{jpk}\alpha_{kl}) = q(q^2 - A_{pq}k_pk_q), \tag{7.30}$$

где A_{pq} – тензор алгебраических дополнений матрицы α_{kl}:

$$A_{pq} = \frac{1}{2}\varepsilon_{pkl}\varepsilon_{qmn}\alpha_{km}\alpha_{ln}. \tag{7.31}$$

Корень $q = 0$ не представляет для нас интереса, так как соответствует затухающему полю (если оно вообще существует). Таким образом, надо рассматривать дисперсионное уравнение

$$q^2 - A_{pq}k_pk_q = 0. \tag{7.32}$$

Из него видно, что при $A_{pq}k_pk_q > 0$ растущие решения, т.е. решения с $\mathrm{Re}(-i\omega) > 0$, существуют для достаточно малых значений k.

Теперь можно сформулировать некоторые теоремы относительно динамо-возбуждения:

1) необходимым и достаточным условием существования динамо-возбуждения для некоторых волновых векторов k является положительная определенность тензора A_{pq};

1') не существует динамо-возбуждения тогда и только тогда, когда тензор A_{pq} является отрицательно определенным.

Поскольку

$$\det(A_{pq}) = (\det(\alpha_{pq}))^2, \tag{7.33}$$

то тензор A_{pq} не может быть отрицательно определенным, если величина α_{pq} не сингулярна. Поэтому можно утверждать:

2) динамо-возбуждение существует для некоторых волновых векторов k в случае, когда тензор α_{pq} не сингулярен.

Это утверждение ясно показывает, что для возбуждения динамо не требуется $\alpha \neq 0$, хотя, как мы увидим в дальнейшем, это условие может быть важным.

3) $\alpha \neq 0$ является необходимым условием возбуждения динамо для всех волновых векторов k достаточно малой амплитуды.

Чтобы доказать это, заметим, что динамо-возбуждение для всех k достаточно малой амплитуды требует определенности квадратичной формы $A_{pq}k_pk_q$, что имеет место тогда и только тогда, когда величина α_{pq} или положительно, или отрицательно определена, т.е. $\alpha \neq 0$.

Определим тензор $\tilde{\alpha}_{ij}$ выражением

$$\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \tilde{\alpha}_{ji}, \quad \tilde{\alpha}_{ii} = 0 \tag{7.34}$$

и сформулируем достаточное условие:

4) $\alpha^2 > \tilde{\alpha}_{kl}\tilde{\alpha}_{kl}$ является достаточным условием динамо-возбуждения для всех волновых векторов k достаточно малой величины.

Для доказательства вычислим из (7.31) и (7.34) величину

$$A_{pq}k_pk_q = \frac{1}{2}\left[(2\alpha^2 - \tilde{\alpha}_{kl}\tilde{\alpha}_{kl})k^2 - 2\alpha\tilde{\alpha}_{kl}k_kk_l + 2\tilde{\alpha}_{jk}\tilde{\alpha}_{jl}k_kk_l\right] \tag{7.35}$$

и перепишем ее в виде

$$A_{pq}k_pk_q = \frac{1}{2}[(\varkappa^2 - \tilde{\alpha}_{kl}\tilde{\alpha}_{kl})k^2 + (\alpha\delta_{jk} - \tilde{\alpha}_{jk})(\alpha\delta_{jl} - \tilde{\alpha}_{jl})k_kk_l + \\ + \tilde{\alpha}_{jk}\tilde{\alpha}_{jl}k_kk_l].$$

Второй и третий члены, очевидно, неотрицательны, а первый положителен, согласно условию 4), т.е. тензор A_{pq} является положительно-определенным.

Применим утверждение 1′) к двухмерной турбулентности. Для такой турбулентности векторы поля скоростей лежат в плоскостях, ортогональных некоторому заданному направлению $\mathbf{e}$, и не изменяются вдоль этого направления. Корреляционный тензор в пространстве Фурье в этом случае принимает вид

$$\hat{Q}_{jn}(\mathbf{k}, \omega) = \delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e})\hat{Q}^{(2)}_{jn}(\tilde{\mathbf{k}}, \omega), \tag{7.37}$$

где $$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{k})\mathbf{e}, \tag{7.38}$$

и $$e_j\hat{Q}^{(2)}_{jn} = 0, \quad e_n\hat{Q}^{(2)}_{jn} = 0. \tag{7.39}$$

Подставляя выражение (7.37) в (7.1), находим

$$a_{mj} = i(\varepsilon_{mlq}\delta_{nj} - \varepsilon_{mlj}\delta_{nq})\int\int \frac{\tilde{k}_n\hat{Q}^{(2)}_{lq}(\tilde{\mathbf{k}}, \omega)}{\eta\tilde{k}^2 - i\omega}\, d\tilde{\mathbf{k}}d\omega. \tag{7.40}$$

Положим теперь $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ и, следовательно, $\tilde{\mathbf{k}} = (k_1, k_2, 0)$. Тогда легко видеть, что

$$a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = a_{33} = 0.$$

Следовательно, α_{ij} принимает вид

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

что приводит к выражению

$$A_{pq} = \begin{pmatrix} -b^2 & ab & 0 \\ ab & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_{pq}, очевидно, отрицательно-определенная. Таким образом, в рамках корреляционного приближения второго порядка получаем утверждение:

5) двухмерная турбулентность не может обеспечить возбуждение динамо.

Этот результат согласуется с утверждением Зельдовича [299], что двухмерное поле скоростей не может возбудить динамо.

Другим интересным примером является анизотропная турбулентность во вращающейся системе. Если ограничиваться выражениями, линейными относительно направления анизотропии $\mathbf{g}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, то, согласно (5.43), имеем

$$\alpha_{ij} = -\alpha_1(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\Omega})\delta_{ij} - \alpha_2(g_i\Omega_j + g_j\Omega_i), \tag{7.41}$$

где α_1 и α_2 – некоторые скалярные коэффициенты. Из выражения (7.31) легко получаем

$$A_{pq} = \alpha_1^2(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\Omega})^2\delta_{pq} + \alpha_1\alpha_2(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\Omega})[2(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\Omega})\delta_{pq} - (g_p\Omega_q + g_q\Omega_p)] - \alpha_2^2(\mathbf{g}\times\boldsymbol{\Omega})_p(\mathbf{g}\times\boldsymbol{\Omega})_q. \tag{7.42}$$

Теперь можно доказать утверждение:

6) $\alpha_1 \neq 0$ является необходимым и достаточным условием для возбуждения динамо.

Очевидно, что тензор A_{pq} отрицательно определен, если $\alpha_1 = 0$. Следовательно, согласно 1'), условие $\alpha_1 \neq 0$ является необходимым для возбуждения динамо.

Кроме того, мы имеем $A_{pq}g_pg_q = \alpha_1^2(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\Omega})^2g^2$ и, следовательно, тензор A_{pq} не является отрицательно-определенным, если $\alpha_1 \neq 0$. Поэтому, согласно 1), указанное условие является достаточным для возбуждения динамо.

7.4. Определение тензора b_{ijk}: коэффициент турбулентной магнитной диффузии

В разд. 5.5 в рамках корреляционного приближения второго порядка уже было получено выражение для тензора b_{ijk}. Учитывая теорему Парсеваля (6.8) и условия симметрии (6.19), (6.20) и (6.21), получаем из формулы (5.52)

$$b_{ijk} = -\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqj}\int\int\frac{\partial G(\xi,\tau)}{\partial\xi_n}\xi_kQ_{ql}(\boldsymbol{\xi},\tau)d\boldsymbol{\xi}d\tau =$$

$$= \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqj} \iint G(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi_n} [\xi_k Q_{ql}(\xi, \tau)]\, d\xi d\tau = \quad (7.43)$$

$$= -\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqj} \iint \frac{k_n}{\eta k^2 - i\omega} \frac{\partial \hat{Q}_{lq}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_k} d\mathbf{k} d\omega.$$

Наибольший интерес представляет коэффициент турбулентной магнитной диффузии β, который определяется формулой

$$\beta = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} b_{ijk}. \quad (7.44)$$

Из (7.43) получаем выражение

$$\beta = -\frac{1}{3} \iint \frac{1}{\xi} \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} \xi_k \xi_l Q_{kl}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (7.45)$$

которое совпадает с формулой, полученной в разд. 5.5. В пространстве Фурье имеем

$$\beta = -\frac{1}{6} \iint \frac{k_n}{\eta k^2 - i\omega} \left[\frac{\partial \hat{Q}_{nq}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_q} + \frac{\partial \hat{Q}_{qn}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_q} \right] d\mathbf{k} d\omega =$$

$$= \frac{1}{3} \iint \frac{1}{\eta k^2 - i\omega} \left\{ \hat{Q}_{qq}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k_q} [k_n (\hat{Q}_{nq}(\mathbf{k}, \omega) + \right.$$

$$\left. + \hat{Q}_{qn}(\mathbf{k}, \omega))] \right\} d\mathbf{k} d\omega. \quad (7.46)$$

Фурье-представление дает возможность получить информацию о знаке коэффициента β. Например, для турбулентности в несжимаемой жидкости имеем

$$\beta = \frac{1}{3} \iint \frac{\hat{Q}_{qq}(\mathbf{k}, \omega)}{\eta k^2 - i\omega} d\mathbf{k} d\omega = \frac{1}{3} \iint \frac{\eta k^2 \hat{Q}_{qq}(\mathbf{k}, \omega)}{\eta^2 k^4 + \omega^2} d\mathbf{k} d\omega +$$

$$+ \frac{i}{3} \iint \frac{\omega \hat{Q}_{qq}(\mathbf{k}, \omega)}{\eta^2 k^4 + \omega^2} d\mathbf{k} d\omega. \quad (7.47)$$

Из соотношений симметрии (6.19), (6.20) и (6.21) можно получить

$$\hat{Q}_{qq}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}^*_{qq}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}_{qq}(-\mathbf{k}, -\omega), \quad (7.48)$$

и, следовательно, след фурье-преобразованного корреляционного тензора является четной функцией своих аргументов. Поэтому второй

интеграл в (7.47) исчезает. Таким образом, для турбулентности в несжимаемой среде получаем

$$\beta = \frac{\eta}{3} \iint \frac{k^2 \hat{Q}_{qq}(\mathbf{k}, \omega)}{\eta^2 k^4 + \omega^2} d\mathbf{k}\, d\omega \geqslant 0, \tag{7.49}$$

так как след $\hat{Q}_{qq}$, согласно теореме Бохнера, является неотрицательной функцией.

Как уже было отмечено, другой результат получается, если поле случайных скоростей имеет потенциал. Подставляя выражение (6.51) в (7.46), находим

$$\beta = \frac{1}{3} \iint \frac{1}{\eta k^2 - i\omega} \left[k^2 \hat{\Phi}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{\partial}{\partial k_q} (k_q k^2 \hat{\Phi}(\mathbf{k}, \omega)) \right] d\mathbf{k}\, d\omega =$$

$$= -\frac{1}{3} \iint \frac{k^2}{\eta k^2 - i\omega} \left[\hat{\Phi}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\partial}{\partial k_q} (k_q \hat{\Phi}(\mathbf{k}, \omega)) \right] d\mathbf{k}\, d\omega . \tag{7.50}$$

В пределе малой проводимости, используя (6.64), легко получаем

$$\beta = -\frac{1}{3\eta} \iint \hat{\Phi}(\mathbf{k}, \omega)\, d\mathbf{k}\, d\omega = -\frac{\overline{\varphi^2}}{3\eta}, \tag{7.51}$$

что согласуется с формулой (3.60).

Рассмотрение предела большой проводимости начнем с выражения (7.45), которое запишем в виде

$$\beta = \frac{1}{3} \iint G(\xi, \tau) \left[Q_{kk}(\xi, \tau) + \xi_l \frac{\partial Q_{kl}(\xi, \tau)}{\partial \xi_k} \right] d\xi\, d\tau . \tag{7.52}$$

В этом пределе при учете (6.61) находим

$$\beta = \frac{1}{3} \int_0^\infty Q_{kk}(0, \tau)\, d\tau = \frac{1}{6} \int Q_{kk}(0, \tau)\, d\tau, \tag{7.53}$$

где учитывалось, что, согласно (5.54), след $Q_{kk}(\xi, \tau)$ является четной функцией своих аргументов. Используя теперь образ Фурье величины Q_{kk}, приходим к выражению

$$\beta = \frac{\pi}{3} \int \hat{Q}_{kk}(\mathbf{k}, 0)\, d\mathbf{k} \geqslant 0, \tag{7.54}$$

из которого сразу видно, что в соответствии с теоремой Бохнера (6.25) коэффициент β неотрицателен в пределе большой проводимости.

Согласно определению (6.89) величины β, можно написать

$$b_{ijk} = \beta \varepsilon_{ijk} + \beta_{ijk}, \tag{7.55}$$

где

$$\varepsilon_{ijk}\beta_{ijk} = 0. \tag{7.56}$$

Если рассматривать теперь только ту часть электродвижущей силы $\mathcal{E}$, которая возникает от члена $\beta\varepsilon_{ijk}$, то поведение среднего магнитного поля будет определяться уравнением

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = (\eta + \beta)\Delta\overline{\mathbf{B}}, \tag{7.57}$$

т.е. величина β имеет смысл коэффициента турбулентной магнитной диффузии.

Из физических соображений обычно ожидают, что величина β положительна, и поэтому крайне удивляются ее отрицательному знаку для потенциального течения [см. (7.51)]. Однако, как показывают оценки в разд. 3.8, полный коэффициент магнитной диффузии $\eta + \beta$ положителен.

Для рассмотрения возможности отрицательных значений полного коэффициента магнитной диффузии можно ограничиться потенциальным случайным полем, поскольку, согласно (4.49), вклад соленоидальной части любого поля всегда положителен.

Из выражения (7.50) получаем

$$\beta = -\frac{1}{3\eta}\iint \frac{\eta k^2(\eta k^2 + i\omega)}{(\eta k^2 - i\omega)^2}\hat{\Phi}(\mathbf{k}, \omega)d\mathbf{k}d\omega =$$

$$= \frac{1}{3\eta}\iint \frac{\eta^2 k^4(3\omega^2 - \eta^2 k^4)}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)^2}\hat{\Phi}(\mathbf{k}, \omega)d\mathbf{k}d\omega. \tag{7.58}$$

Поскольку $\hat{\Phi} \geqslant 0$ и

$$-1 \leqslant \frac{\eta^2 k^4(3\omega^2 - \eta^2 k^4)}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)^2} \leqslant \frac{9}{16}, \tag{7.59}$$

то интеграл в правой части (7.58) можно представить в виде

$$\beta = \frac{1}{3\eta}\theta\iint\hat{\Phi}(\mathbf{k}, \omega)d\mathbf{k}d\omega = \frac{\theta}{3}\mathrm{Rm}^2\theta, \quad -1 \leqslant \theta \leqslant \frac{9}{16}. \tag{7.60}$$

Следовательно, $|\theta \mathrm{Rm}^2/3| > 1$ является необходимым условием отрицательных значений коэффициента полной магнитной диффузии, т.е. требуется $\mathrm{Rm}^2 > 3$. Условие применимости корреляционного приближения второго порядка (4.30) в этом случае сводится к условию $S \ll 1$ и тем более выполняется $S/\mathrm{Rm} = \tau_{\mathrm{cor}}/\mu\sigma\,\lambda^2_{\mathrm{cor}} \ll 1$. Это условие предела большой проводимости, когда $\beta > 0$, как было только что показано [см. (7.54)].

Таким образом, мы видим, что полный коэффициент магнитной диффузии $\eta + \beta$ в рамках корреляционного приближения второго порядка неотрицателен [129].

Отметим также, что в предельных случаях формулы (7.45) и (7.46) для величины β приводят к результатам, следующим из (3.30) и (3.48).

7.5. Турбулентность под действием сил Кориолиса

В разд. 7.2 обсуждалось влияние анизотропной турбулентности на турбулентную электродвижущую силу $\mathcal{E}$ для случая, когда анизотропия обусловлена некоторым векторным полем $\mathbf{g}$. Представляет интерес также случай, когда анизотропия обусловлена псевдовекторным полем. Простым примером этого случая является турбулентность во вращающейся системе, когда на нее влияют только кориолисовы силы. Предположим для простоты, что это влияние достаточно слабое, чтобы пренебречь всеми величинами, содержащими угловую скорость Ω в степени выше первой. Так как a_{ij} и b_{ijk} являются псевдотензорами, то имеем

$$a_{ij} = 0, \quad b_{ijk} = \beta\varepsilon_{ijk} - \beta_1\Omega_i\delta_{jk} - \beta_2\Omega_j\delta_{ki} - \beta_3\Omega_k\delta_{ij}, \qquad (7.61)$$

или, используя обозначения, введенные в (7.55),

$$\beta_{ijk} = \beta_1\Omega_i\delta_{jk} - \beta_2\Omega_j\delta_{ki} - \beta_3\Omega_k\delta_{ij}. \qquad (7.62)$$

Легко проверить, что условие (7.56) выполняется.

Выражение (7.43) позволяет связать постоянные $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ с корреляционным тензором поля скоростей. Для этого получаем из (7.61) соотношения

$$b_{iij} = (-3\beta_1 - \beta_2 - \beta_3)\Omega_i, \qquad (7.63)$$

$$b_{jii} = (-\beta_1 - 3\beta_2 - \beta_3)\Omega_i, \qquad (7.64)$$

$$b_{jji} = (-\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3)\Omega_i . \tag{7.65}$$

Сумма этих выражений дает

$$5\Omega_i (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = -(b_{ijj} + b_{jij} + b_{jji}). \tag{7.66}$$

Для постоянной β_3 таким же образом получаем

$$\beta_3 \Omega_i = -\frac{1}{10}(4b_{jji} - b_{jij} - b_{ijj}) \tag{7.67}$$

и, подставляя сюда выражения (7.43), придем к формуле [220]

$$\beta_3 \Omega_i = -\frac{\varepsilon_{jkl}}{10} \iint \frac{1}{\xi} \frac{\partial G(\xi,\tau)}{\partial \xi} (3\xi_i \xi_j - \xi^2 \delta_{ij}) \Omega_{kl}(\xi, \tau) d\xi d\tau . \tag{7.68}$$

Мы не приводим соответствующих формул для β_1 и β_2. Эти величины представляют меньший интерес, поскольку турбулентная электродвижущая сила $\mathcal{E}$, когда тензор b_{ijk} имеет вид (7.61), определяется выражением

$$\mathcal{E} = -\beta \mu \bar{j} - (\beta_2 + \beta_3) \operatorname{grad}(\Omega \cdot \bar{B}) + \mu \beta_3 \Omega \times \bar{j} . \tag{7.69}$$

Отметим, что β_1 не появляется здесь из-за соленоидальности магнитного поля, а коэффициент β_2 входит только в тот член, который является градиентом. Эта часть электродвижущей силы всегда компенсируется объемными зарядами и не влияет на магнитное поле.

Наиболее интересной деталью (7.69) является наличие электродвижущей силы $\mu\beta_3 \Omega \times j$, часто называемой $\Omega \times j$-эффектом. Этот член напоминает эффект Холла. Так же как и α-эффект, имеющий место при однородной, изотропной и зеркально-несимметричной турбулентности $\Omega \times j$ - эффект вызван спиральными движениями, но не требует различия вкладов движений правой или левой спиральности. Анизотропия в сочетании с пространственным изменением среднего магнитного поля создает средний ток, несмотря на равновероятность спиральных движений обоих типов.

Рассмотрим теперь интересный вопрос – возможно ли возбуждение динамо для рассматриваемой здесь турбулентности? Из формулы (7.27) можно видеть, что для этого надо найти корни уравнения

$$\det(p\delta_{il} + \varepsilon_{ikk} k_j k_m \beta_{klm}) = 0 \tag{7.70}$$

с $\operatorname{Re}(-i\omega) > 0$, $p = -i\omega + \eta_T k^2$.

Подставляя (7.62) в (7.70), сразу получим

$$\det(p\delta_{il} + \varepsilon_{ijk}k_j k_m \beta_{klm}) = p(p^2 + k^2(\Omega \cdot \mathbf{k})^2\beta_3^2) = 0 \qquad (7.71)$$

Из этого выражения видно, что не имеется корней с положительной реальной частью $-i\omega$. Таким образом, рассматриваемая турбулентность не может привести к возбуждению динамо. »

7.6. Двухмерная турбулентность

Определенный интерес представляет рассмотрение двухмерной турбулентности. Эта турбулентность обладает свойствами: 1) векторы скорости лежат в плоскостях, ортогональных заданному направлению $\mathbf{e}$ и 2) они не изменяются вдоль этого направления, т.е.

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (\mathbf{e} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{u}' = 0, \qquad (7.72)$$

или в пространстве Фурье

$$\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega) = \delta(\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})\hat{\mathbf{u}}^{(2)}(\tilde{\mathbf{k}}, \omega), \qquad (7.73)$$

где $$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})\mathbf{e}. \qquad (7.74)$$

Для корреляционного тензора, следовательно, имеем

$$Q_{ik}(\xi, \tau) = Q_{ik}^{(2)}(\tilde{\xi}, \tau), \quad e_i\, Q_{ik}^{(2)}(\tilde{\xi}, \tau) = 0,$$

$$e_k Q_{ik}^{(2)}(\tilde{\xi}, \tau) = 0, \quad \tilde{\xi} = \xi - (\mathbf{e} \cdot \xi)\mathbf{e}, \qquad (7.75)$$

или для образов Фурье

$$\hat{Q}_{ik}(\mathbf{k}, \tau) = \delta(\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})\hat{Q}_{ik}^{(2)}(\tilde{\mathbf{k}}, \omega), \quad e_i\, \hat{Q}_{ik}^{(2)}(\tilde{\mathbf{k}}, \omega) = 0,$$

$$e_k Q_{ik}^{(2)}(\tilde{\mathbf{k}}, \omega) = 0. \qquad (7.76)$$

В разд. 7.3 уже было показано, что двухмерная турбулентность не может возбуждать динамо. Обратим теперь наше внимание на тензор b_{ijk} и коэффициент двухмерной магнитной диффузии. Начнем с выражения (7.43), используя фурье-представление. Определяя дифференцирование в плоскости, ортогональной $\mathbf{e}$, выражением

$$\frac{\partial}{\partial k_i} = (\delta_{ij} - e_i e_j)\frac{\partial}{\partial k_j}, \qquad (7.77)$$

после частичного выполнения интегрирования можно написать

$$b_{ijk} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqj} \iint \left[\frac{\partial}{\partial \hat{k}_k}\left(\frac{k_n}{\eta k^2 - i\omega}\right) + \frac{e_k e_n}{\eta k^2 - i\omega} -\right.$$

$$- e_k k_n \frac{2\eta(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k})}{(\eta k^2 - i\omega)^2}]\hat{Q}_{lq}(\mathbf{k},\omega)d\mathbf{k}\,d\omega. \qquad (7.78)$$

Подставляя теперь тензор (7.76), легко получаем

$$b_{ijk} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{pqj}\iint \frac{\partial}{\partial \tilde{k}_k}\left(\frac{\tilde{k}_n}{\eta\tilde{k}^2 - i\omega}\right)\hat{Q}^{(2)}_{lq}(\tilde{\mathbf{k}},\omega)d\tilde{\mathbf{k}}\,d\omega +$$

$$+ e_j e_k \varepsilon_{ilq}\iint \frac{\hat{Q}^{(2)}_{lq}(\tilde{\mathbf{k}},\omega)}{\eta\tilde{k}^2 - i\omega}d\tilde{\mathbf{k}}\,d\omega, \qquad (7.79)$$

или, используя теорему Парсеваля (6.11),

$$b_{ijk} = -\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqj}\iint \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial G^{(2)}(\tilde{\xi},\tau)}{\partial\tilde{\xi}}\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}_n Q^{(2)}_{ql}(\tilde{\xi},\tau)d\tilde{\xi}\,d\tau -$$

$$-e_j e_k \varepsilon_{ilq}\iint G^{(2)}(\tilde{\xi},\tau)Q^{(2)}_{lq}(\tilde{\xi},\tau)d\tilde{\xi}\,d\tau. \qquad (7.80)$$

Величина $G^{(2)}(\tilde{\xi},\tau)$ представляет собой двухмерную функцию Грина и задается выражением

$$G^{(2)}(\tilde{\xi},\tau) = \frac{\mu\sigma}{4\pi\tau}\exp\left(-\frac{\mu\sigma\tilde{\xi}^2}{4\tau}\right). \qquad (7.81)$$

Интегрирование в (7.79) и (7.80) производится по плоскостям, ортогональным $\mathbf{e}$, т.е. по двухмерному многообразию.

Рассмотрим более детально случай двухмерной, изотропной и зеркально-симметричной турбулентности. В этом случае второй интеграл в (7.79) или (7.80), очевидно, не дает вклада, так как он зависит от величины $\overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)\cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{u}'(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi},t+\tau)}$, которая отлична от нуля только при неравном вкладе движений по и против часовой стрелки. Кроме того, тензор b_{ijk} может быть составлен только из компонент e_i, $\delta_{ij} - e_i e_j$, $\varepsilon_{ijl}e_l$ и, поскольку он антисимметричен, получаем единственно возможное представление

$$b_{ijk} = b_1 e_i \varepsilon_{jkl}e_l + b_2 e_j\varepsilon_{kil}e_l + b_3 e_k\varepsilon_{ijl}e_l \qquad (7.82)$$

с некоторыми постоянными b_1, b_2 и b_3. В зеркально-несимметричном случае возможны также слагаемые, составленные из компонент $e_i(\delta_{jk} - e_j e_k)$, ..., $e_i e_j e_k$.

Умножая (7.82) и (7.80) на e_k, находим, что $b_3 = 0$. Умножая на величины $\varepsilon_{jkp}e_p$ и $\varepsilon_{kip}e_p$, получаем, что

$$b_1 = b_2 = \beta^{(2)} = -\frac{1}{2}\iint \tilde{\xi}\frac{\partial G^{(2)}(\tilde{\xi},\tau)}{\partial\tilde{\xi}} f^{(2)}(\tilde{\xi},\tau)d\tilde{\xi}d\tau, \quad (7.83)$$

где $f^{(2)}$ является двухмерной продольной корреляционной функцией, определяемой выражением

$$\tilde{\xi}^2 f^{(2)}(\tilde{\xi},\tau) = \tilde{\xi}_k\tilde{\xi}_n Q_{kn}^{(2)}(\tilde{\xi},\tau), \quad (7.84)$$

которое аналогично трехмерному случаю [132]. Наконец, находим следующее выражение для турбулентной электродвижущей силы

$$\mathcal{E}_i = \beta^{(2)}(e_i\varepsilon_{jkl} + e_j\varepsilon_{kil})e_l\frac{\partial\bar{B}_j}{\partial x_k} = \beta^{(2)}(\delta_{kl} - e_k e_l)\varepsilon_{ijl}\frac{\partial\bar{B}_j}{\partial x_k}. \quad (7.85)$$

Если это выражение подставить в уравнение индукции для среднего поля, т.е. в уравнение

$$\frac{\partial\bar{B}_i}{\partial t} - \eta\Delta\bar{B}_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\mathcal{E}_k}{\partial x_j}, \quad (7.86)$$

то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial\bar{B}_i}{\partial t} - \eta\Delta\bar{B}_i = \beta^{(2)}(\delta_{jk} - e_j e_k)\frac{\partial^2\bar{B}_i}{\partial x_j\partial x_k}. \quad (7.87)$$

Это уравнение в общем случае описывает анизотропную диффузию. Существуют, однако, два случая, когда само среднее магнитное поле имеет двухмерную структуру. В первом случае магнитное поле параллельно вектору $\mathbf{e}$, т.е.

$$\bar{\mathbf{B}} = (\mathbf{e}\cdot\bar{\mathbf{B}})\mathbf{e} = \bar{B}\mathbf{e}, \qquad (\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad})\bar{B} = 0. \quad (7.88)$$

В этом случае единственная ненулевая компонента среднего магнитного поля $\bar{B}$ удовлетворяет двухмерному уравнению диффузии

$$\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} - \eta_T\Delta^{(2)}\bar{B} = 0, \quad (7.89)$$

где η_T является полным коэффициентом магнитной диффузии

$$\eta_T = \eta + \beta^{(2)}, \quad (7.90)$$

который определяется аналогично трехмерному случаю, а $\Delta^{(2)}$ – двухмерный оператор Лапласа

$$\Delta^{(2)} = (\delta_{ij} - e_i e_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{7.91}$$

Во втором случае магнитное поле имеет структуру турбулентного движения, т.е.

$$\mathbf{e} \cdot \overline{\mathbf{B}} = 0, \qquad (\mathbf{e} \cdot \nabla)\overline{\mathbf{B}} = 0, \tag{7.92}$$

поэтому, в частности,

$$\overline{B}_i = \tilde{\tilde{B}}_i = (\delta_{ij} - e_i e_j)\overline{B}_j.$$

В этом случае среднее магнитное поле $\overline{\mathbf{B}}$ также удовлетворяет двухмерному уравнению диффузии

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{B}}_i}{\partial t} - \eta_T \Delta^{(2)} \tilde{\tilde{B}}_i = 0. \tag{7.93}$$

Отметим в заключение, что не существует фундаментального различия между коэффициентом магнитной диффузии β в трехмерном случае и величиной $\beta^{(2)}$ в двухмерном случае. Это ясно видно из сравнения (7.83) и (5.62). Переходя, наконец, в (7.83) к пределу большой проводимости, аналогично трехмерному случаю в разд. 7.4, находим

$$\beta^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty Q_{kk}(0, \tau) d\tau = \frac{1}{2} \overline{u'^2} \tau_{\text{cor}}. \tag{7.94}$$

7.7. Корреляционные приближения высших порядков: рекуррентная формула Вайнштейна

Обозначим через $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ и $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)$ образы Фурье по пространственным координатам поля скоростей и магнитного поля. Как и раньше, считаем среднюю скорость равной нулю. Уравнение индукции при этом принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{B}_i}{\partial t} + \eta k^2 \tilde{B}_i = i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} k_j (\tilde{u}_l * \tilde{B}_m), \tag{7.95}$$

где звездочка означает операцию свертки, введенную в (6.7).

Представим магнитное поле $\tilde{\mathbf{B}}$ в виде ряда

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{B}}^{(n)}(\mathbf{k}, t), \tag{7.96}$$

где

$$\tilde{B}_i^{(0)}(\mathbf{k}, t) = \tilde{B}(\mathbf{k}) \exp(-\eta k^2 t) \tag{7.97}$$

и

$$\frac{\partial \tilde{B}_i^{(n)}}{\partial t} + \eta k^2 \tilde{B}_i^{(n)} = i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} k_j (\tilde{u}_l * \tilde{B}_m^{(n-1)}),$$

$$\tilde{B}_i^{(n)}(\mathbf{k}, 0) = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{7.98}$$

Из выражений (7.96), (7.97) и (7.98), очевидно, следует, что поле $\tilde{\mathbf{B}}$, определяемое из (7.96), в случае сходимости ряда является решением уравнения индукции (7.95).

Уравнение (7.98) можно записать в интегральной форме

$$\tilde{B}_i^{(n)} = i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} k_j \int_0^t \exp[-\eta k^2 (t - t')] (\tilde{u}_l * \tilde{B}_m^{(n-1)}) dt', \quad n \geqslant 1. \tag{7.99}$$

Применяя эту формулу дважды, получим

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i^{(n)}(\mathbf{k}, t) = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqr} k_j \int_0^t \int_0^{t'} \int\int \tilde{u}_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t') \times \\ \times k_n' \tilde{u}_q(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'', t'') \tilde{B}_r^{(n-2)}(\mathbf{k}'', t'') \exp\{-\eta[k^2(t - t') + \\ + k'^2(t' - t'')]\} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' dt' dt''. \end{aligned} \tag{7.100}$$

Последовательно подставляя $\tilde{\mathbf{B}}^{(n-3)}$, $\mathbf{B}^{(n-4)}$ и т.д., можно в конце концов прийти к представлению $\tilde{\mathbf{B}}^{(n)}$ через $\tilde{\mathbf{B}}^{(0)}$.

Нас интересует среднее значение $\overline{\tilde{\mathbf{B}}^{(n)}}$. Ограничиваясь только основными членами, получим следующее выражение:

$$\overline{\tilde{B}_i^{(n)}} = \int_0^t \int_0^{t'} \cdots \int_0^{t^{(n-1)}} \cdots \overline{\tilde{u}(t')\tilde{u}(t'') \cdots \tilde{u}(t^{(n)})} \cdots \tilde{B}^{(0)}(t^{(n)}) \cdots dt' dt'' \cdots dt^{(n)}. \tag{7.101}$$

Следуя работе Вайнштейна [281] (см. также [100]), рассмотрим гауссовское распределение поля скоростей, для которого все кор-

реляционные тензоры нечетного порядка равны нулю, а тензоры четного порядка равны сумме произведений всевозможных парных корреляторов:

$$\overline{\tilde{u}_{i_1}(t')\tilde{u}_{i_2}(t'')\ldots\tilde{u}_{i_{2n}}(t^{(2n)})} = \Sigma\Pi\overline{\tilde{u}_{i_\alpha}(t^{(\alpha)})\tilde{u}_{i_\beta}(t^{(\beta)})}. \qquad (7.102)$$

В этом случае слагаемые ряда (7.96) с нечетными номерами равны нулю

$$\overline{\tilde{B}^{(2n+1)}} = 0. \qquad (7.103)$$

Для слагаемых с четными номерами (7.101) и (7.102) получаем выражение

$$\overline{\tilde{B}_i^{(2n)}} = \int_0^t\int_0^{t'}\ldots\int_0^{t^{(2n-1)}} \Sigma\Pi\overline{\tilde{u}_{i_\alpha}(\mathbf{k}^{(\alpha)}, t^{(\alpha)})\tilde{u}_{i_\beta}(\mathbf{k}^{(\beta)}, t^{(\beta)})}\tilde{B}^{(0)}dt'\ldots, \qquad (7.104)$$

где важной является последовательность времен

$$t \geqslant t' \geqslant t'' \geqslant \ldots \geqslant t^{(2n-1)} \geqslant t^{(2n)}. \qquad (7.105)$$

Кроме требования гауссовского распределения поля скоростей Вайнштейн предполагает также, что время корреляции гораздо короче всех характерных масштабов времени, и берет корреляционный тензор второго ранга в виде

$$Q_{kl}(\xi, \tau) = 2\tau_{cor}\delta(\tau)\,Q_{kl}(\xi), \qquad (7.106)$$

где $Q_{kk}(0) = \overline{u'^2}$.

Из формулы (7.104) получим теперь

$$\overline{\tilde{B}_i^{(2n)}} = \int_0^t\int_0^{t'}\ldots\int_0^{t^{(2n-1)}} \Sigma\Pi\tilde{Q}_{i_\alpha i_\beta}(\mathbf{k}^{(\alpha)} - \mathbf{k}^{(\beta)})\,\delta(t^{(\alpha)} - t^{(\beta)})\ldots\tilde{B}^{(0)}dt'\ldots, \qquad (7.107)$$

где $\tilde{Q}_{kl}$ является образом Фурье величины Q_{kl}, введенной в (7.106).

Выражение (7.107) легко вычисляется: существует только одно слагаемое в подынтегральном выражении с аргументами $t^{(\alpha)}$, расположенными в естественном порядке, согласно (7.105). Во всех остальных слагаемых существует по крайней мере одна пара $t^{(\alpha)}$, $t^{(\beta)}$, для которой индексы α и β не являются соседними. В этом

случае имеем

$$\int_0^{t^{(\beta-1)}} \delta(t^{(\alpha)} - t^{(\beta)})dt^{(\beta)} = \begin{cases} 0, & t^{(\beta-1)} < t^{(\alpha)}; \\ \frac{1}{2}, & t^{(\beta-1)} = t^{(\alpha)}. \end{cases} \quad (7.108)$$

Это выражение исчезает, если выполнить интегрирование по $t^{(\beta-1)}$. Таким образом, от суммы под знаком интеграла остается только один член

$$\overline{B_i^{(2n)}} = \int_0^t \int_0^{t'} \dots \int_0^{t^{(2n-1)}} \dots \tilde{Q}_{i_1 i_2}(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{k}^{(2)})\delta(t' - t'') \times$$

$$\times \tilde{Q}_{i_3 i_4}(\mathbf{k}^{(3)} - \mathbf{k}^{(4)})\delta(t^{(3)} - t^{(4)}) \dots \tilde{B}^{(0)}dt' \dots . \quad (7.109)$$

Из структуры формулы (7.109) видно, что величина $\tilde{Q}_{i_1 i_2}$ совершенно не связана со следующими за ней множителями, которые представляют собой среднее значение $\tilde{B}^{(2n-2)}$. Мы приходим, таким образом, к рекуррентной формуле

$$\overline{\tilde{B}_i^{(2n)}(\mathbf{k}, t)} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{pqr}k_j \int_0^t \int_0^{t'} \iint k'_n \overline{\tilde{u}_l(\mathbf{k}-\mathbf{k}', t')} \times$$

$$\times \overline{\tilde{u}_q(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'', t'')}\,\overline{\tilde{B}_r^{(2n-2)}(\mathbf{k}'', t'')}\exp\{-\eta[k^2(t-t') +$$

$$+ k'^2(t-t'')]\}d\mathbf{k}'d\mathbf{k}''dt'dt'' . \quad (7.110)$$

Учитывая, что согласно (6.18) и (7.106),

$$\overline{\tilde{u}_l(\mathbf{k}-\mathbf{k}', t')\tilde{u}_q(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'', t'')} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')\delta(t'-t'')\tilde{Q}_{lq}(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')2\tau_{cor}, \quad (7.111)$$

и выполняя интегрирования, получаем

$$\overline{\tilde{B}_i^{(2n+2)}(\mathbf{k}, t)} = -\int_0^t A_{ip}\exp[-\eta k^2(t-t')]\overline{\tilde{B}_p^{(2n)}(\mathbf{k}, t')}dt', \quad (7.112)$$

где

$$A_{ip} = \tau_{cor}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnr}\varepsilon_{rqp}k_j \int k'_n\tilde{Q}_{lq}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})d\mathbf{k}' . \quad (7.113)$$

При изотропных условиях выполняется

$$\tau_{cor}\int k'_n Q_{lq}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})d\mathbf{k}' = \tau_{cor}[k_n\int\tilde{Q}_{lq}(\mathbf{k}')d\mathbf{k}' + \int k'_n\tilde{Q}_{lq}(\mathbf{k}')d\mathbf{k}'] =$$

$$= \beta k_n\delta_{lq} - \frac{i}{2}\alpha\varepsilon_{nlq} . \quad (7.114)$$

Умножая это выражение последовательно на δ_{lq} и ε_{nlq}, легко получаем

$$\beta = \frac{\tau_{cor}}{3}\int \tilde{Q}_{qq}(\mathbf{k}')d\mathbf{k}' = \frac{\tau_{cor}}{3} Q_{qq}(0) = \frac{1}{3}\,\overline{u'^2}\,\tau_{cor}, \quad (7.115)$$

$$\alpha = \tau_{cor}\frac{i}{3}\int \varepsilon_{nlq}k'_n\tilde{Q}_{lq}(\mathbf{k}')d\mathbf{k}' = \frac{\tau_{cor}}{6}\varepsilon_{nlq}\frac{\partial Q_{lq}}{\partial \xi_n}\Big|_{\xi=0} =$$

$$= -\frac{\tau_{cor}}{3}\varepsilon_{lnq}\overline{u'_l(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u'_q(\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial \xi_n}}\Big|_{\xi=0} = -\frac{1}{3}\overline{\mathbf{u}'\cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{u}'}\tau_{cor}. \quad (7.116)$$

Подставляя (7.114) в (7.113), получим

$$A_{jp} = -i\alpha\varepsilon_{jqp}k_q + \beta(k^2\delta_{jp} - k_j k_p). \quad (7.117)$$

Чтобы прийти к окончательной интерпретации результатов продифференцируем рекуррентную формулу (7.112) по времени

$$\frac{\partial \overline{\tilde{B}_i^{(2n+2)}}}{\partial t} = -A_{ip}\overline{\tilde{B}_p^{(2n)}} - k^2\overline{\tilde{B}_i^{(2n+2)}}. \quad (7.118)$$

Суммируя эти выражения и учитывая, что

$$\frac{\partial \overline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(0)}}{\partial t} = -\eta k^2\overline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(0)},$$

получаем уравнение для среднего магнитного поля

$$\frac{\partial \overline{\tilde{B}}_i}{\partial t} = -A_{ip}\overline{\tilde{B}}_p - \eta k^2\overline{\tilde{\mathbf{B}}}_i, \quad (7.119)$$

которое в изотропном случае принимает вид

$$\frac{\partial \overline{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)}}{\partial t} = -(\eta+\beta)k^2\overline{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)} + i\alpha\mathbf{k}\times\overline{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)}, \quad (7.120)$$

или в координатном представлении

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\alpha\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) + (\eta+\beta)\Delta\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t). \quad (7.121)$$

Это уравнение показывает, что действие турбулентности сводится к появлению электродвижущей силы $\mathcal{E}$, задаваемой формулами (3.5)

или (5.37). Но главным является то, что величины α и β в точности такие же, как в рамках корреляционного приближения второго порядка в пределе большой проводимости [см. (3.31) и (3.32)].

7.8. Дисперсионное соотношение

Как уже отмечалось в разд. 5.1, для применений теории средних полей уместно считать, что турбулентность является двухмасштабной. Иначе говоря, использование эргодической теоремы является проблематичным. Кроме того, двухмасштабная турбулентность приводит к математическим упрощениям (возможность разложения среднего поля в ряд), которые позволяют провести более детальные исследования. В случае однородной турбулентности существует, однако, математическая процедура, впервые предложенная Лерхе [145, 150], которая является альтернативной к методу разложения в ряд.

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение (4.50), выведенное в рамках корреляционного приближения второго порядка. Для случая однородной турбулентности и отсутствия среднего течения оно имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta\right)\bar{B}_i(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{pqr}\frac{\partial}{\partial x_j}\int\int\frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi_n} \times$$

$$\times Q_{ql}(\xi, \tau)\bar{B}_r(\mathbf{x} - \xi, t - \tau)d\xi d\tau. \qquad (7.122)$$

Поскольку интеграл в правой части является интегралом типа свертки, то уравнение принимает особенно простую форму для фурье-преобразованных величин, а именно:

$$[p\delta_{jq} - A_{jq}(\mathbf{k}, \omega)]\hat{\bar{B}}_q(\mathbf{k}, \omega) = 0, \qquad (7.123)$$

где $p = -i\omega + \eta k^2$ (7.124)

и

$$A_{jq}(\mathbf{k}, \omega) = i\varepsilon_{jsk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{prq}k_s\int\int\frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi_n}Q_{rl}(\xi, \tau) \times$$

$$\times \exp[-i(\mathbf{k}\cdot\xi - \omega\tau)]d\xi d\tau. \qquad (7.125)$$

Нетривиальные решения уравнения (7.123) существуют, только если

$$\det[p\delta_{jq} - A_{jq}(\mathbf{k}, \omega)] = 0. \qquad (7.126)$$

Соотношение (7.126) представляет собой дисперсионное уравнение для нахождения ω при заданном значении вектора $\mathbf{k}$.

Прежде всего замечаем, что для малых $\mathbf{k}$ это уравнение совпадает с дисперсионным уравнением для случая двухмасштабной турбулентности, которое рассматривалось в разд. 7.3 и 7.5. Легко проверить, что во втором порядке по $\mathbf{k}$

$$A_{jr} = i\varepsilon_{jsk}a_{kr}k_s - \varepsilon_{jsk}k_s k_p b_{krp}, \tag{7.127}$$

где тензоры a_{kr} и b_{krp} задаются формулами (7.1) и (7.43).

Во-вторых, интеграл в (7.125) с точностью до множителя $(2\pi)^{-4}$ является образом Фурье величины $Q_{rl}\partial G/\partial\xi_n$. Поэтому можно переписать эту формулу, используя (6.7) и (6.57), в следующем виде

$$A_{jr}(\mathbf{k}, \omega) = -\varepsilon_{js}k^{\varepsilon}{}_{kl}n^{\varepsilon}{}_{mnp}\varepsilon_{pqr}k_s \int\int \frac{(k_n - k_n')\hat{Q}_{ql}(\mathbf{k}', \omega')}{\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 - i(\omega - \omega')}d\mathbf{k}'d\omega' \tag{7.128}$$

Отсюда получим, что $A_{jr} = O(1)$ при $k \to \infty$, т.е. дисперсионное уравнение имеет решение $p = 0$ или $-i\omega = -\eta k^2$ для $k \to \infty$. Этот результат является очевидным из физических соображений: процесс разрушения коротковолновых фурье-мод не подвержен влиянию турбулентного движения.

Едва ли можно получить решение уравнения (7.128) в общем случае для произвольных значений $\mathbf{k}$. Поэтому ограничимся случаем изотропной, зеркально-симметричной турбулентности. Так как $k_i A_{ij} = 0$, то имеем

$$A_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = a(\mathbf{k}, \omega)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right), \tag{7.129}$$

и дисперсионное уравнение просто означает, что $p = a$, если исключить неинтересное решение $p = 0$. Таким образом, производя суммирование в (7.125), получаем

$$p = i k_j \int\int \frac{1}{\xi} \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} \xi_k Q_{jk}(\xi, \tau)\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\xi - \omega t)]d\xi d\tau \tag{7.130}$$

или, если использовать определение (5.61) для продольной корреляционной функции,

$$p = i \iint \frac{(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi})}{\xi} \frac{\partial G(\xi,\tau)}{\partial \xi} f(\xi,\tau)\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}-\omega\tau)]d\xi d\tau = \tag{7.131}$$

$$= -k\frac{\partial}{\partial k}\int\int \frac{1}{\xi}\frac{\partial G(\xi,\tau)}{\partial \xi} f(\xi,\tau)\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}-\omega\tau)]d\xi d\tau.$$

Можно найти эквивалентное представление для дисперсионного уравнения, если определить величину a из формулы (7.128). Получаем при этом

$$p = -\int\int \frac{k_j(k_k - k'_k)Q_{jk}(\mathbf{k}',\omega')}{\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 - i(\omega-\omega')} d\mathbf{k}' d\omega' =$$

$$= -\int\int \frac{k_j(k_j - k'_j)}{\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 - i(\omega-\omega')} \hat{f}(k',\omega')d\mathbf{k}' d\omega'. \tag{7.132}$$

Эта форма дисперсионного соотношения наиболее полезна при исследовании интересного вопроса о существовании растущих решений, т.е. решений с положительным значением $\mathrm{Re}(-i\omega)$. Представим частоту в виде $\omega = \omega_r + i\omega_i$, так что $\mathrm{Re}(-i\omega) = \omega_i$.

Предположим сначала, что жидкость несжимаемая, так что уравнение (7.132) приобретает вид

$$-i\omega = -\eta k^2 - \iint \frac{k_j k_k \hat{Q}_{jk}(\mathbf{k}',\omega')}{\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 - i(\omega-\omega')} d\mathbf{k}' d\omega'. \tag{7.133}$$

Затем предположим, что существует корень, для которого $\mathrm{Re}(-i\omega) = \omega_i \geqslant 0$. В этом случае можно выбрать в качестве ω'-контура вещественную ось. Возьмем вещественную часть от обеих сторон выражения (7.133)

$$\mathrm{Re}(-i\omega) = \omega_i = -\eta k^2 - \int\int \frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + \omega_i}{\eta^2(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^4 + (\omega-\omega')^2} k_j k_k \hat{Q}_{jk}(\mathbf{k}',\omega')d\mathbf{k}' d\omega'. \tag{7.134}$$

В этой связи следует заметить, что в зеркально-симметричном случае по определению

$$\hat{Q}_{jk}(-\mathbf{k},\omega) = \hat{Q}_{jk}(\mathbf{k},\omega). \tag{7.135}$$

Совместно с (6.19) и (6.20) это показывает, что $\hat{Q}_{jk}$ является вещественной величиной.

Левая сторона (7.134) по предположению положительно определенная, а правая, согласно теореме Бохнера (6.25), является отрицательно определенной. Это противоречие доказывает, что первоначальное предположение $\mathrm{Re}(-i\omega) = \omega_i \geqslant 0$ неверно [128, 129].

Рассматривая предел большой проводимости, $\mu\sigma\lambda_{\text{cor}}^2 \gg \tau_{\text{cor}}$, замечаем, что слагаемое $\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2$ в знаменателе дает заметный вклад, только если $k^2 > \mu\sigma/\tau_{\text{cor}}$. Кроме того, поскольку величина $\hat{Q}_{jk}(\mathbf{k}', \omega')$ существенно отлична от нуля только при $k'^2 \leqslant 1/\lambda_{\text{cor}}^2 \ll \mu\sigma/\tau_{\text{cor}}$, можно упростить дисперсионное уравнение (7.132) и написать

$$-i\omega = -\eta k^2 - \iint \frac{k_j k_k \hat{Q}_{jk}(\mathbf{k}', \omega')}{\eta k^2 - i(\omega - \omega')}\, d\mathbf{k}'\, d\omega. \tag{7.136}$$

Теперь можно использовать те же рассуждения, что и при анализе формулы (7.134). Предполагая $\omega_i \geqslant 0$, получаем, что вещественная часть левой стороны (7.136) положительно определена, в то время как правая часть вследствие теоремы Бохнера отрицательна.

Следующие оценки показывают, что в рамках корреляционного приближения второго порядка вообще нельзя найти растущие решения.

Для любой однородной, изотропной и зеркально-симметричной турбулентности фурье-образ корреляционного тензора может быть записан в виде

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}(k, \omega)(k^2\delta_{ij} - k_i k_j) + \hat{Q}'(k, \omega)k_i k_j, \tag{7.137}$$

причем вследствие теоремы Бохнера (6.36) выполняются соотношения

$$\hat{Q}(k, \omega) \geqslant 0, \qquad \hat{Q}'(k, \omega) \geqslant 0. \tag{7.138}$$

Из приведенного выше исследования случая турбулентности в несжимаемой среде становится ясным, что первое слагаемое в выражении (7.137) всегда дает отрицательный вклад в величину ω_i. Поэтому наиболее благоприятным случаем для растущих решений является потенциальное случайное поле, когда $\hat{Q} = 0$ и $\hat{Q}' = \hat{\Phi} \geqslant 0$ (в обозначениях разд. 6.6). Дисперсионное уравнение (7.132) при этом упрощается

$$p = \iint \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')(k'^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'))}{\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 - i(\omega - \omega')} \hat{\Phi}(k', \omega')\, d\mathbf{k}'\, d\omega'. \tag{7.139}$$

Предполагая снова $\omega_i > 0$, получим

$$\omega_i = \eta k^2 \Big[-1 + \frac{1}{\eta k^2} \iint \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')(k'^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'))(\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + \omega_i)}{(\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + \omega_i)^2 + (\omega_r - \omega')^2} \times$$

$$\times \hat{\Phi}(k', \omega') dk' d\omega' \Big], \qquad (7.140)$$

где ω' – контур является вещественной осью. Условие $\omega_i > 0$ требует выполнения неравенства

$$\frac{1}{\eta k^2} \iint \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')(k'^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'))(\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + \omega_i)}{(\eta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + \omega_i)^2 + (\omega_r - \omega')^2} \hat{\Phi}(k', \omega') dk' d\omega > 1. \qquad (7.141)$$

Анализ подынтегрального выражения показывает, что область $|\mathbf{k}'| \ll |\mathbf{k}|$ дает всегда отрицательный вклад. То же самое верно для $|\mathbf{k}'| \approx |\mathbf{k}|$: подынтегральное выражение отрицательно для $\mathbf{k}' \approx -\mathbf{k}$, положительно, но мало по величине для $\mathbf{k}' \approx \mathbf{k}$, поэтому в целом получается отрицательный вклад. Следовательно, можно полагать, что $\hat{\Phi}(\mathbf{k}', \omega') \approx 0$ в области $|\mathbf{k}'| < |\mathbf{k}|$ и $\hat{\Phi}(\mathbf{k}', \omega') > 0$ для $|\mathbf{k}'| \gg$ Но область, где $\Phi > 0$, характеризуется также условием $|\mathbf{k}'| \approx 1/\lambda_c$ так что наиболее благоприятной ситуацией для существования растущих мод является $1/\lambda_{cor} \gg |\mathbf{k}|$, т.е. случай двухмасштабной турбулентности. В разд. 7.4, однако, было уже показано, что в случае двухмасштабной турбулентности не существуют растущие моды. Следовательно, можно заключить: в рамках корреляционного приближения второго порядка нет оснований считать, что однородная, изотропная и зеркально-симметричная турбулентность может возбуждать динамо.

Однако имеются утверждения, что растущие моды могут появляться в рамках приближений более высокого порядка. Казанцев [100] пришел к такому результату, используя диаграммную технику. Гораздо более определенные выводы получили Гайлитис [72] и Крейчнан [110], рассматривая возбуждение динамо флуктуациями спиральности в однородной, изотропной и зеркально-симметричной турбулентности. Проверить это можно только в корреляционном приближении не ниже четвертого порядка.

Гаилитис [72] рассматривал двухмасштабную турбулентность. Предполагалось наличие турбулентных элементов с масштабами $\lambda_{cor,1}, \tau_{cor,1}$ и $\lambda_{cor,2}, \tau_{cor,2}$, связанных условиями $\lambda_{cor,1} \gg \lambda_{cor}$

и $\tau_{cor,1} \gg \tau_{cor,2}$. Согласно результатам, которые будут получены в дальнейшем (гл. 9), мелкомасштабная турбулентность, внедренная в один вихрь крупномасштабной турбулентности, по-видимому, приводит к спиральности. Таким образом, большой вихрь может действовать как динамо, возбуждающее магнитное поле с характерным масштабом длины $\lambda_{cor,1}$.

Крейчнан [108, 110] следовал более дедуктивному пути. Он получил в четвертом порядке отрицательный вклад в коэффициент турбулентной магнитной диффузии, обусловленный флуктуациями спиральности. Вполне возможно, что при соответствующем выборе характерных масштабов отрицательный вклад станет преобладающим, приводя, таким образом, к растущим модам.

Отметим, наконец, обширное исследование дисперсионного уравнения, выполненное в работе [82].

7.9. Средний квадрат флуктуирующего магнитного поля

Предположим, что магнитное поле постоянно. Тогда в рамках корреляционного приближения второго порядка флуктуации магнитного поля описываются следующим уравнением индукции:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta\right)B_i' = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\bar{B}_m\frac{\partial u_l'}{\partial x_j}, \tag{7.142}$$

или в пространстве Фурье

$$(-i\omega + \eta k^2)\hat{B}_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\bar{B}_m i k_j \hat{u}_l. \tag{7.143}$$

Отсюда получаем выражение для корреляционного тензора B_{in}, введенного в (4.5):

$$B_{in}(\xi, \tau) = \int\int\int\int \overline{\hat{B}_i(\mathbf{k}, \omega)\hat{B}_n(\mathbf{k}', \omega')}\exp[i(\mathbf{x}(\mathbf{k}+\mathbf{k}') - t(\omega+\omega'))] \times$$

$$\times \exp[i(\mathbf{k}'\xi - \omega' t)]d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega' = \tag{7.144}$$

$$= -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{npq}\varepsilon_{qrs}\int\int\int\int \frac{k_j k_p' \overline{\hat{u}_l(\mathbf{k}, \omega)\hat{u}_r(\mathbf{k}', \omega')}}{(\eta k^2 - i\omega)(\eta k'^2 - i\omega')} \times$$

$$\times \exp[i(\mathbf{x}(\mathbf{k}+\mathbf{k}') - t(\omega+\omega'))]\exp[i(\mathbf{k}'\xi - \omega' t)]d\mathbf{k}d\omega d\mathbf{k}'d\omega' \bar{B}_m \bar{B}_s.$$

Подставляя сюда (6.18), получим [30]

$$B_{in}(\xi, \tau) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{npq}\varepsilon_{qrs}\int\int \frac{k_j k_p}{\eta^2 k^4 + \omega^2}\hat{Q}_{lr}(\mathbf{k}, \omega) \times$$

$$\times \exp[i(\mathbf{k}\xi - \omega\tau)]d\mathbf{k}d\omega\bar{B}_m\bar{B}_s. \qquad (7.145)$$

Из этой формулы находим для среднего квадрата флуктуаций магнитного поля

$$\overline{B'^2} = B_{ii}(0, 0) = q_{ms}\bar{B}_m\bar{B}_s, \qquad (7.146)$$

где

$$q_{ms} = \int\int[\hat{Q}_{ll}(\mathbf{k}, \omega)k_m k_s - \hat{Q}_{sq}(\mathbf{k}, \omega)k_m k_q - \hat{Q}_{lm}(\mathbf{k}, \omega)k_l k_s +$$

$$+ \delta_{ms}\hat{Q}_{lq}(\mathbf{k}, \omega)k_l k_q]\frac{d\mathbf{k}d\omega}{\eta^2 k^4 + \omega^2}. \qquad (7.147)$$

Для изотропной турбулентности, очевидно, $q_{ms} = q\delta_{ms}$. Выполняя суммирование, получаем из (7.147)

$$q = \frac{1}{3}\int\int \frac{k^2\hat{Q}_{ll}(\mathbf{k}, \omega) + k_l k_q\hat{Q}_{lq}(\mathbf{k}, \omega)}{\eta^2 k^4 + \omega^2} d\mathbf{k}d\omega. \qquad (7.148)$$

Теорема Бохнера гарантирует положительность величины q.

Теперь мы можем строго доказать соотношения (3.81) и (3.87). Для простоты примем $\mathrm{div}\mathbf{u}' = 0$. В этом случае из (7.148) следует при $\eta \to \infty$

$$q \approx \frac{1}{3\eta^2}\int\int \frac{\hat{Q}_{ll}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2} d\mathbf{k}d\omega \approx \frac{1}{3\eta^2}u'^2\lambda_{\mathrm{cor}}^2 = \frac{1}{3}\mathrm{Rm}^2 \qquad (7.149)$$

в согласии с (3.88). В пределе большой проводимости $\eta \to 0$, подставляя $\omega = \eta w$ в (7.148), получим

$$q \approx \frac{1}{3\eta}\int\int \frac{k^2\hat{Q}_{ll}(k, 0)}{k^4 + w^2} d\mathbf{k}dw = \frac{\pi}{3\eta}\int\hat{Q}_{ll}(k, 0)d\mathbf{k} =$$

$$= \frac{1}{3\eta}\int \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t + \tau)}d\tau \approx \frac{\beta}{\eta} \approx \frac{\eta_T}{\eta}. \qquad (7.150)$$

к подобному же результату пришел Лоу [161]. Отметим интересную интерпретацию соотношения (7.151). Из (7.146) и (7.150) следует, что

$$\overline{B'^2} : \bar{B}^2 = \eta_T : \eta . \qquad (7.151)$$

Левая часть этого выражения представляет собой отношение магнитной энергии, накопленной в флуктуациях, к энергии, заключенной в среднем магнитном поле. Это отношение велико, если велико отношение коэффициента турбулентной магнитной диффузии к коэффициенту молекулярной магнитной диффузии. Согласно данным разд. 3.11, для Солнца $\eta_T \approx 10^4 \eta$. Это означает, что энергия магнитных флуктуаций в десять тысяч раз больше энергии, запасенной в среднем магнитном поле.

Для среднеквадратичных значений флуктуаций магнитного поля на поверхности Солнца находим

$$B' : \bar{B} \approx 100. \qquad (7.152)$$

Это отношение поясняет, насколько трудно надежно вычислить величину среднего магнитного поля на поверхности Солнца из наблюдаемых его значений.

Глава 8. ТУРБУЛЕНТНАЯ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ПРИ НАЛИЧИИ СРЕДНЕГО ТЕЧЕНИЯ

8.1. Вводные замечания

Рассмотрение, проведенное в предыдущей главе, уже привело к ряду важных результатов, расширив, таким образом, представление о предмете. Однако, что касается применений к космической физике, то предположения об однородности и наличии среднего течения оказываются несправедливыми для тех задач, которые мы хотим решать. Наиболее наглядным примером в этом отношении является конвекция во внешней части Солнца. В конвективной зоне Солнца все физические величины, такие, как давление, температура, плотность массы и т.д., сильно зависят от радиальной координаты. Поэтому конвекцию необходимо рассматривать как анизотропную и неоднородную, зависящую от этой координаты. Более того, турбулентное конвективное движение испытывает влияние вращения, т.е. имеется среднее движение Следовательно, желательно развить теорию в двух направлениях: во-первых, с учетом среднего течения и, во-вторых, с учетом более общих, особенно "неоднородных", моделей турбулентности.

Как показано в гл. 4, для развития теории в первом направлении необходимо уметь определять тензор Грина при наличии среднего течения, что является задачей, которая вряд ли может быть решена в общем виде. Однако для течений с постоянными скоростями деформаций тензор Грина может быть представлен почти в явном виде [112, 113, 117, 120]. На основе этого представления уже могут быть получены существенные результаты, поскольку, во-первых, вращательное движение – это движение с постоянными скоростями деформаций и, во-вторых, в случае двухмасштабной турбулентности движение такого типа может быть хорошим приближением для произвольного движения.

Что касается развития теории с учетом более общих моделей турбулентности, то здесь будут приведены некоторые примеры неоднородной турбулентности, испытывающей влияние сил Кориолиса. Следует отметить, что мы подошли к вопросу, который все еще недостаточно

исследован. Поэтому представленные здесь результаты, особенно количественные, имеют ограниченное применение.

8.2. Тензор Грина для течений с постоянными скоростями деформаций

Представим поле скорости в виде

$$u_i = u_{ij} x_j + u_{0i}, \quad u_{ij}, u_{0i} \text{ — постоянные}, \tag{8.1}$$

а также введем тензор $\gamma_{ij}(t)$:

$$\dot{\gamma}_{ij} = u_{ik}\gamma_{kj}, \quad \gamma_{ij}(0) = \delta_{ij}. \tag{8.2}$$

В соответствии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений очевидно, что γ_{ij} существует и определяется единственным образом. Так, например, для сдвигового течения

$$u_1 = \omega^* x_2, \qquad u_2 = u_3 = 0, \tag{8.3}$$

имеем:

$$\gamma_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \omega^* t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Для вращательного движения

$$u = \Omega \times x, \quad \Omega = \text{const}, \tag{8.5}$$

получим

$$\gamma_{ij}(t) = \frac{1}{\Omega^2}[\Omega_i \Omega_j + (\Omega^2 \delta_{ij} - \Omega_i \Omega_j)\cos \Omega t] - \varepsilon_{ijp}\frac{\Omega_p}{\Omega}\sin \Omega t. \tag{8.6}$$

При $t \to 0$, ограничиваясь первым порядком, можно написать:

$$\gamma_{ij}(t) = \delta_{ij} + u_{ij} t, \tag{8.7}$$

что справедливо для общего типа движения (8.1).

Заметим, что

$$\gamma_{ij}(t_1 + t_2) = \gamma_{ik}(t_1)\gamma_{kj}(t_2), \tag{8.8}$$

$$\gamma_{ij}(-t) = \gamma_{ij}^{-1}(t), \tag{8.9}$$

$$u_{ij}\gamma_{jk}(t) = \gamma_{ij}(t) u_{jk}. \tag{8.10}$$

Соотношение (8.8) очевидно, так как оба тензора $\tilde{\gamma}_{ij}(t) = \gamma_{ij}(t + t_2)$ и $\overset{*}{\gamma}_{ij}(t) = \gamma_{ik}(t)\gamma_{kj}(t_2)$ удовлетворяют уравнению (8.2) с начальным

условием $\tilde{\gamma}_{ij}(0) = \overset{*}{\gamma}_{ij}(0) = \gamma_{ii}(t_2)$, т.е. тождественны друг другу. Если в (8.8) положить $t_1 = -t_2 = -t$, то сразу получается соотношение (8.9). Дифференцируя соотношение $\gamma_{ij}(t)\gamma_{jk}(-t) = \delta_{ik}$, получим

$$\dot{\gamma}_{ij}(t)\gamma_{jk}(-t) - \gamma_{ij}(t)\dot{\gamma}_{jk}(-t) = 0,$$

а используя (8.2), можно написать

$$\gamma_{ik}(-t)[\, u_{il}\gamma_{lj}(t) - \gamma_{il}(t)u_{lj}\,] = 0,$$

Откуда и следует соотношение (8.10).

Для определителя $\gamma = \det(\gamma_{ij})$ с учетом соотношения (8.9) имеем $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{ij}(t)\gamma_{ji}(-t)\gamma(t)$. На основании выражения (8.2) получим

$$\dot{\gamma}(t) = u_{ik}\gamma_{kj}(t)\gamma_{ji}(-t)\gamma(t) = u_{ii}\gamma(t), \tag{8.11}$$

или окончательно

$$\gamma(t) = \exp(\operatorname{div}\mathbf{u}\cdot t). \tag{8.12}$$

Уравнение движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u} \tag{8.13}$$

при $\mathbf{u}$, заданном выражением (8.1), может быть проинтегрировано:

$$x_i(t) = \gamma_{ij}(t)x_{0j} + \int_0^t \gamma_{ij}(\tau)\,d\tau\, u_{0j}. \tag{8.14}$$

Используя (8.2) и (8.14), найдем

$$\dot{x}_i = \dot{\gamma}_{ij}x_{0j} + \gamma_{ij}u_{0j} = u_{ik}[\, x_k - \int_0^t \gamma_{kj}(\tau)\,d\tau\, u_{0j}\,] +$$

$$+ \gamma_{ij}u_{0j} = u_{ik}x_k + u_{0j}[\,\gamma_{ij} - \int_0^t \dot{\gamma}_{ij}(\tau)\,d\tau\,] = u_{ik}x_k + u_{0i},$$

подтверждая, таким образом, сделанное выше утверждение.

Выражение (8.14) описывает траекторию частицы, движущейся вместе с потоком, которая находилась в точке $\mathbf{x}_0$ при $t = 0$. Таким образом, можно ввести сопутствующие координаты $\mathbf{x}'$

$$x'_i = \gamma_{ij}(-t)x_j + \int_0^{-t} \gamma_{ij}(\tau)\,d\tau\, u_{0j} \tag{8.15}$$

и записать уравнения для магнитного поля в виде

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = (-\operatorname{div}\mathbf{u}\,\delta_{ij} + u_{ij})B_j + \frac{1}{\mu\sigma}\gamma_{jr}(-t)\gamma_{kr}(-t)\frac{\partial^2 B_i}{\partial x'_j \partial x'_k}, \tag{8.16}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \gamma_{ri}(-t)\frac{\partial B_i}{\partial x_r'} = 0. \tag{8.17}$$

Вводя преобразование Фурье по пространственным координатам $\mathbf{x}'$, получим

$$\frac{\partial \tilde{B}_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \left\{-\left[\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{\mu\sigma}\gamma_{pr}(-t)\gamma_{qr}(-t)k_p k_q\right]\delta_{ij} + u_{ij}\right\}\tilde{B}_j(\mathbf{k}, t), \tag{8.18}$$

$$\gamma_{ri}(-t)k_r\tilde{B}_i(\mathbf{k}, t) = 0. \tag{8.19}$$

Используя (8.2) и (8.12), нетрудно найти решение

$$\tilde{B}_i(\mathbf{k}, t) = \frac{\gamma_{ij}(t)}{\gamma(t)}\exp\left[-\frac{t}{\mu\sigma}c_{pq}^{-1}(t)k_p k_q\right]\tilde{B}_{0j}(\mathbf{k}), \tag{8.20}$$

причем

$$k_j\tilde{B}_{0j}(\mathbf{k}) = 0. \tag{8.21}$$

В выражении (8.20) введен симметричный, положительно-определенный тензор C_{pq}^{-1}, заданный следующим образом:

$$c_{pq}^{-1}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \gamma_{pr}(-\tau)\gamma_{qr}(-\tau)\,d\tau, \tag{8.22}$$

где обозначение указывает на то, что в дальнейшем будет использоваться обратный тензор c_{pq}, удовлетворяющий условию $c_{pq}c_{qr}^{-1} = \delta_{pr}$. Поле $\tilde{\mathbf{B}}_0(\mathbf{k})$ в выражении (8.20), очевидно, является фурье-образом начального поля $B_i(\mathbf{x}, 0)$.

Пусть $\mathbf{x}_t$ – координаты точки, которая движется со скоростью $\mathbf{u}$, причем $\mathbf{x}$ – ее координаты в момент времени $t = 0$. Используя (8.14), можно написать явно

$$(\mathbf{x}_t)_i = \gamma_{ij}(t)x_j + \int_0^t \gamma_{ij}(\tau)\,d\tau\,u_{0j}. \tag{8.23}$$

Тогда координату $\mathbf{x}'$ в (8.15) можно, очевидно, задать как

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{-t}. \tag{8.24}$$

В соответствии с преобразованием Фурье имеем

$$B_i(\mathbf{x}, t) = \int \tilde{B}_i(\mathbf{k}, t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_{-t})\,d\mathbf{k},$$

$$B_i(\mathbf{x}, 0) = \int \tilde{B}_{0i}(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,d\mathbf{k}. \tag{8.25}$$

Подставляя теперь (8.20), представим $B_i(\mathbf{x}, t)$ в виде

$$B_i(\mathbf{x}, t) = \int G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, 0) B_j(\boldsymbol{\xi}, 0)\, d\boldsymbol{\xi}, \tag{8.26}$$

где тензор G_{ij} суть

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \gamma_{ij}(t-\tau) G'(\mathbf{x}_{-(t-\tau)} - \boldsymbol{\xi}, t-\tau \mid \bar{\mathbf{u}}), \tag{8.27}$$

$$\text{а } G'(\mathbf{x}, t \mid \bar{\mathbf{u}}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma(t)} \dfrac{1}{(2\pi)^3} \int \exp\left\{ -\dfrac{t}{\mu\sigma} c^{-1}_{pq}(t) k_p k_q + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} \right\} d\mathbf{k}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{8.28}$$

Выражение (8.26) является решением задачи с начальными условиями для уравнения индукции в случае течений с постоянными скоростями деформаций. Следовательно, тензор G_{ij}, заданный с помощью (8.27) и (8.28), действительно является тензором Грина, введенным в разд. 4.5.

Пусть C_{kl} является положительно-определенным тензором. Тогда имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp\left\{ -C_{kl} k_k k_l + i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi} \right\} d\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{C}} \times -$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{4} C^{-1}_{pq} \xi_p \xi_q \right\}, \tag{8.29}$$

соотношение, которое легко доказать, преобразуя тензор C_{kl} к главным осям. Этот результат позволяет вычислить интеграл (8.28) и получить

$$G'(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{u}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu\sigma}{4\pi t}\right)^{3/2} \dfrac{\sqrt{c}}{\gamma} \exp\left\{ -\dfrac{\mu\sigma}{4t} c_{pq} x_p x_q \right\}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{8.30}$$

Имеется и другое представление тензора Грина G_{ij}, которое окажется полезным в дальнейшем. Определим тензор d_{pq}:

$$d_{pq}(t) = c_{rs}(t) \gamma_{rp}(-t) \gamma_{sq}(-t). \tag{8.31}$$

Тогда из (8.27) и (8.30) можно получить несколько иное представление тензора Грина:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau) = \gamma_{ij}(t-\tau) G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_{t-\tau}, t-\tau \mid \mathbf{u}), \tag{8.32}$$

причем функция G задается в виде

$$G(\mathbf{x}, t \mid \mathbf{u}) = \begin{cases} \left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t}\right)^{3/2} \sqrt{d}\, \exp\left\{-\frac{\mu\sigma}{4t}\, d_{pq}\, x_p x_q\right\}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{8.33}$$

Приведем соотношение

$$d_{pq}^{-1}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \gamma_{pr}(\tau)\gamma_{qr}(\tau)\, d\tau = c_{pq}^{-1}(-t), \tag{8.34}$$

которое вытекает из (8.8), (8.22) и (8.31). Как следствие имеем

$$d_{pq}(t) = c_{pq}(-t) \ . \tag{8.35}$$

В заключение этого раздела хотелось бы сделать несколько замечаний.

Тензоры c_{pq} и d_{pq} суть тензоры Кронекера не только в случае $u_{ij} = 0$, но и для вращательного движения, т.к.

$\gamma_{kr}(t)\gamma_{lr}(t) = \delta_{kl}$.

Для сдвигового течения (8.3) из выражения (8.34) найдем

$$d_{pq}^{-1}(t) = c_{pq}^{-1}(-t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3}(\omega^* t)^2 & \frac{1}{2}\omega^* t & 0 \\ \frac{1}{2}\omega^* t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.36}$$

$$d_{pq}(t) = c_{pq}(-t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{12}(\omega^* t)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\omega^* t & 0 \\ -\frac{1}{2}\omega^* t & 1 + \frac{1}{3}(\omega^* t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(см. [113, 206]). (8.37)

Для течения общего вида (8.1) ограничимся первым порядком и приведем результат

$$d_{pq}(t) = c_{pq}(-t) = \delta_{pq} - \frac{1}{2}(u_{pq} + u_{qp})t, \tag{8.38}$$

из которого видно, что тензоры c_{pq} и d_{pq} непосредственно связаны с деформациями, которые испытывает элемент жидкости при движении.

8.3. Представление турбулентной электродвижущей силы

Будем исходить из представления величины $\mathcal{G}$ в рамках корреляционного приближения второго порядка:

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{npq}\iint \frac{\partial G_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}, t, t-\tau)}{\partial \xi_m} \times$$

$$\times Q_{jp}(\mathbf{x}, -\boldsymbol{\xi}, t, -\tau)\,\bar{B}_q(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}, t-\tau)\,d\boldsymbol{\xi}\,d\tau, \qquad (8.39)$$

которое получается из (4.54) и (4.55). Подставляя (8.32), найдем

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{npq}\iint \gamma_{kl}(\tau)\frac{\partial G(\mathbf{x}-(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})_\tau, \tau \mid \bar{\mathbf{u}})}{\partial \xi_m} \times$$

$$\times Q_{jp}(\mathbf{x}, -\boldsymbol{\xi}, t, -\tau)\,\bar{B}_q(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}, t-\tau)\,d\boldsymbol{\xi}\,d\tau. \qquad (8.40)$$

Введем новую переменную $\boldsymbol{\xi}'$:

$$\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}' = (\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})_\tau, \qquad (8.41)$$

и, таким образом, можем переписать интеграл в виде

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{npq}\iint \frac{\gamma_{kl}(\tau)\gamma_{rm}(\tau)}{\gamma(\tau)}\,\frac{\partial G(\boldsymbol{\xi}, \tau \mid \bar{\mathbf{u}})}{\partial \xi_r} \times$$

$$\times Q_{jp}(\mathbf{x}, (\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})_{-\tau}-\mathbf{x}, t, -\tau)\,\bar{B}_q((\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})_{-\tau}, t-\tau)\,d\boldsymbol{\xi}\,d\tau; \qquad (8.42)$$

при написании этой формулы штрих у $\boldsymbol{\xi}$ нами опущен. Если подставить соотношения

$$\varepsilon_{lmn} = \gamma(\tau)\,\varepsilon_{stu}\gamma_{ls}(-\tau)\gamma_{mt}(-\tau)\gamma_{nu}(-\tau), \qquad (8.43)$$

$$\varepsilon_{npq} = \gamma(-\tau)\varepsilon_{vwx}\gamma_{vn}(\tau)\gamma_{wp}(\tau)\gamma_{xq}(\tau), \qquad (8.44)$$

то из выражения (8.42) для произвольного набора немых индексов можно получить

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{x},\ t) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp} \iint \frac{\partial G(\xi,\ \tau \mid \bar{\mathbf{u}})}{\partial \xi_l}\ \gamma_{nq}(\tau) \times$$

$$\times\ Q_{jq}(\mathbf{x},\ (\mathbf{x}-\xi)_{-\tau}-\mathbf{x},\ t,\ -\tau)\frac{\gamma_{pr}(\tau)}{\gamma(\tau)}\ \bar{B}_r((\mathbf{x}-\xi)_{-\tau},\ t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{8.45}$$

Для интерпретации этой формулы прежде всего введем систему координат $\mathbf{y}$, сопутствующую среднему течению $\bar{\mathbf{u}}$:

$$x_k = \gamma_{kl}\ (t-t_0)\ y_l + \int_0^{t-t_0} \gamma_{kl}\ (\tau)\,d\tau\ \bar{u}_{0l}; \tag{8.46}$$

в момент времени t_0 обе системы совпадают. Дифференцируя по времени выражение (8.46), из (8.13), (8.14), получим

$$\frac{dx_k}{dt} = \bar{u}_{kl}\,x_l = \bar{u}_{0k} + \gamma_{kl}\ (t-t_0)\frac{dy_l}{dt}\ . \tag{8.47}$$

Обозначим через $\mathbf{v}$ скорость относительно сопутствующей системы координат:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{y}}{dt}\ .$$

Учитывая, что

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \tag{8.48}$$

имеем

$$v_k(\mathbf{y},\ t) = \gamma_{kl}\ (t_0 - t)\ u'_l\ (\mathbf{x},\ t), \tag{8.49}$$

$$u'_k(\mathbf{x},\ t) = \gamma_{kl}\ (t-t_0)\,v_l(\mathbf{y},\ t), \tag{8.50}$$

где аргументы связаны соотношениями

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}_{t-t_0},\ \mathbf{y} = \mathbf{x}_{t_0-t}\ . \tag{8.51}$$

Применительно к интегралу (8.45) t_0 следует заменить на t, а t — на $t-\tau$. Из выражений (8.49), (8.50) и (8.51) получим

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{x},\ t) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp} \iint \frac{\partial G(\xi,\ \tau \mid \bar{\mathbf{u}})}{\partial \xi_l} \times$$

$$\times Q_{jn}(\mathbf{x}, -\xi, t, -\tau \mid \bar{\mathbf{u}}) \frac{\gamma_{pr}(\tau)}{\gamma(\tau)} \bar{B}_r((\mathbf{x}-\xi)_{-\tau}, t-\tau)\, d\xi\, d\tau \tag{8.52}$$

где введен корреляционный тензор

$$Q_{jn}(\mathbf{x}, \xi, t, \tau \mid \bar{\mathbf{u}}) = \overline{v_j(\mathbf{x}, t) v_n(\mathbf{x}+\xi, t+\tau)}, \tag{8.53}$$

образованный из компонент скорости относительно системы отсчета, сопутствующей среднему движению.

Рассматривая последнюю часть подынтегрального выражения (8.52) обратимся к хорошо известному представлению решения уравнения индукции в случае идеально проводящей среды. Это решение может быть записано в виде

$$\frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}, t)} = \left(\frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}_0, t_0)}{\rho(\mathbf{x}_0, t_0)} \cdot \operatorname{grad}_0 \right) \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0), \tag{8.54}$$

где ρ – плотность массы и $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0)$ – интеграл уравнения движения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$. Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0 \tag{8.55}$$

и определения γ [см. выражение (8.12)] можно получить

$$\frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}_0, t_0)} = \frac{1}{\gamma(t-t_0)}. \tag{8.56}$$

Следовательно, из (8.14) видно, что поле $\frac{\gamma_{pr}(\tau)}{\gamma(\tau)} \bar{B}_r((\mathbf{x}-\xi)_{-\tau}, t-\tau)$ было бы тождественно $\bar{B}_p(\mathbf{x}-\xi, t)$, если бы среднее магнитное поле было вмороженно в среднее движение. Другими словами, до тех пор пока среднее магнитное поле можно считать вмороженным в среднее движение, справедливо соотношение

$$\bar{B}_p(\mathbf{x}, t) = \frac{\gamma_{pr}(\tau)}{\gamma(\tau)} \bar{B}_r((\mathbf{x}-\xi)_{-\tau}, t-\tau). \tag{8.57}$$

Следовательно, (8.57) может быть использовано для вычисления (8.52) в случае, когда среднее магнитное поле не сильно диффундирует за промежуток времени длительностью τ_{cor}. Это предположение нам уже хорошо знакомо из рассмотрения двухмасштабной турбулентности в разд. 5.4. При таком условии выражение (8.52) принимает вид

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp} \iint \frac{\partial G(\xi, \tau \mid \bar{\mathbf{u}})}{\partial \xi_l} Q_{jn} \times$$

$$\times (\mathbf{x}, -\xi, -\tau \mid \bar{\mathbf{u}})\, \bar{B}_p(\mathbf{x}-\xi, t)\, d\xi\, d\tau. \qquad (8.58)$$

Данное представление электродвижущей силы $\mathcal{E}$ лишь незначительно отличается от представления в случае, когда $\bar{\mathbf{u}} = 0$.

Предполагая также, что среднее магнитное поле двумерно по пространственным координатам, из выражения (8.5) для тензоров a_{ip}, b_{ipq} получим

$$a_{ip} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp} \iint \frac{\partial G(\xi, \tau \mid \bar{\mathbf{u}})}{\partial \xi_l} Q_{jn}(\mathbf{x}, -\xi, t, -\tau \mid \bar{\mathbf{u}})\, d\xi\, d\tau, \qquad (8.59)$$

$$b_{ipq} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp} \iint \frac{\partial G(\xi, \tau \mid \bar{\mathbf{u}})}{\partial \xi_l} \xi_q Q_{jn}(\mathbf{x}, -\xi, t, -\tau \mid \bar{\mathbf{u}})\, d\xi d\tau. \qquad (8.60)$$

8.4. О влиянии среднего движения на корреляционный тензор

Из вышеприведенных результатов (8.58), (8.59) и (8.60) видно, что нам все же необходимо определить корреляционный тензор с учетом влияния среднего движения. Для этого следует исходить из системы уравнений, включающей уравнение Навье – Стокса, уравнение неразрывности, уравнение состояния и т.д. Очевидно, что найти достаточно общую математическую модель, которая может быть просто интерпретирована, почти безнадежно. Поэтому ограничимся случаем несжимаемого течения, т.е. рассмотрим уравнение Навье – Стокса в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F} + \nu\Delta\,\mathbf{u}, \qquad (8.61)$$

и уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \qquad (8.62)$$

Здесь p – давление, $\mathbf{F}$ – силы и ν – вязкость. Усредняя, получим уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \nu\Delta\,\bar{u}_i = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{F}_i - \frac{\partial Q_{ik}(\mathbf{x}, 0, t, 0)}{\partial x_k},$$

$$(8.63)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0. \tag{8.64}$$

Уравнение для $\mathbf{u}'$ получается вычитанием (8.63) из (8.61) и имеет вид:

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} - \nu \Delta u_i' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k u_i' + u_k' \bar{u}_i) +$$

$$+ F_i' + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i' u_k' - Q_{ik}(\mathbf{x}, 0, t, 0)). \tag{8.65}$$

Предполагается, что турбулентное движение обусловлено силой $\mathbf{F}'$, т.е. $\mathbf{F}'$ некоторым образом, который мы не конкретизируем, возбуждает $\mathbf{u}'$.

Ограничимся теперь корреляционным приближением второго порядка и пренебрежем, таким образом, в уравнении (8.65) членом, квадратичным по флуктуациям. Тогда необходимо рассмотреть уравнения

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} - \nu \Delta u_i' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k u_i' + u_k' \bar{u}_i) + F_i', \tag{8.66}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0. \tag{8.67}$$

Эта процедура допустима всякий раз, когда

$$\min (\mathrm{Re}, S) \ll 1, \tag{8.68}$$

где S было уже определено с помощью выражения (3.14), а Re – число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{u' \lambda_{\mathrm{cor}}}{\nu}. \tag{8.69}$$

Помня о том, что нам необходимо определить корреляционный тензор в системе координат, сопутствующей среднему движению, ограничимся такими типами движений, которые имеют постоянные скорости деформаций и воспользуемся координатами, введенными с помощью выражения (8.46). Из выражения (8.49) с помощью (8.2) и (8.10) находим

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \gamma_{ij} (t_0 - t) \left[\frac{\partial u_j'}{\partial t} + \bar{u}_l \frac{\partial u_j'}{\partial x_l} - u_l' \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l}\right]. \tag{8.70}$$

образом, приходим к представлению уравнений (8.66), (8.67) в сопутствующей системе координат:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + 2\bar{u}_{ij} v_j - \nu \gamma_{jr}(t_0 - t)\,\gamma_{kr}(t_0 - t) \times$$

$$\times \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_j \partial y_k} = -\gamma_{ij}(t_0 - t)\,\gamma_{kj}(t_0 - t)\,\frac{\partial p'}{\partial y_k} + f_i', \quad (8.71)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_i} = 0. \quad (8.72)$$

Здесь $\mathbf{f}'$ означает силу в сопутствующей системе:

$$f_i'(\mathbf{y}, t) = \gamma_{ij}(t_0 - t)\, F_j'(\mathbf{x}, t). \quad (8.73)$$

Второй член в левой части уравнения (8.71) можно понимать как обобщенные силы Кориолиса.

Введем теперь преобразование Фурье по пространственным координатам. Из выражений (8.71) и (8.72) следует

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + 2\,\bar{u}_{ij}\tilde{v}_j + \nu \gamma_{jr}(t_0 - t)\,\gamma_{kr}(t_0 - t) \times$$

$$\times k_j k_k \tilde{v}_i = -\gamma_{ij}(t_0 - t)\,\gamma_{kj}(t_0 - t)\, i k_k \tilde{p}' + \tilde{f}_i', \quad (8.74)$$

$$k_i \tilde{v}_i = 0. \quad (8.75)$$

Исключая давление, получим

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + 2\left[\delta_{ip} - \frac{\gamma_{ij}(t_0 - t)\,\gamma_{lj}(t_0 - t)\,k_l k_p}{\gamma_{mr}(t_0 - t)\,\gamma_{nr}(t_0 - t)\,k_m k_n}\right]\bar{u}_{pq}\tilde{v}_q +$$

$$+ \nu \gamma_{jr}(t_0 - t)\,\gamma_{kr}(t_0 - t)\,k_j k_k \tilde{v}_i =$$

$$= \left[\delta_{ip} - \frac{\gamma_{ij}(t_0 - t)\,\gamma_{lj}(t_0 - t)\,k_l k_p}{\gamma_{mr}(t_0 - t)\,\gamma_{nr}(t_0 - t)\,k_m k_n}\right]\tilde{f}_p'. \quad (8.76)$$

Уже на данном этапе видно, что для общего случая получится результат, который будет трудно интерпретировать. Поэтому в дальнейшем ограничимся вращательными движениями и будем формулировать

свои выводы, опираясь на статью [240]. При последующем анализе уравнения (8.76) можно ограничиться также теорией первого порядка по среднему движению [113].

8.5. О влиянии вращательного движения на корреляционный тензор

Для вращательного движения (8.5) уравнение (8.76) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{2}{k^2}\,(k^2\delta_{ip} - k_i k_p)\,\bar{u}_{pq}\tilde{v}_q + \nu k^2 \tilde{v}_i = (k^2\delta_{ip} - k_i k_p)\frac{\tilde{f}'_p}{k^2}. \tag{8.77}$$

Введем фурье-образы $\hat{v}_i$, $\hat{f}_i$ по пространственным координатам и времени. Тогда можно написать

$$\hat{v}_i^{(0)} = \frac{(k^2\delta_{ip} - k_i k_p)\,\hat{f}'_p}{(\nu k^2 - i\omega)\,k^2}, \tag{8.78}$$

где $\mathbf{v}^{(0)}$, очевидно, есть то поле турбулентности, которое возбуждалось бы силами $\mathbf{f}'$ при отсутствии среднего движения. Силы $\mathbf{f}'$ не должны зависеть от среднего движения. В дальнейшем будем считать, что $\mathbf{v}^{(0)}$ имеет простую структуру, например однородную и изотропную или неоднородную и анизотропную относительно одного выделенного направления. Ниже будет исследоваться влияние вращательного движения на такую турбулентность.

Для $\hat{v}_i$ уравнение (8.77) можно записать в виде

$$D_{ij}^{-1}\,\hat{v}_j = \hat{v}_i^{(0)},\quad k_i\,\hat{v}_i = k_i\,\hat{v}_i^{(0)} = 0, \tag{8.79}$$

где $$D_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{1}{\nu k^2 - i\omega}\,\frac{2\Omega\cdot\mathbf{k}}{k^2}\,\varepsilon_{ijk}\,k_k. \tag{8.80}$$

Система (8.79) может быть обращена и представлена как

$$\hat{v}_i = D_{ij}\,\hat{v}_j^{(0)},\quad k_i\,\hat{v}_i = k_i\,\hat{v}_i^{(0)} = 0, \tag{8.81}$$

где $$D_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{\nu k^2 - i\omega}\,\frac{2\Omega\cdot\mathbf{k}}{k^2}\,\varepsilon_{ijk}\,k_k \tag{8.82}$$

в первом порядке по Ω. Величина D_{ij} является четной функцией $\mathbf{k}$. Приведем также вспомогательные соотношения:

$$D_{ik} D^{*}_{jk} = \delta_{ij} + \frac{4 i \omega \Omega \cdot \mathbf{k}}{k^2(\nu^2 k^4 + \omega^2)} \varepsilon_{ijk} k_k, \qquad (8.83)$$

$$D_{ik} k_k = D^{*}_{ik} k_k = k_i. \qquad (8.84)$$

Из (8.53) следует, что

$$Q_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t, \tau \mid \bar{\mathbf{u}}) = \iint \hat{Q}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t, \tau \mid \bar{\mathbf{u}}) \times \exp[\, i\,(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi} - \omega\tau)]\, d\mathbf{k}\, d\omega, \qquad (8.85)$$

причем

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t, \omega \mid \mathbf{u}) = \iint \overline{\hat{v}_i(\mathbf{k}', \omega')\, \hat{v}_j(\mathbf{k}, \omega)} \times \exp[\, i((\mathbf{k} + \mathbf{k}')\mathbf{x} - (\omega + \omega')t\,]\, d\mathbf{k}'\, d\omega'. \qquad (8.86)$$

Пусть $\hat{Q}^{(0)}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t, \omega)$ будет соответственно определено как $\hat{Q}_{ij}$ в (8.86), тогда в силу (8.81)

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t, \omega \mid \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint D_{ik}(\mathbf{k}', \omega')\, D_{jl}(\mathbf{k}, \omega) \times \hat{Q}^{(0)}_{kl}(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{k}, t + t', \omega) \exp[\, -i((\mathbf{k} + \mathbf{k}')\mathbf{x}' - (\omega + \omega')t')]\, d\mathbf{k}'\, d\omega'\, d\mathbf{x}'\, dt'. \qquad (8.87)$$

В случае однородной стационарной турбулентности $\mathbf{v}^{(0)}$ получим

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, \omega \mid \bar{\mathbf{u}}) = D^{*}_{ik} D_{jl} \hat{Q}^{(0)}_{kl}(\mathbf{k}, \omega). \qquad (8.88)$$

Пусть $\hat{Q}^{(0)}_{kl}$ зависит линейно от $\mathbf{x}$; таким образом, можно написать

$$\hat{Q}^{(0)}_{kl}(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}^{(0)}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega) + x'_m \frac{\partial \hat{Q}^{(0)}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega)}{\partial x_m}. \qquad (8.89)$$

Тогда из (8.87) следует, что

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega \mid \bar{\mathbf{u}}) = D^{*}_{ik}(\mathbf{k}, \omega) D_{jl}(\mathbf{k}, \omega) \hat{Q}^{(0)}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega) + i \frac{\partial D^{*}_{ik}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_m} D_{jl}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial \hat{Q}^{(0)}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega)}{\partial x_m}. \qquad (8.90)$$

Оба соотношения (8.88) и (8.90) решают поставленную задачу, а именно определение влияния среднего движения на корреляционный тензор

для рассмотренных здесь особых случаев турбулентности. Следует отметить, в частности, что теперь можно рассмотреть более реалистичные типы турбулентности со спиральностью. Пусть

$\hat{Q}_{kl}^{(0)} = \hat{Q}(k^2\delta_{kl} - k_k k_l)$, так что

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega \mid \bar{\mathbf{u}}) = \hat{Q}\left[(k^2\delta_{ij} - k_i k_j) + \frac{4i\omega\Omega\cdot\mathbf{k}}{\nu^2 k^4 + \omega^2}\varepsilon_{ijk}k_k\right] \quad (8.91)$$

в силу (8.88), (8.83), (8.84). Последним слагаемым описывается не что иное как спиральность, т.е. нескомпенсированность двух типов винтовых движений. Однако в данном случае интегральная спиральность

$$h = i\varepsilon_{ijL}\iint k_l \hat{Q}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega \mid \bar{\mathbf{u}})\, d\mathbf{k}\, d\omega, \quad (8.92)$$

исчезает, так как $\hat{Q}$ является четной функцией ω в силу (6.20). Если турбулентность анизотропна, но $\mathbf{v}^0$ все еще соленоидально, то $\hat{Q}$ должно быть заменено на $\hat{Q}(\mathbf{k}, \omega) + \hat{Q}'(\mathbf{k}, \omega)\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}$, где $\hat{Q}'$ является нечетной функцией ω в силу (6.20). В этом случае интегральная спиральность (8.92) оказывается отличной от нуля.

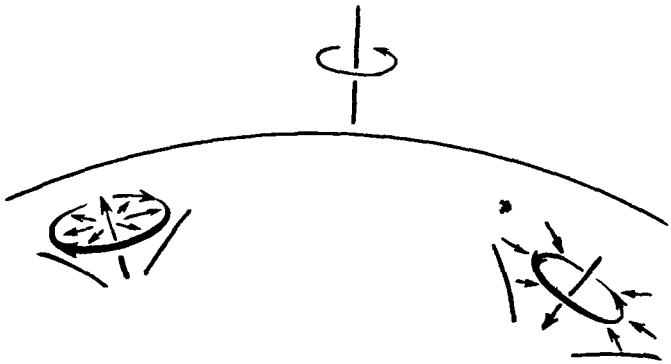
Глава 9. ТУРБУЛЕНТНАЯ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА В СЛУЧАЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО СРЕДНЕГО ДВИЖЕНИЯ

9.1. Иллюстративные примеры

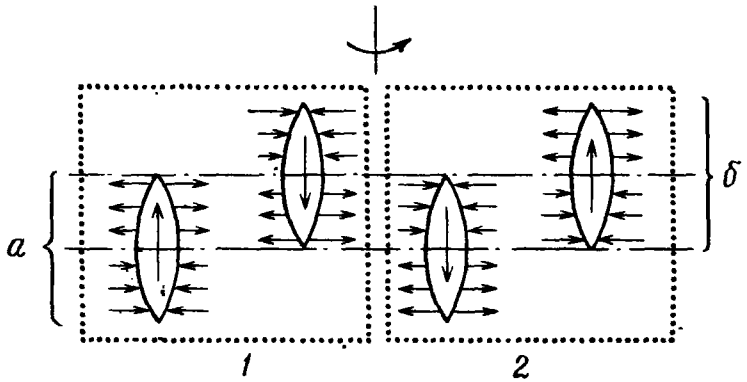
В конце предыдущей главы было показано, что турбулентное движение, не обладающее изначальной спиральностью, приобретает ее, если участвует во вращении. Это можно видеть как в случае первоначально изотропной, так и анизотропной турбулентности. Предположение о несжимаемости делалось только для удобства вычислений. Рассмотрение турбулентности в сжимаемой среде потребовало бы бо́льших математических усилий.

Приведем физические аргументы в пользу того, что спиральность совершенно естественное свойство турбулентности во вращающемся теле. На рис. 9.1. показана ситуация в сжимаемой среде; этот случай отражает условия в конвективной зоне Солнца в северном полушарии. Поднимающееся вещество будет расширяться и вращаться под действием сил Кориолиса, приводя, таким образом, к левовинтовому спиральному движению. Опускающееся вещество сжимается и под действием сил Кориолиса вынуждено вращаться в противоположном направлении, опять-таки совершая левовинтовое спиральное движение. Понятно, что конвекция в северном полушарии Солнца с большей вероятностью приводит к левовинтовым спиральным движениям, чем к правовинтовым. Очевидно, что в южном полушарии будут преобладать правовинтовые спиральные движения.

Рис. 9.2 иллюстрирует условия для несжимаемой жидкости. Баланс левовинтовых и правовинтовых спиральных движений установится в каком-либо слое среды (пересечение слоев *а* и *б*) только при отсутствии градиентов интенсивности турбулентности, поскольку один из типов спиральных движений приходит снизу (слой *а*), а другой – сверху (слой *б*). Следовательно, как показано на рис. 9.2, градиент интенсивности турбулентности в турбулентной среде обеспечивает спиральность во вращающемся теле в случае плоской геометрии. Для



Р и с. 9.1. Схематическое изображение, поясняющее, что в северном полушарии Солнца левовинтовые спиральные движения более вероятны, чем правовинтовые.



Р и с. 9.2. В несжимаемой среде нескомпенсированность правовинтовых и левовинтовых спиральных движений может быть обусловлена градиентом интенсивности турбулентности $u^{\circ 2}$.

сферической геометрии эта нескомпенсированность правовинтовых и левовинтовых движений будет иметь место лишь при определенной зависимости интенсивности турбулентности от расстояния от центра. Вообще же отличную от нуля спиральность можно ожидать во многих случаях.

9.2. Корреляционный тензор для неоднородной турбулентности

Ограничимся предельным случаем двухмасштабной турбулентности. При рассмотрении неоднородной турбулентности предположим, что

зависимость средних значений от пространственных координат слабая, т.е. корреляционный тензор $\hat{Q}_{ij}^{(0)}$ предполагается линейно зависящим от $\mathbf{x}$ и не зависящим от t. Более того, будем иметь в виду возможность применения данного случая для конвективных зон космических объектов. В этом случае радиальное направление является направлением анизотропии и единственным направлением, в котором меняются средние величины. Поэтому предполагаем, что корреляционный тензор $\hat{Q}_{ij}^{(0)}$ анизотропен по отношению к определенному направлению $\mathbf{g}$, зависит от $\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ и линеен по $\mathbf{g}$ и $\mathbf{x}$. Запишем выражение:

$$\hat{Q}_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}_{ij}^{(00)}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{i}{2} g_m \frac{\partial \hat{Q}_{ij}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_m} + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) \hat{Q}_{ij}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega), \tag{9.1}$$

где сразу ясны причины, по которым нами введено второе слагаемое в правой части.

Из определения (4.3) корреляционного тензора имеем тождество

$$Q_{ij}^{(0)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}, \tau) = Q_{ji}^{(0)}(\mathbf{x}, -\boldsymbol{\xi}, -\tau), \tag{9.2}$$

которое, будучи примененным к тензору, заданному выражением (9.1), приводит к условию

$$\hat{Q}_{ij}^{(00)}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{i}{2} g_m \frac{\partial \hat{Q}_{ij}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_m} + g_m x_m \hat{Q}_{ij}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega) - i g_m \frac{\partial \hat{Q}_{ij}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_m} = \hat{Q}_{ij}^{(00)}(-\mathbf{k}, -\omega) + \frac{i}{2} g_m \times \left[\frac{\partial \hat{Q}_{ji}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_m}\right]_{-\mathbf{k}, -\omega} + g_m x_m \hat{Q}_{ji}^{(01)}(-\mathbf{k}, -\omega). \tag{9.3}$$

Прежде всего имеем

$$\hat{Q}_{ij}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}_{ji}^{(01)}(-\mathbf{k}, -\omega) \tag{9.4}$$

и как следствие

$$\left[\frac{\partial \hat{Q}_{ji}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_m}\right]_{-\mathbf{k}, -\omega} = -\frac{\partial \hat{Q}_{ij}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_m}. \tag{9.5}$$

Из (9.3) следует, таким образом,

$$\hat{Q}_{ij}^{(00)}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}_{ji}^{(00)}(-\mathbf{k}, -\omega). \tag{9.6}$$

Надо заметить, что тензор $\hat{Q}_{ij}^{(0)}$ должен удовлетворять условию, соответствующему теореме Бохнера, которая может быть выведена из (6.1). Отсюда, в частности, следует, что тензор $\hat{Q}_{ij}^{(00)}$ должен быть положительно полуопределенным и что $\mathbf{x}$ задано в ограниченной области.

Предположим, что жидкость несжимаема, так что

$$\frac{\partial \hat{Q}_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega)}{\partial x_i} = i k_i \hat{Q}_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega), \quad \hat{k}_j Q_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega) = 0. \tag{9.7}$$

Подставляя (9.1), найдем условия

$$k_i \hat{Q}_{ij}^{(01)} = 0, \quad k_j \hat{Q}_{ij}^{(01)} = 0, \tag{9.8}$$

$$k_i \hat{Q}_{ij}^{(00)} = -\frac{i}{2} g_i \hat{Q}_{ij}^{(01)}; \quad k_j \hat{Q}_{ij}^{(00)} = \frac{i}{2} g_j \hat{Q}_{ij}^{(01)}. \tag{9.9}$$

Здесь $\hat{Q}_{ij}^{(01)}$ является изотропным из-за требования линейности $\hat{Q}_{ij}^{(0)}$ относительно g, поэтому

$$\hat{Q}_{ij}^{(01)}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega)(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j), \tag{9.10}$$

причем

$$\hat{Q}_1(\mathbf{k}, -\omega) = \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega). \tag{9.11}$$

Используем для $\hat{Q}_{ij}^{(00)}$ общее представление, т.е.

$$\hat{Q}_{ij}^{(00)}(\mathbf{k}, \omega) = \{A + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}) A'\} k^2 \delta_{ij} + \{B + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}) B'\} \times$$

$$\times k_i k_j + i C k_i g_j + i C' k_j g_i,$$

и найдем из (9.9):

$$B = -A = \hat{Q}(\mathbf{k}, \omega), \quad A' = -B' = \hat{Q}'(\mathbf{k}, \omega), \tag{9.12}$$

$$C = -C' = -\frac{1}{2} \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega),$$

где $\hat{Q}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{Q}(\mathbf{k}, -\omega)$, $\hat{Q}'(\mathbf{k}, \omega) = -\hat{Q}'(\mathbf{k}, -\omega)$, (9.13)

вследствие (9.6). Окончательно получим

$$\hat{Q}_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega) = \{\hat{Q}(\mathbf{k}, \omega) + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}) \hat{Q}'(\mathbf{k}, \omega)\} \times$$

$$\times (k^2\delta_{ij} - k_i k_j) + \frac{i}{2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g})\left\{\frac{1}{k}\frac{\partial k^2 \hat{Q}_1(\mathbf{k},\omega)}{\partial k}\delta_{ij} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k}\frac{\partial \hat{Q}_1(\mathbf{k},\omega)}{\partial k} k_i k_j\right\} - i\hat{Q}_1(\mathbf{k},\omega)\, k_i g_j +$$

$$+ (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\,\hat{Q}_1(\mathbf{k},\omega)(k^2\delta_{ij} - k_i k_j), \qquad (9.14)$$

где три функции $\hat{Q}(\mathbf{k},\omega)$, $\hat{Q}'(\mathbf{k},\omega)$ и $\hat{Q}_1(\mathbf{k},\omega)$ удовлетворяют (9.11) и (9.13), и

$$\hat{Q}(\mathbf{k},\omega) + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{g})\,\hat{Q}'(\mathbf{k},\omega) \geqslant 0, \qquad (9.15)$$

как следствие теоремы Бохнера. Однако для $\hat{Q}_1$ при не слишком большом $\mathbf{x}$ нет аналогичного соотношения.

Соотношение (9.12) – наиболее общее представление корреляционного тензора несжимаемого турбулентного течения. Оно является линейной функцией вектора $\mathbf{g}$, характеризующего как направление анизотропии, так и направление неоднородности.

Результат (9.14) совпадает с результатом, полученным Рэдлеем [207, 216] для турбулентности, неоднородность которой обусловлена градиентом ее интенсивности для случая, когда величина $\hat{Q}_1$ пропорциональна $\hat{Q}$.

Наконец, напомним, что слагаемые $\hat{Q}(k^2\delta_{ij} - k_i k_j)$ и $(\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\,\hat{Q}_1(k^2\delta_{ij} - k_i k_j)$ в (9.14) являются четными по k, а остальные слагаемые нечетные.

9.3. Определение тензора b_{ipq} для неоднородной турбулентности при наличии сил Кориолиса

Для наших целей следует переписать (8.60) в свернутом виде:

$$b_{ipq}(\mathbf{x}) = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp}\iint \frac{k_l}{\eta k^2 - i\omega}\frac{\partial \hat{Q}_{jn}(\mathbf{x},\mathbf{k},\omega\,|\,\bar{\mathbf{u}})}{\partial k_q} \times$$

$$\times\, d\mathbf{k}\, d\omega = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp}\iint \frac{\partial}{\partial k_q}\left(\frac{k_l}{\eta k^2 - i\omega}\right)\hat{Q}_{jn}(\mathbf{x},\mathbf{k},\omega\,|\,\bar{\mathbf{u}}) \times$$

$$\times\, d\mathbf{k}\, d\omega. \qquad (9.16)$$

Поскольку вклад в интеграл в выражении (9.16) дает только четная часть Q_{jn}, из (8.83), (8.84), (8.90) и (9.14) получим

$$b_{ipq}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp}\iint \frac{\partial}{\partial k_q}\left(\frac{k_l}{\eta k^2 - i\omega}\right) \times$$

$$\times D^*_{jr}(\mathbf{k},\omega)\, D_{ns}(\mathbf{k},\omega)\{\hat{Q}(\mathbf{k},\omega) + (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\hat{Q}_1(\mathbf{k},\omega)\} \times$$

$$\times (k^2\delta_{rs} - k_r k_s)\, d\mathbf{k}\, d\omega = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp}$$

$$\times \iint \frac{\partial}{\partial k_q}\left(\frac{k_l}{\eta k^2 - i\omega}\right) \times$$

$$\times \{\hat{Q}(\mathbf{k},\omega) + (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\hat{Q}'_1(\mathbf{k},\omega)\}(k^2\delta_{jn} - k_j k_n)\, d\mathbf{k}\, d\omega -$$

$$- 4i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{jnr}\Omega_s \iint \frac{\partial}{\partial k_q}\left(\frac{k_l}{\eta k^2 - i\omega}\right) \times$$

$$\times \omega\{\hat{Q}(\mathbf{k},\omega) + \hat{Q}_1(\mathbf{k},\omega)(\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\}\frac{k_r k_s}{\nu^2 k^4 + \omega^2}\, d\mathbf{k}\, d\omega. \quad (9.17)$$

Очевидно, что первое слагаемое имеет вид $\beta\varepsilon_{ipq}$. Умножая его на ε_{ipq}, получим

$$\beta = \frac{2}{3}\iint \frac{\hat{Q}(\mathbf{k},\omega) + (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\hat{Q}_1(\mathbf{k},\omega)}{\eta k^2 - i\omega}\, k^2 d\mathbf{k}\, d\omega. \quad (9.18)$$

Это соотношение может быть переписано как

$$\beta = \frac{1}{3}\iint \frac{\hat{Q}_{jj}(\mathbf{x},\mathbf{k},\omega\,|\,\bar{\mathbf{u}})}{\eta k^2 - i\omega}\, d\mathbf{k}\, d\omega, \quad (9.19)$$

поскольку $\hat{Q}_{jj} - 2k^2(\hat{Q} + (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\hat{Q}_1)$ является четным по $\mathbf{k}$ в силу (8.90) и (9.14).

С помощью (9.19) обобщим представление коэффициента турбулентной диффузии в виде (7.47) на случай неоднородной несжимаемой турбулентности при наличии вращательного движения.

Для второго слагаемого в (9.17), т.е. для β_{ipq} [см. обозначение (7.55)] найдем:

$$\beta_{ipq} = -4i(\delta_{il}\delta_{pr} + \delta_{ir}\delta_{pl})\Omega'_s \iint \frac{(\eta k^2 - i\omega)\delta_{lq} - 2\eta k_l k_q}{(\eta k^2 - i\omega)^2(\nu^2 k^4 + \omega^2)} \times$$

$$\times \omega k_r k_s\{\hat{Q}(\mathbf{k},\omega) + (\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})\hat{Q}_1(\mathbf{k},\omega)\}\, d\mathbf{k}\, d\omega =$$

$$= -\frac{2}{15}\Omega_s \iint \frac{(\delta_{iq}\delta_{ps} + \delta_{is}\delta_{pq})(3\eta^2 k^4 - 5\omega^2) + 8\eta^2 k^4 \delta_{ip}\delta_{qs}}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)^2(\nu^2 k^4 + \omega^2)} \times$$

$$\times \omega^2 \hat{Q}_{jj}(\mathbf{x},\mathbf{k},\omega\,|\,\bar{\mathbf{u}})\, d\mathbf{k}\, d\omega. \quad (9.20)$$

При вычислении использовалось (5.27). Этот результат был уже предсказан в разд. 7.5. Для введенных там скаляров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ получим [231]:

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{2}{15} \iint \frac{(3\eta^2 k^4 - 5\omega^2)\omega^2}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)^2 (\nu^2 k^4 + \omega^2)} \hat{Q}_{jj}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega \mid \bar{\mathbf{u}})\, d\mathbf{k} d\omega, \tag{9.21}$$

$$\beta_3 = \frac{16}{15} \iint \frac{\eta^2 k^4 \omega^2 \hat{Q}_{jj}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega \mid \bar{\mathbf{u}})}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)^2 (\nu^2 k^4 + \omega^2)} d\mathbf{k} d\omega. \tag{9.22}$$

Впервые выражения для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ были получены Рэдлером [211]. Важно отметить, что величины β_1, β_2 и β_3 отличались от нуля уже в случае, когда невозмущенная турбулентность была однородной и изотропной, т.е. когда $\hat{Q}' = \hat{Q}_1 = 0$. Нами показано, что неоднородность, по существу, не приводит к новым свойствам.

9.4. Определение тензора a_{ip} для неоднородной турбулентности при наличии сил Кориолиса

Будем снова исходить из соотношения (8.59), переписанного в свернутом виде:

$$a_{ip} = i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp} \iint \frac{k_l}{\eta k^2 - i\omega} \hat{Q}_{jn}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega \mid \bar{\mathbf{u}})\, d\mathbf{k} d\omega. \tag{9.23}$$

Для рассмотренного здесь случая несжимаемой среды оно сводится к виду

$$a_{ip} = i\varepsilon_{ijk} \iint \frac{k_p \hat{Q}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega \mid \bar{\mathbf{u}})}{\eta k^2 - i\omega} d\mathbf{k} d\omega. \tag{9.24}$$

Сперва предположим, что турбулентность однородна, так что $\hat{Q}_1 = 0$. Соотношения (8.83), (8.84), (8.88) и (9.14) приводят к выражению:

$$a_{ip} = i\varepsilon_{ijk} \iint \frac{k_p}{\eta k^2 - i\omega} (D^*_{jl} D_{km} \hat{Q}^{(0)}_{lm})\, d\mathbf{k} d\omega =$$

$$= -4\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl} g_m \Omega_n \iint \frac{\omega k_l k_m k_n k_p \hat{Q}'(\mathbf{k}, \omega)}{(\eta k^2 - i\omega)(\nu^2 k^4 + \omega^2)} d\mathbf{k} d\omega =$$

$$= -\frac{8\eta}{15} \iint \frac{\omega k^6 \hat{Q}'(\mathbf{k}, \omega)}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)(\nu^2 k^4 + \omega^2)} \times$$

$$\times d\mathbf{k} d\omega \{ \delta_{ip}(\mathbf{g} \cdot \Omega) + (\Omega_i g_p + \ldots_p g_i) \}. \tag{9.25}$$

Таким образом, для величины α, введенной в (7.2), найдем [240]:

$$\alpha = -\frac{8\eta}{9} \iint \frac{\omega k^6 \hat{Q}'(\mathbf{k}, \omega)}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)(\nu^2 k^4 + \omega^2)} d\mathbf{k}\, d\omega (\mathbf{g} \cdot \Omega). \qquad (9.26)$$

Для того чтобы оценить этот результат, следует отметить, что здесь впервые получена величина α, отличная от нуля для реальной турбулентности, в нашем случае – для однородной анизотропной турбулентности при наличии вращательного движения. Это следует подчеркнуть ввиду важности величины α в связи с возбуждением динамо, как показано в разд. 7.3.

Величина α оказывается пропорциональной скалярному произведению $\mathbf{g} \cdot \Omega$, т.е. для конвективной оболочки вращающегося тела будет антисимметричной по отношению к экваториальной плоскости.

Наконец отметим, что тензор a_{ip} в (9.25) симметричен в соответствии с результатами, полученными в разд. 7.1.

Ограничение, связанное с однородностью, будет теперь снято, т.е. будем предполагать $\hat{Q}_1 \neq 0$.

Для того чтобы исследовать антисимметричную часть, введем вектор $\gamma^* g^*$:

$$\gamma^* g_k^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{ipk} a_{ip} = \frac{i}{2} \iint \frac{k_j \hat{Q}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega \mid \bar{\mathbf{u}})}{\eta k^2 - i\omega} d\mathbf{k}\, d\omega. \qquad (9.27)$$

Согласно (8.84), (8.90) и (9.7) имеем

$$k_j \hat{Q}_{jk} = -i D_{nl}^* D_{km} \frac{\partial \hat{Q}_{lm}^{(0)}}{\partial x_n}, \qquad (9.28)$$

и из (9.14) найдем, таким образом:

$$\begin{aligned}
\gamma^* g_k^* &= \frac{1}{2} g_n \iint \frac{k^2 \delta_{kn} - k_k k_n}{\eta k^2 - i\omega} \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}\, d\omega + \\
&+ 2 g_n \Omega_m \varepsilon_{knp} \iint \frac{i\omega k_m k_p}{(\eta k^2 - i\omega)(\nu^2 k^4 + \omega^2)} \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}\, d\omega \\
&= \frac{1}{3} \iint \frac{\eta k^4}{\eta^2 k^4 + \eta \omega^2} \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}\, d\omega g_k - \\
&- \frac{2}{3} \iint \frac{\omega^2 k \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega)}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)(\nu^2 k^4 + \omega^2)} d\mathbf{k}\, d\omega \varepsilon_{klm} g_l \Omega_m. \qquad (9.29)
\end{aligned}$$

Из этого результата ясно, что для неоднородной турбулентности тензор a_{ip} является несимметричным. Его антисимметричную часть перепишем в виде:

$$a_{ip}^{(a)} = \varepsilon_{ipk}(\gamma g_k + \gamma' \varepsilon_{klm} g_l \Omega_m), \tag{9.30}$$

причем

$$\gamma = \frac{1}{3} \iint \frac{\eta k^4}{\eta^2 k^4 + \omega^2} \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega)\, d\mathbf{k}\, d\omega,$$

$$\gamma' = -\frac{2}{3} \iint \frac{\omega^2 k^2 \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega)}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)(\nu^2 k^4 + \omega^2)} d\mathbf{k}\, d\omega. \tag{9.31}$$

В отличие от случаев, рассмотренных в разд. 7.1, в случае неоднородной несжимаемой турбулентности имеет место эффект накачки, даже в отсутствие среднего движения. Среднее движение лишь изменяет направление, в котором переносится среднее магнитное поле.

Для того чтобы определить симметричную часть α_{ip} тензора a_{ip}, вспомним, что общий вид этого тензора уже известен, а именно задан выражением (5.43).

Таким образом, можно написать

$$\alpha_{ip} = -\alpha_1(\mathbf{g}\cdot\Omega)\,\delta_{ip} - \alpha_2(\Omega_i g_p + \Omega_p g_i), \tag{9.32}$$

или

$$\alpha_{ip} = l_{ipqr}\, g_q \Omega_r, \tag{9.33}$$

где

$$l_{ipqr} = -\alpha_1 \delta_{ip}\delta_{qr} - \alpha_2(\delta_{iq}\delta_{pr} + \delta_{ir}\delta_{pq}) \tag{9.34}$$

суть изотропный тензор четвертого ранга.

Пусть

$$D_{ij} = \delta_{ij} + D\Omega_l \varepsilon_{ijk} k_k k_l, \tag{9.35}$$

$$\hat{Q}_{ij}^{(0)} = \hat{q}_{ij} + g_k[\hat{q}_{ijk} + \varkappa_k \hat{Q}_1(k^2\delta_{ij} - k_i k_j)], \tag{9.36}$$

где

$$D = \frac{2}{k^2} \frac{1}{\nu k^2 - i\omega}, \tag{9.37}$$

а также

$$\hat{q}_{ijk} = (\hat{Q}' + \frac{i}{2k}\frac{\partial \hat{Q}_1}{\partial k})(k^2\delta_{ij} - k_j k_i)k_k + i\hat{Q}_1(k_k\delta_{ij} - k_i\delta_{jk}), \tag{9.38}$$

в силу (8.82) и (9.14).

Из выражений (8.90), (9.24), (9.35) и (9.36) найдем, таким образом:

$$I_{ipqr} = \frac{i}{2}\iint \frac{k_p\varepsilon_{ijk} + k_i\varepsilon_{pjk}}{\eta k^2 - i\omega}\{(D^*\varepsilon_{jls}k_s\delta_{km} + D\varepsilon_{kms}k_s\delta_{jl})k_r\hat{q}_{lmq} + i[2\frac{\partial D^*}{\partial(k^2)}k_q\varepsilon_{jls}k_s k_r + D^*\varepsilon_{jlq}k_r + D^*\varepsilon_{jls}k_s\delta_{qr}]\hat{Q}_1(k^2\delta_{kl} - k_k k_l)\}\,d\mathbf{k}\,d\omega. \tag{9.39}$$

Нашей задачей является определение скаляров α_1 и α_2, или эквивалентных величин. Таковыми являются, например, скаляры I_{iiqq} и I_{ipip}, которые могут быть получены из (9.39) при помощи свертывания. Поскольку

$$k_q\hat{q}_{lmq} = [k^2\hat{Q}' + \frac{i}{2}(k\frac{\partial \hat{Q}_1}{\partial k} + 2\hat{Q}_1)](k^2\delta_{lm} - k_l k_m), \tag{9.40}$$

$$\varepsilon_{ijm}\hat{q}_{lmi} = (k^2\hat{Q}' + i\hat{Q}_1 + \frac{i}{2}k\frac{\partial \hat{Q}_1}{\partial k})\varepsilon_{ijl}k_i, \tag{9.41}$$

$$\varepsilon_{ilk}\hat{q}_{lmi} = (k^2\hat{Q}' + 2i\hat{Q}_1 + \frac{i}{2}k\frac{\partial \hat{Q}_1}{\partial k})\varepsilon_{imk}k_i \tag{9.42}$$

в силу (9.38), из (9.39) получим

$$I_{iiqq} = -\iint \frac{k^4}{\eta k^2 - i\omega}\{(D^* - D)(-2ik^2\hat{Q}' + 2\hat{Q}_1 + k\frac{\partial \hat{Q}_1}{\partial k}) + [4k^2\frac{\partial D^*}{\partial(k^2)} + 8D^*]\hat{Q}_1\}\,d\mathbf{k}\,d\omega =$$

$$= -\iint \frac{k^4}{\eta k^2 - i\omega}\{(D^* - D)(-2ik^2\hat{Q}' - 5\hat{Q}_1 +$$

$$+\frac{2\eta k^2}{\eta k^2 - i\omega}\hat{Q}_1) + [2k^2\frac{\partial}{\partial(k^2)}(D^* + D) + 8D^*] \times$$

$$\times \hat{Q}_1\} d\mathbf{k}\, d\omega, \qquad (9.43)$$

$$I_{ipjp} = -\iint\frac{k^4}{\eta k^2 - i\omega}\{(D^* - D)(-2ik^2\hat{Q}' +$$

$$+ 2\hat{Q}_1 + k\frac{\partial\hat{Q}_1}{\partial k}) + [4k^2\frac{\partial D^*}{\partial(k^2)} - D + 5D^*]\hat{Q}_1\} d\mathbf{k}d\omega =$$

$$= -\iint\frac{k^4}{\eta k^2 - i\omega}\{(D^* - D)(-2ik^2\hat{Q}' - 5\hat{Q}_1 +$$

$$+ \frac{2\eta k^2}{\eta k^2 - i\omega}\hat{Q}_1) + [2k^2\frac{\partial}{\partial(k^2)}(D^* + D) -$$

$$- D + 5D^*]\hat{Q}_1\} d\mathbf{k}\, d\omega. \qquad (9.44)$$

Нас в основном всегда интересовало определение величины α, одной третьей от следа тензора a_{ip}, для которой из выражений (9.32), (9.33) и (9.34) найдем

$$\alpha = \frac{1}{3} I_{iiqr} g_q \Omega_r = -\alpha_0(\mathbf{g}\cdot\Omega), \qquad (9.45)$$

причем

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 = -\frac{1}{9} I_{iiqq}. \qquad (9.46)$$

Таким образом, становится очевидным, что в (9.43) мы уже определили α_0. Подставляя явные выражения для D из (9.37), после некоторых упрощений получим [240].

$$\alpha_0 = -\frac{8\eta}{9}\iint\frac{\omega k^6\hat{Q}'(\mathbf{k},\omega)\, d\mathbf{k}\, d\omega}{(\eta^2k^4 + \omega^2)(\nu^2k^4 + \omega^2)} +$$

$$+ \frac{4}{9}\iint\frac{k^2Q_1(\mathbf{k},\omega)}{(\eta^2k^4 + \omega^2)^2(\nu^2k^4 + \omega^2)^2}\{\eta\nu(4\eta^2 + 3\eta\nu)\omega^2k^8 +$$

$$+ (3\eta^2 + 4\eta\nu - \nu^2)\omega^4k^4 - \omega^6\} d\mathbf{k}\, d\omega. \qquad (9.47)$$

Первое слагаемое уже известно из (9.26). Чтобы получить второе уравнение для скаляров α_1 и α_2, вспомним, что в случае однород-

ной турбулентности они равны друг другу, поэтому можно ожидать, что их разность будет простым выражением. Из (9.34) следует, что

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{6}(I_{ipip} - I_{iiqq}). \tag{9.48}$$

Подставляя (9.43) и (9.44), найдем

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{6}\iint \frac{k^4}{\eta k^2 - i\omega}(D + 3D^*) \times$$

$$\times \hat{\mathcal{V}}_1(\mathbf{k}\omega)\, d\mathbf{k}\, d\omega = \frac{2}{3}\iint \frac{k^2(2\eta\nu k^4 + \omega^2)}{(\eta^2 k^4 + \omega^2)(\nu^2 k^4 + \omega^2)} \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega)\, d\mathbf{k} d\omega. \tag{9.49}$$

Этот результат полностью определяет тензор a_{ip} для несжимаемого, неоднородного турбулентного течения, испытывающего влияние вращательного движения. В частности, видно, что неоднородность совместно с анизотропией обеспечивает наличие α-эффекта.

9.5. Обсуждение тензора a_{ip}

Мы рассмотрели неоднородную, несжимаемую турбулентность, для которой по предположению неоднородность состоит в линейной зависимости средних величин турбулентного поля скорости от $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x})$. При этих условиях была найдена турбулентная электродвижущая сила

$$\mathcal{E} = -\gamma \mathbf{c} \times \bar{\mathbf{B}}, \tag{9.50}$$

где γ задано выражением (9.31).

Чтобы интерпретировать этот результат, из выражений (8.85) и (9.14) найдем

$$\overline{u'^2} = \iint 2[\hat{Q}(\mathbf{k}, \omega) + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x})\hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega)]\, k^2 d\mathbf{k}\, d\omega \tag{9.51}$$

и получим

$$\nabla \overline{u'^2} = 2\iint \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega)\, k^2 d\mathbf{k}\, d\omega \mathbf{g}. \tag{9.52}$$

Если $\iint \hat{Q}_1 k^2 d\mathbf{k}\, d\omega \neq 0$, то (9.50) можно переписать в виде

$$\mathcal{E} = -\frac{\eta}{6}\frac{\iint \frac{k^4 \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega)}{\eta^2 k^4 + \omega^2} d\mathbf{k}\, d\omega}{\iint k^2 \hat{Q}_1(\mathbf{k}, \omega)\, d\mathbf{k}\, d\omega}(\nabla \overline{u'^2} \times \bar{\mathbf{B}}). \tag{9.53}$$

Теперь видно, что среднее магнитное поле вытесняется из области турбулентности при условии, что оба интеграла в (9.53) имеют одинаковый знак. Это поведение среднего магнитного поля было названо Рэдлером [207, 209] "турбулентным диамагнетизмом". Рэдлером обсуждался случай, когда неоднородность обусловлена только градиентом $\overline{u'^2}$ и было найдено, что $\hat{Q}_1$ пропорционально $\hat{Q}$, и, следовательно, $\hat{Q}_1$ всегда одного знака. Тогда отношение интегралов в (9.53) положительно. Однако в нашем немного более общем случае нет условий относительно знака $\hat{Q}_1$. Вполне возможно даже, что $\overline{u'^2} = \text{const}$, и все таки $\gamma \neq 0$.

Соотношение (9.30) показывает, что дополнительный перенос среднего магнитного поля происходит в направлении $\mathbf{g} \times \Omega$, которое связано с наличием среднего вращательного движения. Поскольку $\mathbf{g} \times \Omega$ параллельно $\bar{\mathbf{u}}$, то смысл этого члена аналогичен смыслу того члена в выражении (5.45), который содержит скаляр γ''. Таким образом, видно, что скаляры α_2', α_3', γ'' в (5.45) на самом деле не описывают независимых эффектов.

Для того чтобы оценить роль симметричной части тензора α_{ip}, следует подчеркнуть, что существенный результат состоит уже в том, что показано существование ненулевого α-эффекта для реальной турбулентности. Вопрос о том, могут ли величины α_0, α_1, α_2 быть использованы для конкретных исследований или же следует использовать какой-либо другой метод, мы оставляем для обсуждения.

Для получения оценки по порядку величины обратимся к соотношению (3.30), найденному в предельном случае высокой проводимости. Получим

$$\alpha \approx \tau_{cor} \overline{| \mathbf{u}' \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}' |}, \qquad (9.54)$$

и α оказывается пропорциональной интенсивности турбулентности $\overline{u'^2}$, деленной на некоторый масштаб длины, скажем λ_0. Этот масштаб длины λ_0 может быть получен либо из градиента $\overline{u'^2}$ или другой средней величины поля турбулентности, либо из градиента плотности массы или давления, как, например, масштаб высоты. Более того, известно, что ненулевую спиральность можно ожидать только при наличии среднего вращательного движения. Поэтому оценка α должна включать произведение $\Omega \tau_{cor}$. Все эти аргументы приводят к соотношению

$$|\alpha| \approx \frac{\overline{u'^2} \tau_{cor}^2}{\lambda_0} \Omega. \qquad (9.55)$$

В том случае, когда число Струхаля S предполагается приближенно равным единице, т.е. $\tau_{cor} u' \approx \lambda_{cor}$, имеем оценку

$$|\alpha| \approx \frac{\lambda_{cor}}{\lambda_0} u' \Omega \tau_{cor}. \qquad (9.56)$$

9.6. Дальнейшие результаты, относящиеся к тензору a_{ip}

Мы выяснили, насколько важен тензор a_{ip} и, в частности, величина α для решения проблемы динамо. Это будет все больше проявляться в последующих главах, посвященных генерации магнитных полей космических тел. Ввиду такой непосредственной связи первые результаты, относящиеся к a_{ip} или α, содержатся уже в ранних работах по теории динамо. Прежде всего следует упомянуть пионерскую работу Паркера [184], а также [189, 190, 192]. Рассматривая средние поля с осесимметричной геометрией, Паркер обнаружил, что среднее полоидальное магнитное поле возникает из тороидального под действием так называемой циклонической турбулентности, т.е. движения в конвективных ячейках под действием сил Кориолиса. В наших терминах этот эффект может рассматриваться как частное проявление α-эффекта.

Аналогичные результаты, хотя и основанные на совершенно ином подходе, были получены Брагинским [18, 19, 20]. Он рассматривал средние поля, которые определялись как средние по азимутальному углу, и вывел уравнения, описывающие эти поля в пределе больших магнитных чисел Рейнольдса. Прямое сравнение нашего подхода с подходом Брагинского сделать трудно. Однако тот и другой приводят к аналогичным уравнениям для средних полей. В теории Брагинского также появляется эффект, соответствующий α-эффекту (см. также [243, 244, 274, 276]).

Первые определения тензора a_{ip} и α были фактически выполнены Штеенбеком, Краузе и Рэдлером [265] в пределе низкой проводимости и для турбулентных полей скорости типа

$$u^{(0)} = \exp[a\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}]\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(A(\mathbf{x}, t)\exp[-(a+b)\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}]),$$

где A однородно и постоянно. Величина $a\mathbf{g}$, очевидно, является градиентом плотности, а $b\mathbf{g}$ – градиентом $\mathbf{u}^{(0)}$. Имеются и некоторые другие ограничения, которые слишком сложны для того, чтобы на них здесь останавливаться. Результат показывает существование отличного от нуля α-эффекта, обусловленного взаимодействием одного из градиентов с вращательным движением. Для отношения $\alpha_2 : \alpha_1$ было найдено значение – 1/4.

Без всяких ограничений на проводимость, учитывая среднюю неоднородность вращения, аналогичные вычисления проделал Краузе [112]. Кроме подтверждения вышеупомянутых результатов была определена электродвижущая сила, обусловленная тензором скоростей деформаций $(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$.

На основе метода двойных преобразований Фурье Робертсом и Соуордом [231] был получен ряд результатов, относящихся к псевдотензорам a_{ij}, b_{ijk}. Некоторые из результатов этих авторов, как упоминалось выше, совпадают с нашими. Так, для отношения $\alpha_2 : \alpha_1$ ими также было получено значение $-1/4$.

Модель, во многом сходная с нашей, была предложена в работе [126]. Однако она была математически более трудоемкой, так как вычисления проводились в (x, t)-пространстве.

Моффатом [170], а в дальнейшем и Соуордом [247] был определен тензор a_{ip} для случайной суперпозиции инерционных волн во вращающейся проводящей жидкости. Исследования, выполненные в [170], а также в [239], не ограничивались малыми вращательными скоростями. Интересно отметить, что для быстрого вращения тензор a_{ip} становится двухмерным относительно оси вращения, т.е. принимает вид

$$a_{ip} \approx a\left(\delta_{ip} - \frac{\Omega_i \Omega_p}{\Omega^2}\right), \qquad \text{при } \Omega \to \infty, \tag{9.57}$$

где $a = O(1)$.

В работах [91 – 93] были выполнены исследования, основанные на законе Ома с учетом члена, связанного с эффектом Холла. Для однородной, изотропной отражательно-неинвариантной турбулентности параметры α и β оказываются возрастающими функциями параметра Холла, однако влияние эффекта Холла уменьшается при увеличении электрической проводимости.

Следует также упомянуть исследования, в которых эти задачи решались не в общем виде, а скорее на основе частных моделей. Турбулентная диффузия магнитных областей в солнечной конвективной зоне в результате процесса случайного блуждания с учетом вращения, дифференциального по углам и по глубине, была описана в [141, 142]. В работах [295 – 297] также выводятся основные уравнения средних полей.

Глава 10. ОБ ОБРАТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДВИЖЕНИЯ

10.1. Вводные замечания

До сих пор наши рассмотрения были основаны на допущении о том, что движение не подвержено влиянию магнитного поля. Скорость считалась заданной величиной, и мы изучали ее влияние на магнитное поле. Эта ситуация характеризуется неравенством

$$\frac{\overline{\mathbf{B}^2}}{2\mu} \ll \frac{\rho}{2}\,\overline{u^2}, \tag{10.1}$$

т.е. средняя магнитная энергия мала по сравнению с кинетической энергией.

Настоящая глава как раз призвана дать некоторое представление о ситуациях, когда обратное воздействие магнитного поля на движение становится заметным. Ясно, что в этом случае соотношения становятся нелинейными, в частности турбулентная электродвижущая сила $\mathcal{E}$ больше не является линейным функционалом среднего магнитного поля, а псевдотензоры a_{ik}, b_{ikl}, например, становятся функциями $\overline{\mathbf{B}}$.

Как правило, полагают, что турбулентность подавляется магнитным полем и что такие характерные параметры, как α и β, являются убывающими функциями $\overline{B}$. Но это утверждение не во всех случаях является верным. Как мы увидим в дальнейшем, интенсивность турбулентности $\overline{u^2}$ может возрастать для малых $\overline{B}$, хотя она стремится к нулю при $\overline{B} \to \infty$. Более того, эксперименты с жидким натрием, описанные в работе [102] для случая, когда движения происходили между плоскостями, перпендикулярными приложенному магнитному полю, и не менялись вдоль магнитного поля, показывают, что турбулентность не просто подавляется приложенным магнитным полем, а преобразуется в двухмерную структуру. Этот результат является достаточно очевидным. Пусть

$\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $B = \text{const}$,

и $\mathbf{u} = (\frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x}, 0)$, $A = A(x, y)$,

тогда получим соотношение

$$\mathbf{u} \times \mathbf{B} = (-B\frac{\partial A}{\partial x}, -B\frac{\partial A}{\partial y}, 0) = -\operatorname{grad}(AB), \qquad (10.2)$$

показывающее, что электродвижущая сила $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ является градиентом и потому компенсируется объемными зарядами. Следовательно, однородное магнитное поле и двумерное несжимаемое течение не взаимодействуют между собой.

Исследования турбулентных проводящих жидкостей, подверженных влиянию магнитного поля, были начаты Ленертом [140], последующие результаты были получены в работах [56, 168, 176, 177, 180, 217, 231, 237, 282]. Теоретический формализм, которым мы будем здесь пользоваться, разработан в основном Рюдигером [237]. Наши рассмотрения основаны на приближении, в котором учтены корреляции вплоть до второго порядка. Это означает, что флуктуирующее магнитное поле мало по сравнению со средним магнитным полем, т.е.

$$\overline{\mathbf{B}'^2} \ll \overline{\mathbf{B}^2}. \qquad (10.3)$$

Из этого соотношения и (7.150) видно, что кроме (3.12) мы должны потребовать

$$\min(\mathrm{Rm}, \mathrm{RmS}) \ll 1. \qquad (10.4)$$

Ограничиваясь корреляциями второго порядка, невозможно также рассмотреть такие случаи, для которых существенно взаимодействие флуктуирующего магнитного поля и флуктуирующего поля скорости. Поэтому мы не будем приводить каких-либо утверждений, связанных с гипотезой Бэтчелора [13]

$$\frac{\overline{B'^2}}{2\mu} \approx \frac{\rho}{2}\overline{u'^2}, \qquad (10.5)$$

которая часто предполагается справедливой. Для таких исследований требуются высшие корреляционные приближения и определенная процедура замыкания или другие методы. Здесь мы отсылаем читателя к работам [67, 68][1].

---

[1] Некоторые идеи, относящиеся к динамо-моделям, учитывающим обратное влияние магнитного поля на движения, обсуждались Краузе [10*].

10.2. Влияние однородного магнитного поля на корреляционный тензор

Рассмотрим несжимаемое турбулентное течение, подверженное влиянию магнитного поля, причем $\overline{\mathbf{B}}$ будет постоянно и $\overline{\mathbf{u}} = 0$. Поле скорости подчиняется уравнению Навье–Стокса (8.61), где $\mathbf{F}$ определяется как сумма силы Лоренца, деленной на плотность массы и силы $\mathbf{F}_0$, возбуждающей турбулентное движение, т.е.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu\rho} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_0 . \tag{10.6}$$

Ограничиваясь корреляционным приближением второго порядка, имеем (8.66). Предполагая, кроме того, (10.3), получим уравнения

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} - \nu \Delta u_i' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{1}{\mu\rho} \frac{\partial \overline{B}_j B_j'}{\partial x_i} + \frac{1}{\mu\rho} \overline{B}_j \frac{\partial B_i'}{\partial x_j}, \tag{10.7}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0. \tag{10.8}$$

Для фурье-компонент имеем

$$(-i\omega + \nu k^2)\, \hat{u}_i = -i k_i \left(\frac{\hat{p}}{\rho} - \frac{1}{\mu\rho} \hat{B}_j \hat{B}_j\right) + i (\mathbf{k} \cdot \overline{\mathbf{B}}) \hat{B}_i + \hat{F}_{oi}, \tag{10.9}$$

$$k_i \hat{u}_i = 0, \tag{10.10}$$

и находим

$$(-i\omega + \nu k^2)\, \hat{u}_i = \frac{i}{\mu\rho} (\mathbf{k} \cdot \overline{\mathbf{B}}) \hat{B}_i + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \hat{F}_{0j}, \tag{10.11}$$

если исключим давление.

Для исчезающе малого среднего магнитного поля (10.11) примет вид

$$(-i\omega + \nu k^2)\, \hat{u}_i(0) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \hat{F}_{0j} . \tag{10.12}$$

Предположим теперь, что сила, возбуждающая турбулентное движение, не зависит от приложенного магнитного поля. Тогда мы можем написать (10.11) в виде

$$(-i\omega + \nu k^2)(\hat{u}_i - \hat{u}_i^{(0)}) = \frac{i}{\mu\rho}(\mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{B}})\hat{B}_i, \qquad (10.13)$$

и, таким образом, имеем уравнение, которое описывает искажение турбулентности $u^{(0)}$, вызванное средним магнитным полем.

Система уравнений, описывающих нашу физическую систему, замыкается уравнением индукции, которое в данном случае имеет вид

$$(-i\omega + \eta k^2)\hat{B}_i = i(\mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{B}})\hat{u}_i. \qquad (10.14)$$

Объединяя (10.13) и (10.14), получим

$$\left\{1 + \frac{(\mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{B}})^2}{\mu\rho}\,\frac{1}{(-i\omega+\eta k^2)(-i\omega+\nu k^2)}\right\}\hat{u}_i(\mathbf{k},\omega) = \hat{u}_i^{(0)}(\mathbf{k},\omega). \qquad (10.15)$$

Переписывая это уравнение еще раз для индекса j и аргументов $\mathbf{k}$ ω и перемножая оба эти уравнения, получим из (6.18) после интегрирования по $\mathbf{k}$ и ω

$$\left\{1 + \frac{(\mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{B}})^2}{\mu\rho}\,\frac{1}{(-i\omega+\eta k^2)(-i\omega+\nu k^2)}\right\}\times$$

$$\times\left\{1 + \frac{(\mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{B}})^2}{\mu\rho}\,\frac{1}{(i\omega+\eta k^2)(i\omega+\nu k^2)}\right\}\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \hat{Q}_{ij}^{(0)}(\mathbf{k},\omega), \qquad (10.16)$$

или, более явно [238],

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \frac{\hat{Q}_{ij}^{(0)}(\mathbf{k},\omega)}{1 + \dfrac{(\mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{B}})^2}{\mu\rho}\,\dfrac{2\eta\nu k^4 - 2\omega^2 + (\mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{B}})^2/\mu\rho}{(\eta^2k^4+\omega^2)(\nu^2k^4+\omega^2)}}. \qquad (10.17)$$

Оба тензора, $\hat{Q}_{ij}$ и $\hat{Q}_{ij}^{(0)}$, являются положительно-полуопределенными, когда один из них положительно полуопределенный, так как множитель в (10.16) и (10.17) является, очевидно, положительным.

Очень важным, хотя также вполне очевидным результатом, является тот факт, что, согласно (10.17), корреляционный тензор двумерной турбулентности, представленной выражением (7.76), не меняется при наличии магнитного поля в случае, когда $\mathbf{e}$ параллельно $\overline{\mathbf{B}}$.

10.3. Обсуждение результата

Рассмотрим сначала случай слабого магнитного поля, когда из (10.17) следует

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k},\omega)=\hat{Q}_{ij}^{(0)}(\mathbf{k},\omega)\left\{1-\frac{(\mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{B}})^2}{\mu\rho}\;2\;\frac{\eta\nu k^4-\omega^2}{(\eta^2k^4+\omega^2)(\nu^2k^4+\omega^2)}\right\}. \tag{10.18}$$

Для интенсивности турбулентности мы найдем, таким образом,

$$\overline{u'^2}=\overline{u_0'^2}-2\,\frac{\overline{B}_i\overline{B}_j}{\mu\rho}\iint\frac{k_ik_j(\eta\nu k^4-\omega^2)}{(\eta^2k^4+\omega^2)(\nu^2k^4+\omega^2)}\hat{Q}_{kk}^{(0)}(\mathbf{k},\omega)\,d\mathbf{k}\,d\omega. \tag{10.19}$$

Совершенно неожиданно оказывается, что турбулентность не является обязательно затухающей, так как первый множитель в подынтегральном выражении не имеет определенного знака. Выражение (10.19) может быть переписано в виде

$$\overline{u'^2}=\overline{u_0'^2}+\frac{\overline{B}_p\overline{B}_q}{\mu\rho}\iint k_pk_q\,\frac{\partial(\hat{Q}_{ii}^{(0)}(\mathbf{k},\omega)+\hat{Q}_{ii}^{(0)}(\mathbf{k},-\omega)}{\partial\omega}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{(\eta-\nu)k^2}{\eta\nu k^4+\omega^2}}{(\eta-\nu)k^2}\,d\mathbf{k}\,d\omega, \tag{10.20}$$

который показывает, что интенсивность турбулентности всегда уменьшена для таких типов турбулентности, когда $\hat{Q}_{ii}^{(0)}(\mathbf{k},\omega)+\hat{Q}_{ii}^{(0)}(\mathbf{k},-\omega)$ является убывающей функцией при положительных ω. Для увеличения $\overline{u'^2}$ необходимо возрастание этой функции в достаточно большом интервале ω.

Величина α оказывается следующей:

$$\alpha=\alpha_0-\frac{2i}{3}\,\frac{B_lB_m}{\mu\rho}\iint\frac{k_lk_m(\eta\nu k^4-\omega^2)}{(\eta^2k^4+\omega^2)(\nu^2k^4+\omega^2)}\times$$

$$\times\frac{\varepsilon_{ijk}k_i\hat{Q}_{jk}^{(0)}(\mathbf{k},\omega)}{\eta k^2-i\omega}\,d\mathbf{k}\,d\omega, \tag{10.21}$$

и мы видим опять, что α также не обязательно уменьшается под действием магнитного поля. Однако в пределе низкой проводимости обе величины, как $\overline{u'^2}$ так и α, будут уменьшены, что нетрудно увидеть из (10.19) и (10.21) при $\eta\to\infty$. Что касается $\overline{u'^2}$, этот результат находится в согласии с экспериментами, описанными в работе [2].

Пусть $\overline{B}$ теперь будет большим и исключим случай двумерной турбулентности. Рассмотрим среднеквадратичное значение флуктуаций скорости и из (10.17) найдем

$$\overline{u'^2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\pi} \frac{\hat{Q}_{ii}(\mathbf{k},\omega)\,k^2 dk \sin\theta\, d\theta\, d\omega}{(1+A\overline{B}^2\cos^2\theta)(1+A^*\overline{B}^2\cos^2\theta)}, \qquad (10.22)$$

причем

$$A = \frac{k^2}{\mu\rho}\,\frac{1}{(\eta k^2 - i\omega)(\nu k^2 - i\omega)}. \qquad (10.23)$$

Подставляя $s = -\overline{B}\cos\theta$, получим

$$\overline{u'^2} = \frac{2\pi}{\overline{B}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{-\overline{B}}^{\overline{B}} \frac{\hat{Q}_{ii}(\mathbf{k},\omega)\,k^2 dk\, ds\, d\omega}{(1+As^2)(1+A^*s^2)}. \qquad (10.24)$$

Рассматривая теперь предел $\overline{B}\to\infty$, мы обнаружим, что интеграл принимает конечное значение. Отсюда следует

$$\overline{u'^2} = O\left(\frac{1}{\overline{B}}\right), \text{ при } \overline{B}\to\infty. \qquad (10.25)$$

До некоторой степени этот результат является неожиданным, так как из (10.22) на первый взгляд можно было бы ожидать уменьшения $\overline{u'^2}$ в зависимости от $\overline{B}^4$. Очевидно, значительно более медленный распад обусловлен модами с $\mathbf{k}\cdot\overline{\mathbf{B}}\approx 0$.

Относительно этого медленного распада мы должны сделать вывод, что турбулентная электродвижущая сила не будет стремиться к нулю при $\overline{B}\to\infty$, поскольку она связана с произведением $\hat{Q}_{ij}\overline{B}_k$. Однако, рассматривая динамо-возбуждение, можно ожидать, что магнитное поле так повлияет на движение, что оно потеряет способность дальнейшей генерации магнитного поля.

Рассмотрим однородную изотропную турбулентность, когда ее корреляционный тензор задается (6.43). В разд. (3.9) было показано, что самовозбуждение обусловлено α-эффектом, т.е. способностью движения создавать электродвижущую силу, параллельную возбуждаемому магнитному полю. Поэтому зададимся вопросом, как ведет себя компонента $\mathcal{G}$, параллельная $\overline{\mathbf{B}}$ при $\overline{\mathbf{B}}\to\infty$. Из (5.35) и (7.1) находим

$$\mathcal{G}_{\parallel} = \frac{\overline{B}_i \mathcal{G}_i}{\overline{B}} = i\varepsilon_{ilq}\frac{\overline{B}_i\overline{B}_j}{\overline{B}} \iint \frac{k_j \hat{Q}_{lq}(\mathbf{k},\omega)}{\eta k^2 - i\omega}\, d\mathbf{k}\, d\omega. \qquad (10.26)$$

Возьмем $\hat{Q}_{ij}^{(0)}$ из (6.43) и с помощью (10.17) получим

$$\mathcal{G}_{\parallel} = -4\pi\overline{B} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\pi} \frac{k^3\cos^2\theta\sin\theta}{(\eta k^2 - i\omega)(1+A\overline{B}^2\cos^2\theta)(1+A^*\overline{B}^2\cos^2\theta)} \times$$

$$\times \frac{\partial \hat{C}}{\partial k}\, dk\, d\theta\, d\omega =$$

$$= -\frac{4\pi}{\overline{B}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{-\overline{B}}^{+\overline{B}} \frac{k^3 u^2 du}{(\eta k^2 - i\omega)(1 + Au^2)(1 + A^* u^2)} \frac{\partial \hat{C}}{\partial k}\, dk\, d\omega. \qquad (10.27)$$

Опять интеграл по u сходится к конечному значению при $\overline{B} \to \infty$. Следовательно, становится очевидным, что

$$\mathcal{E}_{||} = O\left(\frac{1}{\overline{B}^2}\right), \text{ при } \overline{\mathbf{B}} \to \infty, \qquad (10.28)$$

т.е. компонента турбулентной электродвижущей силы $\mathcal{E}$, параллельная среднему магнитному полю, стремится к нулю, если среднее магнитное поле стремится к бесконечности. Этот результат действительно свидетельствует о том, что движение теряет способность генерировать магнитное поле при неограниченном нарастании поля.

10.4. Двухмерная турбулентность

В разд. 10.1 упоминалось об экспериментах с жидким натрием, которые показывают, что турбулентность становится двухмерной под влиянием сильного магнитного поля. Впервые эти результаты были опубликованы в [102], а в работах [105, 106, 291, 292] исследования были продолжены. Переход однородной турбулентности из изотропного и трехмерного начального состояния в двухмерное был продемонстрирован также численным экспериментом [242].

В разд. 7.6 был получен двухмерный коэффициент магнитной диффузии. Из результата (7.94) видно, что по порядку величины нет отличия от трехмерного случая. Однако результат был получен в рамках электродинамики средних полей, т.е. без учета обратного воздействия магнитного поля на движение. Поэтому мы не можем сказать, применим ли этот результат в случае сильных магнитных полей.

Чтобы внести бо́льшую ясность, сошлемся на соотношение (10.2), которое показывает, что взаимодействие постоянного магнитного поля с двухмерным течением несжимаемой жидкости не возбуждает токов. Перейдем теперь к более общей модели [132]: пусть магнитное поле будет параллельно направлению оси Z декартовой системы координат x, y, z, а зависимость от пространственных координат и времени пусть будет произвольной, т.е.

$$\mathbf{B} = (0, 0, B(x, y, t)). \qquad (10.29)$$

Зависимость B от z отсутствует вследствие $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Двухмерное течение $\mathbf{u}$ будет всегда происходить в плоскостях, ортогональных $\mathbf{B}$ и не будет меняются вдоль направления $\mathbf{B}$. Поэтому оно может быть представлено в виде

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \text{ причем } \mathbf{A} = (0,0, A(x, y, t)). \tag{10.30}$$

Надо заметить, что взаимодействие $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$ возбуждает токи, так как

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \operatorname{grad} A \times \operatorname{grad} B. \tag{10.31}$$

Эти токи полностью находятся в плоскостях, ортогональных направлению z, и не меняется вдоль z. Следовательно, индуцированное магнитное поле также имеет вид (10.29), т.е. оно направлено вдоль z и не меняется в этом направлении.

Рассмотрим теперь зависимость от времени. Электродвижущая сила индуцируется согласно первому закону Максвелла:

$$\operatorname{rot} E = -\dot{\mathbf{B}}. \tag{10.32}$$

Токи, вызванные этой электродвижущей силой, находятся опять в плоскостях, ортогональных $\mathbf{B}$, и не меняются вдоль $\mathbf{B}$. Таким образом, приходим к выводу: магнитное поле типа (10.29) остается полем этого же типа при взаимодействии с двухмерным течением несжимаемой жидкости вида (10.30).

Сила Лоренца

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2\mu} \operatorname{grad}\mathbf{B}^2 + \frac{1}{\mu}(\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{B} \tag{10.33}$$

для магнитного поля (10.29) отлична от нуля, но является градиентом, так как $(\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{B} = 0$. Следовательно, сила Лоренца для рассматриваемого магнитного поля уравновешивается давлением и не влияет на движение.

Таким образом, приходим к замечательному результату, что двухмерное течение типа (10.30) может оказывать влияние на магнитное поле типа (10.29) и искажать его, при этом не испытывая воздействия самого поля, даже очень сильного.

Применим эти выводы к случаю, когда $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ является двухмерным, изотропным, хаотическим движением типа рассмотренного в разд. 7.6. Как и ранее, разложим B на усредненную и флуктуирующую компоненты

$$B(x, y, t) = \overline{B}(x, y, t) + B'(x, y, t) \tag{10.34}$$

и будем полагать, что характерный масштаб усредненной компоненты больше масштаба флуктуирующей. Тогда в соответствии с результатами, полученными в разд. 7.6, среднее магнитное поле будет затухать из-за турбулентных движений, причем коэффициент двухмерной турбулентной магнитной диффузии $\beta^{(2)}$ дается выражениями (7.83) и (7.94). Этот результат остается в силе для среднего магнитного поля типа (10.29) произвольной напряженности в отличие от случая затухания, вызванного трехмерной изотропной турбулентностью.

Таким образом, видно, что даже сильное магнитное поле, подавляя турбулентность, не перестает затухать. Поле лишь делает турбулентность двухмерной и, затухая, не влияет на структуру турбулентных движений.

С точки зрения применений к солнечным пятнам заметим, что вышеприведенные результаты остаются справедливыми для стратифицированной среды с $\rho = \rho(z)$, так как движения типа (10.30) удовлетворяют уравнению неразрывности $\mathrm{div}\,\rho\,\mathbf{u} = 0$ и в этом случае.

10.5. Применение к распаду солнечных пятен

Согласно данным, которые приведены в разд. 3.7 для конвективной зоны Солнца, имеем

$$\eta = \frac{1}{\mu\sigma} \approx 10^3 \text{ м}^2/\text{с}, \tag{10.35}$$

и для солнечного пятна диаметром $\bar{\lambda} = 10^4$ км найдем время распада

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}^2}{\eta} \approx 3\cdot 10^3 \text{ лет}, \tag{10.36}$$

что явно противоречит наблюдениям. Дело в том, что это явление следует интерпретировать как турбулентный распад. Согласно данным разд. 3.7,

$$\eta_T \approx \beta \approx 10^7 \text{ м}^2/\text{с} \approx 10^4 \eta. \tag{10.37}$$

Вычисляя время распада солнечного пятна

$$\tau = \frac{\bar{\lambda}^2}{\eta} \approx 0{,}3 \text{ года} \approx 4 \text{ мес.}, \tag{10.38}$$

обнаруживаем правильный порядок величины, характерный для долгоживущих, наблюдаемых в течение нескольких оборотов Солнца пятен.

Приведенный выше анализ, однако, имеет существенный недостаток, поскольку влияние сильного магнитного поля в солнечном пятне не учитывалось. Поэтому сейчас для нас окажутся важными выводы предыдущего раздела. Хотя магнитное поле влияет на турбулентность, делая ее двухмерной, поле не перестает затухать. Двухмерная турбулентность усиливает затухание магнитного поля в той же степени, в какой это затухание усиливалось бы под действием трехмерной турбулентности того же масштаба. Таким образом, оценка (10.38) остается справедливой, если заменить η_T на $\eta_T^{(2)}$. Следует отметить, что предположение о подавленной конвекции объясняет пониженную яркость солнечных пятен, но не объясняет их быстрый распад в течение нескольких недель или месяцев. Предположение о двухмерной турбулентности в солнечном пятне объясняет как быстрый распад, так и пониженную яркость, поскольку двухмерная турбулентность препятствует конвективному переносу энергии также вдоль магнитного поля.

Рассмотрение простой модели показывает, что концепция турбулентного затухания магнитных полей в солнечных пятнах может быть использована также для объяснения тонких деталей, обнаруженных при наблюдениях.

В качестве $B(x, y, t)$ в (10.29) возьмем

$$B(x, y, t) = \Phi_0 \frac{1}{4\eta_T^{(2)} t} \exp\left(-r^2/4\eta_T^{(2)} t\right), \quad r^2 = x^2 + y^2. \tag{10.39}$$

Это выражение описывает затухающее магнитное поле в направлении z, которое при $t = 0$ концентрируется в точке $r = 0$. Поток Φ_0, пронизывающий плоскость (x, y), не зависит от времени.

Представим тень пятна в виде круговой области, где напряженность магнитного поля больше критического значения B_c. Пусть площадь этой области будет A_u, а ее радиус – r_u. Величины A_u и r_u являются функциями времени. Здесь $\bar{\tau}$ означает время жизни пятна. При $t = \bar{\tau}$ максимальным значением B будет B_c, а A_u стремится к нулю. Подставляя B_c и $\bar{\tau}$ в (10.39), получим

$$B(x, y, t) = B_c \frac{\bar{\tau}}{t} \exp\left(-r^2/4\eta_T^{(2)} t\right), \tag{10.40}$$

а также найдем соотношение

$$1 = \frac{\bar{\tau}}{t} \exp\left(-\frac{r_u^2}{4\eta_T^{(2)} t}\right). \tag{10.41}$$

и, следовательно, для модели тени

$$A_u(t) = 4\pi\eta_T^{(2)} t\,(\lg\bar{\tau} - \lg t). \qquad (10.42)$$

Видно, что $A_u(t)$ имеет максимум при $t_{max} = \bar{\tau}/e$, а именно

$$A_{u,\,max} = \frac{4\pi}{e}\,\eta_T^{(2)}\bar{\tau}, \qquad (10.43)$$

и, более того, при $t = \bar{\tau}$ область с площадью $A_u(t)$ распадается со скоростью

$$\left(\frac{dA_u}{dt}\right)_{t=\bar{\tau}} = -4\pi\eta_T^{(2)}. \qquad (10.44)$$

Из анализа большого числа наблюдений Вальдмайер обнаружил зависимость

$$\bar{\tau} = 0{,}1\,A_{u,\,max}, \qquad (10.45)$$

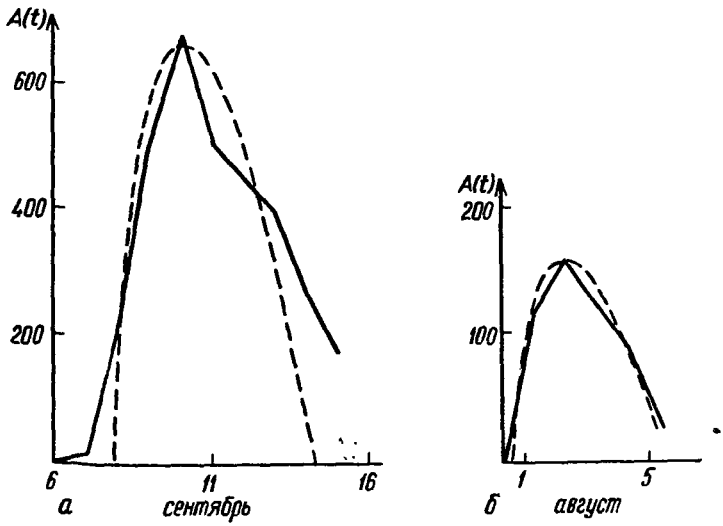
где время жизни выражено в сутках, а площадь – в миллионных долях видимого полушария Солнца. Интерпретируя (10.43) как правило Вальдмайера, получим оценку

$$\frac{4\pi}{e}\,\eta_T^{(2)} = 10^{-5}\ \frac{(\text{площадь полушария Солнца})}{\text{сутки}}, \qquad (10.46)$$

т.е. коэффициент турбулентной диффузии приблизительно равен

$$\eta_T^{(2)} \approx 7\cdot10^7\ \text{м}^2/\text{с}. \qquad (10.47)$$

Согласие с (10.37) достаточно удовлетворительное. Тот факт, что значение $\eta_T^{(2)}$, полученное из правила Вальдмайера, оказалось больше, чем значение, полученное из анализа конвекции, станет яснее, если обратиться к более подробным исследованиям Бумбы [35]. Бумба представил результаты статистического анализа зависимости площади солнечных пятен от времени. Он обнаружил две категории групп солнечных пятен: А) группы с быстрым уменьшением площади; Б) группы с пологим участком на кривой спада. Все группы, которые быстро растут и распадаются в первые дни, принадлежат к категории А. Некоторые из групп, которые живут долго на протяжении нескольких оборотов Солнца, и особенно группы, наблюдаемые к концу своей жизни, становятся медленно изменяющимися и принадлежат к категории Б.



Р и с. 10.1. Модельные кривые (штриховые линии), наложенные на кривые развития во времени площадей групп пятен для нерекуррентных групп No. 18195 (*а*) и No. 18143 (*б*), полученные Бумбой. Рост и распад соответствуют значениям коэффициента турбулентной диффузии $\eta_T^{(2)}$, большим, чем значения коэффициента конвективной диффузии в неактивных областях в 70 раз в случае (*а*) и в 20 раз в случае (*б*).

Из анализа Бумбы видно, что долгоживущие пятна (категория Б) распадаются к концу жизни с постоянной скоростью, независимо от их размера. Этот результат согласуется с соотношением (10.44). Скорость распада, найденная из наблюдений, равна

$$\left(\frac{dA_u}{dt}\right)_{t=\bar{\tau}} = -4{,}2 \cdot 10^{-6} \frac{(\text{площадь полушария Солнца})}{\text{сутки}}, \tag{10.48}$$

и из (10.44) следует, что

$$\eta_T^{(2)} \approx 10^7 \text{ м}^2/\text{с}. \tag{10.49}$$

Этот результат поразительно согласуется со значением (10.37), полученным из данных о наблюдаемой конвекции.

Сравним теперь кривые нашей модели (рис. 10.1) с кривыми, полученными из наблюдений площадей групп солнечных пятен в период роста и начальной стадии уменьшения (категория А). На рис. 10.1 даны два примера, где модельные расчеты привязаны к наблюдениям двух групп пятен с совершенно различными значения-

ми максимумов площадей, а также $\eta_T^{(2)}$. Из оценки скорости уменьшения площади, сделанной Бумбой для большого числа групп солнечных пятен категории А, следует, что

$$(\eta_T^{(2)})_A = 25(\eta_T^{(2)})_Б . \qquad (10.50)$$

Теперь видно, почему значение $\eta_T^{(2)}$, полученное из правила Вальдмайера (10.45) и (10.47), лежит между значениями для категорий А и Б: правило Вальдмайера получено при усреднении по всем группам солнечных пятен.

Объединяя (7.94) и (10.50), придем к соотношению

$$(\overline{u'^2}\tau_{cor})_A \approx 25(\overline{u'^2}\tau_{cor})_Б, \qquad (10.51)$$

которое заключает в себе объяснение различного поведения пятен категорий А и Б, основанное на различии в масштабах турбулентности. Действительно, всплывание пятна – это вынужденный процесс, который также может порождать турбулентное движение. Возрастанием турбулентной скорости в 5 раз можно было бы объяснить (10.51). Более того, всплывание большой группы пятен является в большей степени вынужденным процессом, чем всплывание малой группы. Это могло бы объяснить значительное различие между значениями $\eta_T^{(2)}$ для двух примеров на рис. 10.1.

Глава 11. ПРОБЛЕМА ДИНАМО В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

11.1. Вопрос о возникновении космических магнитных полей

Проблема динамо, которой будут посвящены последующие главы, возникла главным образом благодаря желанию найти объяснение возникновения и поведения магнитных полей Земли, Солнца и других космических объектов.

Напомним вкратце самое основное, что известно об этих полях (более подробная информация содержится в разд. 17.1, 17.3 и 17.5). У Земли наблюдается магнитное поле, которое на поверхности и в околоземном космическом пространстве имеет дипольную структуру. Это поле до некоторой степени симметрично относительно оси вращения. За длительные интервалы времени его можно считать стационарным. На Солнце было обнаружено огромное число магнитных явлений. Они связаны с общим магнитным полем, которое в основном состоит из двух (по одному в каждом полушарии) противоположно ориентированных подповерхностных поясов и из дипольной составляющей, причем все эти поля в известной степени симметричны относительно оси вращения. Общее поле осциллирует с периодом цикла солнечной активности, т.е. 22 года. У некоторых звезд также обнаружены магнитные поля. Во многих случаях считают, что структура этих полей значительно отклоняется от симметрии относительно оси вращения. Для наблюдателя, вращающегося вместе со звездой, они могут быть стационарными.

В дальнейшем проанализируем возможные причины появления таких магнитных полей. Как известно, магнитные поля появляются либо благодаря намагничиванию вещества, которое обусловлено магнитными моментами, локализованными в атомах или молекулах, либо индуцируются электрическими токами, вызванными движением свободных заряженных частиц.

Намагничивание, которое предположительно является источником магнитного поля, должно быть ферромагнитным по своей приро-

де. Существование ферромагнетизма, однако, зависит от особых условий (например от температуры), которые вряд ли выполняются в упомянутых космических телах. Источники магнитного поля Земли, по всей вероятности, находятся в его ядре, температура которого так высока, что всякий ферромагнетизм должен быть исключен. Что касается Солнца, то здесь возникает дополнительная трудность, связанная с необходимостью объяснить изменения поля. По этим и другим причинам как источник магнитных полей рассмотренных объектов ферромагнетизм можно исключить.

Для существования электрических токов требуется как электрически проводящее вещество, так и электрическое поле или электродвижущие силы. Недра Земли и планет состоят из вещества с металлическими свойствами. Вещество Солнца и нормальных звезд находится в состоянии плазмы. Таким образом, во всех этих объектах электрическую проводимость можно считать высокой.

Обсудим сначала случай, когда электрическое поле, будучи созданным некоторым образом, продолжает существовать в отсутствие электродвижущих сил. В любом случае это электрическое поле, и, следовательно, электрические токи и связанное с ним магнитное поле должны затухать. Энергия, запасенная в этих полях, превращается в тепло. Время затухания поля Земли было оценено и оказалось порядка 10^5 лет (ср. с разд. 11.3). Поэтому наличие геомагнитного поля, которое остается постоянным в течение гораздо более длительного времени, нельзя понять без предположения о соответствующих электродвижущих силах. В случае Солнца или звезд сравнимых размеров времена затухания могут достигать или превышать по порядку величины 10^{10} лет и, следовательно, превышать предполагаемые возрасты этих объектов (ср. с разд. 11.3). Тем не менее предположение об изначальном поле не может лежать в основе объяснения солнечного магнитного поля, так как оно периодически меняется со временем. Те звездные магнитные поля, которые незначительно меняются во времени, могут рассматриваться как остатки от ранних стадий звездной эволюции и могут теперь существовать без помощи какой-либо электродвижущей силы. Конечно, первичные процессы, которые привели к генерации этих полей, все еще являются предметодом для обсуждения.

Что касается электродвижущих сил, то будем различать силы неэлектромагнитной и электромагнитной природы. К первым отнесем такие электродвижущие силы, когда заряженные частицы движутся

только под действием электромагнитных полей, а ко вторым — все остальные случаи.

В космических телах может действовать ряд электродвижущих сил неэлектромагнитной природы. Различие в массах положительно и отрицательно заряженных частиц приводит к различному инерционному поведению при ускорении, особенно в случае вращения. Результатом этого является электродвижущая сила, аналогичная той, которая появляется в эффекте Толмена, наблюдаемом в твердотельных проводниках. Неоднородности состава и температуры вещества могут также вызвать электродвижущие силы, которые соответствуют гальвано- и термоэлектрическим эффектам. Подробный анализ показывает, что все электродвижущие силы этого типа вряд ли подходят для объяснения магнитных полей рассмотренных космических тел. В случае Земли поля, которые могут генерироваться таким образом, отличаются от наблюдаемого поля на много порядков величины. Аналогично магнитное поле Солнца едва ли можно понять на этой основе, хотя бы вследствие его зависимости от времени. Для некоторых звезд электродвижущая сила, обусловленная различным инерционным поведением разноименно заряженных частиц, может привести к полям с напряженностью в несколько сот гаусс, однако их геометрические структуры будут противоречить наблюдениям. Во всяком случае, можно утверждать, что электродвижущие силы неэлектромагнитной природы не подходят для общего объяснения магнитных полей космических объектов [1].

Обратимся к электродвижущим силам электромагнитной природы. Простейшей из них является чрезвычайно важная для всей магнитной гидродинамики электродвижущая сила, которая действует в веществе, движущемся в присутствии магнитного поля. Она описывается членом Лоренца в законе Ома, т.е. членом $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ в последнем уравнении (2.2). Как известно, эта электродвижущая сила также ответственна за работу динамо-машин, используемых для получения электрического тока. В динамо-машине, возбуждаемой извне, магнитное поле, необходимое для появления электродвижущей силы в движущемся якоре, существует независимо от этой силы и вызываемых ею токов. В динамо-машине с самовозбуждением, на возможности

---

[1] Имеется ряд работ (см., например, [7**, 8**]) в которых показана важная, а возможно, и определяющая роль гальвано- и термомагнитных явлений для объяснения магнитных полей небесных тел. — *Прим. ред.*

которого впервые указал Сименс, магнитное поле генерируется при помощи этих токов. Только в первый момент для пуска машины необходимо магнитное поле от некоторого внешнего источника. Это затравочное поле может быть произвольно малым. Оно лишь инициирует процесс, в котором электродвижущая сила, электрические токи и магнитные поля непрерывно растут, усиливая друг друга. Тогда, очевидно, возрастают также силы Лоренца, которые противодействуют движению якоря. Если имеющиеся механические силы больше не способны поддерживать движение или если вступают в действие другие ограничивающие эффекты, то рост прекратится. В зависимости от специальной конструкции машин могут генерироваться как постоянные, так и переменные токи и соответствующие магнитные поля.

Возникает вопрос, могут ли магнитные поля космических тел порождаться процессом, аналогичным тому, который имеет место в динамо-машине с самовозбуждением. Эта возможность по отношению к Солнцу впервые указана Лармором [139]. Как было показано выше, затравочные поля имеются всегда. Кроме того, можно полагать, что во всех космических телах, которые здесь рассматриваются, имеются внутренние движения. Однако существует важное различие между ситуациями в динамо-машине и космическом объекте. Динамо-машина состоит не только из проводящих, но и из изолирующих частей, в частности имеются соединительные провода, окруженные изоляцией. Поэтому проводящий материал заполняет многосвязную область. Особое расположение проводов позволяет найти конфигурацию токов и, следовательно, конфигурацию и величину магнитного поля для того, чтобы удовлетворить требованиям принципа динамо. Проводящее вещество космического объекта в общем случае полностью заполняет некоторую односвязную область. Если исходное магнитное поле и движение заданы, то тем самым фиксируется распределение электрического тока и генерируемого этим движением магнитного поля. Было бы наивно полагать, что для решения поставленного вопроса достаточно иметь исходные магнитные поля и движения, которые приводят к процессам, аналогичным происходящим в динамо-машине с самовозбуждением. Только после значительных исследований можно прийти к выводу, что магнитные поля действительно могут генерироваться таким способом. Принцип динамо предоставил наиболее привлекательную и наиболее убедительную возможность всеобъемлющего объяснения возникновения магнитных полей, наблюдаемых у космических объектов.

11.2. Общий обзор проблемы динамо

Рассмотрение возникновения космических магнитных полей, сделанное в предыдущей главе, приводит к проблеме динамо в магнитной гидродинамике. В этой связи будем говорить о "динамо", если магнитное поле генерируется или поддерживается благодаря движениям внутри электрически проводящей жидкой среды, которая заполняет односвязную область. Иногда такая ситуация также называется "однородное динамо" – с целью подчеркнуть, что среда не содержит какой-либо изолирующей части. Теперь кратко обсудим некоторые аспекты проблемы динамо.

Рассмотрим тело из жидкого электрически проводящего вещества, занимающее односвязную область и окруженное вакуумом. Будем пренебрегать каким-либо намагничиванием вещества и любыми электродвижущими силами, кроме тех, которые описываются членом Лоренца в законе Ома. Пусть в некоторый данный момент существует слабое магнитное поле. В отсутствие движения оно, очевидно, будет затухать. Его энергия из-за омической диссипации превратится в тепло. Прежде всего важно выяснить: можно ли вообще отыскать такие внутренние движения, чтобы магнитное поле не затухало или даже нарастало? Очевидно, для этого необходимы непрерывные затраты механической энергии, которая превращается в магнитную энергию и в конечном счете в тепло. Поставленный здесь вопрос можно свести к следующему: можно ли найти такие движения, а также магнитные поля (стационарные или осциллирующие), которые поддерживались бы этими движениями?

Предположим теперь, что ответ на этот вопрос положительный и что соответствующие магнитные поля и движения известны. Тогда возникает следующий вопрос: при каких условиях и какими типами сил могут создаваться такие движения?

Магнитное поле, которое является растущим в данный момент, неизбежно продолжает расти, пока характер движения не изменится. В действительности, однако, на движения оказывают влияние силы Лоренца, обусловленные магнитным полем. Этим влиянием можно пренебрегать до тех пор, пока магнитное поле является достаточно слабым. Если магнитное поле станет сильнее, то его влияние будет чрезвычайно важным. Оно препятствует непрерывному возрастанию поля и определяет его величину в конечном состоянии. Для полного рассмотрения проблемы динамо необходимо учесть это сложное взаимодействие магнитного поля и движений.

Мы будем говорить о проблеме кинематического динамо и о моделях кинематического динамо, если движение задано безотносительно к динамическим аспектам. Это означает, что каким-либо обратным влиянием магнитного поля на движения мы пренебрегаем. Решение задачи кинематического динамо дает условие возбуждения магнитного поля, а не информацию о его величине. Изучение кинематической задачи следует рассматривать как первый шаг к решению полной магнитогидродинамической задачи, учитывающей динамику движения, когда движение рассматривается как следствие других факторов, в частности тех сил, которые обусловлены магнитным полем. Только в результате решения этой полной магнитогидродинамической задачи может быть определена величина магнитного поля.

11.3. Математическая формулировка пробпемы динамо и простые следствия

Проблема динамо, которая обсуждалась в предыдущем разделе, эквивалентна математической задаче, которая будет сейчас сформулирована.

Как и выше, рассмотрим тело из жидкого электрически проводящего вещества, занимающего односвязную ограниченную область. Предполагаем, что все пространство вне этого тела имеет электромагнитные свойства вакуума. Обозначим эту область внутри тела V, ее поверхность – S, а внешнее пространство – V^e. Направленную наружу единичную нормаль к S обозначим через $\mathbf{n}$, а скачок любой величины F на S обозначим $[F]$.

По-прежнему предполагаем, что электрически проводящее вещество не обладает намагниченностью и что нет других электродвижущих сил, кроме представленных членом Лоренца в законе Ома. Исходя из основных магнитогидродинамических уравнений для магнитной индукции $\mathbf{B}$, получим уравнения

$$\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\right) - \mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{11.1а}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \text{ внутри области } V. \tag{11.1б}$$

Сначала не будем делать ограничений на поле скорости $\mathbf{u}$ внутри вещества. В отличие от величины μ, которая тождественно равна вакуумному значению, электропроводность σ может зависеть от координат. Что касается пространства вне тела, то в соответствии с маг-

нитогидродинамическим приближением учитываются только квазистационарные электромагнитные процессы, так что

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \quad \text{в области } V^e. \tag{11.2а,б}$$

Поскольку нет основания включать в рассмотрение поверхностные токи, то придем к условию

$$[\mathbf{B}] = 0 \text{ на поверхности } S. \tag{11.3а,б}$$

Оно предполагает, что $\mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0$ на S. Для того чтобы обеспечить неизменность формы тела, потребуем, чтобы

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ на } S. \tag{11.3в}$$

Наконец, будут рассматриваться только магнитные поля, обусловленные самовозбуждением в результате процессов внутри тела. С целью исключить внешнее возбуждение источниками, локализованными на бесконечности, потребуем, чтобы магнитное поле спадало на бесконечности по крайней мере как поле диполя, т.е.

$$\mathbf{B} = O(r^{-3}) \text{ при } r \to \infty, \tag{11.4}$$

где r — расстояние от точки внутри тела.

Задача построения модели кинематического динамо состоит в определении подходящего поля $\mathbf{u}$. Оно должно быть выбрано так, чтобы уравнения и сформулированные здесь условия допускали существование поля $\mathbf{B}$, не исчезающего при $t \to \infty$. Если ограничиться стационарным состоянием, то достаточно найти нетривиальное поле $\mathbf{B}$.

Полезно также рассмотреть энергетический баланс. Исходя опять из основных уравнений для электромагнитных полей в магнитогидродинамическом приближении, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{V+V^e} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}\,d\mathbf{x} = -\int_V \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}\,d\mathbf{x} - \int_V \mathbf{u}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B})\,d\mathbf{x}. \tag{11.5}$$

Здесь $\mathbf{B}^2/2\mu$ — плотность магнитной энергии, $\mathbf{j}^2/\sigma$ — скорость омической диссипации в единичном объеме, а $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B})$ — работа, совершаемая силой Лоренца в единичном объеме в единицу времени. Можно легко показать, что

$$-\int_V \mathbf{u}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B})\,d\mathbf{x} = \frac{1}{\mu}\int_V \left(e_{ij} - \frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\cdot\delta_{ij}\right)B_i B_j\,d\mathbf{x} - \frac{1}{\mu}\int_S (\mathbf{u}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{f}), \tag{11.6}$$

где e_{ij} – тензор скорости деформации, определяемый следующим образом:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{11.7}$$

а df – элемент поверхности, параллельный внешней нормали. Последний член в правой части (11.6) равен нулю, не только когда скорость u обращается в нуль на S, но и когда она соответствует твердотельному вращению S. Как видно из (11.5) и (11.6), для превращения механической энергии в магнитную или наоборот требуется деформация проводящей среды, которая, конечно, всегда связана с деформацией силовых линий магнитного поля. Магнитная энергия возрастает в случае растяжения и уменьшается в случае сокращения силовых линий поля.

Рассмотрим сначала покоящуюся среду. В этом случае поведение магнитного поля определяется только омической диссипацией. Как видно из (11.5), любое магнитное поле будет затухать. Время затухания T может быть оценено из (11.1) или (11.5) обычным образом. Полагая, что σ постоянно, получим

$$T = \mu\sigma L^2. \tag{11.8}$$

Здесь L – характерный масштаб магнитного поля, порядок которого, по крайней мере в простейших случаях, будет совпадать с характерным размером проводящего тела. Как будет показано в разд. 14.4, для сферического тела радиуса R необходимо положить $L = R/\pi$. Тогда T будет совпадать со временем, за которое уменьшается в e раз мода, затухающая наиболее медленно.

Теперь можно обосновать некоторые оценки, использованные в разд. 11.1. Для земного ядра можно принять $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ В·с/(А·м), $\sigma = 3 \cdot 10^5$ / Ом·м и $L = R/\pi$, где $R = 3 \cdot 10^6$ м. Следовательно, $T \approx 1 \cdot 10^4$ лет. Что касается Солнца, то полагаем $\mu = \mu_0$, $\sigma = 10^7$/Ом м и $L = R/\pi$, где $R = 7 \cdot 10^8$ м, получая, таким образом, $T \approx 2 \cdot 10^{10}$ лет.

Необходимым условием для существования динамо является наличие такого достаточно интенсивного движения с подходящей геометрией, чтобы индукционный эффект этого движения уравновешивался или превосходил бы диссипативный эффект, рассмотренный выше. Как уже объяснялось, движение должно приводить к деформации среды, которая существенно растягивает силовые линии магнитного поля.

Сравним величину индукционного и диссипативного членов в (11.1) или в (11.5). Если σ по-прежнему предполагается постоянным, то отношение этих членов, как можно оценить по порядку величины, не будет превышать магнитного числа Рейнольдса Rm, определяемого как

$$\mathrm{Rm} = \mu\sigma UL, \tag{11.9}$$

где U – характерное значение скорости, а L имеет тот же смысл, что и выше. Только в случае соответствующей геометрии поля скорости упомянутое отношение действительно может достигать порядка Rm. В оценке, относящейся к (11.6), вместо обычного появляется модифицированное магнитное число Рейнольдса, Rm^+, а именно

$$\mathrm{Rm}^+ = \mu\sigma U^+ L^2, \tag{11.10}$$

причем U^+ – характерное значение той части градиента скорости, которая соответствует деформации среды, а L имеет тот же смысл, что и выше. Следует ожидать, что в случае динамо оба числа, как Rm, так и Rm^+, должны превышать некоторые предельные значения, близкие по порядку величины к единице. Как будет показано в разд. 11.4, для сферического тела радиусом R снова разумно положить $L = R/\pi$ как в (11.9), так и в (11.10).

Для космических тел значения Rm и Rm^+, как принято считать, могут быть много больше единицы. Это является главным образом следствием больших размеров этих объектов. Для того чтобы это продемонстрировать, снова рассмотрим земное ядро. Используя для σ и L те же самые численные значения, что и выше, нам необходимо положить всего лишь $U \approx 3 \cdot 10^{-6}$ м/с и $U^+R = 9 \cdot 10^{-6}$ м/с, для того чтобы получить $\mathrm{Rm} \approx 1$ и $\mathrm{Rm}^+ = 1$ соответственно. Однако, несомненно, существуют внутренние движения, имеющие много большие значения U и U^+R, так что значения Rm и Rm^+ также оказываются много большими. Аналогично для Солнца и других подобных объектов следует ожидать, что величины Rm и Rm^+ значительно превосходят единицу.

Хотелось бы воспроизвести процесс динамо в лаборатории в соответствии с процессом, который, как считается, имеет место в космических телах. Подходящим веществом для таких экспериментов является жидкий натрий, для которого $\mu = \mu_0$ и $\sigma = 6 \cdot 10^6$ /Ом · м. Рассмотрим сферический объем натрия диаметром в 1 м, полагая $L = R/\pi$, где $R = 0{,}5$ м. Тогда, чтобы получить $\mathrm{Rm} = 1$ и $\mathrm{Rm}^+ \approx 1$, необходимо $U = 0{,}8$ м/с и $U^+R \approx 2{,}6$ м/с. Отсюда можно сделать вы-

вод, что возможно экспериментальное осуществление процесса генерации магнитного поля движениями проводящей жидкости. Для этого требуются, однако, огромные технические усилия. До сих пор эксперименты такого типа не были выполнены.

В этой связи следует напомнить, что в отдельных типах термоядерных реакторов, в частности реакторов-размножителей на быстрых нейтронах, охлаждение происходит с помощью циркуляции жидких металлов, например жидкого натрия. Для очень больших охлаждающих систем с высокими скоростями охлаждающего вещества надо учитывать возможность эксплуатационной неисправности, обусловленной возбуждением магнитных полей (см., например, [15, 199]).

До сих пор мы имели дело с кинематическими аспектами проблемы динамо. При рассмотрении полной магнитогидродинамической задачи уравнения, приведенные выше, следует дополнить уравнениями, описывающими поведение поля скорости $\mathbf{u}$. Выпишем лишь уравнение Навье – Стокса, дополненное силой Лоренца, и уравнение неразрывности:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\times\mathbf{B} + \rho\mathbf{F}, \qquad (11.11а)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad \text{внутри } V. \qquad (11.11б)$$

Здесь ρ – плотность массы, p – гидродинамическое давление, $\mathbf{F}$ – различные силы, такие, как гравитационные, трения и т.д. В зависимости от конкретной рассматриваемой модели эти уравнения должны быть дополнены другими, например уравнениями состояния или внутренней энергии, и соответствующими граничными условиями.

11.4. Некоторые необходимые условия для динамо

Трудности построения моделей динамо обусловлены не величиной скоростей, а скорее геометрической структурой как магнитного поля, так и поля скорости. Получим некоторые теоремы, содержащие необходимые условия, определяющие геометрические структуры полей.

Важная теорема этого типа была доказана Каулингом [45] и в некоторых отношениях обобщена другими авторами. Согласно этой теореме, постоянное магнитное поле, будучи симметричным относительно некоторой оси, не может поддерживаться постоянным полем

скорости, симметричным относительно той же оси. Нетрудно показать, что такое магнитное поле не может поддерживаться никаким другим полем скорости. Таким образом, теорема Каулинга приводит к выводу о том, что постоянное осесимметричное магнитное поле никогда не может поддерживаться действием динамо.

Для сферических моделей с постоянной электрической проводимостью эта теорема была обобщена Брагинским [18] на случай нестационарных магнитных полей. Он показал, что любое поле, симметричное относительно некоторой оси, будет затухать, если поле скорости соленоидально и симметрично относительно той же оси. Можно добавить, что это утверждение остается справедливым для всех соленоидальных полей скорости независимо от их свойств симметрии.

В то время как динамо для стационарных осесимметричных магнитных полей оказывается невозможным, динамо для стационарного осесимметричного поля скорости не запрещено. Пример поддержания неосесимметричного магнитного поля стационарными осесимметричными движениями был продемонстрирован Гайлитисом [70].

Кроме теоремы Каулинга, которую можно рассматривать как условие для магнитного поля, имеются другие теоремы, которые содержат условие для движений. Теорема этого типа появилась в ранних работах Эльзассера [62], Булларда и Геллмана [33], а затем была вновь пересмотрена Моффатом [175]. При этом по-прежнему предполагается постоянство электрической проводимости. В теореме утверждается, что магнитное поле не может поддерживаться соленоидальными движениями без радиальных компонент, т.е. соленоидальным течением с линиями тока, лежащими на концентрических сферических поверхностях. Тем самым подразумевается, что магнитное поле может поддерживаться движениями несжимаемой среды только в том случае, если у этих движений имеются также радиальные компоненты. Более того, поддержание магнитного поля оказывается невозможным даже в случае сжимаемой среды, если, например, имеется только вращательное движение, причем зависимость угловой скорости от радиуса или от широты не имеет значения. Нижняя граница величины радиальной скорости, необходимой для действия динамо, была получена Буссе [39].

Теорема Бэкаса [11] касается как геометрической структуры, так и величины поля скорости. Она налагает условие на тензор скорости деформации e_{ij}, определенный выражением (11.7). Движение по-прежнему предполагается соленоидальным, т.е. $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, так что

наибольшее собственное значение этого тензора положительно. Конечно, как и сам тензор, это наибольшее собственное значение также меняется в пространстве. Теорема Бэкаса требует, чтобы его максимальная величина внутри тела, скажем U^{+}_{max}, превосходила или была равна наинизшей скорости затухания магнитного поля в отсутствие движения. Это можно сформулировать как условие для модифицированного магнитного числа Рейнольдса вида (11.10). Ограничимся сферической моделью с постоянной электрической проводимостью. Тогда это условие запишется в виде

$$\mu\sigma U^{+}_{max} R^2/\pi^2 \geqslant 1, \qquad (11.12)$$

где R по-прежнему означает радиус проводящего тела.

Наконец, упомянем теорему Чайлдресса [44], касающуюся величины поля скорости. Она количественно отражает тот факт, что в случае динамо магнитное число Рейнольдса вида (11.9) должно превышать некоторое критическое. Для разных моделей были оценены такие критические значения. В случае сферической модели с постоянной электрической проводимостью и соленоидальными движениями получается

$$\mu\sigma U_{max} R/\pi \geqslant 1, \qquad (11.13)$$

где U_{max} – максимальная относительная скорость внутри тела радиуса R.

11.5. Успешные попытки построения моделей кинематического динамо

Делались многочисленные попытки построения моделей кинематического динамо, т.е. нахождения решений соответствующих математических задач. Многие из них оказались неудачными из-за огромных трудностей, возникающих по разным причинам, особенно как следствие необходимых условий, обсуждавшихся выше.

Герценбергом [94] была впервые построена модель кинематического динамо. Его решение соответствующих уравнений также сыграло свою роль в подтверждении существования эффекта динамо. В его модели проводящая среда заполняет сферу. Среда покоится, за исключением двух разделенных сферических областей, внутри этой сферы. В каждой из этих двух областей она вращается как твердое тело. Самовозбуждение происходит при определенных скоростях вращения и определенных расположениях осей вращения. Как было

показано в работе [71], возможно возбуждение не только стационарных, но и осциллирующих магнитных полей. Аналогичные модели с тремя сферическими роторами, действие которых в определенном отношении понять легче, были исследованы в работах [78, 79, 135, 136].

Модификация модели динамо, в которой два сферических ротора были заменены двумя цилиндрическими, была построена в виде лабораторной установки и успешно приведена в действие [163, 164]. Как неподвижная, так и подвижные части были сделаны из твердого электропроводящего материала, а контакт между этими частями осуществлялся с помощью пленки.

Другие примеры кинематических динамо можно найти в работах [159, 160]. В первой из этих работ рассмотрена модель для случая бесконечной проводящей среды. Автором показано, что особые, неосесимметричные стационарные движения внутри цилиндрической области, линии тока которых являются спиралями, способны поддерживать стационарное магнитное поле, которое также будет иметь некоторую спиральную структуру. Во второй работе рассматривалась проводящая среда в виде тора, окруженного вакуумом. В этом случае также особые спиральные движения могут поддерживать магнитное поле, которое в вакуумной области будет осесимметричным.

Идеи, развитые Тверским в работе [279] привели к другой интересной кинематической модели динамо, разработанной в [70]. Модификация ее была исследована в работе [73]. Проводящая среда снова предполагалась занимающей все пространство. Движение ограничивалось парой тонких вихревых колец. Оно было симметрично по отношению к некоторой оси, к плоскости, перпендикулярной этой оси, и ко всем плоскостям, содержащим эту ось. Магнитные поля действительно могут поддерживаться этим простым типом движения. В согласии с теоремой Каулинга эти поля должны быть несимметричными относительно упомянутой оси.

Интересные исследования моделей кинематического динамо были выполнены Буллардом и Гелльманом [33]. В этих моделях проводящая среда представляет собой сферу, находящуюся в вакуумс. Авторами предложен математический метод, который позволяет свести основные уравнения без каких-либо ограничений на магнитное поле или движение к бесконечной системе дифференциальных уравнений для скалярных функций. В стационарном случае для этих функций получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для специальной модели, т.е. при специальной структуре движений, Бул-

лард и Геллман пытались численно решить эту систему уравнений. Однако их выводы о том, что данная модель обеспечивает работу динамо, была отвергнута Гибсоном и Робертсом [81], которые указали на расходимость использованного численного метода. Модификация этой модели, предложенная в [157], была опровергнута в работе [198], где, в свою очередь, была предложена модель, которая, по-видимому, действительно приводит к работающему динамо. В этой модели предполагалось, что течения образуют сферические конвективные ячейки, что отражало ситуацию внутри земного ядра.

Упоминавшиеся до сих пор динамо-модели, за исключением последней, вряд ли применимы к ситуациям, характерным для Земли, Солнца и звезд. Однако имеется два подхода к рассмотрению процессов динамо и к конструированию моделей динамо, которые представляют интерес для этих космических тел. Основные черты обоих подходов очень сходны. В обоих случаях магнитное поле и поле скорости разделяются на среднее и остаточное. Средние поля определяются с помощью подходящей процедуры усреднения, которая позволяет упростить геометрическую структуру и зависимость от времени, в то время как остаточные поля с необходимостью проявляют более сложное поведение. Вместо полного магнитного поля рассматривается только его средняя часть, поведение которой под влиянием заданного движения определяется средним полем скорости и некоторыми зависящими от остаточного поля скорости усредненными величинами.

Первый из двух упомянутых выше подходов — это теория "почти-симметричного динамо" предложенная Брагинским [18 — 20]. В этом случае средними полями являются те части исходных полей, которые симметричны относительно некоторой оси. В рамках такого подхода были рассмотрены модели сферического динамо, в которых магнитное поле появляется как следствие одновременного присутствия среднего, т.е. осесимметричного движения, состоящего из дифференциального вращения и меридиональной циркуляции, и неосесимметричных движений частного вида. Модели такого типа позволяют объяснить существование и некоторые основные свойства магнитного поля Земли.

Второй подход, который обсуждался в предыдущих главах, основан на магнитной гидродинамике средних полей и часто называется теорией "турбулентного динамо". В этом случае средние поля определяются обычно статистическими средними или средними по пространству или времени и потому могут быть не обязательно осесимметричными.

Как было показано в предыдущих главах, однородная, изотропная, отражательно-неинвариантная турбулентность, которая приводит к α-эффекту, способна поддерживать среднее магнитное поле. Более того, было показано, что турбулентные движения во вращающихся телах, т.е. под действием сил Кориолиса, тоже приводят к α-эффекту. Показано, что сферические модели динамо возможны в тех случаях, когда магнитное поле обусловлено только α-эффектом. Были также построены модели сферического динамо, в которых магнитное поле поддерживается как средними движениями, например дифференциальным вращением, так и α-эффектом или другими эффектами, вызванными турбулентными движениями. К настоящему времени исследован целый ряд моделей такого типа, которые пригодны для объяснения возникновения и поведения магнитных полей некоторых космических тел, в частности Земли и Солнца.

В последующих главах мы остановимся на рассмотрении одного из направлений исследований динамо, а именно теории турбулентного динамо и некоторых ее приложений к космическим объектам.

Глава 12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИНАМО

12.1. Основные положения

Перейдем теперь к рассмотрению проблемы динамо, которая обсуждалась в предыдущей главе, в рамках магнитной гидродинамики средних полей. Было показано, что в общем случае при наличии динамо-процесса как магнитное поле, так и движение будут иметь довольно сложную геометрическую структуру. Нас будут интересовать здесь не детали структуры магнитного поля, а только его средние значения, полученные в результате соответствующей процедуры усреднения. Конечно, поведение этого среднего магнитного поля зависит не только от среднего поля скорости, но и от электродвижущей силы, вызванной остаточной частью поля скорости. Таким образом, мы натолкнулись на специальный случай в проблеме динамо. Поскольку этот случай также приводит к динамо с турбулентными движениями и, следовательно, турбулентными магнитными полями, он стал известен как теория турбулентного динамо.

Отметим тот факт, что общая идея магнитной гидродинамики средних полей применима всегда, когда производится усреднение электромагнитных и гидродинамических полей. При этом не важно, соответствуют ли эти поля какому-либо определению турбулентности. Необходимо лишь потребовать выполнения соотношений Рейнольдса (ср. разд. 2.4). Аналогично применение общих результатов данной главы не ограничивается случаями, когда имеется какая-то турбулентность. Можно также рассматривать более или менее регулярные типы течений. Тем не менее будем придерживаться терминологии, принятой для случаев с турбулентностью.

Прежде всего предположим, что средние поля заданы статистическим средним, для которого соотношения Рейнольдса автоматически удовлетворяются. Кроме того, будем придерживаться предположений и обозначений, введенных в разд. 12.2, при математической формулировке проблемы динамо.

Ввиду того что будут использованы только статистические средние, основные электромагнитные уравнения для средних полей (2.5) и (2.6) могут рассматриваться во всем пространстве; при этом, конечно, не должно быть электрических токов в вакууме. Исходя из этих уравнений или усредняя соотношения (11.1) – (11.4), можно легко получить уравнения, лежащие в основе турбулентного динамо. Уравнения, описывающие среднюю магнитную индукцию $\mathbf{B}$ внутри проводящей среды, имеют вид

$$\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{B}}\right) - \mathrm{rot}\left(\bar{\mathbf{u}}\times\bar{\mathbf{B}} + \mathcal{E}\right) + \frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0, \tag{12.1 а}$$

$$\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{внутри } V, \tag{12.1 б}$$

где по-прежнему $\mathcal{E}$ – электродвижущая сила, вызванная флуктуационными движениями, т.е. тождественно равная $\mathbf{u}'\times\mathbf{B}$. Для некоторых целей удобно представить выражения (12.1) в виде

$$\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma_T}\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{B}}\right) - \mathrm{rot}\left(\bar{\mathbf{u}}\times\bar{\mathbf{B}} + \mathcal{E}^+\right) + \frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0, \tag{12.2 а}$$

$$\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{внутри } V, \tag{12.2 б}$$

причем турбулентная проводимость σ_T и приведенная электродвижущая сила $\mathcal{E}^+$ определяются следующим образом:

$$\sigma_T = \sigma/(1+\mu\sigma\beta), \quad \mathcal{E}^+ = \mathcal{E} + \beta\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{B}}, \tag{12.2 в,г}$$

где β задается подходящим образом. Кроме того, имеем уравнения

$$\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{B}} = 0, \quad \mathrm{div}\,\bar{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{в объеме } V \tag{12.3 а,б}$$

и условия

$$[\bar{\mathbf{B}}] = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{на } S, \tag{12.4 а,б}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = 0(r^{-3}) \quad \text{при } r\to\infty. \tag{12.5}$$

Как было показано в разд. 2.3, электродвижущую силу можно понимать как функционал от $\bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}'$ и $\bar{\mathbf{B}}$, который оказывается линейным по $\bar{\mathbf{B}}$. Соответственно вышеприведенные уравнения должны быть дополнены соотношением

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\bar{\mathbf{B}}), \tag{12.6}$$

которое выражается через $\bar{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$. Во всех случаях, которые будут рассмотрены, предполагается, что $\mathcal{E}$ обращается в нуль, если $\bar{\mathbf{B}}$ везде стремится к нулю, и что $\mathcal{E}$ в данной точке может быть выражено

через само $\bar{\mathbf{B}}$ и его первые пространственные производные в этой же точке. Тогда (12.6) сводится к частному виду

$$\mathcal{G}_i = a_{ij}\bar{B}_j + b_{ijk}\frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_k}, \tag{12.7}$$

где a_{ij} и b_{ijk} зависят только от $\bar{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}'$.

Чтобы построить модель кинематического динамо, наряду с полем $\bar{\mathbf{u}}$ необходимо задать свойства поля $\mathbf{u}'$ и в конечном счете электродвижущую силу $\mathcal{G}$ таким образом, чтобы сформулированные выше уравнения допускали решения для $\bar{\mathbf{B}}$, которые не исчезали бы при $t \to \infty$.

Во многих случаях интересно иметь уравнение энергии, аналогичное (11.5). Средняя плотность энергии магнитного поля $\bar{\mathbf{B}}^2/2\mu$ всегда может быть разделена на две части $\bar{\mathbf{B}}^2/2\mu$ и $\overline{\mathbf{B}'^2}/2\mu$, которые относятся к средней и флуктуирующей составляющей магнитного поля. Для нас представляет интерес только первая часть. Исходя из основных уравнений (2.5) и (2.6) для средних полей, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{V+V'}\frac{\bar{\mathbf{B}}^2}{2\mu}\,d\mathbf{x} = -\int_V \frac{\bar{\mathbf{j}}^2}{\sigma}\,d\mathbf{x} - \int_V \bar{\mathbf{u}}\cdot(\bar{\mathbf{j}}\times\bar{\mathbf{B}})\,d\mathbf{x} + \int_V \bar{\mathbf{j}}\cdot\mathcal{G}\,d\mathbf{x}. \tag{12.8}$$

Это соотношение будет также справедливо, если заменить σ и $\mathcal{G}$ на σ_T и $\mathcal{G}^+$.

Если вместо модели кинематического динамо рассматривается реалистичная магнитогидродинамическая модель, то необходимо учитывать, что магнитное поле влияет как на среднюю, так и на флуктуирующую части движения. Таким образом, возникает довольно сложная проблема. Можно сначала дополнить уравнения для $\bar{\mathbf{B}}$ (12.1) соответствующими уравнениями для $\bar{\mathbf{u}}$. Исходя из (11.1) и ограничиваясь несжимаемой средой, т.е. случаем $\rho = \text{const}$, получим

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\bar{\mathbf{u}}\right) = -\nabla\bar{p} + \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{B}}\times\bar{\mathbf{B}} + \rho(\bar{\mathbf{F}} + \mathcal{J}), \tag{12.9 а}$$

$$\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{внутри } V, \tag{12.9 б}$$

где

$$\mathcal{J} = -\overline{(\mathbf{u}'\cdot\nabla)\mathbf{u}'} + \frac{1}{\mu\rho}\overline{\mathrm{rot}\,\mathbf{B}'\times\mathbf{B}'}. \tag{12.9 в}$$

Аналогично $\mathcal{G}$ появилась добавочная величина $\mathcal{J}$, определяемая флуктуациями $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{B}'$. Уравнения для этих флуктуаций могут быть выве-

дены из (11.1) и (11.11), и они также содержат $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{B}}$. Таким образом, можно попытаться найти соотношения, связывающие $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ с $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ и, например, силами, вызывающими турбулентность. Тем самым предполагается, что существуют нужные решения упомянутых уравнений. Если бы нам действительно удалось установить эти соотношения для $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$, то мы могли бы подставить их в уравнения (12.1) и (12.9). Таким образом, мы пришли бы тогда к системе дифференциальных уравнений в частных производных для $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{B}}$, которые осталось бы проинтегрировать. До настоящего времени затронутая здесь проблема была далека от полного решения.

12.2. Замечания, касающиеся процедур усреднения и масштабов средних и флуктуирующих величин

Применяя изложенную выше идею к конкретным задачам, следует обратить особое внимание на некоторые вопросы.

До сих пор использовались статистические средние. Для сравнения теоретических результатов с наблюдениями желательно также использовать усреднение по пространству и времени. На этом пути мы должны мириться с некоторыми ограничениями на масштабы среднего и флуктуирующего полей. В дальнейшем изложении будем обозначать характерные масштабы длины и времени средних полей $\bar{\lambda}$ и $\bar{\tau}$, а флуктуирующих – λ_{cor} и τ_{cor}.

Рассмотрим сначала пространственные средние, определяемые интегрированием по некоторой трехмерной области. Масштаб области, по которой производится усреднение, обозначим λ_{av}. Для того чтобы быть уверенными в справедливости соотношений Рейнольдса, необходимо потребовать выполнения соотношения

$$\bar{\lambda} \gg \lambda_{av} \gg \lambda_{cor}. \tag{12.10}$$

Величина $\bar{\lambda}$ никогда не может превосходить характерные размеры проводящего тела. Поэтому λ_{cor} должно быть много меньше этих размеров. Например, в модели земного ядра можно рассматривать как флуктуации только те нерегулярные движения, масштабы которых много меньше радиуса ядра. Аналогичная трудность появляется в случае конвективной зоны Солнца для движений гигантских ячеек.

Отметим еще одно затруднение. При усреднениях по пространству закон Ома, т.е. последнее уравнение (2.2) и, следовательно, уравнения индукции (12.1 а) и (12.2 а) для средних полей, остаются справед-

ливыми, только если пространственные изменения электрической проводимости σ пренебрежимо малы в области усреднения. Вообще же будет существовать скачок электрической проводимости на границе. Для точек, находящихся в области усреднения, содержащей этот скачок, уравнения (12.1а), (12.2а), а также (12.3а) нельзя считать вполне справедливыми. При этом возможные ошибки должны быть оценены для каждого отдельного случая.

Существует, однако, частный случай усреднения по пространству, который заключается в интегрировании по одной координате. Для этого типа усреднения, по крайней мере при специальных предположениях, снимаются ограничения, которые обсуждались выше. Используем, например, цилиндрическую или сферическую систему координат с азимутальной координатой φ. Упомянутое усреднение в случае скалярной функции определяется нормированным подходящим образом интегралом от этой функции по всем φ, а в случае вектора – усреднением его компонент относительно одной из этих систем координат. Тогда, очевидно, все усредненные поля автоматически являются симметричными относительно полярной оси системы координат. Для этого особого усреднения соотношения Рейнольдса выполняются точно. Предположим также, что форма проводящего тела и распределение электрической проводимости симметричны относительно полярной оси. Тогда основные уравнения для средних полей (2.1) и (2.2) и соотношения (12.1) – (12.5) остаются в силе без какого-либо ограничения.

Рассмотренное усреднение широко применяется в теории почти симметричного динамо. Здесь оно также может быть использовано. Однако, применяя его, необходимо помнить, что даже в случае полей с крупномасштабной структурой соответствующее среднее поле может стремиться к нулю. Так происходит всегда, когда это поле не содержит части, симметричной по отношению к упомянутой оси.

Ограничимся здесь рассмотрением только тех частных случаев, для которых применима упомянутая процедура усреднения. Необходимо помнить, что если использовано это усреднение, то должны быть видоизменены некоторые из соотношений для средних величин, приведенные в предыдущих главах.

Рассмотрим теперь усреднение по времени, которое определяется как интегрирование по определенным промежуткам времени. Время усреднения обозначается τ_{av}. Что касается соотношений

Рейнольдса, то необходимо потребовать, чтобы

$$\bar{\tau} \gg \tau_{av} \gg \tau_{cor}. \qquad (12.11)$$

Усреднение по времени, вообще говоря, оказывается более подходящим для моделей, предназначенных для применения к космическим объектам, чем усреднения по пространству, которые определяются интегрированием по трехмерной области. Имея дело с моделью Земли, можно использовать тот факт, что спектр наиболее важных масштабов времени соответствующих величин содержит явный провал, разделяющий области больших и малых масштабов. Большие масштабы имеют значения порядка масштаба дрейфа магнитного поля в западном направлении или более, т.е. не меньше чем 10^3 лет. Все другие представляющие интерес масштабы меньше 1 года. Поэтому удобно выбрать интервал усреднения в несколько десятков лет. Таким образом, соотношение (12.11) оказывается выполненным. Все величины, имеющие указанные большие масштабы, имеют смысл средних полей, а все с малыми масштабами рассматриваются как флуктуации, независимо от их пространственной протяженности. В случае Солнца характерные крупные масштабы времени больше или равны периоду солнечного цикла, т.е. 22 годам, а малые сравнимы или меньше периода вращения, т.е. одного месяца. Подходящим интервалом усреднения оказывается один или два года. В этом случае применимы все приведенные выше рассуждения.

При усреднении по времени, если электрическая проводимость со временем не меняется, легко убедиться в справедливости основных уравнений для средних полей (2.1) и (2.2) и соотношений (12.1) – (12.5).

Теперь обратимся к обсуждению предположений, при которых электродвижущая сила $\mathcal{E}$ принимает частный вид (12.7), который будет использован для всех рассмотренных ниже моделей.

Во-первых, не будем учитывать наличие какой-либо части $\mathcal{E}$, не зависящей от $\bar{\mathbf{B}}$, которая была бы отлична от нуля при $\bar{\mathbf{B}} = 0$. Как показано в разд. 2.4, можно ожидать появления компоненты $\mathcal{E}$, не зависящей от $\bar{\mathbf{B}}$, только в том случае, когда для действия динамо достаточно флуктуационных движений в отдельных малых областях. Вместо того чтобы рассматривать здесь эту возможность, сошлемся на соответствующее обсуждение в работе [220].

Далее, $\mathcal{E}$ в данной точке, вообще говоря, зависит от поля $\bar{\mathbf{B}}$ в некоторой окрестности этой точки. Соотношение (12.7) предполагает достаточно слабое изменение поля $\bar{\mathbf{B}}$, так что его поведение в этой

окрестности определяется заданием величины $\bar{\mathbf{B}}$ и ее первых пространственных производных в данной точке. Таким образом, независимо от условий, являющихся следствием процедуры усреднения, появляются дополнительные условия для масштабов средних и флуктуирующих величин. Обозначим пространственный и временной масштабы величины $\bar{\mathbf{B}}$ через $\bar{\lambda}$ и $\bar{\tau}$, масштабы упоминавшейся окрестности через λ^+ и τ^+, а масштабы $\mathbf{u}$ через λ_{cor} и τ_{cor}. Очевидно, необходимо потребовать, чтобы

$$\bar{\lambda} \gg \lambda^+, \quad \bar{\tau} \gg \tau^+. \qquad (12.12а,б)$$

Согласно нашим общим представлениям о $\mathcal{G}$, величины λ^+ и τ^+ не могут превосходить порядка λ_{cor} и τ_{cor} соответственно. Они даже могут быть намного меньше, чем λ_{cor} и τ_{cor}. На основании результатов разд. 4.6 и 4.7 можно сделать вывод, что в приближении корреляций второго порядка

$$\lambda^+ = \min(\lambda_{cor}, \sqrt{\tau_{cor}/\mu\sigma}), \qquad (12.13а)$$

$$\tau^+ = \min(\tau_{cor}, \mu\sigma\lambda_{cor}^2). \qquad (12.13б)$$

Аналогичные соотношения могут быть написаны для высших приближений.

Обратимся снова к ситуации, характерной для Земли. Используем усреднение по времени, для которого справедливо (12.11). Тогда (12.12б) также удовлетворяется. Остается только обсудить (12.12а). Разумно предположить, что величина $\bar{\lambda}$ порядка радиуса ядра, т.е. $3 \cdot 10^6$ м. Для λ^+ примем условие (12.13а) и получим, что $\lambda^+ \leqslant \sqrt{\tau_{cor}/\mu\sigma}$. Если $\tau_{cor} < 1$ года и $\sigma = 3 \cdot 10^5$ /(Ом · м) (ср. разд. 11.3), то найдем $\lambda^+ < 1 \cdot 10^4$ м. Таким образом, соотношение (12.12а) можно считать выполненным с большим запасом. Аналогичная ситуация оказывается в случае Солнца. По причинам, которые будут объяснены ниже (ср. разд. 17.4), можно ограничиться рассмотрением солнечной конвективной зоны. Предположим, что $\bar{\lambda}$ порядка толщины конвективной зоны, т.е. порядка 10^8 м. Снова используем $\lambda^+ \leqslant \sqrt{\tau_{cor}/\mu\sigma}$. При $\tau_{cor} < 1$ месяца и $\sigma = 3 \cdot 10^8$ /(Ом · м) (ср. разд. 17.4) получим $\lambda^+ < 3 \cdot 10^4$ м. Соотношение (12.12а) по-прежнему можно считать выполненным.

Глава 13. ТОРОИДАЛЬНЫЕ И ПОЛОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

13.1. Предварительные замечания

При рассмотрении моделей сферического динамо оказывается удобным представить векторные поля аналогично полю магнитной индукции в виде суммы тороидальной и полоидальной компонент и воспользоваться преимуществами, которые вытекают из особых свойств этих полей. Такое представление позволило, например, в работе [33] свести соответствующие векторные уравнения к системе уравнений для скалярных функций. Аналогичным образом можно поступить и в теории турбулентного динамо.

Остановимся подробно в данной главе на определении и некоторых свойствах тороидального и полоидального векторных полей. При этом будем следовать идеям работы [215]. Отметим также и другие работы, вводящие в эти проблемы, например [225].

Будем рассматривать в дальнейшем векторное поле $\mathbf{U}$, определенное внутри некоторой односвязной области эвклидова пространства, форма которой будет конкретизироваться ниже. Предполагается существование пространственных производных функции $\mathbf{U}$ до второго порядка включительно.

Введем сферическую полярную систему координат с координатами r, θ, φ, которые соответствуют единичным векторам $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ и радиусу-вектору $\mathbf{r}$. Для любого скаляра F имеем

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi , \qquad (13.1а)$$

$$\Delta F = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \Omega F\right), \qquad (13.1б)$$

$$\Omega F = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} , \qquad (13.1в)$$

где $(1/r^2)\Omega$ – оператор Лапласа на поверхности $r = \text{const}$. Для интегралов по таким поверхностям используем обозначение

$$\oint\!\!\oint F\, d\tilde{\omega} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} F \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \,. \tag{13.2}$$

Обозначая компоненты $\mathbf{U}$ через U_r, U_θ и U_φ, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, U_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}\,, \tag{13.3а}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{U} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, U_\varphi) - \frac{\partial U_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rU_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rU_\theta) - \frac{\partial U_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi \,. \tag{13.3б}$$

13.2. Тороидальные и полоидальные векторные поля в осесимметричном случае

Предположим сначала, что векторное поле $\mathbf{U}$, а также область определения являются симметричными и система координат повернута таким образом, что ее полярная ось совпадает с осью симметрии. Тогда компоненты U_r, U_θ и U_φ не зависят от φ.

Рассмотрим теперь поле $\mathbf{U}$ как сумму тороидального поля $\mathbf{U}_t$ и полоидального поля $\mathbf{U}_p$, так что

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_t + \mathbf{U}_p \,, \tag{13.4}$$

и определим

$$\mathbf{U}_t = U_\varphi \mathbf{e}_\varphi \,, \quad \mathbf{U}_p = U_r \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta \,. \tag{13.5а,б}$$

Следовательно, можно утверждать, что

(I) Если в некоторой точке $\mathbf{U} = 0$, тогда также $\mathbf{U}_t = \mathbf{U}_p = 0$.

(II) Для любого скаляра a величина $a\mathbf{U}_t$ является тороидальной, а $a\mathbf{U}_p$ – полоидальной.

(III) Если $\mathbf{U}^+$ – произвольное осесимметричное векторное поле, то в любой фиксированной точке величина $\mathbf{U}_t^+ \times \mathbf{U}_t$ равна

нулю, величины $\mathbf{U}_t^{+} \times \mathbf{U}_p$ и $\mathbf{U}_p^{+} \times \mathbf{U}_t$ полоидальны, а $\mathbf{U}_p^{+} \times \mathbf{U}_p$ – тороидальна. В частности, $\mathbf{r} \times \mathbf{U}_t$ – полоидально, а $\mathbf{r} \times \mathbf{U}_p$ – тороидально.

(IV) $\operatorname{div}\mathbf{U}_t = 0$.

(V) $\operatorname{rot}\mathbf{U}_t$ является полоидальным, а $\operatorname{rot}\mathbf{U}_p$ – тороидальным.

(VI) Если $\operatorname{rot}\mathbf{U}_t = 0$ во всей области, тогда $\mathbf{U}_t = 0$.

(VII) В любой заданной точке $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{U}_p$ ортогональны, т.е. $\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{U}_p = 0$.

Многие из предыдущих утверждений самоочевидны и упоминаются с целью обобщения в дальнейшем. Утверждения (IV) и (V) становятся очевидными, если записать выражения $\operatorname{div}\mathbf{U}_t$, $\operatorname{rot}\mathbf{U}_t$ и $\operatorname{rot}\mathbf{U}_p$ в сферической системе координат, помня при этом, что производные по φ должны отсутствовать. Что касается (VI), то благодаря односвязности области величина $\mathbf{U}_t$ должна быть градиентом однозначного потенциала, если $\operatorname{rot}\mathbf{U}_t = 0$. Очевидно, этот градиент должен быть осесимметричным. Такие градиенты, однако, всегда полоидальны. Следовательно, согласно (1), имеем $\mathbf{U}_t = 0$.

В связи с утверждениями (IV) и (V) следует отметить некоторые свойства величины $\Delta\mathbf{U}$, которая может быть записана как $\Delta\mathbf{U}_t + \Delta\mathbf{U}_p$, причем

$$\Delta\mathbf{U}_t = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U}_t\,, \tag{13.6а}$$

$$\Delta\mathbf{U}_p = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U}_p + \nabla\operatorname{div}\mathbf{U}_p\,. \tag{13.6б}$$

Ясно, что $\Delta\mathbf{U}_t$ оказывается тороидальным, а $\Delta\mathbf{U}_p$ – полоидальным.

Предположим теперь, что осесимметричное поле $\mathbf{U}$ является соленоидальным, т.е. удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0. \tag{13.7}$$

Поскольку $\mathbf{U}_t$ всегда соленоидально, то $\mathbf{U}_p$ должно быть также соленоидально. Следовательно, $\mathbf{U}_p$ можно заменить на $\operatorname{rot}\hat{\mathbf{U}}$, где $\hat{\mathbf{U}}$ – векторный потенциал. Предполагая, что $\hat{\mathbf{U}}$ также является осесимметричным, можно представить его в виде $\hat{\mathbf{U}}_t + \hat{\mathbf{U}}_p$. Поскольку полоидальным будет только $\operatorname{rot}\hat{\mathbf{U}}_t$, то тороидальный вектор $\operatorname{rot}\hat{\mathbf{U}}_p$ должен быть равен нулю. Таким образом, можно записать

$$\mathbf{U}_p = \operatorname{rot}\hat{\mathbf{U}}_t\,. \tag{13.8}$$

Аналогично $\mathbf{U}_t$ потенциал $\mathbf{U}_p$ также может быть выражен через одну скалярную величину.

Предположение относительно $\hat{\mathbf{U}}$ не является серьезным ограничением. Если $\hat{\mathbf{U}}$ имеет общий вид и его компоненты являются однозначными функциями φ, то после усреднения по φ он становится осесимметричным. Поскольку величина $\mathbf{U}_p$ предполагается непрерывной во всем бесконечном пространстве, то существование такого $\hat{\mathbf{U}}$ может быть легко доказано. Если, однако, $\mathbf{U}_p$ обладает этими свойствами лишь в ограниченной области, то существуют особые случаи, когда такого потенциала $\hat{\mathbf{U}}$ не существует. Например, $\mathbf{U}_p = \mathbf{r}/r^3$ непрерывно во всем пространстве, за исключением начала координат, но оно не может быть представлено при помощи $\hat{\mathbf{U}}$ с рассмотренными выше свойствами.

13.3. Частное представление векторного поля

Рассмотрим произвольное поле $\mathbf{U}$, определенное внутри сферы или сферической оболочки. Поместим центр сферы или оболочки в начало сферической системы координат. Радиус сферы при этом может быть сколь угодно большим.

Прежде всего любое непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{U}$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{r} \times \nabla U + \mathbf{r} V + \nabla W \tag{13.9}$$

с помощью трех однозначно-определенных скалярных полей U, V и W. В компонентах это выглядит так:

$$U_r = rV + \frac{\partial W}{\partial r}, \tag{13.10а}$$

$$U_\theta = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}, \tag{13.10б}$$

$$U_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial \varphi}. \tag{13.10в}$$

Чтобы обосновать это представление, рассмотрим сперва поле $U_\theta \mathbf{e}_\theta + U_\varphi \mathbf{e}_\varphi$. Как известно, любое такое поле может быть представлено на сферической поверхности $r = \mathrm{const}$ с помощью однозначной функции тока U и однозначного потенциала W таким образом, чтобы выполнялись (13.10б) и (13.10в). Для поля $U_r \mathbf{e}_r$ мы всегда вправе написать (13.10а), введя дополнительную однозначную функцию V. Таким образом, для суммы этих полей $U_r \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta + U_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ получим (13.10).

Отметим, что для определения функций U, V и W в общем случае требуется интегрирование системы уравнений в частных производных, а именно системы (13.10), где U_r, U_θ и U_φ следует рассматривать как правые части неоднородных уравнений. Основная трудность состоит в определении U и W. Из (13.10б) и (13.10в) получим

$$\Omega U = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, U_\varphi) - \frac{\partial U_\theta}{\partial\varphi}\right), \tag{13.11а}$$

$$\Omega W = \frac{r}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, U_\theta) + \frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}\right). \tag{13.11б}$$

Если W известно, то из (13.10а) сразу получаем V.

Представление (13.9) для $\mathbf{U}$ предполагает возможность калибровочных преобразований U, V и W. Очевидно, U инвариантно относительно замены U, V и W на $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$ при условии, что

$$U - \tilde{U} = g\,,\quad V - \tilde{V} = -\frac{1}{r}\frac{dh}{dr}\,,\quad W - \tilde{W} = h\,, \tag{13.12а,б,в}$$

где g и h могут быть произвольными функциями r, но только не θ и φ. Преобразования, заданные выражениями (13.12), оказываются единственно возможными. Чтобы показать это, убедимся, что (13.10) при $U_r = U_\theta = U_\varphi = 0$ допускает в качестве решения только $U = g$, $V = -1/r \cdot dh/dr$ и $W = h$, где g и h те же, что и выше. Из (13.10б,в) получим $\Omega U = 0$ и, следовательно, $U = g$. Поэтому уравнения (13.10б,в) сразу приводят к $W = h$, а из (13.10а), кроме того, имеем $V = -1/r \cdot dh/dr$.

Следует отметить, что не только $\mathbf{U}$, но и $\mathbf{r}\times\nabla\mathbf{U}$ и $\mathbf{r}V + \nabla W$ не меняются при калибровочных преобразованиях. Следовательно, любое поле $\mathbf{U}$ может быть единственным способом разложено на две составляющие вида $\mathbf{r}\times\nabla U$ и $\mathbf{r}V + \nabla W$.

Для некоторых целей необходимо обеспечить единственность U, V и W при помощи условия нормировки. В этом смысле U, V и W можно определить, если потребовать, чтобы для всех r

$$\oint\!\!\oint U\, d\tilde{\omega} = \oint\!\!\oint W\, d\tilde{\omega} = 0; \tag{13.13}$$

Как легко показать, это условие может быть всегда выполнено. Если вместо функций U, V и W, удовлетворяющих (13.13), даны другие функции $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$, то можно положить

$$\oint\!\!\oint \tilde{U}\, d\tilde{\omega} = -4\pi g\,,\quad \oint\!\!\oint \tilde{W}\, d\tilde{\omega} = -4\pi h\,. \tag{13.14а,б}$$

Тогда (13.12) определяют U, V и W в соответствии с (13.13). Поскольку (13.12) являются единственно возможными калибровочными преобразованиями, то (13.13) действительно единственным образом определяют U, V и W.

Если заданы только U и V, то условия (13.13) могут быть заменены на

$$\oint\!\!\!\!\!\!\diagup\, U\, d\tilde{\omega} = \oint\!\!\!\!\!\!\diagup\, V\, d\tilde{\omega} = 0. \tag{13.15}$$

Этим условиям всегда легко удовлетворить. Тогда U и V действительно определены однозначным образом, в то время как W определена только с точностью до аддитивной постоянной.

При использовании представления (13.9) следует также помнить соотношения из векторного анализа. Для любого скаляра F имеем

$$\mathbf{rot}(\mathbf{r}F) = -\mathbf{r}\times\nabla F\,, \tag{13.16а}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}(\mathbf{r}F) = -\mathbf{rot}(\mathbf{r}\times\nabla F) = -\mathbf{r}\Delta F + \nabla\frac{\partial}{\partial r}(rF), \tag{13.16б}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}(\mathbf{r}F) = \Delta(\mathbf{r}\times\nabla F) = -\mathbf{rot}(\mathbf{r}\Delta F) = \mathbf{r}\times\nabla\Delta F, \tag{13,16в}$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{rot}(\mathbf{r}F) = -\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\nabla F) = -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F) + \nabla(r^2F). \tag{13.16г}$$

В связи с условиями нормировки отметим, что для любого F по-прежнему

$$\oint\!\!\!\!\!\!\diagup_{\Omega}\, F\, d\tilde{\omega} = 0. \tag{13.17}$$

С помощью (13.16б) получим, что

$$\oint\!\!\!\!\!\!\diagup_{\Delta}\, F\, d\tilde{\omega} = 0, \text{ если } \oint\!\!\!\!\!\!\diagup\, F\, d\tilde{\omega} = 0. \tag{13.18}$$

13.4. Тороидальные и полоидальные векторные поля в общем случае

Рассмотрим сейчас произвольное векторное поле $\mathbf{U}$, заданное внутри шара или сферического слоя. Как и в осесимметричном случае, в этом общем случае будем понимать под $\mathbf{U}$ сумму тороидального $\mathbf{U}_t$ и полоидального $\mathbf{U}_p$ полей, так что

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_t + \mathbf{U}_p\,. \tag{13.19}$$

Определим $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{U}_p$, требуя, чтобы они могли быть представлены в виде

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{r}\times\nabla U, \tag{13.20а}$$

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{r}V + \nabla W, \tag{13.20б}$$

или для компонент

$$\mathbf{U}_t = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{e}_\varphi, \tag{13.21а}$$

$$\mathbf{U}_p = \left(rV + \frac{\partial W}{\partial r}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi. \tag{13.21б}$$

В соответствии с предыдущим рассмотрением любое векторное поле $\mathbf{U}$ действительно можно представить в таком виде, где $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{U}_p$ определены однозначным образом. Очевидно, это определение $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{U}_p$ включает в себя определение, сделанное для осесимметричного случая. Поскольку в этом случае в системе координат, выбранной подходящим образом, имеем $\partial U/\partial\varphi = \partial W/\partial\varphi = 0$, то (13.5) и (13.21) согласуются.

В общем случае разложение данного поля $\mathbf{U}$ на составляющие $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{U}_p$ является более сложным, чем в осесимметричном случае. Для этого требуется знание U, V и W, которые, как показано выше, вообще говоря, должны определяться из решений системы дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь появляется еще одно отличие. В осесимметричном случае для разложения поля в данной точке не требовалось какой-либо информации о поведении этого поля в окрестности этой точки. В общем же случае разложение в данной точке зависит от поведения поля на поверхности $r = \mathrm{const}$, содержащей эту точку.

Если поле задано в виде правой части (13.20а) или (13.20б), то оно, очевидно, является тороидальным или полоидальным соответственно. В частности, всякий градиент однозначной функции является полоидальным.

Теперь можно сделать утверждения, аналогичные тем, которые делались для осесимметричного случая:

(I) Если $\mathbf{U} = 0$ на поверхности $r = \mathrm{const}$, тогда также $\mathbf{U}_t = \mathbf{U}_p = 0$.

(II) Для скаляра a, зависящего только от r, но не от θ и φ $a\mathbf{U}_t$ является тороидальным, а $a\mathbf{U}_p$ — полоидальным.

(III) $\mathbf{r}\times\mathbf{U}_t$ — полоидально, а $\mathbf{r}\times\mathbf{U}_p$ — тороидально.

(IV) $\operatorname{div}\mathbf{U}_t = 0$.

(V) $\operatorname{rot}\mathbf{U}_t$ — полоидальный, а $\operatorname{rot}\mathbf{U}_p$ — тороидальный.

(VI) Если $\operatorname{rot}\mathbf{U}_t = 0$ во всей области, то $\mathbf{U}_t = 0$.

(VII) $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{U}_p$ ортогональны друг другу в том смысле, что $\oint\!\!\oint \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{U}_p\, d\tilde{\omega} = 0$.

Утверждение (I) может быть легко доказано с помощью выкладок предыдущего раздела, согласно которым $\mathbf{U} = 0$ приводит к $U \propto g$; откуда опять получим $\mathbf{U}_t = 0$ и, следовательно, $\mathbf{U}_p = 0$. Утверждение (II) является простым следствием определения (13.20). Что касается утверждений (III), (IV) и (V), то они доказываются с помощью векторной формулы (13.16) с учетом определения (13.20). Чтобы обосновать утверждение (VI), вновь обратимся к односвязности области. Во-первых, из условия $\mathrm{rot}\,\mathbf{U}_t = 0$ заключаем, что $\mathbf{U}_t$ является градиентом однозначного потенциала. Поскольку такие градиенты всегда полоидальны, получим $\mathbf{U}_t = 0$. Относительно утверждения (VII) заметим сначала, что

$$\oint\!\!\oint \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{U}_p \, d\tilde{\omega} = \frac{1}{r} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{1}{r} \left(\int_0^{2\pi} \left[U \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\varphi - \int_0^{\pi} \left[U \frac{\partial W}{\partial \theta} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\theta \right), \quad (13.22)$$

где нижняя строка получается в результате частичного интегрирования. Из того что $\mathbf{U}$ предполагается несингулярным везде, следует, что $\partial W/\partial \varphi = 0$ при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, и потому первый интеграл в нижней строке исчезает. В силу того что U и W однозначные, второй интеграл также исчезает.

Замечания относительно $\Delta\mathbf{U}$, сделанные для осесимметричного случая, остаются справедливыми и, в частности, остается в силе выражение (13.6). Величина $\Delta\mathbf{U}_t$ снова оказывается тороидальной, а $\Delta\mathbf{U}_p$ – полоидальной.

Рассматривая поля $\mathbf{U}$, которые являются соленоидальными, можно, по существу, повторить те же самые рассуждения, что и для осесимметричного случая. Поскольку $\mathbf{U}_p$ может быть представлено с помощью векторного потенциала $\hat{\mathbf{U}}$, который является однозначным, то снова приходим к (13.8). Что касается существования подходящего $\hat{\mathbf{U}}$, то сошлемся на замечания, следующие за выражением (13.8).

В отличие от осесимметричного случая, приведенный здесь общий случай основывается на предположении о том, что поле $\mathbf{U}$ задано в сферической области. Затем для определения тороидальной и полоидальной частей $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{U}_p$ используется сферическая система координат, а именно сферическая координатная поверхность $r = \mathrm{const}$.

Возникает вопрос, можно ли распространить это рассмотрение на другие области или другие системы координат таким образом, чтобы утверждения, аналогичные (I) – (VII) оставались в силе. Нетрудно снова представить поле $\mathbf{U}$ в виде суммы двух частей, которые определены аналогично $\mathbf{U}_t$ и $\mathbf{U}_p$, но по отношению к другим поверхностям. Однако только в случае плоских или сферических поверхностей могут быть сделаны утверждения типа (IV) и (V) (см. [215]). Уже в случае эллипсоидальных поверхностей такие утверждения будут необоснованными.

13.5. Разложения по сферическим функциям

Как отмечалось, для определения тороидальной и полоидальной частей данного векторного поля $\mathbf{U}$, вообще говоря, требуется решение системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций U, V и W. Во многих случаях целесообразно разложить эти функции по сферическим функциям. Таким образом, интегрирование дифференциальных уравнений сведется к квадратурам. В этом разделе приведем некоторые соотношения, относящиеся к таким разложениям по сферическим функциям.

Представим каждую из функций U, V и W в виде разложения

$$F = \sum_{n,m} F_n^m(r) Y_n^m(\theta, \varphi). \tag{13.23}$$

Функции F_n^m являются комплексными величинами, а сферические функции Y_n^m определяются следующим образом:

$$Y_n^m = P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \tag{13.24}$$

где P_n^m – присоединенные полиномы Лежандра. Суммирование производится по всем n и m, где $n \geqslant 0$ и $|m| \leqslant n$. Поскольку F должно быть действительным, необходимо потребовать, чтобы $F_n^{-m} = F_n^{m*}$.

Векторное поле $\mathbf{U}$ можно, очевидно, рассматривать как сумму отдельных полей, которые соответствуют членам в разложениях U, V и W. Этим полям приписываются конкретные мультипольности. Будем называть все поля, соответствующие членам U, V или W с $n = 1$ дипольными полями, в случае $n = 2$ – квадрупольными полями, $n = 3$ – октупольными полями и т.д.

Как известно, сферические функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\Omega Y_n^m + n(n+1)Y_n^m = 0 \tag{13.25}$$

и условию ортогональности

$$\oint\!\!\oint Y_n^m Y_\nu^{-\mu} d\tilde{\omega} = \begin{cases} A_n^m, & \text{если } n = \nu \text{ и } m = \mu, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{13.26}$$

Используя нормировку Феррера для P_n^m, получим

$$A_n^m = \frac{4\pi(n+|m|)!}{(2n+1)(n-|m|)!}. \tag{13.27}$$

С помощью (13.16) из (13.19) и (13.20) получим

$$\Omega U = \mathbf{r} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{U}, \tag{13.28а}$$

$$\Omega V = -\mathbf{r} \cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{U}, \tag{13.28б}$$

$$\Omega W = \mathbf{r} \cdot \mathrm{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{U}), \tag{13.28в}$$

где (13.28а) и (13.28в) всего лишь повторения (13.11). Представляя U, V и W в виде разложений типа (13.23) и используя (13.25) и (13.26), получим

$$U_n^m = -(n(n+1)A_n^m)^{-1} \oint\!\!\oint (\mathbf{r} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{U}) Y_n^{-m} d\tilde{\omega}, \tag{13.29а}$$

$$V_n^m = (n(n+1)A_n^m)^{-1} \oint\!\!\oint (\mathbf{r} \cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{U}) Y_n^{-m} d\tilde{\omega}, \tag{13.29б}$$

$$W_n^m = -(n(n+1)A_n^m)^{-1} \oint\!\!\oint (\mathbf{r} \cdot \mathrm{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{U})) \times \tag{13.29в}$$

$$\times Y_n^{-m} d\tilde{\omega}, \text{ для } n \geqslant 1.$$

Аналогично, приходим к соотношениям

$$r^2 V + r\frac{\partial W}{\partial r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{U}, \tag{13.30}$$

$$V_n^m + \frac{1}{r}\frac{\partial W_n^m}{\partial r} = (r^2 A_n^m)^{-1} \oint\!\!\oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{U}) Y_n^{-m} d\tilde{\omega} \tag{13.31}$$

для $n \geqslant 0$.

Благодаря возможности калибровочных преобразований, $\hat{U}_0^0$ не определяется этими соотношениями, а V_0^0 и W_0^0 должны лишь удовлетворять соотношению (13.31).

В случае соленоидального $\mathbf{U}$ можно использовать (13.8) вместо (13.20б) и выразить $\hat{\mathbf{U}}_t$ в соответствии с (13.20а) через функцию $\hat{\mathbf{U}}$. В результате получим

$$\Omega \hat{U} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{U}, \tag{13.32}$$

$$\widehat{U}_n^m = -\left(n(n+1)A_n^m\right)^{-1} \oint\!\!\oint (\mathbf{r}\cdot\mathbf{U})\, Y_n^{-m}\, d\tilde{\omega} \quad \text{для } n \geqslant 1. \tag{13.33}$$

Благодаря возможности калибровочных преобразований, $\hat{U}_0^0$ может быть выбрано произвольно.

Относительно приведенных здесь соотношений заметим, что для любых $\mathbf{U}$ и F

$$\mathbf{r}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{U} = -\mathrm{div}(\mathbf{r}\times\mathbf{U}), \tag{13.34}$$

$$\oint\!\!\oint (\mathbf{r}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{U})\, F\, d\tilde{\omega} = -\oint\!\!\oint \mathrm{div}(\mathbf{r}\times\mathbf{U})\, F\, d\tilde{\omega} = -\oint\!\!\oint \mathbf{U}\cdot(\mathbf{r}\times\nabla F)\, d\tilde{\omega}. \tag{13.35}$$

Глава 14. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМО, ОСНОВАННОГО НА α-ЭФФЕКТЕ

14.1. Описание модели

Эта глава посвящена чрезвычайно простой сферической модели турбулентного динамо. Рассмотрим сферу из электрически проводящей среды, в которой отсутствует среднее движение, а имеется лишь однородная, изотропная, отражательно-неинвариантная, стационарная турбулентность. Предполагается, что влияние этой турбулентности на электромагнитные поля просто и правильно описывается турбулентной электропроводностью и α-эффектом. Тем самым считается, в частности, что масштабы турбулентности достаточно малы по сравнению с масштабами среднего магнитного поля. Проводящая среда по-прежнему предполагается окруженной вакуумом.

Сначала модель будет рассмотрена с кинематической точки зрения, т.е. влияние магнитного поля на движение учитываться не будет. Лишь в конце этой главы модель будет видоизменена допущением об обратном воздействии магнитного поля на турбулентность и, следовательно, на α-эффект.

До настоящего времени предлагаемая модель рассматривалась лишь в случае осесимметричных магнитных полей. В рамках этого подхода Краузе и Штеенбек [134] исследовали стационарный, а Фойгтман [290] также и нестационарный случай. Рюдигером [236] был сделан первый шаг в рассмотрении обратного воздействия магнитного поля на турбулентность. Ниже эти рассмотрения будут обобщены на случай произвольных магнитных полей.

Очевидно, наша модель является достаточно нереалистичной. Трудно представить механизм, который бы создавал и поддерживал однородную, изотропную, отражательно-неинвариантную турбулентность. Кроме того, даже если такая турбулентность существует где-то внутри сферы, то вблизи границы турбулентность должна быть неоднородной и анизотропной. В этом случае электромагнитные поля будут испытывать другие воздействия, которыми, однако, здесь пренебрегается. Тем не менее рассмотрение этой модели очень поучительно. Поскольку

ку она допускает аналитическое исследование, на ней удобно продемонстрировать некоторые особенности турбулентных динамо. Таким образом, она служит ориентиром для исследования более реалистичных моделей, которые во всех случаях требуют огромных численных расчетов.

14.2. Основные уравнения. Сведение их к уравнениям для скалярных функций

Уточним основные уравнения (12.2) – (12.5) для моделей турбулентных динамо применительно к рассмотренным здесь частным случаям. По-прежнему будем использовать сферическую систему координат с координатами r, θ, φ и радиусом-вектором r. Начало координат поместим в центр сферы, заполненной проводящей средой. Радиус сферы обозначим R. Что касается внутренней части сферы, то положим $\bar{u} = 0$ и $\mathcal{G}^+ = \alpha\bar{\mathbf{B}}$, а σ_T и α будем считать постоянным. Таким образом, получим уравнения

$$\frac{1}{\mu\sigma_T}\Delta\bar{\mathbf{B}} + \alpha\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0, \tag{14.1а}$$

$$\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{B}} = 0 \text{ для } r < R. \tag{14.1б}$$

Необходимо дополнить их уравнениями

$$\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{B}} = 0,\ \mathrm{div}\,\bar{\mathbf{B}} = 0 \text{ для } r > R, \tag{14.2а,б}$$

и условиями

$$[\bar{\mathbf{B}}] = 0 \text{ на } r = R, \tag{14.3а}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = O(r^{-3}) \text{ при } r \to \infty. \tag{14.3б}$$

При решении этих уравнений обратимся к математическим выкладкам предыдущей главы. Используем основные идеи разд. 13.3, 13.4, 13.5, особенно утверждения (I) – (VII), без каких-либо оговорок. Для простоты в дальнейшем вместо $\bar{\mathbf{B}}$ будем писать $\mathbf{B}$.

Во-первых, разложим $\mathbf{B}$ на тороидальную $\mathbf{B}_t$ и полоидальную $\mathbf{B}_p$ составляющие так, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p. \tag{14.4}$$

В силу (14.1б) и (14.2б) можно положить

$$\mathbf{B}_p = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_t, \tag{14.5}$$

где $\mathbf{A}_t$ – чисто тороидальный векторный потенциал.

Рассмотрим уравнение (14.1а). Подставляя (14.4) и отделяя тороидальную и полоидальную составляющие этого уравнения, получим

$$\frac{1}{\mu\sigma_T}\Delta\mathbf{B}_t + \alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_p - \frac{\partial\mathbf{B}_t}{\partial t} = 0, \tag{14.6а}$$

$$\frac{1}{\mu\sigma_T}\Delta\mathbf{B}_p + \alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_t - \frac{\partial\mathbf{B}_p}{\partial t} = 0 \quad \text{для } r < R. \tag{14.6б}$$

Ввиду (14.5) первое уравнение можно переписать как

$$\frac{1}{\mu\sigma_T}\Delta(\mathbf{B}_t - \mu\sigma_T\alpha\mathbf{A}_t) - \frac{\partial\mathbf{B}_t}{\partial t} = 0 \quad \text{для } r < R, \tag{14.7а}$$

а второе можно проинтегрировать и получить

$$\frac{1}{\mu\sigma_T}\Delta\mathbf{A}_t + \alpha\mathbf{B}_t - \frac{\partial\mathbf{A}_t}{\partial t} = 0 \quad \text{для } r < R. \tag{14.7б}$$

Аналогично из уравнения (14.2а) имеем

$$\mathbf{B}_t = 0, \qquad \Delta\mathbf{A}_t = 0 \quad \text{для } r > R. \tag{14.8а, б}$$

Условия (14.3) дают

$$\mathbf{B}_t = 0, \ [\mathrm{rot}\ \mathbf{A}_t] = 0 \quad \text{на } r = R, \tag{14.9а,б}$$

$$\mathbf{A}_t = O(r^{-2}) \quad \text{при } r \to \infty. \tag{14.9в}$$

Теперь представим $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{A}_t$ в виде

$$\mathbf{B}_t = -\mathbf{r} \times \nabla T, \tag{14.10а}$$

$$\mathbf{A}_t = -\mathbf{r} \times \nabla S, \tag{14.10б}$$

где T и S – однозначные скалярные функции, нормированные следующим образом:

$$\oint\!\!\!\oint T d\tilde{\omega} = \oint\!\!\!\oint S d\tilde{\omega} = 0. \tag{14.11}$$

Необходимо заметить, что, объединяя (14.4), (14.5) и (14.10), можно получить

$$\mathbf{B} = -\mathbf{r} \times \nabla T - \mathbf{r}\Delta S + \nabla\frac{\partial}{\partial r}(rS). \tag{14.12}$$

Возвратимся опять к уравнениям (14.7). Используя (14.10), можно свести их к виду

$$\mathbf{r} \times \nabla \left\{ \frac{1}{\mu\sigma_T} \Delta (T - \mu\sigma_T \alpha S) - \frac{\partial T}{\partial t} \right\} = 0, \tag{14.13а}$$

$$\mathbf{r} \times \nabla \left\{ \frac{1}{\mu\sigma_T} \Delta S + \alpha T - \frac{\partial S}{\partial t} \right\} = 0 \quad \text{для} \quad r < R. \tag{14.13б}$$

Отсюда сразу можно заключить, что выражения $\{ \ldots \}$ являются функциями только r и t. Вследствие (13.18) и (14.11) эти функции, однако, оказываются равными нулю. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{\mu\sigma_T} \Delta (T - \mu\sigma_T \alpha S) - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \tag{14.14а}$$

$$\frac{1}{\mu\sigma_T} \Delta S + \alpha T - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{для} \quad r < R. \tag{14.14б}$$

Аналогично из (14.8) получим

$$T = 0, \quad \Delta S = 0 \quad \text{для} \quad r > R. \tag{14.15а,б}$$

Окончательно на основе (14.9) имеем

$$T = 0, \; [S] = [\partial S / \partial r] = 0 \quad \text{на} \quad r = R, \tag{14.16а,б}$$

$$S = O(r^{-2}) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{14.16в}$$

Введем безразмерные координаты

$$x = r/R, \quad \tau = t/\mu\sigma_T R^2 \tag{14.17а,б}$$

и безразмерный параметр

$$C = \mu\sigma_T \alpha R, \tag{14.18}$$

который является количественной мерой величины α-эффекта. Кроме того, определим оператор D_n:

$$D_n f = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) - n(n+1) f \right), \tag{14.19}$$

где f – любая функция, а n – целое.

Более того, разложим функции T и S в ряд по сферическим функциям

$$T = \sum_{n,m} T_n^m (x, \tau) Y_n^m (\theta, \varphi), \tag{14.20а}$$

$$S = R \sum_{n,m} S_n^m(x, \tau) Y_n^m(\theta, \varphi). \qquad (14.20б)$$

Множитель R обеспечивает одинаковую размерность величинам T_n^m и S_n^m. Что касается Y_n^m, то отсылаем к выражениям (13.24) – (13.27). Суммирование производится по всем n и m, где $n \geqslant 1$ и $|m| \leqslant n$ вследствие (14.11). Значение $n = 0$ следует исключить. Поскольку T и S должны быть действительными величинами, то потребуем, чтобы $T_n^{-m} = T_n^{m*}$ и $S_n^{-m} = S_n^{m*}$.

Уравнения (14.14) для T и S сводятся теперь к виду

$$D_n(T_n^m - CS_n^m) - \partial T_n^m/\partial\tau = 0, \qquad (14.21а)$$

$$D_n S_n^m + CT_n^m - \partial S_n^m/\partial\tau = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (14.21б)$$

Из (14.15) и (14.16в) следует, что

$$T_n^m = 0, \quad S_n^m = a_n^m x^{-(n+1)} \quad \text{для} \quad x \geqslant 1, \qquad (14.22а,б)$$

причем a_n^m не зависит от x. Тогда выражение (14.16а) эквивалентно следующему:

$$T_n^m = 0 \qquad \text{при} \quad x = 1. \qquad (14.23)$$

Из (14.16б) получается

$$S_n^m = a_n^m, \quad \partial S/\partial x = -(n+1)a_n^m \quad \text{при} \quad x = 1, \qquad (14.24а,б)$$

и после исключения a_n^m:

$$\partial S_n^m/\partial x + (n+1)S_n^m = 0 \qquad \text{при} \quad x = 1. \qquad (14.25)$$

В результате проделанных преобразований решение системы дифференциальных уравнений в частных производных (14.1) и (14.2) с условиями (14.3), которая описывает векторное поле **B** во всем пространстве, сводится теперь к решению дифференциальных уравнений (14.21) с граничными условиями (14.23) и (14.25). Уравнения (14.21) связывают скалярные функции T_n^m и S_n^m в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Следует обратить внимание на то, что ни уравнения (14.21), ни условия (14.23) и (14.25) не дают какого-либо зацепления между парами T_n^m и S_n^m для разных n или m. Кроме того, эти уравнения и условия не зависят от m.

Наконец, отметим, что основные уравнения для **B** могут быть справедливыми, только если масштабы **B** превышают некоторые пре-

дельные, определяемые масштабами турбулентности. Тем самым накладывается ограничение на достаточно малые n и m. При слишком больших n и m наше рассмотрение теряет физический смысл.

14.3. Стационарный случай

Обратимся сперва к стационарным **B**-полям. В этом случае уравнения (14.20) сводятся к

$$D_n(T_n^m - CS_n^m) = 0, \tag{14.26а}$$

$$D_n S_n^m + CT_n^m = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{14.26б}$$

Здесь снова необходимо добавить условия (14.23) и (14.25). Таким образом, имеем задачу на собственные значения, в которой C является собственным числом.

Прежде чем перейти к дальнейшим замечаниям, рассмотрим T_n^m и S_n^m для произвольной, но фиксированной пары n и m. Случай $C = 0$ сначала опустим.

Из (14.26) можно получить уравнение только для T_n^m, а именно

$$(D_n + C^2)T_n^m = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{14.27}$$

Его единственное несингулярное решение в рассматриваемом интервале имеет вид

$$T_n^m = (c_n^m/\sqrt{x})]_{n+\frac{1}{2}}(Cx), \tag{14.28}$$

где c_n^m — константа, а $J_{n+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя порядка $n + \frac{1}{2}$. В силу (14.23) $c_n^m = 0$, если условие

$$J_{n+\frac{1}{2}}(C) = 0 \tag{14.29}$$

не выполнено. В случае $c_n^m = 0$ из (14.22) — (14.26) нетрудно видеть, что $T_n^m = S_n^m = 0$ для всех x. Обращаем особое внимание на случай $c_n^m \neq 0$, который имеет место при выполнении условия (14.29). Этим условием определяются дискретные значения C, которые представляют собой собственные значения нашей задачи. Прежде чем предложить обсуждение, предположим, что C является одним из этих собственных значений. Теперь, используя уравнение (14.26а) и снова исключая сингулярности, получим

$$S_n^m = \frac{c_n^m}{C\sqrt{x}} J_{n+\frac{1}{2}}(Cx) + d_n^m x^n \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{14.30}$$

где d_n^m является новой константой. Для того чтобы удовлетворить условию (14.25), эта константа должна быть соответствующим образом определена. Используя затем общие соотношения для функций Бесселя, получим

$$S_n^m = \frac{c_n^m}{C}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} J_{n+\frac{1}{2}}(Cx) - \frac{C}{2n+1} J_{n-\frac{1}{2}}(C) x^n\right)$$

$$\text{для } 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{14.31}$$

Обращаясь к соотношениям (14.22) и (14.24а), дополним (14.28), (14.29) и (14.31) выражениями

$$T_n^m = 0, \tag{14.32а}$$

$$S_n^m = -\frac{c_n^m}{2n+1} J_{n-\frac{1}{2}}(C) x^{-(n+1)} \quad \text{для} \quad x \geqslant 1. \tag{14.32б}$$

Для случая $C = 0$, который будет учитываться в последующем рассмотрении, нетрудно найти, что $T_n^m = S_n^m = 0$ для всех x.

Вернемся к рядам для T и S, которые заданы выражениями (14.20). Очевидно, здесь снова играют роль все n и m, где $n \geqslant 1$ и $|m| \geqslant n$. До тех пор пока C не совпадает ни с одним собственным значением, определяемым (14.29), величины T и S всюду обращаются в нуль. Как только C равно одному из этих собственных значений, то T и S могут отличаться от нуля. В соответствии со свойствами $J_{n+\frac{1}{2}}$ собственные значения для различных n всегда отличны друг от друга. Поэтому в разложениях для T и S суммирование по n можно опустить; остаются только вклады от одного частного n. Очевидно, собственные значения для данного n, но различных m совпадают, т.е. имеется вырождение по m. Следовательно, T и S могут оставаться суммами членов с различными m.

Из этих вычислений видно, что стационарные B-поля возможны, только когда параметр C, который является мерой величины α-эффекта, принимает особые значения, а именно упомянутые собственные значения. Эти B-поля соответствуют мультиполям заданного порядка,

который зависит от конкретного собственного значения. Наличие **B**-моды порядка n исключает появление мод с другими n. Однако сосуществование мод с одним и тем же n, но различными m возможно.

Останавливаясь теперь на некоторых подробностях, ограничимся сперва случаем $\alpha \geqslant 0$, или, что то же, $C \geqslant 0$. Рассмотрим снова характеристическое уравнение (14.29). Согласно свойствам $J_{n+1/2}$, для любого заданного n имеем бесконечный ряд собственных значений, который обозначим C_{nl}, где $l = 1,2,\ldots$. Расположим C_{nl} так, чтобы они монотонно возрастали с l. Опять, обращаясь к свойствам $J_{n+1/2}$, можно утверждать, что C_{nl} для любого фиксированного l также монотонно возрастают с n. Поэтому C_{11} оказывается наименьшим из всех значений C_{nl}.

Обсудим случай $n = 1$. Соответствующими **B**-модами являются дипольные поля. Моды с $m = 0$ и $m = \pm 1$ отличаются только поворотом относительно оси, проходящей через начало системы координат. Из выражения (14.29), которое для $n = 1$ сводится к виду

$$(1/C_{1l})\operatorname{tg} C_{1l} - 1 = 0, \quad C_{1l} > 0, \tag{14.33}$$

получим

$$C_{11} = 4{,}4934, \quad C_{12} = 7{,}7253, \tag{14.34а,б}$$

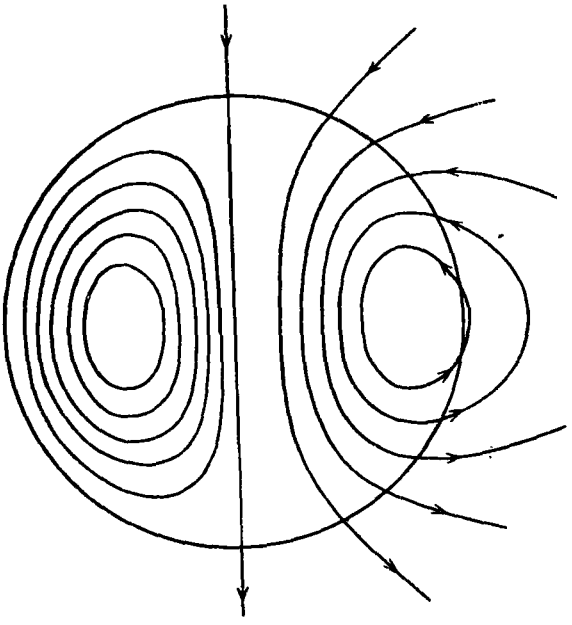
$$C_{13} = 10{,}9041, \quad C_{14} = 14{,}0662. \tag{14.34в,г}$$

С помощью (14.12), (14.17), (14.28), (14.31) и (14.32) могут быть рассчитаны соответствующие **B**-поля. Для поля, принадлежащего $l = 1$, линии поля показаны на рис. 14.1. В случае $l > 1$ поле внутри сферы имеет более сложную структуру.

Рассмотрим теперь случай $n > 1$ и, следовательно, **B**-моды, которые соответствуют квадрупольным полям, октупольным полям и т.д. Такие моды с $m = 0$, $m = \pm 1, \ldots$, обладают совершенно различными конфигурациями поля. Они могут стать конгруэнтными в результате поворота только в частных случаях. В этой связи замечательно то, что собственные значения не зависят от m. Исходя из (14.29), можно получить:

$$C_{21} = 5{,}7635, \quad C_{22} = 9{,}0950, \tag{14.35а,б}$$

$$C_{23} = 12{,}3229, \quad C_{24} = 15{,}146. \tag{14.35в,г}$$



Р и с. 14.1. Стационарное B-поле в случае $n=l=1$. В левой половине рисунка показаны линии постоянной величины тороидального поля, в правой линии полоидального поля (см. [134]).

Очевидно, уравнения (14.26) и соответствующие граничные условия остаются справедливыми и при изменении знака у C, а также либо у T, либо у S. Следовательно, для каждого положительного собственного значения C_{nl} существует отрицательное собственное значение а именно $-C_{nl}$. Исходя из **B**-поля, соответствующего C_{nl}, получим поле, соответствующее $-C_{nl}$, путем изменения знака либо у $\mathbf{B}_t$, либо у $\mathbf{B}_p$.

14.4. Нестационарный случай

Теперь переходим к рассмотрению задачи с начальными условиями для поля **B**. Предположим, что $\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0)$ задано и требуется определить $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ при $t > 0$. Используя предыдущие выводы, эту задачу можно также сформулировать в терминах T_n^m и S_n^m. В этом случае будем предполагать, что все $T_n^m(x, 0)$ и $S_n^m(x, 0)$ заданы и требуется определить $T_n^m(x, \tau)$ и $S_n^m(x, \tau)$ при $\tau > 0$.

Предварительно следует решить более простую задачу. Будем искать $\mathbf{B}$-поля с чисто экспоненциальной зависимостью от времени, т.е. в виде $\mathbf{B}(x, 0)\exp\{\lambda t\}$, где λ – некоторая вещественная постоянная. С этой целью будем искать T_n^m и S_n^m в виде

$$T_n^m = T_{nl}^m(x)\exp\{\lambda_{nl}\tau\}, \tag{14.36а}$$

$$S_n^m = S_{nl}^m(x)\exp\{\lambda_{nl}\tau\}. \tag{14.36б}$$

Подразумевается, что если такие T_n^m и S_n^m существуют, то λ_{nl} не может зависеть от m. Индекс l будет конкретизирован ниже.

Рассмотрим уравнения (14.21). Подставляя (14.36), получим

$$D_n(T_n^m - CS_{nl}^m) - \lambda_{nl}T_{nl}^m = 0, \tag{14.37а}$$

$$D_nS_{nl}^m + GT_{nl}^m - \lambda_{nl}S_{nl}^m = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{14.37б}$$

Общее, несингулярное решение в рассматриваемом интервале имеет вид

$$T_{nl}^m = \frac{c_{nl}^{(1)m}}{\sqrt{x}}J_{n+\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(1)}x) + \frac{c_{nl}^{(2)m}}{\sqrt{x}}J_{n+\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(2)}x), \tag{14.38а}$$

$$S_{nl}^m = \frac{c_{nl}^{(1)m}}{u_{nl}^{(1)}\sqrt{x}}J_{n+\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(1)}x) + \frac{c_{nl}^{(2)m}}{u_{nl}^{(2)}\sqrt{x}}J_{n+\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(2)}x)$$

$$\text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{14.38б}$$

где $c_{nl}^{(1)m}$ и $c_{nl}^{(2)m}$ – произвольные постоянные и

$$u_{nl}^{(1,2)} = \frac{1}{2}(C \pm \sqrt{C^2 - 4\lambda_{nl}}). \tag{14.39}$$

Условия (14.23) и (14.25) совместно с соответствующими соотношениями для функций Бесселя приводят к выражениям

$$c_{nl}^{(1)m}J_{n+\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(1)}) + c_{nl}^{(2)m}J_{n+\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(2)}) = 0, \tag{14.40а}$$

$$c_{nl}^{(1)m}J_{n-\frac{1}{2}}(u_{n1}^{(1)}) + c_{nl}^{(2)m}J_{n-\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(2)}) = 0. \tag{14.40б}$$

Будем искать только нетривиальные T_{nl}^{m} и S_{nl}^{m}. Более конкретно, ищем T_{nl}^{m} и S_{nl}^{m}, т.е. $c_{nl}^{(1)m}$ и $c_{nl}^{(2)m}$, которые не обращаются одновременно в нуль для любого фиксированного n и m. В этом случае (14.40) означает, что

$$J_{n+\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(1)})J_{n-\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(2)}) - J_{n-\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(1)})J_{n+\frac{1}{2}}(u_{nl}^{(2)}) = 0. \qquad (14.41)$$

Это соотношение, будучи дополненное выражением (14.39), определяет бесконечный ряд значений λ_{nl} для каждого заданного n и C. Пронумеруем теперь λ_{nl} и соответствующие T_{nl}^{m} и S_{nl}^{m} индексами $l = 1,2,\ldots$ таким образом, чтобы λ_{nl} для любого фиксированного n возрастали с l. Для того чтобы вычислить λ_{nl} как функции C, удобно сначала определить пары $u_{nl}^{(1)}$ и $u_{nl}^{(2)}$. Тогда взаимосвязанные величины λ_{nl} и C находятся из выражений

$$\lambda_{nl} = u_{nl}^{(1)}u_{nl}^{(2)}, \qquad (14.42а)$$

$$C = u_{nl}^{(1)} + u_{nl}^{(2)}, \qquad (14.42б)$$

которые являются следствием (14.39).

Таким образом, можно определить B-моды с чисто экспоненциальной зависимостью от времени.

В частном случае $C = 0$ эти моды совпадают со свободно затухающими модами. Для этого случая с учетом (14.42б) положим $u_{nl}^{(1)} = -u_{nl}^{(2)} = u_{nl}$, где $u_{nl} > 0$. Используя свойства $J_{n-\frac{1}{2}}$ и $J_{n+\frac{1}{2}}$, (14.41) можно заменить теперь на

$$J_{n-\frac{1}{2}}(u_{nl})J_{n+\frac{1}{2}}(u_{nl}) = 0, \qquad (14.43)$$

а (14.42а) – на

$$\lambda_{nl} = -(u_{nl})^2 < 0. \qquad (14.44)$$

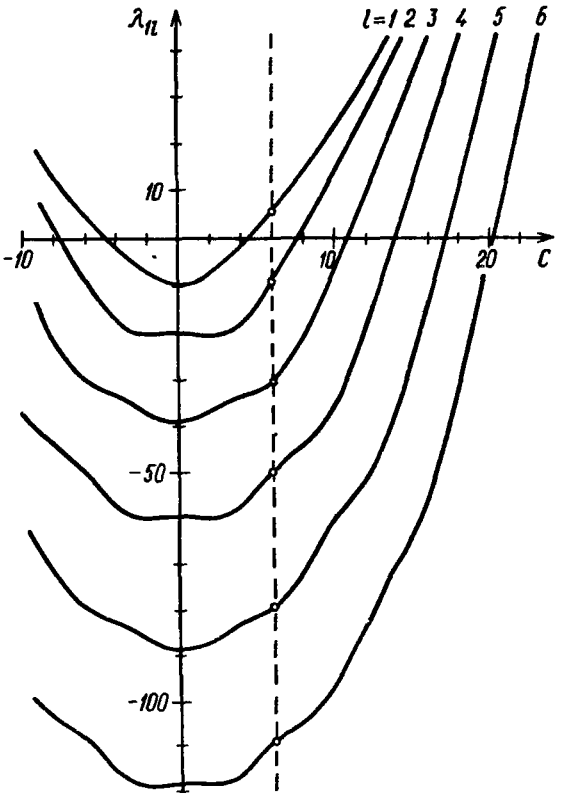
Для дипольных мод, т.е. $n = 1$, получим

$$\sin u_{1l}((1/u_{1l})\operatorname{tg} u_{1l} - 1) = 0 \qquad (14.45)$$

и найдем

$$\lambda_{11} = -\pi^2, \quad \lambda_{12} = -(4{,}4934)^2, \qquad (14.46а,б)$$

$$\lambda_{13} = -(2\pi)^2, \quad \lambda_{14} = -(7{,}7253)^2 \qquad (14.46в,г)$$



Р и с. 14.2. Зависимость λ_{nl} от C для $n=1$ и $l=1,2,\ldots,6$. Значения λ_{nl} симметричны по C. Штриховая линия соответствует частному значению C, использованному в примере, который рассмотрен в тексте (см. [290]).

Аналогично для квадрупольных мод, т.е. $n=2$, получим

$$\lambda_{21}=-(4{,}4934)^2, \qquad \lambda_{22}=-(5.7635)^2, \tag{14.47а,б}$$

$$\lambda_{23}=-(7{,}7253)^2, \qquad \lambda_{24}=-(9{,}0950)^2. \tag{14.47в,г}$$

В случае $C\neq 0$, В-поля подвержены влиянию α-эффекта и λ_{nl} не обязательно отрицательны. Для достаточно больших $|C|$ могут существовать также положительные λ_{nl} и соответствующие моды будут расти со временем. Что касается дипольных и квадрупольных мод, т.е. $n=1$ и $n=2$, то зависимость λ_{nl} от C показана на рис. 14.2 и 14.3. Очевидно, $\lambda_{nl}=0$ соответствует стационарным модам, для

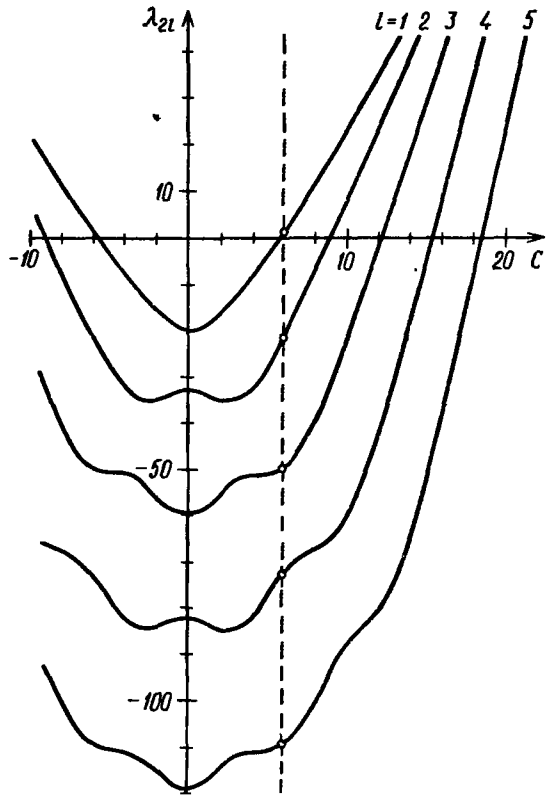


Рис. 14.3. Зависимость λ_{nl} от C для $n = 2$ и $l = 1,2, \ldots, 5$. Значения λ_{nl} симметричны по C. Штриховая линия соответствует частному значению C, использованному в примере, который рассмотрен в тексте (см. [290]).

которых $C = C_{nl}$. Сравнивая λ_{nl} при любом фиксированном C для различных мод, найдем, что они тем больше, чем меньше значение $|C_{nl}|$, связанное с этими модами. Поэтому мода, принадлежащая данному $|C_{nl}|$, будет расти медленнее (быстрее затухать), чем мода с меньшим $|C_{nl}|$.

Для любого фиксированного C значения λ_{nl} увеличиваются с ростом n или l. Поэтому B-моды с меньшими n и l затухают медленнее (быстрее растут), чем моды с более высокими n и l. Это становится понятным, если рассмотреть связь между n и l и геометрической структурой B-полей. Очевидно, что n характеризует зависимость B

от θ и φ. Более точно, в случае $m = 0$ поле зависит только от θ; если же n фиксировано, а $|m|$ увеличивается, то зависимость от θ становится более слабой, а от φ – более сильной.[1)] Кроме того, зависимость $\mathbf{B}$ от r характеризуется l. С ростом l зависимость от r становится сложнее. Чем сильнее изменения поля $\mathbf{B}$ в пространстве, тем эффективнее происходит омическая диссипация, т.е. разрушение поля.

Теперь возвратимся к поставленной выше задаче с начальными условиями для поля $\mathbf{B}$. Можно показать, что она имеет единственное решение. На основании предыдущих рассмотрений все основные соотношения для $\mathbf{B}$, т.е. (14.1) – (14.3), удовлетворяются, если положить

$$T_n^m = \sum_l T_{nl}^m(x)\exp\{\lambda_{nl}\tau\}, \tag{14.48а}$$

$$S_n^m = \sum_l S_{nl}^m(x)\exp\{\lambda_{nl}\tau\} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{14.48б}$$

и дополнить их, согласно (14.20) и (14.22а), соответствующими соотношениями при $x > 1$. Очевидно, (14.48) является решением задачи с начальными условиями, если $T_n^m(x, 0)$ и $S_n^m(x, 0)$, которые следует рассматривать заданными, но, конечно, удовлетворяющими (14.23) и (14.25), могут быть представлены в виде

$$T_n^m(x, 0) = \sum_l T_{nl}^m(x), \tag{14.49а}$$

$$S_n^m(x, 0) = \sum_l S_{nl}^m(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{14.49б}$$

Написать соотношение при $x > 1$ не составляет труда. В случае $C = 0$ легко показать, что представления вида (14.49) всегда возможны. Для $C \neq 0$ доказательство оказывается более сложным.

Не вдаваясь в подробности, предположим, что нашему решению задачи с начальными условиями для поля $\mathbf{B}$ удовлетворяют в действительности все исходные поля. Представим себе частное значение C, такое, что, например, λ_{11} и λ_{21} будут положительными, в то время как все другие λ_{nl} – отрицательными; эта ситуация соответствует штриховой линии на рис. 14.2 и 14.3. Предположим, в частности, что

---

1) Авторы имеют в виду, что сферическая функция Y_n^m имеет n нулей по углу θ и $|m|$ нулей по углу φ. — *Прим. ред.*

среди исходных полей присутствуют такие моды, которые соответствуют λ_{11} и λ_{21}, т.е. отдельные дипольные и квадрупольные моды. Тогда будут нарастать именно эти моды, в то время как другие будут затухать. Поскольку $\lambda_{11} > \lambda_{21}$, то моды, соответствующие λ_{11}, т.е. дипольные моды, будут нарастать быстрее, чем моды, соответствующие λ_{21}, т.е. квадрупольные моды. Независимо от начального отношения величин дипольные моды через некоторое время будут преобладать. Другими словами, будут преобладать такие моды, которые отвечают наименьшему значению $|C_{nl}|$.

Эти выводы будут важны также для других моделей. Пока справедливо утверждение, что значения λ_{nl} для различных мод тем больше, чем меньше соответствующие $|C_{nl}|$, моды с наименьшим $|C_{nl}|$ в общем случае будут преобладать.

Проводившееся до сих пор рассмотрение модели кинематического динамо можно считать задачей на устойчивость. Возможность роста магнитных полей соответствует неустойчивости. В терминах теории устойчивости мы имеем устойчивость при $\lambda_{11} < 0$, предельную устойчивость при $\lambda_{11} = 0$ и неустойчивость при $\lambda_{11} > 0$. В этом смысле C_{11} следует назвать предельным значением C.

14.5. Рассмотрение, включающее обратное воздействие магнитного поля на движения

До сих пор модель рассматривалась с кинематической точки зрения. В частности, пренебрегалось влиянием силы Лоренца на движение среды. Поскольку сила Лоренца пропорциональна квадрату магнитного поля, то ею можно пренебречь, если магнитное поле достаточно мало, но с ростом поля она становится очень важной. Усредненная часть силы Лоренца приводит к среднему движению так, что $\bar{\mathbf{u}}$ будет отлично от нуля. Флуктуирующая часть будет влиять на турбулентность и, следовательно, на электродвижущую силу $\mathcal{E}$, которая становится нелинейной по $\mathbf{B}$. Таким образом, перед нами довольно сложная ситуация.

В рассматриваемой здесь модели не будут обсуждаться все эффекты, связанные с магнитным полем. Для того чтобы указать на некоторые специальные случаи, будут введены сильные упрощения. Как и прежде, среднее движение не будет приниматься во внимание.

Что касается эффектов, обусловленных турбулентностью, то видоизменим сделанные предположения, допустив, что только α может зависеть от $\mathbf{B}$, в то время как σ_T будем считать по-прежнему постоянным. Рассмотрим только стационарный случай. Тогда вместо уравнения (14.1а) имеем

$$\frac{1}{\mu\sigma_T}\Delta\mathbf{B} + \operatorname{rot}(\alpha\mathbf{B}) = 0 \qquad \text{при} \quad r < R\,. \tag{14.50}$$

В силу зависимости α от $\mathbf{B}$ это уравнение нелинейно относительно $\mathbf{B}$. Соотношения (14.1б) – (14.3б) остаются без изменений. Предположим, что поле $\mathbf{B}$ мало и напишем

$$\alpha = \alpha_0 - \alpha_B \mathbf{B}^2, \tag{14.51}$$

где α_0 и α_B – постоянные. Предполагая заранее, что $|\alpha|$ уменьшается с ростом $|\mathbf{B}|$, потребуем, чтобы α_0 и α_B имели одинаковые знаки; для простоты рассмотрим только $\alpha_0, \alpha_B > 0$. Более того, рассмотрим случай, когда α_0 несколько превышает α_{11}, но не другие α_{nl}, где α_{nl} определены с помощью соотношения $\mu\sigma_T\alpha_{nl}R = C_{nl}$. Следовательно,

$$\alpha_0 = \alpha_{11} + \delta\alpha, \tag{14.52}$$

где $\delta\alpha$ – малая положительная постоянная.

Ясно, что $\mathbf{B}$ должно стремиться к нулю при $\delta\alpha$, стремящемся к нулю. Поэтому естественно положить

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\delta\alpha}{\alpha_B}\right)^{1/2}\mathbf{b} \tag{14.53}$$

и допустить, что $\mathbf{b}$ может быть представлено в виде степенного ряда:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(0)} + \varepsilon\mathbf{b}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{b}^{(2)} + \ldots\,, \tag{14.54}$$

где ε – малый параметр, определяемый как

$$\varepsilon = \delta\alpha/\alpha_{11}. \tag{14.55}$$

Таким образом, уравнение (14.50) сводится к

$$\frac{1}{\mu\sigma_T}\Delta\mathbf{b}^{(0)} + \alpha_{11}\operatorname{rot}\mathbf{b}^{(0)} = 0, \tag{14.56а}$$

$$\frac{1}{\mu\sigma_T}\Delta\mathbf{b}^{(1)} + \alpha_{11}\operatorname{rot}\mathbf{b}^{(1)} = -\alpha_{11}\operatorname{rot}\left((1 - \mathbf{b}^{(0)2})\mathbf{b}^{(0)}\right), \tag{14.56б}$$

$$\frac{1}{\mu\sigma_T}\Delta\mathbf{b}^{(2)} + \alpha_{11}\mathrm{rot}\,\mathbf{b}^{(2)} = -\alpha_{11}\mathrm{rot}\left((1-\mathbf{b}^{(0)2})\,\mathbf{b}^{(1)} - 2(\mathbf{b}^{(0)}\cdot\mathbf{b}^{(1)})\mathbf{b}^{(0)}\right), \tag{14.56в}$$

Эти уравнения необходимо дополнить соответствующими соотношениями, вытекающими из (14.1б) – (14.3в).

Сначала рассматриваются уравнения для $\mathbf{b}^{(0)}$. Они имеют нетривиальное решение, которое может быть получено из разд. 14.3. Это решение определено с точностью до постоянного множителя. Что касается уравнений для $\mathbf{b}^{(1)}$, правая часть которых зависит от $\mathbf{b}^{(0)}$, то отметим, что соответствующие им однородные уравнения также имеют нетривиальное решение. Следовательно, система уравнений допускает нетривиальное решение, если только правая часть удовлетворяет некоторому условию, что сводится к условию для $\mathbf{b}^{(0)}$. Таким образом, находим $\mathbf{b}^{(0)}$. Конечно, $\mathbf{b}^{(1)}$ опять содержит свободную постоянную. Уравнения для $\mathbf{b}^{(2)}$, в свою очередь, приводят к условиям, которые позволяют полностью определить $\mathbf{b}^{(1)}$. Тем самым, члены в разложении (14.54) могут быть последовательно определены.

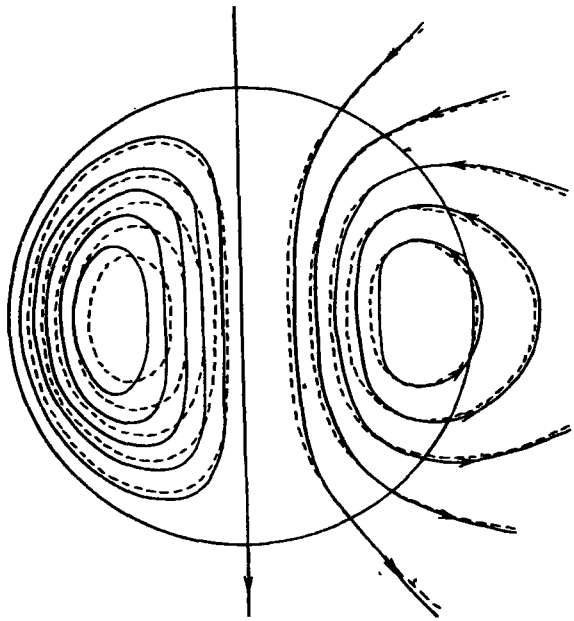
Что касается деталей этих расчетов, то обратимся к статье [236]. Для объяснения полученных там результатов снова воспользуемся представлением поля $\mathbf{B}$ с помощью (14.4), (14.5), (14.80), (14.11) и (14.17). Рассмотрим сначала нулевое приближение, тогда разложение (14.54) для $\mathbf{b}$ обрывается на члене $\mathbf{b}^{(0)}$, что соответствует $\varepsilon = 0$. Согласно сделанным выше предположениям, разложения (14.20) для T и S могут содержать лишь члены с $n = 1$. Без ограничения общности можно положить здесь $m = 0$. Очевидно, поле $\mathbf{B}$ является дипольным. Здесь T_1^0 и S_1^0 снова даются выражениями (14.28), (14.30), (14.31) и (14.32) при $C = C_{11}$, и картина поля идентична приведенной на рис. 14.1. Теперь можно добавить, что

$$c_1^0 = z\,(\delta\alpha/\alpha_B)^{1/2}, \tag{14.57}$$

где z – безразмерная постоянная. Численные расчеты показывают, что

$$z = 1{,}1525. \tag{14.58}$$

Рассмотрим теперь первое приближение, когда помимо члена $\mathbf{b}^{(0)}$ учтен также член, содержащий $\mathbf{b}^{(1)}$, т.е. введены малые положительные ε. В этом случае T и S содержат не только члены с $n = 1$, но и



Р и с. 14.4. Стационарное **B**-поле в модели с зависимостью α от **B** в случае $n = l = 1$. В левой части рисунка показаны линии постоянной величины тороидального поля, в правой — силовые линии полоидального поля. Штриховые линии соответствуют $\varepsilon = 0$; они совпадают со сплошными линиями на рисунке 14.1. Здесь сплошные линии соответствуют $\varepsilon = 1/c_{11}$ (см. [236]).

члены с $n = 3$, причем для всех них $m = 0$. Таким образом, поле **B** является суммой дипольной и октупольной частей. Функции T_1^0, S_1^0, T_3^0 и S_3^0 уже достаточно сложные и приводиться здесь не будут. На рис. 14.4 показана конфигурация поля для $\varepsilon = 1/c_{11}$, т.е. $\mu\sigma_T \delta\alpha R = 1$. По сравнению со случаем $\varepsilon = 0$ как линия максимального тороидального поля, так и линия нулевого полоидального поля смещены наружу.

Рассмотренная здесь задача, требующая нелинейных уравнений для описания **B**, изучалась также на основе других методов. Так, в статье [238] уравнения для **B** были численно проинтегрированы с помощью метода сеток.

Глава 15. СФЕРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДИНАМО ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ: ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

15.1. Общее описание моделей

Остановимся теперь на сферических моделях динамо, отражающих существенные черты процессов, которые предположительно происходят в космических объектах. Сферическое тело, состоящее из электрически проводящего вещества, по-прежнему во всех случаях будет предполагаться вращающимся вокруг фиксированной оси, проходящей через его центр. Наряду с осью вращения определена также экваториальная плоскость. Распределение электропроводности предполагается симметричным относительно как оси вращения, так и экваториальной плоскости; в дальнейшем мы ограничимся случаем, когда проводимость зависит только от радиуса. Поскольку рассматривается усредненное движение, в простейшем случае предполагается только твердотельное вращение. Кроме того, учтем дифференциальное вращение с угловой скоростью, которая может зависеть от радиуса или от широты, и меридиональную циркуляцию. Однако в любом случае по-прежнему требуем сферическую симметрию среднего движения относительно как оси вращения, так и экваториальной плоскости и, кроме того, его стационарность. Наряду со средним движением предполагается существование флуктуативных или турбулентных движений, которые приводят к появлению электромагнитных сил, влияющих на средние электромагнитные поля. Предполагается, что эти движения также стационарны и имеют ту же симметрию. Го-

---

[1] Основные результаты этой главы содержатся также в статье Рэдлера [15*], которая появилась после выхода английского издания данной книги и написана более подробно. Дальнейшие результаты, относящиеся к взаимодействиям между тороидальными и полоидальными полями и возможным реализациям динамо-механизмов, можно найти также в работах Рэдлера [14*, 16*] и Рейхерта [22*].

воря более точно, мы требуем инвариантности всех средних величин, зависящих от этих движений, относительно произвольных виртуальных поворотов флуктуирующего поля скоростей вокруг оси вращения, относительно отражения этого поля в экваториальной плоскости и относительно сдвигов во времени. Что же касается средней электродвижущей силы, то мы ограничиваемся такими ситуациями, когда эта величина отлична от нуля только при наличии среднего магнитного поля и может быть выражена в данной точке через магнитную индукцию $\bar{\mathbf{B}}$ и ее первые пространственные производные в этой точке. Все пространство вне проводящего тела считается вакуумом.

Мы будем иметь дело только с кинематическими моделями. Влиянием магнитного поля на движения будем пренебрегать. В этих рамках мы можем изучать появление динамо, условия существования и структуры магнитных полей для случая слабых полей. Вопрос о поведении динамо в случае сильных полей остается открытым.

15.2. Основные уравнения и некоторые их свойства симметрии

Начнем снова с общих уравнений (12.1)... (12.5) для моделей турбулентных динамо. Как и в предыдущей главе, будем использовать сферическую полярную систему с координатами r, θ и φ и радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Начало координат выберем в центре проводящей сферы с полярной осью вдоль оси вращения. В дальнейшем аксиальная симметрия будет пониматься как симметрия относительно оси вращения. Радиус сферы обозначим через R. Как и для поля $\bar{\mathbf{B}}$, внутри проводящей среды имеем уравнения

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\bar{\mathbf{B}}\right)-\operatorname{rot}\left(\bar{\mathbf{u}}\times\bar{\mathbf{B}}+\mathcal{E}\right)+\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial t}=0, \tag{15.1а}$$

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{B}}=0 \quad \text{для} \quad r<R, \tag{15.1б}$$

где σ, $\bar{\mathbf{u}}$ и $\mathcal{E}$ определяются согласно принятым выше предположениям. Снова мы можем заменить σ и $\mathcal{E}$ на σ_T и $\mathcal{E}^+$. Кроме того, имеем уравнения

$$\operatorname{rot}\bar{\mathbf{B}}=0,\quad \operatorname{div}\bar{\mathbf{B}}=0 \quad \text{для} \quad r>R \tag{15.2а,б}$$

и условия

$$[\bar{\mathbf{B}}]=0,\quad \mathbf{r}\cdot\bar{\mathbf{u}}=0 \quad \text{при} \quad r=R, \tag{15.3а,б}$$

$$\overline{\mathbf{B}} = O(r^{-3}) \text{ при } r \to \infty. \tag{15.3в}$$

Предположения о симметрии распределения проводимости и движений приводят к особым свойствам решений этих уравнений. Рассмотрим сначала модели, соответствующие уравнениям (11.1) . . . (11.4). Обратим внимание на свойства симметрии относительно вращений и отражений, присущих полям $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$ для данного случая. Точнее говоря, рассмотрим вращения вокруг полярной оси, которые преобразуют $\mathbf{u}$ в $\mathbf{u}^{\mathrm{rot}}$ и $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}^{\mathrm{rot}}$, так что

$$u^{\mathrm{rot}}_{r,\theta,\varphi}(r, \theta, \varphi) = u_{r,\theta,\varphi}(r, \theta, \varphi - \varphi_0), \tag{15.4а}$$

$$B^{\mathrm{rot}}_{r,\theta,\varphi}(r, \theta, \varphi) = B_{r,\theta,\varphi}(r, \theta, \varphi - \varphi_0) \tag{15.4б}$$

для некоторого угла φ_0, а отражение в экваториальной плоскости преобразует $\mathbf{u}$ в $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$ и $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}^{\mathrm{ref}}$, так что

$$u^{\mathrm{ref}}_{r,\varphi}(r, \theta, \varphi) = u_{r,\varphi}(r, \pi - \theta, \varphi),$$

$$u^{\mathrm{ref}}_{\theta}(r, \theta, \varphi) = -u_{\theta}(r, \pi - \theta, \varphi), \tag{15.5а,б}$$

$$B^{\mathrm{ref}}_{r,\varphi}(r, \theta, \varphi) = -B_{r,\varphi}(r, \pi - \theta, \varphi),$$

$$B^{\mathrm{ref}}_{\theta}(r, \theta, \varphi) = B_{\theta}(r, \pi - \theta, \varphi). \tag{15.5в,г}$$

Если уравнения (11.1) . . . (11.4) справедливы для данных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$, они остаются справедливыми при замене $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$ на $\mathbf{u}^{\mathrm{rot}}$ и $\mathbf{B}^{\mathrm{rot}}$ или на $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$ и $\mathbf{B}^{\mathrm{ref}}$. Усредняя (11.1) . . . (11.4), получаем уравнения для средних полей (12.1) . . . (12.5). Очевидно, они обладают теми же свойствами. Однако, согласно нашим предположениям, переход от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{u}^{\mathrm{rot}}$ или к $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$ не влияет на средние поля и, в частности, на $\overline{\mathbf{u}}$, $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathbf{B}}$. Следовательно, применимость (12.1) . . . (12.5) не нарушается, даже если только $\mathbf{B}$ заменяется на $\mathbf{B}^{\mathrm{rot}}$ или $\mathbf{B}^{\mathrm{ref}}$. Мы можем принять, что $\mathbf{B}$ появляется только в виде $\overline{\mathbf{B}}$; $\mathcal{E}$ может быть выражено через $\mathbf{u}$ и $\overline{\mathbf{B}}$. Таким образом получаем, что справедливость (12.1) . . . (12.5) сохраняется, если $\overline{\mathbf{B}}$ заменено на $\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{rot}}$ или $\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{ref}}$. Поскольку уравнения (12.1) . . . (12.5), по сути дела, совпадают с (15.1) . . . (15.3), можно утверждать, что любое поле $\overline{\mathbf{B}}$, которое является решением уравнений (15.1) . . . (15.3) остается решением

этих уравнений и после преобразований или отражения, согласно (15.40) или (15.5 в,г). Аналогичные заключения по отношению к сдвигам во времени можно получить из условий стационарности распределения проводимости и ограничений на временную зависимость движений.

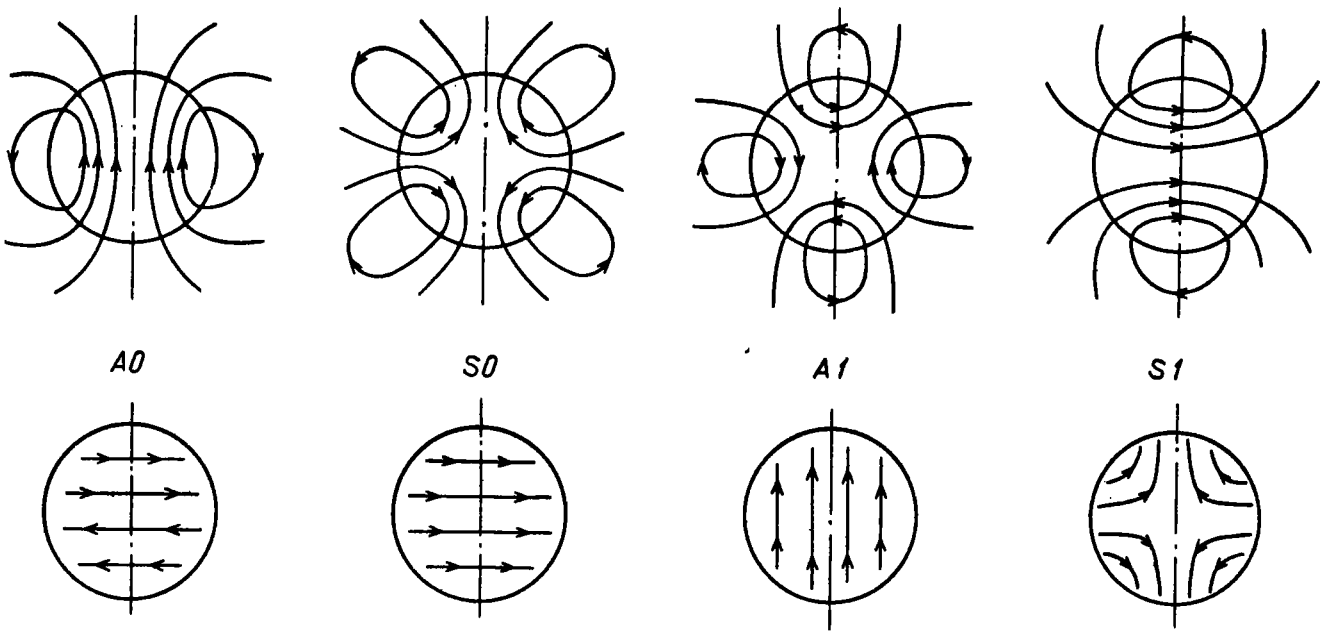
15.3. Парциальные моды магнитного поля

Любое $\overline{\mathbf{B}}$-поле можно разложить на парциальные моды. Сначала мы разделим его на два поля $\overline{\mathbf{B}}_A$ и $\overline{\mathbf{B}}_S$, где $\overline{\mathbf{B}}_A$ – антисимметричная, а $\overline{\mathbf{B}}_S$ – симметричная части относительно экваториальной плоскости. Используя разложение Фурье, можно представить каждое из полей как сумму вещественных и мнимых частей комплексных величин вида $C^m e^{im\varphi}$, где C^m – комплексное осесимметричное векторное поле, а m-целое неотрицательное число. Очевидно, $m = 0$ соответствует осесимметричному, а $m \neq 0$ – неосесимметричному полю.

Предположим теперь, что $\overline{\mathbf{B}}$-поле удовлетворяет основным уравнениям (15.1) . . . (15.3). Если $\overline{\mathbf{B}}$ не является одной из упомянутых мод, то можно его разложить по таким модам. Вследствие линейности основных уравнений и упомянутых свойств их решений можно утверждать, что решением является каждая отдельная мода.

$\overline{\mathbf{B}}$-моды обозначаем через A или S соответственно для случаев антисимметричности или симметричности относительно экваториальной плоскости и добавляем значок m, определяющий зависимость от φ. Простейшие примеры $\mathbf{B}$-мод типов $A\,0$, $S\,0$, $A\,1$, $S\,1$ даются дипольными и квадрупольными полями. Соответствующие образы поля даны на рис. 15.1. Конечно, в общем случае не следует ожидать, что $\overline{\mathbf{B}}$-моды, которые являются решениями (15.1) . . . (15.3), будут чисто дипольными или квадрупольными полями. Эти поля только играют роль основных членов в разложениях по мультиполям, которые содержат также члены высших порядков с теми же самыми свойствами симметрии.

Будем теперь учитывать, что в общем случае $\overline{\mathbf{B}}$ меняется со временем. Распространяя разложение на этот случай, получим $\overline{\mathbf{B}}$-моды, имеющие вид вещественной или мнимой частей от величины $C^m \exp(im\varphi + pt)$, где C^m теперь комплексное осесимметричное векторное поле, не зависящее от t, а p-комплексная постоянная. Если $\overline{\mathbf{B}}$-поле, которое является решением основных уравнений (15.1) – (15.3),



Р и с. 15.1. Схематическое представление В-полей типов A0, S0, A1 и S1. В верхней части рисунка показаны силовые линии полоидальных компонент поля в меридиональных плоскостях. В случаях мод A0 и S0 схемы одинаковы для всех таких плоскостей, а в случаях мод A1 и S1 следует выбирать специальные плоскости, которые не пересекаются линиями поля. В нижней части рисунка даны проекции линий тороидальных компонент поля.

не имеет вида одной из введенных здесь $\overline{\mathbf{B}}$-мод, оно может быть разложено по таким модам. По-прежнему можно показать, что каждая из мод также является решением уравнений. Поэтому, исследуя динамо-модели, определяемые уравнениями (15.1) – (15.3), можно ограничиться этими модами.

Чтобы более детально исследовать $\overline{\mathbf{B}}$-моды, положить $p = \lambda - i\Omega$. Тогда их зависимость от φ и t может быть выражена через $\cos(m\varphi - \Omega t)e^{\lambda t}$ и $\sin(m\varphi - \Omega t)e^{\lambda t}$. Осесимметричные моды, для которых $m = 0$, в общем случае соответствуют растущим или затухающим колебаниям. Неосесимметричные моды, для которых $m \neq 0$, являются волнами, распространяющимися в азимутальном направлении. Конечно, в этом случае величина Ω будет зависеть от используемой координатной системы. Для какой-либо данной моды всегда можно выбрать такую систему координат, в которой Ω бы исчезло, что соответствует стоячей волне.

15.4. Детализация среднего поля скоростей и турбулентных электродвижущих сил

Среднее поле $\overline{\mathbf{u}}$ будем представлять как сумму двух членов

$$\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}_t + \overline{\mathbf{u}}_p, \tag{15.6}$$

где $\overline{\mathbf{u}}_t$ связано с вращением, а $\overline{\mathbf{u}}_p$ – с меридиональной циркуляцией Согласно принятым предположениям, как $\overline{\mathbf{u}}_t$, так и $\overline{\mathbf{u}}_p$ обладают определенной симметрией относительно оси вращения и экваториальной плоскости, т.е. они инвариантны относительно преобразований вида (15.4а) и (15.5а,б) и стационарны. Согласно нашим обозначениям, величины $\overline{\mathbf{u}}_t$ и $\overline{\mathbf{u}}_p$ соответственно тороидальны и полоидальны.

В дальнейшем $\overline{\mathbf{u}}_t$ будем представлять в виде

$$\overline{\mathbf{u}}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\boldsymbol{\omega}}, \tag{15.7а,б}$$

где ω – угловая скорость, а $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ – единичный вектор вдоль полярной оси системы координат. Следует отметить, что в предыдущей главе вместо $\boldsymbol{\omega}$ и ω использовались обозначения $\boldsymbol{\Omega}$ и Ω. Компоненты $\overline{\mathbf{u}}_p$ обозначаются как u_r и u_θ. Согласно (15.3), мы требуем $u_r = 0$ при $r = R$.

При рассмотрении электродвижущей силы $\mathcal{G}$ можно исходить из соотношения (12.7), выбирая частный вид коэффициентов a_{ij} и b_{ijk}

согласно принятым здесь предположением. Подобно уравнениям (11.1), из которых могут быть получены соотношения (12.7), они должны быть согласованы с вращениями и отражениями полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$, как это следует из (15.4) и (15.5). При вращениях и отражениях величина $\mathcal{G}$ преобразуется как величина $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$, которая в свою очередь ведет себя как $\mathbf{u}$; поэтому можно определить $\mathcal{G}^{\mathrm{rot}}$ и $\mathcal{G}^{\mathrm{ref}}$ соответственно таким же образом, как $\mathbf{u}^{\mathrm{rot}}$ и $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$. Если (12.7) справедливо для данных $\mathcal{G}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$, оно остается справедливым при замене этих величин на $\mathcal{G}^{\mathrm{rot}}$, $\mathbf{u}^{\mathrm{rot}}$ и $\mathbf{B}^{\mathrm{rot}}$ или на $\mathcal{G}^{\mathrm{ref}}$, $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$ и $\mathbf{B}^{\mathrm{ref}}$. Согласно нашим предположениям, коэффициенты a_{ij} и b_{ijk}, зависящие только от $\mathbf{u}$, не зависят от замены $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}^{\mathrm{rot}}$ или $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$. Следовательно, вращения или отражения только величин $\mathcal{G}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ не нарушают применимости (12.7). Это приводит к определенным ограничениям на структуру a_{ij} и b_{ijk}. Кроме того, связь между $\mathcal{G}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ и, следовательно, между a_{ij} и b_{ijk} не зависит от времени. Наиболее общее выражение для $\mathcal{G}$, которое удовлетворяет всем этим требованиям, является очень сложным. Оно будет приведено в конце данного раздела.

Обратимся сперва к частному случаю. Напомним рассмотрение, приведенное в разд. 5.3, и используем модель с постоянной электропроводимостью и только твердотельным средним движением. Предположим, что турбулентность неоднородна, а интенсивность ее зависит только от радиуса. Турбулентное поле не имеет каких-либо выделенных направлений, кроме тех, которые даются градиентом интенсивности и осью вращения, т.е. единичными векторами $\hat{\mathbf{r}}$, где $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, и $\hat{\boldsymbol{\omega}}$. Кроме того, ограничимся случаем, когда градиент интенсивности и скорость вращения достаточно малы, так что величину $\mathcal{G}$ можно считать линейно зависящей от каждой из этих величин. Тогда получим

$$\mathcal{G} = -\beta\,\mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{B}} - \gamma\hat{\mathbf{r}}\times\overline{\mathbf{B}} - \delta_1(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{B}} -$$

$$-(\delta_2-\delta_1)\nabla(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\overline{\mathbf{B}}) - \alpha_1(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}})\overline{\mathbf{B}} - \alpha_2((\hat{\mathbf{r}}\cdot\overline{\mathbf{B}})\hat{\boldsymbol{\omega}}+$$

$$+(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\overline{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{r}}) - \alpha_3((\hat{\mathbf{r}}\cdot\overline{\mathbf{B}})\hat{\boldsymbol{\omega}} - (\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\overline{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{r}}); \qquad (15.8)$$

некоторые члены можно переписать согласно

$$-\delta_1(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{B}} - (\delta_2-\delta_1)\nabla(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\overline{\mathbf{B}}) = \mu\delta_1\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\overline{\mathbf{j}} - \delta_2\nabla(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\overline{\mathbf{B}}), \qquad (15.9a)$$

$$-\alpha_3((\hat{\mathbf{p}}\cdot\overline{\mathbf{B}})\hat{\boldsymbol{\omega}} - (\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\overline{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{r}}) = \alpha_3(\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{\mathbf{r}})\times\overline{\mathbf{B}}. \qquad (15.9б)$$

Если турбулентное поле фиксировано, то коэффициенты $\beta, \gamma, \ldots$ зависят только от r. По сравнению с разд. 5.4 и 9.3 обозначения здесь несколько изменены путем введения $\delta_1 = \beta_3$ и $\delta_2 = \beta_2 + \beta_3$.

Несмотря на упомянутые выше специальные предположения, соотношения (15.8) для $\mathcal{G}$ охватывают все эффекты, которые, как было показано, существенны для основных динамо-механизмов, рассмотренных до настоящего времени. В дальнейшем мы будем ссылаться главным образом на эти соотношения. Для коэффициентов $\beta, \gamma, \ldots$ будет учитываться зависимость как от r, так и от θ; конечно, будет требоваться симметрия относительно экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$. Напомним кратко смысл различных коэффициентов, дающих вклад в $\mathcal{G}$ и входящих в выражение (15.8). Член с β отражает возможность введения турбулентной электропроводности, и имеются основания предположить, что $1/\mu\sigma + \beta > 0$ (см. разд. 3.5 – 3.9 и 7.4). Член с γ описывает перенос магнитного потока, подобный переносу, связанному со средним движением в радиальном направлении. По своему смыслу он связан с турбулентной магнитной проницаемостью (см. разд. 5.4, 7.2 и 9.4). Наиболее важной чертой членов с δ_1 и δ_2 является то, что они описывают $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}$ -эффект, т.е. появление электродвижущей силы, пропорциональной $\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{j}}$. Это видно из правой части (15.9а). Эффект эквивалентен появлению анизотропной электропроводности (см. разд. 5.4 и 9.3). Наконец, члены с α_1, α_2 и α_3 связаны с α-эффектом. Из этих членов наиболее важен тот, который содержит α_1 и описывает α-эффект для случая однородной, изотропной, но не зеркально-симметричной турбулентности (см. разд. 3.5 – 3.10, 5.4, 7.3 и 9.4 – 9.6). В этом смысле будем говорить об "идеализированном α-эффекте", когда рассматривается только член с α_1, и о "реальном α-эффекте", если учитываются также другие члены. Член с α_2 описывает анизотропию α-эффекта. Как видно из (15.9в), член с α_3 определяет перенос магнитного потока, подобно переносу для вращательного движения.

В дальнейшем будет показана большая важность α-эффекта. Для многих приложений полезно ввести величину α^+, определяемую как

$$\alpha^+ = -\alpha_1 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}) = -\alpha_1 \cos\theta. \qquad (15.10)$$

Очевидно, роль α^+ подобна роли величины α для случая однородной изотропной, но не зеркально-симметричной турбулентности. Следует

ω-эффект и u_p-эффект, а индукционные эффекты флуктуационных движений, определяемые отдельными членами в $\mathcal{G}$, – как β-эффект, γ-эффект и т.д.

15.5. Добавочные свойства симметрии основных уравнений

Отметим существенные свойства основных уравнений (15.1) – (15.3), которые будут использованы в дальнейшем. Для этого рассмотрим сначала модели, соответствующие уравнениям (11.1) – (11.4). Если раньше мы ограничивались вращениями полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$ вокруг оси вращения и их отражениями в экваториальной плоскости, обратимся теперь к отражениям в меридиональных плоскостях. С учетом возможности вращений достаточно рассмотреть отражение в плоскости $\varphi \mp 0$, которое преобразует $\mathbf{u}$ в $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$ и $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}^{\mathrm{ref}}$, так что

$$u^{\mathrm{ref}}_{r,\theta}(r, \theta, \varphi) = u_{r,\theta}(r, \theta, -\varphi), \quad u^{\mathrm{ref}}_{\varphi}(r, \theta, \varphi) = -u_{\varphi}(r, \theta, -\varphi), \tag{15.16а,б}$$

$$B^{\mathrm{ref}}_{r,\theta}(r, \theta, \varphi) = -B_{r,\theta}(r, \theta, -\varphi), \quad B^{\mathrm{ref}}_{\varphi}(r, \theta, \varphi) = B_{\varphi}(r, \theta, -\varphi). \tag{15.16в,г}$$

Справедливость уравнений (11.1) – (11.4) по-прежнему сохраняется при замене $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$ на $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$ и $\mathbf{B}^{\mathrm{ref}}$. Это верно также для уравнений среднего поля (12.1) – (12.5). В отличие от рассмотренных выше вращений и отражений, отражение $\mathbf{u}$ в меридиональной плоскости, т.е. замена $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$, в общем случае меняет как $\bar{\mathbf{u}}$, так и $\mathcal{G}$. Если, согласно (15.6), представить $\mathbf{u}$ как сумму $\bar{\mathbf{u}}_t$ и $\bar{\mathbf{u}}_p$, получим $\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{ref}}_t = -\bar{\mathbf{u}}_t$ и $\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{ref}}_p = \bar{\mathbf{u}}_p$. Для простоты ограничимся частным случаем (15.8) для величины $\mathcal{G}$. Путем такого же анализа, как выполненный выше для случаев вращений и отражений, получим, что справедливость (15.8) не нарушается при замене $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}^{\mathrm{ref}}$. Эта замена осуществляется аналогично замене $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}^{\mathrm{ref}}$ или $\bar{\mathbf{B}}$ на $\bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{ref}}$, при которой коэффициенты $\beta, \gamma, \ldots$ заменяются на $\beta^{\mathrm{ref}}, \gamma^{\mathrm{ref}}, \ldots$. Из этого требования легко заключить, что $\beta^{\mathrm{ref}} = \beta$, $\gamma^{\mathrm{ref}} = \gamma$, но $\beta^{\mathrm{ref}}_1 = -\beta_1$, $\beta^{\mathrm{ref}}_2 = -\beta_2$, $\alpha^{\mathrm{ref}}_1 = -\alpha_1$, $\alpha^{\mathrm{ref}}_2 = -\alpha_2$ и $\alpha^{\mathrm{ref}}_3 = -\alpha_3$. Принимая во внимание, что преобразование (15.16а,б) меняет поле $\mathbf{u}$ таким образом, что правое спиральное вращение меняется на левое и обратно, убеждаемся в том, что знаки преобразованных величин получены правильно.

Этот результат приводит к интересным заключениям. Предположим, что решена задача, определяемая уравнениями (15.1) – (15.3), (15.6) и (15.8) для частных значений $\bar{\mathbf{u}}_t$, $\bar{\mathbf{u}}_p$, β, γ, ... Другими словами, предположим, что известны соответствующие поля $\mathbf{B}$. Тогда можно рассмотреть другую задачу, описываемую этими же уравнениями после преобразования

$$\bar{\mathbf{u}}_t \to -\bar{\mathbf{u}}_t, \quad \bar{\mathbf{u}}_p \to \bar{\mathbf{u}}_p \tag{15.17а,б}$$

$$\beta \to \beta, \quad \gamma \to \gamma, \tag{15.17в,г}$$

$$\beta_1 \to -\beta_1, \beta_2 \to -\beta_2, \tag{15.17д,е}$$

$$\alpha_1 \to -\alpha_1, \quad \alpha_2 \to -\alpha_2, \alpha_3 \to -\alpha_3. \tag{15.17ж–и}$$

Тогда решение соответствует преобразованию

$$\bar{\mathbf{B}} \to \bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{ref}}, \tag{15.18}$$

где $\bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{ref}}$ определено из (15.16в,г).

15.6. Приведение основных уравнений

Обратимся к разд. 14.2, в котором уравнения (14.1) – (14.3), описывающие очень простую модель турбулентного динамо, приведены к уравнениям для нескольких скалярных функций. С уравнениями (15.1) – (15.3) можно обращаться подобным же образом. Для простоты вместо $\bar{\mathbf{B}}$ и $\bar{\mathbf{u}}$ в дальнейшем будем писать $\mathbf{B}$ и $\mathbf{u}$.

Как и прежде, разделим поле $\mathbf{B}$ на тороидальную часть $\mathbf{B}_t$ и полоидальную $\mathbf{B}_p$, так что

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p \tag{15.19}$$

и на основании (15.1б) и (15.2б) положим

$$\mathbf{B}_p = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}_t, \tag{15.20}$$

где $\mathbf{A}_t$ – чисто тороидальный векторный потенциал.

Ограничимся сначала случаем осесимметричного поля $\mathbf{B}$. Уравнения (15.1а) вместе с (15.19) дают

$$\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_t\right) - \mathrm{rot}\left((\mathbf{u}\times\mathbf{B})_p + \mathcal{E}_p\right) + \frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial t} = 0, \tag{15.21а}$$

быть определены даже без разложения $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ и $\mathcal{G}$, как это было сделано в (15.25) и (15.26), т.к. из (15.29) следует

$$C^{(uB)} = (\mathbf{u}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{e}_\varphi, \tag{15.36а}$$

$$D^{(uB)} = \mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{e}_\varphi = r\sin\theta\,\mathrm{div}\,((\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{e}_\varphi/r\sin\theta), \tag{15.36б}$$

$$C^{(\mathcal{G})} = \mathcal{G}\cdot\mathbf{e}_\varphi, \tag{15.36в}$$

$$D^{(\mathcal{G})} = \mathrm{rot}\,\mathcal{G}\cdot\mathbf{e}_\varphi = r\sin\theta\,\mathrm{div}(\mathcal{G}\times\mathbf{e}_\varphi/r\sin\theta). \tag{15.36г}$$

Выражая $\mathbf{u}$ через ω и $\mathbf{u}_p$, а $\mathbf{B}$ через B и A, получим

$$C^{(uB)} = -(1/r\sin\theta)\mathbf{u}_p\cdot\nabla(r\sin\theta A), \tag{15.37а}$$

$$D^{(uB)} = -r\sin\theta\,\mathrm{div}(\mathbf{u}_p B/r\sin\theta) + (\nabla\omega\times\nabla(r\sin\theta A))\cdot\mathbf{e}_\varphi \tag{15.37б}$$

Используя $\mathcal{G}$ в виде (15.8), получим

$$C^{(\mathcal{G})} = \beta\Delta' A + \frac{\gamma}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA) - \delta_1\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\nabla B - \alpha_1(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}})B, \tag{15.38а}$$

$$\begin{aligned} D^{(\mathcal{G})} = {} & r\sin\theta\,\mathrm{div}\left(\frac{\beta}{(r\sin\theta)^2}\nabla(r\sin\theta B)\right) + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}\cdot\nabla(\gamma rB) + \\ & + r\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\nabla\left(\frac{\delta_1}{r\sin\theta}\Delta' A\right) + \left(\nabla\delta_2\times\nabla\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{e}_\varphi}{r\sin\theta}\cdot\nabla(r\sin\theta A)\right)\right)\cdot\mathbf{e}_\varphi + \\ & + r\sin\theta\,\mathrm{div}\left(\frac{\alpha_1(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}})}{(r\sin\theta)^2}\nabla(r\sin\theta A)\right) + (\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{e}_\varphi)\cdot\nabla\left(\frac{\alpha_2}{r\sin\theta}(\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{e}_\varphi)\times\right. \\ & \left.\times\nabla(r\sin\theta A)\right) + (\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{e}_\varphi)\cdot\nabla\left(\frac{\alpha_2}{r\sin\theta}(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{e}_\varphi)\cdot\nabla(r\sin\theta A)\right) + \left(\nabla\left(\frac{\alpha_3}{r}\right)\times\right. \\ & \left.\times\nabla(r\sin\theta A)\right)\cdot\mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \tag{15.38б}$$

Из (15.37) можно заключить, что твердотельное вращение, т.е. вращение с $\omega = \mathrm{const}$, не влияет на осесимметричное поле $\mathbf{B}$. Подобным же образом (15.8) показывает, что δ_2- или α_3-эффект соответственно не играют какой-либо роли, если $\delta_2 = \mathrm{const}$ или если $\alpha_3/r = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь общий случай, т.е. не обязательно осесимметричные поля $\mathbf{B}$. Для простоты предположим в этом случае,

что проводимость σ зависит только от r. Тогда уравнения (15.21) – (15.24) остаются по-прежнему справедливыми. Соотношения (15.25) и (15.26), однако, не сохраняются.

Положим теперь

$$\mathbf{B}_t = -\mathbf{r} \times \nabla T, \tag{15.39а}$$

$$\mathbf{A}_t = -\mathbf{r} \times \nabla S, \tag{15.39б}$$

кроме того,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_t = -\mathbf{r} \times \nabla U^{(uB)}, \tag{15.40а}$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_p = -\mathbf{r} \times \nabla V^{(uB)}, \tag{15.40б}$$

$$\mathfrak{G}_t = -\mathbf{r} \times \Delta U^{(\mathfrak{G})} \tag{15.40в}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{G}_p = -\mathbf{r} \times \nabla V^{(\mathfrak{G})}, \tag{15.40г}$$

и потребуем

$$\oiint T d\tilde{\omega} = \oiint S d\tilde{\omega} = \ldots = \oiint V^{(\mathfrak{G})} d\tilde{\omega} = 0. \tag{15.41}$$

Это позволяет привести уравнения (15.21а) и (15.22) к виду

$$\frac{1}{\mu\sigma}\left(\Delta T - \frac{1}{\sigma r}\,\frac{d\sigma}{dr}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(rT)\right) + V^{(uB)} + V^{(\mathfrak{G})} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \tag{15.42а}$$

$$\frac{1}{\mu\sigma}\,\Delta S + U^{(uB)} + U^{(\mathfrak{G})} - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{для} \quad r < R, \tag{15.42б}$$

уравнения (15.23) к виду

$$T = 0, \quad \Delta S = 0 \quad \text{для} \quad r > R, \tag{15.43а,б}$$

а условия (15.24) к виду

$$T = 0, \quad [S] = [\partial S/\partial r] = 0 \quad \text{на} \quad r = R \tag{15.44а,б}$$

$$S = O(r^{-2}) \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{15.44в}$$

Остается найти соотношения, связывающие $U^{(uB)}$, $V^{(uB)}$, $U^{(\mathfrak{G})}$ и $V^{(\mathfrak{G})}$ с T и S. Возьмем rot от уравнений (15.40) и умножим полученные

уравнения на $\mathbf{r}$. Тогда получим

$$\Omega U^{(uB)} = -\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \tag{15.45а}$$

$$\Omega V^{(uB)} = -\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \tag{15.45б}$$

$$\Omega U^{(\mathcal{G})} = -\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathcal{G}, \tag{15.45в}$$

$$\Omega V^{(\mathcal{G})} = -\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathcal{G}, \tag{15.45г}$$

где правые части могут быть также переписаны с помощью (13.34). Выражая $\mathbf{u}$ и $\mathbf{B}$ через ω, $\mathbf{u}_p$, T и S, после простых преобразований получим

$$\Omega U^{(uB)} = -\mathbf{r}\left(\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_p) \times \nabla T\right) - \omega\Omega \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \operatorname{div}(\mathbf{u}_p \Omega S) +$$

$$+ \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_p) \cdot \left(r\Delta S - \nabla \frac{\partial}{\partial r}(rS)\right), \tag{15.46а}$$

$$\Omega V^{(uB)} = -\Omega\left(\omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla T\right) + \operatorname{div}\left(\mathbf{r} \times \left(\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_p) \times \nabla T\right)\right) -$$

$$- \Omega\left(\omega\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(r\Delta S - \nabla \frac{\partial}{\partial r}(rS)\right)\right) - \operatorname{div}\left(\mathbf{r} \times \left(\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \nabla(\omega \Omega S)\right)\right) +$$

$$+ \operatorname{div}\left(\mathbf{r} \times \operatorname{rot}\left((\mathbf{r} \times \mathbf{u}_p)\Delta S + \mathbf{u}_p \times \nabla \frac{\partial}{\partial r}(rS)\right)\right). \tag{15.46б}$$

Выбирая $\mathcal{G}$ в виде (15.8) и снова выражая $\mathbf{B}$ через T и S, получим

$$\Omega U^{(\mathcal{G})} = \mathbf{r} \cdot \left(\nabla\beta \times \nabla \frac{\partial}{\partial r}(rT)\right) - \operatorname{div}\left(\mathbf{r} \times \left(r \times \beta \nabla \Delta S\right)\right) +$$

$$+ \mathbf{r} \cdot \left(\nabla(\gamma r) \times \nabla T\right) - \operatorname{div}\left(\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{\gamma}{r} \nabla \frac{\partial}{\partial r}(rS)\right)\right) -$$

$$- \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \nabla(\delta_1 \Omega T) + \nabla\left(\delta_1(\mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}})\right) \cdot \left(r\Delta T - \nabla \frac{\partial}{\partial r}(rT)\right) +$$

$$+ \mathbf{r} \cdot \left(\nabla\left(\delta_1(\mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}})\right) \times \nabla \Delta S\right) - \mathbf{r} \cdot \left(\nabla\delta_2 \times \nabla \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) -$$

$$- \mathbf{r} \cdot \left(\nabla\delta_2 \times \nabla\left(\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(r\Delta S - \nabla \frac{\partial}{\partial r}(rS)\right)\right)\right) +$$

$$+\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\alpha_1(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}})\nabla T))+\mathbf{r}\cdot(\nabla(\alpha_1(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}}))\times\nabla\frac{\partial}{\partial r}(rS))-$$

$$-\frac{\alpha_2+\alpha_3}{r}\,\Omega\,\frac{\partial S}{\partial\varphi}, \qquad (15.47a)$$

$$\Omega V(\mathcal{G})=-\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\nabla(\beta\Delta T)+\nabla\beta\times\nabla\frac{\partial}{\partial r}(rT)))-$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mathbf{r}\cdot(\nabla\beta\times\nabla\Delta S))+\Omega\left(\gamma\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\nabla(\gamma r)\times\nabla T))-$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mathbf{r}\cdot(\nabla(\frac{\gamma}{r})\times\nabla\frac{\partial}{\partial r}(rS)))-(\delta_1-r\frac{\partial\delta_1}{\partial r})\Delta\frac{\partial T}{\partial\varphi}-$$

$$-\nabla\delta_1\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial\varphi})+\mathbf{r}\cdot((\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\nabla)(\nabla\delta_1\times\nabla\frac{\partial}{\partial r}(rT)))+$$

$$+\Omega(\delta_1\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\Delta S)-\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\Delta(\delta_1(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega}))\times\nabla\Delta S))+$$

$$+\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\nabla\delta_2\times\nabla\frac{\partial T}{\partial\varphi}))+\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\nabla\delta_2\times\nabla(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot(r\Delta S-\nabla\frac{\partial}{\partial r}(rS)))))+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mathbf{r}\cdot(\nabla(\alpha_1(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}}))\times\nabla T))-\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\alpha_1(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}})\nabla\Delta S))+$$

$$+\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\nabla(\alpha_1(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\omega}}))\times(r\Delta S-\nabla\frac{\partial}{\partial r}(rS))))-$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\nabla(\frac{\alpha_2+\alpha_3}{r}\Omega S)))+$$

$$+\Omega(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi})+\Omega(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{r}\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot(r\Delta S-\nabla\frac{\partial}{\partial r}(rS))). \qquad (15.47б)$$

Интересно заметить, что для любых f и F

$$\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times f\nabla F))=-\Omega(fF)-\operatorname{div}(\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times F\nabla f)). \qquad (15.48)$$

Если $\partial f/\partial\varphi=0$, то

$$\mathbf{r}\cdot(\nabla f\times\nabla F)=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}. \qquad (15.49)$$

К сожалению, уравнения (15.46) и (15.47) нельзя прямо проинтегрировать. Тем не менее они показывают, что в отличие от случая осесимметричного поля $\mathbf{B}$, среднее вращение с $\omega = \text{const}$, а также α_3-эффект с $\alpha_3/r = \text{const}$ влияют на неосесимметричное поле. Как и прежде, δ_2-эффект не возникает, если $\delta_2 = \text{const}$.

Возвратимся еще раз к утверждениям, относящимся к преобразованиям (15.17) и (15.18). Для осесимметричного поля $\mathbf{B}$ преобразование (15.18) просто означает, что $\mathbf{B}_t \to -\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p \to \mathbf{B}_p$, и упомянутые утверждения могут быть сразу подтверждены с помощью уравнений (15.21) – (15.26). В общем случае, включающем неосесимметричное поле $\mathbf{B}$, преобразование (15.8) эквивалентно $T(r, \theta, \varphi, t) \to -T(r, \theta, -\varphi, t)$ и $S(r, \theta, \varphi, t) \to S(r, \theta, -\varphi, t)$. Это утверждение может быть также получено из уравнений (15.42) – (15.44), (15.46) и (15.47), хотя более сложным способом.

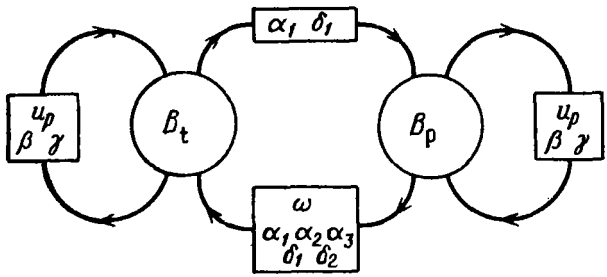
15.7. Возможные динамо-механизмы

Чтобы узнать, какие типы турбулентных динамо-механизмов возможны, исследуем, какие компоненты среднего движения и электродвижущей силы, обусловленные флуктуативными движениями, могут генерировать и поддерживать магнитные поля.

Среднее поле скоростей $\mathbf{u}$, согласно (15.6), снова будем понимать как сумму двух частей $\mathbf{u}_t$ и $\mathbf{u}_p$, описывающих вращение и меридиональную циркуляцию. Как и в случае электродвижущей силы $\mathcal{E}$, если нет дополнительных замечаний, будем принимать во внимание только члены, входящие в (15.8), и будем считать положительным $1/\mu\sigma + \beta$.

По-прежнему будем рассматривать поле $\mathbf{B}$, как сумму тороидальной и полоидальной частей $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$. При обсуждении возможных динамо-механизмов надо различать различные типы связи между $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$.

Сначала рассмотрим случай, когда поле $\mathbf{B}$ и, следовательно, $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ осесимметричны. Из уравнений (15.21), (15.25) и (15.26) непосредственно видно, как влияют на $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ эффекты, связанные с $\mathbf{u}$ и $\mathcal{E}$. Схема этих зависимостей дана на рис. 15.2. Следует помнить, что среднее вращение становится эффективным, т.е. появляется ω-эффект, только если ω изменяется в пространстве. Подобным же образом δ_2-эффект играет роль, только если δ_2 не постоянно.



Р и с. 15.2. Влияние индукционных эффектов, связанных с $\mathbf{u}$ и $\mathcal{G}$, на тороидальную и полоидальную компоненты $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ осесимметричного $\mathbf{B}$-поля.

Для начала выясним возможность динамо без какой-либо связи между полями $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$. Согласно схеме на рис. 15.2, динамо такого типа может существовать только вследствие u_p-, β- или γ-эффектов. Чтобы избежать какой-либо связи полей $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$, вообще говоря, надо исключить эффекты ω, α_1, α_2, α_3, δ_1 и δ_2. Подобное динамо способно генерировать или чисто тороидальное или чисто полоидальное $\mathbf{B}$-поле. Отметим, что динамо с чисто тороидальным $\mathbf{B}$-полем представляет собою "невидимое динамо", так как поле этого типа всегда заключено в проводящей сфере, т.е. равно нулю на ее поверхности и во внешнем пространстве. Кроме того, в этом случае достаточно исключить только α_1- и δ_1-эффекты; ω-, α_2-, α_3- и δ_2-эффекты вообще не появляются.

Поскольку мы рассматриваем здесь только осесимметричное поле $\mathbf{B}$, из теоремы Каулинга следует, что для стационарных полей не существует динамо, обусловленного u_p, β- или γ-эффектами. Если $u_p + \gamma\hat{\mathbf{r}}$ соленоидально, а β постоянно, то, согласно теореме Каулинга в форме Брагинского, динамо отсутствует также для нестационарных полей. Наконец, если $u_p = 0$ и $\gamma = 0$, то вследствие (12.8) любое динамо невозможно. В заключение отметим, что в большинстве случаев динамо без связи полей $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ не существует. Ничего подобного нельзя утверждать, если такая связь имеется.

Предположим теперь, что имеется связь между $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$, которая, однако, проявляется или в одностороннем влиянии $\mathbf{B}_t$ на $\mathbf{B}_p$, или $\mathbf{B}_p$ на $\mathbf{B}_t$, но не допускает взаимодействия между $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$. Поскольку динамо без взаимной связи $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ невозможно, следует заключить, что невозможно также динамо с таким простым типом связи.

Таким образом, одновременное влияние $\mathbf{B}_t$ на $\mathbf{B}_p$ и обратно, т.е. взаимодействие $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$, является предварительным условием существования динамо для осесимметричного поля $\mathbf{B}$. Как видно на рис. 15.2, это взаимодействие требует α_1, или δ_1-эффекта. Поэтому наличие α_1 или δ_1-эффекта представляется необходимым условием для существования динамо осесимметричных полей. Рассматривая динамо для α_1-эффекта, начнем со случая, когда нет никаких турбулентных эффектов, кроме α_1-эффекта, и не учитывается какое-либо среднее движение, кроме твердотельного вращения. Даже в этом простом случае возможен динамо-механизм, который поддерживает стационарное поле $\mathbf{B}$ (см. разд. 16.3). Поскольку генерация как $\mathbf{B}_t$ из $\mathbf{B}_p$, так и $\mathbf{B}_p$ из $\mathbf{B}_t$ обусловлена α_1-эффектом, можно говорить о α^2-механизме или о α^2-процессе. Типичным признаком этого механизма является одинаковый порядок величин $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$.

Обратим внимание на энергетическое соотношение (12.8). Для этого случая динамо правая часть (12.8) неотрицательна. Поскольку первый член дает отрицательный вклад, второй равен нулю, третий член должен обеспечить достаточно большой положительный вклад. Таким образом, необходимое условие для α^2-механизма состоит в том, чтобы функция $\alpha_1(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}})(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})$ была в основном отрицательна, так чтобы интеграл от этой величины, взятый по объему проводящего тела, являлся бы отрицательным. Это эквивалентно требованию, чтобы функция $\alpha^+\mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{B}$, где α^+ определяется согласно (15.10), в упомянутом выше смысле была бы в основном положительной. Изменим теперь исходные предположения путем замены α_1-эффекта на δ_1-эффект. Из соотношения (12.8) легко увидеть, что в этом случае динамо не работает. Третий член, как и второй, в правой части (12.8) равен нулю; подынтегральное выражение равно нулю всюду. Поэтому любое $\mathbf{B}$-поле затухает.

Рассмотрим теперь возможность динамо, которое действует в результате комбинации α_1- или δ_1-эффектов с другими индукционными эффектами.

Если α_1-эффект входит в комбинации с другими индукционными эффектами, то следует ожидать некоторого изменения α^2-механизма. Будем анализировать только комбинацию α_1-эффекта с неоднородным вращением, т.е. с ω-эффектом. Пока ω-эффект невелик, динамо в

основном будет определяться α^2-механизмом. Однако достаточно сильное неоднородное вращение гораздо более эффективно для генерации $\mathbf{B}_t$ из $\mathbf{B}_p$, чем α_1-эффект. Таким образом, становится возможным такой динамо-механизм, при котором генерация $\mathbf{B}_t$ из $\mathbf{B}_p$ обусловлена главным образом неоднородным вращением, т.е. ω-эффектом, а существенная роль α_1-эффекта ограничена генерацией $\mathbf{B}_p$ из $\mathbf{B}_t$. Такой механизм может поддерживать как стационарное, так и осциллирующее $\mathbf{B}$-поле (см. разд. 16.4). В этих случаях будем говорить об $\alpha\omega$-механизме или $\alpha\omega$-процессе. Он приводит к тому, что $\mathbf{B}_t$ на порядок превышает $\mathbf{B}_p$. Интересно снова обратиться к (12.8). Поскольку неоднородное вращение обеспечивает энергией среднее магнитное поле, второй член в правой части вносит положительный вклад в стоящее там выражение. Для $\alpha\omega$-механизма необходима компенсация первого члена вторым членом, в то время как третий член является несущественным.

Не сам по себе δ_1-эффект, а только его комбинации с другими индукционными эффектами приводят к появлению динамо. Подобно α_1-эффекту, δ_1-эффект, совместно с достаточно сильным неоднородным вращением, т.е. с ω-эффектом, создает возможность динамо-механизма. По-прежнему $\mathbf{B}_p$ генерирует $\mathbf{B}_t$, главным образом вследствие ω-эффекта, а $\mathbf{B}_p$ из $\mathbf{B}_t$ генерируется δ_1-эффектом. Таким образом может поддерживаться как стационарное, так и осциллирующее $\mathbf{B}$-поле (см. разд. 16.5). Аналогично $\alpha\omega$-механизму можно говорить о $\delta\omega$-механизме или о $\delta\omega$-процессе. В этом случае $\mathbf{B}_t$ много больше, чем $\mathbf{B}_p$.

Возвратимся еще раз к соотношению (12.8). В случае $\delta\omega$-механизма третий член в правой части (12.8) равен нулю. Среднее магнитное поле, точнее говоря, его тороидальная компонента, получает энергию только от неоднородного вращения. δ_1-эффект не может обеспечить энергией среднее магнитное поле; он обеспечивает только передачу энергии от тороидальной к полоидальной компоненте.

Остается исследовать, может ли комбинация δ_1-эффекта с δ_2-, α_2- или α_3-эффектом привести к действию динамо. Насколько мы видим, не имеется строгих аргументов, противоречащих существованию такого динамо. С другой стороны, до сих пор не предложены примеры динамо такого типа. Поскольку α_3-эффект играет ту же роль,

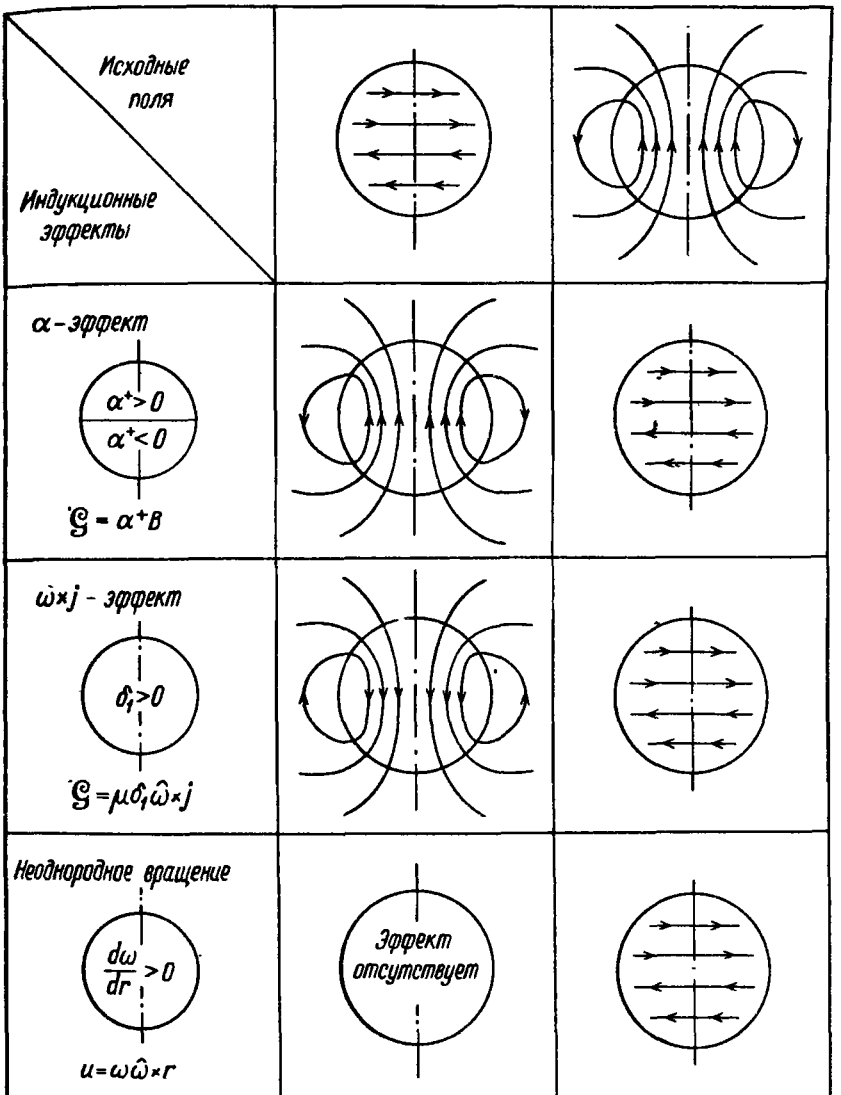
что и ω-эффект, комбинация δ_1-эффекта с достаточно сильным α_3-эффектом допускает динамо-процесс, аналогичный δω-процессу. В связи с этим надо помнить, что наряду с δ_1- и α_3-эффектами, вообще говоря, существуют и другие индукционные эффекты, например α_1-эффект, так что механизм, рассмотренный здесь, конкурирует с с другими, например с α^2-механизмом и, возможно, никогда не доминирует.

Иллюстрация генерации осесимметричного **B**-поля типа как A0, так и S0 посредством α^2-, αω- и δω-механизмов дана на рис. 15.3 и 15.4. Здесь показано, как $\mathbf{B}_p$-поля возникают из $\mathbf{B}_t$-полей и обратно вследствие α_1-эффекта и δ_1-эффекта или неоднородного вращения с радиальной зависимостью угловой скорости, т.е. ω-эффекта. Для исходного поля предполагается простая дипольная или квадрупольная структура. Ограничимся случаями, когда α_1, δ_1 и $d\omega/dr$ не изменяют своего знака внутри проводящей сферы. По-прежнему будем интересоваться только дипольной и квадрупольной компонентами результирующего поля; компоненты более высокой мультипольности будем отбрасывать. На рис. 15.3 и 15.4 можно увидеть различные типы взаимодействий между $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$, которые соответствуют разным типам динамо-механизмов.

Нетрудно увидеть, каким образом взаимодействие $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$, определяемое α_1-эффектом, ведет к поддержанию стационарных **B**-полей, т.е. каким образом работает α^2-механизм. Однако не видно возможностей генерировать этим механизмом осциллирующие поля.

Иная ситуация возникает при замене α_1-эффекта на δ_1-эффект. Различие состоит в ориентации $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$. В соответствии с полученным результатом о невозможности динамо, связанного только с δ_1-эффектом, нет механизма, который мог бы поддерживать стационарные **B**-поля. Труднее объяснить то обстоятельство, что осциллирующие **B**-поля также не возникают.

Возвратимся к комбинации α_1-эффекта с сильным неоднородным вращением, т.е. с сильным ω-эффектом, который приводит к αω-механизму. Пока величина α^+ остается положительной в северной полусфере, можно ожидать появления стационарных **B**-полей типа A0$^+$ и S0$^-$, если $d\omega/dr$ соответственно положительно или отрицательно. Распространяя рассмотрение на оба знака α^+, получим, что появляются стацио-



Р и с. 15.3. $\mathbf{B}_t$-поля типа A0, возникающие из $\mathbf{B}_p$-полей того же типа, а также, наоборот, $\mathbf{B}_p$ из $\mathbf{B}_t$ под действием идеализированного α-эффекта, $\omega \times j$-эффекта и неоднородного вращения. Представления полей соответствуют рис. 15.1. Знак α^+ соответствует $\alpha_1 < 0$. Если знаки α^+, $d\omega/dr$ или δ_1 иные, то обращаются также направления возникающих полей.

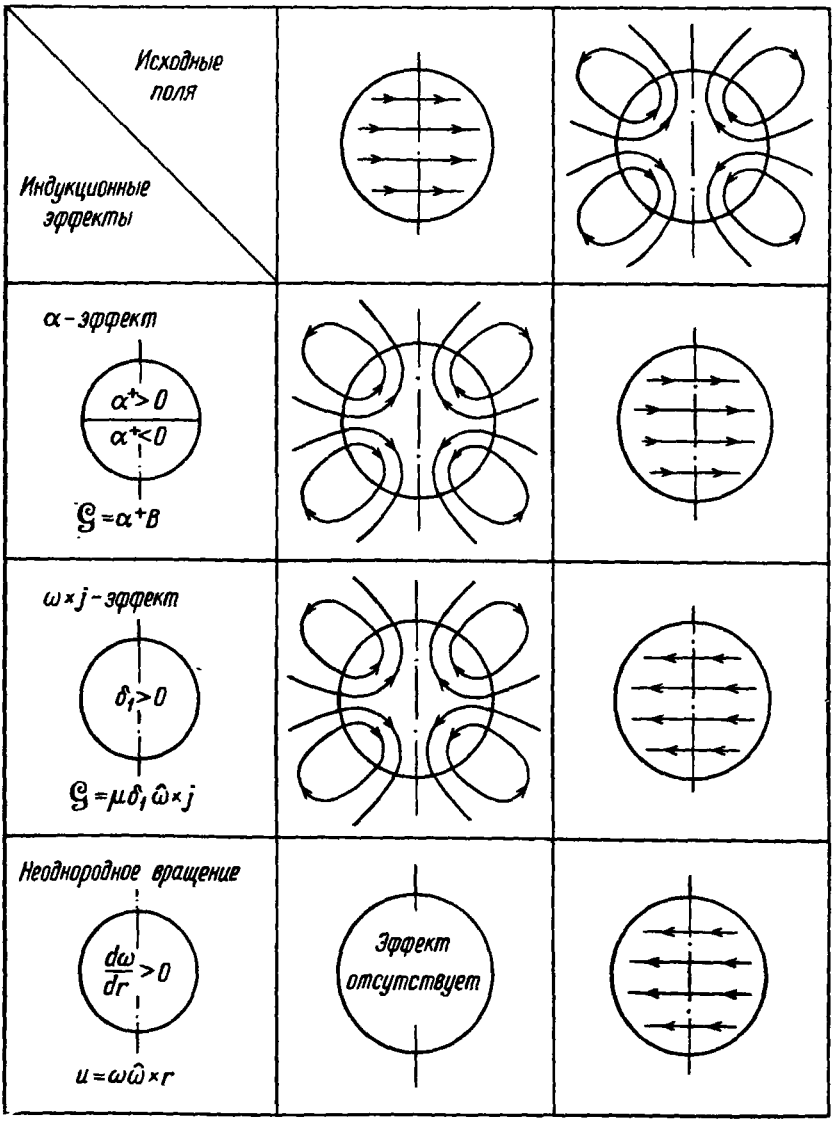


Рис. 15.4. $\mathbf{B}_t$-поля типа S0, возникающие из $\mathbf{B}_p$-полей того же типа, а также, наоборот, $\mathbf{B}_p$ из $\mathbf{B}_t$ под действием идеализированного α-эффекта, $\omega \times j$-эффекта и неоднородного вращения. Здесь справедливы разъяснения к рис. 15.3.

парные поля типа A0 или S0 в зависимости от того, совпадают или различаются знаки α^+ и $d\omega/dr$ в северной полусфере. Кроме того, появление осциллирующих полей типа S0 или A0 возможно для других комбинаций знаков.

Наконец, остановимся на комбинации δ_1-эффекта и неоднородного вращения, т.е. сильного ω-эффекта, которая допускает действие $\delta\omega$-механизма. Для этого случая возможно стационарное **B**-поле, типа как A0, так и S0, при любом знаке δ_1, если знаки δ_1 и $\delta\omega/dr$ разные, и осциллирующее **B**-поле, если эти знаки совпадают. Следует подчеркнуть, что рассуждения, основанные на рис. 15.3 и 15.4, справедливы только при указанных частных предположениях о знаках α_1, δ_1 и $d\omega/dr$. Более того, мы пренебрегли всеми компонентами **B**-полей, которые соответствуют высшим мультиполям. Уже по этой причине наши утверждения носят предварительный характер. Они могут только помочь ориентироваться в задаче. Детальное исследование показывает, что некоторые из этих утверждений, особенно те, которые относятся к условиям для осциллирующих полей, должны быть изменены.

Снимем теперь ограничение об осевой симметрии **B**-полей, т. е. вернемся к произвольным **B**-полям. Тогда зависимость **u** и $\mathcal{G}$ от $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ не определяется больше из уравнений (15.21), (15.25) и (15.26), а требует более детального исследования на основе (15.42), (15.46) и (15.47). Схема искомой зависимости дана на рис. 15.5.

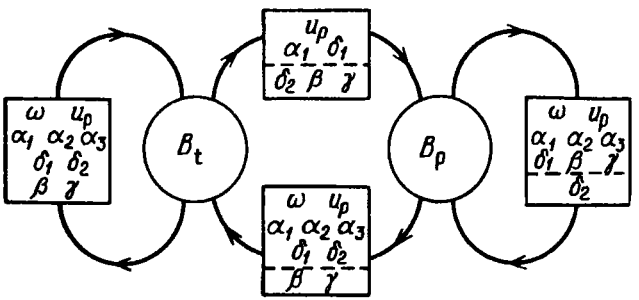


Рис. 15.5. Влияние индукционных эффектов, связанных с **u** и $\mathcal{G}$, на тороидальную и полоидальную компоненты $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ в случае произвольного, т.е. не обязательно осесимметричного **B**-поля. Эффекты, указанные ниже пунктирных линий, появляются, только если соответствующие коэффициенты, т.е. β, γ и δ_2, зависят от широты.

По сравнению со случаем осесимметричных полей $\mathbf{B}$ ситуация здесь более сложная и выяснение возможности динамо-механизмов требует больших усилий. Поэтому мы рассмотрим только частные случаи. Как и раньше, выясним сначала вопрос о возможности динамо без какой-либо связи $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ или с односторонней связью, без взаимного влияния $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ друг на друга. По-прежнему большинство таких возможностей исключается. Нельзя утверждать, что динамо существует и в остальных подобных случаях.

Обратимся теперь к случаю взаимодействующих $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$. Согласно рис. 15.5, взаимодействие обеспечивается u_p-, α_1- или δ_1-эффектами или, если β, γ или δ_2 зависит от широты, также β-, γ- или δ_2-эффектами.

Имеются основания предполагать, что существуют сферические динамо, связанные с меридиональной циркуляцией, т.е. с u_p-эффектом. Это модификации динамо такого типа, который был предложен Гайлитисом [70]. В этом случае флуктуативные движения не играют какой-либо роли. Могут генерироваться только $\mathbf{B}$-поля без осесимметричной компоненты.

Выше обсуждались динамо, обусловленные α_1-эффектом, т.е. α^2-механизмом. Добавим, что α_1-эффект способен генерировать не только осесимметричные, но и неосесимметричные $\mathbf{B}$-поля (см. разд. 16.3). Аргументы, исключающие динамо, основанное на δ_1-эффекте, остаются верными для неосесимметричных $\mathbf{B}$-полей. Как и прежде, следует рассмотреть комбинации α_1- или δ_1-эффектов с неоднородным вращением, т.е. с ω-эффектом, которые ведут к $\alpha\omega$- или $\delta\omega$-механизмам. Следует, однако, помнить, что эти механизмы предсказывают генерацию неоднородным вращением достаточно сильного тороидального поля из полоидального поля. Соответствующие процессы неизвестны для неосесимметричных полей, хотя для осесимметричных полей они возможны. Это приводит к предсказанию о невозможности генерации или поддержания неосесимметричных полей $\alpha\omega$- или $\delta\omega$-механизмами.

Возможность динамо, обусловленного β-эффектом, также исключена на основе соотношения (12.8). Не имеется определенных указаний о возможности динамо процесса в результате γ- или δ_2-эффектов.

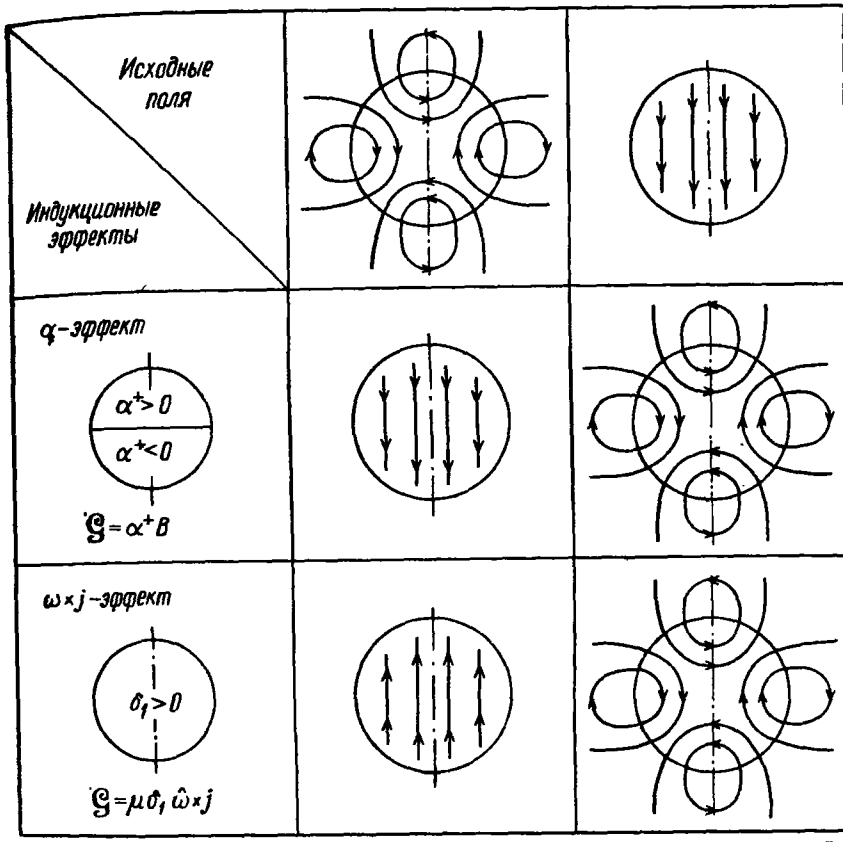
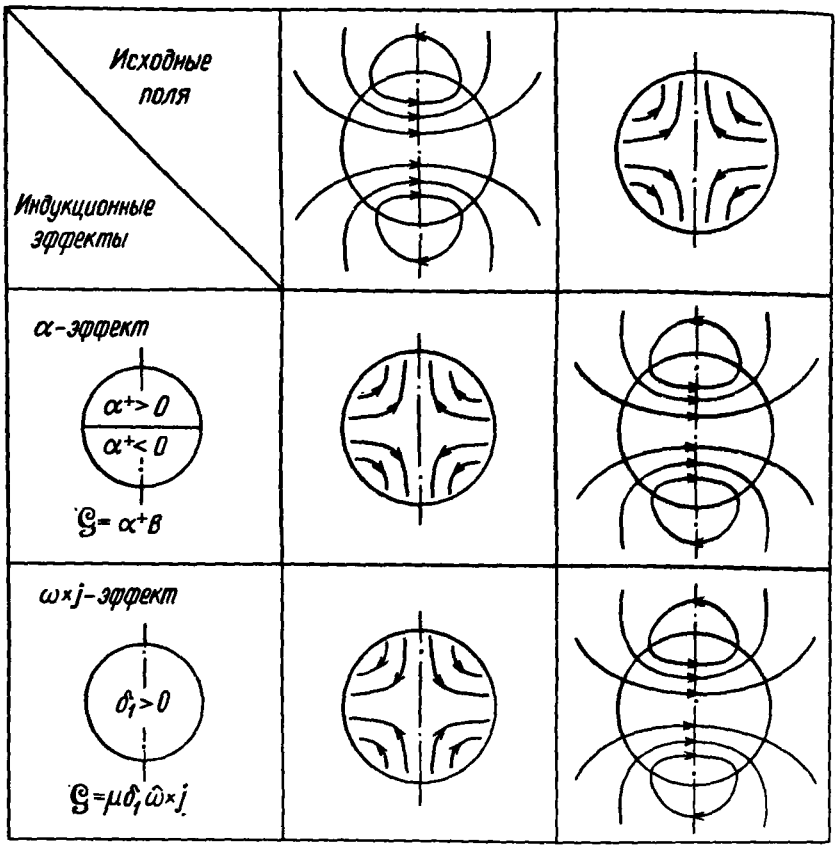


Рис. 15.6. $\mathbf{B}_t$-поля типа A1, возникающие из $\mathbf{B}_p$-полей того же типа, а также наоборот, $\mathbf{B}_p$ из $\mathbf{B}_t$, под действием идеализированного α-эффекта и $w \times j$-эффекта. Представления полей соответствуют рис. 15.1. Знак α^+ соответствует $\alpha_1 < 0$. Если знаки α^+ и δ_1 иные, то обращаются также направления возникающих полей.

Иллюстрации, приведенные на рис. 15.3 и 15.4 для осесимметричных $\mathbf{B}$-полей, обобщены на рис. 15.6 и 15.7 на случай неосесимметричных $\mathbf{B}$-полей как типа A1, так и S1. Общее объяснение такое же, как и прежде, однако неоднородное вращение здесь не рассмотрено. Как и раньше, можно увидеть, что взаимодействие $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{B}_p$ из-за α_1-эффекта может обеспечить поддержание полей и что динамо из-за одного δ_1-эффекта невозможно.

Следует отметить, что в предыдущих рассуждениях игнорировалось важное обстоятельство. В случае неосесимметричного $\mathbf{B}_p$-поля



Р и с. 15.7. B_t-поля типа S 1, возникающие из B_p-полей того же типа, а также наоборот B_p из B_t, под действием идеализированного α-эффекта и $\omega \times j$-эффекта. Здесь применимы разъяснения, приведенные в подписи к рис. 15.6.

α-эффект ведет не только к генерации $\mathbf{B}_t$-поля, но и к изменению исходного $\mathbf{B}_p$-поля. Это изменение состоит главным образом во вращении вокруг оси рассматриваемого тела. Поэтому неосесимметричные **B**-поля, поддерживаемые α^2-эффектом, имеют вид волн, бегущих кругом по экватору.

Подытожим результаты рассмотрения возможностей существования динамо-механизмов. Следует подчеркнуть, что использовался общий вид (15.6) для средней скорости **u**, но только одна частная форма (15.8) для электродвижущей силы $\mathcal{G}$. Кроме динамо-механизма,

связанного с одной лишь меридиональной циркуляцией, найдены три других, а именно индукционные α^2-, $\alpha\omega$- и $\delta\omega$-механизмы, которые обусловлены флуктуативными движениями. В то время как α^2-процесс способен генерировать и поддерживать как осесимметричные, так и неосесимметричные **B**-поля, процессы $\alpha\omega$ и $\delta\omega$ преимущественно ведут к осесимметричным полям. С другой стороны, только для двух последних процессов можно ожидать появления осесимметричных полей с осциллирующей временной зависимостью. Если заменить частную форму (15.8) для электродвижущей силы $\mathcal{E}$ на общую форму (15.11), выявляется множество различных новых возможностей для динамо-механизмов. Некоторые из них – это просто модификации упомянутых ранее механизмов. Однако при полном исследовании обнаруживаются процессы, связанные, например, с комбинациями $\beta^{(5)}$, $\beta^{(6)}$ или $\delta^{(1)}$-эффектов с ω-эффектом.

15.8. Дальнейшее приведение основных уравнений

В предыдущем разделе мы привели уравнения, определяющие **B**-поле, к уравнениям для некоторых скалярных функций. В случае осесимметричного **B**-поля можно было ограничиться уравнениями (15.33) – (15.35), (15.37) и (15.38) для B и A. Появление оператора Δ' подсказывает целесообразность разложения B и A в ряд по присоединенным полиномам Лежандра $P_n^1(\cos\theta)$. На этой основе Штеенбеком и Краузе [262, 263] были проведены первые исследования сферической модели турбулентного динамо. В общем случае, когда принимаются во внимание неосесимметричные **B**-поля, надо использовать уравнения (15.42) – (15.44) и (15.47) для T и S. Целесообразно разложить T и S в ряд по шаровым функциям $Y_n^m(\theta, \varphi)$. Таким образом получим соотношения, наиболее удобные для изучения моделей турбулентного динамо.

Сначала введем некоторые безразмерные величины. Для проводимости запишем

$$\sigma = \sigma_0 \tilde{\sigma}, \tag{15.50}$$

где σ_0 – постоянная, а $\tilde{\sigma}$ – безразмерная функция; если σ постоянная, то положим $\sigma = \sigma_0$, т.е. $\tilde{\sigma} = 1$. Кроме того, определим безразмерные координаты соотношениями

$$x = r/R, \quad \tau = t/\mu\sigma_0 R^2 \tag{15.51а,б}$$

и оператор D_n посредством

$$D_n f = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{df}{dx}\right) - n(n+1)f\right], \tag{15.52}$$

где f – произвольная функция, а n – целое число.

Как объяснено в разд. 15.3, любое **B**-поле, которое является решением основных уравнений, можно разложить по **B**-модам Am- и Sm-типов, которые также являются решениями этих уравнений. Будем рассматривать только эти частные моды. Для ясности будем здесь говорить об Al- и Sl-модах, т.е. обозначать введенный ранее параметр m через l.

Для каждой из **B**-мод функции T и S, а также $U^{(uB)}$, $V^{(uB)}$, $U^{(\mathcal{G})}$ и $V^{(\mathcal{G})}$ представим в виде разложения по шаровым функциям. Запишем

$$T = T^+, \quad S = RS^+, \tag{15.53а,б}$$

$$U^{(uB,\,\mathcal{G})} = (\mu\sigma_0 R)^{-1} U^{(uB,\,\mathcal{G})^+}, \quad V^{(uB,\,\mathcal{G})} = (\mu\sigma_0 R^2)^{-1} V^{(uB,\,\mathcal{G})^+}, \tag{15.53в,г}$$

где T^+, S^+, $U^{(uB,\,\mathcal{G})^+}$ и $V^{(uB,\,\mathcal{G})^+}$ определены в форме

$$F^+ = \left(\sum_{n,m} F_n^m(x)\, Y_n^m(\theta,\varphi)\right) \exp\{(\lambda - i\Omega)\tau\}. \tag{15.54}$$

Множители R, $(\mu\sigma_0 R)^{-1}$ и $(\mu\sigma_0 R^2)^{-1}$ обеспечивают одинаковую размерность величин T_n^m, S_n^m, $U^{(uB,\,\mathcal{G})m}$ и $V^{(uB,\,\mathcal{G})m}$. Функции Y_n^m определяются из (13.24) – (13.27). Как λ, так и Ω, – вещественные величины, не зависящие от n и m. Суммирование производится по всем n и m, где $n \geqslant 0$, а $|m| \leqslant n$. Однако вследствие (15.41) члены с $n = 0$ надо отбрасывать. Кроме того, для всех Al-мод величины T_n^m и $V_n^{(uB,\,\mathcal{G})m}$ не равны нулю, только если $n = l + 2k$ и $m = \pm l$, а S_n^m и $U_n^{(uB,\,\mathcal{G})m}$ – только если $n = l + 2k + 1$ и $m = \pm l$, где k – неотрицательное целое число. Для Sl-мод придем к аналогичному выводу; достаточно только поменять друг с другом два соотношения для n.

Теперь можно привести уравнения (15.42) для T и S к виду

$$D_n T_n^m - \frac{1}{x}\frac{d\ln\tilde{\sigma}}{dx}\frac{d}{dx}(xT_n^m) + V_n^{(uB)m} + V_n^{(\mathcal{G})m} - (\lambda - i\Omega)T_n^m = 0, \tag{15.55а}$$

$$D_n S_n^m + U_n^{(uB)m} + U_n^{(\mathcal{G})m} - (\lambda - i\Omega) S_n^m = 0 \quad \text{для} \quad 0 < x \leqslant 1. \qquad (15.55б)$$

Из (15.43) и (15.44в) следует:

$$T_n^m = 0, \quad S_n^m = a_n^m x^{-(n+1)} \quad \text{для} \quad x \geqslant 1, \qquad (15.56а,б)$$

где a_n^m постоянны. Наконец, (15.44а,б) дает

$$T_n^m = 0, \quad \frac{dS_n^m}{dx} + (n+1) S_n^m = 0 \quad \text{при } x = 1. \qquad (15.57а,б)$$

Из соотношений (15.45) для $U_n^{(uB)m}$, $V_n^{(uB)m}$, $U_n^{(\mathcal{G})m}$ и $V_n^{(\mathcal{G})m}$ следует:

$$U_n^{(uB)m} = \mu\sigma_0 R B_n^m \oint\!\!\!\!\!\!\diagup\!\!\!\!\!\!\diagdown (\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})) Y_n^{-m} \, d\tilde{\omega}, \qquad (15.58а)$$

$$V_n^{(uB)m} = \mu\sigma_0 R^2 B_n^m \oint\!\!\!\!\!\!\diagup\!\!\!\!\!\!\diagdown (\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})) Y_n^{-m} \, d\tilde{\omega}, \qquad (15.58б)$$

$$U_n^{(\mathcal{G})m} = \mu\sigma_0 R B_n^m \oint\!\!\!\!\!\!\diagup\!\!\!\!\!\!\diagdown (\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}\mathcal{G}) Y_n^{-m} \, d\tilde{\omega}, \qquad (15.58в)$$

$$V_n^{(\mathcal{G})m} = \mu\sigma_0 R^2 B_n^m \oint\!\!\!\!\!\!\diagup\!\!\!\!\!\!\diagdown (\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathcal{G}) Y_n^{-m} \, d\tilde{\omega}, \qquad (15.58г)$$

где $$B_n^m = [n(n+1) A_n^m]^{-1}. \qquad (15.59)$$

Интегралы определены так же, как в (13.2), а A_n^m определяется из (13.27). Кроме того, интегралы могут быть переписаны согласно (13.35). Величина $\mathbf{B}$ в выражениях $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ и $\mathcal{G}$ может быть представлена через T и S. Если это проделать, то подынтегральные выражения будут отличаться от правой части соотношений (15.46) и (15.47) только множителем Y_n^{-m}. Для T и S можно использовать упомянутое разложение. Тогда $U_n^{(uB)m}$, $V_n^{(uB)m}$, $U_n^{(\mathcal{G})m}$ и $V_n^{(\mathcal{G})m}$ могут быть вычислены как функции от T_n^m, S_n^m и их производных. Для частных случаев $\mathbf{u}$ и $\mathcal{G}$ явные, хотя и длинные, выражения для $U_n^{(uB,\,\mathcal{G})m}$ и $V_n^{(uB,\,\mathcal{G})m}$ получены в работе [214]. Рассмотренные в данной главе модели кинематического динамо можно исследовать с точки зрения теории стабильности. Значение $\lambda = 0$ соответствует предельной стабильности. В этом смысле в дальнейшем мы будем говорить о предельных значениях параметров, определяющих λ, о предельных $\mathbf{B}$-модах и т.д.

Глава 16. СФЕРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДИНАМО ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ: РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

16.1. Общие определения

Предыдущая глава была посвящена общему рассмотрению таких сферических моделей турбулентных динамо, которые представляют интерес при изучении космических тел. Большое количество численных исследований было выполнено для моделей, действующих на основе α^2-, $\alpha\omega$- и $\delta\omega$- механизмов. Сделаем обзор основных особенностей полученных результатов[1].

Будем придерживаться предположений, введенных в предыдущей главе. Проводимость σ считаем постоянной, если не будет оговорено иначе. Для электродвижущейся силы $\mathcal{E}$ будем принимать во внимание только вклад, определяемый выражением (15.8). Для входящих туда коэффициентов положим

$$\alpha_1 = \alpha_0 \tilde{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = \alpha_0 \tilde{\alpha}_2, \quad \alpha_3 = \alpha_0 \tilde{\alpha}_3, \qquad (16.1а, б, в)$$

$$\delta_1 = \delta_0 \tilde{\delta}_1, \quad \delta_2 = \delta_0 \tilde{\delta}_2, \qquad (16.1г, д)$$

$$\beta = \beta_0 \tilde{\beta}, \quad \gamma = \gamma_0 \tilde{\gamma}, \qquad (16.1е, ж)$$

где α_0, δ_0, β_0 и γ_0 — постоянные, а $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ — безразмерные величины, которые в общем случае зависят от x и θ. Для среднего движения, определяемого u, обратимся к (15.6) и (15.7) и добавим

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega u_\phi, \qquad (16.2а)$$

$$u_r = u_0 v_r, \quad u_\theta = u_0 v_\theta, \qquad (16.2б, в)$$

где ω_0, $\Delta\omega$ и u_0 — постоянные, а u_ϕ, v_r и v_θ — безразмерные функции x и θ.

---

[1] Численные исследования Рэдлера [14*], результаты которых были использованы в данной главе, теперь продолжены. Современное представление об этих результатах дано в работах Рэдлера [20*, 21*].

Кроме того, определим параметры

$$C_\alpha = \mu\sigma_0 \alpha_0 R, \qquad C_\beta = \mu\sigma_0 \beta_0, \tag{16.3а, б}$$

$$\mathcal{S} = \mu\sigma_0 \beta_0, \qquad \mathcal{G} = \mu\sigma_0 \gamma_0 R, \tag{16.3в, г}$$

$$C_\omega = \mu\sigma_0 \Delta\omega R^2, \qquad C_u = \mu\sigma_0 u_0 R, \tag{16.3д, е}$$

которые также безразмерны. Они являются нормированными мерами индукционных эффектов, входящих в $\mathcal{G}$ и u.

В соотношение (15.54) уже была введена безразмерная частота Ω для $\mathcal{B}$-моды. Для осесимметричной моды в дальнейшем возьмем $\Omega \geqslant 0$. Для неосесимметричной моды отнесем Ω к системе отсчета, в которой экватор покоится, и фиксируем знак таким образом, чтобы $\Omega > 0$ или $\Omega < 0$ соответствовало бы восточной или западной миграции. Описывая результаты численных расчетов, мы воздержимся от описания численных методов и ограничимся ссылками на работы.

16.2. Определения для частных типов моделей

В дальнейшем мы будем рассматривать различные модели, которые определяются различными частными формами электродвижущей силы $\mathcal{G}$ и средней скорости u, т.е. функциями α_1, α_2, ..., ω и u_r, u_θ. По ряду причин отдельные примеры взяты из исследований Рэдлера [221, 222]. Специальный выбор функций для этих случаев будет объяснен.

Для оправдания специального выбора $\mathcal{G}$ обратимся к соответствующим результатам, полученным во втором приближении (см. разд. 9.3, 9.4 и 9.5), и предположим, что зависимость α_1, α_2, ... от корреляционного тензора поля турбулентных скоростей u' может быть просто сведена к зависимости от $\overline{u'^2}$, λ_{cor} и τ_{cor}. Более того, $\overline{u'^2}$ может зависеть от радиуса, но λ_{cor} и τ_{cor} считаются постоянными. Тогда положим

$$\tilde{\alpha}_1 = d\chi/dx, \qquad \tilde{\alpha}_2 = \zeta_\alpha/\tilde{\alpha}_1, \qquad \tilde{\alpha}_3 = 0, \tag{16.4а, б, в}$$

$$\tilde{\delta}_1 = \chi, \qquad \tilde{\delta}_2 = \zeta_\delta \tilde{\delta}_1, \tag{16.4г, д}$$

$$\tilde{\beta} = \chi, \qquad \tilde{\gamma} = d\chi/dx, \tag{16.4е, ж}$$

и, кроме того,

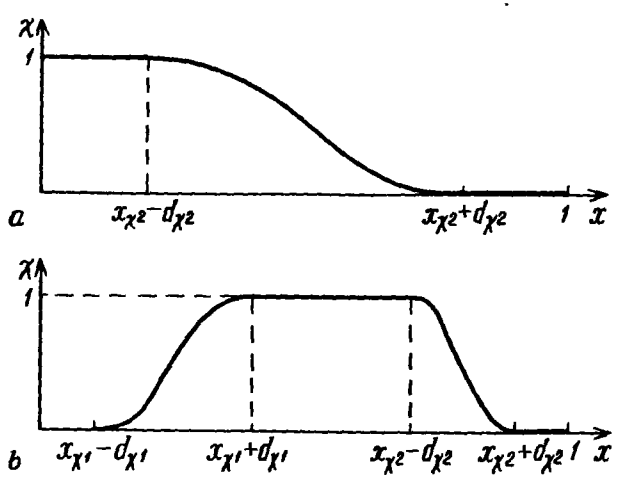
$$\overline{u'^2} = u_0'^2 \chi. \tag{16.5}$$

Функция χ, которая может зависеть только от x, представляет собою нормированное распределение интенсивности турбулентности; u_0'

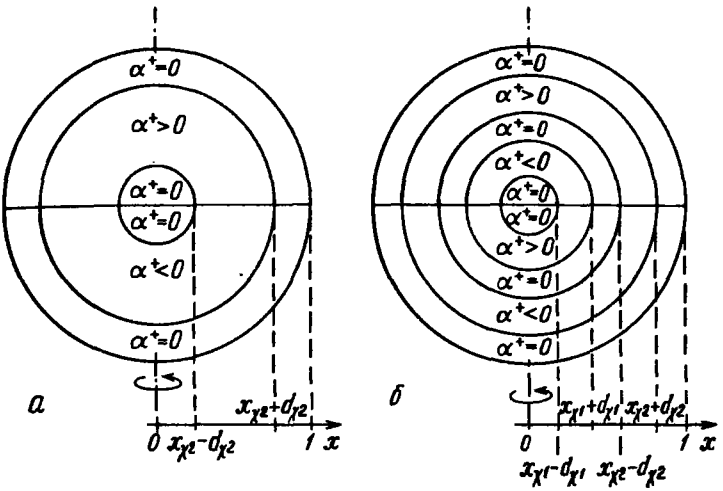
имеет смысл характерного значения турбулентной скорости. Параметры ζ_α и ζ_δ предполагаются не зависящими от x. Как объяснено выше, α_3-эффект эквивалентен неоднородному вращению частного вида, так что предположение $\tilde{\alpha}_3 = 0$ не является серьезным ограничением. Функция χ выбрана таким образом, что

$$\chi = \begin{cases} 0 \quad \text{для} \quad x \leqslant x_{\chi 1} - d_{\chi 1}; \\ \dfrac{1}{16}(8 + 15\xi - 10\xi^3 + 3\xi^5), \quad \xi = \dfrac{x - x_{\chi 1}}{d_{\chi 1}} \\ \qquad\qquad \text{для} \quad x_{\chi 1} - d_{\chi 1} \leqslant x \leqslant x_{\chi 1} + d_{\chi 1}; \\ 1 \quad \text{для} \quad x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant x \leqslant x_{\chi 2} - d_{\chi 2}; \\ \dfrac{1}{16}(8 - 15\xi + 10\xi^3 - 3\xi^5), \quad \xi = \dfrac{x - x_{\chi 2}}{d_{\chi 2}} \\ \qquad\qquad \text{для} \quad x_{\chi 2} - d_{\chi 2} \leqslant x \leqslant x_{\chi 2} + d_{\chi 2}; \\ 0 \quad \text{для} \quad x_{\chi 2} + d_{\chi 2} \leqslant x. \end{cases} \tag{16.6}$$

В дальнейшем мы будем различать два разных случая, *a* и *b*, соответствующие $\chi(0) \neq 0$ и $\chi(0) = 0$. В случае *a* турбулентность



Р и с. 16.1. Профили нормированной интенсивности турбулентности χ, определяемой из (16.6); *случай a*: турбулентность охватывает центр ядра; *случай b*: турбулентность ограничена определенными слоями сферы.

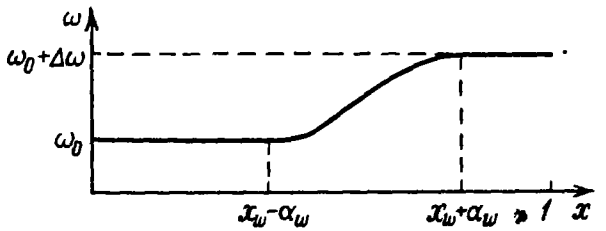


Р и с. 16.2. Распределение знаков величины α^+, определяемой из (15.10), для профилей интенсивности турбулентности типов а и б, показанных на рис. 16.1. Здесь взяты знаки, соответствующие $\alpha_0 > 0$, т.е. $C_\alpha > 0$. Знак надо изменить, если $\alpha_0 < 0$, т.е. $C_\alpha < 0$.

охватывает центр сферы, а в случае *b* она ограничена определенными внешними слоями сферы. Соответствующие профили χ показаны на рис. 16.1. Имея в виду дальнейшее рассмотрение, на рис. 16.2 приведено распределение знаков α^+, определяемых из (15.10) для различных типов профилей χ. Конечно, можно отступить от аргументации, приведенной в связи с соотношениями (16.4), и использовать их, не интерпретируя χ согласно (16.5), т.е. как нормированную интенсивность турбулентности. Поэтому результаты вычислений, для которых использованы (16.4) и (16.6), могут быть применены при различных предположениях о величине $\mathcal{G}$.

Вернемся к обсуждению средней скорости u. Предположим, что угловая скорость вращения ω зависит от радиуса и возьмем

$$w = \begin{cases} 0 \quad \text{для } x \leqslant x_w - d_w; \\ \dfrac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^2), \quad \xi = \dfrac{x - x_w}{d_w} \\ \quad \text{для } x_w - d_w \leqslant x \leqslant x_w + d_w; \\ 1 \quad \text{для } x_w + d_w < x. \end{cases} \tag{16.7}$$



Р и с. 16.3. Профиль угловой скорости ω для неоднородного вращения, определяемый из (16.2, а) и (16.7). Эта восходящая кривая соответствует $\Delta\omega > 0$, т.е. $C_\omega > 0$. Спадающая кривая была бы в случае $\Delta\omega < 0$, т.е. $C_\omega < 0$.

Скорость меридиональной циркуляции u_p предполагается соленоидальной, так что

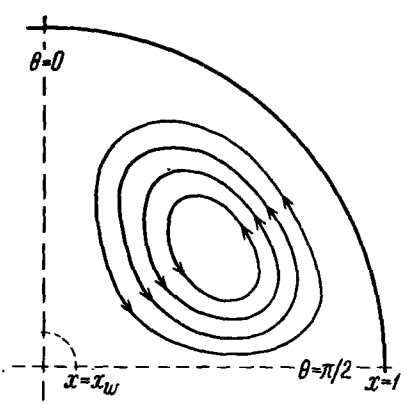
$$v_r = \frac{1}{x \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\psi), \quad v_\theta = -\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\psi), \qquad (16.8\text{ а, б})$$

где ψ – функция тока, определяемая как

$$\psi = -f \sin\theta\cos\theta, \qquad (16.9\text{а})$$

$$f = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqslant x_u; \\ \xi^3, \quad \xi = \dfrac{4(x-x_u)(1-x_u)}{(1-x_u)^2} & \\ & \text{для } x_u \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \qquad (16.9\text{б})$$

Профили ω и линии тока $\psi = \text{const}$ даны на рис. 16.3 и 16.4.



Р и с. 16.4. Линии потока $\psi = \text{const}$ меридиональной циркуляции, определяемые из (16.2а, б), (16.8) и (16.9). Направление стрелок соответствует случаю $u_0 > 0$, т.е. $C_u > 0$, и должно быть обращено, если $u_0 < 0$, т.е. $C_u < 0$.

Для указанных частных случаев величина $C_\omega > 0$, если дифференциальное вращение характеризуется $d\omega/dr > 0$, и $C_\omega < 0$, если $d\omega/dr < 0$. Если $C_u > 0$, меридиональная циркуляция во внешних слоях происходит от экватора к полюсам, а если $C_u < 0$ — от полюсов к экватору. Значения $C_\omega = \pm 2\pi$ означают, что за одно и то же время $\mu\sigma_0 R^2$ внешние слои совершают на один оборот больше, или на один меньше, чем внутренние. Аналогично этому $C_u = \pm 1$ соответствует приблизительно одному повороту области с максимальной скоростью за то же время $\mu\sigma_0 R^2$.

16.3. Модели с α^2-механизмом

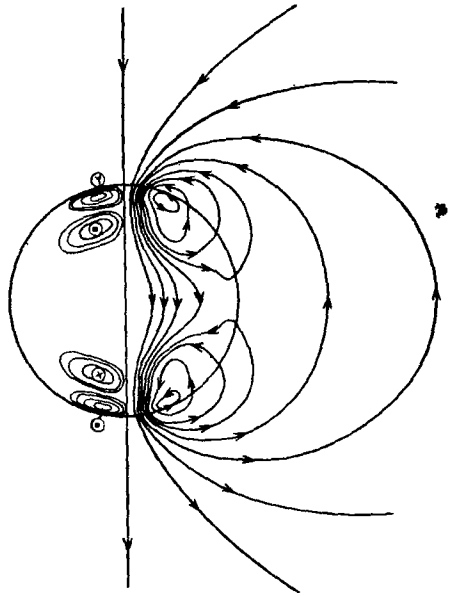
Остановимся на моделях, для которых магнитное поле генерируется α^2-механизмом. Как показано выше, в этом случае генерация тороидального поля из полоидального и обратно обусловлена α-эффектом. Это требует не равной нулю величины C_α. Ограничимся обсуждением случая $C_\alpha > 0$. Используя результаты для $C_\alpha > 0$, простым образом найдем соответствующие результаты для $C_\alpha < 0$ с помощью выводов, полученных из (15.17) и (15.18).

В наиболее простом случае никакие индукционные эффекты, кроме идеализированного α-эффекта, не будут рассматриваться. В этих рамках будем говорить о чистом α^2-механизме.

Первые модели с регенерацией магнитного поля α^2-механизмом были предложены Штеенбеком и Краузе [259, 263]. Эти модели были построены, чтобы объяснить происхождение магнитного поля Земли. Принимался во внимание только чистый α^2-механизм. Для большей части исследований, на которые будем ссылаться, коэффициент $\tilde{\alpha}_1$ был выбран в виде

$$\tilde{\alpha}_1 = -\frac{dX}{dx}, \quad X = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqslant x_\alpha, \\ \dfrac{27}{4}\,\dfrac{(x-x_\alpha)^2(1-x)}{(1-x_\alpha)^3} & \text{для } x_\alpha \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \qquad (16.10\text{а, б})$$

для различных значений x_α. Были рассмотрены только осесимметричные B-поля, т.е. A0- и S0-моды, и они оказались стационарными. Зависимость предельных значений C_α от x_α дана в табл. 16.1. Структура поля для одного частного случая изображена на рис. 16.5 и 16.6.

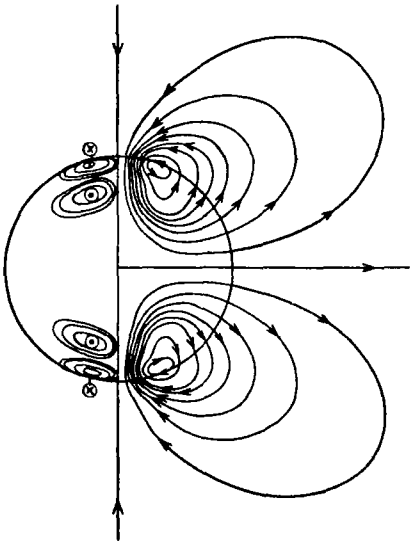


Р и с. 16.5. Модель чистого α^2-механизма; $\tilde{\alpha}_1$ определяется из (16.10), $x_\alpha = 0{,}5$. Пример поля для моды A0, соответствующей $C_\alpha = 3{,}164$. В левой стороне показаны линии тороидального поля постоянной величины, в правой части показаны линии полоидального поля.

Таблица 16.1

Предельные значения C_α для мод A0 и S0 в зависимости от x_α. Эти моды стационарны, т.е. $\Omega = 0$. Модель с чистым α^2-механизмом; $\tilde{\alpha}_1$ дается выражением (16.10)

x_α	A0	S0
0,0	3,734	3,732
0,1	3,656	3,654
0,3	3,467	3,471
0,5	3,164	3,174
0,7	2,712	2,726
0,8	2,629	2,638



Р и с. 16.6. Модель чистого α^2-механизма; $\tilde{\alpha}_1$ определяется из (16.10), $\varkappa_\alpha = 0{,}5$. Пример поля для моды S0, соответствующей $C_\alpha = 3{,}174$. Здесь справедливы разъяснения к рис. 16.5.

В работе [228] результаты Штеенбека и Краузе были подтверждены и дополнены вычислениями, которые также основывались на предположении о чистом α^2-механизме и также были ограничены случаем осесимметричных полей. Работа [233] посвящена изучению моделей с α^2-механизмом, модифицированным наличием дифференциального вращения. Авторы также включили случай неосесимметричных полей. Наконец, в исследованиях [218, 14*, 20*, 21*] в дополнение к идеализированному α-эффекту были учтены другие индукционные эффекты и изучались как осесимметричные, так и неосесимметричные моды. На основе результатов, отобранных из работ Рэдлера [222], объясним и проиллюстрируем существенные выводы моделей с α^2-механизмом. Для этих случаев справедливы ограничения разд. 16.2.

Сначала снова рассмотрим чистый α^2-механизм и предположим, что $\tilde{\alpha}_1$ определяется из (16.4а) и (16.6). Тогда оказывается, что возможны как осесимметричные, так и неосесимметричные моды. В табл. 16.2 и 16.3 и на рис. 16.7 даны предельные значения C_α и соответствующие значения Ω для χ-профилей частного вида типа a и b.

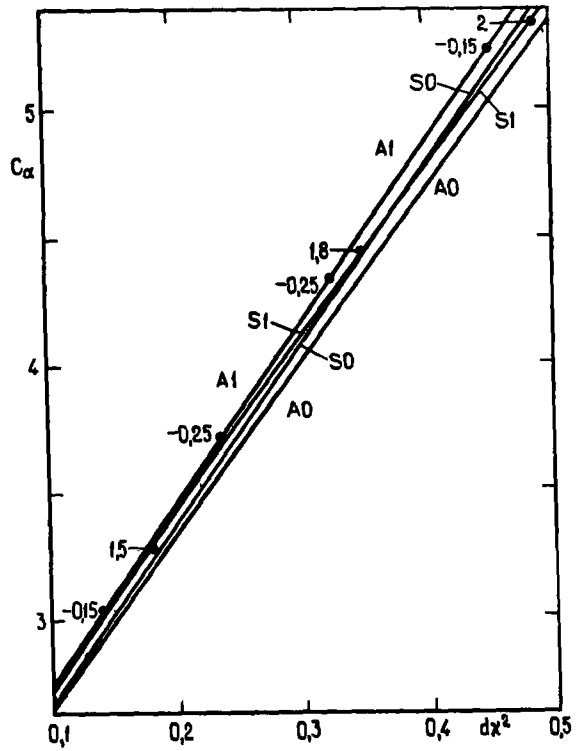


Рис. 16.7.[1] Модель чистого α^2-механизма; $\tilde{\alpha}_1$ определяется из (16.4а) и (16.6); профиль χ типа a, $x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant 0$, $x_{\chi 2} = 0{,}5$. Предельные значения C_α даны в зависимости от $d_{\chi 2}$. Для мод A0 и S0 взято $\Omega = 0$, для мод A1 и S1 Ω определено числами на кривых.

Во всех исследованных случаях моды A0, S0, A1 и S1 соответствуют близким предельным значениям C_α. Большинство A0-мод имеют наименьшие из этих предельных значений. Поэтому все эти моды могут возбуждаться почти одинаково просто; моды A0 в общем случае немного преобладают. Моды A2 и S2 соответствуют наибольшим предельным значениям C_α и возбуждаются немного проще. Различные свойства разных мод могут быть следствием того, что для полей с более простой геометрической структурой диссипативные

---

[1] Некоторые из рисунков этой главы, которые были неверными в английском оригинальном издании этой книги, даны здесь в правильном виде. Это относится к рис. 16.7, 16.8, 16.9, 16.11, 16.14 и 16.16.

Таблица 16.2.

Предельные значения C_α и соответствующие значения Ω. Модель с чистым α^2-механизмом; $\tilde{\alpha}_1$ даются выражениями (16.4а) и (16.6); χ-профили типа a для $x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant 0$, $x_{\chi 2} = 0{,}5$, $d_{\chi 2} = 0{,}4$

	A0	S0	A1	S1	A2	S2
C_α	4,66	4,74	4,85	4,75	6,29	6,27
Ω	0	0	− 0,20	1,95	− 0,15	0,81

Таблица 16.3.

Предельные значения C_α и соответствующие значения Ω. Модель с чистым α^2-механизмом; $\tilde{\alpha}_1$ даются выражениями (16.4а) и (16.6); χ-профили типа b для $x_{\chi 1} = 0{,}5$, $x_{\chi 2} = 0{,}9$, $d_{\chi 1} = d_{\chi 2} = 0{,}1$

	A0	S0	A1	S1	A2	S2
C_α	2,68	2,70	2,76	2,77	3,12	3,12
Ω	0	0	− 1,39	− 2,65	−0,24	−0,85

эффекты проявляются в меньшей степени, чем для полей с более сложной структурой.

В случае χ-профилей типа a с неосесимметричными модами преобладает миграция в восточном направлении. Этот вывод становится очевидным, если рассматривается распределение электродвижущей силы, обусловленное α-эффектом, для простых структур поля. Легко проследить, что для таких структур изменение во времени включает миграцию в восточном направлении. Для χ-профилей типа b возникает миграция в западном направлении. Поскольку такие профили соответствуют более сложному распределению электродвижущей силы, полученные результаты труднее интерпретировать.

Включим теперь в рассмотрение наряду с идеализированным α-эффектом другие индукционные эффекты. Точнее говоря, в каждом случае будем включать только еще один новый эффект. Изучая сначала переход от идеализированного к реальному α-эффекту, допустим что ζ_α не равно нулю. Имеются основания думать, что ζ_α в общем

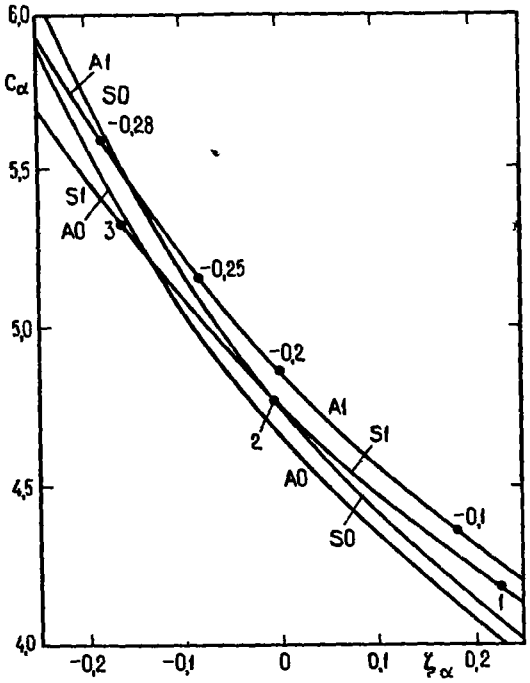


Рис. 16.8. Модель, включающая α_1- и α_2-эффекты; $\tilde{\alpha}_1$ определяется из (16.4а) и (16.6); профиль χ типа a, $x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant 0$, $x_{\chi 2} = 0{,}5$, $d_{\chi 2} = 0{,}4$. Предельные значения C_α даны в зависимости от ζ_α. Для Ω справедливы разъяснения к рис. 16.7.

случае отрицательно; в частных случаях было найдено, что $\zeta_\alpha = -1/4$ (см. разд. 9.6). Во всех исследованных случаях с χ-профилями типов a и b предельные значения C_α возрастают, если уменьшается ζ_α. По-прежнему моды A0, S0, A1 и S1 обладают очень близкими предельными значениями C_α. Типичный пример приведен на рис. 16.8. В этом случае для достаточно малых ζ_α наименьшее предельное значение C_α имеет не A0-мода, а S1-мода, т.е. она наиболее легко возбуждается.

Заменим теперь исходную электропроводность на турбулентную, т.е. включим β-эффект, так что параметр s теперь не равен нулю. В отличие от исходной проводимости турбулентная проводимость зависит от радиуса. Предполагая, что турбулентная проводимость всегда меньше, чем исходная, получим $s \geqslant 0$. Следует ожидать, что

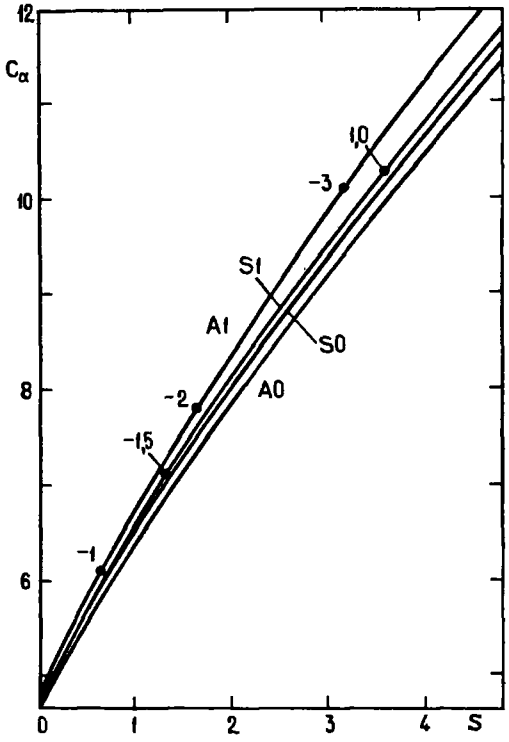
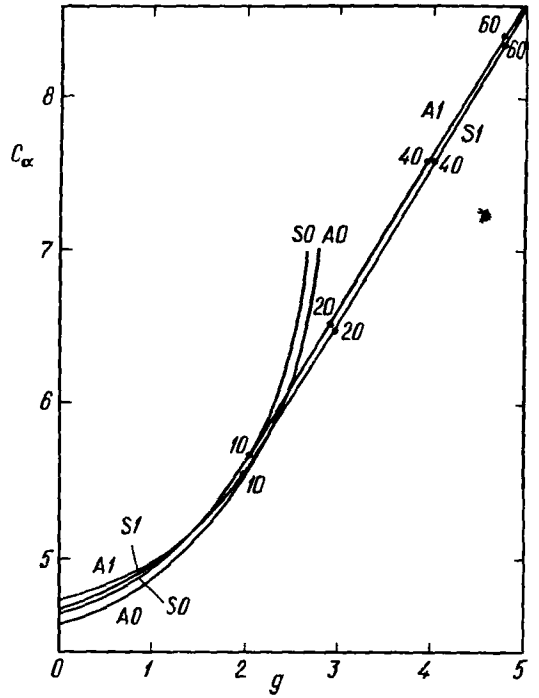


Рис. 16.9. Модель, включающая α_1- и β-эффекты; α_1 и β_1 определяются из (16.4) и (16.6); профиль χ типа a, $x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant 0$, $x_{\chi 2} = 0{,}5$, $d_{\chi 2} = 0{,}4$. Предельные значения C_α даны в зависимости от s. Для Ω справедливы разъяснения к рис. 16.7.

предельные значения C_α растут с ростом s. Именно такая зависимость от s имеется во всех до сих пор исследованных случаях, соответствующих χ-профилям типов a или b. Типичный пример приведен на рис. 16.9.

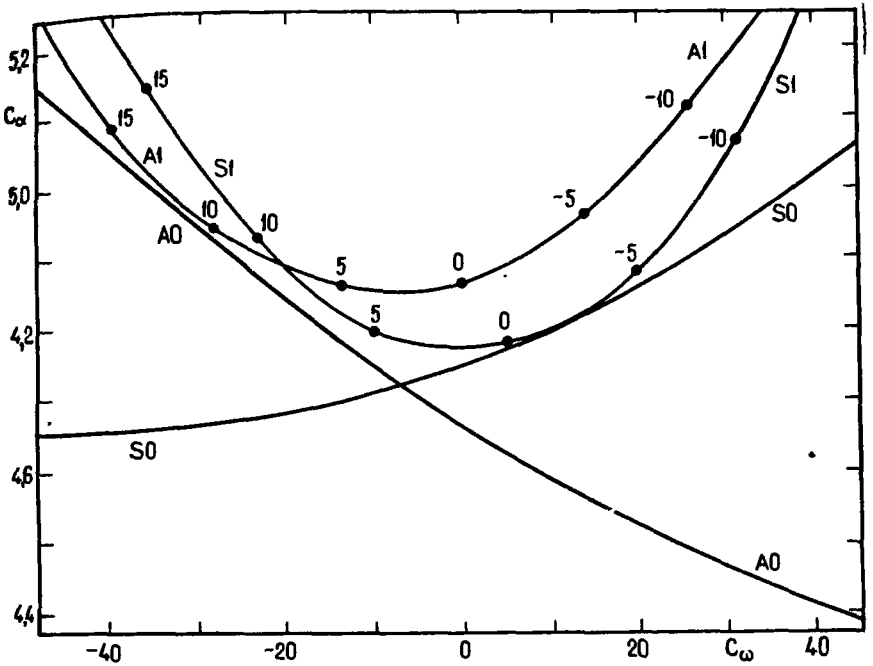
Рассмотрим теперь перенос магнитного потока, обусловленный γ-эффектом, который связан с параметром g. Поскольку γ-эффект определяется градиентом интенсивности турбулентности, имеем $g \geqslant 0$. Перенос магнитного потока может быть описан также посредством возрастающей магнитной проницаемости. Это обстоятельство указывает, что предельные значения C_α возрастают с возрастанием g. Все исследования показывают, что это действительно имеет место. Пример приведен на рис. 16.10.



Р и с. 16.10. Модель, включающая α_1- и γ-эффекты; α_1 и γ определяются из (16.4) и (16.6); профиль χ типа a, $x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant 0$, $x_{\chi 2} = 0{,}5$, $d_{\chi 2} = 0{,}4$. Предельные значения C_α даны в зависимости от g. Для Ω справедливы разъяснения к рис. 16.7.

К сожалению, имеются только очень неполные результаты о влиянии δ_1- и δ_2-эффектов.

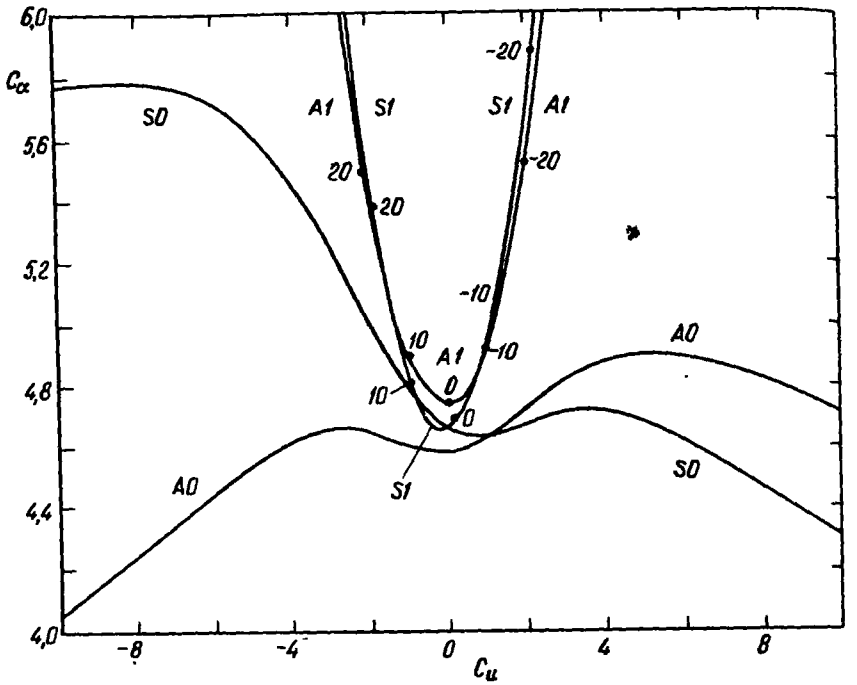
Рассмотрим теперь влияние дифференциального вращения, т.е. возьмем не равное нулю C_ω. Предельные значения C_α для разных мод оказываются различным образом зависящими от C_ω. Во всех изученных случаях для достаточно больших значений $|C_\omega|$ всегда одна из осесимметричных мод явным образом преобладает над всеми другими модами. Для χ-профилей типа a мода A0 преобладает, если $C_\omega > 0$, а мода S0 – если $C_\omega < 0$. Пример приведен на рис. 16.11. Различное поведение мод A0 и S0 можно понять. На рис. 15.3 и 15.4 видно, что для моды A0 дифференциальное вращение в случае $C_\omega > 0$ способно поддерживать α-эффект при генерации тороидального поля из полоидального; то же самое имеет место для моды S0 в случае $C_\omega < 0$. В



Р и с. 16.11. Модель, включающая α_1- и ω-эффекты; $\tilde{\alpha}_1$ определяется из (16.4а) и (16.6); профиль χ типа α, $x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant 0$, $x_{\chi 2} = 0{,}5$, $d_{\chi 2} = 0{,}4$; w определяется из (16.7), $x_w = 0{,}5$, $d_w = 0{,}4$. Предельные значения C_α даны в зависимости от C_ω. Для Ω справедливы разъяснения к рис. 16.7.

области с малыми значениями $|C_\omega|$ ситуация более сложная. Результат сильно зависит от профилей χ и ω. Следует отметить, что в работе [233] обнаружено преобладание моды S1 для отдельных значений $|C_\omega|$.

Наконец, учтем меридиональную циркуляцию, т.е. предположим, что не равно нулю C_u. Существует удивительное подобие между зависимостями предельных значений C_α от C_ω и от C_u. Во всех изученных случаях для достаточно больших значений $|C_u|$ осесимметричные моды преобладают над неосесимметричными. Среди осесимметричных мод, как и прежде, моды A0 или S0 возбуждаются соответственно легче, если $C_u < 0$ или $C_u > 0$. Пример приведен на рис. 16.12. В отличие от дифференциального вращения в случае осесимметричных мод, меридиональная циркуляция не обеспечивает какой-либо связи между тороидальным и полоидальным полями. Однако она, очевидно,



Р и с. 16.12. Модель, включающая α_1- и u_p-эффекты; α_1 определяется из (16.4а) и (16.6); профиль χ типа a, $x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant 0$, $x_{\chi 2} = 0{,}5$, $d_{\chi 2} = 0{,}4$; v_r и v_θ определяются из (16.8) и (16.9), $x_u = 0{,}1$. Предельные значения C_α даны в зависимости от C_u. Для Ω справедливы разъяснения к рис. 16.7.

способна влиять на структуру осесимметричного поля таким образом, что возрастает взаимодействие полей, вызванное α-эффектом.

16.4. Модели с αω-механизмом

Рассмотрим теперь модели, позволяющие поддерживать магнитные поля на основе αω-механизма. В этом случае генерация полоидального поля из тороидального связана с α-эффектом, более точно – с α_1-эффектом, а генерация тороидального из полоидального поля – с неоднородным вращением, т.е. с ω-эффектом. Следовательно, как C_α, так и C_ω не равны нулю. По-прежнему мы ограничимся случаем $C_\alpha > 0$. Обобщение на случай $C_\alpha < 0$ легко выполнить с помощью соотношений (15.17) и (15.18).

Предположим сначала, что не имеется других индукционных эффектов, кроме идеализированных α- и ω-эффектов, и что тороидальное

поле генерируется только ω-эффектом, т.е. без помощи α-эффекта. Если это предположение выполняется, будем говорить о чистом αω-механизме. Чистый αω-механизм, генерирующий осесимметричные **B**-поля, очень просто зависит от C_α и C_ω, а именно как $C_\alpha C_\omega$. Чтобы убедиться в этом, удобно использовать частный вид уравнений (15.21а) и (15.22) для величин $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{A}_t$ и, согласно принятым выше предположениям, переписать их путем введения C_α и C_ω в уравнения для $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{A}_t^+$, где $\mathbf{A}_t^+ = C_\alpha^{-1}\mathbf{A}_t$. Поскольку в (15.21а) член с α_1 опущен, результирующие уравнения содержат C_α и C_ω только в виде $C_\alpha C_\omega$. В отличие от условий генерации осесимметричных **B**-полей эти условия для $\mathbf{B}_t$ и $\mathbf{A}_t^+$ могут зависеть как от C_α, так и от C_ω, даже если не изменяется $C_\alpha C_\omega$. Из предыдущего следует, что отношение $\mathbf{B}_t$ к $\mathbf{B}_p$ ведет себя как $(C_\omega/C_\alpha)^{1/4}$, если фиксирована величина $C_\alpha C_\omega$. Следует подчеркнуть, что эти утверждения неприменимы для неосесимметричных **B**-полей.

Первые модели, которые приводили к генерации магнитных полей αω-механизмом, были разработаны Штеенбеком и Краузе [259, 262]. Эти модели предназначались для объяснения ситуации на Солнце. Принимался во внимание только чистый αω-механизм. Вычисления выполнялись в предположении

$$\tilde{\alpha}_1 = -\frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x - x_\alpha}{d_\alpha}\right)\right], \qquad (16.11а)$$

$$w = -\frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{x - x_w}{d_w}\right)\right], \qquad (16.11б)$$

где Φ — функция ошибок для различных x_α, d_α, x_w и d_w. Авторы рассмотрели только осесимметричные **B**-моды. Они нашли такие моды с осциллирующей зависимостью от времени. Как пример, рассмотрим частный случай, определяемый значениями $x_\alpha = 0{,}9$, $x_w = 0{,}7$ и $d_\alpha = d_w = 0{,}075$. В этом случае существует осциллирующая A0-мода с предельным значением $C_\alpha C_\omega = 2{,}07 \cdot 10^4$ и $\Omega = 31{,}8$. Труднее возбудить осциллирующую S0-моду. Ряд примеров полей для различных фаз колебаний A0-моды показан на рис. 16.13.

Результаты Штеенбека и Краузе были подтверждены в работе [53]. Рассмотренная авторами модель также соответствует чистому αω-механизму, но величина $\tilde{\alpha}_1$ сведена к дельта-функции, а w —

к ступенчатой функции. По-прежнему рассматривались только осесимметричные B-моды. Авторы нашли такие моды, осциллирующие во времени. В работе [266] эта модель была модифицирована таким образом, чтобы учесть α-эффект при генерации тороидального поля и рассмотреть также неосесимметричные B-моды. Дальнейшее исследование моделей с $\alpha\omega$-механизмом, допускающих осциллирующие B-моды, было проведено в работах [96 – 99, 54, 103, 228, 233, 269, 271]. В некоторых из этих работ наряду с α-эффектом исследовались другие турбулентные индукционные эффекты и наряду с дифференциальным вращением – меридиональная циркуляция.

До сих пор мы обращали внимание только на осциллирующие поля. Следуя Брагинскому [20], в работе [228] было показано, что $\alpha\omega$-механизм при наличии меридиональной циркуляции приводит также к появлению стационарных осесимметричных мод. Исследования, сделанные в [154], показали, что чистый $\alpha\omega$-механизм может генерировать стационарные осесимметричные B-моды. Этот результат подтвержден в работе [269]. Дальнейшее исследование генерации стационарных осесимметричных B-мод выполнено в работах [54, 55, 222].

То обстоятельство, что модель $\alpha\omega$-механизма допускает различные B-моды, ставит вопрос, какая мода преобладает при данных условиях.

Рассмотрим сначала только стационарные осесимметричные моды. Ограничимся случаями, когда α^+ не меняет знака в северной или южной полусферах, и, кроме того, ω зависит только от r, а $d\omega/dr$ не меняет своего знака. Как можно ожидать из рассмотрения рис. 15.3 и 15.4, во всех исследованных случаях среди стационарных мод A0-мода преобладает над S0-модой, если в северной полусфере знаки α^+ и $d\omega/dr$ совпадают, а S0-мода преобладает над A0-модой если знаки различны.

Более сложной является ситуация с осесимметричными осциллирующими модами. Поддержание осциллирующих мод предопределяется довольно сложными процесоами. В частности, для регенерации тороидального и полоидального поля должны быть выполнены специальные фазовые соотношения. Даже при столь простых предположениях о α^+ и $d\omega/dr$ осциллирующая мода S0 не всегда легче всего возбуждается при одинаковых знаках α^+ и $d\omega/dr$ в северной полусфере и не всегда легче всего возбуждается осциллирующая мода A0, если эти знаки различны.

Интересно, во всяком случае, выяснить, какие из мод преобладают – стационарные или осциллирующие. В большинстве исследованных моделей α-эффект и неоднородное вращение сконцентрированы в некоторых тонких слоях. По-видимому, расстояние между этими слоями существенным образом определяет характер моды, которая возбуждается легче всего. В работе [55] изучалась модель с чистым $\alpha\omega$-механизмом, для которой

$$\tilde{\alpha}_1 = \delta(x - x_\alpha), \quad \frac{d\omega}{dr} = \delta(x - x_w), \tag{16.12а, б}$$

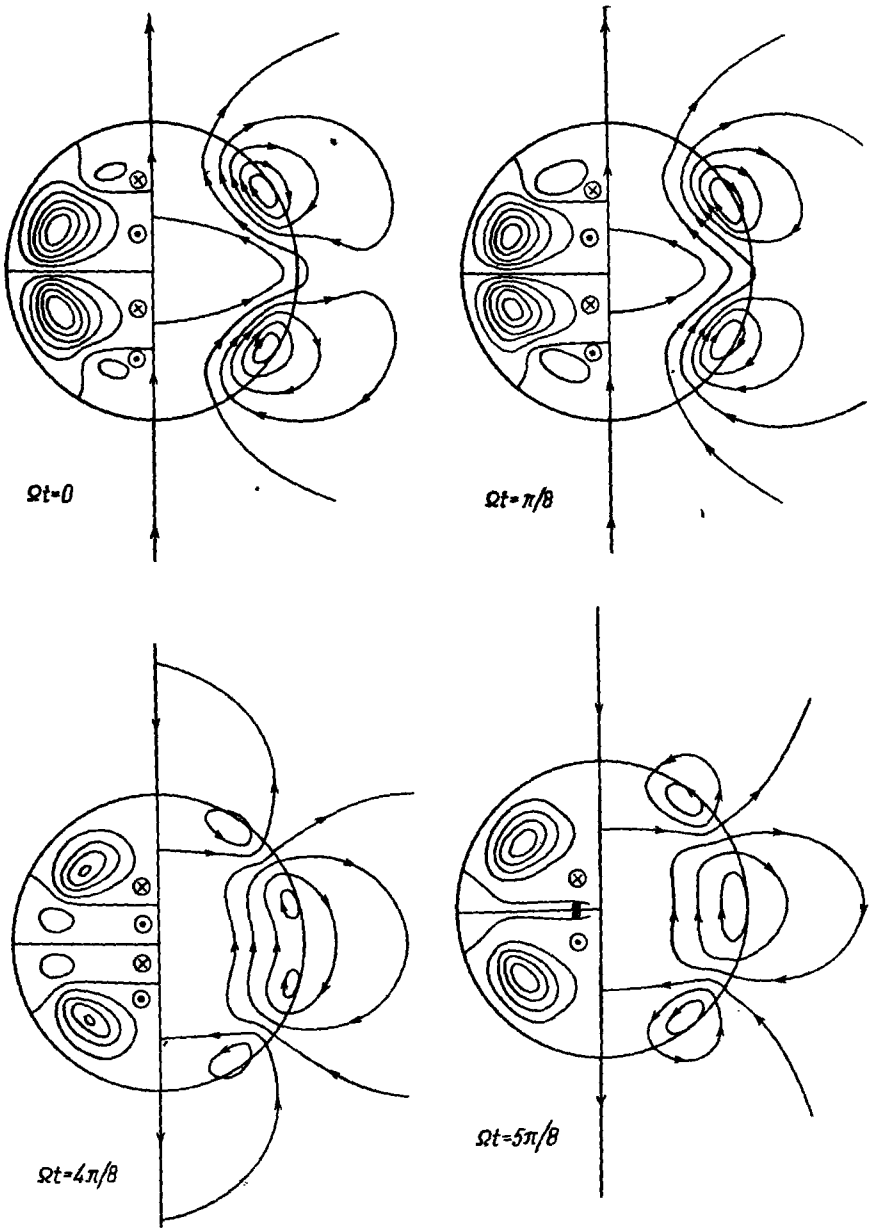
где x_α и x_w постоянны. Рассмотрены только осесимметричные моды. В модели с достаточно большим пространственным разделением индукционных эффектов, т.е. для достаточно большой величины $|x_\alpha - x_w|$, всегда преобладает одна из стационарных мод. В согласии с приведенным выше объяснением этой модой будет A0, если $C_\alpha C_\omega > 0$, и S0, если $C_\alpha C_\omega < 0$. При некоторых малых значениях $|x_\alpha - x_w|$ легче всего возбуждаются осциллирующие моды.

Сделаем замечание о характере осесимметричной осциллирующей B-моды, возбуждаемой $\alpha\omega$-механизмом. Как можно видеть из примера, приведенного на рис. 16.13, не только величина поля, но и его геометрическая структура со временем изменяется. Типичной чертой таких моделей является миграция поясов тороидального поля. Эта миграция, которая играет важную роль для моделей Солнца, может быть объяснена в терминах динамо-волн, открытых Паркером [189].

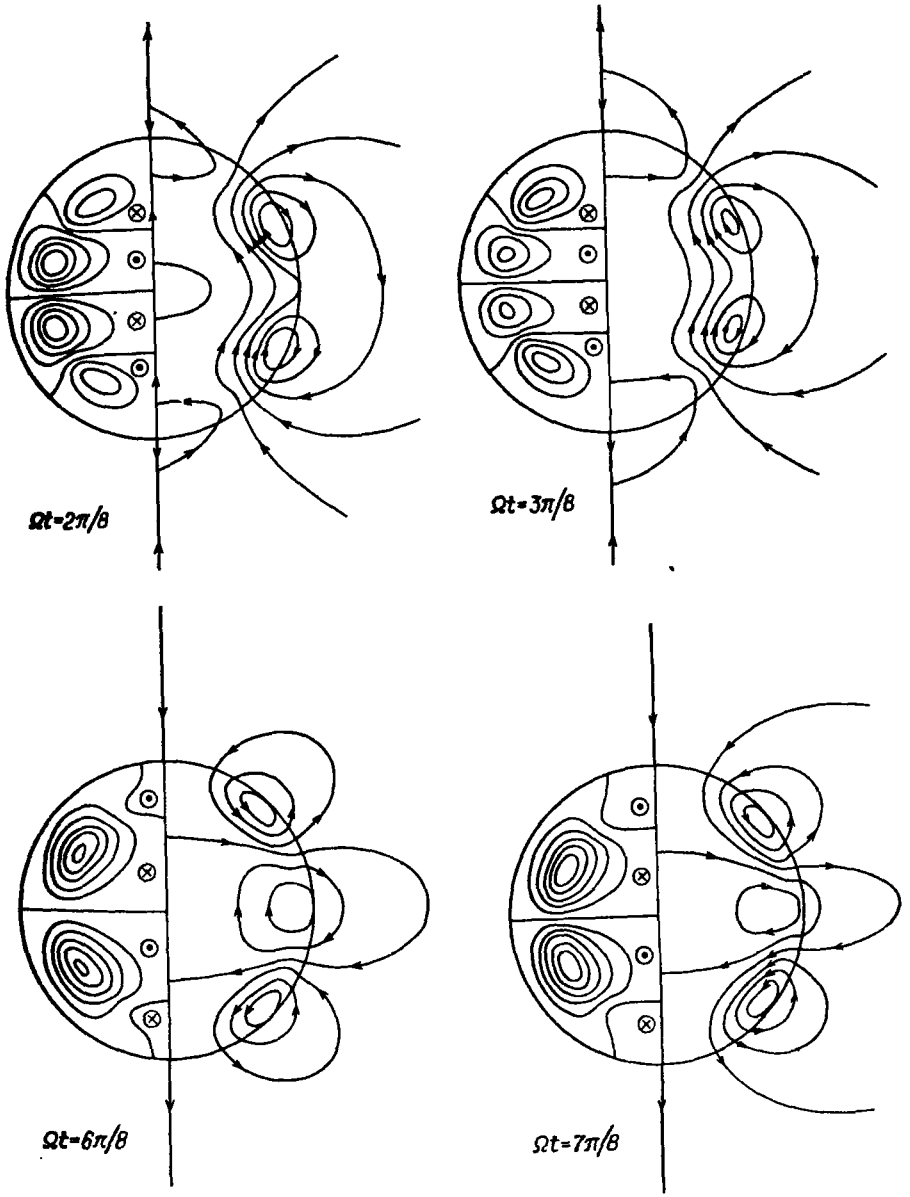
Как показано в разд. 15.7, $\alpha\omega$-механизм, по-видимому, неспособен генерировать или поддерживать неосесимметричные B-поля. Во всяком случае, для всех рассмотренных до сих пор моделей не доказана возможность существования неосесимметричных полей, если действует чистый $\alpha\omega$-механизм. На первый взгляд модель Краузе [115], которая предполагает чистый $\alpha\omega$-механизм, допускает появление неосесимметричных B-мод. Однако использованные там предположения несправедливы для рассмотренных мод.

Для иллюстрации изложенных выше утверждений остановимся на некоторых частных результатах, полученных Рэдлером [222], для которых справедливы предположения разд. 16.2.

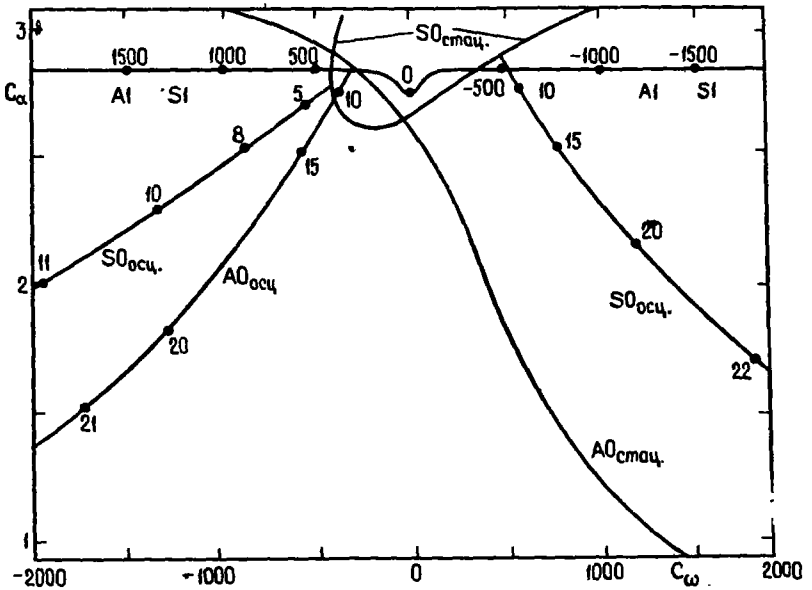
Рассмотрим модели, включающие α-эффект, точнее, α_1-эффект, и неоднородное вращение, т.е. ω-эффект. Если C_α не равно нулю, но равно нулю C_ω, то имеем α^2-механизм, а если C_ω возрастает, то $\alpha\omega$-



Р и с. 16.13. Модель чистого αω-механизма; $\tilde{\alpha}$ и w определяются из (16.11), $x_\alpha = 0{,}9$, $x_w = 0{,}7$, $d_\alpha = d_w = 0{,}075$. Примеры поля для осциллирующей моды A0 соответствуют $C_\alpha C_\omega = 2{,}07 \cdot 10^4$, а $\Omega = 31{,}8$ — для 8 фаз. В



левых частях рисунков показаны линии тороидального поля постоянной величины, в правых частях даны линии полоидального поля.

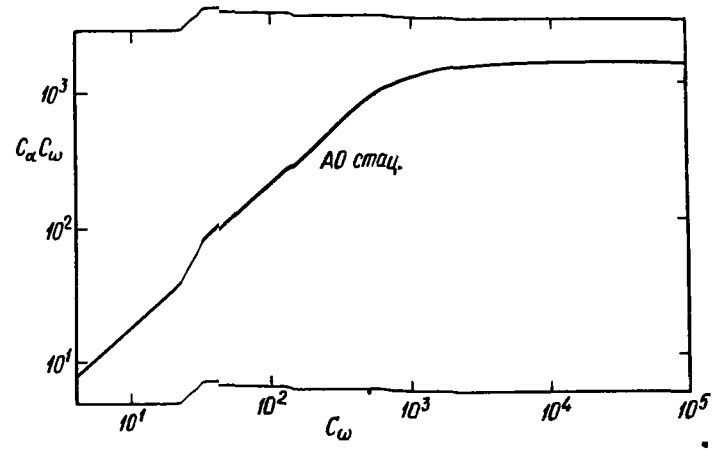


Р и с. 16.14. Модель, включающая α_1- и ω-эффекты, $\tilde{\alpha}_1$ определяется из (16.4а) и (16.6); профиль χ типа a, $x_{\chi 1}+d_{\chi 1}\leqslant 0$, $x_{\chi 2}=0{,}5$, $d_{\chi 2}=0{,}1$; w определяется из (16.7), $x_w=0{,}8$, $d_w=0{,}1$. Предельные значения C_α даны в зависимости от C_ω. Для стационарных мод $\Omega=0$, для всех других мод Ω дано числами на кривых.

механизм. Полезно исследовать переход от В-мод, возбуждаемых α^2-механизмом, к модам, возбуждаемым $\alpha\omega$-механизмом.

Обратим внимание на модель частного вида, в которой α_1- и ω-эффекты действуют в довольно тонких, разделенных друг от друга сферических слоях; пусть α-эффект сконцентрирован во внутреннем, а ω-эффект — во внешнем слое. На рис. 16.14 даны предельные значения C_α и соответствующие значения Ω для различных В-мод.

Остановимся на случае $C_\omega>0$. Если C_ω не очень мало, наиболее легко возбуждается стационарная мода А0. Для малых C_ω это связано с α^2-механизмом, а для больших C_ω — с $\alpha\omega$-механизмом. Для больших $C_\alpha C_\omega$ предельное значение $C_\alpha C_\omega$ перестает изменяться при дальнейшем возрастании C_ω. На рис. 16.15 видно, что это наступает, по крайней мере, при $C_\omega \gtrsim 1000$. Только тогда стационарная А0-мода генерируется более или менее чистым $\alpha\omega$-процессом, т.е. α-эффект становится гораздо менее эффективным в генерации полоидального поля, чем ω-эффект.



Р и с. 16.16. Модель, включающая α_1- и ω-эффекты, $\tilde{\alpha}_1$ определяется из (16.4а) и (16.6); профиль χ типа a, $x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant 0$, $x_{\chi 2} = 0{,}5$, $d_{\chi 2} = 0{,}1$; w определяется из (16.7), $x_w = 0{,}8$, $d_w = 0{,}1$. Предельные значения $C_\alpha C_\omega$ даны в зависимости от C_α для стационарной моды A0.

Совсем другое поведение стационарной S0-моды при $C_\omega > 0$. Это объясняется действием α^2-механизма, который в некоторой степени изменяется ω-эффектом, но $\alpha\omega$-механизм не появляется. Подобным же образом моды A1 и S1 вряд ли могут быть связаны с $\alpha\omega$-механизмом.

В отличие от рассмотренных мод, которые существуют как при малых, так и при больших C_ω, осциллирующие A0- и S0-моды появляются только при достаточно больших C_ω. Это является следствием $\alpha\omega$-механизма. Предельные значения $C_\alpha C_\omega$ стремятся к постоянным с ростом C_ω.

Более сложная ситуация для случая $C_\omega < 0$, который не будет здесь обсуждаться в деталях. Укажем только, что лишь осциллирующие A0- и S0-моды создаются $\alpha\omega$-механизмом. Для моделей этого типа, когда α-эффект концентрируется во внешнем слое, а ω-эффект – во внутреннем, получены очень похожие результаты.

Остается обсудить, каким образом другие индукционные эффекты, кроме α_1- и ω-эффектов, влияют на $\alpha\omega$-механизм. Переход от идеализированного к реальному α-эффекту не очень важен. Если рассматривается только осесимметричное поле, этот переход влияет лишь на вклад α-эффекта в генерацию тороидального поля из

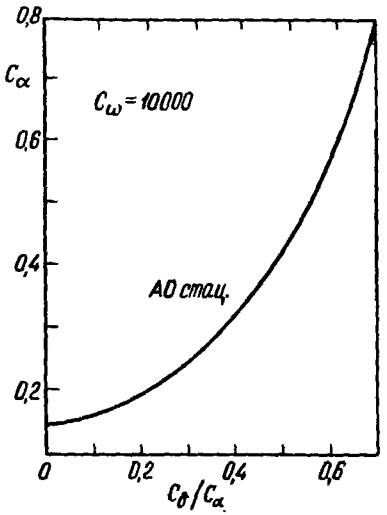


Рис. 16.16. Модель, включающая α_f, δ_1- и ω-эффекты; α_1 и δ_1 определяются из (16.4а), (16.4г) и (16.6); профиль χ типа a, $x_{\chi 1} + d_{\chi 1} < 0$, $x_{\chi 2} = 0{,}5$, $d_{\chi 2} = 0{,}1$; w определяется из (16.7), $x_w = 0{,}8$, $d_w = 0{,}2$. Предельные значения C_α при $C_\omega = 10000$ даны в зависимости от C_β/C_α для стационарной моды A0.

полоидального, причем этот вклад всегда мал или даже пренебрежим по сравнению с вкладом от неоднородного вращения. Ситуацию, аналогичную случаю α^2-механизма, имеем при рассмотрении изменения электропроводности из-за β-эффекта или турбулентного переноса магнитного потока из-за γ-эффекта. В этих случаях можно ожидать, что предельные значения C_α, а также соответствующие значения Ω, будут возрастать с возрастанием s и g. Это подтверждается результатами работ [96, 103].

Изучая роль $\omega \times j$-эффекта, следует помнить, что этот эффект даже без всякого участия α-эффекта совместно с неоднородным вращением приводит к механизму $\delta\omega$-динамо. Если наряду с α_1-эффектом существует δ_1-эффект, появляется комбинация $\alpha\omega$- и $\delta\omega$-механизмов. Эти два механизма могут поддерживать или подавлять друг друга. Предположим снова, что α^+ не меняет свой знак в северной или южной полусфере и что δ_1 вообще не меняет знака. Рассмотрим сперва случай, когда оба знака в северной полусфере совпадают. Как видно из рис. 15.3 и 15.4, действие $\alpha\omega$-механизма для A0-моды ослабевает в присутствии $\delta\omega$-механизма, а для S0-моды – усиливается. Если знаки α^+ и δ_1 в северной полусфере различны, то A0-моды усиливаются, а S0-моды подавляются. Частный результат, подтверждающий этот вывод, показан на рис. 16.16.

Влияние меридиональных циркуляций более сложно. Как следует из работ [228, 233], меридиональные циркуляции в большей степени поддерживают стационарные осесимметричные **B**-моды, чем осциллирующие моды.

Модели $\alpha\omega$-механизма с обратным влиянием магнитного поля на α-эффект были исследованы в работах [98, 99].

16.5. Модели с $\delta\omega$-механизмом

После обсуждения возможностей поддержания магнитных полей $\alpha\omega$-механизмом перейдем к $\delta\omega$-механизму. В этом случае работает не α-эффект, а $\omega\times j$-эффект, однако тороидальное поле по-прежнему возникает из полоидального под действием неоднородного вращения. Поэтому как C_δ, так и C_ω отличны от нуля. Ограничимся случаем $C_\delta > 0$; что касается случая $C_\delta < 0$, то надо использовать результаты, вытекающие из (15.17) и (15.18).

Имеется аналогия между $\alpha\omega$- и $\delta\omega$-механизмами. Если, кроме $\omega\times j$-эффекта, т.е. δ_1-эффекта, и неоднородного вращения, т.е. ω-эффекта, нет других индукционных эффектов и, следовательно, генерация тороидального поля осуществляется только неоднородным вращением, можно говорить о чистом $\delta\omega$-механизме. Условия генерации осесимметричных **B**-полей чистым $\delta\omega$-механизмом, который зависит от C_δ и C_ω, могут быть сформулированы как ограничения только на $C_\delta C_\omega$.

Первая модель, в которой магнитное поле генерировалось $\delta\omega$-эффектом, была предложена и рассчитана Рэдлером [212, 213]. Рассматривался чистый $\delta\omega$-механизм для осесимметричных мод, причем было принято

$$\tilde{\delta}_1 = 1, \quad w = x. \qquad (16.13а, б)$$

Оказалось, что мода SO возбуждается легче всего, а предельное значение $C_\delta C_\omega = -166{,}5$. Пример поля для этой моды приведен на рис. 16.17. Основные виды указанных работ были подтверждены и дополнены в работе [228]. В работе [222] продолжено развитие этих работ.

Как показано в работах [220, 222], чистый $\delta\omega$-механизм может генерировать также осциллирующие осесимметричные поля. Этот результат подтвержден в работе [271].

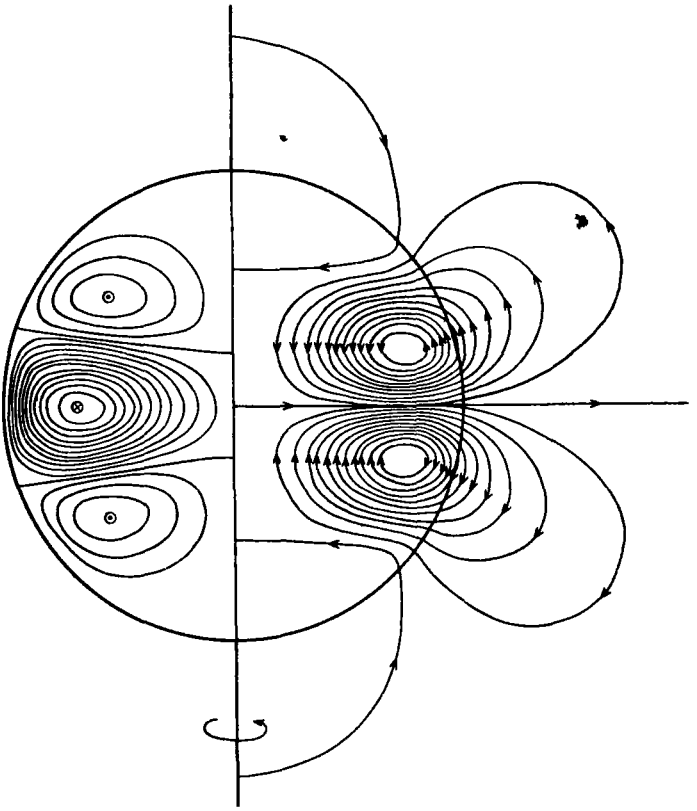


Рис. 16.17. Модель чистого δω-механизма; δ_1 и w определяются из (16.13). Пример поля для моды S 0 соответствует $C_\delta C_\omega = -166{,}5$. В левой части рисунка показаны линии тороидального поля постоянной величины, в правой части даны линии полоидального поля.

Как объяснено в разд. 15.7, чистый δω-механизм, по-видимому, не может поддерживать неосесимметричные B-моды.

Снова перед нами вопрос, какая из мод преобладает при данных условиях. К сожалению, на этот вопрос нет удовлетворительного ответа. Ограничимся чистым δω-процессом, когда ω зависит только от r и предположим, что δ_1 и $d\omega/dr$ не изменяют своих знаков. Из обсуждения рис. 15.3 и 15.4 можно прийти к выводу, что стационарные моды появляются, только если знаки δ_1 и $d\omega/dr$ различны. Это подтверждается для всех исследованных случаев. В зависимости от

Таблица 16.4.

Предельные значения $C_\delta C_\omega$ для стационарных мод A0 и S0 при различных областях изменения δ_1 и ω. Модель с чистым $\delta\omega$-механизмом; δ_1 даются выражениями (16.4) и (16.6); w берется из (16.7).

Область δ_1	Область ω	A0	S0
$x_{\chi 1} + d_{\chi 1} \leqslant 0$ $x_{\chi 2} - d_{\chi 2} \geqslant 1$	$x_w = 0{,}5$ $d_w = 0{,}5$	$-115{,}4$	$-110{,}6$
$x_{\chi 1} = 0{,}75,\ d_{\chi 1} = 0{,}25$ $x_{\chi 2} - d_{\chi 2} \geqslant 1$	$x_w = 0{,}75$ $d_w = 0{,}25$	$-166{,}4$	$-165{,}6$

Таблица 16.5.

Предельные значения $C_\delta C_\omega$ и соответствующие значения Ω для осциллирующих мод A0 и S0. Модель с чистым $\delta\omega$-механизмом; $\tilde{\delta}_1$ даются выражениями (16.4) и (16.6); профиль X типа b, $x_{\chi 1} = 0{,}8$, $d_{\chi 1} = 0{,}2$, $x_{\chi 2} - d_{\chi 2} \geqslant 1$; w берется из (16.7), $x_w = 0{,}5$, $d_w = 0{,}2$.

	A0	A0	S0	S0
$C_\delta C_\omega$	-2349	19268	-2217	4914
Ω	16,8	73,4	6,5	35,4

частного вида профилей δ_1 и ω в некоторых случаях доминирует стационарная A0-мода, в других — стационарная S0-мода. Для всех комбинаций знаков δ_1 и $d\omega/dr$ были обнаружены осциллирующие моды.

Проиллюстрируем изложенное здесь объяснение на примере чистого $\delta\omega$-механизма, исследованного в работе [222]. Снова используем ограничения, введенные в разд. 16.2, и исследуем только осесимметричные B-моды.

Имеется целый ряд моделей для различных частных значений δ_1 и ω, для которых были найдены стационарные моды A0 и S0. Предельные значения $C_\delta C_\omega$ для различных случаев даны в табл. 16.4. В зависимости от областей изменений δ_1 и ω будет преобладать ли-

бо A0-, либс S 0-мода. Результаты для модели, допускающей осциллирующие моды A0 и S·0, даны в табл. 16.5. Для этого случая S 0-мода будет преобладать, если $C_\delta C_\omega < 0$. Не найдено стационарных мод, которые могли бы возбуждаться легче, чем осциллирующие моды.

Остается обсудить, каким образом изменяется δω-механизм, если включить другие индукционные эффекты кроме δ_1- и ω-эффектов

δ_1-эффект обычно сопровождается δ_2-эффектом. Как уже объяснялось, δ_2-эффект влияет на динамо-процесс только в том случае, если δ_2 не постоянно. Однако даже в таком случае этот процесс менее важен для δω-механизма. Если δ_2 зависит только от r, то δ_2-эффект влияет лишь на генерацию тороидального поля, которая гораздо эффективнее обеспечивается ω-эффектом. Что же касается турбулентной электропроводности и турбулентного переноса магнитного потока, то ситуация подобна случаю α^2-механизма. Однако специальных исследований этих эффектов не имеется.

Если учитывается α-эффект, то снова имеем комбинацию αω- и δω-механизмов. Рассмотрение этого случая дано в предыдущем разделе. Влияние меридиональной циркуляции на δω-механизм до сих пор не рассмотрено.

Глава 17. ПРИМЕНЕНИЯ К КОСМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТАМ

17.1. Результаты наблюдений магнитных полей Земли, Луны и планет

Лучше всего среди космических магнитных полей изучено поле Земли – геомагнитное поле. В отличие от полей других космических объектов оно доступно для прямых наземных измерений. Данные, полученные на космических аппаратах, дают информацию об этом поле вне Земли.

Грубо говоря, магнитное поле в непосредственной близости от Земли имеет структуру дипольного поля с определенной симметрией относительно оси вращения. Величина магнитной индукции на экваторе около 0,3 Гс. Более детальный анализ показывает, что поле не может быть полностью описано диполем, расположенным в центре. Диполь является только главным членом мультипольного разложения. На поверхности дипольная компонента приблизительно в 10 раз превосходит другие. Наиболее существенное отклонение поля от симметрии относительно оси вращения состоит в наклоне оси диполя на угол 11°. Недипольная часть также не вполне симметрична.

На первый взгляд магнитное поле Земли может считаться стационарным, однако на самом деле оно заметно меняется со временем. Не будем обращать внимание на спектр слабых локальных вариаций с масштабом изменений во времени от минут до годов; источники этих вариаций лежат вне тела Земли. Отметим, однако, вековые вариации. Ось диполя прецессирует в западном направлении со скоростью около 0,05° в год, а неосесимметричная структура поля, связанная с высшими мультиполями, дрейфует на запад со скоростью 0,2° в год. Это соответствует одному обороту за $7 \cdot 10^3$ и за $2 \cdot 10^3$ лет. Палеомагнитные данные дают некоторую информацию о геомагнитном поле ранних эпох. Оказалось, что поле дипольного типа, по величине близкое к современному, существовало почти все время. Замечательным фактом является обращение знака поля, т.е. внезапное

изменение его полярности. Длительность интервалов с постоянной полярностью менялась случайным образом в пределах от 10^5 до более чем 10^7 лет; характерное время смены знака у поля было меньшим, чем 10^5 лет.

Совершенно неожиданным было обнаружение небольшого магнетизма у Луны, который наблюдался с помощью космических аппаратов. Поле, наблюдаемое у поверхности, составляет порядка 10^{-4} - 10^{-3} Гс. Удивительной характерной чертой поля является его крайне нерегулярная структура. Если вообще существует дипольная компонента, то она очень мала по сравнению с другими компонентами. Некоторые из планет также имеют магнитные поля. Существование поля Юпитера было установлено на основе радионаблюдений. Детальная структура этого поля и определенная информация о полях других планет получены при полетах космических аппаратов.

Поле Юпитера сильнее поля Земли. Основная компонента этого поля также дипольная. Величина поля на экваторе составляет около 4 Гс, а ось диполя наклонена к оси вращения на угол около 10°.

Преобладающая дипольная компонента характерна также для поля Меркурия. Поле на экваторе около $4 \cdot 10^{-3}$ Гс, а ось диполя, по-видимому, наклонена на 7°.

Следует отметить, что Марс обладает магнитным полем с полем с величиной на поверхности всего порядка 10^{-3} Гс.

Что же касается Венеры, то у нее не обнаружено магнитного поля, которое превышало бы $5 \cdot 10^{-5}$ Гс. Остальные планеты до сих пор недостаточно исследованы с точки зрения наличия у них магнитного поля.

17.2. Динамо-теория земного магнитного поля

В теории магнитного поля Земли прежде всего надо понять, какой механизм может поддерживать стационарное поле дипольного типа. Обычно считают, что земное магнитное поле является следствием динамо-процесса внутри земного ядра. Ядро обладает электропроводностью, подобной электропроводности обычных металлов и, вероятно, по крайней мере в определенных областях ядра, существуют течения. Мантия и внешние области, проводимость которых много меньше, играют малую роль в упомянутом выше процессе.

Рассматривая земное магнитное поле как стационарное, мы имеем в виду интервалы времени между обращениями поля, которые,

как правило, длиннее (иногда много длиннее), чем 10^5 лет, т.е. чем время свободного распада поля (см. разд. 11.3). Обращения поля требуют специального объяснения.

Интересным и важным этапом объяснения происхождения и поведения земного магнитного поля является теория почти-симметричного динамо, разработанная Брагинским [18 – 20] (см. разд. 11.5). Как было показано выше, в этой теории рассматриваются средние поля, определяемые осесимметричной компонентой исходных полей (см. разд. 12.2). Было показано, что в этом случае неоднородное вращение, меридиональная циркуляция и неосесимметричные движения специального вида могут поддерживать стационарное поле дипольного типа. Механизм генерации поля подобен $\alpha\omega$-механизму в теории турбулентного динамо. Тороидальное поле возникает из полоидального поля при неоднородном вращении, а полоидальное поле возникает, в свою очередь, из тороидального вследствие неосесимметричных движений. Тороидальное поле гораздо сильнее полоидального поля. Однако теория почти-симметричного динамо может объяснить только осесимметричную компоненту геомагнитного поля. Что же касается неосесимметричной части и ее западного дрейфа, то Брагинский [23] предположил, что эти особенности поля связаны с так называемыми МАК-волнами, т.е. магнитогидродинамическими волнами особого вида, которые возникают при наличии плавучести и кориолисовых сил (М – означает магнитные, А – архимедовы, К – кориолисовы силы).

Существенный шаг в объяснении происхождения земного магнитного поля и его характерных особенностей был сделан в теории турбулентного динамо. Первая модель такого рода была предложена Штеенбеком и Краузе [259, 263]. В дальнейшем мы обсудим некоторые их результаты.

Будем рассматривать модели сферического динамо, следуя разд. 15.1, и используем все упомянутые там ограничения. По причинам, изложенным в разд. 12.2, определим средние магнитные поля как средние по времени с интервалом усреднения в несколько десятков лет. Отождествим сферическое электропроводящее тело с земным ядром и предположим, что проводимость постоянна. Используем обычные предположения о характеристиках земного ядра, которые уже приводились в разд. 11.3, возьмем $R = 3 \cdot 10^6$ м, $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (В·с)/(А·м) и $\sigma = \sigma_0 = 3 \cdot 10^5$ (Ом)$^{-1}$·(м)$^{-1}$. Мантию Земли, как и внешнее пространство, будем считать изолятором.

При определении среднего движения будем учитывать вращение земного ядра. Вращение ядра в основном такое же, как вращение мантии, т.е. один поворот в сутки, или $\omega_0 = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$. По поводу существования небольшого относительного движения ядра и мантии нет единого мнения. Если относительного вращения нет, положим $\Delta\omega = 0$, что означает $C_\omega = 0$. Однако имеются снования предполагать, что скорость вращения основной части ядра все же немного отличается от скорости мантии. Тогда внешние слои ядра должны вращаться неоднородно. В ряде работ предполагается, что дипольная часть поля участвует во вращении внутреннего ядра относительно мантии и что западный дрейф непосредственно указывает на это вращение. В этом случае $\Delta\omega = 3 \cdot 10^{-1}$ с$^{-1}$, а $C_\omega \approx 100$. Пока нет оснований предполагать существование в ядре меридиональной циркуляции. Поэтому примем сначала $u_0 = 0$ и, следовательно $C_u = 0$.

Рассмотрим теперь флуктуационные движения. Имеются серьезные основания предполагать, что внутреннее ядро, радиус которого составляет приблизительно половину радиуса всего ядра, является твердым. Следовательно, флуктуационные движения существуют только в оставшейся, внешней части ядра. Такие движения могут быть следствием нестабильной стратификации ядра, или прецессии Земли, или каких-либо других причин. К сожалению, почти нет данных о структуре, амплитудах или характерных пространственных и временных масштабах этих движений.

Используя результаты корреляционного приближения второго порядка, можно грубо оценить параметры C_α, C_δ, s и g. Рассмотрим сначала величину $\mu\sigma_0 \lambda_{cor}^2/\tau_{cor}$. Разумно предположить, что $\lambda_{cor} > 5 \cdot 10^3$ м, а $\tau_{cor} < 1$ сут. Тогда получим, что $\mu\sigma_0\lambda_{cor}^2/\tau_{cor}$ превышает 10^2 и, следовательно, может быть справедливым приближение предельно большой проводимости.

Для определения C_α, ссылаясь на (16.3а), заменим α_0 на величину $|\alpha|$, которая определяется из (9.60), $\overline{u'^2}$ на $u_0'^2$, Ω на ω_0, а λ_0 на R. Тогда получим, что $|C_\alpha|$ имеет порядок $\mu\sigma_0 u_0'^2 \omega_0 \tau_{cor}^2$. Полагая, например, $u_0 = 10^{-2}$ м/с, а $\tau_{cor} = 5 \cdot 10^4$ с, получим $|C_\alpha|$ около 20. Конечно, эти величины очень неопределенны. Тем не менее видно, что величина $|C_\alpha|$ может превышать единицу.

Аналогичную оценку можно сделать для C_δ. Видно, что $|C_\delta/C_\alpha|$ порядка $(\mu\sigma\lambda_{cor}^2/\tau_{cor})^{-1}$. Согласно полученным результатам, эта

величина меньше 10^{-2}. Поэтому $|C_\delta|$ можно считать много меньшей, чем $|C_\alpha|$.

Наконец, величины s и g порядка $\mu\sigma_0 u_0'^2 \tau_{cor}$. Используя принятые выше оценки, получим значения s и g около 2, т.е. порядка единицы.

Перейдем к рассмотрению некоторых общих характеристик моделей турбулентных динамо, пригодных для объяснения происхождения и основных свойств земного магнитного поля.

Обсудим сначала случай, когда средним движением является простое твердотельное вращение, так что $C_\omega = C_u = 0$. Тогда работает только α^2-механизм, который был впервые предложен Штеенбеком и Краузе [262]. Рассмотрим этот случай, используя результаты разд. 16.3.

В простейших моделях этого типа не учитываются какие-либо турбулентные эффекты, кроме идеализированного α-эффекта, т.е. чистого α^2-механизма. Сравнивая предельные значения C_α для приведенного выше примера с оценками C_α в предыдущих разделах, убеждаемся, что имеются основания считать выполненными условия генерации магнитных полей. Усовершенствование этих моделей путем добавления других турбулентных эффектов, как правило, увеличивает предельные значения $|C_\alpha|$, т.е. ухудшает применимость этих условий. Однако и в этих случаях нет строгих утверждений, исключающих возможность генерации магнитных полей.

Почти во всех изученных случаях предельные значения $|C_\alpha|$ для A0-моды немного меньше, чем для других мод. Поэтому можно ожидать, что магнитное поле будет в основном соответствовать A0-моде, так что главный вклад в полоидальную компоненту будет давать дипольное поле с осью, параллельной оси вращения.

Предельные значения C_α для мод A0, S0, A1 и S1 всегда близки друг другу. Поэтому можно думать, что магнитное поле содержит не только компоненту, подобную моде A0, но и небольшие вклады от S0-, A1- и S1-мод. Наложение компонент, принадлежащих A0- и S1-модам, приводит к полю наклоненного диполя. Неосесимметричные моды, в частности моды A1 и S1, не стационарны, а мигрируют вокруг оси по экватору. Поэтому проявлением неосесимметричных компонент магнитного поля является их дрейфовое движение. В частных рассмотренных выше случаях направление миграции зависит от распределения турбулентности. Поскольку внутреннее ядро

считается твердым, распределение типа a менее вероятно, чем типа b. Распределение типа a приводит к восточному и западному дрейфу, а типа b только к западному. Время дрейфового обращения вокруг оси порядка $2\pi\mu\sigma_0 R^2/\Omega$. Используя принятые выше оценки, получим время $(9{,}2/\Omega) \cdot 10^5$ лет. Это значение легко сравнить с периодом наблюдаемого дрейфа. Следует, однако, помнить, что Ω существенно уменьшается при возрастании s и g.

Как видно из нашего рассмотрения, модели турбулентного динамо, основанные на α^2-механизме, приводят к интересной возможности объяснения не только существования земного магнитного поля, но и его дипольной структуры, неосесимметричной части поля и его западного дрейфа.

До сих пор среднее движение рассматривалось нами, как твердотельное вращение. Наличие неоднородного вращения или меридиональной циркуляции приводит к совершенно другой картине. Даже при довольно малых значениях $|C_\omega|$ и $|C_u|$ предельные значения C_α для мод A0, S0, A1 и S1 перестают быть близкими друг другу. Поэтому приведенное выше объяснение неосесимметричных компонент магнитного поля и их западного дрейфа оказывается несостоятельным.

Предположим теперь, что земное ядро вращается неоднородно таким образом, что $|C_\omega|$ по порядку превышает единицу. В этом случае включаются $\alpha\omega$- и $\delta\omega$-механизмы.

Рассмотрим сначала модели, допускающие $\alpha\omega$-механизм. В этом случае предельные значения $|C_\alpha|$ для преобладающих мод обычно много меньше, чем в случае $C_\omega = 0$, когда возможен только α^2-механизм. Допустим, что выполнены условия генерации магнитных полей. Тогда, учитывая полученные выше оценки для C_ω, можно утверждать, что при $C_\omega = 100$ никак нельзя ожидать действия чистого $\alpha\omega$-механизма. Однако для генерации тороидального поля α-эффект по-прежнему будет играть важную роль.

По отношению к Земле следует выбирать такие модели, для которых при реальных условиях наименьшее из предельных значений $|C_\alpha|$ принадлежало бы стационарной моде A0, так чтобы эта мода возбуждалась наиболее просто. При выполнении условий этого типа снова возникает возможность объяснения магнитного поля Земли, точнее говоря, его осесимметричной части.

Основное отличие α^2- от $\alpha\omega$-механизма состоит в различном отношении величин тороидальной и полоидальной компонент поля. В то

время как в случае α^2-механизма они одного порядка величины, в случае $\alpha\omega$-механизма тороидальная компонента значительно превышает полоидальную. Это различие, конечно, очень важно для динамики земного ядра.

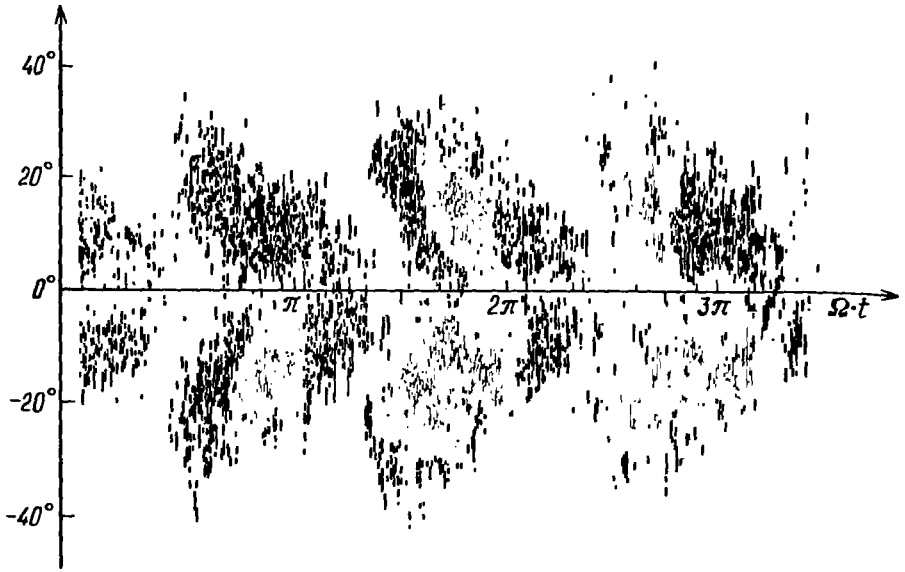
В отличие от случая α^2-механизма для $\alpha\omega$-механизма предельные значения C_α совершенно различны для разных мод. Поэтому то объяснение отклонения земного магнитного поля от осевой симметрии, которое было предложено выше, перестает быть справедливым.

Как уже отмечалось, имеется аналогия между моделями почти-симметричного динамо Брагинского и моделями турбулентного динамо с $\alpha\omega$-механизмом. В обоих случаях, хотя и по разным причинам, мы получаем сначала объяснение только осесимметричной компоненты земного магнитного поля. Исходя из предположения о сильной тороидальной компоненте поля, Брагинский [23] дал объяснение появления и поведения неосесимметричной компоненты с помощью МАК-волн. Отметим, что такое объяснение применимо также для моделей с $\alpha\omega$-механизмом. Остается обсудить возможность $\delta\omega$-механизма. Согласно сделанным выше оценкам, величина $|C_\delta|$ много меньше, чем $|C_\alpha|$. Поэтому $\delta\omega$-механизм, по-видимому, никогда не преобладает над $\alpha\omega$-механизмом.

В заключение отметим, что теория турбулентного динамо предлагает многообещающие обоснования для объяснения происхождения и некоторых основных характеристик земного магнитного поля. Главные трудности для детальной разработки подходящих моделей состоят в отсутствии информации о движениях внутри ядра. Более точные модели, отражающие более тонкие свойства земного магнитного поля, появляются по мере уточнения наших представлений об этих движениях.

17.3. Данные наблюдений магнитных полей на Солнце

Солнце демонстрирует множество магнитных явлений. Наши знания о солнечных магнитных полях основаны на изучении зеемановского расщепления спектральных линий. Давно известно, что такие проявления солнечной активности, как солнечные пятна, вспышки и протуберанцы, сопровождаются локальными магнитными полями с величиной магнитной индукции вплоть до нескольких тысяч гаусс. Имеются основания объяснять локальные магнитные поля как



Р и с. 17.1. Диаграмма "бабочки Маундера", согласно наблюдениям с 1874 по 1913 г., показывающая область существования солнечных пятен в зависимости от гелиографической широты и фазы солнечного цикла, Ωt.

проявления общего поля, расположенного в основном под поверхностью Солнца, которое имеет тот же порядок величины и меняется со временем с периодом солнечного цикла, т.е. за 22 года.

Солнечные пятна обычно появляются парами, выстроенными приблизительно по широте вдоль параллелей. Пятна пары имеют разную магнитную полярность. Имея в виду вращение Солнца, можно говорить о ведущем и ведомом пятне пары. В следующем полупериоде все полярности меняются на обратные. Распределение солнечных пятен по широте изменяется с фазой цикла. В начале полупериода пятна преимущественно появляются на средних широтах, а затем на широтах вблизи экватора. Это поведение может быть описано с помощью диаграмм вида "бабочек Маундера", как показано на рис. 17.1.

Из наблюдений солнечных пятен можно получить выводы о строении и поведении общего магнитного поля. Оно, по-видимому, тороидальное, симметричное относительно оси вращения и антисимметричное относительно экваториальной плоскости. Оно состоит в основном из двух противоположно ориентированных поясов, по одному в каждом полушарии. В начале каждого полупериода эти пояса появляются

на средних широтах. По мере возрастания поля, а также при его убывании эти пояса смещаются к экватору. Экстремумы и нули этого поля соответствуют максимумам и минимумам солнечной активности.

Следует подчеркнуть, что мы нарисовали несколько упрощенную картину солнечного магнитного поля. Надо отметить, что наблюдалась секторная структура, т.е. отклонение поля от осевой симметрии, причем колебания поля были не вполне гармоничны.

17.4. Динамо-теория солнечного цикла

Ключом к пониманию магнитных явлений, наблюдаемых на Солнце, является, по-видимому, понимание происхождения магнитного поля, структура которого и ее изменение во времени описаны выше. Осцилляции поля с периодом 22 года вряд ли охватывают глубокие слои Солнца. Вследствие скин-эффекта они могут присутствовать только в некоторых внешних слоях. Обычно считают, что общее магнитное поле Солнца является следствием динамо-процессов, которые строго ограничиваются областью конвективной зоны, толщина которой около 15% от радиуса Солнца.

Пионерская работа в теории солнечного динамо принадлежит Паркеру [184]. Она была сделана тогда, когда еще не существовало магнитной гидродинамики средних полей. Следуя идее Бэбкока [5], Паркер предположил, что тороидальное поле генерируется из полоидального поля дифференциальным вращением. Он показал, что полоидальное поле, в свою очередь, может создаваться из тороидального поля под действием циклонической турбулентности. В магнитной гидродинамике средних полей этот процесс описывается как α-эффект.

Именно теория турбулентного динамо наиболее успешно объясняет происхождение и поведение общего магнитного поля Солнца и позволяет понять природу солнечного цикла. В рамках этой теории первые модели были предложены и исследованы Штеенбеком и Краузе [259, 262]. Обсудим здесь некоторые общие характеристики моделей турбулентного динамо для Солнца.

Рассмотрим модели сферического динамо с симметричной структурой, как это было описано в разд. 15.1. По причинам, которые обсуждались в разд. 12.2, используем определение средних величин как средних по времени с интервалом усреднения один-два года. Отождествим радиус R модели с солнечным радиусом, т.е. возьмем $R = 7 \cdot 10^8$ м, а для магнитной проницаемости снова примем величи-

ну $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (В·с)/(А·м). Будем предполагать, что электропроводность σ зависит по крайней мере от радиуса. Проводимость конвективной зоны порядка $3 \cdot 10^3$ Ом$^{-1}$·м$^{-1}$. Как показано в разд. 3.8, турбулентная проводимость σ_T конвективной зоны примерно в 10^4 раз меньше. В дальнейшем используем уравнения, в которых σ заменено на σ_T, т.е. используем (12.2), а не (12.1). этой целью мы выберем $\sigma_0 = 3 \cdot 10^{-1}$ Ом$^{-1}$·м$^{-1}$.

Скиновая толщина d для переменного электромагнитного поля с периодом T определяется как $d = (T/\mu\sigma)^{1/2}$. Полагая $T = 22$ года, $\mu = \mu_0$ и отождествляя σ с σ_0, получим $d = 4 \cdot 10^7$ м, т.е. $d = 0{,}06\,R$. Таким образом, подтверждается предположение о том, что динамопроцесс в основном происходит в конвективной зоне.

При рассмотрении средних движений надо учесть вращение Солнца. Как известно, Солнце обладает дифференциальным вращением. Угловая скорость на поверхности, которая непосредственно определяется из наблюдений, зависит от широты, т.е. $\partial\omega/\partial\theta \neq 0$. Время обращения экваториальных областей около 25 сут. Соответственно этому возьмем $\omega_0 = 2{,}9 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$. Время обращения полярных областей около 27 сут, что соответствует $\Delta\omega = 2{,}2 \cdot 10^{-7}$ с$^{-1}$. Для динамо-теории очень важно знать зависимость угловой скорости от глубины. К сожалению, эта зависимость недоступна для наблюдений. Существуют различные мнения не только по поводу величины, но и по поводу знака $\partial\omega/\partial r$. Разумно предположить, что зависимость ω от r не более слабая, чем от θ. Используя эти оценки, получим, что $|C_\omega| > 4 \cdot 10^4$. Относительно меридиональной циркуляции нет наблюдательных данных. Положим поэтому $u_0 = 0$ и, следовательно, $C_u = 0$.

Нас будут интересовать те флуктуативные движения в конвективной зоне, которые связаны с гранулами или супергранулами. Эти движения характеризуются типичными скоростями u_0', типичными длинами λ_{cor} и типичными временами τ_{cor}. Для гранул возьмем $u_0' = 2 \cdot 10^3$ м/с, $\lambda_{cor} = 2 \cdot 10^6$ м и $\tau_{cor} = 3 \cdot 10^2$ с, а для супергранул $u_0' = 4 \cdot 10^2$ м/с, $\lambda_{cor} = 3 \cdot 10^7$ м и $\tau_{cor} = 5 \cdot 10^4$ с. Надо знать не только упомянутые характерные длины, но и шкалу высот h для плотности вещества. Возьмем $h = 10^5$ м.

Для вычисления параметров C_α, C_δ, s и g надо сначала найти величину $\mu\sigma\lambda_{cor}^2/\tau_{cor}$. Принятые оценки дают как для гранул, так и для супергранул величину $\mu\sigma\lambda_{cor}^2/\tau_{cor} > 10^7$. Поэтому можно использовать приближение большой проводимости.

Для очень грубой оценки C_α можно снова использовать (16.3а), в качестве α_0 взять величину $|\alpha|$, которая определена выражением (9.60), заменить u'^2 на $u_0'^2$, Ω на ω и λ_0 на h. Тогда получим, что $|C_\alpha|$ по порядку величины равна $\mu\sigma_0 u_0'^2 \omega_0 \tau_{cor}^2 R/h$. Эта величина равна 10 и 10^2 соответственно для гранул и супергранул. Поэтому следует ожидать, что $|C_\alpha|$ во всяком случае больше единицы.

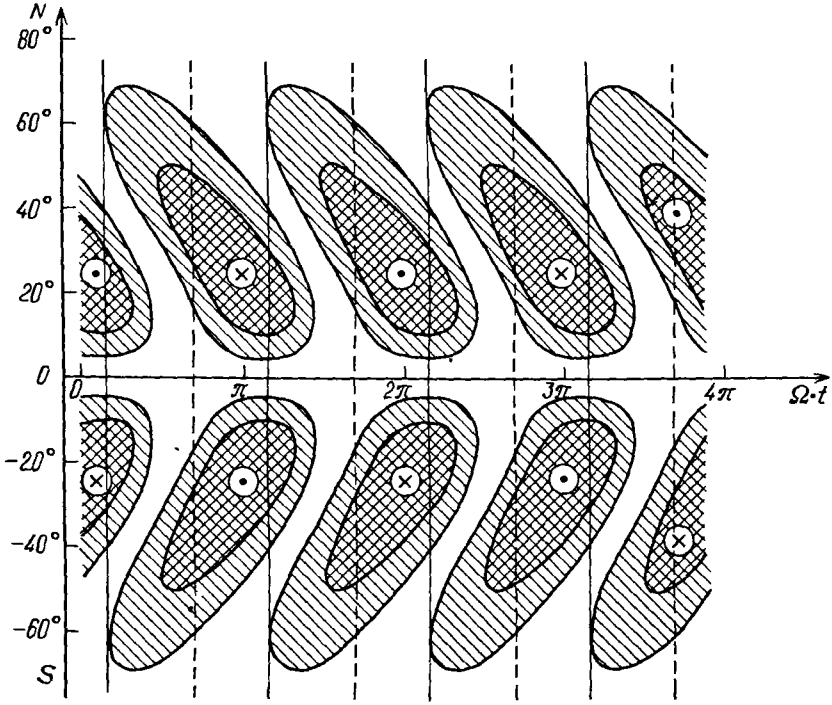
Из подобных же оценок для C_δ следует, что $|C_\delta/C_\alpha|$ порядка $(\mu\sigma\lambda_{cor}^2/\tau_{cor})^{-1} h/R$. Это выражение, несомненно, меньше чем 10^{-10}. Следовательно, $|C_\delta|$ много меньше, чем $|C_\alpha|$.

Наконец, можно показать, что s и g — это величины одного порядка. Поскольку предположено, что σ_0 одного порядка с σ_T, можно заключить, что s, а потому и g порядка единицы.

Какой же тип динамо-механизма ответствен за солнечное магнитное поле? α^2-механизм может быть исключен. Нет указаний, что он может поддерживать осесимметричные поля, осциллирующие во времени. Поэтому надо рассмотреть $\alpha\omega$- и $\delta\omega$-механизмы.

Во всех до сих пор исследованных моделях предполагался $\alpha\omega$-механизм. Сравнивая выводы разд. 16.4 с полученными выше оценками C_α и C_ω, убеждаемся, что этот механизм может поддерживать магнитные поля с нужной симметрией относительно оси вращения и экваториальной плоскости, осциллирующие во времени. На рис. 16.13 приведены примеры полей, полученных в работе [262]. Период колебаний дается величиной $2\pi\mu\sigma_0 R^2/\Omega$, которая при наших предположениях равна $(4{,}8 \cdot 10^4/\Omega)$ лет, т.е. 80 годам, что по порядку величины согласуется с наблюдениями.

Остается вопрос о том, описывают ли модели такого типа миграцию поясов тороидального поля к экватору в течение каждого полупериода, как это следует из диаграмм вида "бабочек Маундера". Для специальных моделей эти диаграммы рассчитывались на основе предположения, что солнечные пятна появляются только в тех областях, где величина тороидального поля на некоторой глубине превышает критическое значение. Для модели, соответствующей



Р и с. 17.2. Диаграмма "бабочки", вычисленная для модели чистого $\alpha\omega$-механизма, рассмотренного в разд. 16.4 и проиллюстрированного на рис. 16.13. Заштрихованные области соответствуют $B_t > (1/3)B_{t\ max}$, дважды заштрихованные области $-B_t > (2/3)B_{t\ max}$, где B_t — величина тороидального поля, а $B_{t\ max}$ — максимальное значение для всех областей и времен.

рис. 16.13, рассчитанные диаграммы "бабочек" даны на рис. 17.2. Согласие с наблюдениями является впечатляющим.

Достигнуто много успехов в отыскании моделей, наиболее полным образом описывающих данные наблюдений. Сошлемся снова на исследования Робертса и Стикса [233], Робертса [228], Иошимуры [295, 297, 298], Келера [103], Стикса [269, 271], Дейнцер, Киссерова и Стикса [54], Джеппа [99] и Ивановой и Рузмайкина [96 – 98]. В обзоре [272] приведены наиболее существенные результаты, относящиеся к моделям солнечного динамо.

Рассмотрим здесь только один из этих результатов. По-видимому, общим правилом является то, что миграция поясов тороидально-

го поля к экватору возможна, только если различаются знаки α^+ и $\partial\omega/\partial r$ в северном полушарии; с этой точки зрения величина $\partial\omega/\partial\theta$ не важна.

Согласно результатам разд. 9.1, которые демонстрируются на рис. 9.1, в северном полушарии преобладают левовинтовые спиральные движения. Поэтому величина α^+ положительна в этом полушарии. То же самое следует из требования, чтобы фазовые соотношения между тороидальным и полоидальным полями согласовались с наблюдениями, (см. [272]).

Таким образом, мы приходим к выводу о отрицательности $\partial\omega/\partial r$. Отметим, что этот результат динамо-теории противоречит некоторым теоретическим исследованиям дифференциального вращения в конвективной зоне, согласно которым $\partial\omega/\partial r$ в основном положительно.

Наряду с $\alpha\omega$-механизмом, $\delta\omega$-механизм также может поддерживать осциллирующие магнитные поля. Однако из приведенных выше рассуждений следует, что $|C_\alpha|$ много больше $|C_\delta|$. Поэтому маловероятно, что $\delta\omega$-механизм ответствен за солнечное магнитное поле. Кроме того, исследования этого механизма в работе [271] показали, что он вряд ли может обеспечить миграцию поясов тороидального поля к экватору.

17.5. Данные наблюдений магнитных полей у звездных объектов

Магнитные поля наблюдались у ряда звезд. Почти во всех случаях эти поля были обнаружены из зеемановского сдвига спектральных линий. Исследование этих эффектов для звезд гораздо сложнее, чем для Солнца. В частности, приходится изучать гораздо более слабые потоки излучения. Кроме того, поток излучения воспринимается интегрально от всей звездной поверхности, хотя излучают различные ее участки с различными магнитными полями, течениями и другими характеристиками. Доплер-эффект и другие эффекты сложным образом влияют на спектральные линии и могут заслонять зеемановский эффект. Поэтому даже в наилучшем случае удается обнаружить только глобальные поля не менее 10^2 Гс. Если бы Солнце располагалось столь же далеко, как звезды, было бы невозможно обнаружить его магнитное поле. Существование очень сильных магнитных полей у

звезд с магнитной индукцией свыше 10^7 Гс может быть обнаружено также по поляризации непрерывного спектра. Наибольшее число звезд, у которых были обнаружены магнитные поля, по своему спектральному типу относятся к классу Ap-звезд. Имеется около сотни таких звезд, для которых измерены магнитные поля. Их магнитная индукция порядка 10^3 или 10^4 Гс. Однако, несомненно, все звезды этого спектрального типа обладают различными магнитными полями. В большинстве случаев обнаруженные поля периодически изменяются во времени с периодом порядка нескольких дней. Наиболее вероятное объяснение этих изменений состоит в предположении о неосесимметричном ротаторе, т.е. об отклонении оси симметрии магнитного поля от оси вращения; в простейшем случае поле может соответствовать диполю, лежащему в экваториальной плоскости. Тогда вследствие вращения звезды неподвижный наблюдатель будет регистрировать периодические изменения поля. Существенной особенностью этих звезд с магнитными полями является аномальное содержание некоторых химических элементов, в первую очередь редких земель. В некоторых случаях эти аномалии изменяются со временем с тем же периодом, что и магнитное поле. Вероятно, магнитное поле каким-то образом приводит к неоднородному распределению элементов по поверхности. Тогда наблюдаемые вариации содержания элементов являются проявлением вращения и неоднородного распределения.

Среди белых карликов также обнаружены объекты с сильными магнитными полями. Их магнитная индукция составляет по порядку величины от 10^6 до 10^8 Гс. До сих пор нет данных о геометрической структуре и временно́й зависимости этих полей.

Следует добавить, что очень сильные магнитные поля предполагаются у пульсаров, поскольку иным образом не удается объяснить ряд наблюдаемых явлений, таких, как замедление их вращения и синхротронное излучение. Допускается, что поле достигает 10^{12} или 10^{13} Гс, а его структура соответствует наклонному ротатору.

17.6. Замечания о динамо-механизмах в магнитных звездах

Как отмечено в разд. 11.1, магнитные поля, наблюдаемые у магнитных звезд, могут объясняться рядом причин. Несомненно, предположение, что они поддерживаются динамо-механизмами, является наиболее вероятным. Поскольку нет наблюдательных данных о каких-

либо временных изменениях полей, кроме тех, которые связаны с вращением, эти поля можно рассматривать как реликтовые. Тем не менее будем исследовать возможность того, что магнитные поля генерируются внутренними движениями.

Разумно предположить, что гравитационная энергия магнитных звезд велика по сравнению с энергией вращения, которая в свою очередь больше магнитной. Поэтому будем считать магнитную звезду сферическим телом и предположим, что в нем существуют внутренние движения, которые обладают определенной симметрией относительно оси вращения и экваториальной плоскости. Точнее говоря, рассмотрим модели, описанные в разд. 15.1. Будем искать динамо-механизмы, способные поддержать неосесимметричные магнитные поля.

Рассмотрим сначала случай, когда движения не имеют флуктуативной компоненты. Тогда динамо возможно только вследствие меридиональных циркуляций; движения могут изменять свой характер при наличии дифференциального вращения. Как следует из теоремы Каулинга, магнитное поле, создаваемое таким типом динамо, содержит только осесимметричную часть. В частности, если в разложении по мультиполям появляется диполь, он должен лежать в экваториальной плоскости.

Если имеются флуктуативные движения, то становятся возможными механизмы турбулентного динамо, т.е. α^2-, $\alpha\omega$- и $\delta\omega$-механизмы. Однако, согласно предыдущим результатам, неосесимметричные поля можно ожидать только в случае α^2-механизмов. Поэтому следует потребовать, чтобы отклонение от осевой симметрии было невелико. Точнее говоря, $|C_\omega|$ по порядку не должно превышать 10^3. Напомним, что для солнечного дифференциального вращения $|C_\omega|$ вряд ли меньше чем $5 \cdot 10^4$. Следовательно, рассматриваемые механизмы турбулентного динамо могут обеспечить неосесимметричные поля только в случае достаточно малой неоднородности вращения.

Поскольку магнитные поля Ар-звезд довольно велики, их влияние на движения может играть важную роль. Подобно этим полям внутренние движения могут также заметно отклоняться от симметрии относительно оси вращения. Однако нельзя ожидать, что симметрия относительно экваториальной плоскости также нарушается. Кроме специального случая, когда совпадают условия возбуждения для различ-

ных мод магнитного поля, генерируются только поля, симметричные относительно экваториальной плоскости. Эта симметрия не разрушается взаимодействием магнитных полей и движений.

Такое рассмотрение приводит к необходимости иметь возможность описывать данные наблюдений магнитных звезд такими конфигурациями полей, которые симметричны относительно экваториальной плоскости [115, 124]. "Симметричный ротатор" является альтернативой "наклонного ротатора", которому отдавалось предпочтение до настоящего времени. Недостаточность существующих наблюдательных данных не позволяет однозначно выбрать какую-либо из моделей. Детальный анализ наиболее хорошо изученных Ар-звезд был выполнен в работах [181, 182] на основе предположения об экваториальной симметрии как магнитных полей, так и неоднородностей распределения химических элементов. Таким образом, становится очевидной тесная связь между геометрическими конфигурациями этих двух величин, что позволяет надеяться на лучшее понимание механизмов, создающих аномальные структуры данных космических объектов[1].

---

[1] Некоторые проблемы магнитных звезд были недавно рассмотрены Краузе [9*].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Acuna M.N., Ness N.F.* The main magnetic field of Jupiter. J. Geophys. Res., **81**, 1976, 2917 – 2922.
2. *Alemany A. et al.* Influence of an external magnetic field on homogeneous mhd-turbulence. J. Mécanique, **18**, 1979, 277 – 313.
3. *Andre J.D., Lesieur M.* Evolution of high Reynolds number isotropic three-dimensional turbulence; influence of helicity. J. Fluid Mech., **81**, 1977, 187 – 208.
4. *Angel J.R.P.* Strong magnetic fields in White Dwarfs. Ann. New York Acad. Sci., **257**, 1975, 80 – 81.
5. *Babcock H.D.* The Sun's polar magnetic field. Astrophys. J., **130**, 1959, 354 – 380.
6. *Babcock H.W.* Zeeman effect in stellar spectra. Astrophys. J., **105**, 1947, 105 – 119.
7. *Babcock H.W.* The topology of the Sun's magnetic field and the 22-year cycle. Astrophys. J., **133**, 1961, 572 – 587.
8. *Babcock H.W., Babcock H.D.* Mapping the magnetic fields of the Sun. In "The Sun", *ed. G. R. Kuiper,* Univ. of Chicago Press, 1953, 70 – 710.
9. *Babcock H. W., Babcock H.D.* The Sun's magnetic field 1952 – 1954. Astrophys. J., **121**, 1955, 349 – 366.
10. *Backus G.E.* The axisymmetric self-excited fluid dynamo. Astrophys. J., **125**, 1957, 500 – 524.
11. *Backus G.E.* A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. Ann. Phys., **4**, 1958, 372–447.
12. *Backus G. E., Chandrasekhar S.* On Cowling's theorem on the impossibility of self-maintained axisymmetric homogeneous dynamos. Proc. Nat. Acad. Sci., **42**, 1956, 105 – 109.
13. *Batchelor G.K.* On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion. Proc. Roy. Soc., **A201**, 1950, 405 – 416.

14. *Batchelor G.K.* The theory of homogeneous turbulence. Cambridge Univ. Press, 1953.
15. *Bevir M.K.* Possibility of electromagnetic self-excitation in liquid metal flows in fast reactors. J. Brit. Nuclear Soc., **4**, 1973, 455 – 458.
16. *Biermann L.* Bemerkungen über das Rotationsgesetz in irdischen und stellaren Instabilitätszonen. Z. Astrophys., **28**, 1951, 304 – 309.
17. *Bochner S.* Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse. Math. Ann., **108**, 1933, 378 – 410.
18. *Брагинский С.И.* О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости. – ЖЭТФ, **47**, 1964, 1084 – 1098.
19. *Брагинский С.И.* К теории гидромагнитного динамо. – ЖЭТФ, **47**, 1964, 2178 – 2193.
20. *Брагинский С.И.* Кинематические модели гидромагнитного динамо Земли. – Геомагн. и аэрономия, **4**, 1964, 732 – 747.
21. *Брагинский С.И.* Магнитогидродинамика земного ядра. – Геомагн. и аэрономия, **4**, 1964, 898 – 916.
22. *Брагинский С.И.* Об основах теории гидромагнитного динамо Земли. – Геомагн. и аэрономия, **7**, 1967, 401 – 410.
23. *Брагинский С.И.* Магнитные волны в ядре Земли. – Геомагн. и аэрономия, **7**, 1967, 1050 – 1060.
24. *Брагинский С.И.* Магнитогидродинамические крутильные колебания в земном ядре и вариации длины суток. – Геомагн. и аэрономия, **10**, 1970, 1 – 12.
25. *Брагинский С.И.* О спектре колебаний гидромагнитного динамо Земли. – Геомагн. и аэрономия, **10**, 1970, 221 – 233.
26. *Брагинский С.И.* Почти аксиально-симметричная модель гидромагнитного динамо Земли. 1. – Геомагн. и аэрономия, **15**, 1975, 149 – 156.
27. *Braginskij S.I.* On the nearly axially-symmetrical model of the hydromagnetic dynamo of the Earth. Phys. Earth and Plan. Int., **11**, 1976, 191 – 199.
28. *Bräuer H. J.* Some properties of the Green's tensor of the induction equation. ZAMM, **53**, 1973, 719 – 722.
29. *Bräuer H. J.* The non-linear dynamo problem: Small oscillatory solutions in a strongly simplified model. Astron. Nachr., **300**, 1979, 43 – 49.
30. *Bräuer H. J., Krause F.* Remark on the mean energy of the fluctuating magnetic field in mean-field magnetohydrodynamics. Astron. Nachr., **294**, 1973, 179 – 182.

31. *Bräuer H. J., Krause F.* The mean energy of a decaying magnetic field in mhd-turbulence. Astron. Nachr., **295**, 1974, 223 – 228.
32. *Brissaud A. et al.* Helicity cascades in fully developed isotropic turbulence. Phys. Fluids, **16**, 1973, 1366 – 1367.
33. *Bullard E.C., Gellman H.* Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. Phil. Trans. Roy. Soc., **A247**, 1954, 213 – 278.
34. *Bullard E.G., Gubbins D.* Generation of magnetic fields by fluid motions of global scale. Geophys. Fluid Dyn., **8**, 1977, 43 – 56.
35. *Bumba V.* Development of spot group areas in dependence on the local magnetic field. Bull. Astron. Inst. Czech., **14**, 1963, 91– 97.
36. *Busse F.H.* Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. J. Fluid Mech., **33**, 1968, 739– 751.
37. *Busse F.H.* Thermal instabilities in rapidly rotating systems. J. Fluid Mech., **44**, 1970, 441 – 460.
38. *Busse F.H.* Generation of magnetic fields by convection. J. Fluid Mech., **57**, 1973, 529 – 544.
39. *Busse F.H.* A necessary condition for the geodynamo. J. Geophys. Res., **80**, 1975, 278 – 280.
40. *Busse F.H.* A model of the geodynamo. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., **42**, 1975, 437 – 459.
41. *Busse F.H.* Generation of planetary magnetism by convection. Phys. Earth Planet. Int., **12**, 1976, 350 – 358.
42. *Busse F.H.* Mathematical problems of dynamo theory. In "Applications of bifurcation theory", Academic Press, Inc. New York – San Francisco – London, 1977, 175 – 202.
43. *Busse F.H.* An example of non-linear dynamo action. J. Geophys., **43**, 1977, 441 – 452.
44. *Childress S.* Théorie magnétohydrodynamique de l'effet dynamo. Report from Département Méchanique de la Faculté des Sciences, Paris, 1969.
45. *Cowling T.C.* The magnetic fields of sunspots. Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **94**, 1934, 39 – 48.
46. *Cowling T.C.* On the Sun's general magnetic field. Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **105**, 1945, 166 – 174.
47. *Cowling T.C.* Solar electrodynamics. In "The Sun", *ed. G.P. Kuiper*, Univ. Chicago Press, 1953, 532 – 591.
48. *Cowling T.C.* The axisymmetric dynamo. Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **140**, 1968, 547 – 548.

49. *Cowling T.C.* Sunspots and the solar cycle. Nature, **255**, 1975, 189 – 190.
50. *Cramer H.* On the theory of stationary random processes. Annals of Mathematics, **41**, 1940, 215 – 230.
51. *Csada I.K.* On the magnetic effect of turbulence in ionized gases. Acta Phys. Hung., **1**, 1951, 235 – 246.
52. *Deinzer W.* Zur Theorie des solaren Magnetfeldes. Mitt. Astron. Gesellsch., **30**, 1971, 67 – 74.
53. *Deinzer W., Stix M.* On the eigenvalues of Krause-Steenbeck's solar dynamo. Astron. & Astrophys., **12**, 1971, 111 – 119.
54. *Deinzer W. et al.* Gibt es auch stationäre $\alpha\omega$-Dynamos? Mitt. Astron. Gesellsch., **34**, 1973, 155 – 158.
55. *Deinzer W.* Steady and oscillatory $\alpha\omega$-dynamos. Astron. & Astrophys., **36**, 1974, 69 – 78.
56. *Deissler R.G.* Magneto-fluid dynamic turbulence with a uniform imposed magnetic field. Phys. Fluids, **6**, 1963, 1250 – 1259.
57. *Долгинов А.З.* Приливные течения в компонентах двойных звезд с осью вращения, наклонной к орбите, и генерация магнитного поля. – Астрон. журн., **51**, 1974, 388 – 394.
58. *Долгинов А.З.* Генерация магнитного поля и ускорение заряженных частиц в двойных звездных системах. – Изв. АН. Сер физ., **39**, 1975, 354 – 358.
59. *Долгинов А.З.* Генерация магнитного поля в двойных звездах и звездах, окруженных оболочкой. Магнитные АР-звезды. – Баку: Элм, 1975, 147 – 150.
60. *Долгинов Ш.Ш.* Магнетизм планет и проблема механизма динамо. Препринт № 15, ИЗМИРАН. – М.: 1976.
61. *Drobyshevskij E.M., Yuferev V.S.* Topological pumping of magnetic flux by three-dimensional convection. J. Fluid Mech., **65**, 1974, 33 – 44.
62. *Elsasser W.M.* Induction effects in terrestrial magnetism. Phys. Rev., **69**, 1946, 106 – 116.
63. *Elsasser W.M.* Hydromagnetic dynamo theory. Rev. Mod. Phys., **28**, 1956, 135 – 163.
64. *Elsasser W.M.* The terrestrial dynamo. Proc. Nat. Acad. Sci., **43**, 1957, 14 – 24.
65. *Frazer M.C.* The dynamo problem and the geomagnetic field. Contemp. Phys., **14**, 1973, 213 – 228.

66. *Френкель Я.И.* О происхождении земного магнетизма – ДАН, **49**, 1945, 98 – 101.
67. *Frisch U. et al.* Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence. J. Fluid Mech., **68**, 1975, 769 – 778.
68. *Fyfe D., Montgomery D.* High-beta turbulence in two-dimensional magnetohydrodynamics. J. Plasma Physics, **16**, 1976, 181 – 191.
69. *Гайлитис А.* Условия самовозбуждения лабораторной модели геомагнитного динамо. – Магнитная гидродинамика, 1967, **3**, 45 – 54.
70. *Гайлитис А.* Самовозбуждение магнитного поля парой кольцевых вихрей. – Магнитная гидродинамика, 1970, **1**, 19 – 22.
71. *Гайлитис А.* К теории динамо Герценберга. – Магнитная гидродинамика, 1973, **4**, 12 – 19.
72. *Гайлитис А.* О генерации магнитного поля зеркально-симметричной турбулентностью. – Магнитная гидродинамика, 1974, **2**, 31 – 35.
73. *Гайлитис А., Фрейберг Я.* Самовозбуждение магнитного поля парой кольцевых вихрей. – Магнитная гидродинамика, 1974, **1**, 37 – 42.
74. *Гайлитис А., Фрейберг Я.* К теории винтового МГД-динамо. – Магнитная гидродинамика, 1976, **2**, 3 – 6.
75. *Гайлитис А., Фрейберг Я.* Расчет динамо-неустойчивости винтового потока. – Рига: Зинатне, АН Латв.ССР Инст. физ. 1977, 1 – 48.
76. *Гайлитис А., Лиелаусис О.* Теория МГД-динамо и лабораторный эксперимент. – В сб.: Магнитные Ар-звезды. – Баку: Элм, 1975, 140 – 146.
77. *Гайлитис А. и др.* О путях наблюдения генерации магнитного поля в потоках жидкого натрия. – Препринт № 1, 1977, АН Латв. ССР Инст. физ. – Рига: 1 – 35.
78. *Gibson R.D.* The Herzenberg dynamo. I. Q. J. Mech. Appl. Math., **21**, 1968, 243 – 255.
79. *Gibson R.D.* The Herzenberg dynamo. II. Q. J. Mech. Appl. Math., **21**, 1968, 257 – 287.
80. *Gibson R.D., Roberts P.H.* Some comments on the theory of homogeneous dynamos. *In:* Magnetism and the Cosmos, *eds. W.R. Hindmarsh, F.J. Lowes, P.H. Roberts and S.K. Runcorn*, Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh, 1967, 108 – 120.

81. *Gibson R.D., Roberts P.H.* The Bullard-Gellman dynamo. *In:* The Application of Modern Physics to the Earth and Planetary Interiors, *ed. S.K. Runcorn,* Wiley Interscience, 1969, 577 – 601.
82. *Gilliland J.M.* Mean-field electrodynamics and dynamo theories of planetary magnetic fields. Thesis, University of Alberta (Edmonton, Canada), 1973.
83. *Голицин Г.С.* Флуктуации магнитного поля и плотности тока в турбулентном потоке слабо проводящей жидкости. – ДАН, **132**, 1960, 315 – 318.
84. *Greenspan H.* On α-dynamos. Studies in Appl. Math., **13**, 1974, 35 – 43.
85. *Gubbins D.* Kinematic dynamos and geomagnetism. Nature Phys. Sci., **238**, 1972, 119 – 122.
86. *Gubbins D.* Numerical solutions of the kinematic dynamo problem. Phil. Trans. Roy. Soc., **A 274**, 1973, 493 – 521.
87. *Gubbins D.* Theories of the geomagnetic and the solar dynamo. Revs. Geophys. Space Phys., **12**, 1974, 137 – 154.
88. *Gubbins D.* Dynamo action of isotropically driven motions of a rotating fluid. Studies in Appl. Math., **8**, 1974, 157 – 164.
89. *Gubbins D.* Observational constraints on the generation process of the Earth's magnetic field. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., **47**, 1976, 19 – 39.
90. *Гуревич Л.Э., Лебединский А.И.* Магнитное поле солнечных пятен. – ДАН, **49**, 1945, 92 – 94.
91. *Helmis G.* Untersuchungen zur Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medien unter Berücksichtigung des Halleffektes. Mon. ber. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, **10**, 1968, 280 – 291.
92. *Helmis G.* Zur Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medien unter Berücksichtigung des Halleffektes. Cosmic Electrodynamics, **2**, 1971, 197 – 210.
93. *Helmis G.* Zum Halleffekt in der Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medien, Beitr. Plasma Physik, **11**, 1971, 417 – 430.
94. *Herzenberg A.* Geomagnetic dynamos. Phil. Trans. Roy. Soc., **A250**, 1958, 543 – 583.
95. *Иванова Т.С.* Метод решения задачи магнитогидродинамического динамо. – ЖВМФ, **16**, 1976, 958 – 968.
96. *Иванова Т.С., Рузмайкин А.А.* Магнитогидродинамическая динамомодель солнечного цикла. – Астрон. журн., **53**, 1976, 398 – 410.

97. *Иванова Т.С., Рузмайкин А.А.* Нелинейная стабилизация колебания в МГД-динамо Солнца. – Препринт Ин-та прикл. математики АН СССР, № 47, 1976.

98. *Иванова Т.С. Рузмайкин А.А.* Нелинейная магнитогидродинамическая модель динамо Солнца. – Астрон. журн., **54**, 1977, 846 – 858.

99. *Jepps S.A.* Numerical models of hydromagnetic dynamos. J. Fluid Mech. **67**, 1975, 629 – 646.

100. *Казанцев А.П.* Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью. – ЖЭТФ, **53**, 1967, 1806 – 1813.

101. *Kippenhahn R., Möllenhoff C.* Elementare Plasmaphysik. Bibliographisches Institut Mannheim – Wien – Zürich, 1975.

102. *Кит Л.Г., Цинобер А.Б.* О возможности создания и исследования двумерной турбулентности в сильном магнитном поле. – Магнитная гидродинамика, 1971, **3**, 27 – 34.

103. *Köhler H.* The solar dynamo and estimates of the magnetic diffusivity and the α-effect. Astron. & Astrophys., **25**, 1973, 467 – 476.

104. *Колесников Ю.Б* Двумерное турбулентное течение в канале с неоднородной электропроводностью стенок. – Магнитная гидродинамика, 1972, **3**, 32 – 36.

105. *Колесников Ю.Б., Цинобер А.Б.* Двумерное турбулентное течение за круглым цилиндром. – Магнитная гидродинамика, 1972, **3**, 23 – 31.

106. *Колесников Ю.Б., Цинобер А.Б.* Экспериментальное исследование двумерной турбулентности за решеткой. – Изв. АНСССР, Механика жидкости и газа, 1974, **4**, 146 – 150.

107. *Kraichnan R.H.* Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence. Phys. Fluids, **8**, 1965, 1385 – 1387.

108. *Kraichnan R.H.* Helical turbulence and absolute equilibrium. J. Fluid Mech., **59**, 1973, 745 – 752.

109. *Kraichnan R.H.* Diffusion of weak magnetic fields by isotropic turbulence. J. Fluid Mech., **75**, 1976, 657 – 676.

110. *Kraichnan R.H.* Diffusion of passive-scalar and magnetic fields by helical turbulence. J. Fluid Mech., **77**, 1976, 753 – 768.

111. *Kraichnan R.H., Nagarajan S.* Growth of turbulent magnetic fields. Phys. Fluids, **10**, 1967, 859 – 870.

112. *Krause F.* Eine Lösung des Dynamoproblems auf der Grundlage einer linearen Theorie der magnetohydrodymanischen Turbulenz. Habilitationsschrift, Univ. Jena, 1967.
113. *Krause F.* Zum Anfangswertproblem der magnetohydrodynamischen Induktionsgleichung. ZAMM, **48**, 1968, 333 – 343.
114. *Krause F.* Explanation of stellar and planetary magnetic fields by dynamo action of turbulent motions. Acta Univ. Wratislaviensis, **77**, 1969, 157 – 170.
115. *Krause F.* Zur Dynamotheorie magnetischer Sterne: Der "symmetrische Rotator" als. Alternative zum "schiefen Rotator". Astron. Nachr., **293**, 1971, 187 – 193.
116. *Krause F.* Heat flow and magnetic field diffusion in turbulent fluids. Astron. Nachr., **294**, 1972, 83 – 87.
117. *Krause F.* The turbulent emf $\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'$ in the case of non-vanishing mean flow. ZAMM, **53**, 1973, 479 – 481.
118. *Krause F.* The present status of mean-field magnetohydrodynamics and the turbulent dynamo problem. Ann. New York Acad. Sc., **257**, 1975, 156 – 172.
119. *Krause F.* Динамотеория. – В сб.: Магнитные Ар-звезды. – Баку: Элм, 1975, 129 – 138.
120. *Krause F.* Annotation on the paper "The turbulent emf $\overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}$ in the case of non-vanishing mean flow". ZAMM, **56**, 1976, 172 – 173.
121. *Krause F.* Mean-field magnetohydrodynamics of the solar convection zone. *In:* Basic Mechanism of Solar Activity, *eds, V. Bumba and J. Kleczèk,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1976, 309 – 321.
122. *Krause F.* Mean-field electrodynamics and dynamo theory of the Earth's magnetic field. Journ. Geophys., **43**, 1977, 421 – 440.
123. *Krause F., Hiller H.* Zur Dynamotheorie stellarer und planetarer Magnetfelder. III. Über die Lösung des Eigenwertproblemes und die Berechnung der Feldgrößen. Astron. Nachr., **291**, 1969, 271 – 286.
124. *Krause F., Oetken L.* On equatorially-symmetric models for magnetic stars as suggested by dynamo theory. *In:* Physics of Ap-stars, IAU-Colloqu- Nr. **32**, *eds. W. W. Weiss, H. Jendner and H.J. Wood,* Vienna, 1976, 29 – 36.
125. *Krause F., Rädler K.-H.* Dynamo theory of the Sun's general magnetic field on the basis of a mean-field magnetohydrodynamics.

In: Solar Magnetic Fields, *ed. R. Howard,* Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1971, 7770 – 779.

126. *Krause F., Rädler K.-H.* Elektrodynamik der mittleren Felder in turbulenten leitenden Medien und Dynamotheorie. *In:* Ergebnisse der Plasmaphysik und der Gaselektromik. Bd. II, *eds. R. Rompe and M. Steenbeck,* Akademie-Verlag Berlinn, 1971, 1 – 154.
127. *Krause F., Rädler K.-H. Rüdiger G.* Über die Bedeutung des Nichols-Tolman-Effektes für das Zustandekommen kosmischer Magnetfelder. Gerlands Beitr. Geophys., **85**, 1976, 26 – 34.
128. *Krause F., Roberts P.H.* Some problemns of mean-field electrodynamics. Astrophys. J., **191**, 1973, 977 — 992.
129. *Krause F., Roberts P.H.* Bochner's theorem and mean-field electrodynamics. Mathematika, **20**, 1973, 24 – 33.
130. *Krause F., Roberts P.H.* Comments om the paper "On the application of Cramer's theorem to axisymmetric incompressible turbulence" by *I. Lerche.* Astrophys. Space Sc., **22**, 1973, 193 – 195.
131. *Krause F., Roberts P.H.* The high-coonductivity limit in mean-field electrodynamics. J. Math. Phys., **17**, 1976, 1808 – 1809.
132. *Krause F., Rüdiger G.* On the turbulent decay of strong magnetic fields and the development of sunspoots areas. Solar Physics, **42**, 1975, 107 – 119.
133. *Krause F., Steenbeck M.* Models of magnetohydrodynamic dynamos for alternating fields. Czech. Slov. AAcad. Sc. Astron. Inst. Publ., **51**, 1964, 36 – 38.
134. *Krause F., Steenbeck M.* Untersuchung der Dynamowirkung einer nichtspiegelsymmetrischen Turbulenz an einfachen Modellen. Z. f. Naturf., **22a**, 1960, 671 – 675.
135. *Кропачев Э.Л., Горшков С.Н., Серебряная П.М.* Модель кинематического динамо трех сферических вихрей. I. – Геомагн. и аэрономия, **17**, 1977, 507 – 511.
136. *Кропачев Э.Л., Горшков С.Н., Серебряная П.М.* Модель кинематического динамо трех сферических вихрей. II. – Геомагн. и аэрономия, 17, 1977, 927 – 929.
137. *Kumar S., Roberts P.H.* A three-dimeensional kinematic dynamo. Proc. Roy. Soc., **A344**, 1975, 239 — 258.
138. *Landstreet J.D., Angel J.R.P.* The polarization spectrum and magnetic field strength of the White Dwarf Grw + 70° 8247. Astrophys. J., **196**, 1974, 819 – 825.

139. *Larmor J.* How-could a rotating body such as the Sun become a magnet? Rep. Brit. Assoc. Adv. Sc., 1919, 159 – 160.

140. *Lehnert B.* The decay of magnetoturbulence in the presence of a magnetic field and Coriolis force. Qu. J. Appl. Math., **12**, 1955, 321 – 341.

141. *Leighton R.B.* Transport of magnetic fields on the Sun. Astrophys. J., **140**, 1964, 1547 – 1562.

142. *Leighton R.B.* A magneto-kinematic model of the solar cycle. Astrophys. J., **156**, 1969, 1 – 26.

143. *Leorat J.* La turbnlence magnétohydrodynamique hélicitaire et la géneration des champs magnétique a grande échelle. Thése doctoral, Univ. de Paris, YII, 1975.

144. *Leorat J., Frisch U. Pouquet A.* Helical magnetohydrodynamic turbulence and the non-linear dynamo problem. Ann. New York Acad. Sc., **257**, 1975, 173 – 176.

145. *Lerche I.* Kinematic dynamo theory. Astrophys. J., **166**, 1971, 627 – 638.

146. *Lerche I.* Kinematic dynamo theory. II. Dynamo action in infinite media with isotropic turbulence. Astrophys. J., **166**, 1971, 639 – 649.

147. *Lerche I.* Kinematic dynamo theory. III. The effect of turbulent diffusivity in the dynamo equations. Astrophys. J., **168**, 1971, 115 – 121.

148. *Lerche I.* Kinematic dynamo theory. IY. Dynamo action in non-rotating spheres with isotropic turbulence. Astrophys. J., **168**, 1971, 123 – 129.

149. *Lerche I.* On the applications of Cramer's theorem to axi-symmetric, incompressible turbulence, Astrophys. Space Sc., **19**, 1972, 189 – 193.

150. *Lerche I.* Kinematic dynamo theory. Y. Comments on diverse matters including historical development, isotropic turbulence, and expansion techniques. Astrophys. J., **181**, 1973, 993 – 1002.

151. *Lerche I.* Reply to foregoing comments. Astrophys. Space Sc., **22**, 1973, 197.

152. *Lerche I., Low B.C.* Kinematic dynamo action under incompressible, isotropic velocity turbulence. Astrophys. J., **168**, 1971, 503 – 508.

153. *Lerche I., Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies. YII. The internal small scale field. Astrophys. J., **168**, 1971, 231 – 237.
154. *Levy E.H.* Effectiveness of cyclonic convection for producing the geomagnetic field. Astrophys. J., **171**, 1972, 621 – 633.
155. *Levy E.H.* Kinematic reversal schemes for the geomagnetic dipole. Astrophys. J., **171**, 1972, 635 – 642.
156. *Лиелаусис О., Клявиня А., Тиманис Л.* О возможности специфических МГД-явлений при жидкометаллическом охлаждении мощных энергетических установок. – Аннотация, АН Латв. ССР. Инст. физ. – Рига: 1974.
157. *Lilley F.E.M.* On kinematic dynamos. Proc. Roy. Soc., **A316**, 1970, 153 – 167.
158. *Lortz D.* Impossibility of steady dynamos with certain symmetries. Phys. Fluids, **11**, 1968, 913 – 915.
159. *Lortz D.* Exact solutions of the hydromagnetic dynamo problem. Plasma Phys., **10**, 1968, 967 – 972.
160. *Lortz D.* A simple stationary dynamo model. Z. Naturforsch., **27a**, 1972, 1350 – 1354.
161. *Low B.-C.* Root mean square fluctuations of a weak magnetic field in an infinite medium of homogeneous stationary turbulence. Astrophys. J., **173**, 1972, 549 – 555.
162. *Low B.-C.* Errata. Astrophys. J. **178**, 1972, 277.
163. *Lowes F.J., Wilkinson I.* Geomagnetic dynamo: a laboratory model. Nature, **198**, 1963, 1158 – 1160.
164. *Lowes F. J., Wilkinson I.* Geomagnetic dynamo: an improved laboratory model. Nature, **219**, 1968, 717 – 718.
165. *Malkus W. V. R., Proctor M. R. E.* The macrodynamics of α-effect dynamos in rotating fluids. J. Fluid Mech., **67**, 1975, 417 – 444.
166. *Meyer F., Schmidt H.U.* On the decay of sunspots. Mitt. Astron. Gesellsch., 32, 1973, 174 – 175.
167. *Meyer F., Schmidt H.U., Weiss N.O. and Wilson P.R.* The growth and decay of sunspots. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **169**, 1974, 35 – 57.
168. *Moffatt H. K.* On the suppression of turbulence by a uniform magnetic field. J. Fluid Mech., **28**, 1967, 571 – 592.
169. *Moffatt H.K.* Turbulent dynamo action at low magnetic Reynolds number. J. Fluid Mech., **41**, 1970, 435 – 452.

170. *Moffatt H.K.* Dynamo action associated with random inertial waves in a rotating conducting fluid. J. Fluid Mech., **44**, 1970, 705 – 719.
171. *Moffatt H.K.* An approach to a dynamic theory of dynamo action in a rotating fluid. J. Fluid Mech., **53**, 1972, 385 – 399.
172. *Moffatt H.K.* The mean electromotive force generated by turbulence in the limit of perfect conductivity. J. Fluid Mech., **6** , 1974, 1 – 10.
173. *Moffatt H.K.* Appendix to the paper of Drobyshevski and Yuferev. "Topological pumping of magnetic flux by three-dimensional convection". J. Fluid Mech., **65**, 1974, 41 – 44.
174. *Moffatt H.K.* Generation of magnetic fields by fluid motion. Adv. Appl. Mech., **16**, 1976, 119 – 181.
175. *Moffatt H.K.* Magnefic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge University Press. Cambridge – London – New York – Melbourne, 1978. [Имеется перевод: *Моффат Т.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. – М.: Мир, 1980.]
176. *Moreau R.* Homogeneous turbulence in the presence of a uniform magnetic field when the magnetic Reynolds' number is small. C. R. Acad. Sci., **A263**, 1966, 586 – 587.
177. *Moreau R.* Une solution simple pour le déclin de la turbulence homogene en présence d'un champ magnétique uniforme lorsque le nombre de Reynolds magnétique est petit. C.R. Acad. Sci., **A264**, 1967, 75 – 78.
178. *Moreau R.* On magnetohydrodynamic turbulence. Proc. Symp. on turbulence of fluids and plasmas, Brooklyn, 1968, 359 – 372.
179. *Moss D.L.* A numerical model of hydromagnetic turbulence. Mon. Not. R. astr. Soc., **148**, 1970, 173 – 191.
180. *Nestlerode I.A., Lumley I.L.* Initial response of the spectrum of isotropic turbulence to the sudden application of a strong magnetic field. Phys. Fluids, **6**, 1963, 1260 – 1262.
181. *Oetken L.* An equatorially-symmetric rotator model for magnetic stars. Astron. Nachr., **298**, 1977, 197 – 207.
182. *Oetken L.* An equatorially-symmetric rotator model for magnetic stars. II. Inhomogeneous element distributions. Astron. Nachr., **300**, 1979,
183. *Parker E.N.* The formation of sunspots from the solar toroidal field. Astrophys. J., **121**, 1955, 491 – 507.
184. *Parker E.N.* Hydromagnetic dynamo models. Astrophys. J., **122**, 1955, 293 – 314.

185. *Parker E.N.* The solar hydromagnetic dynamo. Proc. Nat. Acad. Sci., **43**, 1957, 8 – 13.
186. *Parker E.N.* The dynamical state of the interstellar gas and field. Astrophys. J., **145**, 1966, 811 – 833.
187. *Parker E. N.* The occasional reversal of the geomagnetic field. Astrophys. J., **158**, 1969, 815 – 827.
188. *Parker E.N.* The origin of magnetic fields. Astrophys. J., **160**, 1970, 383 – 404.
189. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies. I. The dynamo equation. Astrophys. J., **162**, 1970, 665 – 673. 673 .
190. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies. II. The galactie field. Astrophys. J., **163**, 1971, 255 – 278.
191. *Parker E N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies . III. Turbulent diffusion of fields and efficient dynamos. Astrophys. J., **163**, 1971, 279 – 285.
192. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies. IY. The solar and terrestrial dynamos. Astrophys. J., **164**, 1971, 491 – 509.
193. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies. Y. Behaviour at large dynamo numbers. Astrophys. J., **165**, 1971, 139 – 146.
194. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies. YI. Periodic modes of the galactic field. Astrophys. J., **166**, 1971, 295 – 300.
195. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies. YIII. Dynamical considerations. Astrophys. J., **168**, 1971, 239 – 249.
196. *Parker E.N.* The generation and dissipation of solar and galactic magnetic fields. Astrophys. Sp. Sci., **22**, 1973, 279 – 291.
197. *Parker E.N.* The dynamo mechanism for the generation of large-scale magnetic fields. Ann. New York Acad. Sc., **257**, 1975, 141 – 155.
198. *Pekeris C.L. Accad Y., Shkoller B.* Kinematic dynamos and the Earth's magnetic field. Phil. Trans. Roy. Soc., **A275**, 1973, 425 – – 461.
199. *Pierson E.S.* Electromagnetic self-excitation in the liquid-metal fast breeder reactor. Nucl. Sc. Engineering, **57**, 1975, 155 – 163.

200. *Пичахчи Л.Д.* К теории гидромагнитного динамо. – ЖЭТФ, **50**, 1966, 818 – 820.
201. *Пономаренко Ю.Б.* К теории гидромагнитного динамо. – ПМТФ, 1973, **6**, 47 – 51.
202. *Pouquet A., Frisch U., Léorat J.* Strong mhd turbulence and the nonlinear dynamo effect. J. Fluid Mech., **77**, 1976, 321 – 354.
203. *Pouquet F., Patterson G.S.* Numerical simulation of helical magnetohydrodynamic turbulence. J. Fluid Mech., **85**, 1978, 305 – 323.
204. *Proctor M.R.E.* Numerical solutions of the nonlinear α-effect dynamo equations. J. Fluid Mech., **80**, 1977, 769 – 784.
205. *Proctor M.R.E.* On the eigenvalues of kinematic α-effect dynamos. Astron. Nachr., **298**, 1977, 19 – 25.
206. *Rädler K.-H.* Ánalogiebetrachtungen zu ebenen Problemen der Magnetohydrodynamik. Beitr. Plasmaphys., **2**, 1964, 21 – 31.
207. *Rädler K.-H.* Zur Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medien. Thesis, Univ. Jena, 1966.
208. *Rädler K.-H.* Zur Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medien. I. Grundzüge der Elektrodynamik der mittleren Felder. Z. f. Naturforsch., **23a**, 1968, 1841 – 1851.
209. *Rädler K.-H.* Zur Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medien.II. Turbulenzbedingte Leitfähigkeits-und Permeabilitätsänderungen. Z. f. Naturforsch., **23a**, 1968, 1851 – 1860.
210. *Rädler K.-H.* On some electromagnetic phenomena in electrically conducting turbulently moving matter, especially in the presence of Coriolis forces. Geod. Geoph. Veröff. Reihe II. H., 13, 1969, 131 – 135.
211. *Rädler K.-H.* Zur Elektrodynamik in turbulenten, Coriolis-Kräften unterworfenen leitenden Medien. Mber. dtsch. Adad. Wiss. Berlin, **11**, 1969, 194 – 201.
212. *Rädler K.-H.* Über eine neue Möglichkeit eines Dynamomechanismus in turbulenten leitenden Medien. Mber. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, **11**, 1969, 272 – 279.
213. *Rädler K.-H.* Untersuchung eines Dynamomechanismus in turbulenten leitenden Medien. Mber. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, **12**, 1970, 468 – 472.
214. *Rädler K.-H.* Zur Dynamotheorie kosmischer Magnetfelder. I. Gleichungen für sphärische Dynamomodelle. Astron. Nachr., **294**, 213 – 223.

215. *Rädler K.-H.* Zur Dynamotheorie kosmischer Magnetfelder. II. Darstellung von Vektorfeldern als Summe aus einem poloidalen und einem toroidalen Anteil. Astron. Nachr., **295**, 1974, 73 – 84.
216. *Rädler K.-H.* Über den Korrelationstensor zweiter Stufe für ein inhomogenes turbulentes Geschwindigkeitsfeld. Astron. Nachr., **295**, 1974, 85 – 92.
217. *Rädler K.-H.* On the influence of a large-scale magnetic field on turbulent motions in an electrically conducting medium. Astron. Nachr., **295**, 1974, 265 – 273.
218. *Rädler K.-H.* Some new results on the generation of magnetic fields by dynamic action. Mem. Soc. Roy. Sc. Liege YIII, 1975, 109 – 116.
219. *Rädler K.-H.* Замечания о генерировании неосесимметричных магнитных полей при помощи динамомеханизма. – В сб. Магнитные Ар-звезды. – Баку: Элм, 1975, 139 – 140.
220. *Rädler K.-H.* Mean-field magnetohydrodynamics as a basis of solar dynamo theory. *In:* Basic Mechanism of Solar Activity, *eds. V. Bumba and J. Kleczek,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1976, 323 – 344.
221. *Rädler K.-H.* Mean-field approach to spherical dynamo models. Astron. Nachr., **301**, 1980, in print.
222. *Rädler K.-H.* Investigations of spherical mean-field dynamo models. Astron. Nachr., **301**, 1980, in print.
223. *Roberts G.O.* Spatially periodic dynamos. Phil. Trans. Roy. Soc., **A266**, 1970, 535 – 558.
224. *Roberts G.O.* Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. Phyl. Trans. Roy. Soc., **A271**, 1972, 411 – 454.
225. *Roberts P.H.* An introduction to magnetohydrodynamics. Longmans, Green and Co. Ltd, London, 1967.
226. *Roberts P.H.* The dynamo problem. Woods Hole Oceanographic Inst. Rep., 67 – 54, 1967, 51 – 165.
227. *Roberts P.H.* Dynamo theory. *In:* Lectures on Applied Mathematics, *ed, W.H. Reid,* Amer. Mathematics Soc., Providence, R.I., **14**, 1971, 129 – 206.
228. *Roberts P.H.* Kinematic dynamo models. Phil. Trans. Roy. Soc., **A272**, 1972, 663 – 703.
229. *Roberts P.H., Soward A.M.* Magnetohydrodynamics of the Earth's core. Ann. Rev. Fluid Mech., **4**, 1972, 117 – 154.

230. *Roberts P.H., Soward A.M.* On first order smoothing theory. J. Math. Phys., **16**, 1975, 609 – 615.
231. *Roberts P.H., Soward A.M.* A unified approach to mean-field electrodynamics. Astron. Nachr., **269**, 1975, 49 – 64.
232. *Roberts P.H., Stix M.* The turbulent dynamo. A translation of a series of papers by *F. Krause, K.-H. Rädler and M. Steenbeck.* Techn. Note **60**, 1971, NCRA Boulder, Colorado.
233. *Roberts P.H., Stix M.* α-effect dynamos by the Bullard-Gellman formalism. Astron. & Astrophys., **18**, 1972, 453 – 466.
234. *Roberts P.H., Stix M.* On Vainshtein's simplest dynamo instability Phys. Earth Plan. Int., **12**, 1976, P19 – P21.
235. *Rochester M.G., Jacobs J. A., Smylie D.E., Chong K.F.* Can precession power the geomagnetic dynamo? Geophys. J. Roy. Astron. Soc., **43**, 1975, 661 – 678.
236. *Rüdiger G.* Behandlung eines einfachen hydromagnetischen Dynamos mittels Linearisierung. Astron. Nachr., **294**, 1973, 183 – 186.
237. *Rüdiger G.* The influence of a uniform magnetic field of arbitrary strength on turbulence. Astron. Nachr., **295**, 1974, 275 – 283.
238. *Rüdiger G.* Behandlung eines einfachen hydromagnetischen Dynamos mit Hilfe der Gitterpunktmethode. Publ. Astrophys. Obs. Potsdam, **32**, 1974, 25 – 29.
239. *Rüdiger G.* Die Wechselwirkung zwischen homogener Turbulenz und inhomogenem magnetischen Feld in der Umgebung neutraler Flächen. Astron. Nachr., **296**, 1975, 133 – 141.
240. *Rüdiger G.* On α-effect for slow and fast rotation. Astron. Nachr., **299**, 1978, 217 – 222.
241. *Schlüter A., Biermann L.* Interstellare Magnetfelder. Z. Naturforsch., **5a**, 1950, 237 – 251.
242. *Schumann U.* Numerical simulation of the transition from three- to two-dimensional turbulence under a uniform magnetic field. J. Fluid Mech., **74**, 1976, 31 – 58.
243. *Soward A.M.* Nearly symmetric kinematic and hydromagnetic dynamos. J. Math. *Phys.*, **12**, 1971, 1900 – 1906.
244. *Soward A.M.* Nearly symmetric advection. J. Math. Phys., **12**, 1971, 2052 – 2062.
245. *Soward A.M.* A kinematic theory of large magnetic Reynolds number dynamos. Phil. Trans. Roy. Soc., **A272**, 1972, 431 – 462.
246. *Soward A.M.* A convection-driven dynamo. I. The weak field case. Phil. Trans. Roy. Soc., **A275**, 1974, 611 – 651.

247. *Soward A.M.* Random waves and dynamo action. J. Fluid Mech., **69**, 1975, 145 – 177.
248. *Soward A.M.* A thin disc model of the galactic dynamo. Astron. Nachr., **299**, 1978, 25 – 33.
249. *Соуорд А.М., Робертс П.Х.* Современное состояние теории МГД-динамо. – Магнитная гидродинамика, **1976**, **1**, 3 – 51.
250. *Steenbeck M.* Probleme und Ergebnisse der Elektro- und Magnetohydrodynamik. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Vorträge und Schriften Heft 73, Akademie-Verlag Berlin, 1961.
251. *Steenbeck M.* Elementare magnetohydrodynamische Behandlung chaotisch turbulenter Bewegungen. Mber. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, **5**, 1963, 625 – 629.
252. *Steenbeck M.* Warum hat die Erde ein Magnetfeld? Phys. Bl., **26**, 1970, 158 – 168.
253. *Steenbeck M., Helmis G.* Zur Deutung der Neigung und der Westdrift des erdmagnetischen Hauptfeldes. Mber. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, **11**, 1969, 723 – 734.
254. *Steenbeck M., Helmis G.* Rotation of the Earth's solid core as a possible cause of declination, drift and reversals of the Earth's magnetic field. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., **41**, 1975, 237 – 244.
255. *Steenbeck M. et al.* Der experimentelle Nachweis einer elektromotorischen Kraft längs eines äußeren Magnetfeldes, induziert durch eine Strömung flüssigen Metalls (α-Effekt). Mber. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, **9**, 1967, 714 – 719.
256. *Штеенбек М. и др.* Экспериментальное обнаружение электродвижущей силы вдоль внешнего магнитного поля, индуцированной течением жидкого металла (α-эффект). – ДАН, **180**, 1968, 326 – 329.
257. *Steenbeck M., Krause F.* Elektromagnetische Rückkopplung durch Turbulenz unter der Einwirkung von Coriolis-Kräften. Mitt. Astron. Gesellsch., **19**, 1965, 95.
258. *Steenbeck M., Krause F.* Electromagnetische Rückkopplung durch Turbulenz unter der Einwirkung von Coriolis-Kräften. Mber. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, **7**, 1965, 900 – 906.
259. *Steenbeck M., Krause F.* Erklärung stellarer und planetarer Magnetfelder durch einen turbulenzbedingten Dynamomechanismus. Z. Naturforsch., **21a**, 1966, 1285 – 1296.

260. *Steenbeck M., Krause F.* Die Entstehung stellarer und planetarer Magnetfelder als Folge turbulenter Materiebewegungen. Gustav-Hertz-Festschrift, Akademie-Verlag, Berlin, 1967.

261. *Steenbeck M., Krause F.* Возникновение магнитных полей звезд и планет в результате турбулентного движения их вещества. – Магнитная гидродинамика, 1967. **3.** 19 – 44.

262. *Steenbeck M., Krause F.* Zur Dynamotheorie stellarer und planetarer Magnetfelder. I. Berechnung sonnenähnlicher Wechselfeldgeneratoren. Astron. Nachr., **291**, 1969, 49 – 84.

263. *Steenbeck M., Krause F.* Zur Dynamotheorie stellarer und planetarer Magnetfelder. II. Berechnung planetenähnlicher Gleichfeldgeneratoren. Astron. Nachr., **291**, 1969, 271 – 286.

264. *Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.* Eledtrodynamische Eigenschaften turbulenter Plasmen. Sitz. ber. dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Klasse für Mathematik, Physik und Technik Nr. 1. Akademie-Verlag, Berlin, 1963.

265. *Steenbeck M., Krause F. Rädler K.-H.* Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\overline{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflußter Bewegung. Z. Naturforsch., **21a**, 1966, 369 – 376.

266. *Stix M.* A non-axisymmetric α-effect dynamo. Astron. & Astrophys., **13**, 1971, 203 – 208.

267. *Stix M.* Vergleich der Sonnenzyklen von Leighton und Steenbeck-Krause, preprint, 1971.

268. *Stix M.* Non-linear dynamo waves. Astron. & Astrophys., **20**, 1972, 9 – 12.

269. *Stix M.* Spherical αω-dynamos, by a variational method. Astron. & Astrophys., **24**, 1973, 275 – 281.

270. *Stix M.* The galactic dynamo. Astron. & Astrophys., **42**, 1975, 85 – 90.

271. *Stix M.* Differential rotation and the solar dynamo. Astron. & Astrophys., **47**, 1976, 243 – 254.

272. *Stix M.* Dynamo theory and the solar cycle. *In:* Basic Mechanism: of Solar Activity, *eds. V. Bumba and J. Kleczek*, D. Reidel Publishing Company. Dordrecht-Holland, 1976, 367 – 388.

273. *Sweet P.A.* The effect of turbulence on a magnetic field. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **110**, 1950, 69 – 83.

274. *Tough J.G.* Nearly symmetric dynamos. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., **13**, 1967, 393 – 406.

275. *Tough J.G.* Corrigendum: Geophys. J. Roy. Astron. Soc., **15**, 1900, 343.

276. *Tough J.G., Gibson R.D.* The Braginskij dynamo. *In:* The application of Modern Physics to the Earth and Planetary Interiors, *ed. S.K. Runcorn,* Wiley – interscience, London – New York, 1969, 55 – 569.

277. *Tough J. G., Roberts P.H.* Nearly symmetric hydromagnetic dynamos. Phys. Earth Planet. Int., **1**, 1968, 288 – 296.

278. *Цинобер А.Б.* Магнитогидродинамическая турбулентность. – Магнитная гидродинамика, 1975, **1**, 7 – 22.

279. *Тверской Б.А.* К теории гидродинамического самовозбуждения регулярных магнитных полей. – Геомагн. и аэрономия, **6**, 1966, 11 – 18.

280. *Вайнштейн С.И.* О генерации крупномасштабного магнитного поля турбулентной жидкостью. – ЖЭТФ, **58**, 1970, 153 – 159.

281. *Вайнштейн С.И.* Задача о генерации магнитного поля при наличии акустической турбулентности. – ДАН, **195**, 1970, 793 – 796.

282. *Вайнштейн С.И.* Задача о магнитном поле в неоднородном турбулентном потоке. – ПМТФ № 1, 1971, 12 – 18.

283. *Ванштейн С.И.* О нелинейной задаче турбулентного динамо. – ЖЭТФ, **61**, 1971, 612 – 620.

284. *Вайнштейн С.И.* Функциональный подход в теории турбулентного динамо. – ЖЭТФ, **62**, 1972, 1376 – 1385.

285. *Вайнштейн С.И.* "Антидинамо" – возможный механизм явлений, происходящих в нейтральных слоях магнитного поля. – ЖЭТФ, **65**, 1973, 550 – 561.

286. *Вайнштейн С.И.* Перестройка магнитного поля плазменными механизмами. – УФН, **120**, 1976, 613 – 645.

287. *Вайнштейн С.И.* Возбуждение магнитного поля ленгмюровскими колебаниями и ионным звуком (α-эффект в плазме). –

288. *Вайнштейн С.И.* Простейшая динамо-неустойчивость. – ЖЭТФ, **68**, 1975, 997 – 1004.

289. *Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б.* О происхождении магнитных полей в астрофизике. – УФН, **106**, 1972, 431 – 457.

290. *Voigtmann L.* Über das zeitliche Verhalten zylindersymmetrischer globaler Magnetfelder unter dem Einfluß einer nicht spiegelsymmetrischen homogenen isotropen Turbulenz. Diplomarbeit, Univ. Jena, 1968.

291. *Вощин А.Д., Колесников Ю.Б.* Пространственная завихренность в двумерной однородной турбулентности. – Магнитная гидродинамика, **1976**, **3**, 25 – 28.

292. *Вощин А.Д., Колесников Ю.Б.* Аномальный перенос импульса в сдвиговом МГД-течении с двумерной структурой турбулентности. – Магнитная гидродинамика, 1976, **4**, 47 – 52.

293. *Weiss N.O.* The dynamo problem. Q.J. Roy. Astron. Soc., **12**, 1971, 432 – 446

294. *Yoshimura H.* Complexes of activity of the solar cycle and very large scale convection. Solar Physics, **18**, 1971, 417 – 433.

295. *Yoshimira H.* On the dynamo action of the global convection in the solar convection zone. Astrophys. J., **3**, 1972, 863 – 886.

296. *Yoshimura H.* Solar-Cycle dynamo wave propagation. Astrophys. J., **201**, 1975, 740 – 748.

297. *Yoshimura H.* A model of the solar cycle driven by the dynamo action of the global convection in the solar convection zone. Astrophys. J. Suppl. Series, **294**, 1975, 467 – 494.

298. *Yoshimura H.* Phase relation between the poloidal and toroidal solar-cycle general magnetic fields and location of the origin of the surface magnetic fields. Solar Physics, **50**, 1976, 3 – 23.

299. *Зельдович Я.Б.* Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости при двумерном движении. – ЖЭТФ, **31**, 1956, 154 – 155.

Дополнительная литература[1)]

1**. *Blandford R.D., Applegate H., Hernquist L.* Thermal origin of neutron stars magnetic fields. Preprint. W.K. Kellog Radiation Laboratory, California Inst. of Technology, Pasadena, USA, 1982.

2**. *Cowling T.G.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **19**, 115, 1981.

3**. *Dolginov A.Z.* Magnetic field and chemical anomalies of Ap-stars. Astron. Astrophys., **54**, 17 – 22, 1977.

4**. *Долгинов А.З.* Возникновение магнитного поля и неоднородностей химического состава у пекулярных звезд. Письма в Астрон. журн., **3**, 151 – 154, 1976.

---

1) Дополнительные ссылки авторов отмечены одной звездочкой, а литература, рекомендуемая редактором перевода – двумя звездочками.

5**. *Dolginov A.Z., Urpin V.A.* The inductive generation of the magnetic field in binary systems. Astron. Astroph., **79**, 60, 1979.

6**. *Долгинов А.З., Урпин В.А.* Индукционная генерация магнитного поля в двойной системе. Письма в Астрон. журн., **2**, 184 – 198, 1976.

7**. *Dolginov A.Z., Urpin V.A.* The thermomagnetic instability in degenerate cores of white dwarfs. Astrophys. Space Sci., **69**, 259 – 267, 1980.

8**. *Долгинов А.З., Урпин В.А.* Спонтанное возникновение магнитного поля в вырожденных ядрах белых карликов. Астрон. журн., **57**, 302 – 310, 1980.

9*. *Krause F.* On the nature of magnetic stars. In: Stellar and Planetary Magnetism (The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics, Volume 2), ed. A.M. Soward, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, 1983, p. 205 – 221.

10*. *Krause F.* Progress in dynamo theory: kinematic and dynamic models. Phil. Trans. R. Soc. London **A 306**, 1982, 225 – 260.

11*. *Krause F., Rädler K-H.* Insert under Krause F. Radler K-H. The theory of the geomagnetic dynamo based on mean-field electrodynamics. Physics of the Earth and Planetary Interiors **20**, 1979, 158 ... 171.

12*. *Moffatt H.K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids, Cambridge University Press, Cambridge, 1978. [Имеется перевод: *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. – М.: Мир, 1980.]

13*. *Parker E.N.* Cosmical magnetic fields, Clarendon Press, Oxford, 1979. [Имеется перевод: *Паркер Е.* Космические магнитные поля. – М.: Мир, 1982].

14*. *Rädler K-H.* Untersuchungen über sphärische Dynamomodelle auf der Grundlage der Magnetohydrodynamik der gemittelten Felder. Thesis, Potsdam, 1980.

15*. *Rädler K-H.* Mean-field approach to spherical dynamo models. Astron. Nachr. **301**, 1980, 101 – 129.

16*. *Rädler K-H.* Mean-field theories of planetary magnetism. Adv. Space Res. **1**, 1981, 219 – 229.

17*. *Rädler K-H.* On dynamo action in the high-conductivity limit. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics **20**, 1982, 191 – 211.

18*. *Rädler K-H.* On the mean-field approach to spherical dynamo models. In: Stellar and Planetary Magnetism (The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics, Volume 2), ed A.M. Soward, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, 1983, p. 17 – 36.

19*. *Rädler K-H.* Remarks on the α-effect and dynamo action in spherical models. In: Stellar and Planetary Magnetism (The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics, Volume 2), ed. A.M. Soward, Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, 1983, p. 37 – 48.

20*. *Rädler K-H.* Investigations of spherical mean-field dynamo models. Astron. Nachr., in press.

21*. *Rädler K-H.* Investigations of spherical mean-field dynamo models. Veröffentlichungen des Astrophysikalischen Observatoriums Potsdam, in press.

22*. *Reichert J.* On the impossibility of mean-field dynamos with some spherical symmetry of the motions. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics **20**, 1982, 213 – 226.

23*. *Schüssler M.* Stellar dinamo theory. IAU Symposium **102**, "Solar and stellar magnetic field, origins and coronal effects".

24*. *Soward A.M.* Stellar and Planetary Magnetism (The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics, Volume 2) (Proceedings of the Workshop on Planetary and Stellar Magnetism, held in Budapest, Hungary, on Aug. 25 – 29, 1980), Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, 1983.

25**. *Вайнштейн С.И.* Магнитные поля в космосе. – М.: Наука, 1983.

26*. *Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А.* Турбулентное динамо в астрофизике. – М.: Наука, 1980.

27**. *Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А.* Проблемы динамо в астрофизике. Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР. Астрономия, т. 21, М, 1982.

Оглавление

Предисловие редактора перевода 5
Предисловие к английскому изданию 8

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ
1.1. Турбулентность и крупномасштабные структуры 10
1.2. Об общей идее магнитной гидродинамики средних полей 12
1.3. Технические замечания 14

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СРЕДНИХ ПОЛЕЙ 15
2.1. Основные уравнения 15
2.2. Операции усреднения 16
2.3. Уравнения для средних полей 17
2.4. Общие свойства турбулентной электродвижущей силы 18

Глава 3. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РАССМОТРЕНИЕ ПРОСТОГО ПРИМЕРА 19
3.1. Исходные предположения 19
3.2. Однородность, изотропность и зеркальная симметрия турбулентных полей 19
3.3. Законы симметрии 21
3.4. Структура турбулентной электродвижущей силы 22
3.5. Закон Ома 23
3.6. Предварительные шаги для определения коэффициентов α и β при частных предположениях 24
3.7. Предел большой проводимости 28
3.8. Применения к солнечной конвективной зоне 29
3.9. Предел малой проводимости 30
3.10. Иллюстрация α-эффекта и α-эксперимент 35
3.11. Средний квадрат флуктуаций 44

Глава 4. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ 47
4.1. Вводные замечания. Определения 47
4.2. Иерархия уравнений для корреляционных тензоров 50
4.3. Корреляционное приближение второго порядка 51

4.4. Корреляционные приближения высших порядкое 52
4.5. Тензорная функция Грина уравнения индукции 54
4.6. Применение тензорной функции Грина к уравнениям электродинамики средних полей 56
4.7. О сходимости корреляционного приближения 60

Глава 5. ДВУХМАСШТАБНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ 64
5.1. Вводные замечания 64
5.2. Изотропные тензоры 65
5.3. Структуры тензоров $g_{ij\ldots n}$ 69
5.4. Примеры турбулентных электродвижущих сил 70
5.5. Предстаавление тензоров $g_{ij\ldots n}$ 73

Глава 6. ОДНОРОДНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ 77
6.1. Вводные замечания 77
6.2. Преобразование Фурье однородных стационарных случайных полей 78
6.3. Основное соотношение, связывающее средние от образов Фурье с образом Фурье корреляционного тензора 80
6.4. Теорема Бохнера 61
6.5. Изотропная турбулентность 82
6.6. Даа частных случая: турбулентность в несжимаемой жидкости и случайные звуковые волны 83
6.7. Преобразоаание Фурье тензорной функции Грина. Вычисление интегралов в предельных случаях 85

Глава 7. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СРЕДНИХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ СРЕДНЕГО ТЕЧЕНИЯ 89
7.1. Определение тензора a_{ij} 89
7.2. Эффект накачки 91
7.3. Действие динамо для случая однородной турбулентности 93
7.4. Определение тензора $b_{ij\,k}$: коэффициент турбулентной магнитной диффузии 98
7.5. Турбулентность под действием сил Кориолиса 102
7.6. Двухмерная турбулентность 104
7.7. Корреляционные приближения высших порядков: рекуррентная формула Вайнштейна 107
7.8. Дислерсионное соотношение 112
7.9. Средний квадрат флуктуирующего магнитного поля 117

Глава 8. ТУРБУЛЕНТНАЯ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ПРИ НАЛИЧИИ СРЕДНЕГО ТЕЧЕНИЯ 120
6.1. Вводные замечания 120
8.2. Тензор Грина для течений с постоянными скоростями деформаций 121

8.3. Представление турбулентной электродвижущей силы 126
6.4. О влиянии среднего движения на корреляционный тензор 129
8.5. О влиянии вращательного движения на корреляционный тензор 132

Глава 9. ТУРБУЛЕНТНАЯ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА В СЛУЧАЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО СРЕДНЕГО ДВИЖЕНИЯ 135
9.1. Иллюстративные примеры 135
9.2. Корреляционный тензор для неоднородной турбулентности 136
9.3. Определение тензора b_{ipq} для неоднородной турбулентности при наличии сил Кориолиса 139
9.4. Определение тензора a_{ip} для неоднородной турбулентности при наличии сил Кориолиса 141
9.5. Обсуждение тензора a_{ip} 146
9.6. Дальнейшие результаты, относящиеся к тензору a_{ip} 148

Глава 10. ОБ ОБРАТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДВИЖЕНИЯ 150
10.1. Вводные замечания 150
10.2. Влияние однородного магнитного поля на корреляционный тензор 152
10.3. Обсуждение результата 153
10.4. Двухмерная турбулентность 156
10.5. Применение к распаду солнечных пятен 158

Глава 11. ПРОБЛЕМА ДИНАМО В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ 163
11.1 Вопрос о возникновении космических магнитных полей 163
11.2. Общий обзор проблемы динамо 167
11.3. Математическая формулировка проблемы динамо и ее простые следствия 168
11.4. Некоторые необходимые условия для динамо 172
11.5. Успешные попытки построения моделей кинематического динамо 174

Глава 12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИНАМО 178
12.1. Основные положения 176
12.2. Замечания, касающиеся процедур усреднения и масштабов средних и флуктуирующих величин 161

Глава 13. ТОРОИДАЛЬНЫЕ И ПОЛОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ 185
13.1. Предварительные замечания 185
13.2. Тороидальные и полоидальные векторные поля в осесимметричном случае 186
13.3. Частное представление векторного поля 186
13.4. Тороидальные и полоидальные векторные поля в общем случае 190
13.5. Разложение по сферическим функциям 193

Глава 14. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМО, ОСНОВАННОГО НА α-ЭФФЕКТЕ 196
14.1. Описание модели 196
14.2. Основные уравнения. Сведение их к уравнениям для скалярных функций 197
14.3. Стационарный случай 201
14.4. Нестационарный случай 204
14.5. Рассмотрение, включающее обратное воздействие магнитного поля на движения 210

Глава 15. СФЕРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИНАМО ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ: ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ 214
15.1. Общее описание моделей 214
15.2. Основные уравнения и некоторые их свойства симметрии 215
15.3. Парциальные моды магнитного поля 217
15.4. Детализация среднего поля скоростей и турбулентных электродвижущих сил 219
15.5. Добавочные свойства симметрии основных уравнений 224
15.6. Приведение основных уравнений 225
15.7. Возможные динамо-механизмы 232
15.8. Дальнейшее приведение основных уравнений 243

Глава 16. СФЕРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДИНАМО ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ: РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ 246
16.1. Общие определения 246
16.2. Определения для частных типов моделей 247
16.3. Модели с α^2-механизмом 251
16.4. Модели с $\alpha\omega$-механизмом 260
16.5. Модели с $\delta\omega$-механизмом 269

Глава 17. ПРИМЕНЕНИЯ К КОСМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТАМ 273
17.1. Результаты наблюдений магнитных полей Земли, Луны и планет 274
17.2. Динамо-теория земного магнитного поля 274
17.3. Данные наблюдений магнитных полей на Солнце 279
17.4. Динамо-теория солнечного цикла 281

Литература 289
Дополнительная литература 308
Содержание 310