

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

METHODS IN COMPUTATIONAL PHYSICS

ADVANCES IN RESEARCH AND APPLICATIONS

Edited by

B. ALDER
Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California

S. FERNBACH
Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California

M. ROTENBERG
University of California La Jolla, California

Volume 3

FUNDAMENTAL METHODS IN HYDRODYNAMICS

ACADEMIC PRESS, NEW YORK AND LONDON

1964

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Редакторы
Б. ОЛДЕР, С. ФЕРНБАХ
и М. РОТЕНБЕРГ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
В. П. Коробейникова и П. И. Чушкина
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
С. С. Григоряна и Ю. Д. Шмыглевского

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1967

УДК 531 + 681

Коллективная монография известных американских специалистов посвящена современным методам численного решения задач о неустановившихся движениях сплошной среды. В книге освещен 15-летний опыт, накопленный в области численного решения задач гидродинамики. Многие результаты ранее не публиковались.

В первых четырех статьях рассматриваются конечно-разностные методы, в которых используются переменные Эйлера или Лагранжа, а также одновременно оба типа переменных. Две статьи относятся к расчету движения упруго-пластических сред. Излагается численный метод характеристик для решения нестационарных одно- и двумерных задач. В работе Харлоу описывается развитый им метод частиц в ячейках. В последней статье изучается застойная зона в плоском потоке вязкой несжимаемой жидкости.

Книга, несомненно, вызовет интерес как у специалистов по вычислительной математике, так и у физиков, гидромехаников и инженеров, занимающихся исследованиями течений сплошной среды.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-4-3.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Аналитические и численные методы четко разделили области господства в нелинейной механике сплошных сред. Первые закрепили свои позиции в исследовании и расчете особых точек, линий и поверхностей, вторые позволяют получать надежные результаты при расчете уравнений с частными производными в областях, не содержащих особенностей. Умелое совместное использование аналитических и численных методов определяет успех современного исследования.

С аналитическими методами, и по существу только с ними, знакомят классические курсы механики сплошных сред. Численным методам все еще редко посвящаются целые книги.

Предлагаемая читателю книга на самом деле является сборником независимых работ, но подбор этих работ сделан таким образом, что позволяет достаточно полно охватить численные методы расчета неустановившихся движений сжимаемой среды, зависящих от двух пространственных переменных. Основная часть статей посвящена конечно-разностным методам в переменных Эйлера и Лагранжа или же методам, использующим комбинацию этих переменных. Часть статей касается метода характеристик. Две последние главы посвящены соответственно методу частиц в ячейках и конечно-разностному методу расчета нестационарных плоских течений вязкой несжимаемой жидкости.

Иногда авторы проводят анализ устойчивости предлагаемых конечно-разностных схем. В некоторых случаях дается описание особенностей структуры программ для электронных вычислительных машин.

Необходимо отметить, что многие из приведенных примеров расчетов представляют самостоятельный интерес. Этот интерес объясняется как спецификой рассмотренных задач, так и их подробным решением.

Особо следует отметить содержание статей Дж. Майнчена, С. Сака и М. Уилкинса, в которых демонстрируются возможности современных вычислительных методов при решении задач механики твердого деформируемого тела с учетом многочисленных эффектов (упругость, пластичность, сжимаемость, хрупкое разрушение и т. д.), сопровождающих деформирование и движение таких сред при воздействии на них интенсивных нагрузок.

В то время как эффективность этих методов и фактически добытые с их помощью в гидрогазодинамике результаты уже получили достаточно широкую известность и прочно вошли в практику исследовательских работ, применительно к механике твердого деформируемого тела эти методы пока

находятся в начальной стадии развития. Ознакомление с отмеченными выше статьями настоящего сборника позволяет ощутить возможности вычислительных методов и в этой весьма трудной области.

Большая часть статей написана специалистами из Лосаламосской научной лаборатории и Калифорнийского университета. Использование мощных электронных вычислительных машин позволило авторам с самого начала разрабатывать методы, опирающиеся на большую скорость вычислений и значительный объем машинной памяти. Многие из публикуемых результатов ранее не были доступны широкому кругу читателей. Они, безусловно, будут полезны для специалистов, работающих в области физики, гидромеханики, механики твердого деформируемого тела и вычислительной математики.

Сборник не лишен некоторых недостатков. Статьи резко различаются как по логической стройности предлагаемых схем, так и по четкости изложения. В процессе подготовки русского издания пришлось устранить большое количество неточностей и опечаток.

При переводе и редактировании работа была распределена следующим образом: статьи со второй по шестую перевел В. П. Коробейников, остальные — П. И. Чушкин. Статьи пятую и шестую редактировал С. С. Григорян, остальные — Ю. Д. Шмыглевский.

С. С. ГРИГОРЯН
Ю. Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные технические данные больших электронных цифровых вычислительных машин делают возможным численное решение таких систем дифференциальных уравнений в частных производных, которых никогда ранее не пытались решать. Даже простейшая одномерная зависящая от времени система уравнений, которая ныне на обычных электронных вычислительных машинах решается по стандартным программам, потребовала бы несколько лет назад настолько большого количества человеко-часов работы, что к ее решению не стали бы и приступать.

В настоящем томе из серии, посвященной вычислительным аспектам физических проблем, рассматриваются современные методы численного решения задач, главным образом задач о движении невязкой сжимаемой жидкости. Эти методы были разработаны для расчетов на электронных вычислительных машинах в течение последних 15 лет. Некоторые из описанных здесь методов более эффективны, чем другие. Методы с ограниченным применением также включены в книгу, поскольку нам кажется, что в эти первые годы развития электронных вычислительных машин как математического инструмента должны быть широко представлены для обсуждений даже менее успешные эвристические методы.

Первые четыре главы этой книги содержат численные методы, в которых используются лагранжевы или эйлеровы переменные или же комбинация двух этих переменных в случае нескольких пространственных измерений. Две следующие главы иллюстрируют применение некоторых из этих методов для случая упруго-пластической среды, что связано с дополнительными усложнениями. В двух дальнейших главах рассматривается метод характеристик для решения задач как с одной, так и с двумя пространственными переменными. Следующая глава посвящена хорошо известному теперь методу частиц в ячейках. Последняя глава относится к течению вязкой несжимаемой жидкости и включена потому, что в ней обсуждается новый метод для решения таких задач.

Четвертый том данной серии также будет посвящен рассмотрению гидродинамических вопросов, но с более прикладной точки зрения.

Б. ОЛДЕР,
С. ФЕРНБАХ,
М. РОТЕНБЕРГ

Июнь, 1964 г.

Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа

У. Д. ШУЛЬЦ

Калифорнийский университет, Лоуренсовская лаборатория радиации, Ливермор, Калифорния

1. Введение 9
2. Определения, обозначения и формулы преобразования 11
3. Уравнения сохранения 13
4. Тензорная искусственная вязкость 16
5. Устойчивость дифференциальных уравнений 23
6. Гидродинамические конечно-разностные уравнения 29
7. Выбор величины *Dt* 40
8. Рассмотрение границ 47
9. Пример численного решения задачи 48
Литература 54

1. Введение

Первые гидродинамические задачи с начальными значениями, которые решались на электронных вычислительных машинах, были одномерными задачами (они содержат одну пространственную переменную, а в качестве другой переменной здесь мы всегда будем подразумевать время). При решении одномерных задач доводы в пользу применения представления Лагранжа почти полностью перевешивают соображения в пользу применения представления Эйлера. После того как Рихтмайер и фон Нейман ввели искусственную вязкость в теорию численных методов, создание относительно точных и устойчивых расчетных схем в переменных Лагранжа стало совсем простым делом.

Численные же схемы в переменных Эйлера, вообще говоря, не столь точны и вызывают ряд дополнительных затруднений. Когда в рассматриваемой задаче имеется несколько различных сред, то при использовании представления Эйлера возникает тенденция к диффузии через поверхности раздела с физически нереальными скоростями. Вторая трудность здесь заключается в том, что если рассматриваемая физическая система сжимается, то ее математическое определение ухудшается из-за того, что в численных схемах в представлении Эйлера координаты отвечают фиксированным точкам в пространстве в отличие от численных схем в представлении Лагранжа, где координаты отвечают

фиксированным точкам в среде. Вообще говоря, структура задачи лучше определяется в переменных Лагранжа. Все эти соображения относятся к внутренней области физической системы. Граничные же условия иногда бывают такими, что становится предпочтительнее пользоваться переменными Эйлера, однако это случается редко.

Поскольку в одномерных численных схемах в основном применялись переменные Лагранжа, то первоначально в двумерных численных схемах, естественно, также брались переменные Лагранжа. Все приведенные доводы о предпочтительности представления Лагранжа остаются справедливыми и в двумерном случае, но один из них должен быть пересмотрен. В двумерном случае появляется некоторый новый процесс, а именно турбулентность. В одномерном случае, если выбраны подходящие переменные Лагранжа, т. е. переменные, которые хорошо определяют данную физическую систему, то с течением времени они, как правило, также будут хорошо определять эту систему.

В двумерных же задачах положение несколько иное. Здесь координаты Лагранжа, которые первоначально хорошо определяли систему повсюду, часто с течением времени превращаются в координаты, имеющие области плохого определения. Обычно это затрудняющее обстоятельство можно отнести на счет турбулентности. Численные схемы в переменных Лагранжа дают достоверные результаты, когда такие области плохого определения не имеют значительного влияния на общее поведение физической системы. В последнем разделе данной статьи содержатся еще несколько замечаний по этому вопросу, которые непосредственно относятся к небольшой задаче, приведенной там для иллюстрации.

В двумерных численных схемах искусственная вязкость Рихтмайера — Неймана обобщается здесь на тензорную искусственную вязкость. Это сделано отчасти для того, чтобы облегчить проблему турбулентности, и отчасти для того, чтобы получить лучшее представление для ударных волн. Это нововведение дало некоторый интересный дополнительный эффект. При использовании тензорной искусственной вязкости в одномерном цилиндрическом и сферическом случаях имеют место уравнения, которые отличаются от уравнений, встречающихся при обычном способе введения скалярной искусственной вязкости Рихтмайера — Неймана. На практике для физических систем с большим числом ударных волн эти уравнения с тензорной вязкостью дают отличающиеся результаты, но для систем с одной ударной волной они находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными при использовании уравнений со скалярной искусственной вязкостью.

2. Определения, обозначения и формулы преобразования

Для удобства мы сначала рассмотрим несколько соотношений, связывающих координаты Эйлера с координатами Лагранжа. Координаты Эйлера наиболее распространены в физике. Кроме того, выражения в переменных Эйлера служат для сокращения записи более сложных эквивалентных выражений в переменных Лагранжа. Перед представлением любых выражений в конечно-разностном виде они, конечно, будут сначала записываться в переменных Лагранжа (рис. 1), где приняты следующие обозначения: $R(k, l, t)$ — координата Эйлера (она может быть либо декартовой, либо цилиндрической координатой); $Z(k, l, t)$ — координата Эйлера (всегда является декартовой координатой); $\mathbf{R}$ — вектор (R, Z); k — координата Лагранжа; l — координата Лагранжа; j — якобиан преобразования.

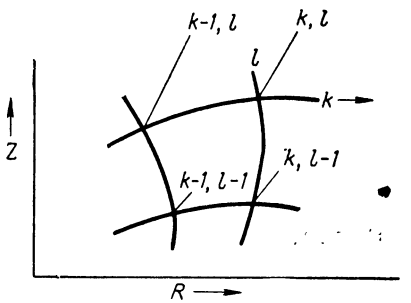


Рис. 1. Лагранжева координатная сетка для расчетов конечно-разностным методом.

Если $R_k = \partial R/\partial k$, $R_l = \partial R/\partial l$ и т. д., то тогда $j = R_k Z_l - R_l Z_k$ представляет собой якобиан, выражающий отношение площадей в рассматриваемых переменных.

Пусть

$$\hat{R} = \begin{cases} R \text{ для цилиндрических координат,} \\ 1 \text{ для декартовых координат,} \end{cases}$$

тогда «объемный якобиан» можно определить так:

$$J = \hat{R} j.$$

Рассмотрим преобразование производной в переменных Эйлера в производную в переменных Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial R} = \left(\frac{\partial k}{\partial R}\right)\frac{\partial}{\partial k} + \left(\frac{\partial l}{\partial R}\right)\frac{\partial}{\partial l},$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \left(\frac{\partial k}{\partial Z}\right)\frac{\partial}{\partial k} + \left(\frac{\partial l}{\partial Z}\right)\frac{\partial}{\partial l}.$$

Выражение для $\partial k/\partial R, \ldots, \partial l/\partial \dot{Z}$ через производные $R_k, \ldots, Z_l$ можно найти следующим образом. Для произвольного g имеем

$$\frac{\partial g}{\partial k} = R_k \frac{\partial g}{\partial R} + Z_k \frac{\partial g}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial g}{\partial l} = R_l \frac{\partial g}{\partial R} + Z_l \frac{\partial g}{\partial Z}.$$

Пусть $g=k$, тогда эти уравнения можно разрешить относительно $\partial k/\partial R$ и $\partial k/\partial Z$. Аналогично, полагая $g=l$, найдем $\partial l/\partial R$ и $\partial l/\partial Z$. В результате получим

$$\frac{\partial k}{\partial R}=\frac{Z_l}{j},\quad \frac{\partial l}{\partial R}=-\frac{Z_k}{j},$$
$$\frac{\partial k}{\partial Z}=-\frac{R_l}{j},\quad \frac{\partial l}{\partial Z}=\frac{R_k}{j},$$

что дает

$$\frac{\partial}{\partial R}=\frac{Z_l}{j}\frac{\partial}{\partial k}-\frac{Z_k}{j}\frac{\partial}{\partial l},$$
$$\frac{\partial}{\partial Z}=-\frac{R_l}{j}\frac{\partial}{\partial k}+\frac{R_k}{j}\frac{\partial}{\partial l}.$$

Определим вектор $\bar{\mathbf{R}}$, повернутый относительно вектора $\mathbf{R}$ на 90° против часовой стрелки, как «нормальный вектор» к $\mathbf{R}$, т. е.

$$\bar{\mathbf{R}}=(Z,-R)\text{ — нормальный вектор к }\mathbf{R}.$$

Заметим, что

$$\bar{\mathbf{R}}_1\cdot\bar{\mathbf{R}}_2=\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_2,\quad \bar{\mathbf{R}}_1\cdot\mathbf{R}_2=-\mathbf{R}_1\cdot\bar{\mathbf{R}}_2.$$

Можно определить также следующий полезный векторный оператор:

$$\mathbf{D}=\frac{1}{j}\left[\bar{\mathbf{R}}_l\frac{\partial}{\partial k}-\bar{\mathbf{R}}_k\frac{\partial}{\partial l}\right]=\frac{1}{j}\left[\frac{\partial}{\partial k}(\bar{\mathbf{R}}_l\ldots)-\frac{\partial}{\partial l}(\bar{\mathbf{R}}_k\ldots)\right].$$

Тогда

$$\nabla f=\mathbf{D}f,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{f}=\frac{1}{\hat{R}}\,\mathbf{D}\cdot(\hat{R}\mathbf{f}).$$

Производные по времени в переменных Лагранжа, т. е. частные производные при фиксированных k и l, записываются следующим образом:

$$u(k,\,l,\,t)=\frac{\partial R}{\partial t}=R_t=\dot{R}\text{ — скорость по направлению }R,$$

$$v(k,\,l,\,t)=\frac{\partial Z}{\partial t}=Z_t=\dot{Z}\text{ — скорость по направлению }Z,$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(u,\,v)\text{ — вектор скорости.}$$

Теперь введем некоторые соотношения, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$j=\mathbf{R}_k\cdot\bar{\mathbf{R}}_l,$$
$$j_t=\mathbf{R}_{kt}\cdot\bar{\mathbf{R}}_l+\mathbf{R}_k\cdot\bar{\mathbf{R}}_{lt}=\bar{\mathbf{R}}_l\cdot\mathbf{R}_{kt}-\bar{\mathbf{R}}_k\cdot\mathbf{R}_{lt},$$
$$j_t=\bar{\mathbf{R}}_l\cdot\mathbf{u}_k-\bar{\mathbf{R}}_k\cdot\mathbf{u}_l=j\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}.\qquad(1)$$

В цилиндрических координатах

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{u}{R} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}.$$

Подставляя сюда $\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$ из выражения (1), получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{R_t}{R} + \frac{j_t}{j} = \frac{(Rj)_t}{Rj}.$$

Следовательно,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{J_t}{J}. \tag{2}$$

Поскольку $J = j$ для декартовой системы координат, то формула (2) сводится к (1) и, таким образом, действительна для обеих (декартовой и цилиндрической) систем координат.

Заканчивая рассмотрение формул преобразования, выведем связь между производными по времени в переменных Эйлера и Лагранжа.

Пусть g — произвольная функция, тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t}\Big|_{\mathrm{R}} + \frac{\partial g}{\partial R} R_t + \frac{\partial g}{\partial Z} Z_t.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\mathrm{R}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla).$$

Перечислим еще некоторые обозначения и определения: p — давление; ρ — плотность; $\tau = \rho^{-1}$ — удельный объем; ε — удельная внутренняя энергия; S — энтропия; $M = \rho^0 J^0$ — массовая константа (верхний индекс «0» означает, что $t = 0$); $\varepsilon(s)$ — удельная внутренняя энергия, вносимая внешним источником; $E = M\varepsilon$.

3. Уравнения сохранения

В этом разделе приводится система дифференциальных уравнений гидродинамики. Здесь даются замечания к различным дифференциальным уравнениям и проводится сопоставление их между собой, но без фундаментального обсуждения их смысла. Таким образом, будем считать, что дифференциальные уравнения известны (исключая лишь вопросы, связанные с введением искусственной вязкости), и будем исходить из этого предположения. Следовательно, уравнения (3)—(6) будем рассматривать как определяющие, а уравнения (7)—(9) выводятся из этих определяющих уравнений.

Уравнение массы

$$\tau = J/M. \tag{3}$$

Это уравнение непосредственно следует из уравнения сохранения массы, которое обычно записывается в виде

$$(\rho J)_t = 0,$$

и, следовательно,

$$\rho J = \rho^0 J^0 = M.$$

Дифференциальное уравнение количества движения

$$\rho \mathbf{u}_t + \nabla p + \frac{\rho}{M}\left[\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l q_A) - \frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k q_B)\right] = 0. \tag{4}$$

В уравнениях гидродинамики для сглаживания разрывов, обусловленных ударными волнами, будет применяться тензорная искусственная вязкость. В уравнении (4) величина q_A должна интерпретироваться как «одномерная» вязкость, связанная с направлением $\bar{\mathbf{R}}_l$, тогда как величина q_B является «одномерной» вязкостью, связанной с направлением $\bar{\mathbf{R}}_k$ [1]).

Уравнение внутренней энергии

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon(s)}{\partial t} + p\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{q_A(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k)}{\rho j} + \frac{q_B(-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l)}{\rho j} = 0. \tag{5}$$

Уравнение сохранения полной энергии (7) показывает, что в уравнениях количества движения и внутренней энергии члены, содержащие q_A и q_B, являются взаимосогласованными.

Уравнение состояния. Величина p, которая входит в уравнения сохранения, вычисляется как известная функция от ε и τ. Таким образом, должны быть заданы уравнения (или таблицы) в форме

$$p = p(\varepsilon, \tau). \tag{6}$$

Уравнение сохранения полной энергии. Из уравнения количества движения и уравнения внутренней энергии имеем

$$\rho \mathbf{u} \cdot \left\{ \mathbf{u}_t + \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{M}\left[\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l q_A) - \frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k q_B)\right]\right\} +$$
$$+ \rho\left\{ \varepsilon_t - \varepsilon(s)_t + p\tau_t + \frac{q_A}{\rho j}(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k) + \frac{q_B}{\rho j}(-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l)\right\} = 0.$$

Преобразуя это выражение и используя равенство

$$\rho\tau_t = \frac{\tau_t}{\tau} = \frac{J_t}{J} = \nabla \cdot \mathbf{u},$$

[1]) Подробное обсуждение тензорной искуственной вязкости проводится в § 4.

получаем

$$\rho[\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_t+\varepsilon_t-\varepsilon(s)_t]=-\mathbf{u}\cdot\nabla p-p\nabla\cdot\mathbf{u}-$$
$$-\frac{\mathbf{u}}{J}\cdot\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l q_A)-\frac{q_A\hat{R}}{J}\bar{\mathbf{R}}_l\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial k}+$$
$$+\frac{\mathbf{u}}{J}\cdot\frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k q_B)+\frac{q_B\hat{R}}{J}\bar{\mathbf{R}}_k\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial l}.$$

Применяя соотношение

$$-\mathbf{u}\cdot\nabla p-p\nabla\cdot\mathbf{u}=-\nabla\cdot(p\mathbf{u})=-\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}p\bar{\mathbf{R}}_l\cdot\mathbf{u})-\frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}p\bar{\mathbf{R}}_k\cdot\mathbf{u})\right]$$

и объединяя члены, находим

$$\rho\left[\frac{1}{2}\mathbf{u}^2+\varepsilon-\varepsilon(s)\right]_t=$$
$$=-J^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial k}\left[(p+q_A)\mathbf{u}\cdot(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l)-\frac{\partial}{\partial l}[(p+q_B)\mathbf{u}\cdot(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k)]\right\}.\right.$$

Проинтегрируем последнее выражение по объему, ограниченному поверхностями $k=K_1$, $k=K_2$, $l=L_1$ и $l=L_2$, беря в цилиндрических координатах угол раствора соответствующего сектора равным одному радиану и беря в декартовых координатах высоту соответствующего параллелепипеда равной единице. Тогда получим

$$\int_{K_1}^{K_2}\int_{L_1}^{L_2}\left[\frac{1}{2}\mathbf{u}^2+\varepsilon-\varepsilon(s)\right]_t\rho J\,dk\,dl=$$
$$=-\int_{K_1}^{K_2}\int_{L_1}^{L_2}\left\{\frac{\partial}{\partial k}[(p+q_A)\mathbf{u}\cdot(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l)]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial l}[(p+q_B)\mathbf{u}\cdot(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k)]\right\}dk\,dl. \quad (7)$$

Это и есть уравнение сохранения полной энергии. Отметим, что величины q_A и q_B входят в интегралы только на границах физической системы, как это и должно быть для хорошей искусственной вязкости.

Уравнение количества движения в интегральной форме

$$\frac{d}{dt}\int M\mathbf{u}\,dk\,dl=\int J\rho\mathbf{u}_t\,dk\,dl=-\int J\nabla p\,dk\,dl-$$
$$-\int\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l q_A)\,dk\,dl+\int\frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k q_B)\,dk\,dl. \quad (8)$$

Как видно, величины q_A и q_B здесь также будут входить только в интегралы на границах физической системы. Однако

для скалярной вязкости q в случае цилиндрических координат такое положение не имеет места [1]).

Уравнение момента количества движения

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{R}\times M\mathbf{u}\,dk\,dl=\int \mathbf{R}\times J\rho\mathbf{u}_t\,dk\,dl=$$
$$=-\int\left[\mathbf{R}\times(J\nabla p)-\mathbf{R}\times\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l q_A)+\mathbf{R}\times\frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k q_B)\right]dk\,dl=$$
$$=-\int \mathbf{R}\times J\nabla p\,dk\,dl-\int\frac{\partial}{\partial k}(\mathbf{R}\times\bar{\mathbf{R}}_l\hat{R}q_A)\,dk\,dl+$$
$$+\int\frac{\partial}{\partial l}(\mathbf{R}\times\bar{\mathbf{R}}_k\hat{R}q_B)\,dk\,dl+\int\mathbf{R}_k\times\bar{\mathbf{R}}_l\hat{R}(q_A-q_B)\,dk\,dl. \quad (9)$$

Для уравнения момента количества движения ситуация оказывается не столь хорошей. Здесь появляется член, который содержит величину (q_A-q_B) и интегрируется по объему системы. Это обстоятельство будет обсуждаться в следующем разделе.

4. Тензорная искусственная вязкость

Чтобы интегрировать гидродинамические уравнения путем замены их конечно-разностными уравнениями, надо вводить некоторый механизм для сглаживания разрывов, которые имеют место, когда возникают ударные волны. Фон Нейман и Рихтмайер [1, 2] первыми разрешили эту проблему для одномерных задач путем введения искусственной вязкости, которая размазывает разрывы, обусловленные скачками, на определенное число расчетных ячеек.

В сущности они построили некоторую искусственную среду, конечное поведение которой после сглаживания ударных волн было достаточно похожим на поведение действительной среды. Таким образом, в физических уравнениях эту искусственную среду можно было рассматривать вместо действительной среды.

Эта искусственная среда определяется следующим образом. Рассмотрим некоторый плоский скачок, который движется только в направлении R и не перемещается в направлении Z. При этих условиях можно выбрать ортогональные координаты Лагранжа k и l, возрастающие в направлениях R и Z соответственно, т. е.

$$R_l=Z_k=0.$$

Предположим также, что газ имеет уравнение состояния с постоянным отношением удельных теплоемкостей γ, т. е.

$$p=\frac{\varepsilon(\gamma-1)}{\tau}.$$

[1]) В цилиндрических координатах мы проводим интегрирование для объема с углом раствора сектора, равным одному радиану. Если интегрировать по всему объему системы, то тогда скалярная вязкость q также входила бы только в интегралы по поверхности.

Затем как в уравнении количества движения, так и в уравнении энергии величину p заменим на $(p+q_N)$, где q_N определяется следующим образом. Пусть

$$\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)_- = \min\left[\frac{\partial u}{\partial k},\ 0\right], \quad c_0 = \frac{N}{\pi}\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}},$$

тогда

$$q_N = c_0^2\rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)_-\right]^2.$$

Величина N, входящая в выражение для c_0, представляет собой расстояние, на которое будет размазываться скачок в пространстве k в декартовой системе ($\Delta k = N$ — толщина размазанного скачка).

Ниже перечисляются некоторые физические свойства, которым желательно удовлетворить при введении искусственной вязкости:

а) Считается, что равномерное расширение или сжатие всей среды соответствует некоторому обратимому процессу (бесконечно малые объемы сжимаются бесконечно медленно). Искусственная вязкость должна быть независимой от такого движения [1]).

б) Составляющая скорости (среды), параллельная фронту скачка, должна быть непрерывной.

в) Должно выполняться уравнение для момента количества движения.

г) Искусственная вязкость должна отсутствовать для поля скоростей, соответствующего вращению физической системы как жесткого целого.

Одномерная вязкость Рихтмайера — Неймана не удовлетворяет условию а). Это имеет место в случае, где

$$\frac{\partial u}{\partial R} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial R} = 0,$$

тогда

$$q_N = c_0^2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)^2 \neq 0.$$

Вместо этой основной искусственной вязкости мы будем применять новую искусственную вязкость, определенную следующим образом:

$$q = -c_0^2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)_- \left|\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)_-\right|.$$

[1]) Вопрос о том, обращается ли в нуль второй коэффициент вязкости или нет, остается, очевидно, еще открытым Следовательно, в равномерно сжимаемой системе, вероятно, происходит изменение энтропии. Однако это обстоятельство представляет собой отдельный вопрос При введении искусственной вязкости пытаются учесть только нагревание в скачке.

В случае равномерных ячеек величина q будет обращаться в нуль, как это требуется в соответствии с условием а) [1]).

На практике выбирают $c_0^2 = 2$. Для искусственной вязкости q_N в этом случае простой скачок размазывается на три-четыре ячейки, т. е. $(\partial u/\partial k)_-$ не обращается в нуль только на протяжении трех-четырех ячеек. Хотя величина $(\partial/\partial k)(\partial u/\partial k)_-$ может быть несколько меньше величины $(\partial u/\partial k)_-$, но они должны иметь одинаковый порядок. Таким образом, можно надеяться, что искусственная вязкость q при том же значении c_0^2 будет также размазывать простой скачок на три-четыре ячейки. Оказывается, что такое положение имеет место на практике. Форма ударного фронта, конечно, отклоняется от простой синусоидальной волны для искусственной вязкости Рихтмайера — Неймана q_N. Тензорная искусственная вязкость, которая разрабатывается в этой статье, будет строиться на основе новой скалярной вязкости.

Рассмотрим теперь некоторую область в общем пространстве k, l. Пусть $\mathbf{R}_k$ и $\mathbf{R}_l$ представляют собой векторы, направленные вдоль линий $l = \text{const}$ и $k = \text{const}$ соответственно. Более существенными направлениями, однако, являются направления, которые определяются нормальными векторами,

$$\bar{\mathbf{R}}_k = (Z_k, -R_k) \text{ — нормальный вектор к } \mathbf{R}_k,$$
$$\bar{\mathbf{R}}_l = (Z_l, -R_l) \text{ — нормальный вектор к } \mathbf{R}_l.$$

Эти нормальные векторы содержатся в операторе $\mathbf{D}$. Скалярная вязкость вводится в уравнение количества движения, которое через этот оператор записывается так:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{D}p = \frac{-1}{j} \bar{\mathbf{R}}_l \frac{\partial q}{\partial k} + \frac{1}{j} \bar{\mathbf{R}}_k \frac{\partial q}{\partial l}.$$

Однако условие б) требует свойств направленности искусственной вязкости. В качестве первой попытки для выполнения этих требований можно записать такое тензорное уравнение:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{D}p = \frac{-1}{j} \bar{\mathbf{R}}_l \frac{\partial q_A}{\partial k} + \frac{1}{j} \bar{\mathbf{R}}_k \frac{\partial q_B}{\partial l},$$

[1]) Для неравномерных ячеек величина q уже не будет обращаться в нуль, как это было бы желательно. Чтобы учесть это условие, мы сначала пытались применять следующую пробную вязкость:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)_- = \min\left[\frac{\partial u}{\partial R}, 0\right],$$
$$q_{\text{пробн}} = -c_0^2 \rho \left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)_- \left|\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)_-\right| \left(\frac{\partial R}{\partial k}\right)^2.$$

Такая вязкость q оказалась неудовлетворительной. В этом случае скачки распространялись через большую ячейку, окруженную малыми ячейками, некоторым физически нереальным образом.

где q_A — «одномерная» вязкость, связанная со скачками, движущимися в направлении $\bar{\mathbf{R}}_l$; величина q_B имеет аналогичный смысл. Уравнение для внутренней энергии можно вывести из требования сохранения полной энергии, т. е. потребовав, чтобы выполнялось равенство (7). Тогда получим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{d\varepsilon(s)}{dt} + p\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{q_A}{M}\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}) + \frac{q_B}{M}\frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}).$$

Это уравнение энергии оказывается неудовлетворительным, поскольку оно не является галилеевым инвариантом. Чтобы это уравнение не зависело от преобразования, связанного с наложением постоянной скорости, надо вынести величины $\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l$ и $\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k$ из-под производных по k и l соответственно. Тогда

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{d\varepsilon(s)}{dt} + p\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{q_A}{\rho j}(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k) - \frac{q_B}{\rho j}(-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l).$$

Обратившись еще раз к уравнению сохранения полной энергии, получим в результате

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{1}{M}\left[\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_l q_A) - \frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_k q_B)\right].$$

Таким образом, выводим уравнения (4) и (5).

Теперь остается только определить подходящие выражения для q_A и q_B. Для скачка, движущегося в направлении $\bar{\mathbf{R}}_l$, указанную одномерную вязкость можно обобщить следующим путем. Определим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)^A = \frac{\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k}{|\bar{\mathbf{R}}_l|},$$

а также

$$\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)^A_- = \min\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)^A, 0\right\}$$

и далее положим

$$q_A = -2\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial k}\right)^A_- \left|\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)^A_-\right|. \tag{10}$$

Аналогично

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)^B = \frac{-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot u_l}{|\bar{\mathbf{R}}_k|},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)^B_- = \min\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)^B, 0\right\},$$

$$q_B = -2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)^B_- \left|\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)^B_-\right|. \tag{11}$$

Определение q_A и q_B согласно (10) и (11) завершает определение тензорной искусственной вязкости [1]). Уравнения (3)—(6), (10) и (11) вместе с заданными граничными и начальными условиями определяют состояние физической системы в течение всего времени.

Почти очевидно, что в численных расчетах всегда можно найти такую ситуацию, для которой данный численный метод будет непригодным. Рассмотрим перечисленные ранее физические условия в) и г). Мы их выбрали потому, что им не удовлетворяет введенная тензорная искусственная вязкость. В конце этого раздела устанавливается, что при такой тензорной вязкости, вообще говоря, не будет выполняться уравнение момента количества движения. Не вникая в детали, заметим, что эта трудность, как оказалось, заключается в том, что в большинстве интересных задач появляется очень много длинных узких ячеек. Применяемая искусственная вязкость должна обладать свойством размазывания ударных волн на малое расстояние в том направлении, по которому ячейка оказывается узкой, и на большое расстояние в том направлении, по которому ячейка оказывается длинной, т. е. искусственная вязкость должна быть величиной, зависящей от вида ячейки. Это обстоятельство, оказывается, приводит к невыполнению уравнения момента количества движения.

Однако на практике такое положение не представляет собой проблемы, потому что численные схемы в переменных Лагранжа не пригодны для задач с турбулентным течением. Для этих задач следует применять численные схемы в переменных Эйлера, а здесь не возникает проблемы при обеспечении выполнения уравнения момента количества движения. Приближенно в этом можно убедиться, замечая, что для ортогональной сетки векторы $\mathbf{R}_k$ и $\bar{\mathbf{R}}_l$ будут параллельны, и, значит, нежелательный член в уравнении (9) исчезнет.

Условие г) относится к полю скорости типа

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{R}},$$

для которого $(\partial u/\partial k)^A$ и $(\partial u/\partial l)^B$, вообще говоря, не обращаются в нуль. Такую трудность можно было бы устранить, однако мы не пытались этого сделать, поскольку данная трудность, по-видимому, связана с проблемой выполнения уравнения момента количества движения. Здесь нет уверенности в том, что, работая над одной проблемой и не будучи при этом в состоянии как-то разрешить другую (связанную) проблему, можно добиться общего улучшения численной схемы.

[1]) Пока обоснование для названия этой вязкости «тензорная» следует из свойств ее направленности. Ее связь с формальным тензором в пространстве Эйлера будет показана в конце этого раздела.

Тензорная искусственная вязкость представляет собой новую величину в численной гидродинамике, и мы теперь рассмотрим ее с точки зрения представления Эйлера. Это позволит показать явным образом тензорные свойства введенной выше искусственной вязкости и осветить другие вопросы, представляющие общий интерес.

В эйлеровом пространстве уравнение количества движения можно записать в форме

$$\rho \frac{\partial u^i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x^l} + \frac{\partial Q^{jl}}{\partial x^j} = 0. \tag{12}$$

Как и в случае лагранжевого представления, требование сохранения полной энергии определит тогда форму уравнения внутренней энергии

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{Q^{ji}}{\rho} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = 0. \tag{13}$$

Из этих уравнений в трехмерном декартовом пространстве получим теперь одномерные уравнения в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Используя аппарат тензорного исчисления, запишем уравнения с тензорной искусственной вязкостью в ковариантной форме. Пусть $t^{ab\cdots}$ представляет собой некоторый контравариантный тензор и пусть $\xi^l (l = 1, 2, 3)$ — некоторая произвольная система координат. Ковариантная производная тензора $t^{ab\cdots}$ равна

$$t^{ab\cdots}_{;l} = \frac{\partial t^{ab\cdots}}{\partial \xi^l} + \left\{ \begin{matrix} a \\ pl \end{matrix} \right\} t^{pb\cdots} + \left\{ \begin{matrix} b \\ pl \end{matrix} \right\} t^{ap\cdots} + \ldots,$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ls} (g_{is,\,k} + g_{ks,\,i} - g_{ik,\,s}),$$

$ds^2 = g_{il}\, d\xi^i\, d\xi^l$ — инвариантная длина.

Пусть также

$$\frac{\partial t^{ab\cdots}}{\partial t} = \frac{\partial t^{ab\cdots}}{\partial t}\Big|_{\xi^l_0} + u^j t^{ab\cdots}_{;j},$$

где ξ^l_0 — фиксированное значение.

Уравнения с тензорной искусственной вязкостью в ковариантной форме имеют следующий вид:

$$\rho \frac{\partial u^i}{\partial t} = - g^{ij} p_{;j} - Q^{ji}_{;j}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - p \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{Q^{ji}}{\rho} g_{il} u^l_{;j}. \tag{15}$$

Для цилиндрических координат

$$\xi^1 = R, \qquad \xi^2 = Z, \qquad \xi^3 = \theta,$$
$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{33} = R^2, \quad g^{ii} = g_{ii},$$
$$g_{ij}^{-1} = g^{ij} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j.$$

Для сферических координат

$$\xi^1 = R, \quad \xi^2 = \varphi, \quad \xi^3 = \theta,$$
$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = R^2 \sin^2\theta, \quad g_{33} = R^2, \quad g^{ii} = g_{ii}^{-1},$$
$$g_{ij} = g^{ij} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j.$$

Теперь можно получить искомые одномерные уравнения, вводя обозначение

$$\delta = \begin{cases} 0 — \text{для декартовых координат,} \\ 1 — \text{для цилиндрических координат,} \\ 2 — \text{для сферических координат.} \end{cases}$$

Одномерные уравнения с тензорной искусственной вязкостью имеют следующий вид:

$$\rho \frac{\partial u^R}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial R} - \frac{1}{R^\delta}\frac{\partial}{\partial R}(R^\delta Q^{RR}), \tag{16}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{Q^{RR}}{\rho}\frac{\partial u^R}{\partial R}. \tag{17}$$

Здесь величина Q^{RR} представляет собой все, что остается от тензора Q^{ji}. Эта величина в данной системе координат должна быть взята такой же, что и величина скалярной вязкости q, определенной ранее.

Интегрируя уравнение количества движения (16), можно увидеть, что даже в одномерном случае тензорная искусственная вязкость имеет преимущества

$$\int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{\partial u^R}{\partial t} R^\delta \, dR = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial p}{\partial R} R^\delta \, dR - R^\delta Q^{RR}\Big|_{R_1}^{R_2}.$$

Если Q^{RR} обращается в нуль в граничных точках R_1 и R_2, то тогда искусственная вязкость полностью исчезает из уравнения. Короче говоря, мы имеем здесь надлежащее выражение для суммы «радиального количества движения» в цилиндрическом и сферическом случаях. При скалярной же вязкости соответствующее выражение получается лишь в плоском случае.

Второе преимущество тензорной искусственной вязкости проявляется в уравнении энергии. Изменение энтропии физической

системы определяется здесь произведением Q^{RR} на $\partial u^R/\partial R$ вместо $\partial\tau/\partial t$. Величина $\partial u^R/\partial R$ является функцией, зависящей только от деформации физической системы в радиальном направлении. Величина же $\partial\tau/\partial t$, вообще говоря, включает также вклады от общего радиального схождения или расхождения системы, когда она двигается вовнутрь или вовне.

Двумерные эйлеровы уравнения для декартовой и цилиндрической систем, т. е. эйлеровы уравнения, соответствующие уравнениям (4) и (5), также можно вывести из общих ковариантных уравнений. Они имеют такой вид:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial R}-\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial}{\partial R}(\hat{R}Q^{RR})-\frac{\partial Q^{ZR}}{\partial Z},$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial Z}-\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial}{\partial R}(\hat{R}Q^{RZ})-\frac{\partial Q^{ZZ}}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial\tau}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\left(Q^{RR}\frac{\partial u}{\partial R}+Q^{ZR}\frac{\partial u}{\partial Z}+Q^{RZ}\frac{\partial v}{\partial R}+Q^{ZZ}\frac{\partial v}{\partial Z}\right).$$

Преобразуя эти уравнения к лагранжеву пространству k, l и сравнивая с уравнениями (4) и (5), получаем следующие выражения для элементов тензора:

$$Q^{RR}=\frac{1}{j}\left[\frac{\partial R}{\partial k}\frac{\partial Z}{\partial l}q_A-\frac{\partial R}{\partial l}\frac{\partial Z}{\partial k}q_B\right],$$

$$Q^{ZR}=\frac{1}{j}\left[\frac{\partial Z}{\partial k}\frac{\partial Z}{\partial l}(q_A-q_B)\right],$$

$$Q^{RZ}=\frac{1}{j}\left[\frac{\partial R}{\partial k}\frac{\partial R}{\partial l}(q_B-q_A)\right],$$

$$Q^{ZZ}=\frac{1}{j}\left[\frac{\partial R}{\partial k}\frac{\partial Z}{\partial l}q_B-\frac{\partial R}{\partial l}\frac{\partial Z}{\partial k}q_A\right].$$

Из этих выражений явно виден тензорный характер рассматриваемой искусственной вязкости. Можно заметить, что данный тензор не обладает симметрией. Этот факт подтверждает ранее отмеченное нарушение уравнения момента количества движения.

5. *Устойчивость дифференциальных уравнений*

Практический интерес представляет устойчивость конечно-разностных уравнений, а не исходных дифференциальных уравнений. Идеальный подход при исследовании устойчивости заключался бы в том, чтобы взять конечно-разностные уравнения и определить их поведение при малых возмущениях. Однако этот идеальный подход, как оказалось, не приводит к каким-либо полезным результатам для конечно-разностных уравнений гидродинамики. Ряд авторов пытался осуществить такой подход, не получив, однако, каких-либо четких результатов.

В этой статье мы будем следовать методике Рихтмайера и фон Неймана и сначала исследуем поведение исходных дифференциальных уравнений при малых возмущениях. Такое исследование проводится в настоящем разделе. Упрощенные дифференциальные выражения, которые получаются в результате этого процесса, представляются далее в конечно-разностной форме. Требования устойчивости этих упрощенных конечно-разностных уравнений будут применяться затем для получения требований устойчивости полной системы конечно-разностных уравнений. Такая «эвристическая» методика оправдывается на практике. Требования устойчивости, полученные таким образом, оказываются достаточными для того, чтобы гарантировать устойчивость полной системы конечно-разностных уравнений.

Основное поведение системы при коротковолновых возмущениях исследуется для двух случаев. Сначала рассмотрим только гидродинамические уравнения при отсутствии скачков, а затем изучим гидродинамические уравнения при наличии скачков. Введение скачков приводит к такому основному поведению, которое отличается от первого простейшего случая и определяется величинами более высокого порядка. Поскольку в процессе решения задачи, вообще говоря, встречаются оба случая, то требование устойчивого поведения в этих случаях является очевидной необходимостью.

Возможно, но не вполне очевидно, что одновременное удовлетворение требований устойчивого поведения в обоих этих случаях, будет также достаточным для обеспечения устойчивости полной системы уравнений. Как оказалось, на практике дело обстоит именно так.

В следующем анализе мы будем пренебрегать величиной $\varepsilon(s)$, поскольку ее вариация обращается в нуль и, таким образом, не может входить в окончательные результаты.

Случай 1. Гидродинамика при отсутствии скачков. Из-за отсутствия искусственной вязкости здесь имеют место следующие дифференциальные уравнения:

$$\mathbf{u}_t + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0,$$

$$\varepsilon_t + p\tau_t = 0.$$

Уравнение для внутренней энергии эквивалентно условию постоянства энтропии во времени

$$S_t = 0.$$

Поэтому, как это обычно делается, возьмем уравнение состояния в виде

$$p = p(S, \rho)$$

и определим квадрат скорости звука

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_S.$$

Теперь уравнение количества движения можно записать так:

$$\mathbf{u}_t + \frac{c^2}{\rho}\nabla\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial S}\Big|_\rho \nabla S = 0.$$

Используя равенство

$$\frac{1}{\rho}\nabla\rho = \frac{-1}{\tau}\nabla\tau$$

и выражение для оператора

$$\nabla = \frac{1}{\mathbf{R}_k \cdot \bar{\mathbf{R}}_l}\left[\bar{\mathbf{R}}_l \frac{\partial}{\partial k} - \bar{\mathbf{R}}_k \frac{\partial}{\partial l}\right],$$

находим

$$\mathbf{R}_{tt} = \frac{c^2}{\mathbf{R}_k \cdot \bar{\mathbf{R}}_l \tau}\left[\bar{\mathbf{R}}_l \tau_k - \bar{\mathbf{R}}_k \tau_l\right] - \frac{\tau\,(\partial p/\partial S)\,|_\rho}{\mathbf{R}_k \cdot \bar{\mathbf{R}}_l}\left[\bar{\mathbf{R}}_l S_k - \bar{\mathbf{R}}_k S_l\right], \quad (18)$$

где

$$\tau = \frac{|\hat{R}|}{M}(\mathbf{R}_k \cdot \bar{\mathbf{R}}_l). \quad (19)$$

Уравнения (18) и (19) дают три уравнения относительно трех неизвестных, а именно $\mathbf{R}$ (две составляющие Z и R) и τ. Величины M и S представляют собой известные функции от k и l, а величины c^2 и $\partial p/\partial S|_\rho$ являются известными функциями от τ и S.

При численном интегрировании этих уравнений основной тип ошибки, которая будет проявляться в решении, соответствует малому возмущению, локализованному в малой области пространства. Следуя фон Нейману и Рихтмайеру, выведем уравнения, описывающие дальнейшее поведение этого возмущения, рассматривая первую вариацию. Пусть

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R} + \delta\mathbf{R},$$
$$\tau \to \tau + \delta\tau.$$

Предполагается, что величины $\mathbf{R}$, τ, M, S, c^2 и $\partial p/\partial S|_\rho$, входящие в получаемые уравнения, изменяются медленно в области возмущения, поэтому их можно считать постоянными. Тогда получаются линейные уравнения и нам необходимо исследовать только поведение различных членов ряда Фурье для возмущения. В частности, предположим, что решение имеет вид

$$\delta\mathbf{R} = \delta\mathbf{R}_0 \exp(im_1 k + im_2 l + \alpha t), \qquad \delta\tau = \delta\tau_0 \exp(im_1 k + im_2 l + \alpha t).$$

Кроме того, из-за локализации в малой области короткие волны будут составлять основную форму колебаний, что позволяет считать m_1 и m_2 большими величинами.

Рассмотрим теперь только цилиндрические координаты. Тогда из (19) найдем

$$\delta\tau = \frac{\delta R}{M}(\mathbf{R}_k \cdot \bar{\mathbf{R}}_l) + \frac{R}{M}(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \delta\mathbf{R}_k - \bar{\mathbf{R}}_k \cdot \delta\mathbf{R}_l).$$

Мы сохраним только члены высшего порядка по m_1 и m_2. Всякое дифференцирование по k и l будет повышать на единицу степень m_1 или m_2. Следовательно, величина δR выпадает из приведенного уравнения, поскольку она имеет нулевой порядок, в то время как $\delta\mathbf{R}_k$ и $\delta\mathbf{R}_l$ являются величинами первого порядка. Таким образом, получим

$$\delta\tau = \tau\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{R}. \tag{20}$$

Отметим теперь, что уравнение (20) имеет место как для декартовых, так и для цилиндрических координат, поскольку основное различие между ними проявляется в членах более низкого порядка, которые выпадают при выводе этого уравнения.

Из уравнения (20) видно, что порядок величины $\delta\tau$ должен быть на единицу выше, чем порядок $\delta\mathbf{R}$; поэтому теперь можно варьировать уравнение (18) таким же образом. В результате получим

$$\delta\mathbf{R}_{tt} = \frac{c^2}{\tau}\mathbf{D}\,\delta\tau. \tag{21}$$

Комбинируя (20) и (21), получаем следующее эффективное волновое [1]) уравнение для нашей системы:

$$\delta\tau_{tt} = c^2\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}\delta\tau. \tag{22}$$

Подставляя в уравнение (22) предполагаемое решение для $\delta\tau$, находим

$$\alpha^2 = -\frac{c^2}{j^2}(\mathbf{R}_l m_1 - \mathbf{R}_k m_2)^2.$$

Таким образом, α является мнимой величиной, как это следовало ожидать из вида волнового уравнения. Поскольку возмущения представляют собой просто синусоидальные колебания и не растут во времени, то дифференциальные уравнения в рассматриваемом случае будут устойчивыми для этого типа возмущения, если сделанные в этом исследовании различные предположения будут достаточно справедливыми, что обычно и имеет место на практике [2]).

Случай 2. Гидродинамика при наличии скачков. Здесь рассматривается случай, когда вводится искусственная вязкость.

[1]) Название «волновое» здесь является условным. В дальнейшем оно получит некоторое оправдание. — *Прим. ред.*

[2]) Если только $\tau_t \geqslant 0$; если же $\tau_t < 0$, то члены более низкого порядка вызовут неустойчивость.

Сначала мы проведем исследование для случая простой скалярной искусственной вязкости, а затем обсудим вкратце более сложный случай тензорной искусственной вязкости. В первоначальных вариантах численной схемы применялись именно уравнения со скалярной вязкостью, а требование устойчивости для них обладало также тем свойством, что оно являлось критерием достаточно точного интегрирования этих уравнений. Поэтому представляется целесообразным сохранить и здесь этот критерий, если он даже был выведен для иной системы уравнений.

Обозначим

$$(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k)_- = \min[(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k),\ 0],$$
$$(-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l)_- = \min[(-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l),\ 0],$$

тогда первую из рассматриваемых систем уравнений можно записать следующим образом.

А. Гидродинамические уравнения со скалярной искусственной вязкостью.

Они имеют следующий вид:

$$\mathbf{u}_t + \tau \mathbf{D}(p+q) = 0, \qquad \varepsilon_t = -(p+q)\tau_t,$$
$$p = p(\tau, \varepsilon), \qquad \tau = \frac{\hat{R}}{M} \mathbf{R}_k \cdot \bar{\mathbf{R}}_l,$$
$$q = c_0^2 \rho \left[\frac{(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k)_-^2}{\mathbf{R}_l^2} + \frac{(-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l)_-^2}{\mathbf{R}_k^2} \right].$$

Дальнейший шаг состоит в том, чтобы провести варьирование, отбрасывая все члены, кроме членов наивысшего порядка. Рассмотрим относительные порядки величины δq и δp.

Примем $\delta\mathbf{R}$ за характерную величину, имеющую нулевой порядок. Тогда

$$\delta q = c_0^2 \rho \frac{2(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k)_-}{\mathbf{R}_l^2} \bar{\mathbf{R}}_l \cdot \delta\mathbf{u}_k + \ldots.$$

Так как

$$\delta\mathbf{u}_k = \delta\mathbf{R}_{kt},$$

то, очевидно, δq имеет по крайней мере первый порядок по m_1, m_2 и первый порядок по α.

Далее,

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \tau}\bigg|_\varepsilon \delta\tau + \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\bigg|_\tau \delta\varepsilon.$$

Подставляя сюда

$$\delta\varepsilon = -(p+q)\delta\tau,$$

получаем

$$\delta p = \left[\left.\frac{\partial p}{\partial \tau}\right|_{\varepsilon} - \left.\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\right|_{\tau}(p+q)\right]\delta\tau.$$

Следовательно, δp имеет тот же порядок, что и $\delta\tau$. В первом случае мы видели, что $\delta\tau$ имеет первый порядок по m_1, m_2, но нулевой порядок по α. Таким образом, порядок δp по α на единицу меньше порядка δq, и величиной δp можно пренебречь при сравнении.

После преобразований [1]) придем к следующим выражениям:

$$\delta \mathbf{u}_t = -\tau \mathbf{D}\,\delta q,$$

$$\delta q = A\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \delta \mathbf{u}_k - B\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \delta \mathbf{u}_l,$$

где

$$A = \frac{2c_0^2\rho}{\mathbf{R}_l^2}(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k)_-,$$

$$B = \frac{2c_0^2\rho}{\mathbf{R}_k^2}(-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l)_-.$$

Комбинируя написанные выше уравнения, найдем

$$\delta q_t = -\tau(A\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{D}\delta q_k - B\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{D}\delta q_l).$$

Используя определение для оператора $\mathbf{D}$ (из § 2), получаем

$$\delta q_t = -\frac{\tau}{j}[A\mathbf{R}_l^2\,\delta q_{kk} - (A+B)\,\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{R}_l\,\delta q_{kl} + B\mathbf{R}_k^2\,\delta q_{ll}]. \qquad (23)$$

Пусть

$$\delta q = \delta q_0 \exp(im_1 k + im_2 l + \alpha t),$$

тогда, подставляя величины A и B, находим

$$\alpha = \frac{2c_0^2}{j}\left\{(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k)_-\, m_1^2 + (-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l)_-\, m_2^2 - \right.$$

$$\left. - \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{R}_l\left[\frac{(\bar{\mathbf{R}}_l \cdot \mathbf{u}_k)_-}{\mathbf{R}_l^2} + \frac{(-\bar{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{u}_l)_-}{\mathbf{R}_k^2}\right] m_1 m_2\right\}.$$

В некоторых случаях значение α может быть положительным. Поэтому рассматриваемые дифференциальные уравнения не всегда устойчивы относительно коротковолновых возмущений. Однако в дальнейшем будет показано, что конечно-разностные уравнения условно устойчивы во всех случаях. Отметим еще, что

[1]) Здесь предполагается, что α имеет порядок вдвое больший, чем порядок m_1 или m_2. Если в окончательном уравнении α получится как квадратичная функция m_1 и m_2, то это предположение будет самосогласованным и оправданным.

когда эта система уравнений представляется в конечно-разностной форме и решается на электронной вычислительной машине, она образует довольно удобную численную схему.

Б. Гидродинамические уравнения с тензорной искусственной вязкостью

Для этого случая исследование не разработано настолько хорошо, как в предыдущем случае. Положение осложняется в действительности не из-за тензорных свойств вязкости, а из-за того, что мы применили новую «одномерную» вязкость для q_A и q_B вместо обобщения старого выражения Рихтмайера и фон Неймана. Трудности здесь вызваны наличием множителя вида

$$\left|\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)_-\right|,$$

который мешает провести полностью параллельное исследование в тензорном случае. В этом случае был выведен новый критерий, но он сложен в применении, и поэтому в численную схему вводился первоначальный критерий устойчивости для скалярной искусственной вязкости. Этот критерий дает более сильное ограничение на шаг по времени, чем новый критерий, являясь дополнительно критерием достаточной точности. Отметим, что новый неприменяемый критерий мог оказаться неудовлетворительным просто из соображений программирования, так как он вычисляется по величинам на двух предыдущих шагах по времени, а не на одном предыдущем шаге.

6. Гидродинамические конечно-разностные уравнения

До настоящего момента индексы k и l у какой-либо функции ставились лишь для обозначения частных производных по соответствующей переменной. Теперь же индекс k, l с запятой между буквами k и l будет относиться к дискретным переменным k, l. Следовательно, например,

$$\mathbf{R}_{kl}=\frac{\partial^2 R}{\partial k\,\partial l},$$

тогда как

$$\mathbf{R}^n_{k,l}=\mathbf{R}(k,\ l,\ t^n), \qquad k,\ l,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где n — дискретная переменная времени

$$t^n=t^{n-1}+Dt^{n-1/2}=\sum_{s=1}^{n} Dt^{s-1/2}.$$

Типичная расчетная ячейка в дискретном k, l-пространстве изображена на рис. 2. Непосредственная запись в конечно-разностной форме соответствующих уравнений позволяет определить и вычислить такие термодинамические величины, как p, q_A и q_B в центре четырехугольной ячейки. Однако при использовании такого типа конечно-разностного представления гидродинамическое движение среды не всегда устойчиво, как это хотелось бы иметь. Рассмотрим длинную тонкую ячейку, сжимаемую с одной стороны (рис. 3, *а*). Поскольку левая сторона от центра ячейки сжимается, то должна быть введена величина q, чтобы оказать сопротивление этому движению и повысить энтропию. Однако величина q, вычисленная в центре ячейки, будет смещать также узловые точки по правую сторону от центра ячейки. Этот эффект совершенно

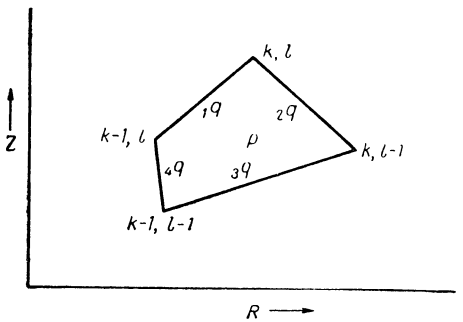


Рис. 2. Типичная четырехугольная ячейка в дискретном k, l-пространстве.

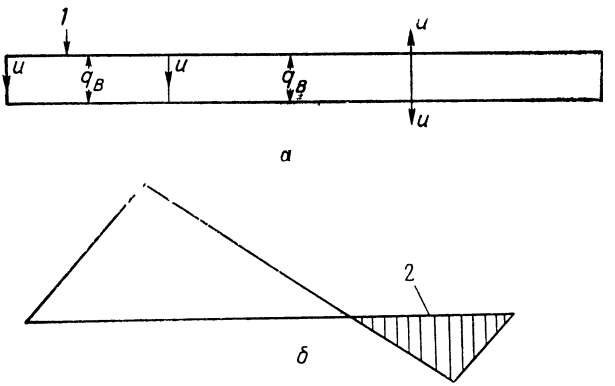


Рис. 3. *а*—длинная узкая ячейка, сжимаемая с одной стороны; *б* — нерегулярная, или «патологическая», ячейка.
1—сжатие; *2*—отрицательный объем.

неверен и приводит к нежелательному сдвигу узловых точек в существенно холодные области в данной задаче.

Указанная трудность встречается даже в случаях гладкого гидродинамического движения. Для такого типа задач более подходят конечно-разностные лагранжевы уравнения. Однако наличие даже самой небольшой турбулентности будет приводить

к образованию нерегулярных или так называемых «патологических» ячеек типа, показанного на рис. 3, *б*. Появление ячеек такого типа ранее наблюдалось в пробных расчетах. При использовавшихся тогда конечно-разностных уравнениях движение среды происходило ненадлежащим образом, когда появлялись такие ячейки. Это обстоятельство вызвало разработку в гидродинамике численных схем с треугольными ячейками.

В простейших схемах с треугольными ячейками просто строится одна из диагоналей в четырехугольной ячейке, а условие сохранения массы рассматривается отдельно внутри двух полученных треугольных ячеек (рис. 4). Далее определяются величины ε, p и q в центрах треугольных ячеек. Эти ячейки не могут выворачиваться наизнанку без обращения в нуль их удельного объема. В таком случае давление проходило бы через бесконечность и, следовательно, патологические ячейки не могли бы иметь места. Применение треугольных ячеек решает также проблему сдвига узловых точек, вызванного распространением возмущения величины q. Для решения гидродинамических задач было предложено несколько хороших численных схем с треугольными ячейками, и теперь они широко применяются.

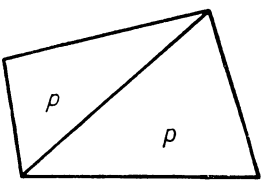


Рис. 4. Четырехугольная ячейка, которая сводится к треугольным ячейкам.

Треугольные ячейки налагают некоторые ограничивающие условия на рассматриваемую физическую систему. Эти условия в сущности являются нефизическими. Требуется, чтобы элемент жидкости, первоначально имевший форму треугольника, сохранял свою треугольную форму на протяжении всего времени.

В численных схемах с четырехугольными ячейками требуется, чтобы рассматриваемый элемент жидкости оставался четырехсторонним. Таким образом, здесь тоже вводятся некоторые ограничения для среды, но более слабые, чем для трехсторонних ячеек. В настоящей работе сделана попытка, пользуясь четырехугольными ячейками, записать конечно-разностные уравнения таким образом, чтобы они были достаточно корректными в случае «патологических» ячеек, и тем самым устранить необходимость в дополнительных ограничивающих условиях.

В этой статье конечно-разностные уравнения строятся с применением четырехугольной ячейки (рис. 5, *а*), причем значения p и ε определяются в ее центре, а четыре значения q определяются вдоль сторон ячейки [1]). Эти четыре значения q обеспечивают

[1]) Индексы 1, 2, 3, 4 у какой-либо переменной всегда соответствуют положению внутри четырехугольника, показанному на рис. 5, *а*.

стабилизацию формы ячейки. Например, в случае регулярной ячейки, сжимаемой с одной стороны, четыре величины q в ячейке рассчитываются так, чтобы создать эффект, показанный на рис. 5, *б*, т. е. устранить распространение возмущения q.

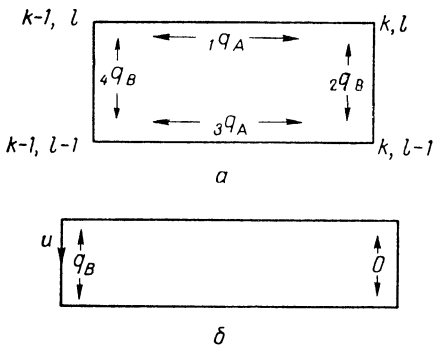


Рис. 5. *а* — четырехугольная ячейка, используемая для конечно-разностных уравнений в этой статье; *б* — расчет величин q в случае, когда регулярная ячейка сжимается с одной стороны.

Введем теперь некоторые обозначения. Разности по переменной k обозначим символом Δ, например:

$$\Delta \mathbf{R}^n_{k+1/2,\,l} = \mathbf{R}^n_{k+1,\,l} - \mathbf{R}^n_{k,\,l}.$$

Аналогично будем использовать обозначение

$$\delta \mathbf{R}^n_{k,\,l+1/2} = \mathbf{R}^n_{k,\,l+1} - \mathbf{R}^n_{k,\,l}.$$

Точно так же в случае разностей непосредственно следует, что

$$\Delta \bar{\mathbf{R}}^n_{k+1/2,\,l} = (\Delta Z^n_{k+1/2,\,l},\ -\Delta R^n_{k+1/2,\,l}),$$

$$\delta \bar{\mathbf{R}}^n_{k,\,l+1/2} = (\delta Z^n_{k,\,l+1/2},\ -\delta R^n_{k,\,l+1/2}).$$

Разности по переменной n, соответствующей времени, обозначим символом D, например:

$$D\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\,l-1/2} = \tau^{n+1}_{k-1/2,\,l-1/2} - \tau^n_{k-1/2,\,l-1/2}.$$

Для основных величин, таких, как R или τ, простое осреднение отмечается соответствующими индексами, например

$$\Delta \mathbf{R}^n_{k-1/2,\,l-1/2} = \frac{1}{2}\left[\Delta \mathbf{R}^n_{k-1/2,\,l} + \Delta \mathbf{R}^n_{k-1/2,\,l-1}\right].$$

В настоящей статье не обсуждаются подробности программирования рассматриваемой двумерной численной гидродинамической схемы. Мы будем предполагать, что в момент времени t^n для всех k и l известны следующие величины, определяющие физическую систему и образующие *Т-массив памяти*:

$$M_{k-1/2,\,l-1/2},\ p^{n-1}_{k-1/2,\,l-1/2},\ u^{n-1/2}_{k,\,l},\ v^{n-1/2}_{k,\,l},\ R^n_{k,\,l},$$

$$Z^n_{k,\,l},\ j^n_{k-1/2,\,l-1/2},\ \tau^n_{k-1/2,\,l-1/2},\ {}_1q^n_{k-1/2,\,l-1/2},\ {}_2q^n_{k-1/2,\,l-1/2},$$

$${}_3q^n_{k-1/2,\,l-1/2},\ {}_4q^n_{k-1/2,\,l-1/2},\ \varepsilon^n_{k-1/2,\,l-1/2}.$$

Конечно-разностные уравнения, приведенные в этом разделе, позволят, отправляясь от момента времени n, определить эти

величины в момент $n+1$. Кроме того, будем предполагать, что значения этих величин в момент времени n будут в нашем распоряжении в течение всего процесса расчета данного шага по времени. Не все указанные величины независимы, как это можно увидеть из конечно-разностных уравнений, которые будут выписаны ниже. Очевидно, перечисленные величины составляют систему, удобную при проведении расчетов.

Дополнительно необходимы следующие величины:

$$Dt^{n-1/2},\ Dt^{n},\ Dt^{n+1/2}.$$

Они связаны между собой формулой

$$Dt^{n}=\frac{1}{2}\left[Dt^{n-1/2}+Dt^{n+1/2}\right].$$

Вычисление величины $Dt^{n+3/2}$ будет рассмотрено в следующем разделе.

Первая величина, содержащаяся в T-массиве памяти, $M_{k-1/2,\,l-1/2}$, представляет собой массу ячейки. Эта величина, постоянная во времени, рассчитывается в начальный момент и в дальнейшем не изменяется. Поэтому

$$M_{k-1/2,\,l-1/2}=\rho^{0}_{k-1/2,\,l-1/2}\,J^{0}_{k-1/2,\,l-1/2}. \tag{24}$$

Вычисление объема ячейки $J^{n}_{k-1/2,\,l-1/2}$ описано ниже.

По заданной функции или по таблице определяется величина

$$p^{n}_{k-1/2,\,l-1/2}=p\left(\varepsilon^{n}_{k-1/2,\,l-1/2},\ \tau^{n}_{k-1/2,\,l-1/2}\right). \tag{25}$$

Для использования в уравнении количества движения величину p^{n} экстраполируют или интерполируют на «центрированное время n» по формуле

$$p^{cn}_{k-1/2,\,l-1/2}=p^{n}_{k-1/2,\,l-1/2}+\\ +\left(\frac{Dt^{n+1/2}-Dt^{n-1/2}}{4}\right)\left(\frac{p^{n}_{k-1/2,\,l-1/2}-p^{n-1}_{k-1/2,\,l-1/2}}{Dt^{n-1/2}}\right).$$

Это «центрированное время n» представляет собой среднее значение между $n-1/2$ и $n+1/2$ (рис. 6). Такое «центрированное время n» рассматривается лишь тогда, когда приращение времени $Dt^{n+1/2}$ отличается от соответствующего приращения для предыдущего цикла по времени. Совсем не очевидно, что применение этого центрирующего процесса даст существенный эффект. Такой процесс введен только потому, что это несложно сделать. Мы не проводили каких-либо исследований относительно того, насколько при этом улучшится (если вообще улучшится) решение рассматриваемой задачи.

Положим

$$\omega_{k+1/2,\,l}=\left[\frac{1}{4}\left(\Delta\mathbf{R}^{n}_{k+1/2,\,l+1/2}+\Delta\mathbf{R}^{n}_{k+1/2,\,l-1/2}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$\omega_{k,\,l+1/2}=\left[\frac{1}{4}\left(\delta\mathbf{R}^{n}_{k+1/2,\,l+1/2}+\delta\mathbf{R}^{n}_{k-1/2,\,l+1/2}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$\xi'_{k,\,l}=\frac{2\omega_{k-1/2,\,l}}{\omega_{k+1/2,\,l}+\omega_{k-1/2,\,l}},\qquad \eta'_{k,\,l}=\frac{2\omega_{k,\,l-1/2}}{\omega_{k,\,l+1/2}+\omega_{k,\,l-1/2}},$$

$$\xi_{k,\,l}=\max\{0{,}2,\ \min[\xi'_{k,\,l},\ 1{,}8]\},$$

$$\eta_{k,\,l}=\max\{0{,}2,\ \min[\eta'_{k,\,l},\ 1{,}8]\},$$

причем здесь ξ и η — две весовые функции. Они используются в уравнении количества движения для осреднения величин на

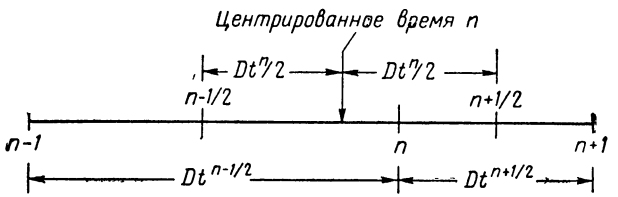


Рис. 6. Иллюстрация к определению «центрированного времени n».

основании их расположения в пространстве R, Z. Было установлено, что введение таких весовых функций позволяет лучше выполнять условие сохранения энергии по сравнению со случаем применения простого осреднения в пространстве k, l. Для этой цели идеальным было бы использовать функции ξ' и η', однако при определенных обстоятельствах это могло бы приводить к относительно неподвижным элементам жидкости. Применение ограниченных весовых функций ξ и η смягчает такое положение и все же дает удовлетворительное выполнение условия сохранения энергии.

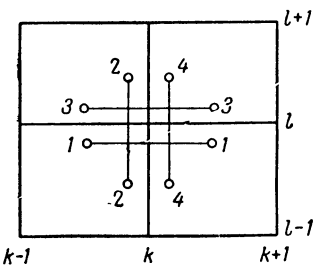


Рис. 7. Пространственные разности, соответствующие четырем выражениям в квадратных скобках уравнения (26).

После таких подготовительных замечаний можно приступить к представлению в конечно-разностной форме уравнения количества движения. Идя от общего к частному, т. е. в обратном порядке

по сравнению с фактическим ходом расчета, будем иметь

$$\mathbf{u}^{n+1/2}_{k,\,l} = \mathbf{u}^{n-1/2}_{k,\,l} + D\mathbf{u}^{n}_{k,\,l},$$

$$D\mathbf{u}^{n}_{k,\,l} = -Dt^{n}\left\{\tau\nabla p + M^{-1}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{l}q_{A})_{k} - M^{-1}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{k}q_{B})_{l}\right\}^{n}_{k,\,l},$$

$$\left\{\tau\nabla p + M^{-1}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{l}q_{A})_{k} - M^{-1}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{k}q_{B})_{l}\right\}^{n}_{k,\,l} =$$

$$= \eta_{k,\,l}\left[\frac{\bar{R}_{l}}{2\rho j}\frac{\partial p}{\partial k} + \frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{l\,1}q_{A})\right]^{n}_{k,\,l-1/2} +$$

$$+ (2-\eta_{k,\,l})\left[\frac{\bar{R}_{l}}{2\rho j}\frac{\partial p}{\partial k} + \frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{l\,3}q_{A})\right]^{n}_{k,\,l+1/2} -$$

$$- \xi_{k,\,l}\left[\frac{\bar{R}_{k}}{2\rho j}\frac{\partial p}{\partial l} + \frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{k\,2}q_{B})\right]^{n}_{k-1/2,\,l} -$$

$$- (2-\xi_{k,\,l})\left[\frac{\bar{R}_{k}}{2\rho j}\frac{\partial p}{\partial l} + \frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{k\,4}q_{B})\right]^{n}_{k+1/2,\,l}. \qquad (26)$$

Заметим, что в последнем уравнении проводится различие между величинами ${}_{1}q_{A}$ и ${}_{3}q_{A}$, а также между ${}_{2}q_{B}$ и ${}_{4}q_{B}$. Четыре выражения в квадратных скобках приблизительно соответствуют четырем пространственным разностям, как это показано на рис. 7.

Продолжая выкладки, получаем

$$\left[\frac{\bar{R}_{l}}{2\rho j}\frac{\partial p}{\partial k} + \frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial k}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{l\,1}q_{A})\right]^{n}_{k,\,l-1/2} =$$

$$= \left[\frac{\bar{R}_{l}}{2\rho j}\right]^{n}_{k,\,l-1/2}\Delta p^{cn}_{k,\,l-1/2} + \frac{\Delta(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{l\,1}q)^{n}_{k,\,l-1/2}}{M_{k+1/2,\,l-1/2} + M_{k-1/2,\,l-1/2}},$$

$$\left[\frac{\bar{R}_{k}}{2\rho j}\frac{\partial p}{\partial l} + \frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial l}(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{k\,2}q_{B})\right]^{n}_{k-1/2,\,l} =$$

$$= \left[\frac{\bar{R}_{k}}{2\rho j}\right]^{n}_{k-1/2,\,l}\delta p^{cn}_{k-1/2,\,l} + \frac{\delta(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{k\,2}q)^{n}_{k-1/2,\,l}}{M_{k-1/2,\,l+1/2} + M_{k-1/2,\,l-1/2}}$$

и аналогичные выражения находим для величин, содержащих ${}_{3}q_{A}$ и ${}_{4}q_{B}$. Входящие сюда разности запишем в виде

$$\Delta(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{l\,1}q)^{n}_{k,\,l-1/2} = \hat{R}_{k+1/2,\,l-1/2}\,\delta\bar{\mathbf{R}}^{n}_{k+1/2,\,l-1/2\,1}q^{n}_{k+1/2,\,l-1/2} -$$

$$- \hat{R}_{k-1/2,\,l-1/2}\,\delta\bar{\mathbf{R}}^{n}_{k-1/2,\,l-1/2\,1}q^{n}_{k-1/2,\,l-1/2},$$

$$\delta(\hat{R}\bar{\mathbf{R}}_{k\,2}q)^{n}_{k-1/2,\,l} = \hat{R}_{k-1/2,\,l+1/2}\,\Delta\bar{\mathbf{R}}^{n}_{k-1/2,\,l+1/2\,2}q^{n}_{k-1/2,\,l+1/2} -$$

$$- \hat{R}_{k-1/2,\,l-1/2}\,\Delta\bar{\mathbf{R}}^{n}_{k-1/2,\,l-1/2\,2}q^{n}_{k-1/2,\,l-1/2}.$$

Два следующих выражения представляются в конечных разностях не так просто, как это было сделано в случае двух предшествующих выражений

$$\left[\frac{\bar{\mathbf{R}}_l}{2\rho j}\right]^n_{k,\,l-1/2} = \frac{\delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k-1/2,\,l-1/2} + \delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k+1/2,\,l-1/2}}{2\left[\dfrac{j^n_{k-1/2,\,l-1/2}}{\tau^n_{k-1/2,\,l-1/2}} + \dfrac{j^n_{k+1/2,\,l-1/2}}{\tau^n_{k+1/2,\,l-1/2}}\right]},$$

$$\left[\frac{\bar{\mathbf{R}}_k}{2\rho j}\right]^n_{k-1/2,\,l} = \frac{\Delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k-1/2,\,l-1/2} + \Delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k-1/2,\,l+1/2}}{2\left[\dfrac{j^n_{k-1/2,\,l-1/2}}{\tau^n_{k-1/2,\,l-1/2}} + \dfrac{j^n_{k-1/2,\,l+1/2}}{\tau^n_{k-1/2,\,l+1/2}}\right]}.$$

Применение указанного конечно-разностного представления для величин $\bar{\mathbf{R}}_l/2\rho j$ и $\bar{\mathbf{R}}_k/2\rho j$ в предыдущих уравнениях основано на ранее полученном опыте. Здесь бóльшее значение придано якобиану j. Точнее, в соотношениях между величиной j и производными $\mathbf{R}_k$, $\mathbf{R}_l$ предпочтение отдается j. Величина j является якобианом преобразования переменных Эйлера в переменные Лангранжа и наиболее просто определяется в центре ячейки. *Производные* $\mathbf{R}_k$ и $\mathbf{R}_l$ *должны находиться в соответствии с якобианом* j, *поэтому их также надо определять в центре ячейки.* Следовательно, если в данном конечно-разностном уравнении как величину $\mathbf{R}_l$ (или $\bar{\mathbf{R}}_l$), так и величину j требуется иметь вдоль стороны ячейки и при этом j рассчитывается осреднением центрированных значений j на каждой стороне, то тогда величину $\mathbf{R}_l$ также нужно рассчитывать путем осреднения центрированных значений $\mathbf{R}_l$ на каждой стороне. Поэтому вместо формулы

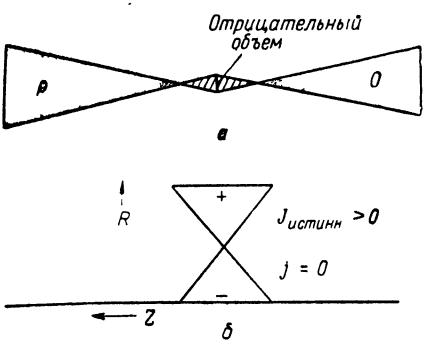


Рис. 8. *а* — «патологическая» ячейка типа, для которого обеспечивается приемлемое поведение уравнения количества движения; *б* — «патологическая» ячейка с положительным объемом и нулевой площадью (ситуация не имеет смысла).

$$[\bar{\mathbf{R}}_l]^n_{k,\,l-1/2} = \delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k,\,l-1/2}$$

при конечно-разностном представлении уравнения количества движения мы используем формулу

$$[\bar{\mathbf{R}}_l]^n_{k,\,l-1/2} = \frac{1}{4}\left[\delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k-1,\,l-1/2} + 2\delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k,\,l-1/2} + \delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k+1,\,l-1/2}\right].$$

Это обеспечивает, например, приемлемое поведение уравнения количества движения в случае, показанном на рис. 8, *а*. Если же применять простую конечно-разностную формулу, то поверхность раздела между двумя ячейками двигалась бы в направлении к ячейке с высоким давлением вместо того, чтобы двигаться от нее, как это будет происходить с рассматриваемой системой.

Используя величину $\mathbf{u}_{k,l}^{n+1/2}$ из уравнения (26), найдем $\mathbf{R}_{k,l}^{n+1}$ по формуле

$$\mathbf{R}_{k,l}^{n+1} = \mathbf{R}_{k,l}^{n} + Dt^{n+1/2}\mathbf{u}_{k,l}^{n+1/2}. \tag{27}$$

На этом заканчивается запись уравнения количества движения в конечно-разностном виде.

Перейдем теперь к расчету остальных величин в T-массиве памяти. Найдем значение якобиана

$$j_{k-1/2,\,l-1/2}^{n+1} = \Delta R_{k-1/2,\,l-1/2}^{n+1}\,\delta Z_{k-1/2,\,l-1/2}^{n+1} - \delta R_{k-1/2,\,l-1/2}^{n+1}\,\Delta Z_{k-1/2,\,l-1/2}^{n+1}. \tag{28}$$

При определении объема ячейки принимается, что в цилиндрических координатах она имеет угол раствора сектора, равный одному радиану, а в декартовых координатах она имеет единичную высоту. Поэтому объемный якобиан соответственно равен

$$J_{k-1/2,\,l-1/2}^{n+1} = \hat{R}_{k-1/2,\,l-1/2}^{n+1} j_{k-1/2,\,l-1/2}^{n+1}.$$

Поскольку

$$R_{k-1/2,\,l-1/2} = \frac{1}{4}[R_{k,l} + R_{k-1,l} + R_{k,l-1} + R_{k-1,l-1}],$$

то в цилиндрическом случае вычисленная величина объемного якобиана не равна истинному объему ячейки. Здесь

$$J_{\text{истинн}} = \frac{1}{6}\Delta\mathbf{R}_{k-1/2,\,l}\cdot\delta\bar{\mathbf{R}}_{k,\,l-1/2}(\hat{R}_{k-1,\,l} + \hat{R}_{k,\,l} + \hat{R}_{k,\,l-1}) +$$

$$+ \frac{1}{6}\Delta\mathbf{R}_{k-1/2,\,l-1}\cdot\delta\bar{\mathbf{R}}_{k-1,\,l-1/2}(\hat{R}_{k-1,\,l} + \hat{R}_{k-1,\,l-1} + \hat{R}_{k,\,l-1}).$$

Величины $J_{\text{истинн}}$ и j не обязательно стремятся к нулю одновременно. Это, в частности, справедливо вдоль оси цилиндра, где «патологические» ячейки вполне могли бы иметь положительный объем наряду с отрицательной площадью (см. рис. 8, *б*). Поскольку мы пытаемся получить конечно-разностные уравнения, которые были бы достаточно удовлетворительными даже при появлении отрицательных объемов, мы не можем допустить указанного положения.

Формула, примененная для J, согласуется с нашим общим подходом, состоящим в придании большей роли величине j — якобиану преобразования эйлерова пространства в лагранжево.

В уравнении количества движения величины $\Delta\mathbf{R}$ и $\delta\mathbf{R}$ осреднялись специальным способом в зависимости от того, как осреднялась величина j. Теперь же аналогичным образом вычисляется J, причем отдается предпочтение якобиану j.

Далее, легко находится удельный объем

$$\tau^{n+1}_{k-1/2,\ l-1/2} = J^{n+1}_{k-1/2,\ l-1/2} / M_{k-1/2,\ l-1/2}. \tag{29}$$

Следующий этап заключается в определении четырех значений q в момент времени $n+1$. Беря за основу соотношения (10) и (11), получаем такие формулы:

$$(\Delta u^A_-)_{k-1/2,\ l-1/2} = \min\left\{\frac{\delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k-1/2,\ l-1/2}\cdot\Delta\mathbf{u}^{n-1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}}{|\delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k-1/2,\ l-1/2}|},\ 0\right\},$$

$$(\delta u^B_-)_{k-1/2,\ l-1/2} = \min\left\{\frac{-\Delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k-1/2,\ l-1/2}\cdot\delta\mathbf{u}^{n-1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}}{|\Delta\bar{\mathbf{R}}^n_{k-1/2,\ l-1/2}|},\ 0\right\},$$

$$|\Delta\Delta u^A_-|_{k,\ l-1/2} = |(\Delta u^A_-)_{k+1/2,\ l-1/2} - (\Delta u^A_-)_{k-1/2,\ l-1/2}|,$$

$$|\delta\delta u^B_-|_{k-1/2,\ l} = |(\delta u^B_-)_{k-1/2,\ l+1/2} - (\delta u^B_-)_{k-1/2,\ l-1/2}|,$$

$$|\Delta\Delta u^A_-|_{k-1/2,\ l-1/2} = \frac{1}{2}\{|\Delta\Delta u^A_-|_{k,\ l-1/2} + |\Delta\Delta u^A_-|_{k-1,\ l-1/2}\},$$

$$|\delta\delta u^B_-|_{k-1/2,\ l-1/2} = \frac{1}{2}\{|\delta\delta u^B_-|_{k-1/2,\ l} + |\delta\delta u^B_-|_{k-1/2,\ l-1}\},$$

$$(\Delta u^A_-)_1 = \min\left\{\frac{\delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}\cdot\Delta\mathbf{u}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l}}{|\delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}|},\ 0\right\},$$

$$(\delta u^B_-)_2 = \min\left\{\frac{-\Delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}\cdot\delta\mathbf{u}^{n+1/2}_{k,\ l-1/2}}{|\Delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}|},\ 0\right\},$$

$$(\Delta u^A_-)_3 = \min\left\{\frac{\delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}\cdot\Delta\mathbf{u}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1}}{|\delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}|},\ 0\right\},$$

$$(\delta u^B_-)_4 = \min\left\{\frac{-\Delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}\cdot\delta\mathbf{u}^{n+1/2}_{k-1,\ l-1/2}}{|\Delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}|},\ 0\right\},$$

$$_1q^{n+1}_{k-1/2,\ l-1/2} = \frac{-2}{\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}}(\Delta u^A_-)_1\,|\Delta\Delta u^A_-|_{k-1/2,\ l-1/2},$$

$$_2q^{n+1}_{k-1/2,\ l-1/2} = \frac{-2}{\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}}(\delta u^B_-)_2\,|\delta\delta u^B_-|_{k-1/2,\ l-1/2},$$

$$_3q^{n+1}_{k-1/2,\ l-1/2} = \frac{-2}{\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}}(\Delta u^A_-)_3\,|\Delta\Delta u^A_-|_{k-1/2,\ l-1/2},$$

$$_4q^{n+1}_{k-1/2,\ l-1/2} = \frac{-2}{\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\ l-1/2}}(\delta u^B_-)_4\,|\delta\delta u^B_-|_{k-1/2,\ l-1/2}. \tag{30}$$

Заметим, что при определении величин q_n в момент времени $n+1$ были использованы значения $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^{n+1/2}$, $\mathbf{u}^{n-1/2}$, $\mathbf{u}^{n+1/2}$ и $\tau^{n+1/2}$. Такая схема не выглядит очень точной. В действительности же это не так, если учесть, что здесь мы представляем в конечно-разностной форме лишь соотношения (10) и (11). Что же касается уравнений сохранения, то для всех них, как мы помним, необходима такая искусственная вязкость, которая достаточно быстро обращается в нуль впереди и позади ударной волны. Приведенные выражения для q обладают таким свойством. Можно считать, что эти q являются точным представлением некоторой искусственной вязкости, несколько отличной от q_A и q_B, для которой мы не стали находить дифференциальные выражения.

Причина, по которой используются значения $\mathbf{R}$, $\mathbf{u}$ и τ в указанные различные моменты времени, отчасти определяется просто удобством, связанным с деталями программирования. Рассматриваемая тензорная искусственная вязкость была введена в уже имевшуюся программу расчета. Однако в этой программе нельзя было бы получать величины q_A и q_B в момент времени $n+1$, поскольку здесь значение $\mathbf{u}^{n+1/2}$ было самым последним хранившимся в памяти значением скорости [1]).

На практике значения q вычисляются обычно в момент времени $n+1/2$. Что касается уравнения количества движения, то здесь не играет роли момент времени, для которого берется значение q, надо только пользоваться одним и тем же значением. Однако в уравнении энергии это обстоятельство проявляется совсем по-другому, как видно из следующих выражений:

$$(\delta\bar{\mathbf{R}}\cdot\Delta\mathbf{u})_-^{n+1/2}=\min\left\{\delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\,l-1/2}\cdot\Delta\mathbf{u}^{n+1/2}_{k-1/2,\,l-1/2},\ 0\right\},$$

$$(-\Delta\bar{\mathbf{R}}\cdot\delta\mathbf{u})_-^{n+1/2}=\min\left\{-\Delta\bar{\mathbf{R}}^{n+1/2}_{k-1/2,\,l-1/2}\cdot\delta\mathbf{u}^{n+1/2}_{k-1/2,\,l-1/2},\ 0\right\},$$

$$q_A^{n+1/2}=\frac{1}{4}\left({}_1q^n_{k-1/2,\,l-1/2}+{}_1q^{n+1}_{k-1/2,\,l-1/2}+{}_3q^n_{k-1/2,\,l-1/2}+{}_3q^{n+1}_{k-1/2,\,l-1/2}\right),$$

$$q_B^{n+1/2}=\frac{1}{4}\left({}_2q^n_{k-1/2,\,l-1/2}+{}_2q^{n+1}_{k-1/2,\,l-1/2}+{}_4q^n_{k-1/2,\,l-1/2}+{}_4q^{n+1}_{k-1/2,\,l-1/2}\right),$$

$$D\varepsilon(q)^{n+1/2}_{k-1/2,\,l-1/2}=$$

$$=\frac{-\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\,l-1/2}\,Dt^{n+1/2}}{j^{n+1/2}_{k-1/2,\,l-1/2}}\left[q_A^{n+1/2}(\delta\bar{\mathbf{R}}\cdot\Delta\mathbf{u})_-^{n+1/2}+q_B^{n+1/2}(-\Delta\bar{\mathbf{R}}\cdot\delta\mathbf{u})_-^{n+1/2}\right],$$

---

[1]) Одно изменение, которое могло бы внести улучшение в схему расчета, заключается в том, чтобы вычислить $|\Delta\Delta u^B|$ и $|\delta\delta u^B_-|$ в точках 1, 3 и 2, 4 соответственно вместо использования общей, центрированной относительно ячейки величины в каждом случае.

$$\varepsilon^{n+1/2} = \varepsilon^{n}_{k-1/2,\, l-1/2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[- p^{n}_{k-1/2,\, l-1/2} D\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2} + D\varepsilon\,(q)^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2} + D\varepsilon\,(s)^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2}\right],$$
$$\tilde{p}^{n+1/2} = p\,(\varepsilon^{n+1/2},\ \tau^{n+1/2}),$$
$$\varepsilon^{n+1}_{k-1/2,\, l-1/2} = \varepsilon^{n}_{k-1/2,\, l-1/2} - \tilde{p}^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2} D\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2} +$$
$$+ D\varepsilon\,(q)^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2} + D\varepsilon\,(s)^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2}. \qquad (31)$$

Ясно, что при определении искомой величины q в момент времени $n+1$ в уравнении энергии надо проводить осреднение в предыдущий момент времени, чтобы получить необходимое для этой цели значение q при $n+{}^1/_2$. Указанная система уравнений имеет второй порядок точности по времени для искусственной вязкости, а также для давления.

Таким образом, все величины, входящие в T-массив памяти, мы пересчитали с момента времени n на момент времени $n+1$, и, следовательно, вся физическая система оказалась продвинутой на один шаг по времени. Повторяя описанную процедуру, можно продвигать эту систему во времени так далеко, как это желательно или возможно.

7. Выбор величины Dt

Крайняя верхняя граница величины Dt^n определяется требованиями устойчивости волнового уравнения (22) и уравнения (23), характеризующего устойчивость q. Эти уравнения будут представлены в конечно-разностной форме прямым явным способом, который довольно близко соответствует способу записи гидродинамических уравнений в конечно-разностной форме. Рассматриваемые дифференциальные уравнения являются лишь аппроксимациями для гидродинамических дифференциальных уравнений. Поэтому прямое представление в конечно-разностной форме должно давать результаты, имеющие порядок аппроксимаций дифференциальных уравнений.

Исследование устойчивости мы будем проводить в матричной форме. Вкратце этот метод состоит в следующем. Пусть

$$F^{(n)} \sim \left(\ldots f^{n}_{k,\, l-1},\ f^{n}_{k,\, l},\ f^{n}_{k,\, l+1}, \ldots \right).$$

Тогда конечно-разностное уравнение запишется в форме

$$F^{n+1} = UF^{(n)}, \quad F^{(n)} = U^n F^{(0)},$$

где U — матрица. Поэтому последовательное применение матрицы U позволит сделать шаг по времени для данной системы. Это справедливо также для любых ошибок, которые могут появляться, т. е. пусть

$$F^{(0)} \to F^{(0)} + F^{(0)}_{e}.$$

Тогда

$$F_e^{(n)} = U^n F_e^{(0)}.$$

Разложим $F_e^{(0)}$ по собственным векторам матрицы U

$$UF(m) = U'_m F(m),$$
$$F_e^{(0)} = \sum_m \alpha_m F(m).$$

В результате получим

$$F_e^{(n)} = \sum_m \alpha_m (U'_m)^n F(m),$$

откуда видно, что если

$$|U'_m| \leqslant 1,$$

то m-я компонента ошибки не будет расти экспоненциально. Следовательно, для устойчивости необходимо применять матрицы U, собственные значения которых удовлетворяют указанному условию.

Рассмотрим оператор вида

$$\mathscr{H} = a_1 \frac{\partial^2}{\partial k^2} + 4a_2 \frac{\partial^2}{\partial k\, \partial l} + a_3 \frac{\partial^2}{\partial l^2},$$

где a_1, a_2, a_3 — постоянные величины, причем $a_1 > 0$, $a_3 > 0$. Пусть f — некоторая произвольная функция, тогда

$$[\mathscr{H}f]_{k,l} = a_1 [f_{k+1,l} - 2f_{k,l} + f_{k-1,l}] +$$
$$+ a_2 [f_{k+1,l+1} + f_{k-1,l-1} - f_{k-1,l+1} - f_{k+1,l-1}] +$$
$$+ a_3 [f_{k,l+1} - 2f_{k,l} + f_{k,l-1}].$$

Определим теперь матрицу H, полагая

$$(HF)_{k,l} = [\mathscr{H}f]_{k,l}.$$

Собственные векторы матрицы H имеют вид

$$F(m_1 m_2) = (\ldots f_{k,l}(m_1 m_2) \ldots),$$
$$f_{k,l}(m_1 m_2) = f_0 \exp(i m_1 k + i m_2 l).$$

Чтобы найти собственные значения H' матрицы H, применим эту матрицу H к $F(m_1 m_2)$, тогда получим

$$HF(m_1 m_2) = H'(m_1 m_2) F(m_1 m_2),$$

$$(HF(m_1 m_2))_{k,l} = a_1 f_{k,l}(m_1 m_2) [e^{i m_1} - 2 + e^{-i m_1}] +$$
$$+ a_2 f_{k,l}(m_1 m_2) [\exp(i m_1 + i m_2) + \exp(-i m_1 - i m_2) -$$
$$- \exp(-i m_1 + i m_2) - \exp(i m_1 - i m_2)] +$$
$$+ a_3 f_{k,l}(m_1 m_2) [e^{i m_2} - 2 + e^{-i m_2}].$$

Первую скобку здесь можно переписать так:

$$4i^2 \frac{(\exp(im_1/2) - \exp(-im_1/2))}{2i} \frac{(\exp(im_1/2) - \exp(-im_1/2))}{2i} =$$

$$= -4\sin^2\frac{m_1}{2}.$$

Аналогично третья скобка примет вид

$$-4\sin^2\frac{m_2}{2}.$$

Вторая скобка запишется так:

$$4i^2 \frac{(e^{im_1} - e^{-im_1})}{2i} \frac{(e^{im_2} - e^{-im_2})}{2i} = -4\sin m_1 \sin m_2.$$

Таким образом, собственные значения матрицы H даются формулой

$$H'(m_1 m_2) = -4\left[a_1 \sin^2\frac{m_1}{2} + a_3 \sin^2\frac{m_2}{2} + a_2 \sin m_1 \sin m_2\right].$$

Верхний предел для интервала значений, которые могут иметь величины m_1 и m_2, определяется дискретными переменными k и l. Самая короткая волна, которую может описать конечно-разностная сетка, имеет пилообразное поведение. Это соответствует

$$m_1, m_2 = \pm\pi$$

и представляет собой основную форму колебаний, имеющую место при наибольшей неустойчивости. Нижний предел величин m_1 и m_2 определяется тем фактом, что дифференциальные уравнения, которые мы здесь используем, были выведены при условии, что произведение $m_1 m_2$ значительно больше каждого из сомножителей m_1 и m_2. В таком случае диапазон будет не слишком широким, поскольку π не является очень большим числом. Может показаться, что данное исследование в лучшем случае применимо только для форм колебаний при

$$(m_1, m_2) = (\pm\pi, \pm\pi), \quad \left(\pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi\right)$$

и, вероятнее всего, только для первой, или основной, формы колебаний [1]). Однако для всех этих трех форм колебаний конечно-разностный член, соответствующий смешанной производной в $\mathscr{H}$, обращается в нуль. Это позволяет нам считать, что H' имеет следующие свойства:

$$H' < 0, \quad H'_{\min} = -4(a_1 + a_3).$$

[1]) В целом весь этот подход является «эвристическим», т. е. выведенные условия достаточны для обеспечения практической устойчивости.

Следовательно, обращение в нуль конечно-разностного члена, соответствующего смешанной производной, обеспечивает устойчивость системы конечно-разностных уравнений при скалярной искусственной вязкости q. В случае же дифференциальных уравнений член со смешанной производной вносил бы неопределенный вклад, что в некоторых ситуациях могло бы привести к неустойчивости дифференциальных уравнений.

Теперь мы найдем критерии устойчивости при явном конечно-разностном представлении следующих двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \mathscr{H} f, \text{ случай 1,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathscr{H} f, \text{ случай 2.}$$

Первое из этих уравнений соответствует волновому уравнению, а второе — уравнению, характеризующему устойчивость q.

Случай 1. Проводя конечно-разностное представление по k и l, получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = HF.$$

Далее, используя конечные разности по времени, находим

$$\frac{F^{n+1} - 2F^n + F^{n-1}}{Dt^2} = HF^n$$

или

$$[U - 2 + U^{-1} - Dt^2 H] F^n = 0,$$

$$\frac{1}{2} U^2 - \left[\frac{Dt^2}{2} H + 1\right] U + \frac{1}{2} = 0,$$

$$a = c = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{Dt^2}{2} H - 1, \quad U = -b \pm \sqrt{b^2 - 1}.$$

Далее мы будем обозначать собственные значения операторов при помощи штриха у соответствующей величины.

Для $b'^2 > 1$, очевидно, может быть $|U'| > 1$, что неудовлетворительно. Если потребовать, чтобы

$$-1 \leqslant b' \leqslant 1,$$

то тогда

$$U' = -b' \pm i\sqrt{1 - b'^2},$$

$$|U'|^2 = b'^2 + 1 - b'^2 = 1.$$

Отсюда видно, что конечно-разностное представление будет устойчивым, если выполняется условие

$$-1 \leqslant -\frac{Dt^2}{2} H' - 1 \leqslant 1.$$

Поскольку H' отрицательно, то неравенство, стоящее слева, удовлетворяется. Неравенство, стоящее справа, дает условие

$$Dt^2 \leqslant -4/H'.$$

Следовательно, для явного конечно-разностного представления уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} + 4a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial k\, \partial l} + a_3 \frac{\partial^2 f}{\partial l^2}$$

получим следующее общее условие (при $H' \leqslant 0$):

$$Dt^2 \leqslant \left[a_1 \sin^2 \frac{m_1}{2} + a_2 \sin m_1 \sin m_2 + a_3 \sin^2 \frac{m^2}{2}\right]^{-1},$$

которое в нашем случае сведется к условию

$$Dt^2 \leqslant [a_1 + a_3]^{-1}, \text{ случай 1.} \tag{32}$$

Случай 2. В этом случае имеем

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{Dt} = HF^n, \quad [U - 1 - DtH] F^n = 0,$$
$$U = 1 + DtH.$$

Условие устойчивости требует, чтобы

$$-1 \leqslant U' \leqslant 1.$$

Принимая $H' < 0$, видим, что правое неравенство удовлетворяется. Левое неравенство дает

$$-DtH' \leqslant 2.$$

Следовательно, для явного конечно-разностного представления уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} + 4a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial k\, \partial l} + a_3 \frac{\partial^2 f}{\partial l^2}$$

получим следующее общее условие (при $H' < 0$):

$$Dt \leqslant \left[2\left(a_1 \sin^2 \frac{m_1}{2} + a_2 \sin m_1 \sin m_2 + a_3 \sin^2 \frac{m_2}{2}\right)\right]^{-1},$$

которое в нашем случае сведется к условию

$$Dt \leqslant [2(a_1 + a_3)]^{-1}, \text{ случай 2.} \tag{33}$$

Волновое уравнение (22) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{c^2}{j^2}\left[\delta \mathbf{R}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} - 2\,\delta \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{R} \frac{\partial^2 f}{\partial k\, \partial l} + \Delta \mathbf{R}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial l^2}\right]$$

Таким образом, здесь

$$a_1 = \frac{c^2}{j^2}\delta \mathbf{R}^2, \quad a_3 = \frac{c^2}{j^2}\Delta \mathbf{R}^2,$$

что дает следующее условие устойчивости Куранта (случай 1):

$$Dt_c^2 \leqslant \frac{j^2}{c^2(\delta R^2 + \Delta R^2)}.$$

Для совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей γ имеем

$$p = A(S)\rho^{\gamma},$$

так что

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \gamma p \tau \text{ (совершенный газ).}$$

В общем случае применяемые уравнения состояния не всегда являются уравнениями состояния для совершенного газа с постоянным γ. Однако, чтобы получить простое выражение для c^2, можно вычислять некоторое эффективное значение γ, предполагая, что газ является совершенным, и используя затем приведенное уравнение. Таким образом, разрешая уравнение

$$p = \frac{(\gamma_{\text{эфф}} - 1)\varepsilon}{\tau},$$

найдем эффективную величину $\gamma_{\text{эфф}}$

$$\gamma_{\text{эфф}} = 1 + \frac{p\tau}{\varepsilon}.$$

Тогда для каждой ячейки в рассматриваемой задаче можно рассчитать величину Dt_c, входящую в условие устойчивости Куранта:

$$c^2 = \tilde{p}^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2}\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2} + \frac{\left(\tilde{p}^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2}\tau^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2}\right)^2}{\varepsilon^{n+1/2}_{k-1/2,\, l-1/2}},$$

$$Dt_c^2 = K\frac{\left(j^{n+1}_{k-1/2,\, l-1/2}\right)^2}{c^2\left[\left(\delta R^{n+1}_{k-1/2,\, l-1/2}\right)^2 + \left(\Delta R^{n+1}_{k-1/2,\, l-1/2}\right)^2\right]}, \qquad (34)$$

где K — квадрат числа Куранта — представляет собой некоторый коэффициент запаса, достаточный для обеспечения устойчивости при любых возможных обстоятельствах в расчете. Удовлетворительной величиной для K оказывается значение

$$K = 0{,}25,$$

что соответствует числу Куранта, равному 0,5. Из всех рассчитанных значений Dt_c^2 выбирают минимальное значение и, извлекая из него квадратный корень, получают единственное значение $Dt_c^{\min}$.

Из уравнения (23), характеризующего устойчивость q, следует

$$a_1 = -\frac{\tau}{j}AR_l^2, \quad a_3 = -\frac{\tau}{j}BR_k^2.$$

Тогда

$$Dt_q \leqslant \frac{-\rho j}{2\left(AR_l^2 + BR_k^2\right)},$$

или

$$Dt_q = \frac{-j_{k-1/2,\, l-1/2}^{n+1}}{10\left[(\delta\bar{\mathbf{R}} \cdot \Delta\mathbf{u})_- + (-\Delta\bar{\mathbf{R}} \cdot \delta\mathbf{u})_-\right]}, \qquad (35)$$

где

$$(\delta\bar{\mathbf{R}} \cdot \Delta\mathbf{u})_- = \min\left[\Delta\mathbf{u}_{k-1/2,\, l}^{n+1/2} \cdot \delta\bar{\mathbf{R}}_{k-1/2,\, l-1/2}^{n+1},\ \Delta\mathbf{u}_{k-1/2,\, l-1}^{n+1/2} \cdot \delta\bar{\mathbf{R}}_{k-1/2,\, l-1/2}^{n+1},\ 0\right],$$

$$(-\Delta\bar{\mathbf{R}} \cdot \delta\mathbf{u})_- =$$

$$= \min\left[-\delta\mathbf{u}_{k,\, l-1/2}^{n+1/2} \cdot \Delta\bar{\mathbf{R}}_{k-1/2,\, l-1/2}^{n+1} - \delta\mathbf{u}_{k-1,\, l-1/2}^{n+1/2} \cdot \Delta\bar{\mathbf{R}}_{k-1/2,\, l-1/2}^{n+1},\ 0\right],$$

и принята оценка

$$4c_0^2 + 2 = 10.$$

Дополнительная величина 2, прибавленная к величине $4c_0^2$, гарантирует, что величина Dt_q будет всегда удовлетворять требуемому неравенству.

Рассмотрим выражение для Dt_q. Пусть величина Dt в данной задаче равна величине Dt_q в некоторой ячейке, и пусть эта ячейка сжимается в обоих направлениях. Тогда

$$\frac{Dj}{Dt_q} = (\delta\bar{\mathbf{R}} \cdot \Delta\mathbf{u})_- + (-\Delta\bar{\mathbf{R}} \cdot \delta\mathbf{u})_-;$$

откуда после подстановки в (35) получаем такой результат:

$$-Dj = j/10.$$

Как видно, это условие ограничивает до 10% величину площади любой ячейки, на которую она может уменьшиться на протяжении одного шага по времени. (Такая оценка приблизительна, поскольку эта величина Dt_q используется на следующем шаге по времени.) Интуитивно можно ожидать, что это условие похоже на условие достаточной точности и так же, как достаточный критерий устойчивости, не зависит от типа искусственной вязкости, применяемой в расчете.

Из рассчитанных значений Dt_q выбирают минимальное значение и затем вычисляют

$$Dt^{n+3/2} = \min\left[Dt_q^{\min},\ Dt_c^{\min}\right].$$

Величина $Dt^{n+3/2}$ берется в качестве $Dt^{n+1/2}$ на следующем цикле по времени, что гарантирует устойчивость конечно-разностных уравнений. Оказывается, что рассмотренные требования устойчивости обеспечивают также достаточное условие для точности интегрирования.

8. Рассмотрение границ

Применение специальных программ, необходимых для расчета уравнения количества движения вдоль границ физической системы, можно свести к минимуму, если распространить среду еще на пол-ячейки с внешней стороны границ и определять внешнее давление в этой точке. Тогда для граничных точек, так же как для внутренних, можно использовать общее уравнение количества движения (26). Этот прием имеет тот недостаток, что при решении задачи в методе расчета допускается наличие среды вне конечно-разностной сетки, расположенной в данной физической системе. Однако если ячейки берутся достаточно малыми, чтобы хорошо интегрировать систему уравнений, то тогда наличие среды снаружи физической системы обычно не будет вносить существенных ошибок.

Вычисляя работу, проделанную на границе физической системы, можно ввести в метод расчета контроль по энергии. Из уравнения (7) можно получить соответствующее выражение для этой работы:

$$DW^{n-1/2}_{k,\,l-1/2} = \pm\, Dt^{n-1/2}\left[(p+q_A)\,\mathbf{u}\cdot\hat{R}\,\delta\bar{\mathbf{R}}\right]^{n-1/2}_{k,\,l-1/2},$$

$$DW^{n-1/2}_{k-1/2,\,l} = \pm\, Dt^{n-1/2}\left[(p+q_B)\,\mathbf{u}\cdot\hat{R}\,\Delta\bar{\mathbf{R}}\right]^{n-1/2}_{k-1/2,\,l}.$$

Суммируя величины $DW^{n-1/2}$ вдоль границы и складывая с величиной W^{n-1}, найдем значение W^n, т. е. величину работы, проделанной над физической системой с момента начала численного расчета задачи.

Внутреннюю и кинетическую энергии можно вычислить по формулам

$$(\text{I. E.})^n = \sum_{k,\,l} M_{k-1/2,\,l-1/2}\varepsilon^n_{k-1/2,\,l-1/2},$$

$$(\text{K. E.})^{n+1/2} =$$

$$= \sum_{k,\,l} \frac{1}{8} M_{k-1/2,\,l-1/2}\left[(\mathbf{u}^{n+1/2}_{k,\,l})^2 + (\mathbf{u}^{n+1/2}_{k-1,\,l})^2 + (\mathbf{u}^{n+1/2}_{k,\,l-1})^2 + (\mathbf{u}^{n+1/2}_{k-1,\,l-1})^2\right].$$

Кинетическая энергия в момент времени t^n равна

$$(\text{K. E.})^n = \frac{(\text{K. E.})^{n-1/2}\,Dt^{n+1/2} + (\text{K. E.})^{n+1/2}\,Dt^{n-1/2}}{Dt^{n-1/2} + Dt^{n+1/2}}.$$

Далее определим

$$C^n_E = (\text{I. E.})^n + (\text{K. E.})^n - W^n,$$

$$DC^{n-1/2}_E = C^n_E - C^{n-1}_E.$$

Величина C_E^n в момент времени t^n представляет собой приближенное значение полной энергии, которой обладала физическая система в момент времени $t=0$. Если бы интегрирование системы конечно-разностных уравнений проводилось точно, то полная энергия оставалась бы постоянной. Величина $DC_E^{n-1/2}$ оценивает изменение полной энергии за один шаг по времени, обусловленное неточностью интегрирования конечно-разностных уравнений. Большое изменение величины $DC_E^{n-1/2}$ указывает на возможную машинную (или иную) ошибку в расчетах.

9. Пример численного решения задачи

Чтобы проиллюстрировать поведение применяемых здесь конечно-разностных уравнений, была рассмотрена следующая небольшая задача. Пусть в начальный момент времени физическая система представляет собой объем газа в виде сплющенного сфероида при температуре, равной абсолютному нулю. В момент времени $t=0$ на внешнюю поверхность этого сфероида начинает равномерно действовать давление, закон изменения которого показан на рис. 9. (Единицы измерения, которые принимаются в этом примере, могут быть произвольными. Здесь можно выбрать любую самосогласованную систему единиц.)

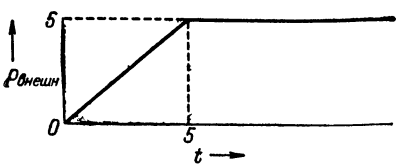


Рис. 9. Закон изменения внешнего давления, приложенного в рассматриваемом примере к сплющиваемому газовому сфероиду.

Качественное поведение физической системы с течением времени видно из приведенных графиков, на которых изображена лагранжева расчетная сетка, рассматриваемая в данной физической системе (рис. 10). Эти графики были выведены на электронную лучевую трубку с помощью дополнительной обслуживающей программы, которая обрабатывала данные, получаемые по основной программе расчета. Обычно выдаваемая подробная количественная информация содержит серию чисел, представляющих собой значения величин, хранимых в T-массиве памяти для различных моментов времени. Однако рассматриваемая задача не столь интересна, чтобы проводить такое детальное ее изучение. Кроме того, мы применяли сравнительно грубые расчетные ячейки. Это позволяло свести к минимуму машинное время, необходимое для решения задачи. Если бы кого-нибудь действительно заинтересовали подробности поведения рассматриваемой физической системы, то для этой задачи следовало бы провести другой расчет с более мелкими ячейками. Что же

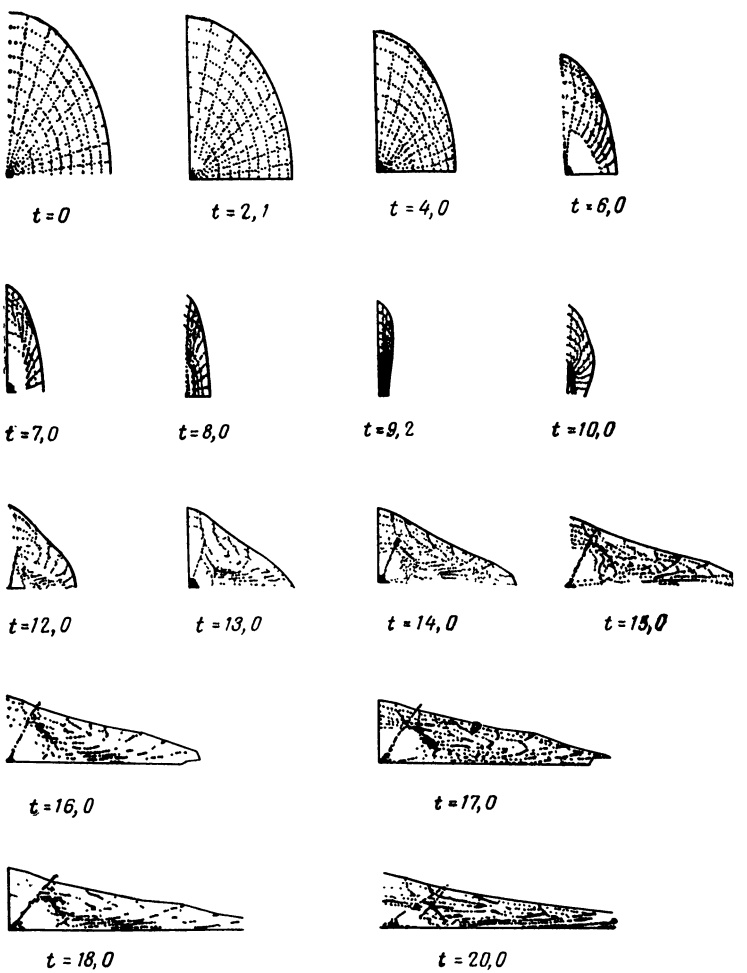


Рис. 10а. Графики, выведенные на электронную лучевую трубку, показывают для различных моментов времени лагранжеву расчетную сетку, рассматриваемую в физической системе в данной задаче. На следующих страницах эти графики изображены в увеличенном масштабе.

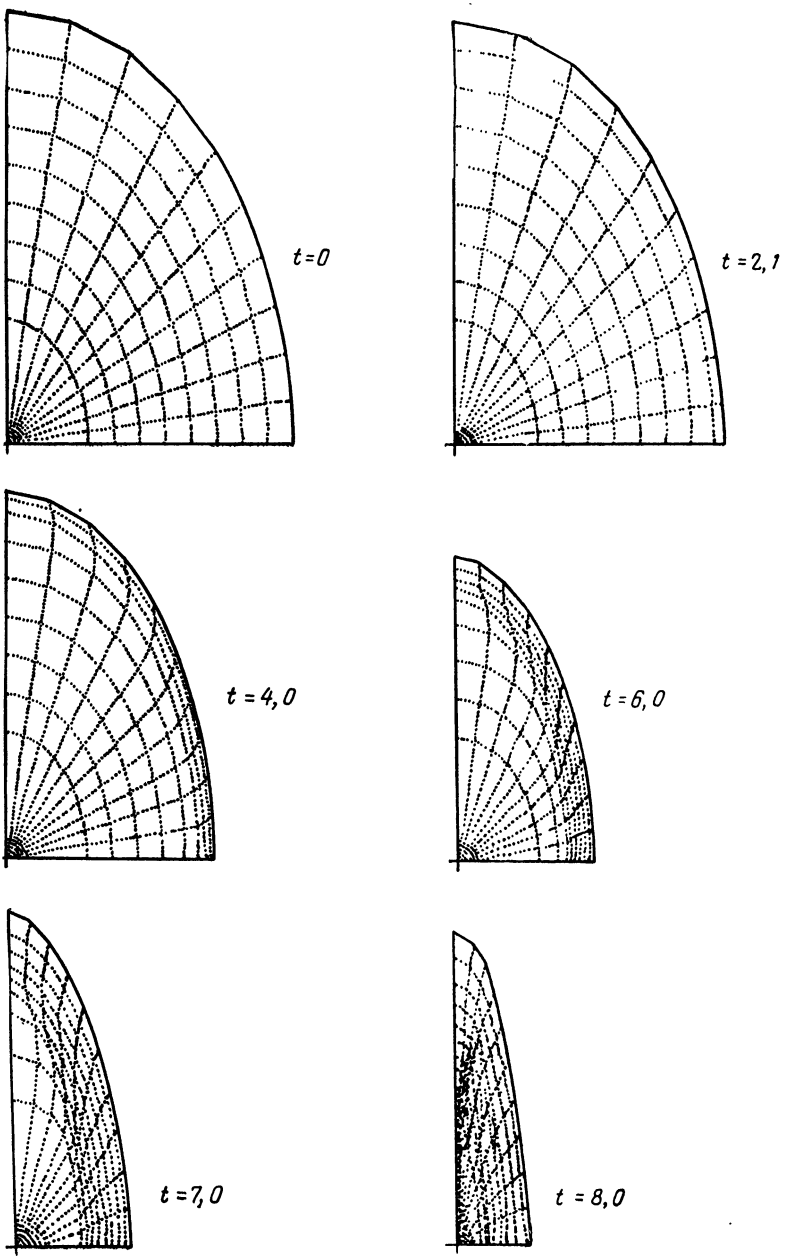


Рис. 10 б.

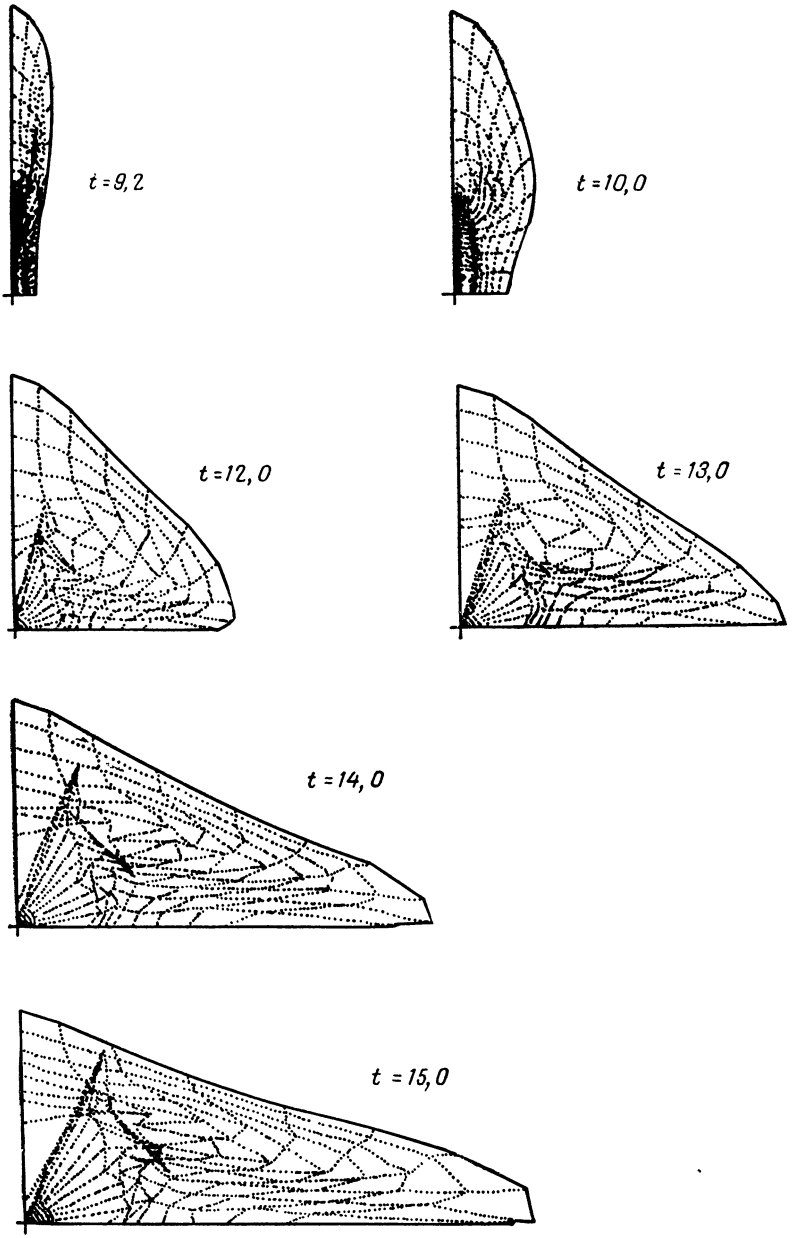


Рис. 10в.

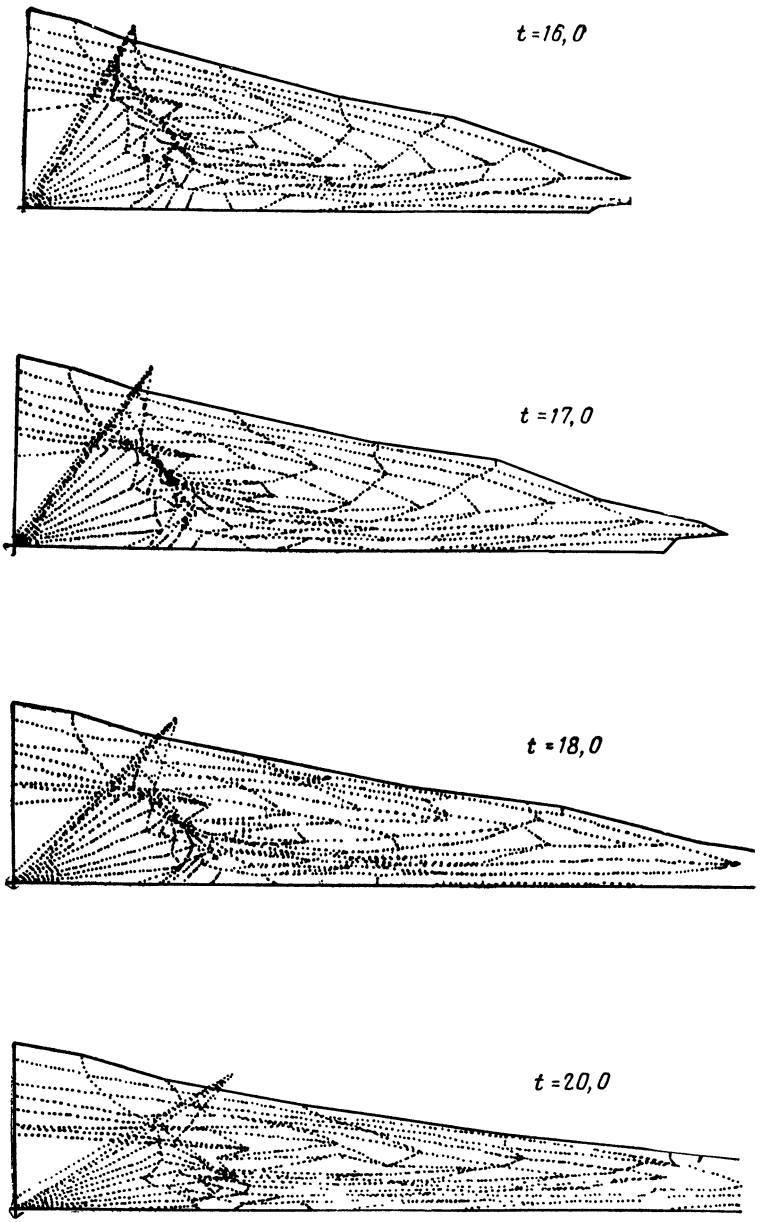


Рис. 10 г.

касается масштабов интересных деталей решения и общей достоверности данной численной модели, то они должны соответствовать друг другу, чтобы получаемые результаты были надежными.

Лагранжева расчетная сетка рассматривается здесь в одном квадранте поперечного сечения, проходящего через ось физической системы. Ось Z является в этом случае осью вращения, а ось R направлена перпендикулярно к ней. Из-за условий симметрии решение, полученное в такой области, будет описывать поведение всей физической системы.

Численная схема в переменных Лагранжа наиболее пригодна для «гладких» гидродинамических течений, таких, как течение в данной задаче на ранней стадии, когда происходит сжатие сфероида. Вообще говоря, понятие «гладкого» течения можно связать с требованиями, накладываемыми на систему и состоящими в том, чтобы элементарные ячейки газа сохраняли четырехугольную форму. При наличии турбулентности, например, элементарная ячейка газа, которая в начальный момент времени была четырехсторонней, может в действительности принимать спиральную нитеобразную форму. Однако в численной схеме в переменных Лагранжа требуется, чтобы эта ячейка представляла собой четырехстороннюю фигуру. Следовательно, численная схема в переменных Лагранжа будет не подходящей для «негладких» течений такого типа.

Демпфирование движений, меньших по масштабу, чем размер ячейки конечно-разностной сетки, все еще остается проблемой, если даже пользоваться конечно-разностными уравнениями в переменных Эйлера, хотя здесь эта трудность не столь очевидна. Искусственная вязкость была построена таким образом, чтобы в случае ударных волн преобразовывать кинетическую энергию во внутреннюю энергию. При этом возникает вопрос, будет ли правильным преобразование кинетической энергии маломасштабной турбулентности во внутреннюю энергию?

Для момента времени $t=10$ ячейки лагранжевой сетки вблизи центра сфероида начинают несколько «налезать» друг на друга. К детальным расчетным данным, полученным в этой области с помощью применяемого численного метода, следует относиться скептически. Хотя с течением времени картина в этой области все более ухудшается, тем не менее отмеченная трудность возникает только в относительно малой части всей области течения, и поэтому нет причин сомневаться в правильности полученного общего поведения физической системы. Это обстоятельство показывает достоинство применяемых конечно-разностных уравнений, которые достаточно устойчивы даже тогда, когда лагранжева расчетная сетка становится нерегулярной в некоторых областях.

Закон изменения внешнего давления, приложенного к рассматриваемой физической системе, соответствует сжатию сфероида газом с нулевой плотностью. Следовательно, поверхность этой системы будет неустойчивой по Тейлору. Данная физическая система в конечном состоянии будет представлять собой одну большую струю, текущую вдоль оси системы. Точнее говоря, если рассматривать всю систему, здесь будут две струи — по одной с каждой стороны отражающей плоскости.

Литература

1. Von Neumann J., Richtmyer R. D., *J. Appl. Phys.*, **21** (1950), 232. Имеется сокращенный русский перевод: Нейман Дж., Рихтмайер Р., Метод численного расчета гидродинамических скачков, сб. *Механика*, № 1 (1951), 27.
2. Рихтмайер Р. Д., Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, М., 1960.

Смешанный метод, использующий переменные Эйлера и Лагранжа

Р. М. ФРАНК, Р. Б. ЛАЗАРУС

Калифорнийский университет, Лос-аламосская научная лаборатория, Лос-Аламос, Нью-Мексико

1. Введение 55
2. Уравнения для элемента объема 56
3. Эйлерово-лагранжева сетка 57
4. Выбор переменных 58
5. Пространственное дифференцирование 58
6. Дифференцирование по времени 62
7. Искусственные силы 63
8. Условие устойчивости по Куранту 64
9. О пробных расчетах 65
10. Подробности проведения вычислений на машинах 66
11. Поток тепла 75

1. Введение

Для решения методами конечных разностей задач о нестационарных двумерных течениях сжимаемых жидкостей требуется выбрать переменные величины и разностные уравнения, которые учитывают особенности изучаемых задач. Рассмотрим некоторые ограничения, присущие методам Эйлера и Лагранжа при описании движения жидкости.

По методу Эйлера движения жидкостей описываются с помощью сетки, фиксированной в лабораторной системе координат. При использовании этого метода возникают трудности в задачах, где имеет место движение тонких слоев жидкости при прохождении ими расстояния, в несколько раз большего их толщины. Очень сложно следить за границами раздела сред при их движении через эйлерову сетку. Более того, может потребоваться недопустимо большое число ячеек для проведения хорошего расчета тонких слоев, хотя при решении задачи они могут лишь эпизодически появляться в некоторой области.

С другой стороны, при использовании метода Лагранжа, когда движение описывается при помощи сетки, связанной с жидкостью, возникают значительные трудности, если имеются поверхности скольжения или другие причины, приводящие к сильному искажению первоначальной сетки.

В этой статье сообщается о некоторых исследованиях по применению смешанной эйлерово-лагранжевой сетки, позволяющей в некоторых задачах избежать недостатков как лагранжевой, так и эйлеровой сетки.

2. Уравнения для элемента объема

Рассмотрим сжимаемую жидкость, локально описываемую плотностью ρ, скоростью $\mathbf{u}$ в лабораторной системе координат и удельной внутренней энергией e. Запишем законы сохранения для произвольного объема τ, поверхность которого $S(\mathbf{r})$ движется с произвольной скоростью $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ в той же системе координат.

Пусть $M(\tau, t)$, $\mathbf{p}(\tau, t)$ и $U(\tau, t)$ — общая масса, количество движения и энергия, которые содержатся внутри S в момент t. Предположим, что $\mathbf{x}$ — трехмерный вектор с составляющими ρ, ρu, $(\rho e + {}^1/_2 \rho u^2)$. Тогда можно считать M, $\mathbf{p}$ и U тремя составляющими вектора $\mathbf{X}$, определенного формулой

$$\mathbf{X} = \int_\tau \mathbf{x}\, d\tau. \tag{1}$$

Для скорости изменения вектора $\mathbf{X}$ имеем

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \int_\tau \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\, d\tau + \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{w}\mathbf{x}. \tag{2}$$

Уравнения сохранения массы, изменения количества движения и сохранения энергии запишем в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\rho = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\rho\mathbf{u} = -\nabla P, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \left(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2\right) = -\nabla \cdot P\mathbf{u}, \tag{5}$$

где $P = P(e, \rho)$ — давление. Если использовать эти уравнения, то из (2) получим соотношения

$$\frac{dM}{dt} = -\int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w})\rho, \tag{6}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\int_S d\mathbf{S} \cdot P - \int_S d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w})\rho\mathbf{u}, \tag{7}$$

$$\frac{dU}{dt} = -\int_S d\mathbf{S} \cdot P\mathbf{u} - \int_S d\mathbf{S}\,(\mathbf{u} - \mathbf{w})\left(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2\right). \tag{8}$$

Уравнение (8) иногда удобнее заменить уравнением (не имеющим вида закона сохранения) для общей внутренней энергии $\left(E(\tau,t) = \int_\tau \rho e d\tau\right)$

$$\frac{dE}{dt} = -\int_\tau d\tau P\nabla \cdot \mathbf{u} - \int_S d\mathbf{S}\,(\mathbf{u} - \mathbf{w})\rho e. \tag{9}$$

3. Эйлерово-лагранжева сетка

Рассмотрим двумерное течение в декартовых координатах. Пусть плоскость x, y разделена на ячейки $\tau_{i,j}$ двумя семействами линий (рис. 1). Пусть первое семейство задано системой фиксированных вертикальных линий $x=x_i$, $i=1, 2, \ldots$, а второе семейство не пересекающихся между собой линий дается соотношением $y=y_j(x, t)$, причем $y_{j+1}(x, t)>y_j(x, t)$ для любого x и t.

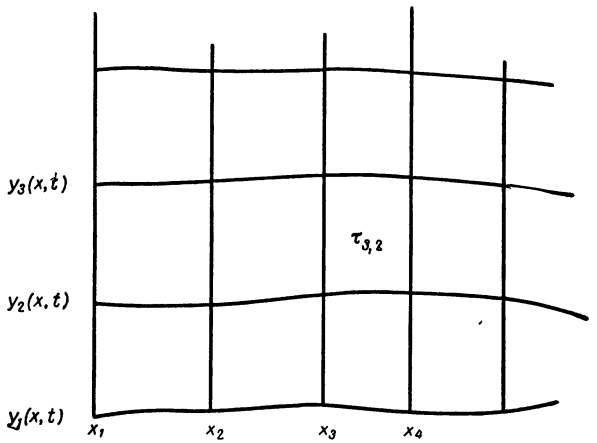


Рис. 1. Сетка Эйлера—Лагранжа.

Границы ячеек $S_{i,j}$ состоят из четырех сторон: левой, правой, верхней и нижней. На левой и правой сторонах принимаем $\mathbf{w}=0$, т. е. здесь движение отсутствует. На верхней и нижней сторонах принимаем $d\mathbf{S}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{w})=0$, т. е. нормальная составляющая скорости $\mathbf{w}$ поверхности равна нормальной составляющей скорости жидкости $\mathbf{u}$. Таким образом, жидкость не протекает через y-линии, а может втекать и вытекать в ячейку через x-линии.

Интегралы переноса вида $\int\limits_S d\mathbf{S}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{w})f$, входящие в уравнения (6)—(9), приводятся, таким образом, к виду

$$\int\limits_S d\mathbf{S}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{w})f=\int\limits_{S_1}(-dy)uf+\int\limits_{S_2}(dy)uf, \tag{10}$$

где u — составляющая $\mathbf{u}=(u, v)$, а S_1 и S_2 относятся соответственно к левой и правой сторонам.

Были проведены экспериментальные вычисления в предположении, что каждая линия $y_j(x, t)$ — непрерывная ломаная линия, состоящая из отрезков прямых с угловыми точками $x=x_i$.

Главная трудность в этом случае, конечно, связана с выполнением условия $d\mathbf{S}(\mathbf{u}—\mathbf{w})=0$.

Проводились также расчеты в цилиндрических координатах с линиями $z=z_i$ и $r=r_j(z, t)$.

4. Выбор переменных

Имеется большое количество вариантов выбора основных исходных переменных. Можно, очевидно, принять за переменные массу M и координаты q (т. е. y или r) узлов ячеек. Горизонтальная составляющая количества движения $\mathbf{p}$ оказывается более подходящей, чем горизонтальная составляющая u скорости жидкости. Внутренняя энергия E оказывается несколько предпочтительней, чем общая энергия ячейки U, хотя при этом приходится использовать уравнение (9) вместо уравнения сохранения (8).

В декартовых координатах за остающуюся основную переменную, может быть, лучше выбрать y-составляющую количества движения. Авторов, однако, главным образом интересуют цилиндрические задачи, и поэтому была выбрана «вертикальная» (т. е. по y или по r) скорость узлов ячеек $w=dq/dt$.

Вертикальная скорость жидкости v определяется по u, w и наклону лагранжевой линии с помощью условия $d\mathbf{S}(\mathbf{u}—\mathbf{w})=0$.

Объем ячейки τ вычисляется непосредственно с помощью координат q. Плотность находится из соотношения $\rho=M/\tau$, удельная внутренняя энергия равна $e=E/M$. Давление в ячейке $P=P(e, \rho)$ дается уравнением состояния для жидкости, находящейся в ячейке. Горизонтальная скорость жидкости u находится из соответствующего отношения количества движения к массе, которое зависит от принятого центрирования [1]).

5. Пространственное дифференцирование

А. Обозначения

На рис. 2 показана типичная ячейка (i, j); ее было бы удобнее обозначить как $(i+1/2, j+1/2)$. Обозначения некоторых из переменных, используемых здесь, соответствуют обозначениям при обычном центрировании.

Б. Уравнение массы

Для расчета массы M в зависимости от времени применяется уравнение (6). Используя уравнение (10), для $M=M_{i+1/2,\ j+1/2}$

[1]) Под центрированием подразумевается выбор точки, относительно которой производится осреднение величин. — *Прим. перев.*

имеем

$$\frac{dM}{dt} = A_i u_i \tilde{\rho}_i - A_{i+1} u_{i+1} \tilde{\rho}_{i+1}, \tag{11}$$

где A_i — «площадь» при $x = x_i$ между j-й и $(j+1)$-й лагранжевыми поверхностями [1]). Индекс $j+1/2$ нигде не используется, u_i дается формулой

$$u_i = \frac{\frac{1}{2}(p_{i-1/2} + p_{i+1/2})}{M_i}, \tag{12}$$

где M_i — масса, которая была бы заключена между $x_{i-1/2}$ и $x_{i+1/2}$, если бы каждая ячейка имела однородную плотность.

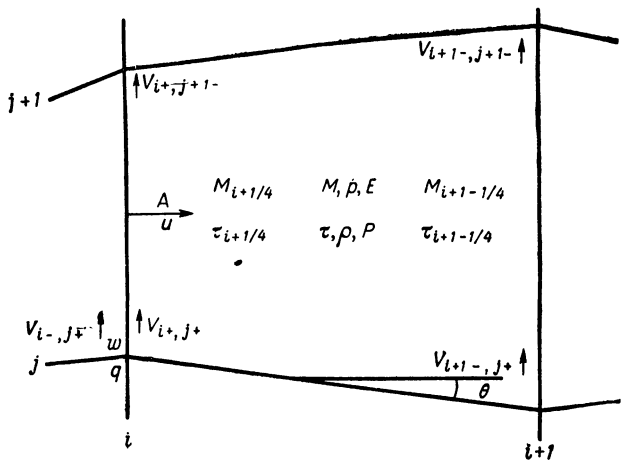


Рис. 2. Типичная ячейка с использованием обычных центральных разностей.

Величина $\tilde{\rho}_i$ берется так, чтобы $\tilde{\rho}_i = \rho_{i-1/2}$ при u_i положительном и $\tilde{\rho}_i = \rho_{i+1/2}$ при u_i отрицательном, т. е. величина ρ берется как плотность ячейки, *из которой* притекает жидкость.

Если уравнение (11) просуммировать по всей сетке, то останутся только члены, соответствующие границе; это показывает, что записан в разностной форме закон сохранения масс.

В. Горизонтальная составляющая количества движения

Для расчета по времени горизонтальной составляющей количества движения ячейки **p** используется проекция уравнения (7)

[1]) Лагранжевыми поверхностями и лагранжевыми линиями авторы называют жидкие поверхности и линии, составленные из одних и тех же частиц. — *Прим. перев.*

на ось x или z. Поверхностный интеграл от давления равен сумме четырех членов, каждый из которых есть произведение поверхностного давления и проекции площади на ось x или z. Поверхностное давление берется в виде среднего арифметического давления в двух соседних ячейках. Например,

$$P_{i,\ j+1/2} = \frac{1}{2}(P_{i-1/2,\ j+1/2} + P_{i+1/2,\ j+1/2}). \tag{13}$$

Так, проекция верхней поверхности на ось x записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} S^x_{i+1/2,\ j+1} &= q_{i,\ j+1} - q_{i+1,\ j+1} \text{ (декартовы координаты).} \\ &= q^2_{i,\ j+1} - q^2_{i+1,\ j+1} \text{ (цилиндрические координаты).} \end{aligned} \tag{14}$$

Члены, характеризующие перенос, записываются подобно уравнению (11) с заменой ρ на p/τ, т. е. на количество движения в единице объема. Величины p и τ опять берутся из ячеек, *из которых* притекает жидкость.

Если это разностное уравнение просуммировать по всей сетке, то останутся только граничные члены.

В уравнении (7) опущен член, обусловленный вязкостью. Если такой член желательно учесть при переходе через лагранжевы линии, то мы должны добавить к правой части уравнения для dp/dt для ячейки (i, j) два члена вида $\eta S(du/dq)$, один при индексе j, второй при индексе $j+1$, где η — коэффициент касательной вязкости, S — площадь лагранжевой «линии».

Г. Уравнение энергии

Если общая энергия является основной переменной, то используется уравнение (8). Первый интеграл записывается как сумма четырех членов, по одному для каждой части поверхности ячейки. Для каждого члена среднее поверхностное давление умножается на величину $\int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$. В интеграле, соответствующем переносу, величина U/τ принимается за энергию в единице объема и берется из ячейки «вверх по потоку». Для вычисления давления следует вычислить кинетическую энергию и вычесть ее из общей энергии, получив тем самым внутреннюю энергию.

Если за основную переменную принимается внутренняя энергия, то мы должны аппроксимировать уравнение (9), которое содержит объемный интеграл от $P\nabla \cdot \mathbf{u}$. Оказалось, что достаточно заменить P средней величиной $P_{i+1/2,\ j+1/2}$ и вынести ее за знак интеграла. Тогда остается поверхностный интеграл от $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$. Кинетическая энергия не входит ни в одно из этих уравнений.

С первого взгляда кажется, что могут быть трудности со скоростью жидкости на лагранжевых поверхностях, так как допу-

скается разрыв при переходе через эти поверхности. Но такой разрыв претерпевает только касательная составляющая; в противном случае могла иметь место кавитация. В действительности же интегралы от $d\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}$ по лагранжевым поверхностям L содержат только w, т. е. вертикальную скорость узлов ячейки. Интегралы, вычисленные в предположении, что w изменяется линейно по x в интервале от w_i до w_{i+1}, можно записать в виде

$$Z\equiv\int_L d\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}=\begin{cases}\frac{\Delta x}{2}(w_i+w_{i+1}) & \text{(декартовы координаты),}\\ \frac{\Delta x}{3}[q_i(2w_i+w_{i+1})+q_{i+1}(w_i+2w_{i+1})] & \\ \qquad\text{(цилиндрические координаты).}\end{cases}\tag{15}$$

Заметим, что имеет место соотношение

$$Z_{j+1}-Z_j=\frac{d\tau}{dt}.\tag{16}$$

Д. Уравнение для вертикального движения

Если скорость узлов ячейки w удобна для характеристики системы и поэтому рассматривается как основная переменная, то вертикальная составляющая скорости v является физической величиной. Из условий, налагаемых на переменные Лагранжа, следует связь между w, u и v, задаваемая соотношением

$$w=v-u\operatorname{tg}\theta,\tag{17}$$

где θ — угол между лагранжевой линией и горизонталью. Для скорости изменения по времени вертикальной составляющей скорости жидкости *в некотором узле ячейки* следует использовать оператор $d/dt=\partial/\partial t+w(\partial/\partial y)$, так как узел ячейки имеет вертикальную скорость w. Не учитывая пока разрыв величины θ, используя в качестве лагранжевых кривых ломаные линии и вычитая уравнение (3), умноженное на v, из проекции на вертикаль уравнения (4) с учетом (17) находим

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{tg}\theta\right).\tag{18}$$

Предполагая, что между точками (i, j) и $(i+1, j)$ величина v изменяется линейно по x и y, найдем соотношение [1])

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{tg}\theta\right)=(v_{i+1,\,j}-v_{i,\,j})/\Delta x_{i+1/2}.\tag{19}$$

При проведении расчета в случае ломаной, состоящей из прямых отрезков, используется следующая методика. Для узла (i, j) вводятся две величины v, а именно v_{i-} и v_{i+}, как это показано на рис. 2. Каждая из этих величин изменяется с течением времени в соответствии с уравнениями (18)—(19). В уравнении

[1]) Через $\Delta x_{i+1/2}$ обозначен половинный интервал. — *Прим. ред.*

(19) для v_{i+} мы используем $(v_{i+1-}-v_{i+})/\Delta x_{i+1/2}$, для v_{i-} используем $(v_{i-}-v_{i-1+})/\Delta x_{i-1/2}$. В уравнении (18) для u используем величины $u_{i,\,j-1/2}$ [см. уравнение (12)].

Член уравнения, содержащий градиент давления, используется в виде $S\Delta P/M$, где ΔP берется при значении $i+1/2$ в уравнении для v_{i+} и при значении $i-1/2$ в уравнении для v_{i-}; S — «площадь» лагранжевой линии между $i\pm1/2$ и i; M — масса, заключенная между $i\pm1/2$, i и между $j+1/2$, $j-1/2$ (плотность ячейки предполагается постоянной).

После того как для v делается шаг по времени, уравнение (17) дает две (несовпадающих) величины w, одну при использовании v и θ слева, а другую при использовании v и θ справа. Выбирается одна из величин w, а другая отбрасывается в соответствии со следующим правилом.

Если лагранжева линия вогнута вниз в точке (i, j), то выбирается алгебраически меньшая величина из w. Если же лагранжева линия вогнута вверх, то выбирается алгебраически бо́льшая величина. Это правило позволяет контролировать втекание жидкости в узле, что становится ясным из следующей перефразировки указанного правила. Пусть левый и правый отрезки движутся каждый со своей собственной величиной w и эти отрезки при необходимости затем удлиняются до пересечения. Тогда, если точка пересечения движется вправо, мы выбираем величину w, определенную по левому (т. е. для v_{i-}) уравнению; если точка пересечения движется влево, мы выберем значение w, определенное по правому (т. е. для v_{i+}) уравнению. Эквивалентность этих двух формулировок правила выбора, вероятно, можно увидеть лишь при изучении различных возможных случаев.

Как только величина w выбрана, можно использовать уравнение (17) со значениями $u_{i,\,j+1/2}$ и $u_{i,\,j-1/2}$ для нахождения подходящей величины v для жидкости непосредственно выше и ниже узла. Эти значения необходимы для вычисления кинетической энергии (используется только для проверки энергии, если за основную переменную взята внутренняя энергия). Они также необходимы при определении псевдовязкого давления, которое используется для размазывания ударных волн (см. § 7, А).

6. *Дифференцирование по времени*

На начальной стадии разработки этого метода использовалась полностью явная схема. Выражение $dF/dt=f(t)$ просто заменялось на $[F(t+\Delta t)-F(t)]/\Delta t=f(t)$. Предполагалось брать Δt настолько малой величиной, чтобы не заботиться об ошибках порядка $(\Delta t)^2$. Однако в действительности оказывается, что эти ошибки затрудняют сравнение между различными вариантами

переменных и схем пространственного дифференцирования. В настоящее время мы перешли к полностью неявной схеме, используя сходящиеся итерации там, где нелинейности их позволяют получить прямое решение методом обращения трехдиагональной матрицы. Эта полностью неявная схема возможно слишком медленна для проведения расчетов, но оказывается, что она дает хороший, безопасный метод для экспериментальных вычислений.

Ошибки порядка Δt^2 исключаются в этой неявной схеме просто путем использования вместо $f(t)$ значения $1/2[f(t+\Delta t)+f(t)]$.

7. *Искусственные силы*

А. Размазывание ударных волн

Во всех расчетах, проведенных этим методом, были области, в которых имело место почти звуковое или сверхзвуковое течение. Для размазывания ударных волн всегда использовалось псевдовязкое давление Q такого типа, который применялся Рихтмайером и фон Нейманом. Эти дополнительные члены обычно считаются нулями в области течения разрежения ($\nabla \cdot \mathbf{u}$ положительна) и берутся положительными в области сжатия ($\nabla \cdot \mathbf{u}$ отрицательна).

В первоначальных пробных вычислениях течений в координатах Эйлера (случай $v=0$) величина Q принималась пропорциональной $\rho\Delta x^2(\nabla \cdot \mathbf{u})^2$. Оказалось, что давление неестественно колеблется в застойной области за отраженной ударной волной, если только константа пропорциональности бралась не настолько большой, чтобы слишком сильно размазать ударную волну. Результаты значительно улучшались, когда один из множителей вида $\Delta x|\nabla \cdot \mathbf{u}|$ заменялся местной скоростью звука.

В начальной стадии работы над двумерными задачами величина Δx просто заменялась на $1/2(\Delta x+\Delta q)$. Это приводило к трудностям, когда отношение Δq к Δx значительно отличалось от единицы. Оказалось, что в случае отражения удобно du/dx умножить на Δx, а dv/dq на Δq.

В настоящее время была принята, в частности, формула

$$Q = C\rho c D, \tag{20}$$

где C — числовая постоянная величина порядка единицы, c — местная скорость звука, причем

$$D = \begin{cases} -\min\left(0, \frac{du}{dx}\Delta x\right) - \min\left(0, \frac{dv}{dq}\Delta q\right) \\ \qquad\qquad \text{(декартовы координаты)}, \\ -\min\left(0, \frac{du}{dx}\Delta x\right) - \min\left(0, \frac{dqv}{dq}\Delta q/q\right) \\ \qquad\qquad \text{(цилиндрические координаты)}. \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, если в одном направлении жидкость сжимается, а в другом расширяется, то мы учитываем частичное влияние процесса сжатия даже в том случае, если ячейка в целом находится в стадии расширения. Оказывается, что этот вид величины Q дает удовлетворительные результаты.

Б. Демпфирование линий

Было обнаружено, что в некоторых задачах, в особенности в задачах со сходящимися сферическими ударными волнами, при значениях x, где u почти равно нулю, происходит сгущение соседних лагранжевых поверхностей. Несмотря на то, что введенный выше член Q способствовал бы увеличению давления, давление будет снижаться потоком в направлении x и не будет препятствий для сближения лагранжевых линий. Это обстоятельство приводит к уменьшению шага по времени для обеспечения критерия устойчивости, и решение задачи становится невозможным. Для того чтобы предотвратить это, мы вводим искусственное ускорение вдоль вертикальных линий $x=\text{const}$. Считается, что для некоторого заданного малого ε это ускорение равно нулю, если $\Delta q \geqslant \varepsilon$, и оно пропорционально $(\varepsilon - \Delta q)/\Delta t^2$ в других случаях. Такое ускорение включается непосредственно в уравнение движения в вертикальном направлении, но не включается в уравнение для давления или уравнение энергии. Заметим, что система введенных «пружин» может произвести дополнительную работу и поэтому следует проводить подходящий контроль по энергии, чтобы сделать ошибки пренебрежимо малыми.

Так как мы уже имеем некоторый произвол, допускаемый в вертикальных движениях узлов, то может оказаться, что введение дополнительного искусственного ускорения не будет иметь серьезного значения. Указанное изменение расчетной схемы обеспечило успешное решение задач, которые до этого не решались, а полученные результаты оказались приемлемыми.

8. Условие устойчивости по Куранту

Условие устойчивости по Куранту означает, что никакому возмущению не разрешается проходить через ячейку за время, меньшее, чем Δt. С точностью до множителя, равного примерно двум, такое условие можно применять как к неявным, так и к явным схемам. Это значит, что для ячейки с местной скоростью c должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &c < \Delta q/\Delta t && \text{в направлении лагранжевой координаты} \\ &c + |u| < \Delta x/\Delta t && \text{в направлении эйлеровой координаты.} \end{aligned} \tag{22}$$

9. О пробных расчетах

На основе расчетов одномерных уравнений в эйлеровых переменных различными способами выбирались переменные величины и разностные уравнения. Расчеты проводились для стационарных течений, стационарных ударных волн, распространяющихся и отраженных ударных волн, а также для течений при разрыве диафрагмы. Вычисления проводились как для равномерной, так и для неравномерной пространственной разностной сетки.

Выбор уравнений для вертикального движения был сделан главным образом на основе двумерных расчетов стационарных течений, которые в переменных Эйлера являются одномерными, при использовании сетки с одной или больше чем с одной лагранжевой линией, имеющей излом. Задача заключалась в сглаживании этих изломов в местах вниз по потоку таким образом, чтобы не было послано серьезных возмущений вверх по потоку.

Выполненные расчеты существенно двумерных задач разделяются на два класса. К первому классу относятся расчеты течений в трубах переменного поперечного сечения при движении в направлении эйлеровой координаты. Сюда включаются задачи о течении в сопле и задачи о падении плоских ударных волн на конус. Второй класс задач включает взрывы и фокусировки газа (сходящиеся течения газа). Эти задачи можно проверять путем сравнения с обычными одномерными расчетами, т. е. для задач с цилиндрической симметрией применять при расчетах декартовы координаты, а для задач со сферической симметрией использовать при расчетах цилиндрические координаты.

Оказалось, что расчеты с применением явной разностной схемы по времени дают достаточно удовлетворительные результаты в *большинстве* случаев. В задаче о сопле с дозвуковой входной частью использовалось граничное условие на входе $P=\text{const}-Ku$, где K — полное сопротивление, а u — вычисленная скорость жидкости. В этом случае было очень точно вычислено течение Пуазейля с касательной вязкостью и с условием $u=0$ вдоль стенок.

При использовании явной схемы в расчетах взрыва и фокусировки газа было установлено, что скорости ударных волн равны во всех направлениях с точностью до нескольких процентов.

Однако явной разностной схеме по времени присущи различные случайные трудности и неточности. Это привело к применению полностью неявной схемы, которая описана в § 10.

Сферически симметричные сходящиеся течения, возникающие при движении в полусфере с условием отражения при $x=0$,

показали, что имеются некоторые трудности с выполнением условия отражения. В частности, соседние j-линии при значении $i=0$ близко подходят друг к другу. Для того чтобы изучить эту задачу при отсутствии границы, была рассчитана фокусировка полной сферы. Трудности имелись в случае, когда плоскость симметрии была при $x=x_i$, и их не было, когда она соответствовала координате $x=x_i+1/2\Delta x_{i+1/2}$. Это привело к введению искусственного ускорения, о чем указывалось в § 7, Б.

10. Подробности проведения вычислений на машинах

А. Переменные величины и распределение памяти

Переменные величины разностных ячеек приведены в табл. 1. Поскольку используется процесс итераций, то значения первых пяти переменных величин должны храниться в памяти одновременно для двух различных моментов времени.

Таблица 1

Основные (*) и вспомогательные переменные величины и их обычное центрирование

Переменная	Центрирование		Определяющее уравнение	Переменная	Центрирование		Определяющее уравнение
	i	j			i	j	
$*q$	i	j	(27)	$\dot{E}$	i	$j+\frac{1}{2}$	(38)
$*w$	i	j	(51)				
A	i	$j+\frac{1}{2}$	(28)	P	$i+\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	(39)
$\operatorname{tg}\theta$	$i+\frac{1}{2}$	j	(29)	Q	$i+\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	(20)
τ	$i+\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	(30)	F	$i+\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	(43)
$*M$	$i+\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	(32)	$*p$	$i+\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	(44)
$\dot{M}$	i	$j+\frac{1}{2}$	(33)	$\dot{p}$	i	$j+\frac{1}{2}$	(45)
u	i	$j+\frac{1}{2}$	(46)	a	$i\pm$	j	(48)
				v	$i\pm$	$j-$	(49), (52)
ρ	$i+\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	(35)	$\dot{v}$	$i\pm$	$j-$	(50)
$*E$	$i+\frac{1}{2}$	$j+\frac{1}{2}$	(37)				

Практически использовались тридцать ячеек памяти для каждой разностной ячейки. Некоторые из этих ячеек памяти содержат различные переменные на разных стадиях цикла вычислений. Такой выбор сделан как компромисс между ограниченностью памяти, с одной стороны, и быстротой и удобствами вычислений — с другой.

Метод решения, описанный в следующем параграфе, позволяет эффективно управлять задачами, в которых требуется использовать внешнюю память (особенно магнитные барабаны или диски) для переменных разностной ячейки. Это действительно так, потому что для фиксированного значения j можно совершить полный расчет по всем уравнениям. Никаких данных не потребуется с других j-линий, кроме линий $j \pm 1$. Для использования этой особенности все переменные величины данной j-линии должны храниться в памяти в одном месте.

В добавок к переменным величинам разностной ячейки имеется ряд или колонка величин с одним индексом (например, $\Delta x_{i+1/2}$). Для этих величин не требуется расходования значительного количества памяти.

Б. Последовательность вычислений

Задача основного цикла программы вычислений заключается в том, чтобы при изменении времени на Δt найти соответствующее изменение величин q, M, E, p и w (см. § 10,В). Не обращая внимания на некоторые специальные особенности, присущие величине w, можно написать неявные центрированные по времени уравнения для указанных выше переменных. Каждое уравнение в свою очередь решается затем для фиксированных j и всех i путем итераций или способом обращения матрицы. Во время такого решения значения других переменных для рассчитываемого момента времени принимаются постоянными, причем берутся наиболее подходящие значения для этих величин. После того как все уравнения решены, будут известны более подходящие значения искомых переменных и весь процесс повторяется снова.

Как уже отмечалось в § 5, Д, переменная w вычисляется по времени с помощью неявного центрированного по времени разностного уравнения для v.

При практических вычислениях оказывается достаточным решить с высокой точностью отдельно каждое уравнение и затем, используя новые величины, решить аккуратно каждое уравнение *еще* один раз. Следует, однако, убедиться, не имеется ли какой-либо другой, лучшей схемы. Например, можно было бы решить систему уравнений с низкой точностью два раза и затем решить ее в третий раз с высокой точностью.

Следует заметить, что в общем случае не было найдено схемы решения, которая бы позволяла определить, что значит «высокая точность» для решения методом итераций. Авторы использовали требование, чтобы последовательные итерации согласовались между собой с расхождением, величина которого составляет некоторую малую долю от величины переменных. Однако при этом подходе терялось время в том случае, когда такие переменные, как количество движения и давление, становились почти нулями и вычислялись до пренебрежимо малых значений. Для вычислительной машины, использующей в основном арифметические операции, возможно, лучше было бы потребовать сходимости некоторой доли значащих цифр. Для специальных видов метода эту трудность можно обойти, используя допустимые размерные отклонения вместе с допустимыми отклонениями долей величин. Например, рассматривая p, будем считать, что имеет место сходимость, когда последовательные величины согласуются с расхождением в несколько процентов от p *или* с расхождением, составляющим некоторую долю от количества движения, которой можно пренебречь в рассматриваемой задаче.

В каждом из конечно-разностных по времени уравнений для основных искомых переменных правая часть содержит среди других членов сумму старого значения переменного и членов, содержащих только величины, которые соответствуют старому моменту времени. В начале каждого цикла для экономии времени и памяти старые значения основных переменных заменялись этими суммами. Однако ради ясности уравнения, приведенные в следующем разделе, не будут записываться в этой форме.

В. Уравнения в цилиндрических координатах

Будет подразумеваться, что переменные, написанные без нижних индексов, снабжены этими индексами на основе стандартного способа центрирования переменных в соответствии с табл. 1. Переменные, записанные без верхних индексов, относятся к $(n+1)$-му шагу по времени.

Черта над переменными величинами или над некоторыми выражениями означает, что соответствующие выражения осреднены по времени, так, например:

$$\overline{f} = \frac{1}{2}(f^n + f^{n+1}). \tag{23}$$

В дальнейшем запись уравнения в виде

$$F = F^n + \overline{f}\,\Delta t \tag{24}$$

означает следующее: в начале временного цикла F^n заменяется на $F^n + 1/2 f^n \Delta t$, а затем итерациями или обращением матрицы

решается уравнение

$$F = F^n + \frac{1}{2} f^{n+1} \Delta t. \tag{25}$$

Переменные с волнистой чертой над ними определяются следующим образом (здесь запрещается индекс $j+1/2$):

$$\tilde{f}_i = \begin{cases} f_{i-1/2}, & \text{если } u_i \geqslant 0 \text{ (течение вправо)}, \\ f_{i+1/2}, & \text{если } u_i < 0 \text{ (течение влево)}. \end{cases} \tag{26}$$

Примечание: множитель π исключен из всех выражений для объемов ячейки и площадей.

В начале цикла предполагается, что все искомые величины известны для момента времени t^n. Всякий раз, когда в течение цикла необходимо использовать переменную для момента t^{n+1}, используется *последнее значение, которое уже было вычислено.* Первый шаг в вычислениях цикла заключается в том, чтобы найти значения q при помощи соотношения

$$q = q^n + \bar{w} \Delta t. \tag{27}$$

С этими новыми значениями q находятся следующие геометрические величины:

$$A = q^2_{i,\, j+1} - q^2_{i,\, j}, \tag{28}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{q_{i+1,\, j} - q_{i,\, j}}{\Delta x_{i+1/2}}, \tag{29}$$

$$\tau = \frac{1}{3} \Delta x_{i+1/2} \left[(A_i + A_{i+1})_{j+1/2} + (q_i q_{i+1})_{j+1} - (q_i q_{i+1})_j \right], \tag{30}$$

$$\tau_{i+1/4,\, j+1/2} = \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{8} \Delta x_{i+1/2} (A_i - A_{i+1})_{j+1/2},$$

$$\tau_{i-1/4,\, j+1/2} = \left[\frac{1}{2} \tau_{i-1/2,\, j} + \frac{1}{8} \Delta x_{i-1/2} (A_i - A_{i-1}) \right]_{j+}. \tag{31}$$

Затем для каждого значения j решается уравнение

$$M = M^n + \Delta t (\dot{\bar{M}}_i - \dot{\bar{M}}_{i+1})_{j+1/2}, \tag{32}$$

где

$$\dot{M}_i = u A \tilde{M}_i / \tilde{\tau}_i. \tag{33}$$

Это делается для всех значений i [см. уравнение (6)]. Заметим, что $\dot{M}_i$ пропорционально или $M_{i-1/2}$, или $M_{i+1/2}$ и, таким образом, уравнение (32) имеет трехдиагональный вид

$$f_{i+1/2} = A + B f_{i-1/2} + C f_{i+1/2} + D f_{i+3/2}, \tag{34}$$

что позволяет непосредственно использовать простые, хорошо известные методы.

Уравнение (33) решается снова с использованием окончательных значений M, так как величина $\dot{M}_i$ будет использоваться в дальнейшем.

Далее находится

$$\rho = M/\tau \tag{35}$$

и

$$M_{l\pm 1/4,\ j+1/2} = (\rho_{l\pm 1/2}\tau_{l\pm 1/4})_{j+1/2}. \tag{36}$$

Здесь учтено предположение о том, что ρ постоянно в разностной ячейке.

Уравнение энергии имеет вид

$$E = E^n + \Delta t\left[\bar{\dot{E}}_l - \bar{\dot{E}}_{l+1} - \overline{P(A_{l+1}u_{l+1} - A_l u_l)}\right]_{j+1/2} - \bar{P}(\tau - \tau^n), \tag{37}$$

где

$$\dot{E} = \dot{M}\tilde{E}_l/\tilde{M}_l, \tag{38}$$

что можно сравнить с уравнением (9). Давление P находится как сумма величины $P(E/M, \rho)$, определяемой по уравнению состояния среды для индекса $j+1/2$, и числа Q, соответствующего псевдовязкости,

$$P = P(E/M, \rho) + Q. \tag{39}$$

Входящий в уравнение (37) член с давлением получен из интеграла $\int P\nabla \cdot \mathbf{u}d\tau$ в предположении, что P постоянно в ячейке.

В член $\bar{\bar{P}}(\tau - \tau^n)$ входят как величины, соответствующие значению n, так и величины, соответствующие $n+1$, и, таким образом, требуется запас памяти для величин P^n и τ^n. Поскольку уравнение (15) включает в себя два случая, то это приводит к дополнительному расходу времени.

Псевдовязкое давление определяется по формулам (20), (21). Местная скорость звука находится по формуле $\sqrt{\gamma P(E/M, \rho)/\rho}$, где γ выбирается в соответствии с принятым уравнением состояния. При вычислении первого члена в выражении для D [формула (21)] используется соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x \approx (u_{l+1} - u_l)_{j+1/2}. \tag{40}$$

Для вычисления второго члена в D нужно аппроксимировать производную от v по q, причем необходимо использовать только величины внутри данной ячейки, так как v не обязательно должна быть непрерывной при переходе через лагранжеву поверхность. Так как v для четырех узлов ячейки определяется по условию $v = w + u\,\mathrm{tg}\,\theta$, то для второго члена, входящего в D,

можно написать

$$\frac{1}{q}\frac{\partial qv}{\partial q}\Delta q \approx \frac{(vq)_{j+1-}-(vq)_{j+}}{q_{j+1/2}}, \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}(vq)_{j+1-} &= \tfrac{1}{2}[v_{l+}+v_{l+1-}]_{j+1}-\tfrac{1}{2}(q_l+q_{l+1})_{j+1},\\ (vq)_{j+} &= \tfrac{1}{2}[v_{l+}+v_{i+1-}]_{j+}\tfrac{1}{2}(q_l+q_{l+1})_j,\\ q_{j+1/2} &= \tfrac{1}{4}[(q_l+q_{i+1})_j+(q_l+q_{l+1})_{j+1}].\end{aligned} \tag{42}$$

Уравнение (37) нелинейно по E, вообще говоря, из-за уравнения состояния, а также из-за члена, содержащего Q. Его необходимо решать итерациями. В заданной форме, однако, это уравнение можно решать итерациями для всех i и для каждого j, используя такое количество итераций, которое будет необходимо для данного значения j. Это было бы не так, если в качестве основной переменной использовать общую энергию, ибо тогда нужны были бы значения $P_{j-1/2}$ и $P_{j+3/2}$.

Далее вычисляется составляющая x общей силы, действующей на ячейку, а именно составляющая для $\int\limits_S P\,d\mathbf{S}$:

$$\begin{aligned}F = \tfrac{1}{2}[A_l(P_{l-1/2}+P_{l+1/2})-A_{l+1}(P_{l+1/2}+P_{l+3/2})]_{j+1/2}+\\ +\tfrac{1}{2}[q_{l+1}^2-q_l^2]_{j+1}[P_{j+1/2}+P_{j+3/2}]_{l+1/2}-\\ -\tfrac{1}{2}[q_{l+1}^2-q_l^2]_j[P_{j-1/2}+P_{j+1/2}]_{i+1/2}.\end{aligned} \tag{43}$$

Примечание: хотя величина $P_{i+1/2,\ j+1/2}$ и может быть сокращена в уравнении (43), указанная форма удобна при вычислениях.

Затем для каждой величины j находится решение (для всех значений i) уравнения

$$p = p^n+\Delta t(\bar{\dot{p}}_l-\bar{\dot{p}}_{i+1}+\bar{F}_{l+1/2})_{j+1/2}, \tag{44}$$

где

$$\dot{p} = \dot{M}\tilde{p}_l/\tilde{M}_l \tag{45}$$

[см. уравнение (7)]. Уравнение (44) имеет трехдиагональный вид [см. обсуждение уравнения (32)].

После того как найдены значения p, вычисляются новые величины переменной u, согласно формуле

$$u = \left[\frac{\frac{1}{2}(p_{i-1/2}+p_{i+1/2})}{M_{i-1/4}+M_{i+1/4}}\right]_{j+1/2}. \tag{46}$$

Заметим, что формулу (46) можно было бы, используя (33), подставить в (45). Однако тогда уравнение (44) было бы нелинейно.

Теперь остается определить радиальную (вертикальную) скорость w. Рассмотрим узел (i, j) и семь скоростей $u_{i,\ j\pm1/2}, w_{i,\ j}$ и $v_{i\pm,\ j\pm}$. Два значения для величины u были уже определены. Лагранжево условие для скоростей $v=w+u\operatorname{tg}\theta$ дает четыре уравнения по одному в каждой ячейке, так что остается лишь одна независимая скорость. Однако в § 5, Д было отмечено, что скорости $v_{i\pm,\ j-}$ определяются независимо по уравнению движения. Лагранжево условие для скоростей дает два (вообще говоря, несовместных) значения $w_{i,\ j}$, из которых выбирается одно значение. Затем с помощью выбранной величины w и упомянутого выше лагранжева условия определяются все четыре значения величины v.

Разностное уравнение движения выводится из (18), где y заменяется на q. Записывая в разностях первый член и используя соотношение

$$dm=\rho dx q dq d\theta, \tag{47}$$

получаем соотношение

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q}\approx a_{i\pm,\ j}=\frac{\frac{1}{4}\Delta x_{i\pm1/2}\left[3q_i+q_{i\pm1}\right]_j}{\frac{1}{2}\left[M_{j-1/2}+M_{j+1/2}\right]_{i\pm1/4}}\left[P_{j-1/2}-P_{j+1/2}\right]_{i\pm1/2}, \tag{48}$$

которое используется для всех ячеек.

Затем для каждого j и для всех i делается следующее. Два независимо определяемых значения v вычисляются по формуле

$$\hat{v}_{i\pm}=v^n_{i\pm1/4,\ j}+\Delta t\left[\bar{\dot{v}}_{i\pm}+\bar{a}_{i\pm}\right]_j, \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned}\dot{v}_{i+,\ j}&=-u_{i,\ j-1/2}\frac{[v_{i+1-}-v_{i+}]_j}{\Delta x_{i+1/2}},\\ \dot{v}_{i-,\ j}&=-u_{i,\ j-1/2}\frac{[v_{i-}-v_{i-1+}]_j}{\Delta x_{i-1/2}}.\end{aligned} \tag{50}$$

Далее выбираем w по соотношению

$$w_{i,\ j}=\hat{v}_{i\pm}-u_{i,\ j-1/2}\operatorname{tg}\theta_{i\pm1/2,\ j}, \tag{51}$$

используя знак «+» или «—» в соответствии с указанием в § 5, Д. Выполнив это для каждого i, вычисляем затем соответствующие значения

$$v_{i\pm,\ j}=w_{i,\ j}+u_{i,\ j-1/2}\operatorname{tg}\theta_{i\pm1/2,\ j} \tag{52}$$

как для знака «+», так и для знака «—». Расчет по уравнениям (49)—(52) повторяется снова до тех пор, пока не достигается удовлетворительная сходимость.

Теперь мы получили значения всех основных переменных в момент времени, соответствующий значению $n+1$. Это представляет собой один «проход» по всем уравнениям. У нас имеются в запасе все необходимые комбинации величин для времени n, что дает возможность провести полный процесс итерации. После достаточного числа итераций, или «проходов», находятся величины для следующего момента времени и начинается новый цикл.

Г. Выдача результатов

Вопрос о представлении результатов расчетов двумерных гидродинамических задач является достаточно серьезным. Если через какой-либо приемлемый интервал времени печатать даже ограниченное число переменных для всех ячеек, то с напечатанной бумагой трудно будет обращаться и в ней невозможно будет

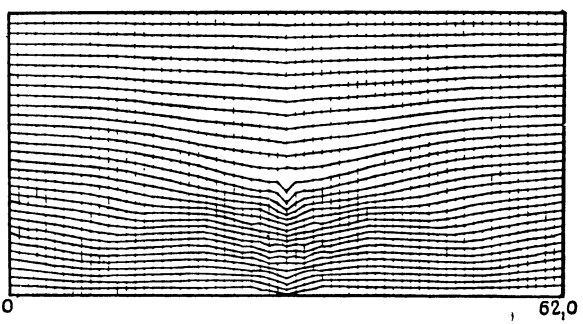


Рис. 3. Схема расположения сетки, полученная с помощью устройства «Стромберг Карлсон 4020».

разобраться. По этой причине мы используем устройство для вычерчивания графиков как наше основное средство выдачи результатов. Графики делаются с помощью записи полученных данных на магнитную ленту, с которой они могут считываться непосредственно специальным устройством «Стромберг Карлсон 4020». Мы получаем графики двух видов. Во-первых, это графики расположения величин $q_{i,j}$ на прямоугольной сетке, причем i-е точки для каждого j соединяются прямолинейными отрезками. Это дает схему расположения сетки (см. рис. 3). Во-вторых, показываются контуры фиксированных значений переменных. Для каждой выдаваемой переменной устанавливается ряд значений, контуры которых желательно видеть. Одному значению соответствует кадр пленки. Очертание границы сетки изображается

прямолинейными отрезками, соединяющими граничные значения $q_{i,j}$. Внутренние значения q не печатаются. На графике специальными значками отмечаются точки (x, q), в которых переменная принимает величину, заданную для данного контура. Эти значки не соединяются линиями, но форма линии, образованной ими, легко угадывается визуально (рис. 4). Для того чтобы найти точки (x, q), для которых нарисованы значки, осуществляется поиск в матрице переменных памяти как вдоль рядов при постоянных j, так и вдоль столбцов при постоянных i. Если

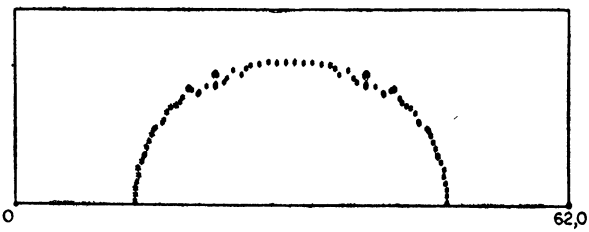


Рис. 4. Контурный график, полученный с помощью устройства «Стромберг Карлсон 4020».

находятся два соседних значения, между которыми заключены рассматриваемые контурные значения, то величины x и q, соответствующие этому контуру, определяются путем интерполяции. Когда идет поиск при постоянном i, то предполагается, что берется среднее значение между x_i и x_{i+1}.

Д. Контроль по законам сохранения

1. *Масса и количество движения.* Как уже упоминалось в § 5, Б и В, разностные уравнения для массы и для горизонтальной составляющей количества движения представляют собой законы сохранения. Это означает, что в процессе всех вычислений общая масса и количество движения (без интеграла действующих сил) в системе должны равняться их начальным значениям плюс изменения за счет граничных условий. Проверка этих условий полезна для определения ошибок.

2. *Энергия.* Кинетическая энергия ячейки берется в виде

$$K = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}\left[M_{i+1/4}\,\frac{1}{2}(v^2_{j+} + v^2_{j+1-})_{i+}\right] + \\ + \left[M_{i+3/4}\,\frac{1}{2}(v^2_{j+} + v^2_{j+1-})_{i+1-}\right]. \quad (53)$$

Вместо использования среднего значения v^2 можно использовать квадрат среднего значения v. Изучение случая, когда принимается $v_{j+} = -v_{j+1-}$, показывает, что использование первого зна-

чения дает слишком большую кинетическую энергию, а использование второго — слишком маленькую.

Если за основную переменную принимается общая энергия, то значения давления, используемые в уравнениях движения, непосредственно зависят от неточностей вычисления кинетической энергии. Хотя общая энергия и будет сохраняться по построению схемы, мы не будем иметь гарантии достаточной точности расчета движения.

С другой стороны, при использовании в качестве основной переменной внутренней энергии удается избежать этой трудности, а проводить контроль по общей энергии теперь уже не имеет смысла.

11. Поток тепла

В 1960 г. совместно с Партером было выяснено, что расчет теплопроводности (а также, вероятно, радиационной диффузии) можно с успехом сочетать с рассмотренным методом расчета задач гидродинамики. В частности, было выяснено, что распространение тепла можно аккуратно рассчитать при использовании статической, но сильно искаженной сетки рассмотренного выше типа.

К уравнениям (8), (9) следует добавить поверхностный интеграл от нормальной составляющей потока энергии. Единственный серьезный вопрос, который здесь возникает, заключается в аппроксимации нормальной производной от температуры. Оказалось, что необходимо использовать квадратичную интерполяцию, т. е. для нахождения значения при $i+1/2$ брать температуры в точках $j-1/2$, $j+1/2$ и $j+3/2$. Предполагалось, что в направлении x между точками $i-1/2$ и $i+1/2$ температура меняется линейно. Была использована неявная разностная схема. Уравнения решались путем обращения матрицы вдоль каждого ряда ячеек (для фиксированного j) в сочетании с итерациями.

Благодарности. Авторы с удовольствием и благодарностью отмечают помощь У. М. Тейлора при программировании и вычислительной работе, а также благодарят многих коллег из Лос-Аламоса за полезные обсуждения. Авторы хотят также поблагодарить группу сотрудников Лос-Аламоса, работающих на вычислительных машинах Maniac II, IBM-704 и IBM-7030 (Stretch).

Метод полос и течение газа между пластинами [1])

ДЖ. ТРУЛИО

Фирма «Northrop», Ньюбари Парк, Калифорния

1. Введение 76
2. Простая теория течения струи газа между двумя пластинами . . . 78
3. Метод полос 82
4. Замечания о сходимости численных методов в гидродинамике . . . 95
5. Приложение метода полос к задаче о струйном течении газа 100
6. Заключение 109
7. Приложения 112
Литература 127

1. Введение

Главная цель этой статьи состоит в описании метода решения двумерных гидродинамических задач, который назван «методом полос», а также в обсуждении некоторых вопросов, связанных с выводом конечно-разностных уравнений для течения сжимаемой жидкости. В качестве иллюстрации дается приложение этого метода к специальной задаче о движении газовой струи между двумя сталкивающимися пластинами. Эта задача имеет и самостоятельный интерес.

Такая струйная задача возникает при экспериментах со столкновением пластин, которые часто проводятся в газообразной среде, с целью изучения поведения металлов при высоких давлениях. В большинстве этих экспериментов предполагается, что две плоские пластинки сталкиваются параллельными сторонами. Конечно, поверхности пластин никогда не бывают точно параллельными. Естественно ожидать, что влияние пластин на какой-либо газ, находящийся между ними, и влияние этого газа на движение пластин можно рассчитать, предполагая, что при достаточно малых углах между пластинками процесс можно считать линейным и одномерным. Однако не вполне очевидно, что такое «достаточно малый» угол. Даже когда влияние газа на пластинки пренебрежимо мало, обратное утверждение, конечно, не верно. Представляется интересным (из-за необычности явления) узнать, что же в действительности происходит с газом.

---

[1]) Методом полос автор условно называет совместный эйлерово-лагранжев конечно-разностный метод. — *Прим. ред.*

Пусть имеются две пластины, образующие между собой некоторый малый угол и двигающиеся навстречу друг другу, а в пространстве между ними имеется газ. Масса газа составляет малую долю от массы любой пластины. Для простоты пусть обе пластины сделаны из одинакового материала и имеют одинаковую толщину. Предположим также, что плоскость, делящая пополам угол между пластинами, является плоскостью симметрии для рассматриваемой системы. Если угол между пластинами равен нулю, то газ между пластинами будет равномерно сжиматься. Градиент давления в направлениях, параллельных к пластинам, не возникает, и поэтому будет отсутствовать движение газа в этих направлениях. (При этом, конечно, предполагается, что можно пренебречь краевыми эффектами или считать пластинки бесконечными.)

Однако если угол между пластинами отличен от нуля, то появляется возможность выталкивания газа в боковых направлениях от точки наиболее тесного подхода пластин друг к другу. Ясно, что такое движение должно действительно иметь место, так как давление не будет одинаковым в точках плоскости, которая делит пополам угол между пластинами. В конце концов, если угол между пластинами увеличивается до 180°, то все движение будет направлено параллельно плоскости, делящей пополам этот угол. Газ будет выталкиваться пластинами со скоростью их движения.

Возможность возникновения больших скоростей газа появляется в том случае, когда угол между пластинами мал и когда точка наиболее тесного сближения пластин движется с фазовой скоростью пластины, а не со скоростью движения материала пластины. Фазовая скорость равна скорости пластины, поделенной на синус половины угла между пластинами. Газ, выталкиваемый из пространства между пластинами, должен двигаться в стороны по крайней мере с этой фазовой скоростью. Однако так как газ совсем не будет двигаться в стороны, когда угол между пластинами станет достаточно малым, то некоторая часть газа (скажем, 75% от первоначального количества) будет оставаться за точкой наиболее тесного сближения пластин. Изучение этой струйной задачи позволило выяснить следующие вопросы:

1. Узнать, как совершается переход от предельного состояния, при котором газ движется в стороны с фазовой скоростью пластин, к предельному состоянию, в котором газ не движется совсем в стороны.

2. Определить, как состояние газа связано с углом между пластинами.

В начале исследования предполагалось, что наиболее прямой путь решения задачи заключается в численном решении

уравнений движения для специальных случаев с использованием численного метода полос. Этот метод удобно применять к задачам такого вида, так как в нем используется одна лагранжева и одна эйлерова пространственная координата. Вследствие этого в рассматриваемой задаче было всегда удобно определять поверхности раздела между газом и пластиной и между пластиной и пустотой. Боковое движение газа изучалось в эйлеровых переменных, для которых нет необходимости учитывать кратковременные искажения лагранжевых элементов массы, свойственные движению газа в этом направлении.

Более полное описание метода расчета дано в § 3 и особенное внимание уделено тем сторонам метода, которые важны для рассмотренной выше задачи, а именно описанию поверхностей раздела и расчету свойств течения в направлении эйлеровой координаты. Однако прежде чем проводить значительную вычислительную работу для описания явления струйного течения газа, была разработана простая аналитическая теория. В пределах разумных приближений эта теория позволяет провести количественный расчет основных характеристик течения. Результаты последующего детального численного решения хорошо согласуются с данными этой теории. Перед изложением результатов расчетов развита элементарная струйная теория и описан численный метод полос.

2. *Простая теория течения струи газа между двумя пластинами*

Движение газа между пластинами представляет собой задачу о двумерном плоском течении. Как обычно, в качестве независимых переменных берутся декартовы координаты x, y и время t. Пусть ось x параллельна плоскости симметрии системы, а ось y перпендикулярна этой плоскости, как показано на рис. 1.

Фазовая скорость пластины U равна скорости изменения по времени координаты x точки наиболее тесного сближения двух пластин. (Здесь U считается постоянной величиной.)

Основная идея элементарной теории заключается в пренебрежении движением газа в направлении оси x при расчете давления газа и его плотности. В действительности это не означает, что движение отсутствует в направлении оси x, а лишь означает, что это движение не сильно влияет на изменение давления и плотности. Сделанное предположение точно выполняется при нулевом угле между пластинами. Следует ожидать поэтому, что эта простая теория будет приложима к случаю, когда угол между пластинами мал.

Если движение газа в направлении оси x отсутствует, то газ будет подвергаться одномерному сжатию в направлении оси y

до тех пор, пока силы давления газа не изменят движения пластины. Давление газа и его плотность затем начнут убывать при рассматриваемом значении x. Изменение со временем давления и плотности будет одинаковым для всех значений x с точностью до изменения в отсчете нулевого момента времени, соответствующего конечной фазовой скорости пластин. Но этот сдвиг по времени означает, что в любой данный момент давление будет меняться в направлении x, вызывая боковое ускорение газа. Этим путем в теории учитывается образование газовой струи. В итоге основные предположения теории сводятся к следующим:

1. Давление и плотность газа при любых x и t такие же, как если бы угол между пластинами был равен нулю, а движение осуществлялось лишь в направлении оси y. Практически давление и плотность могут быть найдены методами одномерной гидродинамики.

2. Для любого значения x и для любого момента времени t давление и плотность газа не зависят от y. Фактически просто осредненные по пространству одномерные давление и плотность вычисляются как функции времени.

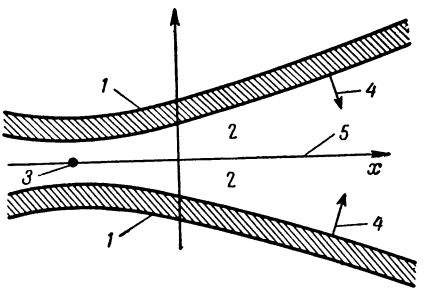


Рис. 1. Поперечное сечение системы «пластина — газ», которая приводит к двумерному плоскому струйному течению; струя движется в направлении оси x.

1 — пластина; *2* — газ; *3* — фазовая точка; *4* — вектор скорости пластины; *5* — плоскость симметрии.

Метод полос (и большинство других гидродинамических численных методов общего назначения) разработан в основном для решения задач с начальными данными, а не для стационарных задач. Для того чтобы иметь дело с задачей с начальными данными, представим себе, что пластины вначале были параллельны, а газ между ними находился в однородном состоянии. С ростом времени скорость, перпендикулярная оси x, приобретается материалом пластины при все более возрастающих значениях координаты x. Возникающая скачкообразно скорость пластины не зависит от x, а время прихода этого скачка зависит линейно от x, так что фазовая скорость пластины постоянна.

Пусть $P=f(t)$ и $\rho=g(t)$ — зависящие от времени осредненные одномерные давление и плотность для движения в направлении, перпендикулярном оси x. Тогда поля давления и плотности таковы:

$$P=f\left(t-\frac{x}{U}\right), \quad \rho=g\left(t-\frac{x}{U}\right),$$

где U — постоянная фазовая скорость пластин. Для траектории частицы в этом движении имеем уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-(\partial P/\partial x)_t}{\rho}. \tag{1}$$

Если мы положим $\xi = t - x/U$, $x = (t-\xi)U$, то получим

$$\frac{U^2 d^2\xi}{dt^2} = \frac{-f'(\xi)}{g(\xi)}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$U^2\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = -2\int_0^{\xi} d\eta\,\frac{f'(\eta)}{g(\eta)} + K.$$

Обозначив через $u\,[=dx/dt]$ скорость частицы газа, имеем

$$(U-u)^2 = -2\int_0^{\xi} d\eta\,\frac{f'(\eta)}{g(\eta)} + K.$$

Далее, так как $u=0$ при $\xi=0$, получаем

$$u^2 - 2Uu + F(\xi) = 0,$$

где

$$F(\xi) = 2\int_0^{\xi} d\eta\,\frac{f'(\eta)}{g(\eta)}; \tag{2}$$

отсюда находим

$$u = U - \sqrt{U^2 - F(\xi)} = \frac{F(\xi)}{U + \sqrt{U^2 - F(\xi)}}.$$

Пусть $F_{\max}$ — максимальное значение $F(\xi)$. Тогда, поскольку u возрастает монотонно с ростом $F(\xi)$, максимальная скорость частицы газа $u_{\max}$ определяется формулой

$$u_{\max} = \frac{F_{\max}}{U + \sqrt{U^2 - F_{\max}}}. \tag{3}$$

Отсюда видно, что критическое значение величины фазовой скорости U дается равенством

$$U^2_{\text{крит}} = F_{\max}.$$

При этой фазовой скорости

$$u_{\max} = U_{\text{крит}},$$

т. е. наиболее быстрая частица газовой струи движется с фазовой скоростью. Если $U > U_{\text{крит}}$, то $u_{\max} < U$. Фактически скорость газовой струи монотонно уменьшается с ростом U. Тот результат, что $u_{\max}=0$ в предельном случае бесконечно большой фазо-

вой скорости, является правильным и объясняется соответствующей причиной: в этом случае градиент давления в направлении оси x равен нулю для всех x и t. Если $U<U_{\text{крит}}$, то выражение для $u_{\max}$ не имеет физического смысла. Причина этого состоит в том, что когда $U<U_{\text{крит}}$, скорости частиц становятся больше фазовой скорости. Согласно этой теории, получается, что для рассматриваемой системы покоящиеся частицы газа обгоняются струей, и, таким образом, поле скоростей перестает быть однозначной функцией координат.

Если уравнение (3) записать в виде

$$\frac{u_{\max}}{U}=\frac{(U_{\text{крит}}/U)^2}{1+\sqrt{1-(U_{\text{крит}}/U)^2}},$$

то можно получить, что $u_{\max}/U=\frac{1}{2}$, когда $U_{\text{крит}}/U=0{,}866$. Когда $U\approx U_{\text{крит}}$, то величина $u_{\max}/U$ более чувствительна к изменению U. Таким образом, если имеются большие перемещения частиц при $U=U_{\text{крит}}$, то эти перемещения весьма быстро уменьшаются с убыванием U. По этой причине, несмотря на ошибки, сделанные при упрощенном определении полей давления и плотности, значение $U_{\text{крит}}$ можно все же определять достаточно точно для очень больших фазовых скоростей, которые может иметь газ. Однако точно это или нет, но по этой теории получается, что газ будет двигаться с фазовой скоростью, если она равна $U_{\text{крит}}$.

Далее, $U^2_{\text{крит}}=F_{\max}=F(\xi_{\max})$, где $\xi_{\max}$ есть величина ξ, для которой $dF/d\xi=0$. Следовательно, согласно уравнению (2), имеем

$$f'(\xi_{\max})=0.$$

Таким образом, $\xi_{\max}$ равно времени τ, при котором давление $P=f(t)$ достигает своей наибольшей величины. Имеем также равенство

$$F_{\max}=2\int_0^{\tau}dt\,\frac{f'(t)}{g(t)}. \tag{4}$$

Заметим, что для данной системы величины $f(t)$, $g(t)$, τ и $F_{\max}$ находятся только по одномерной теории.

Отметим интересный специальный случай, когда газ ведет себя при постоянной энтропии как газ с постоянным показателем адиабаты γ. В этом случае $P=a\rho^{\gamma}$ или $f(t)=a[g(t)]^{\gamma}$, а также

$$\frac{f'(t)}{g(t)}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right)=\frac{dc^2/dt}{\gamma-1},$$

где c — скорость звука.

В результате находим

$$F_{\max}=\frac{2c^2(\tau)}{\gamma-1}.$$

Скорость звука c увеличивается монотонно с ростом P, причем $P(\tau)=P_{\max}$. Поэтому $c(\tau)=c_{\max}$ и

$$U_{\text{крит}}=c_{\max}\sqrt{2/(\gamma-1)}.$$

Эта особая скорость является наибольшей из возможных скоростей частиц вдоль линии тока для стационарного течения, в котором $c_{\max}$ равно скорости звука в точке торможения. Из этой теории получается, что если фазовые скорости больше, чем эта «предельная скорость», то скорость газа должна быть меньше фазовой скорости, что является приемлемым.

Рассмотренную теорию можно легко распространить на случай переменной фазовой скорости. Можно также показать, что по мере того, как угол между движущимися пластинами приближается к нулю (т. е. $U\to\infty$), не только абсолютная, но и относительная ошибка при вычислении скорости газа стремится к нулю. Наконец, заметим, что можно несколько улучшить результаты теории, проведя вычисления поправочных членов более высокого порядка путем разложения точного решения по степеням $1/U$.

3. Метод полос

А. Определение переменных величин и уравнения движения в системе координат, принятой для метода полос

Метод полос предназначен для описания гидродинамических явлений при двумерных осесимметричных течениях; его можно применять для задач, содержащих несколько областей. Используемая исходная система координат является сферической, причем сферический угол φ, определяющий поворот вокруг оси симметрии не учитывается. В качестве одной из двух пространственных координат, которые используются в методе, берется сферический угол θ, образованный данным радиусом-вектором и осью симметрии. Угол θ является эйлеровой координатой. В начале решения любой задачи выбирается система лучей, соответствующая различным углам θ и эти лучи остаются фиксированными в процессе решения задачи.

Вторая пространственная координата, используемая в методе полос, эквивалентна сферической радиальной координате r, но скорее является лагранжевой, чем эйлеровой. Эта координата обозначается буквой a. Поверхности $a=\text{const}$ топологически эквивалентны сферическим поверхностям. Однако движущаяся среда не может протекать сквозь поверхность $a=\text{const}$. Поэтому поверхности, на которых величина a остается постоянной, деформируются так, что перемещаются вместе со средой. Свободные поверхности и поверхности раздела определяются таким образом, чтобы они были поверхностями постоянных значений a.

Следовательно, граница каждой области, занятой средой, автоматически учитывается в этой системе координат, что явилось одной из главных причин первоочередного выбора данной системы координат для метода полос. Основные свойства этой системы иллюстрируются на рис. 2.

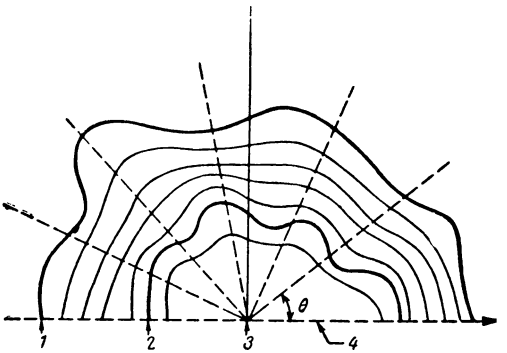


Рис. 2. Типичные координатные линии системы координат метода полос.

Показано поперечное сечение в плоскости $\varphi=0$ для системы, состоящей из двух областей.
1 — свободная поверхность; *2* — поверхность раздела; *3* — начало координат; *4* — ось симметрии. —— линии постоянного значения a; – – – линии постоянного значения θ.

Уравнения для преобразования, связывающего сферические координаты r, θ, φ и время t с координатами метода полос a, θ', φ', имеют вид

$$r=R(a,\ \theta',\ t'),\ \theta=\theta',\ \varphi=\varphi',\ t=t'. \tag{5}$$

Удобное и простое обобщение этого преобразования получается путем замены θ' на переменную x', причем

$$\theta'=f(x'). \tag{6}$$

Это позволяет распределить радиальные линии с различной густотой в различных областях θ', используя соответствующую функцию f. Штрихи, которые мы применяли для избежания путаницы в уравнениях преобразований (5) и (6), в дальнейшем будут опускаться.

В уравнения движения, записанные для системы координат метода полос, входит переменная величина Ω — поделенный на 2π момент количества движения, рассчитанный на единицу объема пространства a, x, φ и взятый в точке a, x, φ относительно начала координат, перпендикулярно к плоскости φ. В части пространства a, x, φ, где величины a, x изменяются на единицу, а φ изменяется на бесконечно малую величину $d\varphi$, величина Ω

равна полному моменту количества движения, поделенному на $2\pi\, d\varphi$. При переходе к дискретной сетке переменная a изменяется (по определению) на единицу между соседними a-линиями, x также изменяется на единицу между соседними x-линиями; значение Ω считается постоянным в той части пространства, которая соответствует ячейке дискретной сетки, используемой в соответствующем месте плоскости a, x. Можно сказать, что величина Ω равна моменту количества движения вещества ячейки, поделенному на $2\pi\, d\varphi$.

Кроме Ω, в уравнения движения входят следующие переменные величины: ψ — поделенная на 2π масса единицы объема пространства a, x, φ (благодаря осевой симметрии эта величина не зависит от φ); ρ — плотность; P — давление; Q — искусственная вязкость, полученная обобщением искусственной вязкости Рихтмайера и фон Неймана; $\dot{R}$ — радиальная скорость ($\dot{R}$ не зависит от φ); $\dot{x}$ — скорость изменения x при изменении x для движущейся частицы; η — сжатие (η равно ρ/ρ_0, где ρ_0 — некоторая постоянная, называемая характерной плотностью); V — относительный объем, определяемый величиной $1/\eta$; μ — величина, равная $\eta-1$; ε — внутренняя энергия на единицу массы, умноженная на характерную плотность ρ_0.

В этой работе всюду используются следующие единицы измерения: сантиметр (*см*), грамм (*г*), микросекунда (*мксек*, 1 *мксек* $=10^{-6}$ *сек*). Скорость измеряется в сантиметрах за микросекунду (*см/мксек*), плотность — в граммах на кубический сантиметр (*г/см*^{3}). Мегабар (*Мбар*, 1 *Мбар* $=10^{12}$ *дин/см*^{2}) служит единицей измерения давления и искусственной вязкости, а для измерения энергии служит *Мбар* · *см*^{3}.

При образовании дискретного аналога жидкой сплошной среды пространство непрерывных переменных x, a, t заменяется дискретными узловыми точками сетки, каждая из которых отмечается целыми числами j, k, n. Эти целые числа являются независимыми переменными разностной сетки, причем j заменяет переменную x, k — переменную a, а n — время t. В точках сетки j может принимать любое положительное целое значение, k — только нечетные целые положительные значения, а n — любые четные положительные целые значения. Полуцелые значения j (или четные значения k, или нечетные значения n), возникающие в конечно-разностных уравнениях, можно интерпретировать как значения, соответствующие координате x (или a, или t) в среднем положении для двух соседних целых значений j (или k, или n).

Как показано на рис. 3, логические места зависимых переменных потока обычно соответствуют узловым точкам, которые отличаются от узловых точек исходной разностной сетки. Если требуется знать значение гидродинамической функции в точке,

которая не совпадает с точкой ее определения, то берется осредненное значение по соответствующим точкам.

В системе координат, используемой для метода полос, уравнения осесимметричных движений запишутся следующим образом.

Уравнение для момента количества движения

$$\Omega_t + (\dot{x}\Omega)_x + \frac{\psi}{\rho f'}(P+Q)_x = 0, \qquad \Omega = \psi R^2 f' \dot{x}, \tag{7}$$

где $f' = df/dx$.

Уравнение для радиальной скорости

$$\dot{R}_t + \dot{x}\dot{R}_x - \frac{\Omega^2}{\psi^2 R^3} + \frac{(P+Q)_a}{\rho R_a} = 0. \tag{8}$$

Уравнение сохранения массы

$$\psi_t + (\dot{x}\psi)_x = 0. \tag{9}$$

Эта система дополняется следующими уравнениями.

Уравнение для радиальной координаты

$$R_t + \dot{x}R_x = \dot{R}. \tag{10}$$

Определение искусственной вязкости

$$Q = \begin{cases} 0, & \text{если } \dot{z} \geqslant 0, \\ K\dot{z}^2/8V, & \text{если } \dot{z} < 0, \end{cases}$$

где

$$z = \begin{cases} \dot{V}/V, & \text{если } \dot{R} \geqslant 0, \\ \dot{V}/V - 2\dot{R}/R, & \text{если } \dot{R} < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Уравнение для относительного объема V и относительного сжатия η:

$$V = 1/\eta = (\rho_0/3\psi)(R^3)_a f' \sin\theta. \tag{12}$$

Уравнение состояния

$$P = g(\mu) + \varepsilon h(\mu), \tag{13}$$

где

$$g(\mu) = a_0 + a_1\mu + a_2\mu|\mu| + a_3\mu^3,$$
$$h(\mu) = b_0 + b_1\mu + b_2\mu|\mu|,$$

a_0, a_1, a_2, a_3; b_0, b_1, b_2 — постоянные величины.

Первый закон термодинамики

$$\dot{\varepsilon} = (P+Q)\dot{V}. \tag{14}$$

В конечно-разностных аналогах этих уравнений величина ε исключается с помощью первого закона термодинамики и уравнения состояния, так что получается явное уравнение для давления; не возникает никаких особенностей и при комбинировании уравнения состояния с первым законом в дифференциальной форме.

В уравнениях (7)—(10) оператор точки $(\cdot)$ дает скорость изменения некоторой величины с течением времени в лагранжевой системе координат, т. е. для некоторого отдельного элемента среды. Его связь с оператором $\partial/\partial t$, который дает скорость изменения со временем некоторой величины в системе координат метода полос, т. е. когда a и x предполагаются фиксированными, имеет вид

$$(\cdot)=\frac{\partial}{\partial t}-\dot{x}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{15}$$

Б. Центрирование переменных на разностной сетке

Метод полос, предназначенный для численного решения уравнений (7)—(14), вероятно, является первым вычислительным методом решения двумерных гидродинамических задач в смешанной (эйлеровой и лагранжевой) системе координат. В § 7, А приведены конечно-разностные уравнения для уравнений (7)—(14), которые использовались в настоящем методе при решении задачи о движении газовой струи. Эти конечно-разностные уравнения применялись внутри одной области.

На рис. 3 показана логика центрирования гидродинамических переменных относительно дискретной сетки линий $\theta=\text{const}$ (j-линии) и линий $a=\text{const}$ (k-линии) для внутренней области, занятой одной средой. Как следует из рис. 3, для фиксированного значения k вычисляются две различные системы значений величин давлений, плотностей, внутренних энергий и искусственных вязкостей. Одна из систем располагается в центрах ячеек, т. е. при полуцелых значениях j, а другая соответствует границам ячейки, т. е. предназначена для целых значений j. Первоначально метод записывался с расположением давлений, плотностей и т. д. только в центрах ячеек, что, возможно, вполне естественно для термодинамических функций. Однако если использовать центрирование давления, плотности и т. д. только в ячейках, то возможно, что две соседние k-линии будут примыкать тесно друг к другу и даже пересекаться при заданном значении j без появления большой противодействующей силы, даже в том случае, когда имеется лишь слабое движение в направлении j-линий.

Для лучшего уяснения этого факта предположим, что ячейка ограничена двумя j-линиями, а именно $j=j_0$ и $j=1+j_0$. Сторона

ячейки, соответствующая j_0, может стать очень короткой, тогда как сторона при $1+j_0$ увеличит свою длину так, что будет отсутствовать общее изменение объема или давления в центре ячейки. Оказалось, что это явление имеет место в некоторых задачах, особенно для течений, в которых лагранжевы ячейки будут сильно искажаться. Для того чтобы стабилизировать метод относительно таких движений узловых точек сетки, были

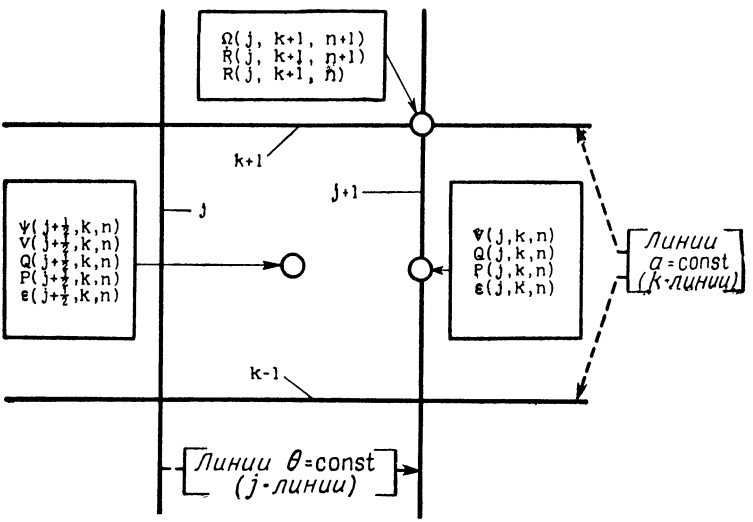


Рис. 3. Логическое размещение гидродинамических функций внутри области.

Показано пространственное расположение. Время соответствует моментам t_n и t_{n+1}, как это указано в обозначениях функциональной зависимости.

введены давления, плотности и т. д. для целых значений j. Радиальные ускорения вычисляются по давлению и искусственной вязкости при целых значениях k, которые соответствуют границам ячеек, а угловые ускорения вычисляются с помощью давления и искусственной вязкости при полуцелых значениях j.

В действительности сопоставляются две системы термодинамических величин, так как обе они вычисляются с помощью одной совокупности координатных точек, которые определяют сетку. Совместность между собой двух термодинамических полей дает нам в любом частном случае грубую проверку достоверности решения. Однако количество вычислений, необходимых для расчета решения на одном шаге по времени, заметно увеличивается при использовании этой процедуры (хотя и не удваи-

вается), а это представляет собой серьезный практический недостаток при использовании конечно-разностных уравнений.

Стоит заметить, что в уравнения (23)—(25) переменная θ в явном виде не входит. Например, радиальную скорость в уравнении (24) невозможно найти, зная $\dot{R}(j, k+1, n+1/2)$ и не зная радиальных скоростей при значениях $j+1$ и $j-1$ на линии $k+1$ в расчетный момент времени $n+1/2$. Следовательно, эти уравнения нужно решать одновременно для всех неизвестных радиальных скоростей, связанных с данной k-линией или полосой. Граничное условие о том, что плотность момента количества движения равна нулю на оси симметрии, дает столько неизвестных радиальных скоростей, сколько имеется уравнений для любой данной полосы. Поэтому становится возможным однозначное определение радиальных скоростей.

Использование того же граничного условия ($\Omega/\psi=0$) позволяет найти решение неявных конечно-разностных уравнений для определения радиальной координаты и момента количества движения. Так как любая рассматриваемая система уравнений включает только узлы, соответствующие значениям $j+1$, j и $j-1$, то одновременное определение радиальных скоростей для заданной полосы сводится к решению системы линейных уравнений, матрица которых содержит нулевые элементы всюду, кроме главной диагонали и двух соседних с ней диагоналей, т. е. является трехдиагональной матрицей [1]).

B. Члены переноса

Члены $(\dot{x}\Omega)_x$, $\dot{x}\dot{R}_x$ и т. д., которые приводят к неявной форме уравнений (23)—(25), характеризуют собой быстроту изменения свойств, обусловленных течением материала через границу ячейки, и называются «членами переноса». При решении задач о газовых струях было обнаружено, что можно написать устойчивую явную схему для членов переноса, которая имела бы такую же точность, как и неявная схема, приведенная в § 7, A. Неявный характер этих конечно-разностных уравнений остался от более раннего варианта метода полос. Первые изменения в методе в направлении явного описания членов переноса появились в уравнении (26). Используемый при этом способ основан на вычислении траекторий частиц среды, о чем будет идти речь ниже.

Пусть $\dot{x}$ — известная функция только от x вида $\dot{x}(x)$. Далее, пусть частица с координатой x_0 в момент времени t_0 подходит

[1]) Используемый в методе полос способ решения систем линейных уравнений этого вида был предложен Р. Хольдтом. Программа для метода полос была составлена У. Гильмором, Д. Холда и Ф. Петерсеном для машины IBM-7090.

к координате x за время $t=t_0+\Delta t$, где

$$t-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\dot{x}(x)}=\Delta t.$$

Если $\dot{x}$ зависит от x линейно, т. е.

$$\dot{x}(x)=A_{\dot{x}}+B_{\dot{x}}(x-x_j),$$

где x_j — одно из фиксированных значений x, то получаем

$$x_0-x_j=(A_{\dot{x}}/B_{\dot{x}})\{[1+(x-x_j)B_{\dot{x}}/A_{\dot{x}}]\exp(-B_{\dot{x}}\Delta t)-1\}. \quad (16)$$

Это уравнение дает систему характеристических кривых, определяющих пути частиц в плоскости x, t. Оно используется в конечно-разностном уравнении (26) следующим образом. Предположим, что нас интересует изменение свойства S частицы среды, которая находится в положении x в момент времени t. В некоторый более ранний момент t_0 координата частицы x_0 определяется приближенно по уравнению (16). Теперь, если S известно при t_0 для ряда дискретных значений x, то значение S при t_0 в точке x_0, а именно $S(x_0, t_0)$ можно найти путем интерполяции. Тогда лагранжева производная по времени S приближенно равна отношению $[S(x, t)-S(x_0, t_0)]/\Delta t$. Например, в конечно-разностном уравнении (28), которое служит для определения искусственной вязкости в некоторой точке j-линии, считается, что функция V изменяется линейно по x вблизи точки x_j в момент времени t_n, а значение $V_0(j, k, n)$ находится с помощью интерполяции в этом линейном V-поле. Величина $V_0(j, k, n)$ представляет собой относительный объем частицы в момент t_n, которая расположена в точке x_j в момент $t_n+\Delta t$; для конечно-разностной аппроксимации $\dot{V}$ используется отношение

$$[V(j, k, n+2)-V_0(j, k, n)]/2\Delta t.$$

Разлагая по степеням Δt показательную функцию $\exp(-B_x\Delta t)$, входящую в уравнение (16), и ограничиваясь членом первого порядка по Δt, получаем

$$x_0-x_j=(x-x_j)(1-B_{\dot{x}}\Delta t)-A_{\dot{x}}\Delta t. \quad (17)$$

Практически оказалось, что уравнение (17) дает такие же хорошие результаты, как и уравнение (16), так что нет особой необходимости в «точном» интегрировании, которое приводит к члену с экспонентой. Причины этой возможности рассматриваются в § 4.

Обсудим теперь наиболее важную сторону вопроса о членах переноса, используемых в методе полос. Чтобы характеризовать эту особенность уравнений, рассмотрим, например, уравнение

(23), которое содержит совокупность выражений, различно используемых при определении свойства среды (в рассматриваемом случае момента количества движения), которая переносится через границу данной области или линию $\theta = \text{const}$. Обоснованием для выбора конечно-разностного уравнения (23) явилось изучение вопроса о переносе для одномерной задачи, которое было недавно закончено, но еще не опубликовано. Это исследование приводит к следующим выводам:

1. Схемы, содержащие «левые» разности (или разности «назад»), могут приводить к сильному затуханию, или размазыванию, возмущения. Например, скорость переноса массы через поверхность можно было бы вычислить как произведение площади поверхности на нормальную составляющую (к этой поверхности) скорости частиц и на плотность среды внутри ячейки, из которой среда вытекает через эту поверхность. Пусть этот способ используется для описания течения среды через эйлеровы ячейки в случае движения с постоянной скоростью столбика среды переменной плотности. Предположим, что плотность столбика меняется по его длине по синусоидальному закону. Если использовать восемь ячеек для описания полной синусоидальной волны по плотности, то тогда амплитуда волны, которая должна бы быть постоянной, уменьшится в двадцать раз за время, необходимое для перемещения столбика на расстояние в две длины волны.

2. Схема с центральными разностями может привести к сильным, физически нереальным колебаниям. Например, в случае переноса массы, можно использовать осреднение плотности в ячейках, соседних с данной поверхностью, вместо того чтобы брать плотность слева при расчете переноса массы через поверхность. Это можно осуществить или по неявной схеме, применяя центральные разности по времени для членов переноса и также проводя центрирование и для других членов, входящих в уравнение сохранения массы [см. уравнение (9)], или можно взять явную схему с небольшим поправочным членом для обеспечения устойчивости. В любом случае при прохождении с постоянной скоростью через эйлеровы ячейки столбика вещества, имеющего постоянную плотность, колебания плотности быстро нарастают за передней частью столбика. К тому времени, когда жидкий столбик пройдет 25 ячеек, амплитуда основного колебания достигнет одной четверти плотности столбика.

3. Способ левых разностей и центрирования можно использовать таким образом, чтобы избежать в основном физически нереального размазывания действительных колебаний, что имеет место при применении только способа левых разностей, и физически нереального роста колебаний в спокойном поле, связанного с процедурой центрирования. Ключ к созданию этой схемы

переноса с использованием «иногда центральных, иногда левых» разностей лежит в возможности допущения лишь волн или колебаний такой короткой длины, с которой они не могут существенно развиваться для применяемой разностной сетки. Затем для выборочного демпфирования этих волн применяется модель переноса с левыми разностями. Первоначальные шаги в создании этой схемы переноса отражены в конечно-разностном уравнении (23) § 7, хотя эта схема и претерпела с тех пор ряд изменений в деталях. В случае уравнения (23) для переноса используется величина момента количества движения, а именно $\Omega(j+1/2,\ k+1,\ n)$, при отыскании которой определяются следующие параметры:

а) направление течения среды в точке $(j+1/2,\ k+1,\ n)$; это позволяет установить знак $\dot{x}(j+1/2,\ k+1,\ n)$;

б) гладкость функции $(\Omega/f'\sin\theta)$; это — тест, помогающий установить, будет ли скорость изменения функции $(\Omega/f'\sin\theta)$ относительно x больше ее кривизны, т. е. будет ли иметь место соотношение

$$\left|\frac{\Omega(j+1,\ k+1,\ n)}{f'(j+1)\sin\theta(j+1)}-\frac{\Omega(j-1,\ k+1,\ n)}{f'(j-1)\sin\theta(j-1)}\right|>2\left|\frac{\Omega(j+1,\ k+1,\ n)}{f'(j+1)\sin\theta(j+1)}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\Omega(j,\ k+1,\ n)}{f'(j)\sin\theta(j)}+\frac{\Omega(j-1,\ k+1,\ n)}{f'(j-1)\sin\theta(j-1)}\right|.$$

Таким образом, в зависимости от гладкости функции $(\Omega/f'\sin\theta)$ для определения $\Omega(j+1/2,\ k+1,\ n)$ будут использоваться или центральные разности, или левые разности.

Г. Поверхности раздела и свободные поверхности

Уравнения для расчета поверхностей раздела или свободных поверхностей приведены в § 7, Б. В этих уравнениях используется условие непрерывности нормальных к поверхности раздела составляющих сил, рассчитанных на единицу площади. По этой причине поверхности раздела размещаются на дискретной сетке при тех же значениях k, как и давление, т. е. поверхность раздела будет обычно располагаться в середине полосы. Это показано на рис. 4. Здесь же показан способ центрирования на сетке всех переменных величин, относящихся к поверхности раздела. Путь использования условия непрерывности нормальной составляющей силы при определении закона движения поверхности раздела будет описан ниже для случая одномерного движения с одной лагранжевой пространственной координатой. В этом обсуждении мы будем следовать работе Трулио и Триггера [4].

В одномерном случае поверхность раздела делит некоторую лагранжеву ячейку на две части. Сила на единицу площади, действующая по нормали к поверхности раздела, равна сумме

давления P и искусственной вязкости Q. Пусть задано положение всех границ ячеек или узлов сетки в момент t_n. Тогда с помощью системы нормальных напряжений $P+Q$, используя, например, уравнения Рихтмайера и фон Неймана [3], можно рассчитать положение всех границ ячеек, не совпадающих с поверхностью раздела в более позднее время $t_n+\Delta t$.

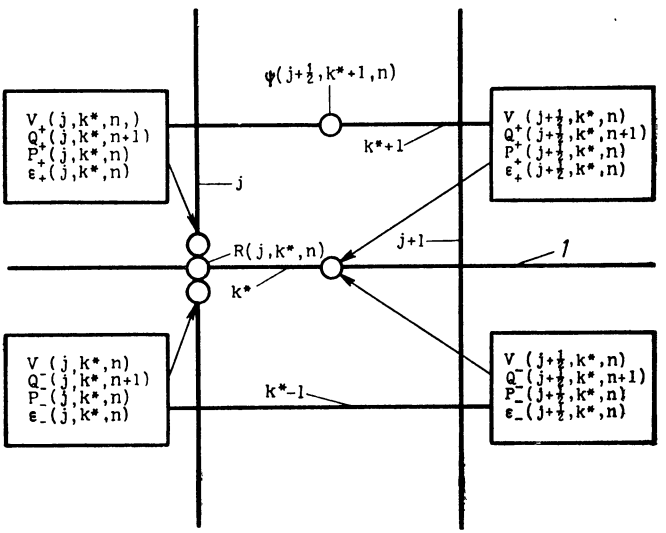


Рис. 4. Логическое размещение гидродинамических функций у поверхности раздела между двумя областями.

Показано пространственное расположение. Время соответствует моментам t_n и t_{n+1}, как это указано в обозначениях функциональной зависимости.

1 — поверхность раздела.

Таким образом, имеется возможность прямого расчета перемещения границ ячеек, содержащих поверхности раздела, за время одного шага. Так как все узлы сетки являются лагранжевыми, то массы двух частей ячеек («полуячеек»), расположенных около поверхности раздела, не меняются с течением времени. В результате движения границ ячеек, расположенных по соседству с поверхностью раздела, изменяется средняя плотность в полуячейках, примыкающих к границе раздела. Если поверхность раздела не перемещается нужным образом, то в полуячейках около поверхности раздела не будет равенства напряжений. Поэтому для определения координат поверхности раздела применяется процесс последовательных приближений. Цель этого процесса состоит в установлении равенства нормальных напряжений в полуячейках, примыкающих к поверхности раздела.

При каждой итерации используется обычная последовательность вычислений.

1. На основании результатов последнего приближения при расчете расположения поверхности раздела вычисляется плотность в каждой полуячейке.

2. На основании нового значения плотности вычисляется новое значение искусственной вязкости.

3. С помощью уравнения состояния и первого закона термодинамики для каждой полуячейки рассчитываются новые значения давления и внутренней энергии.

После выполнения ряда приближений систематическое изменение поверхности раздела приведет к уменьшению разности нормальных напряжений в двух соответствующих полуячейках до некоторой подходящей малой величины. В способе приближений, используемом в методе полос, для сходимости обычно требовалось не более пяти итераций, но в отдельных случаях число итераций может возрастать до двадцати.

В случае свободной поверхности методика расчета аналогична изложенной для поверхности раздела двух сред, за исключением того, что здесь используется только одна полуячейка, находящаяся в области жидкости. Положение свободной поверхности варьируется до тех пор, пока нормальное напряжение, действующее в этой полуячейке, не станет равным напряжению, приложенному к этой поверхности. При использовании нелагранжевой системы координат (как это имеет место в методе полос) массы полуячеек будут изменяться со временем. В этом случае новые массы рассчитываются до проведения процесса итераций и не изменяются вплоть до перехода к новому шагу по времени. (Способы расчета поверхностей раздела и другие вопросы, затронутые в этой главе, рассматривались Рихтмайером [2].)

Д. Замечания о методе полос

Метод полос успешно применялся к решению задач о двумерном осесимметричном течении газа. В принципе и практически он ограничен из-за того, что радиальная координата каждой k-линии должна быть однозначной функцией θ. Добавим также, что по причинам, которые не вполне ясны, численные решения, полученные методом полос, обладают меньшей точностью в окрестности оси симметрии, чем в остальных местах. Наконец, по-видимому, имеется тенденция к появлению «эффекта тюбика зубной пасты», при котором одна из полос со средой становится очень тонкой в некоторой области малого изменения угла. Этот эффект не всегда очевиден, хотя в некоторых случаях (при методе, устойчивом относительно колебаний радиальной координаты) он может быть замаскирован. Так, задачи о течении

струи газа между пластинами (и аналогичные им) рассчитываются устойчиво, если ширина полосы определяется с точностью только в две или три значащие цифры. С другой стороны, кроме задач о струях газа, метод можно успешно применять к более сложным течениям. Например, расчеты неустойчивых по Тейлору движений жидкости в слое конечной толщины можно продолжить и после наступления стадии экспоненциального роста возмущений до момента, когда бóльшая часть массы жидкости перейдет в острые «пики».

С теоретической точки зрения полученные здесь конечно-разностные уравнения слишком сложны и произвольны, чтобы их можно было рассмотреть удовлетворительным образом. Это отчасти результат того, что метод находился в состоянии постоянной эволюции, так что некоторые упрощения, которые можно было бы сделать весьма легко, умышленно не принимались во внимание для того, чтобы испытать более важные изменения в конечно-разностных уравнениях.

Сложность метода обусловлена также серьезными недостатками в подходе к построению конечно-разностных уравнений. Примененный способ по существу является способом проб и ошибок и основывается на «осмысленных» предположениях. Для этого метода также характерно то, что результаты расчетов проверялись с помощью известных решений для некоторых простых случаев или с помощью надежных экспериментальных данных. Проверочные задачи обычно относились к течениям в предельном одномерном случае, а также к стационарным ударным волнам и простым волнам разрежения, распространяющимся наклонно по отношению к двумерной разностной сетке. Если результаты были недостаточно точны или если развивалась физически нереальная неустойчивость движений, то предпринимались попытки обнаружить те члены конечно-разностных уравнений, которые сильно влияли на появление этих ошибок в результатах. Далее, в основном по интуитивным соображениям эти члены пересматривались с тем, чтобы можно было добиться исправления недостатков. Процесс оценки величин затем проводился с новыми конечно-разностными уравнениями; эти уравнения также изучались в свою очередь и т. д. Стремление учесть при помощи этой процедуры специальные случаи составляет главную причину сложности уравнений метода полос.

Ценность любого метода определяется в конце концов теми численными результатами, которые он позволяет получить при его применении. По-видимому, верно также и то, что почти все численные методы гидродинамики развивались путями, близкими к описанному выше. Тем не менее имеется очевидное упущение в этом способе получения конечно-разностных уравнений, сильно опирающемся на численные результаты, полученные

только для некоторых задач. Хотя эти задачи могут быть и очень важными, нельзя быть уверенным в том, что хорошие результаты будут получены в других задачах. Особенно это относится к более сложным течениям.

4. Замечания о сходимости численных методов в гидродинамике

Усложнения такого типа, как появление экспоненциальных функций в уравнении (26), являются следствием попыток получить правильные результаты при рассмотрении специальных задач и исправить недостатки конечно-разностных уравнений (поскольку возникают трудности при решении этих специальных задач). Возможно, что наиболее очевидный способ, который позволил бы надеяться на улучшение точности конечно-разностных уравнений, заключается в использовании разностных отношений более высокого порядка. Можно было бы ожидать, что получатся более точные конечно-разностные уравнения, если заменить производные, например для dy/dx, разностным выражением

$$D_3 = \frac{y_{k+1/2} - y_{k-1/2}}{\Delta x} - \frac{1}{24}\,\frac{y_{k+3/2} - 3y_{k+1/2} + 3y_{k-1/2} - y_{k-3/2}}{\Delta x},$$

а не разностным отношением вида

$$D_1 = \frac{y_{k+1/2} - y_{k-1/2}}{\Delta x}.$$

В смысле разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1/2\,(x_{k+1/2} + x_{k-1/2})$ использование D_3 дает более точную аппроксимацию для dy/dx, чем использование D_1. Действительно, из соответствующего разложения в ряд Тейлора находим, что

$$D_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} + \left(\frac{1}{3!}\right)\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x_0}$$

плюс члены более высокого порядка, а для D_3 имеем

$$D_3 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} - \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^4 \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_{x_0}$$

плюс члены более высокого порядка.

Таким образом, конечно-разностный аналог уравнения неразрывности, полученный Рихтмайером и фон Нейманом, а именно

$$\frac{\rho_0\left(V_{L+1/2}^{n+1} - V_{L+1/2}^{n}\right)}{\Delta t} = \frac{\left(U_{L+1}^{n+1/2} - U_{L}^{n+1/2}\right)}{\Delta x}.$$

можно было бы заменить на уравнение

$$\frac{\rho_0\left(V_{L+1/2}^{n+1}-V_{L+1/2}^{n}\right)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\left(U_{L+1}^{n+1/2}-U_{L}^{n+1/2}\right)-\frac{1}{24}\left(U_{L+2}^{n+1/2}-3U_{L+1}^{n+1/2}+3U_{L}^{n+1/2}-U_{L-1}^{n+1/2}\right)}{\Delta x}$$

с целью увеличения скорости сходимости решения конечно-разностных уравнений к искомому решению дифференциальных уравнений (здесь введено обозначение $V=1/\rho$ вместо $V=\rho_0/\rho$). Однако для того чтобы реализовать возможность получения более высокой точности, следовало бы ожидать, что производные высокого порядка, скажем d^3U/dx^3, будут непрерывными функциями в некоторой области изменения независимой переменной x. Это условие почти никогда не выполняется в гидродинамических задачах, имеющих практический интерес. Как правило, функции, характеризующие течение, имеют разрывы производных низкого порядка.

Причина появления разрывов в производных от гидродинамических функций заключается в том, что скорость звука имеет конечное значение. Это приводит к такой ситуации, что в одной части области, занятой жидкостью, имеется однородное, невозмущенное состояние, тогда как в другой части жидкости распространяются возмущения. Если бы не было разрывов у производных от гидродинамических функций, то можно было бы их разложить в ряд Тейлора с конечным радиусом сходимости в окрестности некоторой точки невозмущенной части области, исключая окрестности изолированных особых точек на вещественной оси. В результате на основании принципа аналитического продолжения мы должны были бы сделать заключение не только о том, что вся область жидкости находится в невозмущенном однородном состоянии, но и о том, что это состояние никогда не может измениться. (Здесь не учитывается возможный, но маловероятный случай, когда имеется решение гидродинамических уравнений с непрерывными производными всех порядков, но обладающее существенными особенностями на вещественной оси.)

Таким образом, из-за конечности скорости звука все производные (выше некоторого порядка) по пространственным координатам и времени от гидродинамических функций имеют разрывы в различных точках пространственно-временного континуума во всех задачах, кроме некоторых тривиальных гидродинамических задач. В случае простой волны разрежения, возникающей при мгновенном удалении границы равномерно сжатой области, первые производные от скорости среды как по координатам, так и по времени терпят разрыв на головной части волны.

Вообще говоря, в одномерном движении точки разрыва производных гидродинамических переменных располагаются на линиях, пересекающих плоскость x, t; при двух или трех пространственных координатах эти линии превращаются соответственно в поверхности или объемы в пространственно-временных областях. Эти линии, поверхности и объемы являются специальными «характеристиками», которые, как правило, возникают при решении гиперболических уравнений в частных производных. Так как основная причина их появления состоит в конечном значении скорости звука, они всегда существенны при исследовании движения сжимаемой жидкости.

Влияние этих разрывов на точность численных решений гидродинамических задач можно в общих чертах продемонстрировать на примере простой квадратуры. С этой целью рассмотрим определенный интеграл от функции одной переменной. Численное значение этого интеграла можно получить различными методами, которые будут давать результаты разной точности. Предположим, что производная подинтегрального выражения разрывна в некоторой точке области интегрирования, как это имело место в упомянутом выше случае головной части волны разрежения. В частности, пусть подинтегральная функция имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 1-(x-0{,}1\pi), & 1\geqslant x>0{,}1\pi, \\ 1-(0{,}1\pi-x), & -1\leqslant x\leqslant 0{,}1\pi. \end{cases}$$

Вычислим интеграл

$$I=\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=(1-0{,}1\pi)(1+0{,}1\pi),$$

используя правило трапеции и правило Симпсона. Можно найти, что приближенные значения для I, а именно I_T и I_S, имеют следующий вид:

$$I_T=I+(0{,}1\pi-j^*/2n)^2-(0{,}1\pi-j^*/2n)/2n \text{ (правило трапеции)},$$

$$I_S=\begin{cases} I+(0{,}1\pi-j^*/2n)^2-(0{,}1\pi-j^*/2n)/3n, & j^*\text{ — четные (правило Симпсона)}, \\ I+(0{,}1\pi-j^*/2n)^2-2(0{,}1\pi-j^*/2n)/3n+1/12n^2, & j^*\text{—нечетные} \end{cases}$$

Здесь область интегрирования разделена на $4n$ одинаковых частей, а j^* — целое число, такое, что

$$j^*/2n<0{,}1\pi<(j^*+1)/2n.$$

Таким образом, этот интеграл можно вычислить с произвольной точностью, используя любое правило. Однако в каждом случае ошибка в численном значении интеграла будет стремиться к нулю вместе с квадратом шага интегрирования. Согласно обычным оценкам, ошибка в приближенном значении интеграла, полученная с помощью правила трапеции, также стремится к нулю, как квадрат шага интегрирования. Если же используется правило Симпсона, то ошибка стремится к нулю вместе с четвертой степенью шага интегрирования.

Только что упомянутые стандартные оценки ошибки основаны на применении рядов Тейлора для подинтегральной функции и справедливы для функций, имеющих непрерывные во всей области интегрирования производные до третьего и пятого порядка соответственно. Казалось бы, что стандартная формула для ошибки справедлива для интеграла I в случае использования правила трапеции. Это очевидное заключение неточно в том смысле, что стандартная оценка ошибки пропорциональна также производной третьего порядка от $f(x)$ в некоторой точке внутри интервала интегрирования. Так как производная d^3f/dx^3 равна нулю при $x \neq 0,1\,\pi$ и не существует при $x = 0,1\,\pi$, то никто не может точно сказать, что же нам может дать стандартная формула для ошибки. В случае правила Симпсона ясно, что стандартная формула для ошибки не применима к интегралу I.

Поэтому мы приходим к выводу, что вообще нельзя оценивать скорость сходимости конечно-разностных методов расчета течения сжимаемой жидкости, основываясь на рядах Тейлора. Более важен вывод о том, что скорость сходимости решения конечно-разностных уравнений для случая течения сжимаемой жидкости не может увеличиться при использовании разностей более высокого порядка. Аргументы, на которых мы основываем эти заключения, конечно, не являются строгими. Построение общей строгой теории этого вопроса не представляется нам возможным при современном состоянии исследований нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Однако более убедительный пример можно привести, если удастся найти (в некоторых специальных случаях) точное решение уравнений Рихтмайера и фон Неймана и их модификаций. Такие решения были найдены, и результаты будут скоро опубликованы. Они по существу приводят к только что полученным результатам.

Рассмотрим далее интеграл

$$J = \int_{-1}^{+1} g(x)\,dx,$$

где $g(x) = 1 - |x|$, $|x| \leqslant 1$.

В этом случае интеграл J равен единице. Этот точный результат получается как по правилу Симпсона, так и по правилу трапеций, если интервал $-1 \leqslant x \leqslant 1$ разделить на $4n$ равных частей. По стандартной формуле для оценки ошибок также получается, что оба способа вычисления оказываются точными в этом случае, так как $d^3g/dx^3=0$ внутри всех промежутков разбиения, а $d^5g/dx^5=0$ в интервалах $j/2n<x<(j+2)/2n$, где $j=-2n$, $-2n+2$, ..., $2n-2$.

Аналогично скорость сходимости конечно-разностных уравнений для течений сжимаемой жидкости ограничена наличием разрывов в производных от гидродинамических функций, если эти разрывы появляются внутри ячеек, но эти разрывы не сказываются, если они имеют место на границах ячеек. В последнем случае применимы обычные оценки ошибок с помощью рядов Тейлора, а разности более высокого порядка можно использовать для увеличения скорости сходимости численных методов.

Разрывы в производных от гидродинамических функций распространяются вдоль характеристических линий, поверхностей или объемов. Поэтому следует ожидать увеличения скорости сходимости численных решений с помощью применения разностей высокого порядка при условии, что уравнения записаны в характеристических переменных. Это заключение сделано на основе расчетов с применением уравнений течения в характеристической форме, которая используется вместо интегрирования уравнений движения шагами по времени (см., например, [1]).

Заметим, наконец, что введение искусственной вязкости типа вязкости Рихтмайера — Неймана приводит к непрерывности первых производных от гидродинамических функций. Поэтому можно ожидать более быстрой сходимости решений этих модифицированных уравнений, чем в случае уравнений, для которых первые производные терпят разрыв. Можно простым путем сделать непрерывными более высокие производные от гидродинамических функций, а именно модифицировать подходящим образом искусственную вязкость. Затем можно записать конечно-разностные уравнения, которые будут иметь соответственно более высокую скорость сходимости.

Однако эта сходимость будет означать сходимость к решению модифицированных уравнений, а не обязательно к решению исходных уравнений гидродинамики. Если мы признаем, что разрывы производных от гидродинамических функций основаны на физических свойствах, таких, как конечность скорости звука, то при допущении искусственной непрерывности все более и более высокого порядка имеется, очевидно, опасность того, что решения модифицированных уравнений будут заметно отличаться от решений исходных уравнений гидродинамики. Если использовать искусственную вязкость, зависящую линейно от дивергенции

(«линейное Q»), то можно сделать непрерывными все производные.

Можно было бы задать вопрос: как в этом случае добиться наилучшего приближения к решению уравнений гидродинамики? На это, вероятно, можно было бы ответить, что хотя точки разрыва производных от гидродинамических функций и исключены, но будут встречаться точки, где производные от этих функций очень велики, и если в этом смысле ответить более точно, то эти производные должны быть почти разрывны. Если бы кто-нибудь решил уравнения движения, содержащие линейное Q, выбрав постоянную в Q так, чтобы все производные до некоторого высокого порядка изменялись примерно в одинаковых пределах в интересующей нас области изменения времени и пространственных координат, то следовало бы ожидать, что решения принятых уравнений движения будут значительно отличаться от решений исходных уравнений гидродинамики.

Когда уравнения движения записываются с линейной вязкостью Q, то в принципе было бы правильно проводить анализ ошибок конечно-разностного аналога этих уравнений с помощью рядов Тейлора. При этом конечно-разностные уравнения можно записать так, что ошибка будет иметь порядок некоторой высокой степени шага разностной сетки. Однако эта ошибка будет также пропорциональна величине производной (или производных) высокого порядка. Если только что описанная картина справедлива, то значения этих производных должны быть велики в некоторых частях области течения; иначе говоря, уравнения движения с линейной вязкостью Q не дадут решений, которые хорошо аппроксимируют решения исходных гидродинамических уравнений. Для более полного понимания и уточнения конечно-разностных методов решения уравнений гидродинамики следует провести количественное изучение этих вопросов.

5. Приложение метода полос к задаче о струйном течении газа

А. Описание исходных данных для расчета трех струйных задач

Задача о струйном течении газа, описанная в § 2, представляет собой задачу о плоском двумерном течении, тогда как рассматриваемый метод предназначен для двумерных осесимметричных задач. Этот метод применялся к некоторым задачам, которые не были двумерными и плоскими, но были близки к плоской задаче того типа, которая рассматривалась в § 2.

Плоскость симметрии и одна из плоских пластин в плоской двумерной задаче при использовании метода полос заменялись

поверхностями вращения. Максимальное расстояние, разделяющее эти поверхности, было мало по сравнению с радиальными координатами. Плоская поверхность, эквивалентная плоскости симметрии, была образована вращением около оси симметрии отрезка прямой линии, перпендикулярного к оси симметрии. Эта линия (внутренняя k-линия рассматриваемой задачи) считалась фиксированной в рассматриваемой задаче; она образовывала нечто вроде наковальни, при встрече с которой газ сжимался. Поверхности плоских пластин заменялись кусками сферических поверхностей, образованных вращением соответствующих дуг окружностей ($R=\text{const}$) около оси симметрии.

Угловая область, содержащая эти три поверхности, была расположена между двумя фиксированными конусами, определяемыми сферическими углами θ_0 и $2\theta_0$. Угловая скорость среды принималась равной нулю на поверхностях этих конусов. Таким образом, в плоскости, проходящей через ось симметрии (ось z), все движение происходило между двумя радиусами, образующими углы θ_0 и $2\theta_0$ с осью симметрии. Пластине была придана начальная скорость, равная 1 *см/мксек*, направленная по радиусу к началу координат. Скорость частиц газа в начальный момент считалась равной нулю. В данной задаче фазовая скорость пластины относительно препятствия (наковальни) увеличивалась от значения $1/\sin 2\theta_0$ до значения $1/\sin\theta_0$ (*см/мксек*). Это соответствует уменьшению угла между пластинами и плоскостью симметрии от $2\theta_0$ до θ_0. Этот угол мы будем называть «углом соударения».

Пространство между пластиной и препятствием было заполнено газом. Сама пластина была сделана из свинца.

Для получения разностной сетки для метода полос угловая область $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant 2\theta_0$ делилась на 18 равных частей по углу θ, границами которых были j-линии рассматриваемой задачи. Границы ячеек по радиусу получались путем деления каждой j-линии на десять радиальных отрезков равной длины для каждой среды. В соответствии с уравнениями метода полос с внутренней и внешней сторон границы газа и пластины располагались два полуотрезка. Вместо того чтобы тратить машинное время на расчет сжатия газа, начиная с большого начального объема при низкой плотности (неинтересная часть течения) принималось, что начальная плотность газа всегда имеет величину 0,0142 *г/см*^{3}. Начальная толщина пластины принималась равной 0,5 *см*. Уравнение состояния газа задавалось в табличной форме.

Были решены три задачи, обозначаемые следующим образом: № 101, №102 и № 100 А. Они соответствуют значениям 6, 12 и 18° для угла $2\theta_0$, который представляет собой начальный угол соударения между пластиной и препятствием. В табл. 1 даются наиболее важные (геометрические) данные о конфигурациях для

Таблица 1

Геометрические параметры струйных задач

Задача	θ_0, *град*	Угол соударения, *град*	Поверхность препятствия		Граница раздела между газом и пластиной R, *см*	Свободная поверхность пластины R, *см*
			$R(\theta_0)$, *см*	$R(2\theta_0)$, *см*		
№ 101	3	6	21,6703	21,7590	22,64	23,14
№ 102	6	12	10,7589	10,9386	11,7	12,2
№ 100А	9	18	7,0875	7,3605	8,0	8,5

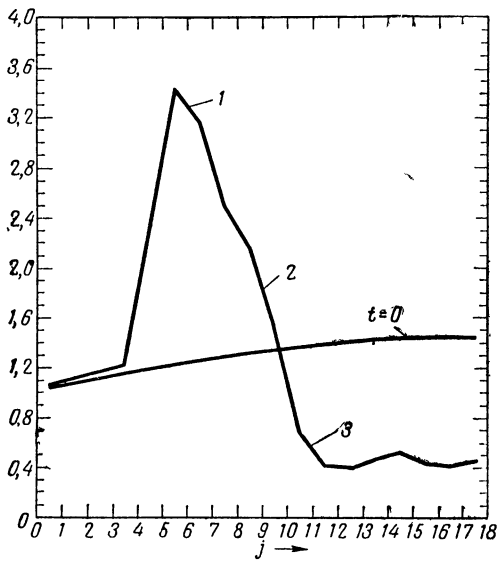


Рис. 5. Распределение массы струи газа в задаче № 100 А для метода полос.

Струя движется справа налево относительно рисунка. Начальный угол соударения равен 18°. Распределение массы в начале расчета дается линией, обозначенной на рисунке через $t=0$. На другой кривой, соответствующей более поздней стадии движения, показаны значения j, при которых скорость газа и давление имеют наибольшие значения, а слой газа имеет наименьшую толщину. Сферический угол θ изменяется от 9 до 18° с ростом j от 0 до 18.

По оси ординат: масса (z), рассчитанная на одну ячейку и деленная на $2\pi \cdot 10^{-4}$. По оси абсцисс: значения j.

1 — максимальная скорость 4,46 *см/мксек*; *2* — максимальное давление 55,1 *Мбар*; *3* — минимальная толщина газа 0,0023 *см*.

этих случаев задачи, а именно задаются радиальные координаты препятствия, граница раздела между газом и пластиной, а также задается свободная поверхность пластины. Для этих конфигураций соответствующие ячейки (в рассматриваемых трех задачах) имеют почти одинаковые размеры и формы.

Б. Результаты расчетов

С целью сравнения трех течений было построено несколько графиков, которые показывают изменение основных гидродинамических функций для точек, расположенных вдоль средней линии между препятствием и пластиной. Для этих графиков параметры газа осреднялись вдоль j-линий по всем полоскам газа.

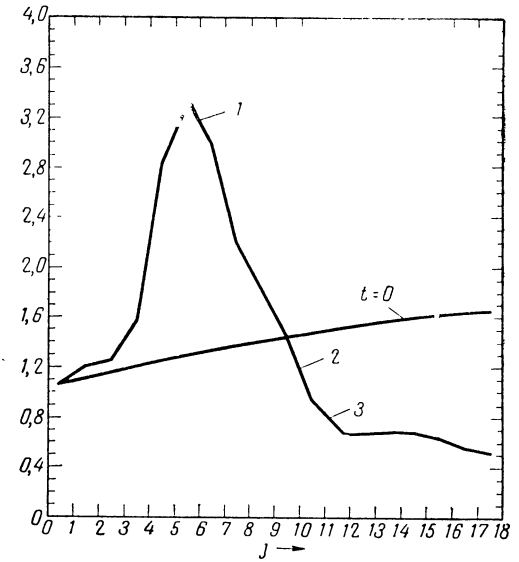


Рис. 6. Распределение массы струи газа в задаче № 102 для метода полос.

Струя движется справа налево относительно рисунка. Начальный угол соударения равен 12°. Распределение массы в начале задачи дается линией, обозначенной на рисунке через $t=0$. На другой кривой, соответствующей более поздней стадии движения, показаны значения j, при которых скорость газа и давление имеют максимальные значения, и слой газа имеет наименьшую толщину. Сферический угол θ изменяется от 6 до 12° с ростом j от 0 до 18.

По оси ординат: масса (z), рассчитанная на одну ячейку и деленная на на $2\pi \cdot 10^{-4}$. По оси абсцисс: значения j.

1 — максимальная скорость 5,15 *см/мксек*; *2* — максимальное давление 42 *Мбар*; *3* — минимальная толщина газа 0,0021 *см*.

На рис. 5—7 показаны графики зависимости массы газа (рассчитанной на одну ячейку, т. е. на единицу приращения величин j и k) от величины j, относящиеся к началу решения задачи, а также к конечной стадии движения, когда фазовая точка пересечет несколько или большинство j-линий. Для поздней стадии движения отмечены также точки, в которых давление и скорость газа достигли наибольших значений. Кроме того, отмечено положение фазовой точки, т. е. точки, в которой толщина слоя газа имеет наименьшее значение. Для задач № 102 и № 100 А графики

соответствуют движению фазовой точки от линии $j=18$ до $j=11$, тогда как для случая № 101 фазовая точка дошла до линии $j=4$. При $j=11$ угол соударения уменьшился в варианте № 102 до 10°, в варианте № 100А — до 15°, а в варианте № 101 — с 6 до 3,5°.

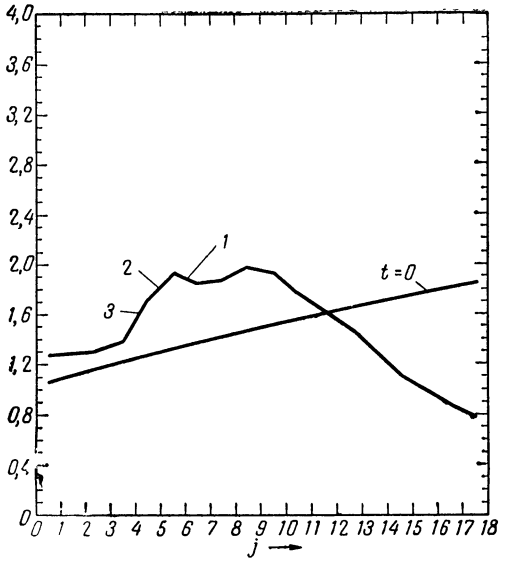


Рис. 7. Распределение массы струи газа в задаче № 101 для метода полос.

Струя движется справа налево относительно рисунка. Начальный угол соударения равен 6°. Распределение массы в начале задачи дается линией, обозначенной на рисунке через $t=0$. На другой кривой, соответствующей более поздней стадии движения, показаны значения j, при которых скорость газа и давление имеют максимальные значения и слой газа имеет наименьшую толщину. Сферический угол θ изменяется от 3 до 6° с ростом j от 0 до 18.

По оси ординат: масса (*г*), рассчитанная на одну ячейку и деленная на $2\pi \cdot 10^{-4}$. По оси абсцисс: значения j.

1 — максимальная скорость 2,84 *см/мксек*; *2* — максимальное давление 71 *Мбар*; *3* — минимальная толщина газа 0,0040 *см*.

Из графиков видно, что начальная масса газа, рассчитанная на одну ячейку, монотонно увеличивается с ростом j. Это происходит из-за того, что равному увеличению угла θ соответствует увеличение объемов при движении по радиусу от оси симметрии. По той же причине наблюдаются эффекты цилиндрически сходящегося течения по мере приближения струи газа к оси. Таким образом, рассматриваемые задачи имеют некоторое отличие от соответствующих плоских задач. Эти отличия, однако, не столь велики, чтобы повлиять на основные черты течения, особенно на существование критического угла соударения струи и на его приближенное значение.

Из рис. 5 и 6 следует, что при изменении начального угла соударения от 18 до 12° происходит заметное увеличение максимальной скорости струи газа и незначительное увеличение той доли газа, которая остается за фазовой точкой. Возможно, удивительным является тот факт, что пиковое давление на 25% больше в том случае, когда пиковая скорость (задача № 100А)

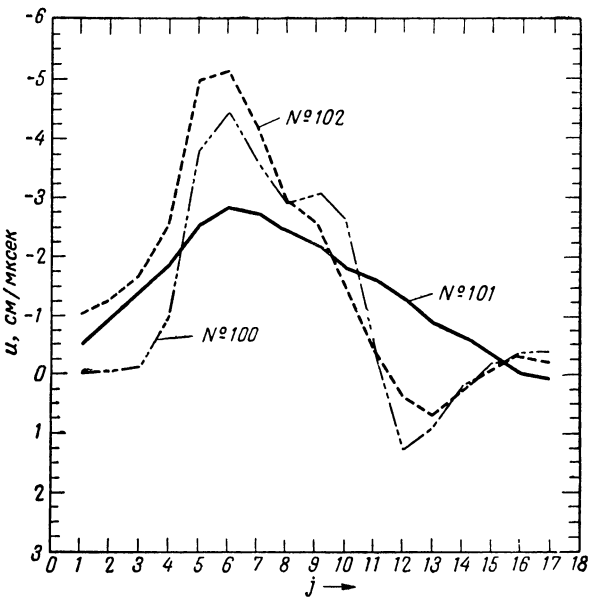


Рис. 8. Скорость частиц струи газа; струя движется справа налево относительно рисунка.

является более низкой. Это может быть частично обусловлено увеличением количества газа в струе, если учесть, что давление очень чувствительно к процессам сжатия в той области изменения плотностей и температур, которая здесь имеется.

Можно также заметить, что точка максимального давления и фазовая точка сближаются между собой при уменьшении начального угла соударения от 18 до 12°. Как это и следовало бы ожидать из элементарной теории движения струи газа, при уменьшении угла соударения происходит большее увеличение скорости фазовой точки, чем увеличение скорости струи. При этом с уменьшением угла соударения точка максимума давления приближается все теснее к фазовой точке. Из графиков на рис. 7 видно, что дальнейшее уменьшение угла соударения до 6° приводит к той ситуации, которая была описана при рассмотрении

элементарной теории струйного течения, а именно фазовая точка движется с такой большой скоростью, что газ не успевает следовать за ней. Поэтому для задачи № 101 точка максимума скорости газа расположена за фазовой точкой, т. е. при больших значениях j. Таким образом, газ, расположенный за фазовой точкой, движется в область, занятую более сжатым газом

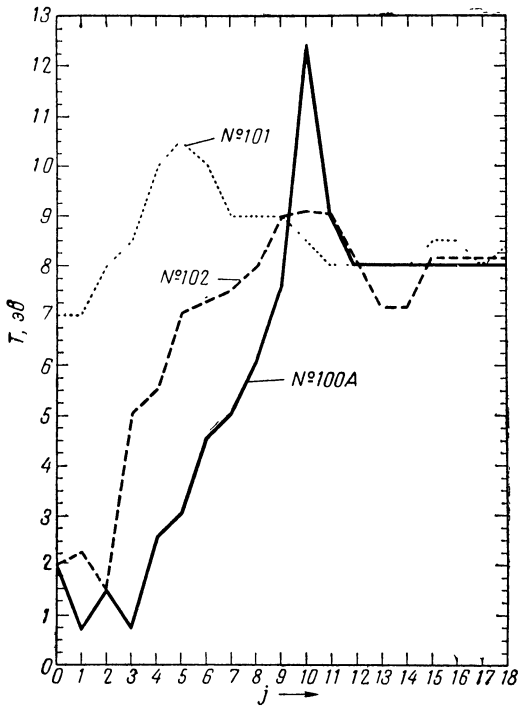


Рис. 9. Температура газа как функция номера ячейки.

в окрестности фазовой точки, так что координата пикового давления расположена между точкой максимальной скорости и фазовой точкой. Так как газ не поступает в область, где при схлопывании пластин образуется струя, то пиковое давление будет несколько большим, чем в других двух случаях образования струй (№ 100А, № 102), а пиковая скорость значительно ниже. Газ задерживается между пластиной и препятствием.

На рис. 8—10 показаны в зависимости от j значения скорости частиц, температуры и давления для тех же моментов времени, что и на рис. 5—7. Острый пик на графике температуры, соответствующем задаче № 100А (рис. 9), по-видимому, является не

вполне достоверным, так же как и некоторые колебания при переходе от одной ячейки к другой в небольшой области вблизи значения $j=0$, которые имеются на этой кривой и на кривой давления, представленной на рис. 10.

На рис. 11 сплошными линиями показаны графики изменений со временем максимальных скоростей газа; штриховыми линиями обозначено изменение величины фазовой скорости (т. е.

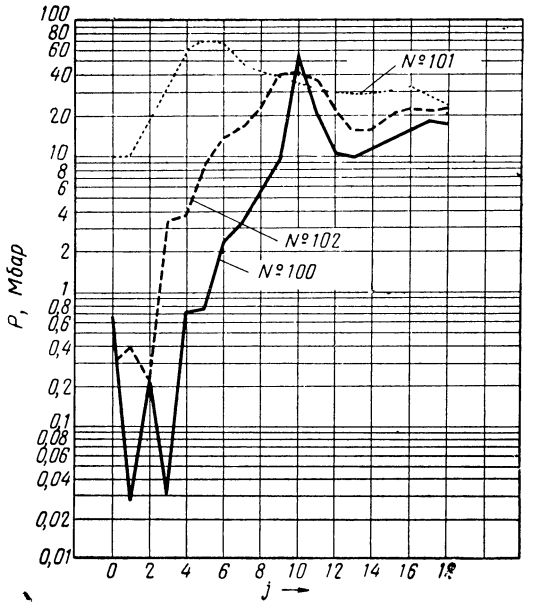


Рис. 10. Давление газа как функция j.

$1/\sin\theta$) с течением времени для координаты, соответствующей расположению фазовой точки. Следует сделать некоторые замечания относительно кривых для задачи № 102. Оказывается, что здесь фазовая точка всегда движется быстрее струи и струя не должна бы возникать. Однако следует помнить, что струя уже образовалась и движется впереди фазовой точки, тогда как эта точка все еще имеет угловое значение $2\theta_0$. Таким образом, фазовая точка должна пройти некоторое расстояние, прежде чем она достигнет струи. Из того факта, что струя образуется со скоростью большей, чем 5 *см/мксек*, становится ясным, что могла бы образоваться стационарная струя, если бы угол соударения не менял своего начального значения, равного 12°, которое соответствует фазовой скорости 4,7 *см/мксек*.

В соответствии с результатами § 2 были проведены гидродинамические расчеты одномерного линейного случая с использованием численного метода, основанного на уравнениях Рихтмайера — Неймана. Начальное расположение выбиралось так, чтобы отношение объема газа к объему металла было таким же, как и

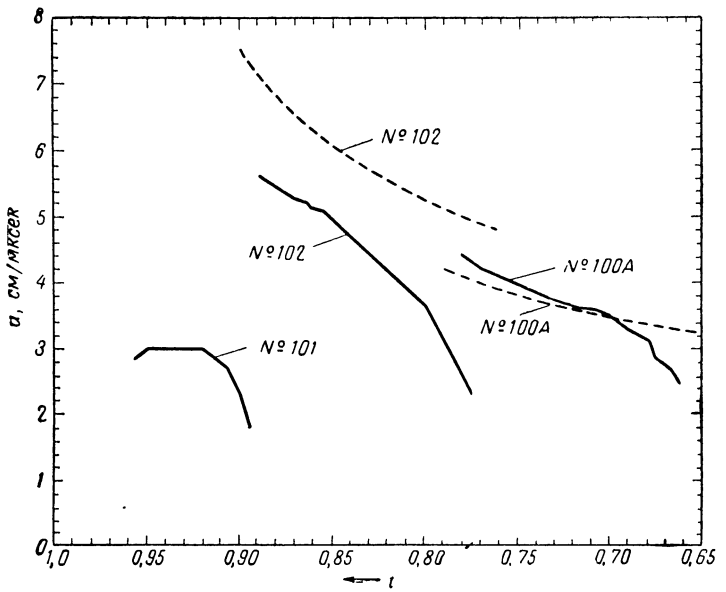


Рис. 11. Максимальная скорость частиц газа как функция времени.

Скорость фазовой точки также представлена как функция времени, за исключением случая № 101, для которого скорость фазовой точки слишком велика для принятого масштаба.

—— скорость частиц; – – – скорость фазовой точки.

в задаче № 102. По результатам этих расчетов было вычислено значение интеграла для $F_{max} = U^2_{крит}$, определенного формулой (4). Величина, найденная для $U_{крит}$, соответствует углу между пластиной и плоскостью симметрии, равному 8,2°. Результаты расчетов по методу полос дали значение критического угла между 6 и 12°, что согласуется с результатами упрощенной теории.

Для того чтобы учесть влияние уравнения состояния на течение, были проведены исследования одномерных задач. В этих задачах предполагалось, что газ подчиняется уравнению состояния $P = (\gamma - 1)\eta\varepsilon$, а уравнение состояния пластины было получено путем обработки кривой Гюгонио для свинца на основе

данных Мак-Кина и Марша [5]; оно имеет следующий вид:

$$P=0{,}54\mu+2{,}6\mu^3.$$

На основании расчета величины $F_{\max}$ для $\gamma=1{,}1$; 1,2; 1,4; 5/3 и 2 получены соответственно следующие критические углы: 31,8; 20,2; 12,5; 8,7 и 5,6°. Таким образом, величина критического угла между пластиной и плоскостью симметрии очень чувствительна к изменению уравнения состояния газа. Критический угол для $\gamma=5/3$ наиболее близок к значению этого угла, найденному при расчетах с более усложненным уравнением состояния.

6. Заключение

Метод полос позволяет получить полезную количественную информацию в задачах о струйном течении и в более общих случаях для некоторого класса задач о сильно неустойчивых течениях. Когда начиналась работа над этим методом, других численных методов решения задач о двумерных осесимметричных течениях было весьма мало. Этих методов и теперь не так уж много, но их число возросло значительно. Можно считать, что увеличение количества численных методов гидродинамики неизбежно из-за разнообразия и сложности явлений при движении сжимаемой жидкости, особенно в многомерных случаях.

Таким образом, возможный путь в этой области мог бы заключаться в создании наборов вычислительных методов, каждый из которых предназначен для некоторого специального класса задач о течении сжимаемой жидкости. Конечно, этот путь не является наилучшим, хотя он и может оказаться удовлетворительным из соображений экономии.

С практической точки зрения число подходящих на первый взгляд путей записи конечно-разностных уравнений для каждого метода из набора такого рода весьма велико. В результате этого выбор удовлетворительных конечно-разностных уравнений может оказаться делом дорогостоящим и занимающим много времени. Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных изучены так мало, что в настоящее время кажется преждевременным оставить идею об отыскании единой численной схемы или весьма небольшого количества численных схем, пригодных к описанию всех явлений при движении сжимаемой жидкости.

Продолжающееся развитие численных методов гидродинамики путем численного эксперимента является в настоящее время намного менее важным делом, чем развитие теории, с помощью которой можно было бы понять природу существующих методов. Такая теория определила бы направления исследований, которые привели бы к улучшению разностных схем, благодаря

чему уменьшился бы диапазон возможностей построения схем. Не обязательное, а, возможно, лишь желательное условие состоит в том, что исследования в этом направлении не должны основываться на численных результатах. Хотя развитие строгой математической теории нелинейных конечно-разностных уравнений и не представляется возможным в ближайшем будущем, однако можно добиться некоторых успехов в направлении уменьшения эмпиризма.

Можно вспомнить, между прочим, о принципе действия при квантовании. В свое время стало известно, что этот принцип не сможет послужить основой для создания общей теории движения (и был в конечном итоге заменен квантовой механикой), но он был очень полезен, так как помогал при анализе эмпирических данных и служил вспомогательным средством при создании более ценной и приемлемой теории. В частности, можно было бы надеяться на развитие некоторого общего критерия построения конечно-разностных уравнений гидродинамики на правдоподобной, если не на точной, теоретической или полуэмпирической основе. Кроме того, можно бы разработать способы получения грубых оценок скоростей сходимости различных разностных схем.

Была проведена работа в направлении достижения этих относительно ограниченных целей. Примером исследования в этом направлении может служить попытка [4] использовать некоторые свойства преобразований дифференциальных уравнений движения сжимаемой жидкости как главный способ проверки любого предложенного конечно-разностного аналога для этих уравнений. Например, дифференциальное уравнение сохранения массы и уравнение количества движения, скомбинированные вместе с первым законом термодинамики, дают уравнение сохранения общей энергии. Поэтому имеется строгое требование, заключающееся в том, чтобы из конечно-разностных аналогов уравнений для массы, количества движения и первого закона термодинамики получился конечно-разностный аналог уравнения сохранения общей энергии, обладающий точными свойствами уравнения сохранения.

Для проверки этого требования на одномерных течениях в цитированной выше работе были исследованы некоторые конечно-разностные уравнения. Вскоре после этого были найдены возможности обобщения этих уравнений на пространство двух и трех измерений при применении произвольной, зависящей от времени системы координат (не опубликовано). Недавно было сделано обобщение на случай, когда напряжения и деформации представляются тензорами. Например, для двумерного плоского течения дифференциальные уравнения, выражающие законы сохранения массы и изменения количества движения и первый за-

кон термодинамики, в лагранжевых координатах запишутся в следующем виде:

$$(M\mathbf{U})_t + J\nabla(P+Q) = 0, \tag{18}$$

$$M_t = 0, \tag{19}$$

$$(M\varepsilon/\rho_0)_t + (P+Q)V_t = 0. \tag{20}$$

Здесь плоскость x, y — плоскость движения, J — якобиан преобразования при переходе от декартовых координат (x, y) к лагранжевым координатам (a, b); ∇ — векторный оператор с составляющими $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$. Отметим также тождество

$$J_t = J\nabla \cdot U. \tag{21}$$

Система разностных аналогов уравнений (18)—(21) приведена в § 7, В. В этих уравнениях пространство переменных (a, b, t) заменяется сеткой дискретных точек (j, k, n), где j, k, n — любые положительные целые числа (как четные, так и нечетные).

Уравнения, приведенные в § 7, В, совместны со следующим уравнением сохранения для количественного аналога полной энергии, рассчитанной на единицу объема пространства x, y, z (z — ось, перпендикулярная плоскости течения):

$$H(j, k, n+1) - H(j, k, n) + \dot{W}\left(j, k, n+\tfrac{1}{2}\right)\Delta^{n+1/2}t = 0. \tag{22}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$H(j, k, n) = \tfrac{1}{2}M(j, k)\mathbf{U}\left(j, k, n+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\mathbf{U}\left(j, k, n-\tfrac{1}{2}\right) +$$
$$+\left(\tfrac{1}{4}\rho_0\right)\Big[M\left(j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}\right)\varepsilon_1\left(j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n\right) +$$
$$+M\left(j-\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}\right)\varepsilon_2\left(j-\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n\right) +$$
$$+M\left(j-\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}\right)\varepsilon_3\left(j-\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, n\right) +$$
$$+M\left(j+\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}\right)\varepsilon_4\left(j+\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, n\right)\Big];$$

$$\dot{W}\left(j, k, n+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{U}\left(j+1, k, n+\tfrac{1}{2}\right)+\mathbf{U}\left(j, k, n+\tfrac{1}{2}\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\mathbf{F}_{34}\left(j+\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\right)-\mathbf{F}_{12}\left(j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\right)\right]+$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\mathbf{U}\left(j, k+1, n+\tfrac{1}{2}\right)+\mathbf{U}\left(j, k, n+\tfrac{1}{2}\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\mathbf{F}_{41}\left(j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\right)-\mathbf{F}_{23}\left(j-\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\right)\right]+$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\mathbf{U}\left(j-1,\ k,\ n+\tfrac{1}{2}\right)+\mathbf{U}\left(j,\ k,\ n+\tfrac{1}{2}\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\mathbf{F}_{12}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right)-\mathbf{F}_{34}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k-\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right)\right]+$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\mathbf{U}\left(j,\ k-1,\ n+\tfrac{1}{2}\right)+\mathbf{U}\left(j,\ k,\ n+\tfrac{1}{2}\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\mathbf{F}_{23}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k-\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right)-\mathbf{F}_{41}\left(j+\tfrac{1}{2},\ k-\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right)\right];$$

$\Delta^{n+1/2}t = t_{n+1} - t_n$,

где M, $\mathbf{U}$, $M\varepsilon/\rho_0$, $\mathbf{F}$ — соответственно масса, скорость, внутренняя энергия и сила (более полное определение этих величин дается в § 7, В). Если $(j,\ k)$ не есть граничная точка, то каждый член в выражении для $\dot{W}(j,\ k,\ n+1/2)$ встречается только один раз. Для точки, соседней с $(j,\ k)$, эти члены имеют знак, противоположный знаку в уравнении (22). В результате получается, что уравнение (22) представляет собой точный консервативный аналог дифференциального уравнения сохранения для общей энергии, а именно

$$\left[\rho\left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{U}^2+\varepsilon/\rho_0\right)\right]_t + J\nabla\cdot[(P+Q)\,\mathbf{U}] = 0.$$

Это уравнение следует из уравнений (18)—(21). Особенно благоприятно то, что силы, которые должны обеспечить сохранение энергии, оказывается, имеют простой и точный физический смысл напряжений, действующих на определенных площадках, и что одна и та же основная система сил и площадок возникает во всех конечно-разностных уравнениях. Приведет ли рассматриваемый путь исследований к полезной теории разностных схем или этого не случится, в любом случае поиски такой теории являются полезным направлением, которому можно следовать в настоящее время в области численных методов решения гидродинамических задач.

7. *Приложения*

А. Уравнения метода полос для внутренних точек жидкости

Уравнение момента количества движения

$$\Omega(j,\ k+1,\ n+1) = \Omega(j,\ k+1,\ n-1) -$$
$$-\Delta t\left[\dot{x}\Omega\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n\right)-\dot{x}\Omega\left(j-\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n\right)\right]-$$
$$-\tfrac{1}{4}\left[\psi\left(j-\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)+\psi\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)+\right.$$
$$\left.+\psi\left(j-\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)+\psi\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\right](\Delta t P_x/\rho f'). \quad (23)$$

Вспомогательные уравнения и определения

$$\dot{x}\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n\right)=$$

$$=\frac{[\Omega(j,\ k+1,\ n-1)+\Omega(j+1,\ k+1,\ n-1)]}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\left[\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)+\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k+2,\ n\right)\right]}\times$$

$$\times\left\{\frac{[R(j,\ k+1,\ n)+R(j+1,\ k+1,\ n)]^2}{4}\right\}^{-1};$$

$$\dot{x}\Omega\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n\right)=\dot{x}\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n\right)\Omega\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n-1\right),$$

$$\frac{\Delta t P_x}{\rho f'}=\frac{32\,\Delta t}{\rho_0}\frac{V(j,\ k+2,\ n)\,V(j,\ k,\ n)}{V(j,\ k+2,\ n)+V(j,\ k,\ n)}R(j,\ k+1,\ n)\times$$

$$\times\left\{\left[PQ\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)-PQ\left(j-\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)\right]\times\right.$$

$$\times\left[R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)-R\left(j-\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]-$$

$$-\left[PQ\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)-PQ\left(j-\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]\times$$

$$\left.\times\left[R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)-R\left(j-\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left(\left\{R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\left[f'(j)+f'\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\right]+\right.\right.$$

$$+R\left(j-\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)\left.\left[f'(j)+f'\left(j-\tfrac{1}{2}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left[R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)-R\left(j-\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]-$$

$$-\left\{R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)\left[f'(j)+f'\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+R\left(j-\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\left[f'(j)+f'\left(j-\tfrac{1}{2}\right)\right]\right\}\times$$

$$\left.\times\left[R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)-R\left(j-\tfrac{1}{2},\ k+2,\ n\right)\right]\right)^{-1},$$

$$R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)=\tfrac{1}{2}[R(j,\ k,\ n)+R(j+1,\ k,\ n)],$$

$$\Omega(j,\ k+1,\ n)=\tfrac{1}{2}[\Omega(j,\ k+1,\ n+1)+\Omega(j,\ k+1,\ n-1)]$$

и так далее.

$$T(j,\ k+1,\ n)=\left|\frac{\Omega(j+1,\ k+1,\ n)}{f'(j+1)\sin\theta(j+1)}-\frac{\Omega(j-1,\ k+1,\ n)}{f'(j-1)\sin\theta(j-1)}\right|-$$

$$-2\left|\frac{\Omega(j+1,\ k+1,\ n)}{f'(j+1)\sin\theta(j+1)}-2\,\frac{\Omega(j,\ k+1,\ n)}{f'(j)\sin\theta(j)}+\frac{\Omega(j-1,\ k+1,\ n)}{f'(j-1)\sin\theta(j-1)}\right|.$$

Если $x\left(j+\frac{1}{2},\ k+1,\ n\right)\geqslant 0$, то

$$\Omega\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\Omega(j+1,\ k+1,\ n)}{f'(j+1)\sin\theta(j+1)}+\frac{\Omega(j,\ k+1,\ n)}{f'(j)\sin\theta(j)}\right]\times$$
$$\times f'\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\tfrac{1}{2}\right),\quad T(j,\ k+1,\ n)\geqslant 0;$$

$$\Omega\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n\right)=\frac{\Omega(j,\ k+1,\ n)}{f'(j)\sin\theta(j)}f'\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\tfrac{1}{2}\right),$$
$$T(j,\ k+1,\ n)<0.$$

Если $\dot{x}\left(j+\frac{1}{2},\ k+1,\ n\right)<0$, то

$$\Omega\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\Omega(j+1,\ k+1,\ n)}{f'(j+1)\sin\theta(j+1)}+\frac{\Omega(j,\ k+1,\ n)}{f'(j)\sin\theta(j)}\right]\times$$
$$\times f'\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\tfrac{1}{2}\right),\quad T(j+1,\ k+1,\ n)\geqslant 0;$$

$$\Omega\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+1,\ n\right)=\frac{\Omega(j+1,\ k+1,\ n)}{f(j+1)\sin\theta(j+1)}f'\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\tfrac{1}{2}\right),$$
$$T(j+1,\ k+1,\ n)<0.$$

Уравнение для радиальной скорости

$$-a_{\dot{R}}(j,\ k+1,\ n)\dot{R}(j-1,\ k+1,\ n+1)+$$
$$+b_{\dot{R}}(j,\ k+1,\ n)\dot{R}(j,\ k+1,\ n+1)+$$
$$+c_{\dot{R}}(j,\ k+1,\ n)\dot{R}(j+1,\ k+1,\ n+1)+d_{\dot{R}}(j,\ k+1,\ n)=0. \quad (24)$$

Вспомогательные уравнения

$$a_{\dot{R}}(j,\ k+1,\ n)=\begin{cases}\xi(j,\ k+1,\ n), & \text{если}\quad \xi(j,\ k+1,\ n)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если}\quad \xi(j,\ k+1,\ n)<0,\end{cases}$$

$$b_{\dot{R}}(j,\ k+1,\ n)=\begin{cases}1+\xi(j,\ k+1,\ n), & \text{если}\quad \xi(j,\ k+1,\ n)\geqslant 0,\\ 1-\xi(j,\ k+1,\ n), & \text{если}\quad \xi(j,\ k+1,\ n)<0,\end{cases}$$

$$c_{\dot{R}}(j,\ k+1,\ n)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \xi(j,\ k+1,\ n)\geqslant 0,\\ \xi(j,\ k+1,\ n), & \text{если}\quad \xi(j,\ k+1,\ n)<0,\end{cases}$$

$$d_{\dot{R}}(j,\ k+1,\ n)=\begin{cases}G(j,\ k+1,\ n)+\xi(j,\ k+1,\ n)\times\\ \times[\dot{R}(j,\ k+1,\ n-1)-\dot{R}(j-1,\ k+1,\ n-1)],\\ \qquad\text{если}\quad \xi(j,\ k+1,\ n)\geqslant 0,\\ G(j,\ k+1,\ n)+\xi(j,\ k+1,\ n)\times\\ \times[\dot{R}(j+1,\ k+1,\ n-1)-\dot{R}(j,\ k+1,\ n-1)],\\ \qquad\text{если}\quad \xi(j,\ k+1,\ n)<0,\end{cases}$$

и, наконец,

$$\omega(j,\ k+1,\ n+1)=4\Omega(j,\ k+1,\ n+1)\times$$
$$\times\left[\frac{\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n\right)+\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k+2,\ n\right)}{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)+\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k+2,\ n\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}\right]^{-1} f'(j)\sin\theta(j),$$

$$\xi(j,\ k+1,\ n)=\frac{\Delta t\,[\omega(j,\ k+1,\ n+1)+\omega(j,\ k+1,\ n-1)]}{4f'(j)\,[R(j,\ k+1,\ n)]^2},$$

$$G(j,\ k+1,\ n)=-R(j,\ k+1,\ n-1)-$$
$$-\frac{\Delta t}{4}\frac{[\omega(j,\ k+1,\ n+1)+\omega(j,\ k+1,\ n-1)]^2}{[R(j,\ k+1,\ n)]^3}+$$
$$+\frac{4\,\Delta t\,[PQ(j,\ k+2,\ n)-PQ(j,\ k,\ n)]\,[R(j,\ k+1,\ n)]^2}{\left[\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k+2,\ n\right)+\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}+\right.}.$$
$$\left.+\frac{\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k+2,\ n\right)+\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}\right]$$

Уравнение для радиальной координаты

$$R(j,\ k+1,\ n+2)-R(j,\ k+1,\ n)-\Delta t\dot{R}(j,\ k+1,\ n+1)=$$
$$=\frac{-2\omega(j,\ k+1,\ n+1)\,\Delta t}{f'(j)\,[R(j,\ k+1,\ n+2)+R(j,\ k+1,\ n)]^2}\times$$
$$\times\begin{cases}R(j,\ k+1,\ n+2)+R(j,\ k+1,\ n)-\\ \quad-R(j-1,\ k+1,\ n+2)-R(j-1,\ k+1,\ n),\\ \quad\text{если}\quad\omega(j,\ k+1,\ n+1)\geqslant 0,\\ R(j+1,\ k+1,\ n+2)+R(j+1,\ k+1,\ n)-\\ \quad-R(j,\ k+1,\ n+2)-R(j,\ k+1,\ n),\\ \quad\text{если}\quad\omega(j,\ k+1,\ n+1)<0.\end{cases}\qquad(25)$$

Это уравнение линеаризуется и решается итерациями для неизвестных величин

$$R(j,\ k+1,\ n+2),\qquad j=j_{\min},\ j_{\min}+1,\ \ldots,\ j_{\max}.$$

Уравнение сохранения массы

$$\psi\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)=\psi\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)+$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\{[\psi(j,\ k,\ n+2)+A_{\psi}(j,\ k,\ n)]\dot{x}(j,\ k,\ n+1)-$$

$$-[\psi(j+1,\ k,\ n+2)+A_{\psi}(j+1,\ k,\ n)]\,x(j+1,\ k,\ n+1)\}. \quad (26)$$

Вспомогательные уравнения и определения

$$\dot{x}(j,\ k,\ n+1)=$$

$$=\frac{2\,[\omega(j,\ k+1,\ n+1)+\omega(j,\ k-1,\ n+1)]}{f'(j)\,[R(j,\ k+1,\ n+2)+R(j,\ k-1,\ n)]\,[R(j,\ k+1,\ n)+R(j,\ k-1,\ n+2)]},$$

$$B_{\dot{x}}(j,\ k,\ n+1)=\begin{cases}\dot{x}(j,\ k,\ n+1)-\dot{x}(j-1,\ k,\ n+1); & \\ \qquad\dot{x}(j,\ k,\ n+1)\geqslant 0, & \\ \dot{x}(j+1,\ k,\ n+1)-\dot{x}(j,\ k,\ n+1); & \\ \qquad\dot{x}(j,\ k,\ n+1)<0, & \end{cases}$$

$$\xi(j,\ k,\ n+1)=$$

$$=\{\exp[-B_{\dot{x}}(j,\ k,\ n+1)\Delta t]-1\}\,\dot{x}(j,\ k,\ n+1)/B_{\dot{x}}(j,\ k,\ n+1)$$

$$(\xi(j,\ k,\ n+1)=-\dot{x}(j,\ k,\ n+1)\Delta t,\ \text{если}\ B_{\dot{x}}(j,\ k,\ n+1)=0).$$

Если $\dot{x}(j,\ k,\ n+1)\geqslant 0$, то

$$A_{\psi}(j,\ k,\ n)=\frac{1}{2}\left[\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}\right]f'(j)\sin\theta(j),\quad T\left(j-\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\geqslant 0,$$

$$A_{\psi}(j,\ k,\ n)=\frac{\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}f'(j)\sin\theta(j),$$

$$T\left(j-\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)<0,$$

где

$$T\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n\right)=\left|\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}-\frac{\psi\left(j-\frac{3}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j-\frac{3}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{3}{2}\right)}\right|-$$

$$-2\left|\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}-2\frac{\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi\left(j-\frac{3}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j-\frac{3}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{3}{2}\right)}\right|.$$

Если $\dot{x}(j,\ k,\ n+1)<0$, то

$$A_\psi(j,\ k,\ n)=\frac{1}{2}\left[\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}\right]f'(j)\sin\theta(j),\quad T\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)\geqslant 0,$$

$$A_\psi(j,\ k,\ n)=\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}f'(j)\sin\theta(j),$$

$$T\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)<0,$$

$$B_\psi(j,\ k,\ n)=\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)-\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n\right),$$

$$\psi(j,\ k,\ n+2)=\{\exp[-B_{\dot{x}}(j,\ k,\ n+1)\Delta t]\}\times$$

$$\times[A_\psi(j,\ k,\ n)+B_\psi(j,\ k,\ n)\xi(j,\ k,\ n+1)].$$

Уравнение для относительного объема (полуцелые значения j)

$$V\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+2\right)=\frac{\rho_0 f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}{6\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+2\right)}\times$$

$$\times[R^3(j,\ k+1,\ n+2)+R^3(j+1,\ k+1,\ n+2)-$$

$$-R^3(j,\ k-1,\ n+2)-R^3(j+1,\ k-1,\ n+2)],\quad (27)$$

где $R^3(j,\ k+1,\ n+2)=[R(j,\ k+1,\ n+2)]^3$ и так далее.

Формулы для вычисления Q (полуцелые значения j)

$$Q\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right)=$$

$$=\begin{cases} 0; & z\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right)\geqslant 0, \\ \dfrac{K\left[z\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right)/\Delta t\right]^2}{\left[V\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+2\right)+V_0\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]}, & z\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right)<0. \end{cases} \tag{28}$$

Вспомогательные уравнения и определения (здесь K — постоянная)

$$\xi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right)=\frac{1}{2}[\xi(j,\ k,\ n+1)+\xi(j+1,\ k,\ n+1)],$$

$$B_V\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)=$$

$$=\begin{cases} 2\left[V\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)-V(j,\ k,\ n)\right]; & \xi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right)\leqslant 0, \\ 2\left[V(j+1,\ k,\ n)-V\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]; & \xi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right)>0, \end{cases}$$

$$V_0\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)=V\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)+$$
$$+B_V\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)\xi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right),$$

$$A_R\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)=\frac{1}{4}[R(j,\ k+1,\ n)+R(j,\ k-1,\ n)+$$
$$+R(j+1,\ k+1,\ n)+R(j+1,\ k-1,\ n)],$$

$$B_R\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)=-\frac{1}{2}[R(j,\ k+1,\ n)+$$
$$+R(j,\ k-1,\ n)-R(j+1,\ k+1,\ n)-R(j+1,\ k-1,\ n)],$$

$$R_0\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)=A_R\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)+$$
$$+B_R\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right)\xi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right),$$

$$U\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+1\right)=\dot{R}(j,\ k+1,\ n+1)+$$
$$+\dot{R}(j,\ k-1,\ n+1)+\dot{R}(j+1,\ k+1,\ n+1)+$$
$$+\dot{R}(j+1,\ k-1,\ n+1).$$

$$z_R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right)=$$

$$=\begin{cases} 0; \quad \text{если} \quad U\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right)>0, \\ \dfrac{-(\Delta t/2)\,U\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right)}{\left[A_R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)+R_0\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]} \text{ в других случаях,} \end{cases}$$

$$z\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right)=\frac{V\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)-V_0\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)}{V\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)+V_0\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)}+$$

$$+z_R\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right).$$

Расчет давления и внутренней энергии (полуцелые значения j)

$$g(\mu)+h(\mu)\left\{\varepsilon_0-\left[\tfrac{1}{2}P_0+Q\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right)\right]\right\},$$

$$P\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)=$$

$$=\frac{\left[V\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)-V_0\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]}{1+\tfrac{1}{2}h(\mu)\left[V\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)-V_0\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]}, \quad (29)$$

$$\varepsilon\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)=\varepsilon_0-\left\{\tfrac{1}{2}\left[P\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)+P_0\right]+\right.$$

$$\left.+Q\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right)\right\}\times$$

$$\times\left[V\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)-V_0\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]. \quad (30)$$

Вспомогательные уравнения и определения

$$\mu=1/V\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+2\right)-1,$$

$$g(\mu)=a_0+a_1\mu+a_2\mu\,|\,\mu\,|+a_3\mu^3,$$

$$h(\mu)=b_0+b_1\mu+b_2\mu\,|\,\mu\,|,$$

$$B_\varepsilon\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)=$$

$$=\begin{cases} 2\left[\varepsilon\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)-\varepsilon(j,\ k,\ n)\right]; & \xi\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right)\leqslant 0, \\ 2\left[\varepsilon(j+1,\ k,\ n)-\varepsilon\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\right]; & \xi\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right)>0, \end{cases}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)+ \\ +B_\varepsilon\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)\xi\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n+1\right),$$

$$\mu_0 = 1/V_0\left(j+\tfrac{1}{2},\ k,\ n\right)-1,$$

$$P_0 = g(\mu_0)+\varepsilon_0 h(\mu_0).$$

Уравнение для относительного объема (целые значения j)

$$V(j,\ k,\ n+2) = \frac{w(j,\ k,\ 0)\,[R^3(j,\ k+1,\ n+2)-R^3(j,\ k-1,\ n+2)]}{MR^2(j,\ k,\ n+2)}. \tag{31}$$

Вспомогательные уравнения и определения:

$$MR^2(j,\ k,\ n+2) = \\ =\frac{1}{2}\left[\frac{\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n+2\right)}{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n+2\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}\right],$$

$$w(j,\ k,\ \varphi) = \frac{V(j,\ k,\ 0)\,MR^2(j,\ k,\ 0)}{[R^3(j,\ k+1,\ 0)-R^3(j,\ k-1,\ 0)]},$$

$$MR^2(j,\ k,\ \varphi) = \\ =\frac{1}{2}\left[\frac{\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ 0\right)}{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ 0\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}\right].$$

Вычисление Q (целые значения j)

$$Q(j,\ k,\ n+1) = \\ =\begin{cases} 0, & \text{если}\quad Z(j,\ k,\ n+1)\geqslant 0, \\ \dfrac{K\,[Z(j,\ k,\ n+1)/\Delta t]^2}{[V(j,\ k,\ n+2)+V_0(j,\ k,\ n)]}, & \text{если}\quad Z(j,\ k,\ n+1)<0. \end{cases} \tag{32}$$

Вспомогательные уравнения и определения

$$B_V(j,\ k,\ n) = \\ =\begin{cases} [V(j,\ k,\ n)-V(j-1,\ k,\ n)], & \text{если}\quad \dot{x}(j,\ k,\ n+1)\geqslant 0, \\ [V(j+1,\ k,\ n)-V(j,\ k,\ n)], & \text{если}\quad \dot{x}(j,\ k,\ n+1)<0, \end{cases}$$

$$V_0(j,\ k,\ n) = V(j,\ k,\ n)+B_V(j,\ k,\ n)\,\xi(j,\ k,\ n+1),$$

$$A_R(j,\ k,\ n) = \tfrac{1}{2}[R(j,\ k+1,\ n)+R(j,\ k-1,\ n)],$$

$$B_R(j,\ k,\ n) = \begin{cases} B_R\left(j-\frac{1}{2},\ k,\ n\right), & \text{если}\quad \dot{x}(j,\ k,\ n+1)\geqslant 0, \\ B_R\left(j+\frac{1}{2},\ k,\ n\right), & \text{если}\quad \dot{x}(j,\ k,\ n+1)<0, \end{cases}$$

$$R_0(j, k, n) = A_R(j, k, n) + B_R(j, k, n)\,\xi(j, k, n+1),$$

$$U(j, k, n+1) = \dot{R}(j, k+1, n+1) + \dot{R}(j, k-1, n+1),$$

$$A_R(j, k, n+2) = \frac{1}{2}[R(j, k+1, n+2) + R(j, k-1, n+2)],$$

$$Z_R(j, k, n+1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } U(j, k, n+1) \geqslant 0, \\ \dfrac{-U(j, k, n+1)\,\Delta t}{[A_R(j, k, n+2) + R_0(j, k, n)]}, & \text{если } U(j, k, n+1) < 0, \end{cases}$$

$$Z(j, k, n+1) = \frac{V(j, k, n+2) - V_0(j, k, n)}{V(j, k, n+2) + V_0(j, k, n)} + Z_R(j, k, n+1).$$

Расчет давления и внутренней энергии (целые значения j). (Уравнения совпадают с уравнениями (29) и (30), но значение $j+1/2$ заменяется на j.)

Б. Уравнения метода полос для поверхности раздела

Уравнение сохранения массы

$$\psi\left(j-\tfrac{1}{2}, k^* \pm 1, n+2\right) = \psi\left(j-\tfrac{1}{2}, k^* \pm 1, n\right) -$$

$$- \frac{\Delta t}{2}\{[\psi(j, k^* \pm 1, n+2) + A_\psi(j, k^* \pm 1, n)]\,\dot{x}(j, k^* \pm 1, n+1) -$$

$$- [\psi(j-1, k^* \pm 1, n+2) + A_\psi(j-1, k^* \pm 1, n)] \times$$

$$\times \dot{x}(j-1, k^* \pm 1, n+1)\}. \quad (33)$$

Вспомогательные уравнения и определения

$$\dot{x}(j, k^* \pm 1, n+1) = \frac{4\omega(j, k^* \pm 1, n+1)}{f'(j)\,[R(j, k^* \pm 1, n+2) + R(j, k^* \pm 1, n)]^2},$$

$$B_{\dot{x}}(j, k^* \pm 1, n+1) = \begin{cases} \dot{x}(j, k^* \pm 1, n+1) - \dot{x}(j-1, k^* \pm 1, n+1), \\ \qquad \text{если } \dot{x}(j, k^* \pm 1, n+1) \geqslant 0, \\ \dot{x}(j+1, k^* \pm 1, n+1) - \dot{x}(j, k^* \pm 1, n+1), \\ \qquad \text{если } \dot{x}(j, k^* \pm 1, n+1) < 0, \end{cases}$$

$$\xi(j, k^* \pm 1, n+1) =$$

$$= \begin{cases} -\dot{x}(j, k^* \pm 1, n+1)\Delta t, & \text{если } B_{\dot{x}}(j, k^* \pm 1, n+1) = 0, \\ \dfrac{\dot{x}(j, k^* \pm 1, n+1)}{B_{\dot{x}}(j, k^* \pm 1, n+1)}\{-1 + \exp[-B_{\dot{x}}(j, k^* \pm 1, n+1)\Delta t]\} \\ \qquad \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Величины $A_\psi(j,\ k^*\pm 1,\ n)$ и $B_\psi(j,\ k^*\pm 1,\ n)$ вычисляются согласно уравнениям (26), где значение k заменяется на $k^*\pm 1$.

Уравнение для относительного объема (целые значения j)

$$V_\pm(j,\ k^*,\ n+2)=w_\pm(j,\ k^*,\ 0)[R^3(j,\ k^*,\ n+2)-$$
$$-R^3(j,\ k^*\pm 1,\ n+2)][R^3(j,\ k^*,\ n+2)-R^3(j,\ k^*\pm 3,\ n+2)]\times$$
$$\times\{V(j,\ k^*\pm 2,\ n+2)[MR^2(j,\ k^*\pm 1,\ n+2)]^2\}^{-1}. \quad (34)$$

Вспомогательные уравнения и определения

$$MR^2(j,\ k^*\pm 1,\ n)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\psi\left(j-\frac{1}{2},\ k^*\pm 1,\ n\right)}{f'\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\psi\left(j+\frac{1}{2},\ k^*\pm 1,\ n\right)}{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j+\frac{1}{2}\right)}\right],$$

$$w_\pm(j,\ k^*,\ 0)=\frac{V_\pm(j,\ k^*,\ 0)\,V(j,\ k^*\pm 2,\ 0)\,[MR^2(j,\ k^*\pm 1,\ 0)]^2}{[R^3(j,\ k^*,\ 0)-R^3(j,\ k^*\pm 1,\ 0)]}\times$$
$$\times[R^3(j,\ k^*,\ 0)-R^3(j,\ k^*\pm 3,\ 0)]^{-1}.$$

Вычисление Q (целые j)

$$Q_\pm(j,\ k^*,\ n+2)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad Z_\pm(j,\ k^*,\ n+1)\geqslant 0,\\ \dfrac{K[Z_\pm(j,\ k^*,\ n+1)/\Delta t]^2}{[V_\pm(j,\ k^*,\ n+2)+V_{0_\pm}(j,\ k^*,\ n)]}, & \\ & \text{если}\quad Z_\pm(j,\ k^*,\ n+1)<0.\end{cases} \quad (35)$$

Вспомогательные уравнения и определения

$$B_{V_\pm}(j,\ k^*,\ n)=\begin{cases}[V_\pm(j,\ k^*,\ n)-V_\pm(j-1,\ k^*,\ n)], & \\ \qquad\text{если}\quad x(j,\ k^*\pm 1,\ n+1)\geqslant 0,\\ [V_\pm(j+1,\ k^*,\ n)-V_\pm(j,\ k^*,\ n)], & \\ \qquad\text{если}\quad x(j,\ k^*\pm 1,\ n+1)<0,\end{cases}$$

$$V_{0_\pm}(j,\ k^*,\ n)=V_\pm(j,\ k^*,\ n)+B_{V_\pm}(j,\ k^*,\ n)\,\xi(j,\ k^*\pm 1,\ n+1),$$

$$B_{R_\pm}(j,\ k^*,\ n)=\begin{cases}R(j,\ k^*,\ n)-R(j-1,\ k^*,\ n), & \\ \qquad\text{если}\quad \dot{x}(j,\ k^*\pm 1,\ n+1)\geqslant 0,\\ R(j+1,\ k^*,\ n)-R(j,\ k^*,\ n), & \\ \qquad\text{если}\quad \dot{x}(j,\ k^*\pm 1,\ n+1)<0,\end{cases}$$

$$R_{0_\pm}(j,\ k^*,\ n)=R(j,\ k^*,\ n)+B_{R_\pm}(j,\ k^*,\ n)\,\xi(j,\ k^*\pm 1,\ n+1),$$

$$Z_{R_\pm}(j,\ k^*,\ n+1)=\begin{cases} 0, \text{ если } R(j,k^*,n+2)-R_{0_\pm}(j,k^*,n)\geqslant 0, \\ -2\left[\dfrac{R(j,k^*,n+2)-R_{0_\pm}(j,k^*,n)}{R(j,k^*,n+2)+R_{0_\pm}(j,k^*,n)}\right] \end{cases}$$

в других случаях,

$$Z_\pm(j,k^*,n+1)=\frac{V_\pm(j,k^*,n+2)-V_{0_\pm}(j,k^*,n)}{V_\pm(j,k^*,n+2)+V_{0_\pm}(j,k^*,n)}+Z_{R_\pm}(j,k^*,n+1).$$

Расчет давления и внутренней энергии (целые j). (Те же уравнения, как и (29), (30), но в них $j+1/2$ заменяется на j, а вместо k берется k^*.)

Уравнения для относительного объема (полуцелые значения j)

$$V_\pm\left(j-\tfrac{1}{2},k^*,n+2\right)=\frac{2}{3}\{[R^3(j,k^*,n+2)-R^3(j,k^*\pm 1,n+2)]\times$$
$$\times[R^3(j,k^*,n+2)-R^3(j,k^*\pm 3,n+2)]+$$
$$+[R^3(j-1,k^*,n+2)-R^3(j-1,k^*\pm 1,n+2)]\times$$
$$\times[R^3(j-1,k^*,n+2)-R^3(j-1,k^*\pm 3,n+2)]\}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\rho_0}{3}\right)\frac{f'\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\left(j-\frac{1}{2}\right)}{\psi\left(j-\frac{1}{2},k^*\pm 1,n+2\right)}\right]^2\left[V\left(j-\tfrac{1}{2},k^*\pm 2,n+2\right)\right]^{-1}. \quad (36)$$

Вычисление Q (полуцелые значения j)

$$Q_\pm\left(j-\tfrac{1}{2},k^*,n+1\right)=\begin{cases} 0, \text{ если } Z_\pm\left(j-\frac{1}{2},k^*,n+1\right)\geqslant 0, \\ \dfrac{K\left[Z_\pm\left(j-\frac{1}{2},k^*,n+1\right)/\Delta t\right]^2}{\left[V_\pm\left(j-\frac{1}{2},k^*,n+2\right)+V_{0_\pm}\left(j-\frac{1}{2},k^*,n\right)\right]}, \\ \text{если } Z_\pm\left(j-\frac{1}{2},k^*,n+1\right)<0. \end{cases} \quad (37)$$

Вспомогательные уравнения и определения

$$\xi\left(j-\tfrac{1}{2},k^*\pm 1,n+1\right)=\frac{1}{2}[\xi(j,k^*\pm 1,n+1)+$$
$$+\xi(j-1,k^*\pm 1,n+1)],$$

$$B_{V_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},k^*,n\right)=\begin{cases} 2\left[V_\pm\left(j-\frac{1}{2},k^*,n\right)-V_\pm(j-1,k^*,n)\right], \\ \qquad \text{если } \xi\left(j-\frac{1}{2},k^*\pm 1,n+1\right)\leqslant 0, \\ 2\left[V_\pm(j,k^*,n)-V_\pm\left(j-\frac{1}{2},k^*,n\right)\right], \\ \qquad \text{если } \xi\left(j-\frac{1}{2},k^*\pm 1,n+1\right)>0, \end{cases}$$

$$V_{0_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)=V_\pm\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)+$$
$$+B_{V_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)\xi\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*\pm 1,\ n+1\right),$$
$$A_{R_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)=\tfrac{1}{2}\left[R(j,\ k^*,\ n)+R(j-1,\ k^*,\ n)\right],$$
$$B_{R_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)=R(j,\ k^*,\ n)-R(j-1,\ k^*,\ n),$$
$$R_{0_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)=A_{R_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)+$$
$$+B_{R_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)\xi\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*\pm 1,\ n+1\right),$$
$$U_\pm\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n+1\right)=R(j,\ k^*,\ n+2)+$$
$$+R(j-1,\ k^*,\ n+2)-2R_{0_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right),$$
$$Z_{R_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n+1\right)=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{если } U_\pm\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n+1\right)\geqslant 0,\\ \dfrac{-2U_\pm\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n+1\right)}{\left[R(j,\ k^*,\ n+2)+R(j-1,\ k^*,\ n+2)+2R_{0_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)\right]} & \text{в других случаях,}\end{cases}$$
$$Z_\pm\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n+1\right)=\frac{V_\pm\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n+2\right)-V_{0_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)}{V_\pm\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n+2\right)+V_{0_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n\right)}+$$
$$+Z_{R_\pm}\left(j-\tfrac{1}{2},\ k^*,\ n+1\right).$$

Расчет давления и внутренней энергии (полуцелые значения j). (Уравнения совпадают с (29) и (30), но в них k заменяется на k^*.)

В. Конечно-разностные уравнения сохранения для двумерного плоского течения

Плоскостью течения является обычная плоскость x, y. Для определения положения частицы в этой плоскости используются лагранжевы координаты (a, b). Непрерывные значения переменных (a, b, t) заменяются системой положительных целых чисел (j, k, n). Ячейки представляют собой четырехугольники с координатами вершин $(j, k+1)$, (j, k), $(j+1, k)$, $(j+1, k+1)$. В за-

писанных ниже конечно-разностных уравнениях $\mathbf{U}$ — вектор скорости, $\mathbf{r}$ — декартов радиус-вектор ($\mathbf{U}$ и $\mathbf{r}$ лежат в плоскости x, y); M обозначает массу; $PQ \equiv P+Q$; v — объем, охватываемый движущейся ячейкой и единичными нормалями к плоскости x, y и численно равный площади ячейки. Остальные величины или были определены в § 3 или определяются в следующих уравнениях.

Сначала запишем разностный аналог уравнения изменения количества движения (18)

$$M(j, k, n)\mathbf{U}(j, k, n) - M(j, k, n-1)\mathbf{U}(j, k, n-1) = \\ = \mathbf{F}\left(j, k, n-\tfrac{1}{2}\right)\Delta^{n-1/2}t, \qquad (38)$$

где

$$\mathbf{F}\left(j, k, n-\tfrac{1}{2}\right) = \\ = -PQ\left(j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n-\tfrac{1}{2}\right)\mathbf{A}_\alpha\left(j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n-\tfrac{1}{2}\right) + \\ + PQ\left(j-\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n-\tfrac{1}{2}\right)\mathbf{A}_\beta\left(j-\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n-\tfrac{1}{2}\right) + \\ + PQ\left(j-\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, n-\tfrac{1}{2}\right)\mathbf{A}_\alpha\left(j-\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, n-\tfrac{1}{2}\right) - \\ - PQ\left(j+\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, n-\tfrac{1}{2}\right)\mathbf{A}_\beta\left(j+\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, n-\tfrac{1}{2}\right),$$

$$M(j, k, n) = \tfrac{1}{4}\left[M\left(j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n\right) + M\left(j-\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n\right) + \right. \\ \left. + M\left(j-\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, n\right) + M\left(j+\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, n\right)\right].$$

Ниже даются различные определения скорости, координат, площади и объема:

$$\mathbf{U}\left(j, k, n+\tfrac{1}{2}\right) = 2\mathbf{U}(j, k, n) - \mathbf{U}\left(j, k, n-\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\mathbf{r}(j, k, n+1) = \mathbf{r}(j, k, n) + \mathbf{U}\left(j, k, n+\tfrac{1}{2}\right)\Delta^{n+1/2}t,$$

$$\mathbf{r}\left(j, k, n+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{r}(j, k, n+1) + \mathbf{r}(j, k, n)\right],$$

$$\mathbf{A}_\alpha\left(j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\right) = \\ = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{r}\left(j, k+1, n+\tfrac{1}{2}\right) - \mathbf{r}\left(j+1, k, n+\tfrac{1}{2}\right)\right] \times \mathbf{k},$$

$$\mathbf{A}_\beta\left(j+\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\right) = \\ = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{r}\left(j+1, k+1, n+\tfrac{1}{2}\right) - \mathbf{r}\left(j, k, n+\tfrac{1}{2}\right)\right] \times \mathbf{k},$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор нормали к плоскости x, y,

$$\dot{v}\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right)=\left[\mathbf{U}\left(j+1,\ k,\ n+\tfrac{1}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\mathbf{U}\left(j,\ k+1,\ n+\tfrac{1}{2}\right)\right]\cdot\mathbf{A}_{\beta}\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right)+$$
$$+\left[\mathbf{U}\left(j+1,\ k+1,\ n+\tfrac{1}{2}\right)-\mathbf{U}\left(j,\ k,\ n+\tfrac{1}{2}\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\mathbf{A}_{\alpha}\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right). \quad (39)$$

Уравнение (39) является конечно-разностным аналогом уравнения (21)

$$v\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n+1\right)=v\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n\right)+$$
$$+\dot{v}\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right)\Delta^{n+1/2}t.$$

Объем ячейки с вершинами в точках $\mathbf{r}(j+1/2\pm1/2, k+1/2\pm1/2, n+1/2)$ в точности равен v.

Запишем, наконец, конечно-разностный аналог уравнения первого закона термодинамики

$$M\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2}\right)\left[\varepsilon\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n+1\right)-\right.$$
$$\left.-\varepsilon\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n\right)\right]/\rho_0+PQ\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\dot{v}\left(j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\ n+\tfrac{1}{2}\right)\Delta^{n+1/2}t=0. \quad (40)$$

Четырехугольную ячейку можно разделить на четыре части, прилегающие к углам (угловые области), посредством прямых линий, соединяющих середины сторон с некоторой точкой $\mathbf{r}(j+1/2,\ k+1/2,\ n+1/2)$. Эту точку всегда можно выбрать так, что части, прилегающие к углам, будут иметь равные площади; это будет внутренняя точка для любого выпуклого четырехугольника и для многих невыпуклых четырехугольников. Индексы 1, 2, 3, 4 используются для обозначения четырех угловых точек (j, k), $(j+1, k)$, $(j+1, k+1)$, $(j, k+1)$, относящихся к ячейке, центрированной в точке $(j+1/2, k+1/2)$, а также для обозначения четырех угловых областей, связанных с этими точками.

Если провести единичные нормали к плоскости течения через четыре линии, которые делят ячейку на угловые области, то получаются четыре плоскости, составляющие прямой угол с плоскостью x, y. Сила, действующая на плоскость, которая делит пополам линию, соединяющую угловые точки (1, 2), равна

$\mathbf{F}_{12}(j+1/2, k+1/2, n+1/2)$ и т. д. Уравнение (40) можно записать теперь в виде суммы четырех уравнений, каждое из которых соответствует одной из четырех частей ячейки с центром в точке $(j+1/2, k+1/2)$. Так, для угла номер 1 этой ячейки найдем

$$\frac{1}{4}M\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)\left[\varepsilon_1\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n+1\right)-\right.$$
$$\left.-\varepsilon_1\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n\right)\right]/\rho_0=\mathbf{F}_{41}\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{2}\left[\mathbf{U}\left(j, k+1, n+\frac{1}{2}\right)-\mathbf{U}\left(j, k, n+\frac{1}{2}\right)\right]-$$
$$-\mathbf{F}_{12}\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{2}\left[\mathbf{U}\left(j+1, k, n+\frac{1}{2}\right)-\mathbf{U}\left(j, k, n+\frac{1}{2}\right)\right], \qquad (41)$$

где $M(j+1/2, k+1/2)\varepsilon_1(j+1/2, k+1/2, n)/4\rho_0$ — внутренняя энергия в угловой области 1 в момент времени t_n, а

$$\mathbf{F}_{12}\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)=PQ\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\left[\mathbf{r}\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)-\mathbf{r}\left(j+\frac{1}{2}, k, n+\frac{1}{2}\right)\right]\times\mathbf{k}\equiv$$
$$\equiv PQ\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)\mathbf{A}_{12}\left(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)$$

и т. д. (Заметим, что $\mathbf{A}_{12}-\mathbf{A}_{41}=\mathbf{A}_\beta$.) Имеются аналогичные уравнения и для других угловых областей, а сумма четырех уравнений для этих областей дает уравнение (40).

Литература

1. Фридрихс К. О., Курант Р., Сверхзвуковые течения и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
2. Рихтмайер Р. Д., Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, М., 1960.
3. Richtmyer R. D., von Neumann J., *J. Appl. Phys.*, **21**, 232 (1950). (Имеется сокращенный русский перевод: сб. *Механика*, **1** (1951), 27.)
4. Trulio J., Trigger K., Univ. of Calif Rad. Lab. Repts. UCRL 6267 and UCRL 6522, 1961.
5. McQueen R. G., Marsh S. P., *J. Appl. Phys.*, **31**, 1253 (1960).

СЭЛ — совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач

В. Ф. НОХ

Калифорнийский университет, Лоуренсовская лаборатория радиации, Ливермор, Калифорния

1. Введение 128
2. Общие вопросы численных методов гидродинамики 132
3. Описание метода СЭЛ 137
4. Обобщение конечно-разностных аппроксимаций частных производных в произвольной области 142
5. Эйлеровы конечно-разностные уравнения для внутренних ячеек сетки 148
6. Гидродинамические уравнения сохранения при произвольной скорости системы координат относительно жидкости 153
7. Общие вопросы расчета граничных ячеек 155
8. Граничные ячейки и граничные последовательности 157
9. Граничные конечно-разностные уравнения для переменных (ρ, ε и др.), которые центрируются в граничных ячейках $C^n(k, l)$ . . . 161
10. Конечно-разностные уравнения для составляющих количества движения ($M=\rho u$, $N=\rho v$), которые центрируются в граничных ячейках вида $C^n(k+1/2,\ l+1/2)$ 164
11. Конечно-разностные уравнения в лагранжевых переменных 166
12. Обсуждение графических результатов некоторых расчетов 169
Литература 184

1. Введение

Эта статья первоначально посвящалась развитию способа численного решения нестационарных двумерных гидродинамических задач в переменных Эйлера для областей, которые аппроксимируются произвольной многоугольной сеткой и имеют общую движущуюся (нестационарно) жидкую границу. Этот новый способ составляет основу численного метода СЭЛ (совместного эйлерово-лагранжева метода).

Метод СЭЛ представляет собой метод расчета нестационарных, двумерных гидродинамических задач для сжимаемого невязкого нетеплопроводного газа. Он позволяет сочетать аппроксимацию в переменных Эйлера в некоторых областях жидкости с аппроксимацией в переменных Лагранжа для соседних областей жидкости.

Главная задача при развитии метода СЭЛ заключается в построении удобной схемы расчета в переменных Эйлера. В методе СЭЛ эйлерова граница (т. е. граница в переменных Эйлера) определяется одной или несколькими лагранжевыми линиями и поэтому является ломаной линией, составленной из отрезков прямых. Движущаяся ломаная линия, пересекая фик-

сированную эйлерову сетку, образует нерегулярные зависящие от времени ячейки, и в общем случае эти граничные ячейки можно определять как совокупность замкнутых многоугольников. Для расчета в эйлеровых координатах возникает задача аппроксимации дифференциальных уравнений в зависящей от времени многоугольной области таким путем, чтобы имелось согласование с уравнениями для внутренней части области. Кроме того, желательно иметь всюду согласованность конечно-разностных аппроксимаций в лагранжевых и эйлеровых областях. Этот вопрос занимает центральное место в настоящей статье.

В § 2 подробно обсуждаются преимущества и ограничения метода расчета в эйлеровых переменных и отдельно в лагранжевых переменных. Устанавливается, что для многих задач наиболее естественно использовать для части области аппроксимации в переменных Эйлера, а для остальной части аппроксимации в переменных Лагранжа. Метод СЭЛ наиболее полезен для задач такого типа.

В § 3 дается описание метода СЭЛ и рассматриваются вопросы проведения вычислений. Отмечается, что имеются некоторые преимущества, присущие методу СЭЛ, которые позволяют аппроксимировать весьма сложные области течения жидкости и, таким образом, преодолевать серьезные ограничения, присущие большинству численных методов. В качестве дополнительного результата, полученного при построении численной схемы СЭЛ, отмечается возможность расчета различных областей жидкости с шагами по времени Δt, которые являются характерными для рассматриваемых областей, и обсуждаются подробности этих вычислений.

В § 4 развиваются общие вопросы конечно-разностной аппроксимации частных производных в произвольной области R. При этом дается по крайней мере приближенное представление частной производной через некоторый линейный интеграл по границе области ∂R. При аппроксимации для эйлеровой сетки (включая граничные ячейки) вычисления сводятся к вопросу об оценке линейного интеграла по произвольному многоугольнику R, когда значения функции заданы только в узлах сетки (вершины ∂R). Следовательно, необходимо определять значения функции на ∂R по значениям в этих узлах сетки.

При простейшем предположении о линейном изменении функции между узлами сетки линейный интеграл сводится к конечной сумме произведений средних значений функций в узлах сетки на соответствующие длины отрезков. Показывается, что получающаяся аппроксимация частных производных является естественной аппроксимацией, так как она, в частности, сводится к обычной аппроксимации, когда R представляет собой треугольник или прямоугольник. Далее доказывается, что

уравнение сохранения $f_t + \nabla \cdot f\mathbf{U} = 0$ [1]) приводится к конечно-разностному уравнению с теми же свойствами сохранения. (Это утверждается в теоремах 2 и 3.)

Эмпирически было найдено, что разностные уравнения должны обладать свойствами законов сохранения гидродинамических дифференциальных уравнений в переменных Эйлера. Поэтому необходимое условие заключается в том, чтобы любая конечно-разностная аппроксимация частных производных приводила к конечно-разностным уравнениям, обладающим свойствами уравнений сохранения. Таким образом устанавливается, что обобщение конечно-разностной аппроксимации, которое мы используем, является вполне удовлетворительным.

В § 5 определяется аппроксимирующая сетка, а также пространственные и временные центральные разности зависимых переменных величин. Вводится определение искусственной вязкости q (фон Нейман и Рихтмайер [1]), которая позволяет автоматически учитывать появление ударных волн в потоке. Далее находится конечно-разностная форма для дивергенции по результатам § 4, дается эвристическое описание физического смысла выражения для дивергенции и рассматриваются вопросы устойчивости конечно-разностных уравнений. Затем приводится полная система конечно-разностных уравнений для внутренних точек сетки и указываются возможные варианты.

В § 6 выводятся гидродинамические уравнения в форме уравнений сохранения для случая, когда система координат пространственных переменных x и y может иметь некоторую скорость относительно жидкости. Основные уравнения для эйлеровых нестационарных граничных ячеек являются частным случаем этих более общих уравнений. Показывается, что эти уравнения содержат в себе эйлеровы уравнения для внутренних точек, когда пространственные переменные не зависят от времени, и содержат в себе лагранжевы уравнения, когда пространственные переменные движутся вместе с жидкостью.

В § 7 исследуются конечно-разностные уравнения, полученные в § 6, для случая лагранжевых переменных и вводятся центральные разности по времени от якобиана преобразования (т. е. преобразования лагранжевых переменных к эйлеровым пространственным переменным). В теореме 5 устанавливается конечно-разностная аппроксимация для якобианов в области R и вводится интерпретация якобиана как площади области R. Эта интрепретация якобиана как площади применяется при аппроксимации более общих уравнений, которые используются в граничных ячейках.

[1]) В работах советских авторов уравнения такого типа часто называются также уравнениями в дивергентном виде или уравнениями в форме законов сохранения, — *Прим. перев.*

В § 8 подробно рассматривается граничная ячейка и определяются некоторые граничные последовательности, которые связываются с граничной ячейкой. Эти граничные последовательности необходимы для определения конечно-разностных уравнений на границах. Указан путь построения этих последовательностей и дано несколько примеров.

Далее конечно-разностные уравнения определяются на ступенчатой сетке, т. е. составляющие количества движения и скорости определяются в узлах сетки, а остальные зависимые переменные (плотность, энергия и др.) определяются в центре каждой ячейки сетки. Для этой новой сетки появляется необходимость в определении граничных ячеек и соответствующих граничных последовательностей. При построении этой новой сетки за новые узлы берутся средние точки ячеек исходной сетки. Граничные ячейки для ступенчатой сетки определяются, конечно, точно так же, как граничные ячейки для исходной сетки. Поэтому их подробное описание не приводится.

После определения граничных ячеек и связанных с ними последовательностей мы имеем необходимые данные для того, чтобы получить разностные уравнения для граничных ячеек.

В § 9 предполагается, что соответствующие граничные последовательности, рассмотренные в § 8, уже построены, и для дивергенции используются обобщенные конечно-разностные аппроксимации, полученные в § 6. На основании результатов изучения якобианов в § 7 формулируются конечно-разностные уравнения для некоторых обобщенных дифференциальных уравнений § 6, и в частности для тех уравнений, которые записываются в обычных центральных разностях при использовании средних точек граничных ячеек первоначальной сетки (т. е. уравнений для ρ, ε и др.). Необходимо обращать особое внимание на случай, когда площадь граничной ячейки стремится к нулю; этот случай здесь обсуждается.

В § 10 получены конечно-разностные уравнения для составляющих количества движения $M=\rho u$ и $N=\rho v$, которые обычным образом центрируются в узлах исходной сетки или в средних точках граничных ячеек ступенчатой сетки.

Далее рассматривается определение давления на границе областей в переменных Эйлера и Лагранжа. Если это граничное давление найдено, то можно полностью провести расчет в зоне использования лагранжевых переменных.

В § 11 находится система лагранжевых конечно-разностных уравнений путем применения общих конечно-разностных аппроксимаций § 4. Указывается, что получающаяся система лагранжевых конечно-разностных уравнений (для прямоугольной аппроксимирующей сетки) является обычной системой, которая получается при переходе от пространственных производных к

производным по лагранжевым координатам. Таким образом, показано, что рассматриваемый подход включает в себя обычные конечно-разностные уравнения и в то же самое время позволяет использовать совместно лагранжевы и эйлеровы конечно-разностные уравнения.

В § 12 приводятся графики результатов решения задач, типичных для метода СЭЛ.

2. *Общие вопросы численных методов гидродинамики*

Прежде чем приступить к описанию метода СЭЛ, рассмотрим в общих чертах класс интересующих нас задач и обсудим как преимущества, так и ограничения чисто лагранжевой и чисто эйлеровой аппроксимаций.

Мы будем решать гидродинамические задачи с начальными данными при заданных граничных условиях. Для этого мы задаем начальное состояние жидкости (при $t=0$) в некоторой области $R^0=R(x, y, 0)$ в плоскости x, y и внешние силы, действующие на границу (∂R) жидкости для моментов времени $0\leqslant t\leqslant T$. Определяются состояние жидкости и изменение области $R=R(x, y, t)$, занятой жидкостью в последующие моменты времени $0\leqslant t\leqslant T$. В общем случае мы имеем дело с несколькими жидкостями, и тогда $R=\mathbf{U}_i R_i$, где $R_i=R_i(x, y, t)$, — область, занятая i-й жидкостью. Если мы обозначим через $D_i=D_i(x, y, t)$ ту часть границы R_i, которая лежит внутри R (т. е. $D_i=\partial R_i \cap \cap (R-\partial R)$), то тогда линии D_i дают расположение границ раздела между жидкостями (так называемых контактных поверхностей). При этом границы D_i движутся вместе с жидкостью таким образом, что давление и нормальная к D_i составляющая скорости остаются непрерывными. Таким образом, мы имеем дополнительную задачу об определении линий разрыва D_i для моментов времени $0\leqslant t\leqslant T$.

При расчете в лагранжевых переменных мы аппроксимируем область R^0 разностной сеткой таким образом, чтобы граница ∂R^0 и кривые $D_i^0=D_i(x, y, 0)$ соответствовали собственно лагранжевым линиям. Так как касательная составляющая скорости может терпеть разрыв при переходе через контактную поверхность, то в общем случае необходимо предусмотреть специальный расчет «поверхностей скольжения» для тех лагранжевых линий, которые определяются кривыми D_i.

При расчетах в лагранжевых переменных узлы разностной сетки соответствуют элементам массы жидкости и перемещаются по траекториям жидких частиц. Одна из особенностей, которая делает полезным лагранжево описание, заключается в том,

что положения границы ∂R и кривых D_i при расчете определяются автоматически.

Другая важная особенность (она снова обусловлена тем фактом, что аппроксимирующая сетка движется с жидкостью) заключается в том, что область R всегда аппроксимируется тем же самым количеством узлов сетки, и, таким образом, начальная точность аппроксимации является таковой и в полном расчете. Лагранжевы расчеты обладают высокой точностью до тех пор, пока аппроксимирующая сетка остается правильной; число узлов сетки, необходимых для хорошей аппроксимации области, является, вообще говоря, весьма небольшим. Оказалось, что расчеты в переменных Лагранжа идеально подходят для большого числа задач. В частности, из-за требований точности и экономии числа необходимых узлов сетки приходится обращаться практически к использованию лагранжевых аппроксимаций при изучении движений тонких пленок или тонких жидких слоев, которые перемещаются на расстояния, в несколько раз превышающие их первоначальную толщину.

К сожалению, те же характерные черты метода Лагранжа, которые делают его полезным в указанных случаях, являются также чертами, из-за которых он становится вообще непригодным для расчета течения в случае развивающейся турбулентности или в случае появления контактных разрывов в местах потока, где их раньше не было. Если появляется контактный разрыв (на лагранжевой линии, которая не соответствует ни одной из кривых D_i) или возникает турбулентность, то узлы разностной сетки будут следовать движению жидкости, и частицы жидкости, которые первоначально находились близко друг от друга в R^0, больше не будут оставаться близкими друг к другу в физическом смысле. В соответствии с этим аппроксимирующая сетка будет сильно искажаться и вычисления становятся весьма неточными, если вообще мы их можем продолжить. В большинстве случаев, связанных с возникновением турбулентности, шаг по времени (Δt), который применяется по соображениям устойчивости, стремится к нулю. Это обусловлено тем, что шаг по времени, необходимый для устойчивости, пропорционален кратчайшему расстоянию между линиями лагранжевой сетки, а это минимальное расстояние между соседними линиями сетки будет, вообще говоря, стремиться к нулю, когда сетка искажается.

Были потрачены значительные усилия для развития способа автоматической перестройки расчетной схемы, цель которой состоит в замене искаженной сетки некоторой регулярной сеткой. Эта перестройка делается периодически (или даже на каждом шаге по времени) и является полезным способом, который позволяет дополнить или увеличить полное значение времени t при вычислениях с применением лагранжевых переменных. Если

перестройка лагранжевой сетки становится неизбежной, то это по существу означает, что более подходящей для расчета является фиксированная эйлерова сетка.

Не всегда понимается тот факт, что класс задач, решаемых с применением упомянутого выше способа перестройки схемы для лагранжевой сетки, только лишь немного шире класса задач, решаемых без применения этой перестройки. Причина невозможности существенного увеличения класса задач, решаемых с применением способа перестройки, заключается в том, что можно перестраивать схему расчета только для внутренних узлов подобластей R_i, тогда как узлы сетки, определяющие границу ∂R, и точки, лежащие на поверхностях раздела сред D_i, не должны меняться. Таким образом, естественное требование, налагаемое на узлы лагранжевой разностной сетки, соответствующие границе ∂R и кривым D_i, является слишком сильным ограничением на допустимые формы, которые могут принимать подобласти R_i и область R.

Имеется и другая трудность (она не обязательно обусловлена наличием турбулентности), которая заключается в том, что первоначально односвязная область R может со временем превратиться в многосвязную область. В действительности серьезная трудность возникает даже тогда, когда образуется шейка в некотором месте области R. При этом расстояние между отдельными линиями аппроксимирующей лагранжевой сетки будет стремиться к нулю (в узкой области шейки), и тогда в соответствии с требованием устойчивости будет стремиться к нулю шаг Δt. В качестве примера приведем результат процесса сжатия центральной части тюбика с зубной пастой.

Ясно, что никакая перестройка лагранжевой аппроксимирующей сетки (для которой общее число сеточных линий фиксировано) не позволит распространить расчет на тот случай, когда область R стремится стать многосвязной. Вообще говоря, если при вычислениях в переменных Лагранжа становится необходимым переразбиение сетки, то определяющая ∂R линия при пересечении во время движения линий аппроксимирующей сетки должна оставлять нужное число узлов сетки во всех частях области R. В этом случае мы можем автоматически учесть появление многосвязности.

Средством преодоления трудностей, с которыми мы сталкиваемся при применении лагранжевых переменных, является использование многожидкостного приближения в эйлеровых переменных (аппроксимирующая сетка фиксирована, а линии, аппроксимирующие границу ∂R и поверхности раздела сред D_i, движутся относительно этой фиксированной сетки). В принципе по крайней мере все гидродинамические расчеты можно проводить, применяя многожидкостную эйлерову аппроксимацию, но

с точки зрения практического использования имеются ограничения для класса задач, к которым ее удобно применять.

Рассмотрим эти практические выводы. Процесс расчета в переменных Эйлера (скажем, с прямоугольной аппроксимирующей сеткой) состоит, во-первых, в определении прямоугольной области $\mathscr{R}$ в плоскости x, y, которая достаточно велика, чтобы заключать внутри себя область R для моментов времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Далее мы аппроксимируем эту прямоугольную область правильной сеткой и, наконец, вводя некоторые вспомогательные линии, аппроксимируем границу ∂R и жидкие поверхности D_i.

Кривые, которые аппроксимируют ∂R и D_i, будут двигаться вместе с жидкостью и, следовательно, в фиксированной эйлеровой сетке будут образовываться нерегулярные, зависящие от времени, граничные ячейки. Было бы неразумным ожидать, что мы сможем аппроксимировать дифференциальное уравнение в этих нерегулярных граничных ячейках с той же степенью точности, с которой мы могли аппроксимировать дифференциальные уравнения во внутренних ячейках разностной сетки. Таким образом, с точки зрения точности вычислений в любой момент времени t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ отношение числа внутренних ячеек в каждой подобласти R_i к числу граничных ячеек в каждой подобласти R_i, которое мы обозначим через $A_i(t)$ и которое является грубой мерой точности эйлеровых расчетов для подобласти R_i, должно быть сделано таким большим, насколько это возможно. Величины $A_i(t)$ в общем случае можно сделать большими (при аппроксимирующей сетке практически приемлемых размеров), если длина ∂R_i мала по сравнению с площадью R_i. Если, с другой стороны, любая подобласть R_i области R такова, что длина ∂R_i велика по сравнению с площадью R_i (как в случае подобласти, которая является длинной тонкой лентой и т. п.), то для того чтобы сделать отношение $A_i(t)$ большим, мы должны покрыть область R мелкой аппроксимирующей сеткой, а это обычно практически не допустимо. Таким образом, при расчетах в чисто эйлеровых переменных в соответствии с требованием точности мы ограничимся только такими областями R, для которых все величины $A_i(t)$ будут большими для любого t при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Другой вопрос, который важно рассмотреть, касается числа узлов сетки при сеточной аппроксимации большого прямоугольника $\mathscr{R}$, которые в любой рассматриваемый момент времени t, $0 \leqslant t \leqslant T$, лежат вне области R (т. е. числа узлов сетки, которые являются внешними узлами для области R). Эти внешние узлы являются пассивными узлами при вычислениях, и, хотя можно исключить вычисления в этих внешних точках при применении эйлеровых координат, они тем не менее входят в общее число узлов сетки для произвольной задачи. Следовательно, для фиксированного общего числа узлов сетки величины $A_i(t)$ будут

уменьшаться (и, следовательно, точность вычислений будет уменьшаться) при увеличении числа внешних точек. Если мы обозначим через $\varepsilon(t)$ отношение числа узлов сетки, которые являются внутренними (или лежат на границе R), к общему числу узлов сетки, которая аппроксимирует область $\mathscr{R}$, то для точности и экономичности вычислений в эйлеровых переменных следует иметь $\varepsilon(t)$ по возможности близким к единице. Отношение $\varepsilon(t)$ можно считать за меру эффективности расчета в методе Эйлера с точки зрения точности и экономичности.

Вообще говоря, мы видим, что задачи, для расчетов которых наиболее удобны эйлеровы координаты, являются задачами, в которых (для $0 \leqslant t \leqslant T$) площадь области R по возможности близка к площади большой прямоугольной области $\mathscr{R}$ и для которых площадь каждой подобласти R_i велика по сравнению с длиной границы этой подобласти ∂R_i.

Ясно, что для многих задач не подходят идеально ни чисто лагранжев, ни чисто эйлеров метод расчета, а наилучшим способом расчета может оказаться некоторая комбинация аппроксимаций в координатах Эйлера и Лагранжа. Опыт показывает, что в большинстве задач область R, занятую жидкостями, можно разделить естественным путем на подобласти R_i (R_i, как правило, соответствуют подобластям, которые содержат различные жидкости) так, чтобы для больших интервалов времени (t) каждая подобласть R_i наилучшим образом аппроксимировалась или чисто лагранжевой, или чисто эйлеровой расчетными сетками. Таким образом, мы находим эмпирически, что при проведении многих расчетов большинство жидкостей имеют «естественные» лагранжевы подобласти и «естественные» эйлеровы подобласти.

В частности, нередко случается, что область R можно достаточно хорошо аппроксимировать лагранжевой сеткой от момента $t=0$ до некоторого момента t_1 ($0 \leqslant t_1 \leqslant T$), а для моментов времени $t > t_1$ вычисления становятся недостаточно точными (или не могут продолжаться по условиям устойчивости). Если начиная с момента времени t_1 мы будем использовать эйлерову аппроксимацию в тех подобластях R_i области R, где нарушается точность расчета, а в остальных подобластях будем, как и раньше, использовать их лагранжеву аппроксимацию, то, вообще говоря, может оказаться, что нам удастся закончить расчет.

Имеются классы задач, для которых или сначала, или несколько позднее может оказаться полезным аппроксимировать некоторые подобласти эйлеровыми сетками, а остальные подобласти аппроксимировать лагранжевыми сетками, которые предложены в методе СЭЛ. Оказалось, что эта возможность объединения эйлеровой и лагранжевой аппроксимаций при разработке численного метода гидродинамики наиболее плодотворна и в

действительности для многих задач практически необходима. Например, оказывается, что в задачах, в которых тонкие пластинки толкают газ, тонкая пластинка является естественной лагранжевой областью. Для области же, занятой газом, требуется применить эйлерову аппроксимацию, для того чтобы было возможным рассматривать турбулентное движение. Аналогично этому, если нам нужно рассчитать движение воздушного шара, когда его надувают, или мыльного пузыря в процессе его возникновения, то мы обнаружим, что оболочка шара или мыльная пленка являются естественными лагранжевыми областями, в то время как раздувающий их газ является естественной областью для применения способа Эйлера.

3. *Описание метода* СЭЛ

Основная идея метода СЭЛ состоит в том, что граница ∂R (области $R=\mathbf{U}_i R_i$, которую мы аппроксимируем) и кривые D_i (которые отделяют подобласти R_i) аппроксимируются лагранжевыми линиями. Таким образом, движущимся границам (∂R и D_i) ставятся в соответствие лагранжевы линии лагранжевых аппроксимирующих сеток.

Подобласть R_i, которая аппроксимируется эйлеровой сеткой, будет соответственно иметь своей границей линию ∂R_i, полученную при вычислениях с применением метода Лагранжа. Таким образом, расчет в эйлеровых переменных сводится к вычислениям при фиксированной разностной сетке, имеющей определенную подвижную границу, и поэтому представляет собой один из главных моментов при расчетах по методу СЭЛ.

В методе СЭЛ применяется большая [1]) прямоугольная эйлерова сетка, обозначаемая далее через E, и, в зависимости от решаемой задачи, от одной до шести отдельных лагранжевых сеток, обозначаемых далее через $L_i(t)$, $i=1,2,\ldots,6$ (E и $L_i(t)$ — множества узловых точек, которые определяются эйлеровой и лагранжевой сетками соответственно; кроме того, лагранжевы сетки обозначены как функции времени, так как узловые точки этих сеток движутся вместе с жидкостями, которые они аппроксимируют).

Расчеты, выполняемые в рассматриваемом методе на каждом шаге по времени, состоят из трех основных частей: расчеты в переменных Лагранжа, расчеты в переменных Эйлера и расчеты, необходимые для объединения эйлеровых и лагранжевых областей путем определения той части эйлеровой сетки E,

[1]) Можно использовать до 7000 узлов в варианте метода СЭЛ для машины IBM-7094 и до 20 000 узлов в варианте этого метода для вычислительной машины IBM-7030 (Stretch).

которая требуется для проведения расчетов, и путем определения давления в эйлеровой области, влияющей на лагранжевы границы.

Предположим, что мы находимся на n-м шаге по времени $\left(t^n = \Sigma_j^n \Delta t_j\right)$ при расчете по методу СЭЛ и нам нужно вычислить все величины на следующем шаге по времени, т. е. для момента времени t^{n+1}. Будем считать, что в момент t^n известно состояние жидкостей (плотность, энергия и т. д.) и расположение лагранжевых сеток (т. е. мы определили $L_i^n = L_i(t^n)$). Кроме того, предположим, что определена та часть эйлеровой сетки E, которая является внутренней или примыкает к границе тех подобластей R_i, в которых применяется аппроксимация в эйлеровых переменных. Обозначим эту часть E в момент времени $t=t^n$ через $E^n=E(t^n)$. Вычисление для следующего шага по времени проводится следующим образом.

В начале вычислений используется известное при $t=t^n$ состояние жидкостей лагранжевых областей и давлений, действующих на лагранжевы границы для того, чтобы решить лагранжевы конечно-разностные уравнения для каждой из сеток L_i^n. Решение конечно-разностных уравнений дает нам при $t=t^{n+1}$ состояние жидкостей в лагранжевых областях и новые расположения сеток L_i^{n+1}. Далее необходимо определить систему E^{n+1}; это выполняется с помощью первой фазы смешанных вычислений, в которых используется новое положение сеток L_i^{n+1}. Теперь мы имеем возможность решать эйлеровы конечно-разностные аппроксимирующие уравнения для определения состояния жидкости в момент t^{n+1} в области E^{n+1}. Это выполняется в фазе эйлеровых вычислений метода СЭЛ.

Определив состояние эйлеровой области в момент t^{n+1}, во второй фазе смешанных вычислений находим давления при t^{n+1}, которые влияют на границы лагранжевых сеток L_i^{n+1}. Таким образом, мы нашли все параметры течения жидкости и положения разностных сеток в момент времени $t=t^{n+1}$; на этом заканчивается один основной цикл вычислений (или один основной шаг вычислений по времени).

Описание вычислений по методу СЭЛ следует дополнить, определив «начало расчета» или начальное (при $t=0$) состояние жидкостей и начальные положения узлов сеток L_i^0, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots$, E и подсистемы E^0. Для того чтобы рассуждать более конкретно, рассмотрим простую задачу с несколькими жидкостями и опишем способ аппроксимаций этой задачи, применяя метод СЭЛ.

Рассмотрим область R (рис. 1а), состоящую из пяти подобластей (т. е. $R=\mathrm{U}_{i=1}^{i=5} R_i$), каждая из которых первоначально

покоилась и имела постоянное давление P_0. Причем каждая подобласть R_i^0 соответствует некоторой жидкости (имеется в виду, что начальные параметры (кроме давлений) или уравнения состояния для различных подобластей R_i^0 являются различными).

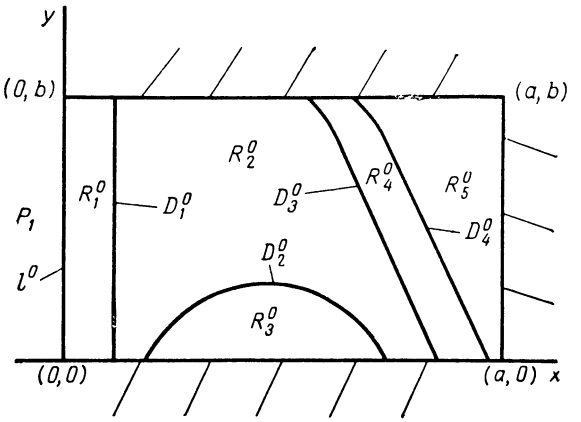


Рис. 1а. Простая задача с областями, занятыми различными жидкостями в начальный момент ($t = 0$).

$$R^0 = \{\langle x, y\rangle \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\},$$
$$l^0 = \{\langle x, y\rangle \mid x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}.$$

Начальные плотности для областей $R_1^0, \ldots, R_5^0$ соответственно равны $\rho_1^0, \ldots, \rho_5^0$; начальные скорости равны нулю; начальные давления таковы: $P_1^0 = P_2^0 = P_3^0 = P_4^0 = P_5^0 = P_0$. При $t \geqslant 0$ задано следующее граничное условие: $P_l \equiv \text{const}$ на l, причем $P_l > P_0$. Остальная граница области R является твердой стенкой. Если через u и v обозначить составляющие скорости, то имеем

$$u(a, y, t) = v(x, 0, t) = v(x, b, t) = 0.$$

Пусть R в начальный момент представляет собой прямоугольную область [1])

$$R^0 = \{\langle x, y\rangle \mid 0 \leqslant x \leqslant a \wedge 0 \leqslant y \leqslant b\}.$$

Для моментов времени $t > 0$ задаются следующие граничные условия. Считаем, что область R имеет границей твердую стенку, за исключением части границы слева, которую обозначим через $l = l(x, y, t)$ (первоначально это была линия $l^0 = \{\langle x, y\rangle \mid x = 0 \wedge 0 \leqslant y \leqslant b\}$) и где приложено постоянное давление $P_l > P_0$. Таким образом, если u и v — соответственно составляющие скорости

[1]) Здесь и далее иногда используются логические обозначения, аналогичные тем, которые приняты в алгоритмических языках. — *Прим. перев.*

вдоль осей x и y, то заданные граничные условия записываются в следующем виде:

$$t \geqslant 0,\ v(x, 0, t) = u(a, y, t) = v(x, b, t) = 0,$$

$$P_1 \equiv \text{const на } l = l(x, y, t).$$

Для того чтобы аппроксимировать эту задачу по методу СЭЛ, мы должны аппроксимировать движущуюся границу и

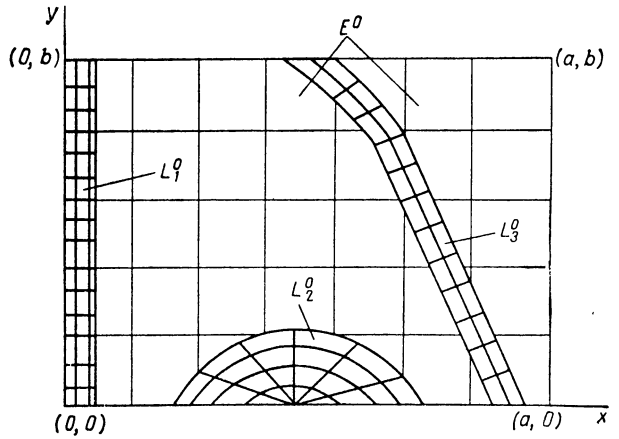


Рис. 1б. Одна из возможных аппроксимаций области течения при использовании метода СЭЛ для задачи, указанной на рис. 1а.

$$R^0 = R(x, y, 0) = \{\langle x, y\rangle \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ \ 0 \leqslant y \leqslant b\}.$$

Кроме того, предполагается, что $\mathscr{R} = R^0$. Аппроксимация осуществляется следующим образом:

L_1^0 аппроксимирует R_1^0; E аппроксимирует $R = R^0$;

L_2^0 аппроксимирует R_3^0; E^0 аппроксимирует $R_2^0 \cup R_5^0$;

L_3^0 аппроксимирует R_4^0.

контактные кривые $D_1, \ldots, D_4$ (рис. 1б) с помощью лагранжевых линий, используя лагранжевы сетки. Можно принять, что сетка L_1^0 аппроксимирует R_1^0, сетка L_2^0 аппроксимирует R_3^0, а L_3^0 аппроксимирует или R_4^0, или R_4^0 и R_5^0. Подобласть R_2^0 или подобласти R_2^0 и R_5^0 можно было бы аппроксимировать эйлеровой сеткой E^0. Примем для определенности, что L_3^0 аппроксимирует R_4^0, а для R_2^0 и R_5^0 применяется эйлерова разностная сетка E^0. Для того чтобы определить сетку E, мы должны сначала определить прямоугольную область $\mathscr{R}$, которая должна быть достаточно большой, чтобы содержать внутри себя под-

области R_2 и R_5 во все моменты времени $t \geqslant 0$. Так как давление на границе P_1 больше начального давления P_0 в R, то, следовательно, можно полагать, что граница l будет всегда лежать справа от оси y. При этом предположении относительно l мы выберем $\mathscr{R} = R^0$ и будем аппроксимировать $\mathscr{R}$ эйлеровой сеткой E. Число сеточных узлов для E и для систем L_1^0, L_2^0, L_3^0 будет зависеть от точности, которую мы хотим задать, учитывая максимальные возможности метода.

Только что рассмотренная задача с несколькими областями является простым примером задачи, которую было бы весьма трудно аппроксимировать (естественным путем), применяя чисто лагранжевы координаты. Причина этого заключается в том, что различные подобласти не могут быть аппроксимированы одной сеткой, для которой контактные разрывы (кривые D_1, ..., ..., D_4 на рис. 1а) соответствуют лагранжевым линиям.

Эта трудность в представлении даже немного усложненной геометрической картины представляет собой серьезный недостаток большинства методов расчета в лагранжевых переменных и является трудностью, которая имеет место во многих численных методах гидродинамики. Оказалось, что рассматриваемый метод совмещения нескольких отдельных лагранжевых сеток с эйлеровой сеткой обладает большой гибкостью в вопросах аппроксимации наиболее естественным путем задач с многими областями. В действительности это одна из важнейших сторон метода СЭЛ.

Имеется еще другая важная черта метода СЭЛ, которая возникает косвенным образом. Дело в том, что в основном вычислительном цикле лагранжевы вычисления для каждой лагранжевой сетки L_i и эйлеровы вычисления проводятся независимо. Раздельные вычисления позволяют использовать свой временной интервал $(\Delta_i t)$ для каждой лагранжевой сетки $L_i(t)$, причем эти интервалы могут отличаться от временного интервала Δt для эйлеровой сетки $E(t)$. Это делается следующим образом.

В каждом основном цикле вычислений определяется допустимый максимальный шаг Δt (из условий устойчивости) для каждой из лагранжевых сеток L_i и для эйлеровой сетки $E(t)$. Для того чтобы быть уверенным в устойчивости расчета в целом, стандартный прием заключался бы в выборе минимального из этих допустимых шагов Δt и использовании его как для лагранжевой, так и для эйлеровой частей расчета в последующем основном вычислительном цикле. Практически, однако, оказывается, что шаги Δt, допустимые для различных $L_i(t)$ и для $E(t)$, могут совершенно отличаться и в общем случае Δt для эйлеровой сетки $E(t)$ будет наибольшим из них.

Следовательно, в методе СЭЛ интервал Δt, который выбирается по условию устойчивости в эйлеровой области $E(t)$ (при

$t=t^n$), принимается за основной временной интервал для $(n+1)$-го цикла вычислений. Для того чтобы быть уверенным в устойчивости расчета лагранжевых областей при $(n+1)$-м цикле, шаг по времени для каждой сетки $L_i(t)$ подбирается из условия устойчивости для этой сетки и так, чтобы он был некоторой частью от основного эйлерового интервала Δt (или равен ему).

Для каждой лагранжевой сетки проводится расчет на некоторое число шагов по времени с тем, чтобы к концу основного вычислительного цикла все сетки были рассчитаны до одного общего момента времени.

Эту возможность использования различных интервалов по времени для лагранжевых и эйлеровых сеток следует считать важной характерной чертой метода СЭЛ, благодаря которой экономится много вычислительного времени. Совершенно ясно, что это так и должно быть, потому что условие устойчивости, налагаемое на допустимый интервал времени в некоторой точке жидкости, является функцией местной скорости звука и размера ячейки расчетной сетки в этой точке (а также скорости жидкости в точке для случая эйлеровой сетки).

Далее физически ясно, что местная скорость звука и скорость жидкости могут значительно изменяться в различных точках жидкости. Кроме того, размер ячейки сетки (по соображениям точности), вообще говоря, тоже будет зависеть от аппроксимируемой области. Поэтому следует ожидать, что для различных подобластей будут иметь место разные требования из-за условия устойчивости. Таким образом, установлено, что при выполнении гидродинамических расчетов желательно использовать для различных областей свой «характерный» шаг по времени.

4. Обобщение конечно-разностных аппроксимаций частных производных в произвольной области

Мы ограничимся плоским случаем в декартовых координатах, так как результаты без затруднений непосредственно распространяются на задачи с осевой симметрией. Дифференциальные уравнения, которые мы рассмотрим, будут аппроксимироваться конечно-разностными уравнениями в предположении, что область течения жидкости в плоскости x, y покрыта прямоугольной сеткой. Конечно-разностные уравнения для прямоугольной сетки или многоугольной сетки легко получаются из общих соотношений, причем необходимые изменения (а также изменения, которые требуются для осесимметричного случая) будут указаны в соответствующих местах текста.

Имеется много эквивалентных форм систем дифференциальных уравнений, которые характеризуют течение невязкой и нетеплопроводной жидкости в эйлеровых координатах, но некоторые из них приводят к значительно более точным аппроксимациям, чем другие. Дифференциальные уравнения, рассматриваемые ниже, записаны в форме уравнений сохранения, а это приводит к естественной системе конечно-разностных уравнений. Как было показано эмпирически, эти конечно-разностные аппроксимации будут достаточно точны и вообще наиболее подходящи для широкого круга двумерных задач. В настоящем исследовании основной зависимой переменной считается количество движения, а скорость является определяемой величиной. Очень важно учесть это различие в конечно-разностных уравнениях. Дифференциальные уравнения сохранения записываются в следующем виде:

$$M_t + \nabla \cdot M\mathbf{U} = -P_x, \tag{1}$$

$$N_t + \nabla \cdot N\mathbf{U} = -P_y, \tag{2}$$

$$\rho_t + \nabla \cdot \rho\mathbf{U} = 0, \tag{3}$$

$$\varepsilon_t + \nabla \cdot \varepsilon\mathbf{U} = -P\nabla \cdot \mathbf{U}, \tag{4}$$

$$P = P(\varepsilon, \rho), \tag{5}$$

где $M = \rho u$, $N = \rho v$ — составляющие вдоль x, y количества движения, рассчитанного на единицу объема, $\mathbf{U} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ — скорость, ρ — плотность, ε — внутренняя энергия на единицу объема, P — давление.

Заметим, что если P положить равным нулю в этих уравнениях, то (1), (2) и (4) будут иметь вид уравнения (3); это выражает факт сохранения соответствующих величин при отсутствии поля сил.

Было обнаружено при экспериментальных вычислениях, что конечно-разностный аналог этих выражений должен также сохранять в алгебраической форме характер изменения этих величин. (Это утверждение уточняется теоремами 2 и 3.) В следующих теоремах мы еще встретимся с этим требованием и в то же время получим естественное обобщение конечно-разностных аппроксимаций частных производных (а также выражение дивергенции) для произвольно построенной сетки.

Теорема 1. *Пусть дана область R с границей ∂R в плоскости x, y, и пусть f, u, v — достаточное число раз дифференцируемые функции в R; тогда в R существует точка (x_0, y_0), для которой имеет место следующее неравенство*:

$$f_x(x_0, y_0) = \oint_{\partial R} f\, dy \Big/ \oint_{\partial R} x\, dy. \tag{6}$$

Аналогично этому существуют точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), *такие, что*

$$f_y(x_1, y_1) = -\oint_{\partial R} f\,dx \Big/ \oint_{\partial R} x\,dy, \tag{7}$$

$$[(fu)_x + (fv)_y]_{(x_2, y_2)} = \left[\oint_{\partial R} fu\,dy - fv\,dx\right] \Big/ \oint_{\partial R} x\,dy, \tag{8}$$

где все контурные интегралы обходятся против часовой стрелки.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы о среднем значении и теоремы Грина. Согласно теореме Грина,

$$\int_R\int f_x\,dx\,dy = \oint_{\partial R} f\,dy, \quad \int_R\int f_y\,dx\,dy = -\oint_{\partial R} f\,dx$$

и

$$\int_R\int [(fu)_x + (fv)_y]\,dx\,dy = \int_{\partial R} fu\,dy - fv\,dx.$$

Далее, согласно теореме о среднем значении в R, существуют значения x и y, такие, что имеют место следующие соотношения:

$$f_x \oint_{\partial R} x\,dy = \int_R\int f_x\,dx\,dy, \quad f_y \oint_{\partial R} x\,dy = \int_R\int f_y\,dx\,dy,$$

$$[(fu)_x + (fv)_y] \oint_{\partial R} x\,dy = \int_R\int [(fu)_x + (fv)_y]\,dx\,dy.$$

Здесь мы использовали равенство $\int_R\int dx\,dy = \oint_{\partial R} x\,dy$. Комбинируя эти соотношения и разрешая их относительно f_x, f_y и $(fu)_x + (fv)_y$, получим соотношения (6)—(8).

Заметим, что равенство (8) можно было бы доказать, используя теорему о среднем значении и теорему о дивергенции; отметим также, что имеется возможность применить теорему о дивергенции к аппроксимации дивергенции в осесимметричных задачах.

Рассматриваемые выше области R являются, конечно, отдельными ячейками сетки или частично граничными зонами, образованными пересечением движущейся лагранжевой границы с фиксированной эйлеровой сеткой. Теорема 1 позволяет для различных форм областей полностью автоматически аппроксимировать P_x, P_y и дивергентные члены в уравнениях (1)—(4).

Ясно, что необходимо знать значения функции на границах ячеек сетки для того, чтобы вычислить контурные интегралы.

С этой целью сделаем следующие предположения. Наши конечно-разностные уравнения дают возможность найти значения зависимых переменных в узлах разностной сетки. Функции, определенные в этих точках, доопределим в точках границы, используя линейную интерполяцию между узлами сетки, т. е. значения функций в узлах соединим прямыми линиями. Это позволяет свести используемые в теореме контурные интегралы к сумме произведений средних значений, получаемых по значениям функций в узлах, на соответствующие длины сетки вдоль границы ячейки [1]).

Таким образом, соотношения (6)—(8) сводятся к следующим (рис. 2):

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} (f_{i+1}+f_i)(y_{i+1}-y_i)}{\sum_{i=1}^{N} (x_{i+1}+x_i)(y_{i+1}-y_i)}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta y}\right)_j = \frac{-\sum_{i=1}^{N} (f_{i+1}+f_i)(x_{i+1}-x_i)}{\sum_{i=1}^{N} (x_{i+1}+x_i)(y_{i+1}-y_i)}, \quad (10)$$

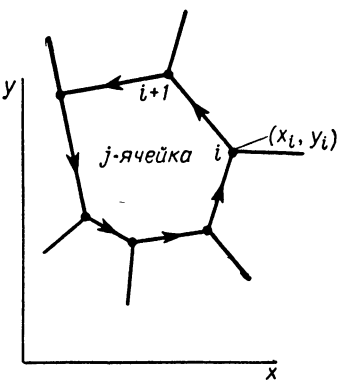


Рис. 2. Показана j-я ячейка общей многоугольной сетки. N вершин с координатами (x_i, y_i) занумерованы в порядке движения против часовой стрелки, $i = 1, 2, \ldots, N$.

$$\left[\frac{\Delta(fu)}{\Delta x}+\frac{\Delta(fv)}{\Delta y}\right]_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} \{[(fu)_{i+1}+(fu)_i](y_{i+1}-y_i)-[(fv)_{i+1}+(fv)_i](x_{i+1}-x_i)\}}{\sum_{i=1}^{N} (x_{i+1}+x_i)(y_{i+1}-y_i)}. \quad (11)$$

Здесь N вершин углов j-й ячейки сетки пронумерованы в направлении против часовой стрелки $i=1, 2, \ldots, N$, а $f_{N+1}=f_1$, $x_{N+1}=x_1$ и т. д.

Теперь посмотрим, как полученные (естественные) аппроксимации (9), (10) позволяют исследовать случаи при $n=3$, 4, т. е. случаи треугольных и прямоугольных ячеек.

В случае $n=3$ стандартная аппроксимация частных производных $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ получится путем построения плоскости, проходящей через три вершины, и определения величин $\Delta f/\Delta x$,

[1]) Очевидно, что если доопределить функции между узлами интерполяцией более высокого порядка (или другого типа), то можно получить различные аппроксимации производных.

$\Delta f/\Delta y$ по значениям $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, вычисленным для некоторой точки этой плоскости. Пусть плоскость, проходящая через точки $(x, y, f)_i$, $i=1, 2, 3$, имеет вид $f=Ax+By+C$, где A, B, C — постоянные. Тогда $f_x=A$, $f_y=B$ и легко убедиться в том, что A совпадает со значением, полученным из (9), а B совпадает со значением из (10).

В случае $n=4$ непосредственная аппроксимация получается путем замены переменных $x=x(a, b)$, $y=y(a, b)$, так что четырехугольник $(x, y)_i$, $i=1, 2, 3, 4$, отображается в прямоугольник

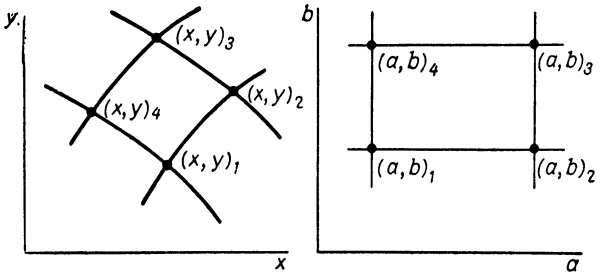


Рис. 3. На четырехугольник в плоскости (x, y) с вершинами $(x, y)_i$, $i=1, 2, 3, 4$, отображается (посредством преобразования $x=x(a, b)$, $y=y(a, b)$) прямоугольник в плоскости (a, b).

Взят прямоугольник со сторонами, параллельными осям a и b, и с вершинами $(a, b)_i$, $i=1, 2, 3, 4$. Точки $(x, y)_i$ являются образами точек a_i, b_i, т. е. $x_i=x(a_i, b_i)$, $y_i=y(a_i, b_i)$.

$(a, b)_i$, $i=1, 2, 3, 4$, в плоскости (a, b) со сторонами, параллельными осям a и b (рис. 3). Далее можно вычислить f_x и f_y через производные по a и b, а именно

$$f_x=\frac{1}{J}(f_a y_b-f_b y_a),\quad f_y=-\frac{1}{J}(f_a x_b-f_b x_a),$$

где J — якобиан преобразования, $J=x_a y_b-x_b y_a$. Используем естественную аппроксимацию производных по a и по b для прямоугольника в плоскости (a, b), т. е.

$$f_a=\frac{(f_2+f_3)-(f_4+f_1)}{2(a_2-a_1)},\quad f_b=\frac{(f_3+f_4)-(f_1+f_2)}{2(b_3-b_2)}.$$

Теперь легко убедиться в том, что результирующая аппроксимация f_x и f_y дает то же самое, что (9) и (10).

Теперь мы установим другое свойство наших конечно-разностных аппроксимаций, рассмотрев уравнение сохранения

$$f_t+(fu)_x+(fv)_y=0 \tag{12}$$

и соответствующее ему конечно-разностное уравнение сохранения, полученное с помощью соотношения (11).

Заметим, что уравнение сохранения (12) обладает следующим свойством.

Теорема 2. *Если* $f=0$ *на границе* ∂D *области* D *в плоскости* (x, y) *и* $f_t+(fu)_x+(fv)_y=0$ *в* D, *то* $\int\int_D f\,dx\,dy=\text{const}$.

Доказательство. Оно вытекает немедленно из нашего предположения, что $f=0$ на ∂D и теоремы о дивергенции. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int_D f\,dx\,dy=\int\int_D f_t\,dx\,dy=-\int\int_D[(fu)_x+(fv)_y]\,dx\,dy=$$

$$=-\oint_{\partial D}[(fu)\,dy-(fv)\,dx]=0.$$

Соответствующая конечно-разностная формулировка дается ниже в теореме 3. Пусть f_j^n означает среднее значение f в j-й ячейке на n-м шаге по времени, и пусть мы аппроксимируем f_t формулой

$$\frac{f_j^{n+1}-f_j^n}{\Delta t}.$$

Тогда, используя (11), найдем, что наша конечно-разностная аппроксимация уравнения (12) имеет вид

$$f_j^{n+1}=f_j^n-\Delta t\left[\frac{\Delta(fu)}{\Delta x}+\frac{\Delta(fv)}{\Delta y}\right]_j^n. \tag{13}$$

Докажем теперь теорему.

Теорема 3. *Пусть* T *означает систему линий, составляющих разностную сетку. Если* $f_j^n=0$ *на границе* ∂T *сетки* T, *то имеет место равенство*

$$\sum_j f_j^n A_j=\text{const}$$

(*как функция* n), *где* A_j — *площадь* j-*й ячейки, а суммирование производится по всем ячейкам области* T.

Доказательство. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что

$$\sum_j f_j^{n+1}A_j=\sum_j f_j^n A_j.$$

Таким образом, согласно (13), нам нужно показать, что

$$\sum_j\left[\frac{\Delta(fu)}{\Delta x}+\frac{\Delta(fv)}{\Delta y}\right]_j^n A_j=0.$$

Используя (11), мы видим, что это уравнение эквивалентно следующему:

$$\sum_j \frac{1}{2} \sum_i^N \{[(fu)_{l+1}+(fu)_l](y_{l+1}-y_l) - [(fv)_{l+1}+(fv)_l](x_{l+1}-x_l)\} = 0 \qquad (14)$$

(здесь следует учесть, что знаменатель

$$\sum_{l=1}^{N} (x_{l+1}+x_l)(y_{l+1}-y_l)$$

в соотношении (11) есть не что иное, как $2A_j$).

Далее, уравнение (14) действительно выполняется, ибо при суммировании по всем ячейкам каждая сторона внутренней ячейки проходится дважды в противоположных направлениях и, таким образом, члены суммы попарно сокращаются. Итак, остаются только члены на границе области ∂T, но они обращаются в нуль, так как по предположению f_j^n равно нулю на границе. Убедившись, что соотношения (9)—(11) приемлемы, перейдем теперь к частному случаю прямоугольной сетки и к конечно-разностной аппроксимации уравнений (1)—(5). При этом мы должны различать регулярные внутренние ячейки и нерегулярные граничные ячейки, образованные пересечением границы жидкости с линиями сетки.

5. Эйлеровы конечно-разностные уравнения для внутренних ячеек сетки

Наша прямоугольная сетка образуется линиями x_k ($k=0, 1, 2, \ldots$) и y_l ($l=0, 1, 2, \ldots$); их пересечение дает узловые точки $x=x_k$, $y=y_l$, k, $l=0, 1, 2, \ldots$ (рис. 4).

Некоторые из зависимых переменных (составляющие количества движения и скорости) наиболее естественно определяются в узловых точках сетки и в точках $(n+1/2)\Delta t$ по времени. Остальные величины (ρ, ε, P) определяются в средних точках сетки

$$(x_{k+1/2,\, l+1/2},\ y_{k+1/2,\, l+1/2}) = \left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2},\ \frac{y_{l+1}+y_l}{2}\right)$$

и в целых точках $n\Delta t$ по времени. Обозначим

$$f\left[x_{k,l},\ y_{k,l},\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right]$$

через $f_{k,l}^{n+1/2}$, а

$$g\left(x_{k+1/2,\, l+1/2},\ y_{k+1/2,\, l+1/2},\ n\Delta t\right)$$

через $g_{k+1/2,\, l+1/2}^{n}$.

Теперь мы выпишем, в частности, выражения для величин

$$M^{n+1/2}_{k,l},\ N^{n+1/2}_{k,l},$$

$$u^{n+1/2}_{k,l},\ v^{n+1/2}_{k,l},\ \rho^{n}_{k+1/2,\,l+1/2},\ \varepsilon^{n}_{k+1/2,\,l+1/2},\ P^{n}_{k+1/2,\,l+1/2}.$$

Кроме того, мы определим выражения для смешанной переменной $q^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}$, которая является искусственной вязкостью (фон Нейман и Рихтмайер [1]) и необходима в конечно-разностных уравнениях для правильного представления ударных волн

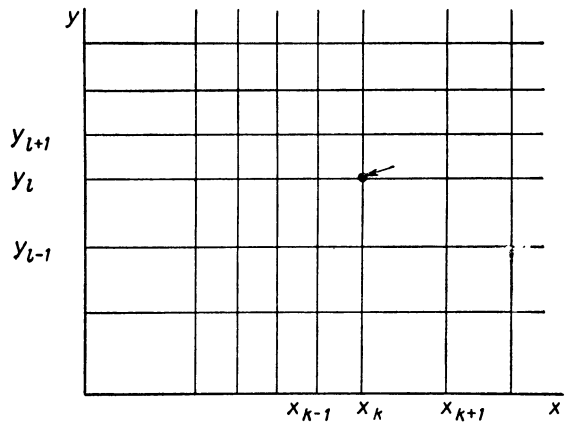


Рис. 4. Прямоугольная сетка, образованная прямыми $x_k = \text{const}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $y_l = \text{const}$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$.

Узловыми точками сетки являются точки пересечения линий $y = y_k$, $x = x_k$, $k, l = 0, 1, 2 \ldots$ Стрелкой показана (k, l) узловая точка.

(если только не используется непосредственный расчет ударных волн или другие способы). Искусственная вязкость (q) размазывает ударную волну на фиксированное число ячеек таким способом, что значения функций меняются непрерывно при переходе через скачок и удовлетворяют условиям сохранения Рэнкина — Гюгонио. Мы возьмем следующее выражение для искусственной вязкости:

$$q = C_0^2 L^2 \rho \begin{cases} [\nabla \cdot \mathbf{U}]^2, & \text{если} \quad \nabla \cdot \mathbf{U} \leqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad \nabla \cdot \mathbf{U} > 0, \end{cases} \tag{15}$$

где C_0^2 — постоянная, слабо зависящая от уравнения состояния среды $(C_0^2 \approx 1)$, L — характерная длина ячейки, в которой вычисляется $q\,(L^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)$.

Для функций, вычисляемых в средних точках ячейки, мы введем следующие определения, основанные на формуле (11):

Определение 1.

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ u^{n+1/2}_{k+1,\,l+1/2}=\frac{1}{2}\left(u^{n+1/2}_{k+1,\,l}+u^{n+1/2}_{k+1,\,l+1}\right),\\ (2)\ v^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1}=\frac{1}{2}\left(v^{n+1/2}_{k+1,\,l+1}+v^{n+1/2}_{k,\,l+1}\right),\end{array}\right\}$$ т. е. среднее значение между известными величинами,

$$(3)\ (fu\,\Delta y)^{n+1/2}_{k+1,\,l+1/2}=$$

$$=\begin{cases} f^{n}_{k+1/2,\,l+1/2}u^{n+1/2}_{k+1,\,l+1/2}\left(y_{l+1}-y_l\right), & \text{если}\quad u^{n+1/2}_{k+1,\,l+1/2}\geqslant 0,\\ f^{n}_{k+3/2,\,l+1/2}u^{n+1/2}_{k+1,\,l+1/2}\left(y_{l+1}-y_l\right), & \text{если}\quad u^{n+1/2}_{k+1,\,l+1/2}\leqslant 0,\end{cases}$$

$$(4)\ (fv\,\Delta x)^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1}=$$

$$=\begin{cases} f^{n}_{k+1/2,\,l+1/2}v^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1}\left(x_{k+1}-x_k\right), & \text{если}\quad \left(v^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1}\right)\geqslant 0,\\ f^{n}_{k+1/2,\,l+3/2}v^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1}\left(x_{k+1}-x_k\right), & \text{если}\quad \left(v^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1}\right)\leqslant 0,\end{cases}$$

$$(5)\ [\nabla\cdot f\mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}=$$

$$=\frac{(fu\,\Delta y)^{n+1/2}_{k+1,\,l+1/2}+(fv\,\Delta x)^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1}-(fu\,\Delta y)^{n+1/2}_{k,\,l+1/2}-(fv\,\Delta x)^{n+1/2}_{k+1/2,\,l}}{\left(x_{k+1}-x_k\right)\left(y_{l+1}-y_l\right)}.$$

Прежде чем переходить к конечно-разностным уравнениям, сделаем замечание об определении дивергенции

$$[\nabla\cdot f\mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}.$$

С физической точки зрения дивергенция имеет следующий интуитивный смысл. Если f рассматривается как ступенчатая функция (постоянная в ячейке), то условия, налагаемые на составляющую скорости в направлении нормали к сторонам ячейки, вызывают ограничения на входящее и выходящее из ячейки значение f в течение шага по времени. (Может показаться более естественным, чтобы через сторону ячейки передавалось некоторое среднее значение f, но это условие привело бы к слегка неустойчивым конечно-разностным уравнениям.) Вопросы устойчивости конечно-разностной схемы приводят к некоторым усложненным алгебраическим уравнениям и не будут здесь рассматриваться. Однако для двух предельных случаев $\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}\gg C^2$ и $C^2\gg\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}$ (где C — местная скорость звука), снова не обсуждая детали, можно легко показать, что для каждой ячейки сетки должны иметь место следующие неравенства:

$$\Delta t<\frac{\Delta x\,\Delta y}{[\Delta y\,|\,u\,|+\Delta x\,|\,v\,|\,]},$$

$$\Delta t<\min\frac{(\Delta x,\,\Delta y)}{C}.$$

В общем случае было найдено, что практически удовлетворительным является следующее ограничение:

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta x\, \Delta y}{\Delta y\, |u| + \Delta x\, |v| + \max(\Delta x, \Delta y)\, C}.$$

Из определения 1 были получены следующие конечно-разностные уравнения, соответствующие уравнениям (3)—(5) и (15):

$$\rho^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2} = \rho^{n}_{k+1/2,\, l+1/2} - \Delta t\, [\Delta \cdot \rho \mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2}, \tag{16}$$

$$q^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} = C_0^2 l^2_{k+1/2,\, l+1/2} \left(\rho^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2} + \rho^{n}_{k+1/2,\, l+1/2}\right) \times$$

$$\times \begin{cases} \left([\Delta \cdot \mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2}\right)^2, & \text{если} \quad [\nabla \cdot \mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} < 0, \\ 0, & \text{если} \quad [\nabla \cdot \mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} > 0, \end{cases} \tag{17}$$

$$\varepsilon^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2} = \varepsilon^{n}_{k+1/2,\, l+1/2} -$$

$$- \Delta t \left\{ [\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(P^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} + q^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times [\nabla \cdot \mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} \right\}, \tag{18}$$

$$P^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2} =$$

$$= P\left(\rho^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2},\ \varepsilon^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2}\right). \tag{19}$$

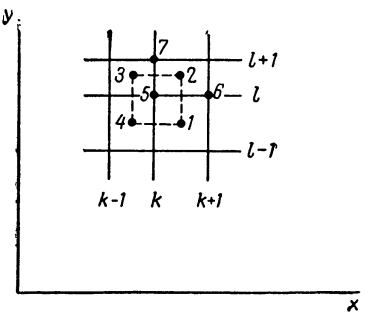


Рис. 5. Обозначения, используемые в определении 2.

Область, ограниченная штриховой линией с узлами 1, 2, 3, 4, соответствует ячейке для количества движения.

Значение величины $P^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2}$, входящее в (18), обычно получается с помощью одной итерации путем использования $P^{n}_{k+1/2,\, l+1/2}$ как первого приближения и последующего осреднения результата первого приближения с найденным значением $P^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2}$.

Теперь рассмотрим переменные $M = \rho u$ и $N = \rho v$, центрированные в узловых точках (x_k, y_l). Как и выше, мы введем некоторые определения, основанные на соотношениях (9)—(11) с учетом обозначений, указанных на рис. 5. Определим величины

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), \quad y_1 = \frac{1}{2}(y_{l-1} + y_l)$$

и т. д., а также величины

$$u_1 = \frac{1}{4}(u_{k,\, l-1} + u_{k+1,\, l-1} + u_{k+1,\, l} + u_{k,\, l}),$$

$$v_1 = \frac{1}{4}(v_{k,\, l-1} + v_{k+1,\, l-1} + v_{k+1,\, l} + v_{k,\, l}).$$

Введем обозначение $\bar{P}^n = P^n + q^{n-1/2}$.

Определение 2

(1) $$\left(\frac{\Delta \bar{P}}{\Delta x}\right)^n_{k,\,l} = \frac{1}{2}\,\frac{\bar{P}^n_1 + \bar{P}^n_2 - \bar{P}^n_3 - \bar{P}^n_4}{x_1 - x_4},$$

(2) $$\left(\frac{\Delta \bar{P}}{\Delta y}\right)^n_{k,\,l} = \frac{1}{2}\,\frac{\bar{P}^n_2 + \bar{P}^n_3 - \bar{P}^n_1 - \bar{P}^n_4}{y_2 - y_1}$$

(3)[1] $$(f u\,\Delta y)^{n-1/2}_{k+1/2,\,l} =$$

$$= (y_2 - y_1)\,\frac{\left(u^{n-1/2}_5 + u^{n-1/2}_6\right)}{2}\begin{cases} f^{n-1/2}_5, & \text{если } \left(u^{n-1/2}_5 + u^{n-1/2}_6\right) \geqslant 0, \\ f^{n-1/2}_6, & \text{если } \left(u^{n-1/2}_5 + u^{n-1/2}_6\right) < 0, \end{cases}$$

(4)[2] $$(f v\,\Delta x)^{n-1/2}_{k,\,l+1/2} =$$

$$= (x_2 - x_3)\,\frac{\left(v^{n-1/2}_5 + v^{n-1/2}_7\right)}{2}\begin{cases} f^{n-1/2}_5, & \text{если } \left(v^{n-1/2}_5 + v^{n-1/2}_7\right) \geqslant 0, \\ f^{n-1/2}_7, & \text{если } \left(v^{n-1/2}_5 + v^{n-1/2}_7\right) < 0, \end{cases}$$

(5) $$[\nabla \cdot f\mathbf{U}]^{n-1/2}_{k,\,l} =$$

$$= \frac{(f u\,\Delta y)^{n-1/2}_{k+1/2,\,l} + (f v\,\Delta x)^{n-1/2}_{k,\,l+1/2} - (f u\,\Delta y)^{n-1/2}_{k-1/2,\,l} - (f v\,\Delta x)^{n-1/2}_{k,\,l-1/2}}{(x_1 - x_4)\,(y_2 - y_1)}.$$

Тогда конечно-разностные уравнения для (1) и (2) запишутся так:

$$M^{n+1/2}_{k,\,l} = M^{n-1/2}_{k,\,l} - \Delta t\left\{[\nabla \cdot M\mathbf{U}]^{n-1/2}_{k,\,l} + \left(\frac{\Delta \bar{P}}{\Delta x}\right)^n_{k,\,l}\right\}, \tag{20}$$

$$N^{n+1/2}_{k,\,l} = N^{n-1/2}_{k,\,l} - \Delta t\left\{[\nabla \cdot N\mathbf{U}]^{n-1/2}_{k,\,l} + \left(\frac{\Delta \bar{P}}{\Delta y}\right)^n_{k,\,l}\right\}. \tag{21}$$

Значения u и v определяются по формулам

$$u^{n+1/2}_{k,\,l} = \frac{M^{n+1/2}_{k,\,l}}{\rho^n_{k,\,l}}, \qquad v^{n+1/2}_{k,\,l} = \frac{N^{n+1/2}_{k,\,l}}{\rho^n_{k,\,l}},$$

где

$$\rho^n_{k,\,l} = \frac{1}{4}\left[\rho^n_{k+1/2,\,l+1/2} + \rho^n_{k-1/2,\,l+1/2} + \rho^n_{k-1/2,\,l-1/2} + \rho^n_{k+1/2,\,l-1/2}\right].$$

Ясно, что соотношения (9)—(11) были необходимы при получении наших конечно-разностных уравнений для внутренних ячеек, причем регулярность прямоугольной сетки обусловила переход к этим уравнениям наиболее естественным путем. Таким образом, наша цель состояла в том, чтобы показать «естествен-

[1] Можно использовать $(u_1+u_2)/2$ вместо $(u_5+u_6)/2$.
[2] Можно использовать $(v_2+v_3)/2$ вместо $(v_5+v_7)/2$.

ность» соотношений (9)—(11) и найти способ, необходимый для получения конечно-разностных уравнений в случае произвольной аппроксимирующей сетки (т. е. не обязательно прямоугольной). Здесь интересно также заметить, что конечно-разностные уравнения для внутренней части области представляют собой частный случай более общих уравнений для граничных точек, которые мы изучаем в следующем параграфе.

6. Гидродинамические уравнения сохранения при произвольной скорости системы координат относительно жидкости

Прежде чем перейти к конечно-разностным уравнениям для граничных ячеек, мы рассмотрим более общую систему дифференциальных уравнений, характеризующих движение жидкости в пространстве переменных x и y, которые не являются ни эйлеровыми, ни лагранжевыми координатами, а относятся к произвольно движущейся относительно жидкости системе координат. В нашем частном случае граница жидкости является лагранжевой линией (в том смысле, что она движется вместе с жидкостью), и эта граница движется относительно стационарной эйлеровой сетки, следовательно, в граничной области мы имеем смешанную систему переменных. Будем считать x и y функциями независимых переменных a, b, t и введем величины $\omega = u - x_t$, $\sigma = v - y_t$, $\mathbf{\Omega} = \omega\mathbf{i} + \sigma\mathbf{j}$. Можно показать, что полная производная по времени записывается так:

$$\dot{F} = F_t + \omega F_x + \sigma F_y = F_t + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla F. \tag{22}$$

Заметим, что в случае $x_t = y_t = 0$ это соотношение дает производную по времени в переменных Эйлера, а при $x_t = u$, $y_t = v$ оно дает предельный случай лагранжевой производной F_t.

Обычные гидродинамические уравнения имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{u} + \frac{1}{\rho} P_x = 0, \quad \dot{v} + \frac{1}{\rho} P_y = 0, \\ \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \dot{e} + \frac{1}{\rho} P \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad P(\rho, e) = 0, \end{gathered} \tag{23}$$

где e — внутренняя энергия на единицу массы.

Система (23) не имеет формы уравнений сохранения, аналогичной системе (1)—(4), которая использовалась для внутренних узлов сетки. Мы будем использовать тождество (26) приводимой ниже теоремы 4 для того, чтобы привести уравнения к нужному виду.

Теорема 4. *Если* $J=((x, y)/(a, b))$ *— якобиан из производных функций* x, y *по* a, b *и если* ρ *удовлетворяет уравнению* $\dot{\rho}+\rho\nabla\cdot\mathbf{U}=0$, *то имеем*[1])

$$\nabla\cdot\mathbf{U}\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}+\frac{J_t}{J}, \tag{24}$$

$$\rho_t+\rho\frac{J_t}{J}+\nabla\cdot\rho\boldsymbol{\Omega}=0, \tag{25}$$

$$\rho\dot{f}\equiv(\rho f)_t+(\rho f)\frac{J_t}{J}+\nabla\cdot(\rho f)\,\boldsymbol{\Omega}, \tag{26}$$

где f *— любая достаточно дифференцируемая функция, а* $\boldsymbol{\Omega}=\omega\mathbf{i}+\sigma\mathbf{j}$.

Доказательство. Имеет место соотношение

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}=(u-\dot{x})_x+(v-y)_y=\nabla\cdot\mathbf{U}-\{(x_t)_x+(y_t)_y\}.$$

Воспользовавшись теперь формулами неявного дифференцирования

$$f_x=\frac{1}{J}\left\{\left(\frac{f, y}{a, b}\right)\right\},\quad f_y=\frac{-1}{J}\left\{\left(\frac{f, x}{a, b}\right)\right\},$$

получим равенства

$$(x_t)_x+(y_t)_y=\frac{1}{J}\left\{\left(\frac{x_t, y}{a, b}\right)+\left(\frac{x, y_t}{a, b}\right)\right\}=\frac{J_t}{J}.$$

Следовательно, имеет место (24), т. е.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}=\nabla\cdot\mathbf{U}-\frac{J_t}{J}.$$

Далее, соотношение (25) следует непосредственно из (24) и уравнения (22); таким образом, получаем выражение

$$\rho_t+\rho\frac{J_t}{J}+\nabla\cdot\rho\boldsymbol{\Omega}=\rho_t+\boldsymbol{\Omega}\cdot(\nabla\rho)+\rho\left[\frac{J_t}{J}+\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}\right]=\dot{\rho}+\rho\nabla\cdot\mathbf{U},$$

которое равно нулю по условию теоремы.

Аналогично, выписывая правую часть (26) и используя (22), (24), (25), получаем

$$(\rho f)_t+(\rho f)\frac{J_t}{J}+\nabla\cdot(\rho f)\,\boldsymbol{\Omega}=\rho f_t+f\rho_t+\rho\boldsymbol{\Omega}\cdot(\nabla f)+$$

$$+f\nabla\cdot\rho\boldsymbol{\Omega}+\rho f\frac{J_t}{J}=\rho[f_t+\boldsymbol{\Omega}\cdot(\nabla f)]+f\left[\rho_t+\rho\frac{J_t}{J}+\nabla\cdot\rho\boldsymbol{\Omega}\right]=\rho\dot{f}.$$

Теперь получим уравнения сохранения. Умножая первое, второе и четвертое уравнения системы (23) на ρ и используя то-

[1]) Основное тождество, соответствующее (24) в осесимметричном случае, запишется так:

$$\nabla\cdot\mathbf{U}\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}+\frac{(RJ)_t}{(RJ)},\quad R=(x^2+y^2)^{1/2}.$$

ждество (26), получаем следующую систему (уравнение (25) уже имеет нужную форму):

$$M_t + M\frac{J_t}{J} + \nabla \cdot M\boldsymbol{\Omega} + P_x = 0, \tag{27}$$

$$N_t + N\frac{J_t}{J} + \nabla \cdot N\boldsymbol{\Omega} + P_y = 0, \tag{28}$$

$$\rho_t + \rho\frac{J_t}{J} + \nabla \cdot \rho\boldsymbol{\Omega} = 0, \tag{29}$$

$$\varepsilon_t + \varepsilon\frac{J_t}{J} + \nabla \cdot \varepsilon\boldsymbol{\Omega} + P\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{30}$$

$$P = P(\rho, \varepsilon). \tag{31}$$

В частности, видно, что если x и y не зависят от времени, то $J_t = 0$, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{U}$ и получаются уравнения в переменных Эйлера (1)—(5). Если же x и y движутся вместе с жидкостью ($x_t = u$, $y_t = v$, тогда $\boldsymbol{\Omega} = 0$), то из (27)—(31) получаются уравнения в переменных Лагранжа, записанные в форме уравнений сохранения.

Конечно-разностные уравнения для граничной ячейки получаются из уравнений (27)—(31) при простых частных предположениях, а именно надо положить $\boldsymbol{\Omega}$ равным $\mathbf{U}$ на сторонах граничной ячейки, которые принадлежат к эйлеровой сетке, и положить $\boldsymbol{\Omega}$ равным нулю на подвижной лагранжевой границе. Имея это в виду, мы будем определять конечно-разностные аппроксимации уравнений (27)—(31) только для этого упомянутого частного случая. Прежде чем обратиться к полным уравнениям, рассмотрим сначала конечно-разностные аналоги двух первых членов в уравнениях (27)—(30).

7. *Общие вопросы расчета граничных ячеек*

Рассмотрим специальный предельный случай уравнения сохранения массы (29) для лагранжевых переменных (т. е. при $\boldsymbol{\Omega} = 0$)

$$\rho_t + \rho\frac{J_t}{J} = 0. \tag{32}$$

Записывая (32) в конечных разностях, для некоторой точки (x_i, y_i) из области R получаем

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \rho_i^n\frac{J_i^{n+1} - J_i^n}{J_i^{n+1}} = \rho_i^n\left(1 - \frac{J_i^{n+1} - J_i^n}{J_i^{n+1}}\right) = \rho_i^n\frac{J_i^n}{J_i^{n+1}} \tag{33}$$

или $\rho_i^{n+1}J_i^{n+1} = \rho_i^n J_i^n$, что представляет собой закон сохранения массы (т. е. условие, что величина ρJ не зависит от времени),

сформулированный в лагранжевых переменных. Это соотношение показывает, что с ростом времени при вычислении знаменателя дроби J_t/J следует брать величину J^{n+1} вместо центрированного значения $J^{n+1/2}$. Такое положение остается верным для любого из уравнений (27)—(30), поэтому мы хотим теперь дать конечно-разностную интерпретацию якобиана J^n.

В следующей теореме якобиан интерпретируется как площадь граничной ячейки [1]).

Теорема 5. *Если область r плоскости a, b отображается на область R плоскости x, y с помощью преобразования $x=x(a, b, t)$, $y=y(a, b, t)$ и если существует положительный всюду в области R якобиан преобразования $J(x, y)=(x, y)/(a, b)$, то найдется точка (ξ, η) в R, такая, что*

$$J(\xi, \eta)=\int\limits_R\int dx\,dy\Big/\int\limits_r\int da\,db. \tag{34}$$

Доказательство. По предположению $|J|=J$, и поэтому $\int\limits_R\int dx\,dy=\int\limits_r\int J\,da\,db$. По теореме о среднем значении существует точка (ξ, η) в R, такая, что $J(\xi, \eta)\int\limits_r\int da\,db=$ $=\int\limits_r\int J\,da\,db$. Отсюда следует (34).

Следствие. *Для уравнений гидродинамики всегда можно так выбрать лагранжевы переменные (a, b), что якобиан $J(x, y)$ будет положительным.*

Доказательство. Справедливость следствия устанавливается в предположении, что за лагранжеву координату принимается начальное положение жидкого элемента $[x(a, b, 0)=a$, $y(a, b, 0)=b]$. Тогда $J^0(x, y)=J[x(a, b, 0), y(a, b, 0)]=J(a, b)=1$, и из закона сохранения масс имеем $\rho J=\rho^0 J^0=\rho^0$, где ρ^0 — начальная плотность $\rho(a, b, 0)$. Поскольку плотность всегда положительна, то отсюда следует, что $J(x, y)>0$.

Из (33) видно, что в конечно-разностных уравнениях встречается только отношение якобианов. Следовательно, рассматриваемое пространство a, b и начальное значение J^0 якобиана можно выбрать произвольно. В конечно-разностных уравнениях мы будем отождествлять якобиан J^n с площадью граничной

[1]) Для осесимметричного случая J заменяется произведением RJ и этот член RJ интерпретируется как объем вращения граничной ячейки, причем $R=(x^2+y^2)^{1/2}$.

ячейки на n-м шаге по времени. Для расчета граничных ячеек должны быть определены некоторые последовательности; они определяются в следующем параграфе.

8. *Граничные ячейки и граничные последовательности*

Граничные ячейки образуются при пересечении ломаной линии лагранжевой границы (т. е. мы предполагаем, что граница определяется ломаной линией, которая движется вместе с жидкостью) с фиксированной эйлеровой сеткой. Возникающие граничные ячейки будут очень часто оказываться односвязными многоугольниками, стороны которых образуются частично первоначальной фиксированной сеткой и частично ломаной лагранжевой линией. Возможно, что лагранжева граница будет разбивать эйлерову сетку на несколько отдельных кусков, и эту возможность следует предусмотреть в конечно-разностных уравнениях. Для того чтобы сделать описание граничных ячеек более точным, мы введем следующие определения.

Предположим, что лагранжева ломаная линия параметризуется величиной $s (0<s<1)$ таким образом, что с ростом s лагранжева линия пересекает эйлерову сетку, оставляя область слева. Обозначим лагранжеву линию на n-м шаге по времени через $L^n(s)$, причем

$$L^n(s) = [<x^n(s),\ y^n(s)> \mid 0<s<1 \mid]. \tag{35}$$

Рассмотрим множество точек A, состоящее из угловых точек (a) линии $L^n(s)$ и точек (b) пересечения $L^n(s)$ с линиями разбиения эйлеровой сетки. Пусть члены множества A расположены в порядке возрастания s и составляют последовательность, которую обозначим через $\{L_l^n\}$.

Так как эйлерова область, занятая жидкостью в плоскости x, y (с границей $L^n(s)$) берется такой, что она остается слева, когда $L^n(s)$ обходится в направлении возрастания s, то эту эйлерову область (включая границу $L^n(s)$) мы обозначим через E^n.

Пусть $G_{k,\,l}$ — узловые точки с координатами $(x_k,\ y_k)$. Рассмотрим прямоугольную ячейку сетки с узлами $G_{k,\,l}$, $G_{k+1,\,l}$, $G_{k+1,\,l+1}$, $G_{k,\,l+1}$. Обозначим через $C^n(k, l)$ ту часть этой ячейки, которая является частью E^n. Эта часть ячейки $C^n(k, l)$ будет граничной ячейкой, если часть ее границы $\partial C^n(k, l)$ содержится в $L^n(s)$ (т. е. $\partial C^n(k,\ l) \cap L^n(s) \neq 0$). Так как $L^n(s)$ — ломаная линия, то граничные ячейки состоят из одного или большего количества многоугольников и для построения конечно-разностных уравнений нам необходимо упорядочить их вершины (угловые точки границы этих многоугольных областей), расположив их

в порядке обхода против часовой стрелки. Полученные последовательности (для каждой ломаной) называются граничными последовательностями и обозначаются следующим образом:

$$\{V_l^n(k, l, j)\}_{l=1, 2, \ldots, I_j^n},\ j=1, 2, \ldots, \tag{36}$$

где индекс j указывает на j-й многоугольник, ограниченный линией $\partial C^n(k, l)$; I_j^n-1 — число вершин j-о многоугольника; для

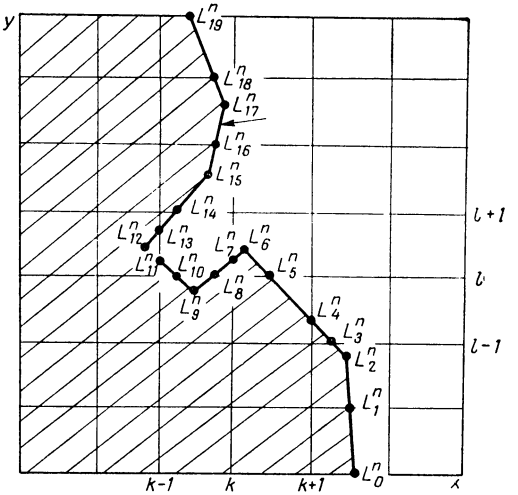


Рис. 6. Эйлерова область с лагранжевой границей.

Ломаная линия, соединяющая точки L_0^n, L_2^n, L_6^n, L_9^n, L_{12}^n, L_{15}^n, L_{17}^n и L_{19}^n, является лагранжевой границей $L^n(s)$ для n-го шага по времени.

Заштрихованная область, включая границу $L^n(s)$, представляет собой часть области, занятой жидкостью, где используются эйлеровы переменные (область E^n); стрелкой показана лагранжева линия $L(s)$ для n-го шага во времени.

построения контурных интегралов, очевидно, последние и первые вершины должны совпадать, т. е. $V_1^n(k, l, j)=V_{I_j^n}^n(k, l, j)$. Обозначим, координаты этих вершин таким образом:

$$V_l^n(k, l, j)=\left(x_l^n(k, l, j),\ y_l^n(k, l, j)\right). \tag{37}$$

Мы не будем заниматься деталями построения граничных последовательностей (36), а только отметим, что точки $V_l^n(k, l, j)$ вместе с некоторыми из узловых точек $G_{k, l}$, $G_{k+1, l}$, $G_{k+1, l+1}$, $G_{k, l+1}$ представляют собой точки последовательности $\{L_l^n\}$. Они легко определяются, если начать с первого пересечения L_l^n с линией $\partial C^n(k, l)$ и проходить вдоль $L^n(s)$ в направлении против

часовой стрелки (т. е. в направлении увеличения s) до тех пор, пока $L^n(s)$ не выйдет из $C^n(k, l)$, а затем двигаться вдоль $\partial C^n(k, l)$ в направлении против часовой стрелки. Граничная последовательность включает все узловые точки и точки L_i^n, которые встречаются при обходе до тех пор, пока не достигается

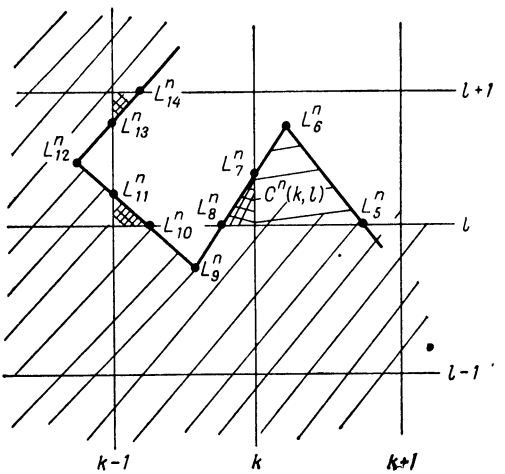


Рис. 7. Показана увеличенная центральная часть рис. 6. $\partial C\,(k,\ l)$ — ломаная с вершинами L_5^n, L_6^n, L_7^n, $G_{k,\,l}$. Граничная последовательность, связанная с линией $\partial C^n\,(k,\ l)$, имеет следующий вид:

$$\left\{V_i^n\,(k,\ l,\ 1)\right\}_{i=1,\,2,\,\ldots,\,5}=\left\{L_5^n,\ L_6^n,\ L_7^n,\ G_{k,\,l},\ L_5^n\right\}.$$

$\partial C^n\,(k-1,\ l)$ состоит из трех ломаных со следующими вершинами: (1) L_7^n, L_8^n, $G_{k,\,l}$; (2) L_{10}^n, L_{11}^n, $G_{k-1,\,l}$; (3) L_{13}^n, L_{14}^n, $G_{k-1,\,l+1}$. Имеются три граничные последовательности, связанные с $\partial C^n\,(k-1,\ l)$, а именно:

$$\left\{V_i^n\,(k-1,\ l,\ 1)\right\}_{i=1,\,2,\,3,\,4}=\left\{L_7^n,\ L_8^n,\ G_{k,\,l},\ L_7^n\right\},$$

$$\left\{V_i^n\,(k-1,\ l,\ 2)\right\}_{i=1,\,2,\,3,\,4}=\left\{L_{10}^n,\ L_{11}^n,\ G_{k-1,\,l},\ L_{10}^n\right\},$$

$$\left\{V_i^n\,(k-1,\ l,\ 3)\right\}_{i=1,\,2,\,3,\,4}=\left\{L_{13}^n,\ L_{14}^n,\ G_{k-1,\ l+1},\ L_{13}^n\right\}.$$

$\partial C^n\,(k-1,\ l-1)$ — ломаная с вершинами L_8^n, L_9^n, L_{10}^n, $G_{k-1,\,l}$, $G_{k-1,\,l-1}$, $G_{k,\ l-1}$, $G_{k,\,l}$; имеется одна граничная последовательность, связанная с ней, а именно

$$\left\{V_i^n\,(k-1,\ l-1,\ 1)\right\}_{i=1,\,2,\,\ldots,\,8}=\left\{L_8^n,\ L_9^n,\ L_{10}^n,\ G_{k-1,\,l},\ G_{k-1,\,l-1},\ G_{k,\,l-1},\ G_{k,\,l},\ L_8^n\right\},$$

начало L_1^n. Эти точки L_i^n и узловые точки образуют первую $(j=1)$ граничную последовательность, и этот процесс следует повторить для других (или любых) L_i^n вместе с $\partial C^n\,(k,\ l)$. Частные случаи показаны на рис. 6 и 7.

Для записи дивергентных выражений в граничных конечно-разностных уравнениях необходимо определить относительную скорость $\Omega=\omega\mathbf{i}+\sigma\mathbf{j}$ в каждой вершине последовательности $V_l^n(k, l, j)$ или среднее значение Ω между значениями в точках $V_l^n(k, l, j)$ и $V_{l+1}^n(k, l, j)$. Если мы обозначим это среднее значение скорости через $\Omega_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j)$, то тогда последовательности составляющих ω, σ векторов $\Omega_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j)$ можно назвать граничными последовательностями или просто последовательностями и обозначить следующим образом:

$$\{\omega_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j)\}_{l=0, 1, \ldots, I_j^n-1}, \quad \{\sigma_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j)\}_{l=0, 1, \ldots, I_j^n-1}. \tag{38}$$

Как отмечалось ранее, если отрезок линии, соединяющей вершины $V_l^n(k, l, j)$ и $V_{l+1}^n(k, l, j)$, является частью лагранжевой линии $L^n(s)$, то $\omega_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j)=\sigma_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j)=0$. Если же отрезок линии представляет собой часть эйлеровой сетки, то относительная скорость совпадает со скоростью жидкости, т. е.

$$\omega_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j)=u_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j),$$
$$\sigma_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j)=v_{l+1/2}^{n+1/2}(k, l, j).$$

При обсуждении граничных ячеек мы ввели в рассмотрение ячейки $C^n(k, l)$, в которых определяются переменные ρ, q, s, P, т. е. те переменные, для которых предполагается, что они имеют постоянное значение во всей области $C^n(k, l)$. Составляющие количества движения считаются постоянными в ячейках сдвинутой сетки, образуемой пересечением линий

$$x_{k+1/2}=\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1}), \quad y_{l+1/2}=\frac{1}{2}(y_l+y_{l+1}).$$

Если мы обозначим узловые точки этой сетки через $G_{k+1/2,\, l+1/2}=(x_{k+1/2},\, y_{l+1/2})$, а через $C^n(k+1/2,\, l+1/2)$ — общую часть прямоугольника $G_{k+1/2,\, l+1/2}, G_{k-1/2,\, l+1/2}, G_{k-1/2,\, l-1/2}, G_{k+1/2, l-1/2}$ и области E^n, то величины M и N определяются (как постоянные) в ячейках $C^n(k+1/2,\, l+1/2)$. Следовательно, мы имеем граничные ячейки для количества движения (т. е. ячейки $C^n(k+1/2,\, l+1/2)$, часть границы которых $\partial C^n(k+1/2,\, l+1/2)$ совпадает с $L^n(s)$). Теперь необходимо построить граничные последовательности для количества движения, которые мы обозначим через

$$\left\{V_l^n\left(k+\frac{1}{2},\, l+\frac{1}{2},\, j\right)\right\}_{l=1, 2, \ldots, I_j^n(k+1/2,\, l+1/2)}, \tag{39}$$

и граничные последовательности для скоростей, которые обозначаются следующим образом:

$$\left\{\omega^{n+1/2}_{i+1/2}\left(k+\frac{1}{2},\ l+\frac{1}{2}\right)\right\}_{i=0,\ 2,\ \ldots,\ I^n_j(k+1/2,\ l+1/2)-1}, \tag{40}$$

$$\left\{\sigma^{n+1/2}_{i+1/2}\left(k+\frac{1}{2},\ l+\frac{1}{2}\right)\right\}_{i=0,\ 2,\ \ldots,\ I^n_j(k+1/2,\ l+1/2)-1}.$$

Эти последовательности определяются для ячеек $C^n(k+1/2,\ l+1/2)$, так же как определялись последовательности (37) и (38) для ячеек $C^n(k, l)$. Помимо последовательностей (39) и (40), уравнения количества движения включают градиент давления, и поэтому необходимо построить последовательность для суммарного давления $\bar{P}=P+q$, обозначаемую через

$$\left\{\bar{P}^n_i\left(k+\frac{1}{2},\ l+\frac{1}{2}\right)\right\}_{i=1,\ 2,\ \ldots,\ I^n_j(k+1/2,\ l+1/2)}, \tag{41}$$

где $\bar{P}^n_i(k+1/2,\ l+1/2)$ — сумма давления и искусственной вязкости в области E^n в точках V^n_i $(k+1/2,\ l+1/2)$ [1]).

9. *Граничные конечно-разностные уравнения для переменных* (ρ, ε *и др.*), *которые центрируются в граничных ячейках* $C^n(k, l)$

Сначала рассмотрим конечно-разностные уравнения в граничных ячейках для переменных ρ, q, ε, P, которые центрируются в ячейках $C^n(k, l)$ (т. е. для тех переменных, которые предполагаются постоянными в ячейках $C^n(k,\ l)$ на каждом шаге по времени). Предположим, что граничные последовательности (36) и (38) определены и нам нужно получить конечно-разностную аппроксимацию для якобиана J (который по (34) равен площади $C^n(k, l)$) и для дивергенции произведения любой ступенчатой функции, постоянной в $C^n(k, l)$, на относительную скорость $\boldsymbol{\Omega}$ (т. е. для выражения вида $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{\Omega})$). Заметим, что тогда величина $\nabla\cdot\mathbf{U}$ определяется из основного тождества (24).

Будем считать, что мы имеем дело с некоторой граничной ячейкой $C^n(k, l)$, которая образована $j^n(k, l)$ многоугольными

[1]) В действительности для тех точек $V^n_i(k+1/2,\ l+1/2)$, которые являются вершинами L^n_i лагранжевой линии $L^n(s)$, мы должны брать граничное давление в соответствии с условием неразрывности давления при переходе через контактный разрыв, но практически это сделать трудно; было показано, что приемлемо использовать давление, взятое из эйлеровой области.

областями, и предположим, что переменные V, x, y, ω, σ и т. д. относятся к ячейке $C^n(k, l)$ (т. е. для $x_i^n(k, l, j)$ будем писать $x_l^n(j)$ и т. д.). Соответственно с этим можем записать

$$J^n_{k+1/2,\, l+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j^n(k,\, l)} \sum_{i=1}^{i^n(j)} (x^n_{i+1}(j) + x^n_i(j))(y^n_{i+1}(j) - y^n_i(j)), \quad (42)$$

где индекс $k+1/2$, $l+1/2$ используется для получения соответствия с обозначениями, принятыми в уравнениях для внутренней части (имеются в виду зависимые переменные, которые для нетраничных ячеек центрированы по пространству с помощью средних точек $k+1/2$, $l+1/2$ для эйлеровых ячеек).

Для аппроксимации величины $\nabla \cdot f\mathbf{\Omega}$ заметим, что, согласно (11), рассматриваемая величина состоит из суммы членов вида

$$(f\omega)_{i+1/2}(y_{i+1} - y_i) - (f\sigma)_{i+1/2}(x_{i+1} - x_i).$$

Так как величины $\omega_{i+1/2}$, $\sigma_{i+1/2}$ были уже определены, то следует определить величину $f_{i+1/2}$. Как уже указывалось ранее, относительные скорости ω и σ равны нулю на лагранжевых линиях $L^n(s)$ и равны u или v для других отрезков ломаной линии, образующих границу $C^n(k, l)$. Эти отрезки линий состоят из частей сторон исходной прямоугольной эйлеровой сетки и, следовательно, являются или горизонтальными, или вертикальными отрезками. Вдоль горизонтальных отрезков $y_{i+1} - y_i = 0$, а вдоль вертикальных отрезков $x_{i+1} - x_i = 0$. Таким образом, величину $f_{i+1/2}$ нужно определять только в тех случаях, когда $\omega \Delta y \neq 0$ и $\sigma \Delta x \neq 0$. Имеются четыре возможности для каждого из этих неравных нулю членов.

Пусть

$$\omega_{i+1/2}(y_{i+1} - y_i) \neq 0, \quad u_{i+1/2}(y_{i+1} - y_i) \neq 0,$$

тогда $x_i = x_k$ или $x_i = x_{k+1}$.

Обозначая через $f^n_{k,\,l}$ значение функции f в ячейке $C^n(k, l)$, получаем

$$(f\omega)^{n+1/2}_{i+1/2}(j) = \left\{ \begin{array}{lll} f^n_{k-1,\,l}, & \text{если } x_i = x_k, & u^{n+1/2}_{i+1/2} > 0 \\ f^n_{k,\,l}, & \text{если } x_i = x_k, & u^{n+1/2}_{i+1/2} < 0 \\ f^n_{k,\,l}, & \text{если } x_i = x_{k+1}, & u^{n+1/2}_{i+1/2} > 0 \\ f^n_{k+1,\,l}, & \text{если } x_i = x_{k+1}, & u^{n+1/2}_{i+1/2} < 0 \end{array} \right\} \{u^{n+1/2}_{i+1/2}(j)\}. \quad (43)$$

Аналогично, если $\sigma\Delta x\neq 0$, $v\Delta x\neq 0$, тогда $y_i=y_l$ или $y_i=y_{l+1}$, и поэтому

$$(f\sigma)^{n+1/2}_{l+1/2}(j)=\left\{\begin{array}{llll} f^n_{k,\,l-1}, & \text{если} & y_i=y_l, & v^{n+1/2}_{l+1/2}>0\\ f^n_{k,\,l}, & \text{если} & y_i=y_l, & v^{n+1/2}_{l+1/2}<0\\ f^n_{k,\,l}, & \text{если} & y_i=y_{l+1}, & v^{n+1/2}_{l+1/2}>0\\ f^n_{k,\,l+1}, & \text{если} & y_i=y_{l+1}, & v^{n+1/2}_{l+1/2}<0 \end{array}\right\}\{v^{n+1/2}_{j+1/2}(j)\}. \quad (44)$$

Из соотношений (42)—(44) (используя индексы $k+1/2$ и $l+1/2$, как и в выражении для якобиана) находим выражение для дивергенции

$$[\nabla\cdot f\Omega]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}=$$
$$=\frac{1}{J^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}}\sum_{j=1}^{j^{n+1}(k,\,l)}\sum_{i=1}^{i^n(j)}\{(f\omega)^{n+1/2}_{i+1/2}(j)\left[y^{n+1/2}_{i+1}(j)-y^{n+1/2}_i(j)\right]-$$
$$-(f\sigma)^{n+1/2}_{i+1/2}(j)\left[x^{n+1/2}_{i+1}(j)-x^{n+1/2}_i(j)\right]\}. \quad (45)$$

Подставляя $f\equiv 1$ и учитывая (24), получаем

$$[\nabla\cdot\mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}=[\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}+\frac{J^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}-J^n_{k+1/2,\,l+1/2}}{\Delta t J^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}}. \quad (46)$$

Теперь мы можем получить конечно-разностную аппроксимацию для уравнений (29), (30) и для q (величина q для граничных ячеек по-прежнему задается формулой (15)). Учитывая замечания по поводу формулы (32), находим

$$\rho^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}=\rho^n_{k+1/2,\,l+1/2}\frac{J^n_{k+1/2,\,l+1/2}}{J^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}}-\Delta t[\nabla\cdot\rho\boldsymbol{\Omega}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}, \quad (47)$$

$$q^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}=C_0^2\frac{\left(\rho^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}+\rho^n_{k+1/2,\,l+1/2}\right)}{2}\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{ll}\left([\nabla\cdot\mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}\right)^2, & \text{если}\quad [\nabla\cdot\mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}<0,\\ 0, & \text{если}\quad [\nabla\cdot\mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}\geqslant 0,\end{array}\right. \quad (48)$$

$$\varepsilon^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}=\varepsilon^n_{k+1/2,\,l+1/2}\frac{J^n_{k+1/2,\,l+1/2}}{J^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}}-$$
$$-\Delta t\{[\Delta\cdot\varepsilon\boldsymbol{\Omega}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}+\bar{P}^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}[\nabla\cdot\mathbf{U}]^{n+1/2}_{k+1/2,\,l+1/2}\}, \quad (49)$$

где $\bar{P}=P+q$, а величина $P^{n+1/2}$ находится путем итерации с использованием P^n в качестве первого приближения

$$P^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}=P\left(\rho^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2},\ \varepsilon^{n+1}_{k+1/2,\,l+1/2}\right). \quad (50)$$

Особый случай возникает тогда, когда площадь $J^n_{k+1/2,\, l+1/2}$ ячейки $C^n(k, l)$ становится малой по сравнению с площадью исходной эйлеровой ячейки. Если бы при расчете граничных ячеек получилось, что $J^n_{k+1/2,\, l+1/2} \to 0$, то тогда оказалось бы в силу условия устойчивости, что интервал времени должен тоже стремиться к нулю. Чтобы избежать этого, граничная ячейка $C^n(k, l)$ объединяется с соседней ячейкой, т. е. $C^n(k, l)$ и одна из ее соседних ячеек комбинируются и образуют одну новую граничную ячейку.

Этот процесс мы называем *объединением*; из-за него течение жидкости возмущается лишь в незначительной степени. Можно было бы поступить более неточно, а именно объявить, что ячейка $C^n(k, l)$ является пустой при малых $J^n_{k+1/2,\, l+1/2}$, и передать ее массу, внутреннюю энергию и работу PdV (в предположении, что $J^n_{k+1/2,\, l+1/2}$ стремится к нулю) соседней ячейке. Этот способ вполне успешно использовался в методе СЭЛ и приводил к изменениям параметров течения на несколько процентов.

10. Конечно-разностные уравнения для составляющих количества движения ($M = \rho u$, $N = \rho v$), которые центрируются в граничных ячейках вида $C^n(k + 1/2,\ l + 1/2)$

Как и ранее, мы должны получить выражения для якобиана, дивергенции и, кроме того, при помощи уравнений (9) и (10) мы должны получить аппроксимацию градиента давления в ячейках $C^n(k+1/2,\ l+1/2)$, где определяется количество движения. Так как якобиан и дивергенция определяются относительно сетки для количества движения по тем же самым формулам, что и для основной сетки (составленной из ячеек $C^n(k, l)$), то мы просто записываем

$$J^n_{k,\, l} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j^n(k+1/2,\ l+1/2)} \sum_{l=1}^{I^n(j)} \left(x^n_{l+1}(j) + x^n_l(j)\right)\left(y^n_{l+1}(j) - y^n_l(j)\right), \qquad (51)$$

а также для любого f, определенного в ячейке $C^n(k+1/2,\ l+1/2)$,

$$[\nabla \cdot f\Omega]^{n-1/2}_{k,\, l} = \frac{1}{J^n_{k,\, l}} \sum_{j=1}^{j^n(k+1/2,\ l+1/2)} \sum_{l=1}^{I^n(j)} \left[(f\omega)^{n-1/2}_{l+1/2}\left(y^{n-1/2}_{l+1}(j) - y^{n-1/2}_l(j)\right) - \right.$$
$$\left. - (f\sigma)^{n-1/2}_{l+1/2}\left(x^{n-1/2}_{l+1}(j) - x^{n-1/2}_l(j)\right)\right], \qquad (52)$$

где величина $f^{n-1/2}_{l+1/2}$ также определяется относительно ячеек $C^n(k+1/2,\ l+1/2)$, как определялась величина $f^n_{l+1/2}$ относительно ячеек $C^n(k, l)$ в формулах (43) и (44).

Составляющие градиента давления аппроксимируются путем использования (9), (10) и (42) и вычисления среднего взвешенного по площади от производных для каждой из $j^n(k+1/2,\ l+1/2)$ многоугольных областей $C^n(k+1/2,\ l+1/2)$. Заметим, что знаменатель в соотношениях (9) и (10) равен удвоенной площади рассматриваемой многоугольной области, а якобиан $J^n_{k,l}$ равен сумме площадей этих многоугольников. Следовательно,

$$\left(\frac{\Delta\bar{P}}{\Delta x}\right)^n_{k,l} = \frac{1}{2J^n_{k,l}} \sum_{j=1}^{j^n(k+1/2,\ l+1/2)} \sum_{i=1}^{I^n(j)} \left(\bar{P}^n_l(j)+\bar{P}^n_{l+1}(j)\right)\left(y^n_{l+1}(j)-y^n_l(j)\right), \quad (53)$$

$$\left(\frac{\Delta\bar{P}}{\Delta y}\right)^n_{k,l} = \frac{-1}{2J^n_{k,l}} \sum_{j=1}^{j^n(k+1/2,\ l+1/2)} \sum_{l=1}^{I^n(j)} \left(\bar{P}^n_l(j)+\bar{P}^n_{l+1}(j)\right)\left(x^n_{l+1}(j)-x^n_l(j)\right). \quad (54)$$

Теперь мы можем аппроксимировать уравнения количества движения (27) и (28) для граничных ячеек $C^n(k+1/2,\ l+1/2)$

$$M^{n+1/2}_{k,l} = M^{n-1/2}_{k,l}\left(J^{n-1}_{k,l}/J^n_{k,l}\right) - \Delta t\left\{[\nabla\cdot M\Omega]^{n-1/2}_{k,l} + \left(\frac{\Delta\bar{P}}{\Delta x}\right)^n_{k,l}\right\}, \quad (55)$$

$$N^{n+1/2}_{k,l} = N^{n-1/2}_{k,l}\left(J^{n-1}_{k,l}/J^n_{k,l}\right) - \Delta t\left\{[\nabla\cdot N\Omega]^{n-1/2}_{k,l} + \left(\frac{\Delta\bar{P}}{\Delta x}\right)^n_{k,l}\right\}. \quad (56)$$

Для нахождения скорости нам нужно определить среднюю плотность в ячейке $C^n(k+1/2,\ l+1/2)$. Она определяется как среднее взвешенное по площади от соседних плотностей. Таким образом, имеем

$$\rho^{n+1/2}_{k,l} = \sum_i (\rho J)^n_i \Big/ \sum_i J^n_i, \quad (57)$$

где $(\rho J)^n_i$ — масса i-й (непустой) ячейки $C^n(k, l)$, соседней с ячейкой $C^n(k+1/2,\ l+1/2)$. Тогда

$$u^{n+1/2}_{k,l} = \frac{M^{n+1/2}_{k,l}}{\rho^n_{k,l}}, \quad v^{n+1/2}_{k,l} = \frac{N^{n+1/2}_{k,l}}{\rho^n_{j,l}}. \quad (58)$$

Специальный случай имеет место тогда, когда узел сетки $(x_{k,l},\ y_{k,l})$ попадает в лагранжеву область, т. е. когда $(x_{k,l},\ y_{k,l})$ не лежит в E^n. Тогда соотношения (55) и (56) используются для определения касательной составляющей количества движения, а нормальная составляющая находится по движению лагранжевой границы $L^n(s)$.

На этом заканчивается обсуждение расчетов в эйлеровых координатах; далее мы кратко обсудим расчеты в лагранжевых координатах.

Картина здесь совершенно ясная, так как нужно уточнить только вопрос об определении давления на линии стыка лагранжевой и эйлеровой областей $L^n(s)$, для того чтобы полностью определить расчет величин в лагранжевой области. В методе СЭЛ граничное давление вычисляется как среднее взвешенное по площади от давлений во всех эйлеровых граничных ячейках, часть границы которых принадлежит прямолинейному отрезку линии $L^n(s)$ (рис. 8). Это граничное давление, хотя и не является совершенно точным [1]), представляет собой величину, удовлетворяющую требованиям практики. Теперь мы перейдем к описанию расчетов в лагранжевых переменных.

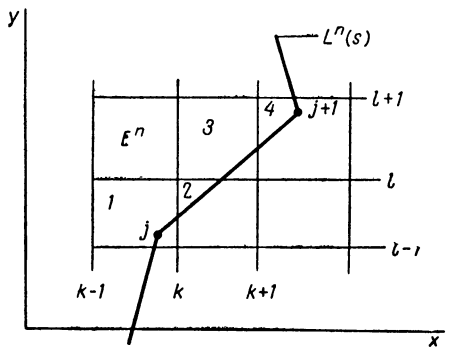


Рис. 8. К определению давления на эйлерово-лагранжевой границе раздела по эйлеровой сетке.

Отрезки лагранжевой линии, соединяющие точки j и $j+1$, образуют часть границ ячеек 1, 2, 3 и 4. Следовательно, имеем

$$P^n_{j+1/2} = \sum_{i=1}^{4} P^n_i J^n_i \Big/ \sum_{i=1}^{4} J^n_i.$$

11. *Конечно-разностные уравнения в лагранжевых переменных*

Полученные ниже уравнения дают простую и довольно точную систему лагранжевых конечно-разностных уравнений. Наша аппроксимирующая сетка является прямоугольной в пространстве переменных $x=x(a, b, t)$, $y=y(a, b, t)$ (где a и b — лагранжевы координаты), а пространственные и временны́е центральные разности для u, v, ρ и т. д. точно такие же, как и для уравнений в переменных Эйлера. Будем снова использовать аппроксимации в соответствии с теоремами 1—5 и, таким образом, будем иметь полное соответствие конечно-разностных уравнений метода СЭЛ. Интересно также отметить, что получающиеся

[1]) Линия $L^n(s)$ представляет собой, вообще говоря, контактный разрыв, при переходе через который остаются непрерывными давление и нормальная составляющая скорости. Это означает, что давление, действующее на $L^n(s)$, равно среднему взвешенному по массе от давлений в эйлеровой и лангранжевой областях.

лагранжевы конечно-разностные уравнения идентичны обычной конечно-разностной системе, при получении которой частные производные по x и y выражаются через частные производные по лагранжевым координатам a и b, а эти производные затем аппроксимируются на прямоугольной сетке в плоскости a, b (см. рис. 3). Это еще раз указывает на «естественность» аппроксимаций, определяемых в соответствии с теоремой 1. Данные аппроксимации удовлетворительны также и в том отношении,

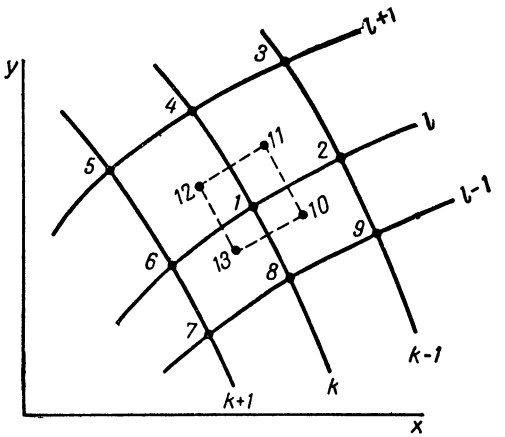


Рис. 9. Обозначения, используемые в определении 3.

что не делается никаких ограничений относительно вспомогательного пространства a, b. Следовательно, можно было бы легко аппроксимировать лагранжевы уравнения относительно произвольной (вместо прямоугольной) сетки в пространстве x, y.

Дифференциальные уравнения в лагранжевых координатах имеют следующий вид:

$$u_t = -\frac{1}{\rho} P_x, \quad v_t = -\frac{1}{\rho} P_y, \quad x_t = u, \quad y_t = v,$$
$$\rho J = \text{const}, \quad e_t = \frac{P}{\rho^2} \rho_t, \quad P = P(e, \rho), \tag{59}$$

где J — якобиан $((x, y)/(a, b))$, e — внутренняя энергия единицы массы.

В следующем определении используется нумерация, указанная на рис. 9; оно основано на уравнениях (9)—(11) и теореме 5 (которая аппроксимирует якобиан через площадь).

Определение 3.

(1) $J^n_{k+1/2,\, l+1/2} = \frac{1}{2}\{(x_3 - x_1)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_3 - y_1)\}^n$,

(2) $[\bar{P},\, x]^n_{k,\, l} = \frac{1}{8}\{(\bar{P}_{11} - P_{13})(x_4 + x_5 + x_6 - x_8 - x_9 - x_2) -$
$- (\bar{P}_{12} - \bar{P}_{10})(x_2 + x_3 + x_4 - x_6 - x_7 - x_8)\}^n$,

где $\bar{P} = P + q$,

(3) $$(\rho J)^n_{k,\, l} = \frac{1}{4}\{(\rho J)^n_{10} + (\rho J)^n_{11} + (\rho J)^n_{12} + (\rho J)^n_{13}\},$$

(4) $[u_x + v_y]^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} =$
$$= \frac{1}{J^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2}}\left\{\sum_{l=1}^{3}\left[\left(\frac{u_{l+1} + u_l}{2}\right)^{n+1/2}(y_{l+1} - y_l)^{n+1/2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{v_{l+1} + v_l}{2}\right)^{n+1/2}(x_{l+1} - x_l)^{n+1/2}\right]\right\}.$$

Лагранжева конечно-разностная система имеет вид

$$u^{n+1/2}_{k,\, l} = u^{n-1/2}_{k,\, l} - \Delta t\,\frac{[\bar{P},\, y]^n_{k,\, l}}{(\rho J)_{k,\, l}}, \tag{60}$$

$$v^{n+1/2}_{k,\, l} = v^{n-1/2}_{k,\, l} + \Delta t\,\frac{[\bar{P},\, x]^n_{k,\, l}}{(\rho J)^n_{k,\, l}}, \tag{61}$$

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1}_{k,\, l} &= x^n_{k,\, l} + \Delta t u^{n+1/2}_{k,\, l} \\ y^{n+1}_{k,\, l} &= y^n_{k,\, l} + \Delta t v^{n+1/2}_{k,\, l} \end{aligned}\right\}, \tag{62}$$

$$\rho^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2} = \rho^n_{k+1/2,\, l+1/2}\frac{J^n_{k+1/2,\, l+1/2}}{J^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2}}, \tag{63}$$

$$q^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} = \frac{1}{2}C^2\left[(\rho J)^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2} + (\rho J)^n_{k+1/2,\, l+1/2}\right] \times$$
$$\times \left\{\begin{aligned} &\left[(u_x - v_y)^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2}\right]^2, && \text{если} \quad (u_x + v_y)^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} < 0 \\ &0, && \text{если} \quad (u_x + v_y)^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2} \geqslant 0 \end{aligned}\right\}, \tag{64}$$

$$e^{n+1}_{k+1/2,\, l+1/2} = e^n_{k+1/2,\, l+1/2} + \bar{P}^{n+1/2}_{k+1/2,\, l+1/2}\frac{(\rho^{n+1} - \rho^n)_{k+1/2,\, l+1/2}}{(\rho^{n+1}\rho^n)_{k+1/2,\, l+1/2}}, \tag{65}$$

$$P^{n+1}_{k+1/2,\ l+1/2} = P\left(e^{n+1}_{k+1/2,\ l+1/2},\ \rho^{n+1}_{k+1/2,\ l+1/2}\right). \qquad (66)$$

Здесь величина $P^{n+1/2}_{k+1/2,\ l+1/2}$ в (65) получается путем использования величины $P^{n}_{k+1/2,\ l+1/2}$ как первого приближения для (65) и осреднения результата, найденного из (66) по величине $P^{n}_{k+1/2,\ l+1/2}$ для определения окончательного значения.

Уравнения для скорости (60) и (61) нужно изменить для точек узлов, которые определяют границы лагранжевой области, остальные же уравнения верны для всех точек сетки. Модификация формул (60) и (61) делается несложно; для этого просто требуется соответствующим образом применить формулы (9) и (10) к определению величин P_y и P_x (причем давление, действующее на границы, находится из эйлеровой области или задается граничным значением). Пример этого показан на рис. 10.

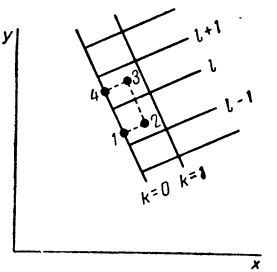


Рис. 10. К расчету скорости на лагранжевой границе $k=0$.

Предполагается, что давление известно вдоль лагранжевой линии $k=0$. Тогда, согласно (9) и (10), имеем

$$\left(\frac{1}{\rho}P_x\right)^n_{0,\ l} = \frac{\sum_{i=1}^{i=4}\left[\left(P^n_{i+1}+P^n_i\right)/2\right]\left(y^n_{i+1}-y^n_i\right)}{\frac{1}{4}\left[(\rho J)^n_2+(\rho J)^n_3\right]},$$

$$\left(\frac{1}{\rho}P_y\right)^n_{0,\ l} = \frac{\sum_{i=1}^{i=4}\left[\left(P^n_{i+1}+P^n_i\right)/2\right]\left(x^n_{i+1}-x^n_i\right)}{\frac{1}{4}\left[(\rho J)^n_2+(\rho J)^n_3\right]}.$$

На этом заканчивается описание схемы расчета для типичной лагранжевой области метода СЭЛ. Следует указать, что выполнение расчетов в лагранжевой области при желании можно скомбинировать с расчетами в эйлеровой области и, конечно (как это имеет место в методе СЭЛ), можно использовать несколько независимых лагранжевых областей, чтобы облегчить расчет при более сложной геометрической картине.

12. Обсуждение графических результатов некоторых расчетов

Следующие примеры предназначены для того, чтобы продемонстрировать основы метода СЭЛ, а не для иллюстрации особенно трудных и важных задач.

Было найдено, что для описания картины течения жидкости наиболее целесообразно показать на графиках векторы скорости в каждом узле эйлеровой сетки. Для лагранжевых областей мы указываем положение узлов лагранжевой сетки и линий, соединяющих эти точки. Графики строились автоматически, как часть печати результатов, с помощью электронно-лучевой трубки, которая была связана с вычислительной машиной.

В первой задаче (рис. 11) рассматривается обтекание идеальным газом ($\gamma=1,4$) твердого диска при числе Маха набегающего потока, равном бесконечности. Начальная температура газа равна нулю (и, следовательно, равна нулю скорость звука), начальная плотность постоянна, а скорость набегающего потока параллельна оси симметрии (ось Z). Течение газа описывается с помощью переменных Эйлера, а твердый диск представлен стационарной лагранжевой ячейкой (обозначена L_1 на рисунке). На рис. 11а показано течение газа вскоре после начала процесса. За диском имеется область разрежения, и сжатый раз начинает расширяться в эту область. Впереди диска газ по существу покоится. Возникает и начинает двигаться в левую сторону головная ударная волна.

Рис. 11б—11е соответствуют последовательным моментам времени; на них видно возникновение циркуляции в области за диском и установление стационарной головной ударной волны. На рис. 11е приведена по существу стационарная картина обтекания диска.

Вторая задача, рассчитанная методом СЭЛ, — это задача об обтекании плотного (но сжимаемого) металлического шара потоком совершенного газа снова при бесконечно большом числе Маха. Здесь образуется головная волна и ударная волна, распространяющаяся внутрь шара.

В этой задаче область газа снова аппроксимировалась с помощью эйлеровой сетки. Однако, чтобы иметь пример задачи с двумя эйлеровыми областями, аппроксимирующими различные жидкости, шар был умышленно разделен на центральную сферическую область и внешнюю сферическую оболочку. Внешняя сферическая оболочка аппроксимировалась лагранжевой сеткой, а центральная сферическая область аппроксимировалась эйлеровой сеткой. Это паказано на рис. 12а.

На рис. 12б приведена картина течения вскоре после начала течения. На остальных рисунках (рис. 12в—12ж) показано течение газа и распространение ударной волны внутрь сферы. Мы видим, что в результате деформации сферы на головной части быстро возникают острая вмятина и выпуклость, характеризующие тейлоровскую неустойчивость течения.

Этот тип неустойчивости возникает в случае, когда менее плотная жидкость ускоряет более плотную жидкость

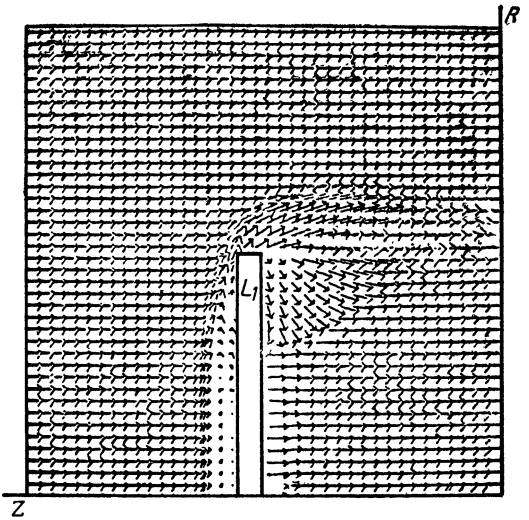


Рис. 11а. График для задачи об обтекании твердого диска совершенным газом при бесконечном значении числа Маха, выполненный с помощью электронно-лучевой трубки.

Для диска используется фиксированная лагранжева ячейка L_1. Вскоре после начального момента $t=0$ сжатый газ начинает расширяться в область разрежения за диском. Возникает головная ударная волна, которая начинает отходить от диска.

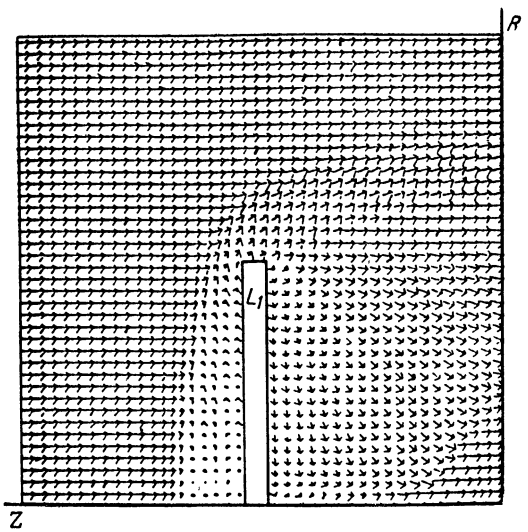


Рис. 11б. Головная ударная волна продолжает отходить от диска.

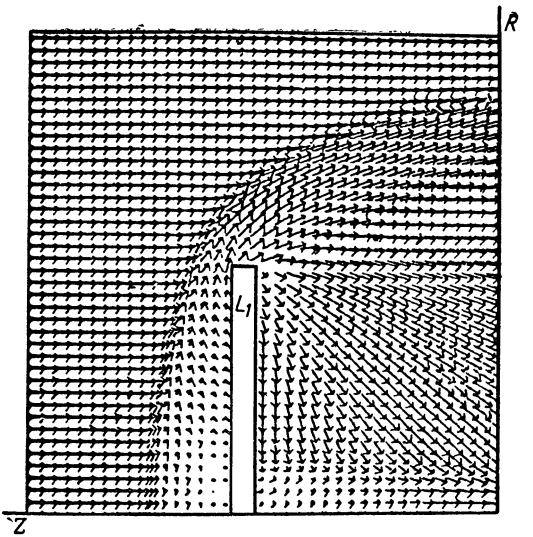


Рис. 11в. Течение за диском начинает тормозиться на оси.

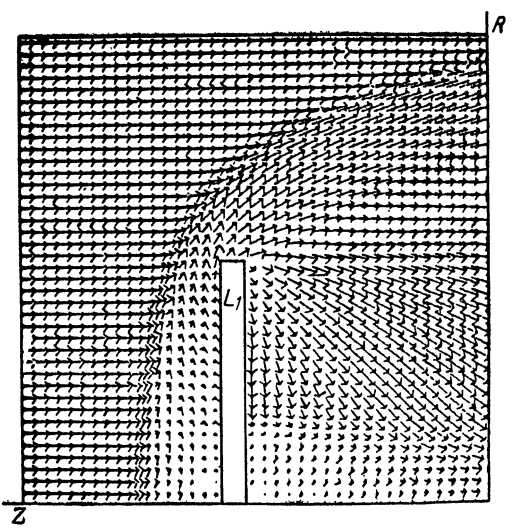


Рис. 11г. Застойная область за диском расширяется.

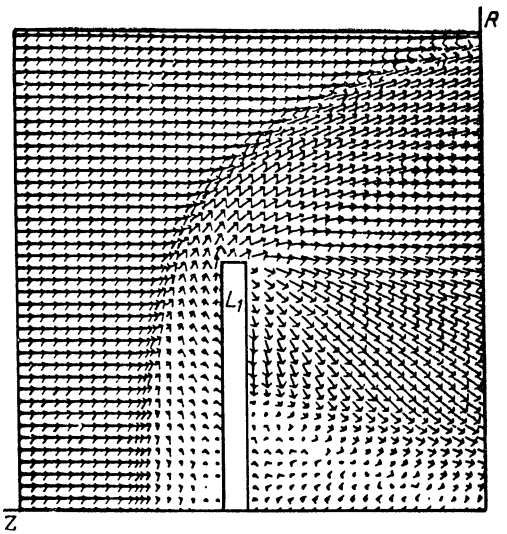


Рис. 11д. В застойной области возникает медленная циркуляция.

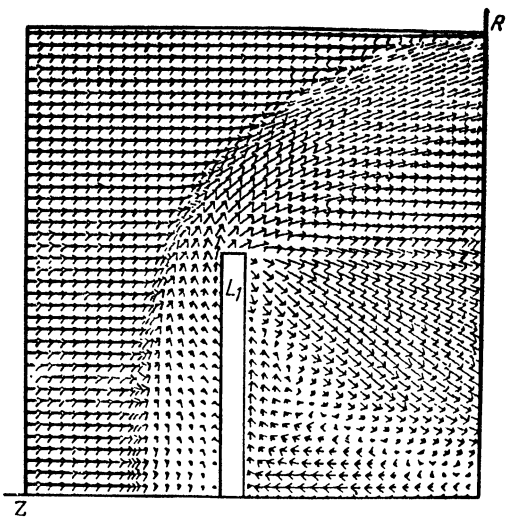


Рис. 11е. Получена по существу уже стационарная картина течения. Видно, что за диском установилась медленная циркуляция.

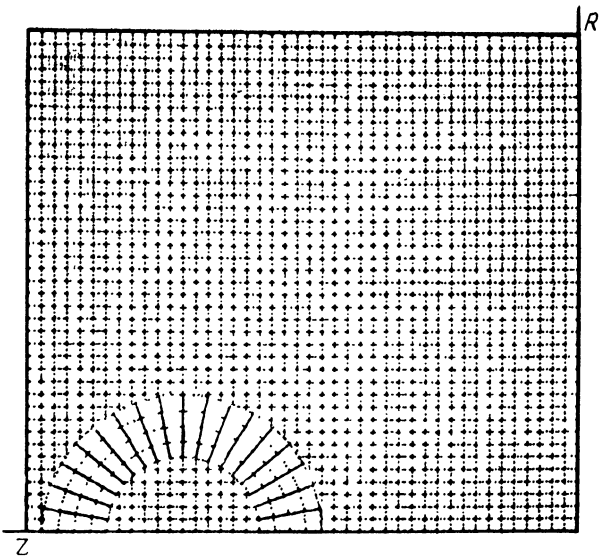


Рис. 12а. Показана начальная конфигурация расчетной сетки, выполненная с помощью электронно-лучевой трубки, для задачи обтекания совершенным газом плотного (но сжимаемого) металлического шара при бесконечном числе Маха.

Шар аппроксимируется как лагранжевой сеткой, так и эйлеровой сеткой (центральная часть шара). Для аппроксимации области газа вне шара используется эйлерова сетка.

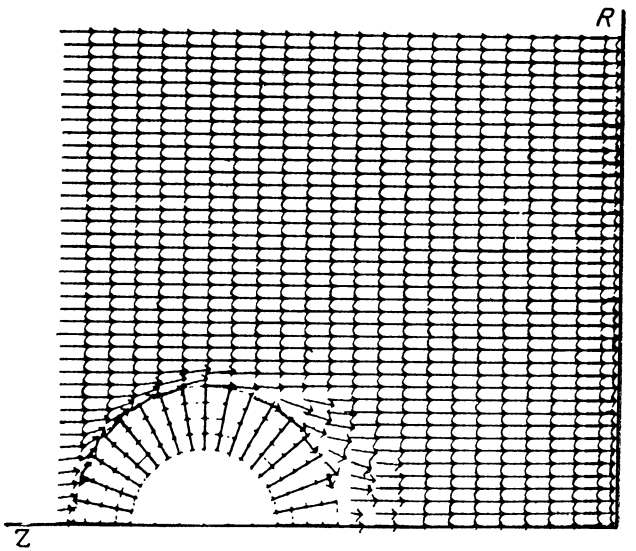


Рис. 12б. Течение газа около шара вскоре после начального момента.

В начальный момент газ имеет нулевую температуру (и, следовательно, нулевую скорость звука), скорость газа постоянная и направлена по оси z. Сжимаемый шар вначале покоится и имеет нулевую температуру. Скорости газа обозначены только для каждой второй вертикальной линии эйлеровой сетки.

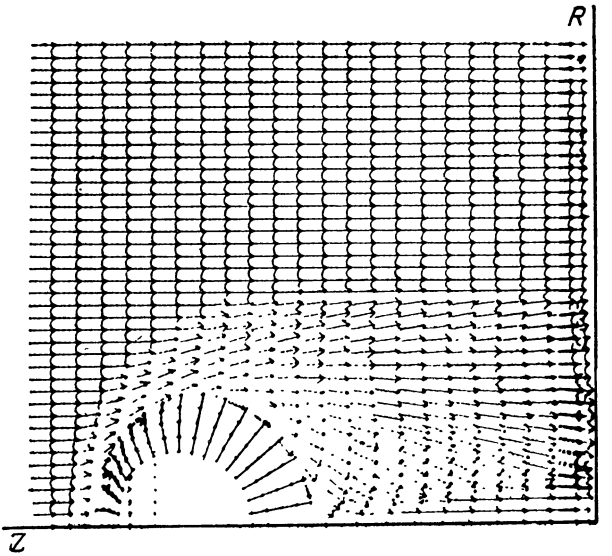


Рис. 12в.

Возникает головная ударная волна и происходит сжатие шара по мере прохождения по нему ударной волны. Скорости газа обозначены здесь для каждой второй узловой точки эйлеровой сетки. Можно заметить появление скоростей в эйлеровой области внутри шара.

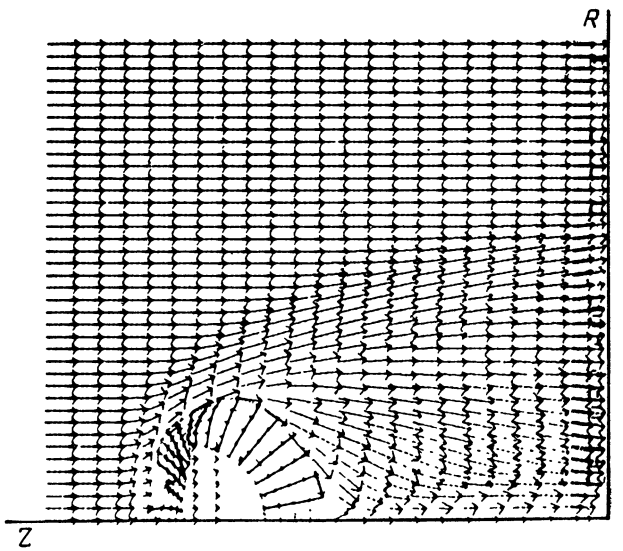


Рис. 12г.

В начальной стадии решения задачи образуется небольшой выступ на передней части сферы. Поскольку течение обладает тейлоровской неустойчивостью, то это возмущение растет со временем. Видно образование вмятины и выпуклости.

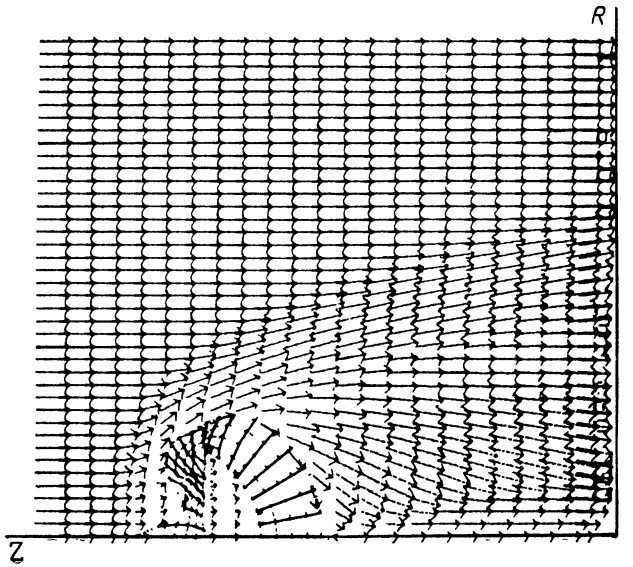


Рис. 12д.

Ударная волна, распространяющаяся внутри шара, проходит более половины пути. Неустойчивость на передней части сферы становится более заметной.

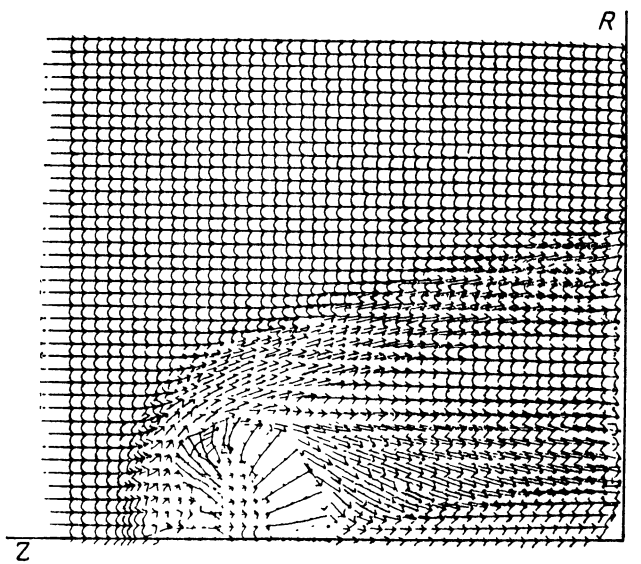


Рис. 12е.

Здесь скорости газа печатались в каждом узле эйлеровой сетки.

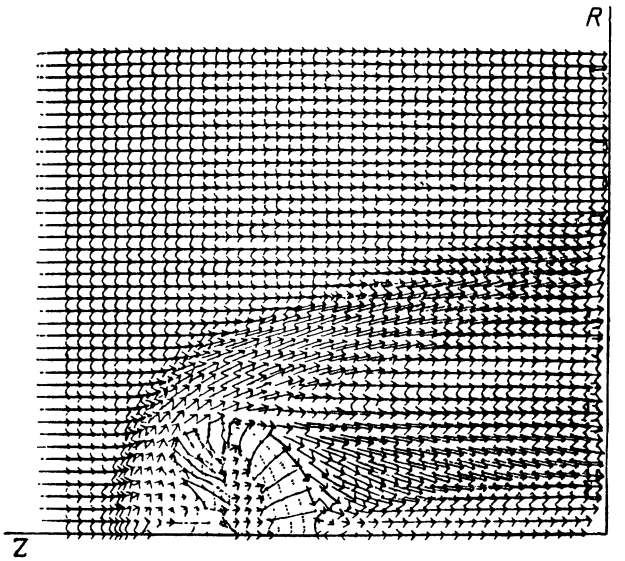


Рис. 12ж.

Видно, что возмущения распространились на часть шара, которая лежит за эйлеровой областью внутри шара. Решение задачи на этом этапе было прекращено.

(в рассматриваемом случае газ ускоряет более плотную сферу). Природа этой неустойчивости заключается в том, что любые возмущения поверхности раздела двух жидкостей увеличиваются со временем с амплитудами более коротковолновых компонент возмущения, которые растут наиболее быстро.

Вследствие начальных условий задачи в первых двух лагранжевых ячейках, соответствующих передней части сферы, образуется небольшой выступ. Этот выступ соответствует некоторой короткой длине волны; далее образуются острая вмятина и выпуклость.

Проведенный расчет указывает на одну из трудностей, возникающих в двумерных задачах. А именно, если течение физически неустойчиво, то любое возмущение поверхности, разделяющей две жидкости, может быстро нарастать и в итоге сделать задачу бессмысленной.

Так как в расчетах по методу СЭЛ поток может локально возмущаться на несколько процентов в неполных граничных ячейках (см. § 9), то это может привести к осложнениям в задачах, в которых течение может быть неустойчивым. Влияние таких возмущений в маленьких граничных ячейках можно уменьшить, используя при расчете процесс «объединения» (см.

§ 9) вместо более грубых вычислений с «подчисткой», а также путем использования более мелкой эйлеровой сетки по сравнению с лагранжевой сеткой. При использовании более мелкой эйлеровой сетки лагранжева граница «чувствует» проинтегрированное поле давления и по существу любые возмущения сглаживаются. Опыт показывает, что достаточная точность достигается в случае, когда ячейки эйлеровой сетки, грубо говоря, составляют по площади одну третью часть от ячеек лагранжевой

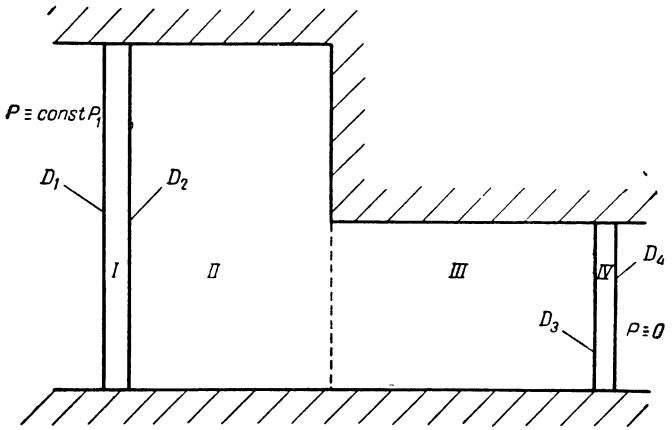


Рис. 13а. Показаны области, занятые тремя различными жидкостями (область I, II и III, IV); для областей II и III имеют место одинаковые уравнения состояния, но жидкости, содержащиеся в них, находятся в различных условиях.

сетки. Метод СЭЛ допускает также введение в уравнения члена, который соответствует искусственному поверхностному натяжению [1]) и может действовать по выбору на любую эйлерово-лагранжеву границу раздела. Его влияние приводит к затуханию коротковолновых нерегулярностей лагранжевых поверхностей раздела (в случае, когда длины волн равны двум-трем длинам размера лагранжевой ячейки), но не приводит к затуханию в случае более длинных волн. Поверхностное натяжение такого рода не использовалось во втором примере, так же как и эйлерова сетка не бралась более мелкой по сравнению с применявшейся лагранжевой сеткой (см. рис. 12а).

В третьем примере (рис. 13а) рассматривается пространство, занятое тремя различными жидкостями (области I, II, III

[1]) Полезность введения члена искусственного поверхностного натяжения (в том смысле, как используется искусственная вязкость) впервые заметил и проиллюстрировал Р. Ле-Левьер для изучения неустойчивых по Тейлору течений.

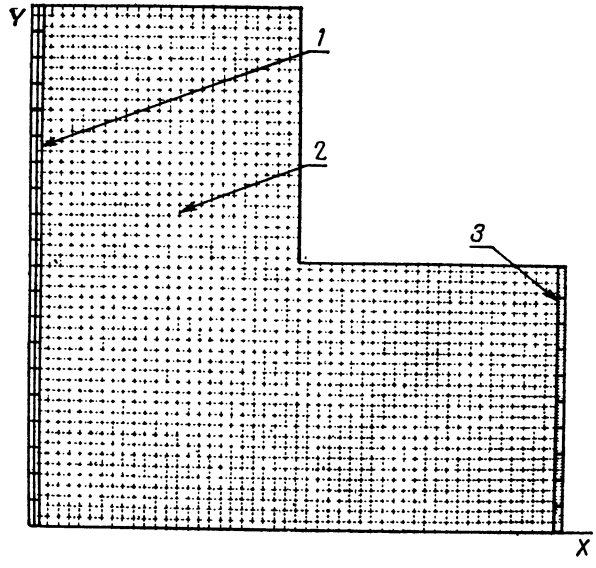


Рис. 13б. Начальное расположение двух лагранжевых сеток и эйлеровой сетки.

1 — лагранжева сетка; *2* — эйлерова сетка; *3* — вторая лагранжева сетка.

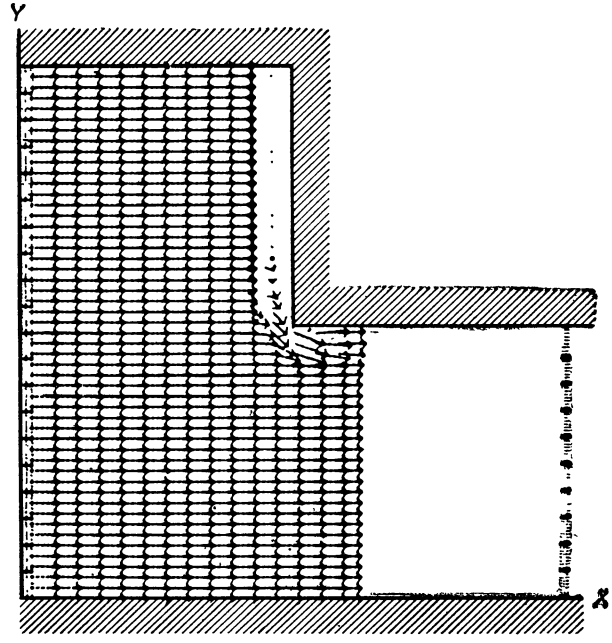


Рис. 13в. Картина течения для малых значений времени t.

Образуется отраженная ударная волна, а начальная ударная волна продолжает двигаться к второму (лагранжеву) поршню.

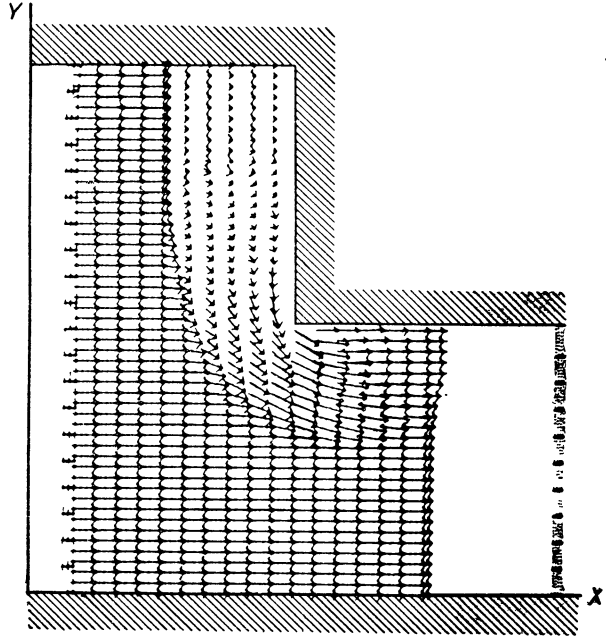


Рис. 13г.

За отраженной ударной волной образуется область высокого давления, благодаря которой возникает течение около угла. В результате влияния этого течения ударная волна, распространяющаяся направо, перестает быть плоской.

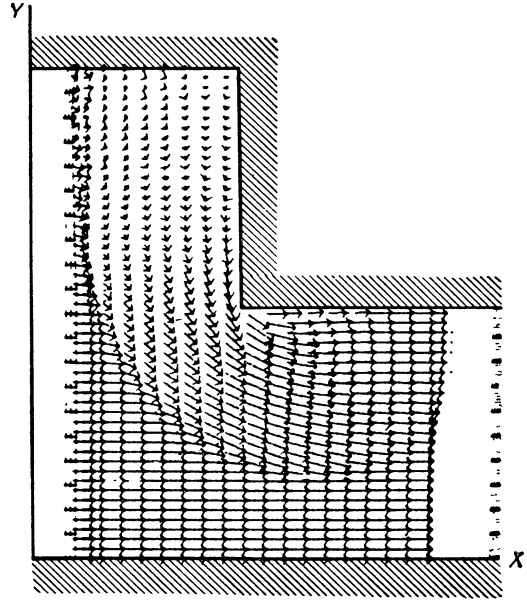
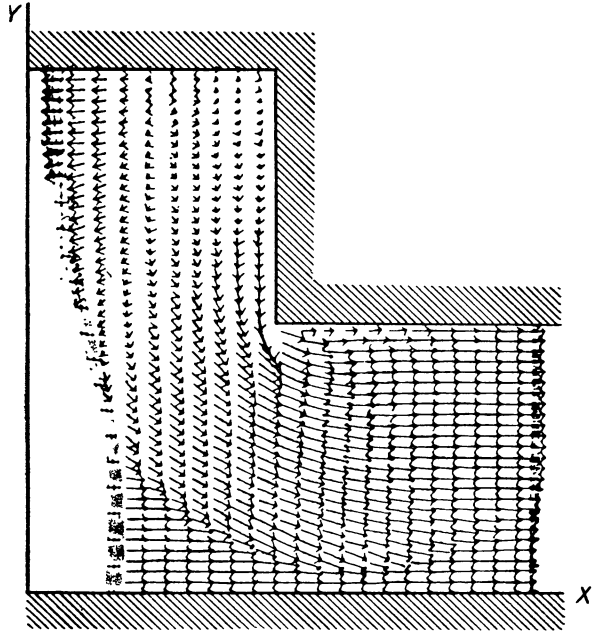


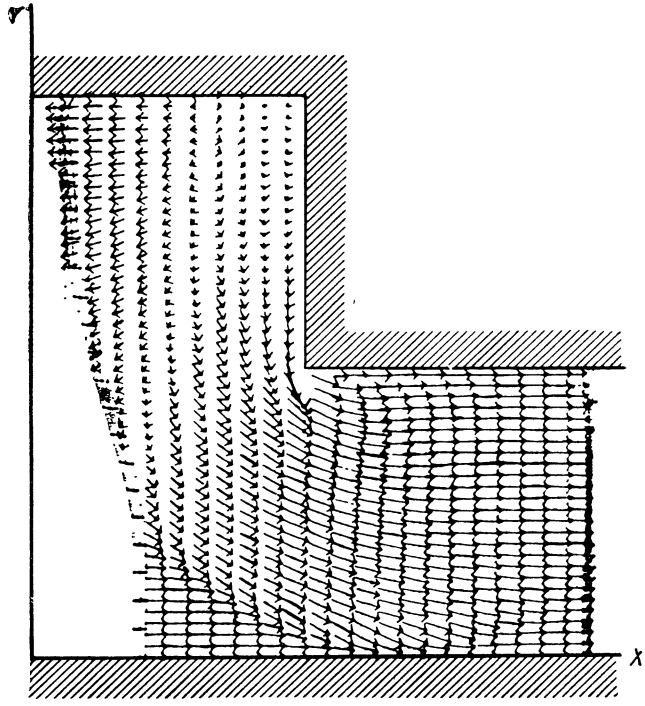
Рис. 13д.

Отраженная ударная волна достигает верхней части поршня и начинает его деформировать.



Р и с. 13е.

Отраженная ударная волна выгнула верхнюю часть левого поршня. Главная ударная волна достигла второго поршня, и внутрь его распространяется проходящая ударная волна.



Р и с. 13ж.

Ударная волна проходит верхнюю часть второго поршня; начинается движение свободной поверхности.

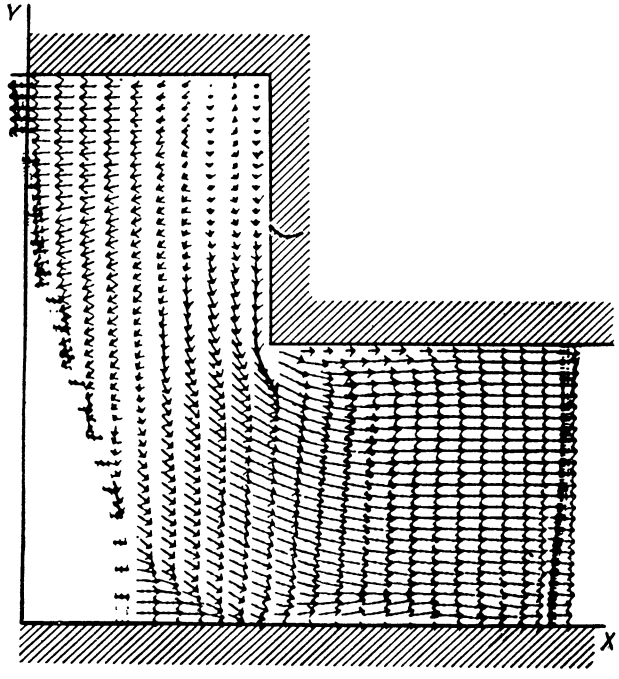


Рис. 13з.

Поток, обтекающий угол, достигает оси X и здесь отклоняется.

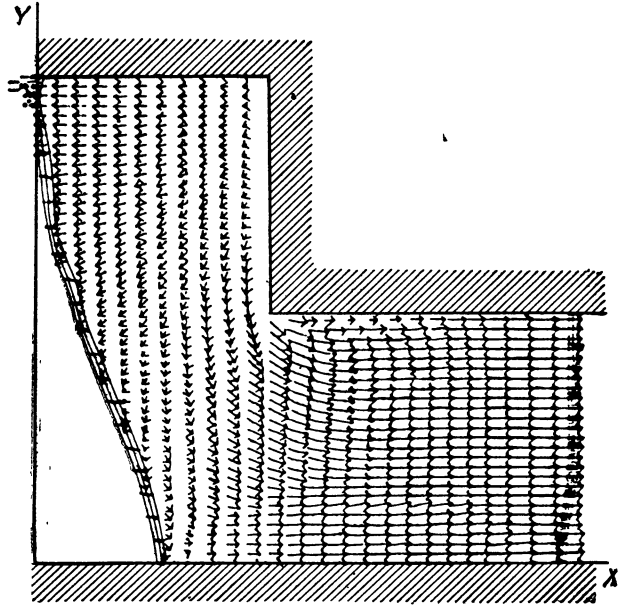


Рис. 13и.

Ударная волна, возникающая у оси, останавливает движение вперед первого поршня. В это время расчет был прекращен.

и IV). Предположим, что сначала образуется плоская ударная волна, вызванная движением поршня вправо (область I), и что при $t=0$ для нашей задачи фронт ударной волны только что достиг штриховой линии, разделяющей области II и III. Здесь области II и III имеют одно и то же уравнение состояния, но в области II газ сжат ударной волной, а в области III газ не возмущен. Область IV представляет собой тонкий, но плотный поршень, который может свободно передвигаться, когда его достигает фронт распространяющейся ударной волны.

Граничные условия для этой задачи состоят в следующем. На поверхности поршня D_1 поддерживается постоянное давление, а на свободной поверхности D_4 давление равно нулю. Остальные границы в рассматриваемой задаче являются твердыми стенками (заштрихованные области). На этих границах нормальная к поверхности составляющая скорости равна нулю.

Если мы обозначим через ρ_1^0 начальную плотность области I, через ρ_2^0 — начальную плотность области II и т. д., то начальные условия можно записать так:

$$\rho_1^0 > \rho_2^0 > \rho_3^0 < \rho_4^0, \quad P_1 = P_1^0 = P_2^0, \quad P_3^0 = P_4^0 = 0,$$

$$u_1^0 = u_2^0 > 0, \quad u_3^0 = u_4^0 = 0, \quad v_1^0 = v_2^0 = v_3^0 = v_4^0 = 0.$$

На рис. 13б показаны исходные эйлерова и лагранжева сетки. Рис. 13в соответствует моменту времени вскоре после $t=0$; видно, что ударная волна начинает распространяться в область III и что она отражается от твердой стенки в верхней половине области II.

На рис. 13г можно видеть, как из-за наличия высокого давления за отраженной ударной волной образуется течение около угла твердой стенки, а также видно, что ударная волна, распространяющаяся в область III, перестает быть плоской. На рис. 13д отраженная ударная волна достигла поршня (область I) и начала его медленно двигать назад.

На рис. 13е отраженная ударная волна выгнула верхнюю часть области I, и здесь началось расширение влево. Криволинейная ударная волна также достигла области IV и распространяется по верхней половине этой области.

На рис. 13е ударная волна прошла через верхнюю часть области IV и поверхность D_4 (см. рис. 13а) стала двигаться в вакуум. На рис. 13ж—13и представлено дальнейшее течение. Видно, что газ, обтекающий угол, достиг оси X и происходит отражение потока. Возникает ударная волна, которая препятствует движению вперед нижней половины области I. На этом этапе решение задачи было прервано.

Благодарности. Автор особенно хочет отметить большую работу В. Кроули, который помогал в начальной стадии разработки метода СЭЛ, а также разрабатывал вопросы проведения вычислительной работы (многие из них совершенно новые, как, например, графическое представление полей течения и т. п.), что было необходимо для превращения схемы расчета в полезный рабочий метод. Специальной благодарности заслуживает Ш. М. Кэмпбелл за ее блестящую работу по программированию для этого весьма трудного метода. Реальное осуществление расчетов по методу СЭЛ обязано, конечно, ей, и благодаря ясному пониманию всей проблемы она смогла работать полностью самостоятельно и вносить много полезных предложений. И наконец, автор благодарит проф. М. Г. Проттера из Калифорнийского университета в Беркли за его многочисленные полезные советы при подготовке этой статьи.

Литература

1. von Neumann J., Richtmyer R. D., *J. Appl. Phys.*, **21**, 232 (1950) (имеется сокращенный русский перевод: сб. *Механика*, № 1 (1951).

Метод расчета «Тензор»

Дж. МАЙНЧЕН, С. САК

Калифорнийский университет, Лоуренсовская лаборатория радиации, Ливермор, Калифорния

1. Введение 185
2. Определения и обозначения 187
3. Уравнение количества движения 190
4. Граничные условия 193
5. Объем и скорость деформации 195
6. Пластическая текучесть 199
7. Разрушение 200
8. Демпфирование 204
9. Уравнение энергии и контроль устойчивости 207
10. Примеры 208
Литература 211

1. Введение

Для предсказания явлений, сопровождающих подземный взрыв, без привлечения простого пересчета масштабов по результатам, полученным после проведения взрывов, требуется развить метод расчета движения упругих, пластических и жидких сред. Такой расчет включает решение системы уравнений в частных производных, выведенных на основании законов сохранения массы, количества движения и энергии, а также разумной математической модели, описывающей реакцию рассматриваемых материалов под действием деформирования[1]). Аналитические решения для нетривиальных случаев получить трудно и часто невозможно. В Лоуренсовской лаборатории радиации было разработано два метода, при помощи которых численно интегрируются эти уравнения на быстродействующих вычислительных машинах. Вычисления были упрощены путем использования той или иной степени симметрии задачи. Более ранний метод «Юник» [4] был разработан применительно к описанию сферически симметричного движения, т. е. одномерного движения с единственным (радиальным) допустимым направлением движения.

В настоящей работе описан метод расчета двумерных движений (метод «Тензор»), который был разработан для изучения

[1]) В непосредственной близости от очага сильного взрыва задачу можно упростить за счет пренебрежения эффектами упругости и пластичности. Расчеты взрывов в такой жидкой среде описаны в работе [2].

задач с осевой симметрией (например, задача о кратерах), где существенны две пространственные координаты.

Уравнения метода «Тензор» описывают движение материала под действием тензора напряжений (в отличие от обычного скалярного давления в гидродинамических расчетах). В «Тензоре» дифференциальные уравнения движения заменяются системой конечно-разностных уравнений: непрерывные пространственные распределения напряжений, скоростей и т. д. аппроксимируются системой величин, определенных в дискретных местах среды (ячейках). Так как используется метод Лагранжа, то эти ячейки соответствуют элементам движущейся среды и движутся вместе с ней. Пример такой сетки ячеек показан на рис. 1. Непрерывные по времени изменения напряжений, скоростей и т. д. также аппроксимируются величинами, определенными для дискретных моментов времени.

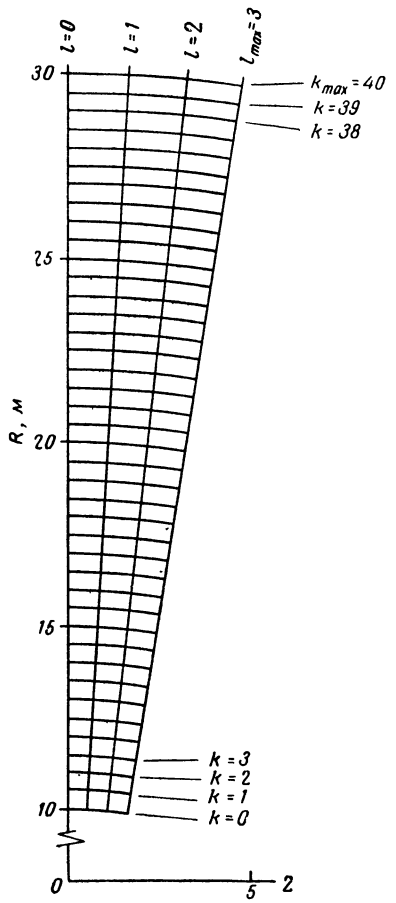


Рис. 1. Задача A для метода «Тензор».

Скорость звука $C=5$ *м/мсек*; $\rho^0=2г/см^3$; $\lambda=2\mu=250$ *кбар*.

Интегрирование уравнений движения производится путем последовательного расчета для малых шагов по времени. В некоторый момент t поле напряжений известно, так как известны напряжения в каждой ячейке и расположение этих ячеек. Уравнение количества движения используется для вычисления ускорения в каждом узле расчетной сетки. Эти ускорения, действующие в течение малого шага по времени Δt, изменяют предыдущие значения скорости, и для момента $t+\Delta t$ находятся новые значения скоростей и новые положения узлов сетки. Затем используется обобщенный закон Гука или какое-либо другое уравнение состояния и вычисляются напряжения в момент $t+\Delta t$. На этом этапе проявляется различие между упругим, хрупким, пластичным или жидким материалами вследствие выбора со-

ответствующего ограничения на тензор напряжений. Определив новые напряжения в каждой ячейке, мы можем теперь повторить полный цикл вычислений. В типичной задаче об образовании кратера на поверхности материала используется сетка, содержащая примерно 1000 ячеек и 1000 шагов по времени; весь расчет занимает около 4 *час* на машине IBM-7090. Здесь следует отметить, что движение поверхности материала таково, что искажение ячеек сетки становится существенным и приводит к неприемлемому уменьшению шага по времени Δt.

Попыток строгого обоснования расчетных уравнений не имеется. В некоторых случаях (например, когда задается и используется в расчетах искусственная вязкость) выбор расчетной схемы основывался на интуиции и опыте работы с другими схемами в сочетании с последующей экспериментальной корректцией. Однако формулировка уравнений количества движения и энергии (в конечно-разностном виде) в переменных Лагранжа вместе с такими элементами, как весовые множители, успешно применялась во многих других методах и позволяет построить очень удобную и «гибкую» расчетную схему. В рамках этой расчетной схемы можно использовать множество возможных видов уравнений состояния (моделей среды). В методе «Тензор» уравнения такого типа используются при расчете напряжений с учетом различных поправок, связанных с пластическим течением и процессом образования трещин. Общий метод должен был бы учитывать и многие другие эффекты, такие, как теплопроводность, химические реакции, вызванные прохождением ударных волн, включая детонационные волны, и т. д.

Наконец, следует упомянуть о двух основных ограничениях на расчетную схему. Рассмотрение устойчивости приводит к требованию, чтобы используемый при расчете шаг по времени Δt был меньше отношения размера счетной ячейки к скорости звука. Это ограничивает практическое применение расчетной схемы изучением таких нестационарных явлений, в которых масштаб времени имеет порядок нескольких времен пробега звуковой волны через область, занятую рассматриваемой средой. Второе ограничение состоит в том, что лагранжева ячейка, будучи деформируемой, не может искажаться беспредельно. Такая ячейка не может, например, следовать за веществом в турбулентном потоке (хотя с умеренными искажениями можно справиться путем «перестройки» ячеек).

2. *Определения и обозначения*

Широко распространенные формы уравнения движения, определения скорости деформаций и т. д. обычно выражаются в элейровых координатах. Конечно-разностные уравнения,

использованные в методе «Тензор», записываются в лагранжевых координатах. Поэтому производные в переменных Эйлера должны быть преобразованы к переменным Лагранжа.

Обозначим лагранжевы координаты через k, l, а эйлеровы координаты следующим образом: $R(k, l, t)$ — радиальная координата [1]) узла сетки, заданного числами k, l в момент t; $Z(k, l, t)$ — осевая координата.

Для любой функции F можем написать

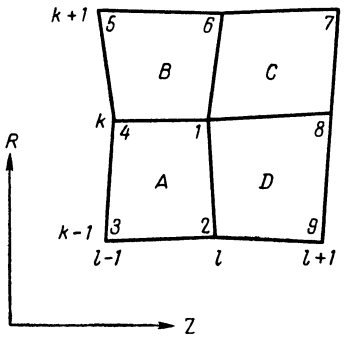


Рис. 2.

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial k} + \frac{\partial F}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial k},$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial l} + \frac{\partial F}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial l}.$$

Отсюда находим лагранжево выражение производных в эйлеровых координатах

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial F}{\partial k}\frac{\partial Z}{\partial l} - \frac{\partial F}{\partial l}\frac{\partial Z}{\partial k}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{-1}{J}\left(\frac{\partial F}{\partial k}\frac{\partial R}{\partial l} - \frac{\partial F}{\partial l}\frac{\partial R}{\partial k}\right),$$

где J — якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial R}{\partial k}\frac{\partial Z}{\partial l} - \frac{\partial R}{\partial l}\frac{\partial Z}{\partial k}.$$

В данном методе лагранжевы переменные k и l принимают дискретные значения (0, 1, 2, ...). Они используются как индексы, отмечающие узел сетки, в котором определяется какая-либо переменная величина, например R. Дискретная временна́я переменная n используется как верхний индекс

$$t^n = t^{n-1} + \Delta t^{n-1/2}.$$

Таким образом, $R(k, l, t) = R^n_{k,l}$ — радиальная координата узла, заданного числами k и l в момент времени t^n.

Для того чтобы сделать разностную схему менее громоздкой, в дальнейшем, где это возможно, используются следующие сокращенные индексы:

$$1 = k,\ l,$$
$$2 = k-1,\ l,$$
$$3 = k-1,\ l-1,$$
$$4 = k,\ l-1$$

и т. д. (рис. 2).

[1]) Этот метод можно использовать для расчетов двумерных случаев в декартовых координатах, при этом R следует рассматривать как декартову координату.

Будем также обозначать

$$A = k - \frac{1}{2}, \quad l - \frac{1}{2},$$

$$B = k + \frac{1}{2}, \quad l - \frac{1}{2},$$

$$C = k + \frac{1}{2}, \quad l + \frac{1}{2},$$

$$D = k - \frac{1}{2}, \quad l + \frac{1}{2}.$$

В узловых точках сетки определяются следующие переменные:

$R_1^n = R_{k,l}^n$ — радиальная координата;
Z_1^n — осевая координата;
$u_1^{n-1/2} = \dot{R}_1$ — радиальная компонента скорости;
$v_1^{n-1/2} = \dot{Z}_1$ — осевая компонента скорости;
$\dot{u}_1^n$, $\dot{v}_1^n$ — радиальная и осевая компоненты ускорения;
ΔR_1^n, ΔZ_1^n — компоненты смещения.

Остальные переменные определяются для ячеек расчетной сетки:

$J_A^n = J_{k-1/2,l-1/2}^n$ — якобиан, площадь ячейки;
V_A^n — объем ячейки (на радиан);
V_A^0 — начальный (при $t=0$) объем ячейки;
$\delta V_A^n = V_A^n - V_A^0$;
M_A — масса ячейки;
ρ_A^n — плотность;
E_A^n — внутренняя энергия на единицу начального объема;
P_A^n — давление;
$(\tau_l)_A^n$ — компоненты девиатора тензора напряжений ($i=R$, Z, RZ);
$Q_A^{n-1/2}$ — скалярная форма искусственной вязкости;
$(Q_l)_A^{n-1/2}$ — компоненты девиатора тензора искусственной вязкости ($i=R$, Z, RZ);
$(Q_l)_A^{n-1/2}$, $(Q_k)_A^{n-1/2}$ — дополнительные демпфирующие члены;
I_A — обозначение для материала в ячейке A;
Φ_A^n — угол ориентации трещины;
$(E_l)_A^n$ — ширина трещины разрушения ($i=1$, 2, 3).

Верхний индекс, обозначающий время, часто будет опускаться.

3. Уравнение количества движения

В задачах с осевой симметрией (т. е. когда все производные по азимутальной координате θ равны нулю) [1]) тензор напряжений имеет только четыре ненулевых элемента

$$(\tau)=\begin{pmatrix}\tau_{RR} & 0 & \tau_{RZ}\\ 0 & \tau_{\theta\theta} & 0\\ \tau_{RZ} & 0 & \tau_{ZZ}\end{pmatrix}.$$

Здесь τ_{RR} — растягивающая сила, действующая в направлении R на элемент единичной площади, ориентированный перпендикулярно направлению R [5]. Касательное напряжение τ_{RZ} представляет собой силу в направлении R, действующую на элемент, расположенный перпендикулярно оси Z (согласно симметрии $\tau_{RZ}=\tau_{ZR}$).

Чтобы облегчить расчет пластически деформируемой среды, напряжения представляются в виде суммы изотропной и девиаторной частей [3], ибо условие пластичности накладывает ограничения только на эффективные касательные напряжения, а не на среднее давление, т. е.

$$(\tau)=\begin{pmatrix}-P & 0 & 0\\ 0 & -P & 0\\ 0 & 0 & -P\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\tau_R & 0 & \tau_{RZ}\\ 0 & \tau_\theta & 0\\ \tau_{RZ} & 0 & \tau_Z\end{pmatrix},$$

где

$$P=-\frac{1}{3}(\tau_{RR}+\tau_{\theta\theta}+\tau_{ZZ}),$$

$$\tau_R=\tau_{RR}+P,$$

$$\tau_Z=\tau_{ZZ}+P,$$

$$\tau_0=\tau_{\theta\theta}+P=-(\tau_R+\tau_Z).$$

Введенные обозначения, обычные в расчетах пластических течений, противоречивы в смысле знаков; величина P положительна для сжатого материала, тогда как τ_{ii} и τ_i положительны при растяжении.

В этих переменных уравнение количества движения запишется так:

$$\dot{u}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P-\tau_R)}{\partial R}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{RZ}}{\partial Z}+\frac{2\tau_R+\tau_Z}{\rho R}+G_R,$$

$$\dot{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P-\tau_Z)}{\partial Z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{RZ}}{\partial R}+\frac{\tau_{RZ}}{\rho R}+G_Z.$$

[1]) В случае декартовых координат θ — третья (симметричная) координата.

Последние члены в этих формулах представляют собой массовую силу и используются для учета силы тяжести (обычно сетка ориентируется так, чтобы $G_Z=g$ или $G_Z=-g$, $G_R=0$). Для предотвращения возникновения колебаний оказалось необходимым ввести некоторое демпфирование, аналогичное искусственной вязкости, впервые предложенной для численного расчета гидродинамических течений со скачками фон Нейманом и Рихтмайером [6]. В рассматриваемом случае вязкость такого типа обобщается путем введения тензора и разделяется на изотропную и девиаторную части. Таким образом, величина P заменяется на $P+Q$, τ_R — на τ_R+Q_R и т. д.

Теперь нужно выразить ускорение в узле k, l лагранжевой сетки через напряжения в соседних четырех ячейках. Изменения, которые следует ввести на краях лагранжевой сетки, будут рассмотрены отдельно. Заметим, что в формулы для ускорения входят как члены с производными (которые определяются на границах ячеек), так и члены без производных, которые определены в ячейках.

Рассмотрим сначала члены без производных [1]). Определим средний радиус в ячейке как $\overline{R}^n_A = V^n_A/J^n_A$, так что $1/\rho R = VJ/MV = J/M$. Таким образом, вклад членов без производных в ускорение ячейки равен

$$(\dot{u})_l = \frac{J_l}{M_l}(2\tau_R + 2Q_R + \tau_Z + Q_J)_l,$$

$$(\dot{v})_l = \frac{J_l}{M_l}(\tau_{RZ} + Q_{PZ})_l, \qquad i = A, B, C, D.$$

Члены, содержащие производные, вычисляются отдельно для каждой границы между соседними ячейками. Рассмотрим границу между ячейками C и D. Здесь мы имеем только производные по k от напряжений, так что радиальное ускорение, обусловленное градиентами поперек этой границы (от k, l до $k, l+1$), выражается следующим образом (для границы 81):

$$\dot{u}_{81} = \frac{-1}{(\rho J)_{81}}\left[\frac{\partial}{\partial k}(P + Q - \tau_R - Q_R)\frac{\partial Z}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial k}(\tau_{RZ} + Q_{RZ})\frac{\partial R}{\partial l}\right]_{81}.$$

Здесь необходимо сделать выбор среди различных возможных способов введения конечных разностей. Так как напряжения определены внутри ячеек, то мы будем использовать простейший вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial k} S\right]_{k,\ l+1/2} = S_{k+1/2,\ l+1/2} - S_{k-1/2,\ l+1/2},$$

[1]) Эти члены соответствуют ускорениям, вызываемым напряжениями, обусловленными криволинейностью. Они равны нулю в случае декартовых координат.

что сокращенно будем обозначать как S_{C-D}. Здесь через S обозначено напряжение. Для записи в конечных разностях производных от координат сначала было использовано простейшее соотношение

$$(\partial Z/\partial l)_{k,\, l+1/2} = Z_{k,\, l+1} - Z_{k,\, l}.$$

Хотя это представление и приемлемо для сетки с прямоугольными ячейками, но для сеток, имеющих трапециевидные ячейки, оно приводит к ошибкам, потому что величина $(1/J)(\partial Z/\partial l)$ по существу эквивалентна обратной величине эффективного расстояния между центрами ячеек $(1/\Delta R)$. Таким образом, это простое представление конечной разности для координаты приводит к сколь угодно малым ускорениям, когда общая граница между зонами становится исчезающе малой (рис. 3).

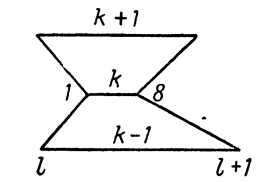


Рис. 3.

В соответствии с этим будем использовать следующие средние конечно-разностные представления для координат (здесь через x обозначено R или Z):

$$\bar{x}_{81} = \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)_{k,\, l+1/2} = \frac{1}{4}[2(x_8 - x_1) + x_7 - x_6 + x_9 - x_2],$$

$$\bar{x}_{61} = \left(\frac{\partial x}{\partial k}\right)_{k+1/2,\, l} = \frac{1}{4}[2(x_6 - x_1) + x_7 - x_8 + x_5 - x_4].$$

Для произведения плотности на площадь используем простое среднее

$$(\rho J)_{81} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{M}{V}J\right)_C + \left(\frac{M}{V}J\right)_D\right],$$

$$(\rho J)_{61} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{M}{V}J\right)_C + \left(\frac{M}{V}J\right)_B\right].$$

Используя введенные средние разности, получаем

$$\dot{u}_{81} = \frac{-1}{(\rho J)_{81}}[(P + Q - \tau_R - Q_R)_{C-D}\bar{Z}_{81} + (\tau_{RZ} + Q_{RZ})_{C-D}\bar{R}_{81}] + q,$$

$$\dot{v}_{81} = \frac{1}{(\rho J)_{81}}[(P + Q - \tau_Z - Q_Z)_{C-D}\bar{R}_{81} + (\tau_{RZ} + Q_{RZ})_{C-D}\bar{Z}_{81}] + q,$$

$$\dot{u}_{61} = \frac{1}{(\rho J)_{61}}[(P + Q - \tau_R - Q_R)_{C-D}\bar{Z}_{61} + (\tau_{RZ} + Q_{RZ})_{C-B}\bar{R}_{61}] + q,$$

$$\dot{v}_{61} = \frac{-1}{(\rho J)_{61}}[(P + Q - \tau_Z - Q_Z)_{C-D}\bar{R}_{61} + (\tau_{RZ} + Q_{RZ})_{C-B}\bar{Z}_{61}] + q.$$

Последний «q-член» соответствует дополнительному демпфированию и будет описан позднее. Аналогичные выражения можно было бы написать для сторон 12 и 14. Однако эти выражения

нет необходимости выписывать явно, так как соответствующие им величины можно найти из расчета предыдущих узлов (а именно $\dot{u}_{14}$ предварительно можно вычислить так же, как $\dot{u}_{81}$ для узла k, l—1, а $\dot{u}_{12}$ можно вычислить так же, как $\dot{u}_{61}$ для узла k—1, l).

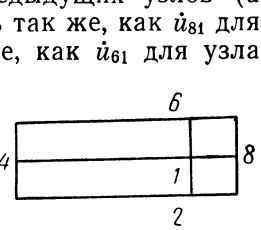


Рис. 4.

Полученные формулы теперь следует скомбинировать, чтобы найти ускорение в точке k, l. Будем использовать такие взвешенные средние, для которых наибольший вес соответствует наименьшим ячейкам (так как их центры ближе к точке k, l). Таким образом, в случае, подобном приведенному на рис. 4, наибольший вес соответствует $\dot{u}_{81}$, а наименьший вес соответствует $\dot{u}_{14}$. Весовые множители определим формулами

$$W_{81} = \frac{(\bar{R}_{81})(\bar{R}_{81}+\bar{R}_{14})+(\bar{Z}_{81})(\bar{Z}_{81}+\bar{Z}_{84})}{(\bar{R}_{81}+\bar{R}_{14})^2+(\bar{Z}_{81}+\bar{Z}_{84})^2},$$

$$W_{61} = \frac{(\bar{R}_{61})(\bar{R}_{61}+\bar{R}_{12})+(\bar{Z}_{61})(\bar{Z}_{61}+\bar{Z}_{12})}{(\bar{R}_{61}+\bar{R}_{12})^2+(\bar{Z}_{61}+\bar{Z}_{12})^2},$$

где $\bar{R}_{61}$ и т. д. — средние разности для координат, введенные ранее. Теперь будем использовать W_{81} как вес для $\dot{u}_{14}$ и (1—W_{81}) как вес для $\dot{u}_{81}$. Те же весовые множители будем использовать для членов, не содержащих производных; так, например, $W_{81}W_{61}$ будет весом ячейки A, (1—W_{81})(W_{61}) — весом ячейки D и т. д. Комбинируя все члены, находим, наконец, ускорение в узле k, l:

$$\dot{u}^n_{k,l} = W_{61}W_{81}(\dot{u}_A - \dot{u}_B + \dot{u}_C - \dot{u}_D) + W_{81}(\dot{u}_{14} - \dot{u}_{81} + \dot{u}_B - \dot{u}_C) + \\ + W_{61}(\dot{u}_{12} - \dot{u}_{61} + \dot{u}_D - \dot{u}_C) + \dot{u}_{81} + \dot{u}_{61} + \dot{u}_C + G_R$$

и аналогичное выражение для $\dot{u}_{k,l}$. В этих формулах все величины (напряжение, координаты, объемы и т. д.) берутся для шага по времени n (хотя члены, соответствующие Q, берутся при n—1/2). Следовательно, $\dot{u}$ соответствует шагу n.

Наконец получаем приращения для скоростей и координат по следующим формулам:

$$u^{n+1/2}_{k,l} = u^{n-1/2}_{k,l} + (\Delta t)^n \dot{u}^n \qquad \text{(формула для } v \text{ аналогична)},$$

$$R^{n+1}_{k,l} = R^n_k + (\Delta t)^{n+1/2} u^{n+1/2} \qquad \text{(формула для } Z \text{ аналогична)}.$$

4. Граничные условия

Уравнения движения, описанные выше, соотвествуют внутренней точке лагранжевой сетки. На границах сетки некоторые

из написанных формул (для ρJ, $\dot{u}$ и др.) должны быть изменены. На каждой из четырех границ ($k=0$, $k=k_{\max}$, $l=0$, $l=l_{\max}$) может иметь место одно из двух возможных граничных условий, а именно условия на твердой (гладкой) стенке или на свободной поверхности.

На твердой стенке среда может скользить вдоль поверхности стенки, но не может двигаться перпендикулярно к этой поверхности. Граничное условие для твердой стенки используется на оси симметрии ($R=0$) в задачах, обладающих осевой симметрией. Влияние гладкой стенки эквивалентно влиянию отраженной воображаемой ячейки за стенкой, где смещение среды в воображаемой ячейке является зеркальным отображением смещения в реальной ячейке (рис. 5). Рассмотрим систему осей i, j, расположенных параллельно и перпендикулярно к стенке, тогда компоненты «нормальных» напряжений τ_{ii} и τ_{jj} будут отражаться симметрично, а касательная компонента τ_{ij} — антисимметрично. Для того чтобы найти значение единственного градиентного члена у стенки, необходимо знать разность $\tau_{ij}-\tau'_{ij}=2\tau_{ij}$, где

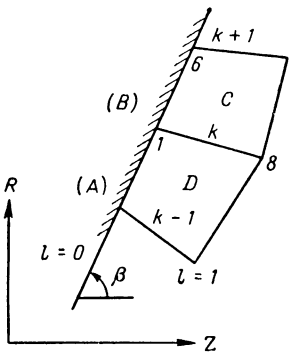


Рис. 5.

$$\tau_{ij}=(\sin\beta\cos\beta)(\tau_Z-\tau_R)+(\sin^2\beta-\cos^2\beta)\tau_{RZ}.$$

Аналогичное соотношение имеет место для тензора демпфирования Q.

Формула для части ускорения на стенке, обусловленной нормальным градиентом касательного напряжения, выводится следующим образом. Обозначим

$$F=\frac{2V}{MJ}[\sin\beta\cos\beta(\tau_R+Q_R-\tau_Z-Q_Z)+ +(\cos^2\beta-\sin^2\beta)(\tau_{RZ}+Q_{RZ})],$$

где все величины, определенные в ячейках (M, V, J, τ_R и т. д.), относятся к реальной ячейке, а через β обозначен угол между твердой стенкой и осью. Тогда получим

$$\dot{u}_{61}=-\bar{R}_{61}F,\quad \dot{v}_{61}=-\bar{Z}_{61}F \quad \text{при} \quad l=0,$$
$$\dot{u}_{81}=\bar{R}_{81}F,\quad \dot{v}_{81}=\bar{Z}_{81}F \quad \text{при} \quad k=0,$$

где «реальной ячейкой» является ячейка C. Аналогичные формулы будут иметь место при $l=l_{\max}$ и $k=k_{\max}$. Эти компоненты ускорения следует скомбинировать с членами, соответствующими ускорениям во внутренних точках, а результирующий вектор ускорения спроектируется на твердую стенку. При $l=0$, напри-

мер, $\dot{u}_{81}$, $\dot{u}_C$, $\dot{u}_D$ вычисляются, как для любой внутренней точки сетки, тогда как $\dot{u}_{61}$ и величина $\dot{u}_{12}$ находятся с помощью приведенных выше формул для твердой стенки. Так как величина $\dot{u}_{14}$ (которая соответствует точке за стенкой) не учитывается, то суммарное ускорение вычисляется при W_{81}, положенном равным нулю. Остается единственная компонента ускорения, параллельная твердой стенке. Таким образом, имеем

$$\Delta \mathbf{v} = (\dot{u} \sin\beta + \dot{v} \cos\beta)\,\Delta t^n,$$
$$u^{n+1/2} = u^{n-1/2} + (\Delta \mathbf{v}) \sin\beta,$$
$$v^{n+1/2} = v^{n-1/2} + (\Delta \mathbf{v}) \cos\beta.$$

Для свободной поверхности вычисления проводятся так, как если бы за границей имелась воображаемая ячейка, не обладающая массой. Если это необходимо, то можно учитывать в этой воображаемой ячейке зависящее от времени давление. Все другие составляющие напряжения равны нулю, так что воображаемая ячейка не влияет на члены ускорения, не содержащие производных (например, $\dot{u}_A$). Ускорение вычисляется так же, как для внутренней точки сетки, за исключением того, что изменяется один из весовых множителей. При $l=0$, например, W_{81} полагается равным нулю, так как не может быть ускорения, обусловленного градиентами через поверхность раздела двух воображаемых ячеек.

5. Объем и скорость деформации

В предыдущих разделах рассматривался расчет движения среды под действием заданного поля напряжений. Теперь мы должны найти, как это движение в свою очередь влияет на напряжения. Так как мы допускаем пластические деформации, то соотношения между напряжением и деформацией будут использоваться в форме приращений. Это обусловлено тем, что невозможно дать определения, имеющего смысл абсолютных деформаций (через координаты в момент $t=0$) в среде, которая в предыдущие моменты времени вела себя неупруго.

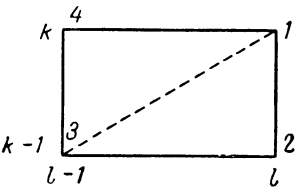


Рис. 6.

Объем (на радиан) [1]) ячейки k—1/2, l—1/2 равен (рис. 6)

$$V = \frac{1}{6}\left[(R_1+R_2+R_3)\begin{vmatrix}(R_1-R_2)(R_1-R_3)\\(Z_1-Z_2)(Z_1-Z_3)\end{vmatrix} + \right.$$
$$\left. + (R_1+R_3+R_4)\begin{vmatrix}(R_1-R_3)(R_1-R_4)\\(Z_1-Z_3)(Z_1-Z_4)\end{vmatrix}\right].$$

[1]) Приведенные выражения весьма просто видоизменить в случае декартовых координат.

Вычисление по этой формуле проводится явно только в начале решения задачи (используются R и Z при $t=0$). После этого мы вычисляем изменение объема (и изменение деформации) от цикла шага по времени n к циклу $n+1$ при помощи центрированных по времени координат при $n+1/2$,

$$R=R^{n+1/2}=R^n+\frac{1}{2}u^{n+1/2}(\Delta t)^{n+1/2},$$ аналогично для Z.

Пусть

$$(X_{123})=(X_1+X_2+X_3),$$

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ 123 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (X_1-X_2)\,(X_1-X_3) \\ (Y_1-Y_2)\,(Y_1-Y_3) \end{vmatrix},$$

и пусть аналогичные формулы имеют место для треугольника 134. (Здесь X, Y могут быть равны R, Z, u или v.) Тогда

$$V=\frac{1}{6}\left[(R_{123})\begin{vmatrix} R \\ Z \\ 123 \end{vmatrix}+(R_{134})\begin{vmatrix} R \\ Z \\ 134 \end{vmatrix}\right],$$

а изменение объема от цикла n к циклу $n+1$ таково:

$$\Delta V^{n+1/2}=\frac{\Delta t^{n+1/2}}{6}\left\{(u_{123})\begin{vmatrix} R \\ Z \\ 123 \end{vmatrix}+(u_{134})\begin{vmatrix} R \\ Z \\ 134 \end{vmatrix}+(R_{123})\begin{vmatrix} u \\ Z \\ 123 \end{vmatrix}+\right.$$

$$+(R_{134})\begin{vmatrix} u \\ Z \\ 134 \end{vmatrix}+(R_{123})\begin{vmatrix} R \\ v \\ 123 \end{vmatrix}+(R_{134})\begin{vmatrix} R \\ v \\ 134 \end{vmatrix}+$$

$$\left.+\frac{(\Delta t^{n+1/2})^2}{4}\left[(u_{123})\begin{vmatrix} u \\ v \\ 123 \end{vmatrix}+(u_{134})\begin{vmatrix} u \\ v \\ 134 \end{vmatrix}\right]\right\}.$$

Если $\delta V^n=V^n-V^0$, то $\delta V^{n+1}=\delta V^n+\Delta V^{n+1/2}$, а сжатие $(\eta)^{n+1}$ определяется следующей формулой:

$$(\eta)^{n+1}=1-\frac{(\delta V)^{n+1}}{V^{n+1}}.$$

В рассматриваемом методе каждая ячейка снабжена значком, который указывает тип среды, содержащейся в ячейке, и, следовательно, как должны рассчитываться напряжения. Простейшим случаем является гидродинамический. В этом случае весь расчет скоростей деформаций опускается. Элементы девиатора напряжений τ_i равны нулю, а давление вычисляется по простой аналитической зависимости

$$P=A(\eta)+B(\eta)E.$$

Во всех других случаях (упругой, пластичной, разрушенной среды) сначала вычисляют, какие изменения в напряжениях произошли бы для идеально упругого материала в соответствии с деформациями, которые имели место в предыдущем цикле Δt. Результирующие напряжения затем могут быть изменены так, чтобы учесть различного рода неупругие процессы (пластическое течение или разрушение).

Для расчета скоростей деформаций будут нужны следующие формулы:

$$2J^{n+1/2} = \begin{vmatrix} R \\ Z \\ 123 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R \\ Z \\ 134 \end{vmatrix}, \quad \frac{u}{R} = \frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{R_1+R_2+R_3+R_4},$$

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \frac{1}{2J}\left[\begin{vmatrix} u \\ Z \\ 123 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u \\ Z \\ 134 \end{vmatrix}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial Z} = \frac{1}{2J}[(u_2-u_4)(R_1-R_3)-(u_1-u_3)(R_2-R_4)],$$

$$\frac{\partial v}{\partial Z} = \frac{1}{2J}\left[\begin{vmatrix} R \\ v \\ 123 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R \\ v \\ 134 \end{vmatrix}\right],$$

$$\frac{\partial v}{\partial R} = \frac{1}{2J}[(v_1-v_3)(Z_2-Z_4)-(v_2-v_4)(Z_1-Z_3)].$$

Скорости деформаций определим следующим образом:

$$\dot{e}_{RR} = \frac{\partial u}{\partial R}, \quad \dot{e}_{ZZ} = \frac{\partial v}{\partial Z}, \quad \dot{e}_{\theta\theta} = \frac{u}{R},$$

$$\dot{e}_{RZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial R}\right), \quad \dot{\Theta} = \dot{e}_{RR} + \dot{e}_{\theta\theta} + \dot{e}_{ZZ},$$

где $\dot{\Theta}$ — скорость дилатации (объемного расширения). Если выразить скорости деформаций в девиаторной форме

$$\dot{e}_R = \dot{e}_{RR} - \frac{1}{3}\dot{\Theta} = \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{\partial v}{\partial Z} - \frac{u}{R}\right),$$

$$\dot{e}_z = \dot{e}_{ZZ} - \frac{1}{3}\dot{\Theta} = \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial v}{\partial R} - \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R}\right),$$

$$\dot{e}_\theta = \dot{e}_{\theta\theta} - \frac{1}{3}\dot{\Theta} = -(\dot{e}_R + \dot{e}_Z),$$

то закон Гука запишется в следующем виде:

$$\dot{P} = -k\dot{\Theta},$$

$$\dot{\tau}_i = 2\mu\dot{e}_i \quad (i = R,\ Z,\ RZ),$$

где k — модуль объемного сжатия, μ — модуль жесткости (модуль сдвига).

При расчете на вычислительной машине эти уравнения для P и τ_i слегка изменяются. Соотношение между давлением и сжатием берется в виде $P=P(\eta-1)$. Эта зависимость может быть линейной, что соответствует постоянному модулю объемного сжатия или, если это окажется необходимо, может учитывать переменную сжимаемость.

Выражения для τ_i видоизменяются путем включения малых корректирующих членов, учитывающих поворот элемента среды как твердой частицы. Если в течение предыдущего шага по времени ячейка повернулась на малый угол (рис. 7)

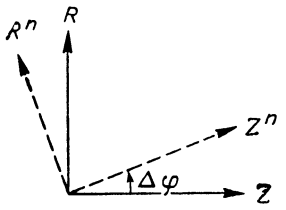


Рис. 7.

$$\Delta\varphi = \Delta t \operatorname{rot} \mathbf{u} = \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial Z} - \frac{\partial v}{\partial R}\right),$$

то напряжения повернулись вместе со средой. Для получения компонент напряжения в фиксированной системе координат R, Z следует найти компоненты вдоль R, Z этого слегка повернутого тензора напряжений. Сделав поворот на угол $-\Delta\varphi$, получим

$$\tau_{RR} = \tau^n_{RR}\cos^2\Delta\varphi + \tau^n_{ZZ}\sin^2\Delta\varphi + 2\tau^n_{RZ}\sin\Delta\varphi\cos\Delta\varphi,$$

$$\tau_{ZZ} = \tau^n_{RR}\sin^2\Delta\varphi + \tau^n_{ZZ}\cos^2\Delta\varphi - 2\tau^n_{RZ}\sin\Delta\varphi\cos\Delta\varphi,$$

$$\tau_{RZ} = (\tau^n_{ZZ} - \tau^n_{RR})\sin\Delta\varphi\cos\Delta\varphi + \tau^n_{RZ}(\cos^2\Delta\varphi - \sin^2\Delta\varphi),$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau^n_{\theta\theta}.$$

Это приводит к следующим изменениям элементов девиатора напряжений:

$$\Delta^{\text{rot}}\tau_R = (\tau^n_Z - \tau^n_R)\sin^2\Delta\varphi + 2\tau^n_{RZ}\sin\Delta\varphi\cos\Delta\varphi,$$

$$\Delta^{\text{rot}}\tau_Z = -\Delta^{\text{rot}}\tau_R,$$

$$\Delta^{\text{rot}}\tau_{RZ} = (\tau^n_Z - \tau^n_R)\sin\Delta\varphi\cos\Delta\varphi - 2\tau^n_{RZ}\sin^2\Delta\varphi.$$

Здесь $\Delta^{\text{rot}}\tau$ — поправка, равная $\tau^*-\tau^n$ (τ^* — исправленное значение τ). Предполагается, что для малых Δt этот поворот не зависит от тех искажений, которые вызываются изменением деформаций за время Δt. Таким образом, изменения напряжений на расчетной сетке можно представить как сумму изменений, обусловленных деформациями формоизменения, и изменений, обусловленных поворотом,

$$\tau_i^{n+1} = \tau_i^n + 2\mu(\Delta t)^{n+1/2}\dot{e}_i^{n+1/2} + \Delta^{\text{rot}}\tau_i, \qquad i = R,\ Z,\ RZ.$$

Эти величины вместе с вычисленным давлением определяют напряжения в момент t^{n+1}, если деформация была идеально упру-

гой. Если, однако, сопротивление среды сдвигу или растяжению было превзойдено, то тензор напряжений должен быть соответственно видоизменен. В следующих двух параграфах обсуждаются способы проверки и видоизменения напряжений, используемые в рассматриваемом методе и предназначенные для описания такого рода неупругого поведения материалов.

6. *Пластическая текучесть*

Пластическая текучесть характеризует неспособность реальных материалов выдерживать произвольно большие касательные напряжения. В расчетной схеме такое неупругое поведение среды можно учесть путем пробной проверки и подходящей модификации напряжений на каждом шаге по времени. Хотя в литературе имеется несколько критериев текучести, различие между ними обычно много меньше, чем неопределенности в используемых постоянных для материала. Простой и удобной формой является обобщенная форма критерия текучести Мизеса

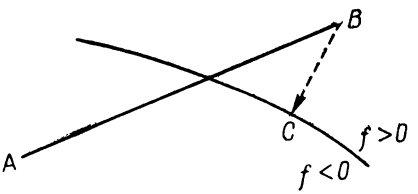


Рис. 8.

$$f = J_2 - K^2.$$

Здесь J_2 — инвариант девиатора напряжений

$$J_2 = \tau_R^2 + \tau_R\tau_Z + \tau_Z^2 + \tau_{RZ}^2,$$

а величина K соответствует сопротивлению сдвигу, которое можно сделать функцией давления, а также работы, совершенной над материалом в течение предшествующей пластической деформации (упрочнение). Если $f<0$, то материал ведет себя упруго, но если $f>0$, то превзойден предел сопротивления сдвигу и напряжения должны быть видоизменены так, чтобы сделать f равным нулю (рис. 8).

Случай $f=0$ соответствует поверхности, определяющей в пространстве напряжений пределы текучести. Используемый способ корректировки напряжений (закон текучести) перемещает точку, соответствующую напряженному состоянию, назад к поверхности вдоль нормали к ней. Таким образом, если на предыдущем шаге напряжения изменились от τ^n (обозначено точкой A на рис. 8) до значения τ^{n+1} (некорректированного), соответствующего точке B, то скорректированное напряжение для τ^{n+1} будет соответствовать точке C. В терминах некорректированного

напряжения τ и J_2 это правило приводит к соотношениям

$$\tau_i^* = \sqrt{\frac{K^2}{J_2}}\,\tau_i, \quad i = R,\ Z,\ RZ,$$

где τ_i^* — скорректированные (приведенные) напряжения. «Пластическая деформация» есть разность между полной деформацией, которая возникает под влиянием «избыточного» напряжения в точке B, и деформацией, которая возникла бы под действием приведенного напряжения, соответствующего точке C. Работа, совершенная на этих пластических деформациях, равна предельному напряжению, умноженному на пластическую деформацию. Она увеличивается от цикла к циклу в соответствии с соотношением

$$E_{\text{пласт}}^{n+1} = E_{\text{пласт}}^{n} + \frac{J_2}{\mu}\left[\sqrt{\frac{K^2}{J_2}} - \frac{K^2}{J_2}\right].$$

Так как сдвиговое разрушение может изменить свойства материала, то в численном методе предусмотрена возможность переобозначения материала ячейки в момент, когда в ней впервые возникает текучесть. Таким образом, можно построить грубую модель хрупкого, но первоначально прочного материала, приписывая ему очень большую постоянную K, но требуя изменения его свойств, когда впервые возникает текучесть. Образующийся новый материал может иметь свойства раздробленной горной породы, например, сопротивление сдвигу просто пропорционально давлению и отсутствует сопротивление растяжению.

Можно сделать очевидные обобщения условий текучести; величину K можно считать функцией давления (обобщенное условие пластичности Мизеса — Кулона), величины $E_{\text{пласт}}$ (один из законов упрочнения), внутренней энергии E (тепловой эффект) или скорости деформации. Условия текучести могут налагаться на «упругие» напряжения или на вязкие напряжения, а также на те и другие вместе. Условие Треска $\tau_{\text{касат}} < K$ можно учесть путем того же самого метода умножения девиаторных напряжений на некоторые величины, переводящего систему приведенных напряжений в состояние, соответствующее поверхности текучести. Следует заметить, что такая трактовка текучести допускает свободное перемещение напряженного состояния по поверхности текучести, т. е. главные оси напряжения и деформации могут свободно изменяться с течением времени.

7. Разрушение

Когда растягивающее напряжение в некотором элементе материала превышает сопротивление материала растяжению, образуется трещина, перпендикулярная направлению этого напряжения. Это направление, вообще говоря, не будет параллельно какой-нибудь из координатных осей R, Z, используемых

в данном методе. Можно показать, что для любой локальной системы напряжений существует такая система координат, в которой тензор напряжений приводится к диагональному виду. Элементы этого преобразованного тензора соответствуют наибольшему (и наименьшему) нормальному напряжению, испытываемому материалом. Это и есть то наибольшее напряжение, которое вызовет образование первой трещины, причем ориентация преобразованной системы координат будет соответствовать направлению трещины. В рассматриваемом методе поведение разрушенного трещиной материала имитируется путем приведения напряжений в ячейке к такому состоянию, чтобы отсутствовали нормальные напряжения поперек трещины.

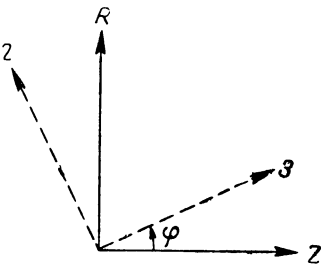


Рис. 9.

Следовательно, в то время как лагранжева ячейка, соответствующая разрушенному материалу, в действительности не делится на несколько кусков, напряжения в ячейке приводятся к значениям, соответствующим материалу, разрушенному таким образом. В методе также вычисляется изменение деформации, связанное с указанным приведением. Это изменение деформации пропорционально ширине трещины. Таким способом можно следить за изменением ширины трещины и продолжать приведение тензора напряжений к состоянию с нормальной к трещине составляющей, равной нулю до тех пор, пока трещина снова не сомкнется в более позднее время.

Преобразование тензора напряжений при переходе от принятой системы координат θ, R, Z к повернутой системе координат *1*, *2*, *3* (ось *1* параллельна оси θ (рис. 9)) дается равенствами

$$T_{11} = -(P + \tau_R + \tau_Z),$$
$$T_{22} = -P + \tau_R \cos^2\varphi + \tau_Z \sin^2\varphi - 2\tau_{RZ} \sin\varphi\cos\varphi,$$
$$T_{33} = -P + \tau_R \sin^2\varphi + \tau_Z \cos^2\varphi + 2\tau_{RZ} \sin\varphi\cos\varphi,$$
$$T_{23} = (\tau_R - \tau_Z)\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{RZ}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Здесь φ — угол между осью *3* и осью Z, T_{ij} — элементы полного (а не девиаторного) тензора напряжений. Если выбрать φ так, чтобы было $T_{23}=0$, то получим

$$T_{11} = -(P + \tau_R + \tau_Z),$$
$$T_{22},\ T_{33} = -P + \frac{1}{2}\left[\tau_R + \tau_Z \pm \sqrt{(\tau_R - \tau_Z)^2 + (2\tau_{RZ})^2}\right],$$
$$T_{23} = 0,\ \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\tau_{RZ}}{\tau_Z - \tau_R}\right).$$

Эти («главные») напряжения являются наибольшим и наименьшим напряжениями в материале, а соответствующая им специальная система координат называется главной системой координат. При численном подходе к вопросам разрушения главные напряжения (в неразрушенном материале) сравниваются с сопротивлением материала растяжению. Если один из них превышает предельное растягивающее напряжение, следует изменить величины P, τ_R, τ_Z и τ_{RZ} таким образом, чтобы эти приведенные величины соответствовали напряжениям в разрушенном материале. Выбор характера этого приведения основан на следующих предположениях:

а) Главные напряжения могут быть связаны с системой главных деформаций посредством постоянных Ляме

$$T_{ii}=\lambda\Theta+2\mu E_{ii}, \text{ где } \Theta=E_{11}+E_{22}+E_{33}.$$

Таким образом, предполагается, что связь между напряжениями и деформациями линейна в области, граничащей с разрушенным материалом.

б) Мы пренебрегаем возможностью заполнения трещин газом, поэтому требуем, чтобы напряжения, нормальные к поверхности трещины, были равны нулю.

в) Предполагаем, что при внезапном раскрытии трещины (или растяжении, сужении старой трещины) возникающее движение среды происходит нормально к поверхности трещины. Если, например, главное напряжение T_{33} превзошло сопротивление растяжению, то главная деформация E_{33} должна быть скорректирована, т. е. приведена к виду $E_{33}+\Delta E_{33}$, а другие главные деформации оставлены неизменными. Приведенные главные напряжения тогда будут такими:

$$T'_{11}=T_{11}+\lambda\,\Delta E_{33},$$
$$T'_{22}=T_{22}+\lambda\,\Delta E_{33},$$
$$T'_{33}=0,$$

где

$$\Delta E_{33}=\frac{-T_{33}}{\lambda+2\mu}.$$

г) Предполагаем, что трещина поворачивается вместе с материалом (величина поворота элемента как твердого тела за цикл равна $\Delta\varphi$) и что при образовании щели или ее расширении не происходит поворота главных осей координат. Теперь, сделав поворот на угол $-\varphi$, можно преобразовать приведенный тензор $(T'_{11}, T'_{22}, T'_{33})$ обратно к системе координат R, Z. Так как T'_{23}

равен нулю, то имеем

$$P' = -\frac{1}{3}(T'_{11} + T'_{22} + T'_{33}),$$
$$\tau'_R = P' + T'_{22}\cos^2\varphi + T'_{33}\sin^2\varphi,$$
$$\tau'_Z = P' + T'_{22}\sin^2\varphi + T'_{33}\cos^2\varphi,$$
$$\tau'_{RZ} = (T'_{33} - T'_{22})\sin\varphi\cos\varphi.$$

Величина поправки (ΔE_{33}) является мерой изменения ширины трещины в течение цикла (т. е. шага по времени). Расчетная схема следует за системой переменных (E_1, E_2, E_3), которые соответствуют суммам таких поправочных величин по предыдущим циклам. Поэтому на каждом последующем цикле можно узнать, есть ли старая трещина типа 3, путем проверки условия $E_3 \neq 0$. Если оказывается, что $E_3 < 0$, тогда T_{33} должно быть скорректировано и приведено к нулю, а новая величина E_3 будет равна $E_3^{\text{старое}} + \Delta E_{33}$. Если же окажется, что E_3 положительна, то это говорит о том, что трещина захлопнулась и должна быть сделана корректировка по формуле $\Delta E_{33} = -E_3^{\text{старое}}$ (при этом T_{33} не становится равным нулю). Конечно, возможно, что две взаимно перпендикулярные трещины могут возникнуть одновременно в одном и том же элементе среды. Поэтому, осуществляя приведение, описанное выше, нужно получающиеся (приведенные) главные напряжения сравнить с пределом прочности на растяжение. Если образовалась вторая трещина, то процесс приведения напряжений по существу остается таким же, как и прежде. Например, если обе величины E_1 и E_2 отрицательны, следует привести T_{11} и T_{22} к нулю по формулам

$$T'_{11} = 0, \qquad T''_{22} = 0,$$
$$T'_{33} = T_{33} + \lambda(\Delta E_{11} + \Delta E_{22}),$$

где

$$\Delta E_{11} = \frac{\lambda T_{22} - (\lambda + 2\mu) T_{11}}{2\mu(2\lambda + 2\mu)}, \quad \Delta E_{22} = \frac{\lambda T_{11} - (\lambda + 2\mu) T_{22}}{2\mu(2\lambda + 2\mu)},$$

а затем, как и прежде, преобразовать формулы обратно к координатам R, Z. После этого приведения оставшееся ненулевое главное напряжение проверяется на разрушение. Если образуется третья трещина, то все элементы тензора напряжения должны обратиться в нуль (физически это соответствует чему-то похожему на несжатый гравий). Когда это случается, то все компоненты тензора (P, τ_i) и ширина трещин E_i полагаются равными нулю и производится переобозначение материала ячейки. В последующих циклах материал описывается аналогично «песку» (нулевая прочность на растяжение и пропорцио-

нальная давлению прочность на сдвиг). В этой модели разрушения возникает одна потенциальная ошибка, связанная с тем, что в расчетной схеме не учитывается анизотропия, вызванная наличием ранее возникших трещин. Когда трещины захлопываются, считается, что прочность на растяжение не меняется (т. е. предполагается, что захлопнувшаяся трещина «залечивается»). При расчетах подземного взрыва этот вопрос не так важен, потому что горные породы для больших масштабов, фигурирующих в явлении, имеют почти нулевую прочность на растяжение (т. е. мы полагаем, что имеется много случайных, ранее существовавших, сомкнутых трещин). Можно, однако, переобозначить ячейку, когда в ней впервые возникает трещина, и впоследствии рассматривать ее как материал с нулевой прочностью, как при описании хрупкого скалывающего разрушения, рассмотренного в предыдущем параграфе.

Нужно отметить одно обстоятельство, связанное с расчетом нормального давления. Когда давление рассчитывается как функция от степени сжатия, то имеется в виду сжатие вещества рассматриваемой среды. Это — сжатие лагранжевой ячейки, исправленное с учетом размеров раскрытых трещин, которые могут существовать в рассматриваемой ячейке. Поэтому давление вычисляется по формуле

$$P = P(\eta - 1)_{\text{эфф}},$$

где

$$(\eta - 1)_{\text{эфф}} = (\eta - 1)_{\text{ячейки}} - E_1 - E_2 - E_3.$$

8. Демпфирование

Для демпфирования лишних колебаний используется искусственная вязкость, аналогичная искусственной вязкости, введенной впервые фон Нейманом и Рихтмайером [6] для расчета гидродинамических ударных волн путем замены скачка давления в ударной волне быстрым, но непрерывным изменением. В гидродинамике демпфирующий член, соответствующий искусственной вязкости, берется в виде

$$q = A\rho(\Delta u)^2,$$

где Δu — разность скоростей на границах ячейки, A — безразмерная постоянная, равная примерно 1/2. Эта форма вязкости, являясь удовлетворительной для сильных ударных волн в совершенном газе, дает недостаточно хорошее демпфирование звуковых сигналов в упругих твердых телах (если только постоянная A не выбирается очень большой). Эффективное демпфирование в звуковой области получается в том случае, когда используются вязкие члены, линейные по отношению к разности скоростей, вместо квадратичного соотношения, указанного выше.

Квадратичная вязкость q размазывает разрыв давления и скорости на ударном фронте на ограниченное число ячеек (как правило, на три), и это число остается постоянным по мере прохождения волны через сетку. Использование же линейных вязких членов, к несчастью, приводит к неограниченному размазыванию первоначально резкого сигнала. Этот эффект, вероятно, вызывал бы трудности при расчетах, связанных с распространением очень резких волновых фронтов через очень большое число ячеек. Однако в большинстве проведенных расчетов это обстоятельство не представляло серьезной проблемы. Сигнал диффундировал очень медленно, и волны напряжения сохраняли свою форму достаточно хорошо.

Подобно тензору напряжений, демпфирующие члены выражаются как сумма скалярного члена Q и тензора-девиатора с элементами Q_R, Q_Z, Q_{RZ}. В расчетах можно использовать несколько видов Q, хотя не все они могут использоваться одновременно. Скалярная часть вычисляется так:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

где

$$Q_1 = C_1 \rho (\Delta U)^2,$$

$$Q_2 = C_2 C \rho \sqrt{\Delta U^2},$$

$$Q_3 = C_3 C \rho \Delta X \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t}.$$

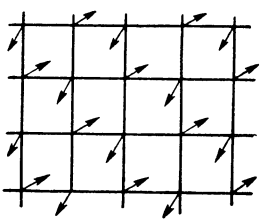


Рис. 10.

Здесь Q_1 — обычная (квадратичная) вязкость Неймана, Q_2 — линейная форма типа Q_1, которая эффективна только при низких скоростях, Q_3 — объемная вязкость, которая вместе с девиаторными членами Q_i соответствует тензору напряжений в вязком потоке, C_1, C_2, C_3 — безразмерные постоянные ($\approx 1/2$), C — скорость звука, ρ — плотность, ΔX — минимальный поперечный размер ячейки, V — объем ячейки, ΔU — средняя разность скоростей в ячейке, вычисляемая только тогда, когда ячейка сжимается; она полагается равной нулю, когда ячейка расширяется. Члены тензора-девиатора имеют вид

$$Q_i = C_4 C \rho \Delta X \dot{e}_i, \quad i = R, Z, RZ,$$

где $\dot{e}_i$ — три девиаторные скорости деформаций, о которых шла речь раньше.

Тензор искусственной вязкости гасит эффективно только те колебания скоростей, которые приводили бы к изменениям напряжения. Однако при некоторых расчетах встречаются распределения скоростей вида, указанного на рис. 10. Показанные скорости являются отклонениями от ожидаемого гладкого поля

скоростей. Эта картина была впервые замечена при расчете задачи о распространении сферической упругой волны, когда использовалась прямоугольная сетка. Та же самая картина, но с более мелкими амплитудами, обнаружилась в случае, когда среда рассматривалась как жидкость. Характерно, что этот скоростной «шум» имеет равные скорости в противоположных углах ячеек ($u_1=u_3$ и $u_2=u_4$) и не гасится при использовании

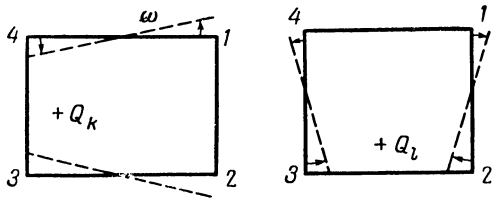


Рис. 11.

зависящего от скоростей деформаций тензора Q, описанного выше [1]). Эти возмущения, однако, легко гасятся Q-членом, зависящим от относительной скорости поворота противоположных сторон ячейки.

Скорость поворота стороны ячейки (например, 1, 4 рис. 11) дается выражением

$$\omega_{14}=\frac{(u_1-u_4)(Z_1-Z_4)-(v_1-v_4)(R_1-R_4)}{(R_1-R_4)^2+(Z_1-Z_4)^2}.$$

Пусть

$$Q_k=C_5C\rho\Delta X\frac{\partial\omega}{\partial k}=(C_5C\rho\Delta X)(\omega_{14}-\omega_{23}),$$

$$Q_l=-(C_5C\rho\Delta X)\frac{\partial\omega}{\partial l}=(C_5C\rho\Delta X)(\omega_{43}-\omega_{12}),$$

причем знаки выбираются так, чтобы Q действовало как положительное давление, если смотреть от точки 3, и как растяжение, если смотреть от противоположного угла ячейки. Возникающие ускорения (обозначенные «q-членами» в § 3) записы-

[1]) Скорости деформаций, вычисляемые в каждой ячейке, можно определить полностью через скорости изменений скалярного и векторного произведений векторов, соединяющих диагонально противоположные углы ячеек. Скоростной шум, который здесь рассматривается, соответствует относительному перемещению этих диагональных векторов и поэтому не порождает скоростей деформаций.

ваются так:

$$(\dot{u})^q_{61} = \frac{1}{(\rho J)_{61}}[(Q_l)_{C-B}\bar{Z}_{61}],$$

$$(\dot{v})^q_{61} = \frac{-1}{(\rho J)_{61}}[(Q_i)_{C-B}\bar{R}_{61}],$$

$$(\dot{u})^q_{81} = \frac{-1}{(\rho J)_{81}}[(Q_k)_{C-D}\bar{Z}_{81}],$$

$$(\dot{v})^q_{81} = \frac{1}{(\rho J)_{81}}[(Q_k)_{C-D}\bar{R}_{81}].$$

Если смотреть с другого конца ребра ячейки, то знаки меняются на обратные, так что

$$(\dot{u})^q_{12} = \frac{-1}{(\rho J)_{12}}[(Q_l)_{D-A})\bar{Z}_{12}] \text{ и т. д.}$$

9. *Уравнение энергии и контроль устойчивости*

Изменение внутренней энергии каждой ячейки вычисляется в течение каждого цикла. Для упруго-пластического материала, когда напряжения не зависят от внутренней энергии, эти вычисления не обязательны. Однако сохранение полной энергии задачи в целом дает полезное указание на то, что численный метод работает нужным образом.

В упруго-пластическом материале внутренняя энергия (на единицу первоначального объема) возрастает от цикла к циклу в соответствии с формулой

$$E^{n+1} = E^n + (2\bar{\tau}_R + \bar{\tau}_Z)\Delta e_R + (\bar{\tau}_R + 2\bar{\tau}_Z)\Delta e_Z + 2\bar{\tau}_{RZ}\Delta e_{RZ} - \bar{P}\frac{\Delta V}{V^0},$$

где центрированные по времени компоненты напряжения содержат тензор демпфирования, а именно

$$\bar{P} = \frac{1}{2}(P^n + P^{n+1/2}) + Q^{n+1/2},$$

$$\bar{\tau}_R = \frac{1}{2}(\tau^n_R + \tau^{n+1}_R) + Q^{n+1/2}_R \text{ и т. д.}$$

Здесь величины Δe_R, Δe_Z, Δe_{RZ} — изменения деформаций на последнем цикле, ΔV — изменение объема ячейки. Работа сил Q_k и Q_l (которые были введены в предыдущем параграфе) не учитывается.

В жидкой среде тензор-девиатор равен нулю, а давление вычисляется по простой полиномиальной формуле

$$P = A(\eta) + B(\eta)E,$$

где

$$A(\eta) = a_0 + a_1(\eta - 1) + a_2(\eta - 1)^2 + a_3(\eta - 1)^3,$$

$$B(\eta) = b_0 + b_1(\eta - 1) + b_2(\eta - 1)^2,$$

а сжатие ячейки вычисляется по формуле

$$\eta^{n+1} = 1 - \frac{\delta V^{n+1}}{V^{n+1}}.$$

Внутренняя энергия $E^{n+1} = E^n - \bar{P}\Delta V^{n+1/2}/V^0$ выражается через P^n и η^{n+1} следующим образом:

$$E^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{B(\eta)\,\Delta V}{2V^0}} \left[E^n - \left(Q + \frac{P^n + A(\eta)}{2} \right) \frac{\Delta V^{n+1/2}}{V^0} \right].$$

Для того чтобы быть уверенным в устойчивости конечно-разностных уравнений, следует ограничить величину шага по времени Δt. В случае жидкости без искусственной вязкости можно показать, что возмущения не будут ни расти, ни убывать, если

$$\Delta t \leqslant \Delta L / C,$$

где ΔL — ширина ячейки, а C — скорость звука (т. е. Δt должно быть меньше времени, которое требуется звуковому сигналу для прохождения ячейки). Наличие демпфирующих членов приводит к несколько более строгому условию устойчивости. Мы не проводили анализа условия устойчивости в рассматриваемом случае наличия тензорных сил и таких усложняющих явлений, как разрушение и пластическое течение. Удовлетворительная устойчивость наблюдается в случае, когда Δt ограничивается величиной, вдвое меньшей вышеуказанной.

В упруго-пластическом материале используется продольная скорость звука

$$C^2 = \frac{1}{\rho}(\lambda + 2\mu).$$

В ячейке, содержащей жидкость, имеем

$$C^2 = \frac{1}{\rho^0} \left[\frac{\partial A(\eta - 1)}{\partial(\eta - 1)} + E \frac{\partial B(\eta - 1)}{\partial(\eta - 1)} + \frac{PB(\eta - 1)}{\eta^2} \right].$$

Для каждой ячейки вычисляется максимально допустимый шаг по времени

$$\Delta t = K_0 \frac{\Delta L}{C} \quad \left(K_0 \approx \frac{1}{2} \right),$$

а затем наименьшее значение принимается за Δt для всей сетки в течение следующего цикла.

10. Примеры

Для иллюстрации возможностей и пределов применимости метода в этом параграфе даны два примера расчетов. Это одномерные проверочные задачи, допускающие сравнение с аналитическими решениями.

А. Сферическая упругая волна

В качестве первого примера мы рассмотрим задачу о волне напряжения, порождаемой в бесконечной упругой среде под действием экспоненциально убывающего давления в сферической каверне. Аналитическое решение этой задачи было дано Блэйком [1]. Было проведено несколько расчетов по методу «Тензор» с применением различных размеров ячеек разных констант демпфирования и т. д., а затем производилось сравнение с решением Блэйка.

Расчетная сетка для одной из этих задач показана на рис. 1. Сферическая поверхность аппроксимируется «многогранником

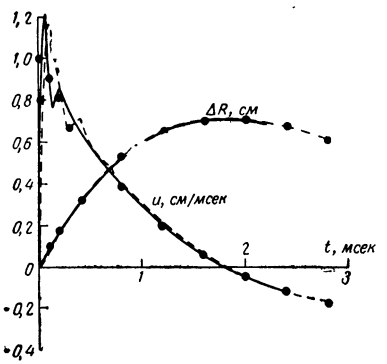


Рис. 12. Скорость внутренней поверхности u и смещение ΔR.

– – – задача A (размер ячейки 50 *см*);
—— задача $A-1$ (размер ячейки 25 *см*);
● аналитическое решение.

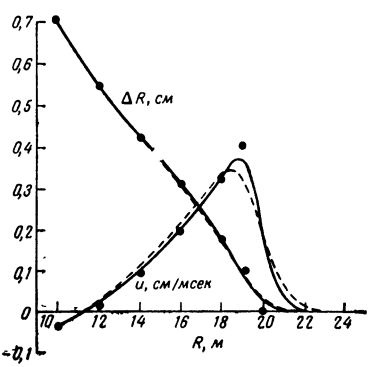


Рис. 13. Распределение по радиусу скоростей и смещений при $t=2$ *мсек*.

– – – задача A (размер ячейки 50 *см*);
—— задача $A-1$ (размер ячейки 25 *см*);
● аналитическое решение.

вращения». «Угловая ширина» ячеек (в приведенном случае 3°) почти не влияет на результирующее движение. Сравнение решения с ячейками 10° дает скорости, напряжения и т. д., отличающиеся меньше чем на один процент от результатов расчета при сетке с ячейками 3°.

Были использованы граничные условия на твердой стенке при $l=0$ и $l_{\max}=3$, а изменение давления на внутренней границе ($K=0$) бралось в виде $P=e^{-t}$ *кбар* (t — время в *мсек*). Внешняя граница ($K_{\max}=40$) была свободной поверхностью. Это условие, конечно, ограничивало время, в течение которого задачу можно рассматривать как задачу для безграничной среды. Значения упругих констант указаны на рис. 1. Были использованы следующие константы в формуле вязкости: $C_3=0{,}1333$, $C_4=0{,}1$ (это эквивалентно величине демпфирования для продольных

волн, равной 0,2). Влияние размеров ячеек показано на втором решении (A—1), в котором использовались те же самые константы, но было удвоено число радиальных ячеек ($K_{\max}=80$).

Вычисленные скорости и смещения показаны на рис. 12 и 13 вместе с аналогичными величинами, найденными из решения Блэйка. Согласие с аналитическим решением в общем весьма удовлетворительно.

Единственное существенное расхождение можно заметить в начальном «выборе» и колебаниях внутренней границы ($K=0$) на рис. 12 и в размывании фронта волны при $R=20$ *м* на рис. 13. Начальный выброс можно, конечно, погасить путем использования больших значений констант в Q, но это приведет к соответственно большему размыванию фронта волны в более поздние времена. Использование более мелкой сетки в решении A—1 приводит лишь к небольшому количественному изменению результатов. Это до некоторой степени обнадеживает, потому что при расчете двумерных задач соображения, связанные с расходом машинного времени, требуют, чтобы использовалась более грубая сетка. Вместе с тем видно, что в то время как общая картина движения рассчитывается довольно хорошо, метод не позволяет воспроизводить пики скорости и напряжения, сосредоточенные на небольшом числе ячеек. Плохое описание коротких (в терминах размеров ячеек) волн является характерным для разностных схем такого типа и имеет место даже для звуковых возмущений в одномерных задачах о движении жидкости.

Б. Пластичная сферическая оболочка

Для сравнения результатов расчета пластичности по данному методу с аналитическим решением было необходимо рассмотреть систему, находящуюся в статическом равновесии. Хотя метод предназначен для исследования нестационарных динамических эффектов, не существует точного аналитического решения, описывающего динамические пластические деформации[1]). Поэтому проверочные расчеты были проведены для существенно более простого случая толстой сферической оболочки, нагруженной внутренним давлением, достаточным, чтобы вывести напряжения во внутренних частях в точку текучести [3]. Геометрия задачи показана на рис. 14. Было использовано разбиение на ячейки, подобное случаю задачи A.

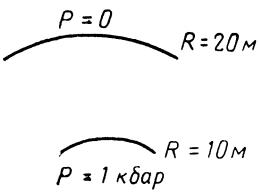


Рис. 14.

[1]) Это утверждение не соответствует действительности. Точное решение можно получить, например, для этой же задачи в предположении несжимаемости среды (в этом случае задача сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений). — *Прим. ред.*

При предельном напряжении на сдвиг, равном 0,5 *кбар*, материал должен был перейти в пластическое состояние в области между внутренней поверхностью и сферой радиуса 14,49 *м*, а вне этой области оболочка должна остаться упругой. Для того чтобы подавить инерционные внутренние эффекты, могущие привести к необратимому выбросу за равновесное состояние, использовался метод «релаксации». Через частые промежутки времени (1 или 2 *мсек*) все скорости полагались равными нулю. Таким образом, после ряда слабых движений оболочка должна была постепенно приблизиться к равновесной конфигурации.

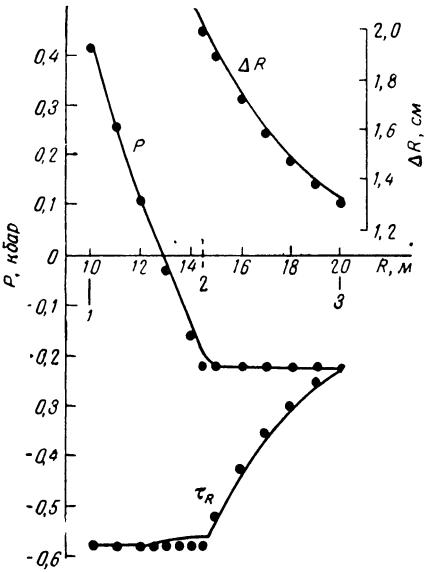


Рис. 15. Задача *B* для метода «Тензор».
—— результаты по методу «Тензор» (время 20 *мсек*); ● аналитическое решение (равновесие). *1* — внутренняя поверхность, *2* — равновесная граница, *3* — внешняя поверхность.

Распределения напряжений и смещений в оболочке при $t=20$ *мсек* показаны на рис. 15. Так как вычисленные смещения превышают равновесные значения, то, очевидно, следовало бы скорости полагать равными нулю более часто. Однако рассчитанные напряжения весьма близки к ожидаемым равновесным величинам и, вероятно, еще лучше совпали бы с ними, если бы процесс релаксации был продолжен дальше. Этот процесс не был продолжен дальше, так как приближение к равновесию становится крайне медленным (напряжения изменились только на несколько процентов в течение последних 5 *мсек*).

Литература

1. Blake F. G., Jr., *J. Acoust. Soc. Am.*, 24, 211 (1952).
2. Brode H. L., Bjork R. L., RAND Rept. RM-2600, 1960.
3. Хилл Р., Математическая теория пластичности, «Физматгиз», М., 1957.
4. Nuckolls J. H., Lawrence Radiation Laboratory (Livermore), Report UCRL 5657, Part I, pp. 120—134, 1959.
5. Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1946.
6. von Neumann J., Richtmyer R. D., *J. Appl Phys.*, 21, 232 (1950) (имеется сокращенный русский перевод: сб. *Механика*, № 1 (1951), 27).

Расчет упруго-пластических течений

М. Л. УИЛКИНС

Калифорнийский университет, Лоуренсовская лаборатория радиации, Ливермор, Калифорния

1. Введение 212
2. Уравнения состояния 213
3. Одномерные упруго-пластические течения 225
4. Двумерные упруго-пластические течения 228
Приложение I. Конечно-разностные уравнения для задач § 3 . . . 243
Приложение II. Конечно-разностные уравнения для задач § 4 . . . 246
Литература 263

1. Введение

Первое, что требуется для расчета упруго-пластических течений, это задание уравнения состояния. Уравнение состояния должно описывать упругую, упруго-пластическую и гидродинамическую стадии движения. Для последних двух режимов движения должны быть сформулированы соответствующие критерии текучести. В литературе имеется много усложненных форм уравнений состояния, некоторые из которых были разработаны для облегчения математического исследования при аналитическом решении уравнений движения. Однако поскольку ниже рассматриваются численные методы, можно не связывать уравения движения с каким-либо конкретным видом реологического уравнения состояния и брать его в любой форме. Уравнение состояния должно обеспечить теоретическое описание явлений, пригодное для широкого класса практических задач, и основываться на простых идеализациях существенных свойств реальных процессов.

Задачи, представляющие наибольший интерес в настоящее время, относятся к теории пластичности металлов, однако процессы, на которые влияет скорость деформирования, например, все еще недостаточно хорошо изучены экспериментально. Вследствие этого пластическое состояние будет описываться путем непрерывной корректировки напряжений, так чтобы не был превышен предел текучести материала. Можно будет использовать и более усложненные описания, если в этом возникнет необходимость, продиктованная экспериментом.

Настоящая работа разбита на три части: уравнения состояния (§ 2); одномерные упруго-пластические течения (§ 3) и двумерные упруго-пластические течения (§ 4).

2. *Уравнения состояния*

А. Упругая область

Мы будем рассматривать только среды, свойства которых одинаковы во всех направлениях (изотропные среды).

В координатах x, y, z напряженное состояние сплошной среды в данной точке определяется шестью компонентами напряжений σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx} и τ_{xy} [8]. Известно [12], что всегда можно так выбрать оси координат, что касательные напряжения обратятся в нуль в данной точке, т е. $\tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau_{xy}=0$. Любые три взаимно перпендикулярные оси, для которых выполнено это условие, называются главными осями для рассматриваемой точки. Напряжения в направлениях главных осей на площадках, перпендикулярных этим осям, называются главными напряжениями и обозначаются σ_1, σ_2, σ_3.

Совершенно упругий материал характеризуется линейной зависимостью между напряжениями и деформациями. Для нахождения напряжений в точке, обусловленных деформациями в этой точке, применяется закон Гука. Сами же деформации зависят от сил, вызывающих смещение частиц среды. Закон Гука в терминах приращений деформаций и порождаемых ими приращений напряжений можно записать в следующем виде:

$$\dot{\sigma}_1=\lambda\frac{\dot{V}}{V}+2\mu\dot{\varepsilon}_1,\quad \dot{\sigma}_2=\lambda\frac{\dot{V}}{V}+2\mu\dot{\varepsilon}_2,\quad \sigma_3=\lambda\frac{\dot{V}}{V}+2\mu\dot{\varepsilon}_3. \qquad (1)$$

Здесь λ и μ постоянные Ляме; $\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_2$, $\dot{\varepsilon}_3$ — скорости деформаций в направлениях, указанных индексами; V — объем. Точка означает производную по времени вдоль траектории частицы.

Необходимо заметить, что использование производной по времени позволяет записать в удобном виде дифференциальные соотношения между напряжениями и деформациями, но это не означает, что вводится соотношение между деформациями и напряжениями, зависящее от скоростей их изменения [6]. Применение закона Гука в таком виде позволяет определить естественную деформацию, т. е. деформацию элемента, отнесенную к текущей конфигурации, а не к первоначальной.

Напряжения в среде можно мыслить состоящими из напряжений, связанных с равномерным гидростатическим давлением (все три нормальных напряжения равны), плюс напряжения, характеризующие сопротивляемость материала деформациям сдвига. При описании текучести и пластического течения мы хотим ограничить лишь ту часть напряжений, которая обусловлена деформациями сдвига. Поэтому мы разложим каждое напряжение σ_1, σ_2, σ_3 на гидростатическую составляющую P и девиаторную часть s, где $-P$ — среднее арифметическое трех напряжений,

$-P=1/3(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$; т. е. будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -P+s_1, \quad \sigma_2 = -P+s_2, \quad \sigma_3 = -P+s_3, \\ \dot{\sigma}_1 &= -\dot{P}+\dot{s}_1, \quad \dot{\sigma}_2 = -\dot{P}+\dot{s}_2, \quad \dot{\sigma}_3 = -\dot{P}+\dot{s}_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь используются обычные обозначения, так что напряжения положительны при растяжении и отрицательны при сжатии, а знак их противоположен давлению; следовательно, перед давлением нужно поставить знак минус. Определим среднюю нормальную деформацию и ее скорость следующим образом [8]:

$$\theta = \tfrac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3), \quad \dot{\theta} = \tfrac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_1+\dot{\varepsilon}_2+\dot{\varepsilon}_3). \tag{3}$$

Нормальные компоненты девиатора деформаций равны

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \varepsilon_1-\theta, \quad \theta_2 = \varepsilon_2-\theta, \quad \theta_3 = \varepsilon_3-\theta, \\ \dot{\theta}_1 &= \dot{\varepsilon}_1-\dot{\theta}, \quad \dot{\theta}_2 = \dot{\varepsilon}_2-\dot{\theta}, \quad \dot{\theta}_3 = \dot{\varepsilon}_3-\dot{\theta}. \end{aligned} \tag{4}$$

Из уравнения неразрывности имеем

$$\dot{\varepsilon}_1+\dot{\varepsilon}_2+\dot{\varepsilon}_3 = \dot{V}/V. \tag{5}$$

Отсюда следует, что $\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3=0$, $\dot{\theta}=\frac{1}{3}\dot{V}/V$.

Используя введенные обозначения, можно теперь записать закон Гука (1) в виде

$$\dot{s}_1 = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_1-\tfrac{1}{3}\dot{V}/V\right), \quad \dot{s}_2 = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_2-\tfrac{1}{3}\dot{V}/V\right),$$

$$\dot{s}_3 = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_3-\tfrac{1}{3}\dot{V}/V\right), \quad \dot{P} = -K\dot{V}/V, \quad K=\left(\lambda+\tfrac{2}{3}\mu\right), \tag{6}$$

где K — модуль объемного сжатия. Из (5) и (6) следует, что

$$\dot{s}_1+\dot{s}_2+\dot{s}_3 = 0, \tag{7}$$

$$s_1+s_2+s_3 = 0, \tag{8}$$

т. е. условие того, что компоненты девиатора напряжений не дают вклада в среднее давление.

Б. Область пластического течения

Будем использовать условие текучести Мизеса для описания предела упругости [13]. Если главные напряжения известны, то условие текучести записывается так:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2(Y^0)^2, \tag{9}$$

где Y^0 — предел текучести для простого растяжения.

Левая часть этого выражения пропорциональна упругой энергии сдвига, рассчитанной на единицу объема, или энергии, которая требуется для изменения формы, а не для изменения объема [7]. Поэтому соотношение (9) означает, что пластическое течение начинается тогда, когда энергия упругого сдвига достигает предельной величины $[(Y^0)^2/6\mu]$, и что эта энергия остается постоянной в процессе пластического течения. Таким образом, термин «упруго-пластический» означает состояние, при котором сдвиговые компоненты (характеризующие изменение формы) деформированного материала, подверженного действию нагрузок, подчиняются закону Гука до такого состояния, при котором вещество не может больше накапливать упругую энергию. Все последующие сдвиговые деформации вызовут пластическое течение, и будет совершаться работа пластического деформирования. Выражение в левой части равенства (9) можно интерпретировать также через предел сопротивления сдвигу. Уравнение (9) можно истолковать разными способами, для нас же здесь важно лишь то, что на пределе упругости выражение в левой части становится равным постоянной величине.

Мы изберем интерпретацию этой постоянной как предела текучести Y^0 при простом растяжении. Если производится растяжение в направлении σ_1, а боковые напряжения σ_2 и σ_3 равны нулю, то из уравнения (9) находим $\sigma_1 = Y^0$. При простом растяжении возникает двумерное течение, так как для обращения в нуль боковых напряжений должны иметь место деформации в боковых направлениях. Фактически величина $\dot{\varepsilon}_2/\dot{\varepsilon}_1$ для этого случая есть отношение Пуассона. Заметим также, что уравнение (9) предполагает равенство пределов текучести при растяжении и сжатии (отсутствие эффекта Баушингера).

В пространстве σ_1, σ_2, σ_3 уравнение (9) описывает поверхность прямого кругового цилиндра. Ось этого цилиндра имеет одинаковый наклон к осям системы координат σ_1, σ_2, σ_3, как это указано на рис. 1, *а*. Радиус цилиндра равен $\sqrt{2/3}\,Y^0$. Воспользуемся дальше девиаторами главных напряжений, удовлетворяющими условию $s_1+s_2+s_3=0$ [см. уравнение (8)]. Это — уравнение плоскости, проходящей через начало осей главных напряжений. Пересечение этой плоскости с цилиндром (9) дает круг (рис. 1, *а*). Если девиатор напряжений s_1, s_2, s_3 дает точку внутри круга, то материал находится в области упругости.

Когда материал нагружается за пределом упругости и затем разгружается, то восстанавливается только энергия упругого сдвига. Работа, совершенная над материалом в пластическом состоянии, не восстанавливается. Другая форма этого утверждения сводится к тому, что пути нагрузки и разгрузки неодинаковы, когда материал нагружается за пределом упругости (на рис. 2, *а* линия *OAB* — путь нагружения, а *BC* — путь разгрузки).

Друккер [2] показал, что работа, проделанная над материалом в течение цикла нагрузки и разгрузки, должна быть положительной или равной нулю; эта работа равна нулю, если имели место только чисто упругие деформации. Далее, приращение

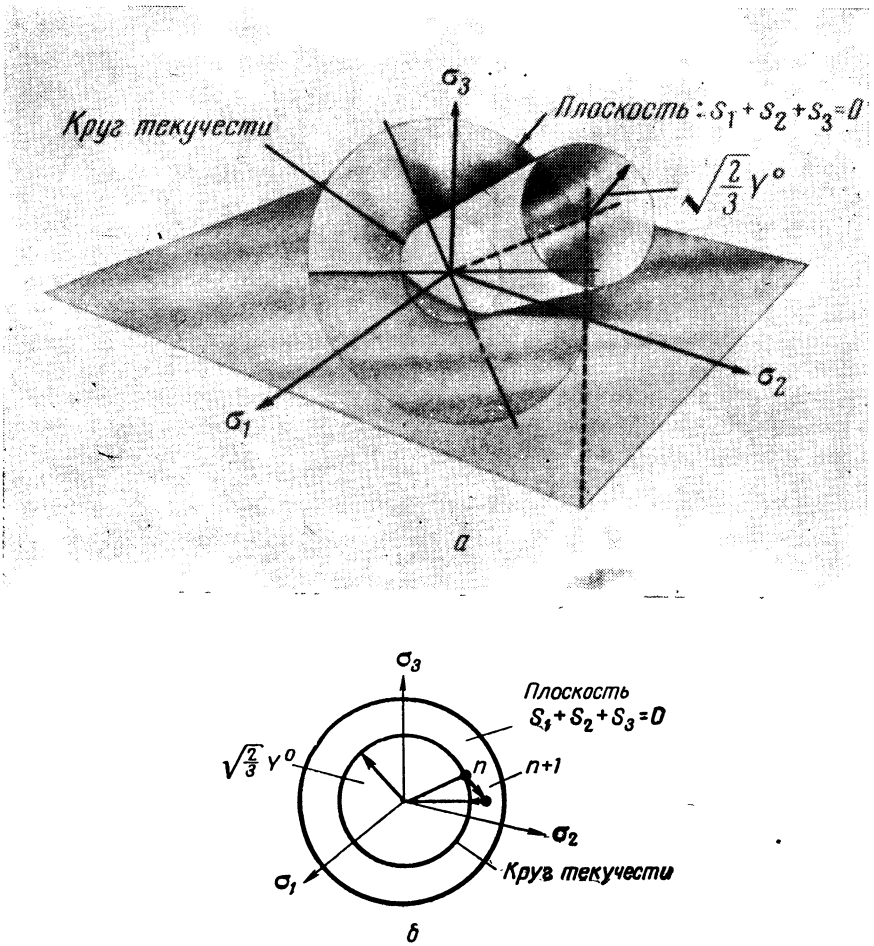


Рис. 1. Условие текучести Мизеса.

пластической деформации должно быть ортогонально к поверхности текучести, отделяющей упругие и упруго-пластические состояния.

Пластическое течение мы будем описывать путем сохранения девиатора напряжений (s_1, s_2, s_3) на пределе упругости. На

рис. 1, *б* показаны напряжения в состоянии n. Будем считать, что после приращения деформаций напряжения изменились и находятся в состоянии $n+1$. Однако состояние $n+1$ находится за кругом текучести, и, по нашему предположению, это состояние не может достигаться. Вместо этого мы будем считать, что в материале происходит пластическое течение, а напряжения остаются на пределе упругости, т. е. на круге текучести.

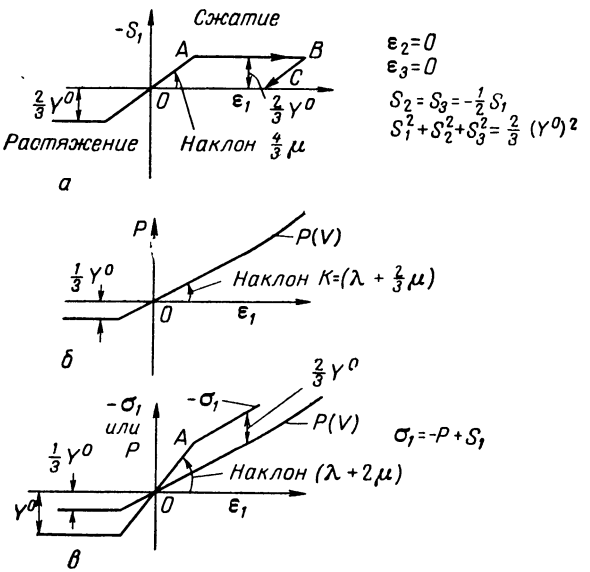


Рис. 2. Одномерная деформация идеально пластического материала.

Пластическая часть деформаций перпендикулярна к кривой текучести, и мы хотим ограничить именно те напряжения, которые связаны с этой частью деформаций. Поэтому новое напряженное состояние вместо состояния $n+1$ будет соответствовать точке, которая находится на перпендикуляре к предельной окружности, проведенном из точки, соответствующей состоянию $n+1$. Одномерный аналог показан на рис. 2, *а*, где напряжение $-s_1$ принимает максимальное значение для всех деформаций, превышающих предел упругости, соответствующий точке A. Таким образом, суммируя предположения о текучести, мы можем написать

$$(s_1-s_2)^2+(s_2-s_3)^2+(s_3-s_1)^2\leqslant 2(Y^0)^2,$$
$$s_1+s_2+s_3=0, \qquad (10)$$

или

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leqslant \frac{2}{3}(Y^0)^2. \tag{11}$$

Если избыточное изменение напряжений в некотором элементе приведет к нарушению этого неравенства, то главные напряжения девиатора (s_1, s_2, s_3) должны быть скорректированы, чтобы неравенство (11) снова выполнялось. Для вычисления девиатора напряжений [уравнение (6)] воспользуемся законом Гука. Если некоторая точка попала в область вне круга текучести (рис. 1, *б*), то она переносится на окружность вдоль радиуса-вектора точки, т. е. перпендикулярно к окружности. Этот перенос осуществляется умножением каждого из элементов девиатора напряжений (s_1, s_2, s_3) на множитель

$$\sqrt{\frac{2}{3}}Y^0 / \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}.$$

Такое приведение напряжений (перпендикулярно к кругу текучести) влияет только на пластическую часть напряжений. Наблюдаемая в опытах «несжимаемость пластического состояния» здесь неявно подразумевается. Заметим, что как для упругого, так и для упруго-пластического состояний всегда имеется основная «гидростатическая» часть напряжений (давление), и эта часть не зависит от пластического течения. Это находится в согласии с наблюдаемым поведением «мягких» металлов.

Сказанное выше относится к идеально пластической среде, т. е. среде, в которой пластическое течение происходит при постоянном напряжении, среде, не обладающей упрочнением (рис. 2). Для материалов с упрочнением напряжение ($-s_1$) будет увеличиваться монотонно вместе с деформацией (ε_1) для значений деформаций за точкой A, а не будет оставаться постоянным, как это было для идеально пластического материала. Упрочнение можно учесть при вычислениях, считая, например, постоянную Y^0, входящую в уравнение (9), функцией энергии деформации. В том случае, когда затраченная работа достаточна для расплавления материала, величину Y^0 можно положить равной нулю. При этом получится чисто гидродинамическое описание, так как в соответствии с описанной выше процедурой девиатор напряжений автоматически обратится в нуль, а оставшиеся напряжения сведутся к давлению P. Зависимость от времени предельного условия текучести макроскопически можно учесть посредством задания повышенного значения константы текучести Y^0 для условий, когда скорости деформаций ($\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_2$, $\dot{\varepsilon}_3$) превышают некоторую заданную величину.

В области отрицательных давлений величина давления ограничена значением $P = -\frac{1}{3}Y^0$, соответствующим испытанию на простое растяжение. Окончательно полная система уравнений

состояния примет следующий вид [1]):

$$(1)\ \begin{cases} \sigma_1 = -P + s_1, \\ \sigma_2 = -P + s_2, \\ \sigma_3 = -P + s_3, \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \dot{s}_1 = 2\mu\left[\dot{\varepsilon}_1 - \frac{1}{3}\dot{V}/V\right], \\ \dot{s}_2 = 2\mu\left[\dot{\varepsilon}_2 - \frac{1}{3}\dot{V}/V\right], \\ \dot{s}_3 = 2\mu\left[\dot{\varepsilon}_3 - \frac{1}{3}\dot{V}/V\right], \end{cases}$$

$$(3)\ s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leqslant \frac{2}{3}(Y^0)^2, \quad (4)\ s_1 + s_2 + s_3 = 0, \quad (5)\ P = P(V), \quad (6)\ P_{\min} = -\frac{1}{3}Y^0. \qquad (12)$$

[1]) Описанная здесь процедура исправления напряжений s_i, вычисляемых по соотношениям (12), требует пояснений. Уравнения, связывающие девиатор напряжений со скоростями деформаций при возникновении пластического течения, в рассматриваемом случае имеют вид, отличный от соответствующих формул в (12), а именно они таковы:

$$2\mu\left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3}\frac{\dot{V}}{V}\right) = \dot{s}_i + \lambda s_i; \qquad (1^*)$$

здесь λ определяется с использованием условия текучести формулой

$$\lambda = \frac{3\dot{W}}{2(Y^0)^2}e(\dot{W}), \quad \dot{W} \equiv 2\mu\sum_i s_i\left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3}\frac{\dot{V}}{V}\right), \quad \text{где} \quad e(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Если обозначить $2\mu\left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3}\frac{\dot{V}}{V}\right) = \dot{s}_i^e$, то (1*) запишется в виде

$$\dot{s}_i^e - \dot{s}_i = \lambda s_i, \quad \lambda = \frac{3}{2(Y^0)^2}\left(\sum_i s_i \dot{s}_i^e\right), \qquad (2^*)$$

т. е. разность между приращениями напряжений, вычисленными по закону Гука $\Delta s_i^e = \dot{s}_i^e \Delta t$, и приращениями истинных напряжений, $\Delta s_i = \dot{s}_i \Delta t$, оказывается вектором (в пространстве s_1, s_2, s_3), направленным по нормали к кругу текучести. С другой стороны, поскольку $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2/3(Y^0)^2 = \text{const}$, то $s_i \Delta s_i = 0$, т. е. вектор Δs_i лежит на касательной к кругу текучести. Отсюда непосредственно следуют операции исправления напряжений, т. е. перехода от s к s_i в момент $t + \Delta t$, описанные в тексте работы. Эта процедура исправления сводится к формулам

$$\frac{s_i}{s_i^e} = q = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}Y^0}{\sqrt{(s_1^e)^2 + (s_2^e)^2 + (s_3^e)^2}},$$

которые можно получить из соотношения (2*), если записать его в виде $s_i^e - s_i = s_i \frac{3}{2(Y^0)^2}\sum_j s_j(s_j^e - s_j)$, подставить сюда $s_i = q s_i^e$ и учесть, что

$$\sum_i s_i^2 = \frac{2}{3}(Y^0)^2.$$

Таким образом, эта процедура приведения напряжений, вычисляемых по формулам (12), к кругу текучести эквивалентна полным соотношениям (1*) закона пластического течения. — *Прим. ред.*

В. Экспериментальное уравнение состояния

Рассмотрим одномерную ударную волну, распространяющуюся в среде так, что в направлении x материал деформируется, а в направлении y и z деформации равны нулю. Такая геометрическая картина имеет место при экспериментальном получении данных для уравнения состояния Гюгонио (ударной адиабаты). Существуют ударные волны, которые переводят материал из упругого состояния в упруго-пластическое состояние [3].

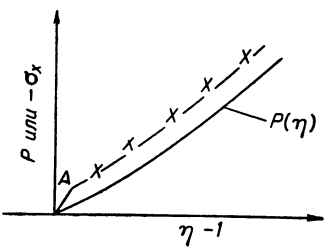


Рис. 3. Адиабата Гюгонио для упруго-пластического материала.

Для одномерного движения координаты x, y, z дают главные направления, так что в соответствии с уравнениями (6) для трех компонент девиатора напряжений s_x, s_y, s_z можем написать

$$\dot{s}_x = 2\mu\,(\dot{\varepsilon}_x - 1/3\ \dot{V}/V),$$
$$\dot{s}_y = 2\mu\,(0 - 1/3\ \dot{V}/V),$$
$$\dot{s}_z = 2\mu\,(0 - 1/3\ \dot{V}/V). \qquad (13)$$

Полное напряжение в направлении x равно

$$\sigma_x = -P + s_x. \qquad (14)$$

Будем считать, что напряжение σ_x получено посредством измерений при прохождении ударной волны для построения соотношения Гюгонио (рис. 3).

Для одномерного течения уравнение неразрывности дает $\dot{\varepsilon}_x = \dot{V}/V$. Полная система уравнений состояния в одномерном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \sigma_x = -P + s_x, && (3)\ (s_x^2 + 2s_y^2) \leqslant \tfrac{2}{3}\,(Y^0)^2,\\
&(2)\ \begin{cases} \dot{s}_x = 2\mu\left[\dot{V}/V - \tfrac{1}{3}\,\dot{V}/V\right], \\ \dot{s}_y = 2\mu\left[-\tfrac{1}{3}\,\dot{V}/V\right], \end{cases} && (4)\ s_x + 2s_y = 0,\\
& && (5)\ P = P(V),\\
& && (6)\ P_{\min} = -\tfrac{1}{3}\,Y^0. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Ниже предела упругости, т. е. до точки A, имеем

$$\dot{P} = -K\dot{V}/V, \quad \dot{s}_x = 2\mu\left[\dot{V}/V - \tfrac{1}{3}\,\dot{V}/V\right], \text{ или}$$

$$P = -K\ln V, \quad \sigma_x = K\ln V + \tfrac{4}{3}\,\mu\ln V = \left(K + \tfrac{4}{3}\,\mu\right)\ln V,$$

$$s_x = \tfrac{4}{3}\,\mu\ln V = -2s_y. \qquad (16)$$

В точке A имеем

$$(s_x^2+2s_y^2)_A=\frac{2}{3}(Y^0)^2,$$

или

$$(24/9)(\mu \ln V_A)^2=\frac{2}{3}(Y^0)^2, \quad Y^0=2\mu|\ln V_A|=\frac{2\mu(\sigma_x)_A}{\lambda+2\mu}. \quad (17)$$

Отсюда можно получить максимальное значение предела текучести Y^0, если известны константы Ляме и предел упругости для адиабаты Гюгонио.

Для точек выше A имеем

$$(s_x^2+2s_y^2)=\frac{2}{3}(Y^0)^2.$$

Это соотношение с помощью четвертого уравнения из формул (15) приводит к виду

$$s_x=\pm\frac{2}{3}Y^0. \quad (18)$$

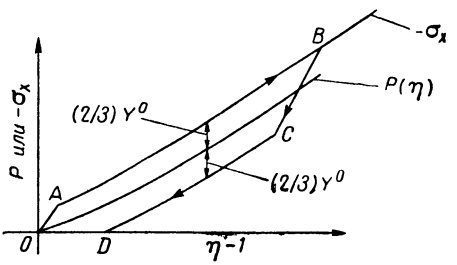


Рис. 4. Кривые нагрузки и разгрузки для упруго-пластического материала.

(Если материал течет, то при растяжении $s_x>0$, а при сжатии $s_x<0$, причем $Y^0>0$ всегда.) Таким образом, общее напряжение, получающееся при переходе скачком от $\sigma_x=0$ до значения σ_x, выше точки A можно представить так:

$$-\sigma_x=P(V)+\frac{2}{3}(Y^0), \quad (19)$$

причем $P(V)$ можно записать в виде

$$P(\eta)=a(\eta-1)+b(\eta-1)^2+c(\eta-1)^3. \quad (20)$$

Здесь $\eta=\frac{V}{V_0}$, V_0 — начальный объем, a, b, c — такие постоянные, что $P(\eta)+2/3(Y^0)$ дает кривую Гюгонио для ударных волн с напряжениями выше предела упругости. Для давлений ниже предела упругости имеем $P(\eta)=-K\ln V$. Если использовать уравнения состояния, заданные соотношениями (15), то получим кривую нагрузки O, A, B (рис. 4) и кривую разгрузки B, C, D. Эксперименты, проведенные с металлами в области низких давлений (от 0 до 50 *кбар*), показали разницу между гидростатической кривой $P(\eta)$ и кривой Гюгонио $(\sigma_x(\eta))$.

При высоких давлениях (сотни килобар) для некоторых металлов измеренная скорость звука за ударной волной оказалась на 20% больше скорости звука, полученной теоретически с использованием гидродинамической модели. Это служит основа-

нием для распространения модели, применяемой при низких давлениях, на случай высоких давлений. При разгрузке от высоких давлений материал сначала разгружается упруго вдоль отрезка BC. Наклон этого отрезка характеризует скорость упругой разгрузки. Следовательно, разрежение распространяется быстрее, чем это было бы в случае, если материал разгружать только по кривой $P(\eta)$. Эксперименты, в которых были измерены высокие скорости звука за ударной волной в металлах, проводились в Советском Союзе [1], в Стэнфордском исследовательском институте и в Лоуренсовской лаборатории радиации.

Используя данные для адиабат Гюгонио [15] и упругие константы, приведенные в [4], найдем для алюминия следующие константы, входящие в уравнения (12):

$Y^0=0{,}002976$ *Мбар* (из уравнения (17) при $(\sigma_x)_A=0{,}0063$ *Мбар* и $V_A=0{,}994$),

$$\mu=0{,}248\,\textit{Мбар},$$

$$P=0{,}73(\eta-1)+1{,}72(\eta-1)^2+0{,}40(\eta-1)^3,$$

$$\rho^0=2{,}7.$$

На рис. 5 и 6 показаны результаты расчета методом конечных разностей задачи об ударе летящей алюминиевой пластинки об алюминиевую пластину-мишень. Расчеты показывают, что, несмотря на малость величины Y^0 по сравнению с полным напряжением σ_x, имеется весьма заметное влияние на волну отмеченных выше особенностей упруго-пластического течения.

В принципе такого рода расчеты в соединении с экспериментами можно было бы использовать при определении свойств материалов при высоких давлениях в рамках модели, заданной уравнениями (12). Путем измерения скорости передней поверхности мишени для различных толщин пластины-мишени можно было бы определить, когда упругая волна догонит ударный фронт (рис. 6), и можно было бы найти наклон участка BC на рис. 4. Величина «ступеньки» за ударной волной на рис. 6 соответствовала бы точке C диаграммы на рис. 4.

Если среда ведет себя полностью гидродинамически, то ступенька за фронтом ударной волны отсутствует. Из рис. 5 видно, что разрежение при гидродинамической разгрузке распространяется много медленнее, чем упругая волна разгрузки. Однако можно заметить, что гидродинамическая волна разрежения с течением времени догоняет ударный фронт из-за уменьшения наклона хвостовой части волны.

Следует отметить, что для объяснения высоких скоростей звука за ударной волной необходимо только постулировать, что материал разгружается сначала упруго, а затем пластически. Этот же результат имеет место и тогда, когда при высоких дав-

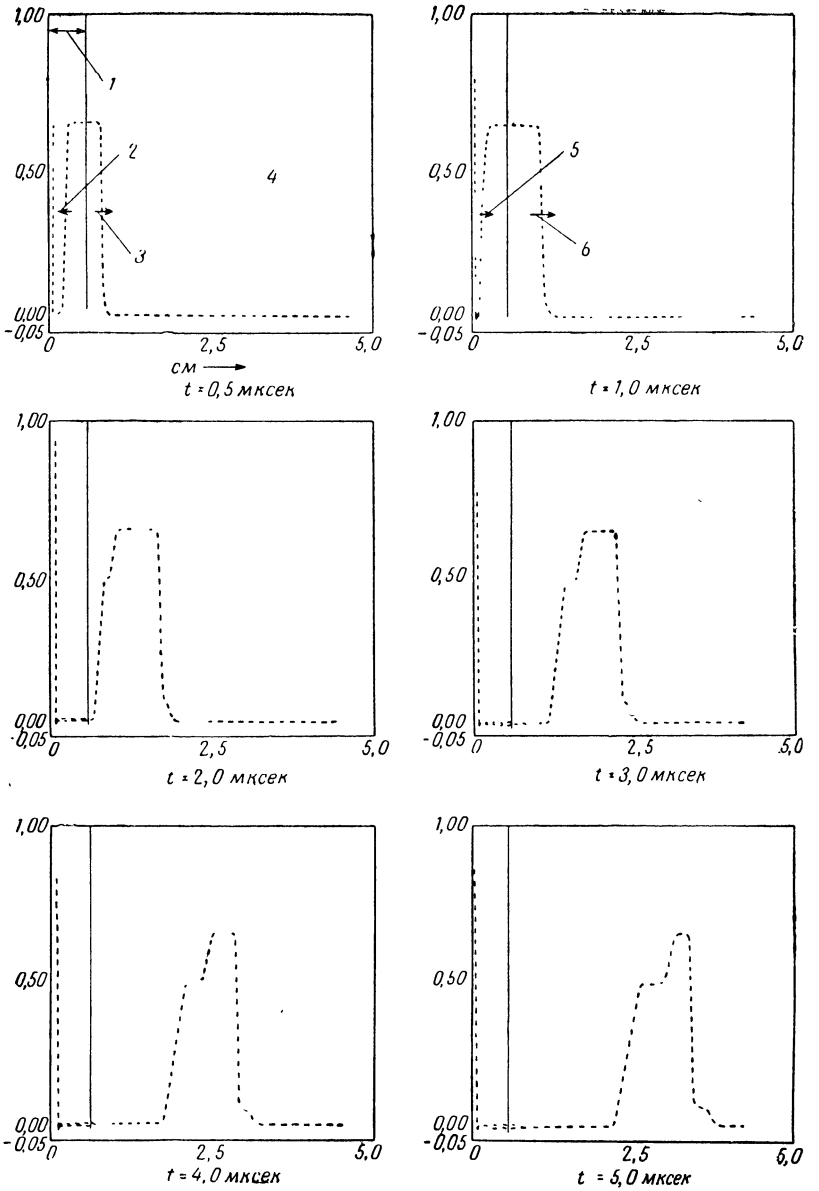


Рис. 5. Напряжения (в сотнях килобар) при ударе летящей пластинки о плоскую преграду.

1 — налетающая алюминиевая пластинка, скорость удара равна 0,08 *см/мксек*; *2* — отраженная ударная волна; *3* — проходящая ударная волна; *4* — алюминиевая преграда; *5* — разрежение; *6* — ударная волна.

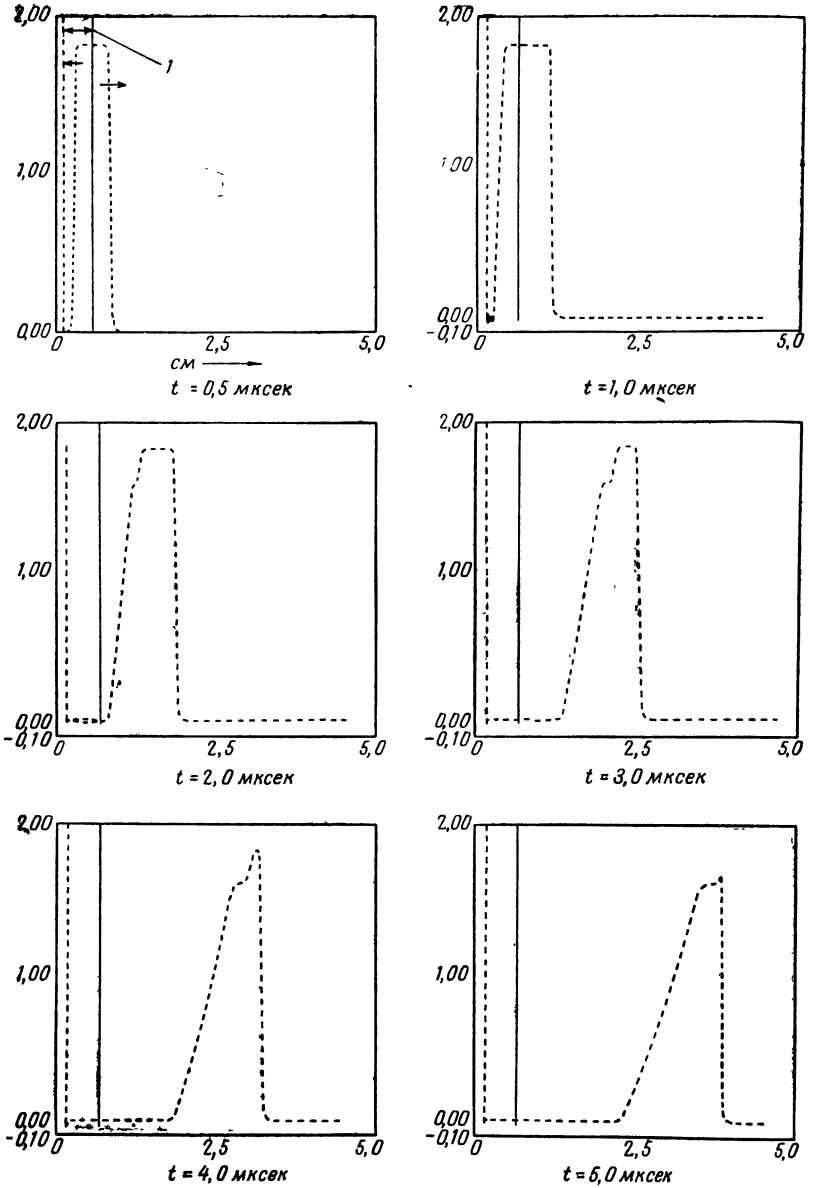


Рис. 6. Напряжения (в сотнях килобар) при ударе летящей пластинки о плоскую преграду.

1 — налетающая алюминиевая пластинка, скорость удара равна 0,2 *см/мксек*; **2 — алюминиевая преграда.**

лениях кривая $-\sigma_x$ сливается с кривой $P(\eta)$. В наших расчетах величины Y^0 и μ мы приняли постоянными, так как детали процесса упругой разгрузки от высоких давлений пока не известны.

3. Одномерные упруго-пластические течения

Для нестационарных течений с одной пространственной переменной (r) в плоском ($d=1$), цилиндрическом ($d=2$) и сферическом ($d=3$) случаях основные уравнения имеют следующий вид:

уравнение движения

$$\frac{\rho^0\dot{U}}{V}=\frac{\partial\Sigma_r}{\partial r}+(d-1)\frac{\Sigma_r-\Sigma_\theta}{r},\quad \begin{aligned}\Sigma_r&=-(P+q)+s_1,\\ \Sigma_\theta&=-(P+q)+s_2,\end{aligned} \tag{21}$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\dot{V}}{V}=\frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial(r^{d-1}U)}{\partial r}, \tag{22}$$

уравнение энергии

$$\dot{E}-V[s_1\dot{\varepsilon}_1+(d-1)s_2\dot{\varepsilon}_2]+(P+q)\dot{V}=0, \tag{23}$$

искусственная вязкость (линейная)

$$q=C_L\frac{\rho^0 a}{V}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\Delta r, \tag{24}$$

где C_L — постоянная, a — скорость звука,

уравнение состояния

девиатор напряжений[1])
$$\begin{cases}\dot{s}_1=2\mu\left(\dot{\varepsilon}_1-\frac{1}{3}\dot{V}/V\right),\\ \dot{s}_2=2\mu\left(\dot{\varepsilon}_2-\frac{1}{3}\dot{V}/V\right),\\ \dot{s}_3=2\mu\left(\dot{\varepsilon}_3-\frac{1}{3}\dot{V}/V\right),\end{cases} \tag{25}$$

скорости деформации
$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_1=\partial U/\partial r,\\ \dot{\varepsilon}_2=U/r,\\ \dot{\varepsilon}_3=\dot{\varepsilon}_2 & \text{при } d=3,\\ \dot{\varepsilon}_3=0 & \text{при } d=2,\\ \dot{\varepsilon}_3=\dot{\varepsilon}_2=0 & \text{при } d=1,\end{cases}$$

[1]) Здесь введены три компоненты напряжения, хотя не все они требуются для рассмотрения задач. Это сделано с целью установления аналогии с двумерными случаями, которые рассматриваются в следующем параграфе.

гидростатическое давление

$$P = a(\eta - 1) + b(\eta - 1)^2 + c(\eta - 1)^3 + d\eta E, \quad \eta = \frac{1}{V} = \frac{\rho}{\rho^0},$$

условие текучести Мизеса:

$$(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - \frac{2}{3}(Y^0)^2 \leqslant 0,$$

где Y^0 — предел текучести среды.

Здесь были использованы следующие обозначения: r — пространственная координата; U — скорость в направлении r; Σ_r, Σ_θ — полные напряжения; s_1, s_2, s_3 — компоненты девиатора напряжений; ε_1, ε_2, ε_3 — деформации; P — гидростатическое давление; V — относительный объем; ρ^0 — начальная (характерная) плотность; ρ — плотность; E — внутренняя энергия на единицу начального объема.

Точка над величинами, входящими в уравнение, означает производную по времени вдоль траектории частицы.

Применяемые в расчетах конечно-разностные уравнения для написанной выше системы уравнений в частных производных приведены в приложении I.

На рис. 5 показаны результаты расчета плоского течения, возникающего при ударе пластинки, налетающей слева со скоростью $U = 0{,}08$ *см/мксек* на покоящуюся преграду. Пластинка и преграда изготовлены из алюминия, константы для которого указаны в § 2. При данной скорости удара упругий сигнал распространяется быстрее, чем ударная волна, причем ударная волна распадается на две компоненты. На рис. 6 показаны результаты расчета той же задачи при более высокой скорости удара, равной 0,2 *см/мксек*. В этом случае скорость ударной волны больше скорости упругого сигнала и ударная волна распространяется так же, как если бы для поведения материала было пригодно чисто гидродинамическое описание. Однако можно заметить, что упругая волна разгрузки, зарождающаяся на задней стороне налетающей пластинки, догоняет фронт ударной волны.

На рис. 7 показаны волны напряжения, возникающие при взрыве сферического заряда взрывчатого вещества (состав B) радиусом 1 *см*, инициированного в центре [17]. В области от 1 до 5 *см* от центра среда предполагается упругой, причем $P = K(\eta - 1)$, $K = 1{,}39$ *Мбар*, $\rho^0 = 8{,}9$, $\mu = 0{,}46$ *Мбар*, $Y^0 = \infty$. Волны напряжения распространяются со скоростью $C = [(K + 4/3\mu)/\rho^0]^{1/2}$ *см/мксек*. Из графиков видно, что возникает вторая ударная волна, распространяющаяся из взрывной полости [16].

Возникновение второй ударной волны обусловлено гидродинамическими эффектами, а не связано с упругими свойствами материала. Как видно из рисунка, наряду с радиальным сжатием имеется «хвост» растягивающих напряжений с величинами

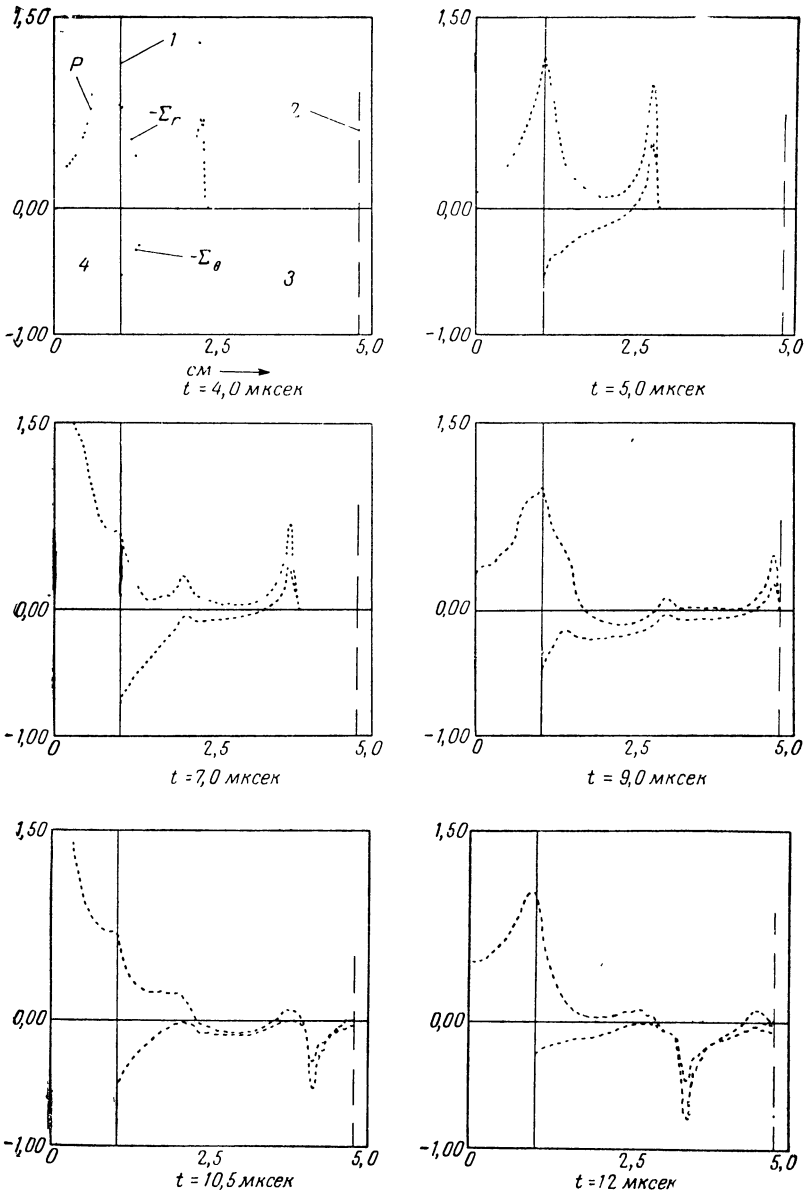


Рис. 7. Сферические расходящиеся волны напряжения.

1 — граница раздела; *2* — свободная поверхность; *3* — упругий материал; *4* — взрывчатое вещество (состав *B*).

По оси ординат отложены напряжения в сотнях килобар.

порядка 10 *кбар*. Эти растяжения целиком обусловлены упругими свойствами материала. Если бы среда описывалась чисто гидродинамически, то не было бы участка с растяжением в возмущенной области за распространяющейся вперед волной сжатия.

4. Двумерные упруго-пластические течения

Ниже приводятся уравнения, использованные в численном методе «ХЕМП» — программе для решения этих уравнений способом конечных разностей на электронной машине IBM-7030. Вывод уравнений можно найти в работе Рейнера [10]. Задача рассматривается в переменных Лагранжа, причем допускается скольжение вдоль поверхности раздела между упругой (твердой) и гидродинамической (жидкой) частями среды и не допускается скольжение между двумя упругими частями среды. Упругая область, однако, может скользить вдоль некоторой фиксированной границы. Уравнения состояния используются аналогично тому, как это было в предыдущих параграфах. Здесь возникает дополнительное усложнение из-за того, что соотношения между напряжениями и деформациями не должны зависеть от движения элемента среды как абсолютно твердого тела так что соотношения между приращениями напряжений и деформаций необходимо исправить с учетом поворота системы координат x, y (см. [5]). Когда элемент среды смещается из начального напряженного состояния, то, помимо деформации, может произойти его поворот на некоторый угол ω. Вращение не будет влиять на рост напряжений, но первоначальное напряженное состояние $(s^n_{xx},\ s^n_{yy},\ T^n_{xy})$ этого элемента поворачивается на угол ω. Так как уравнения движения записаны для определенной системы координат x, y, то повернутые напряжения должны быть пересчитаны и приведены к этой системе координат. Уравнения преобразования [7] приводят к поправке δ, которая прибавляется к напряжениям. Напряжения могут затем получать приращения из-за деформаций, которые возникают между моментами времени t^n и t^{n+1}, формируя напряжения в момент t^{n+1}. Угол поворота определяется формулой

$$\sin\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\right)\Delta t^{n+1}.$$

Практически неудобно следить за изменением напряжений в системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений, так как главные направления определяются неоднозначно и могут происходить большие изменения этих направлений при изменении времени на один шаг по времени. Поэтому операция преобразования к главным осям напряжений и обрат-

ный переход к системе координат x, y для каждого шага по времени стал бы сложным и не точным. Несмотря на то что в рассматриваемом ниже методе фактически выполняются преобразования к главным осям напряжений для проверки условия пластичности, знания направлений главных осей напряжений при проведении расчетов не требуется, и поэтому осложнения, связанные с использованием этих направлений, отпадают. Условие текучести Мизеса можно применять и не переходя к главным осям напряжений (см. приложение II, Г, 2, ж), однако геометрическая интерпретация этого условия упрощается при использовании девиатора напряжений в главных осях.

А. Основные уравнения метода «ХЕМП»

Основные уравнения в системе цилиндрических координат x, y (x — ось симметрии) приведены ниже [формулы (26)—(33)]. (Эти уравнения превращаются в уравнения для плоской декартовой системы координат x, y, если члены, отмеченные в них знаком $|^*$, положить равными нулю.)

Уравнения движения

$$\left.\frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{T_{xy}}{y}\right|^*=\rho\ddot{x},\quad \left.\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \Sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\Sigma_{yy}-\Sigma_{\theta\theta}}{y}\right|^*=\rho\ddot{y},$$

$$\Sigma_{xx}=s_{xx}-(P+q),\ \Sigma_{yy}=s_{yy}-(P+q),\ \Sigma_{\theta\theta}=s_{\theta\theta}-(P+q); \quad (26)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\dot{V}}{V}=\left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}+\frac{\dot{y}}{y}\right|^*, \quad (27)$$

уравнение энергии

$$\dot{E}=-(P+q)\dot{V}+V(s_{xx}\dot{\varepsilon}_{xx}+s_{yy}\dot{\varepsilon}_{yy}+s_{\theta\theta}\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}+T_{xy}\dot{\varepsilon}_{xy}), \quad (28)$$

искусственная вязкость (квадратичная)

$$q=C_0^2\rho^0(\dot{V}/V)^2A/V, \quad (29)$$

уравнения состояния

а) компоненты напряжений

$$\dot{s}_{xx}=2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{xx}-\frac{1}{3}\dot{V}/V\right)+\delta_{xx},$$

$$\dot{s}_{yy}=2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{yy}-\frac{1}{3}\dot{V}/V\right)+\delta_{yy},$$

$$\dot{s}_{\theta\theta}=2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}-\frac{1}{3}\dot{V}/V\right),$$

$$\dot{T}_{xy}=\mu(\dot{\varepsilon}_{xy})+\delta_{xy}, \quad (30)$$

где μ — модуль сдвига, δ — поправка на поворот (см. текст выше),

б) скорости деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{xx}=\frac{\partial \dot{x}}{\partial x},\quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}=\frac{\dot{y}}{y}\Big|^{*},$$
$$\dot{\varepsilon}_{yy}=\frac{\partial \dot{y}}{\partial y},\quad \dot{\varepsilon}_{xy}=\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial y}, \tag{31}$$

гидростатическое давление

$$P=a(\eta-1)+b(\eta-1)^2+c(\eta-1)^3+d\eta E,$$
$$\eta=1/V=\rho/\rho^0, \tag{32}$$

условие текучести Мизеса

$$(s_1^2+s_2^2+s_3^2)-\frac{2}{3}(Y^0)^2\leqslant 0, \tag{33}$$

где Y^0 — предел текучести материала; s_1, s_2, s_3 — главные девиаторные напряжения.

Здесь использованы следующие обозначения: x, y — пространственные координаты; $\dot{x}$ — скорость в направлении x; $\dot{y}$ — скорость в направлении y; Σ_{xx}, Σ_{yy}, $\Sigma_{\theta\theta}$ — полные напряжения; T_{xy} — касательное напряжение; s_{xx}, s_{yy}, $s_{\theta\theta}$ — компоненты девиатора напряжений; ε_{xx}, ε_{yy}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε_{xy} — деформации; P — гидростатическое давление; V — относительный объем; E — внутренняя энергия на единицу начального объема; ρ — плотность; C_0 — постоянная; A — площадь ячейки.

Точка над параметрами означает производную по времени для фиксированной частицы.

Б. Конечно-разностная схема

Воспользуемся следующими интегральными определениями частных производных [9]:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\lim_{A\to 0}\frac{\int_C F(\hat{n}\cdot\hat{i})\,ds}{A}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\lim_{A\to 0}\frac{\int_C F(\hat{n}\cdot\hat{j})\,ds}{A}, \tag{35}$$

где C — граница области A, s — длина дуги, $\hat{n}$ — вектор нормали, $\hat{t}$ — вектор касательной (рис. 8),

$$\hat{n}=\frac{\partial x}{\partial n}\hat{i}+\frac{\partial y}{\partial n}\hat{j}=\frac{\partial y}{\partial S}\hat{i}-\frac{\partial x}{\partial S}\hat{j}. \tag{36}$$

Применяя эти формулы к четырехугольнику 1, 2, 3, 4, площадь которого равна A (рис. 9), получаем для функции F,

определенной в точках 1, 2, 3, 4:

$$\int F(\hat{n}, \hat{l})\, dS = + \int F \frac{\partial y}{\partial S}\, dS = \tag{37}$$

$$= -[F_{23}(y_2 - y_3) + F_{34}(y_3 - y_4) + F_{41}(y_4 - y_1) + F_{12}(y_1 - y_2)], \tag{38}$$

где $F_{23} = (F_2 + F_3)/2$ и т. д.

Таким образом,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{A}[F_{23}(y_2 - y_3) + F_{34}(y_3 - y_4) + F_{41}(y_4 - y_1) + F_{12}(y_1 - y_2)] =$$

$$= +\frac{1}{2A}[(F_2 - F_4)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_4)(F_3 - F_1)]. \tag{39}$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2A}[(F_2 - F_4)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_4)(F_3 - F_1)]. \tag{40}$$

Введенные таким образом величины дают производные $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial y$ в центре четырехугольника.

Используя введенные конечно-разностные формулы для производных, можно написать теперь выражения для $\partial \dot{x}/\partial x$, $\partial \dot{y}/\partial y$

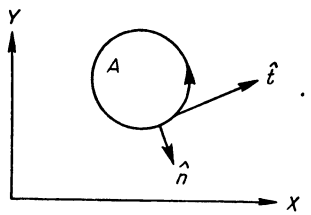


Рис. 8.

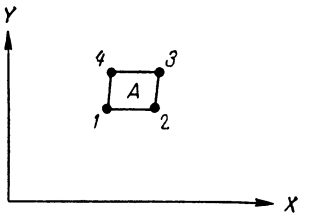


Рис. 9.

в заданной точке пространства в данный момент времени. В используемой ниже разностной схеме определяются значения скоростей ($\dot{x}$ и $\dot{y}$) при приращении времени на полшага и значения пространственных координат при изменении времени на полный шаг.

Введем следующие обозначения:

$$x^{n+1/2} = \frac{1}{2}(x^{n+1} + x^n) \quad \text{и т. д.},$$

$$A^{n+1/2} = \frac{1}{2}(A^{n+1} + A^n),$$

где A^n и A^{n+1} — площади четырехугольников во времена t^n и t^{n+1} соответственно. Тогда конечно-разностные соотношения приводят к точному равенству

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = \frac{\dot{A}}{A}, \tag{41}$$

которое равносильно уравнению неразрывности в плоском случае, где $\dot{A}/A \neq \dot{V}/V$.

Очевидно, весьма желательно, чтобы конечно-разностная схема обладала этим свойством, так как это сводит к нулю ошибку аппроксимации при численном интегрировании каждого из членов уравнения (41).

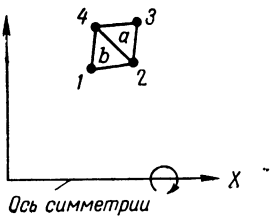


Рис. 10.

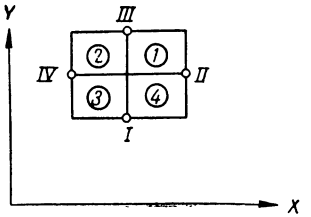


Рис. 11.

Рассмотрим теперь уравнение неразрывности в цилиндрических координатах x, y для случая осевой симметрии относительно оси x

$$\left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}\right]+\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{V}}{V}, \tag{42}$$

где V — объем, образующийся при вращении площади A вокруг оси x,

$$V=\bar{y}_a A_a+\bar{y}_b A_b,$$
$$A=A_a+A_b,$$
$$\bar{y}_a=\frac{1}{3}(y_2+y_3+y_4), \quad \bar{y}_b=\frac{1}{3}(y_2+y_4+y_1),$$
$$\dot{y}_a=\frac{1}{3}(\dot{y}_2+\dot{y}_3+\dot{y}_4), \quad \dot{y}_b=\frac{1}{3}(\dot{y}_2+\dot{y}_4+\dot{y}_1), \tag{43}$$

где A_a и A_b — площади треугольников a и b (рис. 10).

Очень хорошая аппроксимация третьего члена уравнения (42) дается выражением

$$\frac{\dot{y}}{y}=\frac{A_a^{n+1/2}\dot{y}_a+A_b^{n+1/2}\dot{y}_b}{A_a^{n+1/2}\bar{y}_a^{n+1/2}+A_b^{n+1/2}\bar{y}_b^{n+1/2}}. \tag{44}$$

Важно подчеркнуть, что конечно-разностное представление для членов в квадратных скобках в уравнении (42) такое же, как и для левой части уравнения (41), т. е. не зависит от системы координат. Так как имеет место нулевая погрешность аппроксимации при интегрировании этих членов, то можно вы-

числить величину $\dot{V}/V$ через координаты и выразить $\dot{y}/y$ по формуле

$$\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{V}}{V}-\left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}\right]. \tag{45}$$

Для вычисления ускорения параметр F из уравнений (34), (35) определяется в центре прямоугольника. Площадью интегрирования теперь будет служить площадь I, II, III, IV, указанная на рис. 11.

Соответствующие конечно-разностные уравнения для i-й и j-й компонент ускорения примут вид

$$\int F(\hat{n}\cdot\hat{i})\,dS=-[F_{①}(y_{II}-y_{III})+F_{②}(y_{III}-y_{IV})+ \\ +F_{③}(y_{IV}-y_{I})+F_{④}(y_{I}-y_{II})], \tag{46}$$

$$\int F(\hat{n}\cdot\hat{j})\,dS=-[F_{①}(x_{II}-x_{III})+F_{②}(x_{III}-x_{IV})+ \\ +F_{③}(x_{IV}-x_{I})+F_{④}(x_{I}-x_{II})]. \tag{47}$$

В качестве площади I, II, III, IV берется среднее из площадей четырехугольников $A_{①}A_{②}A_{③}A_{④}$. Как показано в приложении II, эти четырехугольники вводятся с соответствующими четырьмя весами.

В. Применения

Полная система конечно-разностных уравнений, включая условия на границах и на контактных поверхностях скольжения, дана в приложении II. На приведенных ниже рисунках показаны результаты применения рассматриваемого метода для расчета некоторых конкретных задач. Графики были выведены непосредственно из вычислительной машины электронно-лучевой трубкой и затем сфотографированы. Интенсивность затемнения ячеек (элементов среды) соответствует скорости сжатия ячеек. Следовательно, на сеточной картине можно увидеть ударные волны или фронты детонационных волн.

На рис. 12 показано развитие во времени процессов, происходящих при взрыве заряда B на поверхности медной пластинки (мгновенная детонация заряда в постоянном объеме). Горизонтальная прямая, проходящая через середину сетки, является осью симметрии задачи. Уравнение состояния для меди получено способом, рассмотренным выше для алюминия. Предел текучести принимался равным $Y^0=10$ *кбар*, а модуль сдвига $\mu=460$ *кбар*.

На рис. 13 показаны направления максимальных главных напряжений для рассматриваемой задачи. Максимальное главное напряжение, взятое с соответствующим знаком, является растягивающей компонентой тензора напряжений. Поэтому

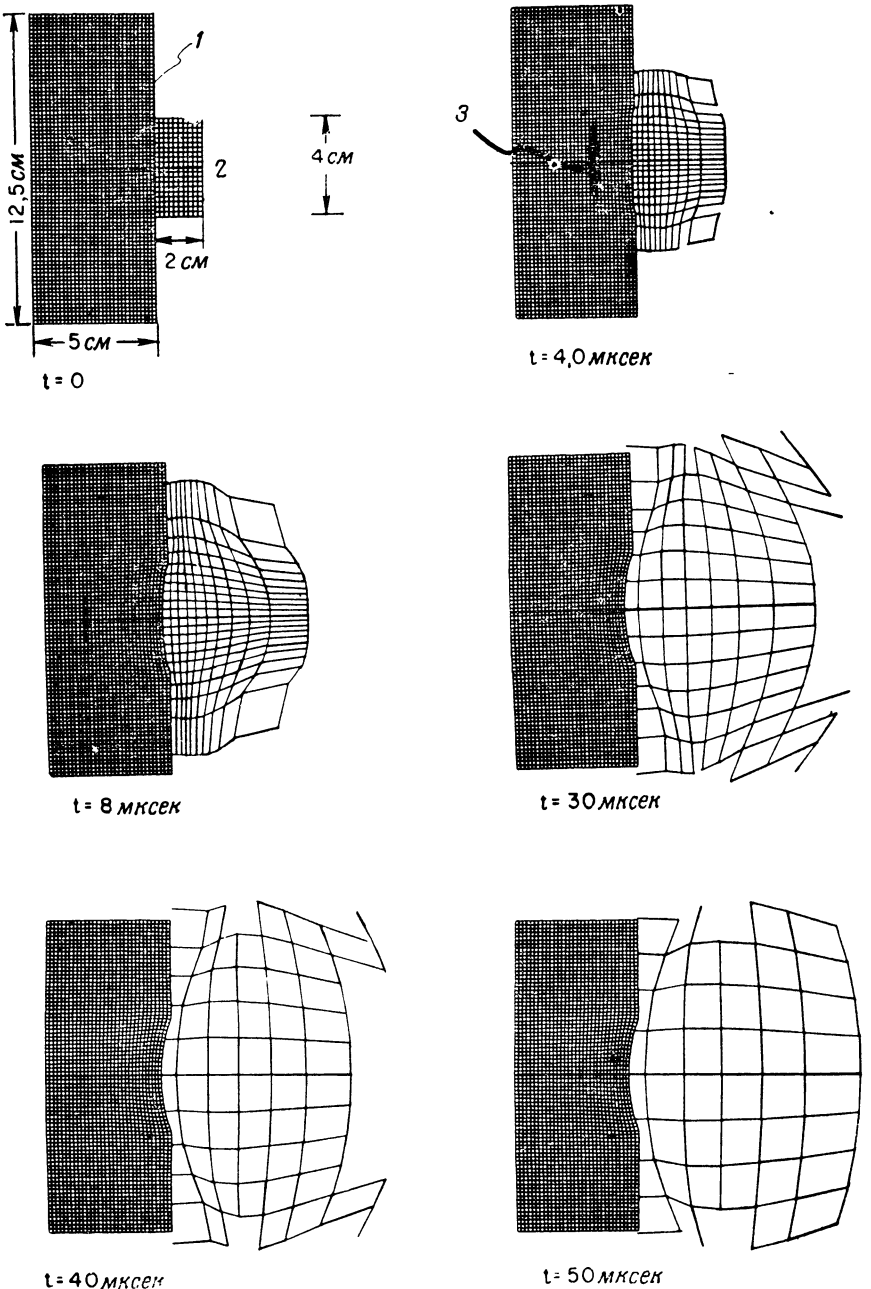


Рис. 12. Мгновенная детонация ВВ при постоянном объеме на контакте с медной пластиной.

1 — медь, предел текучести $Y^0 = 10$ *кбар*; *2* — взрывчатое вещество (состав *B*); *3* — ударная волна.

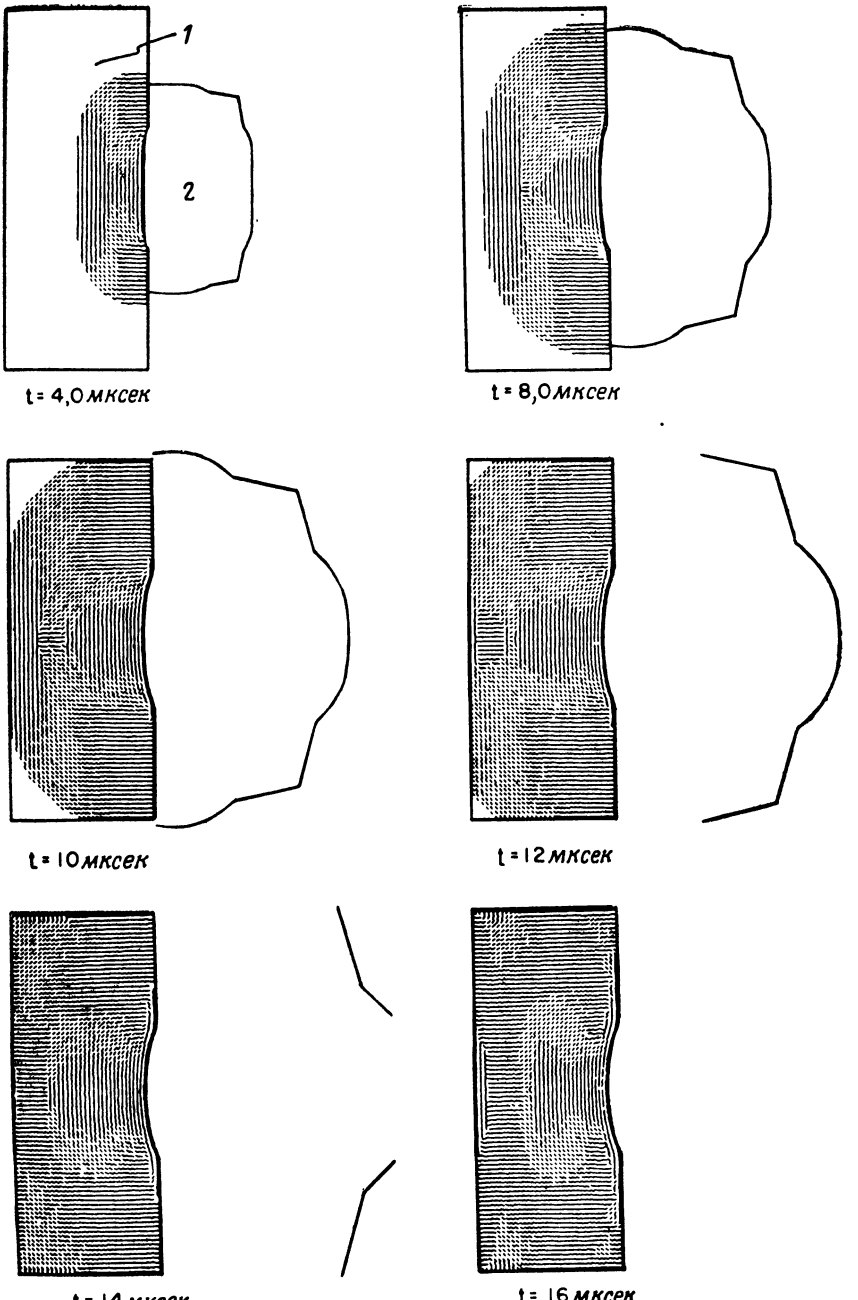


Рис. 13. Направления максимального главного напряжения (см. рис. 12).
1 — медь; *2* — взрывчатое вещество (состав *B*).

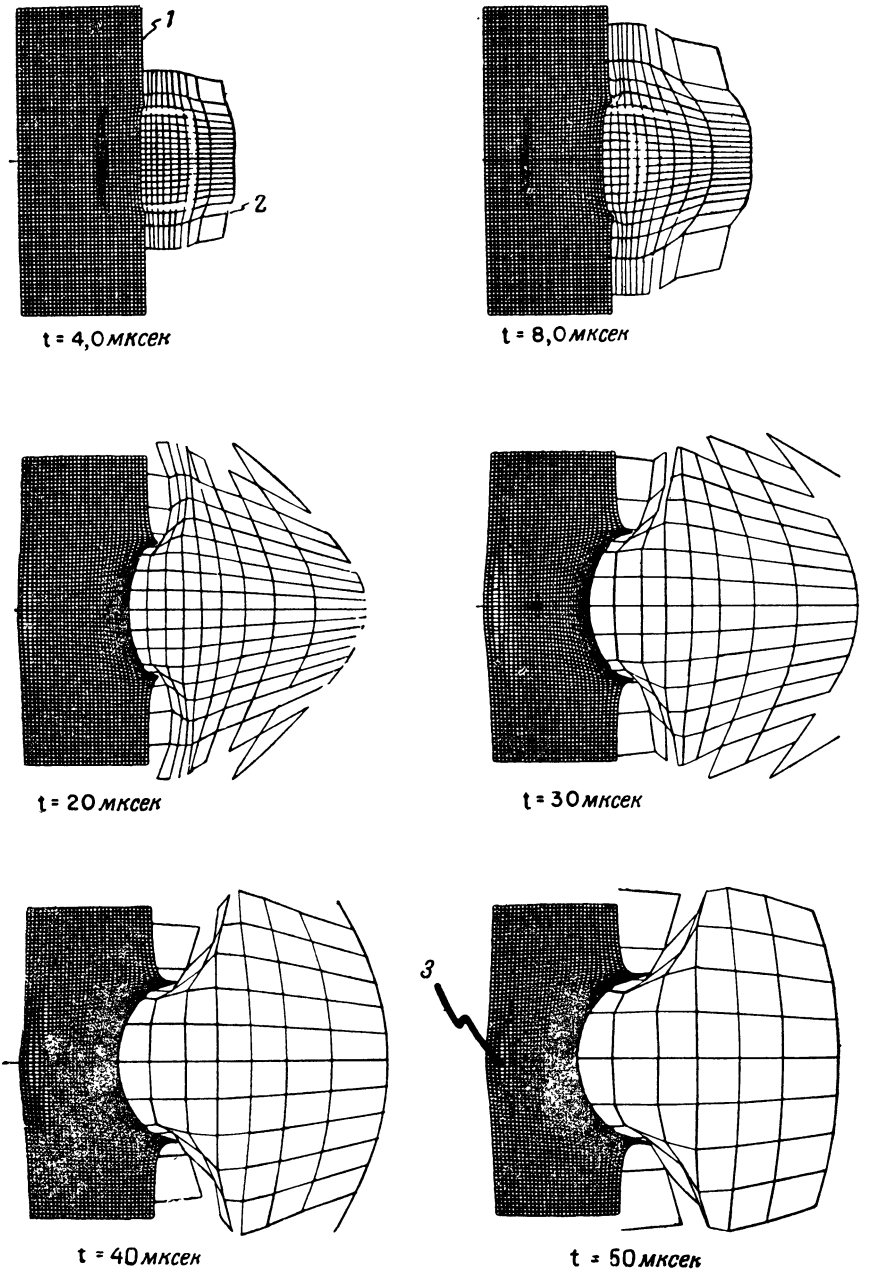


Рис. 14. Картина взрыва при начальных данных, как на рис. 12, но без касательных напряжений в медной пластине.

1 — медь (как жидкость); *2* — взрывчатое вещество (состав *B*); *3* — откол.

отрезки линий ориентированы здесь по нормали к направлению распространения ударной волны. Изучая графики, можно проследить за развитием волны разрежения, распространяющейся от свободной поверхности, так как наклон линий соответствует направлению растяжений.

Рис. 14 соответствует той же задаче, но медь описывается уравнением состояния жидкости без учета прочностных свойств материала. Как видно, воронка в этом случае значительно глубже, чем в предыдущем случае. Высота края воронки растет с течением времени. При гидродинамическом описании отсутствуют восстанавливающие силы в процессе деформации при постоянном объеме. Упруго-пластическое описание приводит к возникновению восстанавливающих сил, которые препятствуют изменению формы даже в случае деформации при постоянном объеме, поэтому в задаче, иллюстрируемой рис. 12, не образуется резко выраженного края воронки. Однако в расчетах для значений предела текучести Y^0 от 1 *кбар* до 2 *кбар* у воронки образуется резкий край.

На рис. 15 и 16 показано развитие напряжений во времени, возникающих в медной пластинке при воздействии на нее взаимодействующих детонационных волн, распространяющихся во взрывчатом веществе (PBX 9404). Расчет был проведен для случая плоского движения; центры детонации располагались на прямых, перпендикулярных плоскости рисунка, в его правом и левом нижних углах. Левая и правая границы являются плоскостями симметрии. Предел текучести Y^0 для меди принимался в этом расчете равным 10 *кбар*.

Взаимодействие двух детонационных волн приводит к возникновению хвостовых ударных волн с зоной высоких давлений в окрестности точки пересечения. Видно, что детонационный фронт порождает в меди ударную волну и отраженную ударную волну в продуктах детонации взрывчатого вещества. Хвостовые ударные волны индуцируют круговую ударную волну, которая идет вправо и влево от линии столкновения. Как видно из рисунков, эта ударная волна выпучивает медную пластинку в ее центре. На последних рисунках видно отражение хвостовой ударной волны от неподвижных границ. Темные пятна соответствуют местам высоких давлений, где отраженная от меди ударная волна встречает хвостовые ударные волны.

На рис. 17 показаны направления максимальных главных напряжений для рассмотренной задачи. Здесь видна расширяющаяся круговая ударная волна, порожденная хвостовыми ударными волнами и распространяющаяся по сжатой меди.

На рис. 18 показано сравнение результатов рассмотренной выше задачи с результатами расчета задачи без учета прочности

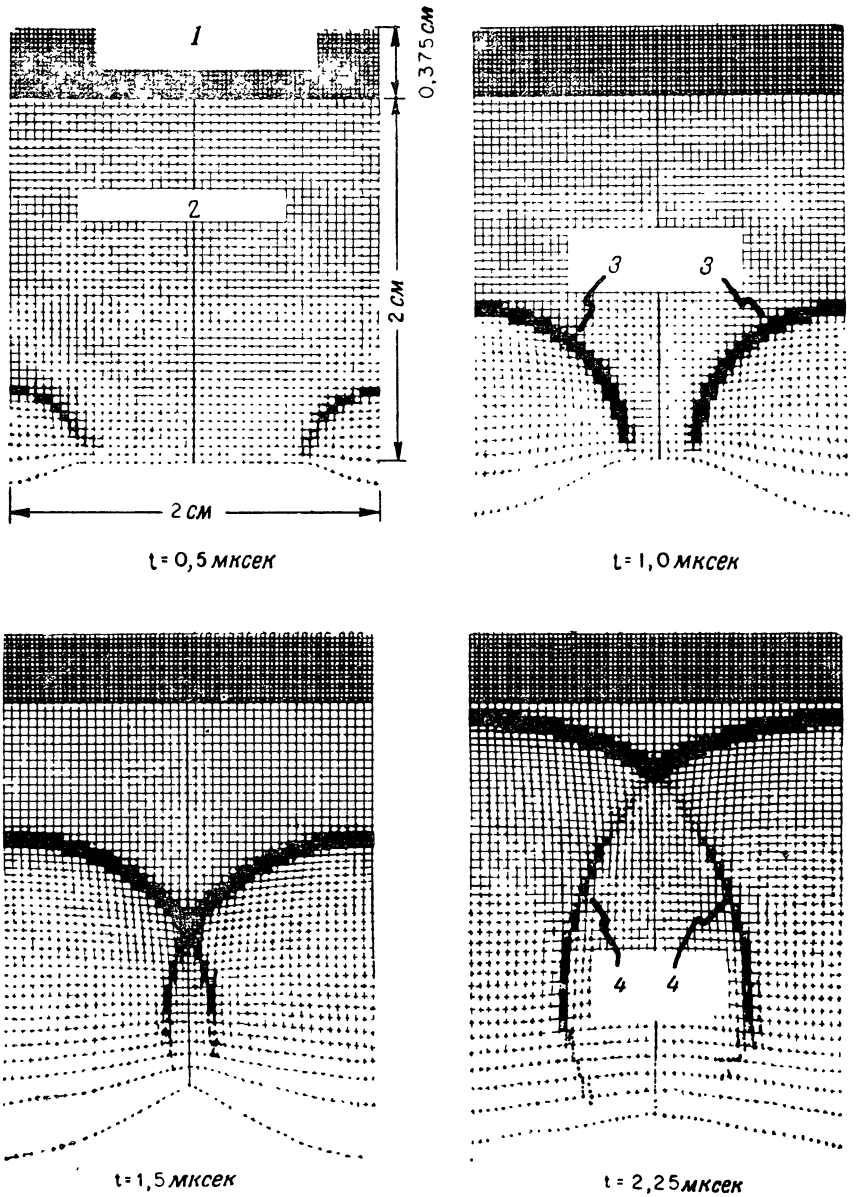
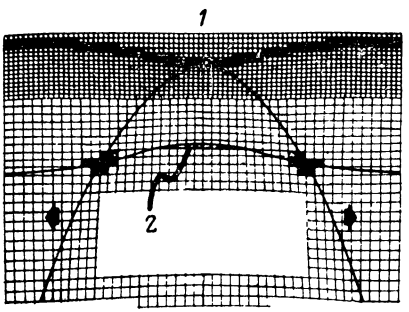
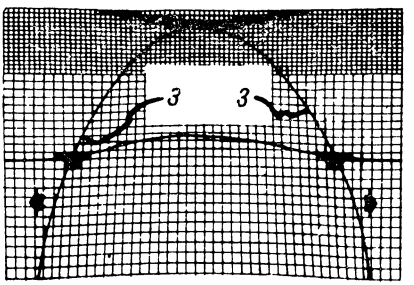


Рис. 15. Напряжения, индуцированные в медной пластине детонационными волнами.

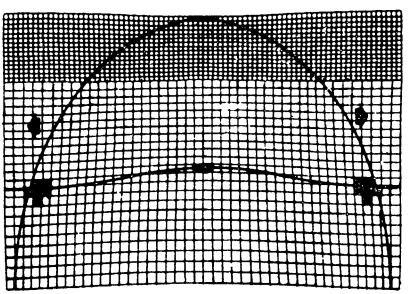
1 — медь, предел текучести $Y^0 = 10$ *кбар*; *2* — взрывчатое вещество; *3* — фронты детонации; *4* — хвостовые ударные волны.



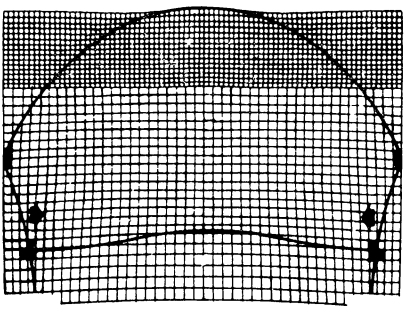
t = 2,99 *мксек*



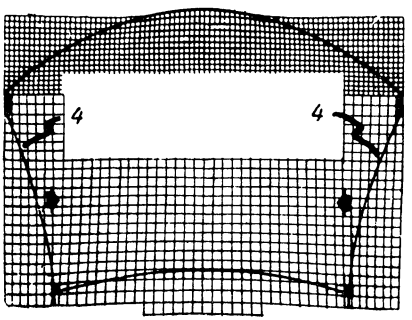
t = 3,13 *мксек*



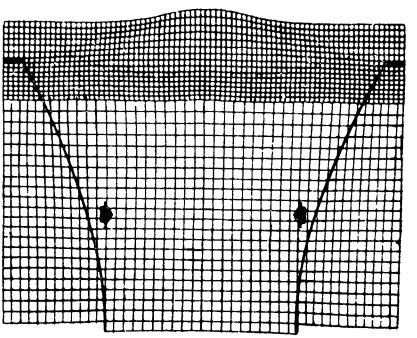
t = 3,33 *мксек*



t = 3,78 *мксек*



t = 4,03 *мксек*



t = 4,47 *мксек*

Рис. 16. Продолжение рис. 15.

1 — преломленная ударная волна; *2* — отраженная от меди ударная волна; *3* — хвостовые ударные волны; *4* — отражения хвостовых ударных волн от границ.

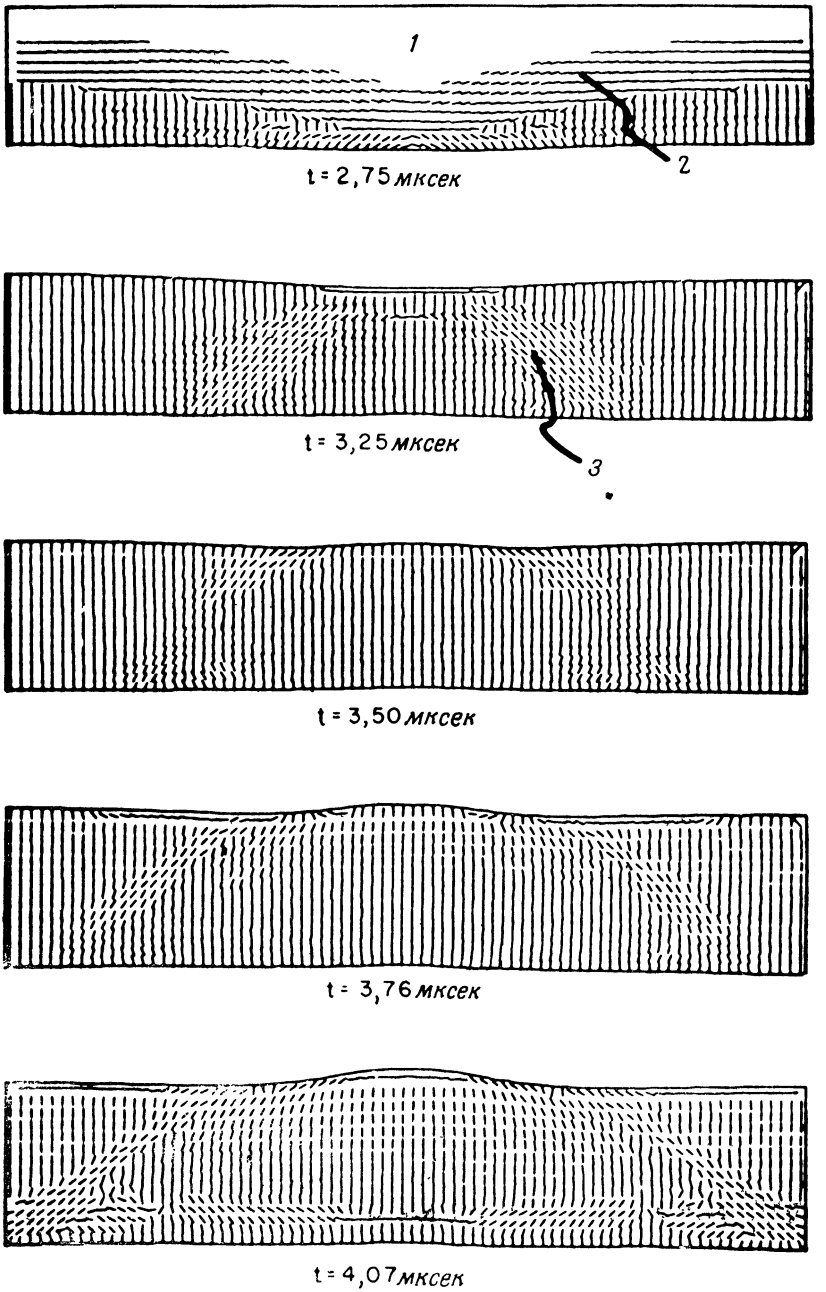


Рис. 17. Направления максимального главного напряжения (см. рис. 15 и 16).

1 — невозмущенная медь; *2* — преломленная ударная волна; *3* — вторая ударная волна, вызванная хвостовой ударной волной.

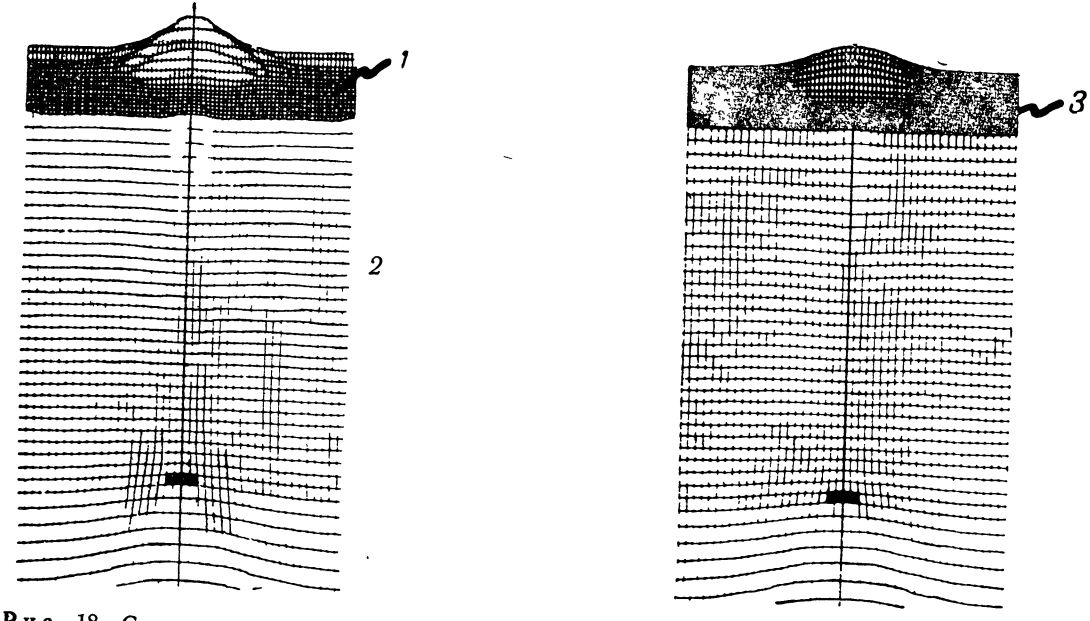


Рис. 18. Сравнение результатов при учете и без учета прочности среды ($t = 6$ *мксек*).
1 — медь (как жидкость); *2* — взрывчатое вещество; *3* — медь, предел текучести $Y^0 = 10$ *кбар*.

меди. Этот расчет дает области низкой плотности вдоль внешней поверхности пластинки, а также в большом круговом секторе около середины.

На рис. 19 показаны результаты расчета действия взрыва заряда PBX 9404, расположенного внутри железного цилиндра

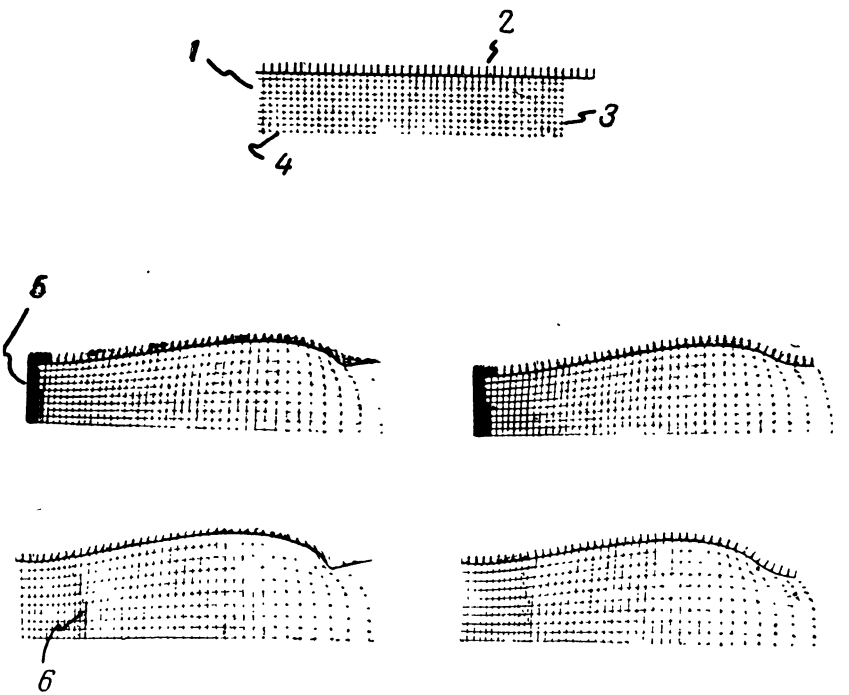


Рис. 19. Детонация взрывчатого вещества внутри железного цилиндра.

Слева: железо считается жидкостью; справа: железо считается упруго-пластическим материалом с пределом текучести $Y^0 = 10$ *кбар*.

1 — неподвижная граница; *2* — железо; *3* — поверхность детонации ВВ; *4* — ось симметрии; *5* — фронт детонации; *6* — отраженная ударная волна.

Вверху — начальный момент времени $t = 49,99999$, в центре — момент времени $t = 52,11049$; внизу — момент времени $t = 52,14899$.

при инициировании детонации заряда на правом конце. Левая часть рисунка соответствует расчету движения железного цилиндра без учета сопротивления материала, а справа приведены результаты расчета движения при пределе текучести $Y^0 = 10$ *кбар*. Сравнение результатов этих расчетов показывает, что при упруго-пластической трактовке толщина стенок железного цилиндра изменяется незначительно. Кроме того, конец цилиндра в большей степени сохраняет первоначальную форму, чем в гидродинамической модели.

Приложение I

Конечно-разностные уравнения для задач § 3

Среда делится на следующие ячейки по массе:

$$m_{j+1/2}=\frac{\rho^0}{V^0}\left(\frac{(r^0_{j+1})^d-(r^0_j)^d}{d}\right),$$

где $d=1$, 2, 3 для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно, $j=1, 2, \ldots, N$ [11].

А. Уравнение движения

а) $$U_j^{n+1/2}=U_j^{n-1/2}+\frac{\Delta t^n}{\varphi_j^n}\left[(\Sigma_r)^n_{j+1/2}-(\Sigma_r)^n_{j-1/2}\right]+\Delta t^n(\beta_j^n)(d-1),$$

где

$$(\Sigma_r^n)_{j+1/2}=\left\{-(P^n+q^{n-1/2})+s_1^n\right\}_{j+1/2},$$

$$(\Sigma_\theta^n)_{j+1/2}=\left\{-(P^n+q^{n-1/2})+s_2^n\right\}_{j+1/2},$$

$$\varphi_j^n=\frac{1}{2}\left[\rho^0_{j+1/2}\left(\frac{r^n_{j+1}-r^n_j}{V^n_{j+1/2}}\right)+\rho^0_{j+1/2}\left(\frac{r^n_j-r^n_{j-1}}{V^n_{j-1/2}}\right)\right],$$

$$\beta_j^n=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(\Sigma_r)^n_{j+1/2}-(\Sigma_\theta)^n_{j+1/2}}{\frac{1}{2}(r^n_{j+1}+r^n_j)}\right]\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{j+1/2}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(\Sigma_r)^n_{j-1/2}-(\Sigma_\theta)^n_{j-1/2}}{\frac{1}{2}(r^n_j+r^n_{j-1})}\right]\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{j-1/2}\right\}.$$

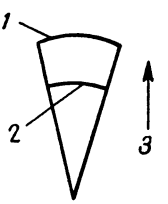


Рис. 20. *1* — внешняя граница; *2* — внутренняя граница; *3* — направление возрастания j.

На внешней границе области J имеем

$$\varphi_J^n=\frac{1}{2}\rho^0_{J-1/2}\left(\frac{r^n_J-r^n_{J-1}}{V^n_{J-1/2}}\right),$$

$$\beta_J^n=\left[\frac{(\Sigma_r)^n_{J-1/2}-(\Sigma_\theta)^n_{J-1/2}}{\frac{1}{2}(r^n_J+r^n_{J-1})}\right]\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{J-1/2}.$$

На внутренней границе области J имеем

$$\varphi_J^n=\frac{1}{2}\rho^0_{J+1/2}\left(\frac{r^n_{J+1}-r^n_J}{V^n_{J+1/2}}\right),$$

$$\beta_J^n=\left[\frac{(\Sigma_r)^n_{J+1/2}-(\Sigma_\theta)^n_{J+1/2}}{\frac{1}{2}(r^n_J+r^n_{J+1})}\right]\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{J+1/2}.$$

Для свободной поверхности при $j=J$ напряжения полагаются равными нулю при $J+1/2$ для внешней свободной границы или при $J-1/2$ для внутренней свободной границы (рис. 20). В ячейках, соседних с упругой областью, используется гидродинамическая модель.

б) $$r_j^{n+1} = r_j^n + U_j^{n+1/2}\,\Delta t^{n+1/2}.$$

Б. Уравнение неразрывности

а) $$V_{j+1/2}^{n+1} = V_{j+1/2}^n + \Delta t^{n+1/2}\left(\frac{\rho^0}{m}\right)_{j+1/2}\left[U_{j+1}^{n+1/2}\left(r_{j+1}^{n+1/2}\right)^{d-1} - U_j^{n+1/2}\left(r_j^{n+1/2}\right)^{d-1} + \left(\chi_{j+1/2}^{n+1/2}\right)^*\right],$$

б) $$\eta_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{V_{j+1/2}^{n+1}},$$

где

$$r_{j+1}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(r_{j+1}^{n+1} + r_{j+1}^n\right) \quad \text{и т. д.,}$$

$$\left(\chi_{j+1/2}\right)^* = \frac{\left(\Delta t^{n+1/2}\right)^2}{12}\left[\left(U_{j+1}^{n+1/2}\right)^3 - \left(U_j^{n+1/2}\right)^3\right].$$

Здесь поправочный член, отмеченный звездочкой, вводится только для случая $d=3$.

В. Напряжения

Скорости деформаций:

$$\left(\dot{\varepsilon}_1\right)_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{j+1}^{n+1/2} - U_j^{n+1/2}}{r_{j+1}^{n+1/2} - r_j^{n+1/2}}, \qquad \dot{\varepsilon}_2 = 0 \quad \text{для} \quad d=1,$$

$$\left(\dot{\varepsilon}_2\right)_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{j+1}^{n+1/2} + U_j^{n+1/2}}{r_{j+1}^{n+1/2} + r_j^{n+1/2}}.$$

Девиатор напряжений:

$$\left(s_1\right)_{j+1/2}^{n+1} = \left(s_1\right)_{j+1/2}^n + 2\mu\left[\left(\dot{\varepsilon}_1\right)_{j+1/2}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1/2}}\right)_{j+1/2}\right],$$

$$\left(s_2\right)_{j+1/2}^{n+1} = \left(s_2\right)_{j+1/2}^n + 2\mu\left[\left(\dot{\varepsilon}_2\right)_{j+1/2}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{V^{n+1} - V^n}{V^{n+1/2}}\right)_{j+1/2}\right],$$

$$\left(s_3\right)_{j+1/2}^{n+1} = -\left[\left(s_1\right)_{j+1/2}^{n+1} + \left(s_2\right)_{j+1/2}^{n+1}\right],$$

Г. Искусственная вязкость

Линейная

$$q^{n+1/2}_{j+1/2} = C_L a \rho_0 \eta^{n+1/2}_{j+1/2} \left| U^{n+1/2}_{j+1} - U^{n+1/2}_{j} \right|.$$

Квадратичная

$$q^{n+1/2}_{j+1/2} = C_0^2 \rho_0 \eta^{n+1/2}_{j+1/2} \left(U^{n+1/2}_{j+1/2} - U^{n+1/2}_{j} \right)^2.$$

Эти величины вычисляются только тогда, когда $U^{n+1/2}_{j+1} < U^{n+1/2}_{j}$ и $\left(V^{n+1}_{j+1/2} - V^{n}_{j+1/2}\right) < 0$. Здесь $C_L = \text{const} \approx \frac{1}{2}$, $C_0 = \text{const} \approx 2$, a — местная скорость звука.

Д. Уравнение энергии

$$dE = dE_H + dE_1 + dE_2, \quad dE_H = -(P+q)\,dV,$$

$$dE_1 = V s_1 \dot{\varepsilon}_1 \Delta t, \quad dE_2 = V s_2 \dot{\varepsilon}_2 \Delta t\,(d-1),$$

а) $$(E_1)^{n+1}_{j+1/2} = (E_1)^{n}_{j+1/2} + V^{n+1/2}_{j+1/2} (s_1)^{n+1/2}_{j+1/2} (\dot{\varepsilon}_1)^{n+1/2}_{j+1/2} \Delta t^{n+1/2},$$

б) $$(E_2)^{n+1}_{j+1/2} = (E_2)^{n}_{j+1/2} + (d-1)\, V^{n+1/2}_{j+1/2} (s_2)^{n+1/2}_{j+1/2} (\dot{\varepsilon}_2)^{n+1/2}_{j+1/2} \Delta t^{n+1/2},$$

в) $$(E)^{n+1}_{j+1/2} =$$

$$= \left\{ \frac{E^n - \left\{ \frac{1}{2} \left[A(\eta^{n+1}) + P^n \right] + q^{n+1/2} \right\} \cdot \left[V^{n+1} - V^n \right] + dE_1 + dE_2}{1 + \frac{1}{2} \left[B(\eta^{n+1}) \right] \cdot \left[V^{n+1} - V^n \right]} \right\}_{j+1/2}.$$

Е. Гидростатическое давление

$$P^{n+1}_{j+1/2} = A\left(\eta^{n+1}_{j+1/2}\right) + B\left(\eta^{n+1}_{j+1/2}\right) E^{n+1}_{j+1/2}.$$

Ж. Условие текучести Мизеса

$$\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)^{n+1} - \frac{2}{3} (Y^0)^2 = K^{n+1}.$$

Если $K^{n+1} \leqslant 0$, то элемент материала находится в упругой области. Если $K^{n+1} > 0$, то элемент материала находится в состоянии за пределом упругости и нужно изменить напряжения по формулам

$$\left(s_1^{n+1}\right)_* = s_1^{n+1} \sqrt{2/3} \cdot Y^0 / \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2},$$

$$\left(s_2^{n+1}\right)_* = s_2^{n+1} \sqrt{2/3} \cdot Y^0 / \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2},$$

где через $(\ )_*$ обозначены исправленные напряжения.

3. Устойчивость

$$\Delta t^{n+3/2} = \frac{1}{3}\left.\frac{\Delta r^{n+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|_{(\min \text{ по } j)}, \quad \Delta r^{n+1} = r_{j+1}^{n+1} - r_j^{n+1}.$$

Если $\Delta t^{n+3/2} > 1{,}1\,\Delta t^{n+1/2}$, то полагаем

$$\Delta t^{n+3/2} = 1{,}1\,\Delta t^{n+1/2}, \quad \Delta t^{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta t^{n+3/2} + \Delta t^{n+1/2}).$$

Здесь a — скорость звука, $b = 2C_0\,\Delta r^{n+1}(\dot{V}/V)^{n+1/2}$ ($b = 0$, если $\dot{V}/V \geqslant 0$).

Приведенное условие устойчивости представляет собой видоизмененную форму условия фон Неймана и Рихтмайера [14], которые ввели метод искусственной вязкости для расчета ударных волн.

Приложение II

Конечно-разностные уравнения для задач § 4

А. Ячейки по массе в случае симметрии относительно оси x

Область, занятая средой, делится на четырехугольники сеткой j—k, которая движется вместе со средой. На рис. 21 показаны центры и вершины четырехугольников, которые обозначаются следующим образом:

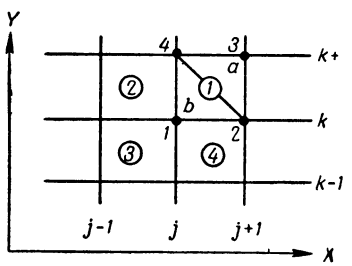


Рис. 21.

$$①\equiv j+\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\quad 1\equiv j,\ k,$$

$$②\equiv j-\tfrac{1}{2},\ k+\tfrac{1}{2},\quad 2\equiv j+1,\ k,$$

$$③\equiv j-\tfrac{1}{2},\ k-\tfrac{1}{2},\ 3\equiv \equiv j+1,\ k+1,$$

$$④\equiv j+\tfrac{1}{2},\ k-\tfrac{1}{2},\quad 4\equiv j,\ k+1.$$

Масса, соответствующая каждому четырехугольнику в начальный момент, определяется путем умножения начальной плотности на объем тела, полученного вращением четырехугольника вокруг оси x. Например, масса в начальный момент для четырехугольника ① вычисляется по формуле

$$\text{а)}\quad M_① = \frac{1}{3}\left(\frac{\rho^0}{V^0}\right)_① \left[(y_2^0 + y_3^0 + y_4^0)\,A_a^0 + (y_1^0 + y_2^0 + y_4^0)\,A_b^0\right]_①,$$

где A_a — площадь треугольника a, A_b — площадь треугольника b. Массы $M_②$, $M_③$ и $M_④$ вычисляются аналогично.

Для A_a и A_b имеем соотношения

б) $$(A_a)^n_{①} = \frac{1}{2}\left[x^n_2 (y^n_3 - y^n_4) + x^n_3 (y^n_4 - y^n_2) + x^n_4 (y^n_2 - y^n_3)\right],$$

$$(A_b)^n_{①} = \frac{1}{2}\left[x^n_2 (y^n_4 - y^n_1) + x^n_4 (y^n_1 - y^n_2) + x^n_1 (y^n_2 - y^n_4)\right],$$

$$A^n_{①} = (A_a)^n_{①} + (A_b)^n_{①}.$$

Б. Сохранение массы

$$V^n_{①} = \frac{1}{3}\left(\frac{\rho^0}{M}\right)_{①}\left[\left(y^n_2 + y^n_3 + y^n_4\right) A^n_a + \left(y^n_1 + y^n_2 + y^n_4\right) A^n_b\right]_{①},$$

$$V^n_{①} = (\rho^0/\rho^n)_{①}.$$

В. Уравнения движения

Эти уравнения центрируются в точке j, k; соответствующие обозначения даны на рис. 22, где $\mathrm{I} = j$, $k-1$; $\mathrm{II} = j+1$, k, $\mathrm{III} = j$, $k+1$; $\mathrm{IV} = j-1$, k.

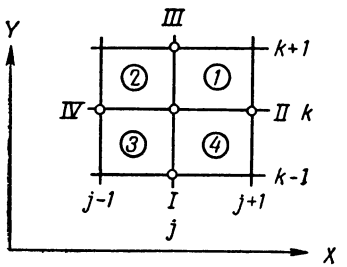


Рис. 22.

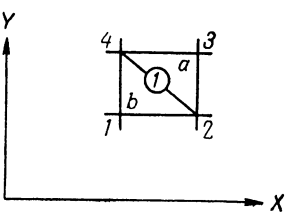


Рис. 23.

а) $$\dot{x}^{n+1/2}_{j,k} = \dot{x}^{n-1/2}_{j,k} - \frac{\Delta t^n}{2\varphi^n_{j,k}}\left[(\Sigma_{xx})^n_{①}(y^n_{\mathrm{II}} - y^n_{\mathrm{III}}) + (\Sigma_{xx})^n_{②}(y^n_{\mathrm{III}} - y^n_{\mathrm{IV}}) + \right.$$

$$+ (\Sigma_{xx})^n_{③}(y^n_{\mathrm{IV}} - y^n_{\mathrm{I}}) + (\Sigma_{xx})^n_{④}(y^n_{\mathrm{I}} - y^n_{\mathrm{II}}) - (T_{xy})^n_{①}(x^n_{\mathrm{II}} - x^n_{\mathrm{III}}) -$$

$$\left. - (T_{xy})^n_{②}(x^n_{\mathrm{III}} - x^n_{\mathrm{IV}}) - (T_{xy})^n_{③}(x^n_{\mathrm{IV}} - x^n_{\mathrm{I}}) - (T_{xy})^n_{④}(x^n_{\mathrm{I}} - x^n_{\mathrm{II}})\right] +$$

$$+ \Delta t^n (\alpha)^n_{j,k},$$

б) $$\dot{y}^{n+1/2}_{j,k} = \dot{y}^{n-1/2}_{j,k} + \frac{\Delta t^n}{2\varphi^n_{j,k}}\left[(\Sigma_{yy})^n_{①}(x^n_{\mathrm{II}} - x^n_{\mathrm{III}}) + (\Sigma_{yy})^n_{②}(x^n_{\mathrm{III}} - x^n_{\mathrm{IV}}) + \right.$$

$$+ (\Sigma_{yy})^n_{③}(x^n_{\mathrm{IV}} - x^n_{\mathrm{I}}) + (\Sigma_{yy})^n_{④}(x^n_{\mathrm{I}} - x^n_{\mathrm{II}}) - (T_{xy})^n_{①}(y^n_{\mathrm{II}} - y^n_{\mathrm{III}}) -$$

$$\left. - (T_{xy})^n_{②}(y^n_{\mathrm{III}} - y^n_{\mathrm{IV}}) - (T_{xy})^n_{③}(y^n_{\mathrm{IV}} - y^n_{\mathrm{I}}) - (T_{xy})^n_{④}(y^n_{\mathrm{I}} - y^n_{\mathrm{II}})\right] + \Delta t^n (\beta)^n_{j,k}.$$

в) $$\varphi^n_{j,k}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\rho^0 A^n}{V^n}\right)_{①}+\left(\frac{\rho^0 A^n}{V^n}\right)_{②}+\left(\frac{\rho^0 A^n}{V^n}\right)_{③}+\left(\frac{\rho^0 A^n}{V^n}\right)_{④}\right],$$

$$\alpha^n_{j,k}=\frac{1}{4}\left\{\left[T^n_{xy}\left(\frac{A^n}{M}\right)\right]_{①}+\left[T^n_{xy}\left(\frac{A^n}{M}\right)\right]_{②}+\right.$$
$$\left.+\left[T^n_{xy}\left(\frac{A^n}{M}\right)\right]_{③}+\left[T^n_{xy}\left(\frac{A^n}{M}\right)\right]_{④}\right\},$$

$$\beta^n_{j,k}=\frac{1}{4}\left\{\left[(\Sigma^n_{yy}-\Sigma^n_{\theta\theta})\left(\frac{A^n}{M}\right)\right]_{①}+\left[(\Sigma^n_{yy}-\Sigma^n_{\theta\theta})\left(\frac{A^n}{M}\right)\right]_{②}+\right.$$
$$\left.+\left[(\Sigma^n_{yy}-\Sigma^n_{\theta\theta})\left(\frac{A^n}{M}\right)\right]_{③}+\left[(\Sigma^n_{yy}-\Sigma^n_{\theta\theta})\left(\frac{A^n}{M}\right)\right]_{④}\right\},$$

(г) $$x^{n+1}_{j,k}=x^n_{j,k}+\dot{x}^{n+1/2}_{j,k}\Delta t^{n+1/2},\quad y^{n+1}_{j,k}=y^n_{j,k}+\dot{y}^{n+1/2}_{j,k}\Delta t^{n+1/2}.$$

(д) Величина $V^{n+1}_{①}$ вычисляется по уравнению (Б) (сохранение массы).

(е) Величина $q^{n+1/2}_{①}$ вычисляется по формулам, указанным ниже, при рассмотрении уравнений состояния.

Г. Уравнения состояния

1. Деформации

$$A_{①}\equiv(A_a)_{①}+(A_b)_{①},$$
$$A^{n+1/2}_{①}=\frac{1}{2}(A^{n+1}_{①}+A^n_{①}).$$

(1) $$(\dot{\varepsilon}_{xx})^{n+1/2}_{①}=\left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}\right)^{n+1/2}_{①}=$$
$$=\frac{1}{2A^{n+1/2}_{①}}[(\dot{x}_2-\dot{x}_4)(y_3-y_1)-(y_2-y_4)(\dot{x}_3-\dot{x}_1)]^{n+1/2},$$

(2) $$(\dot{\varepsilon}_{yy})^{n+1/2}_{①}=\left(\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}\right)^{n+1/2}_{①}=$$
$$=\frac{-1}{2A^{n+1/2}_{①}}[(\dot{y}_2-\dot{y}_4)(x_3-x_1)-(x_2-x_4)(\dot{y}_3-\dot{y}_1)]^{n+1/2},$$

(3) $$(\dot{\varepsilon}_{\theta\theta})^{n+1/2}_{①}=\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{n+1/2}_{①}=\left[\frac{\dot{V}}{V}-(\dot{\varepsilon}_{xx}+\dot{\varepsilon}_{yy})\right]_{①},$$

(4) $$(\dot{\varepsilon}_{xy})^{n+1/2}_{①}=\left(\frac{\partial\dot{y}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{x}}{\partial y}\right)^{n+1/2}_{①}=\frac{1}{2A^{n+1/2}_{①}}\{[(\dot{y}_2-\dot{y}_4)(y_3-y_1)-$$
$$-(y_2-y_4)(\dot{y}_3-\dot{y}_1)]-[(\dot{x}_2-\dot{x}_4)(x_3-x_1)-(x_2-x_4)(\dot{x}_3-\dot{x}_1)]\}^{n+1/2},$$

(5) $$(\Delta\varepsilon_{xx})^{n+1/2}_{①}=(\dot{\varepsilon}_{xx})^{n+1/2}_{①}\Delta t^{n+1/2},\quad(\Delta\varepsilon_{yy})^{n+1/2}_{①}=(\dot{\varepsilon}_{yy})^{n+1/2}_{①}\Delta t^{n+1/2},$$
$$(\Delta\varepsilon_{\theta\theta})^{n+1/2}_{①}=(\dot{\varepsilon}_{\theta\theta})^{n+1/2}_{①}\Delta t^{n+1/2},\quad(\Delta\varepsilon_{xy})^{n+1/2}_{①}=(\dot{\varepsilon}_{xy})^{n+1/2}_{①}\Delta t^{n+1/2},$$
$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^{n+1/2}_{①}=\frac{\dot{V}_{①}}{V_{①}}\Delta t^{n+1/2}=\frac{V^{n+1}_{①}-V^n_{①}}{V^{n+1/2}_{①}},$$

где

$$V_{\Phi}^{n+1/2}=\frac{1}{2}(V_{\Phi}^{n+1}+V_{\Phi}^{n}).$$

2. Напряжения

а. *Упругость*

(1) $(s_{xx})_{\Phi}^{n+1}=(s_{xx})_{\Phi}^{n}+2\mu\left[\Delta\varepsilon_{xx}^{n+1/2}-\frac{1}{3}(\Delta V/V)^{n+1/2}\right]_{\Phi}+(\delta_{xx})_{\Phi}^{n}$,

(2) $(s_{yy})_{\Phi}^{n+1}=(s_{yy})_{\Phi}^{n}+2\mu\left[\Delta\varepsilon_{yy}^{n+1/2}-\frac{1}{3}(\Delta V/V)^{n+1/2}\right]_{\Phi}+(\delta_{yy})_{\Phi}^{n}$,

(3) $(s_{\theta\theta})_{\Phi}^{n+1}=(s_{\theta\theta})_{\Phi}^{n}+2\mu\left[\Delta\varepsilon_{\theta\theta}^{n+1/2}-\frac{1}{3}(\Delta V/V)^{n+1/2}\right]_{\Phi}$,

(4) $(T_{xy})_{\Phi}^{n+1}=(T_{xy})_{\Phi}^{n}+\mu(\Delta\varepsilon_{xy}^{n+1/2})_{\Phi}+(\delta_{xy})_{\Phi}^{n}$.

Формулы для расчета δ_{xx}, δ_{yy} и δ_{xy} даны ниже, в п. «е». После того как вычислены напряжения для момента t^{n+1}, можно вычислить условие текучести (см. ниже п. «ж»).

б. *Гидродинамика*

$$P_{\Phi}^{n+1}=A(V_{\Phi}^{n+1})+B(V_{\Phi}^{n+1})\cdot E_{\Phi}^{n+1},$$

где E_{Φ}^{n+1} вычисляется по уравнению для полной внутренней энергии (см. ниже п. «д»), $A(V)$ и $B(V)$ — заданные функции от V.

в. *Искусственная вязкость*

(1) Квадратичная

$$q_{\Phi}^{n+1/2}=\left[\frac{C_0^2\rho^0A^{n+1/2}}{V^{n+1/2}}\cdot\left(\frac{\dot V}{V}\right)^2\right]_{\Phi},$$

где $C_0^2=4$, величина q вычисляется только для значений $\dot V/V<0$.

(2) Линейная

$$q_{\Phi}^{n+1/2}=\left(\frac{aC_L\rho^0\sqrt{A^{n+1/2}}}{V^{n+1/2}}\left|\frac{\dot V}{V}\right|\right)_{\Phi}.$$

Величина q вычисляется только для значений $\dot V/V<0$; C_L — постоянная, a — скорость звука.

(3) Вязкость по Навье — Стоксу

$$(q_{xx})_{\Phi}^{n+1/2}=2\mu_1\left[(\dot\varepsilon_{xx})-\frac{1}{3}\left(\frac{\dot V}{V}\right)\right]_{\Phi},\quad (q_{\theta\theta})_{\Phi}^{n+1/2}=2\mu_1\left[(\dot\varepsilon_{\theta\theta})-\frac{1}{3}\left(\frac{\dot V}{V}\right)\right]_{\Phi},$$

$$(q_{yy})_{\Phi}^{n+1/2}=2\mu_1\left[(\dot\varepsilon_{yy})-\frac{1}{3}\left(\frac{\dot V}{V}\right)\right]_{\Phi},\quad (q_{xy})_{\Phi}^{n+1/2}=\mu_1[(\dot\varepsilon_{xy})]_{\Phi},$$

$$\mu_1=\left[\frac{aC_A\rho^0\sqrt{A^{n+1/2}}}{V^{n+1/2}}\right],\quad C_A=\text{const}.$$

Если использовать эти соотношения вместо девиатора напряжений s_{xx} и т. д., то получатся уравнения Навье-Стокса. Эту величину q бывает полезно использовать для задач, в которых ударная волна распространяется перпендикулярно свободной поверхности, что имеет место при рассмотрении двумерных задач об ударе тел. Однако для обычных задач применение квадратичной вязкости q дает очень хорошие результаты, и именно это выражение q принято в приведенных уравнениях.

г. *Полные напряжения*

$$(1)\qquad [\Sigma_{xx}]_{\Phi}^{n+1} = [s_{xx}]_{\Phi}^{n+1} - [P^{n+1} + q^{n+1/2}]_{\Phi},$$

$$(2)\qquad [\Sigma_{yy}]_{\Phi}^{n+1} = [s_{yy}]_{\Phi}^{n+1} - [P^{n+1} + q^{n+1/2}]_{\Phi},$$

$$(3)\qquad [\Sigma_{\theta\theta}]_{\Phi}^{n+1} = [s_{\theta\theta}]_{\Phi}^{n+1} - [P_{\Phi}^{n+1} + q^{n+1/2}]_{\Phi}.$$

д. *Уравнения энергии*

(1) Полная внутренняя энергия

$$E_{\Phi}^{n+1} = \left\{ \frac{E^n - \left\{ \frac{1}{2}[A(V^{n+1}) + P^n] + q^{n+1/2} \right\} \cdot (V^{n+1} - V^n) + \Delta Z^{n+1/2}}{1 + \frac{1}{2}[B(V^{n+1})](V^{n+1} - V^n)} \right\}_{\Phi}.$$

(2) Энергия сдвиговых деформаций

$$Z_{\Phi}^{n+1} = Z_{\Phi}^n + V^{n+1/2}\{s_{xx} \cdot \varepsilon_{xx} + s_{yy} \cdot \varepsilon_{yy} + s_{\theta\theta} \cdot \varepsilon_{\theta\theta} + T_{xy}\varepsilon_{xy}\}_{\Phi}^{n+1/2},$$

$$\Delta Z^{n+1/2} = Z^{n+1} - Z^n, \quad s^{n+1/2} = \frac{1}{2}(s^{n+1} + s^n) \text{ и т. д.}$$

е. *Поправка на поворот напряжений за время* $\Delta t^{n+1/2}$. Если масса элемента повернулась в плоскости x, y на угол ω за время $\Delta t^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n$, то напряжения должны быть пересчитаны так, чтобы они относились к системе координат x, y в их новом положении.

Приведенные ниже формулы преобразования можно найти в работе [12]:

$$(1)\qquad \begin{aligned} s'_{xx} &= s_{xx}^n \cos^2\omega + s_{yy}^n \sin^2\omega + 2T_{xy}^n \sin\omega\cos\omega, \\ s'_{yy} &= s_{xx}^n \sin^2\omega + s_{yy}^n \cos^2\omega - 2T_{xy}^n \sin\omega\cos\omega, \\ T'_{xy} &= T_{xy}^n[\cos^2\omega - \sin^2\omega] - [s_{xx}^n - s_{yy}^n]\cos\omega\sin\omega. \end{aligned}$$

Угол ω определяется по соотношениям

$$(2)\qquad \nabla x(\dot{x}\hat{i} - \dot{y}\hat{j}) = \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\right)\hat{k} = 2\sin\dot{\omega},$$

$$\sin\omega = \frac{\Delta t^{n+1/2}}{2}\left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\right).$$

Уравнения (1) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
s'_{xx} &= \frac{s^n_{xx}+s^n_{yy}}{2} + \frac{s^n_{xx}-s^n_{yy}}{2}\cos 2\omega + T^n_{xy}\sin 2\omega,\\
s'_{yy} &= \frac{s^n_{xx}+s^n_{yy}}{2} - \frac{s^n_{xx}-s^n_{yy}}{2}\cos 2\omega - T^n_{xy}\sin 2\omega, \qquad (3)\\
T'_{xy} &= T^n_{xy}\cos 2\omega - \frac{s^n_{xx}-s^n_{yy}}{2}\sin 2\omega.
\end{aligned}
$$

В соотношениях между приращениями напряжений и деформаций

$$
s^{n+1}_{xx} = s^n_{xx} + 2\mu\left[\Delta\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}(\Delta V/V)\right]^{n+1/2} \quad \text{и т. д.} \qquad (4)
$$

напряжения s^n_{xx}, s^n_{yy} и T^n_{xy} должны быть заменены на s'_{xx}, s'_{yy} и T'_{xy}. Для того чтобы сохранить форму уравнений (4), удобно ввести дополнительный член δ к напряжениям так, чтобы имели место соотношения

$$
\begin{aligned}
s^{n+1}_{xx} &= s^n_{xx} + 2\mu\left[\Delta\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}(\Delta V/V)\right]^{n+1/2} + \delta^n_{xx} \quad \text{и т. д.}\\
\delta^n_{xx} &= s'_{xx} - s^n_{xx} = \left(\frac{s^n_{xx}-s^n_{yy}}{2}\right)(\cos 2\omega - 1) + T^n_{xy}\sin 2\omega, \qquad (5)\\
\delta^n_{yy} &= s'_{yy} - s^n_{yy} = -\delta^n_{xx},\\
\delta^n_{xy} &= T'_{xy} - T^n_{xy} = T^n_{xy}(\cos 2\omega - 1) - \left(\frac{s^n_{xx}-s^n_{yy}}{2}\right)\sin 2\omega,\\
\sin 2\omega &\approx 2\sin\omega = \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\right)\Delta t^{n+1/2}.
\end{aligned}
$$

ж. *Расчеты текучести*

1. Главные напряжения [7].

$$
\begin{aligned}
s^{n+1}_1 &= \frac{s^{n+1}_{xx}+s^{n+1}_{yy}}{2} + \frac{1}{2}\left[(s^{n+1}_{xx} - s^{n+1}_{yy})^2 + (2T^{n+1}_{xy})^2\right]^{1/2}, \qquad (1)\\
s^{n+1}_2 &= \frac{s^{n+1}_{xx}+s^{n+1}_{yy}}{2} - \frac{1}{2}\left[(s^{n+1}_{xx} - s^{n+1}_{yy})^2 + (2T^{n+1}_{xy})\right]^{1/2}, \qquad (2)\\
s^{n+1}_3 &= s^{n+1}_{\theta\theta}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

В плоской (x, y) и цилиндрической системах координат, которые здесь используются, напряжение $s_{\theta\theta}$ уже является главным.

2. Условие текучести Мизеса. Вычисляются величины

$$(1)\quad 2J^{n+1}=[(s_1^{n+1})^2+(s_2^{n+1})^2+(s_3^{n+1})^2]= \\ =[(s_{xx}^{n+1})^2+(s_{yy}^{n+1})^2+(s_{\theta\theta}^{n+1})^2]+2(T_{xy}^{n+1})^2,$$

$$(2)\quad 2J^{n+1}-\frac{2}{3}(Y^0)^2=K^{n+1}.$$

Если $K^{n+1}>0$, тогда каждое из напряжений s_{xx}^{n+1}, s_{yy}^{n+1}, $s_{\theta\theta}^{n+1}$ и T_{xy}^{n+1} умножается на $\sqrt{\frac{2}{3}}Y^0/\sqrt{2J^{n+1}}$. Если же $K^{n+1}\leqslant 0$, то для следующего шага по времени используются напряжения в неизменной форме.

з. *Граничные условия*

1. Фиксированная граница по оси x. Вводим воображаемые ячейки посредством зеркального отображения через границу, как это указано на рис. 24.

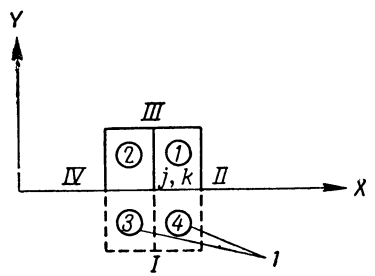


Рис. 24. *I* — отраженные ячейки.

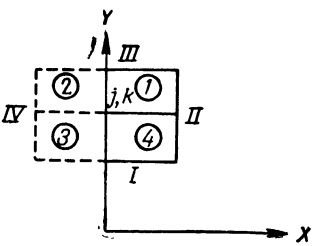


Рис. 25.

Точке j, k можно поставить в соответствие ускорение, согласно уравнению движения для обычной точки [уравнения (B)], но с учетом следующих условий:

$$(1)\quad \begin{gathered}\dot{y}_{j,k}=0,\\ (\Sigma_{xx}^n)_④=(\Sigma_{xx}^n)_①,\qquad (\Sigma_{xx}^n)_③=(\Sigma_{xx}^n)_②,\\ (T_{xy}^n)_④=-(T_{xy}^n)_①,\qquad (T_{xy}^n)_③=-(T_{xy}^n)_②,\\ M_④=M_①,\qquad M_③=M_②.\end{gathered}$$

Эта процедура обеспечивает нужные ускорения вдоль границы, но она обладает нежелательным свойством, что препятствует ее использованию в случае, когда точка j, k лежит на свободной поверхности, так как в этом случае рассматриваемая точка будет иметь лишнюю массу соответствующих воображаемых ячеек. Более удобно иметь правильную массу, приписываемую каждой точке, определенную раз и навсегда при построении разностной сетки, но использовать другую методику рас-

чета ускорения для случая, когда граница является фиксированной. Поэтому, учитывая рис. 24, мы будем вычислять $\varphi_{j,k}$ следующим образом:

$$\varphi^n_{j,k} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\rho^0 A^n}{V^n}\right)_{①} + \left(\frac{\rho^0 A^n}{V^n}\right)_{②}\right]. \tag{2}$$

Тогда уравнение для ускорения точки j, k, дающее те же результаты, что и уравнение движения обычной точки с условием (1), запишется так:

$$\left(\frac{d\dot{x}}{dt}\right)_{j,k} = -\frac{1}{2\varphi^n_{j,k}}\left\{\left[\left(\Sigma^n_{xx}\right)_{①} - \left(\Sigma^n_{xx}\right)\right]_{②}\left[y^n_{II} - y^n_{III}\right] - \right. \tag{3}$$
$$\left. - \left(T^n_{xy}\right)_{①}\left[x^n_{II} - x^n_{III}\right] - \left(T^n_{xy}\right)_{②}\left[x^n_{III} - x^n_{IV}\right]\right\}.$$

2. Фиксированная граница на оси y (рис. 25).

$$\begin{aligned} \dot{x}_{j,k} &= 0 \\ \left(\Sigma^n_{yy}\right)_{②} &= \left(\Sigma^n_{yy}\right)_{①}, & \left(\Sigma^n_{yy}\right)_{③} &= \left(\Sigma^n_{yy}\right)_{④}, \\ \left(\Sigma^n_{\theta\theta}\right)_{②} &= \left(\Sigma^n_{\theta\theta}\right)_{①}, & \left(\Sigma^n_{\theta\theta}\right)_{③} &= \left(\Sigma^n_{\theta\theta}\right)_{④}, \\ \left(T^n_{xy}\right)_{②} &= -\left(T^n_{xy}\right)_{①}, & \left(T^n_{xy}\right)_{③} &= -\left(T^n_{xy}\right)_{④}, \\ M_{②} &= M_{①}, & M_{③} &= M_{④}. \end{aligned} \tag{1}$$

Как и выше при рассмотрении оси x, учет влияния отражения относительно оси y, приводящего к условиям (1), можно

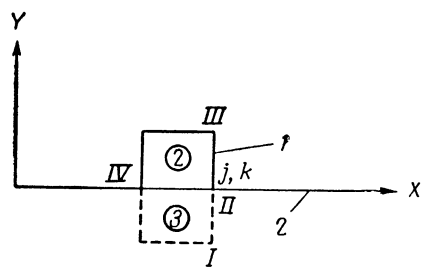


Рис. 26. *1* — свободная поверхность; *2* — неподвижная граница.

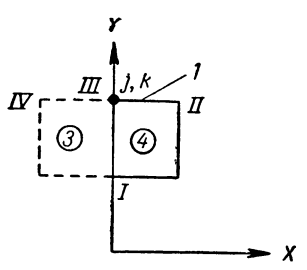


Рис. 27. *1* — свободная поверхность.

провести путем использования следующих уравнений для ускорения в точке j, k:

$$\varphi^n_{j,k} = \frac{1}{4}\left[\left(\rho^0 A^n/V^n\right)_{①} + \left(\rho^0 A^n/V^n\right)_{④}\right],$$

$$\beta^n_{j,k} = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\Sigma^n_{yy} - \Sigma^n_{\theta\theta}\right)\left(A^n/M\right)\right]_{①} + \left[\left(\Sigma^n_{yy} - \Sigma^n_{\theta\theta}\right)\left(A^n/M\right)\right]_{④}\right\}, \tag{2}$$

$$\left(\frac{d\dot{y}}{dt}\right)_{j,k} = \frac{1}{2\varphi^n_{j,k}}\left\{\left[\left(\Sigma^n_{yy}\right)_{①} - \left(\Sigma^n_{yy}\right)_{④}\right]\left[x^n_{II} - x^n_{III}\right] - \right. \tag{3}$$
$$\left. - \left(T^n_{xy}\right)_{①}\left[y^n_{II} - y^n_{III}\right] - \left(T^n_{xy}\right)_{①}\left[y^n_{I} - y^n_{II}\right]\right\} + \beta^n_{j,k}.$$

3. Угловая ячейка, расположенная на оси x (рис. 26).

(1)
$$\dot{y}_{j,k}=0,$$
$$(\Sigma^n_{xx})_④=(\Sigma^n_{xx})_①=0,\qquad (\Sigma^n_{xx})_③=(\Sigma^n_{xx})_②,$$
$$(T^n_{xy})_③=-(T^n_{xy})_②,\qquad (T^n_{xy})_①=(T^n_{xy})_④=0,$$
$$M_③=M_②,$$

(2)
$$\varphi_{j,k}=\frac{1}{4}\left[(\rho^0 A^n/V^n)_②\right],$$

(3)
$$\left(\frac{d\dot{x}}{dt}\right)_{j,k}=-\frac{1}{2\varphi^n_{j,k}}\left[(\Sigma^n_{xx})_②\left(y^n_{\mathrm{III}}-y^n_{\mathrm{IV}}\right)-(T_{xy})_②\left(x^n_{\mathrm{III}}-x^n_{\mathrm{IV}}\right)\right].$$

4. Угловая ячейка, расположенная на оси y (рис. 27).

$$\dot{x}_{j,k}=0,$$
$$(\Sigma^n_{yy})_③=(\Sigma^n_{yy})_④,\qquad (\Sigma^n_{yy})_②=(\Sigma^n_{yy})_①=0,$$

(1)
$$(\Sigma^n_{\theta\theta})_③=(\Sigma^n_{\theta\theta})_④,\qquad (\Sigma^n_{\theta\theta})_②=(\Sigma^n_{\theta\theta})_①=0,$$
$$(T^n_{xy})_③=-(T^n_{xy})_④,\quad (T^n_{xy})_②=(T^n_{xy})_①=0,$$
$$M_③=M_④,$$

(2)
$$\varphi^n_{j,k}=\frac{1}{4}\left[(\rho^0 A^n/V^n)_④\right],$$
$$\beta^n_{j,k}=\left[(\Sigma^n_{yy}-\Sigma^n_{\theta\theta})(A^n/M)\right]_④,$$

(3)
$$\left(\frac{d\dot{y}}{dt}\right)_{j,k}=\frac{1}{2\varphi^n_{j,k}}\left[(\Sigma^n_{yy})_④\left(x^n_{\mathrm{I}}-x^n_{\mathrm{II}}\right)-(T^n_{xy})_④\left(y^n_{\mathrm{I}}-y^n_{\mathrm{II}}\right)\right]+\beta^n_{j,k}.$$

5. Свободные поверхности. Для свободной поверхности в точке j, k, отмеченной на рис. 28, все величины, относящиеся

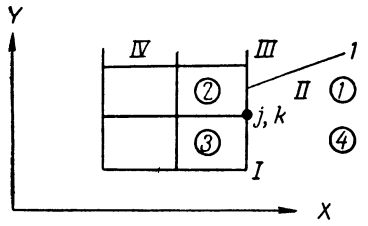


Рис. 28. *1* — свободная поверхность.

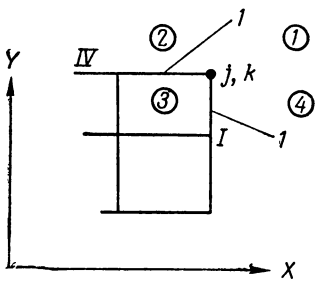


Рис. 29. *1* — свободная поверхность.

к воображаемым ячейкам ① и ④, принимаются равными нулю. Далее можно использовать уравнения движения для обычной

точки, только вычисление величин $\alpha^n_{j,k}$, $\beta^n_{j,k}$ нужно проводить по формулам

$$\alpha^n_{j,k} = \frac{1}{2}\{[T^n_{xy}(A^n/M)]_② + [T^n_{xy}(A^n/M)]_③\},$$

$$\beta^n_{j,k} = \frac{1}{2}\{[(\Sigma^n_{yy} - \Sigma^n_{\theta\theta})(A^n/M)]_② + [(\Sigma^n_{yy} - \Sigma^n_{\theta\theta})(A^n/M)]_③\}.$$

Для угловой точки свободной поверхности воображаемыми ячейками на рис. 28 и 29 будут ячейки ①, ② и ④, и

$$\alpha^n_{j,k} = (T^n_{xy}A^n/M)_③, \qquad \beta^n_{j,k} = [(\Sigma^n_{yy} - \Sigma^n_{\theta\theta})(A^n/M)]_③.$$

и. *Поверхности скольжения*

Когда два материала скользят один по другому, то происходит «раздвоение» точек сетки, находящихся на границе контакта, иначе говоря, возникают большие деформации сетки. Если принимать во внимание все силы, действующие на поверхности контакта, то уравнения движения чрезвычайно усложняются. Для большого класса задач простое раздвоение точек сетки

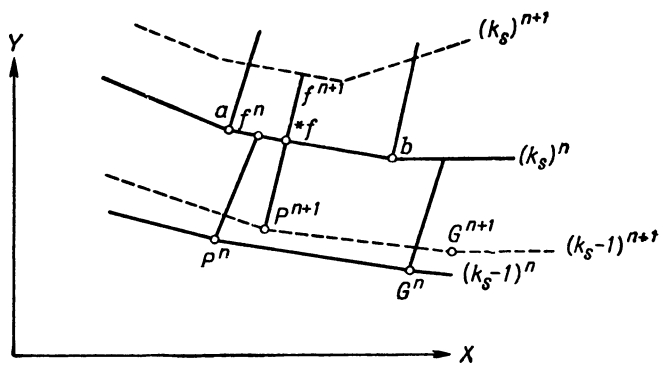


Рис. 30.

дает весьма удовлетворительные результаты. В рассматриваемом здесь упрощенном варианте метода одна из поверхностей считается фиксированной границей в течение заданного шага по времени Δt. Уравнения движения для скользящего материала такие же, как и соответствующие уравнения для случая движения вдоль фиксированной границы. Затем эта фиксированная граница смещается с течением времени, для чего используется поле сил, которое имеется в прилегающем к ней скользящем материале. Новое положение фиксированной границы дает новую границу для скользящего материала. Важным моментом

в такого рода вычислениях является то, что параметры на границе скользящего материала связываются только с этим скользящим материалом и что материал, образующий фиксированную границу, рассматривается так, чтобы эта граница для него была бы внешней поверхностью с действующими на ней силами давления. Существенно, что никакие силы не должны определяться на границе скольжения путем осреднения с использованием данных по обе стороны границы контакта. Обращаясь к рис. 30, заметим следующее:

(1) Точка f перемещается вдоль $(k_s)^n$ так, как если бы $(k_s)^n$ была фиксированной границей. Масса точки f соответствует массе материала, лежащего ниже линии k_s.

(2) Точки a, b и т. д., расположенные на линии $(k_s)^n$, перемещаются при переходе от момента времени (n) к моменту времени $(n+1)$. Эти точки связаны с массой сетки выше k_s. Линия $(k_s)^n$ рассматривается как сеточная граница для верхней части материала, и предполагается, что ее ускорение обусловлено силами, возникающими от части сетки, лежащей ниже этой границы.

(3) Точки для линии $(k_s - 1)^n$ перемещаются обычным образом.

(4) Точка f^{n+1} находится при помощи линии, проходящей через P^{n+1} и точку $^*f$.

Вычисления для поверхности скольжения

(а) *Вычисление объемов, соответствующих массовым точкам на линии* $k - 1/2$.

1. Дана точка P на линии $k - 1$ и наклон m_p линии, проходящей через P. Мы хотим найти на линии k точки a и b, расположенные по обе стороны от этой линии (рис. 31). Как только эти точки найдены, можно определить точку f пересечения линии, соединяющей точки a, b, с линией, проходящей через P.

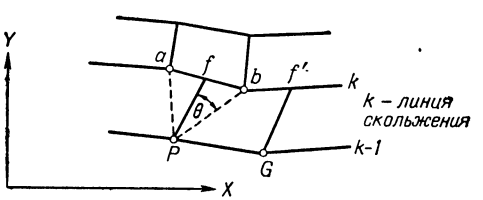


Рис. 31.

Для каждой точки j, k вычисляем

$$(\operatorname{tg}\theta)_{j,k} = (m_p - m_{j,k})/(1 + m_p \cdot m_{j,k}),$$

где $m_{j,k}=(y_{j,k}-y_p)/(x_{j,k}-x_p)$, причем (x_p, y_p) и m_p задаются.

(1) Если $|m_p|>10^4$, то $(\operatorname{tg}\theta)_{j,k}=1/m_{j,k}$.

(2) Если $|m_{j,k}|>10^4$, то $(\operatorname{tg}\theta)_{j,k}=-1/m_p$.

(3) Если $|m_p|>10^4$ и $|m_{j,k}|>10^4$, то $(\operatorname{tg}\theta)_{j,k}=0$.

Проверяем последовательно ряд значений $(\operatorname{tg}\theta)_{j,k}$ до тех пор, пока не придем к изменению в знаке. Точки $(x_{j,k}, y_{j,k})$ и $(x_{j+1,k}, y_{j+1,k})$, для которых это будет иметь место, принимаем за точки (x_a, y_a) и (x_b, y_b). (Этот метод становится непригодным, если $|\theta|\geqslant 90°$. Однако в практических вычислениях при переходе от цикла к циклу мы получаем сведения о соседних точках. Эти точки проверяются первыми. Если сразу не получается, то поочередно испытываются с каждой стороны ближайшие соседние точки. При первом поиске проверяются все точки линии k на изменение знака $\operatorname{arctg}\theta$.)

2. Находим координаты точки f на линии ab:

$$x_f=(y_a-y_p+m_px_p-m_{ab}x_a)/(m_p-m_{ab}),$$
$$y_f=\{m_p[y_a-m_{ab}(x_a-x_p)]-m_{ab}y_p\}/(m_{ab}-m_p),$$
$$m_{ab}=(y_a-y_b)/(x_a-x_b).$$

3. Повторяем шаги 1 и 2 для точки G, лежащей на линии $k-1$.

4. Вычисляем объем, ограниченный точками P, f, b, f' и G (рис. 32).

Здесь A_1 — площадь треугольника 1 и т. д.

$$2A_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_b-x_p & y_b-y_p & 0 \\ x_f-x_p & y_f-y_p & 0 \end{vmatrix}=$$
$$=(x_b-x_p)(y_f-y_p)-(y_b-y_p)(x_f-x_p),$$

$$2A_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{f'}-x_p & y_{f'}-y_p & 0 \\ x_b-x_p & y_b-y_p & 0 \end{vmatrix}=$$
$$=(x_{f'}-x_p)(y_b-y_p)-(y_{f'}-y_p)(x_b-x_p),$$

$$2A_3=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_G-x_p & y_G-y_p & 0 \\ x_{f'}-x_p & y_{f'}-y_p & 0 \end{vmatrix}=$$
$$=(x_G-x_p)(y_{f'}-y_p)-(y_G-y_p)(x_{f'}-x_p),$$

$$V_{p+1/2}=\frac{1}{3}\left(\frac{\rho^0}{M}\right)_{p+1/2}[(y_p+y_f+y_b)A_1+(y_p+y_b+y_{f'})A_2+$$
$$+(y_p+y_{f'}+y_G)A_3].$$

5. Вычисляем координаты центра ячейки (рис. 33)

$$x_{j+1/2,\,k-1/2}=\frac{1}{4}(x_{j,\,k-1}+x_{f,\,k}+x_{f',\,k}+x_{j+1,\,k-1}),$$

$$y_{j+1/2,\,k-1/2}=\frac{1}{4}(y_{j,\,k-1}+y_{f,\,k}+y_{f',\,k}+y_{j+1,\,k-1}).$$

Заметим, что этими формулами, вообще говоря, не определяется центр ячейки, но удобно принимать эти величины за координаты центра.

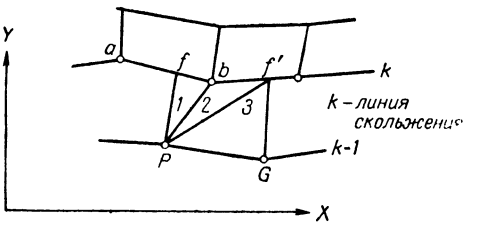


Рис. 32.

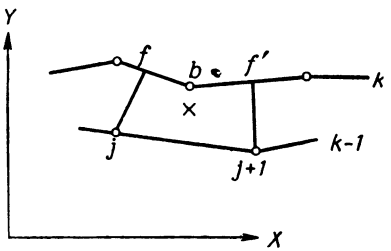


Рис. 33.

(б) *Вычисление перемещения точки f на линии скольжения k при изменении времени* (рис. 34).

1. $$G_f^n=[(P+q)_3(y_e-y_{j,\,k-1})+(P+q)_4(y_{j,\,k-1}-y_g)]^n\cdot\cos ab-$$
$$-[(P+q)_3(x_e-x_{j,\,k-1})+(P+q)_4(x_{j,\,k-1}-x_g)]^n\cdot\sin ab,$$
$$\sin ab=\left(\frac{y_b-y_a}{\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}}\right)^n,$$
$$\cos ab=\left(\frac{x_b-x_a}{\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}}\right)^n.$$

2. $$\dot{x}_f^{n+1/2}=\dot{x}_{j,\,k-1}^{n-1/2}+\frac{\Delta t^n}{2\varphi_f^n}(G_f\cdot\cos ab)^n,$$
$$\dot{y}_f^{n+1/2}=\dot{y}_{j,\,k-1}^{n-1/2}+\frac{\Delta t^n}{2\varphi_f^n}(G_f\cdot\sin ab)^n,$$
$$\varphi_f^n=\frac{1}{4}[(\rho^0A^n/V^n)_③+(\rho^0A^n/V^n)_④].$$

Здесь $A_③^n$ — площадь ячейки ③ в момент времени n и т. д.

Заметим, что точка f в момент $n-1/2$ задается скоростью точки $(j,k-1)$, и не принимается во внимание тот факт, что f может переместиться к новому отрезку линии в течение шага по времени.

3. $$x_f^{n+1}=x_f^n+\dot{x}_f^{n+1/2}\,\Delta t^{n+1/2},\quad y_f^{n+1}=y_f^n+\dot{y}_f^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2}.$$

(в) *Вычисление перемещения точки j, k на линии скольжения k при изменении времени.*

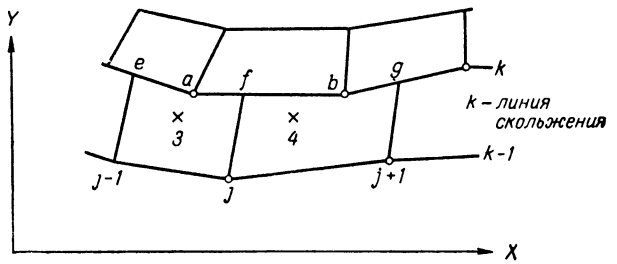


Рис. 34.

1. Дана точка 2 (рис. 35) и наклон m_2 линии, проходящей через 2 и перпендикулярной ab. Мы хотим найти точки r и s на

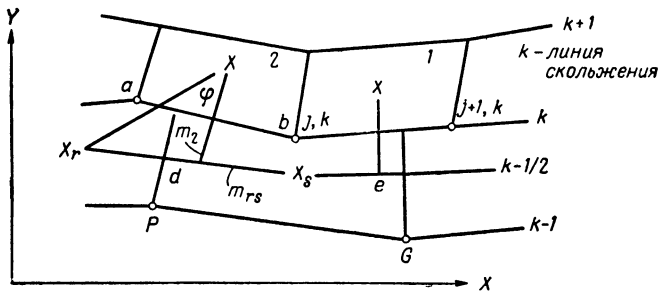


Рис. 35.

линии $k-1/2$, которые лежат по обе стороны от указанной линии. Для каждой точки $(j+1/2)$, $(k-1/2)$ вычисляем

$$(\operatorname{tg}\theta)_{j+1/2,\,k-1/2}=(m_2-m_{j+1/2,\,k-1/2})/(1+m_2\cdot m_{j+1/2,\,k-1/2}),$$

$$m_{j+1/2,\,k-1/2}=(y_{j+1,\,k-1/2}-y_2)/(x_{j+1/2,\,k-1/2}-x_2),$$

$$m_2=-(x_a-x_b)/(y_a-y_b).$$

(1) Если $|m_{j+1/2,\,k-1/2}|>10^4$, то $(\operatorname{tg}\theta)_{j+1/2,\,k-1/2}=-1/m_2$.

(2) Если $|m_2|>10^4$, то $(\operatorname{tg}\theta)_{j+1/2,\,k-1/2}=-1/m_{j+1/2,\,k-1/2}$.

(3) Если $|m_2|>10^5$ и $|m_{j+1/2,\,k-1/2}|>10^5$, то $(\operatorname{tg}\theta)_{j+1/2,\,k-1/2}=0$.

Последовательно испытываем значения $(\operatorname{tg}\theta)_{j+1/2,\,k-1/2}$ до тех пор, пока не придем к изменению в знаке. Точки $(x_{j-1/2,\,k-1/2}, y_{j-1/2,\,k-1/2})$ и $(x_{j+1/2,\,k-1/2}, y_{j+1/2,\,k-1/2})$ будут точками (x_r, y_r) и (x_s, y_s) (подробности см. в тексте, § 2).

2. Вычисляем точку пересечения (x_d, y_d) линии, проходящей через точку 2, с линией, проходящей через точки (x_r, y_r) и (x_s, y_s)

$$x_d = (m_{rs}x_r - m_2x_2 + y_2 - y_r)/(m_{rs} - m_2),$$
$$y_d = \{m_2[y_r - m_{rs}(x_r - x_2)] - m_{rs}y_2\}/(m_2 - m_{rs}),$$
$$m_{rs} = (y_r - y_s)/(x_r - x_s).$$

Если $|m_{rs}| < 10^{-4}$ и $|m_2| > 10^4$, то $x_d = x_2$ и $y_d = y_s$.

3. Вычисляем давление в точке d.

$$P_d = P_r|d - s| + P_s|d - r|/|r - s|,$$
$$|d - s| = \sqrt{(x_d - x_s)^2 + (y_d - y_s)^2} \text{ и т. д.}$$

4. Повторяем действия 1—3 для получения P_e.

5. Смещаем точку (j, k).

$$\dot{x}^{n+1/2}_{j,k} = \dot{x}^{n-1/2}_{j,k} + \frac{\Delta t^n}{2\varphi^n_{j,k}}\left[P^n_1\left(y^n_{j+1,k} - y^n_{j,k+1}\right) + P^n_2\left(y^n_{j,k+1} - y^n_{j-1,k}\right) + \right.$$
$$\left. + P^n_d\left(y^n_{j-1,k} - y^n_{j,k}\right) + P^n_e\left(y^n_{j,k} - y^n_{j+1,k}\right)\right],$$
$$\dot{y}^{n+1/2}_{j,k} = \dot{y}^{n-1/2}_{j,k} - \frac{\Delta t^n}{2\varphi^n_{j,k}}\left[P^n_1\left(x^n_{j+1,k} - x^n_{j,k+1}\right) + P^n_2\left(x^n_{j,k+1} - x^n_{j-1,k}\right) + \right.$$
$$\left. + P^n_d\left(x^n_{j-1,k} - x^n_{j,k}\right) + P^n_e\left(x^n_{j,k} - x^n_{j+1,k}\right)\right].$$

(г) *Вычисление смещения остальных точек сетки.* Остальная часть разностной сетки подвергается смещению по обычным уравнениям. Наклон m_p, введенный в п. (а), находится по точке (x_f, y_f) [см. п. (б)] и новому положению точки P. Теперь мы можем повторить шаги (а) и (б). Начальная величина наклона m_p определяется делением пополам угла, образованного точкой P и соседними с ней точками на линии $(k_s - 1)$.

(д) *Обсуждение.* Из описанной процедуры видно, что скользящему материалу предписывается следовать движению ограничивающей линии скольжения. При этом вносится ошибка по времени и положению, так как, даже несмотря на сохранение массы, половина массы скользящего материала не учитывается при расчете ускорения в направлении движения границы. Эта ошибка уменьшается, когда скользящий материал имеет меньшую плотность, чем материал, примыкающий к границе, или когда используется мелкая расчетная сетка. При подходящей сетке ошибка становится заметной только после того, как разовьются значительные смещения. Ошибка может быть эффективно уменьшена путем увеличения $\varphi_{j,k}$ для материала границы, чтобы компенсировалась половина массы скользящего материала, игнорированная в уравнениях для ускорения.

к. *Расчет зоны горения* ВВ

Химическая энергия, выделяющаяся посредством гидродинамического уравнения состояния, запоминается в каждой ячейке взрывчатого вещества в виде начальной энергии E^0. Время, за которое фронт детонации достигает определенной ячейки, можно вычислить заранее по известной скорости детонации D и расстоянию от точки начала детонации до центра ячейки. Эта величина также запоминается для каждой ячейки.

При проведении расчета степени превращения F в процессе горения фронт горения «размазывается» на несколько ячеек аналогично тому, как путем введения искусственной вязкости q мы размазываем ударную волну на несколько ячеек. Зона горения интегрируется с использованием уравнения энергии, однако ту явную формулу, которая была дана в разд. Г, 2, д, невозможно применять для расчета энергии. Вместо этого для расчета энергии следует использовать метод итераций. Описываемую ниже процедуру можно также применить вместо способа вычислений, указанного в разд. Г, 2, д, если требуется использовать более сложное уравнение состояния.

Для одномерного случая степень превращения F при горении можно определить формулой [17]

$$F=(1-V)/(1-V_{CJ})$$

и начинать расчет горения, полагая $F=1$ в ячейке, которая соответствует точке начала детонации. Расчет горения продолжается в ячейках, число которых в три-четыре раза больше количества ячеек, на которых происходит размазывание за счет использования искусственной вязкости, пока будет достигнуто четкое установление фронта детонации. В одномерном случае число этих ячеек достигает 16.

При расчете двумерных задач, для которых число ячеек практически ограничено, обычно бывает необходимо иметь правильное значение скорости детонации, установившейся на меньшем числе ячеек. Удобный способ добиться этого заключается в том, чтобы начать расчет горения в то время, когда детонация достигнет данной ячейки описанным выше образом. Для того чтобы допустить возможность пересжатой детонации, которая может возникнуть в процессе расчета, и привести к скорости детонации выше нормальной, можно в дополнение к расчету горения по известной скорости детонации определять еще степень превращения F при горении по формуле $F=(1-V)/(1-V_{CJ})$ и при расчетах выбирать большую из этих двух величин.

(1) Степень превращения F_1^{n+1} равна

$$F_1^{n+1}=(t^{n+1}-t_b)/\Delta L, \quad \Delta L=r\,\Delta x/B,$$

для $t^{n+1} \leqslant t_b$ имеем $F_1^{n+1} = 0$,

$$F_2^{n+1} = (1 - V^{n+1})/(1 - V_{CJ}),$$

F^{n+1} равно максимуму из F_1^{n+1} и F_2^{n+1}.

Если $F^{n+1} > 1$, то полагаем $F^{n+1} = 1$.

Здесь использованы следующие обозначения: t — текущее время, t_b — время начала горения в ячейке, Δx — шаг по пространству, D — скорость детонации, $r \approx 2{,}5$ — постоянная, V_{CJ} — относительный объем Чепмена — Жуге.

(2) $$\tilde{E}^{n+1} = E^n - (P^n + q^{n+1/2}) \cdot (V^{n+1} - V^n),$$

(3) $$\tilde{P}^{n+1} = P(\tilde{E}^{n+1}, V^{n+1}) \cdot F^{n+1},$$

где $P(E, V)$ — уравнение состояния продуктов детонации,

(4) $$E^{n+1} = \tilde{E}^{n+1} - \frac{1}{2}(\tilde{P}^{n+1} - P^n) \cdot (V^{n+1} - V^n),$$

(5) $$P^{n+1} = P(E^{n+1}, V^{n+1}) \cdot F^{n+1}.$$

л. *Устойчивость*

Выбор Δt делается так же, как и в одномерной задаче (см. приложение I). Характерная толщина ячейки принимается равной площади соответствующей ячейки, деленной на длину наибольшей диагонали.

м. *Случай плоской геометрии*

Для случая плоской геометрии в пространстве (x, y), согласно уравнению, приведенному в начале этого приложения [разд. А, уравнение (а)], формула для расчета массы примет следующий вид:

$$M_\Phi = (\rho^0/V^0) \cdot (A_a^0 + A_b^0).$$

Условие сохранения массы (разд. Б) запишется так:

$$V_\Phi^n = (\rho^0/M_\Phi) \cdot (A_a^n + A_b^n).$$

В уравнениях движения (разд. В) члены α и β полагаются равными нулю. Величины $\varphi_{j,k}$ становятся постоянными и вычисляются только один раз для каждой точки j, k. Логика определения величин $\varphi_{j,k}$ на границе разностной сетки та же, что и для случая осевой симметрии, только

$$[\rho^0 (A_b^n + A_b^n)/V^n]_\Phi = M_\Phi \text{ и т. д.}$$

Член $\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}$, встречающийся в разделе об уравнении состояния, следует положить равным нулю.

Литература

1. Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Бражник М. И., Владимиров Л. А., Сперанская М. П., Фунтиков А. И., *ЖЭТФ*, **38**, № 4, 1061 (1960).
2. Drucker D. C., *J. Appl. Mech.*, **26**, 101—106 (1959) (имеется русский перевод: сб. *Механика*, № 2 (60) (1960), 55—70).
3. Duvall G., *Appl. Mech. Rev.*, **15**, 849—854 (1962).
4. Lundergan C. D., The Hugoniot equation of state of 6061-T6 aluminum at low pressures, SC-4637 (RR), 1961.
5. Maenchen G., Nuckolls J., Paper J. UCRL-6438, Part II, 1961.
6. Morland L. W., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A251**, 341—383 (1959).
7. Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, ИЛ, М., 1954.
8. Прагер В., Ходж Ф., Теория идеально пластических тел, ИЛ, М., 1956.
9. Reddick H. W., Miller F. H., Advanced Mathematics for Engineers, 3rd ed. Wiley. New York, 1955.
10. Рейнер М., Двенадцать лекций по теоретической реологии, ИЛ, М., 1950.
11. Рихтмайер Р. Д., Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, М., 1960.
12. Тимошенко С. П., Теория упругости, ОНТИ, М., 1937.
13. Mises R., *Z. Angew. Math. und Mech.*, **8** (1928).
14. Von Neumann J., Richtmyer R. D., *J. Appl. Phys.*, **21**, 232 (1950) (имеется сокращенный русский перевод: Нейман Дж., Рихтмайер Р., Метод численного расчета гидродинамических скачков, сб. *Механика*, № 1 (1951)).
15. Walsh J. M., Rice M. H., McQueen R. G., Yarger F. L., *Phys. Rev.*, **108**, № 2 (1957).
16. Wecken F., Muecke L., Detonation d'une charge sphérique, Lab. Rech. Tech. Saint-Louis Rappt. Nos. 8/50 and 1/53, 1950.
17. Wilkins M. L., Calcul de Detonations Mono et Bidimensionnelles, in «Les Ondes de Detonation», pp. 165—175 (Proc. Colloq. held at Gif-sur-Yvette, France, Aug. 28 — Sept. 2, 1961). Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1962.

Метод характеристик для решения уравнений одномерного неустановившегося течения

Н. Э. ХОСКИН

Институт исследований по атомному вооружению, Олдермастон, Англия

1. Введение 264
2. Уравнения движения 266
3. Структура программы для вычислительной машины 272
4. Расчет методом характеристик с фиксированными шагами по времени 286
5. Заключение 291
Литература 291

1. Введение

A. Методы решения

Течения сжимаемой жидкости описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, которые выражают законы сохранения массы, изменения количества движения и сохранения энергии и к которым присоединяется еще уравнение состояния, связывающее термодинамические переменные. Эти уравнения вместе с необходимыми начальными значениями и граничными условиями определяют решение и в принципе могут быть проинтегрированы, что позволит построить течение в последующие моменты времени. Из-за нелинейности этих уравнений могут возникать разрывы (т. е. ударные волны) в первоначально непрерывном решении, или же ударные волны могут иметь место уже в начальный момент времени. Определение движения этих ударных волн существенно, чтобы в последующие моменты времени решение было правильным.

Один из подходов состоит во введении в исходные уравнения искусственных диссипативных членов либо в явной форме (см., например, работу фон Неймана и Рихтмайера [6]), либо путем выбора подходящего конечно-разностного представления уравнений, описывающих течение (см., например, работу Лакса [5]). В результате этого разрывы размажутся на узкие области, поперек которых параметры течения будут изменяться быстро, но непрерывно. Тогда здесь не будет возникать каких-либо дополнительных трудностей из-за наличия или появления скачков. Однако вследствие размазывания скачков в этом случае ухудшится определение решения, поэтому дальнейшее развитие такого метода связано с рассмотрением скачков в форме разрывов и с одновременным расчетом всех остальных точек области по

стандартным конечно-разностным схемам (Стейн [7]; Келлер и др. [3]). Мы здесь будем использовать уравнения газовой динамики в характеристических переменных, при этом скачки будут рассматриваться точным образом.

Б. Характеристические переменные

Если пренебрегать диссипативными процессами, такими, как вязкость и теплопроводность, то дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие данную задачу, будут принадлежать к гиперболическому типу и, следовательно, будут обладать действительными характеристиками. Из этих уравнений можно составить такие комбинации, которые будут содержать производные только по одному направлению (см., например, Курант и Фридрихс [1]). Эти направления определяют однопараметрические семейства характеристических кривых (которые обычно называют просто характеристиками). Сперва мы рассмотрим определение решения в точках, образованных пересечением характеристик, принадлежащих различным семействам. В дальнейшем кратко изложим решение характеристических уравнений при использовании специальной расчетной сетки, образованной линиями постоянных значений времени и пространственной координаты.

В. Относительные преимущества метода характеристик

Сначала остановимся на преимуществах метода характеристик по сравнению с другими конечно-разностными методами, упоминавшимися в § 1, А. Основной недостаток обычных конечно-разностных схем состоит в том, что применение конечного шага разностной сетки не позволяет точно рассматривать такие особенности, как центрированные волны разрежения, а из-за введения искусственной вязкости приходится уменьшать возможную величину шага при интегрировании по времени по сравнению со значением, которое дает критерий Куранта. Хотя при точном рассмотрении скачков второе ограничение устраняется, однако первый недостаток такой расчетной конечно-разностной схемы все еще будет оставаться.

При решении уравнений газовой динамики численным методом характеристик устойчивость не накладывает ограничений на размер шага расчетной сетки, хотя очевидно, что ошибки аппроксимации будут возрастать с увеличением шага сетки. Уравнения газовой динамики в характеристической форме содержат производные только *вдоль* характеристических направлений. Поэтому, если в начальный момент времени в некоторой точке начальные данные имеют разрыв какой-либо производной, то такой разрыв будет распространяться безо всякой диффузии вдоль характеристической кривой, проходящей через

эту точку. Отсюда следует, что области с различными типами непрерывного течения (например, волны сжатия, волны разрежения и области равномерного течения) должны быть ограничены и отделены друг от друга характеристическими кривыми. Таким образом, в решении, полученном в точках характеристической сетки, все отдельные волны будут построены точно. В решении же, полученном с помощью конечно-разностного метода, такие границы будут, вообще говоря, размазываться, и здесь для достижения такой же точности, как в методе характеристик, придется, вероятно, брать более мелкую сетку. Поэтому следует ожидать, что метод характеристик будет давать результаты с желаемой точностью при меньшей затрате труда, чем в случае применения конечно-разностного метода.

С другой стороны, сложность логики метода характеристик быстро возрастает с увеличением числа рассматриваемых разрывов, в то время как в конечно-разностных методах при использовании искусственной вязкости иметь дело со сложными системами не труднее, чем с простыми задачами. Ограничения метода характеристик станут более очевидны позже, когда мы будем обсуждать различные конкретные задачи.

Г. Терминология и обозначения

Если диссипативные процессы не учитываются, то энтропия каждого элемента жидкости будет оставаться постоянной до тех пор, пока элемент не пересечет какая-либо ударная волна. Следуя Куранту и Фридрихсу [1], соответствующие течения будем называть *адиабатическими*. Если же энтропия всех элементов имеет одну и ту же величину, то такое течение будет называться *изэнтропическим*. Мы будем рассматривать течения, которые являются адиабатическими, но не обязательно изэнтропическими.

Переменные величины, которые входят в уравнения в последующих параграфах, обозначаются следующим образом: R — эйлерова пространственная координата, r — лагранжева пространственная координата, t — время, u — скорость жидкости, U — скорость ударной волны, p — давление, ρ — плотность, ρ_0 — начальная плотность, $v=\rho_0/\rho$ — относительный объем, c — скорость звука, T — температура, S — энтропия, E — внутренняя энергия, $\alpha=0$, 1, 2 для плоского, цилиндрического и сферического течений соответственно.

2. Уравнения движения

А. Обычная форма уравнений

Сначала рассмотрим уравнения движения в лагранжевых переменных, поскольку в плоскости (r, t) траектории частиц (и, следовательно, поверхности раздела двух различных сред) пред-

ставляются просто уравнением $r=\text{const}$. Тогда из законов сохранения массы, изменения количества движения и сохранения энергии можно вывести следующие уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\alpha u v}{R}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial r}=0. \tag{2}$$

$$T\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial E}{\partial t}+p\frac{\partial v}{\partial t}=0. \tag{3}$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\partial R}{\partial t}=u \tag{4}$$

и уравнение состояния, которое можно записать в форме

$$p=p(v,\ E). \tag{5}$$

Б. Характеристическая форма

Уравнение (3) имеет нужную характеристическую форму, поскольку в него входят производные только по одному направлению. Преобразуем теперь к характеристической форме уравнения (1) и (2). Скорость звука определяется равенством

$$c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_r=-\frac{v^2}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_r. \tag{6}$$

Тогда, умножая уравнение (1) на c/v и используя формулу (6), находим

$$\frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{\alpha u c}{R}. \tag{7}$$

Складывая уравнения (2) и (7), найдем

$$\frac{1}{\rho c}\left[\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial r}\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial r}\right]=-\frac{\alpha u c}{R}, \tag{8}$$

а вычитая уравнение (2) из уравнения (7), аналогично получим

$$\frac{1}{\rho c}\left[\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\frac{\partial p}{\partial r}\right]-\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial r}\right]=-\frac{\alpha u c}{R}. \tag{9}$$

Таким образом, уравнения (8) и (9) имеют характеристическую форму, и их можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho c}dp+du+\frac{\alpha u c}{R}dt=0 \tag{10}$$

вдоль

$$dr=\frac{c}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}dt \tag{11}$$

и

$$\frac{1}{\rho c}dp-du+\frac{\alpha u c}{R}dt=0 \tag{12}$$

вдоль

$$dr = -\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha} dt. \tag{13}$$

Уравнение (3) в характеристической форме можно записать так:

$$dE + pdv = 0 \quad \text{или} \quad dS = 0 \tag{14}$$

вдоль

$$dr = 0. \tag{15}$$

Кривые, определяемые уравнением (11), обычно называют *характеристиками первого семейства*, а кривые, определяемые уравнением (13), — *характеристиками второго семейства.* Можно показать, что в эйлеровых переменных характеристические кривые определяются следующими дифференциальными соотношениями:

$$dR = (u \pm c)\,dt, \tag{16}$$

где знак плюс относится к характеристикам первого семейства, а знак минус к характеристикам второго семейства.

В изэнтропических течениях третье характеристическое соотношение [уравнение (14) или (15)] не требуется, поскольку здесь энтропия не является переменной величиной. Однако в общем случае при решении задач необходимо использовать характеристические соотношения вдоль трех различных характеристических кривых.

В. Разрывы

Существуют два типа разрывов. Простейшим типом являются контактные поверхности (т. е. поверхности раздела двух сред и свободные поверхности), при переходе через которые давление и скорость остаются непрерывными, а плотность, энергия и энтропия терпят разрыв. Закон движения этих поверхностей дается уравнением

$$dR = u\,dt, \quad dr = 0. \tag{17}$$

Ко второму типу разрывов относятся ударные волны, дифференциальное уравнение которых имеет вид

$$dR = U\,dt. \tag{18}$$

Все зависимые переменные при переходе через ударную волну претерпевают разрыв. Так как скорость ударной волны U является функцией других параметров течения, то закон движения ударных волн должен определяться одновременно с расчетом всей остальной области течения. Величины разрыва этих параметров течения находятся решением соотношений Рэнкина — Гюгонио, которые выражают условия сохранения массы, изменения количества движения и сохранения энергии при пере-

ходе через ударную волну. Если индексами 0 и 1 обозначить соответственно условия впереди и позади скачка, то эти соотношения можно записать в следующем виде:

$$\rho_0 (u_1 - u_0)^2 = (p_1 - p_0)(v_0 - v_1), \tag{19}$$

$$U = (v_0 u_1 - v_1 u_0)/(v_0 - v_1), \tag{20}$$

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_0)(v_0 - v_1). \tag{21}$$

Эти соотношения вместе с уравнением состояния образуют четыре уравнения для определения пяти неизвестных функций u_1, p_1, U, v_1, E_1. Здесь имеется в виду, что условия впереди скачка (т. е. величины, обозначенные индексом 0) известны. Таким образом, если одна переменная, скажем u_1, известна, то можно найти все остальные неизвестные. Наиболее целесообразный метод решения указанных уравнений состоит в следующем.

Уравнение (21) переписывается в виде

$$0 = \delta = 2E_1 - 2E_0 + (p_1 + p_0)(v_1 - v_0), \tag{22}$$

где δ представляет собой невязку, которая обратится в нуль, когда будет определено истинное решение. Далее расчеты ведутся следующим образом.

а) Задается некоторое исходное приближенное значение v_1.

б) По уравнению (19) рассчитывают p_1.

в) По уравнению состояния вычисляется E_1, и, следовательно, теперь можно определить величину δ, которая должна обращаться в нуль, если уравнение (21) удовлетворяется.

г) Если же уравнение (22) не удовлетворяется, то, чтобы найти уточненное значение v_1, надо сначала вычислить производную δ по v_1 при фиксированном u_1. Эту производную можно определить точно.

д) Далее можно найти уточненное значение v_1, которое берется таким, чтобы свести к нулю величину δ. Затем процесс вычислений повторяется, начиная с п. «б» до тех пор, пока величина δ не станет достаточно малой.

При расчете условий за скачком определяются также скорость скачка, энтропия, скорость звука и т. д. Если условия перед скачком не фиксированы, а зависят от того, как набегает поток на скачок, то эти условия необходимо рассчитывать путем итераций. При сведении величины δ к нулю предполагается, что зависимость δ от изменения условий перед скачком, когда его положение уточняется, не нарушает сходимости процесса итераций. Когда в расчетах наблюдалась расходимость итераций, то она была обусловлена только плохим выбором исходного приближенного значения v_1.

Г. Конечно-разностная форма уравнений

Приведенные уравнения во всех случаях представляются в конечно-разностной форме заменой производных разделенными разностями на некотором интервале и заменой других величин средними арифметическими значениями на этом интервале. Например, для интервала, заключенного между точками A и B на контактной поверхности, уравнение

$$\frac{dR}{dt} = u$$

заменяется на уравнение

$$(R_B - R_A)/(t_B - t_A) = \frac{1}{2}(u_B + u_A). \tag{23}$$

В такой разностной схеме ошибки, обусловленные конечным размером ячейки, имеют порядок квадрата шага сетки.

Д. Определение решения в точках характеристической сетки

Пусть решение известно в двух точках A и B (рис. 1), тогда определение решения в новой точке проводится сравнительно просто, если при этом не возникают ударные волны.

Новая точка D находится пересечением характеристики (например, первого семейства), проходящей через точку A, с характеристикой второго семейства, проходящей через точку B. Тогда вдоль линии AD будут выполняться уравнения (10) и (11), а вдоль линии BD — уравнения (12) и (13). Если через M_A обозначить значение некоторой переменной величины M в точке A, а через M_{AB} — среднее значение этой величины по точкам A и B, то тогда необходимые уравнения можно записать следующим образом:

$$\left[\frac{1}{\rho c}\right]_{AD}(p_D - p_A) + u_D - u_A + \left[\frac{\alpha u c}{R}\right]_{AD}(t_D - t_A) = 0, \tag{24}$$

$$r_D - r_A - \left[\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\right]_{AD}(t_D - t_A) = 0, \tag{25}$$

$$\left[\frac{1}{\rho c}\right]_{BD}(p_D - p_B) - (u_D - u_B) + \left[\frac{\alpha u c}{R}\right]_{BD}(t_D - t_B) = 0, \tag{26}$$

$$r_D - r_B + \left[\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\right]_{BD}(t_D - t_B) = 0, \tag{27}$$

$$R_D - R_A - [u + c]_{AD}(t_D - t_A) = 0, \tag{28}$$

$$R_D - R_B - [u - c]_{BD}(t_D - t_B) = 0. \tag{29}$$

Кроме того, имеем

$$E_D - E_F + \frac{1}{2}(p_D + p_F)(v_D - v_F) = 0, \tag{30}$$

где F — некоторая точка на линии тока, проходящей через точку D, т. е. на линии $r=r_D=\text{const}$, а параметры в точке F можно найти интерполяцией по их значениям в точках A и B.

Решение этих уравнений проводится методом итераций в совсем простой форме. Предположим, что средние значения величин, заключенных в квадратные скобки, вначале известны. Тогда расчеты можно вести следующим образом.

а) Из уравнений (25) и (27) находится r_D и t_D.

б) Подставляя найденное значение t_D в уравнения (24) и (26), вычисляем p_D и u_D.

в) Подставляя p_D в уравнение (30) и решая его вместе с уравнением состояния, определяем E_D и v_D.

г) Вычисляя скорость звука c, можно найти R_D либо из уравнения (28), либо из уравнения (29). Два эти значения R_D должны совпадать, а различие в них указывает на ошибки, обусловленные размером ячейки.

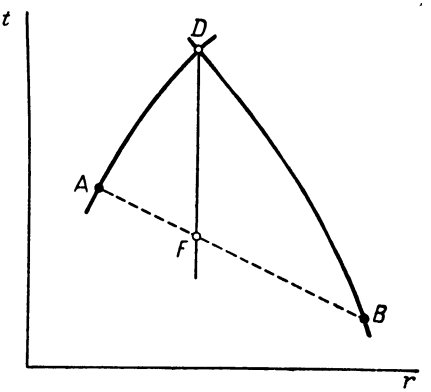


Рис. 1. Расчет обыкновенной точки в методе характеристик; AD, DB — характеристики различных семейств, DF — линия тока.

д) Теперь можно пересчитать функции, входящие в выражения в квадратных скобках. Далее процесс расчета повторяют, начиная с п. «а» до тех пор, пока не сойдутся все функции.

Изложенный метод расчета можно видоизменить так, чтобы рассчитывать другие типы точек. Например, если D представляет собой точку на свободной поверхности и если B — предыдущая точка на свободной поверхности, то уравнения (26), (27) и (29) надо заменить следующими:

$$p_D=0, \tag{31}$$

$$r_D=r_B, \tag{32}$$

$$R_D-R_B-\frac{1}{2}(u_D+u_B)(t_D-t_B)=0. \tag{33}$$

Систему уравнений в этом случае можно решить способом, аналогичным описанному.

Рассматриваемая схема итерационного метода работает удовлетворительно; такой вычислительный процесс можно продолжить для других точек, как это показано на рис. 2. Заметим, что при отсутствии иной информации, кроме решения, первоначально известного в точках A_1, A_2, A_3 и A_4, расчеты будут ограничены областью, содержащей точки B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, D_1, и

их нельзя продолжить для точек, расположенных по времени дальше, чем точка D_1. Эта область называется *областью влияния* точки D_1 [1]. Условия в любой точке этой области будут влиять на решение в точке D_1.

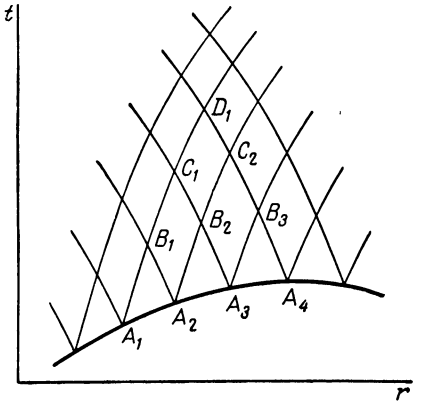


Рис. 2. Характеристическая сетка, показывающая область влияния точки D_1.

Однако при решении возникает много трудностей, когда в области течения появляются разрывы. Поскольку положение разрывов заранее неизвестно, то их расчет должен проводиться вместе с расчетом всей остальной части области течения. Как и в случае образования скачка из волны сжатия путем увеличения ее крутизны, разрывы здесь возникают в области, в которой решение ранее было непрерывным. Поэтому необходимо принимать меры, позволяющие контролировать появление таких разрывов.

3. *Структура программы для вычислительной машины*

А. Введение

Рассмотрим теперь типичную программу для расчетов на вычислительной машине по методу характеристик. Для простоты и ясности будем рассматривать только частный вид программы, не стремясь к слишком большим обобщениям. Вначале построенная программа применялась на вычислительной машине с ограниченным объемом быстродействующей памяти. Это обстоятельство до некоторой степени определило структуру программы, хотя для метода характеристик, вообще говоря, значительное увеличение объема быстродействующей памяти не приносит большой пользы. Увеличение быстродействующей памяти наиболее полезно в задачах с образованием ударных волн из волн сжатия. Этот вопрос более полно обсуждается в § 3, Ж.

Б. Хранение решения

1. *Общее описание.* Даже относительно большая внутренняя память современных вычислительных машин не позволяет хранить в ней все точки рассчитываемого решения. Хранятся только те точки, которые требуются для построения решения. Но поскольку все результаты расчетов записываются на магнитную

ленту сразу же, как только они получены, то полное решение будет доступно для исследования и в любой последующий момент времени. Как только точка больше не нужна для продолжения решения, она выбрасывается из памяти. Построенное решение представляет собой совокупность обыкновенных точек, точек на ударных волнах, поверхностях раздела и свободных поверхностях, связанных характеристической сеткой. Эти точки образуют цепь, заполняющую область решения.

Для каждой точки этой цепи отводятся 16 слов машинной памяти, попросту называемых вектором. Из этих 16 слов 14 слов используются для представления следующих переменных в указанном здесь порядке:

$$p,\ v,\ S,\ E,\ c,\ r,\ R,\ u,\ U,\ 1/\rho c,\ uc/R,\ (R/r)^{\alpha},\ c/v,\ t$$

(см. § 1, Г). Слово, соответствующее величине E, обычно используется для записи контрольной суммы вектора, когда точка хранится во внутренней или во внешней памяти. Величина E хранится, вообще говоря, лишь во время расчетов скачков, поверхностей раздела и т. п. Пятнадцатое и шестнадцатое слова вектора выполняют логические функции; в них хранятся числа, характеризующие материал рассчитываемой среды и тип расчетной точки (точка на скачке, на свободной поверхности и т. д.), а также адреса первого слова левой и правой соседних точек в цепи. Эти последние данные дают возможность программе анализировать расположение точек в окрестности скачков и т. п.

Числа, показывающие тип расчетной точки: 0 — обыкновенная точка, 1 — точка на скачке общего вида, 2 — точка на поверхности раздела, 3 — точка на простом скачке, 4 — точка на свободной поверхности, 5 — точка на граничной характеристике. Все эти точки будут более полно определены в последующих пунктах этого параграфа.

Возможны два состояния цепи рассчитываемых точек, при которых r либо увеличивается, либо уменьшается при движении вдоль цепи слева направо. Эти возможные состояния символически фиксируются в некоторой ячейке, называемой «знаком», в которую соответственно заносятся положительный или отрицательный знаки. Эта схема введена для того, чтобы, например, скачки, движущиеся вперед или назад, можно было рассчитывать при одном и том же расположении ячеек памяти. В принятом расположении памяти точки решения впереди скачка всегда размещаются справа. Если это не имеет места, то тогда эти точки надо расположить соответствующим образом, что достигается обращением связок перед проведением расчета так, чтобы при расчетах скачок всегда был направлен вправо. Взаимодействие скачка с характеристиками описывается аналогичным образом в терминах левого и правого расположений.

Пусть, например, скачок движется вправо более медленно, чем бегущая вправо характеристика, расположенная левее скачка. Принадлежность этой характеристики в физической плоскости к первому или второму семейству логика программы не определяет. Но когда для решения привлекаются дифференциальные соотношения вдоль характеристик, правильный выбор коэффициентов в этих соотношениях осуществляется с помощью анализа признака, содержащего в ячейке «знак». Если признак в ячейке «знак» положителен, то бегущая вправо характеристика будет характеристикой первого семейства, а бегущая влево характеристика будет характеристикой второго семейства. Если же признак в ячейке «знак» отрицателен, то имеет место обратное положение.

2. *Специальные векторы.* В памяти машины строится таблица, в которой хранятся точки на скачке, на свободной поверхности и точки на граничной характеристике (точки на поверхности раздела в эту таблицу не заносятся). Эта таблица специальных векторов содержит адреса таких специальных точек и числа, характеризующие тип точки.

3. *Свободные векторы.* Для хранения векторов отводится определенное количество блоков из 16 слов; некоторые из них могут заполняться в процессе решения. Те векторы, которые остаются незаполненными, называются свободными векторами; их адреса и номера заносятся в таблицу свободных векторов. Если в процессе решения число точек увеличивается, то используются свободные векторы. Если же число точек уменьшается, то тогда адреса соответствующих векторов выводятся и добавляются в таблицу свободных векторов.

Состояние решения представляется: а) векторами, описывающими решение; б) таблицей специальных векторов; в) таблицей свободных векторов; г) ячейкой «знак». Для целей временного хранения решения (например, на картах) векторы, описывающие решение, имеют свои связки, которые в случае необходимости можно регулировать так, чтобы в ячейке «знак» был положительный признак. При стандартном выводе решения выдается информация, перечисленная выше в пп. «а», «б», «в». Это стандартное решение можно также печатать.

В. Порядок вычислений

Программа для расчета решения работает, согласно следующим правилам:

а) Обходится таблица специальных векторов, и адреса этих векторов используются для нахождения значений времени для специальных точек. Выбирается точка с наименьшим значением времени.

б) Исследуется тип этой специальной точки с минимальным значением времени. Это может быть скачок, движущийся в покоящейся среде (простой скачок), точка такого типа обозначается номером 3, или скачок общего вида (скачок, перед которым имеет место неустановившийся поток), точка такого типа обозначается номером 1, или, наконец, точка на граничной характеристике, или точка на свободной поверхности (типы точек 5 и 4).

в) Перед проведением расчета следующей точки на границе, определенной в п. «б», программа проверяет, не принадлежит ли эта точка скачку или свободной поверхности, которые достигли поверхности раздела двух сред. Если это имеет место, то переходят к расчету скачка, преломленного при переходе через поверхность раздела, и к расчету волны, отраженной от поверхности раздела. Такой процесс расчета будет описан в дальнейшем.

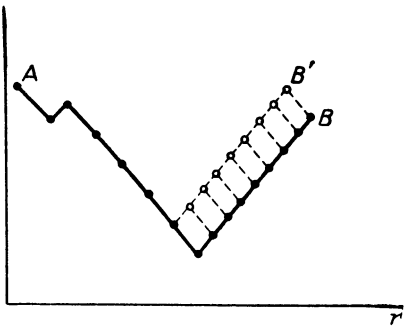


Рис. 3. Диаграмма, иллюстрирующая решение, хранимое в памяти машины.

A, *B* — специальные точки; ● точки хранимого решения; ○ точки, вычисленные для получения решения в точке *B'*.

г) Затем программа рассчитывает новую граничную точку вместе с обыкновенными точками и точками на поверхности раздела, попадающими в область влияния новой точки. Точки на граничной характеристике рассматриваются отдельно от остальных специальных точек.

Далее процесс расчета повторяется, начиная с п. «а».

Приведенные здесь правила оказывают существенное влияние на структуру рассчитываемого решения по двум причинам. Во-первых, эти правила гарантируют, что специальные границы всегда будут строиться приблизительно равномерно во времени, а во-вторых, в этом случае остальные точки решения будут отставать. Грубо говоря, остальные точки решения будут располагаться вдоль границ области влияния специальных точек.

На рис. 3 в плоскости лагранжевых координат (r, t) показана картина типичного решения в том виде, как оно хранится в памяти машины.

Г. Расчет обыкновенных точек и точек на поверхности раздела

1. *Обыкновенные точки.* Предположим, что решение известно на кривых, показанных сплошной линией на рис. 3. Пусть

необходимо рассчитать следующую характеристику первого семейства, изображенную на этом рисунке пунктиром. Этот процесс расчета мы рассмотрим несколько подробнее, поскольку он дает хороший пример того, как программа использует связки для выбора своего пути вдоль цепи точек. Следует напомнить, что программа для вычислительной машины не может быть составлена таким образом, чтобы она, подобно мозгу человека, воспринимала целиком все решение, изображенное на рис. 3. Программа ограничивается исследованием только весьма малой части решения.

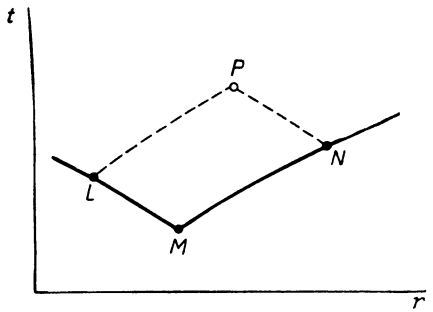


Рис. 4. Схема расчета обыкновенной точки.

С точки зрения машины рассматриваемая задача состоит в следующем. Задана точка B, и требуется рассчитать точки на характеристике первого семейства вплоть до точки B', которая является следующей точкой на характеристике второго семейства, исходящей из точки B.

Поскольку соседние точки в цепи связаны характеристикой (по определению), то в конечном результате точка B' будет левой соседней точкой по отношению к точке B. В процессе расчета точки будут либо добавляться, либо выкидываться из решения. По этой причине единственно возможным локальным расположением точек при расчете некоторой обыкновенной точки будет расположение, показанное на рис. 4. Здесь значение времени в точке M меньше, чем значение времени в точках L и N. Точка P будет занимать в памяти машины место, которое раньше занимала точка M.

Расчетный цикл состоит из следующих операций:

а) Двигаются влево от точки B. Если значение времени в точке B будет меньше, чем значение времени в ее соседней левой точке, то процесс расчета заканчивается.

б) Двигаются дальше влево до тех пор, пока не будет найдена пара смежных точек, из которых левая точка будет иметь значение времени большее, чем другая точка пары. Такие точки изображены на рис. 4 как точки L и M, а точка N является правой соседней точкой для точки M.

в) Точки L, M, N выводятся из цепи в рабочие ячейки программы, а одна из этих точек используется в качестве первого приближения для точки P.

г) Рассчитывают точку P, решая методом итераций соответствующие характеристические соотношения вдоль LP и NP. Эн-

тропию в этой точке находят квадратичной интерполяцией, используя значения S и r в точках L, M, N. На каждой итерации проводятся также расчеты по уравнению состояния. После достижения сходимости точка P заносится в цепь точек на место точки M.

Указанный процесс расчета описан здесь для характеристики первого семейства. Аналогичный процесс расчета применяется и для характеристики второго семейства, только в этом случае надо предварительно изменить признаки в ячейке «знак» и поменять ролями левые и правые связки. Признак в ячейке «знак» служит для определения того, какие коэффициенты при расчете на этапе «г» должны использоваться в характеристических соотношениях вдоль LP и NP.

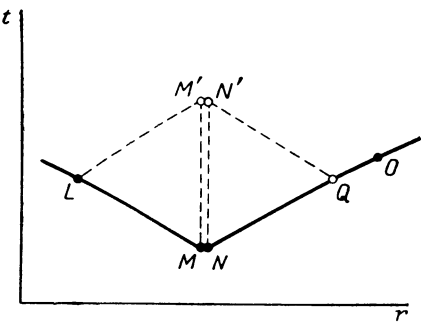


Рис. 5. Схема расчета поверхности раздела двух сред.

2. *Точки на поверхности раздела.* Точки на поверхности раздела (отмечаемые номером 2) в цепи точек представляют собой пару смежных точек с одинаковым значением времени.

Во время поиска при движении влево, проводимом на описанном выше этапе б), точки на поверхности раздела будут пропущены. Это не вызывает затруднений, если только точка на поверхности раздела не окажется точкой M. В последнем случае в этой точке будет такое же значение времени, что и в соседней с ней точке N. Это условие проверяется на этапе «б», и если такая проверка покажет, что точка находится на поверхности раздела, то мы будем иметь расположение точек, изображенное на рис. 5. Здесь точки M и N находятся на поверхности раздела, а в точках L и O значение времени выше, чем в точках M и N.

Возможны два способа расчета новой точки на поверхности раздела, поскольку эту точку можно рассматривать как пересечение элемента поверхности раздела с характеристикой, проходящей либо через точку L, либо через точку O. Обычно останавливаются на таком выборе, когда характеристика, пересекающая поверхность раздела, является характеристикой первого семейства.

Продолжим описание действий, которые выполняет программа. Предположим, что признак в ячейке «знак» положителен, так что ML — характеристика второго семейства, а NO — характеристика первого семейства. Точки на поверхности раз-

дела, которые должны быть рассчитаны, обозначим через M',N'. Положение точек M', N' в плоскости (r, t) определяется как результат пересечения характеристики первого семейства LM' и элемента поверхности раздела MM'. Характеристика второго семейства $N'Q$ проходит через точки N' и Q, причем параметры в последней точке определяются интерполяцией вдоль линии NO. Если точка Q попадает за пределы участка NO, то тогда на характеристике NO должна быть рассчитана следующая точка вместо точки O, причем последняя выбрасывается.

Вдоль характеристики $N'Q$ вычисляется разностное выражение

$$-du+(1/\rho c)\,dp+(\alpha uc/R)\,dt.$$

Эта величина рассматривается как функция скорости частиц в точке (M', N'), которая должна быть подобрана такой, чтобы указанное разностное выражение равнялось нулю. Давление в точке (M', N') в каждой итерации вычисляют как функцию скорости частиц в M', используя характеристическое соотношение вдоль LM'. Затем полученная величина давления подставляется в уравнение состояния.

После этого расчет обыкновенных точек продолжается по описанной схеме.

Д. Расчет специальных точек

1. *Точки на граничной характеристике* (*точки типа 5*). Точки на граничной характеристике представляют собой точки, находящиеся на внешней характеристике, ограничивающей решение. Новая точка на граничной характеристике рассчитывается путем продолжения этой характеристики. Такая новая точка вводится в решение, а старая точка выбрасывается.

2. *Точки на свободной поверхности* (*точки типа 4*). Подобно скачкам и поверхностям раздела, свободная поверхность представляется парой точек, которые в этом случае являются идентичными. Возможно (хотя, вообще говоря, и необязательно) использовать широкую аналогию, имеющую место при расчетах свободной поверхности и скачка. Например, как скачок, так и свободная поверхность взаимодействуют с решениями, имеющимися позади них. Кроме того, условия на свободной поверхности можно рассматривать как вырожденную форму соотношений Рэнкина — Гюгонио для скачка.

Обратимся к рис. 6, на котором для удобства сравнения с расчетом простого скачка в качестве переменных взяты эйлерова пространственная координата и время. На этом рисунке (L, L') изображает точку на свободной поверхности, M — следующая точка на характеристике, идущей от свободной поверх-

ности, N — базовая точка, фиксирующая значение R, при котором должна рассчитываться новая точка свободной поверхности, а линия $O'Q$ представляет собой характеристику другого семейства по сравнению с характеристикой $L'M$. Задав некоторое значение скорости частиц в (O, O'), рассчитывают положение точки (O, O') в плоскости (R, t). Затем находится точка Q на $L'M$ по вычисленному значению времени в ней, а путем интерполяции находятся все другие переменные величины в этой точке. Вдоль QO' определяется величина разностного выражения, которое рассматривалось выше при расчете точки на поверхности раздела, а скорость частиц в точке (O, O') подбирается такой, чтобы указанное разностное выражение обратилось в нуль.

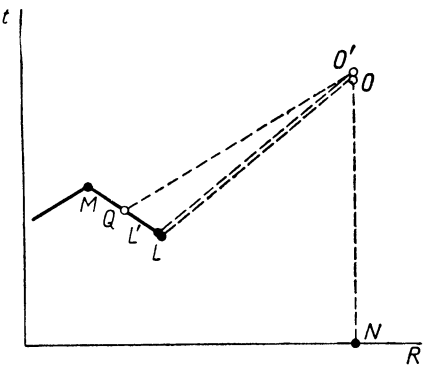


Рис. 6. Схема расчета свободной поверхности и простого скачка в плоскости, где в качестве переменных взяты эйлерова координата и время.

Мы предполагали, что точка Q всегда лежит между точками M и L'. Если это не имеет места, то тогда свободную поверхность рассчитывают, рассматривая взаимодействие элемента свободной поверхности характеристики, проходящей через точку M. В этом случае базовая точка N не участвует в расчете. Оба эти способа расчета позволяют построить свободную поверхность в результате пересечения ее с характеристической сеткой. Но при этом свободную поверхность рассчитывают так, что она всюду будет проходить через точки пространства, фиксированные базовыми точками. Перед началом расчета свободной поверхности должно быть обеспечено стандартное расположение точек, показанное на рис. 6. Точку M здесь надо рассчитывать как обыкновенную точку, а решение должно быть ориентировано «вправо» в смысле, принятом в программе.

3. *Точки на нагруженной поверхности.* Когда давление на поверхности не равно нулю (свободная поверхность), но подчиняется некоторому закону, то при расчете применяют описанную выше схему, однако при этом давление на поверхности должно вычисляться в каждой итерации.

4. *Точки на простом скачке* (*точки типа 3*). Схема расчета в этом случае очень похожа на схему расчета точек на свободной поверхности. Отличие состоит в расчете элемента LO (где теперь $dR/dt = U$ вместо u) и в граничных условиях, которые удовлетворяются при переходе через скачок в точке (O, O'),

Как и раньше, в точке O' задается некоторое значение скорости частиц, но вместо условия нулевого давления на свободной поверхности здесь применяются условия Рэнкина — Гюгонио. Порядок работы программы остается прежним, за исключением того случая, когда точка Q попадает за пределы участка $L'M$. В этом случае необходимо рассчитать следующую точку на характеристике $L'M$ и выбросить точку M точно так, как это уже было описано при расчете поверхности раздела. Скачок рассчи-

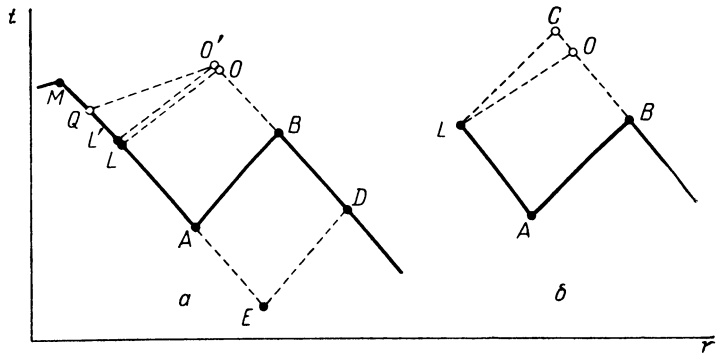


Рис. 7. Схема расчета скачка общего вида (*а*) и расчет точки O со стороны низкого давления на скачке (*б*).

тывается так, что он проходит через точки пространства, заранее определенные базовыми точками, которые аналогичны точке N на рис. 6.

5. *Точки на скачке общего вида (точки типа 1).* Перед тем как программа будет рассчитывать скачок общего вида, расположение точек решения должно быть приведено к виду, показанному на рис. 7. Скачок, как обычно, движется вправо в смысле, принятом в программе. Точки на скачке обозначены через L и L', а остальная часть исходного расположения точек образована характеристикой $L'M$, находящейся со стороны высокого давления, и характеристиками LA и AB, находящимися со стороны низкого давления. Новые точки на скачке O, O' получаются при пересечении скачка с характеристикой OB, проходящей со стороны низкого давления. Как и в случае других рассмотренных границ, здесь задается некоторое значение скорости частиц в точке O', а положение точки O находится по скорости скачка и решению перед скачком. Но теперь необходимо рассчитать решение перед скачком, определяя обыкновенную точку C, находя значение времени для точки O и интерполируя переменные величины на характеристике BC. Поскольку в этом случае скорость скачка зависит от условий в точке O, то в ите-

рационный процесс при расчете условий на скачке надо включить определение условий в точке O.

Переменные величины в точках O и O' являются, таким образом, функциями скорости частиц в точке O'. Расчет же (подобно случаю простого скачка) проводится так, чтобы вдоль характеристики $O'Q$ обращалось в нуль соответствующее разностное выражение. Может оказаться, что точка O будет лежать вне участка BC. В этом случае точку B надо выбросить и заменить ее точкой D, находящейся рядом с точкой B справа от нее (см. рис. 7). Точка E получается приближенно с помощью экстраполяции по четырехугольнику $ABDE$. Хотя точка E ранее была рассчитана соответствующим образом, но восстановить вычисленные в ней величины не просто и, во всяком случае, в этом нет необходимости. В точке E требуется знать только значение времени, причем лишь приближенно, поскольку точка E не используется при решении дифференциальных соотношений, а нужна только для рассмотрения последовательности точек.

Аналогии, имеющие место при расчете точек типа 1, 2, 3 и 4, были использованы при составлении программы.

Помимо учета такой аналогии, было установлено, что если при определении условий перехода через скачок задавать в точке O' не скорость частиц, а любую другую зависимую переменную (за исключением, может быть, давления), то такая расчетная схема не всегда будет сходиться. Например, относительный объем v_1 стремится для сильных скачков к предельному значению. Таким образом, относительный объем оказался бы величиной, не подходящей для применения в таком расчете, поскольку он не определял бы изменения других переменных.

Е. Расчет взаимодействий

Если некоторый скачок или свободная поверхность достигают поверхности раздела двух сред, то возникает взаимодействие. В этом случае скачок преломляется при переходе через эту поверхность и от нее отражается волна, которая в зависимости от свойств среды может быть либо скачком, либо волной разрежения. В этом случае необходимо проводить два типа расчетов: расчет решения нулевого порядка и расчет решения первого порядка.

В расчете решения нулевого порядка определяются условия в обеих средах в момент непосредственно после взаимодействия — до того как изменяется интенсивность преломленного скачка и отраженной волны. В решении первого порядка (называемом так потому, что оно в действительности точно до величин второго порядка) рассчитываются первые точки на преломленном скачке и отраженной волне и на поверхности раздела между средами.

1. Решение нулевого порядка. Расчет здесь зависит только от условий на приходящей свободной поверхности или от условий позади падающего скачка, а также от условий в среде, через которую будет проходить преломленный скачок.

Сначала предполагается, что отраженные возмущения имеют нулевую интенсивность и, следовательно, скорость частиц на поверхности раздела равна скорости потока за падающей волной. По этой величине скорости можно рассчитать преломленный скачок, поскольку условия перед ним известны. В частности, будет известно давление позади этого скачка. Далее эта величина давления сравнивается с давлением за падающей волной. Если первая величина окажется больше, то тогда отраженная волна будет скачком, а в противоположном случае — волной разрежения.

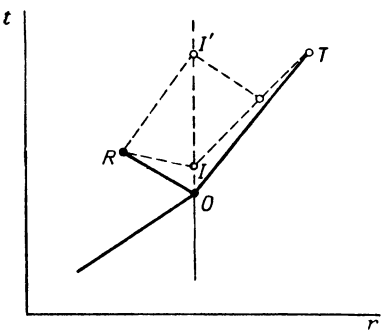


Рис. 8. Расчет решения первого порядка при взаимодействии.

В случае отраженного скачка затем рассчитывают давление на поверхности раздела, используя условия на отраженном скачке. Теперь имеются две величины давления, вычисленные по условиям на обоих скачках при задании на поверхности раздела некоторого значения скорости, общего для обоих скачков. Далее значение этой скорости подбирается таким образом, чтобы были согласованы между собой величины давления со стороны высокого давления на обоих скачках, что даст окончательное положение этих скачков.

В случае отраженной волны разрежения, двигаясь малыми шагами, определяют скорость частиц на поверхности раздела путем интегрирования дифференциального соотношения для u и p поперек волны разрежения до тех пор, пока давление и скорость частиц, вычисленные для преломленного скачка, не будут согласованы с этими величинами, вычисленными при развороте волны разрежения.

2. Решение первого порядка. Обратимся к рис. 8, где показано, как это решение рассчитывается с помощью итераций. Сначала предполагается, что вдоль поверхности раздела OI давление и скорость постоянны, а затем рассчитываются точка T на преломленном скачке и точка R на отраженном скачке (или на задней границе отраженной волны разрежения). Теперь можно рассчитать точку I' на поверхности раздела и ею заменить точку I, первоначально рассчитанную на поверхности раз-

дела в предположении постоянных условий. Этот цикл вычислений повторяется до получения сходимости.

Расчеты для скачков здесь несколько отличаются от нормального случая, а именно: решение позади скачка задается здесь на линии тока, а не на характеристике. Но это обстоятельство не требует каких-либо специальных действий, поскольку ранее не делалось предположений, что такая линия должна быть характеристикой, а просто требовалось, чтобы была возможна интерполяция вдоль некоторой линии.

3. Взаимодействие скачка общего вида и поверхности раздела. Когда скачок общего вида близок к моменту падения на поверхность раздела, то поверхность раздела будет расположена со стороны низкого давления на скачке. Эта поверхность раздела находится при меньших значениях времени, чем скачок (поскольку точка на поверхности раздела, не будучи специальной точкой, отстает). Расчет взаимодействия в этом случае почти идентичен расчету скачка общего вида, отличаясь только способом расчета течения перед скачком.

Сначала определяется новая точка на поверхности раздела в результате пересечения поверхности раздела и характеристики, выходящей из точки на скачке, расположенной со стороны низкого давления. Здесь в процессе расчета надо хранить не только эту новую точку на поверхности раздела, но и предыдущую точку на поверхности раздела, которая в обычном расчете поверхности раздела была бы выброшена. Эти две точки на поверхности раздела используются для интерполяции в точке пересечения скачка на стороне с низким давлением и поверхности раздела. Дальнейший расчет скачка проводится так, как это было описано выше. Наконец, условия с другой стороны поверхности раздела получаются с помощью интерполяции по двум точкам на этой стороне поверхности раздела.

Расчет преломленного скачка и отраженной волны проводится дальше так же, как в случае взаимодействия скачка и поверхности раздела в покоящемся состоянии.

Ж. Образование скачка в волне сжатия

В этом случае в момент образования скачка пересекаются две характеристики одного и того же семейства. Если скачок образуется в момент времени более поздний, чем t_L (рис. 9), и если мы попытаемся рассчитать точку P как нормальную точку, то мы придем к положению, изображенному на рис. 9, где значение времени в точке P меньше, чем t_N. Время, соответствующее пересечению характеристик одного и того же семейства, определяется пересечением линий LP и NM. Далее находятся параметры в двух точках D и E с помощью интерполяции на это значение времени, проведенной соответственно по точкам L

и P и по точкам M и N. В обеих точках D и E берется среднее значение R и r по двум значениям, а скорость скачка определяется как среднее значение по двум значениям $u+\varphi c$ (где φ равно $+1$ или -1 в зависимости от направления волны сжатия, т. е. равно признаку, содержащемуся в ячейке «знак»). Проводится обращение к таблице специальных векторов, и затем расчет продолжается дальше.

Однако здесь могут возникнуть трудности, если решение ранее было получено вдоль характеристики MN правее точки N, т. е. для бóльших значений времени, чем t_N. Эта часть решения будет неправильна, поскольку при получении его не учитывался скачок. Для учета скачка в этой части решения потребуются точки, расположенные в области, по которой будет перемещаться скачок, а эти точки уже были уничтожены (или по меньшей мере они имеются в виде, затрудняющем восстановление решения). Для преодоления этой трудности можно было бы потребовать, чтобы точки, в которых наиболее вероятно появление скачка, имели бы бóльшие значения времени, чем соседние с ними точки. Следовательно, в этом случае характеристическая сетка будет иметь зубчатую форму, причем ее точки будут соответствовать примерно равным значениям времени.

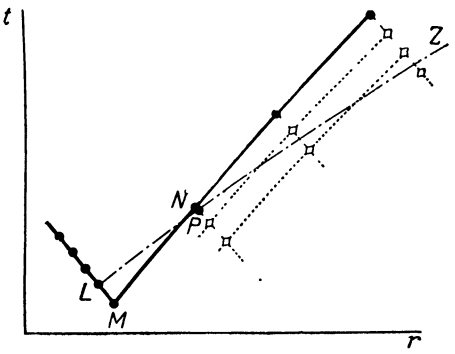


Рис. 9. Образование скачка в волне сжатия.

PZ — предполагаемый закон движения скачка; □ точки, выброшенные из решения до того, как было определено образование ударной волны.

Если, однако, машина обладает достаточным объемом быстродействующей памяти, то образование скачка можно, вероятно, предвидеть заранее (например, волну сжатия, как таковую, можно выявить еще на ее ранней стадии). Тогда можно хранить все решение, которое связано с волной сжатия, или хранить по крайней мере часть решения, соответствующую бóльшим значениям времени, чем t_M. Когда точка M заменяется другой точкой с бóльшим значением времени, то хранимое решение можно обрезать, поскольку скачок (если он образуется) должен иметь место при бóльших значениях времени, чем t_M.

Одна из трудностей, встречающихся при образовании скачка, состоит в том, что скачок должен начинаться, очевидно, с нулевой интенсивностью, а затем интенсивность его должна увеличиваться с ростом времени. Следовательно, в первый мо-

мент, когда пересекаются характеристики одного семейства, угол их пересечения будет очень мал. Если при этом ввести в решение скачок, то он будет почти совпадать с характеристикой. Если обратиться к рис. 6 и рассмотреть решение уравнений скачка для следующей точки O', то точка Q будет расположена очень близко к точке L', и поэтому в решении будут появляться большие погрешности.

Такие погрешности можно устранить, если вместо введения скачка в решение непосредственно после первого пересечения характеристик дать возможность характеристикам пересекаться и дальше на протяжении нескольких шагов, выбрасывая при этом точки N, но сохраняя точки P (см. рис. 9), до тех пор, пока угол пересечения характеристик станет не слишком малым. Такой прием не приводит к большим ошибкам, так как в слабых скачках приращение энтропии очень мало, а уравнения, определяющие изменение параметров при переходе через скачок и в волне сжатия, совпадают между собой до второго порядка величины интенсивности скачка.

3. Взаимодействие скачка со скачком

1. *Скачки, движущиеся в противоположных направлениях.* Задача о взаимодействии двух скачков, движущихся в противоположных направлениях, решается распространением метода,

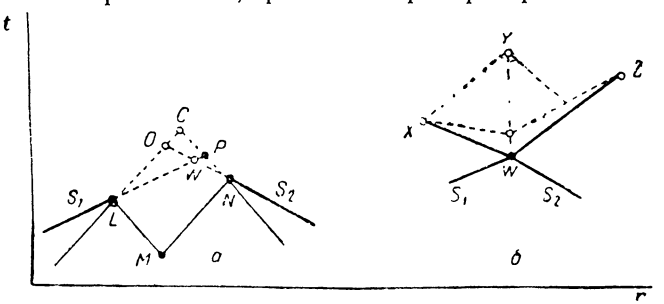


Рис. 10. Взаимодействие двух скачков, движущихся в противоположных направлениях.

а — расположение скачков непосредственно перед столкновением; *б* — расчет решения первого порядка после столкновения.

применявшегося для расчета одного скачка общего вида (см. § 3, Д, 5). Расположение скачков непосредственно перед их встречей показано на рис. 10, *а*. В этом случае сначала рассчитывают обыкновенную точку C со стороны низкого давления для обоих скачков. Затем оба скачка S_1 и S_2 продолжаются через расчетную сетку до точек P и O таким образом, как если бы из этих скачков существовал только один. Точка пересечения

W представляет собой место взаимодействия скачков. Далее необходимо построить решение для бóльших значений времени, чем t_W. Это можно сделать, рассчитывая взаимодействие скачка S_1 с поверхностью, разделяющей области высокого давления за скачками S_1 и S_2 (эта схема расчета обсуждалась в § 3, E, 1 и 2). В результате будут получены три точки X, Y и Z и расчет решения можно продолжить.

2. *Скачки, движущиеся в одном направлении.* Когда два скачка движутся в одном и том же направлении, проведение расчета становится значительно более сложным. Практически было установлено, что здесь во многих случаях будут получаться результаты одинаковой точности, если при проведении расчетов передний скачок удалить, а интенсивность заднего скачка соответственно регулировать.

Тогда, как можно видеть, трудности, связанные с организацией расчета, будут преодолены. Однако этот прием ставит практические ограничения для метода расчета, хотя в принципе его можно распространять на решение любых задач.

4. Расчет методом характеристик с фиксированными шагами по времени

Одним из недостатков решения с помощью характеристической сетки является то обстоятельство, что вычислитель не может контролировать положение точек, в которых определяется решение. Если же требуется иметь решение в виде распределения по пространству в заданные моменты времени, как это часто случается, то возникает трудная проблема интерполирования на характеристической сетке по двум переменным. В схеме, которую предложил Хартри [2], эта трудность обходится посредством рассмотрения узловых точек сетки, заранее заданных как в пространстве, так и во времени, и проведения интерполяций в процессе расчета. Эта схема имеет то преимущество, что необходимое здесь интерполирование ведется всегда по одной переменной.

A. Расчет обыкновенных точек

На рис. 11 построена типичная расчетная сетка, в которой в качестве переменных применяются лагранжева координата и время. Чтобы определить параметры в точке P, требуются значения параметров течения в точках L и M, которые являются точками пересечения двух характеристик, проведенных из P, с базовой линией ABC. Эти значения можно определить с помощью линейной или квадратичной интерполяций по величинам в точках A, B и C, т. е. в точках, которые выбираются без сложного поиска. Так как мы рассматриваем лагранжево простран-

ство, то линия PB представляет собой линию тока и, следовательно, при расчете изменения энергии вдоль нее не потребуется проведение интерполяций. Уравнения, которые требуется решать в этой схеме, можно записать в следующем виде:

$$\left[\frac{1}{\rho c}\right]_{LP}(p_P - p_L) + u_P - u_L + \left[\frac{\alpha u c}{R}\right]_{LP}\Delta t = 0, \tag{34}$$

$$r_P - r_L - \left[\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\right]_{LP}\Delta t = 0, \tag{35}$$

$$\left[\frac{1}{\rho c}\right]_{PM}(p_P - p_M) - (u_P - u_M) + \left[\frac{\alpha u c}{R}\right]_{PM}\Delta t = 0, \tag{36}$$

$$r_P - r_M + \left[\frac{c}{v}\left(\frac{R}{r}\right)^{\alpha}\right]_{PM}\Delta t = 0, \tag{37}$$

$$E_P - E_B + \frac{1}{2}(p_B + p_P)(v_P - v_B) = 0. \tag{38}$$

Кроме того, имеем

$$r_P = r_B, \tag{39}$$

$$R_P - R_L - [u + c]_{PL}\Delta t = 0, \tag{40}$$

$$R_P - R_M - [u - c]_{PM}\Delta t = 0. \tag{41}$$

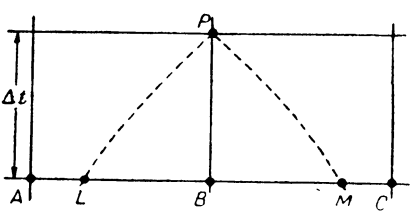
Как и в § 2, Д, если приближенно задать значения величин, стоящих в квадратных скобках, то расчет можно проводить следующим образом:

а) Из уравнения (35) находится r_L, а по уравнению (37) вычисляется r_M.

б) Определяются параметры течения u_L, p_L, u_M, p_M при помощи интерполяции по их значениям в точках A, B и C.

в) Уравнения (34) и (36) разрешаются относительно p_P и u_P.

г) Из уравнения (38) с учетом уравнения состояния находятся E_P и v_P.



Р и с. 11. Расчет обыкновенной точки в методе с фиксированными шагами по времени; PL, MP — характеристики.

д) Пересчитываются функции, стоящие в квадратных скобках, и процесс расчета повторяется, начиная с п. «а», до тех пор пока не будет достигнута сходимость.

Описанная схема, как оказалось, всегда является эффективной.

Б. Расчет точек на скачке

Точки на скачке рассматриваются отдельно от заданных узловых точек на стандартной сетке, и скачки перемещаются независимо через эту сетку, не попадая, вообще говоря, в узловые

точки. Обратимся к рис. 12, где ударная волна в момент времени t_0 изображается дополнительной парой точек S, которая в последующий момент времени $t_0+\Delta t$ перемещается в положение S'. Как и в § 3, Д, оказалось, что наиболее целесообразный способ расчета точки S' состоит в следующем:

а) Определяют приближенное положение S', задавая вдоль SS' величину скорости скачка, равную ее значению в точке S.

б) С помощью метода, описанного в предыдущем параграфе, рассчитывается решение со стороны низкого давления на скачке S'. При этом параметры течения в точке Z на линии тока ZS' должны быть определены интерполяцией, но это не вызывает каких-либо затруднений.

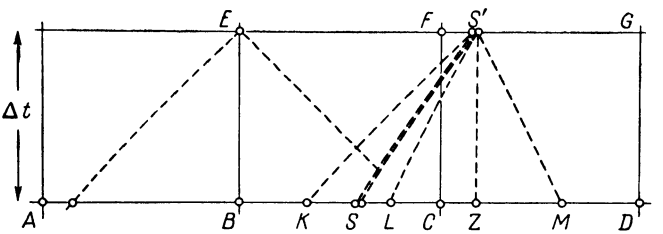


Рис. 12. Расчет точки на скачке в методе с фиксированными шагами по времени: SS' — закон движения скачка.

в) Задается приближенное значение скорости частиц позади скачка в точке S', и из соотношений на скачке определяются скорость скачка и все переменные величины со стороны высокого давления на скачке.

г) Используя характеристическое соотношение вдоль KS', уточняют заданное приближенное значение для скорости частиц.

д) Имея скорость скачка в S', находят уточненное положение точки S', а затем, начиная с п. «б», повторяют вычисления до тех пор, пока весь процесс расчета не сойдется.

Выяснилось, что описанная расчетная схема всегда сходится. Можно думать, что, задав приближенное значение скорости скачка в п. «а», возможно определить в п. «в» параметры течения со стороны высокого давления на скачке S', не задавая при этом величину скорости частиц. Однако такая схема может приводить к некоторым осложнениям, и поэтому ее нельзя рекомендовать для расчетов.

Когда точка S' определена, можно рассчитать точку F (или E, если она лежит направо от характеристики второго семейства, проходящей через S). Эту точку нельзя было рассчитать ранее, так как в этом случае точка M, используемая в уравнениях (36) и (37), будет лежать на скачке, а не на линии $t=t_0$.

Применение условия Куранта, ограничивающего шаг по времени Δt и обеспечивающего устойчивость, гарантирует также, что за один шаг по времени скачок будет пересекать не более чем две соседние ячейки расчетной сетки.

В. Расчет поверхности раздела

Так как характеристические соотношения не содержат смешанных производных, то с вычислительной точки зрения хранение расчетной сетки в виде характеристических квадратов не дает преимуществ. Это обстоятельство можно также использовать при расчете точек в схеме с фиксированными шагами по

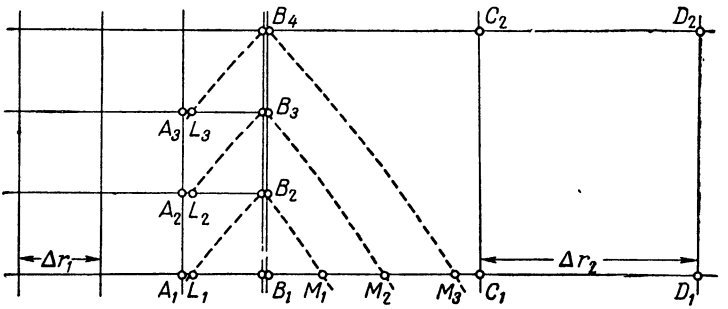


Рис. 13. Расчет точек на поверхности раздела в методе с фиксированными шагами по времени в случае, когда шаг интегрирования по времени не одинаков в двух областях.

времени, если здесь по каким-либо причинам требуется изменять шаг по пространству. Необходимость в этом может возникнуть на поверхности раздела между двумя различными средами или даже в одной и той же среде, когда из соображений более точного определения параметров нужен мелкий шаг по пространству на некотором небольшом участке, но при этом нецелесообразно распространять этот мелкий шаг на всю область.

Обратимся вновь к уравнениям (34)—(41). Мы предполагали, что точки L и M имеют одно и то же значение времени. Однако мы видели, что при расчете точек позади скачка интерполяция для точек L и M может проводиться различными способами, а тогда точка M не будет иметь то же значение времени, что точка L. Рассмотрим рис. 13 и предположим, что поверхность раздела разграничивает область в одной и той же среде, но с различными размерами шага Δr_1 и Δr_2. Соображения устойчивости, вообще говоря, будут ограничивать общий размер шага по времени, который будет определяться областью с меньшей величиной Δr (скажем, Δr_1). Тем не менее можно рассчитывать точки в этих двух областях, используя различные шаги по

времени, каждый из которых будет определяться условием устойчивости в своей собственной области.

Точки внутри этих областей можно рассчитывать обычным образом, а единственной точкой, в которой могли бы встретиться некоторые трудности, является точка на поверхности, разделяющей две области. На рис. 13 видно, что решение в точке B_2 получается обычным способом, если точка L_1 находится линейной интерполяцией по точкам A_1 и B_1, а точка M_1 аналогично находится по точкам B_1 и C_1. Решение далее можно продолжить до точки B_3, при этом точка L_2 получается интерполяцией по точкам A_2 и B_2, в то время как точка M_2 все еще определяется по точкам B_1 и C_1.

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока полное время интегрирования, отсчитываемое от t_0, будет только немного меньше, чем шаг интегрирования, определяемый условием устойчивости для правой области (т. е. точка M_3 должна лежать внутри B_1C_1). Затем рассчитываются остальные точки в правой области C_2, D_2; таким образом, все решение будет определено при одном общем значении времени, и процесс расчета можно повторять дальше. Однако здесь необходимо принять меры, чтобы величины шагов по времени в двух областях не отличались бы слишком сильно. Практически было установлено, что отношение этих шагов не должно превышать 5; при этом всегда будет получаться разумное решение.

Описанную схему можно распространить на серию областей, размер шага в каждой из которых приблизительно одинаков, но отличается от шага в соседних областях в несколько раз. Шаг интегрирования по времени в каждой области вычисляется из условий устойчивости в данной области, при этом определяется область с наименьшим значением шага по времени. Расчеты начинаются в этой области, и решение строится с использованием меньшего из шагов, которые требуются в двух смежных областях. Таким образом, можно рассчитать решение в этой области и продолжить процесс вычислений дальше, строя на каждом этапе решение в области с ближайшим бóльшим значением шага по времени до тех пор, пока в конце концов не будет получено все решение при одном общем значении времени. Описанный процесс может дать большую экономию машинного времени.

Г. Образование скачка в волне сжатия

В § 3, Ж обсуждался метод расчета скачка, когда он образуется в области непрерывного течения. Там упоминалось, что перед тем как вводить скачок для представления разрыва, надо дать возможность скачку в течение некоторого времени увеличить свою интенсивность. В методе определения решения при

постоянном значении времени вводятся диссипативные члены, форма которых зависит от используемого метода интерполяции [4]. В этом случае слабые скачки могут распространяться удовлетворительным образом и, в частности, ударная волна без каких-либо затруднений может формироваться в волне сжатия. Когда скачок станет достаточно сильным, его положение и интенсивность можно найти точно. Тогда непрерывное изменение параметров течения можно будет заменить на точный разрыв, который затем можно рассчитать с помощью метода, изложенного в § 4, Б. Оказывается, что по причинам, указанным в § 3,Ж, такая схема дает более правильные результаты, чем схема, в которой настоящий скачок вводится на начальной стадии.

5. Заключение

Оба изложенных здесь метода расчета оправдывают себя в не слишком сложных задачах. Но когда число конечных разрывов возрастает или когда усложняются взаимодействия, тогда преимущества характеристической сетки (связанные с ее наглядностью и физическим смыслом) утрачиваются из-за трудностей детального учета всех специальных случаев, которые здесь могут возникать. В этих случаях более целесообразно решение уравнений при помощи конечно-разностных схем с введением искусственной вязкости.

Литература

1. Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
2. Hartree D. R., AECU-2713, 1953.
3. Keller H. B., Levine D. A., Whitham G. B., *J. Fluid Mech.*, **7** (1960), 302.
4. Landshoff R., Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-1930, 1955.
5. Lax P. D., *Commun. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 195.
6. Von Neumann J., Richtmyer R. D., *J. Appl. Phys.* **21** (1950), 232 (имеется сокращенный русский перевод: Нейман Дж., Рихтмайер Р., Метод численного расчета гидродинамических скачков, сб. *Механика*, № 1 (1951), 27).
7. Stein L. R., Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-2277, 1959.

Метод характеристик для решения уравнений гидродинамики двумерных неустановившихся течений

Д. Дж. РИЧАРДСОН

Научно-исследовательский институт Австралийской комиссии по атомной энергии, Сатерленд, Австралия

1. Введение 292
2. Гидродинамические уравнения 293
3. Характеристические поверхности и бихарактеристические кривые . . 293
4. Соотношения, выполняющиеся вдоль бихарактеристик 295
5. Общий метод бихарактеристик 297
6. Ударные волны 299
7. Вычислительные особенности метода характеристик для расчета двумерных неустановившихся течений 300
8. Топологические особенности программы для вычислительной машины 304
9. Дополнения 308
Литература 315

1. Введение

При решении методом характеристик системы n дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих n зависимых и две независимые переменные, ищутся такие комбинации из этих n дифференциальных уравнений в частных производных, чтобы в каждой точке на плоскости независимых переменных для каждой комбинации имело место дифференцирование только по одному направлению. Если существует n таких различных между собой направлений, то данные уравнения называются гиперболическими. Полученные в результате таких комбинаций дифференциальные уравнения можно вдоль каждого из n направлений заменять конечно-разностными уравнениями. Таким образом, эти уравнения можно решать численными методами. Указанные n направлений в каждой точке называются характеристическими направлениями.

Если же n дифференциальных уравнений содержат три независимые переменные, то положение будет не такое простое. Здесь можно искать такие комбинации из n данных уравнений, чтобы в пространстве трех независимых переменных для каждой комбинации имело место дифференцирование только вдоль определенных поверхностей, проходящих через рассматриваемую точку. Такие поверхности можно назвать характеристическими поверхностями. Однако в этом случае в каждой точке остаются по существу два направления дифференцирования. По-

этому одномерные конечно-разностные методы решения здесь неприменимы.

Батлер [1, 2] показал, что для широкого класса случаев, охватывающих также системы уравнений гидродинамического типа, такие характеристические поверхности в свою очередь содержат кривые, называемые бихарактеристическими кривыми, для которых можно вывести точные характеристические соотношения.

В настоящей статье излагается работа, выполненная автором и Л. А. Эллиотом в течение 1958—1959 гг., по решению задачи о расчете неустановившегося течения с осевой симметрией.

2. *Гидродинамические уравнения*

Рассмотрим гидродинамические уравнения, зависящие от цилиндрических координат (z, r) и времени t. Эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial r}+\rho v\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial r}=0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho u\frac{\partial v}{\partial r}+\rho v\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{2}$$

(уравнения количества движения) и

$$\rho a^2\frac{\partial u}{\partial r}+\rho a^2\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial r}+v\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho a^2\frac{u}{r} \tag{3}$$

(уравнение неразрывности, записанное с использованием определения для скорости звука), где u, v — составляющие скорости по направлениям r, z соответственно; ρ — плотность жидкости; p — давление жидкости; a — скорость звука.

Эти уравнения вместе с условием, что энтропия S постоянна вдоль линии тока, выполняются при отсутствии сильных разрывов.

3. *Характеристические поверхности и бихарактеристические кривые*

Сначала будем искать характеристические поверхности, т. е. будем искать такое преобразование координат

$$x_i'=x_i'(r,\ z,\ t),\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

чтобы исходные уравнения на поверхности

$$x_3'(r,\ z,\ t)=\text{const}$$

не содержали производных по x_3'. Это будет иметь место тогда, когда обратится в нуль следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} \rho\frac{\partial x_3'}{\partial t}+\rho u\frac{\partial x_3'}{\partial r}+\rho v\frac{\partial x_3'}{\partial z} & 0 & \frac{\partial x_3'}{\partial r} \\ 0 & \rho\frac{\partial x_3'}{\partial t}+\rho u\frac{\partial x_3'}{\partial r}+\rho v\frac{\partial x_3'}{\partial z} & \frac{\partial x_3'}{\partial z} \\ \rho a^2\frac{\partial x_3'}{\partial r} & \rho a^2\frac{\partial x_3'}{\partial z} & \frac{\partial x_3'}{\partial t}+u\frac{\partial x_3'}{\partial r}+v\frac{\partial x_3'}{\partial z} \end{vmatrix}=0,$$

т. е. если

$$\rho^2\left(\frac{\partial x_3'}{\partial t}+u\frac{\partial x_3'}{\partial r}+v\frac{\partial x_3'}{\partial z}\right)\left[A_{ij}\frac{\partial x_3'}{\partial x_i}\frac{\partial x_3'}{\partial x_j}\right]=0, \tag{4}$$

где

$$x_1=t,\quad x_2=r,\quad x_3=z,$$

$$A_{ij}=\begin{Vmatrix} 1 & u & v \\ u & u^2-a^2 & uv \\ v & uv & v^2-a^2 \end{Vmatrix},$$

причем суммирование проводится по $i, j=1, 2, 3$.

Уравнение

$$A_{ij}\frac{\partial x_3'}{\partial x_i}\frac{\partial x_3'}{\partial x_j}=0 \tag{5}$$

показывает, что нормаль к поверхности $x_3'=\text{const}$ в произвольной точке пространства (r, z, t) можно описать уравнением конической поверхности второго порядка.

Из уравнения (5) видно, что через каждую точку в пространстве (z, r, t) может проходить однопараметрическое семейство характеристических поверхностей, которые можно определить некоторым параметром φ. Такое однопараметрическое семейство поверхностей, проходящих через некоторую точку, имеет своей огибающей коноид, уравнение которого будет (см. § 9, А)

$$A_{ij}^{-1}\,dx_i\,dx_j=0,$$

$$A_{ij}^{-1}=a^2\begin{Vmatrix} a^2-u^2-v^2 & u & v \\ u & -1 & 0 \\ v & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

причем A_{ij}^{-1} представляет собой обратную матрицу A_{ij}. Уравнение (6) сводится к следующему:

$$(dr-udt)^2+(dz-vdt)^2=a^2dt^2. \tag{7}$$

Этот коноид, являющийся некоторой поверхностью в пространстве (r, z, t), можно определить заданием координат каждой точки поверхности с помощью двух параметров — параметра φ и некоторого другого параметра, скажем τ. Каждая характеристическая поверхность, проходящая через вершину этого коноида, касается коноида вдоль некоторой кривой, которую будем называть бихарактеристической кривой. Параметр φ вдоль каждой бихарактеристической кривой остается постоянным, и его можно связать с направлением выхода рассматриваемой бихарактеристики из вершины коноида. Следовательно, φ можно выбрать в интервале $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; тогда параметр τ будет представлять собой меру расстояния вдоль бихарактеристики. Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} dr &= (u + a\cos\theta)\, d\tau, \\ dz &= (v + a\sin\theta)\, d\tau, \\ dt &= d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

Этим уравнениям удовлетворяет коноид (7) при произвольном θ. Но dr, dz, dt, удовлетворяющие уравнениям (8), определяют направление некоторой кривой, выходящей из вершины коноида и лежащей на его поверхности. Как показано в § 9, А, требование, чтобы эта кривая была бихарактеристикой, приводит к условию

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\sin\theta = 0. \tag{9}$$

Бихарактеристики, проходящие через данную точку (r_0, z_0, t_0), определяются уравнениями (8) и (9) и начальными условиями

$$r = r_0,\ z = z_0,\ t = t_0,\ \theta = \varphi.$$

Приближенное решение этих уравнений бихарактеристик дано в § 9, А.

4. Соотношения, выполняющиеся вдоль бихарактеристик

Бихарактеристики являются кривыми $x_i(\varphi, \tau)$, причем

$$\varphi = \text{const},\quad x_1 = t,\quad x_2 = r,\quad x_3 = z.$$

Для произвольной функции f имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau},$$

что с учетом уравнений (8) дает

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial t} + (u + a\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial r} + (v + a\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{10}$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho(u+a\cos\theta)\frac{\partial u}{\partial r}+\rho(v+a\sin\theta)\frac{\partial u}{\partial z}+$$
$$+\left(\frac{\partial p}{\partial r}-\rho a\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\rho a\sin\theta\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0, \quad (11)$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho(u+a\cos\theta)\frac{\partial v}{\partial r}+\rho(v+a\sin\theta)\frac{\partial v}{\partial z}+$$
$$+\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\rho a\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r}-\rho a\sin\theta\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+(u+a\cos\theta)\frac{\partial p}{\partial r}+(v+a\sin\theta)\frac{\partial p}{\partial z}+$$
$$+\left(\rho a^2\frac{\partial u}{\partial r}+\rho a^2\frac{\partial v}{\partial z}+\rho a^2\frac{u}{r}-a\cos\theta\frac{\partial p}{\partial r}-a\sin\theta\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0. \quad (13)$$

Составляя следующую комбинацию этих уравнений:

$$(11)\cdot a\cos\theta+(12)\cdot a\sin\theta+(13),$$

получаем вдоль бихарактеристики

$$\frac{\partial p}{\partial\tau}+\rho a\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\tau}+\rho a\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\tau}=$$
$$=-\rho a^2\left[\sin^2\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\cos^2\theta\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{u}{r}\right]. \quad (14)$$

Вдоль линии тока имеем

$$\frac{\partial p}{\partial\tau}+\rho a^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{u}{r}\right)=0. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) можно записать в дифференциальной форме. Полагая

$$\sin^2\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\cos^2\theta\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{u}{r}=G,$$

получаем

$$dp+\rho a\cos\theta\,du+\rho a\sin\theta\,dv=-\rho a^2G\,d\tau, \quad (16)$$

$$dp+\rho a^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{u}{r}\right)d\tau=0. \quad (17)$$

В уравнениях (16) и (17) все еще остаются производные от u и v по r и z. Если бы таких производных не было, то эти дифференциальные соотношения позволили бы при решении гидродинамических уравнений (1)—(3) применить метод характеристик посредством расчета шагами по времени.

Излагаемый метод расчета основан на том, что указанные производные можно исключить из уравнения (17) и однопараметрического множества уравнений (16), рассматриваемых в вершине коноида, если брать с некоторым весом значения функций на бихарактеристиках из соответствующего однопараметрического семейства.

На практике достаточно использовать четыре бихарактеристики, причем у соседних бихарактеристик значения параметра φ берутся отличающимися на $\pi/2$. Тогда, вообще говоря, нужно будет решать пять уравнений для пяти неизвестных u, v, p, $\partial u/\partial r$ и $\partial v/\partial z$. Выбор значений параметра φ с интервалом $\pi/2$ обеспечивает обращение в нуль членов, содержащих $\partial u/\partial z$ и $\partial v/\partial r$.

Расчет точек, находящихся на оси ($r=0$), на поверхности раздела двух сред или на скачке, также основан на использовании характеристического коноида.

5. Общий метод бихарактеристик

Вдоль бихарактеристики имеем

$$dp+\rho a\cos\theta\,du+\rho a\sin\theta\,dv=-\rho a^2G\,d\tau,$$

где

$$G=\sin^2\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\cos^2\theta\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{u}{r}.$$

Вдоль линии тока имеем

$$dp=-\rho a^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{u}{r}\right)d\tau.$$

Рассмотрим две поверхности:

$$f(r,\ z,\ t)=0,\quad g(r,\ z,\ t)=0,$$

которые соответственно назовем поверхностью, расположенной ниже по времени, и поверхностью, расположенной выше по времени.

Рассмотрим некоторую линию тока, которая пересекает поверхность, расположенную ниже по времени, в точке $(r_5,\ z_5,\ t_5)$, а поверхность, расположенную выше по времени, — в точке $(r_0,\ z_0,\ t_0)$. Предположим, что значения всех искомых функций известны всюду на поверхности $f(r,\ z,\ t)=0$ и ниже ее; точка $(r_0,\ z_0,\ t_0)$ лежит выше этой поверхности.

Рассмотрим бихарактеристики, проходящие через точку $(r_0,\ z_0,\ t_0)$ и определяемые параметром $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$. Пусть бихарактеристики, соответствующие ряду отдельных значений $\varphi=\varphi_n$, пересекают поверхность, расположенную ниже по времени, в точках $(r_n,\ z_n,\ t_n)$; параметр φ будет отсчитываться по часовой стрелке от отрицательного направления r для уменьшающихся τ.

Тогда

$$p_0-p_n+U_n(u_0-u_n)+V_n(v_0-v_n)=-\frac{1}{2}\rho_0a_0^2G_{0n}(t_0-t_n)-$$
$$-\frac{1}{2}\rho_na_n^2G_n(t_0-t_n),\quad(18)$$

где

$$U_n = \frac{1}{2}(\rho_0 a_0 \cos\varphi_n + \rho_n a_n \cos\theta_n),$$

$$V_n = \frac{1}{2}(\rho_0 a_0 \sin\varphi_n + \rho_n a_n \sin\theta_n),$$

$$G_{0n} = \sin^2\varphi_n \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_0 - \sin\varphi_n \cos\varphi_n \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_0\right] + \\ + \cos^2\varphi_n \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 + \frac{u_0}{r_0},$$

$$G_n = \sin^2\theta_n \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_n - \sin\theta_n \cos\theta_n \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_n + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_n\right] + \\ + \cos^2\theta_n \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_n + \frac{u_n}{r_n}.$$

Кроме того,

$$p_0 - p_5 = -\frac{1}{2}\rho_0 a_0^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 + \frac{u_0}{r_0}\right](t_0 - t_5) - \\ - \frac{1}{2}\rho_5 a_5^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_5 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_5 + \frac{u_n}{r_5}\right](t_0 - t_5).$$

Если $r = 0$, то отношение u/r надо заменить величиной $\partial u/\partial r$. Как будет показано в § 9, Б, вдоль бихарактеристики

$$\cos\theta_n = \cos\varphi_n - \delta\theta_n \sin\varphi_n,$$
$$\sin\theta_n = \sin\varphi_n + \delta\theta_n \cos\varphi_n,$$

где

$$\delta\theta_n = \theta_n - \varphi_n = -\left[\sin\varphi \frac{\partial a}{\partial r} - \cos\varphi \frac{\partial a}{\partial z} + \cos\varphi \left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \cos\varphi \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \right. \\ \left. + \sin\varphi \left(\sin\varphi \frac{\partial v}{\partial r} - \cos\varphi \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right](t_0 - t_n).$$

Положим теперь

$$\varphi_1 = \alpha, \quad \varphi_2 = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_3 = \alpha + \pi, \quad \varphi_4 = \alpha + \frac{3\pi}{2},$$

где α — некоторая фиксированная величина. Обозначим

$$P_n = p_n + U_n u_n + V_n v_n + \frac{1}{2}\tau_n \rho_n a_n^2 G_n, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

$$P_5 = p_5 + \frac{1}{2}\tau_5 \rho_5 a_5^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_5 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_5 + \frac{u_5}{r_5}\right],$$

$$\lambda_n = \frac{\tau_5}{\tau_n}, \quad \tau_5 = t_5 - t_0, \quad \tau_n = t_n - t_0, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда найдем соотношения вдоль каждой из четырех бихарактеристик

$$\lambda_n U_n u_0 + \lambda_n V_n v_0 + \lambda_n p_0 = \frac{1}{2}\tau_5 \rho_0 a_0^2 G_{0n} + \lambda_n P_n, \qquad (19)$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

соотношение вдоль линии тока

$$p_0 = \frac{1}{2}\tau_5 \rho_0 a_0^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 + \frac{u_0^5}{r_0}\right] + P_5. \qquad (20)$$

Приращения $r_n - r_0$, $z_n - z_0$ определяются выражениями

$$r_n - r_0 = \frac{1}{2}\tau_n (u_0 + u_n + a_0 \cos\varphi_n + a_n \cos\theta_n),$$

$$z_n - z_0 = \frac{1}{2}\tau_n (v_0 + v_n + a_0 \sin\varphi_n + a_n \sin\theta_n), \qquad (21)$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

В процессе расчета может встретиться ряд случаев.

При расчете обыкновенных точек (не лежащих на границе или на оси) величину α можно брать произвольной, но обычно ее принимают равной нулю. Тогда уравнения (19) и (20) дают

$$(\lambda_1 U_1 - \lambda_3 U_3) u_0 + (\lambda_1 V_1 - \lambda_3 V_3) v_0 + (\lambda_1 - \lambda_3) p_0 = \lambda_1 P_1 - \lambda_3 P_3,$$

$$(\lambda_2 U_2 - \lambda_4 U_4) u_0 + (\lambda_2 V_2 - \lambda_4 V_4) v_0 + (\lambda_2 - \lambda_4) p_0 = \lambda_2 P_2 - \lambda_4 P_4,$$

$$\left(\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4 - \tau_5 \frac{\rho_0 a_0^2}{r_0}\right) u_0 +$$

$$+ (\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 + \lambda_4 V_4) v_0 +$$

$$+ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - 2) p_0 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 - 2P_5. \qquad (22)$$

Если известны значения искомых функций на поверхности, расположенной ниже по времени, $f(r, z, t) = 0$, и ниже ее, то уравнений (22) будет достаточно для того, чтобы получить решение гидродинамических уравнений (1)—(3) в обыкновенной точке (r_0, z_0, t_0) для достаточно малого приращения $t_0 - t_5$.

Расчет точек на оси и на границе обсуждается в § 9, В.

6. *Ударные волны*

Рассмотрим скачок общего вида, впереди и позади которого имеет место неустановившийся поток.

Зададим сначала скорость скачка, т. е. ее величину и направление. Гидродинамические параметры впереди и позади скачка связаны между собой посредством четырех соотношений Рэнкина — Гюгонио. Поскольку скачок движется со сверхзвуковой скоростью относительно среды, находящейся перед ним, то

перед скачком пять величин p, u, v, $\partial u/\partial r$ и $\partial v/\partial z$ можно получить с помощью обычного метода характеристических коноидов. Энтропия S здесь также известна, поскольку она постоянна вдоль линии тока вплоть до скачка. Тогда, зная скорость скачка, можно по соотношениям Рэнкина — Гюгонио найти значения p, S, u, v позади скачка.

Теперь необходимо проверить правильность заданной скорости скачка. Заметим, что позади скачка характеристический коноид срезается поверхностью скачка. Возьмем в плоскости $t=$ $=$const такие локальные координаты x, y, чтобы ось x была нормальна к направлению движения скачка, а ось y образовывала с осью x правую координатную систему. Одно соотношение, связывающее p, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\partial\mathbf{v}/\partial y$, можно получить из соотношений на бихарактеристическом коноиде (здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — составляющие скорости жидкости вдоль осей x и y). Производную $\partial\mathbf{v}/\partial y$ можно исключить из этого соотношения с помощью условия, что касательная составляющая скорости жидкости остается непрерывной при переходе через скачок. В это условие входит величина кривизны поверхности скачка.

Окончательное соотношение, содержащее теперь только p, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, используется для контроля и последующего уточнения величины нормальной составляющей скорости скачка; направление же этой нормали к поверхности скачка пока сохраняется неизменным. Такая процедура проводится вдоль всего скачка, а вновь построенные точки скачка определяют затем новую поверхность скачка и, следовательно, новое направление нормали скачка в каждой рассматриваемой точке. Весь этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута достаточная точность.

Изложенный способ расчета скачка общего вида предложил Эллиот [3] (см. § 9, Г).

7. Вычислительные особенности метода характеристик для расчета двумерных неустановившихся течений

Изложенный выше метод характеристик был применен к решению задачи о детонации вещества при наличии цилиндрической симметрии. Программа для этих расчетов первоначально была составлена для вычислительной машины IBM-704, а затем переделана для вычислительной машины IBM-709.

Потребный объем быстродействующей памяти составлял приблизительно 30 000 слов, из них 12 000 слов для программы и 18 000 слов для хранения числовых данных. В качестве внешнего запоминающего устройства использовались две магнитные ленты.

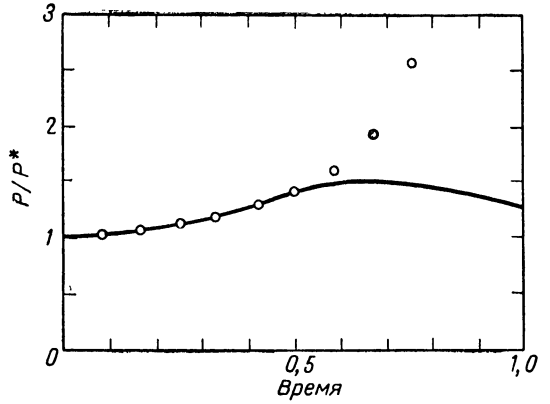
Основным элементом в этой программе является вектор, состоящий из 22 слов памяти. Этот вектор связан с каждой точкой, которая рассматривается в пространстве (r, z, t). Точки определяются заданием адреса (обычно в двоичном дополнительном коде) первого слова вектора, связанного с этой точкой.

Каждая обыкновенная точка области, точка на поверхности раздела двух сред или на границе связана с отдельной частицей жидкости. Поэтому при использовании переменных Лагранжа каждая частица жидкости будет единственным образом определяться заданием связанного с ней вектора. Однако в расчетах более предпочтительны переменные Эйлера, поэтому здесь должна быть введена некоторая метрика. Таким образом, каждый вектор, связанный с точкой, должен нести информацию об эйлеровых координатах своей точки, а также информацию о своих ближайших соседних точках. В таком случае будут сохранены преимущества как представления Лагранжа, так и представления Эйлера.

Точки на скачке или на фронте детонации не связаны с частицами жидкости, но каждая точка на скачке или на фронте детонации имеет свежую информацию о ближайшей соседней обыкновенной точке и точке на поверхности раздела или на границе.

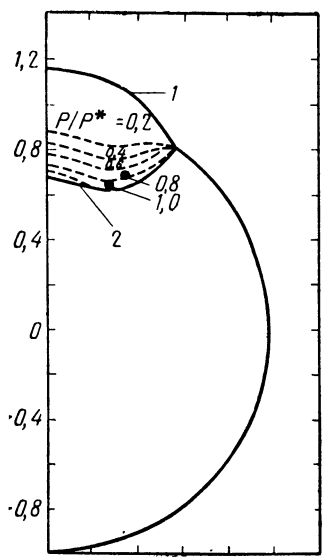
Вычислительный процесс проводится шагами по времени. Предполагается, что решение известно во всех точках до некоторой плоскости с постоянным значением времени и на самой этой плоскости. Сначала, пользуясь условием устойчивости Куранта — Леви, определяют шаг по времени, общий для всех точек на границе, на поверхности раздела и на скачке. Затем эти точки продвигаются на новый слой по времени. Для каждой исключительной поверхности сохраняются все точки как на предыдущем, так и на новом слое по времени до тех пор, пока не будет закончен весь расчет нового слоя по времени; после этого точки на предыдущем слое по времени отбрасываются. Затем обыкновенные точки, примыкающие к поверхности скачка, продвигаются к поверхности скачка или через нее на новый слой по времени, при этом они продвигаются настолько далеко, насколько позволяет условие устойчивости. Наконец, вся основная масса обыкновенных точек продвигается в направлении к новому слою по времени настолько, насколько это возможно.

Вначале мы пытались применять схему решения, в которой все новые рассчитанные значения в каждой обыкновенной точке использовались сразу же для замены соответствующих старых значений. Однако эта схема приводила к неустойчивости после нескольких шагов по времени, а вычисления здесь зависели от того порядка, в каком основная масса обыкновенных точек продвигалась на новый слой по времени. Поэтому было решено



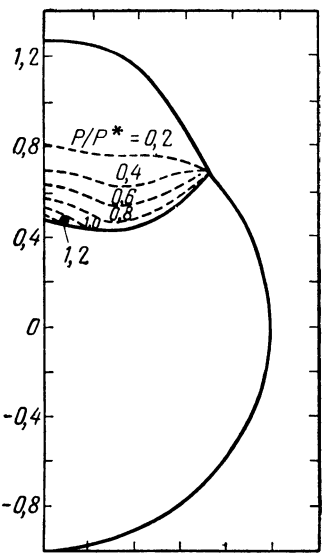
Р и с. 1. Детонация, идущая на вершине сферического заряда; показано изменение во времени давления на фронте детонации в точке, лежащей на оси течения.

Через p^* обозначено значение давления в точке Чэпмена — Жуге на фронте детонации; кружками показаны результаты для сферически сходящейся детонационной волны.



Р и с. 2. Детонация, идущая на вершине сферического заряда; показана форма изобар в момент времени $t = 0{,}328$.

1 — свободная поверхность; *2* — фронт детонации.



Р и с. 3. Детонация, идущая на вершине сферического заряда; показана форма изобар в момент времени $t = 0{,}532$.

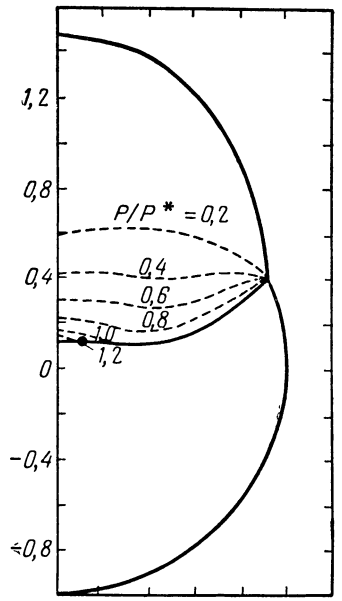


Рис. 4. Детонация, идущая на вершине сферического заряда; показана форма изобар в момент времени $t = 0{,}860$.

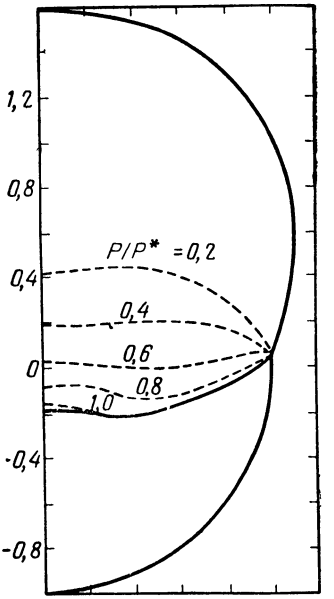


Рис. 5. Детонация, идущая на вершине сферического заряда; показана форма изобар в момент времени $t = 1{,}156$.

хранить на магнитной ленте результаты расчета каждой новой точки вместе с адресом связанного с ней вектора. После того как заканчивается каждое перемещение точек (не обязательно на нужный новый слой по времени), все эти векторы стираются с магнитной ленты. Те точки, которые не оказались на нужном новом слое по времени, продвигаются второй раз. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все точки не окажутся на новом слое по времени. Стирание векторов проводится в конце каждого перемещения.

Интерполяция в процессе расчетов проводится по соседним точкам по методу наименьших квадратов с весами. Наибольший вес дается точкам, расположенным от интерполяционной точки на расстоянии, равном половине среднего расстояния всех точек от интерполяционной точки. Преимущество этого способа состоит в простом определении особых компланарных случаев с помощью исследования диагональных членов результирующей симметричной матрицы в методе наименьших квадратов.

Рис. 1—5 иллюстрируют применение описанной программы к расчету детонации, идущей на вершине сферического заряда взрывчатого вещества. Эти рисунки воспроизводятся из статьи Эллиота [3] с его согласия.

8. Топологические особенности программы для вычислительной машины

На любой стадии расчета некоторого решения встретится ряд различных областей, отделенных друг от друга границей, поверхностью раздела двух сред, фронтом скачка (или детонации). Как форма, так и число этих областей будут меняться по мере развития решения.

Внутри любой отдельной области решение можно соответственно определить путем расчета достаточного числа параметров в достаточном числе дискретных точек этой области. То же самое имеет место и для каждой поверхности.

В процессе решения, описанном в § 7, рассматривается последовательность плоскостей с постоянными значениями времени, на которых находятся все требуемые параметры решения.

Проведение расчетов значительно упростится, если бóльшую часть соотношений, связывающих расчетные точки, рассматривать только на этих плоскостях с постоянными значениями времени. Такой подход и был осуществлен в расчетах.

Предположим, что все решение задано в некоторый начальный момент времени. Чтобы представить данное решение в этот момент времени, выберем внутри любой отдельной области достаточное число точек. Эти точки будем называть обыкновенными точками.

Чтобы ввести понятие окрестности расчетной точки, необходимо иметь некоторую метрику или меру расстояния. Сначала мы брали метрику по модулю

$$d_{12} = |r_1 - r_2| + |z_1 - z_2|.$$

Эту метрику легко вычислять, но для нее возникают трудности вблизи поверхностей раздела двух сред, когда необходимо распределять точки по отдельным областям. По этой причине в дальнейшем применялась квадратичная метрика

$$d_{12} = (r_1 - r_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Для определения окрестности точки нет необходимости извлекать квадратный корень из этого выражения.

С каждой точкой свяжем вектор, состоящий из 22 слов, последовательно расположенных в машинной памяти. Точка и вектор будут определяться заданием в двоичном дополнительном коде адреса первого слова этого вектора.

Каждая обыкновенная точка будет иметь информацию о нескольких (максимально четырех) соседних точках, упорядоченных по направлению. Для такого упорядочения по направлению необходимо иметь некоторую угловую меру.

В качестве такой меры была выбрана величина θ_{12}:

$$\theta_{12}=(|z_2-z_1|)/(|r_2-r_1|+|z_2-z_1|)$$
для $r_2-r_1\geqslant 0$ и $z_2-z_1\geqslant 0$,

$$\theta_{12}=1+(|r_2-r_1|)/(|r_2-r_1|+|z_2-z_1|)$$
для $r_2-r_1<0$ и $z_2-z_1\geqslant 0$,

$$\theta_{12}=2+(|z_2-z_1|)/(|r_2-r_1|+|z_2-z_1|)$$
для $r_2-r_1<0$ и $z_2-z_1<0$,

$$\theta_{12}=3+(|r_2-r_1|)/(|r_2-r_1|+|z_2-z_1|)$$
для $r_2-r_1\geqslant 0$ и $z_2-z_1<0$.

Эта мера легко вычисляется и, будучи по модулю равна 4, удобна для нахождения главных значений.

Следует отметить, что окрестность точки не является обратимым понятием. Если, например, B — соседняя точка для точки A, то обратное положение не обязательно будет справедливым. Начало координат выбирается специальным образом, и именно оно не имеет соседних точек.

Когда строится любое решение, нужно быть уверенным, что охвачены все точки. С этой целью все обыкновенные точки внутри одной области упорядочиваются и связываются в некоторую развертку, причем начальная точка каждой развертки запоминается.

Каждая точка в некоторой области, за исключением последней точки, имеет информацию о последующей точке в развертке. Кроме того, каждая точка в некоторой области, за исключением первой точки, имеет информацию о предшествующей точке. Такая двухсторонняя связь не обязательна, но она оказалась наиболее удобной. Начало координат используется в качестве последней точки развертки. Указанная связь не обязательно несет какую-либо информацию об окрестности точек.

Рассмотрим теперь границы областей. Эти границы представляются связанной цепочкой точек. В этом случае окрестность развертки уже имеет существенное значение.

Каждая область включает в себя свои граничные точки, а каждая граничная точка имеет информацию об одной ближайшей внутренней точке. Внутренние точки в качестве своих соседних точек могут иметь также граничные точки.

Информация, связанная с каждой граничной точкой, представляет собой данные о нормали к граничной кривой и о кривизне этой кривой в данной точке. Эти данные получаются в результате аппроксимации этой кривой окружностью, проведенной через три граничные точки. Нормаль берется внешней для

каждой области и располагается справа при обходе кривой в направлении развертки. Кривизна считается положительной, если центр кривизны располагается влево от этой кривой, когда эта кривая обходится в направлении развертки.

Каждая смежная область имеет свою систему граничных точек, свою развертку, хотя и не обязательно противоположную в смысле направления обхода. В этом случае на границе рассматриваются дублированные точки, по одной точке в каждой области; каждая из дублированных точек имеет информацию о своем партнере. Это удобно при возможном разделении областей.

Кривые, представляющие собой скачок или фронт детонации, также охватываются этой схемой, как кривые, которые ограничивают некоторые изменяющиеся во времени области.

Возникает вопрос об определении принадлежности точек к некоторой области.

Рассмотрим кривую, которая представляется связанной последовательностью точек в плоскости (r, z). Далее возьмем в этой плоскости произвольную точку (z_0, r_0), не являющуюся одной из точек этой кривой. Пусть (r_n, z_n) — точка, принадлежащая данной кривой и ближайшая к точке (r_0, z_0). Пусть (l, m) представляют собой направляющие косинусы нормали к рассматриваемой кривой, а K — кривизна кривой в точке (r_n, z_n); пусть также через (l', m') обозначены направляющие косинусы вектора, идущего из точки (r_0, z_0) в точку (r_n, z_n). Тогда точка (r_0, z_0) будет расположена слева от данной кривой, если, во-первых, угол $(n-1, n, n+1)$ превышает прямой угол и если, во-вторых, $ll'+mm'+1/2Kd>0$, где

$$d=[(r_n-r_0)^2+(z_n-z_0)^2]^{1/2}.$$

Для определения области служит одно слово у каждого вектора, связанного с точкой. Каждый двоичный разряд этого слова относится к отдельной кривой.

Единица в двоичном разряде означает, что точка лежит слева от данной кривой. Таким образом, каждую точку можно отнести к одной-единственной области, а точки в одной и той же области имеют одинаковые признаки, определяющие принадлежность к некоторой области.

Перед решением любой задачи задается начальная система точек, включая точки на границе и на скачке; задаются также развертки, соседние точки, параметры кривых и области.

В процессе решения относительное расположение точек будет изменяться, и при этом, вероятно, появится необходимость ввести в рассмотрение дополнительные точки или отбросить некоторые ненужные точки. Поэтому на некоторых подходящих слоях по времени пересматривают всю совокупность соседних

точек, анализируя соседние точки и точки, соседние по отношению к этим соседним точкам. Рассмотрим сначала, как вводятся дополнительные точки.

Новые дополнительные точки могут стать необходимы как из геометрических соображений, так и для более точного определения какой-либо переменной физической величины. Рассмотрим обыкновенную точку с четырьмя соседними точками. Из этих четырех точек возьмем две точки, соседние по направлению. Допустим, что различие в угловой мере, большее, чем в 1,5 раза относительно заранее заданной угловой меры, будет указывать на возможность появления «дыры» в сетке точек. Такие «дыры» устраняются следующим образом.

Сначала из исходной точки проведем луч, делящий пополам угол между двумя рассматриваемыми соседними точками. Отправляясь от центральной точки, возьмем соседнюю точку слева от этого луча. Пусть эта точка будет точкой A. Отправляясь от точки A, возьмем ту соседнюю к A точку, которая является к ней ближайшей при движении против часовой стрелки от луча, идущего в точку A. Если эта новая точка не будет расположена справа от первоначально взятого луча, то весь этот процесс повторяем до тех пор, пока не будет найдена некоторая точка справа от этого луча. Относительное расположение этой последней найденной точки и исходной точки определит, будет ли приемлема новая точка, расположенная посредине между этими двумя точками. Если эта новая точка приемлема, то она вводится в развертку непосредственно за исходной точкой.

Иногда появляются сгущения точек; в этом случае описанный выше процесс может привести к местному зацикливанию. Это можно устранить, если запоминать ранее пройденные пути и возвращаться обратно, когда это нужно.

Когда разности угловых мер, характеризующих направления каждой из четырех соседних точек, не выходят из заданного максимального предела, но при этом из физических соображений желательна интерполяция на промежуточные точки, тогда интерполяционные точки выбираются посредине между каждой из четырех соседних точек. Каждая точка из каждой пары соседних точек, возникшей в результате такой интерполяции, получает информацию о другой точке этой пары.

В случае точек на кривой интерполяция является несложным делом; здесь учитываются нормали и кривизны в соседних точках.

При выбрасывании обыкновенных точек, когда это необходимо, такие точки просто удаляются из развертки, а слово, определяющее принадлежность их к некоторой области, переписывается таким образом, чтобы эти точки больше не использовались при выборе соседних точек.

Точки на кривой выбрасываются, когда это желательно, аналогичным способом; при этом надо помнить о необходимости пересчета нормалей и кривизн кривой. Точка на кривой должна выбрасываться в тех случаях, когда угол, образуемый ею и двумя соседними точками развертки, становится равным или меньше прямого угла; при этом, если необходимо, интерполяцией можно получить новые точки.

Векторы, связанные с точками, сначала выбираются из основного объема памяти машины. Затем строится таблица используемых векторов, и векторы заносятся в эту таблицу один за другим. Если на некоторой стадии расчета эта таблица становится пустой, то в нее вносятся новые векторы из основного объема памяти машины.

В начальный момент времени в любой области, где параметры равномерны, нужно задавать только одну обыкновенную точку; для границ областей и скачков также нужно задавать минимальную информацию. Программа затем сама распределит точки, необходимые для проведения расчетов.

Тип представления данных, описанный в этом параграфе, оказался целесообразным для случаев, когда величины, меняющиеся в процессе решения, имеют локальные области влияния. Именно такими являются величины, рассматриваемые при решении гиперболических уравнений гидродинамики.

9. Дополнения

А. Вывод уравнений бихарактеристических кривых

Рассмотрим характеристические поверхности $x_3'(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$, удовлетворяющие уравнению

$$A_{ij} \frac{\partial x_3'}{\partial x_i} \frac{\partial x_3'}{\partial x_j} = 0. \tag{A1}$$

Величины $\partial x_3'/\partial x_i$ пропорциональны составляющим нормали к поверхности $x_3' = \text{const}$ в точке P.

Уравнение (A1) можно заменить следующим:

$$A_{ij} L_i L_j = 0, \tag{A2}$$

где L_i — направляющие косинусы нормалей к поверхностям $x_3' = \text{const}$ в точке P. Следовательно, эти нормали лежат на конической поверхности второго порядка и могут быть определены некоторым параметром $\varphi (0 \leqslant \varphi < 2\pi)$; параметр φ будет определять также отдельную поверхность $x_3' = \text{const}$.

Все поверхности $x_3' = \text{const}$, удовлетворяющие уравнению (A1), будут обладать огибающей — коноидом. Точки на этом

коноиде можно определять заданием двух параметров, одним из которых может быть φ. Следовательно, для определения этого коноида можно взять уравнение

$$x_i = x_i(\varphi, \tau),$$

причем здесь τ и φ — независимые параметры.

Таким образом, кривые φ=const лежат как на коноиде, так и на поверхностях, которым он служит огибающей. Эти кривые называются бихарактеристиками.

Плоскость с направляющими косинусами нормали L_i, проходящая через точку P, удовлетворяет уравнению

$$L_i dx_i = 0, \tag{A3}$$

причем дифференциалы dx_i берутся от точки P. Эти направления dx_i будут также лежать на характеристической поверхности, соответствующей L_i в точке P.

Поверхность $x_i = x_i(\varphi, \tau)$, будучи огибающей поверхностей x_3', определяемых параметром φ, будет удовлетворять уравнениям (A2), (A3) и

$$\frac{\partial L_l}{\partial \varphi} dx_l = 0. \tag{A4}$$

Кроме того,

$$L_l \frac{\partial L_l}{\partial \varphi} = 0$$

и, следовательно, величины

$$L_l, \frac{\partial L_l}{\partial \varphi}, \ dx_l$$

для каждого φ образуют три взаимно ортогональных вектора, а направления dx_i лежат на поверхности коноида.

Поэтому вектор $A_{ij}L_j$ можно выразить через L_i, $\partial L_i/\partial\varphi$ и dx_i следующим образом:

$$A_{lj}L_j = aL_l + b\frac{\partial L_l}{\partial \varphi} + c\,dx_l.$$

Но

$$A_{lj}L_jL_l = A_{lj}L_j\frac{\partial L_l}{\partial \varphi} = 0.$$

Поэтому

$$A_{lj}L_j = c\,dx_l,$$

откуда

$$L_j = cA_{lj}^{-1}\,dx_l.$$

Таким образом, уравнение поверхности характеристического коноида в точке P имеет вид

$$A_{lj}^{-1}\,dx_l\,dx_j = 0. \tag{A5}$$

Для некоторой точки $Q \neq P$ на поверхности этого коноида можно записать

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} d\varphi. \tag{A6}$$

Пусть $dx_i = (\lambda_i + \mu_i \cos\theta + \nu_i \sin\theta) d\tau$ представляют собой приращения, удовлетворяющие уравнению коноида в его вершине. При подходящих λ_i, μ_i и ν_i это соотношение будет иметь место для всех θ.

Направление, определяемое выражением (A6), будет принадлежать коноиду, проходящему через точку P, только при условии, что в точке Q

$$(\lambda_i + \mu_i \cos\theta + \nu_i \sin\theta) A_{ij}^{-1} \left(\frac{\partial x_j}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial x_j}{\partial \varphi} d\varphi \right) = 0.$$

Но в точке Q

$$(\lambda_i + \mu_i \cos\theta + \nu_i \sin\theta) A_{ij}^{-1} \frac{\partial x_j}{\partial \tau} = 0,$$

поэтому

$$(\lambda_i + \mu_i \cos\theta + \nu_i \sin\theta) A_{ij}^{-1} \frac{\partial x_j}{\partial \varphi} = 0.$$

Поскольку два коноида (один, проходящий через точку P и другой, проходящий через точку Q) касаются друг друга по бихарактеристике, то уравнение любой бихарактеристики, проходящей через P, имеет вид

$$dx_i = (\lambda_i + \mu_i \cos\theta + \nu_i \sin\theta) d\tau,$$

$$(\lambda_i + \mu_i \cos\theta + \nu_i \sin\theta) A_{ij}^{-1} \frac{\partial x_j}{\partial \varphi} = 0, \tag{A7}$$

причем $\theta = \varphi$ при $\tau = 0$.

В рассматриваемом гидродинамическом случае уравнения (A7) примут вид

$$dt = d\tau, \quad dr = (u + a\cos\theta) d\tau,$$

$$dz = (v + a\sin\theta) d\tau,$$

$$\cos\theta \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \sin\theta \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

причем $\theta = \varphi$ при $\tau = 0$. (A8)

Б. Приближенное решение уравнений бихарактеристических кривых

Пусть уравнение характеристического коноида имеет вид

$$r = r(\varphi, \tau), \quad z = z(\varphi, \tau), \quad t = t(\varphi, \tau).$$

Кривые $\varphi = \text{const}$ являются бихарактеристиками. Уравнения этих бихарактеристик (см. § 9, А) имеют вид

$$\frac{\partial r}{\partial \tau}(\varphi, \tau) = u + a\cos\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(\varphi, \tau) = v + a\sin\theta,$$

$$t = \tau + \text{const},$$

$$\cos\theta \frac{\partial r}{\partial \varphi}(\varphi, \tau) = -\sin\theta \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi, \tau) \qquad (Б1)$$

при начальных условиях

$$r = r_0, \quad z = z_0, \quad t = t_0 \quad \text{при} \quad \theta = \varphi, \quad \tau = 0.$$

Пусть вдоль некоторой данной бихарактеристики, определяемой параметром φ, с точностью до величин первого порядка по τ имеем

$$u = u_0 + \mathbf{u}(\varphi)\tau,$$

$$v = v_0 + \mathbf{v}(\varphi)\tau,$$

$$a = a_0 + \mathbf{a}(\varphi)\tau,$$

$$\theta = \varphi + \boldsymbol{\theta}(\varphi)\tau. \qquad (Б2)$$

Величины u_0, v_0, a_0 являются значениями функций u, v, a в вершине коноида, т. е. они не зависят от φ.

Тогда

$$\frac{\partial r}{\partial \tau}(\varphi, \tau) = u_0 + \mathbf{u}(\varphi)\tau + [a_0 + \mathbf{a}(\varphi)\tau]\cos[\varphi + \boldsymbol{\theta}(\varphi)\tau] + O(\tau^2) =$$

$$= u_0 + a_0\cos\varphi + [\mathbf{u}(\varphi) + \mathbf{a}(\varphi)\cos\varphi - a_0\boldsymbol{\theta}(\varphi)\sin\varphi]\tau + O(\tau^2). \qquad (Б3)$$

Интегрируя последнее выражение по τ и помня, что $r = r_0$ при $\tau = 0$, получаем

$$r(\varphi, \tau) = r_0 + (u_0 + a_0\cos\varphi)\tau + \frac{1}{2}[\mathbf{u}(\varphi) + \mathbf{a}(\varphi)\cos\varphi -$$

$$- a_0\boldsymbol{\theta}(\varphi)\sin\varphi]\tau^2 + O(\tau^3) \qquad (Б4)$$

и аналогично

$$z(\varphi, \tau) = z_0 + (v_0 + a_0\sin\varphi)\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}[\mathbf{v}(\varphi) + \mathbf{a}(\varphi)\sin\varphi + a_0\boldsymbol{\theta}(\varphi)\cos\varphi]\tau^2 + O(\tau^3). \qquad (Б5)$$

Отсюда, обозначая штрихом производные по φ, будем иметь

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi}(\varphi, \tau) = -a_0 \sin\varphi\tau + \frac{1}{2}[\mathbf{u}'(\varphi) + \mathbf{a}'(\varphi)\cos\varphi - \mathbf{a}(\varphi)\sin\varphi - a_0\cos\varphi\theta(\varphi) - a_0\sin\varphi\theta'(\varphi)]\tau^2 + O(\tau^3), \quad (Б6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi, \tau) = a_0\cos\varphi\tau + \frac{1}{2}[\mathbf{v}'(\varphi) + \mathbf{a}'(\varphi)\sin\varphi + \mathbf{a}(\varphi)\cos\varphi - a_0\sin\varphi\theta(\varphi) + a_0\cos\varphi\theta'(\varphi)]\tau^2 + O(\tau^3). \quad (Б7)$$

Но

$$\cos\theta\frac{\partial r}{\partial \varphi}(\varphi, \tau) = -\sin\theta\frac{\partial z}{\partial \varphi}(\varphi, \tau) \quad (Б8)$$

и с точностью до величин первого порядка по τ имеем

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos[\varphi + \theta(\varphi)\tau] = \cos\varphi - \sin\varphi\theta(\varphi)\tau,\\ \sin\theta &= \sin[\varphi + \theta(\varphi)\tau] = \sin\varphi + \cos\varphi\theta(\varphi)\tau.\end{aligned} \quad (Б9)$$

Приравнивая коэффициенты при τ в уравнении (Б8) и используя при этом выражения (Б6), (Б7) и (Б9), получаем

$$a_0\theta(\varphi) = -\mathbf{u}'(\varphi)\cos\varphi - \mathbf{v}'(\varphi)\sin\varphi - \mathbf{a}'(\varphi). \quad (Б10)$$

Следовательно, с помощью равенств (Б2) найдем

$$a_0\theta(\varphi)\tau = -\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \sin\varphi\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial a}{\partial \varphi} + O(\tau^2).$$

Но

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, z) = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \left(-a_0\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial r} + a_0\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial z}\right)\tau + O(\tau^2).$$

Таким образом,

$$\theta(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \sin^2\varphi\frac{\partial v}{\partial r} + \sin\varphi\frac{\partial a}{\partial r} - \cos^2\varphi\frac{\partial u}{\partial z} - \cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial z} - \cos\varphi\frac{\partial a}{\partial z} + O(\tau).$$

Итак,

$$\theta - \varphi = \theta(\varphi)\tau = \left(\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \sin^2\varphi\frac{\partial v}{\partial r} + \sin\varphi\frac{\partial a}{\partial r} - \cos^2\varphi\frac{\partial u}{\partial z} - \cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial z} - \cos\varphi\frac{\partial a}{\partial z}\right)\tau + O(\tau^2). \quad (Б11)$$

Из равенства (Б4) имеем (переменные без индекса относятся к моменту времени τ)

$$r - r_0 = \frac{1}{2}\tau(u_0 + u + a_0\cos\varphi + a\cos\theta) + O(\tau^3)$$

и аналогично из равенства (Б5)

$$z - z_0 = \frac{1}{2}\tau(v_0 + v + a_0\sin\varphi + a\sin\theta) + O(\tau^3).$$

В. Точки на оси и на границе

1. *Точки на оси, не являющейся границей.* На характеристическом коноиде можно получить три независимых бихарактеристических соотношения. Этих соотношений вместе с соотношениями вдоль линии тока достаточно для того, чтобы определить v, p, $\partial u/\partial r$ и $\partial v/\partial z$, поскольку на оси $u=0$.

Будем пользоваться обозначениями § 5, причем в данном случае $u_0=0$. Выберем $\alpha=0$ и возьмем бихарактеристики $n=2$, 3 и 4. Тогда уравнения (19) и (20) дают

$$(\lambda_2 V_2-\lambda_4 V_4)\,v_0+(\lambda_2-\lambda_4)\,p_0=\lambda_2 P_2-\lambda_4 P_4,$$

$$(4\lambda_3 V_3+\lambda_2 V_2+\lambda_4 V_4)\,v_0+(4\lambda_3+\lambda_2+\lambda_4-4)\,p_0=$$
$$=4\lambda_3 P_3+\lambda_2 P_2+\lambda_4 P_4-4P_5.$$

2. *Точки на границе, не являющейся осью.* На каждой стороне поверхности раздела двух сред коноид, относящийся к данной стороне, срезается этой поверхностью. По каждую сторону от поверхности раздела выполняются три бихарактеристических соотношения и одно соотношение вдоль линии тока. Этих соотношений вместе с условием непрерывности давления и нормальной составляющей вектора скорости при переходе через поверхность раздела достаточно для того, чтобы определить пять величин u, v, p, $\partial u/\partial r$ и $\partial v/\partial z$ с каждой стороны этой поверхности.

Свободная поверхность является частным случаем поверхности раздела двух сред. Здесь давление на свободной стороне должно быть принято равным либо нулю, либо некоторой постоянной конечной величине.

Используя обозначения § 5, в случае свободной поверхности выберем α так, чтобы $\cos\alpha=l$, $\sin\alpha=m$, где $(l,\ m)$ — направляющие косинусы той составляющей внешней нормали к свободной поверхности в точке (r_0, z_0, t_0), которая лежит в плоскости с постоянным значением времени. Бихарактеристики 1, 2 и 4 берутся внутри движущейся среды. Тогда уравнения (19) и (20) дают

$$(\lambda_2 U_2-\lambda_4 U_4)\,u_0+(\lambda_2 V_2-\lambda_4 V_4)\,v_0=\lambda_2 P_2-\lambda_4 P_4-(\lambda_2-\lambda_4)\,p_0,$$

$$\left(2\lambda_1 U_1+\lambda_2 U_2+\lambda_4 U_4-\frac{\tau_5\rho_0 a_0^2}{r_0}\right)u_0+(2\lambda_1 V_1+\lambda_2 V_2+\lambda_4 V_4)\,v_0=$$
$$=(2\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\lambda_4 P_4-2P_5)-(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4-2)\,p_0.$$

3. *Граничные осевые точки.* Здесь можно получить два независимых бихарактеристических соотношения. Этот случай подобен случаю точки на границе, не являющейся осью, но с условием $u_0=0$, заменяющим третье бихарактеристическое соотношение. Направляющие косинусы $(l,\ m)$ в этом случае принимают

значения (0, —1) или (0, +1). Уравнения (19) и (20) в случае свободной поверхности дают соответственно

$$(\lambda_1 V_1 + 2\lambda_4 V_4)\, v_0 = \lambda_1 P_1 + 2\lambda_4 P_4 - 2P_5 - (\lambda_1 - 2\lambda_4 - 2)\, p_0$$

или

$$(\lambda_1 V_1 + 2\lambda_2 V_2)\, v_0 = \lambda_1 P_1 + 2\lambda_2 P_2 - 2P_5 - (\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2)\, p_0.$$

Г. Точки на скачке

Позади скачка общего вида характеристический коноид для некоторой точки (r_0, z_0, t_0) на фронте скачка срезается поверхностью скачка. Вдоль оставшейся части коноида можно получить одно бихарактеристическое соотношение.

Удобно ввести местные оси x и y в точке (r_0, z_0, t_0) на плоскости $t=\text{const}$ так, чтобы ось x была направлена вдоль нормали по движению скачка, а ось y образовывала с ней правую систему координат. Пусть (l_0, m_0) — направляющие косинусы этой оси x относительно первоначальных осей r, z.

Пользуясь обозначениями § 5, выберем α таким, чтобы $\cos\alpha = l_0$ и $\sin\alpha = m_0$. Обозначим через $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ составляющие скорости вдоль осей x и y и заменим θ на $\theta+\alpha$. Тогда из уравнения (19) получим соотношение, выполняющееся вдоль бихарактеристики $1(\varphi=0)$ с точностью до величин второго порядка по $(t_0 - t_1)$

$$p_0 - p_1 + A_1(u_0 - u_1) + B_1(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1) = \\ = -\tfrac{1}{2}\rho_0 a_0^2 (t_0 - t_1)\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{u}{r}\right)_0 - \tfrac{1}{2}\rho_1 a_1^2 (t_0 - t_1) G_1, \quad (\Gamma 1)$$

где

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(\rho_0 a_0 + \rho_1 a_1 \cos\theta_1),$$

$$B_1 = \tfrac{1}{2}\rho_1 a_1 \sin\theta_1$$

$$G_1 = -\sin\theta_1\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{u}{r}\right)_1,$$

$$\sin\theta_1 = (t_0 - t_1)\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\right)_1,$$

$$\cos\theta_1 = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta_1.$$

Соотношения Рэнкина — Гюгонио на скачке имеют вид

$$\rho^*(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_s)^2 = (p_0 - p_s)(V_s - V_0), \quad (\Gamma 2)$$

$$U = (V_s \mathbf{u}_0 + V_0 \mathbf{u}_s)/(V_s - V_0), \quad (\Gamma 3)$$

$$E_0 - E_s = \tfrac{1}{2}(p_0 + p_s)(V_s - V_0), \quad (\Gamma 4)$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_s, \quad (\Gamma 5)$$

где индексом s обозначаются величины в рассматриваемой точке непосредственно перед скачком; $V=\rho^*/\rho$ — удельный объем (ρ^* — плотность окружающей среды); E — внутренняя энергия на единицу массы, которая выражается через p и V по уравнению состояния среды; U — скорость скачка.

Поскольку соотношение (Г5) выполняется во всех точках на кривой, по которой скачок пересекает плоскость с постоянным значением времени t_0, то это соотношение можно дифференцировать вдоль этой кривой. Тогда получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right)_0 - K_0\mathbf{u}_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right)_s - K_0\mathbf{u}_s, \tag{Г6}$$

где K_0 — кривизна скачка в рассматриваемой точке. С помощью последнего равенства можно исключить неизвестную производную скорости $(\partial \mathbf{v}/\partial y)_0$.

Подставляя соотношения (Г5) и (Г6) в (Г1), получаем

$$p_0 = k_1\mathbf{u}_0 + k_2, \tag{Г7}$$

где k_1 и k_2 выражаются через известные величины перед скачком и на исходной плоскости $t=t_1$,

$$k_1 = -A_1 - \frac{1}{2}(t_0 - t_1)\rho_0 a_0^2\left(K + \frac{l}{r}\right)_0, \tag{Г8}$$

$$k_2 = p_1 + A_1\mathbf{u}_1 + B_1\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}(t_0 - t_1)\rho_0 a_1^2 G_1 -$$

$$- \frac{1}{2}(t_0 - t_1)\rho_0 a_0^2\left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right)_s - K_0\mathbf{u}_s\right] - \left[B_1 - \frac{1}{2}(t_0 - t_1)\rho_0 a_0^2\frac{m_0}{r_0}\right]\mathbf{v}_s. \tag{Г9}$$

В случае точки, расположенной на оси $r=0$, формулы (Г8) и (Г9) примут вид

$$k_1 = -A_1 - (t_0 - t_1)\rho_0 K_0 a_0^2, \tag{Г10}$$

$$k_2 = p_1 + A_1\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}(t_0 - t_1)\rho_1 a_1^2 G_1 - (t_0 - t_1)\rho_0 a_0^2\left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right)_s - K_0\mathbf{u}_s\right]. \tag{Г11}$$

Литература

1. Butler D. S., неопубликованное сообщение, 1958.
2. Butler D. S., *Proc. Roy. Soc.* (London) **A255**, 232, 1960.
3. Elliott L. A., *Proc. Roy. Soc.* (London) **A267**, 558, 1962.

Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики

Ф. Х. ХАРЛОУ

Калифорнийский университет,
Научно-исследовательская лаборатория
в Лос-Аламосе, Нью-Мексико

1. Введение 316
2. Основной метод расчета 320
3. Видоизмененные формы метода 329
4. Свойства метода частиц в ячейках 331
5. Область применения и ограниченность метода частиц в ячейках . . 338
6. Приложение метода к одной специальной задаче 339
Литература 342

1. Введение

Метод частиц в ячейках [1]) был развит в Лос-Аламосе в 1955 г. специально для решения сложных задач гидродинамики. Этот метод предназначен для использования на быстродействующих электронных вычислительных машинах и, как таковой, применялся к широкому кругу задач в годы, прошедшие с момента возникновения метода. Первоначально этот метод был разработан для одномерных задач, т. е. для задач, в которых все параметры течения являются функциями только одной пространственной переменной. Однако в первоначальный период применения этого метода выяснилось, что он едва ли может конкурировать с уже существовавшими одномерными численными методами. Поэтому основной целью в то время было создание расчетной схемы, пригодной для задач с двумя и тремя пространственными переменными, в которых встречаются сильные деформации жидкости, большие относительные перемещения и столкновения поверхностей раздела, т. е. для таких задач, для решения которых существовавшие численные методы были недостаточными.

Последующее развитие доказало, что эта первоначальная цель могла быть, по крайней мере частично, достигнута. История дальнейшего развития метода частиц в ячейках показала, что идеи и схема применения этого метода претерпели значительные изменения. В настоящем обзоре обсуждается современный вид этого метода. Полное же изложение всей предыдущей работы можно найти в отчете Харлоу и др. [9]. Последнее обсу-

[1]) Этот метод по-английски сокращенно называют PIC method (от слов Particle-in-cell method).

ждение этого метода с несколько иной точки зрения дано в работах Биорка и др. [1] и Харлоу [8].

Конечно, существуют еще другие методы для решения на быстродействующих вычислительных машинах гидродинамических задач, зависящих от нескольких пространственных переменных. В других статьях этой книги излагаются некоторые более эффективные методы. Среди этих методов имеются два метода, наиболее различающиеся между собой. Мы кратко опишем их здесь для того, чтобы показать, чем они отличаются от метода частиц в ячейках.

В первом из этих методов, который называют идеальным методом Лагранжа, жидкость рассматривается разделенной на большое число конечных зон, каждая из которых представляет некоторый элемент жидкости. Эта сетка ячеек связывается с движением жидкости таким способом, какой определяется применяемым приближенным методом решения дифференциальных уравнений гидродинамики. Идеализированный метод Лагранжа успешно использовался во многих приложениях. Однако в то же время этот метод страдает некоторыми недостатками. Наиболее серьезным недостатком является непригодность этого метода в случаях, когда в жидкой среде встречаются сильные деформации и большие относительные перемещения. Трудности возникают также в задачах, в которых имеет место кавитация или в которых поверхности раздела между различными средами сталкиваются между собой.

Другим методом, который также успешно применяется, является идеальный метод Эйлера. В этом методе жидкость разбивается на большое число конечно-разностных ячеек, но в этом случае сетка ячеек фиксирована в системе координат относительно неподвижного наблюдателя, а жидкость течет через эти ячейки. Важное преимущество метода Эйлера состоит в том, что в нем расчеты проводятся без каких-либо затруднений и при наличии в жидкости сильных деформаций или больших относительных перемещений. Однако метод Эйлера имеет и некоторые недостатки. Этот метод не инвариантен относительно преобразований переноса и поворота, в нем очень трудно определять малые изменения параметров, когда течение жидкости происходит в большой области, наконец, здесь непросто рассчитывать поверхности раздела сред.

Можно считать, что в некотором отношении метод частиц в ячейках соединяет в себе лучшие качества как лагранжева, так и эйлерова подхода. Например, при расчетах по методу частиц в ячейках жидкость разбивается на большое число эйлеровых ячеек, которые остаются в покое. Однако, кроме того, здесь рассматривается лагранжева сетка частиц, представляющих собой элементы жидкости, которые движутся через эйлерову сетку

ячеек. Эйлерова сетка используется для целей определения переменных поля, в то время как частицы служат для определения параметров самой жидкости. Типы задач, к которым может быть применен метод частиц в ячейках, включают, например, следующие задачи.

Рассмотрим задачу взаимодействия скачка со сферическим пузырем. Всю задачу можно рассматривать как двумерную неустановившуюся задачу с симметрией относительно цилиндрической оси. Тогда скачок будет двигаться в направлении оси z и взаимодействовать с пузырем на этой оси. Конечно, при этом будут иметь место большие относительные перемещения и деформации жидкости. Пузырь будет сжиматься, принимая плоскую дискообразную форму с кольцевым вихрем на его границе, в то время как жидкость вне пузыря будет обтекать его. Расчет такой задачи был проведен с помощью метода частиц в ячейках. Результаты этого исследования представлены в работе Эванс и др. [6].

Другой пример задачи, для которой идеально подходит метод частиц в ячейках, представляет собой задача о нормальном ударе шарика, движущегося с высокой скоростью, о массивную плиту. Было проведено большое число таких расчетов, а результаты их сравнивались с экспериментами и с отдельными теориями. Здесь опять характерной особенностью, которая затрудняет расчеты по другим методам, является наличие больших относительных перемещений и деформаций. Кроме того, в этой задаче имеет место столкновение двух поверхностей раздела, которое без труда рассчитывается по методу частиц в ячейках.

В каждом из этих примеров и по существу во всех примерах применения метода частиц в ячейках можно увидеть очень близкую аналогию между расчетом и реальным экспериментом. В обоих случаях налагаются только начальные и граничные условия, а оператор затем становится просто наблюдателем, который следит за получаемыми результатами. В эксперименте всегда имеется возможность ошибки, большой или малой, и то же самое обнаруживается в расчетах по методу частиц в ячейках. Большие ошибки будут рассмотрены в этой статье как катастрофические неувязки на границах и неустойчивость. Малые ошибки связаны с ошибками округления или ошибками аппроксимации; некоторые из них изучены, а некоторые даже в настоящее время известны только по их появлению в расчетах.

Следует подчеркнуть, что применение метода частиц в ячейках стало возможным только после создания больших и скоростных электронных вычислительных машин. Проведение полного расчета по методу частиц в ячейках требует миллиардов операций. На современных вычислительных машинах эти расчеты можно выполнить в течение нескольких минут или часов, в то

время как без таких машин на это потребовались бы многие десятки или сотни лет человеческого труда.

Расчеты по методу частиц в ячейках требуют как большой памяти, так и высокого быстродействия вычислительных машин. Например, возьмем эйлерову сетку ячеек с размерами в A ячеек по длине и в B ячеек по ширине и будем рассматривать в каждой ячейке в среднем по $\overline{N}$ частиц. Тогда общий необходимый объем машинной памяти составит приблизительно $(9+3\overline{N})AB$ слов.

В типичных расчетах используется 3000 ячеек и берется около 14 000 частиц. В этом случае объем памяти машины вместе с требуемой памятью для хранения команд программы будет исчисляться примерно в 100 000 слов. Вычислительная машина IBM Стретч удовлетворяет этим требованиям и в настоящее время является нашей основной машиной для проведения расчетов по методу частиц в ячейках. Однако имеется много случаев, когда полезные и значительные результаты можно было получить на меньших по размеру и менее скоростных вычислительных машинах. В лучших из имеющихся решений полные расчеты на машине Стретч занимают время от 20 *мин* до 1,5 *час*.

Приведенные соображения показывают также, почему наши расчеты почти всегда ограничивались задачами, которые описываются двумя пространственными переменными. (Мы имеем в виду задачи с плоской и осевой симметрией, где отсутствует зависимость от одной из трех пространственных переменных.) Однако мы пытались решать также одну задачу в трехмерных декартовых координатах, причем здесь использовалась сетка ячеек размером $20\times20\times20$. При решении такой трехмерной задачи не возникало каких-либо специальных трудностей в применении метода частиц в ячейках. В этом случае главной трудностью (помимо трудностей, связанных с объемом машинной памяти и ограниченностью времени для расчетов) оказалась выдача результатов. В настоящее время очень трудно представить себе эффективный и легко обозримый способ выдачи результатов трехмерных расчетов.

Более того, метод частиц в ячейках, вероятно, вообще никогда не будет широко применяться для решения трехмерных задач. Причина этого заключается в следующем. С течением времени будут созданы достаточно большие и достаточно скоростные вычислительные машины для проведения численных исследований проблем такого типа. Однако весьма вероятно, что к тому времени уже будут созданы новые численные методы, значительно превосходящие современный метод частиц в ячейках. Почему желательны такие мощные методы (в действительности они уже сейчас находятся в процессе развития), станет ясно при

обсуждении, которое проводится в этой статье. Кроме того, станет также ясным, почему именно метод частиц в ячейках так интенсивно применялся во время этого переходного периода.

2. Основной метод расчета

А. Общие соображения

Чтобы проиллюстрировать схему расчета по методу частиц в ячейках, покажем приложение этого метода к относительно простому примеру, исходя из которого в дальнейшем несложно будет сделать обобщения. Пример, который здесь детально будет описан, представляет собой расчет неустановившегося плоского движения двух сред, находящихся в сосуде с прямоугольными стенками. Общая схема такой задачи показана на рис. 1. Здесь точками и крестиками отмечены два различных вида частиц; в дальнейшем мы будем называть их частицами среды, отмеченной точками, и частицами среды, отмеченной крестиками. Заметим, что не все ячейки эйлеровой сетки обязательно заполнены частицами. Некоторые ячейки остаются пустыми, некоторые заполнены частицами только одной или только другой среды, а в некоторых частицы перемешаны. Все эти особенности создают свои характерные трудности при проведении расчетов.

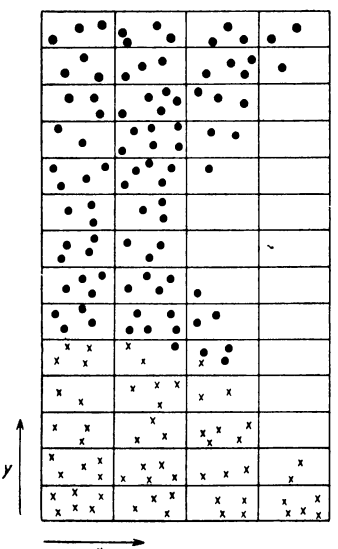


Рис. 1. Пример расположения ячеек и частиц.

Расчет изменения картин движения жидкости проводится шагами по времени, или циклами. Каждый цикл составляет промежуток δt, время которого мало́ по сравнению с общим временем, протекающим в данной задаче. Каждый цикл, кроме того, разбивается на два этапа. Один этап связан с расчетами течения жидкости в представлении Эйлера, а другой — с расчетами движения частиц. Оба эти этапа расчета мы рассмотрим отдельно.

Б. Расчет в представлении Эйлера

Каждая ячейка характеризуется системой переменных, выражающих средние значения скорости, внутренней энергии, плотности и давления в этой ячейке. Обозначения для типичной

ячейки приведены ниже. С помощью индексов i, j отсчитывается число ячеек в направлениях x и y соответственно.

Обозначения величин для ячейки i, j

$u_{i,j}$ — составляющая скорости по направлению x;
$v_{i,j}$ — составляющая скорости по направлению y;
$M_{\cdot i,j}$ — масса среды, отмеченной точками;
$M_{\times i,j}$ — масса среды, отмеченной крестиками;
$M_{i,j} = M_{\times i,j} + M_{\cdot i,j}$;
$I_{\cdot i,j}$ — удельная внутренняя энергия среды, отмеченной точками;
$I_{\times i,j}$ — удельная внутренняя энергия среды, отмеченной крестиками;
$p_{i,j}$ — давление;
$Q_{i,j}$ — полная внутренняя энергия;
$E_{\cdot i,j}$ — полная энергия среды, отмеченной точками;
$E_{\times i,j}$ — полная энергия среды, отмеченной крестиками;
$X_{i,j}$ — полное количество движения с импульсом сил в направлении x;
$Y_{i,j}$ — полное количество движения с импульсом сил в направлении y;
$\sim$ — показывает, что результат получен после первого этапа расчетов;
$'$ — показывает, что результат получен после второго этапа расчетов.

На эйлеровом этапе расчета положение всех частиц рассматривается полностью фиксированным. Следовательно, на этом этапе расчета мы будем пренебрегать всяким движением жидкости и всеми эффектами, обусловленными перемещением частиц. Первый шаг расчета состоит в определении давления. С этой целью рассчитывают плотность в ячейке, определяя ее как отношение полной массы в этой ячейке к ее объему. Вычисленная таким образом плотность будет изменяться скачкообразно в соответствии с тем количеством частиц, которое находится в ячейке; в дальнейшем будет рассмотрено влияние такого характера изменения плотности.

Для чистой ячейки, т. е. для ячейки, заполненной частицами только одной среды, давление рассчитывается с помощью уравнения состояния для данного вида среды, которое дает давление как функцию плотности и удельной внутренней энергии. Для смешанной ячейки, т. е. для ячейки, заполненной частицами обеих сред, имеются несколько способов, по которым можно определить давление. В случае когда оба уравнения состояния таковы, что давление увеличивается с ростом плотности, величину давления в смешанной ячейке можно получить простым сложением парциальных давлений. В более сложных случаях, когда одно или оба уравнения состояния зависят иным образом от плотности, иногда возможно, что сложение парциальных давлений будет все-таки давать удовлетворительные результаты.

Однако более вероятно, что сложение парциальных давлений даст полное давление, которое будет сильно отличаться от истинной величины.

Когда в ячейке находятся две среды, давление можно вычислить, например, исходя из предположения его непрерывности на границе раздела этих двух сред. Предположим, что каждая среда занимает некоторую неизвестную часть ячейки. Далее допустим, что давление в каждой среде одинаково. Это даст систему уравнений, из которой можно получить полное давление в ячейке. Практически было установлено, что в случае смешанной ячейки, заполненной частицами трех сред, пользоваться такой схемой расчета нецелесообразно. Для таких ячеек обычно давление определялось как среднее значение давления в соседних ячейках, не содержащих частиц трех сред.

В типовых программах для вычислительной машины при проведении расчетов по методу частиц в ячейках значения давления определяются во всех ячейках и затем размещаются в оперативной памяти для использования в дальнейших вычислениях. Такая схема особенно целесообразна в тех случаях, когда программа должна быть гибкой в отношении уравнения состояния и видоизменения граничных условий.

Следующий шаг на эйлеровом этапе расчета состоит в вычислении предварительных новых значений скорости и удельной внутренней энергии для ячейки в целом. Эти значения (они отмечаются тильдой) будут предварительными потому, что на эйлеровом этапе расчета эффекты, обусловленные перемещением среды, не учитываются. Из полной системы дифференциальных уравнений в частных производных, изучаемых в гидродинамике, можно исключить при дальнейшем рассмотрении уравнение, выражающее закон сохранения массы. Это возможно сделать потому, что частицы имеют постоянную массу, они не возникают и не исчезают (за исключением лишь тех случаев, когда они покидают систему или входят в нее). Тогда необходимыми дифференциальными уравнениями будут уравнения количества движения и энергии

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho Du + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho Dv + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial I}{\partial t} + \rho DI + p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

$$D \equiv u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}.$$

Оператор D выражает эффект, обусловленный перемещением среды, поэтому на эйлеровом этапе расчета члены с та-

ким оператором опускаются. В конечно-разностной форме рассматриваемые уравнения примут вид

$$\frac{M_{i,\,j}}{\delta x\,\delta y}\left(\frac{\tilde{u}_{i,\,j}-u^n_{i,\,j}}{\delta t}\right)+\frac{1}{\delta x}\left(p^n_{i+1/2,\,j}-p^n_{i-1/2,\,j}\right)=0, \tag{1}$$

$$\frac{M_{i,\,j}}{\delta x\,\delta y}\left(\frac{\tilde{v}_{i,\,j}-v^n_{i,\,j}}{\delta t}\right)+\frac{1}{\delta y}\left(p^n_{i,\,j+1/2}-p^n_{i,\,j-1/2}\right)=0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\delta x\,\delta y}\left(\frac{\tilde{Q}_{i,\,j}-Q^n_{i,\,j}}{\delta t}\right)+p^n_{i,\,j}\left(\frac{\bar{u}_{i+1/2,\,j}-\bar{u}_{i-1/2,\,j}}{\delta x}+\right.$$
$$\left.+\frac{\bar{v}_{i,\,j+1/2}-\bar{v}_{i,\,j-1/2}}{\delta y}\right)=0. \tag{3}$$

Эти уравнения имеют некоторые особенности, требующие пояснения. Во-первых, величины с полуцелыми значениями нижнего индекса получены как средние величины по двум смежным ячейкам. Во-вторых, величина полной внутренней энергии Q используется вместо MI для того, чтобы учесть также случай смешанных ячеек. В-третьих, индекс n, который относится к циклу по времени, введен, чтобы для каждой величины показать в явном виде зависимость от времени. В-четвертых, δx и δy представляют собой размеры ячейки. Наконец, в уравнении энергии скорости отмечены черточкой, которая означает, что берется *среднее* значение между старой и предварительной новой величинами, т. е.

$$\bar{u}\equiv\frac{1}{2}\,(\tilde{u}+u^n),$$
$$\bar{v}\equiv\frac{1}{2}\,(\tilde{v}+v^n).$$

Следует отметить, что применение величин с черточками в уравнении энергии обусловливает определенную последовательность при проведении расчетов. Сначала необходимо вычислить составляющие скорости, отмеченные тильдой. Затем эти величины подставляются в уравнение энергии через $\bar{u}$ и $\bar{v}$, т. е. в форме комбинации со старыми значениями составляющих скорости. Существуют две причины для представления уравнения энергии в такой специальной форме. Первая и наиболее важная причина состоит в том, что это уравнение, очевидно, дает возможность воздействовать на устойчивость расчетов, а также определяет получение хорошей точности при вычислении энтропии жидкости. Эти вопросы будут детально обсуждаться в § 4. Другая причина состоит в том, что в этом случае точно обеспечивается сохранение энергии системы даже при использовании конечно-разностного метода расчета.

Если иметь в виду только условие сохранения энергии, то тогда можно было бы пользоваться несколькими различными

расчетными схемами. Например, можно было бы рассчитать значение полной энергии в любой ячейке и вычесть из него величину кинетической энергии, чтобы получить изменение внутренней энергии. Такая схема фактически применялась во многих расчетах, проведенных по методу частиц в ячейках. Но лишь последний опыт показал, что этот новый подход является значительно более удовлетворительным.

Другой вопрос, который пока остается еще не разрешенным при рассмотрении уравнения энергии, заключается в том, каким образом должна распределяться энергия между несколькими жидкостями в смешанной ячейке. Здесь имеются различные возможности. Обычно для данной конкретной задачи или для приложения выбирают такую схему, которая наилучшим образом учитывает перенос энергии через поверхность раздела двух сред и в то же время удобна с точки зрения программирования. Вероятно, наиболее удовлетворительной схемой с теоретической точки зрения здесь была бы схема, в которой принимается, что нагревание или охлаждение в каждой среде протекает адиабатически. Однако расчетная схема в этом случае получается довольно сложной даже для газа с простым уравнением состояния. В связи с этим можно рассматривать две другие схемы, в которых каждая жидкость внутри ячейки получает одно и то же приращение либо полной внутренней энергии, либо удельной внутренней энергии. Однако в некоторых случаях последняя схема оказалась менее точной, чем две первые схемы, и вследствие этого она редко используется.

Численную схему, применяемую на эйлеровом этапе, надо анализировать с точки зрения выполнения законов сохранения по двум причинам. Первая причина связана с точностью численного метода. Оказывается, здесь имеет место такой общий принцип, что расчетная схема дает наиболее точные результаты в случае, когда она точно сохраняет те величины, которые действительно сохраняются в рассматриваемом физическом процессе. Следовательно, с этой точки зрения целесообразно обеспечить строгое сохранение энергии, количества движения с импульсами сил и массы. Вторая причина, по которой желательно выполнение условий сохранения, состоит в том, что при записи уравнений в консервативной форме появляется полезный и эффективный способ контроля правильности работы программы и вычислительной машины в процессе решения задачи. Мы утверждаем, например что при расчете на машине, которая дает точность в восемь знаков, условие сохранения энергии должно выполняться с точностью до шести знаков. Обеспечение консервативных свойств конечно-разностных уравнений нетрудно выполнить с помощью следующих действий.

Рассмотрим сначала вопрос об изменении количества движения по направлению x. Чтобы обеспечить при этом условие сохранения, необходимо просуммировать уравнение (1) по всем ячейкам системы. Величина $M_{i,j}u_{i,j}$ представляет собой количество движения. Следовательно, первый член уравнения (1) дает для расчетного цикла разность полного количества движения в моменты времени, отмеченные тильдой и индексом n. Суммирование второй части уравнения (1) приводит к попарному уничтожению всех соответствующих членов. Действительно, давление на левой границе некоторой ячейки равно давлению на правой границе соседней ячейки, находящейся слева от рассматриваемой ячейки, и поэтому две эти величины давления взаимно уничтожаются. В результае такого суммирования уравнений в них останутся только величины давления в ячейках, смежных с пустыми ячейками или смежных с границами рассчитываемой системы. Именно на основании оставшихся членов просуммированных уравнений фактически могут быть выявлены необходимые граничные условия.

Например, в ячейке, смежной с пустой ячейкой, давление должно обращаться в нуль, чтобы пустая ячейка (давление равно нулю) не давала результирующей силы на систему. В ячейке, смежной с отражающей стенкой, *градиент* давления должен обращаться в нуль, чтобы в фиктивной ячейке, расположенной непосредственно за стенкой, давление точно равнялось давлению в ячейке, расположенной непосредственно перед стенкой. Следовательно, давление на стенке будет таким же, как давление непосредственно изнутри перед стенкой.

Другой тип граничных условий имеет место в случае внешнего давления, приложенного к системе. Здесь суммирование количества движения показывает необходимость того, чтобы на границе, смежной с областью приложенного давления, это приложенное давление задавалось как некоторая функция времени и пространства. Если жидкость вытекает из системы через некоторую границу с условиями непрерывности на ней, то тогда обратно внутрь системы не должны проникать сколько-нибудь заметные возмущения, идущие от этой границы. Если течение сверхзвуковое, то характер граничного условия не создает при этом никаких осложнений. Если же течение дозвуковое, то тогда надо позаботиться о том, чтобы влияние границы было небольшим. Выяснилось, что в этом случае давление в фиктивной ячейке, расположенной непосредственно за границей, наиболее целесообразно брать равным давлению в последней ячейке перед границей.

Уравнение энергии дает дополнительную информацию относительно граничных условий. Чтобы показать, как выполнить точные условия сохранения, возьмем комбинацию уравнения

энергии (3) вместе с двумя уравнениями количества движения (1) и (2). Полученное в результате уравнение запишем в такой форме, чтобы первый его член представлял собой разность полной энергии в данной ячейке в моменты времени, отмеченные индексом n и тильдой. Тогда остальные члены можно записать как разности величин, которые при суммировании по всей сетке ячеек опять попарно уничтожаются. Выражение для потока энергии F в этом случае имеет довольно специфический вид

$$(F)^n_{i+1/2,\ j} = \frac{1}{2}\left(p^n_{i+1,\ j}\bar{u}_{i,\ j} + p^n_{i,\ j}\bar{u}_{i+1,\ j}\right).$$

Комбинация ранее выведенных граничных условий для давления вместе с этим выражением для потока энергии дает граничные условия для определения скорости на границах ячейки. Например, видно, что значения составляющих скорости в пустой ячейке должны быть взяты такими же, как соответствующие величины в рассчитываемой ячейке, смежной с пустой ячейкой. (Это означает, что если пустая ячейка окружена четырьмя ячейками, заполненными жидкостью, то при расчете каждой из четырех этих ячеек пустая ячейка будет получать различные величины составляющих скорости, вводимых в нее для выполнения граничных условий.) Для отражающей стенки средняя скорость просто должна равняться нулю.

Что же касается внешнего приложенного давления, то здесь имеется несколько больший произвол в отношении граничных условий. Обычно в ячейках с приложенным давлением оказывается достаточным брать составляющие скорости такими же, как составляющие скорости в смежных ячейках. Кроме того, выяснилось, что в некоторых случаях можно более точно определять движение скачка при наличии приложенного давления, если на границе брать известную скорость скачка. Для границы с условиями непрерывности составляющие скорости снаружи границы берутся такими же, как составляющие скорости внутри, — именно этим свойством граница с условиями непрерывности отличается от твердой стенки.

Здесь всюду мы пренебрегали влиянием вязкости и теплопроводности. Если же в уравнения включить члены, описывающие эти эффекты, то тогда нужно было бы ввести дополнительные граничные условия в форме, аналогичной применявшейся выше.

В. Движение частиц

На эйлеровом этапе расчетов изменялись только величины, относящиеся к ячейке в целом, а жидкость предполагалась моментально заторможенной. Чтобы провести расчет движения частиц, удобно в качестве первого шага подготовить для частиц

возможность перемещения через границы ячейки. С этой целью от различных удельных величин в каждой ячейке переходят к рассмотрению полных величин для этой ячейки. Таким образом, по величинам $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и $\tilde{I}$ сначала для каждой ячейки рассчитываются полное количество движения по каждому из двух направлений и полная энергия. Этот шаг расчета вместе с последующими шагами иллюстрируется в табл. 1. Проведенная подготовка позволяет проводить простое сложение и вычитание энергии, количества движения и массы, когда некоторая частица перемещается через границу ячейки.

Перемещение самих частиц осуществляется с составляющими скорости, отмеченными тильдой. Это придает бо́льшую устойчивость расчетам, чем если бы частицы передвигались со скоростями $\bar{u}$ и $\bar{v}$. При движении каждой частицы ее эффективная скорость вычисляется линейной интерполяцией по значениям скорости в центрах каждой из рассматриваемых четырех ячеек, ближайших по своему расположению к данной частице. Этот способ расчета эквивалентен взвешиванию скорости пропорционально площади, которую вновь построенная ячейка с центром в рассматриваемой частице перекрывает в каждой из четырех смежных ячеек. Выяснилось, что такая схема линейной интерполяции скорости значительно увеличивает точность расчетов метода частиц в ячейках почти во всех его приложениях.

Таблица 1

Последовательность изменения хранимых величин для ячейки во время второго этапа расчета

Шаг 1 >	$M.$	$M_\times$	$I.$	$I_\times$	$\tilde{I}.$	$\tilde{I}_\times$	u	v	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$
Шаг 2 >	$M.$	$M_\times$	$\tilde{E}.$	$\tilde{E}_\times$	$\tilde{I}.$	$\tilde{I}_\times$	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$
Шаг 3 >	$M'.$	$M'_\times$	$E'.$	$E'_\times$	$\tilde{I}.$	$\tilde{I}_\times$	X'	Y'	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$
Шаг 4 >	$M'.$	$M'_\times$	$E'.$	$\tilde{E}'_\times$	$\tilde{I}.$	$\tilde{I}_\times$	u'	v'	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$
	$M'.$	$M'_\times$	$I'.$	$I'_\times$	$\tilde{I}.$	$\tilde{I}_\times$	u'	v'	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$

Это увеличение точности фактически оказывается значительно большим, чем увеличение точности, которое можно было бы получить за счет уменьшения размеров ячеек сетки при затрате равного количества машинного времени. При применении этой интерполяционной схемы к расчету движения частиц возникают, конечно, определенные проблемы, связанные с граничными условиями. Например, при расчете окрестности пустой ячейки скорость в центре этой пустой ячейки берется такой же, как скорость в ячейке, где находится данная частица. При рассмотрении

движения частиц вблизи отражающей стенки вводятся фиктивные внешние ячейки, в которых скорости берутся равными отраженным скоростям в соответствующих смежных ячейках.

Если в своем новом положении частица остается в той же самой ячейке, в которой она находилась перед перемещением, то тогда эйлеровы величины, относящиеся к ячейке в целом, не получают изменений. Если же частица перемещается через границы ячеек, то такие изменения определяются простым сложением или вычитанием масс, энергий и количеств движения с импульсом сил соответствующих частиц. Эти величины рассчитываются с учетом пропорциональной доли, которую частица вносила в данную величину в старой ячейке. Когда все частицы системы будут перемещены, наступает последний шаг расчета. Теперь для всех величин, относящихся к ячейке в целом, надо возвратиться к первоначально рассмотренным функциям — составляющим скорости и удельной внутренней энергии. Это можно сделать путем деления полученных последних значений составляющих количества движения на последние значения массы, что дает окончательные значения составляющих скорости. Вычитая же из последних значений полной энергии рассчитанные последние значения кинетической энергии, найдем окончательные значения внутренней энергии. В табл. 1 подробно показано, в каком порядке проводятся эти вычисления.

Г. Вспомогательные операции

После проведения двух основных этапов, описанных выше, будет завершена главная часть расчетного цикла в методе частиц в ячейках. Однако, помимо описанных расчетов, обычно проводят еще некоторые очень полезные вспомогательные операции. Сюда относятся различные операции, связанные с выводом рассчитанных данных, например передача информации из памяти машины на ленты или на перфокарты, печать интересующей информации либо в полной форме, либо в виде только основных, необходимых для анализа результатов. Очевидно, что при печати информации почти невозможно вывести все результаты, полученные в каждом цикле вычислений. Фактически мы ограничивались печатью только основных данных через каждые несколько циклов. Выдавать же полную печать всей памяти машины требуется в редких случаях.

Очень большую информацию для анализа можно получить путем вывода на печать основных данных, содержащих значения энергии, количества движения, положение центра масс и различные другие параметры движения. Однако более ценным, чем печать таких данных, является вывод графиков, который можно проводить с помощью устройства записи на микрофильм «Стромберг Карлсон 4020». Вывод графиков позволяет полу-

чать на микрофильме картины движения, показывающие положение всех частиц в системе. Обычно частицы различных сред изображаются на графиках точками разной величины, поэтому можно сразу же иметь полную наглядную интерпретацию рассматриваемой картины движения. Оказывается, что такой вывод картин движения часто содержит почти всю информацию, которую желательно получить из расчетов. Несколько примеров картин движения будет дано в § 6, где представлены результаты расчетов, показывающие образование кратера при взрыве в атмосфере над плотным веществом.

3. Видоизмененные формы метода

А. Учет дополнительных эффектов

При расчетах по методу частиц в ячейках можно учесть многие дополнительные эффекты. Некоторые из них мы обсудим здесь, а другие при необходимости также могут быть включены в расчет. Простейшим обобщением метода является, вероятно, учет влияния теплопроводности и вязкости. Опыт показал, что удовлетворительные результаты можно получить с помощью самого непосредственного введения в расчет этих эффектов. Соответствующее рассмотрение этого вопроса имеется в работе Харлоу и др. [9], поэтому здесь будет уместно сделать только несколько замечаний.

Что касается учета теплопроводности, то для этого в уравнение энергии надо добавить член, дающий еще один поток внутренней энергии. Однако следует заметить, что когда в уравнение энергии включается такой член, то при этом несколько меняются свойства устойчивости расчетов. Если через σ обозначить коэффициент теплопроводности, то тогда здесь ставится дополнительное ограничение, согласно которому величина $\sigma\delta t/\delta x^2$ должна быть меньше 0,5. По существу это представляет собой новое ограничение на величину δt, помимо того ограничения, которое ставится гидродинамикой. Другой особенностью, которая возникает при введении теплопроводности, является требование видоизменить граничные условия. Наличие изолированной или теплопроводной стенки нетрудно выразить в соответствующих граничных условиях для градиента внутренней энергии на такой стенке.

Включение вязких эффектов в самом полном виде также можно провести непосредственным образом, однако это приводит к исключительно большой и сложной системе уравнений. Часто в специальных приложениях эти уравнения упрощают, делая определенные допущения относительно характера вязкости. В качестве примера может служить допущение Стокса, в котором простым выражением связываются первый и второй

коэффициенты вязкости. Однако в принципе коэффициенты вязкости могут быть любыми сложными функциями температуры или других переменных. В этом случае не возникает никаких трудностей, за исключением дополнительного увеличения машинного времени, необходимого для вычисления заданных сложных выражений.

Нам часто задают вопросы относительно дополнительного учета прочностных эффектов при проведении расчетов по методу частиц в ячейках. Мы не делали соответствующих опытов, но можно предвидеть, что точный учет таких эффектов был бы весьма затруднительным. Однако следует упомянуть, что Риней [11] из компании «Дженерал электрик» в настоящее время разрабатывает приближенный способ учета таких эффектов. Следует заметить, что в связи с учетом любого из перечисленных эффектов нужно уделять очень большое внимание соответствующей записи уравнения энергии. Как было показано в предыдущем параграфе, запись уравнения энергии в конечно-разностной форме должна учитывать несколько довольно специальных требований. Если необходимо включить, например, вязкие напряжения, то в уравнении энергии соответствующие члены, входящие в полное напряжение, должны быть записаны как разность между потоками полной работы и кинетической энергии, а не в форме, принятой в уравнении (3).

Б. Цилиндрические координаты

Многие весьма полезные и интересные приложения метода частиц в ячейках относились к задачам, которые обладают осью симметрии и являются двумерными в цилиндрической системе координат. Для таких задач нужна новая интерпретация расчетной сетки, применяемой в методе частиц в ячейках. Действительно, теперь эйлеровы ячейки будут тороидами прямоугольного поперечного сечения, а частицы будут представлять собой кольца с осью, на которой располагаются центры масс тороидальных элементов жидкости. В этом случае возникают определенные условия, которые надо учитывать как на эйлеровом этапе расчета, так и на этапе расчета движения частиц. На эйлеровом этапе расчета, конечно, необходимо видоизменить применяемые уравнения с учетом вида дивергенции в цилиндрических координатах. Основное изменение претерпевает уравнение энергии, которое в отличие от уравнения (3) будет теперь иметь такой вид

$$\frac{1}{2\pi r_i\,\delta r\,\delta z}\left(\frac{\tilde{Q}_{i,\,j}-Q^n_{i,\,j}}{\delta t}\right)+$$

$$+\,p^n_{i,\,j}\frac{(ur)^n_{i+1/2,\,j}-(ur)^n_{i-1/2,\,j}}{r_i\delta r}+\frac{v^n_{i,\,j+1/2}-v^n_{i,\,j-1/2}}{\delta z}\Bigg]=0.$$

Граничные условия, которые следуют из требования сохранения энергии, здесь очень похожи на граничные условия, которые получались в плоском случае, но отличаются наличием множителя r. В осесимметричном случае также требуется, чтобы в конечно-разностных уравнениях строго выполнялись как закон изменения количества движения вдоль оси, так и закон сохранения энергии системы. Это требование позволяет вести такой же контроль точности программы и ошибок вычислительной машины, какой был столь полезен в плоском случае.

Применение цилиндрических координат в практических расчетах вносит осложнение, связанное с выбором надлежащего способа взвешивания скоростей при определении движения частиц. Мы пытались проводить здесь взвешивание соответственно объему, который тороидальная ячейка с центром в рассматриваемой частице перекрывает в каждой из четырех смежных тороидальных ячеек. Однако оказалось, что такое взвешивание неудовлетворительно. Поэтому здесь также применялась соответствующая схема с линейными интерполяциями (т. е. со взвешиванием по *площади*) по значениям скорости в четырех смежных ячейках. Никаких других трудностей при проведении расчетов в цилиндрических координатах не возникает. Результаты расчетов, приведенные в § 6, относятся к типичному примеру осесимметричной задачи, для решения которой метод частиц в ячейках прекрасно подходит.

B. Произвольные системы координат

В принципе расчеты по методу частиц в ячейках можно вести в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. Мы провели лишь предварительные исследования относительно возможности расчетов в полярных координатах; фактически же такие расчеты полностью никогда не делались. Тем не менее здесь совершенно ясна одна сторона вопроса, а именно: фиктивные ускорения, которые вводятся в произвольной криволинейной системе координат, должны рассматриваться при расчете движения частиц, а не на эйлеровом этапе расчета.

4. Свойства метода частиц в ячейках

A. Влияние «квантованной» плотности и давления

Когда среднее число частиц в ячейке невелико, например порядка четырех или пяти, тогда флуктуации, вызванные передвижением частиц через границы ячеек, будут очень большими. Следует ожидать, что такие флуктуации окажут сильное влияние на мгновенные значения локальных величин поля течения. Такие ожидания действительно оправдываются. Однако метод

частиц в ячейках справляется с такой трудностью и позволяет получать полезные расчетные данные благодаря тому факту, что эти флуктуации имеют стремление очень быстро осредняться. Но это означает, что результаты расчетов по методу частиц в ячейках едва ли можно рассматривать с микроскопической точки зрения. Здесь интересы должны ограничиваться главным образом общими функционалами движения.

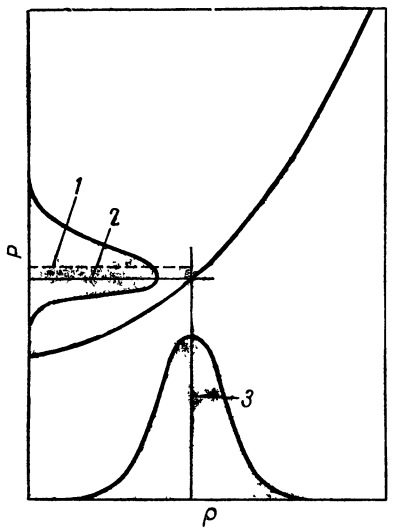


Рис. 2. Иллюстрация асимметричного отображения на ось давления симметричного распределения плотности.

1 — среднее давление; *2* — пик давления; *3* — средняя плотность.

Имеется еще одно обстоятельство, которое связано с флуктуациям и приводит к последовательному отклонению от ожидаемого среднего значения давления. Это происходит в случаях, когда уравнение состояния, дающее давление как функцию плотности, оказывается более сложным, чем простое политропическое уравнение состояния газа, в частности, когда давление изменяется нелинейно в зависимости от плотности. Если, например, кривая, изображающая давление как функцию плотности, имеет вогнутость вверх, то тогда в некоторой области с флуктуацией плотности среднее значение давления будет завышено. Как это происходит, показано на рис. 2. Заметим, что распределение плотности, симметричное относительно своего среднего значения, при отображении на ось давления приводит к несимметричному распределению давления. Среднее значение давления не будет уже соответствовать положению пика давления, а будет располагаться несколько выше его. Для многих целей этот эффект не играет большой роли, но в некоторых случаях, когда стремятся получить большую точность, здесь желательно провести некоторую корректировку.

Если функция распределения для плотности известна, то тогда ее можно отобразить при помощи уравнения состояния и найти функцию распределения для давления. Это позволит получить представление о том, насколько завышено давление. Тогда можно провести корректировку уравнения состояния таким образом, чтобы распределение плотности отображалось теперь на такое распределение давления, у которого максимальное зна-

чение будет несколько ниже желательного, но среднее значение давления будет иметь нужную величину. Очевидно, что проведение такой корректировки зависит от знания функции распределения плотности, которая, вероятно, меняется от задачи к задаче. Однако мы установили экспериментально, что функция распределения плотности остается почти одной и той же в различных условиях. Пусть $P(\rho)d\rho$ представляет собой вероятность найти величину плотности ρ в некоторой области со средним значением плотности ρ_0. Для типичных встречающихся условий достаточная точность получается, когда функция распределения имеет следующий вид:

$$P(\rho) = \frac{4}{3\rho_0\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{16}{9}\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right)^2\right].$$

Оказалось, что в большинстве случаев необходимая корректировка давления невелика. Поэтому погрешность в корректировке, которая является величиной еще более высокого порядка, вероятно, будет очень малой и в большинстве случаев пренебрежимой. Опыт показал, что такое предположение выполняется и корректировка давления в ряде случаев была действительно целесообразной.

Б. Эффективная искусственная вязкость и теплопроводность

Применяемые в методе частиц в ячейках конечно-разностные уравнения точно не совпадают с дифференциальными уравнениями течения, которые они представляют. Уравнения в частных производных можно разложить в ряды Тейлора около некоторого центра в пространстве и времени. Тогда в результате получим уравнения, которые по виду от исходных дифференциальных уравнений будут отличаться на дополнительные члены, пропорциональные размерам ячейки δx и δy и приращению времени δt. Некоторые из этих членов по своему виду похожи на члены, описывающие реальную вязкость и теплопроводность; другие же члены не связаны с какими-либо известными физическими свойствами жидкости. Подробный вывод соответствующих уравнений для случая одномерного неустановившегося течения дан в работе Эванс и Харлоу [3]. Исследование показывает, что в расчеты по методу частиц в ячейках входят коэффициенты эффективной вязкости и теплопроводности

$$\lambda = \frac{1}{2}\rho\langle u\rangle\delta x,$$

где $\langle u\rangle$ — среднее значение местной скорости жидкости. Происхождение этих эффектов можно выяснить при рассмотрении расчета движения частиц. Из описания этого этапа расчета видно, что когда частица пересекает границу ячейки, то она несет

определенные доли количества движения и энергии, которые добавляются к соответствующим величинам в новой ячейке. Последующее вычисление новых удельных величин приводит к уменьшению кинетической энергии жидкости в этой ячейке и увеличению ее внутренней энергии.

Пусть известны выражения для теплопроводности и вязкости, фактически возникающие в расчетах по методу частиц в ячейках. Тогда на эйлеровом этапе расчета можно провести некоторую операцию вычитания, посредством которой влияние этих факторов будет устранено. Выяснилось, что в расчетах некоторых специальных случаев такую операцию действительно желательно проводить. Одним из таких случаев является движение газа в сторону от жесткой стенки. Оказалось, что возникающая в расчетах вязкость вызывает появление кавитации на стенке, где она не должна иметь место. Операция вычитания эффективной вязкости полностью исправляет это положение.

С другой стороны, хорошо известно, что для расчетов скачков с помощью конечно-разностных численных методов требуется введение некоторого диссипативного механизма. Для этой цели подходит искусственная вязкость. Поэтому в одной из наших расчетных схем проводится вычитание искусственной вязкости в областях разрежения и сохранение ее лишь в областях сжатия. Однако надо заметить, что эффективная искусственная вязкость пропорциональна скорости жидкости относительно расчетной сетки. В этом проявляется один из недостатков, который имеется в любой расчетной схеме в представлении Эйлера и о котором ранее упоминалось в связи с вопросом об инвариантности относительно преобразования переноса. Отсюда следует, что в областях полного торможения вязкость становится пренебрежимой. По этой причине иногда полезно вводить в уравнения некоторую дополнительную искусственную вязкость, которая может быть взята в любой из ее многочисленных форм. Для наших целей наиболее подходящей была несколько видоизмененная вязкость Ландсхофа [10], хотя в некоторых случаях целесообразнее было брать вязкость фон Неймана и Рихтмайера [12].

В. Устойчивость

Может показаться, что форма уравнений, которые применяются на эйлеровом этапе расчета, является безусловно неустойчивой. Однако многочисленные расчеты, выполненные по методу частиц в ячейках, показывают, что эта схема вполне рациональна и приемлема и расчеты по ней могут проводиться вполне устойчиво. Этот парадокс разрешается с помощью тщательного исследования устойчивости и, в частности, с помощью рассмотрения эффективной вязкости или другой искусственной вязкости, которая может входить в расчеты.

Харлоу [7] показал, что нелинейные эффекты, создаваемые определенными членами в уравнениях, могут приводить к ограничению бесконечно малой неустойчивости и этого может быть достаточно для того, чтобы расчеты шли без затруднений. Влияние бесконечно малой неустойчивости становится важным только для течений с малыми дозвуковыми скоростями. По этой причине течения, в которых встречаются области полного торможения скорости относительно эйлеровой расчетной сетки, оказывается затруднительно рассчитывать по методу частиц в ячейках. Конечно, такие трудности не возникают в тех случаях, когда вся жидкость покоилась в начальный момент времени и при этом отсутствовали какие-либо возмущения. Трудности возникают только при расчете возмущенных областей полного торможения. Дэлай [2] провел дальнейшее исследование этого вопроса.

Г. Энтропия

В методе частиц в ячейках имеется несколько различных вычислительных операций, которые приводят к добавлению или к потере энтропии. Главным источником добавления энтропии служит процесс пересечения частицами различных ячеек, что, как было показано, вызывает появление эффективной искусственной вязкости. Введение дополнительных членов с искусственной вязкостью создает такой же эффект. Оба эти фактора могут быть полезны при расчетах сжимаемых течений, в которых важную роль играют скачки уплотнения.

Основным источником потери энтропии служит неустойчивость расчетов на эйлеровом этапе. Потеря энтропии проявляется главным образом в увеличении нерегулярностей у профиля скорости. Фактически это связано с переходом тепловой энергии в кинетическую. Чем сильнее эффекты неустойчивости, тем больше нерегулярности в профиле скорости и, следовательно, тем больше потеря энтропии. Одна из основных причин, по которой уравнение для внутренней энергии записывается в форме (3), состоит в том, что эта форма записи в противоположность другим возможным формам, оказывается, менее всего способствует потере энтропии. Действительно, с помощью соответствующего разложения уравнений в ряды Тейлора можно показать, что первый член уравнения энергии в такой форме записи обеспечивает сохранение энтропии при отсутствии диссипативных членов.

Д. Отрицательная внутренняя энергия

Как флуктуации, так и неустойчивость стремятся уменьшить внутреннюю энергию ячейки. В первых вариантах метода частиц в ячейках это могло даже приводить к появлению отрицательных

значений I в некоторых ячейках. Одно из достоинств применяемой нами в настоящее время формы уравнения энергии состоит в том, что здесь ослабевает тенденция к появлению отрицательных величин I. Для некоторых условий возможно вывести критерий, который обеспечивает отсутствие отрицательных значений внутренней энергии. Для политропического уравнения состояния $p=(\gamma-1)\rho I$ этот критерий можно получить из уравнения (3) в следующем виде:

$$\left|\frac{\tilde{I}-I^n}{I^n}\right| \leqslant 2(\gamma-1)u_m\delta t\left(\frac{1}{\delta x}+\frac{1}{\delta y}\right),$$

где u_m — наибольшая величина составляющих скорости в рассчитываемой области. Критерий отсутствия отрицательных значений внутренней энергии накладывает ограничение на приращение времени δt, которое должно выбираться так, чтобы правая часть указанного неравенства была меньше единицы.

Хотя этот критерий строго справедлив лишь для политропического газа, он будет давать также приближенные соображения и для некоторых других уравнений состояния. Тем не менее оказывается, что для некоторых типов уравнения состояния возникают неизбежные обстоятельства, при которых внутренняя энергия иногда может стать отрицательной. В связи с этим во всех расчетах по методу частиц в ячейках, в которых рассматривается уравнение состояния более сложное, чем уравнение состояния для политропического газа, надо принимать специальные меры для вычисления давления при появлении отрицательной внутренней энергии. Эти меры должны быть организованы таким образом, чтобы их суммарный эффект взаимно уничтожался.

Е. Точность

Пока еще не проведено аналитического исследования, которое бы детально показало существо ошибок, возникающих в расчетах по методу частиц в ячейках. Некоторые представления о точности и применимости метода частиц в ячейках были получены только в результате проведения серии пробных расчетов. Многие вопросы, относящиеся к точности расчетов, уже обсуждались выше; здесь мы остановимся на ряде других сторон этого вопроса.

Самый главный источник неточностей расчета связан с отсутствием инвариантности расчетной схемы относительно преобразований поворота и переноса. Например, при *расширении* сферической массы вещества, когда этот процесс рассчитывается в цилиндрических координатах, оказалось, что сферичность явления может сохраняться с довольно хорошей степенью точности.

Однако при расчетах подобного процесса сжатия могут иметь место значительные отклонения от сферичности. Отсутствие инвариантности относительно преобразования переноса проявляется в неустойчивости, которая возникает в области полного торможения и уже обсуждалась выше.

Самый сложный вопрос, который наиболее часто возникает на практике, касается оптимального числа частиц в ячейке при проведении данного расчета. Здесь определенные ограничения ставятся типом вычислительной машины, которая применяется для расчетов. Пусть, например, вычислительная машина имеет относительно малую память, но скорость ее работы достаточно велика, так что соображения о необходимом машинном времени не играют большой роли. Тогда число частиц на одну ячейку будет ограничиваться величиной имеющегося объема памяти для хранения функций, относящихся к частице и ячейке в целом.

Типичные двумерные расчеты требуют, чтобы в памяти машины хранилось примерно девять величин, относящихся к каждой ячейке в целом, и три величины, относящиеся к каждой частице. Если общее число расчетных ячеек в системе очень велико, то в памяти останется мало места для хранения величин, относящихся к частицам, и поэтому число частиц на одну ячейку системы будет небольшим. Это позволяет получить хорошее решение на эйлеровом этапе расчета движения жидкости, но при этом будут появляться значительные флуктуации величин плотности и давления, относящихся к ячейке в целом. В другом крайнем случае, когда берется большое число частиц на каждую ячейку, основная часть памяти машины отводится на хранение величин, относящихся к частицам. Тогда при получении решения на эйлеровом этапе расчета общее число ячеек придется брать небольшим. Таким образом, в каждом случае должен быть найден разумный компромисс между двумя такими крайними положениями. Однако дать какие-либо универсальные рекомендации здесь невозможно.

Вообще говоря, при выборе числа частиц на ячейку можно руководствоваться следующими соображениями. Для сред, которые будут сильно сжиматься, расчеты, как правило, можно начинать с малым числом частиц на ячейку — порядка четырех или несколько больше. (Целесообразно, чтобы число частиц на ячейку представляло собой точный квадрат. Это позволяет удобно размещать частицы внутри ячейки.) Напротив, для сред, которые будут расширяться в процессе расчета, надо брать число частиц на ячейку значительно большим, чем четыре, девять или даже шестнадцать. В некоторых случаях (см. пример в § 6) необходимо было начинать расчеты с числом частиц на ячейку, равным ста или иногда даже четыремстам.

Это последнее число частиц на ячейку применялось в одном примере, где очень маленькая область, в начальный момент времени очень сильно нагретая, должна была расширяться во много раз по сравнению со своим первоначальным объемом. Выбор начального числа частиц на ячейку для таких расширяющихся областей обычно основывается на требовании, чтобы в рассчитанном конечном положении приходилось бы в среднем приблизительно четыре частицы на ячейку. Другой случай, в котором требуется большое число частиц на ячейку, имеет место тогда, когда скачок уплотнения возникает при очень малом возрастании плотности. Здесь необходимо иметь возможность брать очень малые шаги по плотности, а это требует большого числа частиц на ячейку.

Другой вопрос, связанный с выбором частиц и влияющий на точность расчетов, относится к размещению частиц внутри ячейки. Выяснилось, что можно получать значительно лучшие результаты, если частицы несколько смещать относительно некоторого регулярного их расположения. Если, например, берется девять частиц на ячейку, то каждую частицу можно разместить в центре каждой из девяти отдельных частей, на которые разбивается ячейка. Однако лучшие результаты получаются в случае, когда каждая частица внутри своей части ячейки будет смещена на некоторое либо заданное, либо случайное расстояние. Вообще говоря, мы рекомендуем смещение на некоторую регулярно заданную величину. Это смещение надо проводить таким образом, чтобы действие волны, идущей вдоль оси ячейки, не создавало искажений из-за небольших нерегулярностей.

5. Область применения и ограниченность метода частиц в ячейках

Успешное проведение многочисленных расчетов неоднократно показало, что метод частиц в ячейках целесообразен для решения гидродинамических задач, в которых встречаются большие деформации жидкости, большие относительные перемещения и происходит столкновение поверхностей раздела. Этот метод оказался приемлемым для ряда задач, которые не поддавались решению другими численными методами. Несмотря на это, ясно, что метод частиц в ячейках имеет определенные ограничения, и в конце концов этот метод будет заменен каким-либо другим численным методом, который будет свободен от некоторых или ото всех встречающихся здесь трудностей. Наиболее серьезные из этих трудностей уже упоминались, и они ограничивают применимость метода следующими условиями: в рассматриваемой задаче не должно быть областей течения с малыми дозвуковы-

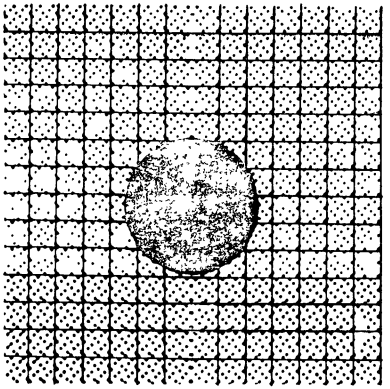
ми скоростями; внутри больших областей течения не должны встречаться малые области, в которых необходимо детально знать решение; нельзя требовать выдачи детальных результатов расчета для отдельных точек в любой заданный момент времени.

Чтобы проиллюстрировать приложения метода частиц в ячейках, упомянем несколько задач, которые были решены этим методом. Эванс и Харлоу [4, 5] подробно исследовали сверхзвуковое течение газа около цилиндра, поставленного как поперек, так и вдоль направления течения. В отчете Харлоу и др. [9] приводится ряд рассчитанных примеров — отражение ударной волны от наклонной поверхности раздела в газе, прохождение ударной волны через канал с внезапно расширяющимися стенками, взаимодействие скачка с различными деформируемыми объектами прямоугольной формы, гиперзвуковое слоистое течение при наличии возмущенной поверхности раздела, неустойчивость, обусловленная ускорением поверхности раздела. В работе Эванс и др. [6] был рассмотрен расчет взаимодействия ударной волны и волны разрежения с пузырем. Кроме того, были выполнены многочисленные исследования для специальных целей, которые не публиковались.

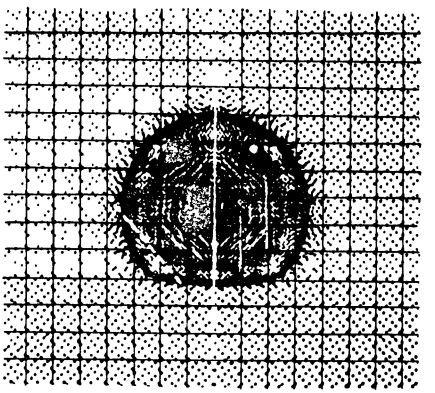
6. *Приложение метода к одной специальной задаче*

Как иллюстрацию специфического приложения метода частиц в ячейках мы приводим здесь результаты расчетов, относящихся к образованию кратера при взрыве в атмосфере над плотным веществом. Эти расчеты были выполнены в Лос-Аламосе на вычислительной машине IBM Стретч с помощью программы «Дукс». Соответствующие результаты нам любезно предоставил Т. Д. Батлер, который проводил расчеты. На рис. 3 дана последовательность картин движения, возникающих в этой задаче.

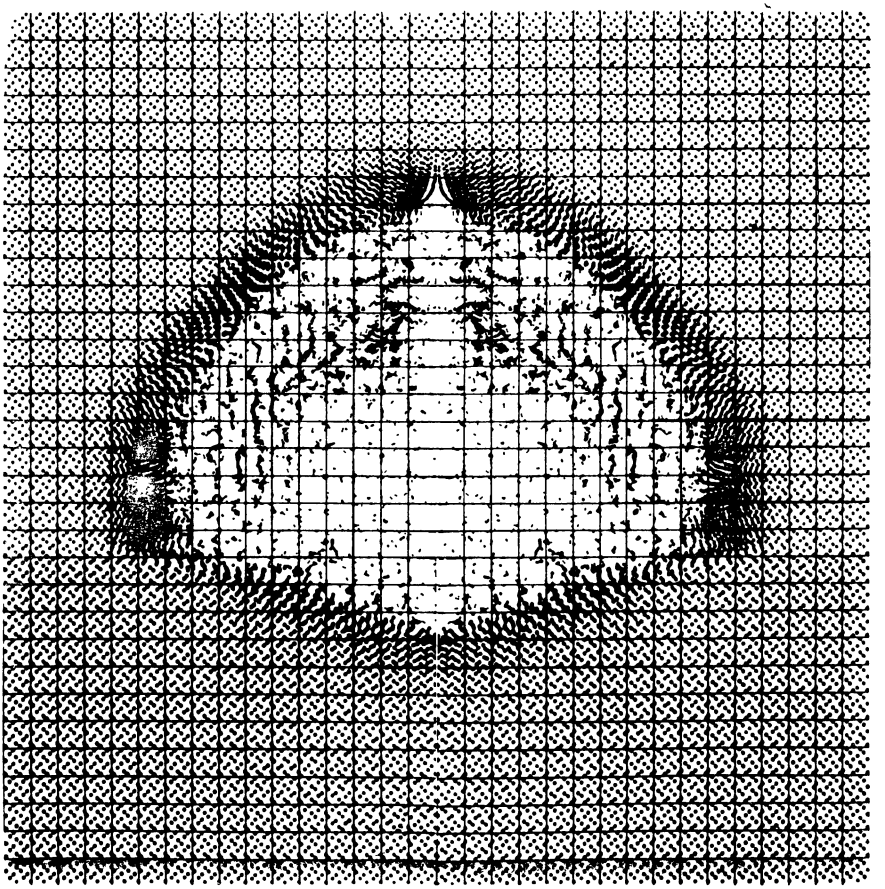
В начальный момент времени $t=0$ на рисунке показана холодная земля, над которой в холодной атмосфере расположена небольшая сильно нагретая сфера. Вторая картина движения относится к моменту, отвечающему двум единицам времени. Здесь видна значительная скученность частиц в первоначально нагретой сфере. На первой картине изображены не все частицы, потому что их слишком много. Уже в момент времени, к которому относится вторая картина движения, в земле возникает небольшое углубление под местом взрыва. На третьей картине движения, соответствующей 30 единицам времени, видно образование сильной ударной волны в окружающей атмосфере и значительное увеличение кратера в земле. Последняя картина движения относится к моменту времени в 60 единиц



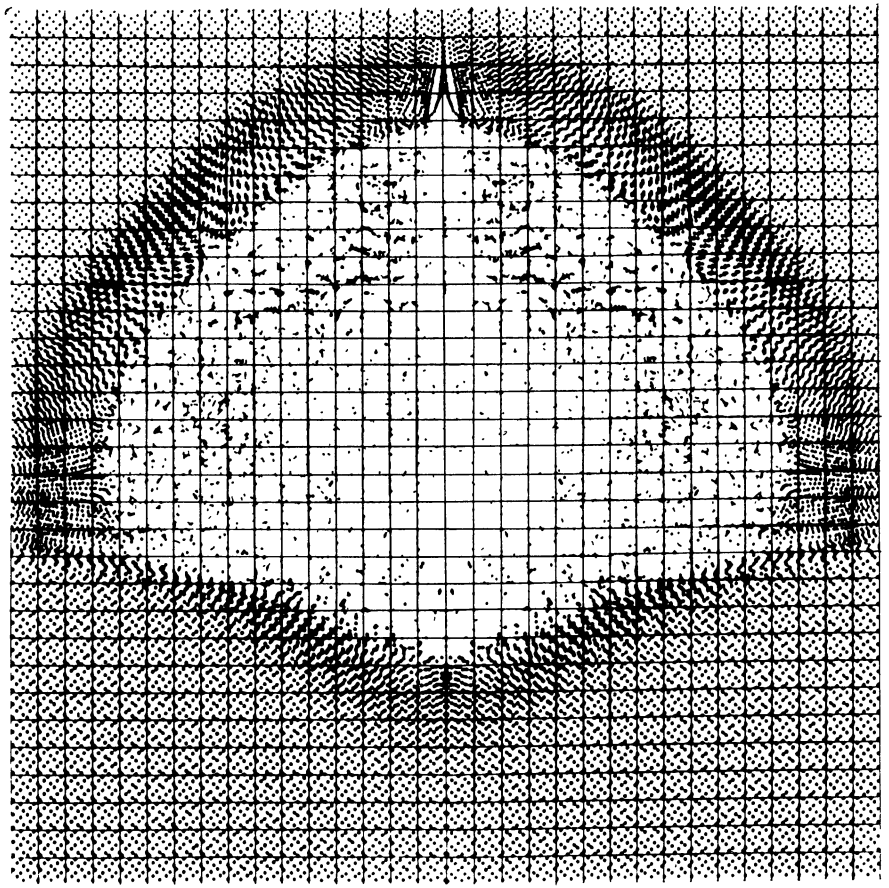
а



б



в



г

Р и с. 3. Задача об образовании кратера; расположение частиц для четырех моментов времени: (*а*) $t = 0$; (*б*) $t = 2$; (*в*) $t = 30$; (*г*) $t = 60$. Линии сетки изображают границы отдельных ячеек.

непосредственно перед тем, как частицы начнут покидать рассчитываемую область.

В действительности расчеты продолжались гораздо дальше, при этом использовались также условия непрерывности на границе, чтобы частицы покидали рассчитываемую область, не посылая какого-либо обратного возмущения. Таким образом, имелась возможность детально до очень продолжительных моментов времени проследить образование кратера в земле.

Благодарности. Список всех сотрудников, внесших свой вклад в развитие и приложения метода частиц в ячейках, был бы столь велик, что его

невозможно было бы здесь привести. Однако мне хочется выразить большую признательность нескольким коллегам, чьи усилия были особенно важными. К ним относятся Марта Эванс, Билли Д. Мейкснер, Даниэль Батлер, Барт Дэлай, Доналд Дикман, Дэвид Э. Харрис, Роберт Э. Мартин и Элизер Бромберг. Многие другие сотрудники из групп Т-3 и Т-1 в Лос-Аламосе вместе с многочисленными консультантами и приезжими учеными также внесли важный вклад. Вся работа по методу частиц в ячейках, включая подготовку этой статьи, была выполнена при поддержке Комиссии по атомной энергии США.

Литература

1. Bjork R., Brooks N., Papetti R., A numerical technique for solution of multidimension hydrodynamic problems, Rand Corporation № RM-2628PR, 1963.
2. Daly B. J., *Math. of Computation,* **84** (1963), 346.
3. Evans M. W., Harlow F. H., The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations, Los Alamos Scientific Lab. Rep. № LA-2139, 1957.
4. Evans M. W., Harlow F. H., *J. Aero. Sci.,* **25** (1958), 269.
5. Evans M. W., Harlow F. H., *ARS J.,* **29** (1959), 46.
6. Evans M. W., Harlow F. H., Meixner B. D., *Phys. Fluids,* **5** (1962), 651.
7. Harlow F. H., Stability of difference equations; selected topics, Los Alamos Scientific Laboratory Rep. № LAMS-2452, 1960.
8. Harlow F. H., Experimental arithmetic, high speed computing and mathematics (Proc. of Symp. in Appl. Math.) (N. C. Metropolis, A. H. Taub, John Todd, C. B. Tompkins, eds.), vol. 15, p. 269. American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1963.
9. Harlow F. H., Dickman D. O., Harris D. E., Jr., Martin R. E., Two-dimensional hydrodynamic calculations, Los Alamoj Scientific Laboratory Rep. № LA-2301, 1959.
10. Landshoff R., A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks, Los Alamos Scientific Laboratory Rep. № LA-1930, 1955.
11. Riney T. D., Solution of visco-plastic equations for axisymmetric hypervelocity impact, General Electric Space Sciences Laboratory Rep. № R62SD95, 1962.
12. Von Neuman J., Richtmyer R., *J. Appl. Phys.,* **21** (1950), 232 (имеется сокращенный русский перевод: сб. *Механика,* № 1 (1951), 27).

Неустановившееся течение несжимаемой вязкой жидкости

Дж. ФРОММ

Калифорнийский университет,
Научно-исследовательская лаборатория
в Лос-Аламосе, Нью-Мексико

1. Введение 343
2. Численный метод 346
3. Начальные и граничные условия 353
4. Видоизменение уравнения вихря 360
5. Функционалы движения. Проверка метода 369
6. Приложения 375
Литература 381

1. Введение

А. Роль вычислительных машин

Исследование математических свойств уравнений, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости, является одной из наиболее остро стоящих теоретических проблем. Существенная нелинейность этих дифференциальных уравнений в частных производных делает недоступным их аналитическое решение, за исключением специальных случаев. Но в то же время именно нелинейностью должны объясняться многие интересные физические свойства, наблюдаемые в гидродинамических процессах.

Появление быстродействующих электронных вычислительных машин в последнее время дало начало применению нового подхода к изучению таких процессов. Этот подход дополняет, с одной стороны, результаты экспериментов, а с другой — результаты аналитических исследований. В продолжение ряда лет численные методы с большим успехом использовались, например, в задачах о течениях сжимаемой жидкости как с целью помочь планировать и интерпретировать эксперименты, так и с целью дать теоретикам средство для исследований. В этой статье будет изложен один недавно развитый численный метод, с помощью которого можно решать задачи о течениях несжимаемой вязкой жидкости. Этот метод уже успешно использовался в приложениях.

Ряд авторов ранее применял численные методы для расчета установившихся вязких течений. Особый интерес здесь представляет метод, который был предложен Томом [9] и применялся им для изучения установившейся застойной зоны позади кругового цилиндра. Результаты Тома для чисел Рейнольдса, равных

10 и 20, достойны особого восхищения, потому что они были получены с помощью всего лишь настольных клавишных счетных машин. Гораздо позже Пейн [6] развил численный метод для неустановившихся течений, используя электронную вычислительную машину Манчестерского университета «Марк I». Пейн [7] также изучал с помощью своего метода структуру застойной зоны позади кругового цилиндра. В этих приложениях «начальные» течения брались при числах Рейнольдса, равных 40 и 100. Пейн не рассматривал несимметричных случаев.

Метод, который будет здесь детально описан, заимствует кое-что из работ обоих упомянутых авторов. Надежность этого метода иллюстрируется результатами расчетов, показывающих развитие вихревых дорожек Кармана.

Б. Предлагаемый конечно-разностный метод

В предлагаемом методе основные расчеты проводятся для двух искомых переменных — функции тока и функции вихря. Расчет шагами по времени проводится для уравнения, представляющего собой конечно-разностную аппроксимацию уравнения Гельмгольца для вихря. Используя таким образом полученные новые значения вихря, определяют новое значение функции тока при помощи конечно-разностной аппроксимации уравнения Пуассона. Вычисление функции тока требует применения метода последовательных приближений, который известен как метод Либмана. Сходимость проверяется с помощью эмпирически установленных критериев.

В дополнительных расчетах можно определить составляющие скорости, которые очень интересны и поэтому вычисляются в процессе всего расчета. С помощью определенного метода можно также рассчитать давление.

Начальное решение получается обычно численным путем и представляет собой решение для безвихревого течения при заданной форме границ и препятствий. Мы ограничиваемся рассмотрением задач в плоской прямоугольной системе координат. Будем рассчитывать течение жидкости между параллельными стенками с периодическими границами на концах области. Условия на стенке получаются из рассмотрения одномерной диффузии вихря у стенки, движущейся в своей плоскости. Обобщая это рассмотрение, можно построить метод для определения переменных параметров течения на препятствиях, расположенных в потоке.

В программе расчетов в существующей ее форме поле течения представляется совокупностью 1425 узловых точек расчетной сетки. Поскольку в большинстве случаев решение никогда не выходит на установившийся режим, то окончание решения задачи зависит от того, как далеко по времени нужно ее иссле-

довать. Максимальное машинное время расчета одной отдельной задачи составляет четыре часа. Сюда входит проведение примерно 1000 шагов по времени с выполнением на каждом шаге порядка 30 итераций в методе последовательных приближений. Для расчетов использовалась электронная вычислительная машина IBM-7090.

B. История развития метода

Развитие метода началось с рассмотрения простых задач о потенциальном невязком течении, чтобы проверить сходимость используемого метода последовательных приближений. Во время контроля сходимости этого метода, когда он был распространен на уравнение Пуассона, искусственно вводились вихри. В этих первоначальных исследованиях применялся целый ряд вариантов метода, имевших целью достижение оптимальной эффективности и точности. Следующий шаг был связан с включением вязкости в расчеты, которые теперь зависели от времени. На этой стадии основное внимание уделялось устойчивости уравнения вихря. Выяснилось, например, что при некоторых из возможных форм уравнения вихря условная устойчивость затрудняла изучение течений с числами Рейнольдса, большими, чем примерно 100. Подробное обсуждение проблемы устойчивости дано в § 4, где показано, что применение схемы второго порядка точности для представления изменений по времени может быть согласовано с требованиями достаточной устойчивости.

При разработке любого численного метода решения сложных задач необходимо иметь некоторое известное решение в качестве базы для проверки точности этого метода. С этой целью мы применяли теоретическое решение задачи о диффузии вихря от поверхности, движущейся в своей плоскости. В более сложных приложениях не имелось соответствующих аналитических решений и здесь главный контроль возлагался на сравнение с экспериментальными результатами. Как удобный пример для проведения таких сравнений была выбрана задача о течении с вихревыми дорожками. Мы считали, что если в расчете и эксперименте будет достигнуто хорошее совпадение всех характерных свойств неустановившегося течения вязкой жидкости около препятствия, то это будет указывать на применимость развитого численного метода в общих случаях.

Оказалось, что с помощью данного численного метода неустановившуюся задачу о вихревых дорожках можно было решить даже лучше, чем предполагалось первоначально. В качестве сопутствующего результата проведенного исследования была получена важная информация о свойствах неустойчивости в вязкой застойной зоне. Опыт показывает, что с помощью этого

метода, вероятно, можно решать даже сложную задачу о турбулентном переходе.

В настоящее время идут дополнительные испытания, относящиеся к общей применимости данного метода. Мы опробовали ряд контрольных задач, в том числе несколько вариантов исследования устойчивости плоско-параллельного течения. Кроме того, сейчас проводится обобщение метода, включающее рассмотрение свободных поверхностей и теплопроводности. Однако предварительные результаты этих обобщений пока еще недостаточно хорошо обработаны, чтобы ими можно было воспользоваться в настоящее время.

Г. Особенности выдачи расчетных данных

Одновременно с развитием основного метода расчета разрабатывалась техника построения графиков с помощью вычислительной машины. Программа для построения графиков, представляющих собой картины движения жидкости, является составной частью всей программы расчета. Информация для построения графиков помещается на магнитную ленту, а затем воспроизводится с помощью устройства записи на микрофильм «Стромберг Карлсон 4020». Графики, на которых показаны линии постоянного значения функции тока, вихря и давления, получаются линейной интерполяцией по значениям величин в узловых точках сетки, причем каждая линия постоянного значения строится отдельно в поле течения. «Дымовые» картины движения, т. е. линии отмеченных частиц, получаются введением в поток контрольных частиц, движение которых рассчитывается интерполяцией по значениям скорости в окрестных точках.

Полная печать всех переменных величин проводится редко; чаще делается печать основных данных, в которой выдаются некоторые функционалы движения, представляющие интерес. Машинное время, которое расходуется на вывод результатов, составляет примерно 10% от всего машинного времени, затрачиваемого в среднем на проведение расчета. В этой статье будут представлены графики, на которых построены линии постоянных значений некоторых функций и картины течения с линиями отмеченных частиц. Соответствующие рисунки приводятся без каких-либо исправлений или ретуши точно в таком виде, как их выдает машина. Машинное время, требуемое для выдачи типичного графика, составляет менее десяти секунд.

2. Численный метод

А. Применяемые дифференциальные уравнения

Уравнения, описывающие течение вязкой несжимаемой жидкости, называются уравнениями Навье — Стокса. В плоской

прямоугольной системе координат они могут быть записаны так

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \tag{2}$$

Переменными величинами, характеризующими движение, здесь являются составляющие скорости u и v по направлениям x и y соответственно и давление P. Кинематический коэффициент вязкости ν принимается постоянным. Поскольку рассматривается несжимаемая жидкость, т. е. $\rho=\text{const}$, то замыкающим уравнением системы будет уравнение неразрывности в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{3}$$

Чтобы получить систему уравнений, которую будем приближенно представлять в конечно-разностной форме, приведенные выше уравнения выразим через функцию вихря ω и функцию тока ψ.

Таким образом, положим

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{4}$$

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{5}$$

и

$$\omega=-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6}$$

Тогда в результате будем иметь уравнение для вихря

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial u\omega}{\partial x}+\frac{\partial v\omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right). \tag{7}$$

Заметим, что уравнение (6) можно записать через ψ в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega. \tag{8}$$

Уравнение (7) можно преобразовать так, что оно будет содержать только функции ψ и ω, т. е. движение будет описываться двумя, а не тремя переменными. Однако мы предпочитаем сохранить структуру уравнения (7), поскольку составляющие скорости, определяемые равенствами (4) и (5), представляют интерес, а уравнение (7) в этом случае остается более простым.

Знание давления полезно как для определения функционалов течения, так и для исследования свойств течения. Чтобы вывести удобное уравнение для давления, возьмем частную

производную по x от уравнения (1) и частную производную по y от уравнения (2). Складывая их, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 (P/\rho)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (P/\rho)}{\partial y^2} = -Q, \tag{9}$$

где Q выражается следующим образом:

$$Q \equiv \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 (uv)}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2}. \tag{10}$$

Б. Конечно-разностные уравнения

1. *Уравнение для вихря.* Основная система уравнений, которую предстоит решать, состоит из уравнений (4), (5), (7) и (8). Рассмотрим в жидкости сетку узловых точек, в которых будем определять переменные ω, ψ, u и v. Соответствующая схема представлена на рис. 1. Предположим, что в некоторый момент времени t известна вся совокупность значений этих переменных. Тогда функцию ω можно приближенно определить в следующий близкий момент времени $t+\delta t$ (где δt — малое приращение) с помощью конечно-разностной аппроксимации уравнения (7)

$$\omega^{n+1}_{i,\,j} = \omega^n_{i,\,j} + \frac{\delta t}{2a}\left[(u\omega)^n_{i-1,\,j} - (u\omega)^n_{i+1,\,j} + (v\omega)^n_{i,\,j-1} - (v\omega)^n_{i,\,j+1}\right] + \\ + \frac{\nu\,\delta t}{a^2}\left[\omega^n_{i+1,\,j} + \omega^n_{i-1,\,j} + \omega^n_{i,\,j+1} + \omega^n_{i,\,j-1} - 4\omega^n_{i,\,j}\right], \tag{11}$$

где a — расстояние между узловыми точками в направлении x (переменный индекс i) и в направлении y (переменный индекс j). Индекс n определяет номер шага по времени. В уравнении (11) в первой скобке находятся члены, относящиеся к переносу, а во второй скобке — члены, относящиеся к диффузии.

Заметим, что уравнение (11) записано здесь в предварительной форме, которая потребует некоторой модификации перед использованием в расчетах (сводка окончательных уравнений дана в § 4, В).

2. *Функция тока; уравнение Пуассона.* Допустим, что значения функции ω в момент времени t заменены на соответствующие значения, рассчитанные для момента времени $t+\delta t$ по уравнению (11). Пересчитаем теперь поле функции тока ψ для нового момента времени, пользуясь конечно-разностным аналогом уравнения (8), который возьмем в виде

$$\psi_{i,\,j} = \frac{1}{4}(\psi_{i+1,\,j} + \psi_{i-1,\,j} + \psi_{i,\,j+1} + \psi_{i,\,j-1} + a^2\omega_{i,\,j}). \tag{12}$$

Отметим, что выражение (12) не содержит индекса времени. Отсюда следует, что здесь все переменные рассматриваются в один и тот же момент времени. Это обстоятельство связано с тем, что мы имеем дело с несжимаемой жидкостью. Таким об-

разом, если в одной части жидкости возникает возмущение, то оно воздействует на все остальные части жидкости. Следовательно, величина ψ в любой точке поля оказывает влияние на величину ψ в каждой другой точке. Одновременный расчет всего поля значений ψ становится затруднительным, когда рассматривается большое число узловых точек сетки. Поэтому для расчета уравнения (12) надо применять итерационный процесс до тех пор, пока значения ψ не сойдутся с некоторой заданной точностью к решению, отвечающему граничным условиям и завихренности, существующей в поле. Схема такого итерационного процесса будет обсуждаться в конце этого параграфа. Укажем, что поле ψ, известное в некоторый момент времени, можно использовать в качестве исходного приближения для решения в следующий момент времени. Если за рассматриваемый промежуток времени завихренность меняется не сильно, то тогда итерационный процесс должен быстро сходиться.

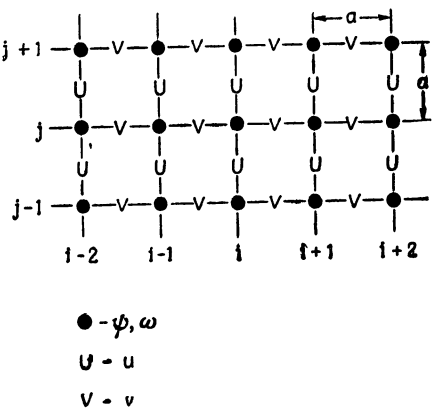


Рис. 1. Положение на расчетной сетке точек, в которых определяются различные переменные.

Заметим, что уравнение (12) будет удовлетворяться по-прежнему, если ко всем значениям ψ добавить некоторую постоянную величину. Имея это в виду, зададим в некоторой точке поля значение $\psi=\psi_r$, от которого будем отсчитывать функцию тока. Это значение ψ_r должно иметь порядок величины $a^2|\omega|$, ожидаемый в расчетах. Если величина $a^2\omega$ мала по сравнению со значением ψ в правой части равенства (12), то тогда влияние завихренности на поле ψ может оказаться утраченным.

3. *Промежуточная сетка; физическая интерпретация определения скорости.* Предположим, что с помощью описанного выше метода получено поле ψ в момент времени $t+\delta t$. Перейдем теперь к расчету новых значений скорости, пользуясь конечно-разностными аналогами уравнений (4) и (5). Возьмем эти конечно-разностные уравнения в форме

$$u_{i,\,j+1/2}=\frac{\psi_{i,\,j+1}-\psi_{i,\,j}}{a}, \tag{13}$$

$$v_{i+1/2,\,j}=\frac{\psi_{i,\,j}-\psi_{i+1,\,j}}{a}. \tag{14}$$

Полуцелые индексы введены таким образом, что квадратная ячейка с центром, отвечающим, например, точке с индексами $i+\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$, представляет собой элементарную площадку, через которую течет жидкость. Следовательно, скорость, которую дает уравнение (13), определяется средним расходом жидкости, протекающей через вертикальные стороны квадратной ячейки. В то же время скорость, которую дает уравнение (14), определяется средним расходом жидкости, протекающей через горизонтальные стороны этой ячейки.

Уравнение неразрывности (3) можно выразить в конечно-разностной форме следующим образом:

$$u_{i+1,\, j+1/2} - u_{i,\, j+1/2} + v_{i+1/2,\, j+1} - v_{i+1/2,\, j} = 0. \tag{15}$$

Очевидно, что уравнение (15) с учетом уравнений (13) и (14) превращается в тождество. Это обстоятельство играет очень важную роль в методе расчета, поскольку если уравнение (15) не будет удовлетворяться тождественно, то возможно возникновение источников и стоков, которые могут нарушать истинный характер течения.

В связи с формой записи уравнений (13) и (14) для расчетов по уравнению (11) потребуется введение некоторого процесса осреднения, который позволит получить скорости в точках с целыми индексами. Таким образом, будем иметь

$$u_{i,\, j} = \frac{u_{i,\, j+1/2} + u_{i,\, j-1/2}}{2}, \tag{16}$$

$$v_{i,\, j} = \frac{v_{i+1/2,\, j} + v_{i-1/2,\, j}}{2}. \tag{17}$$

С помощью надлежащего изменения индексов в формулах (16) и (17) можно найти значения скорости в других нужных узловых точках.

4. *Порядок вычислений.* После определения новых значений скорости в момент времени $t+\delta t$ все будет подготовлено к тому, чтобы возобновить процесс расчета, который опять начинается с уравнения вихря. Описанный порядок вычислений используется во всех циклах, за исключением первого цикла, в котором строится начальное решение. В большинстве приложений порядок расчета начального решения был таким: сначала вычислялась функция тока ψ, затем скорости и в последнюю очередь вихрь. Порядок, в котором строится начальное решение, не имеет особого значения. Однако важно, чтобы поля соответствовали решению, которое они представляют. Дальнейшее обсуждение начального решения читатель найдет в § 3, А.

5. *Расчет давления.* Поскольку плотность не меняется при движении, то ее не приходится вычислять. В расчетах удобно рассматривать отношение давления к плотности.

Чтобы рассчитать давление, применим тот же метод последовательных приближений, который использовался для уравнения (12). Аналогичное уравнение для нахождения давления имеет вид

$$\left(\frac{P}{\rho}\right)_{i,\,j}=\frac{1}{4}[(P/\rho)_{i+1,\,j}+(P/\rho)_{i-1,\,j}+(P/\rho)_{i,\,j+1}+(P/\rho)_{i,\,j-1}+a^2Q_{i,\,j}], \tag{18}$$

где $a^2Q_{i,\,j}$ определяется выражением

$$a^2Q_{i,\,j}=(u^2_{i+1,\,j}+u^2_{i-1,\,j}-2u^2_{i,\,j}+v^2_{i,\,j+1}+v^2_{i,\,j-1}-2v^2_{i,\,j})+$$
$$+2[(uv)_{i+1/2,\,j+1/2}-(uv)_{i-1/2,\,j+1/2}+(uv)_{i-1/2,\,j-1/2}-(uv)_{i+1/2,\,j-1/2}]\cdot \tag{19}$$

Здесь для осреднения скоростей снова служат формулы (16) и (17).

Надо заметить, что метод расчета давления не очень эффективен, поскольку здесь вторично приходится итерировать все поле. Если пытаться итерировать давление только через большие интервалы времени, то это не даст никакой выгоды, потому что в этом случае изменения, происшедшие в поле, сделают сходимость очень медленной. Полное время, которое требуется здесь для получения сходимости, будет несколько меньше, чем время, которое требуется в том случае, когда поле давления рассчитывается каждый раз одновременно с основными переменными. С другой стороны, проведенные опыты по расчету давления непосредственно с помощью конечно-разностной формы уравнений (1) и (2) не имели успеха. Поэтому можно рекомендовать опускать расчет давления во многих задачах, проводя его лишь тогда, когда давление представляет особый интерес.

В. Итерационная схема

1. *Метод Либмана.* Схема решения, которая основана на использовании уравнения (12), известна как метод Либмана. Эта схема является одной из ряда различных схем, которые предложили Том и Эйплт [10]. Выбор схемы, основанной на использовании уравнения (12), среди других возможных схем Тома и Эйплта базируется на ее простоте и на том факте, что после перехода к скоростям это уравнение получит вид

$$\omega_{i,\,j}=\frac{1}{a}(u_{i,\,j-1/2}-u_{i,\,j+1/2}+v_{i+1/2,\,j}-v_{i-1/2,\,j}), \tag{20}$$

который, очевидно, является конечно-разностным аналогом уравнения (6).

Допустим, что исходное приближение для расчета поля функции ψ либо берется в виде некоторых числовых данных, которые вводятся в расчет, либо просто представляет собой решение, найденное в предыдущий момент времени. Тогда величины ψ рассчитывают на основе уравнения (12), обходя систематическим образом все поле. При этом всегда используют в соседних точках значения ψ, уже полученные в новой итерации. Пусть обход поля проводится в таком порядке, как читают текст на печатной странице, и пусть через h обозначается номер итерации. Если рассчитывается некоторое значение ψ внутри поля, то уравнение (12) берут в форме

$$\psi_{i,j}^{h+1} = \frac{1}{4}(\psi_{i+1,j}^{h} + \psi_{i-1,j}^{h+1} + \psi_{i,j+1}^{h+1} + \psi_{i,j-1}^{h} + a^2\omega_{i,j}). \qquad (21)$$

Здесь индексом $h+1$ отмечается новое значение величины, полученное в процессе сходимости итераций; не следует путать этот индекс с индексом, который относится к шагам по времени.

Имеются некоторые соображения о том, что использование формулы (21) будет приводить к асимметрии поля величин. Однако такая асимметрия, если она существует, будет пренебрежимой при соблюдении строгого критерия сходимости. Опыт применения метода показал, что если такая асимметрия появляется, то она всегда связана с плохо определенными граничными условиями. Обычно ошибки в корректном определении граничных условий или иные ошибки приводят к тому, что не удается получить сходимость. В некоторых приложениях полезной, однако, может оказаться произвольность обхода поля, которую нетрудно ввести в систему (см. § 3, Б).

2. *Критерий сходимости.* Для контроля сходимости интерационного процесса применялись два следующих критерия эмпирического характера:

$$\frac{|\psi^{h+1} - \psi^{h}|_m}{\psi_r} < 0{,}0002, \qquad (22)$$

$$\left| \frac{\Sigma_i \Sigma_j |\omega_{i,j}|}{(1/a^2)\,\Sigma_i \Sigma_j |4\psi_{i,j} - \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}|} - 1 \right| < 0{,}0002. \qquad (23)$$

Уравнение (22) устанавливает, что отношение модуля максимальной разности между последовательными значениями ψ к характерному значению ψ_r, от которого отсчитывается функция тока, должно быть меньше, чем некоторое заданное число. Принятое здесь число 0,0002 было получено экспериментально в результате наблюдения, что более жесткий критерий не приводил к существенному различию при решении контрольных задач.

Уравнение (23) требует, чтобы в процессе нахождения решения учитывалась сумма имеющихся вихрей. В основе этого кри-

терия лежит соображение, что когда величина $a^2|\omega|$ мала по сравнению с величинами ψ, то тогда может быть утрачено влияние завихренности на течение. Здесь прежде всего важно, чтобы используемая в расчетах характерная величина ψ, от которой отсчитывается функция тока, была величиной, сравнимой со средним значением $a^2|\omega|$, ожидаемым в решении. Если это условие выполняется, то сумма всех вихрей, входящая в критерий (23), должна оказать свое влияние на поле ψ до получения сходимости итераций. В суммы в формуле (23) не обязательно надо включать каждую расчетную точку, потому что фактически величина ω в некоторых точках может равняться нулю или быть пренебрежимо малой, однако в эти суммы должны входить одни и те же точки. На практике в этих суммах брались такие точки, в которых вихрь составлял больше, чем 0,01 от максимального значения, имеющего место в поле.

В начальном решении условие (23) не применяется (см. § 3, п. А), а здесь используется только условие (22). Во всех других случаях должны удовлетворяться оба критерия. В большинстве приложений поле ψ проверяется на сходимость после первых двадцати итераций, а затем через каждые следующие десять итераций. Определяющим обстоятельством здесь является соотношение машинного времени, потребного для обхода расчетной сетки, и машинного времени, потребного для проведения такого контроля.

Итерационный процесс потребляет значительную часть машинного времени, затрачиваемого в расчетах. Вообще говоря, скорость сходимости этого процесса тем меньше, чем больше вязкость. Это обусловлено более быстрой диффузией имеющихся в поле вихрей за данный интервал времени. Такой эффект должен увеличивать различие между решением в новый момент времени и ранее полученным решением, которое всегда берется в качестве первого приближения.

3. Начальные и граничные условия

А. Начальное решение. Ввод числовых данных

Чтобы проиллюстрировать порядок проведения расчета, рассмотрим течение жидкости между параллельными стенками (относящиеся к этому течению фотографии будут обсуждаться в § 6). Стенки образуют верхнюю и нижнюю границы; правая и левая границы соответствуют концам одного периода бесконечной периодической картины течения; таким образом, границы представляют собой одну и ту же часть жидкости в процессе расчета. Все границы и поверхности препятствий проводятся через узловые точки сетки, в которых определяются ψ и ω. Мы не

рассматривали препятствий, границы которых проходят между узловыми точками сетки. Лишь в нескольких первоначальных вариантах расчета горизонтальные границы проводились через точки, где вычислялись составляющие скорости u, а вертикальные границы — через точки, где вычислялись составляющие скорости v. Эти варианты имели недостатки в отношении правильного представления поверхностей тока течения. В методе, который применяется в настоящее время, горизонтальные граничные поверхности проводятся через точки расчета v, а вертикальные граничные поверхности — через точки расчета u.

Коэффициент вязкости, скорости движения стенок и характерное значение функции тока $\psi=\psi_r$ входят в числовые данные, которые вводятся в машину перед расчетом. Здесь будут рассматриваться только случаи, в которых обе стенки движутся в своих плоскостях со скоростью $u=u_0$. Если жидкость в начальный момент времени неподвижна, то начальное решение для ψ будет $\psi=\psi_r$ в любой точке, и тогда не нужно проводить итераций. Если же жидкость приходит мгновенно в движение, а в потоке помещено некоторое тело, тогда начальное решение надо получать с помощью итераций.

В этом случае, чтобы ускорить сходимость, надо задать для ψ некоторое приближенное решение. Мы будем считать, что препятствие симметрично относительно центральной горизонтальной линии расчетной сетки. Тогда вдоль всей этой линии и на препятствии можно задать значение $\psi=\psi_r$. Далее положим $u=u_0$ вдоль некоторой вертикальной линии расчетной сетки, не пересекающей препятствия. Теперь с помощью уравнения (13) можно определить значения ψ вдоль этой вертикальной линии, отправляясь от горизонтальной линии, на которой $\psi=\psi_r$. Наконец, все значения ψ на каждой горизонтальной линии (за исключением значений ψ на препятствии) будем считать постоянными. Сохраняя значение ψ на стенках и на препятствии фиксированными, будем теперь проводить итерации для поля ψ, как это было описано выше, удовлетворяя уравнению Лапласа для ψ во всех внутренних точках области.

Когда критерий сходимости (22) будет удовлетворен, решение для ψ считается законченным. Это решение для функции тока представляет собой решение для простого потенциального течения при относительном движении жидкости и при заданной форме препятствия и стенок. Заметим, что это справедливо также и в тривиальном случае, когда движутся только стенки. Некоторые формы препятствий требуют большой изобретательности при определении начального решения, но вообще это решение должно быть решением для безвихревого течения.

Перед началом расчета нового шага по времени надо получить начальное решение также для скоростей и вихрей. Скоро-

сти вычисляются с помощью уравнений (13) и (14), а вихри — с помощью уравнения (20). Сначала вихри будут появляться только у стенок, если жидкость неподвижна, и только у препятствия, если жидкость движется со скоростью стенки. Метод расчета вихрей на стенках и препятствиях с помощью уравнения (20) будет описан в § 3, В.

Заметим, что с учетом равенств (13) и(14) уравнения (12) и (20) будут эквивалентны. Следовательно, если уравнение (20) применять для расчета вихрей на стенках и на препятствиях, то тогда при новом использовании уравнения (12), в котором берутся эти вихри и нефиксированные значения ψ, решение не будет меняться. В этом смысле начальное решение является самосогласованным.

Б. Периодические границы

Простейший способ задания граничных условий на левой и правой границах состоит в использовании свойств периодичности. В применяемом здесь конечно-разностном методе просто принимается, что правая граница повторяет левую границу. Подчеркнем, что при таком задании в качестве переменных на границе нужно рассматривать только ω и ψ. Хотя величина u определена на этих границах, применение уравнения (13) не требует специального рассмотрения.

Левые граничные значения рассчитывают сначала, используя, когда это нужно, внутренние точки, расположенные у правой границы. Если в методе последовательных приближений применяется произвольный обход конечно-разностной сетки, то тогда правые и левые граничные точки можно рассчитывать независимо. Это позволяет последовательные обходы проводить любым желательным способом. При использовании такого способа не встречалось никаких трудностей, связанных с получением сходимости.

В. Рассмотрение стенок и препятствий

Чтобы определить граничные условия на стенке; рассмотрим жидкость, занимающую полубесконечную область над плоскостью $y=0$ и находящуюся в начальный момент времени в покое. Пусть плоскость $y=0$ является стенкой, которая в момент времени $t=0$ приходит мгновенно в движение со скоростью $u=u_0$ и продолжает двигаться дальше с той же скоростью. Дифференциальное уравнение (7) в этом случае обратится в уравнение для одномерной диффузии. Вихрь будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \tag{24}$$

Уравнение (6) примет вид

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{25}$$

а уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{26}$$

Уравнение (25) в применяемой конечно-разностной форме можно записать так:

$$\omega_0 = \frac{u_{-1/2} - u_{+1/2}}{a},$$

где $u_{-1/2}$ — фиктивное значение u непосредственно снаружи области, занятой жидкостью. Мы рассматривали два довольно очевидных способа получения значений $u_{-1/2}$. В первом способе

$$u_{-1/2} = 2u_0 - u_{+1/2},$$

и в этом случае

$$\omega_0 = \frac{2(u_0 - u_{+1/2})}{a}.$$

Во втором способе

$$u_{-1/2} = u_0, \tag{27}$$

и в этом случае

$$\omega_0 = \frac{u_0 - u_{+1/2}}{a}.$$

Излагаемая ниже схема расчета пригодна для обоих случаев; однако при попытке применения первого способа нарушалась сходимость процесса последовательных приближений.

Заметим, что при условии (27) начальное значение вихря на стенке равно

$$\omega_0 = \frac{u_0}{a}. \tag{28}$$

Определим еще значение ψ в точке, расположенной ниже оси x на расстоянии, равном одному шагу ячейки. Это значение можно найти по уравнению (13), и оно равно

$$\psi_{-1} = \psi_0 - u_0 a. \tag{29}$$

Поскольку стенка должна представлять собой линию тока ($\psi = \text{const}$), то равенство (12) примет вид

$$2\psi_0 = \psi_{-1} + \psi_{+1} + a^2\omega_0,$$

или с помощью уравнения (29)

$$\psi_0 = \psi_{+1} - u_0 a + a^2\omega_0. \tag{30}$$

Сравнивая это выражение с формулой (28), видим, что в начальный момент времени $\psi_0=\psi_{+1}$. Этот результат находится в соответствии с тем, что в начальном решении всюду $\psi=\text{const}$.

Обращаясь к уравнению (24), рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\partial\omega}{\partial t}\,dy = \nu\int_0^\infty \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\,dy,$$

или

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \omega\,dy = \nu\left[\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]_0^\infty = -\nu\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_0,$$

поскольку в любой момент времени t вихрь $\omega=0$ для любой точки, достаточно удаленной от плоскости $y=0$. Далее с помощью уравнения (25) можно записать

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \omega\,dy = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0,$$

или, используя уравнение (26),

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \omega\,dy = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0.$$

Если скорость стенки остается постоянной во времени, то имеем

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \omega\,dy = 0, \tag{31}$$

т. е. интеграл от вихря сохраняется. Кроме того, поскольку начальный вихрь определяется выражением (28), то, очевидно,

$$\int_0^\infty \omega\,dy = u_0. \tag{32}$$

Возьмем теперь сумму всех вихрей в точках вдоль положительной оси y; в любой момент времени t имеем

$$\omega_0+\omega_{+1}+\omega_{+2}+\ \dots\ +\omega_j = \frac{u_0}{a}$$

при условии $\omega_{j+1}=0$. Применяя уравнение (12) в форме

$$\omega_j = \frac{2\psi_j-\psi_{j+1}-\psi_{j-1}}{a^2},$$

используя уравнение (13) и тот факт, что $\psi_j=\psi_{j+1}$, придем опять к равенству $u_{-1/2}=u_0$. Этот результат в свою очередь делает

уравнения (29) и (30) справедливыми для любого момента времени.

Чтобы обобщить полученные результаты на полные уравнения, применяемые в методе, заметим, что сохранение вихрей требует, чтобы диффузия происходила только внутри рассчитываемой области течения. С этой целью вводят значение вихря в точке, расположенной снаружи стенки на расстоянии, равном одному шагу ячейки. Это значение задается равным значению на стенке. Тогда между двумя точками с одинаковыми значениями переменной не будет иметь место диффузия.

Что касается переноса, то, согласно уравнению (29), значение ψ, заданное снаружи стенки, будет всюду отличаться на постоянную величину от значения ψ на стенке. Отсюда следует, что соответствующая линия тока будет параллельна стенке и, следовательно, скорость $v_{-1}=0$. Таким образом, в уравнении (11) член, относящийся к переносу и содержащий значение скорости снаружи стенки, должен быть взят равным нулю. При обычном порядке расчета вихрь на стенке на следующем шаге по времени определяется по уравнению

$$\omega_{l,0}^{n+1}=\omega_{l,0}^{n}+\frac{\delta t}{2a}\left[(u\omega)_{l-1,0}^{n}-(u\omega)_{l+1,0}^{n}-(v\omega)_{l,+1}^{n}\right]+$$
$$+\frac{\nu\,\delta t}{a^2}\left(\omega_{l+1,0}^{n}+\omega_{l-1,0}^{n}+\omega_{l,+1}^{n}-3\omega_{l,0}^{n}\right). \quad (33)$$

Это уравнение записано для жидкости, расположенной над стенкой. Аналогичное уравнение применяется и для жидкости, находящейся ниже стенки.

Для определения функции тока на стенке используется уравнение (30), которое видоизменяется, чтобы обеспечить выполнение условия, что стенка есть линия тока. В применяемой здесь схеме значения ψ, полученные по формуле (30), осредняют по всей длине стенки и задают это среднее значение как значение ψ на стенке. Такое значение ψ определяют на каждой итерации перед каждым обходом внутренних точек. Таким образом, значения ψ на стенке сводятся к одному и тому же значению на всей длине стенки, но при этом они могут регулироваться соответственно условиям течения внутри области. Аналогичная схема применяется и к определению ψ на верхней стенке.

Отметим, что функция тока ψ на стенке будет постоянна и будет соответствовать вихрю лишь в среднем. Чтобы получить локальное соответствие между ψ и ω и в любой точке, надо обратить уравнение (30) и найти из него величину ω на стенке по полученному решению для ψ. Этот пересчет ω на движущейся стенке имеет результатом индуцирование вихря там, где поток не параллелен стенке. В этой связи надо рассмотреть надлежащим образом препятствие.

Рассмотрим неподвижное препятствие в потоке жидкости. Граница препятствия, как известно, должна быть связана с некоторой линией тока, т. е. на препятствии ψ должно иметь постоянное значение. Задание условий $u=v=0$ на границе препятствия находится в соответствии с указанным требованием, как это видно из уравнений (13) и (14). Положим, что на препятствии ψ равно характерному значению ψ_r. После этого необходимо выяснить, как надо поступить с вихрем. Уравнение вихря дает только скорость изменения вихря во времени, обусловленную лишь диффузией или переносом в некоторой точке. Следовательно, возникновение вихря вследствие относительного движения твердого тела и примыкающей к нему жидкости не должно зависеть от уравнения вихря. Поэтому при рассмотрении препятствия здесь применяют такой же способ расчета, как при определении начального решения.

Пусть итерации проводятся при значении $\psi=\psi_r$ на препятствии. После того как достигнута сходимость и рассчитаны скорости, для определения ω на препятствии служит уравнение (20). Этот способ расчета, как и при определении начального решения, дает окончательный результат для этой переменной, который не будет изменяться, если ψ будет снова итерироваться. Это справедливо и без требования $\psi=\psi_r$ на препятствии.

Определение вихря ω на препятствии требует дополнительного этапа в обычном порядке проведения расчета. Поскольку определение ω на препятствии аналогично локальным поправкам, проводимым на движущихся стенках, то эти вычисления выполняются в одной и той же части программы расчета. Вихрям, развивающимся на препятствии, дают возможность диффундировать на следующем шаге по времени, применяя обычным образом уравнение (11) в смежных точках. На препятствии уравнение (20) используется без какого-либо специального рассмотрения, если надлежащим образом заданы скорости в точках расчетной сетки внутри препятствия. Однако для этого необходимо, чтобы препятствие имело толщину по крайней мере в размер одной ячейки сетки.

Г. Граничные условия для давления

На ограничивающих стенках величина Q находится при расчете скоростей, как это было описано выше. При определении давления с помощью итераций принимается, что давление в точке снаружи стенки равно величине давления на стенке. Следовательно, по существу здесь предполагается, что градиент давления по нормали к стенке равен нулю.

Характерное значение P/ρ, от которого ведется отсчет давления, задается только в исходном приближении для начального решения, которое принимается постоянным во всем поле течения.

Характерное значение нельзя применять в итерационном процессе при рассмотренных здесь граничных условиях. Если бы P/ρ задавалось как постоянная величина в некоторой точке поля, то тогда в этой точке не принималась бы во внимание функция источника Q. Поскольку линии постоянного давления не связаны с препятствием или стенкой, то их положение нельзя задавать заранее. Из-за этого нельзя игнорировать функцию Q в какой-либо точке поля. Расчет ψ отличается в этом отношении, поскольку для него существенно, что препятствие должно быть в первую очередь линией тока независимо от имеющихся здесь вихрей.

Когда скорости заданы в точках на препятствии и внутри него, вычисление величины Q становится простым делом. Здесь применяется такая же схема расчета, как для точек внутри жидкости. Однако условие нулевого градиента давления по нормали к поверхности препятствия усложняет процесс итераций. Этот процесс можно проводить успешно, если проявлять осторожность и не делать выводов только на основании давления в рассматриваемой точке. В точке, где поверхность препятствия имеет излом под прямым углом, нельзя задавать условие нулевого градиента давления. В применяемом нами методе такие точки просто рассматриваются как точки внутри жидкости.

4. Видоизменение уравнения вихря

А. Исследование устойчивости уравнения вихря

Уравнение (11), являющееся конечно-разностным аналогом уравнения вихря, целесообразно рассмотреть в двух укороченных формах. Сначала для этого уравнения будут исследованы свойства устойчивости при отсутствии членов, относящихся к переносу, а затем при отсутствии членов, относящихся к вязкости. Тогда исследование устойчивости полного уравнения даст возможность выяснить взаимодействие свойств устойчивости, обусловленных каждым из этих факторов. Мы будем рассматривать только устойчивость, связанную с малыми возмущениями, так что эффекты второго порядка будут считаться пренебрежимо малыми. Предполагается, что возмущения относительно фактического решения обычно достаточно малы по величине, чтобы при использовании надлежащего критерия устойчивости имело место затухание. Кроме того, допустим, что если встретятся большие возмущения, то они будут влиять на полученные свойства устойчивости только в том смысле, что их действие в непосредственной близости к области неустойчивости может фактически вызвать неустойчивость. Это обстоятельство можно учесть, если в расчетах строго соблюдать ограничения, указанные критерием устойчивости.

1. *Исследование устойчивости при отсутствии переноса.* Рассмотрим уравнение

$$\omega_{i,\,j}^{n+1} - \omega_{i,\,j}^{n} = \frac{\nu\,\delta t}{a^2}\left(\omega_{i+1,\,j}^{n} + \omega_{i-1,\,j}^{n} + \omega_{i,\,j+1}^{n} + \omega_{i,\,j-1}^{n} - 4\omega_{j,\,i}^{n}\right). \quad (34)$$

Предположим, что член ряда Фурье для решения уравнения (34) имеет форму

$$\omega_{i,\,j}^{n} = \omega_0 r^n e^{i\,(k_1 i + k_2 j)}. \quad (35)$$

Здесь величина i перед скобками есть мнимая единица $i=\sqrt{-1}$. Волновое число

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$$

относится к составляющей колебаний в направлении x, где λ_1 — длина волны, измеряемая в единицах индекса i. Аналогично k_2 представляет собой волновое число для составляющей колебаний в направлении y. Характерная амплитуда умножена здесь на величину r^n, где r — множитель, характеризующий скорость роста амплитуды, а n — индекс, относящийся к шагу по времени.

Чтобы колебательная часть решения оставалась ограниченной, когда n становится большим, должно быть

$$|r| \leqslant 1. \quad (36)$$

Подстановка выражения (35) в уравнение (34) дает

$$r = 1 + \frac{2\nu\,\delta t}{a^2}(\cos k_1 + \cos k_2 - 2). \quad (37)$$

Из уравнения (37) видно, что условие $r \leqslant 1$ удовлетворяется всегда, поскольку $2\nu\delta t/a^2 > 0$. Рассмотрим случай $r \geqslant -1$, т. е

$$1 + \frac{2\nu\,\delta t}{a^2}(\cos k_1 + \cos k_2 - 2) \geqslant -1,$$

или

$$\frac{\nu\,\delta t}{a^2}(2 - \cos k_1 - \cos k_2) \leqslant 1. \quad (38)$$

Максимум левой части неравенства (38) получается при $k_1 = k_2 = \pi$. В этом случае для устойчивости должно выполняться условие

$$\frac{\nu\,\delta t}{a^2} \leqslant \frac{1}{4}. \quad (39)$$

2. *Исследование устойчивости при нулевой вязкости.* Если вязкость положить равной нулю, то уравнение (11) примет вид

$$\omega_{i,\,j}^{n+1} - \omega_{i,\,j}^{n} = \frac{\delta t}{4a}\left[\left(u_{i-1,\,j-1/2}^{n} + u_{i-1,\,j+1/2}^{n}\right)\omega_{i-1,\,j}^{n} - \right.$$
$$- \left(u_{i+1,\,j-1/2}^{n} + u_{i+1,\,j+1/2}^{n}\right)\omega_{i+1,\,j}^{n} + \left(v_{i-1/2,\,j-1}^{n} + v_{i+1/2,\,j-1}^{n}\right)\omega_{i,\,j-1}^{n} -$$
$$\left. - \left(v_{i-1/2,\,j+1}^{n} + v_{i+1/2,\,j+1}^{n}\right)\omega_{i,\,j+1}^{n}\right]. \quad (40)$$

Уравнение (40) нелинейное, но поскольку рассматриваются только очень малые возмущения, то для исследования свойств устойчивости законно линеаризовать это уравнение. Итак, если для скоростей рассматривать возмущения первого порядка в форме

$$u^n_{i,\,j} = u_0(1+\delta^n_{i,\,j}), \quad \delta \ll 1$$

и

$$v^n_{i,\,j} = v_0(1+\zeta^n_{i,\,j}), \quad \zeta \ll 1,$$

то тогда с помощью уравнения (20) и после некоторых преобразований уравнение (40) примет вид

$$\omega^{n+1}_{i,\,j} - \omega^n_{i,\,j} = \frac{\delta t}{2a}\left[u_0(\omega^n_{i-1,\,j} - \omega^n_{i+1,\,j}) + v_0(\omega^n_{i,\,j-1} - \omega^n_{i,\,j+1})\right]. \quad (41)$$

Рассмотрим теперь член решения (35) применительно к линеаризованному уравнению (41). Это приводит к следующему выражению:

$$r = 1 - \frac{i\,\delta t}{a}(u_0 \sin k_1 + v_0 \sin k_2). \quad (42)$$

Таким образом, условие ограниченности этого члена решения требует, чтобы

$$|r|^2 = r\bar{r} \leqslant 1, \quad (43)$$

т. е. r должно быть ограничено единичной окружностью в комплексной плоскости. Итак, для устойчивости должно выполняться неравенство

$$\frac{\delta t^2}{a^2}(u_0 \sin k_1 + v_0 \sin k_2)^2 \leqslant 0.$$

Однако это неравенство не может быть удовлетворено для всех требуемых k_1 и k_2. Отсюда следует вывод, что при отсутствии вязкости уравнение вихря является безусловно неустойчивым.

3. *Исследование устойчивости полного уравнения.* Для полного уравнения (11) можно сразу же записать равенство, аналогичное равенству (42). Оно будет иметь вид

$$r = 1 + \frac{2\nu\,\delta t}{a^2}(\cos k_1 + \cos k_2 - 2) - \frac{i\,\delta t}{a}(u_0 \sin k_1 + v_0 \sin k_2). \quad (44)$$

Предварительно для упрощения уравнения (44) можно положить $k_1 = k_2 = k$. Полученный при этом критерий может быть менее строгим, чем истинный критерий. В дальнейшем будет показано, что такое упрощенное исследование достаточно для наших целей.

Запишем

$$r\bar{r} = [1 + 4\alpha(\cos k - 1)]^2 + \beta^2(1 - \cos^2 k), \quad (45)$$

где

$$\alpha = \frac{\nu\,\delta t}{a^2}, \tag{46}$$

$$\beta = \frac{|u_0| + |v_0|}{a}\,\delta t. \tag{47}$$

В формуле (47) берутся абсолютные значения для того, чтобы величина β не обращалась в нуль при $u_0 = -v_0$. Можно доказать, что в таком случае следовало бы полагать $k_1 = -k_2$.

Будем искать максимум функции $r\bar{r}$ в зависимости от $\cos k$. Тогда

$$\frac{d(r\bar{r})}{d(\cos k)} = 8\alpha(1 - 4\alpha) + 2(16\alpha^2 - \beta^2)\cos k$$

и

$$\frac{d^2(r\bar{r})}{d(\cos k)^2} = 2(16\alpha^2 - \beta^2).$$

Очевидно, что максимум имеет место только в том случае, если

$$\beta > 4\alpha.$$

Максимум или минимум достигается при

$$\cos k = \frac{4\alpha(1 - 4\alpha)}{\beta^2 - 16\alpha^2}$$

и равен

$$(r\bar{r}) = \frac{\beta(\beta^2 + 1 - 8\alpha)}{\beta^2 - 16\alpha^2}.$$

Условие (43) требует, чтобы

$$(\beta^2 - 4\alpha)^2 \leqslant 0$$

при $\beta > 4\alpha$. Это условие не может быть выполнено. Отсюда мы заключаем, что в первую очередь следует иметь

$$\beta \leqslant 4\alpha. \tag{48}$$

Хотя максимум не достигается, если неравенство (48) удовлетворяется, надо рассмотреть еще крайние значения $\cos k$. Если $\cos k = 1$, то тогда $r\bar{r} = 1$ и устойчивость имеет место. Если же $\cos k = -1$, то придем к условию устойчивости (39), полученному при отсутствии переноса. Таким образом, мы имеем двойное условие устойчивости, определяемое выражениями (39) и (48).

Исследуем теперь критерии устойчивости в отношении ограничений, которые они могут наложить на применимость уравнения (11). С этой целью рассмотрим течение около препятствия, находящегося в потоке жидкости. Число Рейнольдса для препятствия определяется так:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_f d}{\nu},$$

где d — размер препятствия в направлении, перпендикулярном к направлению набегающего потока со скоростью u_f. Величину u_f можно взять как максимальную скорость, которая входит в условие (48). Тогда условие (48) примет вид

$$\mathrm{Re} \leqslant 4\frac{d}{a}. \tag{49}$$

Мы интересуемся здесь числами Рейнольдса, большими, чем 40, поскольку при $\mathrm{Re}<40$ решение, вообще говоря, достигает установившегося состояния и может быть изучено более простыми средствами. Условие (49) показывает, что если рассматриваются большие числа Рейнольдса, то размер d должен быть большим по сравнению с величиной шага сетки a. Простые расчеты показывают, что это требование приводит к ограничению на объем памяти машины, необходимый для хранения переменных.

Б. Уравнение вихря с центральными разностями по времени

Критерий устойчивости (39) для уравнения (11) при отсутствии переноса не накладывает каких-либо ограничений на малость значений ν; следовательно, в этом случае величина δt может быть взята большой. Если же учитывать члены, относящиеся к переносу, то в соответствии с условием (48) должно быть

$$\nu \geqslant \frac{(|u_0|+|v_0|)\,a}{4}.$$

Отсюда видно, что плохая устойчивость полного уравнения является следствием применяемой конечно-разностной формы (40). Поэтому рассмотрим конечно-разностное уравнение, аналогичное уравнению (40), но с центральными разностями по времени, а именно

$$\omega^{n+1}_{i,j} - \omega^{n-1}_{i,j} = \frac{\delta t}{2a}\Big[\big(u^n_{i-1,\,j-1/2} + u^n_{i-1,\,j+1/2}\big)\,\omega^n_{i-1,\,j} - \big(u^n_{i+1,\,j-1/2} + u^n_{i+1,\,j+1/2}\big)\,\omega^n_{i+1,\,j} + \big(v^n_{i-1/2,\,j-1} + v^n_{i+1/2,\,j-1}\big)\,\omega^n_{i,\,j-1} - \big(v^n_{i-1/2,\,j+1} + v^n_{i+1/2,\,j+1}\big)\,\omega^n_{i,\,j+1}\Big]. \tag{50}$$

Повторяя исследование, проведенное для уравнения (40), можно записать уравнение, которое аналогично уравнению (42) и получается для линеаризованной формы уравнения (50),

$$r^2 + \frac{i2\,\delta t}{a}(u_0 \sin k_1 + v_0 \sin k_2)\,r - 1 = 0$$

или

$$r = -i\gamma \pm \sqrt{1-\gamma^2},$$

где

$$\gamma = \frac{\delta t}{a}(u_0 \sin k_1 + v_0 \sin k_2).$$

Если $\gamma^2 \leqslant 1$, то

$$|r|^2 = \gamma^2 + 1 - \gamma^2 = 1,$$

и условие ограниченности решения будет удовлетворяться всегда. Поскольку имеем $|r| = 1$ независимо от k_1 и k_2, то при $\gamma^2 \leqslant 1$ малые возмущения не будут ни возрастать, ни затухать. Если же, например, $\gamma > 1$, тогда надо потребовать, чтобы

$$-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1} \geqslant -1,$$

а это приводит к противоречию

$$\gamma \leqslant 1,$$

и, следовательно, для устойчивости должно быть

$$\gamma^2 \leqslant 1.$$

Такой же вывод получается и в случае, когда $\gamma < -1$.

Итак, видно, что форма уравнения (50) с центральными разностями в противоположность уравнению (40) обязательно имеет область устойчивости. Здесь может возникнуть идея добавить в уравнение (50) такие же диффузионные члены, какие входят в уравнение (11). Однако мы должны отослать читателя к книге Рихтмайера [8], где на стр. 108, в примере 7, указывается, что диффузионное уравнение в форме с центральными разностями, которая предлагается здесь, является безусловно неустойчивым. Следовательно, добавление диффузионных членов к уравнению с нейтральной устойчивостью может только привести к полному уравнению, которое также будет безусловно неустойчивым.

Другая форма диффузионных членов применяется в методе Дюфорта и Френкеля [1] и также обсуждается в книге Рихтмайера. Согласно этому методу, уравнение диффузии можно записать в такой конечно-разностной форме

$$\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1} = \frac{2\nu\,\delta t}{a^2}\left[\omega_{i+1,j}^{n} + \omega_{i-1,j}^{n} + \omega_{i,j+1}^{n} + \omega_{i,j-1}^{n} - 2\omega_{i,j}^{n-1} - 2\omega_{i,j}^{n+1}\right]. \quad (51)$$

Это уравнение, подобно соответствующему одномерному уравнению, безусловно устойчиво к малым возмущениям, что нетрудно проверить с помощью метода, описанного в § 4, А, 1.

Итак, можно построить полное уравнение, с помощью которого явным образом можно вычислять значения вихря на новом шаге по времени. Детальное исследование этого уравнения не проводилось, но опыт его применения показывает, что это уравнение будет устойчиво при условии $\gamma^2 \leqslant 1$.

Мы рассматривали три различные формы уравнения вихря с центральными разностями по времени. Они отличались только членами, относящимися к переносу. Первая форма представ-

ляет собой просто комбинацию уравнений (50) и (51), т. е.

$$\omega_{i,j}^{n+1}=\left(\frac{1}{1+\frac{4\nu\,\delta t}{a^2}}\right)\left\{\omega_{i,j}^{n-1}+\frac{\delta t}{a}\left[(u\omega)_{i-1,j}^{n}-(u\omega)_{i+1,j}^{n}+\right.\right.$$
$$\left.+(v\omega)_{i,j-1}^{n}-(v\omega)_{i,j+1}^{n}\right]+\frac{2\nu\,\delta t}{a^2}\left[\omega_{i+1,j}^{n}+\omega_{i-1,j}^{n}+\omega_{i,j+1}^{n}+\right.$$
$$\left.\left.+\omega_{i,j-1}^{n}-2\omega_{i,j}^{n-1}\right]\right\}, \qquad (52)$$

где средние значения скоростей в определенных точках вычисляются, как и раньше, по формулам (16) и (17).

Во второй форме уравнения вихря члены, относящиеся к переносу, имеют неконсервативный вид

$$\omega_{i,j}^{n+1}=\left(\frac{1}{1+\frac{4\nu\,\delta t}{a^2}}\right)\left\{\omega_{i,j}^{n-1}+\frac{\delta t}{a}\left[u_{i,j}^{n}(\omega_{i-1,j}^{n}-\omega_{i+1,j}^{n})+\right.\right.$$
$$\left.+v_{i,j}^{n}(\omega_{i,j-1}^{n}-\omega_{i,j+1}^{n})\right]+\frac{2\nu\,\delta t}{a^2}\left[\omega_{i+1,j}^{n}+\omega_{i-1,j}^{n}+\omega_{i,j+1}^{n}+\right.$$
$$\left.\left.+\omega_{i,j-1}^{n}-2\omega_{i,j}^{n-1}\right]\right\}. \qquad (53)$$

Это уравнение получено из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right),$$

которое отличается от уравнения (7) тем, что в нем использовано уравнение (3) для представления в новой форме членов, относящихся к переносу. Характерной особенностью консервативного уравнения является то обстоятельство, что при суммировании его по всей расчетной сетке величины, относящиеся к внутренним точкам, попарно уничтожаются. Уравнение (52) обладает этим свойством в отношении членов, соответствующих переносу, а уравнение (53) не обладает. Мы рассматривали уравнение (53) потому, что оно придает расчетам простоту и поэтому им удобно пользоваться. Однако имеющийся опыт показывает, что при этом возникают ошибки, которые обусловлены остаточными членами, появляющимися при суммировании уравнения во внутерних точках расчетной сетки [2]. Хотя и не было доказано, что такие ошибки будут иметь существенное значение, тем не менее при использовании уравнения (53) следует проявлять осторожность.

Последняя, третья форма уравнения вихря такова:

$$\omega_{i,j}^{n+1}=\left(\frac{1}{1+\frac{4\nu\,\delta t}{a^2}}\right)\left\{\omega_{i,j}^{n+1}+\frac{2\,\delta t}{a}\left[(u\omega)_{i-1/2,j}^{n}-\right.\right.$$
$$\left.-(u\omega)_{i+1/2,j}^{n}+(v\omega)_{i,j-1/2}^{n}-(v\omega)_{i,j+1/2}^{n}\right]+$$
$$\left.+\frac{2\nu\,\delta t}{a^2}\left[\omega_{i+1,j}^{n}+\omega_{i-1,j}^{n}+\omega_{i,j+1}^{n}+\omega_{i,j-1}^{n}-2\omega_{i,j}^{n-1}\right]\right\}. \qquad (54)$$

Здесь

$$u_{i-1/2,\ j}=\frac{1}{4}(u_{i-1,\ j+1/2}+u_{i-1,\ j-1/2}+u_{i,\ j+1/2}+u_{i,\ j-1/2}), \quad (55)$$

$$v_{i,\ j-1/2}=\frac{1}{4}(v_{i-1/2,\ j}+v_{i+1/2,\ j}+v_{i-1/2,\ j-1}+v_{i+1/2,\ j-1}), \quad (56)$$

$$\omega_{i-1/2,\ j}=\frac{\omega_{i-1,\ j}+\omega_{i,\ j}}{2}. \quad (57)$$

Остальные величины, входящие в уравнение (54), получаются соответствующей перестановкой индексов в выражениях (55)—(57).

Именно в форме (54) уравнение для вихря применялось в приложениях, которые будут рассмотрены в § 6. При вычислении вихря на стенке, когда жидкость расположена ниже стенки, можно, согласно § 3, В, записать

$$\omega^{n+1}_{i,\ j_0}=\left(\frac{1}{1+\dfrac{4\nu\,\delta t}{a^2}}\right)\left\{\omega^{n-1}_{i,\ j}+\frac{2\,\delta t}{a}\left[(u\omega)^n_{i-1/2,\ j_0}-(u\omega)^n_{i+1/2,\ j_0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(v\omega)^n_{i,\ j-1/2}\right]+\frac{2\nu\,\delta t}{a^2}\left[\omega^n_{i+1,\ j_0}+\omega^n_{i-1,\ j_0}+\omega^n_{i,\ j_0}+\omega^n_{i,\ j_0-1}-2\omega^{n-1}_{i,\ j}\right]\right\}, \quad (58)$$

где j_0 — индекс в направлении y, соответствующий верхней стенке. Тогда уравнение (55), выраженное через скорость на стенке u_0, примет вид

$$u_{i-1/2,\ j_0}=\frac{1}{4}(2u_0+u_{i-1,\ j_0-1/2}+u_{i,\ j_0-1/2}).$$

В соответствии с рекомендацией, данной в § 3, В, в диффузионной части уравнения (58) значение $\omega^n_{i,\ j+1}$ заменено на соответствующее значение на стенке в момент времени, отмеченный индексом n.

Мы показали, что при отсутствии вязкости, когда для расчета вихря берется уравнение с центральными разностями по времени, должно быть наложено некоторое ограничение на величину δt. Однако если рассматривается только диффузия, то устойчивая конечно-разностная форма уравнения не ставит ограничений относительно величины δt. Опыт показывает, что условия, определяющие точность решения устойчивых уравнений, очень близки к условиям, которые дает критерий устойчивости для соответствующих неустойчивых уравнений [5]. Поэтому мы ставим два условия:

$$\frac{|u_0|+|v_0|}{a}\delta t\leqslant 1, \quad \frac{\nu\,\delta t}{a^2}\leqslant\frac{1}{4}. \quad (59)$$

Если всегда брать наибольшее из возможных значений δt, которые получаются по условиям (59), то оказывается, что в

рассматриваемых приложениях это дает незначительную выгоду. Ранее отмечалось, что определяющую роль в отношении быстроты проведения расчетов играет итерационный процесс. Было замечено, что уменьшение величины δt наполовину обычно почти удваивает быстроту сходимости данного решения. Причина этого состоит в том, что величина, на которую изменяется решение за один шаг по времени, определяет, насколько хорошо можно задать исходное приближение для решения на следующем шаге. Таким образом, в приложениях без значительного увеличения машинного времени можно применять критерии в два раза более строгие, чем критерии (59).

B. Краткая сводка применяемых в расчете уравнений

Предположим, что начальное решение задано в виде функций ω, ψ, u и v. Проведем вычисление вихрей в новый момент времени $t=\delta t$, применяя уравнение

$$\omega_{i,j}^{n+1}=\left(\frac{1}{1+\frac{4\nu\,\delta t}{a^2}}\right)\left\{\omega_{i,j}^{n-1}+\right.$$

$$+\frac{2\,\delta t}{a}\left[(u\omega)_{i-1/2,\,j}^{n}-(u\omega)_{i+1/2,\,j}^{n}+(v\omega)_{i,\,j-1/2}^{n}-(v\omega)_{i,\,j+1/2}^{n}\right]+$$

$$\left.+\frac{2\nu\,\delta t}{a^2}\left[\omega_{i+1,\,j}^{n}+\omega_{i-1,\,j}^{n}+\omega_{i,\,j+1}^{n}+\omega_{i,\,j-1}^{n}-2\omega_{i,\,j}^{n-1}\right]\right\}.$$

Величины скоростей и вихрей, которые нужны для этого расчета, получаются осреднением по значениям, определяемым в ближайших точках в соответствии с выражениями (55)—(57). Вихри на препятствии не изменяются на этом этапе вычислений. Однако граничным значениям, в частности на ограничивающих стенках [см. уравнение (58)], должно быть уделено специальное внимание. Для первого шага по времени принимается $\omega^{n-1}=\omega^{n}$.

После окончания расчета новой системы значений для поля вихрей рассчитывается поле ψ на новом шаге по времени с помощью итерационного процесса, основанного на применении уравнения

$$\psi_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\psi_{i+1,\,j}+\psi_{i-1,\,j}+\psi_{i,\,j+1}+\psi_{i,\,j-1}+a^2\omega_{i,\,j}\right).$$

Здесь значения ω берутся на новом шаге по времени. Значение ψ на препятствии задается равным постоянному характерному значению $\psi=\psi_r$. Значения ψ на стенке получаются осреднением отдельных значений, определенных с помощью видоизмененных форм указанного уравнения. Например, для жидкости, находящейся сверху стенки, применяется уравнение в форме (30). Значения ψ на стенках вычисляются перед каждым обходом внутренних точек.

Когда итерируемые значения ψ в поле сходятся настолько, что критерии (22) и (23) удовлетворяются, тогда можно найти новые величины скоростей по формулам

$$u_{i,\ j-1/2} = \frac{\psi_{i,\ j} - \psi_{i,\ j-1}}{a},$$

$$v_{i-1/2,\ j} = \frac{\psi_{i-1,\ j} - \psi_{i,\ j}}{a}.$$

Теперь можно определить значения вихря на препятствии для нового момента времени с помощью уравнения

$$\omega = \frac{1}{a}(u_{i,\ j-1/2} - u_{i,\ j+1/2} + v_{i+1/2,\ j} - v_{i-1/2,\ j}).$$

Значения вихря на стенке надо пересчитать, чтобы они соответствовали полю ψ в локальном смысле. Например, для нижней стенки это делается разрешением уравнения (30) относительно ω.

После окончания этого этапа описанный процесс расчета повторяется для нового шага по времени.

5. Функционалы движения. Проверка метода

А. Расчет количества движения

Рассмотрим в качестве элемента жидкости квадратную ячейку, длина стороны которой равна a. Тогда для этого элемента изменение количества движения в направлении x выражается так:

$$\frac{\delta M_x}{\delta t} = \rho a^2 \frac{\delta u}{\delta t},$$

где δu — изменение скорости элемента жидкости за промежуток времени δt. Предполагается, что в направлении оси z элемент имеет единичную длину.

В соответствии с уравнением вихря с центральными разностями по времени запишем изменением суммарного количества движения жидкости в направлении x за один цикл по времени, отмеченный индексом n,

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta M_x}{\delta t}\right)^n_{\text{сумм}} = \frac{a^2}{2\,\delta t} \sum_{i=0}^{i_0-1} \sum_{j=0}^{j_0-1} (u^{n+1}_{i+1/2,\ j+1/2} - u^{n-1}_{i+1/2,\ j+1/2}). \qquad (60)$$

Входящие сюда скорости берутся как средние значения на вертикальных сторонах квадратной ячейки. Верхние пределы у сумм в равенстве (60) показывают, что эти суммы охватывают

все ячейки. С помощью уравнения (13) и соображений относительно периодичности можно записать уравнение (60) в виде

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta M_x}{\delta t}\right)^n_{\text{сумм}} = \frac{a}{2\,\delta t}\sum_{i=0}^{i_0-1}\left(\psi^{n+1}_{i,\,j_0} - \psi^{n+1}_{i,\,0} - \psi^{n-1}_{i,\,j_0} + \psi^{n-1}_{i,\,0}\right). \quad (61)$$

Б. Расчет сил на стенке

Коэффициент вязкости жидкости μ можно определить экспериментально, используя выражение

$$F_t = \mu \frac{du}{dy} A, \quad (62)$$

где F_t — тангенциальная сила, с которой движущаяся стенка воздействует на жидкость, прилегающую, например, к стенке снизу; A — площадь соприкосновения стенки с жидкостью; du/dy — градиент скорости тангенциального течения у стенки.

Нашей целью является вычисление с помощью уравнения (62) силы, действующей на жидкость. Взяв единичное расстояние в направлении оси z, можем записать

$$F_t = \rho\nu \frac{du}{dy} L,$$

где L — длина канала, $\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Используя уравнение (25), можем далее записать

$$\frac{F_t}{\rho} = -\nu\omega L. \quad (63)$$

Рассмотрим пример, в котором жидкость неподвижна, но нижняя стенка внезапно в момент времени $t=0$ приходит в движение со скоростью $u=u_0$. Возьмем сумму сил, действующих по всей длине расчетной сетки. Тогда полная сила, действующая на жидкость, определится по формуле

$$\frac{F_t}{\rho} = \nu a \sum_{i=0}^{i_0-1} \omega_{i+1/2,\,0}. \quad (64)$$

Здесь средние значения ω можно брать в соответствии с уравнением (57).

В. Аналитическое решение

Аналитическое решение упомянутого выше примера было дано Стоксом [11]. В этом случае профиль скорости в жидкости имеет вид

$$u = u_0\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{y/2\sqrt{\nu t}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz\right),$$

где u_0 — скорость стенки. Вихрь в этой задаче одномерной диффузии равен

$$\omega = -\frac{du}{dy} = \frac{u_0}{\sqrt{\pi\nu t}} e^{-y^2/4\nu t}. \tag{65}$$

Напомним, что такая же задача рассматривалась в § 3, В при определении граничных условий на стенке. Там брались значения скорости в точках, расположенных ниже стенки на расстоянии, равном половине размера ячейки, причем эти значения задавались как $u_{-1/2}=u_0$. Фактически это означает, что в расчетах конечно-разностным методом стенка рассматривается расположенной на расстоянии $a/2$ ниже плоскости $y=0$. Имея это в виду, получим значение вихря на стенке

$$\omega_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\pi\nu t}} e^{-a^2/16\nu t}. \tag{66}$$

Мы преобразовали аналитическое решение таким образом, чтобы стенка соответствовала эффективному положению, которое она занимает в расчетах конечно-разностным методом. Применяя выражение (63), можно получить теперь аналитическое выражение для силы, создаваемой стенкой,

$$\frac{F_t}{\rho} = -\frac{\nu L u_0}{\sqrt{\pi\nu t}} e^{-a^2/16\nu t}. \tag{67}$$

Г. Сравнение аналитического и численного решений

Сравнение аналитического решения с численным расчетом можно проводить вплоть до того времени, когда скажется влияние верхней стенки. Это сравнение представлено на рис. 2. В начальный период времени величина силы, полученная численным расчетом, оказывается неточной, потому что для применимости уравнения (64) необходимо, чтобы пограничный слой на стенке был большим по сравнению с размером ячейки. Однако после примерно 20 шагов по времени достигается хорошее соответствие аналитического и численного результатов. Если шаг δt сохранять постоянным, а величину ν увеличивать, то хорошее соответствие будет достигаться при меньшем числе шагов по времени при условии, что не нарушается критерий

$$\frac{\nu\,\delta t}{a^2} < \frac{1}{4}.$$

Такое же важное значение имеет соответствие между изменением количества движения и силой, рассчитанной численным методом (рис. 2). Это соответствие, имеющее место уже в начальные моменты времени, указывает, что сила со стороны стенки приводит жидкость в движение надлежащим образом.

Полученное здесь хорошее соответствие важно с точки зрения расчета силы сопротивления препятствия, расположенного в потоке жидкости.

Профили вихря, полученные численным методом, также сравнивались с аналитическим решением (65) [4]. Здесь имело место прекрасное соответствие.

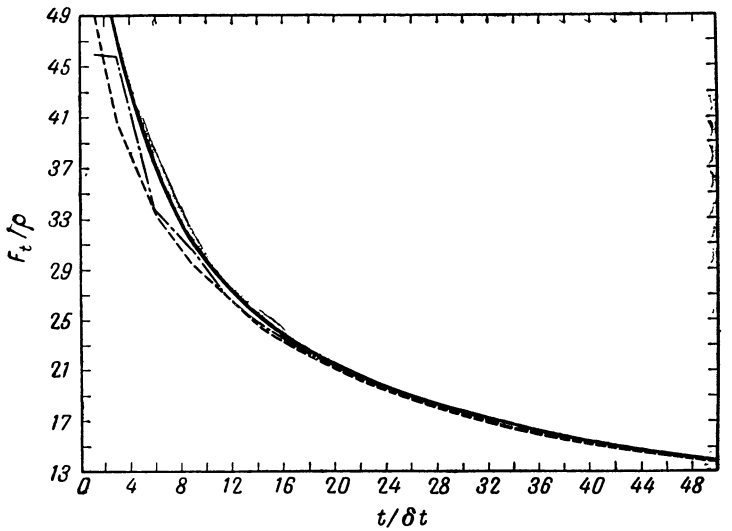


Рис. 2. Изменение тангенциальной силы, которая действует на первоначально неподвижную жидкость со стороны стенки, мгновенно приведенной в движение.

Вязкость жидкости $\nu=0{,}1333$, скорость стенки $u_0=4$, длина канала равна 14 единицам, шаг расчетной сетки $a=0{,}125$.
—— аналитическое решение для силы; — — — численное решение для силы —·—·— изменение количества движения.

Д. Определение коэффициентов сопротивления и подъемной силы из баланса сил

Коэффициент сопротивления препятствия, находящегося в потоке жидкости, выражается формулой

$$C_D=\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho u_f^2 d}, \tag{68}$$

где F_D — сила, действующая на препятствие в направлении потока, d — вертикальный размер препятствия, u_f — скорость невозмущенного потока.

Рассмотрим канал, стенки которого движутся с постоянной скоростью u_0. Пусть граничные условия на концах канала периодические, а жидкость вначале всюду движется со скоростью движения стенок. Если в такое течение поместить препятствие, то на жидкость будет действовать сила F_D в направлении, противоположном потоку, а количество движения жидкости при этом будет уменьшаться. Так как средняя скорость жидкости упадет, то стенки будут воздействовать на жидкость с тангенциальной силой в направлении их движения. Из баланса действующих сил и изменения количества движения можно рассчитать силу, приложенную к препятствию,

$$F_D = \left(\frac{\delta M_x}{\delta t}\right)_{\text{сумм}} - F_t, \tag{69}$$

причем сюда надо подставить выражение (61) и уравнение (64) в соответствующей форме.

Скорость невозмущенного потока u_f, входящая в формулу (68), в задачах рассматриваемого здесь типа не является точно определенной величиной. Она относится к течению в бесконечной области и представляет собой скорость на большом расстоянии от препятствия. Брать в качестве величины u_f скорость движения стенки u_0 было бы неправильно из-за уменьшения скорости во всей жидкости. В то время как скорость движения стенки постоянна, скорость течения уменьшается — особенно в центральной части канала. Обычно мы рассматриваем один из ряда периодических участков течения в канале, причем внутри каждого участка находится препятствие. Как только жидкость пройдет приблизительно расстояние одного участка, центральная часть жидкости начнет замедляться из-за наличия препятствия на участке, расположенном впереди. Для учета этого эффекта при применении формулы (68) мы полагаем $u_f = u_0 r$, где r — отношение скорости в некоторой характерной точке для решения в данный момент времени к соответствующей скорости для начального решения. Эта характерная точка выбирается так, чтобы она находилась непосредственно перед препятствием. Рассмотренная поправка является эмпирической, но она приводит к хорошему соответствию численных результатов с экспериментами.

Подъемную силу можно также вычислить из рассмотрения баланса сил, если известно давление на стенке. Поскольку здесь изменения суммарного количества движения не происходит, то приложенные силы должны сами находиться в равновесии. Силы, приложенные к стенкам, можно вычислить как сумму давлений, действующих на стенку на длине в одну ячейку. Следовательно, силы, с которыми жидкость воздействует на нижнюю и

верхнюю стенки, соответственно равны

$$\frac{F_н}{\rho} = -a\sum_{i=0}^{i_0-1}\left(\frac{P}{\rho}\right)_{i+1/2,\ 0},\quad \frac{F_в}{\rho} = a\sum_{i=0}^{i_0-1}\left(\frac{P}{\rho}\right)_{i+1/2,\ j_0}.$$

Тогда подъемная сила, действующая на препятствие, выразится так:

$$F_Y = -F_н - F_в.$$

Коэффициент подъемной силы можно определить по формуле

$$C_Y = F_Y/(1/2)\rho u_f^2 d.$$

Если застойная кормовая зона имеет некоторую асимметрию, то из-за влияния этой зоны на течение симметричное препятствие будет испытывать подъемную силу. Периодическая асимметрия течения возникает в том случае, когда в застойной зоне развиваются вихревые дорожки. Таким образом, течение в некоторый момент времени может, например, в области выше препятствия иметь более высокую скорость, чем в области ниже препятствия. В таком случае давление выше препятствия будет меньше, чем ниже препятствия. В результате этого на препятствие будет действовать суммарная сила, направленная вверх.

Е. Определение сопротивления и подъемной силы непосредственным вычислением их на препятствии

Знания вихрей и давления на самом препятствии, вообще говоря, должно быть достаточно, чтобы рассчитать силу сопротивления и подъемную силу. Однако опыт применения такого способа расчета оказался безуспешным. Очевидно, что для получения более детальной информации о быстро изменяющихся параметрах вблизи препятствия здесь требуется брать более мелкую расчетную сетку. В примерах, которые приводятся в § 6, препятствие имеет размер по высоте, равный только четырем ячейкам. В углах на передней кромке препятствия имеются точки с низким давлением, в то время как в центре передней кромки существует высокое давление. Вероятно, область высокого давления подходит очень близко к угловым точкам, однако расчеты конечно-разностным методом не могли дать такой картины.

Метод, в котором рассматривается баланс сил, дает хорошее совпадение с экспериментом. Это указывает на то, что в конечно-разностном методе, несмотря на трудности расчета вблизи препятствия, правильно определяются суммарные характеристики течения [3]. К сожалению, метод, в котором рассматривается баланс сил, не позволяет получить такую детальную информацию, которую могли бы дать прямые расчеты относительно отрыва в результате действия трения и давления.

6. Приложения

А. Застойная зона позади препятствия

Основное применение предложенного численного метода состоит пока в исследовании образования вихревых дорожек в застойной зоне за препятствием [3]. Начальная стадия этого исследования заключается главным образом в проверке возможности рассчитать с помощью данного метода структуру простой симметричной застойной зоны. Первые результаты расчетов действительно дали соответствующую структуру застойной зоны для малых чисел Рейнольдса, которая характеризуется наличием пары вихрей на задней стенке препятствия. Когда мы перешли к более высоким числам Рейнольдса, было замечено вытягивание застойной зоны, однако в этих первоначальных расчетах картина течения оставалась симметричной. Асимметрия, вероятно, могла бы развиться, если бы расчеты продолжались в течение очень длительного периода времени.

Более практичный способ состоял в искусственном внесении асимметрии, чтобы создать колебания в застойной зоне. К счастью, для реализации этого не требовалось принимать специальные меры. Асимметрия вводилась простым увеличением имевшихся значений вихря в трех точках на центральной линии перед препятствием. К этим значениям прибавлялся положительный вихрь, составлявший примерно одну десятую часть средней величины вихря в поле течения. На протяжении всего расчета такое изменение проводилось только один раз. Введенное возмущение вызывало очень слабую асимметрию впереди препятствия, которая быстро исчезала при малых числах Re.

При больших числах Рейнольдса такое возмущение соответственно создавало вихревую дорожку. Она возникала спустя значительное время после внесения возмущения, которое сначала проявлялось в разбалансировании пары вихрей. Колебания застойной зоны обнаруживались в первый раз примерно при числе Рейнольдса $\mathrm{Re}=50$, что находится в согласии с экспериментом. Серия последовательных графиков развития вихревой дорожки представлена на рис. 3. Число Рейнольдса в начале этой серии последовательных картин течения равнялось 200.

Графики выводились гораздо чаще, чем они приведены на рис. 3, но большинство из существенных особенностей течения отражено на представленных графиках. Первый график из этой серии (наверху слева на рис. 3) относится к моменту времени, непосредственно следующему за внесением возмущения в поток. На этой картине течения видна небольшая асимметрия впереди препятствия. На второй картине течения (в середине слева) видна пара вихрей при появившейся уже асимметрии позади пре-

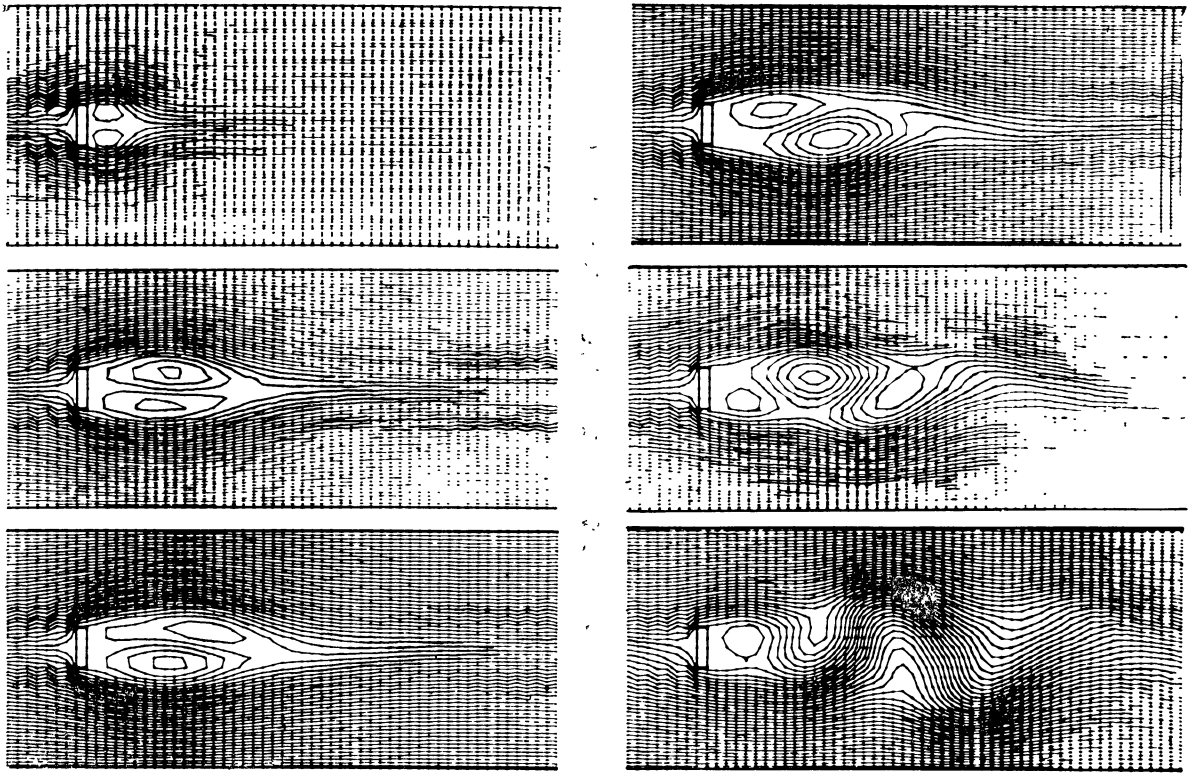


Рис. 3. Серия последовательных картин линий тока для $\mathrm{Re} = 200$.

Безразмерное время соответственно равно: $t = 0{,}211$ (верхний левый график), $t = 1{,}406$ (средний левый график), $t = 2{,}461$ (средний правый график) и $t = 2{,}988$ (нижний правый график).

пятствия. Третья картина (внизу слева) показывает начальную фазу срыва вихрей. На картинах течения в правой части рис. 3 изображено последовательное появление третьего, четвертого и пятого вихрей.

Первый вихрь, который движется вниз по течению, значительно слабее по своей интенсивности, чем последующие вихри. Это ослабление интенсивности, очевидно, происходит из-за передачи количества движения другому вихрю пары. После срыва четвертого вихря интенсивность опять ослабевает из-за влияния периодического движения, уменьшающего скорость жидкости. Это обстоятельство ясно видно на рис. 4, *а*, который представляет собой график линий тока для случая, когда препятствие движется, а стенки покоятся; этот график получен в тот же момент времени, что и последний график из серии, показанной на рис. 3. График на рис. 4, *а* получен в результате преобразования значений ψ с помощью соотношения $\psi' = \psi - u_0 y$. Представление течения в такой форме часто встречается в литературе.

На рис. 4, *б* построены «дымовые» картины движения, т. е. картины линий отмеченных частиц. Эти картины относятся к тому же моменту времени, что и последний график на рис. 3. В этом случае можно провести сравнение с результатами, наблюдаемыми в экспериментальных лабораториях, где применяется такого типа техника визуализации течения. Контрольные частицы вводятся в левой части потока со скоростью, пропорциональной средней скорости течения. Частицы перемещаются на каждом шаге по времени, при этом для них берется скорость, полученная линейной интерполяцией скоростей u и v соответственно по четырем ближайшим точкам. Чтобы ограничить объем машинной памяти, требующейся для хранения координат частиц, частицы, которые были введены в более ранние моменты времени, исключаются из рассмотрения, если весь имеющийся объем памяти исчерпан. Если некоторая частица выходит из рассматриваемого поля течения, то соответствующий ей объем памяти также освобождается для новых вводимых частиц.

Наконец, на рис. 4, *в* показаны линии постоянного давления, также относящиеся к тому же моменту времени, что и последний график на рис. 3. Сравнение с последним графиком на рис. 3 позволяет выявить области низкого и высокого давлений. Области высокого давления приблизительно совпадают с областями, где жидкость тормозится, т. е. где линии тока наименее уплотнены. Напротив, области низкого давления примерно соответствуют областям, где линии тока наиболее уплотнены, т. е. областям, где скорости велики. Препятствие на рис. 4, *в* несколько затемнено линиями постоянного давления, соответствующими двум очень низким значениям давления в углах на передней кромке препятствия.

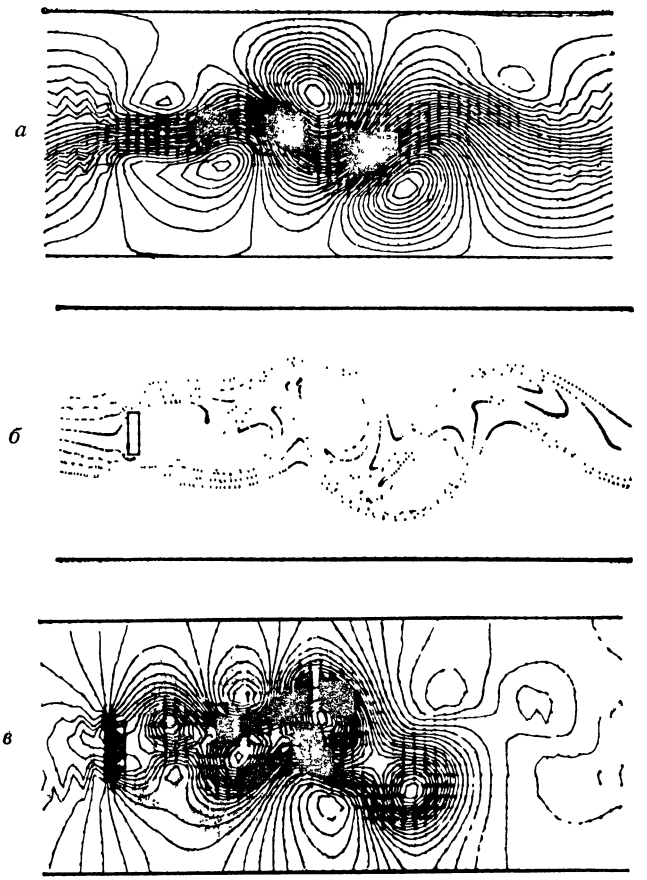


Рис. 4.

а — картина линий тока (график перестроен для случая, когда стенки неподвижны); *б* — картина линий отмеченных частиц; *в* — линий постоянного тока давления. Расчет тот же, что на рис. 3, $t = 2{,}988$.

На графиках давления интересно наблюдать развитие парных областей низкого и высокого давлений, соответствующих каждому сорвавшемуся вихрю.

Расчеты проводились до значений чисел Рейнольдса, равных 6000. Сходимость решения здесь достигалась так же просто, как при малых числах Рейнольдса. Однако сомнительно, чтобы в случае больших чисел Рейнольдса изменение параметров могло быть правильно представлено с помощью применявшейся грубой расчетной сетки. Кроме того, здесь в области передней кромки препятствия развивалась видимая неустойчивость вто-

рого порядка в дифференциальных уравнениях. Эта неустойчивость нарастает медленно, однако из-за периодических граничных условий возмущенная область влияет обратно, вглубь застойной зоны. Такое возмущение заметно даже при числе Рейнольдса $Re=200$, как это можно видеть на показанных здесь рисунках. Однако это возмущение будет менее сильным, если препятствие взять более крупным по сравнению с размером ячейки.

Делались некоторые попытки устранить неустойчивость расчетов в протяженных застойных зонах. Для этого на левой границе ставилось условие равномерного набегающего потока, а на правой границе условие непрерывности решения. В отношении сходимости здесь был достигнут успех, а условия на правой границе не оказывали влияния на течение вверх по потоку от этой границы. Однако в настоящее время в нашем распоряжении не имеется еще достаточного количества материалов по таким расчетам, чтобы было целесообразно обсуждать их здесь.

В применяемой сейчас расчетной схеме препятствие ограничивается вертикальными и горизонтальными линиями, проходящими через точки расчетной сетки для ψ. Вряд ли встретятся какие-либо трудности, если эту схему распространить на препятствия, которые ограничиваются диагональными линиями, проходящими через расчетные точки ψ. Однако из-за необходимости удовлетворять уравнению неразрывности возможное применение таких интерполированных границ представляется в данное время проблематичным. Более предпочтителен здесь подход, состоящий в увеличении числа узловых точек, что позволит улучшить аппроксимацию поверхностей.

Б. Программа текущих и будущих исследований

Хотя описанный метод в настоящей его форме был успешно применен к изучению развития вихревых дорожек, это, однако, не составляло главной цели программы исследований. Наша цель состояла в разработке метода, который можно было бы легко модифицировать для приложений к широкому классу задач. На данной стадии развития метода полная область его применимости довольно неопределенна, и дальнейшее продвижение здесь должно происходить на основе опыта.

В этом параграфе уже отмечалось, что расчеты проводились при удивительно малом числе расчетных ячеек, использовавшихся для представления препятствия в потоке жидкости. Применение в несколько раз большего числа ячеек может также не позволить определять тонкие детали течения, которые интересны в некоторых приложениях. Однако возможность получать результаты при относительно малом числе ячеек имеет огромное значение в практических приложениях метода. Если бы требовалось значительно большее число узловых точек, то ни одна из

современных вычислительных машин не была бы в состоянии выдать решение за время, приемлемое для большинства специалистов, пользующихся машинами.

Может возникнуть вопрос: какую же ценность имеют результаты, полученные при столь грубом представлении препятствия? Здесь следует дать такой ответ: основные свойства течения не должны существенно зависеть от точного описания малых деталей течения. Этот факт сам по себе должен быть полезным при теоретическом исследовании течений, которые, таким образом, можно успешно рассчитывать, и он представляет большой интерес с точки зрения более широких приложений метода.

Таким образом, дальнейшие исследования будут вестись в направлении продолжающегося поиска таких задач, которые были бы пригодны для расчетов по программе в настоящей ее форме и в то же время имели бы аналитические и экспериментальные обоснования. Можно назвать несколько типичных задач, пригодных для решения по имеющейся программе.

1. *Неустойчивость линии скольжения.* Хорошо известно, что при наличии таких стабилизирующих факторов, как вязкость или поверхностное натяжение, поверхность, на которой касательная составляющая скорости имеет разрыв, будет неустойчивой в отношении бесконечно малых возмущений. Такие эффекты очень трудно исследовать аналитически. Численный метод, напротив, хорошо подходит к изучению вязких эффектов и возмущений с конечной амплитудой. В этой связи уже были проведены расчеты и планируется осуществить полное исследование.

2. *Неустойчивость плоского течения Пуазейля и плоского течения Куэтта.* Изучение неустойчивости плоского течения Пуазейля явится полезной проверкой численного метода, поскольку эта задача уже решена аналитически. Приложенная к телу сила, которая необходима для невозмущенного движения, может быть без труда включена в программу расчетов. Однако здесь возникают две трудности. Одна из них связана с большим машинным временем, требующимся для исследования возрастания возмущений. Другая трудность состоит в необходимом видоизменении имеющейся программы таким образом, чтобы в ней было увеличено отношение длины канала к его ширине. Неустойчивость плоского течения Куэтта исследована менее полно, но, вероятно, здесь проведение расчетов может пролить некоторый свет на устойчивость возмущений с конечной амплитудой.

3. *Инжекция плоской струи.* Метод в настоящей его форме кажется идеально подходящим для расчетов проникновения плоской струи в жидкость такого же вида, что струя. При таком исследовании надо учитывать вязкие эффекты в несколько видоизмененной форме. Здесь можно применять граничные условия

для равномерного набегающего потока и условия для непрерывного вытекания жидкости, упоминавшиеся выше.

Другие вопросы, которые требуют более серьезной переделки программы и рассматриваются в настоящее время, состоят в следующем:

1) Переход к цилиндрическим координатам для исследования течения Куэтта между вращающимися цилиндрами.

2) Разработка метода решения задач с двумя средами.

3) Рассмотрение свободных граничных поверхностей.

4) Учет теплопроводности.

B. Заключение

Информация, полученная уже при изучении застойных кормовых зон, позволяет думать, что разработанный метод в его настоящем виде можно с успехом применять для инженерных исследований. Применение этого метода в соединении с экспериментами позволит, в частности, глубоко вникнуть в сущность механизма подъемной силы, действующей на тело. Вероятно, самым важным здесь является то обстоятельство, что полезная информация относительно неустановившихся течений несжимаемой жидкости была получена при помощи такого конечно-разностого метода, который может быть реализован на современных вычислительных машинах.

Благодарности. Я признателен д-ру Ф. Х. Харлоу за советы и руководство, оказанные им во время разработки изложенного численного метода, а также при подготовке этой рукописи. Я хочу также поблагодарить Эмму Лоу Янг за помощь при внесении изменений в расчетную программу и при получении окончательных результатов. Настоящая работа была выполнена при поддержке Комиссии по атомной энергии США.

Литература

1. Dufort E. C., Frankel S. P., *Math. Tables and Other Aids to Computation,* **7** (1953), 135.
2. Fromm J. E., Lagrangian difference approximations for fluid dynamics, Los Alamos Scientific Laboratory. Rep. LA-2535, 1961.
3. Fromm J. E., Harlow F. H., *Phys. of Fluids,* **6** (1963), 975.
4. Fromm J. E., A method for computing nonsteady incompressible, viscous fluid flows, Los Alamos Scientific Laboratory. Rep. № 2910, 1963.
5. Harlow F. H., Stability of difference equations; selected topics. Los Alamos Scientific Lab. Rep. № LAMS-2452, 1960.
6. Payne R. B., Aero. Res. Council (London) Rept. and Mem. № 3047, 1956.
7. Payne R. B., *J. Fluid Mech.,* **4** (1958), 81.
8. Рихтмайер Р. Д., Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, М., 1960.
9. Thom A., *Proc. Roy. Soc.,* **A141** (1933), 651.
10. Том А., Эйплт К. Д., Числовые расчеты полей в технике и физике, изд-во «Энергия», М., 1964.
11. Stokes G. G., *Cambridge Phil. Trans.,* **9** (1851), 8; *Math. and Phys. Papers,* **3** (1901).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабата Гюгонио 108, 220
Адиабатическое течение 266
Бихарактеристические кривые 293, 295
Волна напряжения 226
— сжатия 283, 290
Выдача результатов расчетов на электронную лучевую трубку 49, 171, 234
— — — с помощью устройства «СК 4020» 73, 340, 346
Вязкость искусственная 17, 63, 85, 225, 245, 249, 334
Граничные последовательности 158
— условия 39, 193, 252, 355
— — для давления 359
— ячейки 157
Девиатор напряжений 225, 244
Демпфирование колебаний 204
Дифференцирование по времени 62
— — пространственным переменным 58
Задача с начальными данными 79
Закон Гука 186, 197, 213, 219
Застойная зона позади препятствия 172, 375
Изэнтропическое течение 266
Итерационная схема 351
Конечно-разностные двумерные уравнения в переменных Лагранжа 9
— — — гидродинамики 29
Константы Ляме 202, 213, 221
Координаты декартовы 57, 78
— Лагранжа 9, 188, 317
— сферические 82
— цилиндрические 68, 295, 330
— Эйлера 9, 82, 188, 320
Коэффициент подъемной силы 372
— сопротивления 372
Метод бихарактеристик 297
— Либмана 351
Метод полос 82
— расчета для течения вязкой жидкости 343
— СЭЛ 128, 137
— «Тензор» 185
— характеристик 264, 292
— — структура программы 272
— — с фиксированными шагами по времени 286
— «Юник» 185
— частиц в ячейках 316, 339
Неустойчивость по Тейлору 54, 170
Окрестность точки 306
Первый закон термодинамики 85
Периодические границы 355
Пластическая текучесть 199, 215
Поверхности свободные 91, 254
— скольжения 231, 255, 320
Поверхностное натяжение 170
Поверхность раздела 91, 277, 291
— разрыва 121, 270
Предел текучести 215
Примеры расчета течений двумерных 48, 100, 169, 208, 303, 320, 339
— — — одномерных 208, 371
Разрушение 200
Разрыв в газах 157
— — упругом материале 218, 232
Рассмотрение границ 47
Расчет движения частицы 80, 326
— напряжений 182, 207
— упруго-пластических течений 212
— — — двумерных 228
— — — одномерных 225
Результаты расчетов 49, 73, 103, 169, 208, 303, 339
Скорость деформаций 214, 225, 244
Соотношения Рэнкина — Гюгонио 149, 299
Струйное течение газа 78
Сходимость численных методов 95, 352
Тензор напряжений 190, 201
Тензорная искусственная вязкость 16, 20, 27, 191
Теплопроводность 75, 333
Точность расчетов 74, 129, 336
Турбулентность 10, 133
Ударные волны 299
Уравнение для вихря 348, 360
— количества движения 14, 190
— — — в интегральной форме 15
— массы 13, 58
— момента количества движения 16
Уравнение неразрывности 91, 229, 244
— Пуассона 348
— состояния экспериментальное 219
— энергии 14, 207, 229, 245
Уравнения движения 58, 85, 229, 266
— для элемента объема 56
— Навье — Стокса 346
— состояния 14, 85, 213, 229, 248
— сохранения 13, 56, 85, 143, 153
Условие текучести Мизеса 215, 216, 226, 245
Условие устойчивости Куранта 45, 64, 301
Устойчивости контроль 141, 187, 207, 246, 361
Устойчивость 32, 334, 362
— дифференциальных уравнений 23
Функционалы движения 369
Функция тока 348
Центрирование переменных 66, 86
Центрированное время 33, 34
Число Куранта 45

Число Маха 170
— Рейнольдса 343
Эйлерово-лагранжева сетка 57
Энергия 74
Энтропия 335
Якобиан 11, 154, 188
Ячейки треугольные 30
— четырехугольные 30, 146, 246

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Альтшулер Л. В. 263

Батлер (Butler D. C.) 293, 315, 342
Биорк (Bjork R. L.) 211, 317, 342
Блэйк (Blake F. G., Jr.) 209, 211
Бражник М. И. 263.
Броуд (Brode H. L.) 211
Брукс (Brooks N.) 342

Владимиров Л. А. 263

Гартри (Hartree D. R.) 291
Григорян С. С. 6

Дикман (Dickman D. O.) 342
Друккер (Drucker D. C.) 263
Дувал (Duvall G.) 263
Дэлай (Daly B. Z.) 342
Дюфорт (Dufort E. C.) 365, 382

Келлер (Keller H. B.) 265, 291
Кормер С. Б. 263
Коробейников В. П. 6
Курант (Courant R.) 127, 264, 291

Лазарус (Lazarus R. B.) 55
Лакс (Lax P. D.) 264, 291
Ландерган (Lundergan C. D.) 263
Ландсхоф (Lundshoff R.) 291, 334, 342
Левин (Levin D. A.) 291

Майнчен (Maenchen G.) 5, 185, 263
Маккуин (Mc Queen R. G.) 127, 263
Мартин (Martin R. E.) 342
Марш (Marsh S. P.) 127
Мейкснер (Meixner B. D.) 342
Мизес (Mises R.) 263
Миллер (Miller F. H.) 263

Надаи (Nadai A.) 263
Нейман фон (von Neumann J.) 9, 54, 127, 211, 263, 264, 291, 342
Нох (Noh N. F.) 128
Нукольс (Nuckolls J. H.) 211, 263

Олдер (Alder B.) 7

Пейн (Payne R. B.) 344, 381
Прагер (Prager W.) 263

Райни (Riney T. D.) 342
Реддик (Reddick H. W.) 263
Рейнер (Reiner M.) 228, 263
Рихтмайер (Richtmyer R. D.) 9, 54, 127, 211, 263, 264, 291, 342, 365, 381
Ричардсон (Richardson D. J.) 292
Ротенберг (Rotenberg M.) 7

Сак (Sack S.) 5, 185
Сокольников (Sokolnikoff I. S.) 211
Сперанская М. П. 263
Стейн (Stein L. R.) 265, 291
Стокс (Stockes G. G.) 381

Тимошенко С. П. 263
Том (Thom A.) 343, 351, 381
Триггер (Trigger K.) 127
Трулио (Trulio J.) 76, 127

Уилкинс (Wilkins M. L.) 5, 212, 263
Уолш (Walsh J. M.) 263
Уитэм (Whitham G. B.) 291

Фернбах (Fernbuch S.) 7
Франк (Frank R. M.) 55
Френкель (Frankel S. P.) 365, 381
Фридрихс (Friedrichs K. O.) 127, 264, 291
Фромм (Fromm J. E.) 343, 381
Фунтиков А. И. 263

Харлоу (Harlow F. H.) 316, 317, 329, 333, 335, 339, 342, 381
Харрис (Harris D. E., Jr.) 342
Хилл (Hill R.) 211
Ходж (Hodge P. G.) 263
Хоскин (Hoskin N. E.) 264

Чушкин П. И. 6

Шмыглевский Ю. Д. 6
Шульц (Schulz W. D.) 9

Эванс (Evans M. W.) 333, 339, 342
Эйплт (Appelt C. J.) 351, 381
Эллиот (Elliott L. A.) 293, 300, 303, 305

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию 5

Предисловие 7

Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа. *У. Д. Шульц* 9

Смешанный метод, использующий переменные Эйлера и Лагранжа. *Р. М. Франк, Р. Б. Лазарус* 55

Метод полос и течение газа между пластинами. *Дж. Трулио* . . . 76

СЭЛ — совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. *В. Ф. Нох* 128

Метод расчета «Тензор». *Дж. Майнчен, С. Сак* 185

Расчет упруго-пластических течений. *М. Л. Уилкинс* 212

Метод характеристик для решения уравнений одномерного неустановившегося течения. *Н. Э. Хоскин* 264

Метод характеристик для решения уравнений гидродинамики двумерных неустановившихся течений. *Д. Дж. Ричардсон* 292

Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. *Ф. Х. Харлоу* 316

Неустановившееся течение несжимаемой вязкой жидкости. *Дж. Фромм* 343

Предметный указатель 382

Именной указатель 383

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Редактор *А. С. Попов*
Художник *К. П. Сиротов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Ф. Х. Третьякова*
Корректор *В. С. Соколов*
Сдано в производство 4/IV 1967 г. Подписано к печати 11/VIII 1967 г.
Бумага типографская, № 2. Формат $60\times90^{1}/_{16}$=12 бум. л., 24 печ. л. Уч.-изд. л. 23,28.
Изд. № 1/3665. Цена 1 р. 79 к. Зак. 647.
Темплан 1967 г. Издательство «Мир», № 32.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «М И Р». Москва, 1 й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29