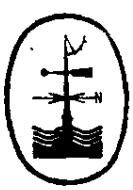
Библиотека СОК

А. С. МОНИН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ



ЛЕНИНГРАД ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ 1988

УДК 551.511.001

Рецензент чл.-кор. АН СССР Г. С. Голицын (Институт физики атмосферы АН СССР)

Научный редактор В. М. Каменкович (Институт океанологии АН СССР)

Излагаются современные основы теоретического описания природных течений вращающихся стратифицированных жидкостей и газов.

Вводные разделы содержат общие методы описания эффектов вращения и стратификации, малых колебаний газовых и жидких оболочек планет, гидродинамической неустойчивости. Специальные главы посвящены геофизической турбулентности, поверхностным, внутренним и гироскопическим волнам, особое внимание уделено нелинейным эффектам и систематическому использованию гамильтонова формализма. Заключительные разделы посвящены общей циркуляции газовых и жидких оболочек планет, гидродинамическим основам теории климата и гидродинамике земных недр — геомагнитному динамо и мантийной конвекции.

Книга рассчитана на научных работников физико-математических, геофизических и гидрометеорологических специальностей.

In the book by A. S. Monin **"Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics"** contemporary foundations of theoretical description of natural currents in rotating stratified fluids and gases are presented. The introductory sections contain the general methods used for the description of rotation and stratification effects, small oscillations of gaseous and liquid planetary layers, hydrodynamic instability. Special chapters are devoted to geophysical turbulence, surface, internal and gyroscopic waves with a particular emphasis on nonlinear effects and with a systematic use of Hamiltonian formalism. The concluding sections deal with the general circulation of the gaseous and liquid planetary layers, hydrodynamic bases of the theory of climate and hydrodynamics of the Earth's interior — geomagnetic dynamo and mantle convection.

The book in meant for specialists in the field of physics, mathematics and hydrometeorology.

М $\frac{1903040000\text{-}048}{069(02)\text{-}88}$ 19-88

ISBN 5-286-00058-4

© Гидрометеоиздат, 1988.

Предисловие

Эта книга родилась в результате многолетнего чтения лекций по основам геофизической гидродинамики автором (а по ряду разделов — его коллегами) в Московском физико-техническом институте.

На этих лекциях приходилось рекомендовать студентам множество книг, а иногда и отдельных статей, в которых рассмотрены нужные вопросы, так как единой книги, содержащей достаточно полное и систематическое их изложение, не существовало (за исключением, пожалуй, выпущенных в 1978—1979 гг. издательством «Наука» томов «Гидрофизика океана», «Гидродинамика океана» и «Геодинамика» десятитомника «Океанология», посвященных, однако, специально океану и, несомненно, в сумме чрезмерно объемистых для изучения студентами). Книги, соответствующей нашему пониманию того, что и как нужно излагать по геофизической гидродинамике, еще не появилось и за рубежом. Попыткой восполнить этот недостаток и является настоящая книга.

Предисловие пишется, как полагается, после написания всей книги, и это дает автору возможность высказать самому замечания о том, к чему рецензенты и читатели смогут пожелать отнестись критически. Прежде всего, книга называется «Теоретические основы», так как материалы наблюдений и экспериментов, в естественных науках всегда весьма изобильные, в книге лишь упоминаются, да и то редко и кратко, ибо сколько-нибудь полное их изложение увеличило бы объем книги и время на ее написание, по оценкам автора, вдвое или даже втрое. Поэтому пришлось рассчитывать на читателей, в какой-то мере знакомых с эмпирическими данными, или же отсылать их к соответствующей доступной литературе.

Но даже и в одной лишь теоретической части был осуществлен отбор излагаемых проблем и вопросов, который неизбежно в какой-то мере субъективен: авторы всегда предпочитают излагать то, что они лучше знают и больше любят. Обычно это то, над чем они сами работали. В книгу не вошли разделы по теории приливов (кроме пояснения в § 7 возможности их резонансности), мезомасштабных явлений (как тропические ураганы, торнадо, океанские внутритермоклинные вихри и т. п.), волн Россби — Блиновой в гидростатически-неустойчивых средах, когерентных структур в турбулентных течениях; изложен лишь общий подход к гидродинамическому прогнозу погоды без сколько-нибудь подробного изложения его процедур; не излагались применения лагранжевых методов и т. д. Некоторые из этих вопросов (как теория

приливов) хорошо освещены в литературе, по другим, наоборот, еще нет теории (как когерентные структуры).

Стремясь по возможности опережать современность (чтобы не слишком быстро устареть), автор не воздерживался от математических новинок и использовал не только дифференциальные уравнения, векторную и тензорную символику и вариационные методы, но, где надо, также теорию вероятностей, эргодическую теорию и т. п. Тривиальные выкладки в книге не излагаются, приводятся лишь их результаты, но с сопровождением их информацией, по которой желающие читатели смогут полностью восстановить все доказательства. По замыслу автора, книга написана не для легкого чтения, но зато она по существу заполнена задачами для студентов.

В книге не прилагается список цитированной литературы. Все нужное автор стремился разъяснять в тексте, ограничиваясь лишь приоритетными указаниями по тем идеям и результатам, которые представляются автору (возможно, субъективно) наиболее важными и интересными. Дается небольшой список (три десятка) книг, которые автор считает наиболее полезными и рекомендует ими пользоваться, и книг самого автора.

В книге не удалось выдержать единство обозначений даже в отдельных главах. Используемых понятий так много (наименования новых из них выделяются курсивом), что для обозначения не хватило бы никаких алфавитов. Поэтому одной и той же буквой в разных местах могут обозначаться разные величины. Обозначения в большинстве мест разъясняются (хотя физики-теоретики уже приучены к тому, что о смысле обозначений часто можно догадаться и без разъяснений), и автор надеется, что они не затруднят понимания текста.

Автор рад возможности высказать благодарность своим старым друзьям и идейным соавторам А. М. Обухову и А. М. Яглому, многие работы которых отражены в этой книге, за их интерес к книге и моральную поддержку; В. М. Каменковичу, Д. В. Чаликову, В. Е. Захарову, Г. С. Голицыну, В. П. Трубицыну и М. Я. Марову за помощь в подборе научных материалов; Е. Г. Агафоновой за большой труд по оформлению рукописи, Г. Ю. Александровой за изготовление иллюстраций и особо Н. И. Солнцевой за организацию всех работ по подготовке книги.

Введение

Предпочитая оставить пищу историкам науки, мы здесь воздержимся от исторического обзора, ограничившись ссылками на приоритеты в тексте. Отметим лишь, что выделение геофизической гидродинамики из общей гидродинамики было рискованным шагом, грозившим опасностью обособления и отделения от общей науки путем создания собственного жаргона, «птичьего языка», непонятного непосвященным. На подобной почве в широкой среде невысокого уровня могут произрастать и расцветать лженауки. Такие явления происходили, например, в метеорологии (физику атмосферы мы к ней здесь не относим), в которой то и дело вспыхивали увлечения астрологическими рецептами предсказания погоды (да и сейчас еще используются бездоказательные методики прогнозов «на сезон»), в сельскохозяйственных, педагогических науках и т. п.

Но дело обстоит совершенно иначе, если в важной области познания, во-первых, имеется серьезная специфика, требующая специального изучения и создания новых понятий (создание понятий — действие более глубокое, чем распознавание образов, оно является основой научного творчества, отличающей исследователей от вычислительных машин обозримого будущего), и если, во-вторых, растущая на этих понятиях новая наука вступает в контакты и взаимодействия с другими областями знания и становится общеупотребительной.

Однако научная общественность еще не готова к тому, чтобы выделение или невыделение новых наук осуществлялось сознательно, по решениям тех или иных авторитетных коллективов специалистов. Пока что это происходит стихийно, хотя, конечно, инициатива и активность крупных ученых (или, в плохих случаях, крупных лжеученых) играют большую роль. Так стихийно произошло и становление геофизической гидродинамики, хотя ее выделение и было «оформлено» в начале 70-х годов текущего столетия, когда Джозеф Смагоринский организовал Лабораторию геофизической гидродинамики в Принстоне.

Специфическими особенностями объектов геофизической гидродинамики — природных течений жидкостей и газов — являются вращение и стратификация. В технической гидродинамике, наоборот, эти особенности в большинстве случаев несущественны, и поэтому в курсах общей гидродинамики они обычно не рассматриваются.

Под вращением, которое влияет на природные течения, имеется в виду вращение ω несущих эти течения космических тел — планет, звезд, туманностей и т. д. В системах отсчета, связанных с этими носителями, их вращение создает действующую на относительные течения u силу Кориолиса $2\rho\omega \times u$, производящую ряд специфических эффектов. Так, например, в северном полушарии Земли, где сила Кориолиса направлена вправо от течения, реки подмывают правые берега. Направленные к термическому эква-

тору приземные пассатные ветры приобретают составляющую на запад, а направленные к полюсу высотные антипассаты приобретают составляющую на восток и формируют обгоняющий вращение Земли западный перенос воздушных масс в умеренных широтах. Уравновешивая перепады давления, сила Кориолиса придает течениям геострофичность. Она создает специфические локальные колебания в океане и атмосфере с инерционной частотой $f = 2\omega_z$, а изменения f с широтой («β-эффект») порождают волны Россби—Блиновой, в ложбинах и гребнях которых образуются основные генераторы погоды — циклоны и антициклоны. Гравитационные воздействия внешних тел создают на вращающихся космических телах приливные колебания. Наконец, при наличии электропроводящих слоев жидкости или газа вращение обеспечивает генерацию магнитных полей космических тел.

Наличие у космических тел собственного гравитационного поля (с ускорением свободного падения g) и сжимаемость всех реальных газов и жидкостей создают в них стратификацию — прежде всего, квазигидростатическое возрастание их плотности ρ с глубиной. Кроме этого, стратификация осложняется из-за того, что реальные газы и жидкости бароклинны, т. е. их плотность зависит не только от давления p (как в баротропных средах), но также от температуры T и концентраций s термодинамически-активных примесей.

Бароклинность имеет динамическое значение, так как она создает фактор вихреобразования — слагаемое $\mathrm{rot}\,(-\rho^{-1}\nabla p) = -\rho^{-2}\nabla\rho\times\nabla p$ в выражении для вихря ускорения (в баротропных средах оно равно нулю). Еще важнее то, что флюктуации p', T', s' создают флюктуации плотности ρ' и, следовательно, архимедовы силы $\rho' g$. При неустойчивой стратификации (в отсутствие s — при возрастании энтропии с глубиной) они приводят к развитию конвекции за счет гравитационной потенциальной энергии. При устойчивой стратификации (в отсутствие s — убывании энтропии с глубиной), наоборот, кинетическая энергия затрачивается на работу против архимедовых сил, и вместо конвекции возникают условия для развития внутренних гравитационных волн.

Итак, геофизическую гидродинамику можно определить, как *гидродинамику природных течений вращающихся бароклинных стратифицированных жидкостей и газов, или, коротко,*

$$\text{ГГД} = \text{ГД ВБСЖ}.$$

Геофизическая гидродинамика выдвигает проблемы и находит приложения в метеорологии, океанологии, климатологии, физике Земли, планетологии и астрофизике. Она взаимодействует с магнитной гидродинамикой, физикой плазмы, нелинейной механикой (особенно с теорией нелинейных волн) и, конечно, согласно современной методологии, с вычислительной математикой.

ЧАСТЬ 1

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Уравнения геофизической гидродинамики

Малые колебания

Гидродинамическая неустойчивость

ГЛАВА 1

Уравнения геофизической гидродинамики

§ 1. Термодинамика

В целях большей общности будем считать, что рассматриваемая среда (атмосферный воздух, океанская вода, расплав в жидком внешнем слое земного ядра и т. п.) характеризуется тремя независимыми термодинамическими переменными, в качестве которых в этом параграфе изберем температуру T, давление p и массовую концентрацию s *термодинамически-активной примеси* (ТАП). Под s может подразумеваться водяной пар в ненасыщенном влажном воздухе (тогда s — массовая доля водяного пара) или соль в океанской воде (тогда s — соленость). Как и в случае s, далее будем использовать только *массовые*, т. е. отнесенные к единице массы, термодинамические характеристики среды. В качестве основной функции, характеризующей термодинамическое состояние среды, изберем ее *термодинамический потенциал* (*свободную энтальпию*) $\varphi(T, p, s)$, дифференциал которого определяется формулой

$$d\varphi = -\eta dT + \frac{1}{\rho} dp + \mu\, ds, \tag{1.1}$$

где коэффициенты суть энтропия $\eta = -\partial\varphi/\partial T$, *удельный объем* $1/\rho = \partial\varphi/\partial p$ (ρ — плотность среды) и *химический потенциал* $\mu = \partial\varphi/\partial s$. Если они известны (как функции от T, p, s), то могут быть определены также *свободная энергия* $f = \varphi - p/\rho$, *внутренняя энергия* $\varepsilon = \varphi - p/\rho + T\eta$ и *энтальпия* (*тепловая функция*) $w = \varphi + T\eta$, так что любая из функций f, ε или w может быть избрана вместо φ (впрочем, далее в книге мы ими, как правило, пользоваться не будем и обозначения f, ε, w будем использовать совсем для других величин). Дифференциалы коэффициентов формулы (1.1) можно записать в следующем виде:

$$d\eta = \frac{c_p}{T} dT - \frac{\alpha}{\rho} dp + \delta\, ds, \tag{1.2}$$

$$d\rho = -\alpha\rho\, dT + \beta\rho\, dp + \gamma\rho\, ds, \tag{1.3}$$

$$d\mu = -\delta\, dT - \frac{\gamma}{\rho} dp + \lambda\, ds. \tag{1.4}$$

Здесь $c_p = T(\partial\eta/\partial T)_{p,\,s}$ — *удельная теплоемкость* при постоянных p и s; $\alpha = -(1/\rho)\,\partial\rho/\partial T$ — коэффициент *термического расширения*;

$\beta = (1/\rho)\,\partial\rho/\partial p$ и $\gamma = (1/\rho)\,\partial\rho/\partial s$ — коэффициенты *сжимаемости* за счет p и за счет s; $\delta = \partial\eta/\partial s = -\partial\mu/\partial T$ и $\lambda = \partial\mu/\partial s$, причем в (1.2)—(1.4) учтена перестановочность вторых производных от функции $\varphi(T, p, s)$. Уравнение (1.3) представляет собою дифференциальную форму *уравнения состояния* среды $\rho = \rho(T, p, s)$ (если оно имеет упрощенный вид $\rho = \rho(p)$, т. е. плотность среды зависит только от давления, то среда называется *баротропной*; в противном случае она называется *бароклинной*). Важной термодинамической характеристикой среды является также *скорость звука*

$$c(T, p, s) = \left[(\partial p/\partial\rho)_{\eta, s}\right]^{1/2}, \tag{1.5}$$

где значки η, s указывают, что производная $\partial p/\partial\rho$ берется при постоянных η и s. Если функции $\rho(T, p, s)$ и $c(T, p, s)$ известны, то можно определить и величины

$$c_v = T\,(\partial\eta/\partial T)_{\rho, s} = \frac{1}{\varkappa - 1}\,\frac{\alpha^2 T}{\beta\rho}; \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \beta\rho c^2, \tag{1.6}$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянных ρ и s (эти формулы просто выводятся из (1.2), (1.3)); тогда в формулах (1.2)—(1.4) будут известными все коэффициенты, кроме δ и λ (более того, записав дифференциалы $d\delta$ и $d\lambda$ в виде, аналогичном (1.2)—(1.4), с учетом перестановочности вторых производных от функций η, ρ, μ нетрудно убедиться, что для определения коэффициентов δ и λ хотя бы с точностью до постоянных слагаемых недостает знания лишь производных $\partial\delta/\partial s$ и $\partial\lambda/\partial s$, и что, пока они неизвестны, неполнота знания термодинамических характеристик среды выражается двумя произвольными функциями от s).

В качестве одного из примеров рассмотрим влажный (ненасыщенный) атмосферный воздух. С достаточной для геофизической гидродинамики точностью его можно считать смесью идеальных газов, из которых водяной пар рассматривается, как ТАП, так что s — массовая доля водяного пара. Уравнение состояния влажного воздуха имеет вид

$$p = R\rho T; \quad R = (1 - s)\,R_в + sR_п, \tag{1.7}$$

где $R_в = R_0/\mu_в \approx 287$ Дж/(кг · К) и $R_п = R_0/\mu_п \approx 461$ Дж/(кг · К) — газовые постоянные сухого воздуха и водяного пара ($R_0 \approx 8{,}314$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная, $\mu_в \approx 29$ и $\mu_п \approx 18$ — относительные молекулярные массы сухого воздуха и водяного пара). Из (1.7) видно, что коэффициент β в (1.3) равен $1/p$, и, следовательно, согласно второй формуле (1.6), скорость звука определяется соотношением

$$c^2 = \varkappa p/\rho = \varkappa RT, \tag{1.8}$$

где $\varkappa$, вообще говоря, зависит от s (эту зависимость нетрудно вывести при помощи последующих формул (1.9) и (1.10)). Парциальное давление водяного пара равно

$$p_{\text{п}} = s\left[s + \alpha_{\text{п}}(1-s)\right]^{-1} p; \quad \alpha_{\text{п}} = \mu_{\text{п}}/\mu_{\text{в}} \approx 0{,}622. \tag{1.9}$$

Парциальное давление сухого воздуха при этом равно $p_{\text{в}} = p - p_{\text{п}}$.

Энтропия влажного воздуха определяется формулами:

$$\eta = (1-s)\,\eta_{\text{в}} + s\eta_{\text{п}}; \tag{1.10}$$

$$\eta_{\text{в}} = c_{p\text{в}} \ln T - R_{\text{в}} \ln p_{\text{в}} + \text{const}; \quad \eta_{\text{п}} = c_{p\text{п}} \ln T - R_{\text{п}} \ln p_{\text{п}} + \text{const},$$

где $c_{p\text{в}} \approx 1003$ Дж/(кг · К) и $c_{p\text{п}} \approx 1810$ Дж/(кг · К) — удельные теплоемкости сухого воздуха и водяного пара при постоянных p и s. Обычно s не превосходит 3—4 % (а в облаках и туманах содержание жидкой воды и льда значительно меньше содержания пара, и там во многих задачах можно приближенно применять те же формулы (1.7) и (1.10), лишь определяя в них s из (1.9) по давлению насыщенного водяного пара $p_{\text{пт}}(T)$). Но, несмотря на малость s, учет влажности важен не только непосредственно для расчета облаков, осадков и весьма существенного вклада влажности в перенос излучения, но также, вследствие больших тепловых эффектов испарения и конденсации (а иногда возгонки льда и сублимации), как эффективного теплоносителя. Так, записав турбулентные флюктуации плотности и энтропии (обозначаемые штрихами) приближенно в виде

$$\rho'/\rho \approx -T'/T - (R_{\text{п}}/R_{\text{в}} - 1)\,s'; \quad \eta' \approx c_{p\text{в}} T'/T + (\eta_{\text{п}} - \eta_{\text{в}})\,s', \tag{1.11}$$

среднюю удельную работу архимедовых сил (равных $g\rho$) и турбулентный поток энтропии можно выразить формулами:

$$-\frac{g}{\rho}\overline{\rho' w'} \approx \frac{g}{c_{p\text{в}}\rho T}\left(q_{\text{турб}} + b q_{\text{скр}}\right); \quad b = (R_{\text{п}}/R_{\text{в}} - 1)\frac{c_{p\text{в}} T}{\mathscr{L}} \approx 0{,}07, \tag{1.12}$$

$$\overline{\rho\eta' \mathbf{u}'} \approx \frac{1}{T}\left(\mathbf{q}_{\text{турб}} + \frac{\eta_{\text{п}} - \eta_{\text{в}}}{c_{p\text{в}}}\frac{c_{p\text{в}} T}{\mathscr{L}}\mathbf{q}_{\text{скр}}\right), \tag{1.13}$$

(А. С. Монин, 1967), где $\mathscr{L} \approx 2\,500\,000$ Дж/кг — скрытая теплота испарения; $\mathbf{u}'$ — флюктуация вектора скорости ветра; w' — ее вертикальная составляющая; $\mathbf{q}_{\text{турб}} = c_{p\text{в}}\rho\overline{T'\mathbf{u}'}$ — турбулентный поток тепла; $\mathbf{q}_{\text{скр}} = \mathscr{L}\rho\overline{s'\mathbf{u}'}$ — турбулентный поток скрытой теплоты. Вклад $\mathbf{q}_{\text{скр}}$ в (1.12) и (1.13) может быть и не малым.

Вторым примером будет океанская вода, в которой роль ТАП играет соленость s. Отметим, что аналитический расчет термодинамических характеристик капельных жидкостей вообще гораздо более затруднителен по сравнению с газами, так как осложняющим отличием жидкостей является присутствие в них дальних

взаимодействий между молекулами (которые при испарении необходимо разрывать). Кроме того, вода является жидкостью, аномальной во многих отношениях и, прежде всего, в наличии у нее *температуры максимальной плотности* $T=T_1(p, s)\approx 4$ °C, при $p<p_1\approx 27\cdot 10^4$ гПа и $s<s_1\approx 24$ ‰ превышающей температуру замерзания $T=T_2(p, s)$ (с ростом p или s и T_1 и T_2 убывают, причем T_1 быстрее, чем T_2), так что плотность воды, всегда растущая при росте p или s, при $T>T_1$ при убывании T нормально возрастает, а в интервале температур $T_1>T>T_2$ ведет себя аномально — убывает и, более того, еще убывает при замерзании (в результате чего лед оказывается легче воды и не тонет, а плавает на ее поверхности, что особенно важно для земного климата). Наконец, растворенные в океанской воде соли существуют в ней в виде ионов, между которыми сверх обычных молекулярных сил действуют также дополнительные кулоновские. В результате всех этих осложнений уравнение состояния океанской воды удалось получить лишь эмпирическим путем. Его принято записывать в виде

$$\rho(T,\ p,\ s)=\rho_0\left(1+10^{-3}\sigma_t\right)\left[1-\mu\left(p-p_a\right)\right]^{-1}, \qquad (1.14)$$

где $p_a=1013{,}25$ гПа — стандартное атмосферное давление; $\rho_0=\rho$ (4 °C, p_a, 0); $\sigma_t=10^3[\rho(T,\ p_a,\ s)/\rho_0-1]$ — так называемая *условная плотность*, $\mu=[K_0+A(p-p_a)+B(p-p_a)^2]^{-1}\sim(4\ldots 5)\cdot 10^{-8}$ гПа$^{-1}$ — коэффициент изотермической сжимаемости воды, причем функции σ_t, K_0, A и B описываются многочленами невысоких степеней от T и $(s-35\text{ ‰})^{1/2}$. Скорость звука (1.5) в океанской воде также изучена лишь эмпирически. Она возрастает и с температурой, и с давлением, и с соленостью и описывается формулой Г. Фрая и Дж. Пага (1971), по которой к стандартному значению $c=1449{,}30$ м/с прибавляются температурная поправка в виде кубического многочлена от T °C, барическая поправка четвертой степени по p, соленостная поправка третьей степени по $(s-35\text{ ‰})$ и смешанная поправка из трех слагаемых с T^2p, Tp^2 и $T(s-35\text{ ‰})$. Коэффициенты δ и λ в (1.2), (1.4) для океанской воды еще не промерены.

Рассматривая жидкости или газы как непрерывные среды, их тем не менее условно можно представлять, как состоящие из *инфинитезимальных* (но все же *макроскопических*, т. е. содержащих достаточно большие количества молекул, чтобы к ним были применимы понятия механики непрерывных сред — температура, давление, плотность, скорость и т. п.) *индивидуальных* (некоторое время сохраняющих свою индивидуальность, т. е. мало обменивающихся молекулами с окружающей средой) *жидких частиц*, которые можно *маркировать* (например, их начальными пространственными координатами) и прослеживать их траектории (*лагранжево* описание движения). Характеристики A жидких частиц, не меняющиеся со временем t (т. е. удовлетворяющие

уравнению $dA/dt=0$, где d/dt — индивидуальная производная), можно назвать *лагранжевыми инвариантами* движения.

Введем теперь понятие о *термодинамических процессах*, определив их здесь, как изменения со временем каких-либо термодинамических характеристик жидких частиц, вызываемые теми или иными причинами (например, молекулярным обменом теплом и ТАП, вязкой диссипацией кинетической энергии, лучистым теплообменом, фазовыми превращениями веществ в среде и т. п.). Введем, в частности, следующие обозначения для скоростей изменения значений η и s в жидких частицах:

$$d\eta/dt = \varepsilon_\eta; \tag{1.15}$$

$$ds/dt = \varepsilon_s \tag{1.16}$$

(ε_η — скорость притока тепла к единице массы жидкости, деленная на температуру). Процессы, при которых $\varepsilon_\eta \equiv 0$ (так что энтропия оказывается лагранжевым инвариантом), естественно называть *изэнтропическими*; если, кроме того, и $\varepsilon_s \equiv 0$ (так что и концентрация ТАП является лагранжевым инвариантом), то процесс будем называть *адиабатическим*. По этому определению при адиабатических движениях траекториями жидких частиц (а при стационарных течениях, следовательно, и линиями тока) являются изэнтропы на поверхностях $s=\text{const}$. Из (1.5) видно, что при адиабатических процессах

$$dp/dt = c^2\, d\rho/dt. \tag{1.17}$$

Это уравнение иногда удобно употреблять вместо условия $d\eta/dt = 0$.

§ 2. Стратификация

Стратификацией среды называется распределение ее плотности ρ по *вертикали*, т. е. по направлению силы тяжести. Можно рассматривать также стратификацию и других термодинамических характеристик — температуры T, концентрации ТАП s, скорости звука c, энтропии η и т. п., но наибольшее динамическое значение в геофизической гидродинамике имеет все же стратификация плотности, непосредственно определяющая характер действия специфических для природных течений архимедовых сил. Чтобы оценить действие этих сил на жидкие частицы, *адиабатически* перемещаемые по вертикали, будем пока что использовать в качестве независимых термодинамических переменных η, s и p и введем вертикальную координату z, отсчитываемую, например, в земной атмосфере вверх от поверхности равновесной фигуры *геоида* $r=r_0(\theta, \lambda)$ (где r — расстояние от центра Земли; $\theta=\pi/2-\varphi$ — дополнение широты φ; λ — долгота), так что z — высота над уровнем моря.

В стратифицированной среде параметры η, s и p, вообще говоря, меняются с высотой z, так что стратификация плотности описывается функцией $\rho(z)=\rho[\eta(z), s(z), p(z)]$. При адиабатическом смещении жидкой частицы с высоты z_1, где $p=p_1$, ее плотность на высоте z будет равна $\rho_1(z)=\rho[\eta(z_1), s(z_1), p(z_1)]$ и при малом смещении $z-z_1$ будет отличаться от плотности окружающей среды на величину $\rho_1(z)-\rho(z)\approx(\partial\rho_*/\partial z)_{z=z_1}(z_1-z)$, где $\rho^*(\eta, s)=\rho(\eta, s, p_1)$ — *потенциальная плотность*, т. е. плотность, адиабатически приведенная к давлению p_1.

Ясно, что при $\partial\rho_*/\partial z<0$ архимедова сила $g(\rho-\rho_1)$ будет действовать на адиабатически смещенную жидкую частицу возвращающим образом, т. е. стратификация будет *устойчивой*. Вертикальное смещение жидкой частицы требует при этом затраты энергии на работу против архимедовой силы. Если такое смещение $\zeta=z-z_1$ произведено, то, пока не скажутся диссипативные факторы, частица будет колебаться по вертикали относительно своего равновесного уровня z_1 с частотой N, которую можно определить, приравняв ускорение частицы $\partial^2\zeta/\partial t^2$ архимедову ускорению $(g/\rho)(\partial\rho_*/\partial z)\zeta$; из такого уравнения получается

$$N^2=-(g/\rho)(\partial\rho_*/\partial z). \tag{2.1}$$

Величина N называется *частотой Вяйсяля—Брента*. Наоборот, при $\partial\rho_*/\partial z>0$ архимедова сила будет действовать на смещающуюся жидкую частицу ускоряющим образом, т. е. стратификация будет *неустойчивой* (и, если этому не слишком будут препятствовать диссипативные факторы, в среде разовьется конвекция, которая посредством работы архимедовых сил будет приобретать кинетическую энергию за счет потенциальной энергии неустойчивой стратификации). Наконец, при $\partial\rho_*/\partial z=0$ стратификация является *нейтральной*. Полагая в формулах (1.2) и (1.3) $dp=0$ и затем исключая из них dT, дифференциал потенциальной плотности можно привести к виду

$$d\rho_*=\frac{\rho_*\alpha_*T_*}{c_{p*}}\left[-d\eta+\left(\delta_*+\frac{\gamma_*c_{p*}}{\alpha_*T_*}\right)ds\right], \tag{2.2}$$

где звездочками снизу обозначены значения функций от η, s, p при $p=p_1$. Отсюда видно, что нейтральная стратификация не обязана быть адиабатической (т. е. удовлетворять условиям $\partial\eta/\partial z=\partial s/\partial z=0$) — ей могут соответствовать всевозможные стратификации $\eta(z)$ и $s(z)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial\eta}{\partial z}=\left(\delta_*+\frac{\gamma_*c_{p*}}{\alpha_*T_*}\right)\frac{\partial s}{\partial z}.$$

Эта множественность нейтральных стратификаций отчетливо проявляется в Мировом океане, где обнаруживаются весьма

разнообразные сочетания профилей $T(z)$ и $s(z)$ — так называемые T, s-кривые $z(s, T)$, примеры которых приводятся на рис. 2.1. Формулу (2.2) можно существенно упростить, представив в ней энтропию в виде $\eta(\rho, p, s)$, т. е. определив $d\eta$ формулой (1.2) с ис-

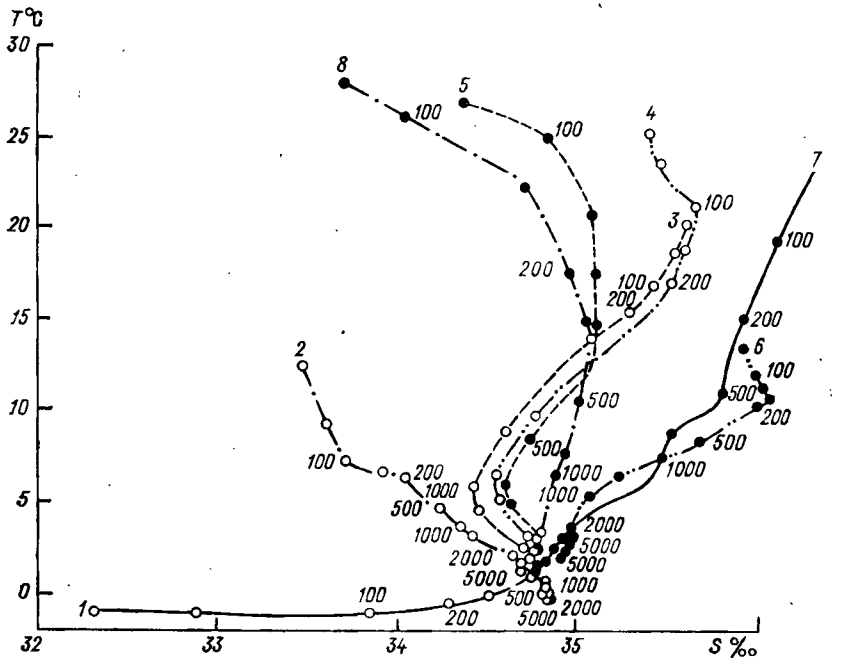


Рис. 2.1. Типы T, s-кривых в Мировом океане по В. Н. Степанову (1965).

1 — полярная, *2* — субполярная, *3* — умеренно тропическая, *4* — тропическая, *5* — экваториальная, *6* — североатлантическая, *7* — присредиземноморская, *8* — индо-малайская.

ключением из нее dT при помощи (1.3). При $z=z_1$ с использованием соотношений (1.6) получается

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.3}$$

В большинстве случаев изменения давления с высотой достаточно точно описываются *уравнением гидростатики* $\partial p/\partial z = -g\rho$, и тогда из (2.1) и (2.3) получается широко употребительная формула

$$N^2 = -(g/\rho)\left(\partial\rho/\partial z + g\rho/c^2\right). \tag{2.4}$$

Из нее видно, что условие гидростатической устойчивости стратификации $N^2 > 0$ приводится к виду $\partial\rho/\partial z < -g\rho/c^2$, так что убывания плотности с высотой для устойчивости еще недостаточно — нужно, чтобы плотность убывала с высотой *достаточно*

быстро. Приведем, наконец, еще одно выражение для N^2, получающееся из (2.4) при использовании формулы (1.3), уравнения гидростатики и соотношений (1.6):

$$N^2 = \alpha g\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a - \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\partial s}{\partial z}\right);\quad \gamma_a = \frac{\varkappa - 1}{\alpha}\frac{g}{c^2}, \tag{2.5}$$

где γ_a — адиабатический градиент температуры; для атмосферы с уравнением состояния (1.7) он приводится к виду $\gamma_a = \dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa} \times$ $\times g/R = g/c_p$ и при $c_p \approx 1003$ Дж/(кг · К) и $g = 9{,}8$ м/с^2 оказывается равным $\gamma_a \approx 9{,}8$ К/км. В *однородной* ($\partial T/\partial z = \partial s/\partial z = 0$) гидростатической атмосфере будет $N = (\alpha g \gamma_a)^{1/2} = (\varkappa - 1)^{1/2} g/c \approx 2 \times$ $\times 10^{-2}$ c^{-1}; заметим, кстати, что в такой атмосфере $\partial \ln p/\partial z = \partial \ln \rho/\partial z = -1/H$, где

$$H = RT/g = p/\rho g = c^2/\varkappa g \tag{2.6}$$

— так называемая *высота однородной атмосферы* (при $T \approx 0$ °С приблизительно равная 8 км).

§ 3. Гидродинамика

При эйлеровом описании движущаяся жидкость или газ характеризуется полями плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, причем мы будем использовать пространственные координаты $\mathbf{x}$ и *относительную* скорость движения $\mathbf{u}$ в системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (обычно со средней угловой скоростью вращения планеты). Запишем *эволюционные* (т. е. содержащие производные по времени $\partial/\partial t$ от неизвестных полей) уравнения гидродинамики — уравнение неразрывности и уравнения движения — в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho D = 0;\quad D = \operatorname{div} \mathbf{u}; \tag{3.1}$$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}, \tag{3.2}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ — индивидуальная производная по времени; $\mathbf{w}$ — ускорение в абсолютной системе отсчета ($2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ — *ускорение Кориолиса*); $\mathbf{f}$ — сумма ускорений силы вязкости и внешних массовых сил, из которых в геофизической гидродинамике почти всегда нужно учитывать силу тяжести (при изучении приливов — в сумме с гравитационной *приливообразующей* силой), а если движущаяся жидкость электропроводна и находится в магнитном поле (с напряженностью $\mathbf{H}$), то, вообще говоря, нужно учитывать также *пондеромоторную* силу Лоренца, ускорение которой в приближении магнитной гидродинамики (в пренебрежении эффектами, связанными с конечностью скорости c_0 распространения

электромагнитных возмущений, т. е. в пренебрежении *током смещения* $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ по сравнению с токами проводимости и индукции

$$\mathbf{j}=\sigma\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c_0}\mathbf{u}\times\mathbf{H}\right),$$

где σ — электропроводность среды, а $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; в этом приближении $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c_0}\mathbf{j}$) записывается в виде

$$\mathbf{f}_L=\frac{1}{c_0\rho}\mathbf{j}\times\mathbf{H}=\frac{1}{4\pi\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H}. \qquad (3.3)$$

Часто бывает удобно явно выделить в правой части уравнений движения (3.2) ускорение архимедовой силы. Приближенно это нетрудно сделать, задав *основную квазистатическую* («равновесную») стратификацию среды, например, функциями $T=T_0(z)$ и $s=s_0(z)$, по которым функции $p=p_0(z)$ и $\rho=\rho_0(z)$ определятся из системы уравнений состояния $\rho_0=\rho(T_0, p_0, s_0)$ и гидростатики $\nabla p_0=\rho_0\mathbf{g}$ (а затем могут быть найдены и любые другие термогидродинамические характеристики), и считая отклонения фактических термодинамических полей от этих равновесных значений $\rho'=\rho-\rho_0$, $p'=p-p_0$ малыми (по сравнению с самими равновесными значениями). Тогда с точностью до величин первого порядка малости с учетом соотношения $\nabla p_0=\rho_0\mathbf{g}$ получается

$$-\frac{\nabla p}{\rho}+\mathbf{g}=-\frac{\nabla p_0+\nabla p'}{\rho_0+\rho'}+\mathbf{g}\approx-\frac{\nabla p'}{\rho_0}+\frac{\rho'}{\rho_0}\mathbf{g}. \qquad (3.4)$$

Использование в (3.2) правой части этого равенства вместо левой и одновременная замена уравнения неразрывности (3.1) условием $D=0$ бездивергентности (соленоидальности) поля скорости называется *приближением Буссинеска*. В этом приближении архимедово ускорение равно $\rho'\mathbf{g}/\rho_0$. Если ρ_0 сильно изменяется с высотой в пределах рассматриваемого слоя (например, в конвективном слое Солнца — в 10^6 раз), то может быть удобным ввести аналогичную потенциальной плотности функцию $\rho_{00}(z)$ из соотношения $(g/\rho_{00})(\partial\rho_{00}/\partial z)=-N_0^2$, а также приведенное давление $p''=(\rho_{00}/\rho_0)p'$, и тогда правая часть (3.4) при помощи (2.4) приводится к виду

$$-\frac{\nabla p'}{\rho_0}+\frac{\rho'}{\rho_0}\mathbf{g}=-\frac{\nabla p''}{\rho_{00}}-\eta''\mathbf{g};\quad \eta''=\frac{p'-c_0^2\rho'}{\rho_0 c_0^2}, \qquad (3.5)$$

где η'' — безразмерные возмущения удельной энтропии; при малых N_0^2h/g (h — толщина слоя) можно считать $\rho_{00}\approx\text{const}$, и первое слагаемое в правой части будет приблизительно потенциаль-

ным, второе же слагаемое пропорционально линеаризированной энтропии η'. Если $\mathbf{f}_L$ не учитывается, то четыре скалярных уравнения (3.1)—(3.2) содержат пять неизвестных скалярных функций ρ, $\mathbf{u}$ и p, и систему уравнеиий необходимо дополнить уравнением состояния (которое не содержит производных по времени, т. е. является *синхронным соотношением* между термогидродинамическими полями). Если бы среда была *баротропной*, т. е. $\rho = \rho(p)$, то получившаяся система уравнений оказалась бы замкнутой. Если же среда бароклинна, и $\rho = \rho(T, p)$ (или $\rho = \rho(T, p, s)$), то приходится добавлять еще одно синхронное соотношение — формулу для энтропии $\eta = \eta(T, p)$ (или $\eta = \eta(T, p, s)$) и эволюционное уравнение (1.15) для η (или два эволюционных уравнения (1.15) и (1.16) для η и s). Если, наконец, учитывать и $\mathbf{f}_L$, то систему уравнений необходимо дополнить еще *уравнением индукции*

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = -\operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot} \mathbf{H}); \quad \nu_m = \frac{c_0^2}{4\pi\sigma}, \tag{3.6}$$

где ν_m — *коэффициент магнитной вязкости* (при этом $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$).

Вернемся теперь к уравнениям движения (3.2) и заметим, что поле ускорения $\mathbf{w}$, как и вообще всякое векторное поле, полностью определяется своими вихрем, дивергенцией и нормальной компонентой на границе S рассматриваемой области пространства; такое описание движения оказывается очень удобным в ряде задач. При вычислении $\operatorname{rot} \mathbf{w}$ будем использовать введенный А. А. Фридманом тензорный (преобразующий векторы в векторы) гидродинамический (с коэффициентами, зависящими от поля скорости $\mathbf{u}$) линейный дифференциальный оператор *гельмгольциан* helm, определяемый для каждого векторного поля $\mathbf{A}$ формулой

$$\operatorname{helm} \mathbf{A} = d\mathbf{A}/dt - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} + D\mathbf{A}. \tag{3.7}$$

Его гидродинамический смысл заключается в том, что равенство $\operatorname{helm} \mathbf{A} = 0$ означает «вмороженность» векторного поля $\mathbf{A}$ в движущуюся жидкость, понимаемую в том смысле, что каждая векторная линия поля $\mathbf{A}$ (т. е. линия, касательная к которой в любой ее точке имеет направление поля $\mathbf{A}$ в этой точке) «сохраняется», т. е. все время состоит из одних и тех же жидких частиц, а *интенсивности векторных трубок* (стенки которых состоят из векторных линий), т. е. потоки $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ вектора $\mathbf{A}$ через любые сечения $\mathbf{S}$ этих трубок, не меняются со временем.

Так, например, левая часть уравнения индукции (3.6) с учетом условия $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ приводится как раз к виду $\operatorname{helm} \mathbf{H}$, так что это уравнение можно переписать в виде

$$\operatorname{helm} \mathbf{H} = -\operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot} \mathbf{H}), \tag{3.6'}$$

откуда видно, что в пределе при $\nu_m \to 0$ (т. е. $\sigma \to \infty$) получается $\mathrm{helm}\,\mathbf{H}=0$: в сверхпроводящей движущейся среде магнитное поле оказывается «вмороженным». При $\nu_m \approx \mathrm{const}$ правую часть уравнения (3.6′) можно переписать в виде $\nu_m \Delta \mathbf{H}$, и тогда видно, что вмороженность магнитного поля, вообще говоря, нарушается из-за его диффузии под действием магнитной вязкости. Так, в жидком слое земного ядра при электропроводности $\sigma \sim 3 \times 10^3$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$ коэффициент магнитной вязкости оказывается равным $\nu_m \sim 2{,}5 \cdot 10^4$ см^2/с, *магнитное число Рейнольдса* $\mathrm{Re}_m = \nu_m^{-1} UL$ для движений глобальных масштабов $L \sim 10^4$ км со скоростями порядка $U \sim 10^{-2}$ см/с получается порядка 10^3, и время диффузии глобального магнитного поля $\nu_m^{-1} L^2 \sim 10^6$ лет оказывается сравнимым с обнаруженными палеомагнитологами основными периодами обращений полярности геомагнитного поля.

Вычислив вихрь ускорения (3.2) и используя обозначение (3.7), получаем уравнение А. А. Фридмана для вихря:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{w} = \mathrm{helm}\,(\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}) = \rho^{-2} \nabla\rho \times \nabla p + \mathrm{rot}\,\mathbf{f}; \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}. \tag{3.8}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ — вихрь скорости относительного движения, а $2\boldsymbol{\omega}$ — вихрь скорости переносного движения (вращения планеты), так что $\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}$ — абсолютный вихрь, и, значит, вихрь абсолютного ускорения равен гельмгольциану абсолютного вихря скорости. Правая часть уравнения (3.8) описывает внутренние (т. е. не пограничные) источники вихреобразования. Первое слагаемое в ней $\rho^{-1} \times \nabla\rho \times \nabla p$ отлично от нуля, лишь если среда бароклинна, тогда семейства поверхностей $p = \mathrm{const}$ и $\rho = \mathrm{const}$ не совпадают, и их пересечения образуют трубки (так называемые *изобаро-изостерические соленоиды*), в сечениях которых возникают циркуляции. Согласно уравнению состояния (1.3),

$$\rho^{-2} \nabla\rho \times \nabla p = -\rho^{-1} \alpha \nabla T \times \nabla p + \rho^{-1} \gamma \nabla s \times \nabla p, \tag{3.9}$$

где первое слагаемое описывает вихреобразующее действие *изобаро-изотермических*, а второе — *изобаро-изоконцентрационных* соленоидов. Поскольку ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ есть градиент гравитационного потенциала, оно не завихрено, и его вклад в $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$ равен нулю. Однако входящий в (3.9) вихрь архимедова ускорения не равен нулю; завихрены также, вообще говоря, и ускорение силы вязкости, и ускорение силы Лоренца (3.3). Вычислив еще дивергенцию ускорения (3.2) и его нормальную компоненту w_N на твердой стационарной границе S, получим

$$\mathrm{div}\,\mathbf{w} = \frac{dD}{dt} + \frac{1}{2}\Delta(u^2) - \mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}) = -\mathrm{div}\,\frac{\nabla p}{\rho} + \mathrm{div}\,\mathbf{f}; \tag{3.10}$$

$$w_N = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial N} + f_N = 0 \quad \text{на } S. \tag{3.11}$$

Как уже говорилось, система уравнеиий (3.8), (3.10), (3.11) эквивалентна уравнениям движения (с краевым условием $u_N=0$ на S).

§ 4. Потенциальный вихрь

Многие природные термогидродинамические процессы хотя бы приближенно адиабатичны (по меньшей мере, в течение достаточно малых промежутков времени), а если нарушения адиабатичности существенны, то именно они и создают специфику рассматриваемого процесса. Поэтому поле энтропии η (а если существенна ТАП, то и поле ее концентрации s) в геофизической гидродинамике требует специального внимания — так было, например, в § 2, где оказалось, что вертикальная устойчивость среды определяется стратификацией потенциальной плотности $\rho_*(\eta, s)$. В частности, представляют особый интерес направление $\mathbf{e}=\nabla\eta|\nabla\eta|^{-1}$ наибольшего изменения энтропии в данной точке (называемое *термодинамической вертикалью*, так как, по крайней мере в глобальных масштабах, поверхности $\eta=\text{const}$ приблизительно горизонтальны, и, значит, $\mathbf{e}$, как правило, приблизительно вертикально — см. ниже пример на рис. 4.1) и компоненты $A_e=\mathbf{e}\cdot\mathbf{A}$ векторных полей $\mathbf{A}$ по этому направлению. Для описания последних можно воспользоваться следующей легко доказываемой при помощи определения (3.7) гидродинамической теоремой (А. С. Монин, 1971): *для всякого векторного поля* $\mathbf{A}$ *и всякого скалярного поля* η, *удовлетворяющего уравнению (1.15), справедливо тождество*

$$\rho\frac{d}{dt}(\rho^{-1}\mathbf{A}\cdot\nabla\eta)=\nabla\eta\cdot\operatorname{helm}\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla\varepsilon_\eta. \tag{4.1}$$

Возьмем в качестве $\mathbf{A}$ абсолютный вихрь скорости $\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\omega}$, удовлетворяющий уравнению (3.8), и рассмотрим пока что случай отсутствия ТАП (например, сухой воздух или пресную воду), так что можно полагать $\eta=\eta(\rho, p)$, и, значит, $\nabla\eta(\nabla\rho\times\nabla p)=0$. Тогда из (4.1) и (3.8) получается

$$\rho\,d\Omega_*/dt=\nabla\eta\cdot\operatorname{rot}\mathbf{f}+(\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\omega})\cdot\nabla\varepsilon_\eta=\operatorname{div}[\eta\operatorname{rot}\mathbf{f}+\varepsilon_\eta(\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\omega})];$$

$$\Omega_*=\rho^{-1}(\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\omega})\cdot\nabla\eta. \tag{4.2}$$

(А. М. Обухов, 1962). Величина Ω_* называется *потенциальным вихрем* (К. Россби, 1940); объединяя в себе эффекты вращения $\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\omega}$ и стратификации $\nabla\eta$, функция $\Omega_*(\mathbf{x}, t)$ оказывается полем, наиболее специфическим для геофизической гидродинамики. Уравнение его эволюции (4.2) по существу является проекцией уравнения для вихря (3.8) на термодинамическую вертикаль. Если сила Лоренца не действует, то в (4.2) $\mathbf{f}$ — ускорение только сил вязкости, и при адиабатических процессах, когда $\mathbf{f}=\varepsilon_\eta=0$,

получается $d\Omega_*/dt=0$ (Г. Эртель, 1942), т. е. Ω_* есть *адиабатический лагранжев инвариант,* каковым *по определению* адиабатических процессов является и η (второе равенство А. М. Обухова (4.2) показывает, что $d\Omega_*/dt=0$, т. е. Ω_* является лагранжевым инвариантом, не только при адиабатических процессах в отсутствие силы Лоренца — для этого достаточно, чтобы векторное поле $\eta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{f}+\varepsilon_\eta(\Omega+2\omega)$ было соленоидальным).

Общая процедура построения адиабатических лагранжевых инвариантов (Б. Л. Гаврилин, М. М. Заславский, 1970) заключается в использовании для поля *абсолютной* скорости обобщенного представления Клебша $\mathbf{v}=\beta\nabla\eta+\lambda\nabla\mu+\nabla W$, где $I_1=\eta$, $I_2=\lambda$ и $I_3=\mu$ — первичные инварианты, $\beta=\int\limits_0^t T\,dt$ — *термодинамическое действие,* а $W=\int\limits_0^t \Lambda\,dt$ — *действие* с лагранжианом $\Lambda=\frac{v^2}{2}-\Phi-w$ (Φ — потенциал тяготения, w — энтальпия). По каждым трем инвариантам может быть построен новый инвариант $\rho^{-1}\nabla I_1(\nabla I_2\times\nabla I_3)$. Так, по инвариантам η, λ, μ получается $I_4=\Omega_*$, затем получаются инварианты Г. Хольмана (1964) $I_5=\rho^{-1}\lambda\nabla\mu(\nabla\eta\times\nabla\Omega_*)$, $I_6=\rho^{-1}\lambda\nabla\mu(\nabla\eta\times\nabla I_5)$ и $I_7=\rho^{-1}\nabla I_5\times(\nabla\eta\times\nabla\Omega_*)$ и т. д. (причем инвариантность I_1, I_4, I_5, I_6, I_7 еще не дает уравнения для определения W, а дает лишь пять уравнений относительно четырех неизвестных η, λ, μ и ρ).

Любая функция от η и Ω_*, очевидно, также будет адиабатическим лагранжевым инвариантом. Две такие независимые функции удобно принять за лагранжевы координаты жидких частиц. Соответствующие координатные поверхности рассекут среду на трубки, через стенки которых жидкость не протекает, так что адиабатическая эволюция среды будет заключаться в деформациях таких трубок. В качестве примера рассмотрим, следуя А. М. Обухову (1964), атмосферу из сухого воздуха с уравнением состояния (1.7) при $s=0$, в которой энтропия задается формулой

$$d\eta=c_p\,d\ln\Theta;\quad \Theta=T\,(p_0/p)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},\qquad (4.3)$$

где Θ — так называемая *потенциальная температура,* p_0 — стандартное давление, скажем, на уровне моря, причем, согласно (2.5), $\partial\Theta/\partial z=(\Theta/T)(\gamma_a-\gamma)$, где $\gamma=-\partial T/\partial z$ — вертикальный температурный градиент. Согласно статистическим подсчетам А. Оорта и Е. Расмуссона (1971), в реальной земной атмосфере в среднем за 1958—1963 гг. средние годовые значения Θ всюду растут с высотой (т. е. атмосфера гидростатически устойчива; довольно редкими исключениями являются иногда возникающие кое-где, осо-

бенно в тропиках, конвективные области), причем среднее давление на изэнтропических поверхностях $p_*(\Theta)$ убывает от 920 гПа при $\Theta = 260$ К до 100 гПа при $\Theta = 400$ К, а от экватора к полюсу на уровне 1000 гПа Θ убывает (от 299,5 К на экваторе до 261,2 К на 75° с. ш.), на уровне около 200 гПа меняется мало (равняется 345 К), а на уровне 50 гПа растет (от 489,2 до 522,7 К). Таким

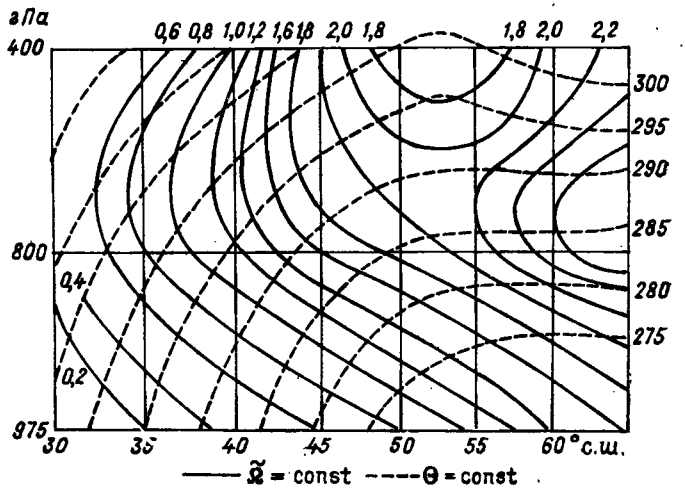


Рис. 4.1. Меридиональный разрез $(\Theta, \widetilde{\Omega})$-трубок на 100° з. д. за 1 апреля 1962 г., по А. М. Обухову (1964); $\widetilde{\Omega}$ в единицах 10^{-4} с$^{-1}$.

образом, в глобальных масштабах поверхности $\Theta = \text{const}$ квазигоризонтальны (так что Θ может служить вертикальной координатой), и приближенно $\Omega_* \approx \rho^{-1}(\Omega_z + 2\omega_z)(c_p/T)(\gamma_a - \gamma)$; поэтому А. М. Обухов избрал в качестве лагранжевых координат воздушных частиц значения Θ и величины

$$\widetilde{\Omega} = (\Omega_z + 2\omega_z)\frac{p_*(\Theta)}{p}\frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a - \gamma_*(\Theta)}, \qquad (4.4)$$

где $\gamma_*(\Theta)$ — средний вертикальный температурный градиент на изэнтропических поверхностях. В больших горизонтальных масштабах вне тропической зоны $\Omega_z + 2\omega_z \approx 2\omega_z = 2\omega\cos\theta$ (это так называемый *параметр Кориолиса*, обычно обозначаемый буквой f), так что координата $\widetilde{\Omega}$ может заменять широту. Следовательно, хорошее представление об инвариантных $(\Theta, \widetilde{\Omega})$-трубках могут давать их меридиональные разрезы; один из примеров таких разрезов приведен на рис. 4.1.

Пусть теперь $m(\Theta, \widetilde{\Omega})d\Theta d\widetilde{\Omega}$ — доля массы атмосферы, содержащаяся в бесконечно тонкой $(\Theta, \widetilde{\Omega})$-трубке. Тогда $m(\Theta, \widetilde{\Omega})$ имеет смысл плотности вероятности для координат Θ, $\widetilde{\Omega}$ случайно выбранной воздушной частицы. Согласно эмпирическим данным, эта вероятность сосредоточена в основном в области $280\ \text{K} < \Theta < 305\ \text{K}$; $0{,}5\ \text{с}^{-1} < 10^4\widetilde{\Omega} < 1{,}5\ \text{с}^{-1}$ с максимумом около точки $\Theta = 290$ K, $10^4\widetilde{\Omega} = 1\ \text{с}^{-1}$ и с минимумом в области $297\ \text{K} < \Theta < 305$ K; $2{,}2\ \text{с}^{-1} < 10^4\widetilde{\Omega} < 3{,}2\ \text{с}^{-1}$ (см. пример на рис. 4.2).

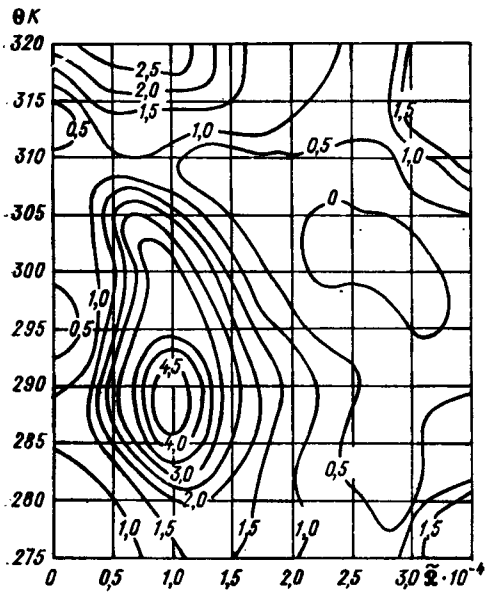


Рис. 4.2. Плотность вероятности $m(\Theta, \widetilde{\Omega})$ за период 1—10 апреля 1962 г., по А. Б. Каруиииу.

А. М. Обухов ввел понятие *эквивалентной зональной модели атмосферы* (ЭЗМА), имеющей такую же плотность вероятности $m(\Theta, \widetilde{\Omega})$, что и фактическая атмосфера. М. В. Курганский (1976) построил примеры приближенных двухуровенных ЭЗМА, в которых в качестве лагранжевых инвариантов использовались линеаризированные безразмерные значения потенциального вихря $\zeta_{1,2} = (2\omega)^{-1}[\Delta\psi_{1,2} + f \pm L_R^{-2}(\psi_1 - \psi_2)]$ на уровнях $p_1 = 700$ гПа и $p_2 = 300$ гПа, где $\psi_{1,2}$ — горизонтальные функции тока, а $L_R \sim HN/f$ — горизонтальный масштаб синоптических процессов (так называемый *радиус деформации Россби*), и подсчитывались плотности вероятности $m(\zeta_{1,2})$, оказавшиеся, в согласии с рис. 4.2, на верхнем уровне значительно более размытыми, чем на нижнем.

Вернемся теперь к более сложным средам, в которых роль ТАП в функции $\eta(\rho, p, s)$ существенна и слагаемое $\rho^{-2}\nabla\eta(\nabla\rho \times \nabla p)$ в правой части уравнения не равно нулю, так что потенциальный вихрь перестает быть лагранжевым инвариантом даже при адиабатических процессах. Однако это затруднение можно ослабить (А. С. Монин, 1974), вместо энтропии используя *псевдо-*

энтропию $\eta^*=\eta(\rho, p, s^*)$, т. е. энтропию, изопикнически и изобарически приведенную к некоторой стандартной концентрации примеси $s=s^*$ (значения при $s=s^*$ функций от ρ, p, s будем обозначать звездочками сверху), для которой из (1.2), (1.3), (1.6) вытекает соотношение

$$d\eta^*=\frac{c_p^*}{\rho\alpha^*T^*c^{*2}}(dp-c^{*2}d\rho), \tag{4.5}$$

и с учетом (1.15), (1.16) и (3.1) получается

$$\varepsilon^*=\frac{d\eta^*}{dt}=\frac{c_p^*}{\alpha^*T^*}\left(1-\frac{c^2}{c^{*2}}\right)D+\frac{\alpha Tc^2}{\alpha^*T^*c^{*2}}\frac{c_p^*}{c_p}\left[\varepsilon_\eta-\left(\delta+\frac{c_p\gamma}{\alpha T}\right)\varepsilon_s\right]. \tag{4.6}$$

Таким образом, при замене η, ε_η на η^*, ε^* уравнение (4.2) остается справедливым; велнчину $\Omega^*=\rho^{-1}(\Omega+2\omega)\cdot\nabla\eta^*$ при этом можно назвать *псевдопотенциальным вихрем*. Величины η^* и Ω^*, строго говоря, адиабатическими лагранжевыми инвариантами не являются, так как при $\varepsilon_\eta=\varepsilon_s=0$ величина ε^* не обращается в ноль, а равняется первому слагаемому в правой части равенства (4.6). Но это слагаемое обычно очень мало (а сравнивать его имеет смысл, например, с реальными значениями ε_η), как потому, что $c\approx c^*$ (например, в случае (1.8) $c^2/c^{*2}=\varkappa/\varkappa^*$), так и в случае квазисоленоидальных движений, когда $D\approx 0$ (что, как правило, верно для крупномасштабных движений), и тогда η^* и Ω^* можно приближенно считать адиабатическими лагранжевыми инвариантами.

Из (4.2) видно, что в магнитной гидродинамике учет силы Лоренца (3.3) нарушает адиабатическую инвариантность потенциального вихря. Зато в магнитной гидродинамике возникает другой адиабатический лагранжев инвариант. Так, положив в (4.1) $\mathbf{A}=\mathbf{H}$ и воспользовавшись уравнением индукции (3.6′), при любой функции $\eta(\rho, p, s)$ получаем

$$\rho\, dH_*/dt=-\nabla\eta\cdot\operatorname{rot}(\nu_m\operatorname{rot}\mathbf{H})+\mathbf{H}\cdot\nabla\varepsilon_\eta;\ H_*=\rho^{-1}\mathbf{H}\cdot\nabla\eta \tag{4.7}$$

(А. С. Монин, 1971). Отсюда видно, что в адиабатическом приближении, когда полагается $\nu_m=\varepsilon_\eta=0$ ($\nu_m=0$ означает пренебрежение омической диссипацией энергии магнитного поля, т. е. генерацией джоулева тепла, которая происходит со скоростью $\frac{\nu_m}{4\pi}\times$ $\times(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2$), получается $dH_*/dt=0$, так что величина H_*, которую можно назвать *зарядом магнитного поля*, оказывается лагранжевым нвариантом.

§ 5. Энергия

Запишем уравнения движения (3.2) в несколько ином виде:

$$\partial \rho \mathbf{v}/\partial t = -\operatorname{div} \Pi + \rho \nabla \Phi, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{v}$ — *абсолютная* скорость движения, Φ — потенциал тяготения, а Π — тензор гидромагнитных напряжений, имеющий декартовы компоненты:

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik} - \sigma'_{ik} - \Pi'_{ik}; \tag{5.2}$$

$$\sigma'_{ik} = \rho\nu \left(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i\right) + \rho\left(\nu_1 - \frac{2}{3}\nu\right) D\delta_{ik};$$

$$\Pi'_{ik} = (4\pi)^{-1}\left(H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}\right),$$

причем x_i, v_i, H_i — декартовы координаты, компоненты скорости и напряженности магнитного поля; δ_{ik} — единичный тензор; σ'_{ik} — вязкие напряжения (ν и ν_1 — кинематические коэффициенты вязкости); Π'_{ik} — магнитные напряжения Максвелла. Умножив (5.1) скалярно на $\mathbf{v}$, после тождественных преобразований получаем следующее *локальное* уравнение для плотности кинетической энергии $\rho v^2/2$:

$$\partial\left(\rho v^2/2\right)\partial t + \operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \mathbf{v}\cdot\sigma' - \mathbf{v}\cdot\Pi'\right] =$$

$$= pD - \sigma'_{ik}\,\partial v_i/\partial x_k - \Pi'_{ik}\,\partial v_i/\partial x_k + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi. \tag{5.3}$$

Выражение в квадратных скобках в левой части этого уравнения есть плотность потока кинетической энергии. Аналогично, умножив уравнение индукции (3.6) скалярно на $\mathbf{H}$, можно вывести следующее уравнение для плотности энергии магнитного поля $H^2/8\pi$:

$$\partial\left(H^2/8\pi\right)/\partial t + \operatorname{div}\left[\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) - \frac{\nu_m}{4\pi}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H} + \mathbf{v}\cdot\Pi'\right] =$$

$$= -\frac{\nu_m}{4\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2 + \Pi'_{ik}\,\partial v_i/\partial x_k. \tag{5.4}$$

В плотности потока магнитной энергии (в квадратных скобках в левой части этого уравнения) первые два слагаемых образуют так называемый вектор Пойнтинга—Умова в магнитогидродинамическом приближении. Далее, используя определение $\varepsilon = \varphi - p/\rho + T\eta$ и уравнение (1.1) и расшифровав правые части (1.15) и (1.16), для плотности внутренней энергии $\rho\varepsilon$ получаем уравнение

$$\partial\rho\varepsilon/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}\varepsilon + \mathbf{q}) =$$

$$= -pD + \sigma'_{ik}\,\partial v_i/\partial x_k + \frac{\nu_m}{4\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2 + Q, \tag{5.5}$$

где $\mathbf{q}$ — плотность потока внутренней энергии, создаваемого молекулярными процессами, а Q — плотность сторонних источников внутренней энергии. Сопоставляя правые части уравнений (5.3), (5.4) и (5.5), убеждаемся, что слагаемое pD описывает обмен между кинетической и внутренней энергией вследствие адиабатического нагревания или охлаждения среды при ее сжатии или расширении; слагаемое $\sigma'_{ik}\,\partial v_i/\partial x_k$ описывает вязкую диссипацию кинетической энергии в теплоту; $\Pi'_{ik}\,\partial v_i/\partial x_k$ описывает взаимные превращения кинетической и магнитной энергии благодаря работе пондеромоторных сил — напряжений Максвелла (где это слагаемое положительно — генерацию магнитного поля, где оно отрицательно — динамо-эффект, т. е. движение проводника с током в магнитном поле); $\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi$ описывает обмен между кинетической энергией и потенциальной энергией в поле тяжести ($-\rho\Phi$); наконец, слагаемое $(\nu_m/4\pi)\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2$ описывает омическую диссипацию магнитной энергии в джоулеву теплоту. Для полной энергии получается локальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon-\Phi\right)+\frac{H^2}{4\pi}\right]+\mathrm{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{\bar{p}}{\rho}+\varepsilon-\Phi\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H})-\mathbf{v}\cdot\sigma'-\frac{\nu_m}{4\pi}\mathbf{H}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{H}+\mathbf{q}\right]=Q. \qquad (5.6)$$

Выведем отсюда интегральное уравнение для полной энергии, ограничившись здесь немагнитным случаем (так что все слагаемые, содержащие $\mathbf{H}$, опускаются), но зато, имея в виду, в частности, Мировой океан, рассмотрим случай, когда объем V, занимаемый средой, ограничен снизу стационарной твердой поверхностью — «дном» с уравнением $z=-h(\mathbf{x}_h)$ (где $\mathbf{x}_h$ — горизонтальные координаты), а сверху — жидкой поверхностью раздела S с уравнением $z=\zeta(\mathbf{x}_h,\ t)$. Проинтегрируем локальное уравнение (5.6) по объему V, учитывая при этом тождества:

$$\int\frac{\partial A}{\partial t}\,dV=\frac{\partial}{\partial t}\int A\,dV-\int\widehat{A}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,d\Sigma; \qquad (5.7)$$

$$\int\mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dV=\int\widehat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{n}\,dS=\int\widehat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{n}\left[1+(\nabla\zeta)^2\right]^{1/2}d\Sigma, \qquad (5.8)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, $dS=[1+\nabla\zeta)^2]^{1/2}\,d\Sigma$ — элемент площади этой поверхности, $d\Sigma$ — элемент горизонтальной площади; крышечкой обозначаются значения функций на поверхности S; первое равенство (5.8) выражает теорему Гаусса—Остроградского. Воспользуемся также известным *кинематическим краевым условием на жидкой поверхности*

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\widehat{\mathbf{v}}\cdot\nabla\zeta+\widehat{v}_z=\widehat{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{n}\left[1+(\nabla\zeta)^2\right]^{1/2}. \qquad (5.9)$$

При помощи (5.7)—(5.9) интеграл по V от (5.6) приводится к виду

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} = -\int \hat{p}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\,d\Sigma + \int (\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\sigma}' - \hat{\mathbf{q}})\cdot\mathbf{n}\,dS + \int Q\,dV; \quad (5.10)$$

$$\mathscr{E} = \int \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon - \Phi\right) dm,$$

где $dm = \rho dV$ — элемент массы. При вычислении двух первых слагаемых в правой части следует учитывать, кроме кинематического краевого условия (5.9), также требования непрерывности скоростей, сил, температур и потоков тепла при переходе через жидкую поверхность раздела из одной среды в другую. Для сил такое требование записывается следующим образом:

$$\mathbf{n}(\hat{p} - \hat{p}_a) = -\mathbf{n}\gamma\hat{\rho}\,\mathrm{div}\{[1 + |\nabla\zeta|^2]^{-1/2}\nabla\zeta\} + \nabla(\gamma\hat{\rho}) + \mathbf{n}\cdot(\hat{\sigma}' - \hat{\sigma}_a'). \quad (5.11)$$

Здесь индексом a отмечены характеристики верхней среды (в случае поверхности океана — характеристики атмосферы). Первое слагаемое в правой части — это *поверхностное давление*, пропорциональное гауссовой кривизне поверхности S (множитель с дивергенцией); коэффициент пропорциональности $\gamma\hat{\rho}$ называется *коэффициентом поверхностного натяжения* (на границе вода—воздух $\gamma \approx 72{,}5$ см$^3\cdot$с$^{-2}$ при 20 °С). Второе слагаемое описывает эффект горизонтальных неоднородностей поверхностного натяжения, третье — различие вязких сил трения в двух средах на поверхности S. Если считать $\gamma\hat{\rho}$ квазипостоянным, то учет первого слагаемого в правой части (5.11) сводится к прибавлению к потенциальной энергии $\mathscr{P} = -\int \Phi dm$ слагаемого

$$\mathscr{P}_\gamma = \int \gamma\hat{\rho}\,\{[1 + (\nabla\zeta)^2]^{1/2} - 1\}\,d\Sigma. \quad (5.12)$$

При адиабатических процессах в уравнении (5.10) следует положить $\sigma' = \mathbf{q} = Q = 0$, а в (5.11) последнее слагаемое отпадает, и слагаемое $\nabla(\gamma\hat{\rho})$ надо опустить (так как оно направлено по касательной, а остающиеся слагаемые — по нормали к S), так что (5.10) принимает вид

$$(\partial/\partial t)(\mathscr{K} + \mathscr{L}) = -\int \hat{p}_a\frac{\partial\zeta}{\partial t}\,d\Sigma; \quad (5.13)$$

$$\mathscr{K} = \int \frac{v^2}{2}\,dm; \quad \mathscr{L} = \int (\varepsilon - \Phi)\,dm + \mathscr{P}_\gamma.$$

Здесь $\mathscr{K}$ — кинетическая, а $\mathscr{L}$ — так называемая *лабильная* энергия, складывающаяся из внутренней и потенциальной энергии.

В случаях, когда поверхность S является *свободной* (от внешних воздействий), так что правая часть уравнения (5.13) обращается в ноль (это выполняется, в частности, при $\widehat{p}_a = \text{const}$), полная энергия $\mathscr{K}+\mathscr{L}$ не меняется со временем. Таким образом, при адиабатических процессах возможен лишь обмен между кинетической и лабильной энергией. Ясно, что при таком обмене лабильная энергия не может спуститься ниже некоторого минимума $\mathscr{L}_*$, который можно назвать *недоступной* лабильной энергией. Разность $\Pi = \mathscr{L} - \mathscr{L}_*$, названная Э. Лоренцем (1956) *доступной потенциальной энергией*, есть максимальная кинетическая энергия, которая может быть получена за счет лабильной энергии при помощи адиабатических процессов. Величины $\mathscr{K}+\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_*$ (а потому и их разность $\mathscr{K}+\Pi$) суть адиабатические инварианты.

Недоступная лабильная энергия $\mathscr{L}_*$ должна определяться из вариационной задачи об условном минимуме $\mathscr{L}$, как функционала от пространственных распределений независимых термодинамических переменных, при условии, что их вариации удовлетворяют требованиям неразрывности и адиабатичности, и при фиксированных полной массе, энергии, энтропии и количестве ТАП. Можно предположить (аналогично Э. Лоренцу, рассматривавшему сухой воздух с уравнением состояния (1.7) при $s=0$), что в состоянии с $\mathscr{L}=\mathscr{L}_*$ все термодинамические параметры постоянны вдоль линий тока адиабатического движения, т. е. могут быть функциями только от η и s. Обозначая эти функции звездочками снизу, получаем

$$\Pi = \int [\rho\varepsilon - \rho_{**}\varepsilon_{**} - \Phi(\rho - \rho_*)]\, dV. \tag{5.14}$$

Рассмотрим, как пример, земную атмосферу из сухого воздуха с уравнением состояния (1.7) при $s=0$. Ее внутренняя энергия $\mathscr{I} = \int c_v T dm$ оценивается в $8{,}6 \cdot 10^{23}$ Дж (или для столба единичного сечения в $1{,}7 \cdot 10^9$ Дж/м^2); потенциальная энергия $\mathscr{P} = \int gz\, dm$ в квазистатическом приближении равна $\int RT\, dm$ (так как тогда

$$\int gz\rho\, dz = -\int z\, dp = \int p\, dz = \int R\rho T\, dz\Big)$$

и оценивается в $3{,}6 \cdot 10^{23}$ Дж (или $7{,}2 \cdot 10^8$ Дж/м^2); лабильная энергия

$$\mathscr{L} = \mathscr{I} + \mathscr{P} = \int (c_v + R) T\, dm = \int c_p T\, dm = \int c_p \Theta (p/p_0)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\, dm. \tag{5.15}$$

оказывается равной $1{,}22 \cdot 10^{24}$ Дж (или $2{,}42 \cdot 10^9$ Дж/м^2). По ука-

занному выше правилу значение $\mathcal{J}_*$ получается из (5.15) заменой p на постоянное на изэнтропических поверхностях давление $p_*(\Theta)$ (вводившееся в формуле (4.4) выше), и тогда

$$\Pi = \int c_p \Theta \left\{ \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - \left[\frac{p_*(\Theta)}{p_0}\right]^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \right\} dm. \qquad (5.16)$$

По оценке А. Оорта (1964), эта величина равна $5{,}5 \cdot 10^6$ Дж/м^2, т. е. только около 0,2 % $\mathcal{L}$ (а $\mathcal{K} = 1{,}5 \cdot 10^6$ Дж/м^2, т. е. около четверти П). Если атмосферу адиабатически привести к состоянию с нейтральной стратификацией (в котором $\partial\Theta/\partial z = 0$), то значение $\mathcal{L}_1$ лабильной энергии в этом состоянии получится из правой части (5.15) заменой в подынтегральной функции множителя $p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ его средним по массе в вертикальном столбе воздуха значением $\frac{\varkappa}{2\varkappa-1} p_s^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$, где p_s — наземное давление. Величина $\mathcal{L}_1$ также является адиабатическим инвариантом. Разность $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}$, называемая *параметром макроустойчивости*, определяет количество кинетической энергии, освобождаемой или затрачиваемой при адиабатическом переходе от фактической стратификации атмосферы к нейтральной (для трехпараметрических сред, содержащих ТАП, нейтральные стратификации, а потому и параметры макроустойчивости многообразны).

В заключение этого параграфа заметим, что для исследования гидродинамической устойчивости движения среды полезно рассмотреть адиабатический инвариант $\mathcal{E} + \mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = \int \varphi(\eta, \Omega_*) dm$ при квадратичной по Ω_* функции φ — некоторая мера неоднородности поля Ω_*. При адиабатических малых возмущениях движения главная часть функционала $\mathcal{E} + \mathcal{F}$ остается инвариантной во времени, и если она положительно-определенна, то движение устойчиво относительно малых возмущений.

§ 6. Системы гидродинамического типа

В большинстве случаев при практическом решении конкретных гидродинамических задач *непрерывные* поля, описывающие состояние среды, приходится приближенно заменять *дискретными* (и конечными) наборами параметров. Так, например, непрерывно стратифицированную среду приближенно заменяют конечным числом горизонтальных слоев и рассматривают термогидродинамические поля лишь на их границах. Вообще, при эйлеровом описании движения пространство, заполненное жидкостью или газом, разбивают на ячейки и состояние среды характеризуют значе-

ниями термогидродинамических полей в центрах ячеек, связывая эти значения в разных точках выбранной пространственной сетки разностными уравнениями, выводимыми из уравнений гидродинамики. Аналогично разбивают на ячейки пространство лагранжевых координат, приписывая центрам ячеек их суммарные массы (метод *конечных элементов*) и выводя из лагранжевых уравнений гидродинамики выражения для сил, действующих на конечные элементы.

Наконец, по *методу Галеркина* термогидродинамические поля приближенно представляются в виде линейных комбинаций конечного числа некоторых базисных функций, причем коэффициенты таких линейных комбинаций и образуют конечный набор параметров, описывающий состояние среды (Б. Г. Галеркин, 1915). Продемонстрируем этот метод на примере краевой задачи с начальными значениями для уравнений Навье—Стокса, описывающих движение несжимаемой однородной вязкой жидкости в пространственной области V, ограниченной твердой поверхностью S. В этом случае $\rho = \text{const}$, уравнение неразрывности (3.1) принимает вид $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, а уравнения движения (3.2) записываются в виде

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla p/\rho + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}, \tag{6.1}$$

где, как и в (5.2), ν — кинематический коэффициент вязкости, а $\mathbf{f}$ — ускорение внешних массовых сил; краевые условия имеют вид $\mathbf{v} = 0$ на S. начальные значения $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$. Решение $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ищется в функциональном пространстве R бездивергентных векторных полей в области V с нулевыми значениями на поверхности S, в котором будем использовать «скалярное произведение» $[\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2] = \int \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 dV$. Следуя Н. Н. Брушлинской (1964) и О. А. Ладыженской (1970), выберем в R в качестве базиса полную систему ортонормированных собственных функций $\psi_k(\mathbf{x})$ уравнения

$$\nu \Delta \psi_k = -\mu_k \psi_k; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.2}$$

и будем искать приближенное решение уравнения (6.1) (n-е галеркинское приближение) в виде

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) = u^k(t)\,\psi_k(\mathbf{x}); \quad k = \overline{1, n}, \tag{6.3}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n. Подставим (6.3) в (6.1), умножим обе части получившегося равенства скалярно на $\psi_i(\mathbf{x})$ и проинтегрируем по области V. Слагаемое с градиентом давления при этом пропадает вследствие нулевых значений на S функций из R, так как $[\psi_i \times \nabla p] = \int p\mathbf{n} \cdot \psi_i\, dS = 0$ (так что галеркинская процедура, как и

оператор rot, исключает из уравнений движения поле давления), и получается

$$\dot{u}^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}u^j u^k - \nu\mu_i u^i + f^i; \quad i = \overline{1, n};$$

$$\Gamma^i_{jk} = -2[\psi_i \cdot (\psi_j \cdot \nabla)\psi_k]; \quad f^i = [\psi_i \cdot \mathbf{f}] \tag{6.4}$$

(в исключение из общего правила здесь суммирование по i *не* подразумевается). Таким образом, «параметры» $u^i(t)$ определяются из системы n обыкновенных дифференциальных уравнений (6.4) при начальных условиях $u^i(0) = [\psi_i \cdot \mathbf{v}_0]$. Далее будем уделять специальное внимание случаю с отсутствием вязкости и внешних сил, в котором полная кинетическая энергия $E = {}^1/_2\rho \times \times [\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n] = {}^1/_2\rho \sum\limits_i (u^i)^2$ не должна меняться со временем, т. е. $\partial E/\partial t = 0$; согласно уравнению (6.4), при $\nu = f^i = 0$ это условие приводится к виду

$$\Gamma^i_{jk}u^i u^j u^k \equiv 0. \tag{6.5}$$

Кроме того, в этом случае, как показал впервые Т. Ли (1952), при надлежащей конечномерной аппроксимации уравнений гидродинамики выполняется условие *регулярности*, т. е. сохранения фазового объема $\partial\dot{u}^k/\partial u^k = 0$, так же, как для гамильтоновых систем (теорема Лиувилля).

Следуя далее в этом параграфе А. М. Обухову (1969) и его последующим работам с соавторами, для обобщения перечисленных свойств галеркинских аппроксимаций уравнений гидродинамики используем понятие *систем гидродинамического типа* (СГТ) — регулярных систем с n степенями свободы $u^1, \ldots, u^n$, квадратично-нелинейными уравнениями движения

$$\dot{u}^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}u^j u^k \tag{6.6}$$

(где *динамический тензор* Γ^i_{jk} можно считать симметричным по нижним индексам, так что он имеет $n^2(n+1)/2$ компонент) и по крайней мере одним квадратичным положительно-определенным интегралом движения (*энергией*)

$$E = \frac{1}{2}g_{ik}u^i u^k \tag{6.7}$$

(где g_{ik} — положительно-определенный *метрический тензор*, который может использоваться для опускания индексов — например, $g_{i\lambda}\Gamma^\lambda_{jk} = \Gamma_{i,\,jk}$; взаимный тензор g^{ik}, удовлетворяющий условию $g^{ik}g_{\lambda k} = \delta^i_k$, где δ^i_k — единичный тензор, может использоваться для поднятия индексов; представление, в котором $g_{ik} = \delta_{ik}$, так что $E = {}^1/_2\sum\limits_i (u^i)^2$, называется *энергетическим*, оно отвечает

некоторому выбору ортогональных координат $u^1, \ldots, u^n$). Требование сохранения энергии $\dot{E} \equiv 0$ вследствие уравнений движения налагает на *динамический тензор* $n(n+1)(n+2)/6$ условий

$$\Gamma_{i,\,jk} + \Gamma_{j,\,ki} + \Gamma_{k,\,ij} = 0. \tag{6.8}$$

Требование регулярности $\partial \dot{u}^i / \partial u^i = \Gamma^i_{ik} u^k \equiv 0$ дает n условий

$$\gamma_k = \Gamma^i_{ik} = 0. \tag{6.9}$$

Нетрудно убедиться, что требование регулярности необходимо и достаточно для инвариантности во времени *канонического распределения* $f(\mathbf{u}) = C \exp(-E/\Theta)$ (где Θ — аналог температуры), описывающего «белый шум», так что регулярные системы (и только они) неспособны преобразовывать белый шум в какое-либо иное распределение — это свойство СГТ аналогично второму закону термодинамики.

При условиях (6.8) и (6.9) динамический тензор $\Gamma_{i,\,jk}$ имеет $N = n^2(n+1)/2 - n(n+1)(n+2)/6 - n = n(n^2-4)/3$ независимых компонент. Это число положительно лишь при $n \geqslant 3$, так что минимально возможное количество степеней свободы у СГТ равно трем (при $n=2$, оставляя в стороне требование регулярности (6.9), но используя условие сохранения энергии (6.8), уравнения движения (6.6) можно при помощи линейных преобразований привести к виду $\dot{u}^1 = (u^2)^2$, $\dot{u}^2 = -u^1 u^2$, но при этом будет $\partial \dot{u}^i / \partial u^i = -u^1 \not\equiv 0$, вследствие чего движение оказывается непериодическим — u^1 монотонно растет со временем). Пример СГТ с тремя степенями свободы можно получить, рассматривая вихревое движение несжимаемой однородной идеальной жидкости внутри эллипсоида (с поверхностью S, задаваемой уравнением $S \equiv a_1^{-2}x_1^2 + a_2^{-2}x_2^2 + a_3^{-2}x_3^2 - 1 = 0$), которое, согласно (3.8) при $\rho \equiv \equiv \text{const}$ и $\mathrm{f} = 0$, описывается *уравнением Гельмгольца*

$$\begin{aligned} &\operatorname{helm} \boldsymbol{\Omega} = 0; \quad \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}; \\ &\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) S = 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Введем *однородные* (т. е. с $\boldsymbol{\Omega} \equiv \text{const}$) «эллиптические вращения» вокруг главных осей эллипсоида с линейно зависящими от пространственных координат x_i полями скорости

$$\psi_i(\mathbf{x}) = -\frac{a_j}{a_k} x_k \mathbf{e}_j + \frac{a_k}{a_j} x_j \mathbf{e}_k, \tag{6.11}$$

где (i, j, k) — циклические перестановки индексов (1, 2, 3), причем суммирование по повторяющимся индексам здесь не предполагается, а $\mathbf{e}_i$ — единичные векторы, направленные по главным полуосям эллипсоида. Введем еще так называемые *параметры*

Пуанкаре $\omega_i = a_j a_k (a_j^2 + a_k^2)^{-1}\Omega_i$, так что при $\omega_i = \text{const}$ поля скорости $\mathbf{v} = \omega_i \psi_i(\mathbf{x})$ будут стационарными решениями уравнений (6.10), а нестационарные решения будем искать в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i(t)\, \psi_i(\mathbf{x}). \tag{6.12}$$

Подставив это выражение в уравнение Гельмгольца, для переменных $\omega_i(t)$ получим СГТ третьего порядка (так называемый *триплет*) с уравнениями:

$$I_i \dot{\omega}_i = (I_k - I_j)\,\omega_j \omega_k;$$
$$I_i = a_j^2 + a_k^2. \tag{6.13}$$

Если ввести векторы $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$, где I — диагональная матрица с диагональными элементами I_1, I_2, I_3, то уравнения триплета можно переписать в векторной форме

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}. \tag{6.13'}$$

С точностью до замены $\boldsymbol{\omega}$ на $-\boldsymbol{\omega}$ эта СГТ совпадает с уравнениями Эйлера для движения гироскопа с тензором моментов инерции I, угловой скоростью вращения $\boldsymbol{\omega}$ и кинетическим моментом $\mathbf{M}$ в системе отсчета, связанной с его телом. Уравнения Эйлера имеют два квадратичных интеграла движения — кинетическую энергию $E = {}^1/_2 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}$ и квадрат кинетического момента $J = M^2$ (так что $\dot{E} = \dot{J} = 0$); для «жидкого гироскопа» кинетическая энергия равна $K = {}^1/_5 mE$, где $m = {}^4/_3 \pi a_1 a_2 a_3 \rho$ — масса жидкости внутри эллипсоида, а $J = \pi^{-2}(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)$ — сумма квадратов циркуляций $\Gamma_i = \pi a_i^{-1} a_1 a_2 a_3 \Omega_i$ по контурам главных сечений эллипсоида.

Триплет является не только примером, но и общим видом СГТ третьего порядка (в том смысле, что каждая такая СГТ может быть приведена в форму триплета ортогональным преобразованием ее фазовых координат). Действительно, при $n = 3$ динамический тензор СГТ имеет $N = n(n^2 - 4)/3 = 5$ независимых компонент $\Gamma_{i,\,jk}$, как и симметричный тензор второго ранга A_k^i с нулевым следом A_i^i. Установив между ними соответствие формулой $A_k^i = \varepsilon^{ijl}\Gamma_{j,\,lk}$, где ε^{ijl} — полностью асимметричный тензор, и приведя матрицу A_k^i при помощи ортогонального преобразования к диагональному виду A'_{ij}, можно убедиться, что получится $\Gamma'_{i,\,jk} = {}^1/_3(A'_{kk} - A'_{jj})$ (с определением индексов, как в (6.11)), т. е. СГТ примет форму триплета. Эта общая роль триплета заставляет уделить его изучению специальное внимание. Опишем

свободное движение триплета (6.13′), положив для определенности $I_1 > I_2 > I_3$ и записав его инварианты в виде

$$I_1^{-1}M_1^2 + I_2^{-1}M_2^2 + I_3^{-1}M_3^2 = 2E; \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = J. \qquad (6.14)$$

В осях M_1, M_2, M_3 это суть уравнения поверхностей эллипсоида с полуосями $\alpha_i = (2EI_i)^{1/2}$ и сферы радиусом $J^{1/2}$, так что конец вектора **M** движется по линии пересечения этих поверхностей. При касании сферы и эллипсоида в точках $M = \alpha_1$ или $M = \alpha_3$ в них достигается соответственно максимум или минимум энергии, чему отвечают стационарные *устойчивые* вращения вокруг осей M_1 или M_3 (они устойчивы, так как при малых отклонениях от них траектории $\mathbf{M}(t)$ суть замкнутые кривые, окружающие невозмущенные точки). При $M = \alpha_2$ поверхности (6.14) пересекаются по *сепаратрисе* — двум плоским кривым (окружностям), пересекающимся в *седловых* точках на оси M_2, и этому соответствует *неустойчивое* вращение вокруг оси M_2 (при малых отклонениях от которого траектории, проходящие около седловой точки, затем уходят далеко от нее).

В использованных немного выше энергетических переменных (которые обозначим x_i), когда матрица с нулевым следом A'_{ij} диагональна, обозначим $p_i = \Gamma'_{i,\,jk}$, так что будет $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, и пусть p_1 и p_3 положительны, а p_2 отрицательно, т. е. x_2 — неустойчивая мода. Введем три интеграла движения $S_i = p_j^{-1}x_j^2 - p_k^{-1}x_k^2$, связанных соотношением $S_1 + S_2 + S_3 = 0$, или эквивалентные им интегралы $\varepsilon_i = S_k - S_j$, которые нормируем по формуле $e_i = -(4/3)^{1/3}p_1p_2p_3\varepsilon_i$. Если ввести $\gamma = 6^{-1/3}(e_1 - e_3)^{1/2}$, то известно, что уравнения триплета решаются в эллиптических функциях Якоби:

$$x_1 = A_1 \operatorname{dn}\gamma t; \quad x_2 = A_2 \operatorname{cn}\gamma t; \quad x_3 = A_3 \operatorname{sn}\gamma t, \qquad (6.15)$$

где начало отсчета времени выбрано так, чтобы при $t = 0$ было $x_3 = 0$, амплитуды определяются формулами $A_i = 6^{-1/3}\left(\dfrac{e_k - e_j}{p_jp_k}\right)^{1/2}$, а модуль k эллиптических функций определяется формулой

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2} = \frac{(I_2 - I_3)\,(2EI_1 - J)}{(I_1 - I_2)\,(J - 2EI_3)}. \qquad (6.16)$$

Функции (6.15) — периодические с периодом $4\gamma^{-1}K(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При малых k^2 (когда $I_3 \ll I_2$) они вырождаются в тригонометрические ($\operatorname{sn}\tau \approx \sin\tau$; $\operatorname{cn}\tau \approx \cos\tau$; $\operatorname{dn}\tau \approx 1$), а при $k^2 \approx 1$ траектория системы близка к сепаратрисе. Примеры функций (6.15) при $k^2 = 0{,}4$ и $k^2 = 0{,}999$ показаны на рис. 6.1.

Вынужденное движение триплета реализовать в лабораторных условиях, раскручивая жидкость внутри эллипсоида некоторым полем момента внешних сил (например, в случае электропроводной

жидкости, скажем, ртути, — силы Лоренца (3.3)), затруднительно из-за того, что обеспечить линейную зависимость (6.11) поля скорости от пространственных координат мешает прилипание жидкости к стенкам и возникновение около них пограничного слоя. Но если поле момента внешних сил линейно зависит от пространственных координат, то пограничный слой лишь притормаживает жидкое ядро эллипсоидальной формы с приблизительно линейным внутренним распределением скоростей. Считая такое торможение пропорциональным угловой скорости вращения ядра,

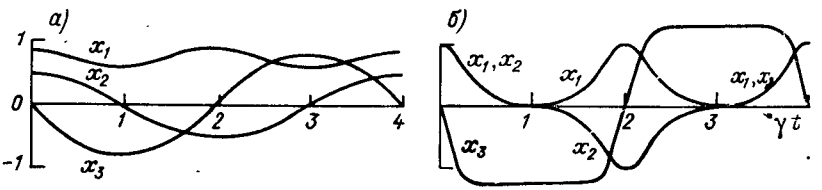


Рис. 6.1. Примеры функций (6.15) при $k^2=0{,}4$ (*а*) и 0,999 (*б*).

это вращение можно описать уравнением вынужденного движения триплета

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \lambda \mathbf{M} + \mathbf{F} \tag{6.17}$$

при $\lambda = \text{const}$ и $\mathbf{F} = \text{const}$. Положим для определенности $a_1 > a_2 > a_3$ и ограничимся далее наиболее интересным случаем, когда момент внешних сил действует в направлении неустойчивого вращения, т. е. $\mathbf{F} = (0, F, 0)$ (и когда $I_2 = (I_1 + I_3)/2$, тогда, как можно показать, энергия неустойчивой моды будет наиболее быстро передаваться другим модам). Введем в (6.17) новые переменные и параметры:

$$u_1 = I_2^{1/2}\omega_2;\quad u_2 = (I_1/2)^{1/2}\omega_1 + (I_3/2)^{1/2}\omega_3;\quad u_3 = (I_3/2)^{1/2}\omega_3 - (I_1/2)^{1/2}\omega_1;$$
$$f = I_2^{-1/2}F;\quad L = p^{-1} = 2(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}(a_2^2 + a_3^2)^{1/2}(a_3^2 + a_1^2)^{1/2}(a_1^2 - a_3^2)^{-1}. \tag{6.18}$$

Тогда уравнения (6.17) примут вид:

$$\dot{u}_1 = p(u_3^2 - u_2^2) - \lambda u_1 + f;\quad \dot{u}_2 = p u_1 u_2 - \lambda u_2;\quad \dot{u}_3 = -p u_1 u_3 - \lambda u_3. \tag{6.19}$$

Они имеют три стационарных решения. Одно из них, которое назовем A, имеет вид $u_1 = f/\lambda$, $u_2 = u_3 = 0$. Два других, которые назовем B и B', при $f > 0$ имеют вид $u_1 = \lambda/p$, $u_2 = \pm\left(\frac{f}{p} - \frac{\lambda^2}{p^2}\right)^{1/2}$, $u_3 = 0$, а при $f < 0$ они имеют вид $u_1 = -\lambda/p$, $u_2 = 0$, $u_3 = \pm\left(\frac{|f|}{p} - \frac{\lambda^2}{p^2}\right)^{1/2}$. Исследование показывает, что их устойчивость зависит от эффек-

тивного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=|fp\lambda^{-2}|$. При $\mathrm{Re}<1$ имеется только одно стационарное решение A, и оно устойчиво. При $\mathrm{Re}=1$ все три решения совпадают. При $\mathrm{Re}>1$ решение A неустойчиво, и любое возмущение «опрокидывает» триплет из состояния A в одно из двух устойчивых состояний B или B' (в зависимости от знака начального возмущения).

Рассмотрим далее для определенности случай $f>0$ (противоположный случай рассматривается аналогично). В нем при начальном значении $u_3=0$ получается $u_3\equiv 0$, и после перенормировки $pu_1/\lambda\to u_1$, $pu_2/\lambda\to u_2$, $\lambda t\to t$ уравнения (6.19) приводятся к виду:

$$\dot{u}_1=\mathrm{Re}-u_1-u_2^2,\quad \dot{u}_2=-u_2+u_1u_2. \tag{6.20}$$

В фазовой плоскости u_1, u_2 (рис. 6.2) их стационарные решения изображаются точками A ($u_1=\mathrm{Re}$, $u_2=0$, на вершине параболы $u_1=\mathrm{Re}-u_2^2$), B и B' ($u_1=1$, $u_2=\pm(\mathrm{Re}-1)^{1/2}$, на пересечениях параболы с прямой $u_1=1$). При $\mathrm{Re}<1$ точка A — *узел*, в который устремляются все фазовые траектории. С ростом Re после бифуркации при $1<\mathrm{Re}<{}^9/_8$ фазовые траектории отталкиваются от A и притягиваются к узлам B или B' (в зависимости от начального знака u_2). После новой бифуркации при $\mathrm{Re}>{}^9/_8$ узлы B и B' сменяются *фокусами*, так что вместо монотонного движения к точкам B или B' система совершает около них затухающие нелинейные колебания.

Рассмотрим теперь случай, когда кроме регулярной внешней силы $\mathbf{F}=(0,\ F,\ 0)$ на триплет действуют еще случайные силы $\mathbf{F}'(t)$, скажем, в виде «белого шума», так что уравнения (6.19) после перенормировки, использованной в (6.20), приводятся к виду:

$$\dot{u}_1=\mathrm{Re}-u_1-u_2^2+u_3^2+f_1'(t);$$
$$\dot{u}_2=-u_2+u_1u_2+f_2'(t);\quad \dot{u}_3=-u_3-u_1u_3+f_3'(t), \tag{6.21}$$

причем математическое ожидание случайных сил $\langle f_i'(t)\rangle$ равно нулю, а их корреляционная функция равна $\langle f_j'(t+\tau)f_j'(t)\rangle=2\sigma^2\delta_{ij}\delta(\tau)$.

Пусть $\mathrm{Re}>1$; тогда при осреднении по ансамблю реализаций случайных сил для компоненты u_2 сформируется стационарное распределение вероятностей с максимумами в окрестностях точек $u_\lambda=\pm(\mathrm{Re}-1)^{1/2}$ и минимумом в точке $u_2=0$, соответствующей неустойчивому состоянию. Если имеется некоторая реализация $\mathbf{f}'(t)$ и система пришла в одно из наиболее вероятных состояний, то через некоторое время T при появлении достаточно больших значений $|\mathbf{f}'|$ она может быть переброшена в другое наиболее вероятное состояние (А. М. Обухов назвал это *явлением переброса*; оно может играть большую роль в геофизике). Период T

должен быть тем больше, чем меньше σ^2 (т. е. чем реже появляются большие значения $|f'|$) и чем больше Re (т. е. чем больше

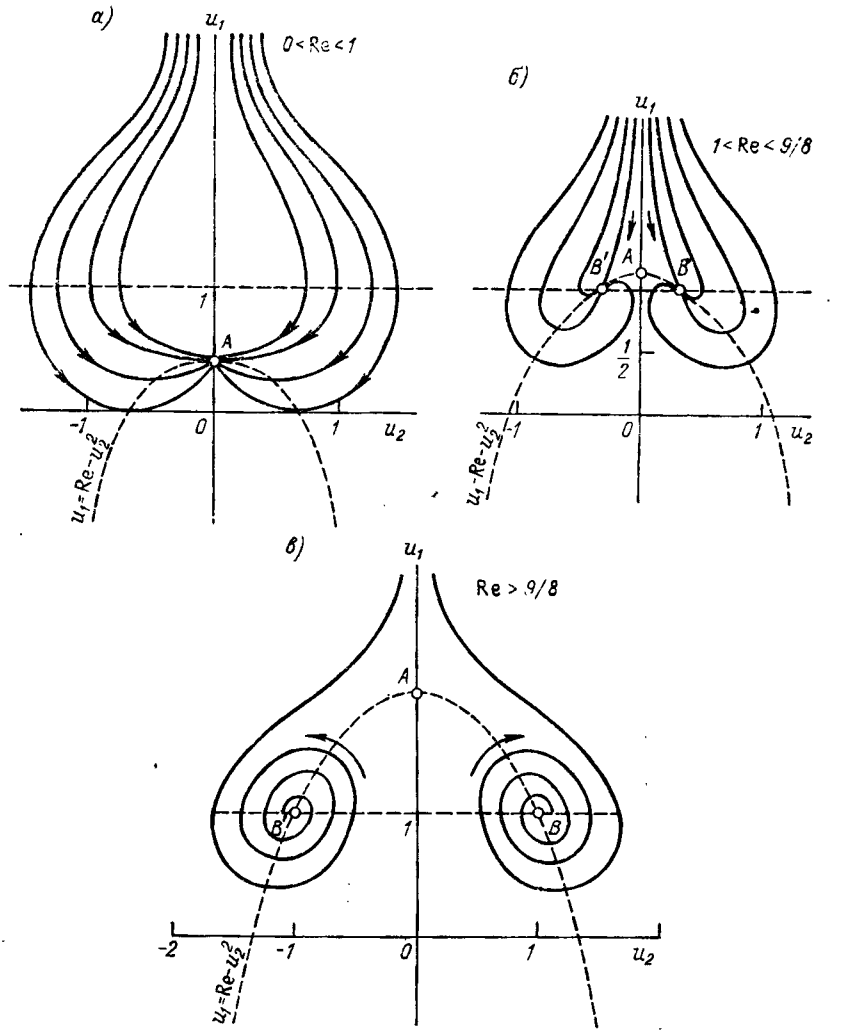


Рис. 6.2. Фазовые портреты жидкого гироскопа (6.20).
а) при $0<Re<1$, *б)* при $1<Re<9/8$, *в)* при $Re>9/8$.

расстояние между наиболее вероятными значениями u_2). В рассчитанных А. М. Обуховым с соавторами примерах численного интегрирования уравнений (6.21) с $Re=6$ при $\sigma=0{,}01$ переброс не наблюдался, а при $\sigma=0{,}1$ он произошел за время $T\sim 10$.

Таким образом, под действием слабых, например, тепловых шумов переброс в триплете практически невозможен. А. М. Обухов с соавторами доказал, что этот вывод остается в силе и при замене в (6.17) линейного трения $\lambda\mathbf{M}$ квадратичным. В то же время их лабораторные эксперименты с жидким гироскопом показали, что переброс в нем происходит после дозированного (т. е. на некоторое определенное время T_1) отключения внешней силы $\mathbf{F}$, создававшейся мешалкой, вращающейся по средней оси эллипсоида, причем T_1 получалось тем меньше, чем быстрее вращение (для аналитического описания переброса оказалось необходимым использовать СГТ, более сложную, чем триплет). Заметим, что если внешнюю силу отключать и включать с периодом $T_2 \gg T_1$, то последовательность перебросов будет иметь период $2T_2$ — такое *удвоение периода* свойственно явлению *параметрического резонанса*, возникающему в некоторых колебательных системах при периодическом изменении их параметров в результате внешних воздействий. Типичным примером является маятник с колеблющимся (с периодом $T=2\Pi/\omega$) подвесом, движение которого описывается уравнением Матье

$$\ddot{x} + a^2(1 + \varepsilon\cos\omega t)\,x = 0. \tag{6.22}$$

При $\varepsilon \ll 1$ и $a \approx \omega/2$ это уравнение имеет периодические решения с периодом $2T$. Аналогичным механизмом А. М. Обухов предлагает объяснять квазидвухлетнюю цикличность циркуляции земной атмосферы, наиболее ярко проявляющуюся в смене направлений зонального ветра в экваториальной стратосфере, причем происходящий изредка в природе «переброс» в противоположную фазу двухлетнего цикла (или, наоборот, пропуск очередного годичного «переброса») приводит к небольшому увеличению *среднего* периода этой цикличности (до 26 месяцев).

Более сложные, чем триплет, СГТ можно строить, как суперпозиции триплетов, определяя для них динамический тензор формулой

$$\Gamma_{i,\,jk} = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha \Gamma^{(\alpha)}_{i,\,jk}, \tag{6.23}$$

где $\Gamma^{(\alpha)}_{i,\,jk}$ — динамические тензоры триплетов, компоненты которых отличны от нуля лишь при значениях индексов i, j, k, соответствующих номерам координат u^i соответствующего триплета. В качестве примера рассмотрим магнитогидродинамическое обобщение уравнения Гельмгольца (6.10) для сверхпроводящей жидкости внутри эллипсоида

$$\operatorname{helm}\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{f}_L; \quad \operatorname{helm}\mathbf{H} = 0, \tag{6.24}$$

где $\mathbf{f}_L$ — ускорение силы Лоренца (3.3). Используя для напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ представление, аналогичное (6.12),

с параметрами Пуанкаре $h_i(t)$, вместо уравнения триплета (6.13′) получим

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{j} \times \mathbf{h}; \quad \dot{\mathbf{h}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}, \tag{6.25}$$

где $\mathbf{j} = I\mathbf{h}$, а I — та же диагональная матрица, что и в определении $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$. СГТ шестого порядка (6.25) можно представить в виде суперпозиции четырех триплетов $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, (ω_1, h_2, h_3), (ω_2, h_1, h_3) и (ω_3, h_1, h_2):

$$\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 &= (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 + (I_3 - I_2)h_2h_3 + (I_1 - I_3)h_3h_1 + (I_2 - I_1)h_1h_2\\
I_2\dot{\omega}_2 &= (I_1 - I_3)\,\omega_3\omega_1 \qquad\qquad - h_3\omega_2 \qquad\quad + h_2\omega_3\\
I_3\dot{\omega}_3 &= (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2 \qquad\qquad + h_3\omega_1 \qquad\quad - h_1\omega_3\\
\dot{h}_1 &= \qquad\qquad - h_2\omega_1 \qquad\quad + h_1\omega_2\\
\dot{h}_2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\\
\dot{h}_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad
\end{aligned}$$

Здесь второй, третий и четвертый триплеты имеют зацепления как с первым, так и друг с другом. Более простые, только однократные зацепления оказываются достаточными для моделирования каскадного процесса передачи кинетической энергии от крупномасштабных движений к мелкомасштабным. Пусть внешняя сила f подводит энергию к неустойчивой моде u_{11} первого триплета (первый индекс у моды будет указывать номер «яруса» в каскаде, второй — номер моды на этом ярусе). Эта энергия может передаваться одной или обеим устойчивым модам первого триплета u_{21} и u_{22}. Они становятся неустойчивыми модами двух следующих триплетов и могут передавать энергию устойчивым модам последних, т. е. $u_{21} \to (u_{31}, u_{32})$, $u_{22} \to (u_{33}, u_{34})$ и т. д. Таким образом, получается цепочка уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{11} &= f - \lambda_1 u_{11} + p_1\left(v_{21}^2 - u_{22}^2\right);\\
\dot{u}_{i,\,2k-1} &= -\lambda_i u_{i,\,2k-1} - p_{i-1}u_{i-1,\,k}u_{i,\,2k-1} + p_i\left(u_{i+1,\,4k-3}^2 - u_{i+1,\,4k-2}^2\right);\\
\dot{u}_{i,\,2k} &= -\lambda_i u_{i,\,2k} + p_{i-1}u_{i-1,\,k}u_{i,\,2k} + p_i\left(u_{i+1,\,4k-1}^2 - u_{i+1,\,4k}^2\right),
\end{aligned} \tag{6.26}$$

где $i = 2, 3, \ldots$, причем, $1 \leqslant k \leqslant 2^{i-1}$, а волновые числа p_i и коэффициенты трения λ_i растут с увеличением их номера (например, $\lambda_i \sim \nu p_i^2$). В такой разветвляющейся n-ярусной системе можно возбудить 2^n равновероятных цепочек, но между ними на каждом ярусе возможны перебросы, и если переброс происходит на раннем ярусе, то вся последующая цепочка отмирает — это приво-

дит к явлению перемежаемости на поздних ярусах. Пусть $\varepsilon = fu_{11}$ — подводимая мощность и $p_{i+1}/p_i = q = \text{const}$; тогда в фиксированной возбужденной цепочке в пренебрежении трением на ранних ярусах получается стационарное решение

$$u_i = q^{2/3}\varepsilon^{1/3}p_i^{-1/3}, \tag{6.27}$$

соответствующее спектру Колмогорова—Обухова для кинетической энергии развитого турбулентного течения ($p_i^{-1}u_i^2 \sim \varepsilon^{2/3}p_i^{-5/3}$). Аналогично (6.26) можно построить многоярусную СГТ с двойным зацеплением, в которой каждый i-й ярус сцеплен с двумя предыдущими, $(i-1)$-м и $(i-2)$-м, и с двумя последующими, $(i+1)$-м и $(i+2)$-м, и в которой в пренебрежении трением имеются два квадратичных интеграла движения — полная энергия и суммарный квадрат плоского вихря — так называемая *энстрофия* (Е. Б. Гледзер, 1973). В такой СГТ при возбуждении какого-либо промежуточного яруса энстрофия передается к более поздним ярусам, формируя спектр энергии $p_i^{-1}u_i^2 \sim \varepsilon_\Omega^{2/3}p_i^{-3}$, а энергия — к более ранним ярусам, формируя спектр $\varepsilon^{2/3}p_i^{-5/3}$. К этим процессам мы еще вернемся в последующих главах.

Развитая А. М. Обуховым теория СГТ — это важный шаг в систематическом построении общих основ нелинейной механики (или теории нелинейных уравнений математической физики). Следующим шагом может быть рассмотрение так называемых *симметризуемых* систем (А. М. Обухов, 1977), обобщающих понятие *гамильтоновой* системы, уравнения движения которых могут быть записаны в виде

$$\dot{u}^i = S^{ij}\,\partial F/\partial u^j, \tag{6.28}$$

где F — *производящая функция* (обобщение гамильтониана), а *симметризатор* $S = (S^{ij})$ — невырожденная квадратная матрица.

Пусть $A = (\partial\dot{u}^i/\partial u^j)$ — *матрица устойчивости*; симметризуемость динамической системы эквивалентна существованию такой невырожденной вещественной матрицы S, что матрица $S^{-1}A$ симметрична. Симметризуемые системы, допускающие введение симметричного (или кососимметричного) симметризатора, называются θ (или Н)-системами. H-системы существуют только на четномерных фазовых пространствах R_{2n}, и в таком пространстве всегда существуют линейные координаты $p_1, \ldots, p_n$; $q_1, \ldots, q_n$, в которых H-система приводится к канонической гамильтоновой форме $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$, $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$.

Для квадратично-нелинейных систем можно определить *характеристическую квадратичную форму* $B = (1/2)(\partial\dot{u}^i/\partial u^j) \times (\partial\dot{u}^j/\partial u^i)$, матрицу которой обозначим той же буквой $B = (B_{ij})$;

квадратично-нелинейная регулярная θ-система с симметризатором $S=B^{-1}$ называется B-системой. Простейшим примером симметризуемой системы (θ-системы, B-системы) служит канонический триплет (6.13); он имеет производящую функцию $F\sim\omega_1\omega_2\omega_3$. Другим примером θ-системы и B-системы является многоярусная СГТ с простым зацеплением (6.26). Для θ-системы с заданным симметризатором можно ввести оператор $\mathscr{L}=S^{ij}\partial^2/\partial u^i\partial u^j$, аналогичный лапласиану, так что будет $\partial\dot{u}^i/\partial u^i=\mathscr{L}F$, и, значит, у регулярных θ-систем $\mathscr{L}F=0$, т. е. производящая функция F является гармонической для оператора $\mathscr{L}$. С другой стороны, пусть $s(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — билинейная форма с матрицей S^{-1} и $\Theta(\mathbf{u})=\frac{1}{2}s(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ — соответствующая квадратичная форма. Тогда легко убедиться, что $\dot{\Theta}=u^j\partial F/\partial u^j$, так что если $F(\mathbf{u})$ — однородная функция степени m, то она равна $\dot{\Theta}/m$. Пусть, далее, на производящих функциях определена билинейная операция

$$[F, G](\mathbf{u})=S^{ij}(\partial F/\partial u^i)(\partial G/\partial u^j)=[G, F](\mathbf{u}), \tag{6.29}$$

аналогичная скобке Пуассона для гамильтонианов. Отсюда видно, что если G — первый интеграл θ-системы с производящей функцией F (т. е. $\dot{G}_F\equiv 0$), то F — первый интеграл θ-системы с производящей функцией G (и тем же симметризатором). Рассмотрим, наконец, θ-системы с квадратичным положительно-определенным интегралом движения E, который зададим в таком энергетическом представлении (полусумма квадратов координат u^j), чтобы квадратичная форма $\Theta(\mathbf{u})$ была приведена к главным осям (диагональный симметризатор, диагональные элементы которого обозначим $\theta_1, \ldots, \theta_n$). Инвариантность E при этом налагает ограничения на F; так, у квадратично-нелинейных систем должно быть

$$F=\sum_{2\theta_i+\theta_j=0} c_{ij}(u^i)^2u^j+\sum_{\theta_i+\theta_j+\theta_k=0} c_{ijk}u^iu^ju^k \tag{6.30}$$

(если, кроме того, $\sum_j c_{ij}\equiv 0$, то система регулярна, т. е. она θ-СГТ). При этом квадратичная форма $B(\mathbf{u})$ также может быть приведена к главным осям (для чего, вообще говоря, необходима коммутативность матриц B и Θ, что налагает ограничения на симметризатор).

ГЛАВА 2

Малые колебания

§ 7. Типы адиабатических движений

Все движения жидкости или газа при адиабатических процессах имеют характер волн. Для их классификации достаточно рассмотреть случай волн малой амплитуды, т. е. малых колебаний среды относительно некоторого ее *равновесного* состояния. В качестве такого примем состояние *относительного* покоя, в котором среда в целом вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а ее термодинамические характеристики (отмечаемые индексом ноль) зависят лишь от вертикальной координаты $z = r - r_0$ (где r — расстояние от центра тяжести) и связаны уравнением гидростатики $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$ (где $\mathbf{g} = -g\nabla r$ — ускорение свободного падения, ∇r — единичный вектор вертикального направления). Квадрат частоты Вяйсяля—Брента (2.4) в равновесном состоянии обозначим N_0^2, а равновесный градиент концентрации примеси $\partial s_0/\partial z = \Gamma_0$. Относительную скорость $\mathbf{u}$ и отклонения термодинамических характеристик от их равновесных значений (отмечаемые штрихами) будем считать малыми и линеаризируем относительно них уравнения гидротермодинамики адиабатических процессов (получаемые из уравнений § 1 и 3 в пренебрежении в них всеми неадиабатическими факторами). Линеаризированные уравнения неразрывности и движения (3.1), (3.2) принимают вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_r \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}; \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - g\frac{\rho'}{\rho_0}\nabla r = -\frac{\nabla p''}{\rho_{00}} + g\eta''\nabla r; \tag{7.2}$$

где вторая строка (7.2) повторяет (3.5). Линеаризация уравнения адиабатичности (1.17) и условия консервативности примеси (1.16) при $\varepsilon_s = 0$ дают для η'' и s' уравнения:

$$\frac{\partial \eta''}{\partial t} + \frac{N_0^2}{g} u_r = 0; \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \Gamma_0 u_r = 0. \tag{7.4}$$

На ограничивающих среду твердых стенках должна обращаться в ноль нормальная компонента скорости. Если у среды

есть свободная поверхность $r=r_0+\zeta$, где ζ — возмущение ее уровня, то при $r=r_0$ должны выполняться линеаризированные кинематическое и динамическое краевые условия (5.9) и (5.11), которые принимают вид:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\hat{u}_r;\quad \frac{\partial\hat{p}'}{\partial t}-g\hat{\rho}_0\hat{u}_r=-\gamma_0\hat{\rho}_0\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial t} \tag{7.5}$$

(второе из этих уравнений получается индивидуальным дифференцированием по t и линеаризацией краевого условия $\hat{p}-p_a\approx\approx-\gamma\hat{p}\Delta\zeta$ при $p_a\approx\text{const}$). Заметим, что если кроме η и s имеется еще какой-либо адиабатический лагранжев инвариант A (например, потенциальный вихрь), т. е. при адиабатических процессах $dA/dt=0$, то после линеаризации это уравнение приобретает вид $\partial A'/\partial t+u_r\partial A_0/\partial z=0$; определяя отсюда и из (7.3), (7.4) величину u_r, убеждаемся, что частные производные по времени от $gN_0^{-2}\eta^n$, $\Gamma_0^{-1}s'$ и $(\partial A_0/\partial z)^{-1}A'$ равны друг другу, так что разности этих величин суть *линейные инварианты* (т. е. не зависящие от времени линейные комбинации неизвестных функций). Если какая-либо из величин N_0, Γ_0 или $\partial A_0/\partial z$ равна нулю (так что равновесное состояние по соответствующей характеристике *однородно*), то инвариантом становится η'', s' или A'. При $r=r_0$ имеются еще краевые инварианты $\hat{p}'-g\hat{\rho}_0\zeta+\gamma_0\hat{\rho}_0\Delta\zeta$ и разности между ζ и краевыми значениями $gN_0^{-2}\eta''$, $\Gamma_0^{-1}s'$ и $(\partial A_0/\partial z)^{-1}A'$ (инвариантны также краевые значения последних трех величин на *горизонтальных* твердых стенках). Наконец, интегрированием по объему V (ограниченному сверху равновесной свободной поверхностью $r=r_0$) вытекающего из (7.1)—(7.3) локального уравнения энергии

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0u^2+\frac{p''^2}{\rho_0c_0^2}+\rho_0\frac{g^2\eta''^2}{N_0^2}\right)+\operatorname{div}p'\mathbf{u}=0 \tag{7.6}$$

убеждаемся в наличии квадратичного интегрального инварианта — полной энергии возмущений

$$\mathscr{E}=\frac{1}{2}\int\left[u^2+\left(\frac{p'}{\rho_0c_0}\right)^2+\left(\frac{g\eta''}{N_0}\right)^2\right]\rho_0\,dV+$$

$$+\frac{1}{2}\int\left[g\zeta^2+\gamma_0(\nabla\zeta)^2\right]\hat{\rho}_0\,d\Sigma, \tag{7.7}$$

где в объемном интеграле первое слагаемое соответствует *кинетической*, второе — *упругой* и третье — так называемой *термобарической* энергии (т. е. части потенциальной энергии, связанной с силами плавучести, действующими на жидкие частицы, смещенные по вертикали из их равновесного положения); интеграл по

поверхности (от $\hat{p}'\hat{u}_r$, причем $\hat{p}' = g\hat{\rho}_0\zeta - \gamma_0\hat{\rho}_0\Delta\zeta$, а $\hat{u}_r = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$) соответствует потенциальной энергии ее возмущений ζ, первое слагаемое — гравитационной, а второе — создаваемой поверхностным натяжением (оно получается из (5.12) при малых $(\nabla\zeta)^2$).

Рассмотрим возможные стационарные решения уравнений (7.1)—(7.4), которые описывают так называемые *движения первого рода*. Они обладают следующими четырьмя свойствами: (G_1) распределение возмущений плотности ρ' описывается законом

$$\rho' = -(g\omega_r)^{-1}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla p' \tag{7.8}$$

(получаемым из (7.2) скалярным умножением на $\boldsymbol{\omega}$), так что оно *негидростатично* (и становится гидростатическим лишь в так называемом *традиционном приближении*, в котором $\boldsymbol{\omega}$ заменяется на $\omega_r\nabla r$; наоборот, гидростатическое приближение, в котором вертикальная проекция уравнения (7.2) записывается в виде $\nabla p' = -g\rho'\nabla r$, необходимо дополнять традиционным приближением, чтобы работа силы Кориолиса $\rho_0\mathbf{u}(2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u})$ осталась равной нулю и не был нарушен закон сохранения энергии; при этом, однако, в уравнениях возникает искусственная особенность на экваторе); если хотя бы одна из величин N_0 и Γ_0 отлична от нуля, то движения (G_2) *горизонтальны*, т. е. $u_r = 0$; (G_3) *геострофичны*, т. е. в них осуществляется равновесие между градиентом давления и силой Кориолиса при горизонтальных движениях $2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}_h = -\rho_0^{-1}\nabla p'$, так что

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G = (2\omega_r\rho_0)^{-1}\,\nabla r\times\nabla p', \tag{7.9}$$

и (G_4) *бездивергентны*, т. е. $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Совмещение этих свойств приводит к требованию, чтобы возмущения давления p' не зависели от долготы λ. При этом оказывается, что они могут быть произвольной функцией $p'_s(r, \theta)$ и, согласно (7.9), $u_\theta = 0$, т. е. течения направлены вдоль кругов широты (и имеют геострофическую скорость $u_\lambda = (2r\omega_r\rho_0)^{-1}\partial p'_s/\partial\theta$) — такие течения возможны лишь в моделях с не меняющимися по долготе твердыми стенками и, стало быть, невозможны на Земле при реальном рельефе поверхности суши и дна океана (где, значит, стационарные возмущения должны быть неадиабатическими). Если $N_0 = \Gamma_0 = 0$ (термодинамически однородное равновесное состояние), то требование $u_r = 0$ необязательно, и возможны еще стационарные движения со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + u_r\boldsymbol{\omega}/\omega_r$, удовлетворяющие условиям $u_n = 0$ на твердых стенках и $u_r = 0$ при $r = r_0$, причем p' и u_r должны быть связаны соотношением

$$\operatorname{div}\frac{u_r\boldsymbol{\omega}}{\omega_r} - \frac{gu_r}{c_0^2} = (2r^2\rho_0\cos^2\theta)^{-1}\,\frac{\partial p'}{\partial\lambda}. \tag{7.10}$$

Переходя к нестационарным решениям, отметим, что если возмущения полей $\mathbf{u}$, p, ρ в начальный момент времени $t=0$ приспособлены друг к другу (*адаптированы*) так, что они обладают всеми указанными выше свойствами стационарных решений (при термодинамически неоднородном равновесном состоянии — свойствами $G_1 - G_4$), то они не меняются со временем. В противном случае решение задачи Коши для уравнений (7.1)—(7.4) будет суммой стационарного решения, определяемого, как адаптированная часть начальных возмущений (полностью характеризуемого определенными по начальным данным линейными инвариантами, при термодинамически неоднородном равновесном состоянии — по средней зональной части начального поля давления) и неадаптированных нестационарных возмущений (с равными нулю линейными инвариантами), которые будем называть *движениями второго рода* или *собственными движениями*. Они, как уже отмечалось, имеют характер волн, и если начальные возмущения были сосредоточены в ограниченной области пространства V, то с течением времени эти волны будут разбегаться из области V, так что внутри V плотность их энергии будет затухать, и в конце концов там останутся лишь адаптированные гидродинамические поля, обладающие свойствами $G_1 - G_4$; этот процесс можно назвать *адаптацией* гидродинамических полей (полностью он осуществляется лишь в конечных областях *неограниченного пространства*, а, например, в шаровых слоях от волн остается реверберационный фон; однако, в реальности этот фон затухает из-за действия не учитываемых здесь диссипативных факторов).

Для описания собственных движений используем операционное исчисление, обозначив $D=(2\omega)^{-1}\partial/\partial t$ безразмерный оператор дифференцирования по времени. Пусть также $\mathbf{k}=\omega^{-1}\boldsymbol{\omega}$ — единичный вектор оси вращения системы отсчета, например Земли (в традиционном приближении будет $k \to k_r \nabla r$, $k^2 \to k_r^2$).

Введем свойственный однородной вращающейся среде линейный (тензорный) оператор $\mathbf{L}$, положив для каждого векторного поля $\mathbf{A}$

$$\mathbf{L}(\mathbf{A}) = (D^2 + k^2)^{-1}\left[D^2\mathbf{A} - D\mathbf{k} \times \mathbf{A} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})\,\mathbf{k}\right]. \qquad (7.11)$$

В термодинамически неоднородной среде (неоднородность которой будем характеризовать безразмерной частотой Вяйсяля—Брента $N=N_0/2\omega$) этот оператор заменяется более сложным оператором $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}(\mathbf{A}) = \mathbf{L}(\mathbf{A}) + Q^{-1}N^2\mathbf{L}(\nabla r)\,L_r(\mathbf{A});$$

$$Q = -\left[D^2 + N^2 L_r(\nabla r)\right] \qquad (7.12)$$

(причем в традиционном приближении $L_r(\nabla r) \to 1$). При использовании этих обозначений из уравнений (7.1)—(7.3) выводятся следующие уравнения относительно $\mathbf{u}$ и $P = p''/2\omega$:

$$\mathbf{u} + \frac{\mathbf{M}(\nabla P)}{\rho_{00} D} = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{u}_m)}{D} + \frac{g\eta_m'' \mathbf{M}(\nabla r)}{2\omega D^2};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{g u_r}{c_0^2} + \frac{4\omega^2 D P}{\rho_{00} c_0^2} = \frac{2\omega p_m'}{\rho_0 c_0^2}, \qquad (7.13)$$

где индексом m обозначена неадаптированная часть начальных значений. Отметим, что если она отлична от нуля лишь в ограниченной области V, нигде не соприкасающейся с границами жидкости, то возникающие движения не будут связаны краевыми условиями, пока они не достигнут этих границ. Так, например, рассмотрим при однородном равновесном состоянии ($N = 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{L}$, и η'' есть инвариант, который положим равным нулю, так что $p' = c_0^2 \rho'$) собственные движения, в которых возмущения давления отсутствуют (такие движения можно назвать *инерционными*). Согласно (7.13), такие движения возникают, если начальные возмущения связаны условием $\operatorname{div} \mathbf{L}(\mathbf{u}_m) = g c_0^{-2} L_r(\mathbf{u}_m)$, которое, согласно определению (7.11), вследствие независимости $\mathbf{u}_m$ от D распадается на три условия: поля $\mathbf{u}_m$, $\mathbf{k} \times \mathbf{u}_m$ и $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_m)\mathbf{k}$ должны удовлетворять уравнению $\operatorname{div} \mathbf{A} = g c_0^2 A_r$. Неадаптированные поля $\mathbf{u}_m$ с такими свойствами должны быть ортогональными $\mathbf{k}$ и потому не могут удовлетворять краевым условиям на произвольных твердых стенках. Следовательно, инерционные движения возможны лишь локально. Этим и объясняются наблюдаемые перемежаемость и быстрое затухание пространственной когерентности инерционных колебаний в океане (а в атмосфере, не имеющей, за исключением крупных горных массивов, каких-либо горизонтальных границ, перемежаемость инерционных колебаний должна быть более слабой).

Периодические собственные движения суть *собственные колебания* всей среды в целом; при них поля $\mathbf{u}$, p', ρ', s' зависят от времени по закону $\exp(2i\omega f t)$ и должны удовлетворять всем краевым условиям (здесь f — собственные частоты, измеренные в единицах полусуточной частоты 2ω; вследствие инвариантности полной энергии (7.7) все она вещественны). Уравнения для комплексных амплитуд собственных колебаний $\mathbf{u}$ и P получаются из уравнений (7.13) заменой их правых частей нулями и оператора D его собственным значением if. Они приводятся к виду (А. С. Монин, 1974):

$$\mathbf{u} = \frac{i}{f \rho_{00}} \mathbf{M}(\nabla P); \qquad (7.14)$$

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{M}(\nabla P)}{\rho_{00}} - \frac{g M_r (\nabla P)}{\rho_{00} c_0^2} + \frac{4\omega^2 f^2 P}{\rho_{00} c_0^2} = 0. \qquad (7.15)$$

Краевое условие для уравнения (7.15) при $r=r_0$ приводится к виду

$$4\omega^2 f^2 \hat{P} = g\hat{M}_r(\nabla P) - \gamma_0 \Delta \hat{M}_r(\nabla P). \tag{7.16}$$

Из (7.14) и (7.15) видно, что инерционных собственных колебаний (без возмущений давления) не существует. Пространственные переменные r и θ в уравнении (7.15) не разделяются из-за наличия множителя Q в операторе $\mathbf{M}$. Исключением является случай однородного равновесного состояния ($N=0$, $\mathbf{M}=\mathbf{L}$), в котором, ограничиваясь для простоты приближением Буссинеска $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$, отфильтровывающим акустические волны, вместо (7.15) для P получаем уравнение *гироскопических волн*

$$[f^3\nabla^2 - (\mathbf{k}\cdot\nabla)^2]P = 0, \tag{7.17}$$

имеющее частные решения с разделяющимися переменными

$$P = r^n e^{im\lambda}(f^2 - \sin^2\theta)^{n/2} F_n^m(\zeta), \quad \text{где } \zeta = f\cos\theta\,(f^2-\sin^2\theta)^{-1/2},$$

а $F_n^m(\zeta)$ — функции Лежандра. В традиционном приближении уравнение (7.15) превращается в так называемое *приливное уравнение Лапласа*, в котором переменные r и θ разделяются (так как в этом приближении Q может зависеть только от r); это его свойство широко используется для изучения собственных колебаний вращающихся жидкостей в моделях с *горизонтальными* твердыми стенками. Однако при произвольном рельефе твердых стенок решения с разделяющимися переменными непригодны, и аналитических преимуществ у традиционного приближения не остается. В общем случае для собственных частот f можно получить алгебраическое уравнение, умножив (7.15) на $Q_1^2 P^*$ и проинтегрировав результат по объему V, где звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину а множитель $Q^2=(f^2-k^2)^2Q^2$ введен для того, чтобы подынтегральные функции не имели содержащих f знаменателей:

$$\int [\mathbf{M}(\nabla P)\cdot\nabla Q_1^2 P^* + gc_0^{-2} M_r(\nabla P) Q_1^2 P^* - 4\omega^2 f^2 c_0^{-2} Q_1^2 P P^*] \times$$
$$\times \rho_{00}^{-1}\, dV = \hat{\rho}_{00}^{-1} \int \hat{M}_r(\nabla P)\,\hat{Q}_1^2 \hat{P}^*\, d\Sigma. \tag{7.18}$$

Это — алгебраическое уравнение относительно f, коэффициенты которого суть квадратичные функционалы от комплексной амплитуды собственных колебаний давления P. Выделив ветви корней f этого уравнения, соответствующие акустическим, поверхностным капиллярным и гравитационным, внутренним гравитационным и гироскопическим волнам, собственные частоты можно определять вариационным методом, подбирая экстремали P, минимизирующие последовательные корни нужной ветви. Продемонстрируем различные типы собственных частот, начиная с акустиче-

ских волн, физической причиной существования которых является сжимаемость среды (характеризуемая скоростью звука c_0), так что при их описании можно пренебречь остальными факторами — вращением (положив всюду $\mathbf{k}=0$), стратификацией плотности (положив $N=0$) и колебаниями свободной поверхности (положив $\hat{P}=0$). При этом уравнение (7.18) радикально упрощается (например, без стратификации $\mathbf{M}(\mathbf{A})=\mathbf{L}(\mathbf{A})$, а без вращения $\mathbf{L}(\mathbf{A})=\mathbf{A}$), и для размерных частот $\sigma=2\omega f$ акустических волн из него получается формула

$$\sigma_{ac}^2 = c_0^2/H^2; \quad H^2 = \left(\int |\nabla P|^2\, dV\right)^{-1} \int |P|^2\, dV, \tag{7.19}$$

где H — масштаб высоты однородной атмосферы (или глубины однородного океана). При описании всех других типов волн сжимаемостью среды в первом приближении можно пренебрегать, принимая приближение Буссинеска $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$, так что в левых частях уравнений (7.15) и (7.18) сохраняется лишь первое слагаемое. При описании поверхностных волн, пренебрегая вращением и стратификацией, используем краевое условие (7.16). Пренебрегая в его правой части первым слагаемым, для частот капиллярных волн получаем

$$\sigma_{cap}^2 = \gamma_0 K_{cap}^3; \quad K_{cap}^3 = \left(\int |\nabla P|^2\, dV\right)^{-1} \int \left|\nabla_h \frac{\partial \hat{P}}{\partial z}\right|^2 d\Sigma. \tag{7.20}$$

Наоборот, пренебрегая в правой части (7.16) вторым слагаемым, для частот поверхностных гравитационных волн получаем

$$\sigma_{grav}^2 = gK_{grav}; \quad K_{grav} = \left(\int |\hat{P}|^2\, d\Sigma\right)^{-1} \int |\nabla P|^2\, dV. \tag{7.21}$$

При описании внутренних гравитационных волн пренебрегаем вращением (хотя это допустимо лишь для высокочастотных компонент этих волн) и колебаниями свободной поверхности (так что в уравнении (7.18) остается только первое слагаемое в левой части), и уравнение (7.18) приводится к виду

$$\sigma^2 \int \left[(\sigma^2 - N_0^2)\,|\nabla P|^2 - 2\frac{\partial N_0^2}{\partial z} P^* \frac{\partial P}{\partial z}\right] \rho_{00}^{-1}\, dV = \\ = \int N_0^2 (\sigma^2 - N_0^2)\,|\nabla_h P|^2 \rho_{00}^{-1}\, dV. \tag{7.22}$$

Это — биквадратное уравнение для частот σ_{int}^2 внутренних волн. При квазипостоянном N_0 из него получается

$$\sigma_{int}^2 \approx N_0^2 \left(\int |\nabla P|^2 \rho_{00}^{-1}\, dV\right)^{-1} \int |\nabla_h P|^2 \rho_{00}^{-1}\, dV, \tag{7.23}$$

откуда видно, что $|\sigma_{int}| < \max N_0(z)$ (в традиционном приближении оказывается, что $|\sigma_{int}| > 2|\omega_r|$). Наконец при описании гиро-

скопических волн пренебрежем колебаниями свободной поверхности и пока что стратификацией (что приводит к потере *бароклинных* гироскопических волн); не делая традиционного приближения (и, значит, полагая $k=1$), из (7.18) получим

$$f^2 \int |\nabla P|^2 dV + if\mathbf{k} \cdot \int \nabla P \times \nabla P^* dV - \int |\mathbf{k} \cdot \nabla P|^2 dV = 0 \quad (7.24)$$

(в традиционном приближении из-за фиктивной зависимости $k^2 \to k_r^2$ от θ вместо (7.24) для f_{gyro} получается уравнение четвертого порядка с двумя нефизическими корнями). При квазизональных полях P второе слагаемое здесь мало, и тогда

$$\sigma_{\text{gyro}}^2 \approx 4\omega^2 \left(\int |\nabla P|^2 dV\right)^{-1} \int |\mathbf{k} \cdot \nabla P|^2 dV, \quad (7.25)$$

откуда получается неравенство $|\sigma_{\text{gyro}}| < 2\omega$.

Как уже отмечалось выше, если в начальный момент времени в какой-то области пространства V условия стационарности возмущений $G_1 - G_4$ нарушены, то в ней наряду с движениями первого рода — стационарными возмущениями образуются также и движения второго рода — быстрые волны, а когда они покинут область V, то в ней останутся только движения первого рода, определяемые полями линейных инвариантов (которые можно построить по начальным данным); этот процесс восстановления условий согласованности $G_1 - G_4$ называется адаптацией гидродинамических полей. Адаптация к состоянию G_1 осуществляется путем генерации и разбегания акустических волн и занимает приблизительно такое время, в течение которого фронт акустических волн пробегает основную толщу среды (в земной атмосфере — всего десятки секунд). После этого продолжается процесс адаптации к состоянию геострофического равновесия $G_2 - G_4$ путем генерации и разбегания гравитационных волн. За их фронтами имеется непрерывный «след», в котором происходят затухающие осцилляции.

Л. А. Дикий (1969) показал, что в результате восстанавливается такое стационарное состояние $G_1 - G_4$, что разность начального и конечного состояний, которую можно назвать *уходящей волной*, обладает наименьшей энергией; варьированием энергии уходящей волны можно получить уравнение сохранения потенциального вихря. Поскольку в атмосфере кинетическая энергия возмущений в (7.7), как правило, на порядок больше потенциальной (так, при $u \sim 10$ м/с, $p'/p_0 \sim 10^{-2}$ и $p_0 \sim \rho_0 c_0^2 \sim \rho_0 gH$ получаем $u^2 \sim 10^2$ м^2/с^2 и $(p'/\rho_0 c_0)^2 \sim (p'/p_0)^2 gH \approx 10$ м/с), в процессе адаптации перестройка поля давления связана с меньшими энергетическими затратами на образование уходящей волны, чем перестройка поля ветра; поэтому обычно поле давления приспосабливается к полю ветра, а не наоборот.

Разбегающиеся во время адаптации акустические и гравитационные волны имеют почти всегда очень малые амплитуды и по-

этому могут рассматриваться, как «гидродинамические шумы», малосущественные для «погоды», образуемой движениями первого рода (и гироскопическими волнами синоптических масштабов). Движения первого рода имеют, вообще говоря, уже немалые амплитуды и должны описываться нелинейными уравнениями. Нелинейность приводит их к нестационарности и вообще к непрерывной расстройке условий согласованности гидродинамических полей $G_1 - G_4$. Тем самым постоянно происходит конкуренция между расстройкой согласованности и адаптацией, и она ослабляет суммарное действие этих противоположных процессов. Адаптация происходит быстрее, и поэтому нарушения условий согласованности $G_1 - G_4$ обычно оказываются небольшими.

В заключение этого параграфа остановимся вкратце на *вынужденных* колебаниях, создаваемых воздействием на линейную колебательную систему, описываемую уравнениями (7.1)—(7.5), периодической внешней силы. Например, это может быть приливообразующая сила, создающая ускорение $g\nabla\overline{\zeta} = -\nabla U$, где U — сумма приливных потенциалов внешних тел:

$$U_i = Gm_i\left(r_i^{-1} - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^{-1} + r_i^{-3}\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}\right), \qquad (7.26)$$

причем G — гравитационная постоянная, m_i — масса приливообразующего тела, $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ — заданный астрономически его радиус-вектор, на Земле — геоцентрический радиус-вектор Луны или Солнца; поправка на тяготение приливных горбов воды дается множителем $(1 - 3\rho/5\rho_1)^{-1} \approx 1{,}12$ (где ρ_1 — средняя плотность земли и воды, ρ — плотность воды, $\rho/\rho_1 \approx 0{,}18$). На Земле потенциал U содержит гармоники со всевозможными частотами $n_1\sigma_1 + \ldots + n_6\sigma_6$; $n_1, \ldots, n_6 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $\sigma_i = 2\pi/\tau_i$ — шесть основных частот в системе Земля—Луна—Солнце ($\tau_1 = 24$ ч 50,47 мин — лунные сутки, $\tau_2 = 27{,}321\,582$ сут — тропический месяц, $\tau_3 = 365{,}242\,199$ сут — год, $\tau_4 = 8{,}847$ лет — период вращения линии апсид орбиты Луны, $\tau_5 = 18{,}613$ лет — период вращения линии узлов орбиты Луны, $\tau_6 = 20\,940$ лет — период изменения долготы перигея Солнца). Для описания вынужденных колебаний удобно ввести столбцы функций $\mathbf{B} = \{\mathbf{u}, P, \eta'', \zeta\}$ со «скалярным произведением»

$$(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2) = \frac{1}{2}\int\left[\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2^* + \frac{4\omega^2 P_1 P_2^*}{\rho_{00}^2 c_0^2} + \frac{g^2 \eta_1'' \eta_2''^*}{N_0^2}\right]\rho_0\, dV + \frac{1}{2}\int\left[g\zeta_1\zeta_2^* + \gamma_0\nabla\zeta_1 \cdot \nabla\zeta_2^*\right]\widehat{\rho}_0\, d\Sigma \qquad (7.27)$$

(так что $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})$ — полная энергия (7.7)). Пусть $\{\mathbf{B}_n\}$; $n = 1, 2, \ldots$ — полная ортонормированная в смысле (7.27) система комплексных амплитуд собственных колебаний со всевозможными собственными частотами f_n; $\sum c_n\mathbf{B}_n$ — разложение по этой си-

стеме функций комплексной амплитуды ускорения периодической внешней силы с фиксированной безразмерной частотой f_0. Тогда уравнение вынужденных колебаний и его решение можно записать в матричной форме

$$D\mathbf{B} = \mathscr{L}\mathbf{B} + e^{2if_0\omega t}\sum c_n\mathbf{B}_n; \tag{7.28}$$

$$\mathbf{B} = -ie^{2if_0\omega t}\sum \frac{c_n\mathbf{B}_n}{f_0 - f_n}, \tag{7.29}$$

где $\mathscr{L}$ — матрица пространственных операторов, фигурирующая в уравнениях (7.1)—(7.3), (7.5). Отсюда видно, что если частота воздействия f_0 близка к какой-либо из собственных частот f_n, то реакция (7.29) на воздействие имеет характер резонанса. Для приливов на Земле в Мировом океане с реальными очертаниями его берегов и дна собственные частоты f_n были рассчитаны численно Б. А. Каганом и В. Ю. Готлибом (1980), использовавшими «традиционное приближение» в баротропном океане и так называемое «приближение мелкой воды» или «длинных волн», когда их длины значительно превосходят толщину слоя жидкости (глубину океана), и можно ограничиться рассмотрением уравнений лишь в среднем по толщине этого слоя.

При этих приближениях получаются так называемые приливные уравнения Лапласа с неизвестными функциями $\mathbf{B} = (\bar{u}_\theta, \bar{u}_\lambda, \zeta)$, где черточка означает осреднение по толщине слоя, а собственные колебания суть поверхностные гравитационные волны и баротропные волны Россби—Блиновой. Расчет собственных частот производился не вариационным методом, указанным выше, а путем решения задачи с начальными данными (в виде двух сферических гармоник) и преобразования Фурье получающихся колебаний. Собственные периоды были обнаружены в интервале от 8 до 144 ч, максимальная амплитуда $B_{\max}$ — у собственного колебания с периодом 39,78 ч; было обнаружено 34 собственных колебания с квадратами амплитуд $B^2 \geqslant 0{,}2B^2_{\max}$ (см. их спектр $B^2(\sigma)$ на рис. 7.1). Найденные собственные периоды 12,50; 12,68 и 12,83 ч весьма близки к периодам полусуточных приливов N_2 и M_2, а собственные периоды 22,50; 23,87 и 25,90 ч — к периоду суточного прилива K_1. Из этих результатов следует, что полусуточные и суточные приливы в Мировом океане, вероятно, имеют резонансный характер; эмпирические данные показывают (У. Манк, Д. Картрайт, 1966), что в них даже проявляются некоторые нелинейные эффекты.

Без «традиционного приближения» (но при $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, т. е. в приближении Буссинеска) спектр частот собственных колебаний сферического слоя был изучен Г. А. Кивманом и Н. Б. Масловой (1984), которые установили, что

$$|\sigma| \leqslant {}^1/_2\left[1 + (1 + 4N^2_{\max})^{1/2}\right].$$

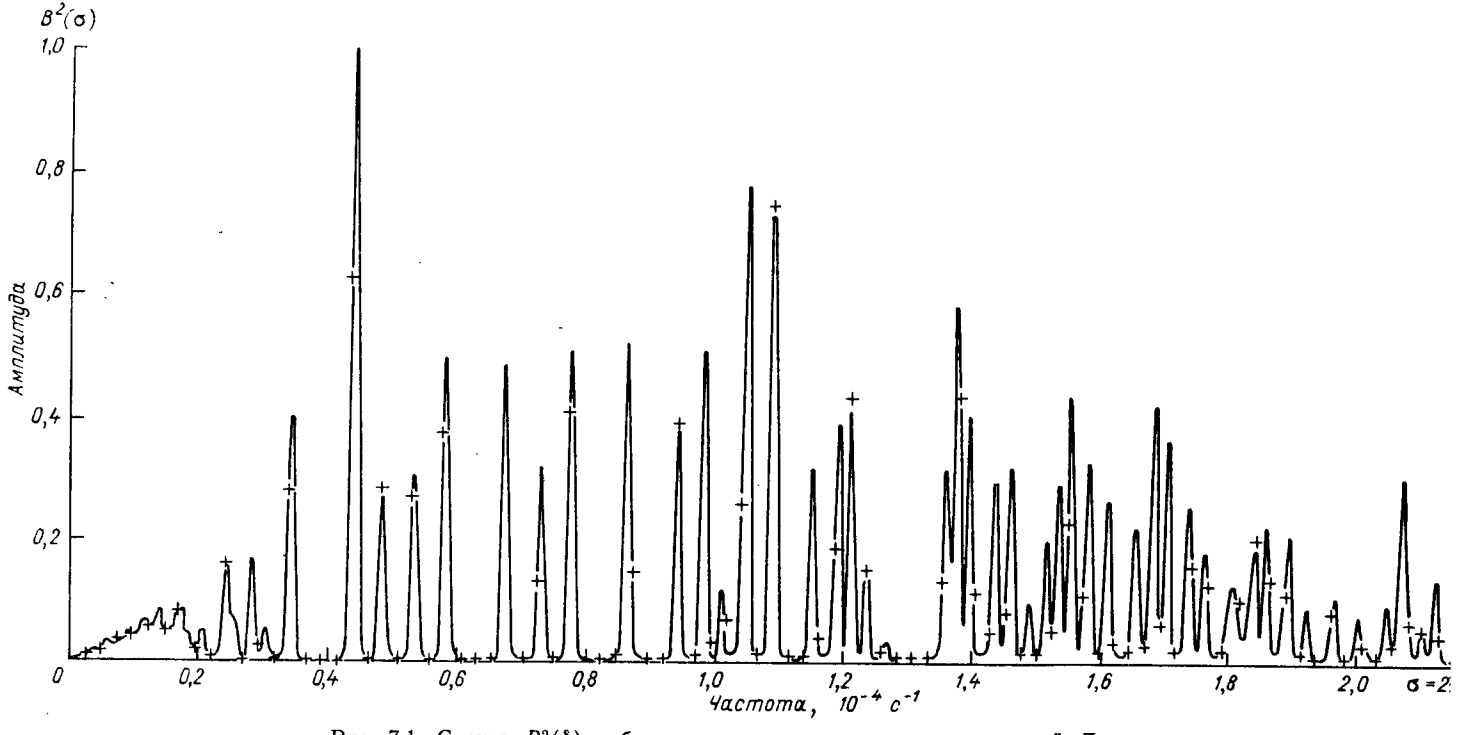


Рис. 7.1. Спектр $B^2(\delta)$ собственных частот приливных уравнений Лапласа.

Если спектр дискретный, то он всюду плотен на отрезке $\pm(1+N^2_{\max})^{1/2}$, что связано в основном с наличием коротких волн. При низких частотах они локализованы в некоторых широтных зонах, зависящих от стратификации среды. В традиционном приближении эти зоны изменяются — в частности, при слабой стратификации (малые N) волны в приэкваториальной зоне отфильтровываются.

§ 8. Малые колебания изотермической атмосферы

В этом параграфе мы проиллюстрируем основные рассуждения § 7, следуя работе А. С. Монина и А. М. Обухова (1958), на простейшем примере атмосферы (без жидкой верхней поверхности S) с уравнением состояния (1.7) (при $s=0$), трактуемой в традиционном приближении с *постоянным* параметром Кориолиса $f=2\omega_z$ (последнее, т. е. неучет зависимости f от широты, «отфильтровывает» из решений уравнений волны Россби—Блиновой, к рассмотрению которых мы придем в § 10); в этом примере все расчеты удается проделать аналитически. Будем пользоваться локальными декартовыми координатами x, y, z и соответствующими компонентами скорости u, v, w и положим

$$\rho_0 u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad \rho_0 v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \rho_0 w = \chi. \tag{8.1}$$

Тогда в указанном выше приближении уравнения (7.1)—(7.3) могут быть приведены к виду:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = -\Delta_h\varphi - \frac{\partial\chi}{\partial z}; \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + f\varphi = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} - f\psi = -p'; \quad \lambda\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - g\rho'; \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -c_0^2\Delta_h\varphi - g_1\chi - c_0^2\frac{\partial\chi}{\partial z}; \tag{8.4}$$

$$g_1 = \frac{c_0^2 N_0^2}{g} = (\varkappa - 1)\,g + \frac{\partial c_0^2}{\partial z},$$

где Δ_h — горизонтальный оператор Лапласа, а множитель λ, равный единице, в гидростатическом приближении следует положить равным нулю. Естественные краевые условия для уравнений (8.2)—(8.4) налагаются на вертикальный поток массы: $\chi\to 0$ при $z\to 0$ и при $z\to\infty$ (второе из этих условий может оказаться недостаточным, и тогда оно должно быть заменено более сильным условием затухания кинетической энергии вертикальных колебаний $\rho_0 w^2\to 0$).

Введем, как и в (7.27), столбец неизвестных функций $\mathbf{B}=\{\psi, \varphi, p', \chi, \rho'\}$ и запишем уравнения (8.2)—(8.4) в аналогич-

ной (7.28) матричной форме $\partial \mathbf{B}/\partial t = \mathscr{L}\mathbf{B}$, где $\mathscr{L} = (\mathscr{L}_{ij})$ — матрица фигурирующих в этих уравнениях пространственных дифференциальных операторов. Будем искать *линейный инвариант* уравнений в виде $J_1 = \gamma^k B_k$ (с суммированием по k от 1 до 5), где γ^k — не зависящие от t линейные операторы. Поскольку должно быть $\partial J_1/\partial t = \gamma^k \partial B_k/\partial t = \gamma^k \mathscr{L}^i_k B_i$, операторы γ^k должны удовлетворять системе уравнений $\gamma^k \mathscr{L}^i_k \equiv 0$ (сопряженной к системе $\mathscr{L}^i_k B_i = 0$, определяющей стационарное решение **B**). Из определяемого по (8.2)—(8.4) конкретного вида матрицы $\mathscr{L}$ следует, что поскольку в ее первом столбце отличен от нуля только второй матричный элемент $\mathscr{L}^2_1 = f$, а в пятом столбце — только четвертый элемент $\mathscr{L}^4_5 = -g/\lambda$, следует положить $\gamma^2 = \gamma^4 = 0$; тогда уравнение, получаемое при помощи третьего столбца $\mathscr{L}^i_3$, удовлетворяется тождественно. При помощи второго и четвертого столбцов $\mathscr{L}^i_2$ и $\mathscr{L}^i_4$ получаются уравнения $\gamma^1 f + \gamma^3 c_0^2 \Delta_h + \gamma^5 \Delta_h = 0$ и $\gamma^3 \times \times \left(g_1 + c_0^2 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \gamma^5 \frac{\partial}{\partial z}$, откуда, полагая $\gamma^1 = \Delta_h$ и отыскивая γ^3 и γ^5 в виде линейных функций от $\partial/\partial z$, находим $\gamma^3 = f \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{g_1}$ и $\gamma^5 = -f \frac{\partial}{\partial z} \frac{c_0^2}{g_1} - f$. Используя эти результаты, получаем линейный инвариант

$$J_1 = \Delta_h \psi + f \frac{\partial}{\partial z} \frac{p' - c_0^2 \rho'}{g_1} - f\rho', \tag{8.5}$$

представляющий собою линеаризированную форму потенциального вихря. Из (8.2) и (8.4) вытекает равенство $\frac{\partial}{\partial t}(p' - c_0^2 \rho') = -g_1 \chi$, откуда при $z = 0$ получается дополнительный инвариант

$$J_2 = \hat{p}' - \hat{c}_0^2 \hat{\rho}'. \tag{8.6}$$

Отметим, что инварианты J_1 и J_2 не содержат λ, так что они не меняются при переходе к гидростатическому приближению.

Уравнения (8.2)—(8.4) имеют некоторое семейство стационарных решений, которые все удовлетворяют условиям $G_1 - G_4$ предыдущего параграфа, записываемым здесь следующим образом:

$$(G_1)\,\rho' = -\frac{f}{g}\frac{\partial \psi}{\partial z};\quad (G_2)\,\chi = 0;$$

$$(G_3)\,p' = f\psi;\quad (G_4)\,\varphi = 0. \tag{8.7}$$

Таким образом, стационарные движения горизонтальны, бездивергентны, и для них справедливы формулы геострофического ветра и уравнение гидростатики:

$$u = -\frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y};\quad v = \frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x};\quad \frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho'. \tag{8.8}$$

Из (8.7) видно, что каждое стационарное решение полностью определяется заданием одной функции $\psi = \psi_s(\mathbf{x})$. Наоборот, каждое решение со свойствами (8.7) описывает некоторое стационарное горизонтальное вихревое движение. Более того, всякое решение, для которого $\varphi = 0$, является стационарным: в этом случае из первых двух уравнений (8.3) вытекает, что ψ и p' не зависят от t (и связаны соотношением $p' = f\psi$); уравнение (8.4) принимает вид $c_0^2 \partial\chi/\partial z + g_1\chi = 0$ и при нулевом краевом условии при $z = 0$ имеет лишь нулевое решение, а затем из (8.2) вытекает независимость ρ' от t. Решение уравнений (8.2)—(8.4) при произвольных начальных данных ψ_0, φ_0, p'_0, χ_0, ρ'_0 будет стационарным тогда и только тогда, если они удовлетворяют условиям (8.7). Необходимость этого очевидна, а для доказательства достаточности исключим из (8.2)—(8.4) неизвестные ψ, p' и ρ', что даст для φ и χ следующие уравнения и начальные данные:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\varphi = g_1\chi + c_0^2\frac{\partial\chi}{\partial z} + c_0^2\Delta_h\varphi;$$

$$\lambda\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(g_1\chi + c_0^2\frac{\partial\chi}{\partial z} + c_0^2\Delta_h\varphi\right) + g\left(\frac{\partial\chi}{\partial z} + \Delta_h\varphi\right); \tag{8.9}$$

$$t = 0: \varphi = \varphi_0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f\psi_0 - p'_0;\ \chi = \chi_0;\ \lambda\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial p'_0}{\partial z} + g\rho'\right).$$

При выполнении условий (8.7) все эти начальные данные обращаются в ноль, и уравнения имеют только тривиальное решение $\varphi = \chi = 0$, откуда и следует стационарность решения уравнений (8.2)—(8.4). Если же начальные данные для этих уравнений не удовлетворяют условиям (8.7), то решение уравнений может быть представлено в виде суммы стационарного решения, определяемого некоторой функцией $\psi_s(\mathbf{x})$ (для которого инварианты J_1 и J_2 определяются по начальным данным), и нестационарного так называемого *волнового* решения (у которого инварианты J_1 и J_2 равны нулю), удовлетворяющего следующим начальным условиям при $t = 0$:

$$\psi = \psi_0 - \psi_s;\quad \varphi = \varphi_0;\quad p' = p'_0 - f\psi_s;\quad \chi = \chi_0;\quad \rho' = \rho'_0 + \frac{f}{g}\frac{\partial\psi_s}{\partial z}. \tag{8.10}$$

Чтобы найти по инвариантам J_1 и J_2 функцию ψ_s, определяющую стационарное решение, выразим через нее J_1 и J_2 при помощи формул (8.5)—(8.7):

$$\Delta_h\psi_s + f^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\psi_s}{g}+\frac{\psi_s}{g_1}+\frac{c_0^2}{gg_1}\frac{\partial\psi_s}{\partial z}\right)=J_1; \tag{8.11}$$

$$f\widehat{\psi}_s + \frac{f\widehat{c}_0^2}{g}\frac{\widehat{\partial\psi_s}}{\partial z}=J_2. \tag{8.12}$$

Таким образом, функция ψ_s может быть найдена, как решение неоднородного уравнения (8.11) при неоднородном краевом условии (8.12); вторым краевым условием может служить требование ограниченности ψ_s при $z\to\infty$. Заметим, кстати, что слагаемые в (8.11) со старшими производными от ψ_s, учитывая указанное в (8.4) соотношение $gg_1=c_0^2N_0^2$, можно записать в виде $(\Delta_h+\frac{f^2}{N_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2})\psi_s$. При $N_0^2>0$ (т. е. при устойчивой стратификации) этот оператор является эллиптическим; в нем отношение второго слагаемого к первому равно $(L/L_R)^2$, где L — горизонтальный масштаб, а $L_R=HN_0f^{-1}$ — вводившийся в § 4 радиус деформации Россби. При $N_0^2<0$ (т. е. при неустойчивой стратификации) оператор оказывается гиперболическим и описывает распределенные по вертикали волны. Заметим еще, что уравнения (8.11), (8.12) для ψ_s можно заменить одним интегральным уравнением, введя составной инвариант

$$\frac{f^2\hat{\rho}_0}{g}\widetilde{\Omega}=\int_0^\infty J_1\,dz+\frac{\hat{\rho}_0}{\varkappa}\int_0^z\frac{g_1\,dz}{p_0}\int_z^\infty J_1\,dz+f\widehat{g_1^{-1}}J_2=$$

$$=\int_0^\infty(\Delta_h\psi-f\rho')\,dz+\frac{\hat{\rho}_0}{\varkappa}\int_0^z\frac{g_1dz}{p_0}\int_z^\infty(\Delta_h\psi-f\rho')\,dz-$$

$$-\frac{f\hat{\rho}_0}{\varkappa}\int_0^z(p'-c_0^2\rho')\,p_0^{-1}\,dz, \tag{8.13}$$

являющийся интегральной формой потенциального вихря. Выразив в правой части этого соотношения все неизвестные функции через ψ_s по формулам (8.7), введя новую неизвестную $\widetilde{\psi}=\psi_s/\rho_0$, горизонтальный масштаб $L_0=f^{-1}(\hat{p}_0/\hat{\rho}_0)^{1/2}$, безразмерный горизонтальный лапласиан $\Delta=L_0^2\Delta_h$ и новую переменную интегрирования $\zeta=p_0/\hat{p}_0$, получим

$$\Delta\left(\int_0^1\widetilde{\psi}\,d\zeta+\int_\zeta^1\frac{\alpha^2\,d\zeta}{\zeta^2}\int_0^\zeta\widetilde{\psi}\,d\zeta\right)-\widetilde{\psi}=\widetilde{\Omega};$$

$$\alpha^2=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\gamma_a-\gamma}{\gamma_a}\frac{T_0}{\hat{T}_0}=\frac{H^2N_0^2}{c_0^2}. \tag{8.14}$$

В таком виде уравнение для ψ_s получено в работе А. С. Монина (1958); в случае квазипостоянного *положительного* параметра стратификации α^2 (строго он постоянен — и положителен — в изотермической атмосфере — отсюда и заголовок § 8) там же построено и решение этого уравнения, имеющее вид

$$\Psi(x,\ y,\ \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 d\zeta_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int G(r,\ \zeta,\ \zeta_1)\,\widetilde{\Omega}(x_1,\ y_1,\ \zeta_1)\,dx_1\,dy_1, \tag{8.15}$$

где Ψ — интегральное выражение в круглых скобках в (8.14); x, y, ζ — горизонтальные координаты и невозмущенное давление p_0, измеренные масштабами L_0 и $\widehat{p_0}$; $r=[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]^{1/2}$, а $G(r,\ \zeta,\ \zeta_1)$ — решение при $\widetilde{\Omega}=-2\pi\delta(k-x_1)\,\delta(y-y_1)\,\delta(\zeta-\zeta_1)$. Для нахождения функции G произведем замену переменных $(x,\ y,\ r)=\alpha(\xi,\ \eta,\ \rho)$, $\zeta=\exp(-\theta)$, $G=2\pi G_1 \exp\left(\frac{\theta+\theta_1}{2}\right)$, и тогда после дифференцирования уравнения (8.14) для функции $G_1(\rho,\ \theta,\ \theta_1)$ получается

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 G_1}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 G_1}{\partial\theta^2}-\frac{1}{4}G_1=-\delta(\xi-\xi_1)\,\delta(\eta-\eta_1)\,\delta(\theta-\theta_1);$$

$$\left[\frac{\partial G_1}{\partial\theta}+\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)G_1\right]_{\theta=0}=0; \qquad e^{-\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\partial G_1}{\partial\theta}+\frac{1}{2}G_1\right)\underset{\theta\to\infty}{\to}0. \tag{8.16}$$

Для этого уравнения функция влияния точечного источника в неограниченном пространстве равняется

$$G_0(\rho,\ \theta,\ \theta_1)=(4\pi A)^{-1}\,e^{-A/2}; \quad A=[\rho^2+(\theta-\theta_1)^2]^{1/2}. \tag{8.17}$$

В полупространстве $\theta\geqslant 0$ при краевых условиях (8.16) функция влияния точечного источника получается добавлением фиктивных источников на отрицательной полуоси θ:

$$G_1=G_0(\rho,\ \theta,\ \theta_1)+G_0(\rho,\ \theta,\ -\theta_1)+(1-2\alpha^2)\,e^{-\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)\theta_1}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{-\theta_1} G_0(\rho,\ \theta,\ \theta')\,e^{-\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)\theta'}\,d\theta'. \tag{8.18}$$

Входящий сюда интеграл есть разность интегралов по участкам $(-\infty,\ +\infty)$ и $(-\theta_1,\ \infty)$, причем первый из них заменой переменных

$$\theta'=\theta+\frac{1}{2}\frac{\tau}{1-\alpha^2}-\rho^2\frac{1-\alpha^2}{2\tau}$$

приводится к виду

$$\frac{1}{4\pi}\, e^{-\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)\theta} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{2}-\alpha^2\rho^2\frac{1-\alpha^2}{2\tau}} \frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, e^{-\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)\theta} K_0\left(\alpha\rho\sqrt{1-\alpha^2}\right); \qquad (8.19)$$

где K_0 — цилиндрическая функция Макдональда. Собирая полученные результаты и возвращаясь к старым переменным, получаем

$$G(r, \zeta, \zeta_1) = \frac{1-2\alpha^2}{(\zeta\zeta_1)^{\alpha^2}} K_0\left(r\sqrt{1-\alpha^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1-2\alpha^2}{(\zeta\zeta_1)^{\alpha^2}} \int_{\ln \zeta\zeta_1}^\infty \times$$

$$\times B^{-1} e^{-\frac{B}{2}-\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)\theta}\, d\theta + \frac{1}{2\sqrt{\zeta\zeta_1}}\left(\frac{e^{-C/2}}{C} + \frac{e^{-C'/2}}{C'}\right);$$

$$B = \alpha^{-1}\left(r^2 + \alpha^2\theta^2\right)^{1/2};\quad C = \alpha^{-1}\left(r^2 + \alpha^2 \ln^2\frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{1/2};$$

$$C' = \alpha^{-1}\left(r^2 + \alpha^2 \ln^2 \zeta\zeta_1\right)^{1/2}. \qquad (8.20)$$

Заметим, что функция G имеет в точке $r=0$, $\zeta=\zeta_1$ особенность вида C^{-1}. Выделив в функции (8.20) первое слагаемое, имеющее во всех точках вертикальной прямой $r=0$ логарифмическую особенность, получаем возможность просто осуществлять предельный переход $\alpha \to 0$ к формулам для баротропной атмосферы. Этот предельный переход неравномерен относительно x, y, ζ, но при достаточно гладкой функции $\widetilde{\Omega}$ его можно осуществить и непосредственно в формуле (8.15), в результате чего эта формула принимает вид, указывавшийся значительно ранее А. М. Обуховым (1949):

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_0(r)\,\widetilde{\Omega}(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1, \qquad (8.21)$$

где под $\widetilde{\Omega}$ следует понимать средний по толще атмосферы потенциальный вихрь.

После нахождения функции ψ_s, определяющей стационарное решение, из начальных данных может быть выделена часть (8.10), определяющая волновое решение. При его нахождении одно из уравнений (8.2)—(8.4) может быть заменено условием равенства нулю потенциального вихря, так что уравнения, описывающие волновое решение, имеют четвертый порядок по времени. Из них в принципе можно выразить ψ, p' и ρ' через φ и χ без интегрирования по времени, а функции φ и χ определяются

из уравнений (8.9), не содержащих величины ψ_s. Поскольку коэффициенты уравнений (8.9) не зависят от x, y, t, эти уравнения имеют частные решения в виде гармонических волн с амплитудами, зависящими от z:

$$\{\varphi, \chi\}(\mathbf{x}, z, t) = \{\Phi(z), X(z)\} \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \sigma t)], \qquad (8.22)$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — горизонтальные волновые числа, которые могут быть произвольными, а $\sigma = \sigma(\mathbf{k})$ — частоты, подлежащие определению. Поскольку в динамических уравнениях не учитывается ни притоков, ни диссипации энергии, полная энергия волн (8.22) (т. е. упрощенный аналог величины (7.7)) не может меняться со временем. Следовательно, все собственные частоты σ вещественны. Решение уравнений (8.9) при произвольных начальных данных можно представить в виде суперпозиции элементарных волновых решений (8.22) со всевозможными значениями $\mathbf{k}$. Поэтому выяснение природы элементарных волн (8.22) позволит понять структуру любого волнового решения. Для изучения элементарных волн остается определить зависимости их амплитуд от высоты $\Phi(z)$ и $X(z)$ и спектр их частот $\sigma(\mathbf{k})$. Подставляя (8.22) в (8.9), получаем

$$(f^2 + k^2c_0^2 - \sigma^2)\Phi = g_1 X + c_0^2 \frac{\partial X}{\partial z};$$

$$(f^2 - \sigma^2)\left(c_0^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + g\Phi\right) = (gg_1 - \lambda c_0^2\sigma^2) X. \qquad (8.23)$$

Отметим, во-первых, что эти уравнения имеют удовлетворяющее краевым условиям нетривиальное частное решение следующего вида:

$$X = 0; \quad \Phi = \hat{\Phi}(p_0/\hat{p}_0)^{1/\varkappa}; \quad \sigma^2 = f^2 + k^2c_0^2. \qquad (8.24)$$

Соответствующие так называемые *двумерные* волны охватывают всю толщу атмосферы, распространяются лишь по горизонтали (с максимальной групповой скоростью c_0) и не вызывают вертикальных колебаний воздушных частиц; гидростатическое приближение ($\lambda = 0$) их не меняет. Волны с $X \neq 0$ рассмотрим лишь при квазипостоянных c_0 и g_1 (что выполняется точно в изотермической атмосфере). При этом из (8.23) следует, что и Φ, и X удовлетворяют уравнению

$$(f^2 - \sigma^2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{g + g_1}{c_0^2}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\lambda\sigma^2}{c_0^2}F\right) - k^2\left(\frac{gg_1}{c_0^2} - \lambda\sigma^2\right)F = 0. \qquad (8.25)$$

Будем искать частные решения этого уравнения в виде $F = \hat{F}\exp[-M + im)z]$, где M и m — вещественные числа. Подстав-

ляя такое выражение в (8.25) и приравнивая нулю мнимую часть получающегося равенства, получим $M=(g+g_1)/2c_0^2$, после чего, приравнивая нулю вещественную часть равенства, получим соотношение

$$(\sigma^2-f^2)(\lambda\sigma^2-c_0^2m_1^2)\left(\sigma^2-\frac{gg_1}{c_0^2}\right)^{-1}=k^2c_0^2;\quad m_1^2=m^2+\left(\frac{g+g_1}{2c_0^2}\right)^2. \tag{8.26}$$

Таким частным решениям соответствуют так называемые *внутренние* плоские гармонические волны с горизонтальным волновым вектором $\mathbf{k}$ и вертикальным волновым числом m, амплитуды которых экспоненциально убывают с высотой, причем $m\neq 0$ (так как при $m=0$ никакая комбинация таких волн не может удовлетворить краевому условию $\chi\to 0$ при $z\to 0$); следовательно, скорость распространения таких волн всегда имеет вертикальную компоненту, т. е. они существенно трехмерны. В решение задачи Коши (8.9) при произвольных начальных данных могут входить внутренние волны с любыми k и m, так что в (8.26) их следует считать произвольными, и тогда это — уравнение относительно σ. Заметив, что левая часть (8.26) неотрицательна, и учитывая неравенство

$$f^2<\frac{gg_1}{c_0^2}<\frac{(g+g_1)^2}{4c_0^2},$$

нетрудно убедиться, что корни σ^2 могут находиться лишь в двух интервалах:

$$\sigma^2>\frac{(g+g_1)^2}{4\lambda c_0^2};\quad f^2\leqslant\sigma^2<\frac{gg_1}{c_0^2}, \tag{8.27}$$

причем вследствие непрерывной зависимости корней σ^2 от k и m все точки этих интервалов являются возможными частотами внутренних волн. Решения σ^2 уравнения (8.26) запишем в виде:

$$\sigma_{a,g}^2=\frac{1}{2}c_0^2K^2\left[1\pm\left(1-\frac{4gg_1}{\lambda c_0^2}K_1^2K^{-4}\right)^{1/2}\right];$$

$$K^2=k^2+L^{-2}+m_1^2\lambda^{-1};\quad K_1^2=k^2+m_1^2c_0^4(gg_1L^2)^{-1}, \tag{8.28}$$

где $L=c_0/f$ — типичный масштаб горизонтальных движений сжимаемой среды в поле силы Кориолиса (А. М. Обухов, 1949). Отсюда видно, что действие силы Кориолиса существенно лишь при очень малых $k\lesssim L^{-1}$. Чтобы выяснить природу волн с частотами σ_a и σ_g, отвлечемся от действия силы Кориолиса, т. е. положим $L^{-1}=0$. Положим также $\lambda=1$ и рассмотрим изотермическую

атмосферу, в которой $c^2_0=\varkappa gH$ и $g_1=(\varkappa-1)g$. При этом формулы (8.28) принимают вид:

$$\sigma^2_{a,\,g}=\frac{1}{2}\varkappa gHK^2\left[1\pm\left(1-4\,\frac{\varkappa-1}{\varkappa^2}\,\frac{k^2}{H^2}\,K^{-4}\right)^{1/2}\right];$$

$$K^2=k^2+m^2+1/4H^2. \qquad (8.28')$$

Напомним, что мы рассматриваем адиабатические процессы, при которых, согласно (4.3) и (1.7), в жидких частицах сохраняется величина $\rho p^{-1/\varkappa}$, т. е. по существу это политропические процессы с показателем политропы $\varkappa$. При $\varkappa\to\infty$ сохраняющейся величиной будет ρ, так что этот случай соответствует несжимаемой среде. При этом все частоты σ_a обращаются в ∞, т. е. волны с этими частотами исчезают, и остаются возможными лишь колебания с частотами σ_g, определяемыми из формулы $\sigma^2_g=gH^{-1}\times$ $\times k^2K^{-2}$. Это, очевидно, внутренние гравитационные волны.

При $\varkappa\to 1$ сохраняющейся величиной будет T, так что этот случай соответствует изотермическим процессам, при которых изотермическая стратификация является безразличной. При этом все частоты σ_g обращаются в 0, т. е. колебания с этими частотами исчезают (превращаются в стационарные вихревые движения), и остаются возможными лишь колебания с частотами σ_a, определяемыми из формулы $\sigma^2_a=gHK^2$. Это, очевидно, акустические волны. Аналогичное рассуждение показывает, что двумерные волны (8.24) являются акустическими.

Возвращаясь к адиабатическим процессам с $\varkappa\approx 1{,}4$, можно заключить, что в (8.28′) частоты σ_a соответствуют акустическим волнам, искаженным вследствие отличия изотермической стратификации от безразличной, а σ_g — внутренним гравитационным волнам, искаженным вследствие сжимаемости среды. Аналогично интерпретируются волны, соответствующие частотам (8.28) и содержащие дополнительное искажение из-за действия силы Кориолиса. При $\lambda=1$ и достаточно больших k и m формулы (8.28) принимают вид

$$\sigma^2_a\approx c^2_0K^2>\frac{(g+g_1)^2}{4c^2_0};\quad \sigma^2_g\approx\frac{gg_1}{c^2_0}\,\frac{K_1^2}{K^2}<\frac{gg_1}{c^2_0}, \qquad (8.29)$$

причем указанные здесь неравенства являются строгими при любых k и m. В изотермической атмосфере при $\varkappa\approx 1{,}4$ и $H\approx 8$ км получается $\tau_a=2\pi/\sigma_a>300$ с и $\tau_g=2\pi/\sigma_g>330$ с. Этот результат находится в хорошем согласии со спектрами атмосферных микробарограмм $\sigma S_{pp}(\sigma)$, имеющими минимум при периодах $\tau\sim 300$ с.

В гидростатическом приближении частоты возможных малых колебаний получаются из (8.28) в пределе при $\lambda\to 0$. При этом все частоты σ_a обращаются в бесконечность, т. е. внутренние аку-

стические волны полностью отфильтровываются, и из внутренних волн остаются лишь гравитационные, частоты которых принимают вид

$$\sigma_g^2 \approx \frac{gg_1}{c_0^2}\frac{K_1^2}{m_1^2}. \tag{8.30}$$

По сравнению с (8.29) эти частоты завышаются и тем больше, чем больше k; однако при $k \ll m$ (длинные волны) эта погрешность несущественна.

§ 9. Адаптация

Если в начальный момент времени в некоторой области пространства V гидростатическое равновесие G_1 было нарушено, то в ней образуются внутренние акустические волны, и когда они рассеиваются, можно считать, что среда в основном уже приспособилась к состоянию G_1. После этого продолжается процесс адаптации гидродинамических полей к состоянию геострофического равновесия $G_2 - G_4$, причем в среднем по толщине занимаемого средой слоя такое состояние устанавливается после рассеяния двумерных волн, а несколько позже, после рассеяния более медленных внутренних гравитационных волн, оно устанавливается на всех высотах. Опишем этот процесс адаптации, следуя работе А. С. Монина (1958).

В ней использованы преимущества перехода при *гидростатическом равновесии* от декартовых координат (x, y, z) ко криволинейным и нестационарным *изобарическим* координатам (x, y, p), в которых координатными поверхностями служат вертикальные плоскости $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, а вместо давления p (которое теперь является независимой переменной) новой неизвестной функцией в уравнениях гидродинамики становится высота изобарических поверхностей $z = z(x, y, p, t)$. При этом справедливы соотношения $\dfrac{\partial^*}{\partial s} = \dfrac{\partial}{\partial s} + \dfrac{\partial p}{\partial s}\dfrac{\partial}{\partial p}$ (где $s = x$, y или t, а $\sigma^*/\partial s$ — локальная производная в декартовых координатах);

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial}{\partial p} = -g\rho\frac{\partial}{\partial p}; \quad \frac{d^*}{dt} = \frac{d_h}{dt} + w^*\frac{\partial}{\partial p},$$

где d_h/dt — индивидуальная производная относительно горизонтального движения на изобарических поверхностях, а $w^* = dp/dt$ заменяет вертикальную скорость;

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = g\rho\frac{\partial z}{\partial s}.$$

С помощью этих соотношений уравнение неразрывности (3.1) и горизонтальные компоненты движения (3.2) в традиционном

приближении (при замене вертикальной компоненты уравнений движения уравнением гидростатики, необходимом, чтобы работа силы Кориолиса оставалась равной нулю) принимают вид:

$$D_h + \frac{\partial w^*}{\partial p} = 0; \quad D_h = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \tag{9.1}$$

$$\frac{d_h u}{dt} + w^* \frac{\partial u}{\partial p} - fv = -g \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{d_h v}{dt} + w^* \frac{\partial v}{\partial p} + fu = -g \frac{\partial z}{\partial y} \tag{9.2}$$

(напомним, что здесь u, v суть компоненты скорости в старых декартовых, а не в новых криволинейных координатах). Наконец, определив из уравнения гидростатики $\rho = -\left(g \frac{\partial z}{\partial p}\right)^{-1}$, уравнение адиабатичности (1.17) удается привести к виду

$$gp^2 \frac{d_h}{dt} \frac{\partial z}{\partial p} + \alpha^2 c^2 w^* = 0, \tag{9.3}$$

где α^2 — параметр стратификации, определенный в (8.14). Если считать здесь скорость звука c заданной (скажем, как функцию от ρ, p и $T = p/R\rho$), то (9.1)—(9.3) — это система четырех уравнений относительно неизвестных u, v, w^* и z. Преимуществами изобарических координат являются линейность уравнения неразрывности (9.1) и линейность и потенциальность слагаемых с градиентом давления $g\nabla_h z$ в правых частях уравнений движения. Недостатком же является усложнение записи краевого условия $\hat{w} = 0$ на поверхности Земли, получаемой из определения $w^* = \frac{dp}{dt} = g\rho\left(\frac{d_h z}{dt} - w\right)$; если записать это условие приближенно при среднем наземном давлении $p = \hat{p}$, а w^* выразить через D_h интегрированием по p при условии $w^* \to 0$ $(p \to 0)$, то получается

$$g\hat{\rho} \frac{d_h \hat{z}}{dt} = -\int_0^{\hat{p}} D_h \, dp. \tag{9.4}$$

Линеаризируя уравнения (9.1)—(9.4) относительно состояния покоя, введя функцию тока и потенциал скорости горизонтального течения аналогично (8.1) (но без множителя ρ_0) и пользуясь безразмерными переменными, аналогичными вводившимися в (8.14), для описывающего волновые решения линеаризированных уравнений потенциала скорости φ удается вывести уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varphi = \Delta\left(\int_0^1 \varphi \, d\zeta + \int_\zeta^1 \frac{\alpha^2 \, d\zeta}{\zeta^2} \int_0^\zeta \varphi \, d\zeta\right)$$

при $$t = 0 \quad \varphi = \varphi_0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi_0 - z_0. \tag{9.5}$$

Решать это уравнение будем при помощи преобразования Лапласа по t. Обозначим оператор $\partial/\partial t$ буквой s, интегральное выражение в круглых скобках в правой части (9.5) буквой Φ, а его преобразование Лапласа буквой $\widetilde{\Phi}$. Тогда для $\widetilde{\Phi}$ получается уравнение, вполне аналогичное уравнению для функции Ψ формулы (8.15), решение которого при квазипостоянном α^2 имеет вид

$$\widetilde{\Phi}(x,\ y,\ \zeta,\ s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 d\zeta_1 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} G\left(r\sqrt{1+s^2},\ \zeta,\ \zeta_1\right)\times$$

$$\times\left(s\varphi_0+\psi_0-z_0\right)_{x_1,\ y_1,\ \zeta_1} dx_1\, dy_1, \qquad (9.6)$$

где $G(r, \zeta, \zeta_1)$ дается формулой (8.20). Осуществив обратное преобразование Лапласа, получим

$$\Phi(x,\ y,\ \zeta,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 d\zeta_1 \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma(r,\ \zeta,\ \zeta_1,\ t)\left(\psi_0-z_0\right)_{x_1,\ y_1,\ \zeta_1} dx_1\, dy_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1 d\zeta_1 \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma(r,\ \zeta,\ \zeta_1,\ t)\,\varphi_0(x_1,\ y_1,\ \zeta_1)\,dx_1\, dy_1, \qquad (9.7)$$

где $\Gamma(r, \zeta, \zeta_1, t)$ — оригинал для $G(r\sqrt{1+s^2}, \zeta, \zeta_1)$, который может быть найден по формуле (8.20) при помощи таблиц преобразования Лапласа. При этом обратное преобразование Лапласа можно производить в (8.20) и под знаком интеграла, так как благодаря экспоненциально затухающему (при $\alpha_2 < 1/2$) множителю $\exp\left[-\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)\xi\right]$ этот интеграл сходится равномерно относительно r. В результате получается

$$\Gamma(r,\ \zeta,\ \zeta_1,\ t)=\frac{1-2\alpha^2}{(\zeta\zeta_1)^{\alpha^2}}\,\frac{\cos\left[t^2-(1-\alpha^2)\,r^2\right]^{1/2}}{\left[t^2-(1-\alpha^2)\,r^2\right]^{1/2}}-$$

$$-\frac{\alpha}{2r}\,\frac{1-2\alpha^2}{(\zeta\zeta_1)^{\alpha^2}}\int\limits_{\ln\zeta\zeta_1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)\zeta} J_0\left[\left(1+\frac{\alpha^2\zeta^2}{r^2}\right)^{1/2}\left(t^2-\frac{r^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2}\right]d\zeta+$$

$$+\frac{\alpha}{2r\,(\zeta\zeta_1)^{1/2}}\,J_0\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{r^2}\ln^2\frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{1/2}\left(t^2-\frac{r^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2}\right]+$$

$$+\frac{\alpha}{2r\,(\zeta\zeta_1)^{1/2}}\,J_0\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{r^2}\ln^2\zeta\zeta_1\right)^{1/2}\left(t^2-\frac{r^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2}\right], \qquad (9.8)$$

причем первое слагаемое отлично от нуля лишь при $r \leqslant t(1-\alpha^2)^{-1/2}$, а остальные слагаемые лишь при $r \leqslant 2\alpha t$. Это выражение показывает, что волны, разбегание которых приводит к адаптации гидродинамических полей, состоят из двух классов: во-первых, *баротропных* волн, *распространяющихся* с (размерной) скоростью $c_0(1-\alpha^2)^{-1/2}$ и соответствующих волнам, возникающим

в баротропной атмосфере при нарушениях геострофического равновесия между осредненными по высоте полями скорости и давления (А. М. Обухов, 1949); во-вторых, более медленных *бароклинных волн*, распространяющихся со скоростью $2\alpha c_0$ (которые в баротропной атмосфере не возникают).

Предельный переход к формулам для баротропной атмосферы получается при $\alpha \to 0$. При этом функции Ψ и Φ превращаются в функцию тока и потенциал скорости горизонтального течения, осредненные по толще атмосферы. Функция влияния (8.20) в пределе принимает вид $G = K_0(r)$, так что при малых α (а в реальной земной атмосфере $\alpha \sim 0{,}1$) и при значениях ζ_1, не слишком близких к ζ, главным в (8.20) является первое слагаемое. Формула (8.15) превращается в формулу А. М. Обухова (8.21). Уравнение (9.5) после интегрирования по ζ превращается в полученное А. М. Обуховым уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \Phi = \Delta \Phi, \qquad (9.5')$$

отличающееся от обычного волнового уравнения наличием второго слагаемого в левой части, описывающего *гироскопическую жесткость* вращающейся жидкой пленки. Функция (9.8) в пределе равна $(t^2 - r^2)^{-1/2} \cos (t^2 - r^2)^{1/2}$; при малых α главным в (9.8) является первое слагаемое.

Как указывалось в § 7, в процессе адаптации поле скорости обычно меняется относительно мало, а распределение давления, наоборот, изменяется резко, приближаясь к распределению, связанному формулами геострофического ветра с предельным полем скорости (мало отличающимся от начального); поэтому имеет смысл говорить именно о приспособлении поля давления к полю ветра. В качестве примера рассмотрим в бароклинной атмосфере начальные условия:

$$\varphi_0 = z_0 = 0; \quad \psi_0 = A\left[\frac{1 + \alpha^2 (1 - \zeta)}{R^2}\left(\frac{x^2}{R^2} - 1\right) - 2\zeta\right] e^{-x^2/2R^2}, \qquad (9.9)$$

при которых поле скорости соответствует плоскопараллельному течению вдоль оси y, антисимметричному относительно нее с циклоническим поворотом ветра при переходе через эту ось (идеализированная модель течения около фронтального раздела), а поле давления не возмущено. В результате адаптации здесь получается

$$\varphi = 0; \quad \psi_s = z_s = A\,\frac{1 + \alpha^2 (1 - \zeta)}{R^2}\left(\frac{x^2}{R^2} - 1\right) e^{-x^2/2R^2}, \qquad (9.10)$$

т. е. поле скорости меняется мало, а в поле давления формируется отчетливая фронтальная барическая ложбина. При $L_0 = 2500$ км; $R = 0{,}2$; $A = 0{,}0002$ полуширина ложбины RL_0 оказывается равной 500 км; а глубина — 4 дам; кинетическая энергия в процессе адаптации уменьшается на 3 % — часть энергии затра-

чи́вается на формирование барической ложбины, а часть уносится волнами.

Функция влияния $G(r, \zeta, \zeta_1)$ линейного оператора из левой части уравнения (8.14), фигурирующая в формулах (8.15) и (9.6), находит еще одно полезное применение, связанное с так называемым *квазигеострофическим приближением*, получаемым при разложении неизвестных функций в уравнениях (9.1)—(9.4) в асимптотические ряды по степеням числа Кибеля $\mathrm{Ki}=U/fL$ так, чтобы в использовавшихся выше безразмерных переменных получалось

$$\Omega=\Delta\psi=\Delta z+O(\mathrm{Ki});\quad D_h=\Delta\varphi=O(\mathrm{Ki}). \tag{9.11}$$

С точностью до $O(\mathrm{Ki})$ из (9.1)—(9.4) выводится уравнение

$$\Delta\left(\int_0^1\frac{\partial z}{\partial t}\,d\zeta+\int_\zeta^1\frac{\alpha^2\,d\zeta}{\zeta^2}\int_0^\zeta\frac{\partial z}{\partial t}\,d\zeta\right)-\beta^2\frac{\partial z}{\partial t}=$$

$$=-\left(\int_0^1[z,\ \Delta z]\,d\zeta+\int_\zeta^1\frac{\alpha^2\,d\zeta}{\zeta^2}\int_0^\zeta[z,\ \Delta z]\,d\zeta\right)-\beta^2\int_0^1\left[z,\ \frac{\partial z}{\partial\zeta}\right]d\zeta, \tag{9.12}$$

где $\beta=L/L_0$, а квадратные скобки $[A, B]$ обозначают якобиан $\partial(A, B)/\partial(x, y)$, так что величина $[z, \Delta z]$ описывает в квазигеострофическом приближении перенос вихря, а $\left[z, \frac{\partial z}{\partial\zeta}\right]$ — перенос температуры. В линейной теории правая часть этого уравнения обращается в ноль, и из него следует, что $\partial z/\partial t=0$, т. е. поле $z(x, y, \zeta, t)$ стационарно; тогда, интегрируя это уравнение по t и учитывая геострофичность ($z\sim\psi$), можно возвратиться к рассмотренному выше уравнению (8.14). При учете же нелинейной правой части уравнения (9.12) поле $z(x, y, \zeta, t)$ перестает быть стационарным и становится медленно меняющимся со временем (медленно по сравнению с полями быстрых волн, участвующих в процессах адаптации). Уравнение (9.12) отличается от (8.14) лишь использованием другого горизонтального масштаба (L вместо L_0) и конкретным видом правой части, так что его решение $\partial z/\partial t$ можно выразить через правую часть в виде интеграла типа (8.15) с функцией влияния, выражающейся через функцию $G(r, \zeta, \zeta_1)$ формулы (8.20):

$$\frac{\partial z\,(x,\ y,\ \zeta,\ t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 d\zeta_1\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{G\,(\beta r,\ \zeta,\ \zeta_1)\,[z,\ \Delta z]_{x_1,\ y_1,\ \zeta_1,\ t}-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta^2\zeta_1^2}{\alpha^2}\,\frac{\partial G\,(\beta r,\ \zeta,\ \zeta_1)}{\partial\zeta_1}\left[z,\ \frac{\partial z}{\partial\zeta}\right]_{x_1,\ y_1,\ \zeta_1,\ t}\right\}dx_1\,dy_1. \tag{9.13}$$

Отсюда видно, что для *барической тенденции*, т. е. скорости изменений давления $\partial z/\partial t$, функцией влияния поля переноса вихря $[z, \Delta z]$ служит G, а поля переноса температуры $[z, \partial z/\partial\zeta]$ —

поле $(\beta^2\zeta_1^2/\alpha^2)\,\partial G/\partial\zeta_1$ (эти функции влияния были опубликованы в 1958 г. в координатах k_x, k_y, z в работе А. М. Обухова и А. С. Чаплыгиной, в координатах k_x, k_y, ζ — в работе Н. И. Булеева и Г. И. Марчука, а в изложенном здесь виде — А. С. Мониным). В предельном случае баротропной атмосферы ($\alpha\to 0$) производные $\partial z/\partial s$ перестают зависеть от ζ, так что уравнение (9.12) и его решение (9.13) принимают вид:

$$\Delta\frac{\partial z}{\partial t}-\beta^2\frac{\partial z}{\partial t}=-[z,\ \Delta z]; \qquad (9.12')$$

$$\frac{\partial z(x,\ y,\ t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int K_0(\beta r)[z,\ \Delta z]_{x_1,\ y_1,\ t}\,dx_1\,dy_1, \qquad (9.13')$$

(А. М. Обухов, 1949).

§ 10. Приливное уравнение Лапласа

Вернемся к уравнению (7.15) для комплексной амплитуды P собственных колебаний приведенного давления и рассмотрим это уравнение в традиционном приближении $\mathbf{k}\to k_r\nabla r$, $k_r=\cos\theta$ (на самом деле совершается не замена постоянного поля на сфере $\mathbf{k}=\text{const}$ переменным радиальным полем $\cos\theta\cdot\nabla r$, которая представлялась бы ничем не оправданной, а замена ускорения Кориолиса $2\omega\mathbf{k}\times\mathbf{u}$ приближенным выражением $2\omega\cos\theta\cdot\nabla r\times\mathbf{u}$, приводящая лишь к потере вертикального ускорения $2\omega u_\lambda\sin\theta$, обычно очень малого по сравнению с величиной $\rho_0^{-1}(\partial p'/\partial z+g\rho')$, и к потере в λ-проекции ускорения слагаемого $2\omega u_r\sin\theta$, очень малого по сравнению с остающимся слагаемым $2\omega u_\theta\cos\theta$ всюду, кроме очень узкой экваториальной зоны). В этом приближении получается

$$\mathbf{L}(\mathbf{A})\to(f^2-\cos^2\theta)^{-1}[f^2\mathbf{A}-if\cos\theta\mathbf{A}\times\nabla r-\cos^2\theta A_r\nabla r]. \qquad (10.1)$$

так что теперь $L_r(\mathbf{A})=A_r$; $\mathbf{L}(\nabla r)=\nabla r$ и $L_r(\nabla r)=1$. При этом из формул (7.12) получается $Q=f^2-N_0^2$, и поэтому

$$\mathbf{M}(\mathbf{A})=\mathbf{L}(\mathbf{A})+\frac{N_0^2A_r\nabla r}{f^2-N_0^2};\quad M_r(\mathbf{A})=\frac{f^2A_r}{f^2-N_0^2}. \qquad (10.2)$$

При использовании определений (10.1) и (10.2) уравнение (7.15) превращается в так называемое приливное уравнение Лапласа, в котором все три пространственные переменные r, θ и λ разделяются. В слое жидкости с *горизонтальными* нижней и верхней границами $r=r_0-h$ и $r=r_0$ достаточно рассмотреть решения с разделяющимися переменными, зависящие от долготы периодически — по закону $e^{im\lambda}$ с целыми значениями m, т. е. решения вида $P=e^{im\lambda}P_1(r)P_2(\theta)$. Тогда после разделения переменных

из приливного уравнения Лапласа для $P_1(r)$ и $P_2(\theta)$ получаются уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{\rho_{00}(f^2-N_0^2)}\frac{\partial P_1}{\partial r}-\frac{r^2}{\rho_{00}c_0^2}\left(\frac{g}{f^2-N_0^2}\frac{\partial P_1}{\partial r}-4\omega^2 P_1\right)-\frac{\varepsilon}{\rho_{00}}P_1=0; \tag{10.3}$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{f^2-\cos^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m}{f}\operatorname{ctg}\theta\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{f^2-\cos^2\theta}\left(-\frac{m}{f}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\right]P_2+\varepsilon P_2=0, \tag{10.4}$$

где $\varepsilon=4r_0^2\omega^2/gh_0$ — произвольная постоянная, возникшая при разделении переменных (введенная здесь произвольная постоянная h_0 в случае однородного океана равна его глубине, а в общем случае называется *динамически эквивалентной глубиной* для рассматриваемого собственного колебания). Краевым условием для уравнения (10.3) на *твердой* нижней границе слоя — *дне* $r=r_0-h$ — служит обращение в ноль вертикальной скорости $u_r\sim M_r(\nabla P)\sim\partial P/\partial r$, а на *свободной* верхней поверхности — условие (7.16) (в котором здесь для упрощения расчетов мы положим $\gamma_0=0$, т. е. пренебрежем капиллярными эффектами; в атмосферах, не имеющих отчетливой верхней поверхности, вместо этого условия достаточно требовать ограниченности решения). Уравнение (10.3) с этими краевыми условиями будет иметь нетривиальные решения $P_1\not\equiv 0$ лишь при некоторых специальных значениях частот f, которые при фиксированных физических параметрах являются функциями $f=f_1(\varepsilon)$ от постоянной разделения переменных (описывающими так называемые *собственные кривые* «вертикального» уравнения (10.3) в плоскости ε, f). Аналогично этому «горизонтальное» уравнение (10.4) имеет нетривиальные решения $P_2\not\equiv 0$, ограниченные при $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, лишь при некоторых специальных значениях $f=f_2(\varepsilon)$. Точкам пересечения «вертикальных» и «горизонтальных» собственных кривых $f=f_1(\varepsilon)$ и $f=f_2(\varepsilon)$ соответствуют собственные частоты приливного уравнения Лапласа. Отметим при этом, что все эффекты сжимаемости, силы тяжести, стратификации и условий на верхней границе слоя проявляются лишь в уравнении (10.3), а эффекты вращения и сферичности планеты — лишь в уравнении (10.4).

Уравнение (10.3) рассмотрим, следуя В. М. Каменковичу (1973), записав его после несложной перенормировки плотности $\rho_{00}\to\rho_1$ в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial P_1}{\partial z}+(\sigma^2-N^2)\rho_1 W=0;\quad \frac{\partial W}{\partial z}+\left(\varepsilon_1-\frac{1}{c_0^2}\right)\frac{P_1}{\rho_1}=0;$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z}=0 \text{ при } z=-h;\quad P_1+g\rho_1 W=0 \text{ при } z=0, \tag{10.3'}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon/4r_0^2\omega^2 = (gh_0)^{-1}$, а $W(z)$ — нормированный вертикальный профиль вертикальной скорости. Отметим, что собственные частоты вещественны вследствие адиабатичности, вещественность ε_1 будет доказана ниже; поэтому собственные функции P_1 и W также можно считать вещественными. Продифференцировав первое уравнение (10.3′) по ε_1, умножив результат на W, исключив из него с помощью исходного уравнения величину $(\sigma^2 - N^2)\rho_1 W$ и проинтегрировав по z, получим

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial\varepsilon_1}\int \rho_1 W^2\,dz = \int\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_1} - W\frac{\partial^2 P_1}{\partial z\,\partial\varepsilon_1}\right)dz = \int\left(\frac{\partial P_1}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial W}{\partial z} - P_1\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_1\,\partial z}\right)dz. \tag{10.5}$$

Правая часть здесь получилась в результате интегрирования по частям с использованием краевых условий (10.3′). Исключив из нее $\partial^2 W/\partial\varepsilon_1\,\partial z$ с помощью второго уравнения (10.3′), приведем ее к виду $\int P_1^2\rho_1^{-1}dz$, и тогда из (10.5) видно, что $\partial\sigma^2/\partial\varepsilon_1 > 0$. Таким образом, собственные кривые «вертикального» уравнения в плоскости (ε_1, σ), во-первых, симметричны относительно оси $\sigma = 0$ и, во-вторых, с ростом ε_1 при $\sigma > 0$ монотонно возрастают (а при $\sigma < 0$, наоборот, монотонно убывают). Аналогично выводу уравнения (10.5), рассчитав с помощью уравнений (10.3′) величину $W\dfrac{\partial P_1^*}{\partial z} + P_1^*\dfrac{\partial W}{\partial z}$ и проинтегрировав ее по z, получим

$$\int (N^2 - \sigma^2)\rho_1 |W|^2\,dz + g\rho_1 |W|^2_{z=0} = \int (\varepsilon_1 - c_0^{-2})\rho_1^{-1}|P_1|^2\,dz, \tag{10.6}$$

откуда видно, что ε_1 вещественно и что при $\sigma^2 < N^2_{\min}$ должно быть $\varepsilon_1 \geqslant c_{0\max}^{-2}$.

Полный расчет всех «вертикальных» собственных кривых осуществляется без труда в простейшем случае несжимаемой жидкости ($c_0 \to \infty$), когда в уравнениях (10.3′) ρ_1 и N можно считать квазипостоянными, и из них получается

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \varepsilon_1 (N^2 - \sigma^2) W = 0 \tag{10.7}$$

с краевыми условиями $W = 0$ при $z = -h$ и $\partial W/\partial z = g\varepsilon_1 W$ при $z = 0$. При $\varepsilon_1 > 0$ и $\sigma^2 > N^2$ получаем

$$W = \operatorname{sh}\left[\varepsilon_1^{1/2}(\sigma^2 - N^2)^{1/2}(z + h)\right];$$

$$\operatorname{th}\left(b\varepsilon_1^{1/2}\right) = a\varepsilon_1^{-1/2};\quad a = g^{-1}(\sigma^2 - N^2)^{1/2};\quad b = h(\sigma^2 - N^2)^{1/2}. \tag{10.8a}$$

Это уравнение относительно ε_1 имеет один корень, который обозначим ε_0. Собственную кривую $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(\sigma)$ можно назвать «нулевой». На ней $\varepsilon_0 \to \infty$ ($\sigma \to \infty$) и асимптотически $\varepsilon_0 \sim \sigma^2 g^{-2}$, а при

$\sigma \to 0$ получается $\varepsilon_0(0) \approx (gh)^{-1}$. При $\varepsilon_1 > 0$ и $\sigma^2 < N^2$ вместо (10.8а) получаем

$$W = \sin\left[\varepsilon_1^{1/2}\left(N^2 - \sigma^2\right)^{1/2}(z + h)\right];$$

$$\operatorname{tg}\left(b\varepsilon_1^{1/2}\right) = a\varepsilon_1^{-1/2};\quad a = g^{-1}\left(N^2 - \sigma^2\right)^{1/2};\quad b = h\left(N^2 - \sigma^2\right)^{1/2}. \qquad (10.8б)$$

Это уравнение имеет счетное множество корней, приближенно определяемых формулой $\varepsilon_n \approx (\pi n)^2 h^{-2}(N^2 - \sigma^2)^{-1}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ Соответствующие собственные кривые можно назвать «положительными». Все они имеют асимптоту $\sigma^2 \sim N^2 (\varepsilon_1 \to \infty)$. При $\varepsilon_1 < 0$ и $\sigma^2 < N^2$ функция W определяется той же формулой, что в (10.8а), а для определения собственных кривых получается уравнение

$$\operatorname{th}\left[b\left(-\varepsilon_1\right)^{1/2}\right] = -a\left(-\varepsilon_1\right)^{-1/2};\quad a = g^{-1}\left(N^2 - \sigma^2\right)^{1/2};$$
$$b = h\left(N^2 - \sigma^2\right)^{1/2}. \qquad (10.8в)$$

которое решений не имеет, так что в этом квадранте плоскости (ε_1, σ) собственных кривых не имеется. Наконец, при $\varepsilon_1 < 0$ и $\sigma^2 > N^2$ функция W определяется формулой (10.8б), а для определения собственных кривых получается уравнение

$$\operatorname{tg}\left[b\left(-\varepsilon_1\right)^{1/2}\right] = -a\left(-\varepsilon_1\right)^{-1/2};\quad a = g^{-1}\left(\sigma^2 - N^2\right)^{1/2};$$
$$b = h\left(\sigma^2 - N^2\right)^{1/2}, \qquad (10.8г)$$

имеющее счетное множество корней $\varepsilon_n \approx -(\pi n)^2 h^{-2}(\sigma^2 - N^2)^{-1}$, $n = -1, -2, -3, \ldots$ Соответствующие собственные кривые можно назвать «отрицательными». Все они имеют асимптоты $\varepsilon_1 \sim 0$ $(\sigma \to \infty)$ и $\sigma^2 \sim N^2$ $(\varepsilon_1 \to -\infty)$.

Возвратившись от (10.7) к общему случаю уравнений (10.3′) с переменными коэффициентами, можно убедиться, что общий характер собственных кривых в плоскости (ε_1, σ) при этом существенно не изменяется (но их асимптоты смещаются) — имеются «нулевая» собственная кривая (с той же асимптотой $\varepsilon_0 = \sigma^2/g^2$, что и раньше), «положительные» кривые (с асимптотами $\sigma^2 \sim N^2_{\max}$ при $\varepsilon_1 \to \infty$) и «отрицательные» кривые (с асимптотами $\varepsilon_1 \sim c_{0\min}^{-2}$ при $\sigma^2 \to \infty$ и $\sigma^2 \sim N^2_{\min}$ при $\varepsilon_1 \to -\infty$), см. рис. 10.1.

Продемонстрируем методы доказательства этих утверждений на примере области $\sigma^2 < N^2_{\min}$, $\varepsilon_1 > c_{0\max}^{-2}$ плоскости (ε_1, σ). Исключив из уравнений (10.3′) функцию W, получим для P_1 следующие уравнение и краевые условия:

$$\frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial P_1}{\partial z} - GP_1 = 0;\quad K = \rho_1^{-1}\left(N^2 - \sigma^2\right)^{-1};\quad G = \rho_1^{-1}\left(c_0^{-2} - \varepsilon_1\right);$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h;\quad P_1 + g\left(N^2 - \sigma^2\right)^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0. \qquad (10.9)$$

Пусть $P(z)$ — решение этого уравнения при краевых условиях $P=1$, $\partial P/\partial z=0$ при $z=-h$. Рассмотрим $F(\varepsilon_1)=K(0)P^{-1}(0)\times$ $\times\partial P(0)/\partial z$. При увеличении ε_1 от $-\infty$ до $+\infty$ функция K не меняется, G уменьшается, и согласно так называемой первой тео-

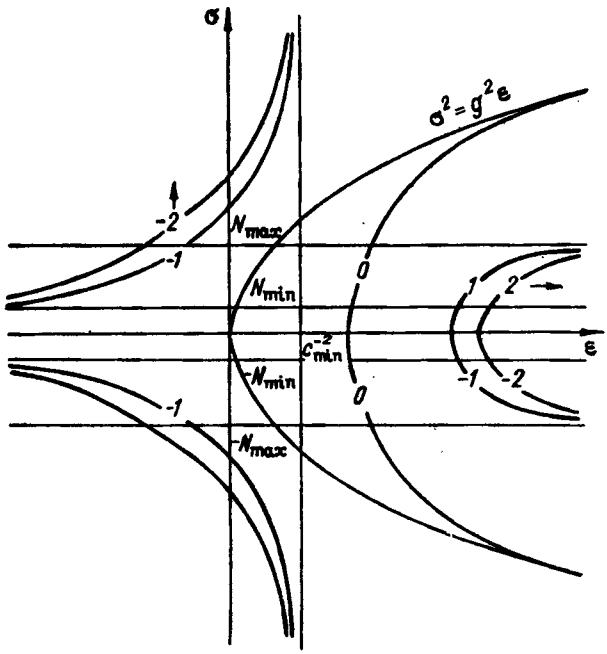


Рис. 10.1. «Вертикальные» собственные кривые.

реме Штурма число нулей функции $P(z)$ в интервале $-h\leqslant z\leqslant$ $\leqslant 0$ может только возрастать, причем каждый новый нуль сначала появляется в точке $z=0$, а затем перемещается к точке $z=-h$ (выйти через которую нули не могут). Поскольку $G\to$ $\to-\infty$ $(\varepsilon_1\to\infty)$, значений $\bar{\varepsilon}_n$ параметра ε_1, при которых $P(0)=$ $=0$, будет бесконечно много. По второй теореме сравнения Штурма в интервалах $(-\infty, \bar{\varepsilon}_1)$, $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)$, ... функция $F(\varepsilon_1)$ будет монотонно убывающей. Заменив в (10.9) K на $K_{\min}=\rho_{1\max}^{-1}\times$ $\times(N_{\max}^2-\sigma^2)^{-1}$ и G на $G_{\min}=\rho_{1\max}^{-1}(c_{0\max}^{-2}-\varepsilon_1)$, при помощи второй теоремы сравнения нетрудно доказать, что $F\to\infty$ $(\varepsilon_1\to$ $\to-\infty)$. Пересечение графика $F=F(\varepsilon_1)$ с прямой $F=-[g\rho_1(0)]^{-1}$ дает собственные значения ε_0, ε_1, ε_2, ...

При $\varepsilon_1>c_{0\max}^{-2}$ в интервале $-h\leqslant z\leqslant 0$ всегда найдется подынтервал, на котором $G<0$. Тогда при $\sigma^2\to-\infty$ функция K

уменьшается, и согласно первой теореме сравнения $P(z)$ будет осциллировать на указанном подынтервале, а потому и на всем интервале. Значит, при любом фиксированном $\varepsilon_1 > c_{0\max}^{-2}$ существует бесконечно много собственных значений σ^2. Поскольку собственные кривые не пересекаются, при $\sigma^2 \to -\infty$ все они стремятся к вертикальной асимптоте $\varepsilon_1 = c_{0\max}^{-2}$.

Заменяя K, G на $K_{\min}$, $G_{\min}$ и на $K_{\max}$, $G_{\max}$ и находя для измененных уравнений (10.9) элементарным образом собственные значения ε_1, нетрудно вывести неравенства:

$$\frac{\rho_{1\min}}{\rho_{1\max}} \frac{(\pi n)^2}{\left(N_{\max}^2 - \sigma^2\right) h^2} + c_{0\max}^{-2} < \varepsilon_n(\sigma^2) < c_{0\min}^{-2} + \frac{\rho_{1\max}}{\rho_{1\min}} \frac{[\pi(n+1)]^2}{\left(N_{\min}^2 - \sigma^2\right) h^2}, \tag{10.10}$$

которые дают некоторое представление о расположении собственных кривых $\varepsilon_n(\sigma^2)$. Заметим еще, что собственные кривые не могут пересекать линию $\sigma^2 = g^2\varepsilon_1$, так что вследствие своей монотонности они не могут иметь вертикальной асимптоты при $\varepsilon_1 > c_{0\max}^{-2}$ и обязательно должны попадать в область $\varepsilon_1 > c_{0\min}^{-2}$. Их поведение в этой области, а также и в других областях плоскости $(\varepsilon_1, \sigma^2)$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь «горизонтальное» уравнение (10.4). Отметим, что у этого уравнения особыми точками являются полюсы $\theta = 0, \pi$ (в окрестности каждого из которых имеется как решение в виде произведения $(\sin\theta)^m$ на аналитическую функцию, так и неприемлемое для нас решение с логарифмическим ветвлением) и «критические широты», в которых $\cos\theta = \pm f$ (но в окрестностях которых решения непрерывны и даже аналитичны). Перейдя вместо широты к переменной $\mu = \cos\theta$, запишем (10.4) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{m}{f}\mu\right]\psi = (f^2 - \mu^2)\xi); \tag{10.11}$$

$$\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{m}{f}\mu\right]\xi = \left[\frac{m^2}{f^2} - (1-\mu^2)\varepsilon\right]\psi, \tag{10.12}$$

где $\psi = P_2$ — старая неизвестная, и первое из этих уравнений служит определением дополнительной неизвестной ξ. Умножив первое из этих уравнений на комплексно-сопряженную величину ξ^*, а уравнение, комплексно-сопряженное ко второму, на ψ, сложив результаты, поделив их сумму на $1-\mu^2$ и проинтегрировав по μ от -1 до $+1$, получим

$$\varepsilon^* = \left(\int_{-1}^{1} |\psi|^2 d\mu\right)^{-1} \left[\int_{-1}^{1} \frac{f^2 - \mu^2}{1-\mu^2} |\xi|^2 d\mu + \int_{-1}^{1} \frac{m^2 |\psi|^2 d\mu}{f^2(1-\mu^2)}\right], \tag{10.13}$$

откуда видно, во-первых, что ε вещественно (и может быть как положительным, так и отрицательным), и, во-вторых, что при $f^2 \geqslant 1$ (т. е. при собственных периодах меньше полусуток) ε положительно. Аналогично доказывается ортогональность

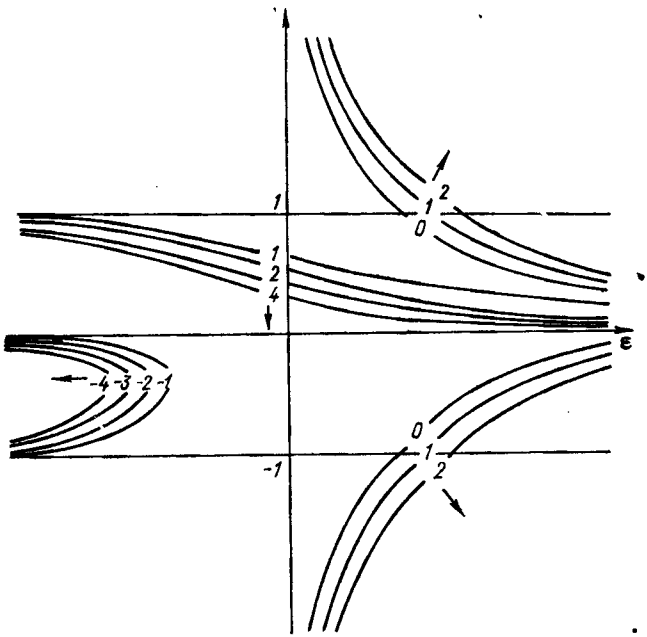


Рис. 10.2. «Горизонтальные» собственные кривые.
По оси ординат отложено f.

$\int_{-1}^{1} \psi_1 \psi_2^* d\mu = 0$ собственных функций с разными ε (при одном и том же f). Нетрудно убедиться также, что разные собственные кривые $f = f(\varepsilon)$ не пересекаются.

Поведение собственных кривых легко выясняется в области больших $|f|$, в которой уравнения (10.11) и (10.12) принимают асимптотический вид:

$$(1-\mu^2)\frac{\partial \psi}{\partial \mu} = f^2 \xi; \quad (1-\mu^2)\frac{\partial \xi}{\partial \mu} = \left[\frac{m^2}{f^2} - (1-\mu^2)\varepsilon\right]\psi, \quad (10.14)$$

откуда после исключения ξ получается уравнение Лежандра

$$(1-\mu^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{m^2}{1-\mu^2}\psi + \varepsilon f^2 \psi = 0, \quad (10.15)$$

имеющее регулярные решения — функции Лежандра $\psi = P_n^m(\mu)$ при $\varepsilon f^2 = n(n+1)$, где $n = m, m+1, \ldots$. Асимптотики $|f| \sim [n(n+1)/\varepsilon]^{1/2}$ при $\varepsilon \to +0$ показаны на рис. 10.2. Они соответствуют

так называемому 1-му типу собственных кривых. Но при $\varepsilon \to 0$ не все собственные кривые приближаются к оси ординат: при малых ε и конечных f в уравнениях (10.11), (10.12) асимптотически выпадает лишь слагаемое $-(1-\mu^2)\varepsilon\psi$, и после исключения ψ из них для ξ получается опять уравнение Лежандра

$$(1-\mu^2)\frac{\partial^2\xi}{\partial\mu^2} - 2\mu\frac{\partial\xi}{\partial\mu} - \frac{m^2}{1-\mu^2}\xi + \frac{m}{f}\xi = 0 \qquad (10.16)$$

с регулярными решениями при $m/f = n(n+1)$ (при этом ψ есть линейная комбинация P^m_{n+1} и P^m_{n-1}). Такие асимптоты (соответствующие так называемому 2-му типу собственных кривых) годятся и при положительных, и при отрицательных ε. Заметим также, что положительные значения m/f соответствуют волнам, распространяющимся с востока на запад. Рассмотрим теперь асимптотику собственных кривых при $\varepsilon \to \infty$ (или $h \to 0$) и $f \to 0$, используя вытекающее из (10.11), (10.12) уравнение

$$\left(\mathscr{L} + \frac{m}{f}\right)\xi = \varepsilon\left[\left(\frac{m}{f} + 2\right)\mu - (1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\psi;$$

$$\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{m^2}{1-\mu^2}. \qquad (10.17)$$

Поскольку $f \to 0$, в правой части (10.17) положим $\frac{m}{f}+2 \approx \frac{m}{f}$ и, пользуясь уравнением (10.11), заменим ее на $(\mu^2 - f^2)\xi$, так что получится

$$-\varepsilon^{-1}\mathscr{L}\xi + \mu^2\xi = E\xi; \quad E = f^2 + \frac{m}{f\varepsilon}, \qquad (10.17')$$

и предстоит изучить асимптотическое поведение собственных значений E дифференциального оператора с малым параметром ε^{-1} при старшей производной. Эта задача аналогична так называемому *квазиклассическому приближению* в квантовой механике, в котором из уравнения Шредингера $-\hbar\partial^2\psi/\partial x^2 + U(x)\psi = E\psi$ ищется асимптотика для полной энергии E при малой постоянной Планка $\hbar \to 0$; в (10.17′) роль потенциальной энергии $U(x)$ играет μ^2, а вместо $\partial^2/\partial x^2$ фигурирует оператор $\mathscr{L}$. Из (10.17′) видно, что конечная функция $\xi(\mu)$ должна иметь большие производные, так что можно предположить, что она «локализована», т. е. существенно отлична от нуля лишь на малом отрезке μ, например, при $\mu^2 \ll 1$. Тогда там уравнение (10.17′) приближенно примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + E\varepsilon^{1/2} - \theta^2\right)\xi = 0; \quad \theta = \mu\varepsilon^{1/4}. \qquad (10.17'')$$

Определенные при всех θ и ограниченные при $\varepsilon \to \infty$ решения этого уравнения имеют вид $\xi = \exp(-\theta^2/2) H_\nu(\theta)$, где H_ν — полиномы Эрмита с номерами $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющими соотношению $E\varepsilon^{1/2} = 2\nu + 1$. Вспоминая определение E и рассматривая это соотношение, как кубическое уравнение относительно f, запишем его корни в виде рядов:

$$f = \pm (2\nu + 1)^{1/2} \varepsilon^{-1/4} - \frac{m\varepsilon^{-1/2}}{4\nu + 2} + \ldots; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots; \tag{10.18}$$

$$f = \frac{m\varepsilon^{-1/2}}{2\nu + 1} + \ldots; \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{10.19}$$

Подстановка полученных рядов в исходное уравнение для ξ подтверждает их пригодность при всех ν, кроме значения $\nu = 0$ в (10.19) (которое поэтому и исключено), соответствующего случаю $m^2 = \varepsilon f^2$, требующему отдельного рассмотрения. При $f = -m\varepsilon^{-1/2}$ из (10.11) и (10.12) получается $\psi \approx \exp(-\theta^2/2)$, $\xi \approx 0$, а при $f = +m\varepsilon^{-1/2}$ решение не существует.

Остается изучить асимптотики собственных кривых при $\varepsilon \to -\infty$ (при этом $f^2 < 1$). Сначала рассмотрим собственные кривые 2-го типа. Согласно численным расчетам, $f \to 1$ $(\varepsilon \to -\infty)$, и из (10.11) и (10.12) вытекает, что величина $1 - \mu^2$ должна быть малой, так что функция $\xi(\mu)$ «локализована» около полюсов. Например, около северного полюса, введя независимую переменную $x = (-\varepsilon)^{1/2}\theta^2$, где θ — дополнение широты, и отыскивая частоты в виде $f = 1 - q(-\varepsilon)^{-1/2} + O(\varepsilon^{-1})$, где коэффициент q подлежит определению, уравнение для ξ удается приближенно привести к виду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{q}{2x} - \frac{m^2 - 2m}{4x^2}\right)\xi = 0. \tag{10.20}$$

Ограниченное при $0 \leqslant x < \infty$ решение здесь существует лишь при $q = m + 2\nu$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ и имеет вид

$$\xi = e^{-x/2} x^{m/2} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} L_{m-1+\nu}(x),$$

где $L_n(x)$ — полиномы Лагерра. Такая же асимптотика получается и у южного полюса. Наконец, укажем собственные кривые 3-го типа с асимптотикой одной из их ветвей $f = -1 + q(-\varepsilon)^{-1/2} + O(\varepsilon^{-1})$, причем аналогично (10.20) получается $q = m + 2\nu + 2$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ и

$$\xi = e^{-x/2} x^{\frac{m+2}{2}} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} L_{m+1+\nu}(x).$$

Вторая ветвь этих собственных кривых при $\varepsilon \to -\infty$ имеет асимптоту $f = 0$, так что положим

$$f = -m(-\varepsilon)^{-1} - 2qm(-\varepsilon)^{-3/2} + O(\varepsilon^{-2}),$$

и аналогично (10.20) получается $q=m+2\nu+1$; $\nu=0, 1, 2, \ldots$

и
$$\xi = e^{-x/2}x^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}L_{m+\nu}(x).$$

Все перечисленные асимптоты «горизонтальных» собственных кривых показаны на рис. 10.2. Случай $m=0$ (зональное движе-

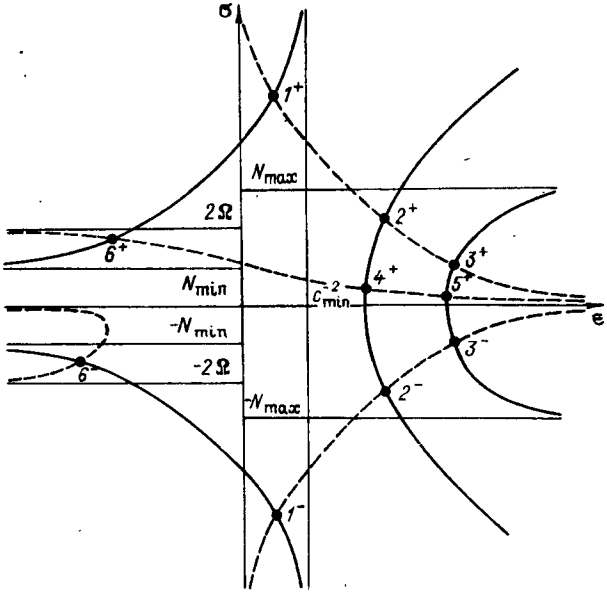


Рис. 10.3. Схема пересечения «вертикальных» (сплошные линии) и «горизонтальных» (пунктиры) собственных кривых в случае $N_{\min}<2\omega<N_{\max}$. Показано лишь по одной собственной кривой для каждого семейства.

Точки пересечения $1^{\pm}$ соответствуют акустическим волнам, $2^{\pm}$ — поверхностным, $3^{\pm}$ — внутренним гравитационным, 4^{+} — баротропным, 5^{+} — бароклинным волнам Россби—Блиновой, $6^{\pm}$ — гироскопическим волнам.

ние) надо рассматривать отдельно; кривых 2-го типа в этом случае не возникает.

Схема пересечения «вертикальных» и «горизонтальных» собственных кривых (в случае $N_{\min} < 2\omega < N_{\max}$) показана на рис. 10.3.

Точки $1^{\pm}$ пересечения отрицательных «вертикальных» кривых с «горизонтальными» кривыми 1-го типа соответствуют акустическим волнам: в несжимаемой среде (при $c_0 \to \infty$) они пропадают, но сохраняются при $\rho_0=\text{const}$, $N_0=0$ и в невращающейся плоскости. Для них справедливо неравенство

$$\sigma^2 > N_{\min}^2 + \frac{\rho_{1\min}}{\rho_{1\max}}\left(\frac{\pi c_{0\min}}{2h}\right)^2. \qquad (10.21)$$

На кривых 1-го типа имеются также точки $2^{\pm}$ пересечения с нулевой «вертикальной» кривой, соответствующие поверхностным гравитационным волнам (нулевая кривая пропадает при замене свободной поверхности твердой крышкой), и точки $3^{\pm}$ пересечения с положительными вертикальными кривыми, соответствующие внутренним гравитационным волнам, для которых из (10.10) получается

$$0 < |\sigma| < N_{\max}; \quad \varepsilon > c_{0\max}^{-2} + \frac{\rho_{1\min}}{\rho_{1\max}} \left(\frac{\pi}{N_{\max} h}\right)^2. \qquad (10.22)$$

Точки 4^{+} пересечения «горизонтальных» кривых 2-го типа с нулевой «вертикальной» кривой соответствуют так называемым *баротропным* волнам Россби—Блиновой, создаваемым совместным эффектом вращения и сферичности планеты (условие существования кривых 2-го типа); у них $0 < \sigma < \omega$. Точки 5^{+} пересечения с положительными «вертикальными» кривыми соответствуют *бароклинным волнам* Россби—Блиновой (исчезающим при $N_{\max} \to 0$); у них $0 < \sigma < \min(\omega, N_{\max})$. Волны Россби—Блиновой распространяются только на запад.

Наконец, точки $6^{\pm}$ пересечения отрицательных «вертикальных» кривых с «горизонтальными» кривыми 2-го и 3-го типов соответствуют так называемым *гироскопическим* волнам, создаваемым достаточно быстрым вращением ($2\omega > N_{\min}$); у них

$$N_{\min} < |\sigma| < 2\omega; \quad \varepsilon < c_{0\,\min}^{-2} - \frac{\rho_{1\min}}{\rho_{1\max}} \frac{\pi^2}{4h^2 \left(4\omega^2 - N_{\min}^2\right)}. \qquad (10.23)$$

ГЛАВА 3

Гидродинамическая неустойчивость

§ 11. Неустойчивость течений идеальной жидкости

В предыдущей главе мы рассматривали адиабатические малые колебания жидкости относительно состояния покоя (или относительно стационарного движения, описываемого одним из решений линеаризированных уравнений гидродинамики) и из неизменности во времени полной энергии собственных колебаний (7.7) делали вывод о вещественности их частот σ (что затем подтверждалось конкретным расчетом всех возможных таких частот), так что малые начальные возмущения не разрастались и не затухали со временем. При этом в гл. 2 неизменно считалось, что стратификация плотности устойчива, т. е. $N_0^2 > 0$.

Рассмотрим теперь противоположный случай неустойчивой стратификации плотности, т. е. $N_0^2 = -M^2 < 0$. Ограничимся здесь (и далее в настоящей главе) приближением Буссинеска, заменяя уравнение неразрывности (7.1) отфильтровывающим акустические волны условием соленоидальности поля скорости $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, и пренебрежем пока что вращением системы отсчета ($\omega \to 0$), так что уравнения (7.1)—(7.3) примут вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p''}{\rho_{00}} + g\eta'' \nabla r; \quad \frac{\partial \eta''}{\partial t} = \frac{M^2}{g} u_r. \tag{11.1}$$

Вместо локального уравнения энергии (7.6) теперь получается

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{00} u^2 - \rho_{00} \frac{g^2 \eta''^2}{M^2} \right) + \operatorname{div} p'' \mathbf{u} = 0, \tag{11.2}$$

и, например, для слоя $0 \leqslant z \leqslant h$ между горизонтальными твердыми стенками находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{u^2}{2} \rho_{00} \, dV - \int \frac{g^2 \eta''^2}{2M^2} \rho_{00} \, dV \right) = 0, \tag{11.3}$$

т. е. *разность* полных кинетической и термобарической энергии возмущений не меняется со временем, а о поведении каждого по отдельности из этих двух видов энергии из (11.3) нельзя извлечь никаких выводов — вскоре мы увидим, что оба они экспоненциально возрастают со временем. Рассмотрим только двумерные возмущения движения в плоскости (x, z) и введем в ней, пользуясь бездивергентностью скорости, функцию тока ψ, полагая

$u=-\partial\psi/\partial z$, $w=\partial\psi/\partial x$. Вычислив вихрь уравнений движения (в предположении квазипостоянства потенциальной плотности ρ_{00}) и исключив η'' с помощью третьего уравнения (11.1), получим для ψ уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial t^2} - M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \qquad (11.4)$$

с краевыми условиями $w=0$, т. е. $\psi=0$ при $z=0$, h. Поскольку M^2 не зависит от x и t, элементарные решения этого уравнения можно искать в виде $\psi=\psi(z)\exp[i(kx-\sigma t)]$. Для комплексной амплитуды $\psi(z)$ из (11.4) получается уравнение

$$\sigma^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - k^2\psi\right) - k^2M^2\psi = 0. \qquad (11.5)$$

При квазипостоянном M решение, обращающееся в ноль при $z=0$, имеет вид $\psi\sim\sin mz$, где $m=-ik(1+M^2/\sigma^2)^{1/2}$. Для обращения ψ в ноль также при $z=h$ следует положить $mh=\pi n$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, откуда

$$\sigma = \pm iM(1+\pi^2n^2/k^2h^2)^{-1/2}, \qquad (11.6)$$

так что при каждом фиксированном k имеется счетное множество элементарных решений, и у всех них значения σ оказываются чисто мнимыми. Таким образом, здесь всегда существуют элементарные решения, разрастающиеся со временем. Это явление называют статической (тейлоровской) неустойчивостью. Ее механизм был разъяснен в § 2: он заключается в ускоряющем действии архимедовых сил на смещающиеся по вертикали из положения равновесия жидкие частицы. При этом, согласно третьему уравнению (11.1), взаимодействие вертикальной скорости u_r с неустойчивым градиентом потенциальной плотности M^2/g приводит к росту возмущений энтропии η'', а согласно второму уравнению (11.1) их вклад $g\eta''$ в архимедово ускорение приводит к росту u_r.

Разрастание малых возмущений может создаваться не только неустойчивым распределением плотности в равновесном состоянии, но и некоторыми формами распределения скорости в нем. Рассмотрим, например, вопрос об устойчивости плоскопараллельного стационарного течения несжимаемой идеальной жидкости, направленного вдоль оси x и имеющего скорость $\mathbf{u}_0=\{U(z), 0, 0\}$. Линеаризированные уравнения гидродинамики вместо (7.1), (7.2), будут иметь вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0; \quad \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + U\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x} + w\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial z} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}. \qquad (11.7)$$

Локальное уравнение энергии теперь имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\rho_0|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\rho_0 U|\mathbf{u}|^2 + \rho_0 uw\frac{\partial U}{\partial z} + \operatorname{div}p'\mathbf{u} = 0, \qquad (11.8)$$

откуда, например, для слоя $0 \leqslant z \leqslant h$ между горизонтальными твердыми стенками получается

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\rho_0\, dV = -\int \rho_0 uw \frac{\partial U}{\partial z}\, dV, \qquad (11.9)$$

так что кинетическая энергия возмущений может меняться со временем вследствие работы напряжений $-\rho_0 uw$ на градиенте равновесной скорости $\partial U/\partial z$. Рассмотрим, как и выше, только двумерные возмущения $u=-\partial\psi/\partial z$, $w=\partial\psi/\partial x$. Тогда, вычислив вихрь от уравнения (11.7), получим аналогичное (11.4) уравнение для ψ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\psi - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \qquad (11.10)$$

Однако вопрос о поведении решений ψ этого уравнения оказывается гораздо более сложным, чем в случае (11.4). Будем опять искать элементарные волновые решения в виде $\psi=\psi(z)\times \times\exp[i(kx-\sigma t)]$. Тогда для комплексной амплитуды $\psi(z)$ получается так называемое *уравнение Рэлея*

$$(U-c)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-k^2\psi\right)-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\psi=0, \qquad (11.11)$$

где $c=\sigma/k$ — фазовая скорость. Это уравнение, во-первых, имеет особую точку z_0, в которой для нейтральных возмущений (вещественные c) коэффициент $U-c\approx U'(z_0)(z-z_0)$ при старшей производной $\partial^2\psi/\partial z^2$ может обратиться в ноль, так что там производная $\partial\psi/\partial z\sim(\psi U''/U')_0\ln(z-z_0)$ многозначна, и возникает проблема выбора нужной ветви решения. Во-вторых, набор дискретных собственных значений c оказывается, как правило, лишь конечным, так что далеко не каждое решение уравнения (11.10) для суждения об его устойчивости может быть представлено в виде суперпозиции соответствующих элементарных волновых решений. Правда, здесь существует еще и непрерывный спектр собственных значений c, в чем легко убедиться, переписав уравнение (11.11) в виде

$$(U-U''\mathscr{L}^{-1})\psi_1=c\psi_1;\quad \mathscr{L}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2;\quad \psi_1=\mathscr{L}\psi \qquad (11.11')$$

(здесь и далее штрих обозначает производную по z), откуда видно, что c есть собственное значение суммы оператора умножения на функцию $U(z)$ (имеющего вещественный непрерывный спектр, заполняющий отрезок $U_{\min}\leqslant c\leqslant U_{\max}$) и вполне непрерывного оператора $-U''\mathscr{L}^{-1}$ (добавление которого не меняет непрерывного спектра). Однако оператор $U''\mathscr{L}^{-1}$ не является самосопряженным, и теоремы о разложении произвольной функции по дискретному и непрерывному спектру здесь не имеется. В-третьих, вследствие несамосопряженности указанного оператора даже

вещественные собственные значения c, скажем, дискретного спектра, если они кратные, могут приводить к неустойчивости в виде наличия «вековых» возмущений, линейно растущих со временем.

Пример уравнения Рэлея показывает, что целесообразно исходить из более общего определения гидродинамической неустойчивости, чем наличие у линеаризированных уравнений собственных значений с отрицательными мнимыми частями. Чтобы дать такое общее определение, введем понятие о *фазовом пространстве* жидкости, «точками» M которого являются полные наборы независимых (т. е. не связанных синхронными соотношениями) термогидродинамических полей, характеризующих мгновенные состояния движущейся жидкости. В случае несжимаемой жидкости это — поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в занятой жидкостью области пространства, удовлетворяющее должным краевым условиям; в общем случае к нему добавляются поля плотности $\rho(\mathbf{x})$, энтропии $\eta(\mathbf{x})$ и концентрации примеси $s(\mathbf{x})$; в галеркинских приближениях (6.3) это — наборы коэффициентов $u^1, \ldots, u^n$ (играющих роль обобщенных координат или степеней свободы течения, которых, таким образом, оказывается, вообще говоря, бесконечно много). Эволюция течения жидкости во времени изображается в фазовом пространстве некоторой линией $M=M(t)$ — фазовой траекторией течения; у стационарного течения она состоит из одной точки, у периодического — образует замкнутую линию (цикл). Совокупность $M(t)=F^tM(0)$ фазовых траекторий, проведенных через все точки фазового пространства $M=M(0)$ и продолженных на всю ось времени, определяет группу отображений F^t фазового пространства на себя, называемую *фазовым потоком*. Он описывает эволюцию всех течений жидкости в данной геометрии при всевозможных начальных данных.

Пусть в фазовом пространстве введена норма его элементов $\|M\|$. Тогда общее определение устойчивости фазовой траектории $M=M_0(t)$ по А. М. Ляпунову будет следующим: при каждом сколь угодно малом положительном числе ε существует такое положительное число $\delta=\delta(\varepsilon)$, что для любой траектории $M=M(t)$ с начальным значением $M(0)$, удовлетворяющим условию $\|M(0)-M_0(0)\|<\delta$, при всех $t>0$ выполняется неравенство $\|M(t)-M_0(t)\|<\varepsilon$. Нетрудно убедиться, что из наличия хотя бы одного неустойчивого инфинитезимального волнового возмущения $M'(t)=M(t)-M_0(t)$ (с отрицательной мнимой частью $\gamma=\operatorname{Im}\sigma<0$ собственной частоты σ) вытекает неустойчивость траектории $M_0(t)$ по Ляпунову. Действительно, пока возмущение $M'(t)$ мало, оно растет по закону $e^{|\gamma|t}$ линейной теории, затем нелинейные члены уравнений этот рост замедляют, и, как правило, достигается некоторый конечный предел. Уменьшение же амплитуды начального возмущения лишь затягивает этот процесс, но не меняет его конечного предела — эта неравномерность по времени сходимости к нулю и означает отсутствие устойчивости по Ляпу-

нову. Поскольку в реальности малые возмущения всегда присутствуют, линейная неустойчивость течения $M_0(t)$ означает, что оно практически нереализуемо (как, например, состояние покоя при неустойчивой стратификации); в этом, собственно, и заключается основное значение понятия гидродинамической неустойчивости.

В ряде случаев удается доказать и обратное утверждение — что линейная устойчивость гарантирует устойчивость по Ляпунову. Так, для уравнения (11.10) справедлива следующая теорема (Л. А. Дикий, 1976): двумерное плоскопараллельное течение с монотонным профилем скорости $U(z)$, $0 \leqslant z \leqslant h$, в котором $U(0)$ и $U(h)$ не являются собственными значениями, может быть неустойчивым лишь при наличии в дискретном спектре невещественных или кратных вещественных собственных значений. Доказательство основано на решении задачи Коши для уравнения (11.10) (при зависимости ψ от x по закону e^{ikx}) при произвольном начальном значении $\psi(z, 0) = \psi_0(z)$ при помощи преобразования Лапласа по времени:

$$\psi^*(z, s) = \int_0^\infty e^{ikst} \psi(z, t)\, dt; \tag{11.12}$$

$$(U - s)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\psi^* - U''\psi^* = f \equiv -\frac{i}{k}\left(\psi_0'' - k^2\psi_0\right), \tag{11.13}$$

откуда получается

$$\psi^*(z, s) = \int_0^h G^*(z, \zeta, s) f(\zeta)\, d\zeta; \tag{11.14}$$

$$G^*(z, \zeta, s) = \begin{cases} \psi_1(z)\psi_2(\zeta) W^{-1}[U(\zeta) - s]^{-1}; & z < \zeta, \\ \psi_1(\zeta)\psi_2(z) W^{-1}[U(\zeta) - s]^{-1}; & z > \zeta, \end{cases} \tag{11.15}$$

где ψ_1, ψ_2 — решения однородного уравнения (11.13) при условиях $\psi_1(0) = 0$, $\psi_1'(0) = 1$ и $\psi_2(h) = 0$, $\psi_2'(h) = 1$, а $W = \psi_1(h) = -\psi_2(0)$ — их вронскиан. Тогда

$$\psi(z, t) = \int_0^h G(z, \zeta, t) f(\zeta)\, d\zeta; \tag{11.16}$$

$$G(z, \zeta, t) = \frac{k}{2\pi} \int_{i\gamma - \infty}^{i\gamma + \infty} e^{-ikst} G^*(z, \zeta, s)\, ds, \tag{11.17}$$

где $\gamma > 0$ столь велико, что выше контура интегрирования функция G^* аналитична по s. Чтобы доказать ограниченность $\psi(z, t)$ при $t \to \infty$, нужно исследовать поведение интеграла (11.17). Нетрудно убедиться, что функция $W(s)$ аналитически продолжается из верхней полуплоскости через вещественную ось всюду, кроме точек $s = U(0)$ и $U(h)$, и имеет нули там, где s равно собственным значениям однородного уравнения. Тогда функция $G^*(s)$ аналити-

чески продолжается из верхней полуплоскости через вещественную ось всюду, кроме точек $s=U(0)$, $U(h)$, $U(z)$ и $U(\zeta)$, и имеет полюсы там (и той же кратности), где s равно собственным значениям однородного уравнения. Функция $\psi_1(z, s)$ в точках $s=U(0)$, $U(z)$ имеет ветвление, но можно доказать, что она там непрерывна; как следствие, вронскиан $W(s)$ непрерывен всюду в области $\operatorname{Im} s > -\varepsilon$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Более того, если $s=U(0)$ и $U(h)$ не являются собственными значениями, то в верхней полуплоскости и в окрестности отрезка $\{U(0), U(h)\}$, на которую $W(s)$ аналитически продолжается при любых разрезах из его концов, имеется конечное число собственных значений (действительно, если $s=U(0)$ не есть собственное значение, то $W=\psi_1(h, s)\neq 0$; по непрерывности $\psi_1(z, s)\neq 0$ и в окрестности точки $s=U(0)$); кроме того, эта функция аналитична и не может иметь нулей при больших $|s|$. Поэтому не может быть и произвольно больших по модулю собственных значений — по так называемой теореме Л. Ховарда все они лежат в круге с диаметром на отрезке $[U_{\min}, U_{\max}]$.

Для дальнейшего пути интегрирования по ζ в (11.14) и (11.16) деформируем так, чтобы они обходили снизу точки $\zeta=\zeta_s$, в которых $U(\zeta_s)$ равняется вещественным собственным значениям s, а в (11.17) спустим контур интегрирования по s на фиксированное расстояние под вещественную ось с подъемами оттуда по краям вертикальных разрезов к точкам $s=U(0)$, $U(z)$, $U(\zeta)$, $U(h)$ и обходом вокруг этих точек по окружностям с радиусами порядка c/t, нигде не приближающимся к собственным значениям ближе, чем на половину радиуса. Тогда при $t\to\infty$ интегралы по горизонтальным частям контура экспоненциально затухают, а по окружностям и вертикальным отрезкам остаются ограниченными, и нужно лишь добавить сумму вычетов в полюсах между старым и новым контурами интегрирования — в тех точках s, которые являются собственными значениями. В простом полюсе вычет пропорционален $G^*(z, \zeta, s)e^{-ikst}$, в k-кратном $\partial^{k-1}[G^*(z, \zeta, s)e^{-ikst}]/\partial s^{k-1}$. Эти вычеты выделяют из (11.16) волновые решения, которые только и могут создать неограниченный рост $\psi(z. t)$, что и доказывает теорему Л. А. Дикого.

Отметим без доказательств, что для устойчивости течения с профилем скорости «типа А» — монотонным $U'(z) > 0$ и с одной точкой перегиба $z=\overline{z}$ (так что $\overline{U}''=0$), в которой $U'(z)$ максимально (так что $\overline{U}''' < 0$), необходимо и достаточно отсутствие невещественных собственных значений c при $k=0$ или же выполнение условия Н. Розенблюта и А. Симона (1964)

$$[U'(U-\overline{U})]^{-1}\Big|_0^h + \int_0^h U''(U')^{-2}(U-\overline{U})^{-1}\,dz > 0. \qquad (11.18)$$

В частности, достаточно существования такой константы K_0, что $(U-K_0)U''\geqslant 0$ (Р. Фьортофт, 1950), или же просто отсутствия точек перегиба (Рэлей, 1880). Наоборот, течение с профилем скорости «типа А» при $0\leqslant z\leqslant h/2$, симметричным относительно точки $z={}^1/_2$, всегда неустойчиво (В. Толлмиен, 1935). Неустойчив также тангенциальный разрыв скорости $U(z)=U_0$ при $z>0$ и $(-U_0)$ при $z<0$ (так называемая неустойчивость Гельмгольца).

Теоремы Рэлея и Фьортофта можно доказать при произвольных начальных данных, не рассматривая элементарных волновых решений. Так, из уравнения (11.10) для его решения ψ, зависящего от x по закону e^{ikx}, вытекает интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\int (|\psi'|^2+k^2|\psi|^2)\,dz-2\,\mathrm{Re}\,ik\int U(\psi''-k^2\psi)\psi^*\,dz=0. \qquad (11.19)$$

Пусть существует такая константа K_0, что функция $(U-K_0)\times\times(U'')^{-1}$ всюду непрерывна. Умножив (11.10) на $(\psi^{*''}-k^2\psi^*)\times\times(U-K_0)(U'')^{-1}$, проинтегрировав по z, взяв вещественную часть и сложив ее с (11.19), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int [|\psi'|^2+k^2|\psi|^2+(U-K_0)|\psi''-k^2\psi|^2(U'')^{-1}]\,dz=0, \qquad (11.20)$$

так что при условии Фьортофта из малости этого интеграла следует малость в среднем квадратичном величин ψ, ψ' и ψ'' в любой момент времени, т. е. устойчивость течения. Смысл квадратичного интегрального инварианта в (11.20) можно понять, рассмотрев, следуя В. И. Арнольду (1965), устойчивость по Ляпунову нелинейного *двумерного* течения несжимаемой идеальной жидкости, у которого функция тока $\psi(x, z, t)$ удовлетворяет уравнению для вихря

$$\frac{\partial\,\Delta\psi}{\partial t}+\frac{\partial(\psi,\ \Delta\psi)}{\partial(x,\ z)}=0 \qquad (11.21)$$

(его линеаризация относительно $\psi_1=\psi+\int^z U(z)\,dz$ возвращает к уравнению (11.10)) с краевыми условиями непротекаемости границы $\psi(\Gamma)=\mathrm{const}$ и сохраняемости на ней циркуляции $\oint\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\Gamma=\mathrm{const}$. Здесь не меняется со временем не только кинетическая энергия (на единицу массы) $E=\frac{1}{2}\int|\nabla\psi|^2\,dx\,dz$, но и любой функционал от вихря $F=\int\Phi(\Delta\psi)\,dx\,dz$. Для исследования устойчивости стационарного течения с функцией тока ψ_0 (которую будем считать монотонной функцией от вихря $\psi_0=\Psi(\Delta\psi_0)$) подберем сохраняющийся функционал $F(\psi)=E+F$ так, чтобы при $\psi=\psi_0$ он имел экстремум (см. конец § 5). Легко убедиться, что

для обращения в ноль первой вариации δF следует положить $\Phi' = \Psi$. Для плоскопараллельного течения со скоростью $u_0 = U(z)$ будет $\Psi'(\Delta\psi_0) = U(z)/U''(z)$, и в системе отсчета, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью K_0, получим

$$F(\psi) - F(\psi_0) = \frac{1}{2}\int [(\nabla\delta\psi)^2 + (U - K_0)(U'')^{-1}(\Delta\delta\psi)^2]\,dx\,dz + \ldots. \tag{11.22}$$

При условии Фьортофта эта квадратичная форма относительно $\delta\psi$ положительна и может быть принята за квадрат нормы $\|\delta\psi\|^2_{(1)}$. Для линеаризированных уравнений он, согласно (11.20), является точным инвариантом. Для нелинейных же уравнений таковым является квадрат нормы $\|\delta\psi\|^2_{(2)}$, задаваемый левой частью (11.22). Но эти нормы эквивалентны в том смысле, что существуют положительные константы $C_1 \leqslant C_2$, обеспечивающие неравенство $C_1\|\delta\psi\|_{(1)} \leqslant \|\delta\psi\|_{(2)} \leqslant C_2\|\delta\psi\|_{(1)}$. Если начальная норма $\|\delta\psi\|_{(1)}$ мала, то мала и инвариантная норма $\|\delta\psi\|_{(2)}$, а тогда все время малой остается и $\|\delta\psi\|_{(1)}$, так что здесь из линейной устойчивости вытекает нелинейная устойчивость по Ляпунову.

В природных течениях часто встречаются случаи, в которых стабилизирующее действие устойчивой стратификации $N_0^2(z) > 0$ конкурирует с дестабилизирующим влиянием неустойчивого профиля скорости $U(z)$. В этих случаях вместо уравнений (11.4) или (11.10) получается следующая их комбинация:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\psi - U''\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] + N_0^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0. \tag{11.23}$$

Для элементарных волновых решений вида $\psi(z)\exp[ik(x - ct)]$ получаем

$$(U - c)[(U - c)(\psi'' - k^2\psi) - U''\psi] + N_0^2\psi = 0. \tag{11.24}$$

Обозначим $U - c = W$ и введем новую неизвестную функцию $\Psi = \psi W^{-1/2}$. Тогда уравнение (11.24) преобразуется к виду

$$(W\Psi')' - \left[\frac{1}{2}U'' + k^2W + U'^2W^{-1}\left(\frac{1}{4} - \mathrm{Ri}\right)\right]\Psi = 0, \tag{11.24'}$$

где

$$\mathrm{Ri}(z) = N_0^2(U')^{-2} \tag{11.25}$$

так называемое *число Ричардсона*. Умножим уравнение (11.24′) на комплексно-сопряженную величину Ψ^*, проинтегрируем результат по слою $0 \leqslant z \leqslant h$ при краевых условиях $\Psi = 0$ (т. е.

$w=0$) на обоих концах этого отрезка и выпишем мнимую часть полученного равенства:

$$(\operatorname{Im} c)\int_0^h \left[|\Psi'|^2 + k^2|\Psi|^2 - \left(\frac{1}{4} - \mathrm{Ri}\right)|U'\Psi W^{-1}|^2\right] dz = 0. \qquad (11.26)$$

Если всюду $\mathrm{Ri}(z) \geqslant {}^1/_4$, то это равенство возможно лишь при условии $\operatorname{Im} c = 0$, т. е. при отсутствии неустойчивых волновых решений. Таким образом, условие $\mathrm{Ri} \geqslant {}^1/_4$ достаточно для устойчивости стратифицированного течения (Дж. Майлс, Л. Ховард, 1961).

До сих пор мы рассматривали лишь двумерные волновые возмущения u, $w(x, z)$ плоскопараллельных течений $\mathbf{u}_0 = \{U(z), 0, 0\}$, так как их устойчивость достаточна для устойчивости и трехмерных волновых возмущений (на волны $e^{i(k_1x+k_2y-\sigma t)}$ влияет лишь проекция $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k}k^{-1}$ основного течения). С помощью инварианта (11.20) это можно доказать и для возмущений, произвольно зависящих от времени: если двумерные возмущения скорости и вихря ограничены, то ограничены также умноженные на U'' трехмерные возмущения скорости и z-компоненты вихря (а другие его компоненты могут линейно расти со временем).

Остановимся еще вкратце на устойчивости стационарных осесимметричных течений, направленных вдоль оси x и имеющих профиль скорости $U(r)$, $r = (y^2+z^2)^{1/2}$. Используя цилиндрические координаты (x, r, φ), рассмотрим малые волновые возмущения вида $\mathbf{u}(r)\exp[ik(x-ct)+in\varphi]$. Тогда для комплексной амплитуды $f = u_r(r)$ из (11.7) получается следующий аналог уравнения Рэлея (11.11):

$$(U-c)\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{n^2+k^2r^2}\frac{\partial rf}{\partial r} - f\right] - r\frac{\partial Q}{\partial r}f = 0; \quad Q = \frac{r}{n^2+k^2r^2}\frac{\partial U}{\partial r} \qquad (11.27)$$

с краевыми условиями $f \to 0$ при $r \to \infty$ (для осесимметричной струи в неограниченном пространстве) или $f(R) = 0$ (для круглой трубы радиуса R). Умножив (11.27) на $rf^*(U-c)^{-1}$, проинтегрировав по r и взяв мнимую часть, получим

$$\operatorname{Im} c \int r^2|f|^2|U-c|^{-2}\frac{\partial Q}{\partial r}\,dr = 0, \qquad (11.28)$$

откуда видно, что для неустойчивости (для выполнения условия $\operatorname{Im} c \neq 0$) необходимо, чтобы производная $\partial Q/\partial r$ в какой-то точке меняла знак (Рэлей, 1892). Например, в течении Пуазейля в круглой трубе $U(r) = U_{\max}(1 - r^2/R^2)$, и разрастающиеся неосесимметричные волновые возмущения ($n \neq 0$) невозможны (при $n=0$ здесь $\partial Q/\partial r \equiv 0$ и уравнение Рэлея вообще не имеет собственных значений). Если $\partial Q/\partial r$ меняет знак в точке r_c и $U(r_c) = U_c$, то для неустойчивости необходимо, чтобы где-то в течении выполня-

лось условие типа Фьортофта $(U-U_c)\,\partial Q/\partial r<0$. Проблема устойчивости здесь, по-видимому, как и выше, полностью сводится к изучению дискретного спектра уравнения Рэлея. Отметим, что Дж. Бэтчелор и А. Гилл (1962) у осесимметричных струй и Г. Сато и О. Окада (1966) у осесимметричных следов обнаружили возможность неустойчивости лишь при $n=1$.

§ 12. Бароклинная неустойчивость

В предыдущем параграфе мы видели, что в несжимаемой жидкости адиабатические возмущения поля скорости могут расти лишь за счет кинетической энергии основного течения — см. уравнение энергии (11.9). Такая неустойчивость называется *баротропной*, так как она свойственна вообще баротропным жидкостям (поскольку в них баротропная потенциальная энергия, возникающая из-за двумерной сжимаемости, очень мала). В бароклинных же жидкостях становится возможной также так называемая *бароклинная неустойчивость* — рост возмущений за счет доступной потенциальной энергии основного состояния (5.14). Эта неустойчивость играет большую роль, в частности, в формировании синоптических процессов в земной атмосфере и в Мировом океане.

Рассмотрим ее на примере квазигидростатических течений в атмосфере, используя для их описания уравнения гидродинамики в изобарических координатах (9.1)—(9.4) (в которых направим ось x на восток, а ось y на север). Будем считать эти процессы также квазигеострофическими в смысле (9.11), так что неизвестные функции представляются в виде асимптотических рядов по степеням числа Кибеля, имеющих вид $u_0+u_1\mathrm{Ki}+\ldots$, $v_0+v_1\mathrm{Ki}+\ldots$, $z_0+z_1\mathrm{Ki}+\ldots$ и $w_1^*\mathrm{Ki}+\ldots$. Учтем здесь также возможность медленного изменения параметра Кориолиса по широте, положив $f=f_0+f_1\mathrm{Ki}$, где f_0 квазипостоянно. В нулевом приближении из (9.2) получаются формулы геострофического ветра:

$$u_0=-\frac{g}{f_0}\frac{\partial z_0}{\partial y},\quad v_0=\frac{g}{f_0}\frac{\partial z_0}{\partial x}, \tag{12.1}$$

так что $gf_0^{-1}z_0$ есть функция тока геострофического течения; при этом $D_{h0}=0$. В первом приближении из (9.2) получаем

$$\frac{d_{h0}u_0}{dt}-f_0v_1-f_1v_0=-g\frac{\partial z_1}{\partial x};$$

$$\frac{d_{h0}v_0}{dt}+f_0u_1+f_1u_0=-g\frac{\partial z_1}{\partial y}, \tag{12.2}$$

где

$$\frac{d_{h0}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}+v_0\frac{\partial}{\partial y}$$

— индивидуальная производная по времени относительно геострофического течения. Отсюда для вихря скорости геострофического течения

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{g}{f_0}\Delta z_0$$

получается

$$\frac{d_{h0}}{dt}\left(\frac{g}{f_0}\Delta z_0 + f\right) + f_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0. \qquad (12.3)$$

В то же время нетрудно убедиться, что из уравнения (9.3), взятого в первом приближении, поделенного на $\alpha^2 c_0^2$ и затем продифференцированного по p (при квазипостоянном $\overset{\sim}{}_0^2$), получается

$$\frac{\partial \dot{w}_1}{\partial p} = -\frac{g}{c_0^2}\frac{d_{h0}}{dt}\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\alpha^2}\frac{\partial z_0}{\partial p}. \qquad (12.4)$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \dot{w}_1}{\partial p} = 0$, в сумме из (12.3) и (12.4) получаем

$$\frac{d_{h0}\widetilde{\Omega}}{dt} = 0; \quad \widetilde{\Omega} = \frac{g}{f_0}\Delta z_0 + f + \frac{gf_0}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\alpha^2}\frac{\partial z_0}{\partial p}. \qquad (12.5)$$

Величина $\widetilde{\Omega}$ представляет собою в квазигеострофическом приближении потенциальный вихрь (4.4), и (12.5) означает, что он является инвариантом геострофического течения. Опуская всюду в дальнейшем ноль у z_0, перепишем (12.5) в форме, аналогичной обычному двумерному уравнению для вихря (11.21):

$$\frac{\partial \mathscr{L}\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \mathscr{L}\psi + f)}{\partial(x, y)} = 0;$$

$$\mathscr{L}\psi = \Delta\psi + \frac{f_0^2}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\alpha^2}\frac{\partial \psi}{\partial p}; \quad \psi = gf_0^{-1}z. \qquad (12.6)$$

Отличия от (11.21) заключаются в замене двумерного оператора Лапласа Δ трехмерным (при устойчивой стратификации — эллиптическим) оператором $\mathscr{L}$ и в добавлении создаваемого вращением и сферичностью Земли слагаемого $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$. Выше приводились интегральные формы (9.12) и (9.13) уравнения (12.6),

выведенные при краевом условии (9.4), которое можно привести также к виду

$$\frac{d_{h0}}{dt}\left(p\,\frac{\partial z}{\partial p}+\alpha^2 z\right)=0 \text{ при } p=p_0. \tag{12.7}$$

Докажем, что уравнения (12.6) и (12.7) имеют квадратичный интегральный инвариант — полную энергию

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int\left[(\nabla_h z)^2+\frac{f_0^2}{\alpha^2 c_0^2}p\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2\right]dx\,dy\,dp+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{f_0^2 p_0}{c_0^2}z^2\,dx\,dy. \tag{12.8}$$

Действительно, продифференцировав это выражение по времени, проинтегрировав величины типа $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t}$ по частям и применив формулу Гаусса—Остроградского, получим

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}=-\frac{f_0}{g}\int z\,\frac{\partial\widetilde{\Omega}}{\partial t}dx\,dy\,dp+\int z\mathbf{n}\cdot\nabla\frac{\partial z}{\partial t}dp\,d\Sigma+$$

$$+\int\frac{f_0^2}{\alpha^2 c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[p\,\frac{\partial z}{\partial p}+\alpha^2 z\right]pz\,dS, \tag{12.9}$$

где Σ — боковая цилиндрическая поверхность, $\mathbf{n}$ — орт нормали к ней, а S — нижняя поверхность $p=p_0$. Вследствие (12.6) первое слагаемое здесь пропорционально интегралу от $\partial(z^2,\widetilde{\Omega})/\partial(x,y)$, который интегрированием по частям приводится к интегралу от $(z^2\widetilde{\Omega}_x)_y-(z^2\widetilde{\Omega}_y)_x$, а затем к интегралу $\int dp\oint z^2(\widetilde{\Omega}_x\,dx+\widetilde{\Omega}_y\,dy)$ или, значит, $\int dp\oint z^2 d\widetilde{\Omega}=0$, так как на боковой границе при $p=$ $=\mathrm{const}$ должно быть $z=\mathrm{const}$ (условие непротекания). Второе слагаемое в (12.9) обращается в ноль вследствие постоянства циркуляции на границе $\oint\mathbf{n}\cdot\nabla z\,dl=\mathrm{const}$. Равенство нулю третьего слагаемого доказывается, как и для первого, но с использованием (12.7) вместо (12.6). Таким образом, $\partial\mathrm{E}/\partial t=0$.

Заметим, что $z-F(p)$ при произвольной функции $F(p)$ есть вновь решение уравнения (12.6) при краевом условии (12.7). Поэтому в (12.8) из $\partial z/\partial p$ можно вычесть произвольную функцию от p, а из $\widehat{z}$ — произвольную постоянную C. Отсюда следует неизменность во времени среднего по x, y значения $\partial\overline{z}/\partial p$ величины $\partial z/\partial p$ при каждом p, а также и среднего значения $\overline{z}$ при

$p=p_0$. Если положить $F(p)=\overline{z}(p)$ и $C=\overline{z}(p_0)$, то получится минимальное значение энергии (12.8):

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int\left[(\nabla_h z)^2+\frac{f_0^2p^2}{a^2c_0^2}\left(\frac{\partial z}{\partial p}-\frac{\partial\overline{z}}{\partial p}\right)^2\right]dx\,dy\,dp+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{f_0^2\rho_0}{c_0^2}(z-\overline{z})^2\,dx\,dy. \qquad (12.10)$$

Первое слагаемое здесь соответствует кинетической, второе — бароклинной и третье — баротропной доступной потенциальной энергии. Отношения этих слагаемых равны $1:(L/L_R)^2:(L/L_0)^2$, где L — горизонтальный масштаб возмущений, $L_R=HN_0f_0^{-1}$ — радиус деформации Россби, вводившийся еще в § 4, а $L_0=c_0f_0^{-1}$ — масштаб баротропных возмущений, введенный А. М. Обуховым (1949).

Рассмотрение вопросов устойчивости квазигеострофических течений (12.1), (12.6) и (12.7) начнем с более простого баротропного течения, метод выделения которого был сформулирован в § 9 (по работе А. С. Монина, 1958): он заключается в предельном переходе $\alpha\to 0$ в интегральном уравнении (9.12), причем производные $\partial z/\partial s$ перестают зависеть от p. В результате уравнение (12.6) принимает вид

$$\frac{\partial\mathscr{L}_1\psi}{\partial t}+\frac{\partial(\psi,\ \mathscr{L}_1\psi+f)}{\partial(x,\ y)}=0;$$

$$\mathscr{L}_1\psi=\Delta\psi-\frac{f_0^2}{c_0^2}\psi;\quad \psi=gf_0^{-1}z, \qquad (12.11)$$

потенциальный вихрь (средний по толще атмосферы) равняется $\widetilde{\Omega}=\mathscr{L}_1\psi+f$, а в полной энергии (12.10) выпадает второе слагаемое (бароклинная доступная потенциальная энергия). Проанализируем теперь методом В. И. Арнольда устойчивость стационарного зонального баротропного течения с потенциальным вихрем $\widetilde{\Omega}_0$, монотонно зависящим от широты, так что функцию тока можно представить в виде $\psi_0=\Psi(\widetilde{\Omega}_0)$. Тогда, аналогично (11.20), у функционала $F(\psi)=\mathrm{E}+\int\Phi(\widetilde{\Omega})\,dx\,dy$ первая вариация обратится в ноль при $\Phi'=\Psi$, а вторая окажется равной

$$\delta^2F=\int\left[(\nabla\delta\psi)^2+\frac{f_0^2}{c_0^2}(\delta\psi)^2+\Psi'(\widetilde{\Omega}_0)(\delta\widetilde{\Omega})^2\right]dx\,dy, \qquad (12.12)$$

откуда видно, что для устойчивости течения (обращения F в минимум при $\psi=\psi_0$, т. е. выполнения условия $\delta^2F>0$) достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\Psi'(\widetilde{\Omega}_0)>0$. Обычно в общей

циркуляции атмосферы выполняется противоположное условие $\Psi'(\widetilde{\Omega}_0) < 0$, так как зональное течение направлено с запада на восток, т. е. ψ_0 растет с севера на юг, а поведение $\widetilde{\Omega}_0$ определяется в основном слагаемым f, растущим с юга на север: ψ_0 оказывается убывающей функцией от $\widetilde{\Omega}_0$. Но это поведение можно переменить на противоположное, перейдя к системе отсчета, вращающейся относительно исходной с постоянной угловой скоростью и *обгоняющей зональное течение*. Таким образом, справедлив следующий аналог теоремы Рэлея: для устойчивости зонального баротропного течения достаточно, чтобы потенциальный вихрь монотонно зависел от широты (С. Л. Го, 1949).

Вполне аналогично выясняются достаточные условия устойчивости зонального бароклинного течения. В этом случае, согласно (12.7), имеется еще краевой инвариант $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p}\psi\right)_{p=p_*}$, и устойчивость зонального течения с функцией тока ψ_0 обеспечивает минимум при $\psi = \psi_0$ функционала

$$F(\psi) = \mathrm{E} + \int \Phi\left(p, \widetilde{\Omega}\right) dx\, dy\, dp + \int\limits_{p=p_0} \Gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p}\psi\right) dx\, dy, \tag{12.13}$$

где $\Phi(p, \widetilde{\Omega})$ — произвольная функция двух переменных, а Γ — произвольная функция одной переменной. Для обращения в ноль при $\psi = \psi_0$ первой вариации δF допустим, что $\widetilde{\Omega}_0$ при каждом p есть монотонная функция от широты, так что можно положить $\psi_0 = \Psi(p, \widetilde{\Omega}_0)$, и что $\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p}\psi_0\right)_{p=p_*}$ также есть монотонная функция от широты, так что при $p = p_0$ можно положить

$$\psi_0 = X\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p}\psi_0\right).$$

Тогда нетрудно убедиться, что для обеспечения требования $\delta F = 0$ следует положить $\partial\Phi/\partial\widetilde{\Omega} = \Psi$ и

$$\Gamma' = -\left(\frac{f_0^2}{c_0^2}\frac{p^2}{\alpha^2}\right)_{p=p_0} X$$

и что при этом вторая вариация $\delta^2 F$ приводится к виду

$$\delta^2 F = \int \left[(\nabla_h \delta\psi)^2 + \frac{f_0^2}{c_0^2}\frac{p^2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial\,\delta\psi}{\partial p}\right)^2 + \frac{\partial\psi_0}{\partial\widetilde{\Omega}_0}\left(\delta\widetilde{\Omega}\right)^2\right] dx\, dy\, dp +$$

$$+\left(\frac{f_0^2}{c_0^2}\frac{p^2}{\alpha^2}\right)_{p=p_0} \int\limits_{p=p_0} \left[\frac{\alpha^2}{p}(\delta\psi)^2 - X'\left(\frac{\partial\,\delta\psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p}\delta\psi\right)^2\right] dx\, dy. \tag{12.14}$$

Для устойчивости зонального течения, т. е. $\delta^2 F > 0$, было бы достаточным выполнение обоих условий $\partial\psi_0/\partial\widetilde{\Omega}_0 > 0$ при каждом p и $X' < 0$ при $p = p_0$. Как и в (12.12), первое из этих условий можно обеспечить переходом к опережающей зональное течение вращающейся системе отсчета. Но второе условие при этом сведется, грубо говоря, к неестественному требованию роста приземной плотности от полюсов к экватору. Заменим его условием

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p}\psi\right)_{p=p_0} = \text{const}$$

(грубо говоря, требованием постоянства приземной плотности); тогда вариации этого выражения будут равны нулю, и для устойчивости зонального бароклинного течения будет достаточно, чтобы при каждом p потенциальный вихрь убывал с севера на юг (Дж. Чарни, М. Стерн, 1962).

Но эти достаточные условия бароклинной устойчивости выполняются в земной атмосфере и Мировом океане, по-видимому, довольно редко. Для изучения неустойчивых возмущений линеаризируем уравнения (12.6) и (12.7) относительно стационарного плоскопараллельного течения вдоль оси x со скоростью $-\partial\psi_0/\partial y = U(y, p)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\Delta\psi + \frac{f_0^2}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\alpha^2}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) +$$

$$+\left(-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{f_0^2}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\alpha^2}\frac{\partial U}{\partial p}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p}\psi\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p}U\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

$$\text{при } p = p_0. \qquad (12.15)$$

Уравнение энергии для возмущений, аналогичное (11.9), теперь имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\left[\overline{(\nabla_h\psi)^2} + \frac{f_0^2 p^2}{\alpha^2 c_0^2}\overline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2}\right]dy\,dp + \int\limits_{p=p_0}\frac{f_0^2 p_0}{c_0^2}\overline{z^2}\,dy\right\} =$$

$$= \int\left(\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{f_0^2 p^2}{\alpha^2 c_0^2}\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial p}}\frac{\partial U}{\partial p}\right)dy\,dp, \qquad (12.16)$$

где чертой сверху обозначается среднее значение по x. Специфическим для бароклинной неустойчивости здесь является второе слагаемое в правой части, которое пропорционально величине $-\overline{v'\rho'}\dfrac{\partial\rho_0}{\partial y}$ и совпадает с ней по знаку. Таким образом, например,

при $\partial\rho_0/\partial y > 0$ для неустойчивости нужно, чтобы было $\overline{v'\rho_0'} < 0$, так что при нарастании возмущений более тяжелые частицы ($\rho' > 0$) должны, опускаясь, смещаться к югу ($v' < 0$), а более легкие ($\rho' < 0$), наоборот, поднимаясь, смещаться к северу ($v' > 0$). Сосредотачиваясь далее на этом эффекте, будем считать, что U зависит лишь от p, и будем искать волновые решения ψ уравнений (12.15) в виде $\psi(p)\exp[ik_1(x-ct)+ik_2y]$. Тогда, полагая $k_1^2+k_2^2=k^2$, для комплексной амплитуды $\psi(p)$ получим

$$(U-c)\left(\frac{f_0^2}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\alpha^2}\frac{\partial\psi}{\partial p}-k^2\psi\right)+B\psi=0;$$

$$B=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{f_0^2}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\alpha^2}\frac{\partial U}{\partial p}; \qquad (12.17)$$

при $p=p_0$

$$(U-c)\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}+\frac{\alpha^2}{p}\psi\right)-F\psi=0; \quad F=\frac{\partial U}{\partial p}+\frac{\alpha^2}{p}U. \qquad (12.18)$$

Уравнение (12.17) отличается от уравнения Рэлея (11.11) в основном лишь слагаемым $\partial f/\partial y$. Но краевое условие (12.18) теперь более сложное: оно содержит собственное значение c. Заменив его условием $\partial\psi/\partial p+\alpha^2\psi/p=0$, можно доказать устойчивость при $B>0$ (т. е. теорему Рэлея или частный случай теоремы Чарни—Стерна) или, если B один раз меняет знак, то устойчивость при $(U-K)B<0$, где K — значение U в точке, в которой B меняет знак (аналог теоремы Фьортофта). Условие же (12.18) может порождать неустойчивость, но лишь так, что при каждом K не может быть более одного растущего волнового решения. Это можно доказать для конечно-разностной аппроксимации уравнений (12.17), (12.18), при которой отрезок $0\leqslant p\leqslant p_0$ разбивается точками $p_1, \ldots, p_{N-1}$ на N равных частей длины $\delta=p_0/N$, и уравнения записываются в разностном виде:

$$(U_n-c)\left(r^2_{n-1/2}\frac{\psi_{n-1}-\psi_n}{\delta^2}-r^2_{n+1/2}\frac{\psi_n-\psi_{n+1}}{\delta^2}-k^2\psi_n\right)+B_n\psi_n=0; \qquad (12.17')$$

$$(U_0-c)\left(\frac{\psi_0-\psi_1}{\delta}+s_0^2\psi_0\right)-F_0\psi_0=0, \qquad (12.18')$$

где $r^2_{n-1/2}$ — некоторое среднее значение $f_0^2p^2/\alpha^2c_0^2$ между точками p_n и p_{n-1}, а $s_0^2=(\alpha^2/p)_{p=p_0}$. Тогда справедлива следующая теорема (Л. А. Дикий, 1973): *если все $B_n>0$ или все $B_n<0$ (условие Рэлея), или же последовательность B_n один раз меняет знак*

и существует такая константа K_0, что $(U_n - K_0)B_n < 0$ (условие Фьортофта), то уравнения (12.17′) при краевых условиях

$$\psi_N = \psi_{N-1}; \tag{12.19}$$

$$\psi_1 - \psi_0 = K(c)\psi_0; \quad K(c) = a + \frac{K}{b-c}; \quad a \geqslant 0, \tag{12.20}$$

имеют не более одной пары невещественных комплексно-сопряженных собственных значений c.

Для доказательства фиксируем вещественное c и, начиная с (12.19), находим из уравнений (12.17′) последовательно ψ_{N-2} в виде отношения многочлена первой степени от c к $U_{N-1} - c$, затем ψ_{N-3} в виде отношения многочлена второй степени к $(U_{N-1} - c)(U_{N-2} - c)$ и т. д. до ψ_0, равного отношению многочлена $(N-1)$-й степени к $(U_{N-1} - c)\ldots(U_1 - c)$. Тогда собственные значения уравнений (12.17′) с краевым условием (12.20) получаются, как пересечения графиков функции $M(c) = (\psi_1 - \psi_0)/\psi_0$ и гиперболы $K(c)$. Чтобы рассчитать $\partial M/\partial c$, продифференцируем по c уравнение (12.17′), поделенное на $U_n - c$, и получим

$$-k^2\varphi_n + r^2_{n-1/2}\frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{\delta^2} - r^2_{n+1/2}\frac{\varphi_n - \varphi_{n+1}}{\delta^2} + \\ + \frac{B_n\varphi_n}{U_n - c} + \frac{B_n\psi_n}{(U_n - c)^2} = 0, \tag{12.21}$$

где $\varphi_n = \partial\psi_n/\partial c$. Умножим (12.17′) на $\varphi_n(U_n - c)^{-1}$, вычтем умноженное на ψ_n уравнение (12.21) и просуммируем результат по n от 1 до $N-1$, используя правило, аналогичное интегрированию по частям, в результате чего получим

$$\delta^{-2}r^2_{1/2}\psi_0^2\frac{\partial M}{\partial c} = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{B_n\psi_n^2}{(U_n - c)^2}. \tag{12.22}$$

Кроме того, умножим (12.17′) на $\psi_n(U_n - c)^{-1}$ и просуммируем по n:

$$-k^2\sum\psi_n^2 - \delta^{-1}\sum r^2_{n-1/2}(\psi_n - \psi_{n-1})^2 - \delta^{-2}r^2_{1/2}(\psi_1 - \psi_0)\psi_0 + \\ + \sum\frac{B_n\psi_n^2}{U_n - c} = 0. \tag{12.23}$$

При $c \to \pm\infty$ функции ψ_n имеют пределы, удовлетворяющие получающемуся из (12.17′) предельному уравнению

$$-k^2\psi_n + r^2_{n-1/2}\frac{\psi_{n-1} - \psi_n}{\delta^2} - r^2_{n+1/2}\frac{\psi_n - \psi_{n+1}}{\delta^2} = 0, \tag{12.17″}$$

и из (12.23) видно, что в пределе $\psi_0 \neq 0$ и $\psi_1 \neq \psi_0$, так что $\lim M(c)$ конечен, отличен от нуля и отрицателен.

При условии Рэлея, например, когда все $B_n > 0$, из (12.22) получается $\partial M/\partial c > 0$, и поскольку знаменатель у $M(c)$ — многочлен $(N-1)$-й степени без невещественных корней, график $M(c)$ имеет $N-1$ точку разрыва и, значит, состоит из N возрастающих ветвей. Горизонтальная асимптота гиперболы $K(c)$ лежит выше, чем у $M(c)$. Если вертикальная асимптота $K(c)$ проходит через одну из точек разрыва $M(c)$, то $K(c) - M(c)$ есть отношение многочлена $(N-1)$-й степени к $(c-c_1)\dots(c-c_{N-1})$, где c_n — корни ψ_0, так что у (12.17′) оказывается $N-1$ собственных значений. При этом $K(c)$ пересекает все ветви $M(c)$, кроме, может быть, трех-двух, примыкающих к общей асимптоте, и одной из крайних, так что число точек пересечения не менее $N-3$, и число невещественных собственных значений не более $(N-1)-(N-3)=2$. Если асимптоты не совпадают, то $K(c) - M(c)$ есть отношение многочлена N-й степени к $(c-b)(c-c_1)\dots(c-c_{N-1})$, и получается N собственных значений. При этом $K(c)$ может не пересечь две ветви $M(c)$, т. е. вещественных корней не менее $N-2$, а невещественных не более $N-(N-2)=2$.

При условии Фьортофта, умножив (12.22) на K_0-c и прибавив (11.23), получим

$$\delta^{-2}r_{1/2}^2\psi_0^2\left[(K_0-c)\frac{\partial M}{\partial c}-M\right]=$$

$$=\sum\left[k^2\psi_n^2+\delta^{-2}r_{n-1/2}^2(\psi_n-\psi_{n-1})^2+\frac{B_n(K_0-U_n)}{(U_n-c)^2}\psi_n^2\right], \qquad (12.24)$$

и функция $M_1(c)=(K_0-c)M(c)$ имеет положительную производную. Точки разрыва у нее те же, что у $M(c)$, и те же нули плюс N-й нуль $c=K_0$. Точки ее пересечения с $(K_0-c)K(c)$ подсчитываются вполне аналогично вышеизложенному. Тем самым теорема Л. А. Дикого полностью доказана.

§ 13. Бифуркации

Топологические особенности фазового потока $M(t)=F^tM(0)$, описывающего эволюцию всех течений жидкости в данной геометрии при всевозможных начальных данных, обычно зависят от некоторого параметра μ, характеризующего степень неравновесности фазового потока, в случае вязкой жидкости — от *числа Рейнольдса* $\mathrm{Re}=\nu^{-1}LU$ (где L и U — типичные масштабы длины и скорости, а ν — кинематический коэффициент вязкости), т. е. типичного отношения сил инерции к силам вязкости, или от того или иного его аналога.

В число особенностей фазового потока будем включать *неблуждающие* фазовые точки (т. е. такие, что любая их окрестность пересекается с некоторой фазовой траекторией по меньшей мере дважды; к ним относятся, в частности, *неподвижные* точки,

соответствующие стационарным решениям уравнений гидродинамики, и *периодические* точки, лежащие на замкнутых траекториях, соответствующих периодическим по времени решениям); *предельные точки траекторий* $M_\omega = \lim\limits_{t_k \to \infty} F^{t_k} M$ (если такие пределы существуют) и состоящие из них *предельные множества* Ω_M (если $M \in \Omega_M$, то точка M называется *устойчивой по Пуассону*); *инвариантные множества* (заполненные целыми траекто-

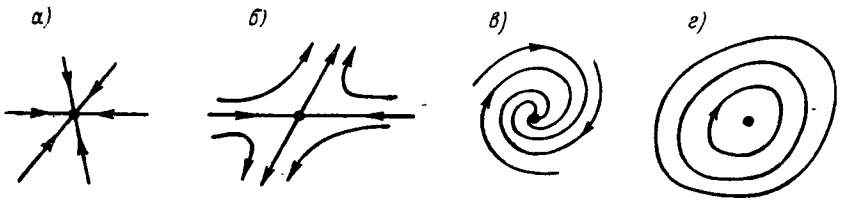


Рис. 13.1. Неподвижные точки $u=0$ двумерного линейного уравнения $\dot{u}=Au$.
а) узел, *б*) седло, *в*) фокус, *г*) центр.

риями; таковы же и их границы, так что их можно считать замкнутыми; предельные множества являются замкнутыми инвариантными; непустое замкнутое инвариантное множество, не имеющее обладающих такими же свойствами подмножеств, называется *минимальным*); *рекуррентные* точки M, для которых при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $T > 0$, что ε — окрестность отрезка траектории $\{F^t M\}$, $t \in [\tau, \tau+T]$ при всяком τ содержит всю траекторию (по теореме Биркгофа, для рекуррентности M необходимо и достаточно, чтобы замыкание траектории $F^t M$ было минимальным множеством); *аттракторы*, т. е. минимальные множества Λ неблуждающих точек, имеющие окрестности, появляющиеся в которых фазовые траектории все асимптотически приближаются к Λ (аттракторы, отличающиеся от неподвижных точек и замкнутых траекторий, называются *странными*).

Перечисленные особенности фазовых потоков могут быть весьма разнообразными. Так, например, у простейшей двумерной линейной динамической системы $\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}$ неподвижная точка $\mathbf{u}=0$ в зависимости от собственных значений λ_1, λ_2 матрицы A может быть *узлом* (λ_1 и λ_2 вещественны и одного знака), *седлом* (λ_1 и λ_2 вещественны и разных знаков), *фокусом* (λ_1, λ_2 — комплексные сопряженные) или *центром* (λ_1, λ_2 — мнимые сопряженные), см. рис. 13.1. В частности, в окрестности седла траектории суть гиперболы, обе асимптоты которых проходят через седло, причем одна из них служит осью сжатия (так называемое *неустойчивое многообразие* седла, состоящее из точки $\mathbf{u}=0$ и двух уходящих полутраекторий — *неустойчивых сепаратрис*),

а другая — осью растяжения (устойчивое многообразие, состоящее из $\mathbf{u}=0$ и двух входящих траекторий — *устойчивых сепаратрис*).

При изменении определяющего параметра μ (например, росте Re) фазовый поток деформируется, и при некоторых критических значениях μ_{1cr}, μ_{2cr}, ... какие-то из его особенностей появляются или исчезают или претерпевают качественное изменение. Такие изменения топологических особенностей фазового потока называются его *бифуркациями* (или «катастрофами»). Продемонстрируем простейшие бифуркации, рассмотрев эволюцию малых возмущений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ стационарного течения $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ вязкой жидкости, являющихся решениями линеаризированных уравнений гидродинамики:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = A(t)\,\mathbf{f}_0(\mathbf{x}); \quad A(t) = e^{\lambda t}; \quad \lambda = \gamma \pm i\omega. \tag{13.1}$$

При малых Re стационарное течение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ обычно представляет собою в фазовом пространстве устойчивый фокус. Это значит, что все собственные значения λ линеаризированных уравнений имеют отрицательные вещественные части $\gamma < 0$, так что любые малые возмущения (13.1) затухают со временем. С увеличением Re вещественные части γ у некоторых собственных значений возрастают, и может найтись такое критическое значение Re_{1cr}, при котором впервые какое-то из собственных значений линеаризированных уравнений $\lambda(\mathrm{Re})$ пересечет мнимую ось в комплексной плоскости λ, т. е. будет $\gamma(\mathrm{Re}_{1cr}) = 0$. Соответствующее возмущение (13.1) не будет ни затухать, ни разрастаться со временем, т. е. будет *нейтральным*.

Может оказаться, что при этом одновременно будет $\omega(\mathrm{Re}_{1cr}) = 0$, так что и в целом $\lambda(\mathrm{Re}_{1cr}) = 0$, значит, $A(t) \equiv 1$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{f}_0(\mathbf{x})$, т. е. возмущенное поле скорости $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ описывает новое стационарное течение; тогда говорят, что при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{1cr}$ происходит бифуркация *смены устойчивости*. Такая бифуркация наблюдается, например, при развитии *термической конвекции* в слое жидкости, подогреваемом снизу (где из состояния покоя $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \equiv 0$ сначала образуется *стационарная* конвекция в виде роликов или ячеек Бенара), а также в *течении Тейлора*, т. е. круговом течении Куэтта между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами(где из стационарного ламинарного течения образуются *стационарные* тороидальные роликовые вихри Тейлора). Эти течения мы подробно рассмотрим ниже.

Если же $\omega(\mathrm{Re}_{1cr}) = \omega_1 \neq 0$, то возмущение (13.1) при $\mathrm{Re} = \mathrm{R}_{1cr}$ представляет собою нейтральную волну. При $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{1cr}$ уже будут существовать собственные значения λ с положительными вещественными частями $\gamma > 0$, т. е. экспоненциально разрастающиеся со временем возмущения (13.1), так что течение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ будет неустойчивым по отношению к малым возмущениям. Э. Хопф (1942) доказал, что в фазовых пространствах динамических си-

стем довольно общего вида при значениях Re в некоторой окрестности Re_{1cr} существует однопараметрическое семейство замкнутых траекторий; применимость этой теоремы к уравнениям гидродинамики доказана Н. Н. Брушлинской (1965). Появление замкнутых траекторий при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{1cr}$ (тогда они суть предельные циклы, которым соответствуют периодические по времени течения), т. е. превращение устойчивого фокуса в предельный цикл (см. рис. 13.2 *а*), называется *нормальной бифуркацией Хопфа.*

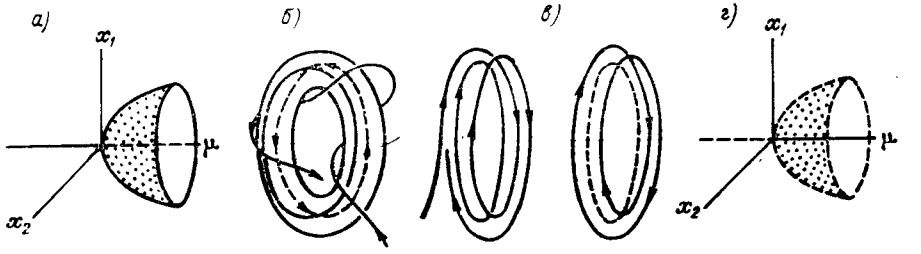


Рис. 13.2.

а) нормальная бифуркация Хопфа; *б*) рождение двумерного инвариантного тора; *в*) бифуркация удвоения периода; *г*) обратная бифуркация Хопфа.

Переход неустойчивого малого возмущения (13.1) в периодическое течение описал Л. Д. Ландау (1944). Пока возмущение мало, его амплитуда $A(t)$ удовлетворяет уравнению $\partial|A|^2/\partial t = 2\gamma|A|^2$, но при конечных $|A|$ его правую часть следует дополнить следующими членами ее разложения по степеням A и A^*. При этом имеющиеся в (13.1) высокочастотные колебания с частотой $|\omega_1| \gg \gamma$ целесообразно исключить сглаживанием по времени (по периоду τ из интервала $[2\pi|\omega_1|^{-1}, \gamma^{-1}]$ — тогда члены третьей степени выпадут, а из членов четвертой степени сохранится лишь слагаемое, пропорциональное $|A|^4$, и с этой точностью получаются следующее уравнение Ландау и его решение:

$$\frac{\partial|A|^2}{\partial t} = 2\gamma|A|^2 - \delta|A|^4, \quad \delta > 0; \tag{13.2}$$

$$|A(t)|^2 = A_0^2 A_\infty^2 \left[A_0^2 + (A_\infty^2 - A_0^2)\, e^{-2\gamma t}\right]^{-1}; \quad A_\infty = (2\gamma/\delta)^{1/2}. \tag{13.3}$$

Таким образом, при малом начальном A_0 амплитуда $|A(t)|$ сначала растет по линейной теории экспоненциально, как $A_0 e^{\gamma t}$, а затем этот рост замедляется, и при $t \to \infty$ она стремится к не зависящему от A_0 предельному значению A_∞, при малых Re—Re_{1cr} пропорциональному $(\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{1cr})^{1/2}$ (так как $\gamma \sim \mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{1cr}$ и $\delta \neq 0$). Итак, при малом $\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{1cr} > 0$ возмущение (13.1) стремится с ростом t к периодическому колебанию $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ с конечной амплитудой A_∞ и произвольной фазой (определяемой случайной начальной фазой возмущения и потому представляющей собою степень свободы предельного течения).

Если записать уравнения гидродинамики, линеаризированные относительно периодического решения $M(t)$ с периодом T_1, символически в виде $\partial M'/\partial t = f^t M'$, где f^t — ограниченный линейный оператор, непрерывно и периодически с периодом T_1 зависящий от t, то для всякого возмущения $M'(t)$ периодического решения будет $M'(t+T_1) = U(T_1)M'(t)$, где $U(T_1)$ — линейный и ограниченный так называемый *оператор монодромии*. Его собственные значения $\rho_n(\mathrm{Re})$ называются *мультипликаторами*; один из них, тривиальный, равен единице и дальше учитываться не будет. Если все $|\rho_n| < 1$, то все возмущения при каждом обходе замкнутой траектории уменьшаются, так что периодическое движение устойчиво, если же $|\rho_n| > 1$ хотя бы при одном n, то оно неустойчиво. Таким образом, с ростом Re бифуркации периодических движений происходят при переходе мультипликаторов $\rho_n(\mathrm{Re})$ в комплексной плоскости ρ через единичную окружность.

Так, с ростом Re может быть достигнуто новое критическое значение $\mathrm{Re}_{2\mathrm{cr}}$, при котором пара мультипликаторов примет значения $\exp(\pm i\alpha)$ (где $\alpha \neq 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3$, чтобы исключить резонансы). Тогда произойдет вторая нормальная бифуркация Хопфа: периодическое течение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ станет неустойчивым относительно какого-то из возмущений вида $e^{\lambda t}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{f}_1$ — периодическая по времени функция с периодом $2\pi/\omega_1$, а собственное значение λ имеет мнимую часть $\pm i\omega_2$. При небольших $\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{2\mathrm{cr}}$ это возмущение будет возрастать со временем до конечного предела — квазипериодического движения с двумя периодами ($2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_2$) и двумя степенями свободы (фазами колебаний).

Таким образом, из замкнутой траектории образуется траектория на двумерном торе (см. рис. 13.2 *б*). Если затем произойдет следующая нормальная бифуркация Хопфа, то образуется траектория на трехмерном торе, и т. д.

Если при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{2\mathrm{cr}}$ один из мультипликаторов переходит через единичную окружность в точке $\rho = -1$, то $U(T_1)M'(t) = -M'(t)$, т. е. малое возмущение за один оборот по траектории $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ просто меняет знак. Тогда через следующий оборот получится $M'(t+2T_1) = -U(T_1)M'(t) = M'(t)$, т. е. возмущенная траектория замкнется. Таким образом, в этом случае при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{2\mathrm{cr}}$ происходит *бифуркация удвоения периода* — из периодического движения с периодом T_1 рождается устойчивое периодическое движение с удвоенным периодом $2T_1$, а исходное движение становится неустойчивым (см. рис. 13.2 *в*). Таким же образом затем может произойти следующая бифуркация удвоения периода, и т. д.

Если предсказываемое теоремой о бифуркации Хопфа однопараметрическое семейство замкнутых траекторий появляется еще при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{1\mathrm{cr}}$, то в разложении Ландау (13.2) коэффициент δ должен быть отрицательным, а коэффициент $\gamma \sim \mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{1\mathrm{cr}}$ будет

отрицательным при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{1cr}$ и положительным при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{1cr}$. Значит, при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{1cr}$ уравнение (13.2) принимает вид

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t} = -2|\gamma||A|^2 + |\delta||A|^4, \qquad (13.3')$$

откуда видно, что замкнутая траектория неустойчива: траектории, лежащие внутри ее, наматываются на неподвижную точку (иначе говоря, возмущения с малыми амплитудами $|A| < A_1 = (2|\gamma|/|\delta|)^{1/2}$ затухают со временем), а траектории вне ее сматываются с нее и уходят в другие области фазового пространства (иначе говоря, возмущения с конечными амплитудами $|A| > A_1$ растут со временем, так что при $\mathrm{Re}_{1cr} > \mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{1cr} - \alpha^2|A|^2$ движение оказывается неустойчивым по отношению к таким возмущениям). При возрастании $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{1cr}$ замкнутая траектория сжимается, и при переходе Re через значение Re_{1cr} она исчезает — это явление называется *обратной бифуркацией Хопфа* (см. рис. 13.2 *г*). При $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{1cr}$ уравнение (13.2) с коэффициентами $\gamma > 0$ и $\delta < 0$ имеет решение

$$|A|(t)^2 = A_0^2 A_1^2 \left[(A_0^2 + A_1^2)\, e^{-2\gamma t} - A_0^2\right]^{-1}; \quad A_1 = (2\gamma/|\delta|)^{1/2}, \qquad (13.4)$$

обращающееся в бесконечность за конечное время $t_1 = (1/2\gamma) \times \times \ln[1 + (A_1^2/A_0^2)]$. Но ясно, что еще раньше уравнение (13.2) перестает быть пригодным и должно быть дополнено следующими членами разложения Ландау. Имеющиеся примеры показывают, что после обратной бифуркации при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{1cr}$ движения, по-видимому, быстро приобретают непериодический характер.

§ 14. Неустойчивость течений вязкой жидкости

Рассмотрим сначала вопрос об устойчивости стационарных плоскопараллельных течений несжимаемой вязкой жидкости, имеющих скорость $\mathbf{u}_0 = \{U(z), 0, 0\}$, так что возмущения поля скорости $\mathbf{u}(x, t)$ будут удовлетворять уравнениям (11.7) с добавлением в правую часть уравнений движения слагаемого $\nu \Delta \mathbf{u}$, описывающего ускорение сил вязкости. Назовем такие уравнения (11.7′). Тогда для двумерных элементарных волновых решений этих уравнений вместо уравнения Рэлея (11.11) получится следующее так называемое *уравнение Орра—Зоммерфельда*:

$$(U - c)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - k^2\psi\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\psi = -\frac{i\nu}{k}\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4} - 2k^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^4\psi\right), \qquad (14.1)$$

причем в безразмерных переменных это уравнение будет иметь такой же вид, и лишь ν заменится на $(\mathrm{Re})^{-1}$. Заметим, что если из четырех уравнений (11.7′), записанных для *трехмерных* волновых возмущений, которые зависят от x, y, t по закону

$\exp[ik_1(x-ct)+ik_2y]$, исключить неизвестные u, v и p', то для w получится такое же уравнение (14.1), лишь с заменой k^2 на $k_1^2+k_2^2$ и ν на νkk_1^{-1} (т. е. Re на $k_1k^{-1}\mathrm{Re}$). Значит, если при данном значении Re числа Рейнольдса имеется неустойчивое трехмерное волновое возмущение с собственным значением c, то существует двумерное волновое возмущение с таким же c, неустойчивое при меньшем числе Рейнольдса $k_1k^{-1}\mathrm{Re}$ (Г. Сквайр, 1933). Заметим лишь, что при исключении неизвестных было потеряно решение уравнений (11.7′), у которого $w\equiv 0$ и, значит, $k_1u+k_2v\equiv 0$, причем и u, и v удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-k^2u-\frac{ik_1}{\nu}(U-c)u=0 \qquad (14.2)$$

с краевыми условиями $u=0$ при $z=0$, h. При $k_2\neq 0$ это уравнение имеет дополнительный спектр собственных значений c, отсутствующий у двумерных возмущений, но он соответствует лишь устойчивым возмущениям, т. е. $\operatorname{Im} c<0$ (В. А. Романов, 1973). Действительно, умножив (14.2) на u^*, проинтегрировав по z и взяв вещественную часть полученного равенства, имеем

$$-\int_0^h\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2+k^2|u|^2\right)dz-(\operatorname{Im} c)\frac{k_1}{\nu}\int_0^h|u|^2\,dz=0, \qquad (14.3)$$

откуда и видно, что $\operatorname{Im} c<0$. Таким образом, с ростом Re двумерные волновые возмущения теряют устойчивость раньше трехмерных, и для анализа устойчивости по отношению к малым волновым возмущениям достаточно изучить спектр собственных значений уравнения Орра—Зоммерфельда (14.1) при краевых условиях $\psi=\partial\psi/\partial z=0$ при $z=0$, h. Более того, в отличие от уравнения Рэлея (11.11) уравнение (14.1) не имеет сингулярностей и имеет только дискретный спектр, так что нет сомнений, что любое двумерное решение уравнений (11.7′) является суперпозицией элементарных волновых решений (хотя полное доказательство этого утверждения, по-видимому, так и не опубликовано).

Оказывается, что справедлив следующий *принцип исчезающей вязкости*: растущие со временем и нейтральные волновые решения уравнений (11.7) суть пределы соответствующих решений уравнений (11.7′) при $\nu\to 0$, затухающие же решения уравнений (11.7′) стремятся при этом к соответствующим решениям уравнений (11.7) лишь вне некоторой области значений z («внутреннего пограничного слоя»), в которой их поведение определяется вязкостью, какой бы малой она ни была.

Чтобы сформулировать этот принцип в терминах собственных значений c уравнения Орра—Зоммерфельда, примем, что функция $U(z)$ определена не только на отрезке $0\leqslant z\leqslant h$, но и аналитически продолжается в некоторую окрестность этого отрезка в комплексной плоскости z. Введем функцию $r(z)=[i(U-c)]^{1/2}$.

Будем называть дуги в плоскости z, соединяющие точки $z=0$ и $z=h$, *допустимыми*, если вдоль них $U-c\neq 0$ и $\operatorname{Re}\int rdz$ изменяется монотонно. Будем говорить, что c есть собственное значение вдоль дуги, если при этом c существует аналитическое вдоль этой дуги решение уравнения Рэлея, обращающееся в ноль на концах дуги.

Тогда принцип исчезающей вязкости вытекает из следующей теоремы: если при $\nu\to 0$ собственное значение уравнения Орра—Зоммерфельда стремится к такому пределу c, при котором в комплексной плоскости z можно провести допустимую дугу, то c есть собственное значение уравнения Рэлея вдоль этой дуги; обратно, если c есть собственное значение уравнения Рэлея вдоль некоторой допустимой дуги, то это c есть предел при $\nu\to 0$ собственных значений уравнения Орра—Зоммерфельда (Ц. Линь, 1945—1946; В. Вазов, 1953).

Доказательство довольно громоздко, и мы лишь вкратце изложим его идею. Введем малый параметр $\varepsilon=(\nu/k)^{1/2}$ и функции $\psi_1=\psi$, $\psi_2=\partial\psi/\partial z$, $\psi_3=\partial^2\psi/\partial z^2-k^2\psi$ и $\psi_4=\varepsilon\,\partial\psi_3/\partial z$, так что уравнение Орра—Зоммерфельда будет эквивалентно следующей системе четырех уравнений первого порядка:

$$\varepsilon\psi_1'=\varepsilon\psi_2;\quad \varepsilon\psi_2'=\varepsilon k^2\psi_1+\varepsilon\psi_3;$$
$$\varepsilon\psi_3'=\psi_4;\quad \varepsilon\psi_4'=\varepsilon^2k^2\psi_3+i\left[(U-c)\psi_3-U''\psi_1\right]. \qquad (14.4)$$

Эту систему можно записать в матричной форме $\varepsilon\Psi'=P\Psi$, где $\Psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)$, а P — квадратная матрица. Линейной заменой переменных $\Psi=(T_0+\varepsilon T_1+\varepsilon^2T_2)\Phi$ эту систему с точностью до членов высшего порядка малости по ε удается привести к виду:

$$\varepsilon\varphi_1'=(r-\varepsilon r'/2r)\,\varphi_1;\quad \varepsilon\varphi_2=(-r-\varepsilon r'/2r)\,\varphi_2;$$
$$\varphi_3'=\varphi_4;\quad \varphi_4'=\left[k^2+U''(U-c)^{-1}\right]\varphi_3. \qquad (14.5)$$

Последние два уравнения здесь эквивалентны уравнению Рэлея. Если в комплексной плоскости z есть дуга, вдоль которой от ее конца z^* до другого конца z^{**} величина $\operatorname{Re}\int rdz$ монотонно возрастает, то введем вдоль нее две функции:

$$\chi_1=C_1r^{-1/2}\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{z_0}^{z} r\,dz\right);\quad \chi_2=C_2r^{-1/2}\exp\left(-\varepsilon^{-1}\int_{z_0}^{z} r\,dz\right), \qquad (14.6)$$

нормированные так, что $\chi_1(z^{**})=\chi_2(z^*)=1$. Пусть $(\varphi_3^{(1)},\ \varphi_4^{(1)})$ и $(\varphi_3^{(2)},\ \varphi_4^{(2)})$ — пара линейно-независимых решений для $(\varphi_3,\ \varphi_4)$, нормированных так, что их вронскиан равен единице (по теореме Лиувилля он постоянен). Тогда можно убедиться, что система

(14.5) имеет вдоль указанной дуги следующие четыре линейно-независимых решения:

$$\Phi_1=\left(\chi_1+\overline{\chi}_1,\ \overline{\chi}_1,\ \overline{\overline{\chi}}_1,\ \overline{\overline{\chi}}_1\right);\quad \Phi_2=\left(\chi_2,\ \chi_2+\overline{\chi}_2,\ \overline{\overline{\chi}}_2,\ \overline{\overline{\chi}}_2\right);$$
$$\Phi_3=\left(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3^{(1)}+\overline{\overline{\varphi}}_3,\ \varphi_4^{(1)}+\overline{\overline{\varphi}}_4\right);$$
$$\Phi_4=\left(\overline{\varphi}_1,\ \overline{\varphi}_2,\ \varphi_3^{(2)}+\overline{\overline{\varphi}}_3,\ \varphi_4^{(2)}+\overline{\overline{\varphi}}_4\right), \tag{14.7}$$

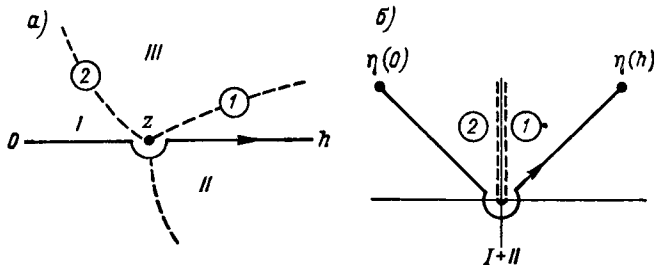


Рис. 14.1.

а) линии Стокса при вещественном c; *б)* их образ при отображении $\eta(z)$.

где одна черточка означает умножение на $O(\varepsilon)$, а две — на $O(\varepsilon^2)$. Любое решение системы (14.5) есть $\sum C_j'\Phi_j$. Выразив через него ψ_1 и ψ_2 и приравняв эти величины нулю при $z=0,\ h$, в качестве условия разрешимости полученной системы уравнений относительно констант C_j' потребуем равенства нулю характеристического детерминанта $\Delta_4(C)$. Но для него получается

$$\Delta_4(c)=\varepsilon^2\left(-r^{-2}\Delta_2(c)+O(\varepsilon)\right], \tag{14.8}$$

где $\Delta_2(c)$ — характеристический детерминант для уравнения Рэлея. Отсюда и следует теорема Линя—Вазова.

Чтобы выяснить, какие дуги являются допустимыми, рассмотрим сначала вещественное c, и пусть z_c — корень уравнения $U(z)=c$. Тогда в окрестности z_c будет $U-c\approx U_c'(z-z_c)$. Пусть $U(z)$ — монотонно возрастающая функция, так что $U_c'>0$. Положим

$$\eta(z)=\int_{z_c}^{z} r\,dz\approx e^{\frac{\pi i}{4}}\left(U_c'\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}\,|z-z_c|^{\frac{3}{2}}\,e^{\frac{3i}{2}\arg(z-z_c)}. \tag{14.9}$$

Три кривые $\operatorname{Re}\eta=0$ (так называемые *линии Стокса*) расходятся из критической точки $z=z_c$ под равными углами и делят ее окрестность на секторы I, II, в которых проходит отрезок $0\leqslant z\leqslant h$, и III, где он не проходит — см. рис. 14.1 *а*. Любые два сектора отображаются функцией $\eta(z)$ в плоскость, разрезан-

ную по лучу, «берегами» которого являются образы линий Стокса. На рис. 14.1 *б* показано, что образ секторов I+II отображается на плоскость, разрезанную по положительной части мнимой оси. В этой плоскости точки $\eta(0)$ и $\eta(h)$ можно соединить кривой, на которой $\mathrm{Re}\,\eta$ меняется монотонно. Ее прообраз в плоскости z обходит критическую точку снизу — это и есть допустимая дуга.

При $U'(z) < 0$, наоборот, критическую точку нужно обходить сверху. При профиле $U(z)$, симметричном относительно точки $z=h/2$, критических точек две, и одну надо обходить снизу (где $U'_c > 0$), а другую сверху (где $U'_c < 0$). Если $\mathrm{Im}\,c > 0$ (неустойчивость) и у критической точки на вещественной оси $U' > 0$, то z_c и весь сектор III лежат выше, а при $U' < 0$ — ниже вещественной оси, которая при этом и является допустимой дугой. Если же $\mathrm{Im}\,c < 0$ (устойчивость), то отрезок $0 \leqslant z \leqslant h$ пересекает все три сектора, $\mathrm{Re}\,\eta$ изменяется вдоль него не монотонно, а направление обхода допустимой дугой критической точки (со всем сектором III) определяется знаком U' вблизи нее так же, как и выше. Собственные функции уравнения Орра—Зоммерфельда в секторах I и II стремятся к собственным функциям уравнения Рэлея, в секторе же III при малых ν они, по-видимому, быстро осциллируют; в окрестностях пересечения линий Стокса с вещественной осью образуются внутренние пограничные слои.

Переходя к рассмотрению конкретных плоскопараллельных течений, начнем с плоскопараллельного течения Куэтта с линейным профилем скорости $U(z)=Az$. Согласно всем проводившимся расчетам, это течение линейно устойчиво, т. е. в нем не происходит нормальных бифуркаций, и $\mathrm{Re}_{1\mathrm{cr}}=\infty$ (хотя полное доказательство этого так и не опубликовано). В то же время из экспериментов известно, что оно неустойчиво по отношению к конечным возмущениям, по-видимому, в области внутри некоторой «нейтральной поверхности» в трехмерном пространстве параметров (k, Re, A). Ее приближенно рассчитывали С. Кувабара (1967) и Т. Эллингсен, Б. Гьевик и Е. Пальм (1970). По первой из этих работ неустойчивость возникает лишь при $\mathrm{Re}={}^1\!/_2\nu^{-1}Ah^2 > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}} \approx$ $\approx 45\,000$ в довольно маленьких областях плоскости (k, A).

Плоское течение Пуазейля с параболическим профилем скорости $U(z) \approx 4U_{\max}(z/h)(1-z/h)$ в идеальной жидкости линейно устойчиво, и обнаруженная В. Гейзенбергом (1924) его линейная неустойчивость в вязкой жидкости при больших Re (нормальная бифуркация) сначала показалась парадоксальной (так как казалось, что вязкость может быть только стабилизирующим фактором). Но затем эта неустойчивость была подтверждена Ц. Линем (1945) и последующими авторами, рассчитавшими «нейтральную кривую» в плоскости (k, Re), внутри которой $\gamma > 0$ (где k измеряется в единицах $(h/2)^{-1}$, $\mathrm{Re}=({}^1\!/_2)\nu^{-1}hU_{\max}$ и γ определено в (13.1)) — см. сплошную кривую на рис. 14.2. При этом получи-

лось $\mathrm{Re}_{1\mathrm{cr}} \approx 5800$, $k_{\mathrm{cr}} \approx 1$, и обе ветви нейтральной кривой при $\mathrm{Re} \to \infty$ стремятся к оси абсцисс $k = 0$, верхняя — как $\mathrm{Re}^{-1/11}$, а нижняя — как $\mathrm{Re}^{-1/7}$. Таким образом, с ростом Re возмущение с фиксированным не слишком большим k сначала оказывается устойчивым, затем попадает в область неустойчивости, но при очень больших Re (включая $\mathrm{Re} = \infty$, т. е. идеальную жидкость)

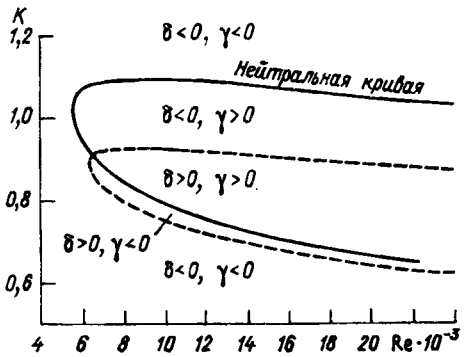


Рис. 14.2. Области неустойчивости плоского течения Пуазейля по С. Пекерису и Б. Школлеру (1967)

опять становится устойчивым. Упомянем также течение Пуазейля—Куэтта

$$U(z) = U(h/2)\,[(4-\alpha)(z/h) - (4-2\alpha)(z/h)^2]. \qquad (14.10)$$

При $\alpha = 0$ получается течение Пуазейля. С ростом α значение $\mathrm{Re}_{1\mathrm{cr}}$ здесь быстро возрастает и обращается в бесконечность уже при $\alpha \approx 0{,}55$ — задолго до достижения течения Куэтта. Однако плоское течение Пуазейля все же не является «благополучным» примером нормальной бифуркации: экспериментальные данные не подтверждают упомянутую выше рассчитанную «нейтральную кривую» и показывают, что потеря устойчивости происходит при значениях $\mathrm{Re} = 1000 \ldots 2500$ значительно ниже $\mathrm{Re}_{1\mathrm{cr}}$ линейной теории. Это заставляет подозревать наличие обратной бифуркации и неустойчивость по отношению к возмущениям конечной амплитуды. И действительно, В. Рейнольдс и М. Поттер (1967), С. Пекерис и Б. Школлер (1967), рассчитав коэффициент $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ разложения Ландау (13.2) (δ_1 описывает приток энергии от наиболее неустойчивого возмущения, искажающий ламинарное течение, δ_2 — генерацию этим возмущением старших гармоник, δ_3 — искажение его формы), установили, что в плоскости (k, Re) получается $\delta < 0$ (за счет δ_3) всюду, кроме области, ограниченной на рис. 14.2 пунктирной кривой. При этом кривые $\gamma(k, \mathrm{Re}) = 0$ и $\delta(k, \mathrm{Re}) = 0$ делят плоскость на четыре области с разными комбинациями знаков γ и δ. Особенно любопытна область $\gamma > 0$, $\delta > 0$, в которой могут существовать периодические движения конечной амплитуды. Согласно Д. Мексину (1964), $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}} \sim 1000$ получается при некоторых трехмерных возмущениях.

Зато нормальная бифуркация вполне надежно обнаружена у течения в пограничном слое около плоской пластинки, трактуемого при расчетах, как приблизительно плоскопараллельное. «Нейтральную кривую» для него впервые рассчитал В. Толлмиен, в 1929 г. — для профиля $U(z)$ из отрезков прямых и парабол, а в 1930 г. — для профиля Блазиуса (с $\mathrm{Re}_{1cr}=420$, где $\mathrm{Re}=\nu^{-1}\times$ $\times\delta^* U$, δ^* — так называемая толщина вытеснения, U — скорость набегающего потока). Такой расчет был затем проведен также Г. Шлихтингом и последующими авторами. Он подтвержден экспериментами Дж. Шубауэра и Г. Скремстейда (1947) с порождаемыми вибратором возмущениями $\psi(z)e^{i(kx-\omega t)}$ с фиксированной (вещественной) частотой ω, которые при $\mathrm{Im}\,k<0$ нарастают вниз по течению (но поскольку $\omega=ck$, «нейтральные кривые» $\mathrm{Im}\,k=0$ и $\mathrm{Im}\,\omega=0$ совпадают). «Нейтральная кривая» здесь качественно такова же, как на рис. 14.2, но последующие расчеты показали, что при профиле скорости $U(z)$ с точкой перегиба течение более неустойчиво: при $\mathrm{Re}\to\infty$ верхняя ветвь «нейтральной кривой» стремится к асимптоте $k=k_\infty>0$, так что возмущения с $k<k_\infty$, ставши при некотором Re_{cr} неустойчивыми, остаются таковыми при всех $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{cr}$ вплоть до идеальной жидкости (см. рис. 14.6 *б*).

Эксперименты П. Клебанова, К. Тидстрома и Л. Сарджента (1962) и других авторов показали, что дальнейшая эволюция неустойчивой волны Толлмиена—Шлихтинга в пограничном слое около плоской пластинки приводит при Re_{2cr} ко второй нормальной бифуркации — наложению на первичную двумерную вторичной трехмерной волны, периодической по поперечному направлению y и имеющей групповую скорость по x, близкую к фазовой скорости первичной волны. Вторичная волна чрезвычайно быстро нарастает вниз по течению, создает вихри с продольными осями, осуществляющие резкое поперечное перераспределение интенсивности пульсаций продольной скорости u (см. рис. 14.3), и становится нелинейной. Последнее приводит к фокусированию вторичного волнового пакета на гребне первичной волны, а также к исчезновению во вторичной волне участков с положительными аномалиями продольной скорости $u>0$ и оставлению только участков с отрицательными импульсами $u<0$ (этот эффект объяснил М. Ландаль, 1972). Сначала образуется один импульс на цикл колебаний вибратора, ниже по течению — два и т. д., и, по-видимому, после режима с четырьмя импульсами на цикл течение становится хаотическим.

Визуализация при помощи цепочек микронных пузырьков, периодически генерируемых электрическим током на платиновой нити, и микроинъекций краски (С. Клайн с соавторами, 1963—1975), а также при помощи взвешенных частиц (Э. Корино, Р. Бродки, 1969) указала на две взаимодействующие друг с другом мелкомасштабные формы течения в вязком подслое у стенки:

вихри с поперечными осями и знаком U' и ручейки замедленной жидкости в ложбинах вторичных поперечных волн.

Ручейки образуются на высотах $z^+ = \nu^{-1} u_* z = 2{,}5 \ldots 10$ (u_* — «скорость трения» на стенке), имеют ширину $\delta y^+ = 10 \ldots 30$

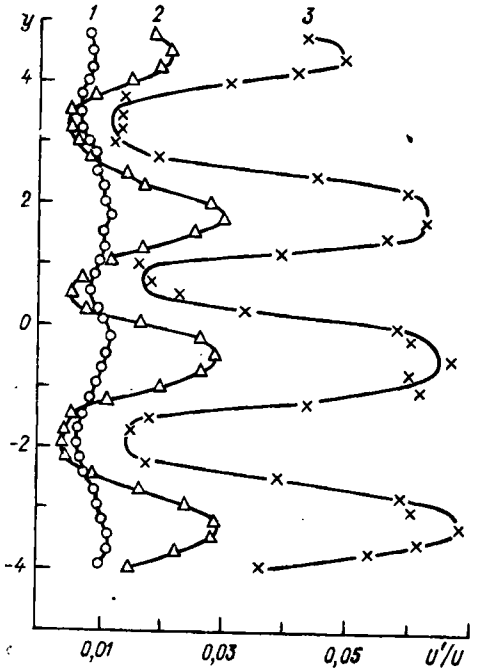


Рис. 14.3. Нарастание вниз по течению пульсаций продольной скорости во вторичной волне в пограничном слое над плоской пластинкой.

1) x=7,6 см; *2*) x=15,2 см; *3*) x=19 см.



Рис. 14.4. Пузырьковые изохроны (т. е. линии постоянного времени; вид сбоку) в пограничном слое около плоской пластинки, генерируемые вертикальной нитью (левая кромка фотографии, течение слева направо).

и разделены расстояниями $\Delta y^+ \sim 100$. Они медленно всплывают под действием продольных вихрей, но из-за отрицательных градиентов давления под проплывающими выше поперечными вихрями отрываются от стенки и проникают вверх в быстрее текущую жидкость, создавая на мгновенном профиле скорости искривления с точками перегиба (рис. 14.4). После этого на ручейке возникают колебания, и вскоре его конец «взрывается», создавая хаотическое движение (преимущественно на высотах $z^+ = 10 \ldots 30$ и на расстояниях от точки отрыва $\delta x^+ = 1000 \ldots 1500$). Подсчитано, что во «взрывах» осуществляется почти вся продукция турбулентной энергии.

При отрыве ручейка центральная часть связанного с ним поперечного вихря всплывает и уходит вниз по течению, образуя «подкову» (см. рис. 14.5; продольное сечение «ноги» такой «подковы» видно на фотографии рис. 14.4). Верхняя часть «подковы», обгоняя поверху следующий ниже по течению замедленный ру-

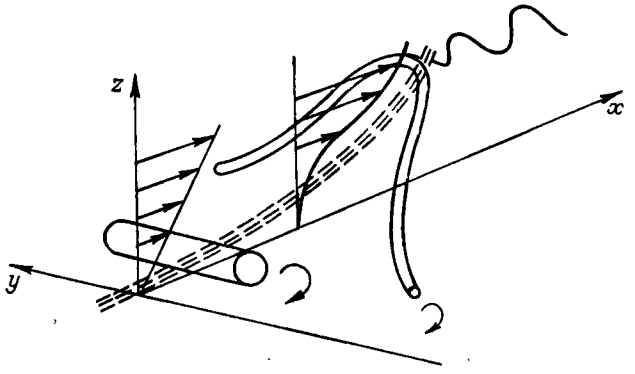


Рис. 14.5. Образование подковообразного вихря.

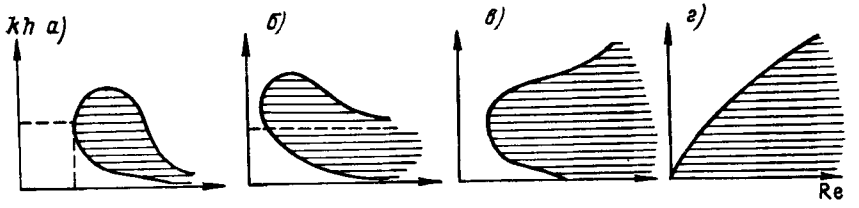


Рис. 14.6. Области линейной неустойчивости в плоскости (kh, Re).

а) у плоского течения Пуазейля; *б*) у пограничного слоя около плоской пластинки; *в*) у плоской струи; *г*) у плоской зоны перемешивання.

чеек, создает на нем отрицательный градиент давления и приводит к его отрыву и образованию новой «подковы». Наложение двух «подков» приводит к их объединению, но чаще они пересекаются, производя «взрывы» — так локализованно происходят здесь и «стохастизация», и перенос энергии по спектру в сторону меньших масштабов.

Из плоскопараллельных течений в безграничном пространстве упомянем, прежде всего, плоскую струю, например, с профилем скорости $U(z)=U_0\left(\operatorname{ch}\frac{z}{h}\right)^{-2}$, которая всегда неустойчива относительно антисимметричных возмущений, причем $\mathrm{Re}_{cr\,min}=(\nu^{-1}\times\times hU_0)_{cr}\approx 3{,}7$ и $hk_{cr}\approx 0{,}25$, а с ростом Re верхняя ветвь «нейтральной кривой» монотонно поднимается (см. рис. 14.6 *в*).

Неустойчивы при любых Re сглаживающие тангенциальный разрыв скорости ламинарные «зоны перемешивания»: у них нижняя ветвь «нейтральной кривой» совпадает со всей полуосью $k=0$, а верхняя с ростом Re монотонно поднимается (см. рис. 16.6*г*).

Из осесимметричных течений ограничимся здесь рассмотрением лишь течения Пуазейля в круглой трубе. Для него задача о собственных значениях уравнения типа Орра—Зоммерфельда, обобщающего на случай вязкой жидкости уравнение Рэлея (11.27), оказалась математически очень сложной, и был рассчитан лишь ряд частных случаев (осесимметричные возмущения с $n=0$ и некоторые другие). Неустойчивых возмущений обнаружено не было, так что течение Пуазейля в трубе, как и плоское течение Куэтта, по-видимому, линейно устойчиво, т. е. $\mathrm{Re}_{1\mathrm{cr}}=\infty$.

В то же время эксперименты, начиная с самого О. Рейнольдса (1883), с несомненностью показывают, что это течение всегда остается ламинарным, как бы велики ни были начальные возмущения на входе в трубу, лишь при $\mathrm{Re}=2\nu^{-1}RU_{\max}<\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}}\sim\sim 2000$, а выше некоторого $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ оно теряет устойчивость — очевидно, по отношению к конечным возмущениям, так как уменьшением начальных возмущений можно «затянуть» ламинарный режим до очень больших Re (у В. Пфеннигера, 1961, — даже до $\mathrm{Re}=100\,000$). Потеря устойчивости происходит в форме появления перемежающихся коротких по x, но заполняющих все сечение трубы «турбулентных пробок», вниз по течению удлиняющихся и сливающихся друг с другом.

Область неустойчивости в пространстве параметров (k, Re, A) для этого течения рассчитали А. Дэви и Г. Нгуйен (1971). Отметим, что при наличии на оси трубы стержня, на поверхности которого скорость должна обращаться в ноль, течение ведет себя подобно плоскому течению Пуазейля на рис. 14.2 — у него появляются и область линейной неустойчивости, и область обратной бифуркации.

В заключение этого параграфа в качестве примера поведения следа за обтекаемым вязкой жидкостью телом перечислим бифуркации следа за перпендикулярным набегающему потоку цилиндром кругового сечения. При $\mathrm{Re}\sim 10$ происходит *смена устойчивости*, и вместо монотонного плавного обтекания за цилиндром образуется пара стационарных вихрей. При $\mathrm{Re}>40$ они начинают поочередно отрываться от цилиндра, замещаясь новыми вихрями, и уплывать вниз по течению, образуя вихревую *дорожку Кармана*. При $\mathrm{Re}>100$ вихри заменяются быстро турбулизирующимися областями поочередно отрывающихся пограничных слоев. При $\mathrm{Re}>10^5$ пограничные слои турбулизируются еще до отрыва, точка отрыва продвигается вниз по течению, турбулентный след сужается, и сопротивление уменьшается (*кризис сопротивления*). При $\mathrm{Re}\sim 10^6$ турбулентный след расширяется, и сопротивление растет. Наконец, при $\mathrm{Re}\sim 10^7$ след начинает колебаться, как це-

лое. При наличии у жидкости свободной поверхности все эти явления могут видоизменяться, и на них еще наложатся так называемые корабельные волны. В стратифицированной жидкости все они будут сопровождаться генерацией различных видов внутренних волн.

§ 15. Стохастичность

В вязкой жидкости конечное число младших (крупномасштабных) мод движения полностью определяет и все остальные моды, так как из-за вязкости старшие (мелкомасштабные) моды сильно затухают и лишь повторяют с уменьшенной амплитудой колебания основных мод (в частности, имеют тот же тип спектра — дискретный или непрерывный). В связи с этим Э. Хопф (1948) высказал гипотезу о том, что все множество фазовых траекторий уравнений Навье—Стокса при $t \to \infty$ притягивается к *конечномерному* множеству. Для двумерных течений вязкой жидкости эту гипотезу удалось доказать (С. Фойа и Г. Проди, 1967; О. А. Ладыженская, 1972). Упомянем естественную оценку числа степеней свободы у развитой (с большим Re) локальной трехмерной турбулентности $N \sim (\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{cr})^{9/4}$ (Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, 1953). Аналогичная оценка для двумерной турбулентности со спектральным переносом энстрофии (т. е. квадрата вихря) в сторону малых масштабов $N \sim \mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{cr}$ менее аккуратна, так как этот спектральный перенос не вполне локален. Таким образом, уравнения гидродинамики вязкой жидкости можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u},\ \mathrm{Re});\quad \mathbf{u} = (u^1(t), \ldots, u^N(t)), \tag{15.1}$$

где $u^k(t)$, например, коэффициенты галеркинского приближения (6.3) (см. уравнения (6.4) при $f^k \equiv 0$).

Вязкость создает не только конечномерность фазового пространства, но и *диссипативность* фазового потока, т. е. сжатие в среднем фазового объема вниз по течению. Пусть

$$\delta V(\mathbf{u}_0,\ 0) = \prod_{k=1}^{N} \delta u_0^k$$

— малый начальный элемент фазового объема около точки $\mathbf{u}_0$, а $\delta V(\mathbf{u}_0,\ t)$ — его значение после смещения вниз по фазовому потоку через время t. При малых t будет $\delta V(\mathbf{u}_0,\ t) = \prod_{k=1}^{N} \delta u^k$, где $\delta u^k \approx \dfrac{\partial u^k}{\partial u_0^k}\,\delta u_0^k$. Поскольку

$$\frac{\partial \delta u^k}{\partial t} \approx \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial u_0^k}\,\delta u_0^k,$$

относительная скорость изменения δV со временем равна

$$\Lambda(\mathbf{u}_0) \equiv (\delta V)^{-1}\,\partial(\delta V)/\partial t = \sum_{k=1}^{N} (\delta u^k)^{-1}\,\partial(\delta u^k)/\partial t \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial u_0^k} = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{u}_0). \qquad (15.2)$$

В разных фазовых точках $\mathbf{u}_0$ эта величина может быть как положительной (расширение), так и отрицательной (сжатие). У СГТ, согласно требованиям регулярности (6.9), $\Lambda \equiv 0$. Фазовый поток называется диссипативным, если при всех $\mathbf{u}_0$

$$\Lambda_0(\mathbf{u}_0) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \ln \left| \frac{\delta V(\mathbf{u}_0, t)}{\delta V(\mathbf{u}_0, 0)} \right| < 0. \qquad (15.3)$$

У галеркинской системы (6.4) $\Lambda_0 = -\nu \sum_{k=1}^{n} \mu_k < 0$. Вследствие диссипативности аттракторы имеют нулевые фазовые объемы (и размерности меньше N).

Особый интерес здесь для нас представляют странные аттракторы, на которых фазовые траектории обнаруживают свойства *стохастичности*:

(1) очень чувствительную зависимость от начальных условий, создаваемую *экспоненциальной расходимостью* начально близких траекторий (и приводящую к их непредсказуемости или невоспроизводимости при задании начальных условий со сколь угодно высокой, но конечной точностью);

(2) всюду плотность на аттракторе почти всех траекторий, т. е. их сколь угодно близкое прохождение около любой его точки (и, значит, бесконечнократную возвращаемость к ней), причем любое начальное неравновесное распределение вероятностей (мера) в фазовом пространстве (точнее, в области притяжения странного аттрактора) стремится к некоторому предельному равновесному распределению $P(A)$ на аттракторе (инвариантной мере);

(3) *перемешивание*, означающее, что для любых (измеримых) подмножеств аттрактора A и B вероятность после выхода из A через большое время t оказаться в B пропорциональна мере B:

$$\lim_{t\to\infty} P\{(F^t A) \cap B\} = P(A)\,P(B), \qquad (15.4)$$

где символ $\cap$ означает пересечение множеств. Следствием перемешивания является независимость от начальных условий $\mathbf{u}_0$ (при почти всех $\mathbf{u}_0$) среднего значения по времени $\langle \Phi[\mathbf{u}(t)] \rangle$ любой

функции $\Phi(\mathbf{u})$ на странном аттракторе и его совпадение со средним значением по инвариантной мере $\overline{\Phi(\mathbf{u})}$ (*эргодичность*):

$$\langle\Phi\rangle \equiv \lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T \Phi[\mathbf{u}(t)]\,dt = \int \Phi(\mathbf{u})P(d\mathbf{u}) \equiv \overline{\Phi}. \qquad (15.5)$$

Признаком перемешивания является достаточно *быстрое затухание* при больших временах $\tau\to\infty$ *корреляционных функций*

$$B^{jl}(\tau) = \langle[u^j(t) - \langle u^j\rangle][u^l(t+\tau) - \langle u^l\rangle]\rangle, \qquad (15.6)$$

и, значит, *непрерывность* их преобразований Фурье по τ — *спектральных функций.*

Турбулентностью представляется целесообразным называть стохастическую (в смысле (1)—(3)) эволюцию *завихренного* течения (вязкой) жидкости. Стохастические *потенциальные* течения жидкости представляются предпочтительным называть *случайными волновыми полями*, а для негидродинамических систем ограничиваться, когда надо, прилагательным *стохастические.*

Сосредоточимся теперь на первом свойстве стохастичности. Экспоненциальная расходимость близких траекторий при сжатии фазового объема возможна, если по одним направлениям u^k в фазовом пространстве $\{\mathbf{u}\}$ происходит расширение, а по другим — сжатие, т. е. неблуждающие фазовые точки должны быть подобны двумерным седлам. Такие точки называются *гиперболическими.* Неподвижная точка $\mathbf{u}_0$ является гиперболической, если матрица Якоби $A(\mathbf{u}_0) = \{\partial F^k/\partial u^l\}$ в этой точке имеет K собственных значений с положительной и $N-K$ с отрицательной действительной частью, $0 < K < N$. Множества $W^s_{\mathbf{u}_0}$ и $W^n_{\mathbf{u}_0}$ фазовых точек $\mathbf{u}_0$, через которые проходят траектории, стремящиеся к $\mathbf{u}_0$ при $t\to+\infty$ и при $t\to-\infty$, называются соответственно устойчивым и неустойчивым многообразиями точки $\mathbf{u}_0$; в малой окрестности точки $\mathbf{u}_0$ они суть подпространства, натянутые на $N-K$ и K собственных векторов матрицы $A(\mathbf{u}_0)$, соответствующих ее собственным значениям с отрицательными и положительными действительными частями.

Точки пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий $W^s_{\mathbf{u}}$ и $W^n_{\mathbf{u}}$, отличающиеся от самой точки $\mathbf{u}$, называются *гомоклиническими* (а пересечения устойчивого многообразия $W^s_{\mathbf{u}}$ одной неподвижной точки $\mathbf{u}$ и неустойчивого многообразия $W^n_{\mathbf{v}}$ другой неподвижной точки $\mathbf{v}$ — *гетероклиническими точками*). В их окрестности структура фазового потока может быть особенно сложной (см. ниже).

Периодическая траектория является гиперболическим множеством, если некоторые мультипликаторы (см. § 13) лежат внутри, а остальные — вне единичной окружности (тривиальный мульти-

пликатор, равный единице, опять не учитывается). Множества W^s и W^n траекторий, притягивающихся к предельному циклу при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, называются его устойчивым и неустойчивым многообразиями. Если сумма их размерностей равна $N-1$, то их пересечение называется *трансверсальным*.

В качестве иллюстрации гомоклинических структур рассмотрим пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий перио-

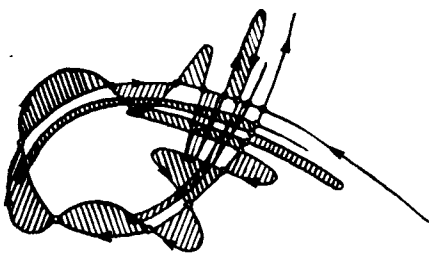


Рис. 15.1. Гомоклиническая траектория на секущей плоскости. Заштрихованы участки плоскости, отображающиеся друг в друга.

дической траектории в трехмерном фазовом пространстве. При этом удобно использовать так называемое *отображение последования Пуанкаре*, которое в общем виде, в N-мерном фазовом пространстве, заключается в регистрации последовательных точек $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... пересечения траектории (в одном и том же направлении) с некоторой *секущей* $(N-1)$-мерной поверхностью Σ в фазовом пространстве, чем определяется отображение $\mathbf{v}_{n+1}=\Pi(\mathbf{v}_n, \mathrm{Re})$ поверхности Σ в себя. Поскольку решение $\mathbf{u}(\mathbf{u}_0, t)$ уравнения (15.1) существует при всех t, это отображение *обратимо*.

В случае $N=3$ секущей Σ может служить некоторая плоскость. Периодической траектории на Σ соответствует неподвижная точка отображения Π, а устойчивому и неустойчивому многообразиям — устойчивая и неустойчивая сепаратрисы (см. рис. 15.1, на котором для наглядности последовательные точки пересечения Σ фазовой траекторией соединены плавными линиями). Если у сепаратрис есть общая точка, то и все ее образы при $n \to \infty$ и прообразы при $n \to -\infty$ также суть точки пересечения сепаратрис, так что их имеется счетное множество. Они принадлежат так называемой *гомоклинической* траектории, двоякоасимптотической в том смысле, что при $t \to \pm\infty$ она сматывается с исходной периодической траектории или наматывается на нее. При приближении к неподвижной точке, где движение экспоненциально замедляется, гомоклинические точки сгущаются, а амплитуды осцилляций сепаратрис возрастают. В окрестности гомоклинической траектории любой малый фазовый объем при $t \to \pm\infty$ сложно деформируется и расплывается, так что почти все траектории экспоненциально расходятся. Такая локальная неустойчивость траекторий, заключенных в ограниченный фазовый объем, и приводит к особенной сложности фазового потока, который здесь включает счет-

ное множество периодических и несчетное множество двоякоасимптотических к ним траекторий.

Инвариантное множество вообще является гиперболическим, если в каждой его точке $\mathbf{u}$ пространство $T_{\mathbf{u}}$, касательное к фазовому пространству (линейное пространство касательных векторов в точке $\mathbf{u}$), есть прямая сумма одномерного подпространства $E^1_{\mathbf{u}}$, натянутого на вектор фазовой скорости, и устойчивого и неустойчивого подпространств $E^s_{\mathbf{u}} = \{\xi\}$ и $E^n_{\mathbf{u}} = \{\eta\}$ таких, что действие на их элементы дифференциала фазового потока DF^t (линейно отображающего $T_{\mathbf{u}}$ на $T_{\mathbf{F}^t\mathbf{u}}$) удовлетворяет неравенствам:

$$\|\xi\|^{-1}\|DF^t\xi\| \leqslant ae^{-ct};\quad \|\eta\|^{-1}\|DF^t\eta\| \geqslant be^{ct} \text{ при } t \geqslant 0;$$
$$\|\xi\|^{-1}\|DF^t\xi\| \geqslant be^{-ct};\quad \|\eta\|^{-1}\|DF^t\eta\| \leqslant ae^{ct} \text{ при } t \leqslant 0, \quad (15.7)$$

где a, b, c — некоторые положительные константы, не зависящие от $\mathbf{u}$. Фазовые точки $\mathbf{v}$, для которых $\mathbf{F}^t\mathbf{v}$ неограниченно сближается с $\mathbf{F}^t\mathbf{u}$ при $t \to \infty$ (или при $t \to -\infty$), образуют устойчивое многообразие $W^s_{\mathbf{u}}$ (или неустойчивое многообразие $W^n_{\mathbf{u}}$) точки $\mathbf{u}$; оно касается в этой точке $E^s_{\mathbf{u}}$ (или $E^n_{\mathbf{u}}$). Объединение этих многообразий для всех $\mathbf{u}$ на данной траектории дает соответствующие многообразия W^s и W^n для траектории. Их пересечения, как и выше, образуют гомоклинические структуры.

Итак, экспоненциальная расходимость близких траекторий у диссипативных систем связана с наличием в их фазовых пространствах гиперболических множеств. Свойственны ли они многим динамическим системам или являются, наоборот, исключением? В последнем случае малое возмущение такой системы (скажем, всегда присутствующими в природе «шумами») лишало бы ее этого свойства. В связи с этим полезно использовать введенное А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным (1937) понятие *структурно устойчивой* (или «грубой») системы, для (15.1) формулируемое следующим образом: при любом $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что для любой возмущенной системы $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_1(\mathbf{u})$, отстоящей от исходной по некоторой метрике $\|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}\|$ не более чем на δ, существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное преобразование фазового пространства на себя, сдвигающее его точки не более чем на ε и переводящее траектории невозмущенной системы в траектории возмущенной. Структурно устойчивые системы образуют открытое множество в пространстве всех возможных динамических систем.

В одно- и двумерных фазовых пространствах структурной устойчивостью обладают так называемые *системы М. Морса—С. Смейла*, у которых множества неблуждающих точек состоят лишь из конечного числа неподвижных точек и замкнутых траек-

торий, причем все они гиперболические, и отвечающие любым таким точкам устойчивое и неустойчивое многообразия трансверсальны (т. е. либо не пересекаются, либо касательные к ним пространства в каждой точке их пересечения $\mathbf{u}$ в сумме образуют полное касательное пространство $T_{\mathbf{u}}$).

Однако в фазовых пространствах большего числа измерений системы Морса—Смейла структурной устойчивостью уже не обладают, и для нее, по гипотезе С. Смейла (1965), необходимо и достаточно, чтобы у каждого осуществляемого фазовым потоком преобразования F^t фазового пространства множество Ω неблуждающих точек было гиперболическим, а множество периодических точек — всюду плотным в Ω (это — так называемая аксиома А), и, кроме того, каждое устойчивое и каждое неустойчивое многообразия точек из Ω были бы трансверсальными. Достаточность этих условий доказана в довольно общем виде, а необходимость пока что лишь при более ограниченном определении структурной устойчивости. Стохастичность аттракторов в системах, удовлетворяющих аксиоме А, доказана Р. Боуэном и Д. Рюэллем (1975).

Таким образом, при $N \geqslant 3$ для фазовых потоков в определенном смысле типично наличие бесконечного множества Ω гиперболических неблуждающих точек со всюду плотным в нем множеством периодических траекторий (Д. В. Аносовым, 1967, обнаружены даже потоки, у которых гиперболическим множеством является все фазовое пространство).

Множество Ω может иметь очень сложную геометрическую структуру. Так, С. Смейл (1967) доказал, что в широком классе типичных динамических систем каждая гомоклиническая точка принадлежит некоторому инвариантному подмножеству K множества Ω, являющемуся *канторовым дисконтинуумом*, т. е. нигде не плотным замкнутым множеством без изолированных точек.

Стандартный пример канторова множества строится следующим образом: (1) выкинув из отрезка [0, 1] его *среднюю треть*, т. е. открытый (без крайних точек) интервал $(1/3, 2/3)$, получим множество K_1 из двух отрезков $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$; (2) выкинув из каждого из двух отрезков множества K_1 его среднюю треть, получим множество K_2 из четырех отрезков; ...; (n) выкинув из каждого из 2^{n-1} отрезков множества K_{n-1} его среднюю треть, получим множество K_n из 2^n отрезков; и т. д. Пересечение всех K_n и будет канторовым множеством K. Если каждое число из отрезка [0, 1] записать в троичной системе счисления как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$, где все a_n принимают значения 0, 1 и 2, то K состоит из точек, у которых все a_n равняются 0 или 2. Значит, K можно привести во взаимно-однозначное соответствие со множеством всех двоичных последовательностей — всем отрезком [0, 1], т. е. множество K несчетно (имеет мощность континуума).

В качестве примера образования канторова множества в фазовом пространстве рассмотрим динамическую систему, которая создает за фиксированное время T отображение $\Pi(\mathbf{u})$ внутренности U двумерного тора на себя так, что $\Pi(U)$ есть внутренность вложенного в U тора с одной петлей, показанного на рис. 15.2. Круг S, являющийся сечением тела U, при этом преобразуется в два кружка $\Pi(S)$ внутри S. Следующая итерация $\Pi^2(S)$ даст

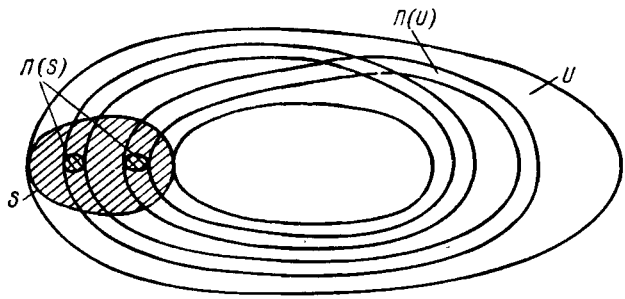


Рис. 15.2. Отображение $\Pi(U)$ внутренности U двумерного тора на себя, порождающее страиный аттрактор.

по два кружочка внутри кружков $\Pi(S)$ и т. д. Пересечение всех итераций $\Pi^n(S)$ дает канторово множество точек в S, так что пересечение всех итераций $\Pi^n(U)$ есть канторово множество линий — так называемый *одномерный соленоид* Р. Вильямса (1970).

Канторово множество *фрактально*, т. е. его *хаусдорфова* размерность $\dim_H K$ превышает обычную *топологическую* размерность (у него равную нулю). При этом $\dim_H A$ определяется через *хаусдорфову* α-меру множества A

$$\mathrm{mes}_{H,\alpha}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\Gamma(A)} \sum [D(U)]^\alpha, \qquad (15.8)$$

где нижняя грань берется по конечным или счетным покрытиям Γ множества A шарами U с диаметрами $D(U) \leqslant \varepsilon$. Размерность $\dim_H A$ определяется, как такое число α_0, что мера (15.8) при $\alpha > \alpha_0$ равна нулю, а при $\alpha < \alpha_0$ — бесконечности. Если в (15.8) используются только покрытия одинаковыми шарами диаметра ε и берется верхний или нижний предел (т. е. наибольший или наименьший предел по подпоследовательностям значений $\varepsilon \to 0$), то получаются верхняя $\overline{\mathrm{mes}}_{c,\alpha}(A)$ или нижняя $\underline{\mathrm{mes}}_{c,\alpha}(A)$ *емкостные* α-меры, и $\overline{\dim}_c A$ или $\underline{\dim}_c A$ есть нижняя грань значений α, при которых верхняя или нижняя мера равна нулю (или же верхняя грань значений α, при которых мера равна бесконечности).

При этом $\dim_H A \leqslant \underline{\dim}_c A \leqslant \overline{\dim}_c A$. Если последние две величины здесь совпадают, то они определяют *емкость* множества A:

$$\dim_c A = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(A)}{\ln(1/\varepsilon)}, \tag{15.9}$$

где $N_\varepsilon(A)$ — минимальное число шаров диаметра ε, покрывающих множество A. Использованные выше при построении K множества K_N состоят из $N_\varepsilon = 2^n$ интервалов длиной $\varepsilon = 3^{-n}$, так что

$$\dim_c K = \lim (\ln 2^n)/(\ln 3^n) = \ln 2/\ln 3 \approx 0{,}631.$$

Экспоненциальную расходимость близких траекторий в среднем по времени можно количественно охарактеризовать так называемыми *показателями Ляпунова*, для чего в точках $\mathbf{u}(t)$ траектории с начальным условием $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ вводится касательный вектор $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{u}_0, t)$ с начальным условием $\mathbf{w}(\mathbf{u}_0, 0) = \mathbf{w}_0$, так что $\|\mathbf{w}(\mathbf{u}_0, t)\|$ характеризует проекцию на направление $\mathbf{w}$ расстояния в момент t между траекториями с близкими начальными точками $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}_0$. Вектор $\mathbf{w}$ удовлетворяет линеаризированному относительно $\mathbf{u}(t)$ уравнению (15.1), имеющему вид $\mathbf{w} = A[\mathbf{u}(t)]\mathbf{w}$, где $A = \{\partial F^k/\partial u^l\}$ — матрица Якоби в точке $\mathbf{u}(t)$. Это уравнение имеет полную систему фундаментальных решений $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_N$, и для каждого из них определяется свой показатель Ляпунова:

$$\sigma_i(\mathbf{u}_0) = \lim_{\substack{t \to \infty \\ \|\mathbf{w}_i(0)\| \to 0}} t^{-1} \ln \frac{\|\mathbf{w}_i(\mathbf{u}_0, t)\|}{\|\mathbf{w}_i(\mathbf{u}_0, 0)\|}. \tag{15.10}$$

Их нумеруют в порядке их убывания: $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_N$. Дивергенция фазового потока (15.3) равна $\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$, так что у диссипативных потоков не только $\sigma_N < 0$, но, кроме того, модуль суммы отрицательных σ_i больше суммы положительных σ_i. Если траектория $\mathbf{u}(t)$ притягивается к неподвижной точке (или к периодической или квазипериодической траектории), то все σ_i (или все, кроме $\sigma_1 = 0$, где вектор $\mathbf{w}_1$ направлен вдоль предельной траектории) отрицательны.

Если траектория притягивается к странному аттрактору Λ, то $\sigma_1 > 0$. Если на аттракторе существует инвариантная мера и есть эргодичность, то средние по времени в (15.10) не зависят от $\mathbf{u}_0$ и могут быть заменены средними по инвариантной мере. Пусть k — такой номер, что $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i < 0$. Тогда *ляпуновской размерностью* аттрактора Λ называется величина

$$\dim_L \Lambda = k + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i / |\sigma_{k+1}|. \tag{15.11}$$

Т. Ли и Дж. Иорк (1975) высказали гипотезу, что эта величина совпадает с хаусдорфовой размерностью множества Λ (определенной, как нижняя грань хаусдорфовых размерностей множеств единичной инвариантной меры, предельной для меры Лебега в фазовом пространстве). Численные расчеты для нескольких двумерных отображений и одного трехмерного потока показали, что величины (15.11) и (15.9) практически совпадают.

§ 16. Сценарии стохастизации

До сих пор ни для одной геометрии течений вязкой жидкости не установлено с должной строгостью, какая последовательность бифуркаций при возрастании Re приводит к превращению стационарного (ламинарного) течения в стохастическое (турбулентное). Сведения § 14 показывают, что при разной геометрии течений такие последовательности бифуркаций, по-видимому, могут быть весьма различными. Наиболее правдоподобные гипотезы о последовательностях бифуркаций, ведущих к стохастичности, будем называть *сценариями* и рассмотрим некоторые из них.

Сценарий Л. Д. Ландау (1944) — Э. Хопфа (1948): последовательность нормальных бифуркаций, порождающая предельное квазипериодическое течение $\mathbf{u}[\mathbf{x}, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_N(t)]$, имеющее период 2π по каждому из аргументов $\varphi_k(t) = \omega_k t + \alpha_k$ с, вообще говоря, несоизмеримыми частотами $\omega_1, \ldots, \omega_N$, занимающее в фазовом пространстве область, соответствующую всевозможным наборам начальных фаз $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, и эргодическое в том смысле, что наматывающаяся на него траектория с течением времени проходит сколь угодно близко от любой точки указанной области (так как в моменты $t_k = 2\pi k/\omega_1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, когда $\varphi_1(t) = \alpha_1$, фаза любого другого колебания $\varphi_2(t_k) = 2\pi k\omega_2/\omega_1$ после приведения к интервалу $[0, 2\pi]$ может иметь значение, сколь угодно близкое к любому наперед заданному).

Временные корреляционные функции скоростей здесь, вообще говоря, не стремятся к нулю на бесконечности, но сначала они быстро спадают (как $N^{-1/2}$), а время T до следующего максимума (*период возврата Пуанкаре*) очень велико: $T \sim e^{\alpha N}$, где $\alpha \sim 1$ (В. И. Арнольд, 1974). Много хуже то, что последовательность нормальных бифуркаций и результирующее квазипериодическое движение не обладают структурной устойчивостью (И. Экманн, 1981) и не типичны даже в том смысле, что подчиняющиеся этому сценарию фазовые потоки не образуют в пространстве всех фазовых потоков *бэровского* множества (счетного пересечения открытых всюду плотных множеств). В связи с этим Дж. Селл (1979) предлагает уточнить этот сценарий, как последовательность бифуркаций k-мерных торов $T^k \to T^{k+1}$, не требуя, чтобы течения на них были квазипериодическими. Такие бифуркации

возможны и при наличии странных аттракторов и в некотором смысле обладают структурной устойчивостью.

Сценарий Д. Рюэлля и Ф. Тэкенса (1971): появление странного аттрактора после трех нормальных бифуркаций. Этот сценарий обладает структурной устойчивостью: в каждой достаточно малой окрестности фазового потока с n-мерным инвариантным тором при $n \geqslant 3$ имеется открытое множество фазовых потоков со странным аттрактором, удовлетворяющим аксиоме A (причем малость окрестности понимается в смысле C^{n-1}-нормы

$$\|\mathbf{F}\| = \max_{\substack{(\mathbf{u}) \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1}} |D^{(k)}\mathbf{F}|,$$

где $D^{(k)}\mathbf{F}(\mathbf{u})$ обозначает любую производную порядка k, а при $n \geqslant 4$ и в смысле нормы C^{∞}). В 1971 г. эта теорема была доказана при $n \geqslant 4$ (и привлекла всеобщее внимание к процессам стохастизации в диссипативных системах), а на случай $n=3$ она обобщена в работе этих же авторов совместно с С. Ньюхаузом (1978).

Доказательство теоремы Рюэлля и Тэкенса основано на возможности аппроксимации потока с тором T^k потоком с обвивающей тор замкнутой траекторией (где все ω_i/ω_k при $i=1, \ldots, k-1$ — малые рациональные числа), в который можно вложить канторовский аттрактор, например, типа соленоида Вильямса. Иначе говоря, в этом механизме трехчастотное движение разрушается путем нелинейной синхронизации (образования резонансов) его высоких гармоник. Такой механизм, по-видимому, слишком мягок (по Б. В. Чирикову, слишком «нежен») для возникновения турбулентности. В проводившихся экспериментах стохастизация больше похожа на разрушение двухчастотного движения T^2 — *биений*, вероятно, путем их синхронизации и затем либо бифуркаций удвоения периода образующегося цикла, либо слияния и изчезновения устойчивого и седлового циклов (и образования аттрактора из гомоклинической структуры седлового цикла или из складок исходного негладкого тора).

Сценарий М. Фейгенбаума (1978—1979): появление странного аттрактора в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода. Рассмотрим такие бифуркации сначала на примере одномерного необратимого (однозначного и непрерывного) отображения $x_{n+1}=\Pi(x_n, \mu)$ отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ в себя, причем функция Π имеет на этом отрезке один квадратичный экстремум, скажем максимум. Итерации такого отображения удобно изображать на так называемой диаграмме Кенигса—Ламерея (рис. 16.1), на которой по оси абсцисс откладываются значения x_n, по оси ординат — значения x_{n+1}, проводятся график $\Pi(x)$ и биссектриса координатного угла, и между ними строится *лестница*

Ламерея так, что образ x_{n+1} становится прообразом для x_{n+2}, $n=0, 1, 2, \ldots$.

Точка $x_*=\Pi(x_*)$ пересечения графика $\Pi(x)$ с биссектрисой является неподвижной точкой отображения. Она *устойчива*, если у нее имеется сколь угодно малая окрестность, итерации точек которой сходятся к x_*; для этого достаточно условия $|\Pi'(x_*)|<1$ (при этом график $\Pi(x)$ пересекает биссектрису под углом к оси абсцисс либо меньше 45° — тогда итерации сходятся к x_* монотонно, либо больше 135° — тогда итерации сходятся колебательно). Множество точек $x_{i+1}=\Pi(x_i)\neq x_i$, $i=1, 2, \ldots, n-1$; $x_{n+1}=\Pi(x_n)=x_1$ является n-кратным циклом (его лестница Ламерея замкнута). Все его точки суть неподвижные точки n-кратной итерации Π_n, и он устойчив, если в некоторой из них $|\Pi_n'(x)|<1$.

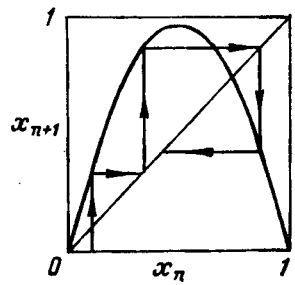


Рис. 16.1. Диаграмма Кенигса—Ламерея.

Сохраняя у $\Pi(x)$ только квадратичную часть, отображение можно, не теряя общности, привести к *логистическому уравнению*

$$x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n). \qquad (16.1)$$

Интересен лишь диапазон $1<\mu\leqslant 4$ (так как при $\mu\leqslant 1$ все траектории притягиваются к точке $x=0$, а при $\mu>4$ появляются значения $\Pi(x)>1$). В нем отображение имеет две неподвижные точки — неустойчивую $x=0$ и точку $x_0=1-\mu^{-1}$, устойчивость которой определяется собственным значением λ линеаризированного в ней уравнения (16.1). Нетрудно убедиться, что $\lambda=2-\mu$, так что область устойчивости $|\lambda|<1$ точки x_0 есть $1<\mu<3$. При $\mu\geqslant\mu_1=3$ эта точка становится неустойчивой, и, кроме того, появляется двукратный цикл — пара отличающихся от x_0 корней x_1^0, x_1^1 уравнения $x=\Pi_2(x)$. График этой функции имеет два максимума, а минимум между ними вполне подобен перевернутому графику $\Pi(x)$: при $\mu_1<\mu<\mu_2\approx 3{,}45$ точки x_1^0 и x_1^1 устойчивы, а при $\mu\geqslant\mu_2$ они становятся неустойчивыми, и, кроме того, в их окрестностях появляются двукратные циклы (x_2^0, x_2^1) и (x_2^2, x_2^3) отображения Π_2, образующие четырехкратный цикл отображения Π, который при $\mu_2<\mu<\mu_3$ устойчив, и т. д.

Таким образом, при значениях μ_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ происходят бифуркации удвоения периода: 2^{n-1}-кратные циклы теряют устой-

чивость, и появляются устойчивые 2^n-кратные циклы. М. Фейгенбаум обнаружил, что последовательность μ_n сходится (к пределу $\mu_\infty \approx 3{,}57$) асимптотически как геометрическая прогрессия с довольно большим знаменателем:

$$(\mu_n - \mu_{n-1})(\mu_{n+1} - \mu_n)^{-1} \sim \delta = 4{,}6692 \ldots . \qquad (16.2)$$

Более того, при помощи функциональных уравнений он доказал, что этот закон и значение δ *универсальны*: они справедливы не только для отображения (16.1), но и для всякого отображения $\Pi(x)$ указанного выше общего вида. Таким образом, зная μ_0 и μ_1, можно предсказать

$$\mu_\infty \approx \mu_0 + \frac{\delta}{\delta - 1}(\mu_1 - \mu_0).$$

М. Фейгенбаум доказал универсальность также для расположения на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ периодических точек последовательных $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$-кратных циклов x_0, (x_1^0, x_1^1), $(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$, ... Эти точки устойчивы на интервалах $3 \leqslant \mu < \mu_1$, $\mu_1 \leqslant \mu < \mu_2$, $\mu_2 \leqslant \mu \leqslant \mu_3$, ... и на графике $x(\mu)$ изображаются отрезками кривых, которые в точках μ_1, μ_2, μ_3, ... раздваиваются (несимметрично), в сумме образуя «дерево» (см. рис. 16.2, построенный численно для квадратичного отображения, эквивалентного (16.1)). Универсальность этого «дерева» заключается в том, что каждое последующее раздвоение подобно предыдущему с коэффициентами подобия для разных ветвей $(-\alpha^{-1})$ или α^{-2}, где $\alpha = 2{,}5029\ldots$ (подобие также асимптотическое, но устанавливается практически уже после первых итераций):

$$\frac{x_n^k - x_n^{k+2^{n-1}}}{x_{n+1}^k - x_{n+1}^{k+2^n}} = \begin{cases} -\alpha, & 0 \leqslant k < 2^{n-1}, \\ \alpha^2, & 2^{n-1} \leqslant k < 2^n. \end{cases} \qquad (16.3)$$

При больших n, заменяя (путем интерполяции) последовательность x_n^0, x_n^1, ... функцией с непрерывным аргументом $x_n(t)$ и представляя ее в виде ряда Фурье

$$x_n(t) = \sum_k X_n^k e^{\frac{2\pi i k t}{2^n}}, \qquad (16.4)$$

можно установить универсальный закон подобия для амплитуд $|X_n^k|$. Так, получаем

$$X_{n+1}^k = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{2^{n+1}} x_{n+1}(t)\, e^{-\frac{2\pi i k t}{2^{n+1}}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2^n} \int_0^{2^n} \left[x_{n+1}(t) + (-1)^k x_{n+1}(t + 2^n)\right] e^{-\frac{\pi i k t}{2^n}}\, dt. \qquad (16.5)$$

При четных $k=2l$ из (16.3) получается $x_{n+1}(t)\approx x_{n+1}(t+2^n)\approx \approx x_n(t)$, и тогда (16.5) принимает вид $X^{2l}_{n+1}\approx X^l_n$, т. е. на этой частоте фурье-амплитуда при всех последующих бифуркациях не меняется. При нечетных $k=2l+1$ из (16.3)—(16.5) выводится рекуррентное соотношение

$$X^{2l+1}_{n+1}=-\frac{1}{2\alpha}\left[1-(-1)^l i\right]\left[1+(-1)^l\frac{i}{\alpha}\right]S;$$

$$S=\frac{1}{\pi i}\sum_m\left[(2m+1)-\frac{1}{2}(2l+1)\right]^{-1}X^{2m+1}_n. \qquad (16.6)$$

В предположении плавной зависимости от m модуля амплитуды X^{2m+1}_n и случайности ее фазы при замене $2l+1$ непрерывным аргументом ξ из (16.6) получается закон подобия

$$|X_{n+1}(\xi)|=\frac{1}{\gamma}\left|X_n\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|;$$

$$\gamma=2\alpha^2(1+\alpha^2)^{-1/2}\approx 4{,}65. \qquad (16.7)$$

При $\mu>\mu_\infty$ при некоторых μ рождаются (парами — устойчивая и неустойчивая) траектории периодического движения (последовательно с периодами 1, 6, 5, 3, ..., см. рис. 16.2), каждая из которых затем испытывает последовательность бифуркаций удвоения периода со своей точкой сгущения. Кроме того, здесь на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ существуют полосы стохастического движения, причем при значениях $\mu_\infty<\ldots<\mu^*_n<\mu^*_{n-1}<\ldots<\mu^*_1$ они испытывают обратные бифуркации удвоения периода, при которых количество полос уменьшается вдвое, а сами они расширяются (и сливаются), следуя закону подобия с теми же константами δ и α, что и выше. Так, после $(n+1)$-й бифуркации средняя квадратичная ширина полосы равна $W_{n+1}=(\alpha^{-2}/2+\alpha^{-4}/2)^{1/2}W_n$, откуда $W_n=W_0\beta^{-n}$, где $\beta=\gamma/\sqrt{2}\approx 3{,}29$. Поэтому дисперсия стохастической части движения пропорциональна $W^2\sim\beta^{-2n}\sim(\mu^*_n-\mu_\infty)^m$, где $m=2\ln\beta/\ln\delta\approx 1{,}544\ldots$ (здесь мы использовали закон подобия (16.2)). Таким образом, стохастичность возникает не скачком, а нарастает с ростом μ постепенно (и не монотонно, а прерываясь областями, в которых самоорганизуются периодические движения).

Одномерное отображение имеет единственный показатель Ляпунова (15.10):

$$\sigma(x_0,\mu)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln\left|\frac{\partial\Pi(x_n,\mu)}{\partial x_n}\right|. \qquad (16.8)$$

Он почти всюду не зависит от x_0, при $\mu<\mu_\infty$ отрицателен (так как существует предельный цикл), а при $\mu-\mu_\infty>0$ преимуще-

ственно положителен и сначала пропорционален $(\mu - \mu_\infty)^k$, где $k = \ln 2/\ln \delta \approx 0{,}4498...$ (Б. Хьюберман, И. Рудник, 1980), а затем оказывается сложной функцией от μ.

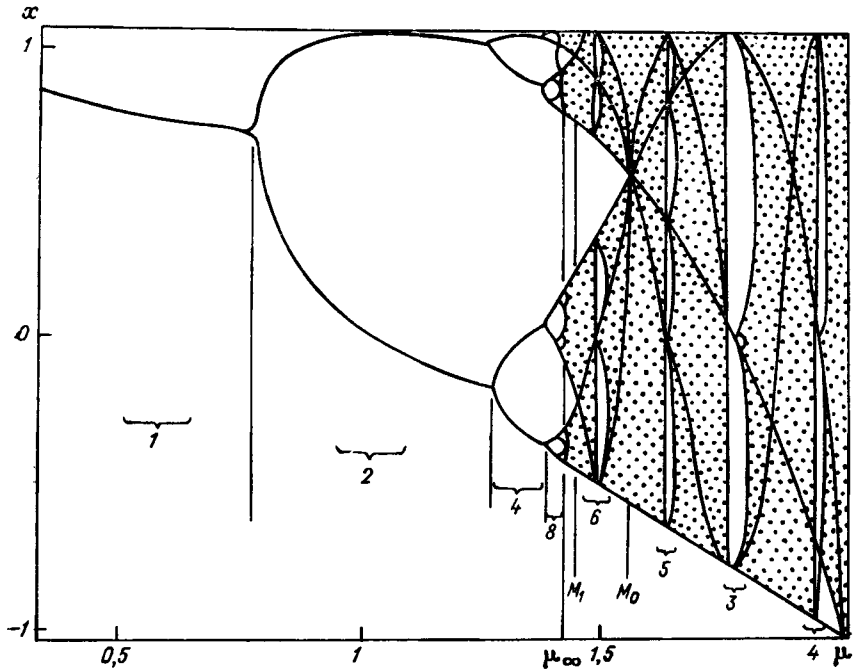


Рис. 16.2. Бифуркационная диаграмма отображения $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$ отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$ в себя при $0{,}35 \leqslant \mu \leqslant 2$.

Инвариантная мера (плотность вероятности) $p(x)$ для отображения $\Pi(x)$ с одним экстремумом вследствие сохранения «числа траекторий» удовлетворяет соотношению

$$p(x)\,dx = p(x_1)\,dx_1 + p(x_2)\,dx_2,$$

где x_1 и x_2 — два прообраза точки x. Отсюда получается функциональное уравнение

$$p(x) = p(x_1)\left|\frac{\partial \Pi(x_1)}{\partial x_1}\right|^{-1} + p(x_2)\left|\frac{\partial \Pi(x_2)}{\partial x_2}\right|^{-1}, \qquad (16.9)$$

решать которое можно численно (методом итераций). Для треугольного отображения $\Pi(x)$ с максимумом $\Pi(1/2) = 1$ очевидное решение есть $p(x) = 1$. Отображение (16.1) при $\mu = 4$ переходит в треугольное $\Pi(\bar{x})$ при замене переменной $\bar{x} = 2\pi^{-1} \arcsin x^{1/2}$, так что для него

$$p(x) = \partial \bar{x}/\partial x = \pi^{-1}[x(1-x)]^{-1/2} \qquad (16.10)$$

(а показатель Ляпунова равен $\sqrt{2}$). Стохастическое движение с такой инвариантной мерой является перемешивающим. При $\mu_\infty \leqslant \mu < 4$ распределения $p(x)$ оказываются сложными (в частности, имеют разрывы). При $\mu = \mu_\infty$ аттрактор эргодичен, но не обладает перемешиванием (И. Экманн, 1981), что представляется некоторым недостатком рассматриваемого сценария.

Рассмотрим теперь двумерные отображения $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}_n, \mu)$, где $\mathbf{x} = (x, y)$, и якобиан $\partial(x_{n+1}, y_{n+1})/\partial(x_n, y_n)$ отличен от нуля (обратимость отображения) и по модулю меньше единицы (диссипативность). Примером может служить отображение

$$x_{n+1} = \Pi(x_n, \mu) + y_n; \quad y_{n+1} = \beta x_n; \quad |\beta| < 1, \tag{16.11}$$

где $\Pi(x)$ — необратимое одномерное отображение. Якобиан у (16.11) равен $(-\beta)$, и поскольку для k-й итерации якобиан $(-\beta)^k \to 0$ $(k \to \infty)$, ясно, что предельный аттрактор лежит в окрестности кривой $x = \Pi(y/\beta)$. Бифуркации двумерных отображений подчиняются тем же универсальным законам М. Фейгенбаума, так что достаточно ограничиться квадратичными отображениями, которые, как нетрудно показать, при постоянном якобиане всегда могут быть приведены к виду (16.11) с функцией $\Pi(x)$ вида (16.1).

Такое отображение имеет две неподвижные точки — неустойчивую $x = y = 0$ и устойчивую $x = 1 - (1 - \beta)\mu^{-1}$, $y = \beta x$. При некотором $\mu = \mu_1(\beta)$ вторая из этих точек теряет устойчивость, и, кроме того, появляется двукратный цикл, т. е. неподвижная точка второй итерации $\mathbf{x}_{n+2} = \mathbf{\Pi}_2(\mathbf{x}_n)$. В окрестности своей неподвижной точки эта вторая итерация путем перенормировки значений $\mathbf{x}$, μ и β приводится к такому же функциональному виду, как исходное отображение (причем перенормировка β имеет вид $\beta_2 = \beta^2$). Поэтому далее происходит последовательность бифуркаций удвоения периода с асимптотическими законами подобия Фейгенбаума при тех же параметрах δ и α, с той же точкой накопления μ_∞ (при $\beta_\infty = 0$) и с аналогичным вышеизложенному дальнейшим поведением при $\mu > \mu_\infty$. Для эквивалентного (16.11), (16.1) отображения

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 + y_n; \quad y_{n+1} = \beta x_n \tag{16.12}$$

М. Хенон (1976) рассчитал (при $\mu = 1{,}4$ и $\beta = 0{,}3$) $5 \cdot 10^6$ итераций, которые вырисовали в плоскости (x, y) множество линий, по всей видимости, канторовской структуры, хотя стохастичность этого аттрактора строго еще не доказана (при замене в (16.12) x_n^2 на $|x_n|$ это сделано М. Мисюревичем (1980)). Первый показатель Ляпунова здесь определялся численно, второй равен $\sigma_2 = \ln\beta - \sigma_1$, и ляпуновская размерность аттрактора (15.11) получилась равной $1 + \sigma_1|\sigma_2|^{-1} \approx 1{,}26$.

Функциональные уравнения М. Фейгенбаума обобщаются и на случай $(N-1)$-мерных отображений последования Пуанкаре $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}_n, \mu)$ для N-мерных диссипативных фазовых потоков:

если при некотором μ_1 у них происходит бифуркация удвоения периода, то затем с ростом μ происходит бесконечная последовательность таких бифуркаций, удовлетворяющая законам подобия

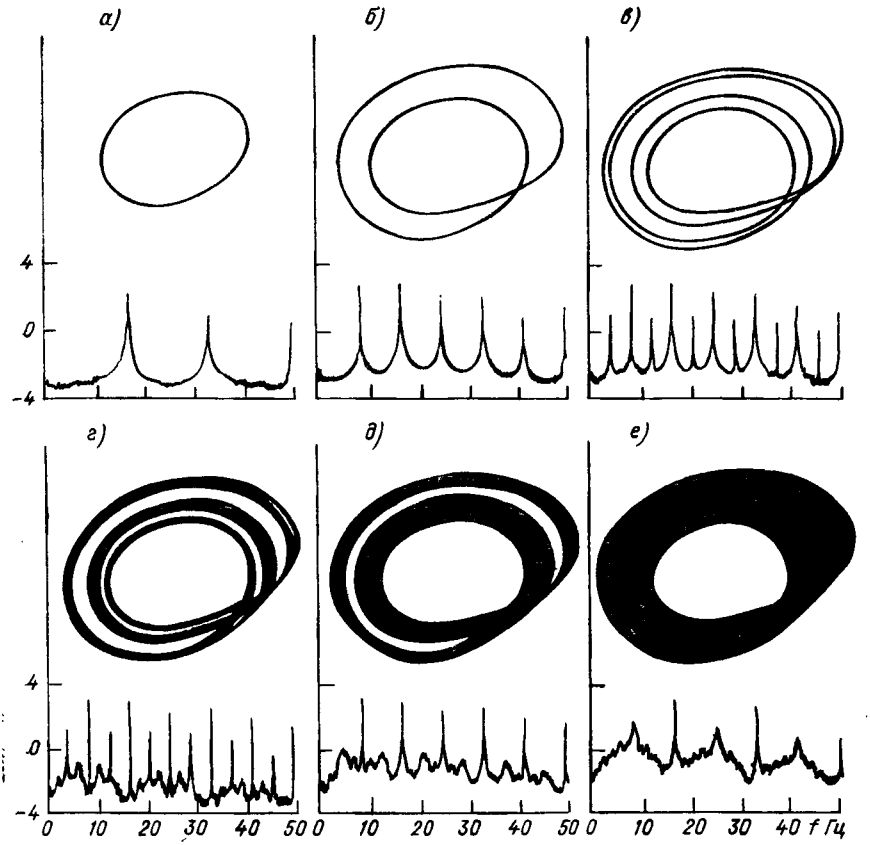


Рис. 16.3. Фазовый поток О. Реслера в проекции на плоскость (x, y) и спектральные плотности для $z(t)$ при μ=2,6 (*а*); 3,5 (*б*); 4,1 (*в*); 4,23 (*г*); 4,30 (*д*); 4,60 (*е*).

с универсальными постоянными δ и α и с некоторой точкой сгущения μ_∞, в которой возникает стохастическое движение (вначале эргодическое, но без перемешивания). Приведем в качестве примера трехмерный фазовый поток О. Рёслера (1976):

$$\dot{x} = -y - z; \quad \dot{y} = x + \frac{y}{5}; \quad \dot{z} = \frac{1}{5} - \mu z + xz. \qquad (16.13)$$

Результаты аналогового моделирования этой системы в проекции на плоскость (x, y) и спектральные плотности для $z(t)$ при трех докритических и трех закритических значениях μ (здесь $\mu_0 \approx 4{,}20$) показаны на рис. 16.3; на спектрах хорошо видны прямые и об-

ратные бифуркации удвоения периода. В сечении этой проекции по линии $y=0$ получается почти одномерное приблизительно квадратичное отображение $x_{n+1}=\Pi(x_n)$; на самом деле эта «линия» имеет толщину, так как аттрактор состоит из бесконечного множества листов канторовской структуры: топологически он получается из листа, расширяющегося вдвое поперек траекторий и складывающегося вдвое по продольной оси, после чего его правый край приклеивается к левому (см. рис. 16.4).

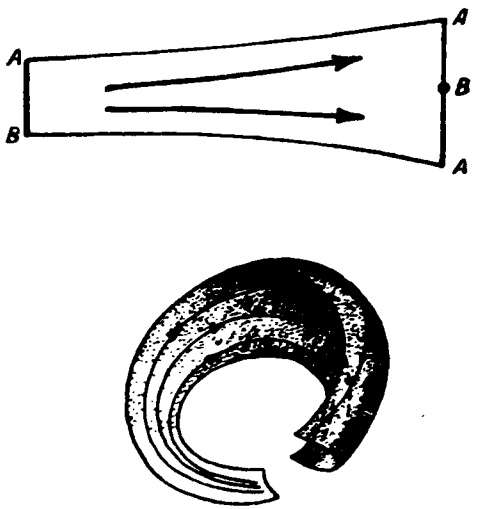


Рис. 16.4. Топология аттрактора О. Реслера.

Сценарий И. Помо и П. Манневиля (1980): возникновение перемежаемости во времени периодического и стохастического движения после обратной тангенциальной бифуркации (слияния и исчезновения устойчивой и неустойчивой неподвижных точек отображения Пуанкаре, т. е. устойчивой и неустойчивой периодических фазовых траекторий), причем промежутки времени со стохастическим движением случайны, а с периодическим — пропорциональны $|\mu-\mu_{\text{кр}}|^{-1/2}$. Примером может служить бифуркация слияния устойчивой и неустойчивой траекторий с периодом 3 у отображения (16.1) при значении $\mu_c\approx 3{,}83$, служащем точкой накопления для последовательности *обратных* бифуркаций удвоения этого периода.

М. И. Рабинович и Д. И. Трубецков (1984) указывают возможность объяснения перемежаемости специальным видом отображения Пуанкаре $x_{n+1}=\Pi(x_n, \mu)$. Пусть график $\Pi(x)$ состоит из трех кривых отрезков: 1 — крутовосходящего, 2 — участка с минимумом, 3 — крутопадающего. Пусть при $\mu<\mu_c$ участок 2 пересекает биссектрису в двух точках; они соответствуют устойчивой и неустойчивой периодическим траекториям отображаемого фазового потока. Пусть с ростом μ этот участок поднимается вверх, и при $\mu=\mu_c$ точки его пересечения с биссектрисой сливаются. При очень небольшом превышении $\mu>\mu_c$ между участком 2 и биссектрисой образуется столь узкая щель, что вписанная в нее лестница Ламерея имеет много ступенек: в течение многих итераций (большого времени) траектория потока остается близкой

к исходной периодической. При выходе из участка 2 у лестницы появляются большие ступени (резкие флюктуации траектории), при возвращениях же в участок 2 вновь возникают длительные интервалы близкого к периодическому движения.

§ 17. Течения Тейлора и Лоренца

Наиболее детальные иллюстрации перечисленных выше сценариев были получены при специальных измерениях потери устойчи-

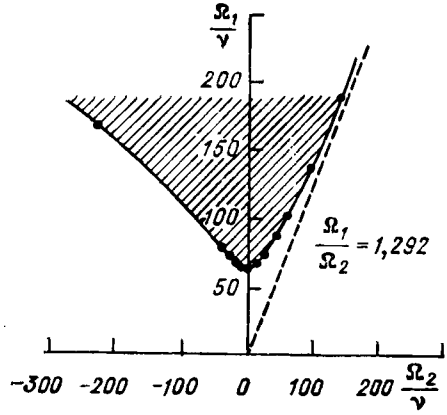


Рис. 17.1. Область неустойчивости кругового течения Куэтта в плоскости (Ω_1, Ω_2) при $R_2/R_1=1{,}13$.

вости кругового течения Куэтта (в зазоре между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами) и нагреваемого снизу слоя жидкости (развития термической конвекции).

Круговое течение Куэтта в цилиндрических координатах r, φ, z с осью z, направленной по оси цилиндров, имеет компоненты скорости:

$$u_{0r}=u_{0z}=0; \quad u_{0\varphi}=U(r)=Ar+Br^{-1};$$
$$A=(\Omega_2R_2^2-\Omega_1R_1^2)(R_2^2-R_1^2)^{-1}; \quad B=-R_1^2R_2^2(\Omega_2-\Omega_1)(R_2^2-R_1^2)^{-1}, \tag{17.1}$$

где $R_1<R_2$ — радиусы, а Ω_1 и Ω_2 — угловые скорости вращения внутреннего и внешнего цилиндров. *В идеальной жидкости* вследствие закона сохранения момента импульса жидкой частицы $mrU=\text{const}$ при ее смещении с радиуса r_0 до $r>r_0$ ее скорость станет равной $r_0U(r_0)/r$, и если задействующее на нее центробежное ускорение $r_0^2U^2(r_0)/r^3$ окажется больше его равновесного значения $U^2(r)/r$, т. е. при условии $\partial(rU)^2/\partial r<0$, течение будет неустойчивым (Рэлей, 1916). Этот критерий приводится к виду $(\Omega_2^2R_2^2-\Omega_1^2R_1^2)U<0$, так что при вращении цилиндров в разные стороны течение всегда неустойчиво (поскольку где-то в зазоре U меняет знак), а при их вращении в одну сторону критерий неустойчивости принимает вид $(\Omega_2/\Omega_1)<(R_1/R_2)^2$ (см. рис. 17.1).

В вязкой жидкости для комплексных амплитуд малых волно-

вых возмущений скорости вида $\mathbf{u}(r)\exp[i(kz+n\varphi-\omega t)]$ с произвольными k и целыми n получаются уравнения:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-k^2\left(\mathscr{L}-\frac{1}{r^2}\right)\right]u_r=$$
$$=\left[\frac{2k^2}{\nu r}\left(U-\frac{in\nu}{r}\right)-in\frac{\partial}{\partial r}\mathscr{L}\frac{1}{r}\right]u_\varphi;$$
$$\left[\frac{n^2}{r}\mathscr{L}\frac{1}{r}+k^2\left(\mathscr{L}-\frac{1}{r^2}\right)\right]u_\varphi=\left\{\frac{2k^2}{\nu r}\left[\frac{r}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{in\nu}{r}\right]+\frac{in}{r}\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\Bigg\}u_r;$$
$$\mathscr{L}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}-k^2+\frac{i\omega}{\nu}-\frac{inU}{\nu r} \qquad (17.2)$$

с краевыми условиями $u_r=\dfrac{\partial u_r}{\partial r}=u_\varphi=0$ при $r=R_1$, R_2. Эти уравнения не имеют сингулярностей, так что, очевидно, при фиксированных параметрах (включая k и n) всегда существует дискретный спектр собственных значений ω_j, и соответствующий набор собственных функций обладает полнотой. Долгое время предполагалось, что с ростом Re терять устойчивость первыми должны осесимметричные возмущения (с $n=0$). Для них установлено (хотя достаточно полно пока еще не доказано), что первой бифуркацией является *смена устойчивости* — переход от течения (17.1) к новому *стационарному* течению вида $u(r)\exp(ik_{cr}z)$, тороидальным роликовым *вихрям Тейлора* (впервые рассчитанным Дж. Тейлором, 1923, при малом d/R_0, где $d=R_2-R_1$ и $R_0=\dfrac{1}{2}(R_1+R_2)$. По ним и строились области неустойчивости типа рис. 17.1 (показывающие, что здесь вязкость играет стабилизирующую роль, но при $\Omega_2/\Omega_1<(R_1/R_2)^2$ и достаточно больших Re неустойчивость все же развивается). Долго считалось, что они отлично согласуются с экспериментальными данными (см. точки на границе заштрихованной области на рис. 17.1).

Однако позже оказалось, что при не слишком малых *отрицательных* Ω_2/Ω_1 возмущения с $n\neq0$ теряют устойчивость немного раньше, чем осесимметричные. Так, по расчетам Е. Крюгера, А. Гросса и Р. Ди Прима (1966) при $d/R_1={}^1/_{20}$, на лучах $\Omega_2/\Omega_1=$ $=-0{,}7$; $-0{,}8$; $-0{,}9$; $-1{,}0$ и $-1{,}25$ с ростом Re первыми теряют устойчивость возмущения с $n=0$, 1, 3, 4 и 5. Это подтверждается экспериментальными данными, в частности, Г. Снайдера (1968).

И теоретические расчеты (Дж. Стюарта, 1958; А. Дейви, 1962; А. Дейви, Р. Ди Прима и Дж. Стюарта, 1968), и экспериментальные данные (Р. Доннели и К. Шварца, 1963, 1965; Г. Снайдера и Р. Ламберта, 1966) показывают, что при $\mathrm{Re}=\nu^{-1}\Omega_1R_1d>\mathrm{Re}_{1cr}$ нарастание интенсивности осесимметричных вихрей Тейлора отлично описывается уравнением Ландау (13.2).

Специально поставленные для проверки сценариев эксперименты Дж. Голлуба и Суинни (1975), П. Фенстермахера, Г. Суинни и Дж. Голлуба (1978), В. С. Львова и А. А. Предтеченского (1979, 1980) показали, что при Re_{2cr} вихри Тейлора теряют устойчивость, и на них появляются азимутальные изгибные волны. С ростом Re при последующих бифуркациях (по-видимому, нормальных хопфовских) возникают еще одна—три независимые частоты (и, кроме того, на спектре флюктуаций скорости $u_r(t)$ посередине зазора дискретные пики расширяются, а непрерывный фоновый спектр растет, что сценариями Ландау—Хопфа и Рюэлля—Текенса не предусматривается). После следующей бифуркации при $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_c$ остается только стохастическое движение с непрерывным спектром.

Количественные характеристики обнаруженных в этих экспериментах бифуркаций меняются, в частности, в зависимости от размеров цилиндров и от начальных данных. Так, в первом из них было $R_1=22{,}54$ мм, $R_2=25{,}40$ мм, $d=R_2-R_1=2{,}86$ мм, $d/R_1=0{,}14$, высота цилиндров $h=20d$, $\Omega_2=0$, $R_c=2501$. Вихри Тейлора появились при $R^*=\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_c=0{,}051$ (в количестве $kh/2\pi=17$); при $R^*=0{,}064$ на них появились изгибные волны (четыре на окружность, с безразмерной частотой $f_1^*=2\pi f_1/\Omega_1=1{,}30$, причем в спектре $u_r(t)$ были видны шесть ее гармоник); при $R^*=0{,}54$ появилась вторая (малая) частота f_2; с ростом R^* она убывала до нуля при $R^*=0{,}78$, где появилась третья частота $f_3^*\approx(2/3)f_1^*$; при $R^*\sim 1$ обратимо и безгистерезисно происходила стохастизация.

В экспериментах Львова и Предтеченского было $R_1=17{,}5$ мм, $R_2=27{,}5$ мм, $d=10$ мм, $d/R_1=0{,}57$, $h=30d$, $\Omega_2=0$. Вихри Тейлора появились при $\mathrm{Re}\approx 74$ (в количествах 22—36, при медленном разгоне 28—30). При 30 вихрях изгибные волны появились в интервале $\mathrm{Re}=995\ldots 1015$ (шесть на окружность, $f_1=1{,}93\Omega_1$, две гармоники); затем при $\mathrm{Re}=1040$ в спектре $u_\varphi(t)$ появилась и альтернировала с первой вторая частота $f_2=0{,}55\Omega_1$, а также комбинационные гармоники; затем появилась третья частота $f_3=0{,}95\Omega_1$; при $\mathrm{Re}=1901$ отчетливых максимумов в спектре уже не было (но отдельные острые пики появлялись и исчезали и при дальнейшем росте Re). Течение с 28 вихрями вело себя совершенно иначе (в частности, при $\mathrm{Re}=1100$—1200 оно переходило в состояние с 29 вихрями).

В целом эволюция вихрей Тейлора хотя и походила в общих чертах на сценарий Рюэлля и Текенса, но в деталях оказалась заметно более сложной.

Рассмотрим теперь термическую конвекцию в горизонтальном слое $0\leqslant z\leqslant h$, описываемую уравнениями Буссинеска:

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0;\quad \frac{d\mathbf{u}}{dt}=-\frac{\nabla p'}{\rho_0}-\mathbf{g}\alpha T'+\nu\Delta u',\quad \frac{dT'}{dt}=\chi\Delta T', \qquad (17.3)$$

(где α — коэффициент термического расширения) с фиксированными краевыми значениями температуры $T'_{z=0}=T_0$ и $T'_{z=h}=T_1$. Стационарное решение этих уравнений имеет вид $\mathbf{u}=0$, $T'\equiv\equiv T'_s=T_0-(T_0-T_1)z/h$. Введя числа Рэлея $\mathrm{Ra}=g\alpha(T_0-T_1)h^3/\nu\chi$ и Прандтля $\sigma=\nu/\chi$, масштаб длины h, масштаб времени h^2/χ и полагая $T'-T'_s=(T_0-T_1)\vartheta/\mathrm{Ra}$, приведем (17.3) к безразмерному виду

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0;\quad \frac{d\mathbf{u}}{dt}=-\nabla\Pi+\sigma\vartheta\nabla r+\delta\Delta u;\quad \frac{d\vartheta}{dt}=w\,\mathrm{Ra}+\Delta\vartheta, \qquad (17.4)$$

где Π — безразмерное отклонение давления от его стационарного гидростатического распределения. Линеаризируя эти уравнения (что сводится к замене d/dt на $\partial/\partial t$) и отыскивая неизвестные функции в виде $f(z)\varphi(x,\ y)\exp(-i\sigma\omega t)$, где $\Delta\varphi+k^2\varphi=0$, для комплексной амплитуды $\vartheta(z)$ получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2+i\omega\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2+i\sigma\omega\right)\vartheta+k^2\,\mathrm{Ra}\,\vartheta=0 \qquad (17.5)$$

с краевыми условиями $\vartheta=\vartheta''=\vartheta'''-(k^2-i\sigma\omega)\vartheta'=0$ на одной и $\vartheta=\vartheta''=\vartheta^{\mathrm{IV}}=0$ на другой стенке. Первой бифуркацией здесь оказывается *смена устойчивости* (А. Пеллью, Р. Саусвелл, 1940; Рэлей, 1916, установил это для слоя с двумя свободными поверхностями, где получилось $\mathrm{Ra}_{1\mathrm{cr}}=27\pi^4/4\approx 657{,}5$ и $k_{\mathrm{cr}}=\pi/\sqrt{2}\approx 2{,}2$; позже для слоя с жесткими поверхностями получены значения $\mathrm{Ra}_{1\mathrm{cr}}\approx 1708$ и $k_{\mathrm{cr}}\approx 3{,}12$, а при жесткой нижней и свободной верхней поверхности $\mathrm{Ra}_{1\mathrm{cr}}\approx 1100$) — возникновение периодического по x, y *стационарного движения*. Его форма $\varphi(x,\ y)$ (конвективные ролики, квадратные или шестиугольные ячейки и т. п.) из линейной теории не определяется.

А. Шлютер, Д. Лорц и Ф. Буссе (1965) установили, что при очень небольших $\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{1\mathrm{cr}}>0$ из стационарных конвективных движений линейно устойчивы (в узкой полосе плоскости k, Ra) только ролики. Е. Пальм (1960) и последующие авторы получили более общие результаты, установив, что формирование шестиугольных конвективных *ячеек А. Бенара* (1900) определяется температурной зависимостью материальных свойств жидкости, прежде всего вязкости: $\nu'=|\partial\nu/\partial T|$. Для возмущения вида

$$w=\left[A_1(t)\cos ky+A_2(t)\cos\left(kx\sqrt{3}/2\right)\cos(ky/2)\right]\sin lz \qquad (17.6)$$

Пальм вывел систему уравнений типа Ландау:

$$\dot A_1=\gamma A_1-\frac{\nu'}{4}A_2^2-\delta_1A_1^3-(2\delta_2-\delta_1/2)A_1A_2^2;$$

$$\dot A_2=\gamma A_2-\nu'A_1A_2-\delta_2A_2^3-(4\delta_2-\delta_1)A_1^2A_2, \qquad (17.7)$$

имеющую стационарные решения $A_2=\pm 2A_1$, соответствующие шестиугольным ячейкам. Установлено, что при $\mathrm{Ra}_{1\mathrm{cr}}<\mathrm{Ra}_1<\mathrm{Ra}<\mathrm{Ra}_2$ устойчивы только шестиугольники, при $\mathrm{Ra}_2<\mathrm{Ra}<\mathrm{Ra}_3$ —

и шестиугольники, и ролики, а при $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_3$ — только ролики. При $\nu' \to 0$ и Ra_1, и Ra_2, и Ra_3 стремятся к Ra_{1cr}, так что восстанавливается результат Шлютера, Лорца и Буссе.

Рассмотрим конвективные ролики, вытянутые вдоль оси y, так что для них уравнения (17.4) оказываются двумерными и после введения в плоскости (x, z) функции тока ψ приводятся к виду

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, z)} = \sigma \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \sigma \Delta^2 \psi;$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, z)} = \mathrm{Ra} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta\vartheta. \qquad (17.8)$$

С ростом $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{1cr}$ движение в роликах перестает быть стационарным и нарастает со временем. Вначале его можно описать следующими тремя модами:

$$\psi = \pi^{-1} (R_0/k)^{1/3} X \sqrt{2} \sin kx \sin \pi z;$$

$$\vartheta = R_0 (Y \sqrt{2} \cos kx \sin \pi z - Z \sin 2\pi z), \qquad (17.9)$$

где $R_0 = k^{-2}(\pi^2 + k^2)^3$. Ф. Буссе (1972) доказал, что у инфинитезимальных возмущений амплитуды других мод суть малые более высокого порядка. Учитывая это, подставляя (17.9) в (17.8) и пренебрегая взаимодействиями со всеми другими модами, получаем для X, Y, Z систему уравнений:

$$\dot{X} = -\sigma X - \sigma Y; \quad \dot{Y} = -Y + rX - XZ; \quad \dot{Z} = -bZ + XY, \qquad (17.10)$$

где точка обозначает производную по $(k^2 R_0)^{1/3} t$; $b = 4\pi^2 (k^2 R_0)^{-1/3}$ геометрический фактор (при рэлеевском $k = \pi/\sqrt{2}$ равный $^8/_3$); $r = R_0^{-1}\mathrm{Ra}$ — относительное число Рэлея. Эта система, впервые полученная Э. Лоренцом (1963), прославилась, как первый пример системы со странным аттрактором (бесконечнолистный аттрактор канторовской структуры был заподозрен еще самим Лоренцом, но строгого математического доказательства этому еще не получено).

Подчеркнем, что уравнения Лоренца (к которым мы еще вернемся) описывают реальную конвекцию лишь при небольших r. В экспериментах Дж. Уиллиса и Дж. Дирдорфа (1970) было установлено, что при $\mathrm{Ra}_{2cr} \approx 3\mathrm{Ra}_{1cr}$ на конвективных роликах, как и выше на тороидальных роликах Тейлора, возникают поперечные волны. Их расчет в рамках линейной теории выполнил Ф. Буссе (1972), а по нелинейной теории — Дж. Мак Лафлин и П. Мартин (1975), рассчитавшие, во-первых, восьмимодовое движение с роликами (17.9) и одной гармоникой вдоль оси y и построившие для него разложение Ландау (13.2) (для которого получилось $\delta > 0$, что соответствует нормальной бифуркации). Во-вторых, они численно рассчитали 39-модовое движение с роликами (17.9) и четырьмя гармониками вдоль оси y и при $k_1/\pi = 0{,}072$;

$k_2/\pi=0{,}1$; $\sigma=1$ получили $r_{2\text{кр}}\approx 1{,}25$, при $r=1{,}4$ — периодический, $r=1{,}45$ — слегка непериодический, $r=1{,}5$ и $1{,}55$ — опять периодический, $r=1{,}6$ — резко непериодический режим (а при исключении четвертой гармоники — при $r=1{,}6$; 2 и даже 20 — периодические режимы).

Рассмотрим теперь уравнения Лоренца (17.10). Дивергенция фазового потока (15.2) у них отрицательна: $\Lambda=-(\sigma+b+1)$, так что все траектории стремятся в некоторое множество нулевого объема. Величина

$$W=\left[X^2+Y^2+(Z-r-\sigma)^2\right]^{1/2}$$

удовлетворяет условию $W\leqslant -C_1W+C_2$ с положительными C_1 и C_2, так что все траектории входят в шар $W\leqslant 2C_2/C_1$. Система не меняется при замене $(X, Y, Z)\to(-X, -Y, Z)$. При $r<1$ единственной неподвижной точкой является устойчивый узел O в начале координат. При $r\geqslant 1$ (начало конвекции) он теряет устойчивость (становится седлом с двумерным устойчивым многообразием и двумя неустойчивыми одномерными — сепаратрисами Γ^+, Γ^-), и появляются еще две неподвижные точки

$$C^+,\quad C^-=(\pm\sqrt{b(r-1)},\quad \pm\sqrt{b(r-1)},\quad r-1),$$

к которым стремятся сепаратрисы. При $\sigma<b+1$ они устойчивы, при $\sigma>b+1$ (далее, следуя Лоренцу, будем рассматривать случай $\sigma=10$, $b=8/3$) устойчивы при $1<r<r_3=\sigma(\sigma+b+3)(\sigma-b-1)^{-1}\approx 24{,}74$, а при $r>r_3$ теряют устойчивость. По линейной теории при $r=r_3$ здесь возможны нейтральные возмущения с частотой $\omega=[2b\sigma(\sigma+1)(\sigma-b-1)^{-1}]^{1/2}$, скажем, $\delta X=A\cos\omega t$. При r немного меньше r_3 к δX прибавляется малая нелинейная поправка порядка $|A|^2$, для которой Дж. Мак Лафлин и П. Мартин (1975) построили с точностью порядка σ^{-1} уравнение Ландау (13.2) и получили $\gamma=(b/2\sigma^{1/2})(\sqrt{r-1}-\sqrt{r_3-1})$ и $\delta=-{}^{37}/_{72}\sigma$, так что бифуркация при $r=r_3$ оказалась обратной.

Далее изложим результаты В. С. Афраймовича, В. В. Быкова и Л. П. Шильникова, 1977 (рис. 17.2). При $r=r_1\approx 13{,}92$ они обнаружили бифуркацию, при которой сепаратрисы возвращаются в седло. При $r>r_1$ из петель сепаратрис рождаются седловые периодические движения L^+, L^- вокруг фокусов C^+, C^- (и одновременно появляется не являющееся аттрактором инвариантное множество линий Ω_1 канторовской структуры, включающее счетное множество седловых периодических движений); сепаратрисы Γ^+, Γ^- пересекаются и стремятся к фокусам C^-, C^+. При $r=r_2\approx\approx 24{,}06$ сепаратрисы Γ^+, Γ^- вместо фокусов наматываются на циклы L^-, L^+, а вместо Ω_1 появляется бесконечнолистный аттрактор Лоренца Ω_2, область притяжения которого ограничивают устойчивые многообразия циклов L^-, L^+ (так что возбуждение стохастичности является жестким). При $r>r_2$ он устойчив, включает O, Γ^+, Γ^- и потому не является структурно устойчивым,

и на нем всюду плотны периодические движения (способные испытывать последовательности бифуркаций удвоения периода и могущие исчезать с ростом r лишь путем влипания в петли сепаратрис). При $r=r_3$ циклы L^+. L^- стягиваются в точки C^+, C^-, и последние теряют устойчивость. При $r_3<r<r_4\approx 220$ единственным устойчивым предельным множеством является аттрактор Лоренца (отметим, что при уменьшении r от r_4 до r_2 фазовая

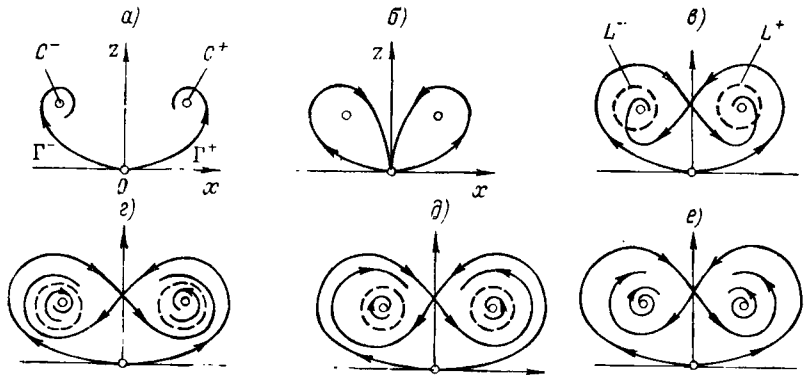


Рис. 17.2. Бифуркации в системе Лоренца.

а) $1<r<r_1$; *б)* $r=r_1$; *в)* $r_1<r<r_2$; *г)* $r=r_2$; *д)* $r_2<r<r_3$; *е)* $r=r_3$.

точка $M(t)$ остается в аттракторе, а при $r<r_2$ он теряет устойчивость, и $M(t)$ стремится к C^+ или C^-).

Пример траектории на аттракторе (при $r=28$ пересекающей плоскость $Z=27$) см. на рис. 17.3. Она выходит из начала координат, обходит C^+, затем раскручивается и притягивается к C^-, уходит от C^- по спирали к C^+ и т. д., причем период обращения вокруг C^+ или C^- равен 0,62, а радиусы спиралей меняются за оборот на 6 %. Указанное еще самим Лоренцом для этого примера отображение Пуанкаре $Z_{n+1}=\Pi(Z_n)$ последовательных максимумов Z имеет треугольную форму, причем всюду $|\Pi'(Z)|>1$; оно эргодическое и перемешивающее (Л. А. Бунимович, Я. Г. Синай, 1980). Топологически аттрактор Лоренца получается из двух листов, расширяющихся поперек траекторий, причем правый край каждого из них приклеивается к левым краям обоих листов (рис. 17.4). Х. Мори и Х. Фуджисака (1980) рассчитали для аттрактора Лоренца, как функцию от r, показатель Ляпунова σ_1 (второй σ_2 равен нулю, третий $\sigma_3=\Lambda-\sigma_1$ отрицателен, а ляпуновская размерность аттрактора равна $2+\sigma_1|\sigma_3|^{-1}$). При $r<1$ он отрицателен, при $r=1$ (появление конвективных роликов) обращается в ноль, при $1<r<r_3$ опять отрицателен и при $r=r_3$ достигает нуля, но при $r=r_2$ выше нуля возникает и при $r>r_2$ возрастает новая ветвь σ_1, при очень больших r многократно прерываемая «лакунами» нулевых значений, соответствующих перио-

дическим движениям (см. на рис. 17.5 пример при $b=4$, $\sigma=16$; здесь при $r=40$ получается ляпуновская размерность 2,06).

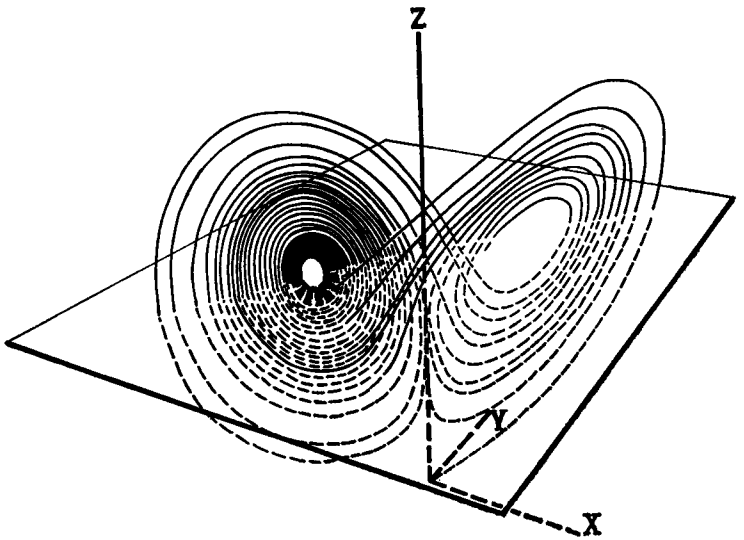


Рис. 17.3. Пример траектории на аттракторе Лоренца при $r=28$ (плоскость X, Y соответствует $Z=27$).

В последние годы экспериментальные условия изучения конвекции резко улучшились вследствие использования классического жидкого гелия с малой теплоемкостью стенок по сравнению с жидкостью и с температурной чувствительностью 10^{-7} (группы Дж. Алерса и А. Либчабера), лазерного доплеровского анемометра с точностью 10^{-4} см/с (группы Дж. Голлуба и П. Берже) и ЭВМ. Это дало возможность наблюдать (по спектрам) квазипериодические движения с 2—3 несоизмеримыми частотами, по-

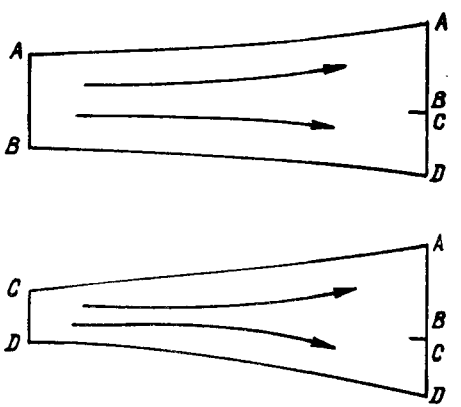


Рис. 17.4. Топология аттрактора Э. Лоренца.

следовательности бифуркаций удвоения периода с законом подобия (16.7) для амплитуд (см. на рис. 17.6 пример из работы Дж. Голлуба, С. Бенсона и Дж. Штейнмана, 1980), перемежаемость, абсолютную неустойчивость тонких слоев, краевые эффекты (ролики, перпендикулярные стенкам) и т. п.

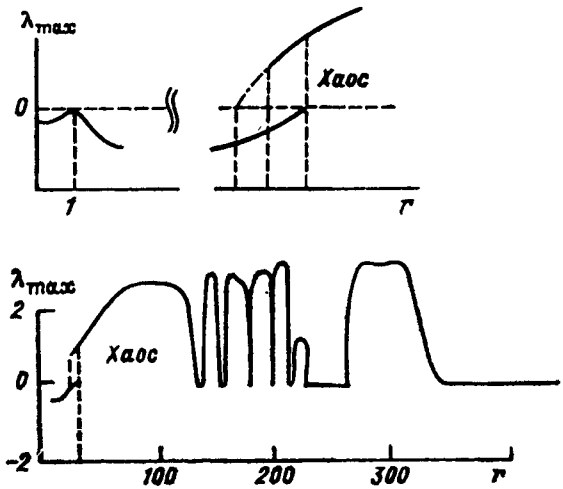


Рис. 17.5. График показателя Ляпунова $\sigma_1(r)$ при $b=4$, $\sigma=16$.

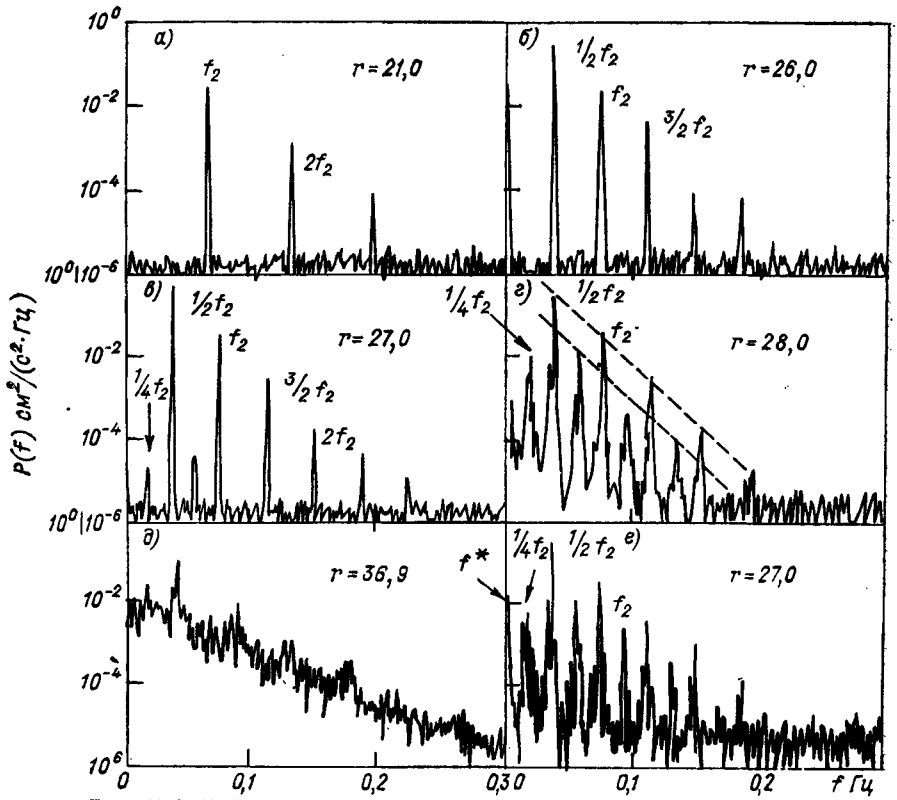


Рис. 17.6. Бифуркации удвоения периода в конвективных роликах.

ЧАСТЬ 2

ПРОЦЕССЫ

Поверхностные волны

Внутренние волны

Геофизическая турбулентность

Волны Россби—Блиновой

ГЛАВА 4

Поверхностные волны

§ 18. Линейная теория

Волны на поверхности водных бассейнов на Земле, гравитационные и капиллярные, можно описывать с высокой точностью, считая воду несжимаемой — ее плотность ρ постоянной и движение бездивергентным. Оставляя в стороне самые длинные волны, приливные и цунами, можно не учитывать вращение Земли и записывать уравнения гидродинамики для воды в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0;\quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{p}{\rho}+gz+\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right)=\mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{u}+\nu\Delta\mathbf{u}, \tag{18.1}$$

требуя на дне $z=-h(x, y)$ обращения скорости $\mathbf{u}$ в ноль, а на поверхности $z=\zeta(x, y, t)$ — выполнения кинематического краевого условия (5.9). Вообще говоря, эти уравнения следует рассматривать вместе с уравнениями гидродинамики воздуха над водой, требуя выполнения на поверхности $z=\zeta$ динамических краевых условий, прежде всего условия (5.11) для сил, которое в адиабатическом приближении принимает вид

$$\hat{p}-\hat{p}_a=\gamma\rho\operatorname{div}\left[(1+|\nabla\zeta|^2)^{-1/2}\nabla\zeta\right]. \tag{18.2}$$

Представим поле скорости в виде $\mathbf{u}=\nabla\varphi+\mathbf{v}$, где φ — потенциал скорости, а $\mathbf{v}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ — ее соленоидальная (завихренная) компонента ($\operatorname{rot}\mathbf{u}=-\Delta\mathbf{A}$). Тогда $\operatorname{div}\mathbf{u}=\Delta\varphi=0$, и $\Delta\mathbf{u}=\Delta\mathbf{v}$, т. е. сила вязкости определяется только завихренной компонентой. Обычно она играет роль лишь в тонких пограничных слоях у поверхности воды и у дна и может быть учтена в малых поправках к *потенциальному приближению* $\mathbf{u}\approx\nabla\varphi$. В этом приближении правая часть уравнения (18.1) обращается в ноль, и из него вытекает *уравнение Бернулли*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}=0.$$

Его достаточно использовать лишь на поверхности воды $z=\zeta$, исключив из него $\hat{p}$ с помощью (18.2). Таким образом, потенциальное приближение сводится к уравнениям:

$$\Delta\varphi=0;\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_\zeta+g\zeta+\frac{|\nabla\varphi|_\zeta^2}{2}-\gamma\operatorname{div}\left[(1+|\nabla\zeta|^2)^{-\frac{1}{2}}\nabla\zeta\right]=-\frac{p_a}{\rho};$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_\zeta-(\nabla\varphi)_\zeta\nabla\zeta. \tag{18.3}$$

Во второе и третье из этих уравнений входят три неизвестные функции от горизонтальных координат и времени ζ, $\Phi=(\varphi)_\zeta$ и $(\partial\varphi/\partial z)_\zeta$, причем третья из них может быть выражена через первые две после решения краевой задачи для уравнения $\Delta\varphi=0$. Полная (кинетическая+потенциальная, но без внутренней) энергия вертикального столба воды единичного сечения равна ρE, где

$$E=\frac{1}{2}\int_{-h}^{\zeta}|\nabla\varphi|^2\,dz+\frac{1}{2}g\zeta^2+\gamma\left[(1+|\nabla\zeta|^2)^{1/2}-1\right]. \qquad (18.4)$$

Осредненная по горизонтали полная энергия $\mathcal{H}=\overline{E}$ есть функционал от двух функций ζ и Φ (отметим, что вклад кинетической энергии в $\mathcal{H}$ можно привести к виду $\frac{1}{2}\overline{\Phi\,\partial\zeta/\partial t}$). Нетрудно убедиться, что $\mathcal{H}$ меняется со временем со скоростью $-\overline{\rho^{-1}p_a\,\partial\zeta/\partial t}$. Для *свободных* (т. е. при $p_a=\mathrm{const}$) волн $\mathcal{H}$ является гамильтонианом с каноническими переменными Φ (обобщенная координата) и ζ (обобщенный импульс), т. е.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta};\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Phi} \qquad (18.5)$$

(В. Е. Захаров, 1968).

Для свободных волн малой амплитуды, линеаризируя (18.3) относительно состояния покоя (и снося при этом условия при $z=\zeta$ на равновесный уровень $z=0$), получаем

$$\Delta\varphi=0;\quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0+g\zeta-\gamma\,\Delta\zeta=0;\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 \qquad (18.6)$$

с краевым условием на дне $(\partial\varphi/\partial z)_{z=-h}=0$. При плоском дне $h=\mathrm{const}$ эти уравнения имеют элементарные волновые решения:

$$\zeta=a\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t);\quad \varphi=\frac{a\omega\,\mathrm{ch}\,k(z+h)}{k\,\mathrm{sh}\,(kh)}\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t); \qquad (18.7)$$

$$\omega^2=(gk+\gamma k^3)\,\mathrm{th}\,(kh)=\frac{1}{2}k^2c_m^2\left(\frac{k}{k_m}+\frac{k_m}{k}\right)\mathrm{th}\,(kh). \qquad (18.8)$$

Фазовая скорость волн $c=\omega/k$ здесь зависит от k, т. е. волны обладают *дисперсией*, и, значит, волновые пакеты должны расплываться со временем. При больших kh (фактически уже при $kh>\pi/2$) можно полагать $\mathrm{th}\,(kh)\approx 1$, и зависимость φ и ω от h пропадает (волны на глубокой воде), Наоборот, при малых kh можно полагать $\mathrm{th}\,(kh)\approx kh$ (волны на мелкой воде; при $\gamma=0$ здесь получается $c=(gh)^{1/2}$, так что гравитационные волны на мелкой воде дисперсией не обладают). При $k\ll k_m=(g/\gamma)^{1/2}$ капиллярные эффекты пренебрежимо малы, так что остаются лишь гравитационные волны (на чистой поверхности воды $\lambda_m=2\pi/k_m\approx$

$\approx 1{,}7$ см; при этом $\min c = c_m = (4g\gamma)^{1/4} \approx 23{,}2$ см/с); у них групповая скорость $c_g = \partial\omega/\partial k$ по модулю меньше c (отрицательная дисперсия): на глубокой воде $c_g = c/2$, а при $kh \to 0$ получается $c_g \to c$. При $k \gg k_m$ гравитационные эффекты пренебрежимо малы, так что остаются лишь капиллярные волны; у них $c_g > c$ (положительная дисперсия): на глубокой воде $c_g = 3c/2$. При $k \sim k_m$ волны называются гравитационно-капиллярными. График $c/c_m = f(k/k_m)$ для глубокой воды см. на рис. 18.1.

По потенциалу скорости (18.7) легко рассчитывается средняя по объему плотность кинетической энергии линейных волн; ей равна и плотность потенциальной энергии (как и во всякой кон-

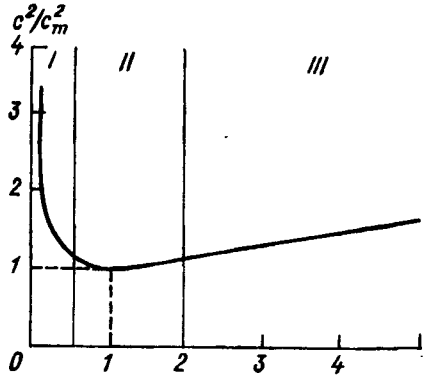


Рис. 18.1. Дисперсионное соотношение для волн на глубокой воде.
I — капиллярные волны, II — гравитационно-капиллярные, III — гравитационные.
По оси абсцисс k/k_m.

сервативной системе, совершающей малые колебания), и в результате полная плотность энергии получается равной

$$E = \frac{\rho a^2 \omega^2}{2k} \operatorname{cth}(kh). \qquad (18.9)$$

У чисто гравитационных волн это выражение приводится к виду

$$E = \frac{1}{2}\rho g a^2 = \rho g \langle \zeta^2 \rangle,$$

у чисто капиллярных волн

$$E = \frac{1}{2}\rho\gamma k^2 a^2 = \rho\gamma \langle |\nabla\zeta|^2 \rangle.$$

Рассчитаем еще из вертикальной проекции уравнений движения в приближении (18.7) среднее по горизонтали давление на уровне z:

$$\langle p \rangle = -\rho g z - \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2 \frac{\operatorname{sh}^2 k(z+h)}{\operatorname{sh}^2 (kh)}. \qquad (18.10)$$

Динамическое давление (второе слагаемое) на глубокой воде ($kh \gg 1$) оказывается равным $-\frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 e^{2kz}$, так что оно быстро затухает с глубиной.

Рассчитаем теперь траектории жидких частиц в волнах (18.7). Направим ось x по волновому вектору $\mathbf{k}$, обозначим $x' = x - x_0$, $z' = z - z_0$ координаты *смещения* жидкой частицы, находившейся в начальный момент времени в точке (x_0, z_0), и введем обозначения $\mu = k(z_0 + h)$ и $\chi = kx_0 - \omega t$. Тогда уравнения движения частицы $dx'/dt = \partial\varphi/\partial x$, $dz'/dt = \partial\varphi/\partial z$ с использованием (18.7) приведутся к виду:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{a\omega \operatorname{ch}(\mu + kz')}{\operatorname{sh}(kh)} \cos(\chi + kx') =$$

$$= \frac{a\omega}{\operatorname{sh}(kh)} (\operatorname{ch}\mu \cos\chi - kx' \operatorname{ch}\mu \sin\chi + kz' \operatorname{sh}\mu \cos\chi + \ldots);$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{a\omega \operatorname{sh}(\mu + kz')}{\operatorname{sh}(kh)} \sin(\chi + kx') =$$

$$= \frac{a\omega}{\operatorname{sh}(kh)} (\operatorname{sh}\mu \sin\chi + kx' \operatorname{sh}\mu \cos\chi + kz' \operatorname{ch}\mu \sin\chi + \ldots). \quad (18.11)$$

При сохранении в правых частях только первых слагаемых получаем $x' = -A \operatorname{ch}\mu \sin\chi$ и $z' = A \operatorname{sh}\mu \cos\chi$, где $A = a/\operatorname{sh}(kh)$, так что траектории частиц имеют форму эллипсов с полуосями $A \operatorname{ch}\mu$ и $A \operatorname{sh}\mu$ (на глубокой воде — кругов с радиусами ae^{kz_0}). Подставляя эти значения x' и z' в следующие слагаемые и осредняя по времени, с точностью $o(a^2)$ получаем

$$\langle u \rangle \approx \frac{a^2 k\omega \operatorname{ch}(2\mu)}{2 \operatorname{sh}^2(kh)}; \quad \langle w \rangle \approx 0. \quad (18.12)$$

Таким образом, частицы в среднем по времени испытывают дрейф (Дж. Стокс, 1847), так что их траектории оказываются незамкнутыми. Заметим, однако, что расчет скорости дрейфа частиц в волнах — это одна из немногих задач, в которых потенциальное приближение оказывается недостаточным, и нужно учитывать (в линейной теории — просто прибавлять) вклады завихренной компоненты скорости $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \nabla\varphi$, создаваемой молекулярной или, скорее, мелкомасштабной турбулентной вязкостью воды в пограничных слоях у поверхности воды и у дна. Эти вклады рассчитал М. Лонге-Хиггинс (1953).

Так, в пограничном слое около дна завихренность $\Omega_y = \partial v_x/\partial z - \partial v_z/\partial x \approx \partial v_x/\partial z$ удовлетворяет уравнению диффузии $\partial\Omega_y/\partial t = \nu\partial^2\Omega_y/\partial z^2$, решение которого при граничном условии на дне $v_x = -(\partial\varphi/\partial x)_{z=-h} = -a\omega \cos\chi/\operatorname{sh}(kh)$ (где φ взято по

формуле (18.7)) и условии затухания далеко от дна получается в виде

$$v_x = -\frac{a\omega e^{-\beta z'}\cos(\chi+\beta z')}{\operatorname{sh}(kh)};\quad \beta=(\omega/2\nu)^{1/2},. \tag{18.13}$$

где $z'=z+h$ — расстояние от дна. Величина v_z находится из уравнения неразрывности. Затем с точностью до $o(a^2)$ вычисляется напряжение Рейнольдса $\langle uw\rangle$. Однократное интегрирование по z уравнения Рейнольдса $\frac{\partial}{\partial z}\langle uw\rangle=\nu\frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial z^2}$ дает $\nu\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial z}=\langle uw\rangle-\langle uw\rangle_{z'=\infty}$, следующее интегрирование при условии $\langle u\rangle=0$ на дне дает $\langle u(z')\rangle$, и в результате вклад $\langle u(\infty)\rangle$ в дрейф частиц получается равным стоксову дрейфу (18.12), умноженному на $^3/_2$ (любопытно, что этот вклад оказывается не зависящим от значения ν, лишь бы оно не равнялось нулю).

Пограничный слой около свободной поверхности может быть тонким по сравнению с амплитудой волны, так что при его описании сносить краевые условия на равновесный уровень $z=0$ нецелесообразно, и лучше использовать систему отсчета, движущуюся с волной, с ортогональными криволинейными координатами $\xi=x-x'$, $\eta=z-z'$ (где x', z' — полученные из (18.11) выражения первого порядка при $\chi=kx$), в которых на свободной поверхности $\eta=0$, а на дне $\eta=-h$. Функция тока будет иметь вид $\Psi=-c\eta+\psi$, где c — скорость волны, а ψ — вихревой вклад. Завихренность $\Omega_y\approx\partial u/\partial\eta=-\partial^2\psi/\partial\eta^2$ будет приближенно удовлетворять уравнению диффузии $-c\,\partial\Omega_y/\partial\xi=\nu\partial^2\Omega_y/\partial\eta^2$.

Создаваемая вязкостью диссипация $\rho\dot{E}$ волновой энергии сопровождается уменьшением импульса волн $M=\rho E/c$ и, значит, при отсутствии ветра — вертикальным потоком импульса $S=\dot{M}=\rho\dot{E}/c$. При чистой поверхности воды его может компенсировать только среднее вязкое напряжение второго порядка $S=-\rho\nu\times\times\partial\langle u\rangle/\partial\eta$. При его определении в случае глубокой воды $\dot{E}$ достаточно точно рассчитывается по потенциальному движению (18.7), что дает $\dot{E}=-2\nu k\omega^2a^2$ (это приводит к убыванию амплитуды волны a по закону $\exp(-2\nu k^2t)$; заметим, однако, что в затухание не слишком коротких волн более существенный вклад вносит воздействие атмосферы). Отсюда $\partial\langle u\rangle/\partial\eta=-\dot{E}/c\nu=2\omega k^2a^2$, опять независимо от значения ν. В точности такое же выражение получается в случае глубокой воды из (18.2) при $z_0=0$, так что верхний пограничный слой удваивает стоксов дрейф. На мелкой воде, при наличии поверхностных пленок и действия ветра результаты оказываются более сложными.

§ 19. Лучевая теория

Рассмотрим волны на поверхности водного бассейна переменной глубины $h(\mathbf{x})$ при наличии на его поверхности также неоднородного и нестационарного течения со скоростью $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$. В таких условиях может происходить преломление волн (непараллельность их гребней, т. е. искривление волновых лучей), изменение их амплитуд вдоль лучей, блокировка (невозможность распространения за некоторые границы), образование точек поворота, а также огибающих (каустик) у пучков волновых лучей.

Ограничимся случаями, в которых масштабы пространственных неоднородностей h и $\mathbf{U}$ и изменений $\mathbf{U}$ со временем велики по сравнению соответственно с длиной и периодом волны. Тогда ее можно считать локально плоской и записывать в виде $\zeta(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t) \exp[i\psi(\mathbf{x}, t)]$, где амплитуда a есть медленно меняющаяся, а *эйконал* (фаза) ψ — приблизительно линейная функция от $\mathbf{x}$ и t (и аналогично записываются потенциал скорости и другие характеристики волны). В таких случаях пригодно приближение *лучевой теории*: в каждой точке $(\mathbf{x}, t)$ можно определить волновой вектор $\mathbf{k}$ и частоту волны σ формулами

$$\mathbf{k} = \nabla\psi; \quad \sigma = -\partial\psi/\partial t, \tag{19.1}$$

откуда видно, что поле волновых векторов $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ потенциально и что справедливо следующее *уравнение сохранения числа волн*:

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \nabla\sigma = 0 \tag{19.2}$$

(у одной волны $\psi = \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{c}t)$, где $\mathbf{c}$ — фазовая скорость, направленная по вектору $\mathbf{k}$, так что с точностью до множителя $\pi/2$ число волн на единицу длины равно $|\mathbf{k}|$; величина $\sigma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{c}$ при этом пропорциональна потоку числа волн). Частота σ складывается из величины ω, определяемой дисперсионным соотношением (18.8) при $h = h(\mathbf{x})$ и, возможно, также при $\gamma = \gamma(\mathbf{x}, t)$, и доплеровского сдвига $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$:

$$\sigma = \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}, t). \tag{19.3}$$

Считая, что здесь $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$, подставив (19.3) в (19.2) и введя групповую скорость волны при отсутствии течения $\mathbf{c}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + (c_{g\alpha} + U_\alpha) \cdot \nabla k_\alpha = -\mathbf{F}; \quad \mathbf{F} = \nabla\omega + k_\alpha \nabla U_\alpha. \tag{19.4}$$

Лучевая теория вполне аналогична гамильтоновой механике материальной частицы: эйконал ψ аналогичен *действию* S, волновой вектор $\mathbf{k}$ — *импульсу* $\mathbf{p}$, частота σ — *гамильтониану* $\mathcal{H}$, лучи —

траекториям частицы. Поэтому уравнения для лучей суть аналоги уравнений Гамильтона, т. е. они имеют вид

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \left(= -\mathbf{F}\right); \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{k}} \left(= \mathbf{c}_g + \mathbf{U}\right) \tag{19.5}$$

(первое из этих уравнений совпадает с (19.4) вследствие условия $\operatorname{rot} \mathbf{k} = 0$). При помощи этих уравнений для изменений частоты σ вдоль лучей получаем

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \left(= \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right) \tag{19.6}$$

(где равенство в скобках справедливо, если зависимость коэффициента поверхностного натяжения γ от t несущественна, в частности для чисто гравитационных волн). Уравнения (19.5)—(19.6) называются кинематическими законами сохранения волн. Кроме того, имеют место, конечно, динамические законы сохранения массы, импульса и энергии. Так, учитывая, что наличие течений и волн может изменять средний уровень воды $\langle \zeta \rangle = d$, закон сохранения массы можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho (d + h) + \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{M}} = 0; \quad \widetilde{\mathbf{M}} \equiv \rho \widetilde{\mathbf{U}} (d + h) = \rho \mathbf{U} (d + h) + \mathbf{M}, \tag{19.7}$$

где $\mathbf{M}$ — суммарный по глубине и средний по площади поток массы, создаваемый пульсационными (волновыми) движениями. Закон сохранения импульса аналогично приводится к виду

$$\frac{\partial \widetilde{M}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\widetilde{U}_\alpha \widetilde{M}_\beta + S_{\alpha\beta}\right) = T_\alpha \left(= -\rho g (d + h) \frac{\partial d}{\partial x_\alpha}\right), \tag{19.8}$$

где $S_{\alpha\beta}$ — избыточный поток импульса, создаваемый пульсационными движениями. Если из них учитывать только волны, то $S_{\alpha\beta}$ называется тензором *радиационных напряжений*; с квадратичной относительно крутизны волн ka точностью этот тензор определяется формулой

$$S_{\alpha\beta} = \rho \int_{-h}^{d} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \right\rangle dz + \left[\int_{-h}^{d} \langle p \rangle dz - \frac{1}{2} \rho g (d + h)^2 \right] \delta_{\alpha\beta}. \tag{19.9}$$

Вычислив это выражение при помощи формул (18.7) для φ и (18.10) для $\langle p \rangle$ и используя формулу (18.9) для E и определение $\mathbf{c}_g$, в случае чисто гравитационных волн тензор (19.9) можно привести к виду

$$S_{\alpha\beta} = E \frac{c_g}{c} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + E \left(\frac{c_g}{c} - \frac{1}{2}\right) \delta_{\alpha\beta}. \tag{19.10}$$

Если направить ось x по вектору $\mathbf{k}$, то этот тензор будет диагональным, а на глубокой воде не равной нулю будет только одна

его компонента $S_{11}=E/2$. Капиллярные эффекты, во-первых, добавляют поверхностное напряжение $\rho\gamma\cos|\nabla\zeta|$ и поэтому избыточный поток импульса

$$\rho\gamma\langle 1-\cos|\nabla\zeta|\rangle\approx\frac{1}{2}\rho\gamma\langle|\nabla\zeta|^2\rangle;$$

во-вторых, уменьшают подповерхностное давление на

$$\rho\gamma\,\mathrm{div}\left[(1+|\nabla\zeta|^2)^{-1/2}\nabla\zeta\right];$$

в сумме получается

$$S_{11}=E\left[\frac{2k(d+h)}{\mathrm{sh}\,2k(d+h)}+\frac{1+3\alpha}{2(1+\alpha)}\right];\quad S_{22}=E\,\frac{k(d+h)}{\mathrm{sh}\,2k(d+h)};$$

$$\alpha=\frac{\gamma k^2}{g} \tag{19.11}$$

(М. Лонге-Хиггинс, Р. Стюарт, 1964). Для чисто капиллярных волн на глубокой воде ($kh\to\infty$, $\alpha\to\infty$) получается $S_{11}\to 3E/2$. Наконец, уравнение для энергии волн E при $[a/(d+h)]^2\ll 1$ и в пренебрежении диссипацией энергии приводится к виду

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\mathrm{div}\,E(\mathbf{c}_g+\mathbf{U})+S_{\alpha\beta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}=0 \tag{19.12}$$

(М. Лонге-Хиггинс, Р. Стюарт, 1960—1961).

В качестве примера рассмотрим стационарные гравитационные волны в прибрежной зоне с пологим дном, направив ось x_1 перпендикулярно берегу, а x_2 — вдоль него. Из (19.7) получится $\widetilde{M}_1=\mathrm{const}=0$, так что возникает среднее возвратное течение со скоростью $U_1=-M_1/\rho(d+h)$, компенсирующее перенос массы волнами; вне зоны обрушивания волн оно будет второго порядка малости по ka, так что в других законах сохранения им можно пренебрегать. Из (19.2) получаем $\sigma=\omega=\mathrm{const}=\omega_\infty$. Из условия $\mathrm{rot}\,\mathbf{k}=0$ следует, что $\frac{\partial k_2}{\partial x_1}=\frac{\partial k_1}{\partial x_2}=0$, так что

$$k_2=k\sin\varphi=\mathrm{const}=k_\infty\sin\varphi_\infty, \tag{19.13}$$

где φ — угол между гребнями волн и берегом. Из (19.12) вне зоны обрушивания волн получаем

$$Ec_g\cos\varphi=\mathrm{const}=E_\infty c_{g\infty}\cos\varphi_\infty. \tag{19.14}$$

Из (19.13), (19.14) и (18.8), (18.9) можно найти k, φ и E, как функции от безразмерной глубины $k_\infty h$. Результаты такого расчета см. на рис. 19.1. Далее, из (19.8) и (19.10) получается

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1}=-\rho g(d+h)\frac{\partial d}{\partial x_1}\approx-\rho g h\frac{\partial d}{\partial x_1};$$

$$S_{11}=E\left(2\frac{c_g}{c}-\frac{1}{2}\right), \tag{19.15}$$

откуда следует, что при уменьшении глубины средний уровень воды *понижается* (М. Лонге-Хиггинс, Р. Стюарт, 1962). Впрочем, при возрастании $a/(d+h)$ (по эмпирическим данным — до значения около 0,4) волны обрушиваются, и далее к берегу d возрастает (в реальности этот эффект обычно налагается на ветровые нагоны).

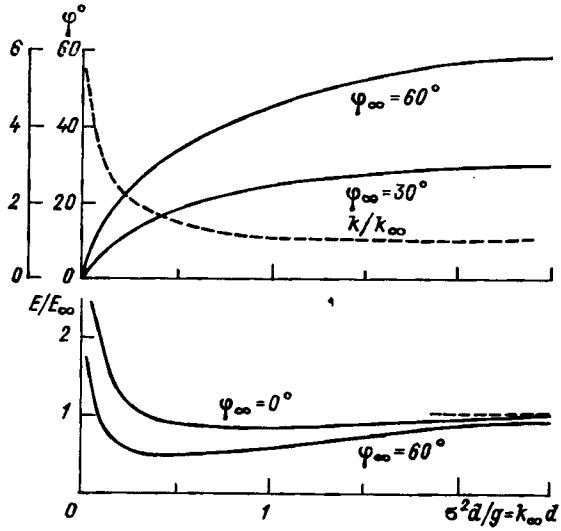


Рис. 19.1. Изменения характеристик волн в прибрежной зоне моря.

Другим примером будет движение стационарных гравитационных волн на глубокой воде по направлению x на переменном течении $U(x)$. Из (19.2) здесь получается $\sigma=\omega+kU=\text{const}=\omega_0=(gk_0)^{1/2}$, где ноликом отмечаются значения в точке, в которой $U=0$. Отсюда получаем

$$\frac{k_0}{k}\equiv\frac{c^2}{c_0^2}=\frac{c}{c_0}+\frac{U}{c_0};\quad \frac{c}{c_0}=\frac{1}{2}\left[1+\left(1+\frac{4U}{c_0}\right)^{1/2}\right]. \qquad (19.16)$$

При $U<-c_0/4$ решение теряет смысл. В критической точке $c=c_0/2$ и $U/c=-1/2$, скорость течения отличается лишь знаком от локальной групповой скорости волн, и их энергия не может распространяться против течения. Уравнение энергии (19.12) при $S=E/2$ и результат его интегрирования (после умножения на c и использования для c уравнения (19.16)) записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}E\left(\frac{c}{2}+U\right)+\frac{1}{2}E\frac{\partial U}{\partial x}=0;\quad E\left(\frac{c}{2}+U\right)c=$$

$$=\text{const}=\frac{1}{2}E_0c_0^2. \qquad (19.17)$$

Если волны не обрушиваются, то их амплитуды нарастают вверх по течению по закону $a = a_0 c_0 [c(c+2U)]^{-1/2}$ (М. Лонге-Хиггинс, Р. Стюарт, 1961). На самом деле короткие волны (с частотами $\omega > g/4U_m$) обрушиваются и через максимум U_m противоположного течения не проходят, а более длинные проходят, но ослабляются и превращаются в умеренную зыбь.

§ 20. Установившиеся волны

Установившимися называются волны, распространяющиеся без изменения их формы. Для выяснения ряда их общих свойств оказывается удобным использовать их лагранжево описание. При установившихся волнах в несжимаемой идеальной тяжелой жидкости со свободной поверхностью, распространяющихся в плоскости x, z вдоль горизонтальной оси x с постоянной скоростью c (подлежащей определению из уравнений гидродинамики), координаты жидких частиц, находившихся в отсутствие волн в точках x_0, z_0, и давление p в этих частицах определяются формулами $w = x' + iz = w(x'_0\ z_0)$; $p = p(x'_0\ z_0)$, где $x' = x - ct$, $x'_0 = x_0 - ct$, а t — время. Далее в качестве горизонтальных координат будем использовать только x' и x'_0 и штрихи будем опускать. Функции w и p удовлетворяют лагранжевым уравнениям неразрывности и движения:

$$\frac{\partial(w,\ w^*)}{\partial(x_0,\ z_0)} = -2iM; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} = \frac{i}{M}\frac{\partial(\Pi,\ w)}{\partial(x_0,\ z_0)}, \tag{20.1}$$

где звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину, $c^2\Pi = p/\rho + gz$, а $M = \partial(x,\ z)/\partial(x_0,\ z_0)$ — произвольная вещественная функция от z_0. Функция w должна в отсутствие волн вырождаться в $x_0 + iz_0$ и должна удовлетворять краевому условию $\partial z/\partial x_0 = 0$ при $z_0 = -h$ (обращение в ноль вертикальной скорости на дне); при $h \to \infty$ (глубокая вода) справедливо более сильное условие $\partial w/\partial x_0 \to 1$. Кроме того, на искривленной свободной поверхности, за которую примем линию $z_0 = 0$, создаваемый поверхностным натяжением скачок давления $p - p_a$ (где атмосферное давление p_a далее считается постоянным, что соответствует свободным волнам) пропорционален кривизне поверхности:

$$p - p_a = \gamma\rho \left|\frac{\partial w}{\partial x_0}\right|^{-3} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial w}{\partial x_0}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_0^2}\right) \text{ при } z_0 = 0. \tag{20.2}$$

Отметим, что вихрь скорости в установившихся волнах определяется формулой

$$\Omega = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{c}{M}\frac{\partial(\partial w^*/\partial x_0,\ w)}{\partial(x_0,\ z_0)}, \tag{20.3}$$

где u_x, u_z — эйлеровы компоненты скорости движения. Тогда справедливы следующие шесть теорем (А. С. Монин, 1972).

Теорема 1. Как в случае потенциальных, так и вихревых волн уравнения (20.1) имеют первый интеграл

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial w}{\partial x_0}\right|^2+\Pi=\frac{1}{2}+\frac{p_a}{\rho c^2}+f(z_0), \tag{20.4}$$

аналогичный интегралу Бернулли, где $f(z_0)$ — произвольная функция (удовлетворяющая условию $f(0)=0$; постоянное слагаемое в правой части здесь выбрано так, чтобы в отсутствие волн удовлетворялось условие (20.2)).

Для доказательства достаточно умножить второе уравнение (20.1) на $\partial w^*/\partial x_0$, сложить результат с комплексно-сопряженным выражением и затем проинтегрировать по x_0.

Теорема 2. Поле движения в установившихся волнах, т. е. функция w, определяется из уравнения

$$\frac{\partial(w,\ \partial w^*/\partial x_0)}{\partial(x_0,\ z_0)}=f'(z_0) \tag{20.5}$$

при краевом условии на свободной поверхности

$$\frac{c^2}{2}\left|\frac{\partial w}{\partial x_0}\right|^2+gz+\gamma\left|\frac{\partial w}{\partial x_0}\right|^{-3}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial w}{\partial x_0}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_0^2}\right)=\frac{c^2}{2}\quad\text{при}\quad z_0=0, \tag{20.6}$$

краевом условии на дне и условии вырождения в отсутствие волн. После определения w давление p находится из (20.4).

Уравнение (20.5) получается исключением $\partial\Pi/\partial z_0$ при помощи (20.4) из выражения для

$$\frac{\partial w^*}{\partial z_0}\frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2}+\frac{\partial w}{\partial z_0}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_0^2},$$

находимого с помощью второго уравнения (20.1). Вследствие вещественности $f'(z_0)$ из (20.5) вытекает первое уравнение (20.1) в форме

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial(w,\ w^*)}{\partial(x_0,\ z_0)}=0.$$

Условие (20.6) получается исключением p из (20.2) при помощи (20.4).

Теорема 3. Единственным видом установившихся волн, в которых давление p зависит только от вертикальной лагранжевой координаты z_0, являются трохоидальные волны Ф. Герстнера (1804), т. е. гравитационные волны на глубокой воде ($\gamma=0$, $h=\infty$), описываемые формулами

$$w=x_0+i\left(z_0-\frac{1}{2}ka^2\right)+iae^{kz_0+ikx_0};\quad c^2=g/k, \tag{20.7}$$

где a и $k=-\dfrac{1}{\rho c^2 M}\dfrac{\partial p}{\partial z_0}$ — произвольные постоянные.

Для доказательства достаточно подставить $\Pi=p(z_0)/\rho c^2+gz/c^2$ во второе уравнение (20.1), которое становится при этом линейным относительно w обыкновенным по x_0 уравнением $w''=-\dfrac{ig}{c^2}+ikw'$. Его решение, удовлетворяющее первому уравнению (20.1) и краевому условию на глубоком дне, имеет вид (20.7). Отметим, что у волн Герстнера (20.7)

$$M=1-k^2a^2e^{2kz_0};\quad \Omega=-\frac{c}{M}2a^2k^3e^{2kz_0}. \tag{20.8}$$

Отсюда видно, в частности, что они вихревые. Таким образом, волны Герстнера являются исключением: во всех других установившихся волнах давление обязано зависеть от горизонтальной лагранжевой координаты x_0.

Теорема 4. В установившихся волнах вихрь скорости может зависеть только от вертикальной лагранжевой координаты z_0.

Доказывается сравнением (20.3) и (20.5): $\Omega=-cf'(z_0)/M(z_0)$. В частности, согласно (20.8), у волн Герстнера $f'(z_0)=2a^2k^3e^{2kz_0}$, так что $f(z_0)=a^2k^2(e^{2kz_0}-1)$.

Теорема 5. Все вихревые волны с различными распределениями $f'(z_0)$ нормированного вихря $(-\Omega M/c)$ получаются из волн с $f'(z_0)\equiv 1$ заменой вертикальной координаты z_0 на f, т. е. удовлетворяют универсальному уравнению

$$\frac{\partial(w,\ \partial w^*/\partial x_0)}{\partial(x_0,\ f)}=1, \tag{20.9}$$

причем свободной поверхностью оказывается линия $f=0$.

Теорема 6. В случае потенциальных волн уравнение (20.5) имеет первый интеграл

$$\partial w^*/\partial x_0=F(w), \tag{20.10}$$

где $F(w)$ — произвольная аналитическая функция, которая должна в отсутствие волн вырождаться в единицу и должна удовлетворять условию на дне $\operatorname{Im}F=0$ при $z=-h$ (или $F\to 1$ при $z\to-\infty$) и условию на свободной поверхности

$$\frac{c^2}{2}|F|^2+gz+\gamma|F|^{-3}\operatorname{Im}(F'F^{*2})=\frac{c^2}{2}\quad\text{при}\quad z_0=0. \tag{20.11}$$

Это доказывается, как следствие теоремы 2 при условии $f'(z_0)\equiv 0$ (а потому и $f(z_0)\equiv 0$), выделяющем потенциальные волны. Функция $F(w)$ отличается лишь постоянным множителем $(-c)$ от эйлеровой комплексной скорости $u-iv$ в движущейся со скоростью c системе координат x, z, так что использование (20.10) фактически означает переход к эйлерову описанию движения.

§ 21. Установившиеся потенциальные волны

Случаем общего положения здесь являются периодические гравитационно-капиллярные волны (с конечным волновым числом $k=2\pi/\lambda$, $0<k<\infty$) на поверхности воды конечной глубины ($0<h<\infty$). В пределе при $k\to 0$, если он существует, из них должна получаться уединенная волна (солитон). И для периодических, и для уединенных волн представляют интерес пределы $h\to\infty$ (глубокая вода) и $kh<1$ (мелкая вода или длинные волны). Наконец, следует рассмотреть пределы чисто гравитационных и чисто капиллярных волн. Все эти волны симметричны (для гравитационных волн это доказал Т. Леви-Чивита, 1925).

Периодические гравитационные волны впервые рассмотрел Дж. Стокс, в 1847 г. — на глубокой воде, а в 1880 г. — на воде конечной глубины. Для характеристик этих волн он нашел первые члены рядов по степеням их крутизны ka. Так, на глубокой воде с точностью до четвертой степени крутизны получается

$$\zeta=-a\left[\cos\chi-\left(\frac{1}{2}ka+\frac{17}{24}k^3a^3\right)\cos 2\chi+\frac{3}{8}k^2a^2\cos 3\chi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}k^3a^3\cos 4\chi+\ldots\right];$$

$$c^2=\frac{g}{k}\left(1+k^2a^2+\frac{5}{4}k^4a^4+\ldots\right);\quad \chi=kx, \tag{21.1}$$

причем выписанное выражение для ζ отличается от соответствующего разложения для трохоиды только слагаемым $\frac{2}{3}a^4k^3\cos 2\chi$ (в 1980 г. Б. Чен и П. Сафмен обнаружили и другие, так называемые *нерегулярные* волны). Уединенные гравитационные волны (также лишь первые члены рядов и фактически лишь на мелкой воде) впервые рассмотрели Ж. Буссинеск (1871, 1890) и Рэлей (1876). Уравнение для описания гравитационных волн на мелкой воде, имеющее и периодические, и солитонные решения, вывели Д. Кортевег и Г. де Вриз (1895); теперь оно называется уравнением КдВ.

Однако в теории периодических и уединенных гравитационных волн долгое время оставались нерешенными два кардинальных вопроса — о сходимости описывающих их рядов (т. е. вообще об их существовании) и об их гидродинамической устойчивости (и, тем самым, реализуемости в природе). Доказательство существования периодических гравитационных волн и на глубокой воде, и на воде конечной глубины впервые дал А. И. Некрасов (1921, 1922). Развитые им методы широко использовались последующими авторами. Н. А. Слезкин (1935, 1937) методами Некрасова

доказал существование периодических капиллярных волн и на воде конечной глубины, и при $h \to \infty$ (позже Дж. Креппер, 1957, нашел в явном аналитическом виде точное частное решение для таких волн). Существование периодических гравитационно-капиллярных волн было доказано Я. И. Секерж-Зеньковичем (1972). Ч. Эмик и Дж. Толанд (1981) показали, что уравнения Некрасова допускают предельный переход $\lambda \to \infty$ от периодической к уединенной волне при фиксированном h (приобретающем смысл асимптотической глубины дна при $|x| \to \infty$).

В теории Некрасова волны описываются в эйлеровой системе отсчета (x, z), движущейся вместе с ними, и используется комплексная координата $w = x + iz$. Эйлеровы скорости могут быть выражены через потенциал φ или функцию тока ψ формулами $u_x = -\partial\varphi/\partial x = -\partial\psi/\partial z$ и $u_z = -\partial\varphi/\partial z = \partial\psi/\partial x$ (причем $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$), так что комплексный потенциал $W = \varphi + i\psi$ является аналитической функцией комплексного переменного w, производная которой есть комплексная скорость:

$$-dW/dw = u_x - iu_z = |\mathbf{u}|\, e^{-i\theta}. \qquad (21.2)$$

Рассмотрим в плоскости w занятую водой область D с протяженностью по x в одну длину волны $\lambda = 2\pi/k$, которая ограничена двумя отрезками (1) и (2) вертикальных прямых, проходящих через соседние низшие точки волны, и находящимися между ними свободной поверхностью жидкости $z = \zeta$ (3) и дном $z = -h$ (4). Поскольку движение установившееся, свободная поверхность и дно суть линии тока; положим на (3) $\psi = 0$ и на (4) $\psi = \psi_1 > 0$ (эта величина подлежит дальнейшему определению). Вследствие симметрии волны на вертикальном отрезке (5), проходящем через вершину волны, и на отрезках (1) и (2) потенциал φ имеет постоянные значения; положим на (5) $\varphi = 0$, а на (1) и (2) $\varphi = \pm c\lambda/2 = \pm\pi c/k$ (где c подлежит дальнейшему определению).

В плоскости W область D будет прямоугольником со сторонами (1) $\varphi = \pi c/k$; $0 < \psi < \psi_1$; (2) $\varphi = -\pi c/k$; $0 < \psi < \psi_1$; (3) $-\pi c/k < \varphi < \pi c/k$; $\psi = 0$; (4) $-\pi c/k < \varphi < \pi c/k$; $\psi = \psi_1$. Отобразим плоскость W на вспомогательную комплексную плоскость $w_1 = |w_1| e^{ix}$ так, чтобы область D отобразилась на кольцо D_1 с центром в начале координат, с внешней окружностью (3) единичного радиуса, внутренней окружностью (4) радиуса $r_1 < 1$ и с разрезом по отрицательной части действительной оси с берегами (1) и (2); отрезок положительной части действительной оси в кольце D_1 при этом соответствует отрезку (5) в области D. Такое отображение описывается формулами:

$$W = -i\frac{c}{k}\ln w_1; \quad \frac{dw}{dw_1} = \frac{i}{k}\left[\frac{1}{w_1} + f(w_1)\right], \qquad (21.3)$$

где $f(w_1)$ — некоторый ряд Лорана. Отметим, что мнимая часть первого из этих равенств при $z=-h$ даст следующую связь между параметрами:

$$\psi_1 = -\frac{c}{k}\ln r_1. \tag{21.4}$$

Чтобы определить c, рассчитаем интеграл $S=-\int \frac{dW}{dw}dw$ по линии $z=-h$ в пределах области D. Согласно (21.2), он равен $\int\limits_{-\lambda/2}^{\lambda/2} u_x\,dx$. Но по первой формуле (21.3) он равен

$$-\int \frac{dW}{dw_1}dw_1 = \frac{ic}{k}\int \frac{dw_1}{w_1} = \frac{c}{k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\chi = c\lambda.$$

Приравнивая эти два выражения, убеждаемся, что c есть среднее значение u_x на дне. Тогда ясно, что расход воды равен $\psi_1 = ch$ и, согласно (21.4), $r_1 = e^{-kh}$. Комплексную скорость (21.2) при помощи (21.3) можно привести к виду

$$-\frac{dW}{dw} = \frac{c}{1+w_1 f(w_1)} = ce^{-\Omega(w_1)};$$

$$\Omega(w_1) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\left(\frac{w_1}{r_1}\right)^n + \left(\frac{w_1}{r_1}\right)^{-n}\right] = \ln R + i\Theta. \tag{21.5}$$

На дне $z=-h$ имеем $|w_1| = r_1$, так что $w_1 = r_1 e^{i\chi}$. Требование обращения вертикальной скорости u_z в ноль на дне согласно (21.2) сводится к вещественности dW/dw и согласно (21.5) — к вещественности всех коэффициентов a_n ряда Лорана для $\Omega(w_1)$.

На свободной поверхности $|w_1| = 1$, так что $w_1 = e^{i\chi}$, и величины R и Θ оказываются функциями $R(\chi)$ и $\Theta(\chi)$ только от χ. Соотношение между ними можно получить, отделив во второй формуле (21.5) при $w_1 = e^{i\chi}$ действительную часть от мнимой и записав их с использованием (21.4) в виде

$$\Theta(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\chi; \quad b_n = 2a_n \operatorname{sh}(nkh); \tag{21.6}$$

$$\frac{\partial \ln R(\chi)}{\partial \chi} = -\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\mu_n \sin n\chi; \quad \mu_n = 3n\operatorname{cth}(nkh). \tag{21.6'}$$

Тогда прямым интегрированием можно убедиться в справедливости следующего соотношения между рядами (21.6) и (21.6′):

$$\Theta(\chi) = -3 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \ln R(\chi')}{\partial \chi'} G(\chi, \chi')\, d\chi'; \qquad (21.7)$$

$$G(\chi, \chi') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\chi)\,\varphi_n(\chi')}{\mu_n}; \quad \varphi_n(\chi) = \frac{\sin n\chi}{\sqrt{\pi}}. \qquad (21.7')$$

Подчеркнем, что ядро $G(\chi, \chi')$ зависит от единственного параметра kh. А. И. Некрасов обнаружил, что ряд (21.7′) для ядра $G(\chi, \chi')$ может быть просуммирован и выражается через эллиптические функции, которые мы запишем несколько проще, чем в оригинале:

$$G(\chi, \chi') = \frac{1}{6\pi} \ln \left| \frac{\operatorname{sn}\left[\frac{K}{\pi}(\chi + \chi')\right]}{\operatorname{sn}\left[\frac{K}{\pi}(\chi - \chi')\right]} \right|; \quad \frac{K'(\varkappa)}{K(\varkappa)} = \frac{2kh}{\pi}, \qquad (21.8)$$

где $\operatorname{sn} v$ — эллиптический синус Якоби с модулем $\varkappa$, а $K(\varkappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $K'(\varkappa) = K(\sqrt{1-\varkappa^2})$. Для доказательства формулы (21.8) воспользуемся следующим представлением $\operatorname{sn} v$ (И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, 1962, формула 8.146.20):

$$\ln \operatorname{sn} v = \ln \frac{2K}{\pi} + \ln \sin \frac{\pi v}{2K} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^n} \left(1 - \cos \frac{n\pi v}{K}\right), \qquad (21.9)$$

где

$$q = \exp(-\pi K'/K) = \exp(-2kh) = r_1^2.$$

Подставив (21.9) в (21.8), получим

$$G(\chi, \chi') = G_0(\chi, \chi') + \frac{1}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_1^{2n}}{1 + r_1^{2n}} \times$$

$$\times [\cos n(\chi + \chi') - \cos n(\chi - \chi')];$$

$$G_0(\chi, \chi') = \frac{1}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\chi \sin n\chi'}{n} = \frac{1}{6\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\chi + \chi'}{2}}{\sin \frac{\chi - \chi'}{2}} \right| \qquad (21.10)$$

где $G_0(\chi, \chi')$ — ядро уравнения (21.7) теории Некрасова для периодических волн на глубокой воде. Из (21.10) формулы (21.7′) получаются уже элементарно.

Соотношение (21.7) между функциями $\Theta(\chi)$ и $R(\chi)$ можно обратить. Для этого перепишем формулы (21.6) и (21.6′) в виде:

$$\ln R(\chi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\chi; \quad c_n = 2a_n \operatorname{ch}(nkh); \tag{21.11}$$

$$\frac{\partial \Theta(\chi)}{\partial \chi} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n \cos n\chi; \quad \nu_n = n \operatorname{th}(nkh) \tag{21.11′}$$

и тогда вместо (21.7) и (21.7′) получим

$$\ln R(\chi) = a_0 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \Theta(\chi')}{\partial \chi'} \gamma(\chi, \chi')\, d\chi'; \tag{21.12}$$

$$\gamma(\chi, \chi') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\chi)\,\psi_n(\chi')}{\nu_n}; \quad \psi_n(\chi) = \frac{\cos n\chi}{\sqrt{\pi}}. \tag{21.12′}$$

В таком виде это соотношение использовал Н. А. Слезкин при доказательстве существования периодических капиллярных волн. Ядро (21.12′) можно привести к виду:

$$\gamma(\chi, \chi') = \gamma_0(\chi, \chi') + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_1^{2n}}{1 - r_1^{2n}} \times$$
$$\times [\cos n(\chi + \chi') + \cos n(\chi - \chi')];$$

$$\gamma_0(\chi, \chi') = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\chi \cos n\chi'}{n} = -\frac{1}{2\pi} \ln 4 \left| \sin \frac{\chi + \chi'}{2} \sin \frac{\chi - \chi'}{2} \right|, \tag{21.13}$$

где γ_0 соответствует пределу глубокой воды $r_1 \to 0$. Если эту формулу для $\gamma(\chi, \chi')$ продифференцировать по χ и по χ', то получающийся ряд удается полностью просуммировать:

$$\Gamma(\chi, \chi') = \frac{\partial^2 \gamma(\chi, \chi')}{\partial \chi\, \partial \chi'} = \Gamma_0(\chi, \chi') - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n r_1^{2n}}{1 - r_1^{2n}} \times$$
$$\times [\cos n(\chi + \chi') - \cos n(\chi - \chi')];$$
$$\Gamma_0(\chi, \chi') = \frac{1}{8\pi} \left[\sin^{-2}\left(\frac{\chi + \chi'}{2}\right) - \sin^{-2}\left(\frac{\chi - \chi'}{2}\right) \right]. \tag{21.14}$$

Теперь остается использовать следующую формулу 8.146.27 из цитированного выше справочника:

$$\operatorname{sn}^{-2} v = \frac{\pi^2}{4K^2} \sin^{-2} \frac{\pi v}{2K} + \frac{K - E}{K} - \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos \frac{n\pi v}{K}, \tag{21.15}$$

где

$$q = \exp(-\pi K'/K) = r_1 = \exp(-kh),$$

так что $K'/K=kh/\pi$, в отличие от (21.8). Отсюда

$$\Gamma(\chi,\ \chi')=\frac{K^2}{2\pi^3}\left\{\mathrm{sn}^{-2}\left[\frac{K}{\pi}(\chi+\chi')\right]-\mathrm{sn}^{-2}\left[\frac{K}{\pi}(\chi-\chi')\right]\right\}. \qquad (21.16)$$

Для прямого использования этого ядра проинтегрируем (21.12) по χ' по частям при условии $\Theta(\pi)=\Theta(-\pi)=0$ и затем продифференцируем эту формулу по χ:

$$\frac{\partial \ln R(\chi)}{\partial\chi}=-\int_{-\pi}^{\pi}\Theta(\chi')\,\Gamma(\chi,\ \chi')\,d\chi'. \qquad (21.17)$$

Это соотношение вместе с (21.16) и уравнением $K'/K=kh/\pi$ для модуля $\varkappa$ и является обратным для (21.7).

Соотношения (21.7) и (21.17) можно привести к виду, пригодному для использования в случае солитонов, перейдя в них от χ к другой независимой переменной $\chi_1=\chi/k$ и обозначив

$$\Theta(k\chi_1)\equiv\Theta_1(\chi_1),\quad R(k\chi_1)\equiv R_1(\chi_1),\quad G(k\chi,\ k\chi_1')\equiv G_1(\chi_1,\ \chi_1') \text{ и}$$
$$k^2\Gamma(k\chi_1,\ k\chi_1')\equiv\Gamma_1(\chi_1,\ \chi_1'),$$

так что они примут вид:

$$\Theta_1(\chi_1)=-3\int_{-\pi/k}^{\pi/k}\frac{\partial \ln R_1(\chi_1')}{\partial\chi_1'}G_1(\chi_1,\ \chi_1')\,d\chi_1'; \qquad (21.18)$$

$$\frac{\partial \ln R_1(\chi_1)}{\partial\chi_1}=-\int_{-\pi/k}^{\pi/k}\Theta_1(\chi_1')\,\Gamma_1(\chi_1,\ \chi_1')\,d\chi_1'. \qquad (21.18')$$

Эти соотношения допускают предельный переход $k\to 0$ от периодической к уединенной волне при фиксированном h (приобретающем смысл асимптотической глубины дна при $|x|\to\infty$). В пределе интегралы по χ_1' берутся от $-\infty$ до $+\infty$, и в (21.8) модуль $\varkappa$ эллиптических синусов стремится к единице, $2K/\lambda=K'/2h\to\pi/4h$ и $\mathrm{sn}\,v\to\mathrm{th}\,v$, так что

$$G_1(\chi_1,\ \chi_1')\to G_*(\chi_1,\ \chi_1')=\frac{1}{6\pi}\ln\left|\frac{\mathrm{th}\left[\frac{\pi}{4h}(\chi_1+\chi_1')\right]}{\mathrm{th}\left[\frac{\pi}{4h}(\chi_1-\chi_1')\right]}\right|. \qquad (21.19)$$

Для солитонов на глубокой воде $h\to\infty$ (если таковые существуют) отсюда получается

$$G_*(\chi_1,\ \chi_1')\to G_{0*}(\chi_1,\ \chi_1')=\frac{1}{6\pi}\ln\left|\frac{\chi_1+\chi_1'}{\chi_1-\chi_1'}\right|. \qquad (21.20)$$

Такое же, конечно, выражение получается из функции $G_0(\chi,\ \chi')$ формулы (21.10), если в ней положить $(\chi,\ \chi')=k(\chi_1,\ \chi_1')$ и затем перейти к пределу при $k\to 0$.

В (21.16) в пределе при $k\to 0$ модуль $\varkappa$ эллиптических синусов стремится к единице, $2K/\lambda=K'/h\to\pi/2h$, и получается

$$\Gamma_1(\chi_1,\chi_1')\to\Gamma_*(\chi_1,\chi_1')=\frac{\pi}{8h^2}\left\{\operatorname{cth}^2\left[\frac{\pi}{2h}(\chi_1+\chi_1')\right]-\right.$$
$$\left.-\operatorname{cth}^2\left[\frac{\pi}{2h}(\chi_1-\chi_1')\right]\right\}. \qquad (21.19')$$

Отсюда в пределе при $h\to\infty$ или из (21.14) после умножения на k^2, замены переменной $\chi=k\chi_1$ и предельного перехода $k\to 0$ для «солитонного» ядра на глубокой воде получаем

$$\Gamma_*(\chi_1,\chi_1')\to\Gamma_{0*}(\chi_1,\chi_1')=\frac{1}{2\pi}[(\chi_1+\chi_1')^{-2}-(\chi_1-\chi_1')^{-2}]. \qquad (21.20')$$

Рассмотрим еще асимптотику мелкой воды $h\to 0$ при фиксированном k. Здесь можно пользоваться для периодических волн соотношениями (21.18) и (21.18′) (а для солитонов такими же соотношениями, но с интегралами в бесконечных пределах), сохраняя в выражениях (21.19) и (21.19′) лишь главные члены при $h\to 0$:

$$G_1(\chi_1,\chi_1')\sim\frac{1}{3\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{2h}|\chi_1-\chi_1'|}-e^{-\frac{\pi}{2h}|\chi_1+\chi_1'|}\right); \qquad (21.21)$$

$$\Gamma_1(\chi_1,\chi_1')\sim\frac{\pi}{2h^2}\left(e^{-\frac{\pi}{h}|\chi_1+\chi_1'|}-e^{-\frac{\pi}{h}|\chi_1-\chi_1'|}\right). \qquad (21.21')$$

На свободной поверхности $w_1=e^{i\chi}$ кроме получающегося из второй формулы (21.5) соотношения между функциями $R(\chi)$ и $\Theta(\chi)$, различные виды которого мы выписали выше, можно получить еще кинематическое и динамическое соотношения между этими функциями и функцией $z=\zeta(x)$, описывающей форму поверхности волны. Кинематическое соотношение получается при записи при $w_1=e^{i\chi}$ второго уравнения (21.3) с использованием обозначений (21.5):

$$\frac{\partial x}{\partial\chi}=-\frac{R}{k}\cos\Theta;\quad\frac{\partial\zeta}{\partial\chi}=-\frac{R}{k}\sin\Theta, \qquad (21.22)$$

откуда видно, что $\partial\zeta/\partial x=\operatorname{tg}\Theta$ есть наклон профиля волны. Динамическим соотношением служит записанное для установившихся волн при $z=\zeta$ уравнение Бернулли (18.3) или (20.6), в котором, согласно (21.2) и (21.5), можно положить $|\mathbf{u}|_\zeta=c/R$; с помощью (21.22) оно приводится к виду

$$\frac{c^2}{2R^2}+g\zeta+\frac{\gamma k}{R}\frac{\partial\Theta}{\partial\chi}=\frac{c^2}{2}. \qquad (21.23)$$

Здесь удобно исключить ζ, продифференцировав это уравнение по χ и воспользовавшись второй формулой (21.22), в результате чего получается

$$\frac{c^2}{R^3}\frac{\partial R}{\partial\chi}+\frac{gR}{k}\sin\Theta=\frac{\gamma k}{R}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\chi^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial\chi}\right). \qquad (21.24)$$

§ 22. Установившиеся гравитационные волны

Для чисто гравитационных волн, полагая в (21.24) $\gamma=0$ и затем интегрируя это уравнение относительно R, получаем

$$R^3(0)\,R^{-3}(\chi)=1+\mu\int_0^{\chi}\sin\Theta(\chi')\,d\chi';\quad \mu=\frac{3gR^3(0)}{kc^2}=\frac{3gc}{k\,|\mathbf{u}|_0^3}. \tag{22.1}$$

Подставляя это выражение для R в (21.7), получаем для $\Theta(\chi)$ следующее интегральное уравнение А. И. Некрасова:

$$\Theta(\chi)=\mu\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\Theta(\chi')\,G(\chi,\,\chi')\,d\chi'}{1+\mu\int_0^{\chi'}\sin\Theta(\chi'')\,d\chi''}. \tag{22.2}$$

Некрасов искал решение $\Theta(\chi)$ этого уравнения в виде ряда по степеням $\mu'=\mu-\mu_1$ (где μ_1 определено в (21.6′)) и методом мажорант доказал сходимость этого ряда при $\mu'>0$, т. е. существование решения (тогда как нетривиального решения, регулярного в области $-\pi\leqslant\chi\leqslant\pi$, $0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$, не существует). Определив $\Theta(\chi)$, из (21.6) можно найти все коэффициенты a_n при $n\neq 0$ (a_0 находится интегрированием первого соотношения (21.22) по χ от $-\pi$ до π, дающим длину волны λ), и тогда (21.5) определяет все течение.

В обозначениях (21.18) формулы (22.1) и (22.2) принимают вид:

$$R_1(\chi_1)=\left(\frac{c^2}{3g}\right)^{1/3}\left[\mu_*^{-1}+\int_0^{\chi_1}\sin\Theta_1(\chi_1')\,d\chi_1'\right]^{-1/3};\quad \mu_*=\frac{3gc}{|\mathbf{u}|_0^3}; \tag{22.1′}$$

$$\Theta_1(\chi_1)=\int_{-\pi/k}^{\pi/k}\frac{\sin\Theta_1(\chi_1')\,G_1(\chi_1,\,\chi_1')\,d\chi_1'}{\mu_*^{-1}+\int_0^{\chi_1'}\sin\Theta_1(\chi_1'')\,d\chi_1''}. \tag{22.2′}$$

Уравнения (21.22) при этом интегрируются в следующем виде:

$$x(\chi_1)=\left(\frac{c^2}{3g}\right)^{1/3}\int_{\chi_1}^{0}\frac{\cos\Theta_1(\chi_1')\,d\chi_1'}{\left[\mu_*^{-1}+\int_0^{\chi_1'}\sin\Theta_1(\chi_1')\,d\chi_1'\right]^{1/3}}; \tag{22.3}$$

$$\zeta(0)-\zeta(\chi_1)=\frac{3}{2}\left(\frac{c^2}{3g}\right)^{1/3}\left\{\left[\mu_*^{-1}+\int_0^{\chi_1}\sin\Theta_1(\chi_1')\,d\chi_1'\right]^{2/3}-\mu_*^{-2/3}\right\}. \tag{22.4}$$

Альтернативой для (22.4) служит уравнение Бернулли (21.23) при $\gamma=0$, из которого получается

$$\zeta=\frac{c^2-|\mathbf{u}|^2}{2g};\quad \zeta(0)=\frac{c^2-|\mathbf{u}|_0^2}{2g}, \tag{22.5}$$

откуда видно, в частности, что наибольшая высота волны $\zeta(0)$ получается при $|\mathbf{u}|_0=0$ (т. е. при $\mu_*^{-1}=0$) и оказывается равной $\zeta(0)=c^2/2g$. Такая предельная конфигурация была предсказана еще самим Стоксом, который отметил, что в ней вершина волны заостряется и угол между правой и левой касательными к профилю волны в ее вершине должен равняться 120°. Этот результат оказывается справедливым и для периодических волн, и для солитонов, и он не зависит от глубины h. Действительно, можно исходить из того, что предельная конфигурация определяется, помимо координат, только одним параметром g. Тогда в полярных координатах (r, θ) с началом в угловой точке и с осью $\theta=0$, направленной вертикально вниз, функция тока $\psi(r, \theta)$, равенство нулю которой есть уравнение поверхности воды, в окрестности гребня в силу соображений размерности должна иметь вид $(gr^3)^{1/2}\Psi(\theta)$. Но она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi=0$, или в полярных координатах $\partial^2\psi/\partial r^2+\partial\psi/r\partial r+\partial^2\psi/r^2\partial\theta^2=0$. Отсюда получается $\Psi(\theta)=\cos(3\theta/2)$, так что $\Psi=0$ дает $\theta=\pm 60°$, что и требовалось доказать. Отметим, что указанная сингулярность функции $w(W)\sim(iW)^{2/3}$ в вершине волны не является регулярной: следующий член асимптотики w содержит иррациональную степень W; кроме того, у волн допредельной конфигурации сингулярность в вершине имеет другой порядок (М. Грант, 1973).

Отметим еще, что для солитонов $R_1\to 1$, $\zeta\to 0$ и $|\mathbf{u}|\to c$ при $|\chi_1|\to\infty$, и из (22.1′) получается

$$\frac{c^2}{3g}=\mu_*^{-1}+\int_0^\infty \sin\Theta_1(\chi_1)\,d\chi_1. \tag{22.6}$$

Для солитонов предельной конфигурации здесь надо положить $\mu_*^{-1}=0$.

По предположению Т. Бенджамина и М. Лайтхилла (1954), легко доказываемому в случае мелкой воды (см. ниже), уетановившиеся гравитационные волны полностью определяются, кроме ускорения свободного падения g, тремя постоянными параметрами — расходом Q, плотностью энергии R и потоком импульса на единицу массы S (см. (19.9)), определяемыми формулами:

$$Q=\int_0^\eta u_x\,dy=\psi_0-\psi_\eta;$$

$$R=\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2+gy=\frac{1}{2}|\mathbf{u}|_\eta^2+g\eta;$$

$$S=\int_0^\eta\left(\frac{p}{\rho}+u_x^2\right)dy=\int_0^\eta\left[R-gy-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dy, \tag{22.7}$$

где $y=h+z$ и $\eta=h+\zeta$. Второе выражение для R здесь получается из условия $\partial S/\partial x=0$:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\left[R-g\eta-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_\eta^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_\eta^2\right]\frac{\partial\eta}{\partial x}+$$

$$+\int_0^\eta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\partial y. \qquad (22.7')$$

Поскольку $\Delta\psi=0$ т. е. $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$, интеграл здесь равняется

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_\eta=-(u_xu_z)_\eta=-(u_x^2)_\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_\eta^2\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

так как кинематическое краевое условие на свободной поверхности дает $u_z=u_x\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$. Подставляя это значение интеграла в (22.8) и приравнивая $\partial S/\partial x$ нулю, получаем для R второе выражение (22.7). Третье выражение (22.7) приводится к виду

$$g\eta^3-2R\eta^2+2S\eta=\eta\int_0^\eta\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]dy. \qquad (22.8)$$

Гармоническую функцию $\psi(x, y)$ можно записать, с точностью до постоянного слагаемого, в виде:

$$\psi=yf(x)-\frac{y^3}{3!}f^{(2)}(x)+\frac{y^5}{5!}f^{(4)}(x)-\ldots$$

$$-Q=\eta f(x)-\frac{\eta^3}{3!}f^{(2)}(x)+\frac{\eta^5}{5!}f^{(4)}(x)-\ldots \qquad (22.9)$$

Вторая строчка здесь соответствует нормировке функции ψ, принятой в первом выражении (22.7). Если ряды (22.9) сходятся (как в случае мелкой воды), то из уравнения (22.8) относительно η видно, что функция $\eta(x)$ действительно зависит только от указанных выше параметров. Нетрудно убедиться, что для вычисления правой части (22.8) с точностью до $O(\eta^4)$ в рядах (22.9) достаточно взять только по одному первому слагаемому. При этом правая часть (22.8) оказывается равной $Q^2\left[1-\dfrac{1}{3}(\partial\eta/\partial x)^2\right]+$ $+O(\eta^4)$, и уравнение (22.8) с этой точностью приводится к виду

$$\frac{1}{3}Q^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+U(\eta)=0;\quad U(\eta)=g\eta^3-2R\eta^2+2S\eta-Q^2. \qquad (22.10)$$

Оно вполне аналогично уравнению движения частицы с массой $\dfrac{2}{3}Q^2$ и координатой η (со «временем» x) в силовом поле с потен-

циалом $U(\eta)$. В этом уравнении удобно перейти к безразмерным переменным, взяв в качестве единиц измерения характеристики (отмечаемые индексом ноль) равномерного течения (с постоянной глубиной) с заданным расходом Q и числом Фруда $\mathrm{F}=c(gh)^{-1/2}$, равным единице:

$$h_0=g^{-1/3}Q^{2/3};\quad c_0=g^{1/3}Q^{2/3}=(gh_0)^{1/2};$$
$$R_0=\frac{3}{2}g^{2/3}Q^{2/3}=\frac{3}{2}gh_0;\quad S_0=\frac{3}{2}g^{1/3}Q^{4/3}=\frac{3}{2}gh_0^2. \qquad (22.11)$$

Тогда при измерении всех длин масштабом h_0 уравнение (22.10) приведется к виду

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\eta^3-3r\eta^2+3s\eta-1=0;\quad r=R/R_0;\quad s=S/S_0, \qquad (22.12)$$

и его решение определяется двумя параметрами r и s (так что оно может быть изображено точкой на плоскости (r, s); равномерное течение изображается точкой $r=s=1$). Потенциал здесь можно представить в виде $U(\eta)=(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)(\eta-\eta_3)$, где $\eta_1<\eta_2<\eta_3$ — корни, определяемые формулами:

$$\eta_1=r+2(r^2-s)^{1/2}\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right);$$

$$\eta_2=r+2(r^2-s)^{1/2}\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right);$$

$$\eta_3=r+2(r^2-s)^{1/2}\cos\varphi;\quad \cos 3\varphi=\frac{r^3-\frac{3}{2}rs+\frac{1}{2}}{(r^2-s)^{3/2}}, \qquad (22.13)$$

причем $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$. В общем случае, когда все эти корни различны, решение уравнения (22.12) имеет вид

$$\eta=\eta_2+(\eta_3-\eta_2)\,\mathrm{cn}^2\left[\frac{x}{2}\sqrt{3(\eta_3-\eta_1)}\right];\quad \varkappa=\left(\frac{\eta_3-\eta_2}{\eta_3-\eta_1}\right)^{1/2}, \qquad (22.14)$$

где $\mathrm{cn}\,v$ — эллиптический косинус Якоби с модулем $\varkappa$. По этой функции волна (22.14) называется *кноидальной*. Скорость ее распространения равна $c=c_0r$, длина волны

$$\lambda=4h_0[3(\eta_3-\eta_1)]^{-1/2}\,\mathrm{K}(\varkappa),$$

высота волны $\eta_3-\eta_2$, средний уровень воды $\eta_1-(\eta_3-\eta_1)\mathrm{E}/\mathrm{K}$ (где E — полный эллиптический интеграл второго рода с тем же модулем). При $\varphi\to\pi/3$ получается $\eta_2\to\eta_3$, $\varkappa\to 0$, $\mathrm{cn}\,v\to\cos v$, $\mathrm{K}\to\pi/2$. Это — волны инфинитезимальной амплитуды. Четвертое соотношение (22.13) для них приводится к виду $4(r^3+s^3)=3r^2s^2+6rs-1$ и изображается на плоскости (r, s) рис. 22.1 верхней кривой, имеющей параметрическое представление $r=\frac{1}{3}(F^{4/3}+$

$+2F^{-2/3})$, $s=\frac{1}{3}(F^{-4/3}+2F^{2/3})$ при числах Фруда $F<1$ (значения которых отмечены на кривой). При $\varphi\to 0$ получается $\eta_2\to\eta_1$, $\varkappa\to 1$, $\operatorname{cn} v\to\operatorname{ch}^{-1} v$, $K\to\infty$ и $\lambda\to\infty$, т. е. в пределе получаются солитоны

$$\eta=\eta_1+(\eta_3-\eta_1)\operatorname{ch}^{-2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{3(\eta_3-\eta_1)}\right]. \qquad (22.15)$$

Четвертое соотношение (22.13) для них изображается на рис. 22.1 нижней кривой, имеющей такое же параметрическое

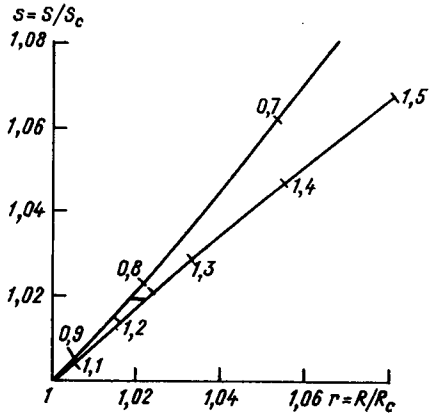


Рис. 22.1. Область существования гравитационных волн в плоскости r, s.

представление, что и верхняя кривая, но при $F>1$.

Если представить кноидальные волны (22.14) и солитоны (22.15) как стационарные решения некоторого эволюционного уравнения, то с его помощью можно исследовать устойчивость этих решений по отношению к малым возмущениям. Чтобы вывести такое уравнение, в случае мелкой воды используем малый параметр $\varepsilon=kh$, положим $c_0=(gh)^{1/2}$, введем медленно меняющиеся абсциссу $\xi=\varepsilon^{1/2}(x-c_0t)$ и время $\tau=\varepsilon^{3/2}t$ и будем искать потенциал скорости в виде $\varphi=\varepsilon^{1/2}\Phi(\xi, y, \tau)$ и возвышение поверхности воды в виде $\eta=h+\varepsilon\zeta(\xi, \tau)$. Уравнение Лапласа для φ принимает вид $\varepsilon\Phi''+\Phi_{yy}=0$ (штрихом обозначается производная по ξ) и при краевом условии на дне $\Phi_y\to 0$ $(y\to 0)$ имеет решение

$$\Phi=f-\frac{\varepsilon y^2}{2!}f''+\frac{\varepsilon^2 y^4}{4!}f''''-\ldots;\quad f=f_0+\varepsilon f_1+\ldots;$$

$$(\Phi')_\eta=f_0'+\varepsilon\left(f_1'-\frac{h^2}{2}f_0'''\right)+O(\varepsilon^2);$$

$$(\Phi_y)_\eta=-\varepsilon hf_0''+\varepsilon^2\left(-\zeta_0 f_0''-hf_1''+\frac{h^3}{6}f_0''''\right)+O(\varepsilon^3). \qquad (22.16)$$

Кинематическое и динамическое краевые условия на поверхности воды $y=\eta$ принимают вид

$$(\Phi_y)_\eta = \varepsilon^2\dot{\zeta} - \varepsilon c_0\zeta' + \varepsilon^2(\Phi')_\eta\zeta';$$
$$\varepsilon(\dot{\Phi})_\eta - c_0(\Phi')_\eta + \frac{1}{2}[\varepsilon(\Phi')_\eta^2 + (\Phi_y)_\eta^2] + g\zeta = 0, \qquad (22.17)$$

где точкой обозначается производная по τ. Полагая $\zeta=\zeta_0+\varepsilon\zeta_1+\ldots$ и используя (22.16), из слагаемых двух младших порядков в этих уравнениях получаем

$$-hf_0'' = -c_0\zeta_0'; \quad -\zeta_0 f_0'' - hf_1'' + \frac{h^3}{6}f_0'''' = \dot{\zeta}_0 - c_0\zeta_1' + f_0'\zeta_0';$$

$$-c_0 f_0' + g\zeta_0 = 0; \quad f_0 - c_0\left(f_1' - \frac{h^2}{2}f_0''\right) + \frac{1}{2}f_0'^2 + g\zeta_1 = 0. \qquad (22.18)$$

Первое из этих уравнений является производной по ξ от третьего, принимающего вид $f_0' = (g/c_0)\zeta_0$. Используя это соотношение, продифференцировав по ξ четвертое уравнение и исключив из него с помощью третьего $g\zeta_1' - c_0 f_1''$, получим для ζ_0 уравнение КдВ:

$$\dot{\zeta}_0 + \frac{3c_0}{2h}\zeta_0\zeta_0' + \frac{c_0h^2}{6}\zeta_0''' = 0. \qquad (22.19)$$

Если искать *стационарное* решение этого уравнения в виде $\zeta_0 = h^3(\eta - r)$, то интегрированием по ξ и затем по η из (22.19) получится (22.12). Если же искать нестационарное решение в виде $\zeta_0 = h^3(\eta_0 - r + \eta_*)$, где η_0 — солитон (22.15), а η_* — малое возмущение, и линеаризировать (22.19) относительно η_*, то с помощью такого линеаризированного уравнения можно убедиться, что солитоны устойчивы (А. Джеффри, Т. Какутани, 1970). Устойчивость одномерных солитонов относительно малых поперечных возмущений описывается при помощи двумерного обобщения уравнения КдВ, выведенного Б. Б. Кадомцевым и В. И. Петвиашвили (1970) и имеющего вид

$$\left(\dot{\zeta} + \frac{3c_0}{2h}\zeta\zeta' + \frac{c_0h^2}{6}\zeta'''\right)' + \frac{c_0}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = 0. \qquad (22.19')$$

В этом отношении солитоны также оказываются устойчивыми. Уравнение (22.19), как и (22.19′), решается излагаемым ниже методом обратной задачи рассеяния (В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, 1974).

Уравнение КдВ полезно отнюдь не только для нахождения кноидальных волн и солитонов (22.14) и (22.15): оно описывает нелинейные волны, возникающие в целом ряде разнообразных физических явлений, и в том числе, как видно из вышеизложенного, нестационарные нелинейные волны $\zeta(x, t)$ на поверхности мелкой воды при произвольном начальном условии $\zeta(x, 0)$. Оно

нашло особенно широкие применения после замечательного открытия Ч. Гарднера, Дж. Грина, М. Крускала и Р. Миуры (ГГКМ, 1967), установивших, что решение задачи с начальными данными для уравнения КдВ

$$\dot{u} - 6uu' + u''' = 0 \qquad (22.19'')$$

(где принята стандартная нормировка всех переменных, точка обозначает производную по t, штрих — по x) сводится к решению некоторой *линейной* задачи — так называемой обратной задачи рассеяния для уравнения Шредингера

$$L\psi = k^2\psi; \quad L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t) \qquad (22.20)$$

при условиях

$$\sum_{m=0}^{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^m u(x, 0)}{\partial x^m} \right| dx < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\,|u(x, 0)|\,dx < \infty. \qquad (22.20')$$

Сначала при $t=0$ решается прямая задача рассеяния: (1) находятся дискретные (простые) собственные значения $k = i\varkappa_n$, $\varkappa_n > 0$, $n = 1, \ldots, N$ оператора L (при которых уравнение Шредингера имеет квадратично интегрируемые решения $\psi_n(x)$; вследствие второго условия (22.20′) их имеется лишь конечное число); (2) при нормировке $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\,dx$ находятся нормировочные постоянные

$$b_n = \lim_{x \to \infty} e^{\varkappa_n x}\psi_n(x);$$

(3) при вещественных собственных значениях $k \neq 0$ (образующих двукратно вырожденный непрерывный спектр) находится решение $\psi(x, k)$ с асимптотиками

$$\psi(x, k) \sim \begin{cases} e^{-ikx} & \text{при } x \to -\infty, \\ a(k)\,e^{-ikx} + b(k)\,e^{ikx} & \text{при } x \to +\infty, \end{cases} \qquad (22.21)$$

где $1/a(k)$ и $r(k) = b(k)/a(k)$ суть коэффициенты прохождения и отражения для волны e^{-ikx}, падающей на потенциал $u(x, 0)$ справа. При этом $\psi_n(x) = \psi(x, i\varkappa_n)$ и $a(i\varkappa_n) = 0$. Величины $s = \{r(k), \varkappa_n, b_n, n = 1, \ldots, N\}$ называются *данными рассеяния*. Их можно найти и по $u(x, t)$, и если потенциал удовлетворяет уравнению КдВ (11.19″), то $a(k, t)$, $b(k, t)$, и $\psi(x, k, t)$ подчиняются следующим уравнениям ГГКМ:

$$\dot{a} = 0; \quad \dot{b} = 8ik^3 b; \qquad (22.22)$$

$$\dot{\psi} = (-A + 4ik^3)\psi; \quad A = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3\left(u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u\right). \qquad (22.23)$$

Вследствие этих уравнений

$$s(t)=\left\{r(k,\ 0)\,e^{8ik^3t},\ \varkappa_n,\ b_n e^{8\varkappa_n^3 t},\quad n=1,\ \ldots,\ N\right\}.$$

Наоборот, если данные рассеяния меняются со временем; как решения уравнений ГГКМ (22.22), то определяемый ими потенциал $u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению КдВ (22.19″). Действительно, оно эквивалентно уравнению П. Лакса (1968) для операторов

$$\dot{L}=[L,\ A], \tag{22.24}$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор ($\dot{L}$ есть оператор умножения на $\dot{u}$, а $[L,\ A]$ — оператор умножения на $6uu'-u'''$). Наконец, остается решить обратную задачу рассеяния — восстановить потенциал по данным рассеяния. Для этого рассмотрим решение уравнения Шредингера $\psi_1(x,\ k)\sim e^{-ikx}$ $(x\to+\infty)$ и при помощи функции Грина запишем для $\chi_1(x,\ k)=\psi_1(x,\ k)e^{ikx}$ интегральное уравнение

$$\chi_1(x,\ k)=1-\int\limits_x^\infty \frac{e^{2ik(x-x')}-1}{2ik}\,u(x')\chi_1(x',\ k)\,dx'=$$

$$=1+\frac{1}{2ik}\int\limits_x^\infty u(x')\,dx'+O(k^{-2})\quad\text{при}\quad \operatorname{Im}k<0,\quad |k|\to\infty. \tag{22.25}$$

Преобразование Фурье этой функции по k обрывается, т. е.

$$\chi_1(x,\ k)=1+\int\limits_0^\infty K(x,\ x+y)\,e^{-iky}\,dy=$$

$$=1+\frac{1}{ik}K(x,\ x)+O(k^{-2})\quad\text{при}\quad |k|\to\infty, \tag{22.25′}$$

где $K(x,\ y)$ — ядро линейного оператора, преобразующего решение e^{-ikx} уравнения Шредингера с нулевым потенциалом в решение уравнения с потенциалом $u(x)$. Из сравнения асимптотик (22.25) и (22.25′) получается $u(x)=-2\dfrac{\partial}{\partial x}K(x,\ x)$. Для нахождения ядра умножим равенство

$$\psi(x,\ k)-a(k)\,e^{-ikx}=a(k)\,\psi_1(x,\ k)+b(k)\,\psi_1^*(x,\ k)-a(k)\,e^{-ikx}$$

на $e^{iky}/a(k)$ и проинтегрируем по всем вещественным k. Используя равенство $\psi(x,\ i\varkappa_n)=b_n\psi_1(x,\ -i\varkappa_n)$ и (22.25′), результат можно привести к виду:

$$K(x,\ y)+F(x+y)+\int\limits_x^\infty K(x,\ z)\,F(y+z)\,dz=0;$$

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n e^{-\varkappa_n x}}{ia'(i\varkappa_n)}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(k)\,e^{ikx}\,dk. \tag{22.26}$$

Это уравнение И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана и В. А. Марченко (1951). Итак, уравнение КдВ решается по следующей схеме: $u(x, 0) \to s(0) \to s(t) \to u(x, t)$. Особенно легко решение получается в важном частном случае безотражательных потенциалов $r(k) \equiv 0$:

$$u(x, t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A; \quad A_{mn} = \delta_{mn} + \frac{\beta_n(0)\, e^{8\varkappa_n^3 t - (\varkappa_m + \varkappa_n)x}}{\varkappa_m + \varkappa_n}, \tag{22.27}$$

где $A = \|A_{mn}\|$ — матрица $N \times N$, а $\beta_n(0)$ — произвольные постоянные. Эта формула доказывается следующим образом: здесь в (22.26) $F(x) = \Sigma \beta_n e^{-\varkappa_n x}$ и ядро $K(x, y)$ можно искать в виде $\sum K_n(x) e^{-\varkappa_n y}$; тогда для $\{K_n(x)\}$ получаются линейные алгебраические уравнения с матрицей коэффициентов A и столбцом правых частей $-\beta_n e^{-\varkappa_n x}$, откуда $K_n = \det A_n / \det A$, где A_n получается из A заменой n-го столбца правыми частями. Значит,

$$K(x, x) = \sum e^{-\varkappa_n x} \det A_n / \det A = \frac{\partial}{\partial x} \ln \det A,$$

откуда и следует (22.27). Это решение представляет собой суперпозицию N солитонов типа (22.15) с амплитудами $2\varkappa_n^2$, скоростями $4\varkappa_n^2$ и произвольными начальными фазами. Анализ двухсолитонного решения показывает, что когда первый из солитонов, более быстрый, догоняет второй, его скорость и амплитуда уменьшаются, а у второго увеличиваются, и в момент наибольшего сближения они уравниваются, после чего скорость и амплитуда второго растут, а первого уменьшаются так, что асимптотически они оказываются обменявшимися скоростями и амплитудами (а их фазы сдвигаются на $\alpha\varkappa_1^{-1}$ и $-\alpha\varkappa_2^{-1}$, где $\alpha = \ln \left| \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \right|$, так что наиболее интенсивно взаимодействуют солитоны с близкими скоростями; отметим, что во многосолитонном решении суммарные сдвиги фаз в точности равны суммам попарных сдвигов, т. е. многочастичные эффекты отсутствуют).

При помощи обратной задачи рассеяния решается не только уравнение КдВ, но и ряд других нелинейных эволюционных уравнений, допускающих представление типа Лакса (22.24). К ним относится и так называемое *нелинейное уравнение Шредингера*, описывающее, в частности, своеобразную неустойчивость волн Стокса по отношению к малым возмущениям, создающим длинноволновую модуляцию этих волн. Ограничиваясь здесь волнами Стокса только на глубокой воде, имеющими дисперсионное соотношение $\omega^2 = gk(1 + k^2a^2 + \ldots)$, рассмотрим волновой пакет,

в котором основная доля энергии сосредоточена около волнового числа k_0, так что в нем, полагая $k=k_0+k'$ и $\omega_0=(gk_0)^{1/2}$, имеем

$$\zeta(x,\ t)=\mathrm{Re}\left[A(x,\ t)\,e^{i(k_0x-\omega_0t)}\right];\quad A(x,\ t)=a(x,\ t)\,e^{i\theta(x,\ t)};\qquad (22.28)$$

$$\omega'=\omega-\omega_0=\frac{\omega_0}{2k_0}\,k'-\frac{\omega_0}{8k_0^2}\,k'^2+\frac{1}{2}\,\omega_0k_0^2a^2+O(k'^2,\ a^2),\qquad (22.28')$$

где $e^{i(k_0x-\omega_0t)}$ описывает *несущую* гармоническую волну, а $A(x,\ t)$ — модулирующую ее комплексную *огибающую*. Поскольку в уравнении (22.28′) нелинейное (по a) слагаемое не содержит k', в нем остаются в силе справедливые для линейных волн соотношения $-i\omega'\to\dfrac{\partial}{\partial t}$ и $ik'\to\dfrac{\partial}{\partial x}$, так что примененный к $A(x,\ t)$ оператор (22.28′) дает нелинейное уравнение Шредингера

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\omega_0}{2k_0}\,\frac{\partial A}{\partial x}\right)-\frac{\omega_0}{8k_0^2}\,\frac{\partial^2A}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\,\omega_0k_0^2\,|A|^2A=0\qquad (22.29)$$

(В. Е. Захаров, 1968; им также показано, что в двумерном случае в левую часть этого уравнения добавляется слагаемое $\dfrac{\omega_0}{4k_0^2}\times$ $\times\dfrac{\partial^2A}{\partial y^2}$; обобщение для случая конечной глубины дали Д. Бинни и Дж. Роскис, 1969, и затем А. Дейви и К. Стюартсон, 1974). Слагаемые в скобках показывают, что огибающая движется с групповой скоростью несущей волны $\omega_0/2k_0$. Решения этого уравнения при помощи обратной задачи рассеяния построены В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом (1971). Если при $|x|\to\infty$ начальное значение $|A(x,\ 0)|$ достаточно быстро убывает, так что величина $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|A(x,\ 0)|\,dx$ конечна (но не слишком мала!), то существуют *солитоны огибающей*

$$A=ae^{-\frac{i}{4}\,\omega_0k_0^2a^2t-\frac{4ik_0^2}{\omega_0}(x-ct+\varphi)}\,\mathrm{ch}^{-1}\left[\sqrt{2}\,k_0^2a\,(x-ct)\right],\qquad (22.30)$$

где скорость c (относительно $\omega_0/2k_0$) не зависит от амплитуды a (они определяются действительной и мнимой частями дискретных собственных значений). Солитоны огибающей устойчивы. Рассмотрим, однако, устойчивость периодической огибающей $A=A_0(t)=$ $=a\exp\left(-\dfrac{i}{2}\,\omega_0k_0^2a^2t\right)$, частота которой с точностью $o(a^2)$ есть стоксова поправка к частоте несущей волны, так что с указанной точностью мы проанализируем устойчивость волны Стокса. В си-

стеме отсчета, движущейся со скоростью $\omega_0/2k_0$, рассмотрим малое возмущение в виде

$$A' = A_0 e^{-i\alpha\omega_0 t}\left(b_+ e^{i\beta k_0 x} + b_- e^{-i\beta k_0 x}\right).$$

Линеаризируя относительно него (22.29), получим для него дисперсионное соотношение $\alpha^2 = \frac{\beta^2}{8}\left(\frac{\beta^2}{8} - k_0^2 a^2\right)$, откуда видно, что при $0 < \beta < 2\sqrt{2}\cdot k_0 a$ периодическая огибающая оказывается неустойчивой (мнимые α) с максимальной скоростью роста $\alpha\omega_0 = \frac{1}{2}\omega_0 k_0^2 a^2$ (Т. Бенджамин, Дж. Фейр, 1967). Это явление получило наименование «неустойчивости на боковых частотах».

Однако лабораторные и численные эксперименты показывают, что за пределами действия линеаризированного уравнения рост модулирующего возмущения замедляется, прекращается и сменяется затуханием, возвращающим волну к начальному почти немодулированному состоянию, в котором возмущение опять начинает расти, и такие колебания глубины модуляции повторяются периодически (если не происходят потери энергии, например, при обрушивании волн). Это явление называется «возвратом ФПУ» по работе Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама (1952), обнаруживших его при численном моделировании колебаний атомных решеток.

§ 23. Установившиеся капиллярные волны

В случае чисто капиллярных волн в краевом условии (21.23) на поверхности воды следует положить $g=0$ и удобно перейти от χ к независимой переменной $\varphi = c\chi/k$ и от R к зависимой переменной $\tau = -\ln R$, так что уравнение (21.5) и краевое условие (21.53) примут вид:

$$\frac{dW}{dw} = -ce^{\tau - i\theta}; \quad \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = -\frac{c}{\gamma}\operatorname{sh}\tau \quad \text{при } \psi = 0. \tag{23.1}$$

Из (21.3) и (21.5) видно, что величину $\tau - i\theta$ можно рассматривать, как функцию от комплексной переменной $W = \varphi + i\psi$, так что справедливы уравнения Коши—Римана $\partial\theta/\partial\varphi = \partial\tau/\partial\psi$ и $\partial\theta/\partial\psi = -\partial\tau/\partial\varphi$. Следовательно, функция τ (как и θ) должна удовлетворять уравнению Лапласа $\partial^2\tau/\partial\varphi^2 + \partial^2\tau/\partial\psi^2 = 0$, а краевое условие (23.1) при $\psi = 0$ для нее принимает вид $\partial\tau/\partial\psi = -(c/\gamma)\operatorname{sh}\tau$. Следуя Дж. Крепперу (1957), будем искать эту функцию, как решение уравнения с разделяющимися переменными $\partial\tau/\partial\psi = f'(\psi)\operatorname{sh}\tau$, причем должно быть $f'(0) = -c/\gamma$. Отсюда $\ln\operatorname{th}\frac{\tau}{2} = f(\psi) - h(\varphi)$, и, значит,

$$\tau = \ln\left|\frac{F(\psi) + H(\varphi)}{F(\psi) - H(\varphi)}\right|; \quad F(\psi) = e^{f(\psi)}; \quad H(\varphi) = e^{h(\varphi)}. \tag{23.2}$$

Подставив эту функцию τ в упомянутое выше уравнение Лапласа, получим

$$2\left(H'^2+F'^2\right)+\left(F^2-H^2\right)\left(\frac{H''}{H}-\frac{F''}{F}\right)=0; \tag{23.3}$$

$$\frac{1}{FF'}\left(\frac{F''}{F}\right)'=-\frac{1}{HH'}\left(\frac{H''}{H}\right)', \tag{23.3'}$$

причем второе из этих уравнений (получаемое из первого путем его дифференцирования по ψ и по φ) показывает, что его правая и левая части равны константе. Отсюда следует, что F'^2 есть квадратный многочлен относительно F^2, а H'^2 — относительно H^2 (так что $F(\psi)$ и $H(\varphi)$ суть эллиптические функции Якоби); из (23.3) получается, что соответственные коэффициенты этих двух многочленов различаются лишь знаками. В остальном они произвольны, и один из них можно использовать, как произвольный общий множитель у F и H (он всюду сокращается), второй — как произвольный общий множитель α у φ и ψ, а третий — как произвольный модуль $\varkappa$ эллиптических функций. Ограничиваясь случаем глубокой воды, в котором $\tau\to 0$ при $\psi\to\infty$, получаем

$$\tau=\ln\frac{\operatorname{cn} i\alpha(\psi-\psi_0)+\operatorname{cn}\alpha\varphi}{\operatorname{cn} i\alpha(\psi-\psi_0)-\operatorname{cn}\alpha\varphi}=\ln(TT^*);$$

$$T=\frac{\operatorname{cn} W_1}{\operatorname{sn} W_1\operatorname{dn} W_1};\quad W_1=\frac{\alpha}{2}(W-W_0);\quad W_0=i\psi_0. \tag{23.4}$$

Второе равенство здесь получается из первого при вычислении $\operatorname{cn}(u-v)\pm\operatorname{cn}(u+v)$ с использованием формулы

$$\operatorname{cn}(u\pm v)=(\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\mp\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v)\left(1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v\right)^{-1}. \tag{23.5}$$

Дж. Креппер рассмотрел решение (23.4) лишь в частном случае с нулевым модулем $\varkappa=0$ (когда $\operatorname{cn}u\to\cos u$), здесь же модуль произволен. Имея $F(\psi)=ef^{(\psi)}=\operatorname{cn} i\alpha(\psi-\psi_0)$ и используя формулы:

$$\frac{\partial\ln\operatorname{cn}u}{\partial u}=-\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u};\quad\frac{\operatorname{sn} iu\operatorname{dn} iu}{\operatorname{cn} iu}=i\frac{\operatorname{sn}'u\operatorname{dn}'u}{\operatorname{cn}'u}, \tag{23.5'}$$

где штрихом обозначены эллиптические функции с модулем $\varkappa'=\sqrt{1-\varkappa^2}$, условие $f'(0)=-c/\gamma$ можно привести к виду

$$\frac{\operatorname{sn}'\alpha\psi_0\operatorname{dn}'\alpha\psi_0}{\operatorname{cn}'\alpha\psi_0}=\frac{c}{\alpha\gamma}. \tag{23.6}$$

Далее, используя уравнение $\partial\theta/\partial\varphi=\partial\tau/\partial\psi$, из (23.4) получаем $\theta=i\ln(T/T^*)$ и, значит, $\tau-i\theta=\ln(T^2)$, так что первое уравне-

ние (23.1) принимает вид $dW/dw=-cT^2$, причем $w=0$ при $W=0$. Отсюда получаем

$$x+iz=-\frac{1}{c}\int_0^{\varphi+i\psi}T^{-2}\,dW=-\frac{2}{\alpha c}\int_{-i\alpha\psi_0/2}^{\alpha\varphi/2+i\alpha(\psi-\psi_0)/2}T^{-2}(W_1)\,dW_1. \tag{23.7}$$

Интеграл здесь вычисляется при помощи соотношения

$$\int\frac{\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{dn}^2u}{\mathrm{cn}^2u}\,du=u+\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}-2E(\mathrm{am}\,u), \tag{23.5″}$$

где $E(\varphi)$ — эллиптический интеграл второго рода с тем же модулем $\varkappa$. При использовании этой формулы в общем случае разделение действительной и мнимой частей в правой части (23.7) оказывается довольно громоздким делом, и мы здесь ограничимся лишь двумя частными случаями. В случае Креппера при $\varkappa=0$ получается $\mathrm{sn}\,u\to\sin u$, $\mathrm{cn}\,u\to\cos u$, $\mathrm{dn}\,u\to1$, $E(\mathrm{am}\,u)\to u$, и для поверхности воды ($\psi=0$, $z=\zeta$) формулы (23.6) и (23.7) принимают вид:

$$\mathrm{th}\,\alpha\psi_0=\frac{c}{\alpha\gamma};\quad \alpha c\,(x+i\zeta)=\alpha\varphi-2\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha\varphi}{2}-\frac{i\alpha\psi_0}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{tg}\left(\frac{i\alpha\psi_0}{2}\right)\right]. \tag{23.8}$$

Введя волновое число $k=\alpha c$ и скорость инфинитезимальных капиллярных волн $c_0=(\gamma k)^{1/2}$, из (23.8) получаем

$$kx=\frac{k\varphi}{c}-\frac{2\Phi(1-\Psi^2)}{1+\Phi^2\Psi^2};\quad k\zeta=\frac{2\Phi^2\Psi(1-\Psi^2)}{1+\Phi^2\Psi^2};$$

$$\frac{2\Psi}{1+\Psi^2}=\frac{c^2}{c_0^2};\quad \Phi=\mathrm{tg}\,\frac{k\varphi}{2c};\quad \Psi=\mathrm{th}\,\frac{k\psi_0}{2c}. \tag{23.9}$$

Эти формулы параметрически описывают периодические капиллярные волны конечной амплитуды a, определяемой как значение ζ при $k\varphi/c\to\pi$. Отсюда получаем

$$a=\frac{2(1-\Psi^2)}{k\Psi};\quad \frac{c^2}{c_0^2}=\left(1+\frac{k^2a^2}{16}\right)^{-1/2}. \tag{23.10}$$

Меняя масштаб измерения всех длин по формулам $ka=A$; $kx/A=\xi$; $k\zeta/A=\eta$ и исключив из (23.9) параметры Φ и Ψ, получим явное уравнение профиля волны

$$\pm\xi=-\sqrt{\eta(1-\eta)}+\frac{2}{A}\,\mathrm{arctg}\left\{\left[\frac{A}{4}+\left(1+\frac{A^2}{16}\right)^{1/2}\right]\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right)^{1/2}\right\}. \tag{23.11}$$

Как показал Креппер, при $A < A_{\max} \approx 4{,}58$ значение $\xi = 0$ получается лишь при $\eta = 0$; $A = A_{\max}$ соответствует волне предельной конфигурации (с самокасанием профиля в ложбине, под которым, по-видимому, может образовываться воздушный пузырек). Допредельные конфигурации получаются также из (23.7) при $\psi > 0$, но здесь мы на них останавливаться не будем.

В противоположном частном случае $\varkappa = 1$ получается $\operatorname{sn} u \to \operatorname{th} u$; $\operatorname{cn} u \to \operatorname{ch}^{-1} u$; $\operatorname{dn} u \to \operatorname{ch}^{-1} u$; $E(\operatorname{am} u) \to \operatorname{th} u$, так что правая часть (23.5″) принимает вид $u - \operatorname{th} u$. Любую линию тока $\psi = \psi_1 \geqslant 0$ можно принять за поверхность воды, поставив на ней краевое условие (23.6) с заменой в нем ψ_0 на $\psi_0 - \psi_1$, и тогда формулы (23.6) и (23.7) примут вид:

$$\operatorname{tg} \alpha (\psi_0 - \psi_1) = c/\alpha\gamma;$$

$$\alpha c (x + iz) = -\alpha (\varphi + i\psi_1) + 2\left\{\operatorname{th}\left[\frac{\alpha\varphi}{2} + \frac{i\alpha(\psi_1 - \psi_0)}{2}\right] + \operatorname{th}\frac{i\alpha\psi_0}{2}\right\}. \tag{23.8′}$$

Используя те же, что и выше, определения k и c_0, получаем

$$kx = -\alpha\varphi + \frac{2\Phi_1(1 + \Psi_1^2)}{1 + \Phi_1^2\Psi_1^2}; \quad k(z - z_0) = \frac{2\Phi_1^2\Psi_1(1 + \Psi_1^2)}{1 + \Phi_1^2\Psi_1^2};$$

$$kz_0 = -\alpha\psi_1 + 2(\Psi_0 - \Psi_1); \quad \frac{2\Psi_1}{1 - \Psi_1^2} = \frac{c^2}{c_0^2};$$

$$\Phi_1 = \operatorname{th}\frac{\alpha\varphi}{2}; \quad \Psi_0 = \operatorname{tg}\frac{\alpha\psi_0}{2}; \quad \Psi_1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha(\psi_0 - \psi_1)}{2} \tag{23.9′}$$

(если здесь положить $\psi_1 = 0$ только в формуле для c, то эти формулы будут уравнениями для линий тока $\psi = \psi_1 \geqslant 0$ под поверхностью воды $\psi = 0$). Величина z_0 здесь имеет смысл ординаты рассматриваемой линии тока при $\varphi = 0$ (и, тем самым, при $x = 0$). Определяя безразмерную амплитуду $A = ka$, как предельное значение величины $k(z - z_0)$ при $|x| \to \infty$ (т. е. $|\varphi| \to \infty$ или $|\Phi_1| \to 1$), получим

$$A = 2\Psi_1; \quad \frac{c^2}{c_0^2} = A\left(1 - \frac{A^2}{4}\right)^{-1}, \tag{23.10′}$$

откуда видно, что при $\Psi_1 > 0$ (когда волна является уединенной ложбиной) должно быть $A < 2$ (и при $A \to 2 - 0$ скорость c движения этой волны неограниченно возрастает), а при $\Psi_1 < 0$ (когда волна является уединенным гребнем) должно быть $|A| > 2$ (причем при $|A| \to 2 + 0$ скорость движения волны неограниченно возрастает, а при $|A| \to \infty$ стремится к нулю по закону

$c \sim 2c_0|A|^{-1/2}$). Пользуясь первыми двумя формулами (23.9′), условие $x=0$ можно привести к виду:

$$2\frac{\operatorname{sh}\varphi_0}{\varphi_0} - \operatorname{ch}\varphi_0 = \left(1-\frac{A^2}{4}\right)\left(1+\frac{A^2}{4}\right)^{-1};$$

$$\eta_0 = \frac{k(z-z_0)}{A} = \frac{\varphi_0}{2}\operatorname{th}\frac{\varphi_0}{2}, \qquad (23.12)$$

где $\varphi_0=\alpha\varphi$. Левая часть первого из этих уравнений при $\varphi_0=0$ обращается в единицу, а с ростом $|\varphi_0|$ монотонно убывает. Корень $|\varphi_0(A)|$ этого уравнения при $A=0$ обращается в ноль, а с ростом $|A|$ монотонно возрастает (достигая при $|A|=2$ значения $|\varphi_0|\approx 1{,}9$). Он соответствует точке самопересечения профиля волны, относительная ордината которой $\eta_0(A)$ при $A=0$, естественно, равна нулю, а с ростом $|A|$ монотонно возрастает (достигая при $|A|=2$ значения $\eta_0\approx 0{,}7$, а при $|A|\to\infty$ стремясь к конечному пределу, в котором правая часть первого уравнения (23.12) обращается в -1). В качестве иллюстрации рассмотрим случай $\psi_1=0$, в котором, исключив из (23.9′) параметры Φ_1 и Ψ_1 и используя переменные $\xi=kx/A$ и $\eta=kz/A$, получаем явное уравнение профиля волны

$$\pm\xi = \frac{2}{A}\eta^{1/2}\left[1+\frac{A^2}{4}(1-\eta)\right]^{1/2} + \frac{1}{A}\ln\frac{1-\eta^{1/2}\left[1+\frac{A^2}{4}(1-\eta)\right]^{-1/2}}{1+\eta^{1/2}\left[1+\frac{A^2}{4}(1-\eta)\right]^{-1/2}}. \qquad (23.11')$$

Графики этой функции при различных значениях A приведены на рис. 23.1. Физический смысл здесь можно приписать лишь ветви при $\eta \geqslant \eta_0(A)$, на которой потенциал скорости φ претерпевает разрыв в точке $\xi=0$ (так что уединенных волн со всюду непрерывно меняющимся вдоль линий тока потенциалом скорости в рассмотренном семействе решений не имеется).

Многочисленные работы были посвящены исследованию установившихся гравитационно-капиллярных волн как аналитическому, с помощью первых членов тех или иных рядов (одним из первых здесь был Дж. Уилтон, 1915), так и численному. При этом на поверхности воды надлежит использовать наиболее общее краевое условие (21.24). Ограничимся далее только случаем глубокой воды и введем в указанное краевое условие параметр η, определяемый, как нормированная разность квадратов скоростей распространения волн конечной и бесконечно малой амплитуды (последняя определяется, как ω/k, где ω дается формулой (18.8) при $h\to\infty$, а график ее зависимости от k приведен на рис. 18.1):

$$c^2 - \frac{1}{2}c_m^2\left(p+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}c_m^2\eta; \quad p=\frac{k_m}{k}. \qquad (23.13)$$

Параметр η вводится в равенство (21.24) заменой в первом слагаемом левой части c^2 на $\gamma k(\eta p+p^2+1)$. Заметим теперь, что каждому фиксированному значению скорости распространения волн малой амплитуды соответствуют две волны (см. рис. 18.1), длины которых различаются в p^2 раз. В общем случае это число не целое, и тогда формулы, описывающие гравитационно-капиллярную волну, можно построить, представляя функцию $\Omega(w_1)$

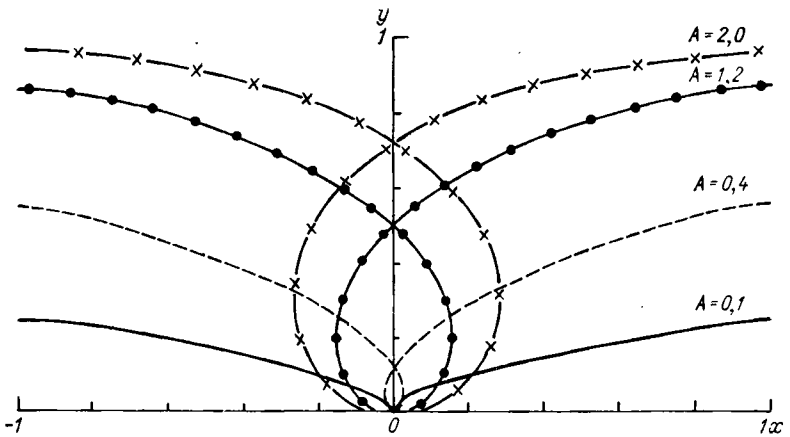


Рис. 23.1. Нормированные профили (23.11) капиллярных солитонов на глубокой воде при различных безразмерных амплитудах A.

в (21.5) и параметр η в виде рядов $\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2+\varepsilon^3\Omega_3+\ldots$ и $\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\varepsilon^3\eta_3+\ldots$. Коэффициенты этих рядов определяются последовательно из требования голоморфности функций $\Omega_n(w_1)$ при $|w_1|\leqslant 1$ и краевых условий, получаемых из (21.24). Опуская детали этого вывода, выпишем лишь результат:

$$\Omega(w_1)=\varepsilon w_1+\frac{3}{2}\frac{p^2}{p^2-2}\varepsilon^2 w_1^2+ \\ +\frac{1}{2}\frac{\frac{17}{3}p^4-\frac{41}{24}p^2+\frac{1}{4}}{(p^2-2)(p^2-3)}\varepsilon^3 w_1^3+\ldots, \qquad (23.14)$$

причем $\eta_1=0$ и $\eta_2=(8p^4+p^2+2)/8p(p^2-2)$.

Учитывая (21.5) и интегрируя (21.3), получим

$$-\frac{i}{k}w=\ln w_1+\varepsilon(w_1-1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{2p^2-1}{p^2-2}(w_1^2-1)+ \\ +\frac{3\varepsilon^3}{4}\frac{p^4-\frac{11}{8}p^2+\frac{1}{4}}{(p^2-2)(p^2-3)}(w_1^3-1)+\ldots, \qquad (23.15)$$

откуда при $w_1 = \exp(i\chi)$ получается параметрическое представление поверхности волны, а скорость волны определяется из (23.13) при $\eta \approx \varepsilon^2\eta_2$. В случаях, когда $p^2 = 2, 3, 4, \ldots$, из упомянутых выше двух волн более длинная будет содержать p^2 более коротких («рябь Уилтона»). В этих случаях ряды (23.15) не годятся, и решения для голоморфных функций $\Omega_n(w_1)$ и чисел η_n должны выбираться иначе (В. Пирсон и П. Файф, 1961), но на этом мы здесь останавливаться не будем.

Как и волны Стокса, периодические гравитационно-капиллярные волны конечной амплитуды модуляционно неустойчивы: с помощью аналогичного (22.29) нелинейного уравнения Шредингера для комплексной огибающей можно убедиться, что в случае глубокой воды модуляционная устойчивость имеет место лишь в узком интервале волновых чисел $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^{1/2} < \frac{k}{k_m} < 2^{-1/2}$; неустойчивость же порождает «возврат ФПУ». Случай мелкой воды для капиллярных эффектов в природных условиях не очень интересен. Отметим все же, что в этом случае нетрудно найти гравитационно-капиллярные солитонные решения аналогичного (22.19′) уравнения Кадомцева—Петвиашвили

$$\left(\dot{\zeta} + \frac{3c_0}{2h}\zeta\zeta' - q\zeta'''\right)' + \frac{c_0}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = 0; \quad q = \frac{c_0h^2}{6} - \frac{\gamma h}{2c_0} \tag{23.16}$$

(В. П. Красицкий, 1982), при $q > 0$ имеющего устойчивые одномерные солитонные решения — «наклонные солитоны»

$$\zeta = \zeta_m \operatorname{ch}^{-2}\left[\left(\frac{c_0\zeta_m}{2qh}\right)^{1/2}(x - \varkappa y - Ut)\right]; \quad U = c_0\left(1 + \frac{\varkappa^2}{2} + \frac{\zeta_m}{2h}\right). \tag{23.17}$$

При $q < 0$ одномерные солитоны неустойчивы, но имеются устойчивые двумерные так называемые *рациональные* солитоны

$$\zeta = -\zeta_m\left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - (x' + by')^2 + (ay')^2}{\left[\left(\frac{h}{a}\right)^2 + (x' + by') + (ay')^2\right]^2}, \tag{23.18}$$

где x', y' — некоторые нормированные (по-разному) галилеевские координаты, а именно:

$$x' = -\gamma^{1/6}h^{1/2}|q|^{-1/3}(x - Ut) \quad \text{и} \quad y' = 6^{1/2}\gamma^{1/12}c_0^{-1}h^{-1/4}(y - Vt),$$

причем $U = c_0\left(1 - \frac{3\zeta_m}{16h} - \frac{V^2}{2c_0^2}\right)$. При столкновениях такие солитоны никак не взаимодействуют (не происходят даже сдвиги фаз).

§ 24. Гамильтонов формализм

Для теоретического описания *неустановившихся* свободных волн можно использовать выведенные В. Е. Захаровым (1968) гамильтоновы уравнения (18.5). Далее в них будет удобно использовать преобразования Фурье обобщенной координаты Φ и обобщенного импульса ζ по горизонтальным координатам:

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int \Phi(\mathbf{x},\ t)\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,d\mathbf{x};\quad \zeta_{\mathbf{k}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int \zeta(\mathbf{x},\ t)\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,d\mathbf{x}. \tag{24.1}$$

Ограничиваясь далее случаем глубокой воды, решение уравнения Лапласа для потенциала скорости можно представить в виде

$$\varphi_{\mathbf{k}}(z)=e^{kz}\Big[\Phi_{\mathbf{k}}+\int \Phi_{\mathbf{k}_1}\zeta_{\mathbf{k}_2}k_1\,\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2-\frac{1}{2}\int \Phi_{\mathbf{k}_1}\zeta_{\mathbf{k}_2}\zeta_{\mathbf{k}_3}k_1\times$$

$$\times\left(|\mathbf{k}-\mathbf{k}_3|+|\mathbf{k}-\mathbf{k}_2|-k\right)\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3+\ldots\Big]. \tag{24.2}$$

В гамильтоновых уравнениях целесообразно совершить *каноническое* преобразование к *нормальным* переменным — комплексным амплитудам волн $ia^*_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}$, являющимся классическими аналогами квантовых операторов рождения и уничтожения частиц:

$$\zeta_{\mathbf{k}}=\left(\frac{k}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}(a_{\mathbf{k}}+a^*_{-\mathbf{k}});\quad \Phi_{\mathbf{k}}=-i\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2k}\right)^{1/2}(a_{\mathbf{k}}-a^*_{-\mathbf{k}}), \tag{24.3}$$

где $\omega_{\mathbf{k}}$ — частота элементарной волны, определяемая в общем случае формулой (18.8). Тогда гамильтоновы уравнения примут вид:

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t}=-i\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta a^*_{\mathbf{k}}};\quad \mathscr{H}=\mathscr{H}_2+\mathscr{H}_3+\mathscr{H}_4+\ldots;$$

$$\mathscr{H}_2=\int \omega_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}a^*_{\mathbf{k}}\,d\mathbf{k};$$

$$\mathscr{H}_3=\int V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\left(a^*_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_2}+a_{\mathbf{k}}a^*_{\mathbf{k}_1}a^*_{\mathbf{k}_2}\right)\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2+$$

$$+\frac{1}{3}\int U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\left(a^*_{\mathbf{k}}a^*_{\mathbf{k}_1}a^*_{\mathbf{k}2}+a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_2}\right)\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2;$$

$$\mathscr{H}_4=\frac{1}{2}\int W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}a^*_{\mathbf{k}}a^*_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_2}a_{\mathbf{k}_3}\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3+\ldots, \tag{24.4}$$

где в $\mathscr{H}_4$ выписано лишь самое важное слагаемое. Коэффициенты трехволновых взаимодействий в случае гравитационных волн на глубокой воде суть однородные функции степени $^7/_4$:

$$8\pi V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}=(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1-kk_1)\left(\frac{gk_2}{2kk_1}\right)^{1/4}+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_2-kk_2)\left(\frac{gk_1}{2kk_2}\right)^{1/4}+$$

$$+(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2+k_1k_2)\left(\frac{gk}{2k_1k_2}\right)^{1/4}, \tag{24.5}$$

а $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ получается отсюда заменой обоих минусов на плюсы. Коэффициенты четырехволновых взаимодействий $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ суть однородные функции третьей степени. Сохранение одного только гамильтониана $\mathscr{H}_2$ дает для $a_{\mathbf{k}}$ линейное уравнение $\dot{a}_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} = 0$, т. е. соответствует линейной теории волн § 18. Описываемые гамильтонианом $\mathscr{H}_3$ трехволновые взаимодействия в случае гравитационных волн на глубокой воде не могут быть распадными (т. е. удовлетворять условиям резонанса $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}$ при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, при которых либо волна $\mathbf{k}$ распадается на волны $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, либо, наоборот, они сливаются, образуя волну $\mathbf{k}$) и поэтому могут быть устранены каноническим (т. е. сохраняющим вид гамильтоновых уравнений (24.4)) преобразованием нормальных переменных $a_{\mathbf{k}} \to b_{\mathbf{k}}$, главные члены которого для этого должны иметь вид

$$a_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}} + \int \frac{V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2}}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 + \int \frac{V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{k}_2}}{\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_2}} \times$$

$$\times \delta_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3} \int \frac{U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} b^*_{\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{k}_2}}{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2. \quad (24.6)$$

В переменных $b_{\mathbf{k}}$ гамильтониан будет иметь вид $\mathscr{H} = \overline{\mathscr{H}}_2 + \overline{\mathscr{H}}_4 + \ldots$, где теперь

$$\overline{\mathscr{H}}_4 = \frac{1}{2} \int \overline{W}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} b^*_{\mathbf{k}} b^*_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3, \quad (24.7)$$

а $\overline{W}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ — новая однородная функция третьей степени (вычисленная В. Е. Захаровым, 1968), симметричная по $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}$, по $\mathbf{k}_3$ и $\mathbf{k}_2$ и по парам $(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$ и $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$. Случай, в котором в гамильтониане достаточно сохранять лишь первые два слагаемых $\overline{\mathscr{H}}_2 + \overline{\mathscr{H}}_4$, а слагаемыми более высокого порядка по $b_{\mathbf{k}}$ можно пренебречь, назовем *приближением слабой нелинейности*. В этом приближении гамильтониан инвариантен относительно калибровочного преобразования $b_{\mathbf{k}} \to b_{\mathbf{k}} e^{i\alpha}$, вследствие чего соответствующее уравнение движения

$$\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} = -i \int \overline{W}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} b^*_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3 \quad (24.8)$$

сохраняет кроме полных импульса и энергии также еще так называемый *интеграл волнового действия*

$$n = \int |b_{\mathbf{k}}|^2\, d\mathbf{k} \quad (24.9)$$

(подчеркнем, однако, что его можно считать сохраняющимся только в приближении слабой нелинейности). Введем пространственный *спектр волнового действия* $N_{\mathbf{k}}(t)$ соотношением

$$\langle a_{\mathbf{k}}(t)\, a^{*}_{\mathbf{k}_1}(t)\rangle = N_{\mathbf{k}}(t)\,\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1};\quad N_{\mathbf{k}} = F_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}}, \tag{24.10}$$

где угловые скобки обозначают статистическое осреднение, а $F_{\mathbf{k}}$ — пространственный спектр поля волн $\zeta(\mathbf{x}, t)$, так что пространственно-временной спектр волнения записывается в виде

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}\omega}\zeta^{*}_{\mathbf{k}_1\omega_1}\rangle = F_{\mathbf{k}\omega}\,\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}\,\delta_{\omega-\omega_1};\quad F_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{2}\left(F_{\mathbf{k}}\,\delta_{\omega-\omega\mathbf{k}} + F_{-\mathbf{k}}\,\delta_{\omega+\omega\mathbf{k}}\right), \tag{24.11}$$

(причем если волны не являются свободными, то их пространственно-временной спектр сосредоточен не строго на дисперсионной поверхности, а лишь *вблизи* нее, т. е. δ-функции $\delta_{\omega\pm\omega_{\mathbf{k}}}$ следует брать несколько размазанными). В дальнейшем мы будем приближенно отождествлять (24.10) с корреляцией $\langle b_{\mathbf{k}} b^{*}_{\mathbf{k}_1}\rangle$ (несмотря на небольшое различие, вытекающее из (24.6)). Тогда, выразив $b_{\mathbf{k}}$ из (24.8) через правую часть с помощью функции Грина, можно убедиться, что скорость эволюции спектра волнового действия за счет волновых взаимодействий $\partial N_{\mathbf{k}}/\partial t$ выражается через взвешенный интеграл от шестерной корреляции амплитуд $b_{\mathbf{k}}$, и если выразить ее через парные корреляции по формуле, справедливой для многомерного гауссова распределения вероятности, то в итоге получится так называемое *кинетическое уравнение*

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = I_{\mathbf{k}} = 2\pi \int |\overline{W}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 \left(N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_2}N_{\mathbf{k}_3} + N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_2}N_{\mathbf{k}_3} - N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_2} - \right.$$

$$\left. - N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_3}\right)\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}\,\delta_{\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2}-\omega_{\mathbf{k}_3}}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3 \tag{24.12}$$

(К. Хассельман, 1962, 1963; В. Е. Захаров и Н. Н. Филоненко, 1966; В. Е. Захаров и В. С. Львов, 1975). Интеграл $I_{\mathbf{k}}$ можно записать в виде $A_{\mathbf{k}} - B_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}$, где $A_{\mathbf{k}}$ определяется первым слагаемым в круглых скобках, а $B_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}}$ — остальными тремя слагаемыми. Это позволяет определить размазанную δ-функцию в соотношении (24.11) формулой

$$\delta_{\omega-\omega_{\mathbf{k}}} = \pi B_{\mathbf{k}}\left[(\omega - \omega_{\mathbf{k}} - \delta\omega_{\mathbf{k}})^2 + B_{\mathbf{k}}^2\right]^{-1};$$

$$\delta\omega_{\mathbf{k}} = 2\int W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_1}\, d\mathbf{k}_1, \tag{24.13}$$

где $\delta\omega_{\mathbf{k}}$ — нелинейная поправка к закону дисперсии. Интеграл $I_{\mathbf{k}}$ удовлетворяет тождествам

$$\int \mathbf{k} I_{\mathbf{k}}\, d\mathbf{k} = \int \omega_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}\, d\mathbf{k} = \int I_{\mathbf{k}}\, d\mathbf{k} = 0, \tag{24.14}$$

вследствие которых кинетическое уравнение сохраняет импульс волнового поля $\mathbf{m}=\int \mathbf{k} N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$, его энергию $e=\int \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$ и волновое действие $n=\int N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$. Вне интервалов накачки и диссипации энергии спектры волн могут определяться лишь спектральными потоками этих сохраняющихся величин $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{m}}$, $\varepsilon_e=\dot{e}$ и $\varepsilon_n=\dot{n}$. Такие спектры называются *колмогоровскими*. Они могут быть найдены, как стационарные решения кинетического уравнения (24.12), т. е. в изотропном случае (когда $\mathbf{m}=0$, а потому и $\mathbf{q}=0$) как решения $N_{\mathbf{k}}$ уравнения $I_{\mathbf{k}}=0$. Переходя в нем к новым независимым переменным $\omega=\omega_{\mathbf{k}}$, приведем это уравнение к виду

$$\int S_{\omega\omega_3\omega_1\omega_2}\left(N_{\omega_1}N_{\omega_2}N_{\omega_3}+N_{\omega}N_{\omega_1}N_{\omega_2}\right)- \\ -N_{\omega}N_{\omega_1}N_{\omega_3}-N_{\omega}N_{\omega_2}N_{\omega_3})\,d\omega_1\,d\omega_2=0, \qquad (24.15)$$

где $\omega_3=\omega_1+\omega_2-\omega$, а $S_{\omega\omega_3\omega_1\omega_2}$ — результат осреднения по углам выражения

$$|\overline{W}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2\,\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}k_1k_2k_3\frac{\partial k_1}{\partial\omega_1}\frac{\partial k_2}{\partial\omega_2}\frac{\partial k_3}{\partial\omega_3}. \qquad (24.15')$$

причем интегрирование в (24.15) ведется в плоскости $\omega_1\omega_2$ по симметричной области с асимптотами $\omega_1=\omega$ и $\omega_2=\omega$. Функция $S_{\omega\omega_3\omega_1\omega_2}$ так же симметрична по индексам, как и $\overline{W}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$, и является однородной функцией 20-й степени, вследствие чего уравнение (24.15) имеет точные степенные решения $N_{\omega}\sim\omega^{-\alpha}$, для которых оно приводится к виду

$$\int\frac{S_{\omega\omega_3\omega_1\omega_2}}{(\omega_1\omega_2\omega_3)^{\alpha}}\left[1+\left(\frac{\omega_3}{\omega}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^{\alpha}\right]\times \\ \times\left[1+\left(\frac{\omega_3}{\omega}\right)^{3\alpha-23}-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^{3\alpha-23}-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^{3\alpha-23}\right]d\omega_1\,d\omega_2=0, \qquad (24.16)$$

причем интегрирование ведется лишь по подобласти, в которой $\omega_1<\omega$, $\omega_2<\omega$ (В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, 1966). Подынтегральное выражение здесь обращается в ноль при $\alpha=0$, 1, $^{23}/_3$, 8 (и знакопостоянно при остальных α). Первые два из этих решений (термодинамически равновесные) не имеют физического смысла, так как при них интегралы

$$n=\int_0^{\infty}I(\omega)d\omega \quad\text{и}\quad e=\int_0^{\infty}\omega I(\omega)\,d\omega=\int_0^{\infty}S(\omega)d\omega$$

(где

$$I(\omega)=N_{\omega}\left(k\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)_{k=\omega^2/g}=2\omega^3N_{\omega}g^{-1},$$

а $S(\omega)$ — обычный частотный спектр волнения) расходятся при $\omega=\infty$. Другим двум решениям соответствуют колмогоровские спектры:

$$S(\omega)\sim g^{4/3}\varepsilon_n^{1/3}\omega^{-11/3};\quad F_{\mathbf{k}}\sim\varepsilon_n^{1/3}k^{-10/3}; \tag{24.17}$$

$$S(\omega)\sim g^{4/3}\varepsilon_e^{1/3}\omega^{-4};\quad F_{\mathbf{k}}\sim g^{-1/6}\varepsilon_e^{1/3}k^{-7/2}. \tag{24.18}$$

Первый из них моделирует поток действия из высокочастотной области накачки в низкочастотную область, второй — поток энергии из иизкочастотной области накачки в высокочастотную область. Если накачка с инкрементом β сосредоточена в области $\omega\sim\omega_0$ с шириной такого же порядка, то приравнивание ее к $I_{\mathbf{k}}$ дает $S(\omega)\sim(\beta\omega_0)^{1/2}|\overline{W}|^{-1}$. Если при $\omega<\omega_0$ накачка и диссипация отсутствуют, то там устанавливается спектр (24.17), нижний предел которого определяется эффектами нестационарности, неоднородности или низкочастотной диссипации. Если высокочастотная диссипация расположена в области $\omega\sim\omega_1\gg\omega_0$ (что, правда, вряд ли реализуемо, так как обычно, по-видимому, $I_{\mathbf{k}}$ не успевает уравновесить накачку, и излишки энергии сбрасываются обрушиванием волн), то при $\omega_0<\omega<\omega_1$ устанавливается спектр (24.18).

В случаях гравитационных волн на воде конечной глубины, а также любых гравитационно-капиллярных и чисто капиллярных волн становятся возможными распадные трехволновые взаимодействия, удовлетворяющие условиям резоианса $\omega_{\mathbf{k}}=\omega_{\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_2}$ при $\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2$, и в (24.4) основную роль приобретает трехволновой гамильтониан $\mathscr{H}_3$. Кинетическое уравнение в этих случаях имеет вид

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t}=I_{\mathbf{k}}=\int\Big[T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\big(N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_2}-N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}-N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_2}\big)\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\times$$

$$\times\delta_{\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2}}+2T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2}\big(N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_2}+N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_1}-N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}_2}\big)\times$$

$$\times\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\delta_{\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_2}}\Big]d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2. \tag{24.12'}$$

Оно сохраняет импульс и энергию, но не сохраняет волновое действие. При этом в изотропном случае имеется лишь один колмогоровский спектр. Для чисто капиллярных волн он имеет вид

$$S(\omega)\sim\gamma^{1/3}\varepsilon_e^{1/2}\omega^{-13/6};\quad F_{\mathbf{k}}\sim\gamma^{-1/4}\varepsilon_e^{1/2}k^{-15/4} \tag{24.18'}$$

и моделирует поток энергии в высокочастотную область.

В случаях слабо горизонтальио-неоднородного и нестационарного поля волн, описываемого лучевой теорией § 19, и с учетом скоростей накачки $P_{\mathbf{k}}^{+}$ и диссипации $P_{\mathbf{k}}^{-}$ справедливо следующее обобщение кинетического уравнения:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial k_\alpha}\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial\sigma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial k_\alpha}=I_{\mathbf{k}}+P_{\mathbf{k}}^{+}-P_{\mathbf{k}}^{-}, \tag{24.19}$$

где $\sigma=\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$ определяется формулой (19.3). Рефракционные члены в левой части здесь существенны, например, для капиллярных волн, которые в реальных океанских условиях всегда находятся на более крупных гравитационных волнах и концентрируются на их наветренных склонах.

§ 25. Ветровые волны

В природе волны на поверхности воды образуются и развиваются под действием турбулентного ветра и, в свою очередь, вносят возмущения в поля скорости ветра и давления в приводном слое воздуха, которые в результате можно представить в виде $\mathbf{u}_a=\mathbf{U}+\mathbf{u}'+\mathbf{u}''$ и $p_a=P+p'+p''$, где $\mathbf{U}=\mathbf{U}(z)$, $P=P(z)$ — средние (горизонтально-однородные и квазистационарные) поля скорости ветра и атмосферного давления при отсутствии волн, $\mathbf{u}'$ и p' — турбулентные флюктуации этих полей при отсутствии волн, а $\mathbf{u}''$ и p'' — возмущения, вносимые волнами.

В начальный период развития волн из состояния покоя будем описывать все возмущения в линейном приближении (хотя оно, вероятно, быстро становится непригодным для описания капиллярной ряби), так что все граничные условия на поверхности воды можно ставить при $z=0$, и, в частности, турбулентные флюктуации атмосферного давления p' и касательных напряжений ветра $\tau'_i=\rho_a\nu_a\dfrac{\partial u'_i}{\partial z}$ можно рассматривать, как заданные поля над плоской поверхностью раздела. Здесь нам будет удобнее вместо (24.3) использовать иначе нормированные нормальные переменные:

$$a_{\mathbf{k}}^{+}=\omega_{\mathbf{k}}^{-1}\dot{\zeta}_{\mathbf{k}}-i\zeta_{\mathbf{k}};\quad a_{\mathbf{k}}^{-}=\omega_{\mathbf{k}}^{-1}\dot{\zeta}_{\mathbf{k}}+i\zeta_{\mathbf{k}}. \tag{25.1}$$

В самый начальный период развития волн, пока еще можно пренебрегать вызываемыми ими возмущениями в атмосфере, линейная теория приводит к уравнению

$$\dot{a}_{\mathbf{k}}^{+}+i\omega_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^{+}=-\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\rho g\,\Delta_k}\left(p'_{\mathbf{k}}+i\frac{k_\alpha}{k}\tau'_{\alpha\mathbf{k}}-2\tau_{3\mathbf{k}}\right)-\gamma_{\mathbf{k}}\left(a_{\mathbf{k}}^{+}+a_{\mathbf{k}}^{-}\right), \tag{25.2}$$

где $\Delta_k=1+\gamma k^2/g$, а $\gamma_{\mathbf{k}}$ — декремент затухания волн за счет турбулентной вязкости воды и воздуха (учет которого нужен для удовлетворения краевых условий на поверхности воды); эта форма уравнения линейной теории выведена В. П. Красицким (1980). Отсюда получается

$$\frac{\partial F_{\mathbf{k}}}{\partial t}=\alpha_{\mathbf{k}}-2\gamma_{\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}};\quad \alpha_{\mathbf{k}}=\frac{\pi\omega_{\mathbf{k}}^2}{\rho^2 g^2\,\Delta_{\mathbf{k}}^2}\,\Pi_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}, \tag{25.3}$$

где $\Pi_{k\omega_k}$ — пространственно-временной спектр силы атмосферного воздействия на поверхность воды (выражаемой первой круглой скобкой в правой части (25.2)). В пренебрежении вязким затуханием из (25.3) получается линейный рост спектра волн со временем $F_k = \alpha_k t$. Поскольку спектр $\Pi_{k\omega_k}$ здесь берется на частоте свободных волн ω_k, генерация ветровых волн первично оказывается резонансной реакцией свободных волн на флюктуирующие атмосферные воздействия (впервые она была описана О. Филлипсом, 1957, учитывавшим из воздействий только p').

При дальнейшем росте волн становятся заметными волновые возмущения в приводном слое воздуха, и они оказываются гидродинамически неустойчивыми. Эту их неустойчивость можно попытаться описать линеаризированными *квазиламинарными* уравнениями (без турбулентности и вязкости) с краевыми условиями $p''_\zeta = p - \gamma\rho\Delta\zeta$ и $u''_3 = \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} + U_\alpha \dfrac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}$ при $z=0$ (такую теорию впервые построил Дж. Майлс, 1957). При этом вместо (25.2) получается следующее уравнение (приведенное к такой форме В. П. Красицким и М. М. Заславским, 1978):

$$\dot{a}^+_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} a^+_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\left(\beta^+_{\mathbf{k}} a^+_{\mathbf{k}} - \beta^-_{\mathbf{k}} a^-_{\mathbf{k}}\right);$$

$$\beta^s_{\mathbf{k}} = -\frac{\pi\rho_\alpha\omega_{\mathbf{k}}}{\rho g \Delta_{\mathbf{k}}}\left[\frac{U''}{U'}\,|\,w^s_{\mathbf{k}}\,|^2\right]_{z^s_{\mathbf{k}}} \operatorname{sign}\cos\theta_{\mathbf{k}}, \qquad (25.4)$$

где $\theta_{\mathbf{k}}$ — угол между направлениями $\mathbf{U}$ и $\mathbf{k}$; $s = \pm$; выражение для $\beta^s_{\mathbf{k}}$ справедливо при $s\cos\theta > 0$ (а при $s\cos\theta \leqslant 0$ оно равно нулю), а $w^s_{\mathbf{k}}(z)$ — решение уравнения Рэлея (11.11)

$$\left(U_{\mathbf{k}} - c^s_{\mathbf{k}}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right) w^s_{\mathbf{k}} - U''_{\mathbf{k}} w^s_{\mathbf{k}} = 0; \qquad (25.4')$$

$$w^s_{\mathbf{k}} = U_{\mathbf{k}} - c^s_{\mathbf{k}} \quad \text{при} \quad z = 0; \quad w^s_{\mathbf{k}} \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty,$$

причем

$$U_{\mathbf{k}} = U\cos\theta_{\mathbf{k}}; \quad c^s_{\mathbf{k}} = sk^{-1}\omega_{\mathbf{k}} + ik^{-1}\lambda^s_{\mathbf{k}}$$

(где $\lambda^s_{\mathbf{k}}$ — малая вещественная постоянная, в (25.4) заменяемая нулем); $z^s_{\mathbf{k}}$ — корень уравнения $U\cos\theta_{\mathbf{k}} = sk^{-1}\omega_{\mathbf{k}}$. Неустойчивость (рост волн) возникает, если $U' > 0$, $U'' < 0$, например, при логарифмическом профиле скорости $U(z)$. Учитывая обе правые части (25.2) и (25.4), получаем

$$F_{\mathbf{k}} = \frac{\alpha_{\mathbf{k}}}{\beta_{\mathbf{k}} - 2\gamma_{\mathbf{k}}}\left[e^{(\beta_{\mathbf{k}} - 2\gamma_{\mathbf{k}})t} - 1\right], \qquad (25.5)$$

где $\beta_k = \beta_k^+$. Заметим, однако, что квазиламинарная теория занижает скорости β_k экспоненциального роста ветровых волн в несколько раз по сравнению с экспериментальными данными. Этот недостаток можно подправить, учтя взаимодействия волновых возмущений с энергонесущими крупномасштабными компонентами атмосферной турбулентности (такое приближение называется *адиабатическим*). Поскольку они квазигоризонтальны, их можно просто прибавить к U, а поскольку в пределах приводного слоя воздуха они мало меняются с высотой, эту добавку можно приближенно взять в виде ξu_*, где u_* — скорость *трения*, а ξ — гауссова случайная величина с нулевым средним значением (М. М. Заславский, 1974).

Вязкое затухание волн, даже с учетом влияния атмосферы, мало, и главным механизмом диссипации их энергии является обрушивание их гребней при потере устойчивости — когда локальные ускорения на гребнях превышают некоторую определенную долю от g (для волн Стокса — $g/2$). При таком механизме диссипации спектральные интервалы накачки $\Delta k^+ = (k < k^+)$ и диссипации $\Delta k^- = (k > k^-)$ (вносящие основной вклад, например 80 %, в интегральные значения накачки и диссипации) должны перекрываться, т. е. $k^+ < k^-$, и в области $k^+ < k < k^-$ устанавливается статистическое равновесие между накачкой и диссипацией, определяемое параметром g (и в слабой степени скоростью трения ветра u_*, определяющей поверхностный дрейф, который может способствовать обрушиванию). Спектр F_k поверхности с острыми гребнями должен быть универсальным — пропорциональным k^{-4}, так как он является средним квадратом двумерного преобразования фурье-функции, описывающей поверхность, а оно пропорционально k^{-2}. Из соображений размерности $F_k = k^{-4} f(\theta)$, где $\theta = \operatorname{arctg}(k_2/k_1)$ (слабую зависимость от ku_*^2/g мы далее не указываем). Получающаяся здесь независимость от k углового распределения энергии, по-видимому, может приближенно выполняться лишь при самых больших k. Поэтому лучше, не используя предположения изотропности, пользоваться спектром модулей волновых чисел $E(k)$ и определяемым через него при помощи дисперсионного соотношения спектром частот $S(\omega)$:

$$E(k) = \int_{-\pi}^{\pi} kF_k\, d\theta; \quad S(\omega) = \left[E(k)\left|\frac{\partial \omega_k}{\partial k}\right|^{-1}\right]_{k=\varkappa(\omega)}, \qquad (25.6)$$

где $k = \varkappa(\omega)$ — решение уравнения $\omega = \omega(k)$. Определяя $E(k)$ из соображений размерности, а $S(\omega)$ по второй формуле (25.6) при $\omega_k^2 = gk$, получаем

$$E(k) = \frac{1}{2}\beta k^{-3}; \quad S(\omega) = \beta g^2 \omega^{-5} \qquad (25.7)$$

(О. Филлипс, 1958). По эмпирическим данным, $\beta \approx 6 \cdot 10^{-3}$, причем этот коэффициент обнаруживает некоторую изменчивость, по-видимому, из-за влияния на равновесные волны ускорений, создаваемых более длинными волнами, а также, возможно, из-за стратификации верхнего слоя океана. Отметим, что в интервале равновесия спектральный тензор наклонов поверхности моря $\partial\zeta/\partial x_i$ должен иметь вид $C_{ij}\omega^{-1}$, причем вследствие симметрии относительно направления ветра $C_{12}=C_{21}=0$; это предсказание подтверждено измерениями, причем получилось $C_{11}+C_{22}=8\cdot 10^{-3}$.

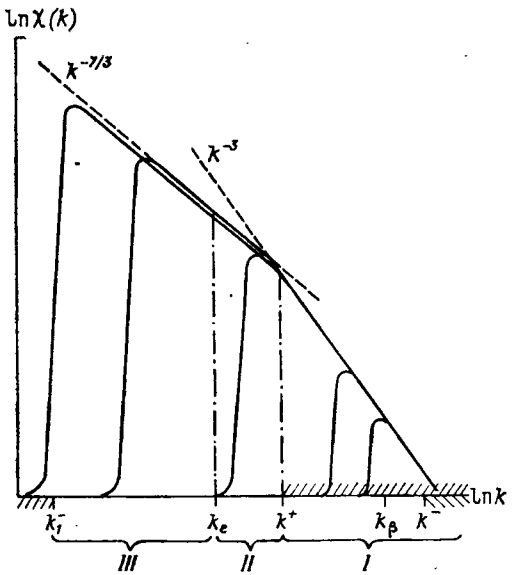


Рис. 25.1. Схема развития спектра ветровых волн.

Для гравитационных волн на поверхности воды конечной глубины вместо второй формулы (25.7) получается

$$S(\omega)=\beta g^2\omega^{-5}\varphi(\omega_h);\quad \varphi(\omega_h)=\frac{\omega_h}{\varkappa^2}\left[1+\frac{2\omega_h^2\varkappa}{\operatorname{sh}(2\omega_h^2\varkappa)}\right]^{-1}, \qquad (25.7')$$

где $\omega_h=\omega(h/g)^{1/2}$, а $\varkappa=\varkappa(\omega_h)$ — корень уравнения $\varkappa \operatorname{th}(\omega_h^2\varkappa)=1$. При $h\to\infty$ получается $\varphi\to 1$, но при $\omega_h\to 0$ получается $\varphi\sim\omega_h^2/2$ и $S(\omega)\sim\frac{1}{2}\beta g h\omega^{-3}$, что подтверждается наблюдениями на мелком море. Для капиллярных волн существование равновесного интервала гадательно; если он все же существует, то в нем

$$E(k)=\beta_1 k^{-3};\quad S(\omega)=\beta_1\gamma^{2/3}\omega^{-7/3}, \qquad (25.8)$$

с небольшим отличием от (24.18′), а спектральный тензор наклонов должен иметь вид $C'_{ij}\omega^{-1}$ (что подтверждается измерениями, давшими $C'_{11}+C'_{22}=1\cdot 10^{-2}$).

Общая картина развития ветрового волнения получается следующей (см. рис. 25.1). Волны возникают в интервале накачки

Δk^+ на волновом числе k_β максимума функции $P_k^+ - P_k^-$ — вероятно, у границы k^- интервала диссипации. При $k^+ < k < k^-$ (интервал I) спектр волн должен описываться законом О. Филлипса $E(k) \sim k^{-3}$. С ростом волн энергонесущая часть спектра переходит в область $k_e < k < k^+$ (интервал II), где действует полное кинетическое уравнение (24.19), а затем в область $k_1^- < k < k_e$ (интервал III) вне интервала накачки, где действует упрощенное кинетическое уравнение (24.12), и спектры волн имеют вид (24.17). Будем пользоваться безразмерными волновыми числами $\tilde{k} = kU^2/g$ и частотами $\tilde{\omega} = \omega U/g$. По лабораторным экспериментальным данным $\tilde{\omega}_\beta \sim 30$ и $\tilde{k}_\beta \approx \tilde{\omega}_\beta^2 \sim 10^3$ (тогда как в квазиламинарной модели Майлса по нижней границе логарифмического профиля скорости при гладком обтекании получается только $\tilde{\omega}_\beta \sim 3$, $\tilde{k}_\beta \sim 10$). По эмпирическим оценкам, $\tilde{\omega}^+ = 2 \ldots 2{,}5$ и $\tilde{k}^+ = 4 \ldots 6$; $\tilde{\omega}_e = 1{,}5 \ldots 2$ и $\tilde{k}_e = 2 \ldots 4$; безразмерный спектр (24.17) при $\tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}_m \sim 1$, $\tilde{\omega} < \tilde{\omega}^+$ получается в виде

$$(g^3/U^5)\, S(\omega) = \tilde{S}(\tilde{\omega}) = 2a\tilde{\varepsilon}_n^{1/3}\tilde{\omega}^{-11/3}\Theta_s(\tilde{\omega}/\tilde{\omega}_m), \qquad (25.9)$$

где $\Theta_s(x)$ — слегка размазанная функция Хевисайда (скачок от 0 до 1 в точке x), причем $b_s = 2a\tilde{\varepsilon}_n^{1/3} \approx 4 \cdot 10^{-3}$; $\tilde{\varepsilon}_n = g^2\varepsilon_n/U^4 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-8}$ и $a \approx 0{,}83$. Зависимость единственного параметра этого спектра $\tilde{\omega}_m$ от безразмерного разгона $\tilde{x} = gx/U^2$ и времени действия ветра $\tilde{t} = gt/U$ получается после интегрирования по $\mathbf{k}$ кинетического уравнения (24.19) с учетом узконаправленности спектра волн в энергонесущей области:

$$2\frac{\partial \tilde{\omega}_m}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{\omega}_m}\frac{\partial \tilde{\omega}_m}{\partial \tilde{x}} = -\frac{1}{a}\tilde{\varepsilon}_n^{2/3}\tilde{\omega}_m^{14/3} \qquad (25.10)$$

(В. Е. Захаров, М. М. Заславский, 1982). Для установившегося горизонтально-неоднородного волнения, развивающегося по разгону x от наветренного берега $x = 0$, отсюда получается

$$\tilde{\omega}_m = b_\omega(\tilde{x})^{-3/14}; \quad b_\omega = \frac{3}{14}a^{2/14}(\tilde{\varepsilon}_n)^{-1/7} \approx 9{,}2. \qquad (25.11)$$

Эта формула при $\tilde{x} \gtrsim 10^2 \ldots 10^3$ удовлетворительно подтверждается натурными данными. С ее помощью по (25.9) можно вычис-

лить безразмерную среднюю квадратичную высоту волн $\tilde{h} = (g/U^2)(2\pi e)^{1/2}$:

$$\tilde{h} = b_h(\tilde{x})^{2/7}; \quad b_h = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{14}{3}\right)^{2/7} a^{3/14}(\tilde{\varepsilon}_n)^{5/14} \approx 5{,}1 \cdot 10^{-3} \qquad (25.12)$$

в хорошем соответствии с натурными данными. Формулы (25.11) и (25.12) могут служить основой для прогноза ветрового волнения. Еще не решенной до конца проблемой остается расчет углового распределения энергии в двумерном спектре ветровых волн.

ГЛАВА 5

Внутренние волны

§ 26. Линейная теория

В настоящей главе мы будем описывать внутренние *гравитационные волны* (способные распространяться в устойчиво стратифицированных средах, так что они оказываются типичным явлением в Мировом океане, нередки в земной атмосфере, возможны в жидком слое земного ядра, если он стратифицирован устойчиво, и родственны гравитационным модам собственных колебаний Солнца и больших планет). Будем использовать, как правило, следующие три упрощения: (1) адиабатическое приближение, в том числе уравнение (1.17), да еще с упрощением $c^2 \approx \mathcal{G}_j^2(z)$; (2) приближение Буссинеска — формулу (3.4) или (3.5) и условие бездивергентности поля скорости; (3) пренебрежение сферичностью Земли и учет ее вращения лишь в приближении «f-плоскости», т. е. при «традиционном приближении» в ускорении Кориолиса и без учета зависимости от широты параметра Кориолиса $f = 2\omega_z$ (за исключением особо оговариваемых случаев). Таким образом, будем пользоваться следующими уравнениями и соответствующими океану краевыми условиями:

$$\frac{d_h \mathbf{u}}{dt} + w\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + f\nabla r \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_*} - N^2\zeta\nabla r;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0; \quad \frac{d_h N^2\zeta}{dt} = N^2 w; \tag{26.1}$$

$$z = 0: \quad w = \frac{d_h\zeta}{dt}; \quad \frac{d_h p}{dt} - g\rho_0 w = \frac{d_h p_a}{dt};$$

$$z = -h: \quad w = -\mathbf{u}\cdot\nabla h, \tag{26.2}$$

где d_h/dt — индивидуальная производная относительно горизонтального движения, а $\zeta = \zeta(\mathbf{x}, z, t)$ — вертикальные смещения жидких частиц ($\zeta = -g\eta''/N^2$, где η'' определено в (3.5), так что третье уравнение (26.1) эквивалентно уравнению (1.17)). В первых двух условиях (26.2) учтено, что внутренние волны создают лишь очень малые колебания поверхности океана $z = \zeta$, и потому эти условия снесены на уровень $z = 0$. Линеаризация уравнений (26.1) и (26.2) относительно *горизонтально-однородного* (так что $N = N_0(z)$ и $h = \text{const}$) состояния покоя сводится к замене повсюду

$d_h/dt + w\partial/\partial z$ на $\partial/\partial t$. Исключив из таких уравнений $\mathbf{u}$ и p, получаем для ζ следующие уравнение и краевые условия:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_h\zeta + \frac{1}{\rho_*}\frac{\partial}{\partial z}\rho_*\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) + \frac{f^2}{\rho_*}\frac{\partial}{\partial z}\rho_*\frac{\partial\zeta}{\partial z} + N_0^2\,\Delta_h\zeta = 0;$$

$$z=0:\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\frac{\partial\zeta}{\partial z} - g\,\Delta_h\zeta = \frac{\Delta_h p_a}{\rho_0};\quad z=-h:\ \zeta=0. \qquad (26.3)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде суперпозиции мод, т. е. стоячих по вертикали элементарных плоских волн:

$$\zeta(\mathbf{x},\ z,\ t) = \int e^{i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\zeta_{k\omega}(z)\,dZ_{\mathbf{k}\omega};$$

$$dZ_{\mathbf{k}\omega} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n\mathbf{k}}\delta_{\omega-\omega_{nk}} + A_{-n\mathbf{k}}\delta_{\omega+\omega_{nk}}\right)d\mathbf{k}\,d\omega, \qquad (26.4)$$

где $A_{n\mathbf{k}}$ и $A_{-n\mathbf{k}}$ — комплексные амплитуды мод, распространяющихся по положительному и отрицательному направлению вектора $\mathbf{k}$; они определяются начальными условиями, зависят от принятой нормировки собственных функций $\zeta_{k\omega}(z)$ (далее считаемых вещественными и безразмерными) и удовлетворяют условию вещественности $A_{n\mathbf{k}} = A^*_{-n,\,-\mathbf{k}}$. Функция $\zeta_{k\omega}(z)$ есть решение уравнения

$$(D + k^2\beta^2\rho_*)\zeta = 0;\quad D = \frac{\partial}{\partial z}\rho_*\frac{\partial}{\partial z};\quad \beta^2 = \frac{N_0^2(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2}, \qquad (26.5)$$

удовлетворяющее одному из следующих двух краевых условий:

$$z=0:\ (\omega^2 - f^2)\frac{\partial\zeta}{\partial z} = gk^2\zeta;\quad z=-h:\ \zeta=0. \qquad (26.5')$$

Компоненты скорости u, v, w и флюктуации давления p и плотности ρ в поле внутренних волн представляются формулами вида (26.4) с заменой $\zeta = \zeta_{k\omega}(z)$ соответственно функциями:

$$u = \frac{k_x\omega + ik_y f}{k^2}\frac{\partial\zeta}{\partial z};\quad v = \frac{k_y\omega - ik_x f}{k^2}\frac{\partial\zeta}{\partial z};\quad w = -i\omega\zeta;$$

$$p = \frac{\omega^2 - f^2}{k^2}\rho_*\frac{\partial\zeta}{\partial z};\quad \rho = \frac{\omega^2 - f^2}{k^2}\frac{\rho_*}{c_0^2}\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\rho_* N_0^2}{g}\zeta. \qquad (26.6)$$

Заметим, что внутренние волны оказываются завихренными: при выборе оси x по направлению распространения волны $\mathbf{k}$ для амплитуды y-компоненты вихря скорости $\partial u/\partial z - \partial w/\partial x$ получается выражение $(\omega/k)(\partial^2\zeta/\partial z^2 - k^2\zeta)$, обращающееся в ноль на поверхности воды, но, вообще говоря, не равное нулю на глубинах.

Подставив функцию $\zeta = \zeta_{k\omega}(z)$ во второе краевое условие, получаем при фиксированном горизонтальном волновом числе k

уравнение для ω, имеющее, вообще говоря, счетное число корней — собственных частот $\omega = \pm\omega_{nk}$ различных мод $n = 0, 1, 2, \ldots$. Обозначим $k = k_{n\omega}$ функцию, обратную к функции $\omega = \omega_{nk}$, и введем частотные собственные функции $\zeta_{n\omega}(z) \equiv \zeta_{k_{n\omega}\,\omega}(z)$ краевой задачи (26.5) и (26.5′), ортонормированные условием $\zeta_{m\omega} \otimes \zeta_{n\omega} = \delta_{mn}$, где функциональное скалярное произведение определяется формулой

$$\zeta_{m\omega} \otimes \zeta_{n\omega} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - f^2}\left[g\rho_0\zeta_{m\omega}(0)\,\zeta_{n\omega}(0) + \right.$$

$$\left. + \int_{-h}^{0} (N^2 - f^2)\,\zeta_{m\omega}(z)\,\zeta_{n\omega}(z)\,\rho_*\,dz\right]. \qquad (26.7)$$

Вместо $\zeta_{n\omega}(z)$ можно ввести пространственные собственные функции $\zeta_{nk}(z) \equiv \zeta_{k\omega_{nk}}(z)$ с условием ортогональности

$$\zeta_{mk}(z) \otimes \zeta_{nk}(z) = g\rho_0\zeta_{mk}(0)\,\zeta_{nk}(0) +$$

$$+ \int_{-h}^{0} (N^2 - f^2)\,\zeta_{mk}(z)\,\zeta_{nk}(z)\,\rho_*\,dz = \|\zeta_{nk}\|^2\,\delta_{mn}, \qquad (26.7')$$

где $\|\zeta_{nk}\| = (\zeta_{nk} \otimes \zeta_{nk})^{1/2}$ — норма. При использовании этих функций спектральное представление поля $\zeta(x, z, t)$ принимает вид

$$\zeta(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\zeta_{nk}(z)\left(A_{n\mathbf{k}}e^{-i\omega_{nk}t} + A_{-n\mathbf{k}}e^{i\omega_{nk}t}\right)d\mathbf{k}. \qquad (26.4')$$

Соответствующие $\zeta_{nk}(z)$ функции (26.6), вообще говоря, комплексны, и если положить $\omega_{-nk} = -\omega_{nk}$, то они будут удовлетворять условию $\eta_{n\mathbf{k}} = \eta^*_{-n,-\mathbf{k}}$ и определять гидродинамические поля

$$\eta(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\left[\eta_{n\mathbf{k}}(z)\,A_{n\mathbf{k}}e^{-i\omega_{nk}t} + \eta_{-n\mathbf{k}}(z)\,A_{-n\mathbf{k}}e^{i\omega_{nk}t}\right]d\mathbf{k}. \qquad (26.7'')$$

Краевая задача (26.5) и (26.5′) отличается от задачи Штурма—Лиувилля тем, что собственная частота входит в краевое условие. При $\min N_0^2(z) \geqslant f^2$ заменой $\omega^2 - f^2 = \lambda^2$ она сводится к задаче, рассмотренной М. Яновичем (1962), из которой следует, что спектр собственных значений чисто дискретный, все собственные частоты $\pm\omega_n$ вещественны (так как вследствие адиабатичности интегральная полная энергия не меняется со временем); $|\omega_n| > |\omega_{n+1}| > |f|$ и $|\omega_n| \to |f|$ $(n \to \infty)$, но сами точки сгущения $\pm f$ собственными значениями не являются; для существования экстремумов у собственных функций при $z \neq 0$ (т. е. для существования

внутренних волн) необходимо соблюдение неравенства $|f|<|\omega|<\max N_0(z)$; при $N_0^2(z)>f^2$ система собственных векторов полна и они ортогональны с весом ρ_* (дискретность спектра и ортогональность собственных векторов с весом ρ_* при некоторых ограничениях справедливы и при произвольном знаке $N_0^2(z)-f^2$).

Можно убедиться, что получающаяся при $n=0$ частота ω_{0k} с ростом k монотонно возрастает по модулю от значения $|f|$ при $k=0$ до $(gk)^{1/2}$ при $k\to\infty$, а соответствующая собственная функция $\zeta_{0k}(z)$ монотонно (и довольно быстро) убывает с глубиной от значения $\zeta_{0k}(0)\neq 0$ до $\zeta_{0k}(-h)=0$. Функции ω_{0k} и $\zeta_{0k}(z)$ соответствуют поверхностным гравитационным волнам; они мало зависят от стратификации воды. Моды $n=1, 2, \ldots$, наоборот, полностью определяются видом функции $N_0(z)$.

Для Мирового океана типичны малые значения $N_0(z)$ в верхнем перемешанном слое $0\geqslant z\geqslant -H$, максимум $N_0\sim 10^{-2}$ с$^{-1}$ (период $2\pi/N_0\sim 10$ мин) в пикноклине $-H\geqslant z\geqslant -H-\delta$ и вновь малые значения глубже пикноклина (при $z<-H-\delta$). Такое распределение $N_0(z)$ упрощенно описывается трехслойной моделью с постоянным значением $N_0>0$ в пикноклине и $N_0=0$ вне его, в которой при $f=0$ и $h=\infty$ непрерывное решение уравнений (26.5), (26.5′) получается в следующем виде (А. С. Монин, 1974):

$$\zeta^{(1)}(z)=\zeta(-H)\,\frac{\omega^2\operatorname{ch}kz+gk\operatorname{sh}kz}{\omega^2\operatorname{ch}kH-gk\operatorname{sh}kH};$$

$$\zeta^{(2)}(z)=\zeta(-H)\,e^{\frac{(z+H)N_0^2}{2g}}\times$$

$$\times\frac{l\cos l(z+H+\delta)+k\left(1-\dfrac{N_0^2}{2gk}\right)\sin l(z+H+\delta)}{l\cos l\delta+k\left(1-\dfrac{N_0^2}{2gk}\right)\sin l\delta};$$

$$\zeta^{(3)}(z)=\zeta(-H)\,e^{-\frac{\delta N_0^2}{2g}}\,\frac{le^{k(z+H+\delta)}}{l\cos l\delta+k\left(1-\dfrac{N_0^2}{2gk}\right)\sin l\delta}, \qquad (26.8)$$

где индексы (2), (1), (3) относятся к пикноклину и слоям над и под ним, а l — вертикальное волновое число, связанное с частотой ω соотношением

$$\omega^2=N_0^2(1+l^2/k^2+N_0^2/4g^2k^2)^{-1}. \qquad (26.8')$$

Если положить $\omega^2=gk$, то условие непрерывности $\partial\zeta/\partial z$ при $z=-H$ удовлетворяется при любых N_0 и k; при этом получается $\zeta(z)=\zeta(0)e^{-kz}$, т. е. имеются не искаженные стратификацией по-

верхностные волны. Для внутренних же волн, при $\omega^2 \neq gk$, это условие непрерывности дает следующее уравнение относительно вертикальных волновых чисел l (или, согласно (26.8′), относительно частот ω):

$$\operatorname{tg} l\delta = F(l) \equiv \frac{(l/k)\,(1+\operatorname{cth} kH)}{(l/k)^2 - (1+N_0^2/2gk)\,(\operatorname{cth} kH - N_0^2/2gk)}. \qquad (26.9)$$

Оно имеет счетное множество вещественных положительных корней $l_1 < l_2 < \ldots \to \infty$, получающихся на пересечениях тангенсоиды $y = \operatorname{tg} l\delta$ с кривой $y = F(l)$ и при больших номерах n приближающихся сверху к точкам $l_n = \pi n/\delta$. Отвечающие этим корням частоты удовлетворяют неравенствам $N_0 > \omega_1 > \omega_2 > \ldots \to 0$, а соответствующие моды $\zeta_n(z)$ при не слишком малых номерах имеют в пикноклине по n узлов (т. е. глубин, где ζ меняет знак).

В случае волн, длинных по сравнению с толщиной пикноклина, т. е. при $k\delta \ll 1$ и, значит, $k/l \ll 1$, функцию $F(l)$ в (26.9) можно приближенно заменить на $(k/l)(1+\operatorname{cth} kH)$, так что и $\operatorname{tg} l\delta$ будет малым, и для низшей моды внутренних волн можно положить $\operatorname{tg} l_1\delta \approx l_1\delta$. Тогда (26.9) примет вид $(l_1\delta)^2 \approx k\delta\,(1+\operatorname{cth} kH)$, и для квадрата соответствующей частоты $\omega_1^2 \approx N_0^2 k^2/l^2$ при $N_0^2 \approx g\,\Delta\rho/\rho\delta$ (где $\Delta\rho$ — перепад плотности в пикноклине) получится

$$\omega_1^2 \approx (\Delta\rho/\rho)\, gk\,(1+\operatorname{cth} kH)^{-1}. \qquad (26.10)$$

При малом $k\delta$ малы и изменения $\zeta(z)$ по глубине в пикноклине, так что в низшей моде длинной волны он колеблется, как целое. При этом, используя первую формулу (26.6) при $k_x = k$, $k_y = 0$ и затем уравнение (26.5) при $\rho_* = \text{const}$, $f = 0$, получаем сдвиг продольной скорости в волне в виде $\partial u/\partial z = (\omega/k)\,\partial^2\zeta/\partial z^2 \approx \approx (k/\omega)\,(\omega^2 - N_0^2)\,\zeta$, откуда для числа Ричардсона в низшей моде в пикноклине получается

$$\mathrm{Ri} = N_0^2\,(\partial u/\partial z)^{-2} \approx \left(\frac{\omega_1}{N_0} - \frac{N_0}{\omega_1}\right)^{-2} k^{-2}\zeta_H^{-2} \qquad (26.11)$$

(О. Филлипс, 1969). Кроме того, продольная скорость на поверхности океана получается равной $u_s \approx \omega_1\zeta_H/\operatorname{sh} kH$, так что максимальная конвергенция u_s будет иметь место над узлами волны в пикноклине — и действительно там иногда наблюдаются полосы пены, перпендикулярные направлению распространения волны.

Учтем, что даже слабые сдвиги скорости средних течений могут быть сравнимыми с фазовыми скоростями внутренних волн и создавать для них критические уровни (границы волновых каналов). Линеаризируя уравнения (26.1) и (26.2) относительно горизонтального течения со сдвигом $\mathbf{U}(z)$, мы получим вместо (26.5) и (26.5′) уравнения, в которых ω заменяется на $k(c - U_k)$

(где c — фазовая скорость волн и $U_{\mathbf{k}}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}/k$), и в простейшей постановке задачи при $f=0$ оператор $D\zeta$ заменяется на $\omega^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\times$ $\times\omega^2\rho_*\frac{\partial\zeta}{\partial z}$. Для величины $w=-i\omega\zeta$ эти уравнения при $\rho_*\approx$ $\approx$const приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\left[\frac{N_0^2}{(U_{\mathbf{k}}-c)^2}-\frac{U_{\mathbf{k}}''}{U_{\mathbf{k}}-c}-k^2\right]w=0; \qquad (26.12)$$

$$z=0:\ \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{g+(U_{\mathbf{k}}-c)\,U_{\mathbf{k}}'}{(U_{\mathbf{k}}-c)^2}\,w;\quad z=-h:\ w=0. \qquad (26.12')$$

Сдвиг среднего течения не только изменяет обычные моды внутренних волн (восстанавливающиеся при $U_{\mathbf{k}}\equiv 0$), но из-за сингулярностей на *критических уровнях* z_c, где $U_{\mathbf{k}}(z)=c$, появляются новые моды либо с комплексными собственными значениями $c=c_r+ic_i$, либо с вещественными c, но с разрывами собственных функций на критических уровнях. Уравнение (26.12) эквивалентно (11.24), так что для него справедлива теорема Дж. Майлса и Л. Ховарда (1961): неустойчивые моды ($c_i>0$) могут появляться, лишь если где-либо оказывается $\mathrm{Ri}(z)=N_0^2(U_{\mathbf{k}}')^{-2}<{}^1/_4$; при этом по теореме Ховарда точки c в комплексной плоскости лежат в круге с диаметром на отрезке $U_{\mathbf{k}\min}<c_r<U_{\mathbf{k}\max}$. Согласно В. Бенксу, П. Дразину и М. Затурска (1976), количество неустойчивых мод может быть лишь конечным, комплексно-сопряженные к ним являются затухающими модами, среди устойчивых мод имеются дискретное множество обычных (с $c>U_{\mathbf{k}\max}$ или $c<U_{\mathbf{k}\min}$), конечное число мод с $U_{\mathbf{k}\min}<c<U_{\mathbf{k}\max}$ и точками ветвления на критических уровнях и непрерывный спектр $U_{\mathbf{k}\min}<$ $<c<U_{\mathbf{k}\max}$ с разрывами на критических уровнях.

Рассмотрим поведение решения $w(z)$ уравнения (26.12) около критического уровня $z=z_c$. При малом $c_i=\mathrm{Im}\,c$ (а именно при $|U''|(U')^{-2}c_i\ll 1$; здесь и далее индекс $\mathbf{k}$ у $U_{\mathbf{k}}$ опускаем) общее решение можно записать в виде

$$w=A\left(z-z_c-\frac{ic_i}{U'}\right)^{1/2+i\mu}+B\left(z-z_c-\frac{ic_i}{U'}\right)^{1/2-i\mu}, \qquad (26.13)$$

где $\mu=(\mathrm{Ri}-{}^1/_4)^{1/2}>0$; при $c_i=0$ оба слагаемых здесь имеют точку ветвления $z=z_c$. Пусть $c_i>0$. Тогда при уменьшении $z-z_c$ от положительного значения (большего, чем c_i/U') до отрицательного $\arg(z-z_c-ic_i/U')$ меняется от 0 до $-\pi$, и при $z>z_c$ получается

$$(z-z_c)^{1/2+i\mu}=|z-z_c|^{1/2}\,e^{i\mu|z-z_c|},$$

а при $z < z_c$ получается

$$(z-z_c)^{1/2 \pm i\mu} = -i\,|z-z_c|^{1/2}\, e^{\pm\pi\mu \mp i\mu \ln|z-z_c|}$$

(откуда видно, что при $c_i=0$ функция $w(z)$ при $z\approx z_c$ быстро осциллирует). При квазипостоянных N_0 и U решение (26.13) принимает вид

$$w = Ae^{ilz} + Be^{-ilz};\quad l^2 = N_0^2(U-c)^{-2} - k^2. \qquad (26.13')$$

Полагая $\operatorname{Im} l > 0$ при $c_i > 0$, получаем $l \approx N_0(U-c)^{-1}$ при $k^2 \ll N_0^2(U-c)^{-2}$ и $l \approx ik$ при $k^2 \gg N_0^2(U-c)^{-2}$. Первое слагаемое в (26.13′) описывает плоскую волну с вертикальной компонентой фазовой скорости, направленной вниз (при $U-c<0$, т. е. движении волны в сторону роста x, будет $l<0$, так что линии постоянной фазы $kx+lz-kct=\text{const}$ движутся вниз; аналогично при $U-c>0$ получается $l>0$, и линии постоянной фазы движутся вверх). Второе слагаемое соответственно описывает волну с компонентой фазовой скорости, направленной вверх. Из формулы (26.13′) для l^2 получается $\sigma = kc = kU \pm N_0 k(k^2+l^2)^{-1/2}$, где верхний знак берется при $U-c<0$, $l<0$, а нижний — при $U-c>0$, $l>0$. Вертикальная компонента групповой скорости для первого слагаемого в (26.13′) получается в виде $c_{gz} = \partial\sigma/\partial l = kl(U-c)^3 N_0^{-2} > 0$, т. е. энергия в этой волне распространяется вверх; во второй волне, наоборот, она распространяется вниз.

Около критического уровня $z=z_c$ эти результаты справедливы не только при квазипостоянных, но и при произвольных $N_0(z)$ и $U(z)$: тогда при $c_i=0$ в (26.13) можно ввести локальное вертикальное волновое число

$$l = \mu(z-z_c)^{-1} \approx N_0(U-c)^{-1}\left(1 - \frac{1}{4\mathrm{Ri}}\right)^{1/2},$$

при больших Ri близкое к рассмотренному выше. При этом w мало, а $u \sim \partial w/\partial z \sim (z-z_c)^{-1/2}$, наоборот, велико, так что движения частиц в волне становятся почти горизонтальными, а частота волны — очень малой.

Из уравнения горизонтального движения $(U-c)\,\partial u/\partial x = -\partial p/\rho\,\partial x$ получается средний вертикальный поток энергии волны $\langle pw\rangle = -\rho(U-c)\langle uw\rangle$. При помощи (26.6) напряжение Рейнольдса получается в виде

$$\langle uw\rangle = \frac{1}{4ik}\left(w\frac{\partial w^*}{\partial z} - w^*\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

и для (26.13′) оказывается равным $\frac{\mu}{2k}(|B|^2 - |A|^2)$ при $z>z_c$ и $\frac{\mu}{2k}(|A|^2 e^{2\pi\mu} - |B|^2 e^{-2\pi\mu})$ при $z<z_c$, т. е. при $z=z_c$ оно терпит

разрыв и изменяется и по знаку, и по абсолютному значению. Поток энергии при этом знака не меняет, но терпит разрыв по абсолютному значению, так что в критическом слое происходит поглощение волновой энергии (Дж. Букер, Ф. Брезертон, 1967), в отсутствие диссипации и нелинейных эффектов передаваемой, очевидно, среднему течению.

В противоположность условиям гидродинамической устойчивости $\mathrm{Ri} > {}^1/_4$, при $0 < \mathrm{Ri} < {}^1/_4$, согласно В. Джонсу (1968), может происходить сильное отражение внутренних волн от критического уровня, а при $\mathrm{Ri} < \mathrm{Ri}_{\text{кр}}(k, \omega)$ — даже «сверхотражение», при котором отраженная волна получает импульс и энергию от среднего течения и оказывается более интенсивной, чем падающая волна.

Поскольку система собственных функций $\zeta_{n\omega}(z)$ (или $\zeta_{nk}(z)$) полна, поле внутренних волн всегда можно представить в виде (26.4) (или 26.4′)), т. е. в виде суперпозиции элементарных волн (мод), распространяющихся лишь по горизонтали, а по вертикали стоячих. Однако отдельные вертикально стоячие волны могут быть физически нереальными, так как для их формирования нужно, чтобы длинные когерентные цуги волн испытали многократные отражения от поверхности и дна океана или от границ волнового канала и между восходящими и нисходящими составляющими установились бы фиксированные фазовые соотношения. Типичные времена вертикального распространения волн, особенно старших мод (с малыми вертикальными длинами волн), могут быть сравнимыми с временами нелинейных взаимодействий, препятствующих формированию мод (например, рандомизирующих фазы).

Если вертикальная длина волны $2\pi/l$ мала по сравнению с масштабами неоднородностей профилей $N_0(z)$ и $\mathbf{U}(z)$, то вполне реальными становятся цуги волн, распространяющиеся с вертикальной составляющей (вверх или вниз), с локальным дисперсионным соотношением

$$\sigma = \omega + \mathbf{k}\cdot\mathbf{U};\quad \omega^2 = N_0^2\cos^2\theta + f^2\sin^2\theta;$$
$$\cos\theta = k\left(k^2+l^2\right)^{-1/2};\quad \sin\theta = l\left(k^2+l^2\right)^{-1/2};$$
$$\operatorname{tg}\theta = l/k = \left(\frac{N_0^2-\omega^2}{\omega^2-f^2}\right)^{1/2}, \tag{26.14}$$

так что $f < \omega < N_0$ и ω не зависят от модуля $(k^2+l^2)^{1/2}$ трехмерного волнового вектора, но зависит от его наклона к горизонтали θ (что и проявляет дисперсию этих волн).

При $f=0$ и $U=0$ эта формула получается из (26.8′) в случаях, когда $l\delta \gg \Delta\rho/\rho$, что выполняется для старших мод волн (26.8), а нередко и для низшей моды; при этом фазовая скорость $c \approx N_0 k (k^2+l^2)^{-1}$ всегда меньше N_0/k и уменьшается с ростом номера моды (например, при $\tau = 2\pi/N_0 \approx 10$ мин волны километро-

вых длин $2\pi/k$ распространяются со скоростями не более нескольких м/с.

Групповая скорость $\mathbf{c}_g$ волн с частотой ω и вектор поляризации $\mathbf{V}$ поля скорости в этих волнах (ортогональные трехмерному волновому вектору) имеют вид:

$$\mathbf{c}_g = \frac{N_0^2-\omega^2}{\omega(k^2+l^2)}\left(k_k,\ k_y,\ -\frac{k^2}{l}\right);$$

$$\mathbf{V} = C\left(k_x\omega + ik_y f,\ k_y\omega - ik_x f,\ -\frac{\omega k^2}{l}\right);$$

$$C = (\omega k)^{-1}\left(N_0^2-\omega^2\right)^{1/2}\left(N_0^2-f\right)^{-1/2}. \qquad (26.15)$$

Поляризация оказывается эллиптической; вблизи от инерционной частоты ($\omega \gtrsim f$, $l^2 \gg k^2$) частицы в волнах движутся почти горизонтально и приблизительно по окружностям, а вблизи от частоты Вяйсяля—Брента ($\omega \lesssim N_0$, $l^2 \ll k^2$) они колеблются почти только по вертикали. Отметим еще, что плотность потока энергии волны равна $E\mathbf{c}_g$, где $E = \frac{1}{2}\langle u^2+v^2+w^2+N_0^2\zeta^2\rangle$ — осредненная по периоду плотность полной энергии внутренней волны.

§ 27. Лучевая теория

Если масштабы пространственных неоднородностей глубины океана h, параметра Кориолиса f, частоты Вяйсяля—Брента N и средиего течения $\mathbf{U}$ и изменений N и $\mathbf{U}$ со временем велики по сравнению с длиной и периодом внутренней волны фиксированной моды, то аналогично § 19 ее можно описывать, как цуг $\zeta(\xi, t) = a(\xi, t)\exp[i\theta(\xi, t)]$ локально плоских волн с медленно меняющейся амплитудой a и приблизительно линейно зависящим от ξ и t эйконалом θ (где $\xi = (x, z)$ — трехмерная координата), и определять ее трехмерный волновой вектор $\varkappa = (k_x, k_y, l)$ как $\nabla\theta$ и частоту $\sigma = \omega + \varkappa\cdot\mathbf{U}$ (где ω дается формулой (26.13)) как $(-\partial\theta/\partial t)$; тогда будет иметь место уравнение сохранения числа волн (19.2). Уравнения лучей будут иметь вид

$$\dot{\xi} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varkappa} = \mathbf{c}_g + \mathbf{U};\quad \dot{\varkappa} = -\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} = \mathbf{r} - \varkappa_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial\xi};\quad \dot{\sigma} = \frac{\partial\sigma}{\partial t}, \qquad (27.1)$$

где $\mathbf{r} = -\partial\omega/\partial\xi$ — так называемая *скорость преломления*. При помощи этих уравнений и уравнения типа (19.12) для плотности энергии волн E получается следующее уравнение сохранения *волнового действия* E/ω:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E}{\omega} + \operatorname{div}\frac{E}{\omega}(\mathbf{c}_g + \mathbf{U}) = 0 \qquad (27.2)$$

(Дж. Уизем, 1965; Ф. Брезертон и К. Гарретт, 1968). В случае единичной монохроматической волны распределение в простран-

стве действия E/ω стационарно, и первое слагаемое здесь исчезает. Укажем еще закон отражения волны от наклонной твердой стенки $z = x \operatorname{tg}\alpha + \text{const}$: поскольку частоты падающей и отраженной волн одинаковы, углы наклона $\varphi = \pi/2 - \vartheta$ их волновых векторов $\varkappa$ и $\varkappa'$ *к вертикали* равны друг другу, так что угол падения $\varphi + \alpha$ не равен углу отражения $\varphi - \alpha$, а поскольку нормальная ко

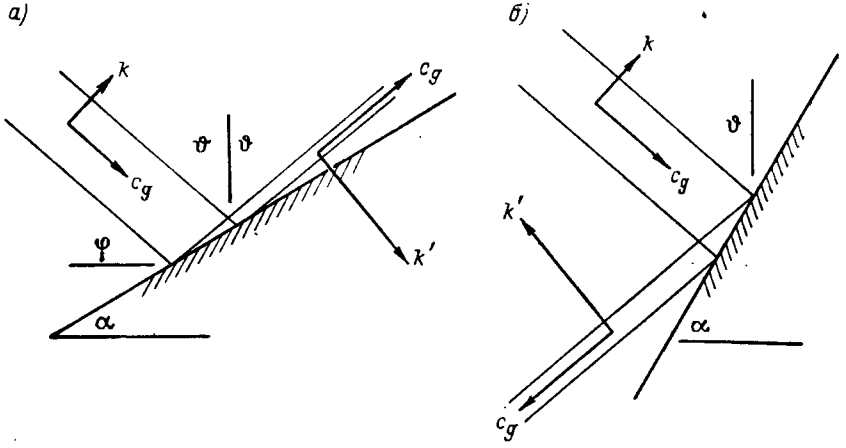


Рис. 27.1. Отражение коротковолновых внутренних волн от наклонного дна.
а) при $\omega > \omega_s$, *б*) при $\omega < \omega_s$.

дну скорость равна нулю, компоненты волновых векторов в плоскости (s_g, s'_g) должны быть равны:

$$\varkappa \sin(\varphi + \alpha) = \varkappa' \sin(\varphi - \alpha). \qquad (27.3)$$

Высокочастотные волны с $\omega > \omega_s = (N^2 \sin^2\alpha + f^2 \cos^2\alpha)^{1/2}$, т. е. $\varphi > \alpha$, отражаются вперед (рис. 27.1 *а*), так что они распространяются вверх по склону, и их энергия может накапливаться у подводных вершин. Наоборот, низкочастотные волны с $\omega < \omega_s$, т. е. $\varphi < \alpha$, отражаются назад (рис. 27,1 *б*), так что они распространяются вниз по склону, и их энергия может накапливаться в подводных впадинах.

Применим уравнения лучевой теории (27.1) и (27.2) сначала к простейшему случаю $h = \text{const}$, $f = \text{const}$, $\mathbf{U} = 0$, а N меняется лишь по z и притом медленно, так что $N^{-1}\partial N/\partial z \sim \varepsilon \ll 1$. По уравнениям лучевой теории k и ω здесь получаются постоянными. Запишем в этом случае уравнение (26.5) при $\rho_* \approx \text{const}$ в виде

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} + \alpha^2\gamma^2(z)\,\zeta = 0; \quad \alpha^2 = k^2\omega^2(\omega^2 - f^2)^{-1}; \quad \gamma^2 = \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \qquad (27.4)$$

и будем искать его приближенное решение методом ВКБ (Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна). Для этого введем «медленную»

глубину $\eta=\varepsilon z$, обозначим $\lambda=\alpha/\varepsilon$ и $\gamma_1(\eta)\equiv\gamma(\eta/\varepsilon)$ и будем искать $\zeta(\eta)$ в виде $A(\eta)\exp\left[\pm i\lambda\int\limits_0^\eta \gamma_1(\eta)\,d\eta\right]$. Тогда для $A(\eta)$ из (27.4) получится уравнение

$$\lambda^{-1}\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}\pm 2\gamma_1\frac{\partial A}{\partial\eta}\pm iA\frac{\partial\gamma_1}{\partial\eta}=0. \tag{27.5}$$

Пренебрегая здесь первым слагаемым (в чем и заключается в данном случае приближение ВКБ), получим $A\sim\gamma_1^{-1/2}$. Таким образом, приближенное ВКБ решение уравнения (27.4) получается в виде

$$\zeta\approx\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)^{-1/4}(c_1\cos\alpha z_1+c_2\sin\alpha z_1);\quad z_1=\int\limits_0^z\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)^{1/2}dz. \tag{27.6}$$

Удовлетворение краевых условий (26.5′) даст уравнение для определения ω, как функции от k (дисперсионное соотношение). Согласно решению (27.6), при приближении волнового пакета к глубине $z=z_c$, на которой $N(z_c)=\omega$ (*точка поворота*), вертикальное волновое число и групповая скорость стремятся к нулю, но пакет все же достигает этой глубины за конечное время, и на ней происходит его отражение. Около глубины $z=z_c$ приближение ВКБ теряет силу, и решение (27.6), имеющее на ней слабую сингулярность, должно быть заменено более точным решением (И. Дезобье, 1973). Для этого произведем в (27.4) замену переменных:

$$\xi(z)=\left[\frac{3i\alpha}{2}\int\limits_{z_c}^{z}\gamma(z)\,dz\right]^{2/3};\quad V(\xi)=\gamma^{1/2}\xi^{-1/4}\zeta;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}-\xi V=\left(\frac{1}{2}\frac{\xi'''}{\xi'^3}-\frac{3}{4}\frac{\xi''^2}{\xi'^4}\right)V. \tag{27.7}$$

Поскольку $\xi\sim\alpha^{2/3}$, коэффициент при V в правой части этого уравнения имеет порядок $\alpha^{-4/3}$, так что при больших α правой частью можно пренебречь, и (27.7) превращается в уравнение Эйри. Оно имеет решения в цилиндрических функциях

$$\xi^{1/2}Z_{\pm 1/3}\left(\frac{2i}{3}\xi^{3/2}\right);$$

линейно-независимые решения (функции Эйри) обозначаются $\mathrm{Ai}(\xi)$ и $\mathrm{Bi}(\xi)$, так что

$$\zeta\approx\gamma^{-1/2}\xi^{1/4}[C_1\,\mathrm{Ai}(\xi)+C_2\,\mathrm{Bi}(\xi)]. \tag{27.6′}$$

Поскольку около точки поворота $\gamma\sim(z-z_c)^{1/2}$ и $\xi\sim z-z_c$, а $Z_\nu(x)\sim x^\nu$, функция $\zeta(z)$, определяемая формулой (27.6′), в этой точке сингулярности уже не имеет.

Иным, чем в точке поворота, оказывается при наличии сдвига скорости течения $U(z)$ поведение волнового пакета в окрестности критического уровня z_c, на котором $U(z)=c$, т. е. $\omega=\sigma-\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}=0$. Групповая скорость в этом случае складывается из локальной скорости течения $\mathbf{U}(z)$ и величины $\mathbf{c}_g$ формулы (26.15), и ее вертикальную компоненту c_{gz} около критического уровня, где $\omega\approx(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}')(z-z_c)$, можно привести к виду

$$c_{gz}=\pm\omega^2(1-\omega^2/N^2)^{1/2}/kN\sim\pm(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}')^2(z-z_c)^2/kN. \quad (27.8)$$

Отсюда видно, что при $z_1>z_c>z_2$ волновой пакет будет проходить от уровня z_1 до уровня z_2 за время

$$t_2-t_1=\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{c_{gz}}=\frac{kN}{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{U}')^2}\left(\frac{1}{z_1-z_c}+\frac{1}{z_c-z_2}\right), \quad (27.8')$$

которое при $z_2\to z_c$ неограниченно возрастает. Это означает, что, в отличие от точки поворота, волновой пакет никогда не достигает критического уровня z_c (Ф. Брезертон, 1966). Согласно (26.15), при приближении к z_c вертикальное волновое число l неограниченно возрастает (как kN/ω), а горизонтальные компоненты групповой скорости стремятся к $\mathbf{U}(z_c)$, переставая зависеть от z. Это соответствует «захвату» волн у критического уровня, так что плотность их энергии возрастает (и линейная теория перестает быть пригодной).

В случае горизонтально-неоднородного океана точные решения линейных уравнений для внутренних волн удается найти лишь в частных случаях. Так, например, при глубине океана $h=\gamma y$, постоянном коэффициенте $\beta^2=(N^2-\omega^2)(\omega^2-f^2)^{-1}$ и отсутствии течения К. Вунш (1969) нашел для функции тока ψ в плоскости (y, z) в случае $\beta\gamma<1$ решение

$$\psi\sim e^{iq\ln(\beta^{-1}y-z)}-e^{iq\ln(\beta^{-1}y+z)};\quad q=2\pi n\left(\ln\frac{1-\beta\gamma}{1+\beta\gamma}\right)^{-1}, \quad (27.9)$$

описывающее увеличение энергии волн вверх по подводному склону (а при $\beta\gamma>1$, наоборот, вниз по склону). Если же масштабы горизонтальных неоднородностей океана много больше, чем у волн, то для описания последних применимы лучевая теория и почти всюду приближение ВКБ, чем одним из первых воспользовался Ю. З. Миропольский (1974, в случае $N=N(\mathbf{x})$), а за ним и последующие авторы.

Мы изложим здесь, следуя Д. Олберсу (1981), случай $N=N(x, z)$ с горизонтальным плоскопараллельным геострофическим течением $U_y=V(x, z)$, который объединяет ряд задач, рассматривавшихся ранее. В этом случае компонента волнового вектора вдоль течения k_y и «частота встреч» $\sigma=\omega+k_yV$ у фиксированной волны постоянны. Уравнения лучевой теории (27.1) удается решить аналитически в полезном частном случае, когда изо-

пикнические поверхности суть наклонные плоскости (с постоянной нормалью $\mathbf{n}=(n_x, n_z)$, $|\mathbf{n}|=1$), так что $V=(n_x/fn_z)\chi(\eta)+\text{const}$ и $N^2=n_z\chi'(\eta)$, где $\eta=\mathbf{n}\cdot\xi=n_x x+n_z z$, а $\chi(\eta)$ — произвольная функция. При этом ортогональная к $\mathbf{n}$ проекция $\varkappa_\perp=n_z k_x-n_x l$ трехмерного волнового вектора $\varkappa$ постояина, а изменения $\varkappa_\parallel=\mathbf{n}\cdot\varkappa$ определяются из дисперсионного соотношения (26.14), приводящегося к виду

$$(L^2-\omega^2)\,\varkappa_\parallel^2+(M^2-\omega^2)\,\varkappa_\perp^2+(N^2-\omega^2)\,k_y^2+$$
$$+\,2\,(N^2-f^2)\,n_x n_z\varkappa_\parallel\varkappa_\perp=0;$$
$$L^2=N^2n_x^2+f^2n_z^2\geqslant f^2;\quad M^2=N^2n_z^2+f^2n_x^2\leqslant N^2. \qquad (27.10)$$

При $\omega^2\neq L^2$ отсюда получается

$$\varkappa_\parallel=\left[-(N^2-f^2)\,n_x n_z\varkappa_\perp\pm(N^2-\omega^2)^{1/2}(\omega^2-\omega_c^2)^{1/2}\alpha\right](L^2-\omega^2)^{-1};$$
$$\omega_c^2=L^2\frac{k_y^2}{\alpha^2}+f^2\frac{\varkappa_\perp^2}{\alpha^2};\quad k^2=\frac{\omega^2-f^2}{N^2-\omega^2}(n_z\varkappa_\parallel-n_x\varkappa_\perp)^2, \qquad (27.11)$$

где $\alpha^2=\varkappa_\perp^2+k_y^2=\text{const}$. При этом $f^2\leqslant\omega_c^2\leqslant L^2$, а неравенство $\omega_c^2\leqslant\omega^2\leqslant N^2$, обеспечивающее вещественность $\varkappa_\parallel$, определяет *волновой канал* для волны с постоянными σ, k_y и $\varkappa_\perp$ (отметим, что $\omega_c^2\sim f^2$ при $k_y/\varkappa_\perp\sim 0$ и $\omega_c^2\sim L^2$ при $k_y/\varkappa_\perp\sim\infty$, причем $L^2\sim f^2$ при $n_z/n_x\sim\infty$ и $L^2\sim N^2$ при $n_z/n_x\sim 0$). Компоненты групповой скорости получаются в следующем виде:

$$c_{g\parallel}=\pm\frac{\alpha\,(\omega^2-f^2)\,(N^2-\omega^2)^{1/2}(\omega^2-\omega_c^2)^{1/2}}{\omega k^2\,(N^2-f^2)};$$
$$c_{g\perp}=\frac{(\omega^2-f^2)\,(N^2-\omega^2)^{1/2}}{\omega k^2\,(N^2-f^2)\,(L^2-\omega^2)}\left[-\varkappa_\perp(\omega^2-f^2)\,(N^2-\omega^2)^{1/2}\pm\right.$$
$$\left.\pm\,n_x n_z\alpha\,(N^2-f^2)\,(\omega^2-\omega_c^2)^{1/2}\right]. \qquad (27.12)$$

Используем наклон $(n_z/n_x)^2=(N^2-L^2)\,(L^2-f^2)^{-1}$ вектора преломления $\dot{\varkappa}$ (или $\mathbf{n}$) для оценки его ориентации относительно асимптотического конуса $l=\pm k_x(N^2-\omega^2)^{1/2}(\omega^2-f^2)^{-1/2}$ дисперсионной поверхности $\omega=\omega(\varkappa)$ с фиксированными ω и k_y. При $\omega^2>L^2$ вектор $\dot{\varkappa}$ лежит внутри этого конуса, и два решения (27.12) для $\mathbf{c}_g$ имеют различные вертикальные, но одинаковые горизонтальные направления; при $\omega^2<L^2$ дело обстоит наоборот.

Рассмотрим поведение волны около слоев, где $c_{g\parallel}\sim 0$, т. е. около границ волновых каналов $\omega=\pm N$; $\pm\omega_c$ и слоев $\omega=\pm L$ внутри каналов. Пусть там $c_{g\parallel}\sim\eta$, так что вследствие закона (27.2) сохранения волнового действия $E(\eta)=\text{const}\cdot\omega(\eta)/c_{g\parallel}(\eta)\sim\sim\eta^{-\mu}$, и время прохождения волны от η_1 до η_2 оказывается ана-

логично (27.8′) при $\mu \neq 1$ пропорциональным $\eta^{2-\mu}\Big|_1^2$, а при $\mu = 1$ пропорциональным $\ln \eta\Big|_1^2$. Значит, при $\mu \geqslant 1$ волна не может достигнуть точки $\eta = 0$, и ее плотность энергии около этой точки возрастает неинтегрируемым образом, а при $\mu < 1$ точка $\eta = 0$ достигается за конечное время, и волна проходит через нее или отражается обратно с интегрируемой плотностью энергии.

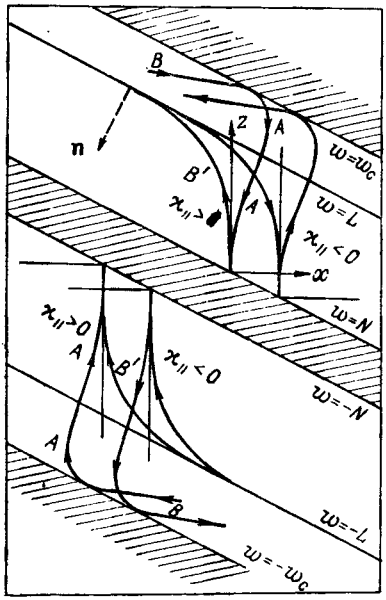


Рис. 27.2. Схема лучей у волны (ω, k_y, $\varkappa_{\parallel}$) в проекции на плоскость (x, z). Запрещенные области заштрихованы. Отражение происходит при $\omega = \pm N$, $\pm\omega_c$, при $\omega = \pm L$ волна A проходит, а для B' этот слой оказывается критическим.

При $\omega^2 \sim N^2$ в случае $n_x n_z \neq 0$ из (27.11) получается $\varkappa_{\parallel} \sim (n_x/n_z)\varkappa_{\perp}$, откуда $l \sim 0$, и $k_x \sim \varkappa_{\perp}/n_z$, т. е. луч становится вертикальным, как и в горизонтально-однородном океане. При этом $c_{g\parallel} \sim \eta^{1/2}$; $c_{g\perp}$, $c_{gn} \sim \eta$, так что $\mu = 1/2$, и плоскости $\omega = \pm N$ являются отражающими (см. рис. 27.2; в малореальном случае вертикально-однородного океана $n_z \equiv 0$ получается $c_{g\parallel} = n_x c_{gx} \sim \eta^{3/2}$, так что слои $\omega = \pm N$ становятся критическими). При $\omega^2 \sim \omega_c^2$ пусть $\varkappa_{\perp} \neq 0$, $k_y \neq 0$, $n_x \neq 0$, так что $\omega^2 \neq f^2$; при этом оба значения $\varkappa_{\parallel}$ в (27.11) равны $-n_z\alpha^2/n_x\varkappa_{\perp}$, и $c_{g\parallel} \sim \eta^{1/2}$, так что слои $\omega = \pm\omega_c$ достигаются за конечное время и являются отражающими ($c_{g\perp}$ и c_{gy} конечны); при $k_y \to 0$ получается $\omega_c^2 \to f^2$, но кривые $\omega^2 = \omega_c^2$ и $\omega^2 = f^2$ исчезают, а при $n_x = 0$ получается критический слой в горизонтально-однородном океане.

Наконец, при $\omega^2 \sim L^2$ над и под каждым из слоев $\omega = \pm L$ имеются две возможные волны с заданным $k_{\perp}$, одна из которых пересекает этот слой, а другая уходит от него (см. рис. 27.2). Вектор преломления $\varkappa$ ортогонален к слою и параллелен одной из асимптотик дисперсионной кривой. Волна A имеет на слое конеч-

ный волновой вектор и ненулевую групповую скорость, достигает слоя за конечное время и пересекает его. Волна B при $\omega^2 < L^2$ и B' при $\omega^2 > L^2$ имеет на этом слое

$$\varkappa_{\parallel} \sim -\frac{2(N^2-f^2)\,n_x n_z \varkappa_{\perp}}{L^2-\omega^2} \sim \infty, \qquad (27.13)$$

и он оказывается для нее критическим: $k^2 \approx (L^2-\omega^2)^{-2} \sim \eta^{-2}$; $c_{g\parallel}$, $c_{gy} \sim \eta^2$; $c_{g\perp} \sim \eta$. Таким образом, слой ведет себя, как клапан, пропускающий волну только в одну сторону. При $n_x \to 0$ восстанавливается горизонтально-однородный океан с критическим слоем $\omega_c^2 = L^2 = f^2$, при $n_z \to 0$ — вертикально-однородный океан с критическим слоем $\omega^2 = L^2 = N^2$.

Упомянем еще планетарный волновой канал, ограниченный широтами φ_c, на которых перемещающаяся в сторону полюса волна с частотой ω испытывает отражение (точки поворота φ_c определяются из уравнения $2\Omega \sin\varphi = \omega$, где Ω — угловая скорость вращения Земли). Волны в планетарном канале с $f = f(\varphi)$ могут быть описаны в приближении ВКБ, за исключением окрестностей точек поворота, где аналогично (27.7) для широтной зависимости меридиональной компоненты скорости v приближенно получается уравнение Эйри

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \eta v = 0; \quad \eta = \frac{\varphi-\varphi_c}{L} + \left(\frac{sL}{\cos\varphi_c}\right)^2 - \frac{\omega - f}{2\Omega L \cos\varphi_c};$$

$$L = (\gamma^2 \sin 2\varphi_c)^{-1/3}; \quad \gamma = 2\pi n a \Omega / N h, \qquad (27.14)$$

причем a — радиус Земли, n и s — номера вертикальных и долготных мод (У. Манк, Н. Филлипс, 1968).

Рассмотрим теперь распространение внутренних волн фиксированной частоты в неоднородном океане с $N = N(\mathbf{x}, z)$ (пока что не учитывая течений). Если $N(\mathbf{x}, z)$ имеет локальный максимум N_0 в точке $(\mathbf{x}_0, z_0)$, то при $N_1 \leqslant N_0$ поверхность Γ_1 с уравнением $N(\mathbf{x}, z) = N_1$ будет ограничивать область V_1, внутри которой волна с частотой $\omega = N_1$ будет распространяться «бесконечно», отражаясь обратно вовнутрь при каждом попадании на границу Γ_1, так что V_1 будет для этой волны ловушкой. Наоборот, поверхность Γ_1^* с уравнением $N(\mathbf{x}, z) = N_1^* \geqslant N_0^*$, где $N_0^* = N(\mathbf{x}_0^*, z_0^*)$ — локальный минимум поля $N(\mathbf{x}, z)$, будет ограничивать область V_1^* (например, пятно перемешанной жидкости, образовавшееся после обрушивания внутренней волны), непроницаемую для распространяющихся вне ее волн с частотой $\omega = N_1^*$ — при попадании на границу Γ_1^* они всегда будут отражаться обратно. Непроницаемые области могут быть и внутри ловушки.

Наличие ловушек создает пространственные неоднородности спектров внутренних волн: в ловушке в спектре энергии можно

ожидать максимума в интервале частот $N_1 \leqslant \omega \leqslant N_0$, так как волны с такими частотами, оказавшись в ловушке, не могут ее покинуть, а более низкочастотные лишь проходят сквозь нее; в разных, даже близких точках пространства такие максимумы спектров могут оказаться различными. В окрестностях максимума N_0 возникает бесконечно много вложенных друг в друга ловушек для волн с непрерывным набором частот $N_k < N_{k-1} < \ldots < N_1 < N_0$, и в каждом слое $N_k < N_{k-1}$ спектр обогащается частотами ω из интервала $N_k \leqslant \omega \leqslant N_{k-1}$; при этом в ловушках иногда могут возникать стоячие или квазистоячие волны. Ловушка может распадаться на части, являющиеся ловушками для волн разных частот.

Статистический режим волн, распространяющихся внутри ловушки, изучил (в рамках лучевой теории) Л. А. Бунимович (1980). Следуя его работе, рассмотрим сначала плоскую задачу (x, z). Обозначим l расстояние вдоль границы ловушки от некоторой фиксированной ее точки (нормированное так, чтобы вся длина границы равнялась единице); $\theta = 1, 2$ — номера двух лучей, по которым волна фиксированной частоты $\omega = \pm N_0 \varkappa \nu / \varkappa$ может двигаться от точки границы внутрь ловушки (ν — единичный вектор горизонтали); r — расстояние вдоль луча от точки внутри ловушки до точки ближайшего отражения луча от границы. Зависимость «координат» (l, θ, r) от времени будет описываться некоторой динамической системой, о которой предположим, что она оставляет инвариантной меру μ в ее фазовом пространстве. Осуществим еще замену времени так, чтобы движение по всем траекториям динамической системы происходило с единичной скоростью.

Будем далее рассматривать порождаемое указанной динамической системой и аналогичное отображению последования Пуанкаре (см. § 15 выше) преобразование T гомеоморфной окружности замкнутой кривой, выделяемой в фазовом пространстве условием $r = 0$, $\theta = 1$, сопоставляющее каждой точке (l_1, θ_1) точку $(l_2, \theta_1) = T(l_1, \theta_1)$, в которую попадает вышедшая из l_1 по лучу θ_1 траектория при ее втором попадании на границу (при первом она оказывается на кривой θ_2). Пусть, например, ловушка — круг, внутри которого $N = N_0$ постоянно, а на границе N падает скачком до значения N_1. Тогда T сводится к повороту окружности на удвоенный угол α между двумя направлениями возможного движения волны (рис. 27.3) и сохраняет порожденную длиной лебеговскую меру. Если угол α несоизмерим с π, то преобразование T эргодично (и луч с течением времени проходит через все точки ловушки), в противном случае все траектории периодичны с одним и тем же периодом (Я. Г. Синай, 1979), и могут возникать стоячие волны. Пусть T_* — отображение прямой R^1 на себя, при проекции прямой на окружность $x \to \exp(2\pi i x)$ переходящее в со-

храняющий ориентацию гомеоморфизм T; тогда $\tau(T) = \lim_{|n|\to\infty} n^{-1} \times$ $\times T_*^n(x)$ называется числом вращения; в нашем примере $\tau = \alpha$. Рациональность τ эквивалентна наличию у T периодической точки.

Если граница ловушки состоит из горизонтальных и вертикальных прямых отрезков (а внутри ловушки могут содержаться непроницаемые для волны области с границами такого же типа), то динамическая система в общем случае эргодична. Если ловушка выпукла и имеет гладкую границу, то при иррациональном

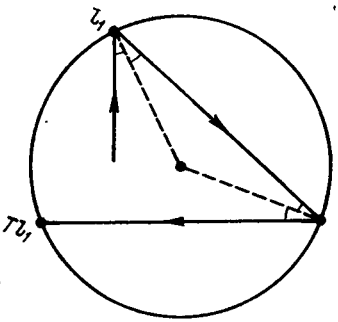


Рис. 27.3. Преобразование T границы плоской ловушки.

числе вращения $\tau(T)$ система имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру и эргодична (но перемешиванием не обладает — А. В. Кочергин, 1972), а при рациональном τ имеется конечное число периодических траекторий, к которым притягиваются все остальные, и на которых и сосредоточена инвариантная мера. Если ловушка не выпукла, то она распадается на не связываемые траекториями части.

В трехмерном случае имеется целый конус возможных направлений движения волны с частотой ω. Если ловушка — шар, то T сводится к повороту каждого большого круга, перпендикулярного горизонтальной плоскости, на угол 2γ, где γ — угол при вершине сечения конуса вертикальной плоскостью. Если граница ловушки состоит из вертикальных и горизонтальных плоскостей, то движение происходит в вертикальном сечении ловушки и, как правило, эргодично. В общем случае движение, по-видимому, в течение длительного времени близко к эргодическому. При наличии течения с малым сдвигом ловушка плывет по течению и из-за доплеровского сдвига частоты волны несколько деформируется.

Вариации рельефа дна $h(x)$, полей $N(x, z, t)$ и $\mathbf{U}(x, z, t)$ с образованием точек поворота, критических слоев и ловушек (с преимущественно эргодическим движением волн в них), а также многообразных процессов генерации, диссипации и нелинейных взаимодействий внутренних волн должны приводить к резким неоднородностям их распределения в пространстве и времени (и, вероятно, относительной редкости формирования вертикально стоячих волн).

§ 28. Установившиеся волны

Рассмотрим здесь плоские установившиеся внутренние волны, распространяющиеся в плоскости (x, z) по горизонтальному направлению x со скоростью c, так что все их характеристики могут зависеть лишь от двух переменных $x' = x - ct$ и z (далее будем использовать только эти две координаты x' и z, опуская при этом штрих у буквы x'). Пользуясь указанной в (26.1) бездивергентностью поля скорости, введем функцию тока $\psi(x, z)$, положив $u = -\partial\psi/\partial z$ и $w = \partial\psi/\partial x$, так что индивидуальная производная от любой величины A будет иметь вид

$$\frac{dA}{dt} = (u - c)\frac{\partial A}{\partial x} + w\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial(\Psi, A)}{\partial(x, z)}; \quad \Psi = \psi + cz. \tag{28.1}$$

Значит, всякая величина A, сохраняющаяся в жидких частицах (т. е. такая, что $dA/dt = 0$), может быть функцией только от Ψ. В частности, это справедливо для сохраняющейся при адиабатических процессах *потенциальной плотности* $\rho_* = \rho_*(\Psi)$ — это точное условие мы будем использовать вместо приближенного последнего уравнения (26.1). Ограничиваясь рассмотрением только коротких или высокочастотных волн, для которых вращение Земли можно не учитывать, перепишем уравнения движения (26.1) в виде

$$\rho_*\left[(u - c)\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\rho_*\left[(u - c)\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_*', \tag{28.2}$$

где p — нормированная, как в (3.5), негидростатическая часть давления, а величина $\rho_*' = -\eta''$ может быть истолкована, как негидростатическая часть потенциальной плотности (для нее нетрудно вывести точное выражение, но нам понадобится только равенство $\partial\rho_*'/\partial x = \partial\rho_*/\partial x$. Исключив давление из (28.2) перекрестным дифференцированием, получаем

$$\partial\left\{\Psi,\ \Delta\Psi + \frac{\partial \ln\rho_*}{\partial\Psi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 + gz\right]\right\}\Big/\partial(x, z) = 0, \tag{28.3}$$

откуда находим

$$\Delta\Psi + \frac{\partial \ln\rho_*}{\partial\Psi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 + gz\right] = F'(\Psi), \tag{28.4}$$

где $F(\Psi)$ — произвольная функция (Л. Дюбрей-Жакотен, 1932). Это уравнение существенно упрощается при переходе от Ψ к переменной $\Phi=\Phi(\Psi)$, определяемой соотношением $\partial\Phi/\partial\Psi=\rho_*^{1/2}$:

$$\Delta\Phi+gz\frac{\partial\rho_*}{\partial\Phi}=\rho_*\frac{\partial F}{\partial\Phi}. \qquad (28.5)$$

Если выбрать входящие сюда произвольные функции $\rho_*(\Phi)$ и $F(\Phi)$, например, так, чтобы было $\rho_*\partial F/\partial\Phi=-a^2\Phi$, $\partial\rho_*/\partial\Phi=-b$, где a и b — постоянные, то для Φ нетрудно получить волновые решения. Так, при краевых условиях $w=0$, а потому и $\partial\Phi/\partial x=0$ при $z=0$, $-h$ такими решениями могут служить функции

$$\Phi_n=\frac{bgz}{a^2}+A_n\sin\frac{\pi nz}{h}\sin k_nx;\quad k_n^2=a^2-\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 \qquad (28.6)$$

(Л. Магаард, 1965). При $n=1$ в верхнем слое океана на изопикнах получаются волны с плоскими вершинами и острыми ложбинами, а в придонном слое — наоборот.

Функция $F(\Psi)$ в (28.4) однозначно определяется в случае солитона, в котором от аргумента Ψ функций ρ_* и F удобно перейти к аргументу $s=\Psi/c=z+\psi/c$, так что уравнение (28.4) перепишется в виде

$$\Delta\psi+\frac{1}{c}\frac{\partial\ln\rho_*}{\partial s}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+c\right)^2+gz\right]=\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial s}. \qquad (28.7)$$

В случае солитона при $|x|\to\infty$ должно быть $\psi\to0$ и $\rho_*\to\rho_{*0}(z)$, так что в этом пределе (28.7) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\left(\frac{c^2}{2g}+z\right)N^2(z);\quad N^2=-g\frac{\partial\ln\rho_{*0}}{\partial z}. \qquad (28.8)$$

С использованием этой функции F уравнение (28.7) для солитона принимает вид

$$\Delta\psi+\left\{\frac{\psi}{c^2}-\frac{1}{2gc}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+c\right)^2-c^2\right]\right\}N^2\left(z+\frac{\psi}{c}\right)=0 \qquad (28.9)$$

(А. И. Леонов, Ю. З. Миропольский, 1974). В приближении Буссинеска (когда ρ_* в левых частях уравнений (28.2) считается квазипостоянным) слагаемое в квадратных скобках в этом уравнении выпадает. Рассмотрим длинноволновую асимптотику решения уравнения (28.9), т. е. волновые решения с длиной волны λ много больше глубины океана h, так что $\varepsilon=h/\lambda$ мало (например, распространение длинных внутренних волн в мелком море типа Балтийского). Будем измерять x в единицах λ, глубину z в единицах h, функцию тока ψ в единицах ch, а частоту N в единицах ее максимального значения N_0. Сохранив для измеренных такими

масштабами безразмерных величин те же обозначения, что для исходных размерных величин, перепишем (28.9) в виде

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\left\{\beta\psi-\frac{\mu}{2}\left[\varepsilon^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\right\}N^2(z+\psi)=0, \qquad (28.9')$$

где $\beta=N_0^2h^2/c^2$ — безразмерный обратный квадрат скорости распространения волны, а $\mu=N_0^2h/g$ — безразмерное обратное значение ускорения свободного падения. Поставим, например, краевые условия $\partial\psi/\partial x=0$ при $z=0$, -1. Будем искать решение в виде $\psi=\varepsilon^2\psi_1+\varepsilon^4\psi_2+\ldots$, $\beta=\beta_0+\varepsilon^2\beta_1+\ldots$, так что из (28.9′) получится

$$\psi_1''-\mu N^2\psi_1'+\beta_0N^2\psi_1=0;\quad \psi_2''-\mu N^2\psi_2'+\beta_0N^2\psi_2=Q;$$
$$Q=-\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\beta_1N^2\psi_1+\beta_0\left(N^2\right)'\psi_1^2-\mu\left(N^2\right)'\psi_1\psi_1'-\frac{\mu}{2}N^2\psi_1'^2\right], \qquad (28.10)$$

где штрих обозначает дифференцирование по z, и $N^2=N^2(z)$. Первое из этих уравнений имеет решение с разделяющимися переменными $\psi_1=\eta(x)\zeta(z)$, где $\zeta(z)$ удовлетворяет такому же уравнению и нулевым краевым условиям, а $\eta(x)$ можно определить из требования, чтобы второе уравнение (28.10) не содержало секулярных членов, т. е. чтобы его правая часть Q была ортогональной к $\zeta(z)$. Условие $\int\limits_{-1}^{0}\zeta Q\rho_*dz=0$ с нормировкой $\int\limits_{-1}^{0}\zeta^2\rho_*dz=1$ (где ρ_* взято безразмерным) приводится к виду

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\gamma\eta^2+\alpha\beta_1\eta=0;\quad \alpha=\int\limits_{-1}^{0}N^2\zeta^2\rho_*\,dz;$$
$$\gamma=\int\limits_{-1}^{0}\left[\beta_0\left(N^2\right)'\zeta^2-\mu\left(N^2\right)'\zeta\zeta'-\frac{\mu}{2}N^2\zeta'^2\right]\rho_*\zeta\,dz. \qquad (28.11)$$

Это уравнение может быть получено однократным интегрированием по x стационарного уравнения КдВ (или, наоборот, дифференцированием по x уравнения Бенджамина—Лайтхилла (22.10) при $S=0$) и потому имеет такие же решения — кноидальные волны (22.14) и солитоны (22.15), причем возможен любой знак последних — он определяется знаком γ. Обозначив $\eta_0=-3\alpha\beta_1/2\gamma$, перепишем это уравнение в виде

$$\gamma^{-2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=-\frac{\partial U}{\partial\eta};\quad U=\frac{1}{3}\eta^2(\eta-\eta_0), \qquad (28.11')$$

так что оно вполне аналогично уравнению движения частицы с массой γ^{-1} и координатой η (со «временем» x) в силовом поле с потенциалом $U(\eta)$, $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$. График «потенциальной ямы» $U(\eta)$ и фазовые траектории уравнения (28.11′) на плоскости (η, η') показаны на рис. 28.1. Центр $U \approx U_{\min}$ (т. е. $\eta \approx \frac{2}{3}\eta_0$) соответствует инфинитезимальным волнам, и чтобы они имели вид

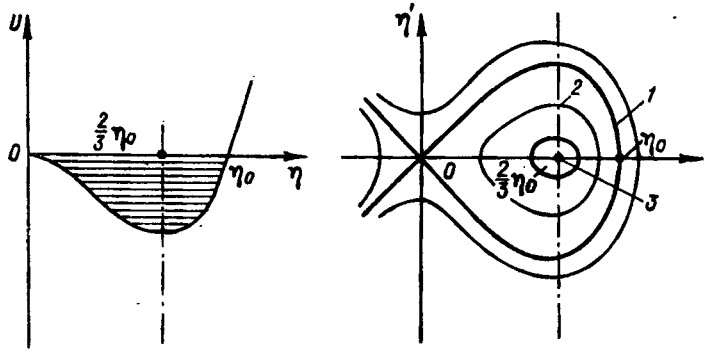


Рис. 28.1. Потенциал $U(\eta)$ и фазовые траектории (η, η') уравнения КдВ (28.11′).
1 — солитон, *2* — кноидальные волны, *3* — инфинитезимальные волны.

$\eta \sim e^{ix}$, надо положить $\frac{2}{3}\eta_0\gamma = 1$. С ростом амплитуды кноидальные волны (замкнутые циклы на рис. 28.1) становятся все более асимметричными: при $\gamma > 0$ «частица» все больше задерживается в области малых η, а большие значения η проскакивает быстро. Пределом является солитон (петля сепаратрисы на рис. 28.1), который имеет вид $\eta = \eta_0 \operatorname{ch}^{-2}(x/2)$. Отметим, что инфинитезимальные волны распространяются с «дозвуковыми» скоростями $c < (gh)^{1/2}$, что является проявлением их отрицательной дисперсии; положительные солитоны являются «сверхзвуковыми», отрицательные — «дозвуковыми».

Аналогично выводу уравнений (22.19) и (28.11), для длинных внутренних волн выводится нестационарное уравнение КдВ, и с его помощью доказывается, что установившиеся длинные волны устойчивы по отношению к малым *продольным* возмущениям (т. е. неспособны к *автомодуляции*). Для них выводится (А. И. Леонов, 1976) также и двумерное обобщение уравнения КдВ — аналог уравнения Кадомцева—Петвиашвили (22.19′); здесь оно показывает, что по отношению к *поперечным* возмущениям длинные внутренние волны неустойчивы (явление *самофокусировки*). Для комплексной огибающей слабонелинейного пакета внутренних волн с узким спектром выводится нелинейное

уравнение Шредингера (22.29), с помощью которого устанавливается критерий автомодуляционной неустойчивости (в случае трехмерного волнового пакета более сложный, чем для поверхностных волн — Ю. З. Миропольский, 1975).

Применим теперь уравнение (28.9′) к случаю тонкого пикноклина (толщиной $2h \ll \lambda$), который можно идеализировать, как окруженный неограниченной нестратифицированной жидкостью (при этом z удобно отсчитывать от середины пикноклина), причем на его волнообразных границах $z = \psi \pm 1$ следует требовать непрерывности значений ψ и $\partial\psi/\partial z$ (а при $z \to \pm\infty$ — стремления этих величин к нулю). Будем искать решение уравнения (28.9′) в пикноклине в виде рядов $\psi = \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \ldots$, $\beta = \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \ldots$, а вне пикноклина — в таком же виде, но только после перехода к растянутым вертикальным координатам $z_\pm = \varepsilon(z \mp 1)$, где верхний знак относится к слою выше, а нижний — ниже пикноклина; при этом для $\psi_\pm(x, z_\pm)$ будет $\partial^2\psi_\pm/\partial x^2 + \partial^2\psi_\pm/\partial z_\pm^2 = 0$. В пикноклине получим для ψ_1 и ψ_2 такие же, что и выше, уравнения (28.10) с тем лишь отличием, что теперь из Q выпадет слагаемое $\partial_2\psi_1/\partial x^2$. Краевые условия для ψ_1 будут теперь иметь вид $\psi_1 = \psi_{1\pm}$ и $\psi_1' = 0$ при $z = \pm 1$, а для ψ_2 получается $\psi_2 = \psi_{2\pm}$ и $\psi_2' = Q_\pm \equiv \equiv \partial\psi_{1\pm}/\partial z_\pm + \beta_0 N^2\psi_1^2$ при $z = \pm 1$ и $z_\pm = 0$. Решение для ψ_1 в пикноклине можно, как и выше, взять в виде $\psi_1 = \eta(x)\zeta(z)$, где $\zeta(z)$ удовлетворяет такому же уравнению и краевым условиям $\zeta'(\pm 1) = 0$. Уравнение для ψ_2 приводится к виду

$$(\rho_*\psi_2')' + \beta_0\rho_* N^2\psi_2 = \rho_* Q; \quad \psi_2'(z = \pm 1) = Q_\pm. \tag{28.12}$$

Оно может быть приведено к неоднородному уравнению для функции $F = \rho_*\psi_2' - \psi_0$ с однородными краевыми условиями $F(z = \pm 1) = 0$, если положить

$$\psi_0 = \frac{\rho_+ Q_+ - \rho_- Q_-}{\rho_+ - \rho_-}[\rho_*(z) - \rho_-] + \rho_- Q_-; \quad \rho_\pm = \rho_*(\pm 1); \tag{28.12′}$$

нетрудно убедиться, что условие разрешимости такого неоднородного уравнения для F приводится к виду

$$\zeta_+ Q_+ \rho_+ - \zeta_- Q_- \rho_- - \int_{-1}^{+1} \zeta Q \rho_*\, dz = 0; \quad \zeta_\pm = \zeta(\pm 1). \tag{28.13}$$

Подставив сюда указанные выше значения $Q(x, z)$ и $Q_\pm(x)$, получим

$$\rho_+\zeta_+^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=+0} - \rho_-\zeta_-^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=-0} + \gamma\eta^2 + \alpha\beta_1\eta = 0, \tag{28.13′}$$

где $\Phi(x, z)$ — решение уравнения Лапласа $\Delta\Phi=0$, затухающее при $z\to\pm\infty$ и обращающееся в η при $z=0$. Такое решение имеет вид потенциала двойного слоя

$$\Phi_\pm = \pm\frac{z}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(x')\,dx'}{(x-x')^2+z^2};$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=\pm 0} = \mp\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(x')\,dx'}{x-x'}, \qquad (28.14)$$

так что уравнение (28.13′) окончательно принимает вид

$$-\frac{r}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(x')\,dx'}{x-x'}+\gamma\eta^2+\alpha\beta_1\eta=0;\quad r=\rho_+\zeta_+^2+\rho_-\zeta_-^2 \qquad (28.15)$$

(Т. Бенджамин, 1967; Х. Оно, 1975). Оно отличается от стационарного уравнения КдВ (28.11) заменой дифференциального оператора дисперсии интегродифференциальным (с интегральным преобразованием Гильберта). Соответствующее нестационарное уравнение (Бенджамина—Оно) имеет вид

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+c_0\frac{\partial\eta}{\partial z}+a\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{r}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(x',\,t)\,dx'}{x-x'}=0, \qquad (28.15')$$

и его линеаризированному варианту соответствует дисперсионное соотношение $\omega=c_0k-rk|k|$ (показывающее, кстати, что $c=c_0-r|k|<c_0$, т. е., как и в случае КдВ, инфинитезимальные волны являются «дозвуковыми»); оператор $rk|k|$ и создает интегральную дисперсию. Уравнение (28.15) имеет в числе своих решений и периодические волны, и солитоны. Последние имеют очень простой вид $\eta=\eta_m(1+x^2/L^2)^{-1}$, причем их амплитуда равна $\eta_m=-2\alpha\beta_1\gamma^{-1}$, а полуширина равна $|L|=-r/\alpha\beta_1$ (так что $\beta_1<0$, т. е. все солитоны «сверхзвуковые», их безразмерная относительная скорость равна $\gamma\eta_m/2=-\alpha\beta_1$, а их знак совпадает со знаком γ). Такие солитоны столь легко образовались в лабораторных опытах Р. Дэвиса и А. Акривоса (1967), что они, по-видимому, должны часто наблюдаться в природе.

§ 29. Генерация микроструктуры

Рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, распространяющиеся в плоскости (x, z) по направлению x плоские, но здесь — неустановившиеся волны. Они описываются нестационарными аналогами уравнений (28.2) (отличающимися от последних заменой $-c\partial/\partial x\to\partial/\partial t$) и уравнением $d\rho_*/dt=0$, из которых после

введения функции тока $\psi(x, z, t)$ в приближении Буссинеска (которым мы здесь ограничимся) получается

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, z)} = -g\frac{\partial \ln \rho_*}{\partial x}; \quad \frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \rho_*)}{\partial(x, z)} = 0. \quad (29.1)$$

Рассмотрим пакет слабонелинейных волн, для которого пригодно приближение лучевой теории, так что ψ и ρ_* можно представлять, как функции «медленных» абсциссы $\xi = \varepsilon^2 x$ и времени $\tau = \varepsilon^2 t$, обычной глубины z и «быстрой» фазы $\theta = \varepsilon^{-2}\vartheta(\xi, \tau)$ (где ε — малый параметр порядка крутизны волн), и разлагать в ряды $\psi = \sum_1^\infty \varepsilon^n \psi_n(\xi, \tau, z, \theta)$ и $\rho_* = \rho_0(z) + \sum_1^n \varepsilon^n \rho_n(\xi, \tau, z, \theta)$ (Ю. Д. Борисенко, А. Г. Воронович, А. И. Леонов, Ю. З. Миропольский, 1976). Введем горизонтальное волновое число $k = \partial\vartheta/\partial\xi = \partial\theta/\partial x$ и частоту $\omega = -\partial\vartheta/\partial\tau = -\partial\theta/\partial t$, так что будет справедливым уравнение сохранения числа волн $\partial k/\partial\tau + \partial\omega/\partial\xi = 0$. Подставляя указанные ряды в (29.1), получим

$$\omega^2 \frac{\partial}{\partial\theta}\left(k^2\frac{\partial^2\psi_n}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_n}{\partial z^2}\right) + k^2 N^2 \frac{\partial\psi_n}{\partial\theta} = Q_n;$$

$$\omega\frac{\partial\rho_n}{\partial\theta} - k\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\frac{\partial\psi_n}{\partial\theta} = S_n, \quad (29.2)$$

причем $Q_1 = S_1 = 0$, и для ψ_1 и ρ_1 получаются решения с разделяющимися переменными:

$$\psi_1 = \eta_1(\xi, \tau, \theta)\zeta_1(z); \quad \rho_1 = \eta_1\frac{k}{\omega}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\zeta_1;$$

$$\eta_1 = A(\xi, \tau)e^{i\theta} + A^*(\xi, \tau)e^{-i\theta}; \quad \zeta_1'' + \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2}k^2\zeta_1 = 0, \quad (29.3)$$

где A — комплексная огибающая, а краевые условия для $\zeta_1(z)$ можно взять, например, в виде $\zeta_1(0) = \zeta_1(-h) = 0$. Во втором приближении к волновым решениям с разделяющимися переменными прибавляются нелинейные поправки порядка $|A|^2$, аналогичные по своему смыслу течению Стокса в теории поверхностных волн:

$$\psi_2 = \eta_2(\xi, \tau, \theta)\zeta_2(z) + |A|^2\psi(z);$$

$$\rho_2 = \eta_2\left(\frac{k}{\omega}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\zeta_2 + \frac{k^2}{2\omega^2}\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z^2}\zeta_1^2\right) + |A|^2 R(z);$$

$$\eta_2 = A^2 e^{2i\theta} + A^{*2}e^{-2i\theta}; \quad \zeta_2'' + \frac{N^2 - 4\omega^2}{\omega^2}k^2\zeta_2 = \frac{k^2}{\omega^2}(N^2)'\zeta_1^2, \quad (29.4)$$

с теми же нулевыми краевыми условиями для $\zeta_2(z)$. Уравнение для комплексной огибающей $A = \frac{1}{2}a\exp(ib)$ (где a и b вещественны) получается из требования, чтобы уравнения (29.2) для ψ_3

и ρ_3 не содержали секулярных членов, и оказывается имеющим вид

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + c_g \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial c_g}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \xi} A = 4iI(k) A^2 A^*; \qquad (29.5)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial \tau} + \frac{\partial c_g a^2}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial b}{\partial \tau} + c_g \frac{\partial b}{\partial \xi} = I(k) a^2, \qquad (29.5')$$

где $c_g = \partial\omega_1/\partial k$ — групповая скорость волн в линейном приближении, т. е. при дисперсионном соотношении $\omega = \omega_1(k)$, получаемом из краевой задачи (29.3) для $\zeta_1(z)$ (эти уравнения справедливы при расстройке волнового числа в пакете $\delta k/k$ порядка ε^2; если же она порядка ε, то нужно пользоваться другой «медленной» абсциссой $\xi = \varepsilon(x - c_g t)$, и тогда левая часть (29.5) будет иметь вид $\partial A/\partial\tau - (i/2)(\partial c_g/\partial k)\partial^2 A/\partial\xi^2$, т. е. для A получится нелинейное уравнение Шредингера). Уравнения (29.5′) являются прямыми следствиями (29.5), первое из них выражает сохранение энергии; из них следует, что нелинейное дисперсионное соотношение имеет вид $\omega = \omega_1(k) - \varepsilon^2 a^2 I(k)$. Входящая в последние формулы функция $I(k)$ выражается через $N(z)$ и множители $\Psi(z)$ и $R(z)$ в нелинейных поправках, уравнения для которых получаются из требования, чтобы уравнения (29.2) для ψ_4 и ρ_4 не содержали секулярных членов. В частном случае, когда в линейном приближении задана монохроматическая волна ($\omega = \text{const}$, $k = \text{const}$, $c = \omega/k$), эти уравнения оказываются имеющими вид:

$$\Psi'' + c_g^{-2} N^2 \Psi = (2c^{-3} - c^{-2} c_g^{-1} - c^{-1} c_g^{-2}) N^2 (\zeta_1^2)' + 2c^{-3} \zeta_1^2 (N^2)';$$

$$\frac{g}{\rho_0} R = c_g^{-1} N^2 \Psi + (c^{-1} c_g^{-1} - c^{-2}) N^2 (\zeta_1^2)' - c^{-2} \zeta_1^2 (N^2)';$$

$$4I = \left(\int_{-h}^{0} N^2 \zeta_1^2 \, dz \right)^{-1} \left[k \int_{-h}^{0} (N^2)' \zeta_1^2 \zeta_2 \, dz - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega^2}{k} \int_{-h}^{0} (\zeta_1'^2 + k^2 \zeta_1^2) \Psi \, dz - \frac{g\omega}{\rho_0} \int_{-h}^{0} \zeta_1 \zeta_1' R \, dz \right], \qquad (29.6)$$

с теми же, что и выше, нулевыми краевыми условиями для $\Psi(z)$. Знание $I(k)$ позволяет оценивать устойчивость волн по нелинейному дисперсионному соотношению: при $(\partial c_g/\partial k) I(k) > 0$ волна неустойчива по отношению к продольным возмущениям (автомодуляция; за исключением вырожденного случая $N = \text{const}$, длинные волны к ней неспособны); при $I(k) > 0$ волна неустойчива по отношению к поперечным возмущениям (самофокусировка).

Итак, в рассмотренном приближении (29.3), (29.4) волновой пакет содержит основную волну, вторую гармонику и нелинейный вклад в среднее течение. При набегании пакета на неподвижную среду жидкие частицы приобретают средние горизонтальные ско-

рости $\varepsilon^2|A|^2\Psi'(z)$ и, кроме того, смещаются по вертикали на расстояния $\varepsilon^2|A|^2R(z)\,(\partial\rho_0/\partial z)^{-1}$. Поскольку суммарный поток через поперечное сечение океана равен нулю, океан разбивается на слои с альтернирующими знаками горизонтальной скорости (и возмущений плотности) — возникает *вертикальная тонкослойная микроструктура*. Из (29.6) видно, что ее длина волны по вертикали имеет порядок c_gN^{-1} и при малых длинах несущей волны ($k\to\infty$, а потому, вследствие дисперсионного соотношения для внутренних волн, $c_g\to 0$) мала. Кроме того, правые части уравнений (29.6) осциллируют по вертикали с длиной волны, обратно пропорциональной номеру моды.

После прохождения волнового пакета (за время Lc_g^{-1} порядка суток — недель, где L — его длина порядка (10^0—10^1 км) жидкие частицы возвращаются на свои первоначальные уровни (хотя и смещенными по горизонтали на расстояния $\varepsilon^2|A|^2\Psi'(z)Lc_g^{-1}$), и микроструктура исчезает (если только на ней не возникла вторичная неустойчивость — турбулизация в областях с $\mathrm{Ri}<{}^1/_4$ или даже обрушивание ультракоротких внутренних волн, оставляющих необратимые следы).

§ 30. Гамильтонов формализм

Следуя А. Г. Вороновичу (1979), введем для внутренних волн в приближении Буссинеска (хотя без него обойтись нетрудно), в пренебрежении вращением Земли и при краевом условии $w\to 0$ ($z\to 0$) гамильтониан

$$\mathscr{H}=\bar{E};\quad E=\int\limits_{-h}^{0}\left[\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}+\pi(\rho,\,z)\right]dz;\quad \mathbf{u}=\nabla\varphi+\lambda\nabla(\rho_0+\rho);$$

$$\pi(\rho,\,z)=\rho gz+g\int\limits_{\rho_0+\rho}^{\rho_0}\eta(R)\,dR=-\frac{g}{\rho_0'}\frac{\rho^2}{2!}+\frac{g\rho_0''}{\rho_0'^3}\frac{\rho^3}{3!}+\ldots,\qquad(30.1)$$

где для $\mathbf{u}$ использовано так называемое представление Клебша; $\rho_0+\rho$ — безразмерная потенциальная плотность, измеренная в единицах средней стандартной плотности ρ_w морской воды, а $\rho_0=\rho_0(z)$ — ее равновесное значение; $\eta(R)$ — функция, обратная к $\rho_0(z)$, т. е. определяемая условием $\eta[\rho_0(z)]\equiv z$; $\rho_w\pi(\rho,z)$ — плотность потенциальной энергии, равная работе по перемещению в невозмущенной среде жидкой частицы с потенциальной плотностью $\rho_0+\rho$ с ее равновесного уровня $\eta(\rho_0+\rho)$ на уровень z (сохранение в $\pi(\rho,z)$ только выписанных здесь слагаемых с ρ^2 и ρ^3 достаточно для приближения слабой нелинейности); ρ_wE — полная (кинетическая+потенциальная) энергия вертикального столба воды

единичного сечения; $\overline{E}$ — значение, осредненное по горизонтали. Каноническими переменными в гамильтониане $\mathscr{H}$ являются функции λ и ρ (функция φ выражается через них при помощи условия $\operatorname{div} \mathbf{u}=0$, т. е. из уравнения $\Delta\varphi=-\nabla[\lambda\nabla(\rho_0+\rho)]$, т. е.

$$\partial\lambda/\partial t=\delta\mathscr{H}/\delta\rho;\quad \partial\rho/\partial t=-\rho\mathscr{H}/\delta\lambda. \tag{30.2}$$

Далее будет удобно перейти от переменных λ и ρ к новым каноническим переменным — преобразованиям Фурье $\lambda_{\mathbf{k}}(z,\ t)$ и $\rho^*_{\mathbf{k}}(z,\ t)$ по горизонтальным координатам вида (24.1) (вследствие вещественности λ и ρ будет $\lambda_{\mathbf{k}}=\lambda^*_{-\mathbf{k}}$ и $\rho_{\mathbf{k}}=\rho^*_{-\mathbf{k}}$). Если положить

$$\lambda_{\mathbf{k}}=\zeta_k(z)\,e^{-i\omega t},\quad \rho_{\mathbf{k}}=\frac{i\omega\rho_0'}{g}\zeta_k(z)\,e^{-i\omega t},$$

то из линеаризированных канонических уравнений (получаемых при сохранении в $\mathscr{H}$ только квадратичных по λ, ρ членов) для $\zeta_k(z)$ получается упрощенное уравнение (26.5) вида $\zeta''+k^2(N^2/\omega^2-1)\zeta=0$, где $N^2=-g\rho_0'$. При краевых условиях $\zeta=0$ $(z=0,\ -h)$ оно имеет решения в виде дискретных мод $\omega=\omega_{nk}$, $\zeta=\zeta_{nk}(z)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. В неограниченном пространстве дискретные моды заменяются непрерывным спектром вертикальных волновых чисел $n\to l$, и локально получается $\omega_{lk}=Nk(k^2+l^2)^{-1/2}$ и $\zeta_{lk}(z)\sim e^{-ilz}$. Собственные функции $\zeta_{\nu k}(z)$ будем нормировать условием $\int\limits_{-h}^{0}N^2\times$ $\times\zeta_{\mu k}\zeta^*_{\nu k}dz=\delta_{\mu-\nu}$, из которого следует, что $N^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\zeta_{\nu k}(z)\zeta^*_{\nu k}(z')\,dz=$ $=\delta_{z-z'}$ (в случае дискретных мод размерные волновые числа ν заменяются безразмерными номерами; $\delta_{\mu-\nu}$ меняется на $\delta_{\mu\nu}$, так что изменяется и размерность функций $\zeta_{\nu k}$; интегрирования по всем ν заменяются суммированиями по всем целым ν; функции $\zeta_{\nu k}$ при этом можно выбирать вещественными). Перейдем от переменных $\lambda_{\mathbf{k}}$, $\rho_{-\mathbf{k}}$ к *нормальным* каноническим переменным $ia^*_{\nu\mathbf{k}}$, $a_{\nu\mathbf{k}}$, положив

$$a_{\nu\mathbf{k}}(t)=-\frac{i}{g}\left(\frac{\omega_{\nu k}}{2}\right)^{1/2}\int\limits_{-h}^{0}\left(N^2\lambda_{\mathbf{k}}+\frac{ig^2}{\omega_{\nu k}}\rho_{\mathbf{k}}\right)\zeta_{\nu k}\,dz; \tag{30.3}$$

$$\lambda_{\mathbf{k}}(z,\ t)=ig\int(2\omega_{\nu k})^{-1/2}\left[\zeta^*_{\nu k}(z)\,a_{\nu\mathbf{k}}(t)-\zeta_{\nu k}(z)\,a^*_{\nu,\,-\mathbf{k}}(t)\right]d\nu;$$

$$\rho_{\mathbf{k}}(z,\ t)=-\rho_0'\int(\omega_{\nu k/2})^{1/2}\left[\zeta^*_{\nu k}(z)\,a_{\nu\mathbf{k}}(t)+\zeta_{\nu k}(z)\,a^*_{\nu,\,-\mathbf{k}}(t)\right]d\nu. \tag{30.3'}$$

Тогда гамильтоновы уравнения примут вид:

$$\frac{da_{\nu\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta a^*_{\nu\mathbf{k}}}; \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \ldots; \tag{30.4}$$

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega_{\nu k} a_{\nu\mathbf{k}} a^*_{\nu\mathbf{k}}\, d\mathbf{k}\, d\nu;$$

$$\mathcal{H}_3 = \int \left(V^{\nu\nu_1\nu_2}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a^*_{\nu\mathbf{k}} a_{\nu_1\mathbf{k}_1} a_{\nu_2\mathbf{k}_2} + V^{*\nu\nu_1\nu_2}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\nu\mathbf{k}} a^*_{\nu_1\mathbf{k}_1} a^*_{\nu_2\mathbf{k}_2}\right)\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \times$$

$$\times\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\nu\, d\nu_1\, d\nu_2 + \frac{1}{3}\int \left(U^{\nu\nu_1\nu_2}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\nu\mathbf{k}} a_{\nu_1\mathbf{k}_1} a_{\nu_2\mathbf{k}_2} +\right.$$

$$\left. + U^{*\nu\nu_1\nu_2}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a^*_{\nu\mathbf{k}} a^*_{\nu_1\mathbf{k}_1} a^*_{\nu_2\mathbf{k}_2}\right)\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\nu\, d\nu_1\, d\nu_2,$$

причем для коэффициентов трехволновых взаимодействий получаются формулы

$$(V,\ U)^{\nu\nu_1\nu_2}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\omega_{\nu k}\omega_{\nu_1 k_1}\omega_{\nu_2 k_2}}{2}\right)^{1/2}\left\{\left[\frac{\omega_{\nu k}}{k^2}\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1}{\omega_{\nu_1 k_1}} + \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_2}{\omega_{\nu_2 k_2}}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\omega_{\nu k} \mp \omega_{\nu_1 k_1} \mp \omega_{\nu_2 k_2}}{\omega_{\nu k}}\right]\int N^2 \frac{\partial(\zeta,\ \zeta^*)_{\nu k}}{\partial z}\zeta^*_{\nu_1 k_1}\zeta^*_{\nu_2 k_2}\, dz +\right.$$

$$+\left[\frac{\omega_{\nu_1 k_1}}{k_1^2}\left(\frac{\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}}{\omega_{\nu k}} + \frac{\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2}{\omega_{\nu_2 k_2}}\right) + \frac{\pm\omega_{\nu k} - \omega_{\nu_1 k_1} - \omega_{\nu_2 k_2}}{\omega_{\nu_1 k_1}}\right]\int N^2(\zeta,\ \zeta^*)_{\nu k} \times$$

$$\times \frac{\partial\zeta^*_{\nu_1 k_1}}{\partial z}\zeta^*_{\nu_2 k_2}\, dz + \left[\frac{\omega_{\nu_2 k_2}}{k_2^2}\left(\frac{\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}}{\omega_{\nu k}} + \frac{\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_1}{\omega_{\nu_1 k_1}}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\mp\omega_{\nu k} + \omega_{\nu_1 k_1} + \omega_{\nu_2 k_2}}{\omega_{\nu_2 k_2}}\right]\int N^2(\zeta,\ \zeta^*)_{\nu k}\zeta^*_{\nu_1 k_1}\frac{\partial\zeta^*_{\nu_2 k_2}}{\partial z}\, dz\Bigg\}, \tag{30.5}$$

где верхние знаки относятся к V, а нижние — к U. Для внутренних волн условия резонанса $\omega_{\nu k} = \omega_{\nu_1 k_1} + \omega_{\nu_2 k_2}$ при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ выполнимы, так что среди трехволновых взаимодействий, описываемых в $\mathcal{H}_3$ слагаемыми с коэффициентами V, имеются резонансные. В то же время, поскольку все собственные частоты $\omega_{\nu k}$ положительны, условие $\omega_{\nu k} + \omega_{\nu_1 k_1} + \omega_{\nu_2 k_2} = 0$ невыполнимо, в том числе и при $\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$, так что все трехволновые взаимодействия, описываемые в $\mathcal{H}_3$ слагаемыми с коэффициентами U, нерезонансны, и эти слагаемые могут быть устранены каноническим преобразованием типа (24.6). После этого гамильтоновы уравнения с сохранением в них только главных членов (в так называемом *приближении слабой нелинейности*) принимают вид

$$\frac{\partial a_{\nu\mathbf{k}}}{\partial t} + i\omega_{\nu k}a_{\nu\mathbf{k}} = -i\int V^{\nu\nu_1\nu_2}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} a_{\nu_1\mathbf{k}_1} a_{\nu_2\mathbf{k}_2}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\nu_1\, d\nu_2 -$$

$$-2i\int V^{*\nu_1\nu\nu_2}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2} a_{\nu_1\mathbf{k}_1} a^*_{\nu_2\mathbf{k}_2}\delta_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\nu_1\, d\nu_2. \tag{30.6}$$

Рассмотрим с помощью этих уравнений резонансное взаимодействие трех волн — случай $a_{\nu\mathbf{k}} = \sum_1^3 a_n(\mathbf{k}, t)\ e^{-i\omega_n t}\ \delta(\nu - \mu_n)$, где функции $a_n(\mathbf{k}, t)$, медленно зависящие от t, описывают узкие спектральные пики у точек $\mathbf{k} = \varkappa_n$, удовлетворяющих вместе с частотами $\omega_n = \omega_{\mu_n \varkappa_n}$ условиям резонанса $\varkappa_3 = \varkappa_1 + \varkappa_2$ и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Тогда при $\mathbf{k} \approx \varkappa_3$ в (30.6) второй интеграл обращается в ноль и получается

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\,(\omega_{\mu_3 \mathbf{k}} - \omega_3)\right] a_3(\mathbf{k}) = -2iV \int a_1(\mathbf{k}_1)\, a_2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\, d\mathbf{k}_1, \quad (30.7)$$

где $V = V^{\mu_3 \mu_1 \mu_2}_{\varkappa_3 \varkappa_1 \varkappa_2}$. Здесь можно положить $\omega_{\mu_3 \mathbf{k}} - \omega_3 \approx \mathbf{c}_{g3} \cdot (\mathbf{k} - \varkappa_3)$, и удобно осуществить преобразование Фурье $\psi_n(\mathbf{x}, t) = \int e^{i\,(\mathbf{k} - \varkappa_n)\cdot \mathbf{x}} \times \frac{a_n(\mathbf{k})}{2\pi}\, d\mathbf{k}$ (вследствие равенства $\int |\psi_n|^2 d\mathbf{x} = \int |a_n|^2 d\mathbf{k}$ и узости спектральных пиков величина $\omega_n |\psi_n|^2$ будет иметь смысл осредненной энергии E для каждой волны). Множитель $e^{-i\varkappa_n \cdot \mathbf{x}}$ описывает быстрые изменения по $\mathbf{x}$, так что остающаяся величина ψ_n зависит от $\mathbf{x}$ медленно, и слагаемыми $\mathbf{c}_{gn} \cdot \nabla \psi_n$, получающимися преобразованием Фурье из $i\mathbf{c}_{gn} \cdot (\mathbf{k} - \varkappa_n) a_n$, можно пренебречь. В результате получаем

$$\dot{\psi}_1 = -4i\pi V^* \psi_2^* \psi_3; \quad \dot{\psi}_2 = -4i\pi V^* \psi_3 \psi_1^*; \quad \dot{\psi}_3 = -4i\pi V \psi_1 \psi_2, \quad (30.8)$$

где вывод третьего уравнения изложен выше, а первое и второе получаются аналогично из (30.6) при $\mathbf{k} \approx \varkappa_1$ и $\mathbf{k} \approx \varkappa_2$. Заметим еще, что, умножая все ψ_n на один и тот же множитель вида e^{iv}, можно сделать коэффициент V в уравнениях (30.8) вещественным, что мы и будем предполагать далее. Такие уравнения рассматривались в нелинейной оптике И. Бломбергеном (1965), к плоским внутренним волнам их применяли С. Торпе (1966), Р. Дэвис и А. Акривос (1967) и последующие авторы, к трехмерным волнам — А. Г. Воронович (1975). Можно убедиться, что они имеют два интеграла $\sum_1^3 \omega_n |\psi_n|^2 = \text{const}$ (закон сохранения суммарной энергии тройки волн) и $\sum_1^3 \varkappa_n |\psi_n|^2 = \text{const}$ (закон сохранения импульса).

Если $|\psi_3| \gg |\psi_{1,2}|$ при $t = 0$, то при небольших t будет $\psi_3 \approx \approx \text{const}$ и из (30.8) получится $\ddot{\psi}_{1,2} = |4\pi V \psi_3|^2 \psi_{1,2}$, так что $\psi_{1,2}$ будут экспоненциально расти с инкрементом $\tau^{-1} = 4\pi V |\psi_3| \sim \omega_3 \zeta_3 l_3$, где ζ_3 — вертикальное смещение, а l_3 — вертикальное волновое число

волны ψ_3: она оказывается неустойчивой по отношению к распаду на две волны с меньшими частотами (и изложенная теория применима, если $\zeta_3 l_3$ мало). Если же $|\psi_1| \gg |\psi_{2,3}|$ при $t=0$, то получается $\ddot{\psi}_{2,3} = -|4\pi V \psi_1|^2 \psi_{2,3}$, так что $\psi_{2,3}$ не растут со временем: волна ψ_1 оказывается устойчивой по отношению к возмущениям $\psi_{2,3}$, у одного из которых частота больше, чем ω_1. Согласно А. Г. Вороновичу, в случае дискретных мод для распадной неустойчивости волны μ_3 необходимо и достаточно условие $\mu_3 < \max(\mu_1, \mu_2)$. Отметим еще, что вследствие сохранения суммарной энергии экспоненциальная неустойчивость при больших временах переходит в периодический обмен энергией между модами.

Совершенно иной характер имеют взаимодействия резонансных триад при наличии течения со сдвигом скорости, которое представим в виде $\mathbf{u}_0[\rho_0(z)]$. При этом в гамильтониане (30.1) надо заменить $|\mathbf{u}|^2$ на $|\mathbf{u}_0(\rho_0+\rho)+\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u}_0(\rho_0+\rho)|^2$ (чтобы он представлял собой работу по переводу системы из равновесного состояния в данное), вместо $\zeta_k(z)$ использовать функции $w_{\nu\mathbf{k}}(z)$, описываемые уравнением (26.12), и использовать доплеровские частоты $\omega_d = \omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_0$ и проинтегрированное по вертикали волновое действие

$$I = \frac{1}{2}\int\left(\frac{N^2}{\omega_d^3} - \frac{\omega_d''}{2k^2\omega_d^2}\right) w_{\nu\mathbf{k}}^2\, dz,$$

условившись всегда выбирать для описания волны такую из пар $(\mathbf{k}, \omega)$ или $(-\mathbf{k}, -\omega)$, при которой будет $I>0$ (при другой же получилось бы $I<0$). Отметим, что I фигурирует в знаменателе формулы для $\mathbf{c}_g$ и обращается в ноль там, где $\partial\omega_{\nu k}/\partial\mathbf{k}=0$.

Если в резонансной триаде первые две волны имеют один, а третья — другой знак I, то условия резонанса надо писать в виде $\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3=0$ и $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$, в гамильтониане $\mathcal{H}_3$ в (30.4) сохранять лишь слагаемые с коэффициентами U. Тогда вместо (30.8) получаются уравнения $\dot{\psi}_i = -2i\pi U\psi_j\psi_k$, где все три индекса различны. Они имеют такие же два интеграла движения, но из-за различия знаков у ω_i это теперь не означает сохранения энергии: возможен обмен энергией со средним течением. Так, например, имеется решение $\psi_1=\psi_2=\psi_3 \sim (t_0-t)^{-1}$, обращающееся в бесконечность за конечное время (так называемая *взрывная* неустойчивость; около t_0 она, конечно, сглаживается нелинейными эффектами высших порядков, но, возможно, успевает порождать турбулизацию течения).

Введем теперь, аналогично (24.10), пространственный спектр волнового действия $N_{\nu\mathbf{k}}(t) = F_{\nu\mathbf{k}}/\omega_{\nu k}$ (где $F_{\nu\mathbf{k}}$ — так называемый *несимметричный* пространственный спектр ν-й моды поля $\zeta(\mathbf{x}, z, t)$), положив, вследствие статистической однородности поля

внутренних волн и по горизонтали, и по вертикали (во втором отношении — хотя бы слабой коррелированности различных мод),

$$\langle a_{\nu\mathbf{k}}(t)\, a^*_{\nu_1\mathbf{k}_1}(t)\rangle = N_{\nu\mathbf{k}}(t)\,\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}\delta_{\nu-\nu_1}, \qquad (30.9)$$

где угловые скобки означают статистическое осреднение. Вычисляя $\partial N_{\nu\mathbf{k}}/\partial t$ при помощи уравнений (30.6), мы выразим эту величину через тройные корреляции нормальных переменных. Для тройных корреляций при помощи (30.6) получим уравнения с четверными корреляциями. Последние выразим через двойные, как для многомерного гауссовского распределения. Пренебрежем медленными изменениями тройных корреляций во времени и, временно введя их слабое затухание, при помощи формулы $(x-i\varepsilon)^{-1}\to\pi\delta(x)$ $(\varepsilon\to 0)$, заменим величины $(\omega_{\nu k}-\omega_{\nu_1 k_1}-\omega_{\nu_2 k_2})^{-1}$ дельта-функциями. В результате всех этих операций получается такое же, как (24.12′), кинетическое уравнение

$$\frac{\partial N_{\nu\mathbf{k}}}{\partial t} = I_{\nu\mathbf{k}} = 4\pi\int\Big[\big|V^{\nu\nu_1\nu_2}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\big|^2\left(N_{\nu_1\mathbf{k}_1}N_{\nu_2\mathbf{k}_2}-N_{\nu\mathbf{k}}N_{\nu_1\mathbf{k}_1}-N_{\nu\mathbf{k}}N_{\nu_2\mathbf{k}_2}\right)\times$$

$$\times\,\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,\delta_{\omega_{\nu k}-\omega_{\nu_1 k_1}-\omega_{\nu_2 k_2}} + 2\big|V^{\nu_1\nu\nu_2}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2}\big|^2\left(N_{\nu_1\mathbf{k}_1}N_{\nu_2\mathbf{k}_2}+N_{\nu\mathbf{k}}N_{\nu_1\mathbf{k}_1}-\right.$$

$$\left.-N_{\nu\mathbf{k}}N_{\nu_2\mathbf{k}_2}\right)\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\,\delta_{\omega_{\nu k}-\omega_{\nu_1 k_1}+\omega_{\nu_2 k_2}}\Big]\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\nu_1\,d\nu_2. \qquad (30.10)$$

Оно сохраняет суммарные энергию $\int\omega_{\nu k}N_{\nu\mathbf{k}}\,d\mathbf{k}d\nu$ и импульс $\int\mathbf{k}N_{\nu\mathbf{k}}\,d\mathbf{k}d\nu$ (но не сохраняет суммарное действие $\int N_{\nu\mathbf{k}}\,d\mathbf{k}d\nu$). Его правая часть $I_{\nu\mathbf{k}}$ имеет вид $A_{\nu\mathbf{k}}-B_{\nu\mathbf{k}}N_{\nu\mathbf{k}}$, где первое слагаемое описывает приток, а второе — отток энергии от моды $\nu\mathbf{k}$ из-за нелинейных взаимодействий. Вне спектральных интервалов накачки и диссипации энергии (если, конечно, они разнесены) возможны колмогоровские спектры — стационарные решения кинетического уравнения, определяемые спектральными потоками энергии и импульса. Так, согласно Е. Н. Пелиновскому и М. А. Раевскому (1977), изотропный колмогоровский спектр модулей трехмерных волновых векторов $\varkappa=(k^2+l^2)^{1/2}$ имеет вид

$$E(\varkappa)\sim(\varepsilon N)^{1/2}\varkappa^{-2}, \qquad (30.11)$$

где N — локальная частота Вяйсяля—Брента, а в случае длинных волн (на мелкой воде или тонком пикноклине толщиной h)

$$E_n(k)\sim(\varepsilon_n N_{\max}h)^{1/2}k^{-3/2}. \qquad (30.11')$$

Заметим, впрочем, что концепция слабой нелинейности применима лишь если время нелинейных взаимодействий $N_{\nu\mathbf{k}}/I_{\nu\mathbf{k}}$ велико по сравнению с периодом волны $\omega^{-1}_{\nu k}$, т. е. при условии

$I_{\mathbf{vk}}\,\omega_{\mathbf{vk}}^{-1}N_{\mathbf{vk}}^{-1} \ll 1$, которое, по-видимому, для мелкомасштабных волн может и не выполняться (в частности, Ю. З. Миропольский отметил, что теория резонансных взаимодействий не описывает могущей играть заметную роль в природе автомодуляционной неустойчивости довольно длинных внутренних волн).

Кинетическое уравнение (30.10) неполно не только тем, что в $I_{\mathbf{vk}}$ учтены не все нелинейные взаимодействия волн. Кроме этого, как в (24.19), в левой части уравнения нужно, вообще говоря, учитывать рефракционные члены, а в правой, конечно, накачку и диссипацию. Начиная с накачки, отметим, прежде всего, возмущения на верхней и нижней границах океана. По расчетам ряда авторов, аналогичным (25.2)—(25.5), линейные резонансные атмосферные воздействия — колебания атмосферного давления, теплообмена с атмосферой (создающего колебания давления на нижней границе экмановского пограничного слоя) и особенно напряжения трения ветра — вполне способны генерировать заметные внутренние волны, дорастающие до пределов линейной теории $ak \sim 10^{-1}$ за времена порядка суток (хотя для надежных оценок здесь достает знания спектров атмосферных воздействий в соответствующих интервалах волновых чисел и частот); при наличии течений с вертикальным сдвигом скорости эти эффекты могут усиливаться в несколько раз.

С. Торпе (1966) и в наиболее общем виде Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров, В. М. Куртепов и К. А. Наугольных (1972, 1975) установили, что внутренние волны могут эффективно генерироваться при нелинейных взаимодействиях поверхностных волн, в частности когда поверхностные волны $(\mathbf{k}_1, \omega_1)$ и $(\mathbf{k}_2, \omega_2)$ образуют резонансную триаду с внутренней волной $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, $\omega = \omega_1 - \omega_2$ (например, при $k_1 \approx k_2$); последняя при этом затухает с глубиной слабо (как e^{kz}).

Внутренние волны генерируются при обтекании стратифицированным течением неровностей рельефа дна; этот эффект рассчитывался применительно к атмосфере А. А. Дородницыным (1950), а к океану — Б. А. Тареевым (1965). Генерация волн цунами подводными землетрясениями является редким, но важным явлением. Внутренние волны приливных периодов генерируются приливами и приливными течениями над наклонными шельфами (М. Раттри, 1960) и вообще над неровным дном.

Из возможных механизмов диссипации энергии внутренних волн следует назвать три. Гравитационное обрушивание (при $a\omega^2 \sim g$) вследствие обычной малости частот ω крайне маловероятно, но становится вполне возможным при наличии течения со сдвигом скорости (создаваемого, например, более длинными волнами) из-за сноса им вершин волн на глубинах, где $U_{\mathbf{k}}(z) > c_{\mathbf{k}}$ (*конвективная неустойчивость*, И. Орланский и К. Брайен, 1969). Обычная сдвиговая неустойчивость возникает при $\mathrm{Ri} < {}^1/_4$; по-ви-

димому, именно ее наблюдал визуально Дж. Вудс (1968). По модельным расчетам К. Гарретта и У. Манка (1972), получивших $\mathrm{Ri} = 2\pi^{-2} j^{-2} E^{-1} (N/N_{\max})^{-1}$, где $j = 20$ — эквивалентное число мод, а $E = 2\pi \cdot 10^{-5}$, сдвиговая неустойчивость более вероятна, чем конвективная (определяемая в основном наклоном), так как в их модели значительная часть энергии приходится на частоты около f, где отношение сдвига к наклону возрастает. Удельная скорость диссипации энергии при этом получается равной $^5/_2 \nu (2\pi N)^2$, где $\nu \sim 1$ см^2/с — турбулентная вязкость (N — в цикл/с), и имеет порядок 10^{-6} Вт/м^3. Третьим механизмом диссипации (сравнимой, но, по-видимому, несколько меньшей средней эффективности) является поглощение волн в критических слоях.

§ 31. Спектры

Введем спектры (так называемые *несимметричные*), различающиеся у волн, распространяющихся по положительному и отрицательному направлениям волнового вектора $\mathbf{k}$. Кроме того, будем рассматривать волны, удовлетворяющие краевому условию на поверхности океана: набор мод ν дискретный (счетный), и волновое поле статистической неоднородностью по вертикали не обладает (так что для его зависимости от z нужны другие статистические модели). При этом справедливы следующие три теоремы (А. С. Монин, Л. И. Питербарг, 1977).

Теорема 1. Для статистической стационарности и горизонтальной однородности случайного поля $\zeta(\mathbf{x}, z, t)$, задаваемого формулой (26.4), необходима и достаточна некоррелированность случайных комплексных амплитуд различных его мод:

$$\langle A_{\nu \mathbf{k}} A^*_{\nu_1 \mathbf{k}_1} \rangle = F_{\nu \mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1} \delta_{\nu \nu_1}, \tag{31.1}$$

где $F_{\nu \mathbf{k}}$ — некоторые вещественные функции (несимметричные пространственные спектры мод); при этом корреляционная функция поля (26.4) имеет вид

$$B_{\mathbf{r}\tau}(z_1, z_2) = \langle \zeta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, z_1, t + \tau) \zeta(\mathbf{x}, z_2, t) \rangle =$$

$$= \int e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega\tau)} \zeta_{k\omega}(z_1) \zeta_{k\omega}(z_2) F(\mathbf{k}, \omega)\, d\mathbf{k}\, d\omega;$$

$$F(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{\nu} [F_{\nu \mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\nu k}) + F_{\nu, -\mathbf{k}} \delta(\omega + \omega_{\nu k})], \tag{31.2}$$

а корреляция $\langle \varphi(M_1) \psi^*(M_2) \rangle$ двух линейных функционалов φ и ψ от поля ζ (представимых в виде (26.4) с заменой $\zeta_{k\omega}$ на $\varphi_{k\omega}$ или $\psi_{k\omega}$) представляется формулой (31.2) с заменой произведения $\zeta_{k\omega}(z_1) \zeta_{k\omega}(z_2)$ на $\varphi_{k\omega}(z_1) \psi^*_{k\omega}(z_2)$.

Следствие. Спектральные плотности полей u, v, w, p на глубине z и полной энергии внутренних волн на единицу площади отличаются от $F(\mathbf{k}, \omega)$ соответственно множителями

$$\frac{k_x^2\omega^2 + k_y^2 f^2}{k^4}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2;\quad \frac{k_y^2\omega^2 + k_x^2 f^2}{k^4}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2;\quad \omega^2\zeta^2;$$

$$\left(\frac{\omega^2 - f^2}{k^2}\rho_*\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2;\quad \frac{\omega^2}{\omega^2 - f^2}\left[g\rho_0\zeta_0^2 + \int_{-h}^{0}(N^2 - f^2)\zeta^2\rho_*\,dz\right], \quad (31.3)$$

а взаимная спектральная плотность полей u и v — множителем $[k_x k_y(\omega^2 - f^2) - ik^2\omega f]k^{-4}(\partial\zeta/\partial z)^2$.

Теорема 2. Если случайное поле $\zeta(\mathbf{x}, z, t)$ горизонтально-изотропно, так что все $F_{\nu k}$ зависят только от k, то его корреляционная функция принимает вид

$$B_{r\tau}(z_1, z_2) = \int_f^{N_{\max}} e^{-i\omega\tau}\sum_\nu J_0(rk_{\nu\omega})\zeta_{\nu\omega}(z_1)\zeta_{\nu\omega}(z_2)G_{\nu\omega}\,d\omega;$$

$$G_{\nu\omega} = 2\pi k_{\nu\omega}k'_{\nu\omega}F_\nu(k_{\nu\omega}), \quad (31.4)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя; обращение этой формулы имеет вид:

$$G_{\nu\omega} = \zeta_{\nu\omega}(z_1) \bigcirc \Phi_{0\omega}(z_1, z_2) \bigcirc \zeta_{\nu\omega}(z_2);$$

$$\Phi_{r\omega}(z_1, z_2) = (2\pi)^{-1}\int e^{i\omega\tau}B_{r\tau}(z_1, z_2)\,d\tau, \quad (31.5)$$

(знак $\bigcirc$ означает свертку), так что статистическая структура горизонтально-изотропного поля внутренних волн, характеризуемого набором спектров $F_\nu(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, полностью определяется значениями этого поля на одной вертикали (при известном решении краевой задачи (26.5), (26.5′)).

Пример 1. При $N = \text{const}$ (и для простоты при краевом условии $\zeta = 0$ при $z = 0$) в неглубоком океане ($hN^2/g \ll 1$) решение краевой задачи (26.5), (26.5′) приближенно имеет вид $\zeta_\nu(z) = C_\nu \sin(\nu\pi z/h)$, причем $k_{\nu\omega} = \nu\pi/\beta h$, где β определено в (26.5). Используя это решение и интегральное представление функции Бесселя, из (31.4) получаем

$$\Phi_{r\omega}(z_1, z_2) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\left[\varphi\left(\alpha + \frac{z_1 - z_2}{2h}\right) + \varphi\left(\alpha - \frac{z_1 - z_2}{2h}\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi\left(\alpha + \frac{z_1 + z_2}{2h}\right) - \varphi\left(\alpha - \frac{z_1 + z_2}{2h}\right)\right]d\theta;$$

$$\alpha = \frac{r\cos\theta}{2\beta h}; \quad \varphi(\alpha) = \sum_\nu C_\nu^2 G_{\nu\omega}e^{2i\nu\pi\alpha} \quad (31.6)$$

(зависимость φ от ω подразумевается). Отсюда для частотного спектра на фиксированной глубине $\Phi_\omega(z)=\Phi_{0\omega}(z, z)$ получается значение $^1/_2[\varphi(0)-\varphi(z/h)]$. Выразив при помощи этого соотношения φ через Φ_ω, можно переписать формулу (31.6) в виде

$$\Phi_{r\omega}(z_1, z_2)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Phi_\omega\left(\alpha h+\frac{z_1+z_2}{2}\right)+\Phi_\omega\left(\alpha h-\frac{z_1+z_2}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\Phi_\omega\left(\alpha h+\frac{z_1-z_2}{2}\right)-\Phi_\omega\left(\alpha h-\frac{z_1-z_2}{2}\right)\right]d\theta. \qquad (31.6')$$

Таким образом, здесь для полного определения статистической структуры поля ζ достаточны даже несинхронные измерения на разных глубинах одной вертикали. Заметим, что при замене r на $(x^2/a^2+y^2/b^2)^{1/2}$ формула (31.6′) остается справедливой и для эллиптически-анизотропного поля (так как ζ_ν не зависит от k).

Пример 2. У горизонтально-изотропного поля $\zeta(\mathbf{x}, z, t)$ функция $G_{\nu\omega}$ имеет вид $E_\omega(\alpha_\omega^2+k_{\nu\omega}^2)^{-1}$ тогда и только тогда, если при любых фиксированных $\mathbf{x}$ и ω гармоники ζ_ν этого поля суть случайные функции от z с некоррелированными приращениями — простейшие аналоги стационарных процессов авторегрессии (имеющих спектры $|P_k|^{-2}$, где P_k — полином). Если такое поле измерено при $z\geqslant z_1$, то наилучшая его экстраполяция $\widehat{\zeta}$ в область $z<z_1$ есть решение уравнения $(D-\alpha^2\beta^2\rho_*)\widehat{\zeta}=0$ при условиях $\widehat{\zeta}(z_1)=\zeta(z_1)$, $\widehat{\zeta}(-h)=0$, причем оценка максимального правдоподобия для параметра α есть решение уравнения $\sum\zeta_\nu^2=\int_{-h}^{0}\Gamma(z, z;\alpha)\beta^2\rho_*dz$, где $\Gamma(z_1, z_2;\alpha)$ — функция Грина оператора $D-\alpha^2\beta^2\rho_*$. В автомодельном случае $\alpha=0$ с точностью до слагаемых порядка $hN_{\max}^2/g$ получается

$$\Phi_{0\omega}(z_1, z_2)=E_\omega[\min(z_1, z_2)-z_1z_2/h], \qquad (31.7)$$

откуда следует, что частотные спектры полей ζ и u на глубине z и полной энергии внутренних волн отличаются от E_ω соответственно множителями

$$z(1-z/h);\quad \frac{1}{2}(\omega^2+f^2)\left[\int_z^0(1-2z/h)\beta^2dz+\int_{-h}^{0}(z/h)^2\beta^2dz\right];$$
$$\omega^2(\omega^2-f^2)^{-1}\int_{-h}^{0}z(1-z/h)(N^2-f^2)dz. \qquad (31.7')$$

Пример 3. К. Гарретт и У. Манк (1972, 1975) подобрали для внутренних волн горизонтально-изотропный климатический спектр

энергии $F_E(\mathbf{k}, \omega) = E(k, \omega)(2\pi k)^{-1}$, допустив для спектра волновых чисел и частот самоподобие $E(k, \omega) = k_*^{-1} A(k/k_*) B_\omega$, где $k_* = k_*(\omega)$ — ширина полосы волновых чисел k у волн с фиксированной частотой ω, а функции $A(p)$ и B_ω нормированы условиями $\int_0^\infty A(p)\,dp = \int_0^\infty B_\omega d\omega = 1$. Для частотного множителя была взята степенная формула $B_\omega \sim (2f/\pi\omega)(\omega^2 - f^2)^{-1/2}$, согласующаяся с эмпирической зависимостью ω^{-2} при $\omega \gg f$ и дающая экспериментально наблюдаемый пик при $\omega \approx f$. Для средних условий в океане была принята экспоненциальная стратификация $N(z) = N_0 \times \times \exp(z/L_0)$ с параметрами $N_0 = 3$ цикл/ч и $L_0 = 1{,}3$ км; при этом между локальным вертикальным волновым числом ν и номером моды j при $j \geqslant 2$ получается приближенная связь $\nu \approx j\pi N(z)/N_0 L_0$, и из дисперсионного соотношения (26.14) при $\omega \ll N$ получается $k = \nu(\omega^2 - f^2)^{1/2}/N(z) \approx j\pi(\omega^2 - f^2)^{1/2}/N_0 L_0$. По аналогии было положено $k_* \sim j\pi(\omega^2 - f^2)^{1/2}$. Таким образом, ГМ — модель безразмерного спектра внутренних волн имеет вид

$$F_E(\mathbf{k}, \omega) = \frac{Ef}{\pi^2 \omega (\omega^2 - f^2)^{1/2}} \frac{A(k/k_*)}{kk_*};$$

$$f \leqslant \omega \leqslant N; \quad 0 \leqslant k \leqslant k_* = j\pi(\omega^2 - f^2)^{1/2}, \qquad (31.8)$$

где $E = 2\pi \cdot 10^{-5}$ — эмпирическая постоянная, частоты измеряются в единицах N_0, а волновые числа — в единицах $M = (2\pi L_0)^{-1} = = 1{,}22 \cdot 10^{-6}$ цикл/см. Размерный спектр тогда имеет вид $\rho_0 L_0^5 N_0 \times \times F_E(\mathbf{k}L_0, \omega/N_0)$, единицы его измерения Дж · с. В модели ГМ-72 полагалось $j = 20$ и $A(p) = 1$ при $0 \leqslant p \leqslant 1$; при этом полная энергия волн на единицу площади поверхности океана равна 0,382 Дж/см². По трехслойной модели стратификации типа (26.8), но с краевым условием $\zeta = 0$ при $z = 0$, из (31.3) и (31.8) на поверхности океана получается

$$\sigma_u^2 \approx \sigma_0^2 \xi^{-1} \operatorname{arctg} \xi; \quad \sigma_0^2 = \frac{3E}{4\pi} N_0^2/M^3 h; \quad \xi = j\pi MH(\delta/h)^{1/2}. \qquad (31.9)$$

Здесь оказывается $\sigma_0 \approx 3{,}5$ см/с, приблизительно таково же и σ_u, так что создаваемые внутренними волнами горизонтальные скорости на поверхности океана оказываются значительными и вполне могут производить эффекты, делающие выходы внутренних волн на поверхность океана доступными для аэрокосмического наблюдения. Укажем еще, что в модели ГМ-75 полагалось $j = 6$ и $A(p) = {}^3/_2(1+p)^{-5/2}$, а позже предлагались и другие модификации (У. Манк, 1981).

По моделям ГМ рассчитывался кинетический интеграл (30.10) (Н. Помфри, 1981) — см. один из примеров на рис. 31.1, который показывает, что в отсутствие накачки и диссипации нелинейные взаимодействия переносят энергию от низших мод с широким ин-

тервалом частот к промежуточным и старшим модам с низкими частотами. К частотам $\omega_{\nu k}$ около инерционной частоты f при больших ν имеется приток энергии, при малых ν — отток (так что возможно, что инерционные колебания со свойственной им малой вертикальной когерентностью создаются именно нелинейными взаимодействиями внутренних волн). Поток энергии по спектру оказывается имеющим порядок $\varepsilon \sim 10^{-3}$ Вт/м^2, время перекачки энергии $N_{\nu k}/I_{\nu k}$ — порядка нескольких дней.

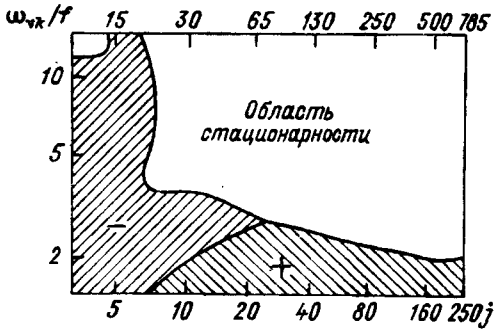


Рис. 31.1. Знаки кинетического интеграла $I_{\nu k}$ в плоскости j (или νL_0) — $\omega_{\nu k}/f$, согласно Н. Помфрн (1981). Область стационарности определяется условием $|I_{\nu k}/A_{\nu k}| < 0{,}1$.

Теорема 3. Если все компоненты $E_{ij}(\mathbf{k}, w)$ спектрального тензора поля горизонтальной скорости на поверхности океана $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в низкочастотной области $\omega < \omega_0$ при всех $\mathbf{k}$ обращаются в ноль, то при $\omega < \omega_0$ равен нулю также и спектральный тензор $E^L_{ij}(\omega)$ лагранжевой скорости $\dot{x}(t)$ (удовлетворяющей уравнению $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ при условии $\mathbf{x}(0) = 0$).

Следствие. Для дисперсии смещения частицы $\sigma_i^2(t) = \langle x_i^2(t) \rangle$ справедлива оценка сверху $\sigma_i^2 \leqslant 2\sigma_u^2/f^2$. Приняв, что лагранжева корреляционная функция скорости не меньше эйлеровой, получим для предельной дисперсии смещений также оценку снизу

$$\sigma_i^2(\infty) \geqslant 2 \int E_{ii}(\mathbf{k}, \omega)\, \omega^{-2}\, d\mathbf{k}\, d\omega \approx (7/6)\, \sigma_u^2/f^2, \qquad (31.10)$$

где последнее равенство соответствует спектру ГМ-72. Таким образом, предельный средний квадратичный радиус σ_∞ пятна примеси от мгновенного точечного источника на поверхности океана в изотропном поле внутренних волн удовлетворяет неравенствам $(7/6)^{1/2}\sigma_u/f \leqslant \sigma_\infty \leqslant 2^{1/2}\sigma_u/f$. При $\sigma_u \sim 3{,}5$ см/с и $\max f = 1{,}46 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$ получается 250 м $\leqslant \sigma_\infty \leqslant$ 350 м, так что полям примесей на поверхности океана должны быть свойственны пятна размерами в сотни метров. Можно убедиться, что на таких расстояниях r структурные функции поля скорости малы по сравнению с σ_u^2, и в уравнении конвективной диффузии $\partial s/\partial t = -\mathbf{u} \cdot \nabla s$ можно пренебречь зависимостью $\mathbf{u}$ от $\mathbf{x}$. Записав решение в виде $s(\mathbf{x}, t) =$

$= e^{-A} s(x, 0)$, где $A = \int_0^t dt \mathbf{u} \cdot \nabla$, и осреднив этот результат в предположении, что $\mathbf{u}$ — гауссова случайная функция с нулевым средним значением и некоррелированными декартовыми компонентами, получим $\langle e^{-A} \rangle = e^{1/2 \langle A^2 \rangle}$, где $\langle A^2 \rangle = \sigma^2(t)\Delta$. Тогда осредненное уравнение конвективной диффузии в поле внутренних волн на поверхности океана принимает вид

$$\partial \langle s \rangle / \partial t = K(t) \Delta \langle s \rangle;$$

$$K(t) = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2(t)}{dt}; \quad \sigma^2(t) = \int_0^t \int_0^t R(t_1 - t_2)\, dt_1\, dt_2, \qquad (31.11)$$

где $R(\tau)$ — корреляционная функция эйлеровой скорости $u(0, t)$.

§ 32. Инерционные колебания

Сохраняя в уравнениях теории внутренних волн слагаемые с параметром Кориолиса f, мы тем самым, кроме гравитационных колебаний, порождаемых архимедовыми силами (имеющими в случае устойчивой стратификации возвращающий характер), учитываем также инерционные колебания, порождаемые нарушениями равновесия между силой инерции в движении воды относительно вращающейся Земли и силой инерции в переносном движении (вращении планеты), т. е. силой Кориолиса. При частотах $\omega \gg f$ получаются гравитационные волны, слегка искаженные инерционными эффектами, а при $\omega \sim f$, наоборот, инерционные колебания, слегка искаженные влиянием стратификации. Эти инерционные колебания, согласно (26.5), происходят практически без возмущений давления и, согласно (26.14), суть волны с приблизительно вертикальными трехмерными волновыми векторами $\varkappa$, и поэтому они локальны (всякая внутренняя волна с фиксированной частотой ω, распространяющаяся по меридиану, при приближении к широте, на которой значение f равно ω, превращается там в инерционное колебание, описываемое около этой широты уравнением Эйри (27.14)).

Вследствие локальности при описании инерционных колебаний нет необходимости учитывать сферичность Земли, но нетрудно учесть полное ускорение Кориолиса $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ с $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$ без «традиционного приближения», и тогда основное уравнение (26.3) для простоты с $\rho_* \approx \text{const}$ примет вид

$$\frac{\partial^2 \Delta \zeta}{\partial t^2} + \left[4 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)^2 + N_0^2 \Delta_h\right] \zeta = 0. \qquad (32.1)$$

При $N_0 = 0$ отсюда получается уравнение чисто инерционных колебаний (уравнение (7.17) гироскопических волн). Оно имеет элементарные волновые решения $e^{i\theta}$, $\theta = \varkappa \cdot \xi - \omega t$ с частотами

$\omega = \pm 2\Omega \cos\alpha$, где α — угол между векторами Ω и $\varkappa$. Поле скорости здесь имеет вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\cos\theta \pm \frac{\varkappa \times \mathbf{U}}{\varkappa}\sin\theta;$$

$$\mathbf{c} = 2\frac{\Omega\cdot\varkappa}{\varkappa^3}\varkappa; \qquad \mathbf{c}_g = \frac{2}{\varkappa^3}\varkappa\times(\Omega\times\varkappa), \tag{32.2}$$

где $\mathbf{U}$ — произвольный постоянный вектор, ортогональный $\varkappa$, описывает поперечные волны с круговой поляризацией. При вертикальном $\varkappa$ вектор $\mathbf{u}$ вращается как со временем, так и с глубиной в северном полушарии по часовой стрелке, $\omega = \pm f$, фаза распространяется вверх, а энергия вниз. Наибольшая частота волн (32.2) достигается при $\varkappa \| \Omega$ и равняется 2Ω (полусуточный период); при этом $p' = 0$, т. е. движение действительно происходит по инерции. Между гироскопическими волнами возможны резонансные трехволновые взаимодействия.

При квазипостоянном N_0 для гироскопических волн, модифицированных влиянием стратификации, из (32.1) получается локальное дисперсионное соотношение $\omega^2 = N_0^2\cos^2\theta + 4\Omega^2\cos^2\alpha$. Экстремумы ω_m функции $\omega(\varkappa)$ суть корни уравнения $\omega_m^2(\omega_m^2 - 4\Omega^2) = N_0^2(\omega_m^2 - 4\Omega^2\sin^2\varphi)$, где φ — географическая широта; при $N_0 \gg \Omega$ получается $\omega_{\min} \approx f$ и $\omega_{\max} \approx N_0$.

Точная нелинейная теория горизонтального инерционного движения на вращающейся сфере (А. С. Монин, 1972) основывается на уравнениях

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv\,\mathrm{tg}\,\varphi}{a} - 2\Omega v\sin\varphi = 0; \quad \frac{dv}{dt} + \frac{u^2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{a} + 2\Omega u\sin\varphi = 0, \tag{32.3}$$

где $u = a\frac{d\lambda}{dt}\cos\varphi$ и $v = a\frac{d\varphi}{dt}$ — компоненты скорости по направлениям на восток и на север, $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$ — широта и долгота движущейся жидкой частицы, a — радиус сферы. Эти уравнения имеют интегралы энергии и момента импульса:

$$u^2 + v^2 = u_0^2 + v_0^2; \quad (u + \Omega a\cos\varphi)\,a\cos\varphi = (u_0 + \Omega a\cos\varphi_0)\,a\cos\varphi_0, \tag{32.4}$$

где ноликами отмечаются начальные значения функций от времени. Полагая $u_0 = U\cos\beta$, $v_0 = U\sin\beta$, $\varepsilon = U/2\Omega a$, для $\mu = \sin\varphi$ из (32.4) получаем уравнение

$$(d\mu/dt)^2 = \Omega^2(\mu^2 - \mu_1^2)(\mu_2^2 - \mu^2);$$

$$\mu_{1,2}^2 = 1 - (\varepsilon \pm \delta)^2; \quad \delta = \left[(\cos\varphi_0 + \varepsilon\cos\beta)^2 + \varepsilon^2\sin^2\beta\right]^{1/2}, \tag{32.5}$$

которое интегрируется в эллиптических функциях. Получающиеся траектории жидких частиц располагаются в широтной зоне $|\varepsilon-\delta|\leqslant\cos\varphi\leqslant\varepsilon+\delta$ (или $\mu_1^2\leqslant\mu^2\leqslant\mu_2^2\geqslant 0$), на ее границах касаясь кругов широты. При $\varepsilon+\delta\leqslant 1$ или $\mu_1^2\geqslant 0$ (класс A_1) они не пересекают экватор (причем на них на минимальном расстоянии от экватора скорость частицы направлена на запад), а в противоположном случае (класс A_2) они пересекают экватор и периодически повторяют поочередно в каждом полушарии одинаковые фигуры. Траектории, у которых $\delta\leqslant\varepsilon$ (класс B_1), всюду имеют западную составляющую движения и описывают петли вокруг полюсов или проходят через них; при $\delta>\varepsilon$ (класс B_2) траектории на максимальном расстоянии от экватора имеют восточную составляющую движения.

Если на траектории есть точки, в которых $u=0$ (с ними, как правило, связаны петли на траекториях), то их широты φ_1, согласно (32.4), определяются формулой $\cos\varphi_1=[\cos\varphi_0(\cos\varphi_0+2\varepsilon\cos\beta)]^{1/2}$. Условия их существования имеют вид $-2\varepsilon\cos\beta\leqslant\cos\varphi_0\leqslant(1+\varepsilon^2\cos^2\beta)^{1/2}-\varepsilon\cos\beta$. Если начальное движение частицы имеет восточную составляющую ($\cos\beta>0$), то левое из этих неравенств выполнено, а правое показывает, что петли возможны лишь на траекториях, начинающихся не слишком близко к экватору. Если же, наоборот, $\cos\beta<0$, то правое неравенство выполнено, а левое показывает, что петли возможны лишь при условии $2\varepsilon|\cos\beta|\leqslant 1$ на траекториях, начинающихся не слишком далеко от экватора.

У траекторий, проходящих через полюс ($\cos\varphi_0=0$, $\delta=\varepsilon$) уравнения (32.4) принимают вид $u=-\Omega a\cos\varphi$, $v^2=U^2-\Omega^2a^2\cos^2\varphi$; первое из них дает $\lambda=\lambda_0-\Omega t$ (т. е. частица на полярной траектории не участвует во вращении планеты), а согласно второму $\cos\varphi\leqslant 2\varepsilon$ (и геофизические траектории, с $\varepsilon\leqslant 1/2$, не пересекают экватора — имеют класс A_1B_1, а траектории ИСЗ с $\varepsilon>1/2$ проходят поочередно через оба полюса — класс A_2B_1). Траектории, пересекающие экватор ($\cos\varphi_0=1$, класс A_2), при $\cos\beta\geqslant 1/2\varepsilon$ (при $\varepsilon\leqslant 1/2$ всегда) располагаются в экваториальной зоне $\cos\varphi\geqslant(1+2\varepsilon\cos\beta+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon$ и имеют класс A_2B_2; при $\cos\beta>0$ — без петель и лишь с меандрами (например, при малых ε — на экваториальных глубинных противотечениях в очень узкой зоне, где при $y=a\varphi$ второе уравнение (32.3) приближенно имеет вид $\ddot{y}+\frac{2\Omega U}{a}y=0$, так что период колебаний меандров $\tau=2\pi(a/2\Omega\times U)^{1/2}$ и их длина $U\tau=\pi(2aU/\Omega)^{1/2}$ велики), а при $\cos\beta<0$ — с петлями, повторяющимися поочередно в каждом полушарии (неустойчивость в случаях пересечения экватора пассатными течениями).

Для траекторий класса A_1 из (32.5) получается

$$\mu = \pm\mu_1 \,\mathrm{dn}^{-1}(\mu_2\Omega t);\quad k = (1-\mu_1^2/\mu_2^2)^{1/2}, \tag{32.6}$$

где $\mathrm{dn}\,\theta$ — эллиптическая функция Якоби (дельта амплитуды с модулем k), имеющая по θ период $2K(k)$, так что период колебаний широты частиц равен

$$\tau = \frac{2K(k)}{\Omega\mu_2} \approx \frac{\pi}{\Omega\,|\sin\varphi_0|}\left(1+\varepsilon\frac{\cos\varphi_0\cos\beta}{\sin^2\varphi_0}\right) \tag{32.7}$$

(последнее равенство, справедливое при $\varepsilon \ll 1$, объясняет наблюдаемые небольшие отличия периода инерционных колебаний от маятниковых суток: это — нелинейный эффект). Для траекторий класса A_2 вместо (32.6), (32.7) получается

$$\mu = \pm k\,|\mu_1|\frac{\sin\theta}{\mathrm{dn}\,\theta};\quad \theta = \Omega\mu_2 t/k;\quad k = (1+|\mu_1^2|/\mu_2^2)^{-1/2}; \tag{32.6'}$$

$$\tau = \frac{4kK(k)}{\Omega\mu_2} \approx 4\,(a/2\Omega U)^{1/2}\,K\left(\sin\frac{\beta}{2}\right). \tag{32.7'}$$

Наконец, зависимость долготы частиц от t получается в виде

$$\lambda = \lambda_0 - \Omega t + (\delta^2-\varepsilon^2)\,\Omega\int_0^t (1-\mu^2)^{-1}\,dt \tag{32.8}$$

и выражается через эллиптические функции. Для траекторий класса B_1 эта зависимость монотонна (т. е. движение всегда имеет западную составляющую), а для класса B_2 период по долготе $\lambda(\tau) - \lambda_0$ может равняться нулю (инерционные колебания без среднего дрейфа, например у траекторий A_1B_2 в умеренных широтах при $\cos\beta = -1$ и $\varepsilon \ll 1$ это справедливо с точностью ε^2).

ГЛАВА 6

Геофизическая турбулентность

§ 33. Статистическая гидромеханика

Согласно § 15, турбулентностью называется завихренное течение вязкой жидкости, *стохастическое* в том смысле, что оно обладает следующими тремя свойствами: (1) чувствительной зависимостью от начальных условий (создаваемой экспоненциальной расходимостью начально близких фазовых траекторий); (2) всюду плотностью почти всех фазовых траекторий, причем любое начальное неравновесное распределение вероятности в фазовом пространстве стремится к предельному равновесному распределению; (3) перемешиванием в фазовом пространстве (и, как следствие, эргодичностью, быстрым затуханием временных корреляционных функций и непрерывностью частотных спектров). *Развитая* турбулентность обладает еще (4) многомодовостью (и, значит, хаотичностью ее пространственной структуры в любой фиксированный момент времени).

Качественно турбулентные течения отличаются тем, что их термо- и гидродинамические характеристики (вектор скорости, давление, температура, концентрации примесей, плотность, скорость звука, показатель преломления, электропроводность и др.) испытывают хаотические флюктуации, создаваемые наличием многочисленных вихрей различных размеров, вследствие чего они изменяются в пространстве и со временем весьма нерегулярно (в том числе, в отличие от стохастических волновых полей, у фурье-компонент турбулентных термо- и гидродинамических полей отсутствуют однозначные дисперсионные отношения между частотами и волновыми векторами, а также зависимости от частоты сдвигов по фазе между значениями разных полей).

Геофизической будем называть турбулентность в природных течениях в земной атмосфере, Мировом океане, морях, реках, озерах и т. д., а также вне Земли — на других планетах, в атмосфере и недрах Солнца, других звезд, космических газовых облаках (и даже в течениях звезд в галактиках и галактик в Метагалактике, если идеализировать их, как течения жидкостей со своеобразными дальними — гравитационными — взаимодействиями между «частицами»).

Для геофизической турбулентности специфично влияние на нее, во-первых, стратификации среды, и, во-вторых, вращения Земли

(или рассматриваемого космического объекта). Локальной характеристикой стратификации служит

$$N^2(z) = -g\,\partial\rho_*/\rho_*\,\partial z,$$

где ρ_* — потенциальная плотность. Если $N^2 > 0$, то архимедова сила является возвращающей, так что стратификация гидростатически устойчива, турбулентность должна тратить энергию на работу против архимедовой силы и потому развивается слабо, нередко концентрируясь лишь в отдельных тонких слоях. При $N^2 < 0$ архимедова сила становится ускоряющей, стратификация неустойчива, служит источником энергии турбулентной конвекции, и турбулентность развивается бурно. При наличии сдвига осредненной скорости течения $\mathbf{U}(z)$ гидродинамическая неустойчивость усиливается и имеет место не только при $N^2 < 0$, но и при $N^2 > 0$, пока число Ричардсона $\mathrm{Ri} = N^2|\mathbf{U}'|^{-2}$ не превосходит некоторого критического значения $\mathrm{Ri}_{кр} > 0$ (согласно формуле (11.26), в идеальной жидкости $\mathrm{Ri}_{кр} = 1/4$ — Дж. Майлс, Л. Ховард, 1961).

Вращение Земли характеризуется, прежде всего, параметром Кориолиса $f = 2\omega_z$. Локально его влияние сводится к образованию у поверхности Земли в атмосфере и у поверхности и дна в океане турбулентных пограничных слоев (так называемых *экмановских*) толщиной $h_0 \approx u_*/f$, где u_* — «скорость трения», в которых происходит поворот среднего течения с высотой или глубиной («спираль Экмана»). Глобально же изменения f по меридиану $\beta = \partial f/\partial y$ создают меридиональную возвращающую силу, которая порождает волны Россби—Блиновой, образующие квазидвумерную макротурбулентность (циклоны и антициклоны в атмосфере, синоптические вихри в океане, вихри в атмосферах Юпитера и Сатурна, включая Большое Красное Пятно, и, по-видимому, так называемые гигантские конвективные ячейки на Солнце).

В формулировке А. Н. Колмогорова (1941) теория турбулентности — это статистическая гидромеханика, в которой термо- и гидродинамические поля рассматриваются, как случайные функции точек $M = (\mathbf{x}, t)$ пространства — времени, и в качестве операции их осреднения используется математическое ожидание (в этом смысле всякая теория турбулентности является статистической).

Полное статистическое описание турбулентного течения (с фиксированной геометрией его границ) сводится к определению вероятностной меры на его фазовом пространстве, состоящем из всевозможных индивидуальных реализаций характеризующих его случайных термо- и гидродинамических полей (так что теория турбулентности становится одной из прикладных глав теории распределений вероятности на функциональных пространствах). Задающий эту вероятностную меру в наиболее сжатом виде характеристический функционал удовлетворяет *линейному* уравнению в вариационных производных, вытекающему из уравнений гидромеханики (Э. Хопф, 1952), но конструктивного решения такого

уравнения еще не построено (М. И. Вишик и А. В. Фурсиков, 1980, доказали, что общим методом может быть построение вероятностных мер для последовательности галеркинских аппроксимаций уравнений гидродинамики: семейство таких мер обладает слабой компактностью).

Менее сжатым, но более конструктивным способом задания вероятностной меры является определение всех конечномерных распределений вероятности для значений $u_{j_1}(M_1), \ldots, u_{j_n}(M_n)$ термо- и гидродинамических полей на всевозможных конечных наборах точек пространства—времени $M_1=(\mathbf{x}_1, t_1), \ldots, M_n=(\mathbf{x}_n, t_n)$. Такие конечномерные распределения удовлетворяют вытекающей из уравнений гидромеханики бесконечной цепочке *линейных* уравнений (А. С. Монин, 1967). Так, для n-точечной плотности вероятности поля скорости $f_n=p_{M_1 \ldots M_n}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ получаются уравнения

$$\frac{\partial f_n}{\partial t_l}=-\left(\frac{\partial u_{l\alpha} f_n}{\partial x_{l\alpha}}+\frac{\partial w_{l\alpha} f_n}{\partial u_{l\alpha}}\right), \tag{33.1}$$

где $\mathbf{w}_l$ — перенесенное в точку $\mathbf{x}_l$ условное математическое ожидание гидродинамического ускорения в точке $(\mathbf{x}, t_l)$ при условии, что значения $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}(M_1), \ldots, \mathbf{u}_n=\mathbf{u}(M_n)$ фиксированы (в геофизической гидродинамике в $\mathbf{w}_l$ имеются слагаемые, соответствующие ускорениям сил Архимеда и Кориолиса). Величины $w_{l\alpha} f_n$ содержат интегралы по $f_{n+1} d\mathbf{u}_{n+1}$, так что уравнения для f_n, $n=1, 2, \ldots$ образуют бесконечную зацепляющуюся цепочку, аналогичную цепочке уравнений Н. Н. Боголюбова для n-частичных функций распределения скоростей молекул в кинетической теории газов; однако убедительных способов получения из (33.1) какой-либо конечной системы уравнений, подобных, например, выводу кинетического уравнения Больцмана, еще не разработано. Интегрируя (33.1) по $F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_n$, получаем

$$\frac{\partial \langle F\rangle}{\partial t_l}=-\frac{\partial \langle u_{l\alpha} F\rangle}{\partial x_{l\alpha}}+\left\langle w_{l\alpha} \frac{\partial F}{\partial u_{l\alpha}}\right\rangle. \tag{33.2}$$

При

$$F=u_{1\alpha_1}^{m_1} \ldots u_{n\alpha_n}^{m_n}$$

величина $\langle F\rangle$ представляет собою n-точечный статистический момент ($N=m_1+\ldots+m_n$-го порядка) поля скорости. Уравнения (33.2) для моментов были впервые выведены А. А. Фридманом и Л. В. Келлером (1924) и явились первой формулировкой полного статистического описания турбулентных течений. Как и (33.1), они *линейны* и образуют бесконечную зацепляющуюся цепочку: если $\langle F\rangle$ — момент N-го порядка, то правая часть (33.2) содержит моменты $(N+1)$-го порядка. Разрешимость бесконечной системы уравнений (33.2) доказывается с помощью галеркинских аппроксимаций уравнений гидродинамики.

При $N=1$ уравнения (33.2) получаются непосредственным осреднением уравнений гидродинамики; они впервые были получены О. Рейнольдсом (1894) и носят его имя. Здесь и далее в этой главе мы будем обозначать черточкой над буквами осредненные величины, т. е. математические ожидания $\bar{A}$, а штрихами $A'=A-\bar{A}$ — турбулентные флюктуации, т. е. отклонения индивидуальных реализаций от математических ожиданий. Уравнения (33.2) при $N=1$ для осредненного поля скорости $\bar{\mathbf{u}}$ отличаются от исходных уравнений для $\mathbf{u}$ появлением новых неизвестных — одноточечных вторых моментов $\tau_{jl}=-\rho\overline{u'_j u'_l}$, имеющих смысл дополнительных (турбулентных) напряжений и называемых поэтому *напряжениями Рейнольдса.* Аналогично этому при осреднении уравнения неразрывности для сжимаемой жидкости в нем появляется турбулентный поток массы $\mathbf{m}=\overline{\rho'\mathbf{u}'}$, в уравнении теплопроводности появляется турбулентный поток тепла $\mathbf{q}=c_p\rho_0\overline{T'\mathbf{u}'}$, в уравнении диффузии пассивной примеси — турбулентный поток примеси $\mathbf{I}=\rho_0\overline{s'\mathbf{u}'}$, и т. п.

При локальном описании геофизических турбулентных пограничных слоев обычно пригодна модель СГО — статистически стационарного и горизонтально-однородного турбулентного течения, в котором все конечномерные распределения вероятности инвариантны относительно любых сдвигов начала отсчета на оси времени и горизонтальных сдвигов системы отсчета в пространстве. При этом, в частности, все одноточечные моменты (включая осредненный градиент давления) могут зависеть лишь от вертикальной координаты z точки наблюдения и осредненное течение горизонтально: $\bar{u}=\bar{u}(z)$, $\bar{v}=\bar{v}(z)$, $\bar{w}=0$. Для модели СГО уравнения Рейнольдса приводятся к виду:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{xz}+\rho_0\nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)+f\left(\bar{v}-\frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right)=0;$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{yz}+\rho_0\nu\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)-f\left(\bar{u}+\frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}\right)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\sigma_w^2+\bar{p}\right)=g\bar{\rho}+2\rho_0\omega_y\bar{u};$$

$$q_z-c_p\rho_0\chi\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}=\text{const};\quad I_z-\rho_0 D\frac{\partial\bar{s}}{\partial z}=\text{const}. \tag{33.3}$$

Здесь и далее используются обозначения: $\sigma_A^2=\overline{A'^2}$, χ — коэффициент молекулярной температуропроводности, D — кинематический коэффициент молекулярной диффузии. Первые два из этих уравнений описывают экмановские пограничные слои, третье показывает, что осредненное СГО-течение, строго говоря, не гидростатично; четвертое (выведенное из уравнения для энтропии при

учете ее зависимости только от температуры) и пятое показывают, что полные вертикальные потоки тепла и примеси в СГО-течении не меняются по вертикали (это остается в силе и при учете лучистого потока тепла).

Турбулентные потоки, входящие в уравнения Рейнольдса, в так называемых *полуэмпирических* теориях турбулентности описываются по аналогии с соответствующими молекулярными потоками, как линейные функции от градиентов осредненных гидродинамических полей; коэффициенты этих линейных функций имеют смысл коэффициентов турбулентной вязкости, теплопроводности и диффузии. Для их определения в теориях Дж. Тейлора (1915, 1932) и Л. Прандтля (1925) вводится понятие *пути перемешивания* l, аналогичного длине свободного пробега молекул в кинетической теории газов, и, например, в плоскопараллельном осредненном СГО-течении (когда $\bar{v}=0$) полагается $w'=l'\,\partial\bar{u}/\partial z$, а кинематический коэффициент турбулентной вязкости определяется формулой

$$K=\overline{l'w'}=l^2\left|\partial\bar{u}/\partial z\right|,$$

где $l=(\overline{l'^2})^{1/2}$ — так называемый *масштаб турбулентности*. В теории Т. Кармана (1930) он определяется формулой $l=-\varkappa\Psi\times\times(\partial\Psi/\partial z)^{-1}$, где $\Psi=\partial\bar{u}/\partial z$, а $\varkappa$ — числовая постоянная (оказавшаяся близкой к 0,4).

Вычитая из уравнений гидродинамики соответствующие осредненные уравнения, мы получим эволюционные уравнения для турбулентных флюктуаций u_j', T' и s', из которых перекрестным умножением и сложением без труда выводятся уравнения для одноточечных вторых моментов этих флюктуаций. Так, в модели СГО уравнения для диагональных элементов тензора напряжений Рейнольдса получаются в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_0\sigma_u^2}{\partial t}=\tau_{xz}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}-\rho_0\varepsilon_u-\overline{p'\frac{\partial v'}{\partial y}}-\overline{p'\frac{\partial w'}{\partial z}}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\overline{u'^2w'}-\rho_0\nu\frac{\partial\sigma_u^2}{\partial z}\right)=0;$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_0\sigma_v^2}{\partial t}=\tau_{yz}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}-\rho_0\varepsilon_v+\overline{p'\frac{\partial v'}{\partial y}}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\overline{v'^2w'}-\rho_0\nu\frac{\partial\sigma_v^2}{\partial z}\right)=0;$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_0\sigma_w^2}{\partial t}=gm_z-\rho_0\varepsilon_w+\overline{p'\frac{\partial w'}{\partial z}}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\overline{w'^3}+2\overline{p'w'}-\rho_0\nu\frac{\partial\sigma_w^2}{\partial z}\right)=0, \qquad (33.4)$$

где $\varepsilon_i = \overline{\nu |\nabla u_i'|^2}$ — «скорость диссипации» энергии $\sigma_{u_i}^2/2$. Слагаемые $\tau_{xz}\,\partial\bar{u}/\partial z$ и $\tau_{yz}\,\partial\bar{v}/\partial z$ входят в правые части уравнений для компонент $|\bar{u}_i|^2/2$ кинетической энергии осредненного течения с противоположными знаками и, следовательно, описывают генерацию турбулентности за счет осредненного течения. Из (33.4) видно, что непосредственно таким образом могут генерироваться только горизонтальные флюктуации скорости, вертикальные же могут непосредственно генерироваться лишь архимедовыми силами за счет потенциальной энергии стратификации среды (если она неустойчива, т. е. $m_z > 0$; в противном случае вертикальные флюктуации, наоборот, теряют энергию на работу против архимедовых сил). Слагаемые с флюктуациями давления $\overline{p'\,\partial v'/\partial y}$ и $\overline{p'\,\partial w'/\partial z}$ входят в уравнения для σ_u^2 и для σ_v^2, σ_w^2 с противоположными знаками и, следовательно, описывают обмен энергией между продольными и поперечными флюктуациями скорости. В случае плоскопараллельного течения вдоль оси x с безразличной стратификацией ($\bar{v} = m_z = 0$), проинтегрировав уравнения (33.4) по объему, на границах которого потоки энергии турбулентности отсутствуют, получим

$$\int \overline{p'\frac{\partial v'}{\partial y}}\,dV = \int \rho_0 \varepsilon_v\,dV > 0; \quad \int \overline{p'\frac{\partial w'}{\partial z}}\,dV = \int \rho_0 \varepsilon_w\,dV > 0;$$

$$\int \tau_{xz}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\,dV = \int \left(\overline{p'\frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{p'\frac{\partial w'}{\partial z}} + \rho_0 \varepsilon_u\right) dV = \int \rho_0 \varepsilon\,dV > 0, \quad (33.5)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w$, так что энергия осредненного течения передается непосредственно только продольным флюктуациям u', а поперечные v' и w' получают энергию от u' благодаря работе флюктуаций давления (которые, значит, перераспределяют энергию между турбулентными движениями различных направлений, создавая тенденцию к их изотропизации). Складывая три уравнения (33.4), получаем уравнение для кинетической энергии турбулентности на единицу массы $b^2 = \frac{1}{2}\overline{|\mathbf{u}'|^2}$ (А. Н. Колмогоров, 1942; А. С. Монин, 1950):

$$\frac{\partial \rho_0 b^2}{\partial t} = \left(\tau_{xz}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \tau_{yz}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)(1 - \mathrm{Rf}) - \rho_0 \varepsilon -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \overline{b^2 w'} + \overline{p'w'} - \rho_0 \nu \frac{\partial b^2}{\partial z}\right) = 0;$$

$$\mathrm{Rf} = -g m_z \left(\tau_{xz}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \tau_{yz}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^{-1}, \quad (33.6)$$

где $b'^2=\frac{1}{2}|\mathbf{u}'|^2$, а Rf — так называемое *динамическое* число Ричардсона (отношение работы архимедовых сил к работе напряжений Рейнольдса). Для того чтобы первое слагаемое в правой части могло компенсировать вязкую диссипацию, необходимо выполнение условия $\mathrm{Rf}<1$ (критерий Ричардсона). Оно довольно грубое; более реальный критерий можно записать в виде $\mathrm{Rf}<\mathrm{Rf}_{\text{кр}}<1$. Если принять, что третье слагаемое в (33.6) (дивергенция потока турбулентной энергии) при не очень малых Rf пропорционально gm_z, и обозначить коэффициент пропорциональности $\sigma-1$ (>0), то будет $\mathrm{Rf}_{\text{кр}}=1/\sigma$.

А. Н. Колмогоров (1942) предложил выражать одноточечные характеристики всякой не слишком анизотропной турбулентности через ее энергию b^2 и масштаб l, так что, введя в (33.6) по правилам полуэмпирической теории турбулентности коэффициенты турбулентной вязкости K, темнературопроводности $K_{\text{т}}=\alpha K$ и диффузии $K_1=\alpha_1 K$, получим:

$$\frac{\partial b^2}{\partial t}=K\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2\right](1-\alpha\,\mathrm{Ri})-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial z}\alpha_1 K\frac{\partial b^2}{\partial z}=0;$$

$$\mathrm{Ri}=N^2\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2\right]^{-1};\quad K=bl;\quad \varepsilon=b^3l^{-1}. \qquad (33.7)$$

Такое уравнение вместе с (33.3) образует замкнутую систему, если его дополнить тем или иным определением масштаба турбулентности l, например следующим обобщением упомянутой выше формулы Т. Кармана:

$$l=-\varkappa\Psi\,(\partial\Psi/\partial z)^{-1};\quad \Psi^2=\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2\right](1-\alpha\,\mathrm{Ri}). \qquad (33.8)$$

Уравнения типа (33.4) без труда выводятся и для всех остальных одноточечных вторых моментов полей u_i', T' и s'; к ним мы еще вернемся ниже.

По основополагающей идее А. Н. Колмогорова (1941), развитая турбулентность (с достаточно большим числом Рейнольдса) должна быть *локально-изотропной*, т. е. при любых фиксированных значениях $\mathbf{u}(M_0)=\mathrm{u}_0$, $T(M_0)=T_0$, $s(M_0)=s_0$ все конечномерные распределения вероятности для разностей $\mathbf{u}(M_k)-\mathbf{u}(M_0)$, $T(M_k)-T(M_0)$, $s(M_k)-s(M_0)$ на всевозможных конечных наборах точек пространства — времени $M_1,\ldots,M_n$ из достаточно малой пространственно-временной окрестности G точки M_0 не зависят от $\mathbf{u}_0$, T_0, s_0 и инвариантны относительно выбора точки M_0 в области G и произвольных вращений и отражений в пространстве векторов $\mathbf{r}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0-\mathbf{u}_0(t-t_0)$.

При нейтральной плотностной стратификации это справедливо и для геофизической турбулентности, так как вследствие слабо-

сти ее мелкомасштабных компонент мало (по сравнению с ролью градиентов давления) и влияние на них вращения планеты, так что оно практически не нарушает их изотропности. Если же стратификация не нейтральна, то направление действия архимедовых сил — вертикаль — оказывается выделенным, и турбулентность не является локально-изотропной, а остается лишь *локально-осесимметричной относительно вертикали* (т. е. указанные выше распределения вероятности для разностей значений гидродинамических полей инвариантны относительно вращений системы координат лишь вокруг вертикальной оси и отражений лишь в вертикальных плоскостях). Пространственные *корреляционные функции* (т. е. одновременные двухточечные моменты) пульсаций гидродинамических полей при этом имеют вид

$$\overline{u'_{j_1}(\mathbf{x}_1,\ t)\,u'_{j_2}(\mathbf{x}_2,\ t)} = B_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_{2h} - \mathbf{x}_{1h},\ z_1,\ z_2), \tag{33.9}$$

где индекс h обозначает горизонтальную компоненту, а пространственные *структурные функции* (т. е. двухточечные моменты пространственных разностей) имеют вид

$$\overline{\left[u'_{j_1}(\mathbf{x}_2,\ t) - u'_{j_1}(\mathbf{x}_1,\ t)\right]\left[u'_{j_2}(\mathbf{x}_2,\ t) - u'_{j_2}(\mathbf{x}_1,\ t)\right]} = D_{j_1 j_2}(\mathbf{r}), \tag{33.10}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, причем скалярные структурные функции зависят лишь от двух аргументов r_h и r_z, а структурные функции с тензорными индексами суть линейные комбинации постоянных тензоров и тензоров, составленных из вектора $\mathbf{r}$ и единичного вектора вертикали $\boldsymbol{\lambda}$. В частности, одноточечные моменты $\overline{\nabla u'_{j_1} \cdot \nabla u'_{j_2}}$, выражающиеся через производные в нуле от структурных функций, имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla u'_i \cdot \nabla u'_j} &= \overline{|\nabla u'|^2}\,\delta_{ij} + \left(\overline{|\nabla w'|^2} - \overline{|\nabla u'|^2}\right)\lambda_i\lambda_j; \\ \overline{\nabla T' \cdot \nabla u'_i} &= \overline{\nabla T' \cdot \nabla w'}\,\lambda_i, \end{aligned} \tag{33.11}$$

откуда следует, что

$$\overline{|\nabla v'|^2} = \overline{|\nabla u'|^2};\ \overline{\nabla u'_i \cdot \nabla u'_j} = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \overline{\nabla T' \cdot \nabla u'_i} = 0$$

при $i \neq 3$ (причем здесь всюду T' можно заменить на s').

§ 34. Турбулентность в стратифицированных средах

Влияние стратификации на турбулентность рассмотрим сначала на простейшем примере приземного слоя атмосферы, столь тонкого, что в нем действие силы Кориолиса на осредненное СГО-течение практически еще незаметно — вторые слагаемые в первых

двух уравнениях (33.3) пренебрежимо малы, и, значит, вертикальный поток импульса постоянен. При этом осредненное течение не вращается с высотой (плоскопараллельно). Направив вдоль него ось x, имеем $\bar{u}=\bar{u}(z)$, $\bar{v}=\bar{w}=0$. Тогда указанные два уравнения приводятся к виду

$$\tau_{xz}+\rho_0\nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=\text{const};\quad \tau_{yz}=0. \tag{34.1}$$

Заметим теперь, что практически всюду, кроме весьма тонкого подслоя, прилегающего к подстилающей поверхности, молекулярные потоки импульса и тепла всегда пренебрежимо малы по сравнению с турбулентными потоками, так что первое уравнение (34.1) и четвертое уравнение (33.3) можно записать в упрощенном виде $\tau_{xz}=\rho_0 u_*^2=\text{const}$, $q_z=q=\text{const}$ (введенная здесь величина $u_*=(\tau_{xz}/\rho_0)^{1/2}$, имеющая размерность скорости, называется *скоростью трения*). Учтем еще, вспоминая формулу (1.11), что в атмосфере $\rho'/\rho_0\approx-T'/T_0$, так что фигурирующая в третьем уравнении (33.4) или в уравнении энергии (33.6) удельная работа архимедовых сил gm_z/ρ_0 оказывается равной $-(g/T_0)(g/c_p\rho_0)$ и, стало быть, определяется, кроме уже упоминавшейся величины q, еще так называемым *параметром плавучести* g/T_0 (заметим, что при обобщении излагаемой здесь теории на океан нужно полагать $\rho'/\rho_0\approx-\alpha T'+\gamma s'$, и будет

$$gm_z/\rho_0=-\alpha g\,(q/c_p\rho_0)+\gamma g\,(I/\rho_0).$$

Из фигурирующих в уравнениях (33.4) и (33.6) трех постоянных параметров u_*, $q/c_p\rho_0$ и g/T_0 можно составить масштабы длины L и температуры T_* следующим (с точностью до числового множителя — единственным) образом:

$$L=\frac{u_*^3}{\varkappa gm_z/\rho_0}=-\frac{u_*^3}{\varkappa\,(g/T_0)\,(q/c_p\rho_0)};\quad T_*=-\frac{q/c_p\rho_0}{\varkappa u_*}, \tag{34.2}$$

где $\varkappa$ — введенная ради удобства некоторых последующих выкладок упоминавшаяся выше *постоянная Кармана*. Турбулентность в стратифицированных СГО-течениях (за исключением ее самых мелкомасштабных компонент, на режиме которых существенно сказывается действие молекулярной вязкости и теплопроводности) можно описывать при помощи теории подобия А. С. Монина и А. М. Обухова (1953), согласно которой одноточечное распределение вероятности для безразмерных скорости $\mathbf{u}/u_*$ и температуры T/T_* может зависеть лишь от одного параметра — безразмерной высоты точки наблюдения $\zeta=z/L$:

$$p_M(\mathbf{u},\ T)=u_*^{-3}\,|T_*|^{-1}\,F\,(\mathbf{u}/u_*,\ T/T_*;\ z/L). \tag{34.3}$$

Это справедливо и для *формы* осредненных профилей скорости течения $\bar{u}(z)$ и температуры $\bar{T}(z)$, тогда как их *абсолютные зна-*

чения определяются еще граничными условиями на поверхности Земли и имеют вид:

$$\bar{u}(z)=\frac{u_*}{\varkappa}\left[f\left(\frac{z}{L}\right)-f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right];$$

$$\bar{T}(z)=\bar{T}(z_0)+T_*\left[f_1\left(\frac{z}{L}\right)-f_1\left(\frac{z_0}{L}\right)\right], \qquad (34.4)$$

где z_0 — так называемая *высота шероховатости* подстилающей поверхности, определяемая условием $\bar{u}(z_0)=0$, а $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ — некоторые универсальные функции. По функциям (34.4) можно определить коэффициенты турбулентного обмена для импульса и тепла:

$$K=\frac{u_*^2}{\partial\bar{u}/\partial z}=\frac{\varkappa u_* L}{f'(\zeta)};\quad K_T=\frac{-q/c_p\rho}{\partial\bar{T}/\partial z}=\frac{\varkappa u_* L}{f_1'(\zeta)};$$

$$K_T/K=f'(\zeta)/f_1'(\zeta)\equiv\alpha(\zeta), \qquad (34.5)$$

где функция $\alpha(\zeta)$, вообще говоря, отличается от единицы. Через эти же функции выражаются число Ричардсона Ri и динамическое число Ричардсона Rf:

$$\mathrm{Ri}=\frac{(g/T_0)(\partial\bar{T}/\partial z)}{(\partial\bar{u}/\partial z)^2}=\frac{1}{\alpha(\zeta)f'(\zeta)};$$

$$\mathrm{Rf}=\frac{-(g/T_0)(q/c_p\rho_0)}{u_*^2\,\partial\bar{u}/\partial z}=\frac{1}{f'(z)}. \qquad (34.6)$$

Число Rf, очевидно, просто связано с кинематическим коэффициентом турбулентной вязкости K:

$$K=\varkappa u_* L\cdot\mathrm{Rf}. \qquad (34.7)$$

Ниже окажется, что функции $\mathrm{Ri}(\zeta)$ и $\mathrm{Rf}(\zeta)$ монотонны и потому имеют однозначные обратные функции. Отсюда видно, что величины Ri, Rf и ζ могут на равных правах использоваться, как локальные параметры, характеризующие вертикальную устойчивость стратифицированного СГО-течения.

Формулы (34.3) и (34.4) справедливы и при устойчивой стратификации, когда $q<0$, $L>0$, $T_*>0$ и $\zeta\geqslant 0$, и при неустойчивой стратификации, когда, наоборот, $q>0$, $L<0$, $T_*<0$, $\zeta\leqslant 0$. Их асимптотики при $\zeta\to 0$, $\pm\infty$ могут быть установлены при помощи качественных соображений. Асимптотика при $\zeta\to 0$ соответствует предельному переходу $q\to 0$ к безразличной стратификации. Но она получается также и в пределе $z\to 0$ при любой стратификации, т. е. должна иметь место в подслое $z\ll|L|$. Значит, в этом подслое влияние стратификации на турбулентность еще незаметно (его называют поэтому *подслоем динамической*

турбулентности). Это значит, что в нем не должен играть роли параметр плавучести g/T_0, т. е. он должен выпадать из асимптотик формул (34.3) и (34.4). Так, переписав (34.4) в виде

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}=\frac{u_*}{\varkappa z}\zeta f'(\zeta)\sim\frac{u_*}{\varkappa z};\quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}=\frac{T_*}{\alpha_0 z}\frac{\alpha_0\zeta f'(\zeta)}{\alpha(\zeta)}\sim\frac{T_*}{\alpha_0 z}, \tag{34.4'}$$

где $\alpha_0=\alpha(0)$, для выпадения из асимптотики параметра плавучести приходится потребовать условия $\zeta f'(\zeta)\sim 1$ (придавая этой асимптотической постоянной значение 1, мы тем самым оставляем за постоянной $\varkappa$ такой же смысл, как в известном логарифмическом законе $\bar{u}(z)=(u_*/\varkappa)\ln z+\text{const}$ в турбулентных пограничных слоях в несжимаемой жидкости). Заметим, что высота шероховатости z_0, определение которой было дано выше, обычно в геофизике всегда удовлетворяет условию $z_0\ll|L|$, т. е. не зависит от стратификации среды и, значит, характеризует не состояние среды, а подстилающую поверхность саму по себе (в приземном слое атмосферы z_0 обычно составляет 0,1—0,2 от типичной высоты h_0 неровностей этой поверхности). Из (34.4′) видно, что при $|\zeta|\ll 1$ получаются асимптотики:

$$f(\zeta)\sim\ln|\zeta|+\beta\zeta+\ldots;\quad f_1(\zeta)\sim\frac{1}{\alpha_0}(\ln|\zeta|+\beta_1\zeta+\ldots), \tag{34.8}$$

причем и β, и β_1 при разных знаках ζ могут иметь разные значения (но положительные, чтобы профили скорости течения и температуры были при устойчивой стратификации, когда турбулентный обмен затруднен, более крутыми, а при неустойчивой, когда обмен усилен,— менее крутыми, чем при безразличной стратификации). Учитывая, что при $|\zeta|\ll 1$ должен выпадать параметр g/T_0 и, кроме того, что при безразличной стратификации не существует и пульсаций температуры, из (34.3) получаем асимптотику

$$p_M(\mathbf{u}',T')\sim u_*^{-3}F_0(\mathbf{u}'/u_*)\,\delta(T'). \tag{34.9}$$

Перейдем теперь к асимптотике при сильной неустойчивости $\zeta\to-\infty$. Заметим здесь, что условие $z\gg|L|$ можно обеспечить при фиксированных $q>0$, g/T_0 и z предельным переходом $u_*\to 0$ к чисто термической турбулентности при свободной конвекции (в отсутствие осредненного течения). При этом характеризующая осредненный профиль температуры функция $f_1'(\zeta)=f'(\zeta)/\alpha(\zeta)$ должна быть такой, чтобы из первой формулы (34.4′) для $\partial\bar{T}/\partial z$ выпадал параметр u_*:

$$f_1'(\zeta)\sim-\frac{1}{3}C_1\varkappa^{4/3}\zeta^{-4/3};\quad \bar{T}(z)\sim\bar{T}_\infty+C_1(q/c_p\rho_0)^{2/3}\left(\frac{gz}{T_0}\right)^{-1/3};$$

$$K_T\sim\frac{3}{C_1}\left(\frac{g}{T_0}\frac{g}{c_p\rho_0}\right)^{1/3}z^{4/3}, \tag{34.10}$$

где C_1 — положительная числовая постоянная. Таким образом, коэффициент обмена для тепла быстро возрастает с высотой (вследствие появления все более крупных конвективных вихрей, сравнимых по масштабу с расстоянием z до земной поверхности), а распределение температуры стремится к изотермии. Свободная конвекция здесь является только асимптотикой, так что осредненное течение не отсутствует. Его профиль можно рассчитать, исходя из того, что из определяющих асимптотику величин $q/c_p\rho_0$, g/T_0 и z невозможно составить никакой безразмерной комбинации, и, значит, любая безразмерная характеристика асимптотического режима должна быть константой. В частности, $f'(\zeta)/f_1'(\zeta) \sim \alpha_{-\infty} = \text{const}$, откуда получается

$$f'(\zeta) \sim -\frac{C_2}{3}\zeta^{-4/3}; \quad f(\zeta) \sim C_2\zeta^{-1/3} + \text{const}; \quad C_2 = \alpha_{-\infty}\varkappa^{4/3}C_1. \tag{34.11}$$

Функция $\bar{u}(z)$ не может не зависеть от u_*. Согласно (34.4), при асимптотике (34.11) она оказывается пропорциональной u_*^2. Что же касается одноточечного распределения вероятности для пульсаций, то для выпадения u_* из (34.3) надо положить

$$p_M(\mathbf{u}', T') \sim \left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{-5/3}\left(\frac{gz}{T_0}\right)^{-2/3} F_1\left[\mathbf{u}'\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{gz}{T_0}\right)^{-1/3}, \right.$$
$$\left. T'\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{-2/3}\left(\frac{gz}{T_0}\right)^{1/3}\right]. \tag{34.12}$$

Отсюда вытекают, в частности, следующие формулы для средних квадратичных значений пульсаций (А. М. Обухов, 1960):

$$\sigma_u \approx \sigma_v \sim c_1\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{gz}{T_0}\right)^{1/3}; \quad \sigma_w \sim c_2\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{gz}{T_0}\right)^{1/3};$$
$$\sigma_T \sim c_3\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{gz}{T_0}\right)^{-1/3}, \tag{34.13}$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые числовые постоянные.

Рассмотрим, наконец, асимптотику при сильной устойчивости $\zeta \to +\infty$, исходя из того, что с ростом устойчивости динамическое число Ричардсона Rf должно возрастать (очевидно, монотонно), но при этом оно ограничено (как указывалось выше при обсуждении уравнения энергии (33.6), $\mathrm{Rf} < \mathrm{Rf}_{\text{кр}} < 1$). Следовательно, с ростом $\zeta > 0$ величина Rf стремится к некоторой константе $R \leqslant \mathrm{Rf}_{\text{кр}}$ (да и вообще из-за ослабления турбулентного обмена между различными слоями жидкости турбулентность становится локальной, т. е. ее характеристики перестают зависеть от z; при $\mathrm{Rf} = \mathrm{Rf}_{\text{кр}}$ она и вовсе вырождается, и флюктуирующие движения среды становятся возможными лишь в форме внутренних гравитационных волн, при потере же ими устойчивости возникают турбулентные пятна, расплывающиеся затем в тонкие слои —

формируется тонкослойная вертикальная микроструктура, см. § 35). Учитывая (34.6), получаем

$$f'(\zeta) \sim \frac{1}{R}; \quad f(\zeta) \sim \frac{\zeta}{R} + \text{const}; \quad \bar{u}(z) \sim \frac{u_* z}{\varkappa R L} + \text{const}. \tag{34.14}$$

Таким образом, профиль скорости течения асимптотически становится линейным. Это, однако, не относится к профилю температуры, градиент которой определяется функцией $f_1'(\zeta) = f'(\zeta)/\alpha(\zeta) \sim \sim 1/R\alpha(\zeta)$, причем можно ожидать, что $\alpha(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to +\infty$, так как предельно устойчивой стратификацией является поверхность раздела между нижней тяжелой и верхней легкой жидкостью, через которую импульс может передаваться турбулентными пульсациями давления, так что $K \neq 0$, а тепло — только молекулярными процессами и излучением, т. е. $K_т = 0$ (ниже будет изложена полуэмпирическая теория, по которой $\alpha \sim \zeta^{-2}$). Согласно (34.6), при этом $\mathrm{Ri} \to \infty$, так что, в отличие от Rf, никакого конечного $\mathrm{Ri}_{кр}$ не существует. Заметим, наконец, что распределение вероятности для пульсаций (34.3) при $\zeta \to +\infty$ должно переставать зависеть от ζ.

Изложенные асимптотические закономерности были эмпирически подтверждены А. С. Мониным и А. М. Обуховым (1953), подобравшими по данным измерений профилей скорости ветра и температуры в открытой степи значения u_* и L (коэффициент β в (34.8) в среднем в рассмотренном ими интервале значений ζ оказался равным 0,6) и построившими эмпирическую функцию

$$f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{\varkappa}{u_*}\left[\bar{u}(z) - \bar{u}\left(\frac{|L|}{2}\right)\right] \tag{34.15}$$

— см. рис. 34.1, на котором указанные выше асимптоты изображены пунктирными линиями. Предсказания теории подобия были подтверждены измерениями и во многочисленных последующих работах.

Согласно излагаемой теории подобия, распределение вероятности для значений $\mathbf{u}'/u_*$, T'/T_* в точках $(\mathbf{x}_{h1}, z_1, t_1), \ldots, (\mathbf{x}_{hn}, z_n, t_n)$ может зависеть лишь от аргументов $(\mathbf{x}_{h2} - \mathbf{x}_{h1})/|L|, \ldots, (\mathbf{x}_{hn} - \mathbf{x}_{h1})/|L|; z_1/L, \ldots, z_n/L, (t_2 - t_1)u_*/|L|, \ldots, (t_n - t_1) \times u_*/|L|$ (если только все высоты $z_1, \ldots, z_n$ находятся в приземном слое воздуха и существенно превышают z_0, а расстояния между различными точками $(\mathbf{x}_{hk}\ z_k)$ и отличные от нуля интервалы $|t_k - t_l|$ не слишком малы, так что молекулярные эффекты не сказываются, и не слишком велики, так что требования СГО не нарушаются). Асимптотики для этого многоточечного распределения вероятности при приближении к нейтральной, сильно неустойчивой и сильно устойчивой стратификации могут быть установлены с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше.

Статистические характеристики производных от полей $\mathbf{u}(M)$ и $T(M)$, т. е. разностей значений этих полей в точках с бесконечно

близкими значениями какой-либо из пространственных координат или времени, вообще говоря, уже могут зависеть от коэффициентов молекулярной вязкости и теплопроводности ν и χ. Это, однако,

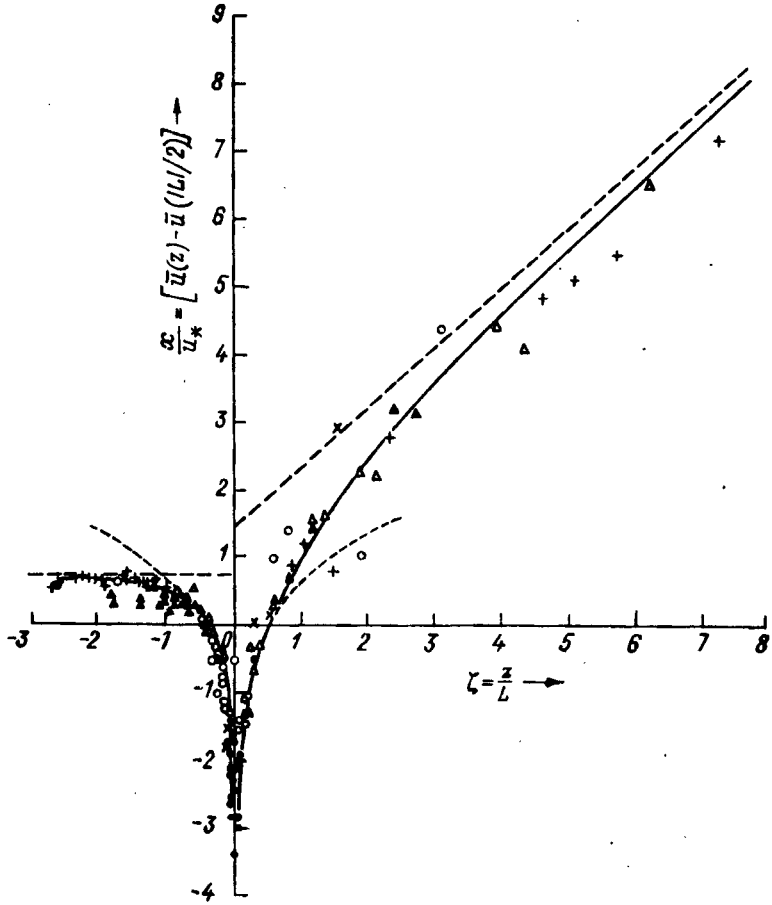


Рис. 34.1. Эмпирическая универсальная функция $f(\zeta) - f(\pm 1/2)$ по А. С. Монину и А. М. Обухову (1953).

не относится к удельным скоростям диссипации турбулентной энергии ε и выравнивания неоднородностей температурного поля ε_T, определяемым формулами:

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \sum_{\alpha,\,\beta} \overline{\left(\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2} = \frac{u_*^3}{\varkappa z} \varphi_\varepsilon(\zeta);$$

$$\varepsilon_T = \chi \overline{(\nabla T')^2} = \frac{u_* T_*^2}{z} \varphi_{\varepsilon T}(\zeta), \qquad (34.16)$$

где φ_ε и $\varphi_{\varepsilon T}$ — некоторые универсальные функции, асимптотики которых могут быть установлены по изложенным выше правилам. Действительно, ε может быть выражено через одноточечные моменты при помощи уравнения для энергии турбулентности (33.6), а ε_T — при помощи аналогичного уравнения для σ_T^2 (которое будет приведено ниже).

Перейдем теперь к определению пространственных структурных функций (33.10) турбулентности в стратифицированных средах или, что эквивалентно, их преобразований Фурье $F_{j_1 j_2}(\mathbf{k})$, фигурирующих в формулах:

$$D_{j_1 j_2}(\mathbf{r}) = 2\int (1 - \cos \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\, F_{j_1 j_2}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} \qquad (34.17)$$

и называющихся трехмерными *спектральными плотностями*. В частности, будем рассматривать трехмерную спектральную плотность удельной кинетической энергии турбулентности

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} F_{\alpha\alpha}(\mathbf{k})$$

и результат ее интегрирования по всем *направлениям* волнового вектора $\mathbf{k}$ — так называемый *спектр волновых чисел* $E(k)$. Рассмотрим сначала локально-изотропную турбулентность (напомнив, что таковой является всякая развитая геофизическая турбулентность при нейтральной стратификации); в этом случае $F(\mathbf{k})$ может зависеть лишь от волнового числа $k = |\mathbf{k}|$ и $E(k) = 4\pi k^2 \times F(k)$.

Согласно гипотезам подобия А. Н. Колмогорова (1941) для локально-изотропной турбулентности, конечномерные распределения вероятности для относительных скоростей $\mathbf{u}(M) - \mathbf{u}(M_0)$ при достаточно малых (по сравнению с масштабами L_0 и L_0/U течения в целом) расстояниях r и δt между точками наблюдения могут зависеть лишь от двух параметров ε и ν, так что при измерении всех длин масштабом $\eta = \varepsilon^{-1/4}\nu^{3/4}$, скоростей масштабом $v_\eta = \varepsilon^{1/4}\nu^{1/4}$ и времен масштабом $t_\eta = \eta/v_\eta$ эти распределения вероятности становятся универсальными; если же, кроме того, все $r \gg \eta$ и $|\delta t| \gg t_\eta$, то эти распределения перестают зависеть от ν и, значит, однозначно определяются одним только параметром ε. Согласно этим гипотезам подобия, при $k \gg L_0^{-1}$ или $r \ll L_0$

$$E(k) = \varepsilon^{1/4}\nu^{5/4}\varphi(\eta k) \sim C_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3};$$

$$D_{ij}(\mathbf{r}) \sim \frac{27}{55}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) C_1 (\varepsilon r)^{2/3}\left(-\frac{1}{3}\,\frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{4}{3}\,\delta_{ij}\right), \qquad (34.18)$$

где асимптотика соответствует условиям $k \ll \eta^{-1}$ или $r \gg \eta$ (т. е. так называемому *инерционному интервалу* $L_0^{-1} \ll k \ll \eta^{-1}$ или $L_0 \gg r \gg \eta$).

Вторая из этих формул выражает знаменитый *закон двух третей* А. Н. Колмогорова, асимптотика в первой формуле — его спектральную формулировку (*закон пяти третей*) по А. М. Обухову (1941). Они многократно подтверждены эмпирически (с коэффициентом $C_1 \approx 1{,}4$). Для полей пассивных примесей, к которым при нейтральной стратификации относится и температура T, согласно А. М. Обухову (1949), при больших числах Рейнольдса Re и Пекле $\mathrm{Pe} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}$, где $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, к определяющим параметрам ε и ν следует добавить ε_T и χ, и при $k \gg L_0^{-1}$ будет

$$E_T(k) = \varepsilon_T \varepsilon^{-3/4} \chi^{5/4} \varphi_T(\eta k,\ \mathrm{Pr}) \sim C_T \varepsilon_T \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}, \qquad (34.19)$$

где асимптотика соответствует условию $k \ll \eta_T^{-1} = \eta^{-1}(\mathrm{Pr})^{3/4}$ (интервал $L^{-1} \ll k \ll \eta_T^{-1}$ называется *конвективным*).

Если среда стратифицирована не нейтрально, то, как разъяснялось выше, турбулентность более не является локально-изотропной, а остается лишь локально-осесимметричной относительно вертикали. При этом скалярные спектральные плотности $F(\mathbf{k})$ зависят уже не только от $k = |\mathbf{k}|$, но и от k_z, изменяется соотношение между $E(k)$ и $F(\mathbf{k})$, структура тензора $D_{ij}(\mathbf{r})$ оказывается более сложной, чем в (34.18), но гипотезы подобия А. Н. Колмогорова—А. М. Обухова изменяются мало: согласно А. М. Обухову (1959), к указанным в них определяющим параметрам достаточно добавить лишь параметр плавучести g/T_0. Зависимость же конечномерных распределений вероятности от u_* и $q/c_p\rho_0$, предусматривавшаяся теорией подобия А. С. Монина—А. М. Обухова как для мелкомасштабных, так и для крупномасштабных компонент турбулентности, в случае одних лишь мелкомасштабных компонент, к которым применимы гипотезы подобия А. Н. Колмогорова—А. М. Обухова, будет осуществляться через ε и ε_T в соответствии с формулами (34.16).

Ограничиваясь инерционно-конвективным интервалом масштабов, в котором теперь имеются три определяющих параметра ε, ε_T и g/T_0, из них можно составить единственную комбинацию размерности длины — так называемый *масштаб плавучести*

$$L_* = \varepsilon^{5/4} \varepsilon_T^{-3/4} (g/T_0)^{-3/2}. \qquad (34.20)$$

Если он попадает в пределы инерционно-конвективного интервала, то спектры турбулентности будут определяться асимптотиками (34.18) и (34.19), в которых теперь коэффициенты C_1 и C_T суть некоторые функции от безразмерного волнового числа kL_*. Они и описывают влияние стратификации на спектры в указанном интервале. В нем при $k \gg L_*^{-1}$ эти функции стремятся к конечным пределам — своим значениям при нейтральной стратификации.

При $k \ll L_*^{-1}$ («интервал плавучести») в случае устойчивой стратификации, по гипотезе Р. Болджиано (1959), параметр ε дол-

жен выпадать из формул для спектров (так как основная доля энергии турбулентности затрачивается на работу против архимедовых сил в области больших масштабов и лишь очень малая ее доля передается в область малых масштабов и диссипируется там в теплоту — значит, величина ε оказывается очень малой и не может сколько-нибудь существенно влиять на статистический режим крупномасштабных компонент турбулентности). Для этого должно быть $C_1 \sim (kL_*)^{-8/15}$ и $C_T \sim (kL_*)^{4/15}$, и спектры (34.18) и (34.19) на крупномасштабном конце инерционно-конвективного интервала с точностью до числовых множителей будут иметь вид:

$$E(k) \sim \varepsilon_T^{2/5} (g/T_0)^{4/5} k^{-11/5}; \quad E_T(k) \sim \varepsilon_T^{4/5} (g/T_0)^{-\frac{2}{5}} k^{-\frac{7}{5}}. \qquad (34.21)$$

Эти предсказания были подтверждены измерениями спектров турбулентности в океане (Ю. В. Ноздрин, 1975). Заметим еще, что в случае локально-осесимметричной турбулентности пульсации скорости $\mathbf{u}'$ и температуры T' коррелируют друг с другом (тогда как в поле локально-изотропной турбулентности они некоррелированы). В интервале плавучести из соображений размерности следует, что спектр турбулентного потока тепла $c_p \rho_0 E_{u_j T}(k)$ должен быть пропорциональным $[E(k) E_T(k)]^{1/2}$.

Полуэмпирическая теория спектров геофизической турбулентности была построена А. С. Мониным (1962) при помощи спектральных аналогов уравнений для вторых моментов:

$$E_3(k) - \frac{g}{T_0} \int_k^\infty E_{WT}(k)\, dk = 2\nu \int_k^\infty k^2 E(k)\, dk;$$

$$E_{uTT}(k) = \chi \int_k^\infty k^2 E_T(k)\, dk, \qquad (34.22)$$

причем входящие в левые части этих уравнений спектры третьих моментов и потока тепла были представлены в духе полуэмпирической теории В. Гейзенберга (1948) в виде:

$$E_3(k) = K(k) \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + 2 \int_{k_0}^k k^2 E(k)\, dk \right];$$

$$E_{uTT}(k) = \alpha K(k) \left[\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right)^2 + \int_{k_0}^k k^2 E_T(k)\, dk \right];$$

$$\int_k^\infty E_{WT}(k)\, dk = \pm \alpha K(k) \left[\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right)^2 + \int_{k_0}^k k^2 E_T(k)\, dk \right]^{1/2};$$

$$K(k) = \gamma \left[\int_k^\infty E(k) k^{-2}\, dk \right]^{1/2}, \qquad (34.23)$$

где $K(k)$ — коэффициент турбулентной вязкости, создаваемой мелкомасштабными компонентами турбулентности (с волновыми числами больше k). Для него здесь используется выражение, предложенное Дж. Хауэлсом (1960). Другие обозначения: γ — числовая постоянная; $k_0 = 2\pi/L_0$ — соответствуют внешнему масштабу турбулентности; верхний знак отвечает неустойчивой, нижний — устойчивой стратификации. В инерционно-конвективном интервале и интервале плавучести правые части в (34.22) заменяются соответственно на ε и ε_T. При $k = k_0$ получаются уравнения для осредненных полей $\bar{u}(z)$ и $\bar{T}(z)$, рассмотренных выше и при расчете спектров считаемых известными. Далее удобно ввести безразмерные величины:

$$f(kL_1) = \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{-2/3} L_1^{-5/3} E(k); \quad f_T(kL_1) = \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon_T}\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{1/3} L^{-5/3} E_T(k);$$

$$F(x) = \left[\int_x^\infty f(x)\, x^{-2}\, dx\right]^{1/4}; \quad L_1 = \left[\frac{g}{T_0}\left(\frac{\alpha\varepsilon_T}{\gamma}\right)^{1/2}\right]^{-3/2}\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{5/4}, \qquad (34.24)$$

и тогда решение уравнений (34.22), (34.23) приводится к виду:

$$x = \frac{F^{-3/2}(4 \mp 2F)^{1/4}}{2}; \quad f = \frac{4F^{5/2}(4 \mp 2F)^{5/4}}{12 \mp 5F};$$

$$f_T = \frac{32F^{5/2}(4 \mp 2F)^{1/4}}{12 \mp 5F}. \qquad (34.25)$$

Отсюда при малых F получаются асимптотические законы пяти третей (34.18), (34.19), а при больших F и нижнем знаке — асимптотика (34.21).

§ 35. Вертикальная тонкослойная микроструктура

Как указывалось выше, при очень устойчивой стратификации турбулентность вследствие затрат ее энергии на работу против архимедовых сил не может сколько-нибудь долго охватывать всю жидкость и может существовать лишь в отдельных тонких слоях или «блинах», как их называл А. Н. Колмогоров, предсказывавший это явление в своих выступлениях еще в 1948—1949 гг. (после чего термин blini вошел в литературу по турбулентности на английском языке). Вследствие перемешивания турбулизованные слои должны быть квазиоднородными по вертикали и разделяться очень тонкими прослойками («простыни» или sheets) с микроскачками («ступеньками») температуры, плотности и других термодинамических параметров.

Это предсказание было предварительно подтверждено в 50-х годах при обнаружении «облаков турбулентности» в свободной атмосфере в полетах на аэростатах сотрудников Геофизического

института АН СССР, а затем нашло блестящее подтверждение в открытии в 70-х годах вертикальной тонкослойной микроструктуры океана, причем оказалось, что она распространена в Мировом океане практически всегда и везде (а ее отсутствия можно ожидать лишь в областях макроконвекции, встречающейся в океане, по крайней мере в низких и умеренных широтах, довольно редко).

Особенно сильная устойчивость имеет место в «слое скачка плотности» *(пикноклине)* под верхним перемешанным слоем океана. Там обычно $|\partial\rho/\partial z| \sim 10^{-6}$ г/см^4 и $N \sim 3 \cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$ (тогда как в наиболее сильных приземных температурных инверсиях в атмосфере $|\partial\rho/\partial z| \sim 4 \cdot 10^{-8}$ г/см^4 и в среднем в нижнем 10 км слое атмосферы $N \sim 10^{-2}$ с$^{-1}$). Слои микроструктуры в океане имеют толщины $h \approx 10^0 \ldots 10^3$ см, турбулентность в них слаба (неспособна разрушать эти слои), имеет локальный характер (непосредственно от глубины не зависит) и характеризуется небольшими числами Рейнольдса $\nu^{-1}hU \sim 10^2 \ldots 10^5$.

Главным механизмом образования тонкослойной микроструктуры, действующим в океане практически повсеместно, представляется расплывание перемешанных пятен, образующихся в областях сдвиговой и конвективной гидродинамической неустойчивости внутренних волн — в их ложбинах и гребнях, когда локальные значения Ri оказываются там ниже $^1/_4$ (а также в сдвиговых течениях $U(z)$ у критических уровней z_c, где $U(z_c) = c$, см. (27.8′), и вследствие «взрывной» неустойчивости, см. § 30).

При устойчивой стратификации, когда плотность среды (точнее, потенциальная плотность) возрастает с глубиной, в верхней половине перемешанного пятна плотность оказывается больше, а в нижней половине — меньше, чем на тех же уровнях в окружающей среде. Под действием архимедовых сил верхняя половина перемешанного пятна должна погружаться, а нижняя — всплывать к его среднему уровню. Таким образом, пятно должно сплющиваться («коллапс»), одновременно вследствие слабости сжимаемости расплываясь в стороны и тем самым превращаясь в тонкий «блин». Его интрузия в окружающую среду и образует в ней новый слой микроструктуры.

Если исходная внутренняя волна была длинной (и долгопериодной; таковы, например, вынужденные внутренние волны с приливными периодами), то образуемые ими пятна турбулентности имеют большие размеры, и получающиеся из них слои микроструктуры — большие толщины. На них могут развиваться внутренние волны с меньшими длинами, образуя пятна турбулентности меньших размеров, расплывающиеся в слои микроструктуры меньших толщин, и т. д. до внутренних волн минимальных длин, пятен турбулентности минимальных размеров и слоев микроструктуры минимальных толщин. Таким образом, здесь ответ на вопрос, что является первичным — курица или яйцо, заключается

в указании каскадного процесса «устойчивая стратификация → → внутренние волны → пятна турбулентности → слои микроструктуры → внутренние волны и т. д.».

Начальные стадии расплывания турбулентного пятна были экспериментально изучены Дж. Ву (1969) и количественно описаны теоретически Т. Као (1976). Пятно расплывается, сначала с большим запасом преодолевая силы сопротивления и интенсивно излучая внутренние волны, а затем достигая квазистационарного режима, при котором движущая сила расплывания (коллапс) уравновешивается суммой сопротивления формы и волнового сопротивления. Эта стадия проходится за время в несколько десятков периодов Вяйсяля—Брента. Относительная скорость роста горизонтальной площади S пятна $S^{-1}\partial S/\partial t$ сначала пропорциональна скорости коллапса N^2t (так как архимедово ускорение пропорционально N^2). При этом горизонтальный размер пятна растет по закону $(L-L_0)/L_0 \sim N^2t^2$. Затем достигается режим $\partial L/\partial t \sim Nh$, где h — толщина языка интрузии; у круглого пятна $h \sim V/L^2$ (где V — объем пятна, не меняющийся со временем), и получается $L \sim [NV(t-t_0)]^{1/3}$.

После этого наступает продолжительная заключительная стадия расплывания перемешанного пятна, на которой движущая сила расплывания уравновешивается вязким сопротивлением (Г. И. Баренблатт, 1978; Г. И. Баренблатт и А. С. Монин, 1979). Уравнение сохранения массы пятна здесь имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} h\mathbf{v} = 0; \qquad \mathbf{v} = -\frac{h}{c\mu}\nabla(ph), \tag{35.1}$$

где второе равенство выражает равновесие между движущей силой $-(\delta S)\nabla(ph)$ и сопротивлением $(\delta S)c\mu\mathbf{v}/h$ (μ — вязкость; числовой коэффициент c, например, в течении между плоскими стенками равен 12). Здесь p — избыточное давление, т. е. разность между давлением в среде

$$p_1 - \rho_1 g(z-z_1) + \frac{1}{2}\rho_1 N^2 (z-z_1)^2$$

и в интрузии

$$p_1 - \rho_1 g(z-z_1) + \frac{1}{2}\rho_1 N^2 (h/2)^2,$$

в среднем равная $\frac{1}{12}\rho_1 N^2 h^2$. Таким образом, (35.1) приводится к виду

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \varkappa \Delta h^5; \quad \varkappa = \rho_1 N^2/20c\mu. \tag{35.2}$$

Для осесимметричного пятна решение имеет вид

$$h = (V/2\pi\varkappa)^{1/5}(t-t_1)^{-1/5} f(\zeta); \quad \zeta = (\varkappa V^4/16\pi^4)^{-1/10}(t-t_1)^{-1/10} r;$$
$$f(\zeta) = (10^{1/5}/6)^{1/4}(1-\zeta^2/\zeta_0^2)^{1/4}; \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0 = 10^{3/5}/2, \tag{35.3}$$

так что радиус пятна ($\zeta = \zeta_0$) растет, как $(t - t_1)^{1/10}$. Возможно, что такие перемешанные линзы в атмосфере с поддерживаемой в них турбулентностью пылью при некоторых условиях освещения могут быть приняты за «летающие тарелки». Для цилиндрического пятна турбулентности с горизонтальной осью (скажем, осью y), образованного плоской внутренней волной, вместо (35.3) получается следующее решение уравнения (35.2):

$$h = (V^2/4\varkappa H^2)^{1/6}(t-t_1)^{-1/6} f_1(\zeta_1); \quad \zeta_1 = (\varkappa V^4/16H^4)^{-1/6}(t-t_1)^{-1/6} x;$$
$$f_1(\zeta_1) = (\zeta_0^2/15)^{1/4}(1-\zeta^2/\zeta_0^2)^{1/4};$$
$$0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0 = (15)^{1/6} \frac{[2\Gamma(5/4)\,\Gamma(1/2)]^{2/3}}{\Gamma(7/4)}, \qquad (35.4)$$

где H — длина пятна вдоль оси y. Законы расширения осесимметричного пятна $r \sim (t-t_1)^{1/10}$ и цилиндрического пятна $x \sim (t-t_0)^{1/6}$ нашли подтверждение в лабораторных экспериментах.

Другой механизм образования тонкослойной микроструктуры внутренними волнами был описан в § 29, где было показано, что пакет слабонелинейных волн в плоскости (x, z) описывается функцией тока

$$\psi = \varepsilon\left(Ae^{i\theta} + A^* e^{-i\theta}\right)\zeta_1(z) + \varepsilon^2\left(A^2 e^{2i\theta} + A^{*2} e^{-2i\theta}\right)\zeta_2(z) + \\ + \varepsilon^2 |A|^2 \Psi(z) + o(\varepsilon^2). \qquad (35.5)$$

Здесь ε — малый параметр порядка крутизны волн; $A = A(\varepsilon^2 x, \varepsilon^2 t, \theta)$ — комплексная огибающая; $\theta = \varepsilon^{-2}\vartheta(\varepsilon^2 x, \varepsilon^2 t)$ — «быстрая» фаза; первые два слагаемых описывают основную волну и вторую гармонику, а третье — нелинейный вклад в среднее течение типа стоксова дрейфа. Этот вклад (и соответствующие ему возмущения плотности) по вертикали знакопеременен с длиной волны порядка $c_g N^{-1}$, при малых длинах несущей волны малой, так что он представляет собой тонкослойную микроструктуру (существующую в течение времени Lc_g^{-1} прохождения волнового пакета длины L). Существование тонкослойной микроструктуры среднего течения в океане было открыто измерениями А. С. Монина, К. Н. Федорова и В. П. Шевцова (1973). Согласно (26.14) и (26.15), при несущей волне с приблизительно вертикальным волновым вектором и, значит, приблизительно инерционной частотой $\omega \approx f$ получается

$$\mathbf{c}_g \approx \frac{\omega^2 - f^2}{fk^2}\,\mathbf{k},$$

т. е. волновой пакет распространяется приблизительно горизонтально. По-видимому, этому случаю соответствуют измерения Т. Санфорда (1975), обнаружившего в колебаниях во времени тонкослойной микроструктуры течения инерционный период.

Еще одним механизмом образования тонкослойной микроструктуры в океане, возможным, правда, далеко не повсеместно,

является микроконвекция в слое соленой воды с устойчивой стратификацией плотности

$$\partial\rho_*/\rho\,\partial z \approx -\alpha\,\partial T/\partial z + \gamma\,\partial s/\partial z < 0,$$

но разными знаками вкладов в нее градиентов температуры и солености (что аномально: обычно температура уменьшается, а соленость растет с глубиной, т. е. $\partial T/\partial z > 0$ и $\partial s/\partial z < 0$), возникающая благодаря молекулярным процессам так называемой *двойной диффузии*, т. е. различию в коэффициентах диффузии тепла и соли в воде $\chi/D \approx 100$ (Г. Стоммел, А. Аронс, Д. Бланшар, 1956; Г. Стоммел, 1962).

Так, при расположении теплой соленой воды над более плотной холодной и менее соленой ($\partial T/\partial z > 0$; $\partial s/\partial z > 0$) относительно быстрое выравнивание флюктуаций температуры при сохраняющихся из-за медленности диффузии флюктуациях солености создает флюктуации плотности, порождающие ламинарную конвекцию в форме узких и длинных вертикальных ячеек — *соленых пальцев*. Их удалось обнаружить и даже сфотографировать теневым методом под средиземноморскими водами в Атлантике (А. Уильямс, 1974). Лабораторные измерения показали, что при этом $\alpha q_z/\gamma I_z \approx 0{,}56$, т. е. более половины потенциальной энергии, освобождающейся при концентрационной (соленостной) конвекции, затрачивается на перенос тепла.

Наоборот, при расположении холодной и относительно пресной воды над более плотной теплой и соленой микроконвекция из-за быстрой диффузии тепла снизу задерживается микроскачками плотности, и образуется *расслоение*, в котором безразмерные потоки тепла и соли $q_z(c_p\rho_0\chi\delta T/h)^{-1}$ и $I_z(\rho_0 D\delta s/h)^{-1}$ пропорциональны $(\mathrm{Ra})^{1/3}$ (где Ra — число Рэлея, см. § 17) с коэффициентами пропорциональности, зависящими от $\gamma\delta s/\alpha\delta T$. Согласно лабораторным измерениям, отношение $\gamma I_z/\alpha q_z$ с ростом $\gamma\delta s/\alpha\delta T$ сначала быстро падает, а при $\gamma\delta s/\alpha\delta T \geqslant 2$ становится приблизительно равным 0,15: при больших вкладах солености в стратификацию плотности 15 % потенциальной энергии, освобождающейся при термической конвекции, затрачивается на подъем соли.

Впрочем, микроконвекция из-за двойной диффузии возможна далеко не повсеместно, а тонкослойная микроструктура наблюдается даже в пресноводных водоемах, где двойная диффузия вообще не происходит. Так, например, Дж. Симпсон и Дж. Вудс (1970) обнаружили микроструктуру в знаменитом шотландском озере Лох-Несс.

§ 36. Пограничные слои

Распространим теорию подобия для приземного слоя атмосферы, изложенную в § 34, на весь планетарный пограничный слой атмосферы (или верхний перемешанный слой океана, или

придонный пограничный слой, и т. п.). В случае СГО-течения этот слой отличается от приземного слоя атмосферы лишь действием силы Кориолиса (тогда он называется *экмановским*, сокращенно — ЭПС), и к определяющим параметрам теории подобия § 34 достаточно добавить параметр Кориолиса f (обобщенная таким образом теория подобия была построена А. С. Мониным, 1950).

Тогда можно ввести толщину нейтрально стратифицированного ЭПС $h_0=\varkappa u_*/f$ и внутренний параметр стратификации $\mu_0=h_0/L$ (А. Б. Казанский и А. С. Монин, 1960, 1961), а толщина стратифицированного ЭПС будет иметь вид $h=h_0\zeta(\mu_0)$, где $\zeta(\mu_0)$ — некоторая универсальная функция. Определяя ее, как толщину потери импульса, можно положить $h\sim(K/f)^{1/2}$, где K — эффективное значение кинематического коэффициента турбулентной вязкости. По правилам § 34, при сильной неустойчивости асимптотически K перестает зависеть от u_*, так что

$$K\sim(g/T_0)^{1/3}(q/c_p\rho_0)^{1/3}h^{4/3},$$

откуда

$$h\sim(g/T_0)^{1/2}(q/c_p\rho_0)^{1/2}f^{-3/2}\sim h_0|\mu_0|^{1/2}. \qquad (36.1)$$

При сильной устойчивости

$$\mathrm{Rf}\sim(g/T_0)(q/c_p\rho_0)(K/u_*^4)\sim R.$$

Определив отсюда K, получаем

$$h\sim h_0\mu_0^{-1/2}. \qquad (36.2)$$

Поскольку и с ростом устойчивости, и с ростом неустойчивости $|L|$ убывает, а $|\mu_0|$ возрастает, толщина h слоя затухания потока импульса в стратифицированном ЭПС при ослаблении устойчивости и росте неустойчивости растет.

То же самое обобщение теории подобия § 34 получается, если к определяющим параметрам вместо f добавить толщину пограничного слоя h (и ввести внутренний параметр стратификации $\mu=h/L$). Такой подход будет даже обладать большей общностью — он будет применим не только к ЭПС, но и ко квази-СГО пограничным слоям, зависящим от $(x_h,\ t)$ через h (и через другие определяющие параметры теории подобия). Вместо (34.3) теперь будет

$$p_M(\mathbf{u},\ T)=u_*^{-3}|T_*|^{-1}F\left(\frac{\mathbf{u}}{u_*},\ \frac{T}{T_*},\ \frac{z}{h},\ \frac{z_0}{h},\ \mu\right), \qquad (36.3)$$

причем от z_0 могут зависеть только *абсолютные* значения *осредненных* скорости течения и температуры (но не их градиенты и не флюктуации):

$$\bar{u}(z)=\bar{u}(z_0)+\frac{u_*}{\varkappa}\left[f_u\left(\frac{z}{h},\ \mu\right)-f_u\left(\frac{z_0}{h},\ \mu\right)\right];$$

$$\bar{v}(z)=\bar{v}(z_0)+\frac{u_*}{\varkappa}\left[f_v\left(\frac{z}{h},\ \mu\right)-f_v\left(\frac{z_0}{h},\ \mu\right)\right];$$

$$\bar{T}(z)=\bar{T}(z_0)+T_*\left[f_T\left(\frac{z}{h},\ \mu\right)-f_T\left(\frac{z_0}{h},\ \mu\right)\right]. \qquad (36.4)$$

При $z\ll h$ зависимость от h в (36.3), (36.4) должна пропадать, так что универсальные функции F, f_u, f_v и f_T должны становиться зависящими не от трех аргументов z/h, z_0/h и μ, а лишь от двух их произведений $\mu z/h=z/L$ и $\mu z_0/h=z_0/L$, т. е. мы возвращаемся к теории подобия § 34. Если, кроме того, $z\ll|L|$, то формулы (36.4) должны превращаться в «пристеночные» логарифмические законы

$$\bar{u}(z)\approx U\cos\gamma+\frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{z}{z_0};\quad \bar{v}(z)\approx -U\sin\gamma;$$

$$\bar{T}(z)\approx\bar{T}(z_0)+\frac{T_*}{\alpha_0}\ln\frac{z}{z_0}, \qquad (36.5)$$

где ось x выбрана по направлению вектора напряжения трения на уровне $z=z_0$ (под углом γ к течению вне пограничного слоя), а U — модуль скорости течения на этом уровне. У верхней же границы пограничного слоя должны действовать «законы дефекта»:

$$\bar{u}(z)=\frac{u_*}{\varkappa}\psi_u\left(\frac{z}{h},\ \mu\right);\quad \bar{v}(z)=\frac{u_*}{\varkappa}\psi_v\left(\frac{z}{h},\ \mu\right);$$

$$\bar{T}(z)-\bar{T}(h)=T_*\psi_T\left(\frac{z}{h},\ \mu\right). \qquad (36.6)$$

При малых z эти «законы дефекта» должны выполняться одновременно с «пристеночными» законами (36.5). Приравнивая их друг к другу, введем следующие предельные при $z/h\to 0$ безразмерные величины:

$$\frac{\varkappa U\cos\gamma}{u_*}-\ln\frac{z_0}{h}=\psi_u\left(\frac{z}{h},\ \mu\right)-\ln\frac{z}{h}\to A(\mu);$$

$$-\frac{\varkappa U\sin\gamma}{u_*}=\psi_v\left(\frac{z}{h},\ \mu\right)\to B(\mu);$$

$$\alpha_0\frac{\delta T}{T_*}+\ln\frac{z_0}{h}=-\alpha_0\psi_T\left(\frac{z}{h},\ \mu\right)+\ln\frac{z}{h}\to C(\mu), \qquad (36.7)$$

где $\delta T=\bar{T}(h)-\bar{T}(z_0)$ — перепад температуры поперек пограничного слоя. Отсюда получаются следующие законы сопротивления и теплообмена, выражающие коэффициент сопротивления u_*/U,

угол поворота течения γ и коэффициент теплопередачи $T_*/\delta T$ через параметры z_0/h и μ:

$$\frac{u_*}{\varkappa U}=\left\{B^2(\mu)+\left[A(\mu)+\ln\frac{z_0}{h}\right]^2\right\}^{-1/2};\quad \sin\gamma=-\frac{u_*}{\varkappa U}B(\mu);$$

$$\frac{T_*}{\delta T}=\alpha_0\left[C(\mu)-\ln\frac{z_0}{h}\right]^{-1}. \tag{36.8}$$

Внешнее число Ричардсона получается в виде

$$\mathrm{Ri}=\frac{gh\,\delta T}{T_0U^2}=\frac{\mu}{\alpha_0}\left[C(\mu)-\ln\frac{z_0}{h}\right]\left\{B^2(\mu)+\left[A(\mu)+\ln\frac{z_0}{h}\right]^2\right\}^{-1}. \tag{36.9}$$

С помощью этих формул по внешним параметрам пограничного слоя h, z_0, U, δT и параметру плавучести g/T_0 (и, значит, Ri) можно определить внутренние параметры u_*, $q/c_p\rho_0$ (и, значит, T_*, L и μ) и γ. Для этого, конечно, нужно знать функции A, B, C. Они измерялись эмпирически, а также рассчитывались при помощи полуэмпирических теорий, одна из которых будет сейчас изложена в соответствии с работами А. С. Монина (1965) на примере ЭПС. В этом случае во всех формулах (36.3)—(36.9) величины h, μ можно заменить на h_0, μ_0 (при этом полагают $h_0/z_0=(\varkappa u_*/U)\mathrm{Ro}$, где $\mathrm{Ro}=U/z_0f$ — так называемое число Россби, введенное К. Россби в 1932 г.). В излагаемой полуэмпирической теории в первых двух уравнениях Рейнольдса (33.3) пренебрегается молекулярным потоком импульса, и они записываются в виде

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=-f(\bar v+U\sin\gamma);\quad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=f(\bar u-U\cos\gamma), \tag{36.10}$$

а четвертое из уравнений (33.3) берется, как и в § 34, в виде

$$q/c_p\rho_0=\mathrm{const}. \tag{36.11}$$

Затем выводятся аналогичные (33.4), но несколько упрощенные уравнения для всех десяти одноточечных вторых моментов пульсаций $\mathbf{u}'$ и T'. Основным упрощением является представление одноточечных вторых моментов *производных* от полей флюктуаций (в том числе моментов (33.11)) через b и l по идее А. Н. Колмогорова (1942), как в (33.7), с учетом тензорной размерности этих моментов:

$$\nu\overline{\nabla u_i'\cdot\nabla u_j'}=[(c_1-3c_2)\lambda_i\lambda_j+c_2\delta_{ij}]b^3l^{-1};$$

$$\chi\overline{(\nabla T')^2}=c_3b\sigma_T^2l^{-1};\quad (\nu+\chi)\,\overline{\nabla u_i'\cdot\nabla T'}=c_4b^2\sigma_Tl^{-1}\lambda_i;$$

$$\frac{1}{\rho_0}\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}=-c_5bl^{-1}\left(\overline{u_i'u_j'}-\frac{b^2}{3}\delta_{ij}\right)-$$

$$-c_6b^3l^{-1}\left(\lambda_i\lambda_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}\right);$$

$$\frac{1}{\rho_0}\overline{p'\frac{\partial T'}{\partial x_i}}=-c_7bl^{-1}\overline{u_i'T'}-c_8b^2\sigma_Tl^{-1}\lambda_i, \tag{36.12}$$

где $c_1, \ldots, c_8$ — числовые постоянные (некоторые из этих формул впервые были предложены И. Ротта, 1951). Дополнительным упрощением является пренебрежение «потоками вторых моментов», создаваемыми турбулентностью (т. е. третьими моментами пульсаций) и молекулярными эффектами, т. е. величинами типа слагаемых в скобках в правых частях уравнений (33.4) (или допущение, что эти величины также описываются выражениями (36.12), так что их учет осуществляется подбором числовых постоянных $c_1, \ldots, c_8$). Третьим непринципиальным упрощением будет пренебрежение прямым действием силы Кориолиса на пульсационное движение. При всех этих упрощениях уравнения (33.4) для диагональных элементов тензора напряжений Рейнольдса принимают вид:

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho_0}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}=\left(c_2-\frac{c_5+c_6}{6}\right)b^3l^{-1}+\frac{c_5}{2}bl^{-1}\sigma_u^2;$$

$$\frac{\tau_{yz}}{\rho_0}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}=\left(c_2-\frac{c_5+c_6}{6}\right)b^3l^{-1}+\frac{c_5}{2}bl^{-1}\sigma_v^2;$$

$$\frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p\rho_0}=\left(c_1-2c_2-\frac{c_5-2c_6}{2}\right)b^3l^{-1}+\frac{c_5}{2}bl^{-1}\sigma_w^2. \qquad (36.13)$$

Уравнения $\partial\tau_{xz}/\partial t=\partial\tau_{yz}/\partial t=0$ приводятся к виду

$$c_5bl^{-1}\frac{\tau_{xz}}{\rho_0}+\frac{g}{T_0}\frac{q_x}{c_p\rho_0}=\sigma_w^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial z};$$

$$c_5bl^{-1}\frac{\tau_{yz}}{\rho_0}+\frac{g}{T_0}\frac{q_y}{c_p\rho_0}=\sigma_w^2\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \qquad (36.14)$$

а уравнение $\partial\tau_{xy}/\partial t=0$ принимает вид

$$c_5bl^{-1}\frac{\tau_{xy}}{\rho_0}=-\left(\frac{\tau_{xz}}{\rho_0}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}+\frac{\tau_{yz}}{\rho_0}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right). \qquad (36.15)$$

Уравнения для горизонтальных компонент турбулентного потока тепла $\partial q_x/\partial t=\partial g_y/\partial t=0$ получаются в виде

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho_0}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}-c_7bl^{-1}\frac{q_x}{c_p\rho_0}=\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z};$$

$$\frac{\tau_{yz}}{\rho_0}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}-c_7bl^{-1}\frac{q_y}{c_p\rho_0}=\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \qquad (36.16)$$

а уравнение $\partial q/\partial t=0$ приводится к виду

$$\frac{g}{T_0}\sigma_T^2=\sigma_w^2\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}+c_7bl^{-1}\frac{q}{c_p\rho_0}+(c_4+c_8)b^2l^{-1}\sigma_T. \qquad (36.17)$$

Наконец, уравнение $\partial\sigma_T^2/\partial t=0$ принимает вид

$$c_3bl^{-1}\sigma_T^2=-\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}. \qquad (36.18)$$

Двенадцать уравнений (36.10), (36.13)—(36.18) содержат 13 неизвестных величин — $\bar{u}(z)$, $\bar{v}(z)$, $\bar{T}(z)$, девять вторых моментов пульсаций (десятый из них (36.11) считается заданным) и масштаб турбулентности

$$l = \varkappa z \Lambda(\eta, \mu_0), \quad \eta = z/h_0,$$

для определения которого можно привлечь, например, гипотезу (33.8).

Из (36.18) видно, что при $q = 0$ получается $\sigma_T = 0$; тогда из (36.17) получается равновесный градиент температуры (точнее, потенциальной температуры) $\partial\bar{T}/\partial z = 0$. Значит, для связи между q и $\partial\bar{T}/\partial z$ целесообразно пользоваться обычной формулой $q/c_p\rho_0 = -K_T\,\partial\bar{T}/\partial z$ (вторая формула (34.5)). Из (36.14)—(36.16) получается

$$\tau_{xz} = \rho_0 K \frac{\partial\bar{u}}{\partial z}; \quad \tau_{yz} = \rho_0 K \frac{\partial\bar{v}}{\partial z}; \quad \tau_{xy} = -\frac{2\rho_0 K l}{c_5 b}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z};$$

$$K = \left(\frac{q}{c_p\rho_0} + \frac{c_7 b l^{-1}}{g/T_0}\sigma_w^2\right)\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial z} + \frac{c_5 c_7 b^2 l^{-2}}{g/T_0}\right)^{-1}. \qquad (36.19)$$

Это — обобщение первой формулы (34.5). Соотношения $\mathrm{Rf} = \alpha\mathrm{Ri}$, $\alpha = K_T/K$ здесь остаются в силе. Далее, с помощью первых двух формул (36.19) и определения Rf из (36.13) получается

$$\frac{\sigma_u^2}{b^2} = \frac{\sigma_{u0}^2}{b_0^2} + \frac{\sigma_{u0}^2 - \sigma_{v0}^2}{b_0^2}\frac{\varphi_u^2/\varphi^2}{1-\mathrm{Rf}}; \quad \frac{\sigma_v^2}{b^2} = \frac{\sigma_{v0}^2}{b_0^2} + \frac{\sigma_{u0}^2 - \sigma_{v0}^2}{b_0^2}\frac{\varphi_v^2/\varphi^2}{1-\mathrm{Rf}};$$

$$\frac{\sigma_w^2}{b^2} = \frac{\sigma_{w0}^2}{b_0^2} - \frac{\sigma_{u0}^2 - \sigma_{v0}^2}{b_0^2}\frac{\mathrm{Rf}}{1-\mathrm{Rf}}; \quad \frac{b^2}{b_0^3 u_*^3} = \lambda\frac{1-\mathrm{Rf}}{\mathrm{Rf}};$$

$$\varphi_u = \frac{l}{u_*}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}; \quad \varphi_v = \frac{l}{u_*}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}; \quad \varphi^2 = \varphi_u^2 + \varphi_v^2; \quad \lambda = l/\varkappa L, \qquad (36.20)$$

где σ_{u0}^2, σ_{v0}^2, σ_{w0}^2 — значения величин σ_u^2/u_*^2, σ_v^2/u_*^2, σ_w^2/u_*^2 в нейтрально стратифицированном приземном слое воздуха (связанные соотношением $(\sigma_{u0}^2 - \sigma_{v0}^2)\sigma_{w0}^2 = 2$ и согласно измерениям равные 5,8; 2,9 и 0,7), а $b^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2$. Аналогично из (36.16) и (36.18) получается

$$\frac{(q_x, q_y)}{q} = -q_{x_0}\frac{u_* b_0}{b}\frac{\alpha_0}{\alpha}\frac{1+\alpha}{1+\alpha_0}(\varphi_u, \varphi_v);$$

$$\left(\frac{\sigma_T}{\varkappa T_*}\right)^2 = \sigma_{T_0}^2\left(\frac{u_* b_0}{b}\right)^2\frac{\alpha_0}{\alpha}\varphi^2(1-\mathrm{Rf}), \qquad (36.21)$$

где q_{x0}, σ_{T0}^2 и α_0 — числовые постоянные (пределы соответствующих величин в нейтрально стратифицированном приземном слое).

Из (36.14), определения Rf и четвертого уравнения (36.20) получается

$$\frac{\lambda}{\varphi^3}=\frac{\mathrm{Rf}}{1-\mathrm{Rf}}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\psi\right)^{3/2};\quad K=\frac{u_*^2 l\varphi\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\psi\right)^{3/2}}{1-\mathrm{Rf}};$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha}\psi=1-\left(1+\frac{2}{\sigma_{w0}^4}+\frac{q_{x0}}{\sigma_{w0}^2}\frac{\alpha_0}{\alpha}\frac{1+\alpha}{1+\alpha_0}\right)\mathrm{Rf}. \qquad (36.22)$$

Исключая из (36.17)—(36.18) величину σ_T^2, получаем для $\psi=\psi(\mathrm{Rf})$ квадратное уравнение

$$(1-A^2)(1-\mathrm{Rf})\psi=[\psi-A(1-B\cdot\mathrm{Rf})]^2;$$

$$A=\frac{q_{x0}\sigma_{w0}^2}{1+\alpha_0};\quad B=1+\frac{2}{\sigma_{w0}^4}+\frac{\alpha_0\sigma_{T0}^2}{\sigma_{w0}^2}, \qquad (36.23)$$

у которого надо брать решение ψ, обращающееся в единицу при $\mathrm{Rf}\to 0$. Это решение определяет $\mathrm{Rf}_{кр}$. По нему из третьей формулы (36.22) определяется $\alpha=\alpha(\mathrm{Rf})$. Обращаясь теперь к уравнениям Рейнольдса (36.10), введем в них безразмерную комплексную функцию

$$\tau(\eta)=(\tau_{xz}+i\tau_{yz})/\rho_0 u_*^2,$$

и тогда после применения к ним оператора $K\partial/\partial z$ они приведутся к изящному виду

$$\mathrm{Rf}\,|\tau|^2\tau''=i\mu_0\tau. \qquad (36.24)$$

Решение должно удовлетворять краевым условиям $\tau\to 1$ в приземном слое воздуха и $\tau'\to 0$ на верхней границе пограничного слоя (при устойчивой и безразличной стратификации, по-видимому, на конечной высоте). В уравнении (36.24) имеются две неизвестные функции τ и Rf. Дополнительное соотношение между $|\tau|$ и Rf можно получить, приравняв значения l из первой формулы (36.22) и из обобщенной формулы Кармана (33.8):

$$\frac{|\tau|^{3/2}\,\mathrm{Rf}\,(1-\mathrm{Rf})^{1/2}}{\left(\frac{\alpha_0}{\alpha}\psi\right)^{3/4}}=-\mu_0\left(\frac{\partial\ln\Psi}{\partial\eta}\right)^{-1};\quad \Psi=\frac{(1-\mathrm{Rf})^{1/2}}{|\tau|\,\mathrm{Rf}}. \qquad (36.25)$$

Положив $\tau=|\mu_0|\tau_1$ и $\eta=|\mu_0|^{1/2}\eta_1$, для функций $\tau_1(\eta_1)$ и $\mathrm{Rf}(\eta_1)$ получим универсальные уравнения (36.24), (36.25) со значениями $\mu_0=\pm 1$. В этом смысле все стратифицированные ЭПС с одним и тем же знаком стратификации обладают динамическим подобием.

§ 37. Геострофическая турбулентность

Крупномасштабная турбулентность (в атмосфере и океане Земли, атмосферах других планет и Солнца) с горизонтальными

масштабами L, большими по сравнению с эффективной толщиной H охваченного ею слоя, *квазидвумерна*. Несмотря на то что свойственные ей гидродинамические поля существенно изменяются по высоте, и в ее динамике существенную роль играют вертикальные движения (связывающие воедино поля горизонтальных движений на разных высотах), и что даже при адиабатических процессах вихрь скорости в жидких частицах не сохраняется (а, наоборот, происходит растяжение вихревых линий), она описывается *двумерным* уравнением горизонтального переноса потенциального вихря (12.6).

Для более полного объяснения происхождения этого уравнения (а также для его преобразования от координат x, y, p к более удобным для целей настоящего параграфа декартовым координатам x, y, z) дадим ему несколько иной вывод, чем в § 12. Рассмотрим адиабатические процессы, при которых в жидких частицах сохраняются энтропия η и потенциальный вихрь Ω_*, т. е.

$$\frac{d_h\eta}{dt}+w\frac{\partial\eta}{\partial z}=0;\quad \frac{d_h\Omega_*}{dt}+w\frac{\partial\Omega_*}{\partial z}=0, \tag{37.1}$$

где d_h/dt — символ индивидуальной производной относительно горизонтального движения. Исключив отсюда w, получаем

$$\frac{d_h\Omega_*}{dt}-\frac{\partial\Omega_*/\partial z}{\partial\eta/\partial z}\frac{d_h\eta}{dt}=0. \tag{37.2}$$

Крупномасштабные движения можно, во-первых, с хорошей точностью считать бездивергентными, и тогда сохраняющейся величиной будет $\Omega_*=\boldsymbol{\Omega}_a\cdot\nabla\eta$, где $\boldsymbol{\Omega}_a=\operatorname{rot}\mathbf{u}+2\boldsymbol{\omega}$ — вихрь абсолютной скорости движения. Во-вторых, при них поле $\eta(\mathbf{x})$ квазигоризонтально, так что вектор $\nabla\eta$ квазивертикален, и, следовательно, $\Omega_*\approx\Omega_{az}\,\partial\eta/\partial z$. Тогда (37.2) приводится к виду

$$\frac{d_h\ln\Omega_{az}}{dt}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^{-1}\frac{d_h}{dt}\frac{\partial\eta'}{\partial z}-$$

$$-\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^{-2}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\ln\Omega_{az}}{\partial z}\right)\frac{d_h\eta'}{dt}=0, \tag{37.2'}$$

где $\eta'=\eta-\eta_0$ — часть поля η, зависящая от $\mathbf{x}_h$ и t. Она мала по сравнению с η_0, и поэтому в множителях перед производными d_h/dt ею можно пренебречь (кроме того, пренебрежем слагаемым $\partial\ln\Omega_{az}/\partial z$ по сравнению с величиной $\partial(\ln\partial\eta_0/\partial z)/\partial z$. Тогда из (37.2′) получается следующий приближенный закон сохранения:

$$\frac{d_h}{dt}\left(\ln\Omega_{az}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\eta'}{\partial\eta_0/\partial z}\right)=0 \tag{37.3}$$

(Б. Л. Гаврилин и А. С. Монин, 1969). Учитывая, что крупномасштабные процессы квазигидростатичны, имеем

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial z}=\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)_0\left(\frac{\partial p_0}{\partial z}-c_0^2\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)_0\frac{\rho_0c_0^2N^2}{g};$$

$$\eta'=\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)_0(p'-c_0^2\rho')\approx-\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)_0c_0^2\rho'\approx\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)_0\frac{c_0^2}{g}\frac{\partial p'}{\partial z}, \qquad (37.4)$$

так что в (37.3) можно положить $(\partial\eta_0/\partial z)^{-1}\eta'\approx(\rho_0N^2)^{-1}\partial p'/\partial z$. Наконец, воспользуемся квазигеострофичностью крупномасштабных движений, так что будет $|\mathrm{rot}_z\,\mathbf{u}|\ll 2\omega_z=f$ и $p'\approx\rho_0f\psi$, где ψ — функция тока горизонтального течения. Тогда уравнение (37.3) приведется к виду $d_h\omega_*/dt=0$, где

$$\omega_*=\Omega_{az}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{H^2}{L_R^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

— величина, пропорциональная потенциальному вихрю, взятому в квазигеострофическом приближении (H — толщина слоя, $L_R=HNf^{-1}$ — так называемый радиус деформации Россби). Учитывая, что $\Omega_{az}=\Delta\psi+f$ (где $\Delta=\Delta_h$ — горизонтальный лапласиан), это уравнение можно переписать также в виде

$$\frac{\partial\mathscr{L}\psi}{\partial t}+\frac{\partial(\psi,\ \mathscr{L}\psi)}{\partial(x,\ y)}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=F;\quad \mathscr{L}=\Delta+\frac{\partial}{\partial z}\frac{H^2}{L_R^2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad (37.5)$$

где $\beta=\partial f/\partial y$, причем для общности здесь написана правая часть F, создаваемая неадиабатическими процессами. Это уравнение и описывает эволюцию индивидуальных реализаций так называемой геострофической турбулентности. Слагаемое $\beta\,\partial\psi/\partial x$ в его левой части описывает так называемые *волны Россби—Блиновой* (точки 4^+ и 5^+ на рис. 10.3), которые будут подробно рассматриваться в следующей главе. Отношение δ второго слагаемого к третьему, т. е. «параметр нелинейности» этих волн, равно, как обычно, отношению типичной скорости движения жидкости U к фазовой скорости волн, здесь равной $c(L)\sim\beta L^2/2$ (где L — длина волны), т. е. $\delta=2U/\beta L^2$. При $\delta<1$ в потоке доминируют волны, при $\delta>1$ — вихри, граничному же значению $\delta=1$ соответствует горизонтальный масштаб

$$L_\beta=(2U/\beta)^{1/2}. \qquad (37.6)$$

На Земле при $\beta\sim2\cdot10^{-8}$ км$^{-1}\cdot$с$^{-1}$ в атмосфере, где $U\sim$ ~10 м$\cdot$с$^{-1}$, получается $L_\beta\sim1000$ км, а в океане, где $U\sim$ ~10 см$\cdot$с$^{-1}$, имеем $L_\beta\sim100$ км. При $L\ll L_\beta$ третьим слагаемым в левой части уравнения (37.5) можно пренебречь.

Далее, при $L>L_R$ в операторе $\mathscr{L}$ существенную роль играет второе слагаемое, так что различные слои жидкости сильно взаимодействуют по вертикали, вертикальные неоднородности размы-

ваются, и вся жидкость эволюционирует, как единый слой («баротропная» структура). Наоборот, при $L \ll L_R$ получается $\mathscr{L} \approx \Delta$, так что вертикальные взаимодействия между различными слоями жидкости играют малую роль, и эти слои эволюционируют приблизительно независимо друг от друга (и вертикальные неоднородности не размываются: «бароклинная» структура). В земной атмосфере при $f \sim 10^{-4}$ с$^{-1}$, $H \sim 10$ км и $N \sim 2 \cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$ (в слое струйного течения в верхней тропосфере и нижней стратосфере) получается $L_R \sim 2000$ км; в океане при $H \sim 5$ км и $N \sim 10^{-3}$ с$^{-1}$ получается $L_R \sim 50$ км.

Таким образом, при $L \ll (L_\beta, L_R)$ из (37.5) получается уравнение для функции тока ψ *двумерного* течения несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} = \nu \Delta\Delta\psi, \qquad (37.7)$$

где в качестве правой части F взято обычное выражение, описывающее действие молекулярной вязкости. Стало быть, в области своих наименьших масштабов геострофическая турбулентность вырождается в обычную двумерную турбулентность. Она существенно отличается от трехмерной турбулентности — прежде всего тем, что в случае идеальной жидкости в жидких частицах здесь сохраняется не только кинетическая энергия, как в трехмерных течениях, но также и вихрь скорости (а следовательно, и его квадрат, половина которого называется *энстрофией*); наличие этого дополнительного закона сохранения позволяет доказать существование и единственность решений уравнений двумерной гидродинамики. В вязкой жидкости осредненная кинетическая энергия $E = \frac{1}{2}\overline{|\nabla\psi|^2}$ и энстрофия $\Omega = \frac{1}{2}\overline{(\Delta\psi)^2}$ вырождаются по законам

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -2\nu\Omega \,(= -\varepsilon); \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\nu\overline{|\nabla \Delta\psi|^2} \,(= -\varepsilon_\omega). \qquad (37.8)$$

Отсюда видно, что при любых конечных начальных значениях E и Ω величина Ω может только уменьшаться со временем, и при $\nu \to 0$ будет $\varepsilon \to 0$, так что при больших Re величина E будет приблизительно постоянной, и колмогоровский каскадный перенос сколько-нибудь значительной доли E от больших масштабов к малым (в трехмерном случае приводивший к спектру турбулентности (34.18) будет невозможным. При этом спектр энергии в энергонесущем интервале масштабов будет иметь вид

$$E(k, t) = E^{3/2} t f\left(E^{1/2} k t\right), \qquad (37.9)$$

откуда $\Omega = \frac{1}{2} A t^{-2}$ и $\varepsilon_\omega = A t^{-3}$, где A — числовая постоянная (Дж. Бэтчелор, 1969). В то же время ненулевой предел величины

ε_ω при $\nu \to 0$ и каскадный процесс переноса энстрофии от больших масштабов к малым не исключены.

Введем средние для спектра энергии $E(k, t)$ и спектра энстрофии $k^2E(k, t)$ волновые числа

$$k_1(t) = E^{-1}\int_0^\infty kE(k, t)\,dk; \quad k_2(t) = \Omega^{-1}\int_0^\infty k^3E(k, t)\,dk. \tag{37.10}$$

Положив

$$kE(k) = [kE^{1/2}(k)]\cdot[E^{1/2}(k)] \text{ и } k^2E(k) = [k^{1/2}E^{1/2}(k)]\cdot[k^{3/2}E^{1/2}(k)]$$

и применив к интегралам от этих функций неравенство Коши—Буняковского—Шварца, можно доказать неравенства

$$k_1(t)\,k_2(t) \geqslant k_*^2 = \Omega/E; \quad k_1(t) \leqslant k_*; \quad k_2(t) \geqslant k_*. \tag{37.11}$$

Они показывают, что перенос энергии в сторону малых k — уменьшение k_1 — должен сопровождаться переносом энстрофии в сторону больших k — увеличением k_2 («турбулентную вязкость» при этом следует считать отрицательной!) и что при каскадных процессах энергия не может накапливаться в движениях малых масштабов, а энстрофия не может накапливаться в движениях больших масштабов. Если рассчитать k_1 по получающемуся при $E \approx \text{const}$ автомодельному спектру (37.9), то скорость роста со временем масштаба турбулентности k_1^{-1} получится равной $\partial k_1^{-1}/\partial t = aU$, где $U = (2E)^{1/2}$ — средняя квадратичная скорость движения жидкости, а $a = \left(\int xf(x)\,dx\right)^{-1}\int f(x)\,dx$ — положительная постоянная.

При спектральном переносе энстрофии в инерционном интервале волновых чисел k (точнее, при $L_0^{-1} \ll k \ll \min(\varepsilon^{1/4}\nu^{-3/4}, \varepsilon_\omega^{1/6}\nu^{-1/2})$) спектр энергии будет определяться, вообще говоря, обоими параметрами ε и ε_ω. Из них можно составить масштаб длины $L_\omega = (\varepsilon/\varepsilon_\omega)^{1/2}$, и, согласно соображениям размерности, спектр энергии будет определяться правой формулой (34.18) с коэффициентом $C_1 = C_1(kL_\omega)$, зависящим от безразмерного волнового числа kL_ω. Согласно (37.11), на крупномасштабном конце спектра (т. е. при малых k) должен быть существенным только параметр ε, так что там должно быть $C_1(kL_\omega) \approx C_1(0)$, и спектр (34.18) удовлетворяет «закону пяти третей», как и в трехмерной турбулентности, но только с противоположным направлением спектрального переноса энергии — от малых масштабов к большим. На мелкомасштабном конце инерционного интервала, наоборот, должен быть существенным только параметр ε_ω, а параметр ε должен выпадать из формулы для $E(k)$. Для этого при больших kL_ω должна иметь место асимптотика $C_1(kL_\omega) \sim (kL_\omega)^{-4/3}$, и получается «закон обратного куба»

$$E(k) = C_{1\infty}\varepsilon_\omega^{2/3}k^{-3} \tag{37.12}$$

(Р. Крейчнан, 1967). Он нашел подтверждения в численных экспериментах по двумерной турбулентности (с коэффициентом $C_{1\infty} \approx 1{,}5$) и в эмпирических данных о спектрах крупномасштабных метеорологических полей в земной атмосфере (начиная с работы И. Огуры, 1952, впервые обратившего внимание на этот закон). Вытекающие из (37.11) предсказания о связи между процессами спектрального переноса кинетической энергии и энстрофии можно проиллюстрировать расчетом скоростей $\Pi(k)$ и $\Pi_\omega(k)$ этого переноса (от волновых чисел меньше k к волновым числам больше k) в так называемом диффузионном приближении (С. Лейтс, 1968):

$$\Pi(k) = -ak^{-1}\frac{\partial}{\partial k}k^{9/2}E^{3/2}(k); \quad \Pi_\omega(k) = -ak^3\frac{\partial}{\partial k}k^{9/2}E^{3/2}(k), \tag{37.13}$$

где a — положительная числовая постоянная. При $E(k) \sim k^{-5/3}$ получается $\Pi = \text{const} < 0$ и $\Pi_\omega = 0$, а при $E(k) \sim k^{-3}$ оказывается $\Pi_\omega = \text{const} > 0$ и $\Pi = 0$.

Аналогично вышеизложенному для концентрации ϑ пассивной примеси, удовлетворяющей в двумерной гидродинамике уравнению

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} = \chi\Delta\vartheta, \tag{37.14}$$

в инерционно-конвективном интервале волновых чисел (точнее, при $L_0^{-1} \ll k \ll \min(\varepsilon^{1/4}\nu^{-3/4}, \varepsilon^{1/4}\chi^{-3/4}, \varepsilon_\omega^{1/6}\nu^{-1/2})$ спектр будет определяться формулой (34.19) с коэффициентом $C_\vartheta = C_\vartheta(kL_\omega)$. При малых kL_ω здесь должно получаться $C_\vartheta(kL_\omega) \approx C_\vartheta(0)$, т. е. спектр (34.19) удовлетворяет «закону пяти третей». При больших же kL_ω из формулы для $E_\vartheta(k)$ должен выпадать параметр ε, для чего должна иметь место асимптотика $C_\vartheta(kL_\omega) \sim (kL_\omega)^{2/3}$, и получается «закон минус первой степени»

$$E_\vartheta(k) = C_{\vartheta\infty}\varepsilon_\vartheta\varepsilon_\omega^{-1/3}k^{-1} \tag{37.15}$$

(Б. Л. Гаврилин, А. П. Мирабель, А. С. Монин, 1972; П. Саундерс, 1972). Заметим, однако, что при законах (37.12) и (37.15) полная энстрофия $\int_{k_0}^{k_m} k^2E(k)\,dk$ и мера неоднородности поля пассивной примеси $\int_{k_0}^{k} E_\vartheta(k)\,dk$ логарифмически расходятся и при $k_0 \to 0$, и при $k_m \to \infty$. Чтобы избежать этих расходимостей,

к спектрам (37.12) и (37.15) надо ввести поправки в виде логарифмических множителей. Для этой цели положим

$$\Pi(k) \sim kE(k)\sigma(k); \quad \Pi_\omega(k) \sim k^3 E(k)\sigma(k);$$

$$\Pi_\vartheta(k) \sim kE_\vartheta(k)\sigma(k); \quad \sigma(k) \sim \left[\int_{k_0}^{k} k'^2 E(k')\,dk'\right]^{1/2}. \qquad (37.16)$$

Отсюда видно, что выполнение условия $\Pi(k) = \text{const}$ может обеспечить только «закон пяти третей», и в этом случае основной вклад в интеграл в формуле для $\sigma(k)$ будут вносить волновые числа $k' \sim k$, что демонстрирует локальность спектрального переноса энергии. При спектральных законах (37.12) и (37.15) получилось бы $\sigma(k) \sim \left(\ln \frac{k}{k_0}\right)^{1/2}$, и величины $\Pi_\omega(k)$ и $\Pi_\vartheta(k)$ оказались бы возрастающими с k, а для обеспечения требований $\Pi_\omega(k) = \text{const}$ и $\Pi_\vartheta(k) = \text{const}$ следует положить $\sigma(k) \sim \varepsilon_\omega^{1/3}\left(\ln \frac{k}{k_0}\right)^{1/3}$, и вместо формул (37.12) и (37.15) получается

$$E(k) = C_{1\infty}\varepsilon_\omega^{2/3}k^{-3}\left(\ln\frac{k}{k_0}\right)^{-1/3}; \quad E_\vartheta(k) = C_{\vartheta\infty}\varepsilon_\vartheta\varepsilon_\omega^{-1/3}k^{-1}\left(\ln\frac{k}{k_0}\right)^{-1/3}. \qquad (37.17)$$

При этом основной вклад в интеграл в формуле для $\sigma(k)$ вносят волновые числа k' из интервала $k \gg k' \gg k_0$, так что спектральные переносы энстрофии и пассивной примеси оказываются нелокальными процессами. Первая из формул (37.17) получена Р. Крейчнаном, вторая — А. П. Мирабелем и А. С. Мониным (1983), причем спектры (37.17) были рассчитаны при помощи уравнений гидродинамики с выражением третьих моментов поля скорости через вторые в марковском приближении (и получилось $C_{\vartheta\infty} = C_{1\infty} = (4)^{2/3}$). При этом удалось найти также модификацию формулы (37.17) для $E_\vartheta(k)$ в области малых масштабов (больших k), в которой уже сказывается влияние молекулярной диффузии примеси, и гидродинамическое уравнение для $E_\vartheta(k)$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial k}[kE_\vartheta(k)\sigma(k)] + 2\chi k^2 E_\vartheta(k) = 0. \qquad (37.18)$$

При больших k множитель $\sigma(k)$ здесь можно вынести из-под знака производной по k, и тогда решение этого уравнения при помощи асимптотической формулы

$$\int_{k_0}^{k} k\left(\ln\frac{k}{k_0}\right)^{-1/3} dk \sim \frac{k^2}{2}\left(\ln\frac{k}{k_0}\right)^{-1/3} (k \to \infty)$$

приводится к виду

$$E_\vartheta(k) = C_\vartheta\varepsilon_\vartheta\varepsilon_\omega^{-1/3}k^{-1}\exp\left[-\chi k^2\sigma^{-1}(k)\right], \qquad (37.19)$$

где постоянная C_ϑ определяется из условия нормировки $2\chi\int_0^\infty k^2 E_\vartheta(k)\,dk=\varepsilon_\vartheta$. Заметим, что если бы $\sigma(k)$ определялось без локального логарифмического множителя, а как константа $\sigma_0\sim\varepsilon_\omega^{1/3}$ (среднее значение скорости деформации жидкой частицы), то формула (37.19) превратилась бы в формулу Дж. Бэтчелора (1959) для спектра примеси в поле трехмерной турбулентности при большом числе Прандтля ν/χ. Таким образом, и здесь двумерность проявляется в виде нелокальной логарифмической поправки. Это же касается коэффициента турбулентной диффузии $K_\vartheta(k)$, создаваемой мелкомасштабными компонентами двумерной турбулентности (с волновыми числами больше значения k из инерционно-конвективного интервала), который при гидродинамическом расчете получается равным

$$K(k)\sim\int_k^\infty E(k)\,\sigma^{-1}(k)\,dk=A\varepsilon_\omega^{1/3}k^{-2}\left(\ln\frac{k}{k_0}\right)^{-2/3}\left[1+O\left(\ln\frac{k}{k_0}\right)^{-1}\right], \tag{37.20}$$

где A — вычисляемая числовая постоянная (А. П. Мирабель, А. С. Монин, 1983). Для диффузии от симметричного источника при этом получается уравнение

$$\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rK_0(r)\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial r};\quad K_0(r)\approx A\varepsilon_\omega^{1/3}r^2\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)^{-2/3}, \tag{37.21}$$

в котором благодаря нелокальному логарифмическому множителю оказывается $r^{-2}K_0(r)\to 0$ $(r\to\infty)$, что обеспечивает существование решения $\bar\vartheta(r,\,t)$, соответствующего мгновенному точечному источнику примеси (тогда как в отсутствие логарифмической поправки было бы $K_0(r)=A\varepsilon_\omega^{1/3}r^2$, и такого решения не существовало бы, так как примесь слишком быстро уносилась бы на бесконечность; вместо него здесь существует решение $\bar\vartheta\sim$ $\sim r^{-1}\tau^{-1/2}\exp[-\tau-(\ln r)^2/4\tau]$, $\tau=A\varepsilon_\omega^{1/3}t$, с начальным распределением примеси на единичном кольце). Наконец, учитывая, что средний квадрат расстояния между двумя диффундирующими частицами l^2 определяется из уравнения $^1/_2\partial l^2/\partial t=K_0(l)$, при помощи (37.21) получаем

$$l^2(t)=l_0^2\exp\left[-\left(\frac{t_0-t}{T}\right)^{3/5}\right];\quad T\sim\varepsilon_\omega^{-1/3}, \tag{37.22}$$

где t_0 — момент достижения величиной l внешнего масштаба турбулентности l_0 (крупномасштабной границы инерционного интервала).

При $L \ll L_\beta$ все изложенные выше закономерности двумерной турбулентности остаются в силе независимо от значения L_R, с той лишь оговоркой, что если $L_R < L_\beta$ (как в океане), то при $L_R < L < L_\beta$ энстрофия $^1/_2\overline{(\Delta\psi)^2}$ должна быть всюду заменена потенциальной энстрофией $^1/_2\overline{(\mathscr{L}\psi)^2}$.

Вытекающий из (37.11) и (37.9) рост со временем масштаба двумерной турбулентности k_1^{-1} по закону $\partial k_1^{-1}/\partial t = aU$ (и соответствующее убывание типичной частоты $\omega \sim Uk$) за время порядка L_β/aU приводит к достижению масштаба L_β, при котором перемещающиеся вместе с жидкостью вихри преобразуются в бегущие по жидкости волны Россби—Блиновой (и вследствие дисперсионного соотношения этих волн $\omega = -\beta k_x k^{-2}$, где k_x — зональное волновое число, возникает тенденция к смещению неоднородностей поля на запад). После этого средний масштаб неоднородностей (теперь уже волн) будет продолжать расти, а их типичная частота ω — убывать, но гораздо медленнее, так как волновые взаимодействия требуют и наложения троек волн в пространстве, и резонансного соотношения между их волновыми числами и частотами. Убывание частот в результате таких взаимодействий получается вследствие того, что в резонансной триаде волна с наибольшей частотой оказывается неустойчивой по отношению к передаче энергии двум другим волнам.

Кроме того, замедление роста со временем среднего масштаба волн создается тенденцией волновых взаимодействий передавать энергию преимущественно не другим длинам волн, а другим направлениям в пространстве, а именно — зональному направлению: убывание частот $|\omega| = |\beta k_x k^{-2}|$ осуществляется путем анизотропизации волн — преимущественного роста их зональных масштабов по сравнению с меридиональными (убывания $|k_x/k_y|$), т. е. развития зональных течений (в пределе — стационарных зональных течений в узких широтных полосах с меняющимися от полосы к полосе направлениями на запад или на восток).

При достижении масштабом турбулентности (или волн) значения L_R должна возникать тенденция к «баротропизации» горизонтальных неоднородностей, т. е. к уменьшению различий между движениями на разных уровнях. Эффекты роста масштабов неоднородностей, замедления этого роста, появления тенденции к смещению на запад и анизотропизации при достижении масштаба L_β, а также баротропизации при достижении масштаба L_R были предсказаны П. Райнсом (1975) и обнаружены им в численных экспериментах; на баротропной модели он получил $a \approx 3 \cdot 10^{-2}$ для турбулентности и $a \approx 6 \cdot 10^{-3}$ для волн, а на двуслойной модели продемонстрировал тотальную и очень быструю баротропизацию.

В земной атмосфере $L_\beta < L_R$; вихри зарождаются преимущественно вследствие бароклинной неустойчивости глобальных течений

(и в небольшой мере за счет топографических эффектов) и эволюционируют по схеме бароклинные вихри → бароклинные волны → баротропные волны. В Мировом океане $L_R < L_\beta$; вихри зарождаются вследствие бароклинной неустойчивости крупномасштабных течений, в немалой мере за счет топографических эффектов (относительная высота неровностей дна h/H сравнима с величиной β-эффекта L/a, причем критическое значение $h = HL/a$ в десятки раз меньше, чем в атмосфере), а также при отражении волн от берегов (причем у западных берегов энстрофия увеличивается, а у восточных уменьшается, и поскольку мелкомасштабные вихри движутся медленнее, в результате и энстрофия, и энергия у западных берегов накапливаются, а у восточных рассеиваются) и, наконец, вследствие атмосферных воздействий. Эволюция должна происходить преимущественно по схеме бароклинные вихри → баротропные вихри → баротропные волны; точнее, при больших L/L_R получается $\delta \sim (L_\beta/L_R)^2 > 1$, так что линейные баротропные волны вряд ли достигаются.

Упомянутый выше предел стационарных зональных течений, по-видимому, достигается в атмосферах Юпитера и других больших планет, в которых типичное время превращений энергии $E(\partial E/\partial t)^{-1}$ оказывается много больше (порядка нескольких лет), чем $\omega^{-1} = (Uk)^{-1}$. В численных экспериментах Дж. Уильямса (1978, 1979) по геострофической турбулентности в атмосфере Юпитера в упомянутом пределе получены зональные струи со скоростями порядка 50 м/с, чередующиеся с полосами зонально вытянутых вихрей с масштабами порядка $(1\ldots 2)\cdot 10^4$ км. Одиночные же вихри в атмосфере Юпитера (Большое Красное Пятно и т. п.) могут объясняться бароклинной неустойчивостью или теорией солитонов Россби (см. гл. 7).

ГЛАВА 7

Волны Россби—Блиновой

§ 38. Линейная теория

Изменения по меридиану параметра Кориолиса $f=2\omega\cos\theta$ создают при движениях с восточной составляющей скорости возвращающую силу. Так, в северном полушарии при движении на северо-восток f увеличивается, и возросшая сила Кориолиса поворачивает течение направо, пока оно не станет юго-восточным; тогда f уменьшается, и ослабление силы Кориолиса приводит к повороту течения налево, и т. д. Создаваемые такой возвращающей силой волны были обнаружены еще М. Маргулесом (1893) и С. Хафом (1898), но представляется правильным называть их волнами Россби—Блиновой по работам К. Россби (1939), где была получена «формула ложбины» для скорости зонального перемещения ложбин монохроматических баротропных волн этого вида, и Е. Н. Блиновой (1943), где построено общее решение линейного уравнения для баротропных волн на сфере при произвольных начальных данных.

В § 10 линейные волны Россби—Блиновой были представлены, как семейства решений приливного уравнения Лапласа на сфере, частоты которых σ получаются на пересечениях «горизонтальных» собственных кривых $\sigma=\sigma(\varepsilon)$, $\varepsilon=4r_0^2\omega^2/gh_0$ второго типа (с конечными значениями $\sigma\sim 2\omega m/n(n+1)$ при малых $|\varepsilon|$ и асимптотами $\sigma\to 0$ при $\varepsilon\to\infty$ и $\sigma\to 2\omega$ при $\varepsilon\to-\infty$) с нулевой «вертикальной» кривой (с асимптотами $\sigma\sim\pm(g/h_0)^{1/2}$ при $\varepsilon\to\infty$; такие частоты соответствуют баротропным волнам) и с «положительными» кривыми (с асимптотами $\sigma\sim\pm N_{\max}$ при $\varepsilon\to\infty$, что соответствует бароклинным волнам), см. рис. 10.3.

Свойства линейных волн Россби—Блиновой наиболее просто выясняются в приближении «β-плоскости», т. е. в локальных декартовых координатах (x, y, z), где начало координат находится в избранной точке на поверхности Земли, ось x направлена на восток, ось y — на север (и полагается $f=f_0+\beta y$), а ось z — вверх. В этих координатах *свободные* волны Россби—Блиновой

с малыми амплитудами описываются линеаризированным уравнением (37.5):

$$\frac{\partial \mathscr{L}\psi}{\partial t}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0;\qquad \mathscr{L}=\Delta+\frac{\partial}{\partial z}\frac{H^2}{L_R^2}\frac{\partial}{\partial z}; \tag{38.1}$$

$$z=0:\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{N^2}+\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{1}{g}\psi\right)=0;$$

$$z=-h:\ \frac{f_0}{N^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial z}=\frac{\partial(\psi,\ h)}{\partial(x,\ y)}. \tag{38.2}$$

Краевые условия (38.2) на свободной поверхности и на дне океана суть обычные условия (26.2), упрощенные так же, как при выводе (37.1)—(37.5), и линеаризированные (при этом вертикальная скорость имеет вид $w=-fN^{-2}\partial^2\psi/\partial t\,\partial z$, и уровень свободной поверхности $z=\zeta(\mathbf{x}_h,\ t)$ определяется из условия $\partial\zeta/\partial t=w$ при $z=0$). Рассмотрим в этом параграфе случай плоского дна $h=$ $=\text{const}$, в котором существуют решения с разделяющимися переменными $\psi=\psi_m(\mathbf{x}_h,\ t)\Psi_m(z)$. При этом множители ψ_m должны удовлетворять «горизонтальным» уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta-\frac{f_0^2}{gh_m}\right)\psi_m+\beta\frac{\partial\psi_m}{\partial x}=0, \tag{38.3}$$

где h_m и $\Psi_m(z)$ — собственные значения и собственные функции «вертикального» уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{N^2}\frac{\partial\Psi_m}{\partial z}+\frac{1}{gh_m}\Psi_m=0;\ \left(\frac{1}{N^2}\frac{\partial\Psi_m}{\partial z}+\frac{1}{g}\Psi_m\right)_{z=0}=$$

$$=\left(\frac{\partial\Psi_m}{\partial z}\right)_{z=-h}=0, \tag{38.4}$$

получающегося из (10.9) в квазистатическом приближении. Баротропная мода $\Psi_0(z)$, получающаяся при $h_0=h$, слабо зависит от z и на интервале $0>z>-h$ не меняет знака. Бароклинные моды $\Psi_m(z)$, $m=1,\ 2,\ \ldots$; $h>h_1>h_2\ldots$, имеют на указанном интервале по m нулей (в частности, при $N(z)=\text{const}$ получается $h_m=$ $=g^{-1}(Nh/m\pi)^2$ — эти так называемые *эквивалентные глубины* суть толщины таких однородных слоев жидкости, баротропные волны в которых совпадают с соответствующими бароклинными волнами в исходном стратифицированном слое). Для соответствующих волновых решений $\psi_m\sim\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_h-\sigma_m t)]$ из (38.3) получаются частоты

$$\sigma_m=-\beta k_x\left(k^2+f_0^2/gh_m\right)^{-1}. \tag{38.5}$$

Знак минус здесь означает, что линейные волны Россби—Блиновой движутся на запад (для баротропных волн на глубокой воде, наложенных на западный перенос со скоростью U, получается фа-

зовая скорость $c = U - \beta k^{-2}$ — это и есть «формула ложбины» К. Россби). Дисперсионные кривые $\sigma = \sigma(k_x)$ при различных k_y в случаях $m = 0, 1, 2, 3$ показаны на рис. 38.1. Из них видно, что при $k_x = k_{\max} = f(gh_m)^{-1/2}$ и $k_y = 0$ частоты σ_m достигают максимумов $\sigma_m = \beta (gh_m)^{1/2} f_0^{-1}$, так что $k_{\max}/k_z \sim f_0/N \ll 1$, т. е. при $k \sim k_{\max}$ волны Россби—Блиновой являются *длинными*.

Вспоминая понятия лучевой теории волн § 19, рассмотрим волновой пакет, состоящий из плоских волн с волновыми векторами $\mathbf{k}$

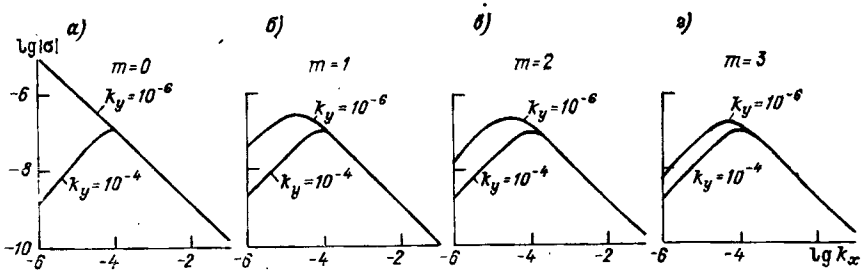


Рис. 38.1. Дисперсионные кривые для волн Россби—Блиновой.

σ измеряется в $с^{-1}$, k_x и k_y — в $м^{-1}$, $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ $с^{-1}$. Пример построен для широты $\varphi = \pi/9$ при $h = 4$ км и $N = 2 \cdot 10^{-3}$ $с^{-1}$.

из области $\mathbf{k}_0 \pm \delta\mathbf{k}$ с очень малым $\delta k/k_0$. Тогда $\sigma_m(\mathbf{k}) \approx \approx \sigma_m(\mathbf{k}_0) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\nabla\sigma_m(\mathbf{k}_0)$, и получаемое при помощи преобразования Фурье решение задачи Коши для уравнения (38.3) в неограниченном пространстве будет иметь вид

$$\psi_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{\psi}_m(\mathbf{k}) \exp\{-i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma_m(\mathbf{k}) t]\}\, d\mathbf{k} \approx$$

$$\approx \psi_m[\mathbf{x} - \mathbf{c}_g(\mathbf{k}_0) t,\ 0] \exp\{-i[\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \sigma_m(\mathbf{k}_0) t]\};$$

$$\mathbf{c}_g(\mathbf{k}) = \frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\beta}{(k^2 + f_0^2/gh_m)^2} (k_x^2 - k_y^2 - f_0^2/gh_m,\ 2k_x k_y). \qquad (38.6)$$

Таким образом, волновой пакет представляет собой плоскую волну, движущуюся по направлению $\mathbf{k}_0$ с фазовой скоростью $\sigma_m(\mathbf{k}_0)/k_0$ и модулированную огибающей $\psi_m(\mathbf{x} - \mathbf{c}_g(\mathbf{k}_0) t,\ 0]$, движущейся без изменения своей формы с групповой скоростью $\mathbf{c}_g(\mathbf{k}_0)$. В отличие от фазовой скорости, зональная компонента c_{gx} групповой скорости (описывающей распространение энергии волнового пакета) может быть направлена как на запад (при $k_x^2 < k_y^2 + f_0^2/gh_m$), так и на восток (при $k_x^2 > k_y^2 + f_0^2/gh_m$).

Рассмотрим отражение плоской волны от стенки $x = 0$. Пусть при $x > 0$ задана падающая волна $\psi_i = \cos(k_i x + k_y y - \sigma t)$, энергия которой распространяется на запад $(k_i^2 < k_y^2 + f_0^2/gh_m)$. Вследствие условия непротекания $(\partial/\partial y)(\psi_i + \psi_r) = 0$ при $x = 0$ величины k_y

и σ при отражении не меняются. Энергия отраженной волны $\psi_r = -\cos(k_r x + k_y y - \sigma t)$ должна распространяться на восток $(k_r^2 > k_y^2 + f_0^2/gh_m)$. Из (38.5) получается

$$k_r = \frac{\beta}{2\sigma} - \left(\frac{\beta^2}{4\sigma^2} - k_y^2 - \frac{f_0\sigma^2}{gh_m}\right)^{1/2}. \qquad (38.7)$$

Волновые векторы и векторы групповых скоростей падающей и отраженной волн ($\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_r$) и ($\mathbf{c}_{gi}$, $\mathbf{c}_{gr}$) изображены на рис. 38.2. Из него видно, что для групповой скорости выполняется известный

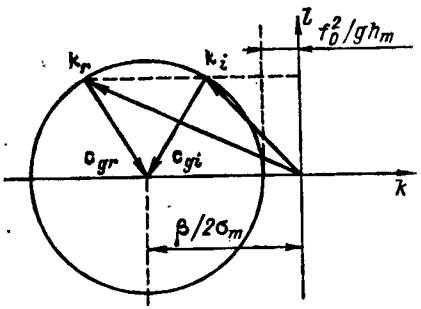


Рис. 38.2. Волновые векторы и групповые скорости падающей на западный берег волны ($\mathbf{k}_i$, $\mathbf{c}_{gi}$) и отраженной волны ($\mathbf{k}_r$, $\mathbf{c}_{gr}$).

закон «угол падения равен углу отражения». Заметим, что $|\mathbf{k}_r| > |\mathbf{k}_i|$, т. е. при отражении от западной стенки пространственные масштабы возмущений уменьшаются (нетрудно убедиться, что при отражении от восточной стенки, наоборот, получается $|\mathbf{k}_r| < |\mathbf{k}_i|$). В реальном океане атмосферные воздействия возбуждают преимущественно почти зональные волновые пакеты ($k_x^2 \ll k_y^2$) с направленными на запад групповыми скоростями, и их отражение от западных берегов, согласно вышеизложенному, создает там интенсивные пограничные течения с малым поперечным масштабом — много меньше, чем $|k_y|^{-1}$ (Дж. Педлоски, 1965; Дж. Лайтхилл, 1969).

При рассмотрении поля волн Россби—Блиновой в масштабах целого океана и тем более всей атмосферы следует отказаться от приближения «β-плоскости» и вернуться к анализу нужных семейств решений приливного уравнения Лапласа на сфере, рассматривавшихся в § 10. Ограничимся сейчас рассмотрением не очень длинных волн, у которых отношение $f_0^2/gh k^2$ мало. Для них краевое условие на поверхности океана (38.2) при $z=0$ можно заменить условием $w \sim \partial^2\psi/\partial t\,\partial z = 0$ (приближение «твердой крышки»), и баротропные волны становятся бездивергентными. Зато мы будем линеаризировать сферический аналог уравнения (37.5) относительно состояния не покоя, а западного переноса со скоростью $\bar{u}_\lambda = \alpha r_0 \sin\theta$, где α — постоянная скорость зонального

вращения атмосферы (так называемый *индекс циркуляции*). Тогда вместо (38.3) получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Delta\psi+\frac{2(\alpha+\omega)}{r_0}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=0, \tag{38.8}$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа на поверхности сферы радиуса r_0. Оно имеет частные решения вида $P_n^m(\mu)\,e^{i\left(m\lambda-\sigma_n^m t\right)}$, где $\mu=\cos\theta$; P_n^m — присоединенные полиномы Лежандра; $m=1, 2,$ $n=m, m+1, \ldots$, а частоты σ_n^m имеют вид

$$\sigma_n^m=\alpha m-\frac{2(\alpha+\omega)\,m}{n(n+1)} \tag{38.9}$$

(Б. Гаурвиц, 1940). В § 10 эти решения (при $\alpha=0$) получались из (10.16), т. е. как асимптотики при малых ε для тех решений, у которых при этом частоты остаются конечными. Заметим, что включение в эту формулу индекса α играет принципиальную роль на Венере. При ее чрезвычайно медленном собственном вращении (обратном и с периодом в 243 дня) введенный А. М. Обуховым горизонтальный масштаб синоптических процессов $L_0=c_0/2\omega$ оказывается много больше размеров планеты. Но благодаря наблюдаемой на ней четырехсуточной циркуляции $\alpha+\omega\approx 2\pi(4\text{ сут})^{-1}$, так что синоптические процессы с масштабом $L_0\sim c_0/2(\alpha+\omega)$ остаются возможными (А. С. Монин, 1981), и они фактически наблюдаются.

Е. Н. Блинова (1943), просуммировав указанные частные решения, получила из линеаризированных уравнений движения (9.2) следующее решение задачи с начальными даиными для незональной части поля давления на сфере:

$$(z')_{t=0}=\sum_{n=m}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_n^m\cos m\lambda+B_n^m\sin m\lambda\right)P_n^m(\mu);$$

$$z'=\sum_{n=m}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[C_n^m\cos\left(m\lambda-\sigma_n^m t\right)+D_n^m\sin\left(m\lambda-\sigma_n^m t\right)\right]Z_n^m(\mu); \tag{38.10}$$

$$Z_n^m=\frac{n(n-m+1)}{(n+1)(2n+1)}P_{n+1}^m+\frac{(n+1)(n+m)}{n(2n+1)}P_{n-1}^m,$$

причем коэффициенты C_n^m, D_n^m прогностической формулы выражаются через коэффициенты A_n^m, B_n^m разложения начального поля давления по сферическим гармоникам из уравнений

$$\left(C_{n-1}^m,\ D_{n-1}^m\right)\frac{(n-1)(n-m)}{n(2n-1)}+\left(C_{n+1}^m,\ D_{n+1}^m\right)\frac{(n+2)(n+m-1)}{(n+1)(2n+3)}=$$
$$=\left(A_n^m,\ B_n^m\right). \tag{38.11}$$

Таким образом, формула (38.10) дала линейный адиабатический прогноз баротропной моды поля давления на сфере, предвосхитив существенную часть созданной в послевоенные годы гидродинамической теории прогноза погоды.

Как было отмечено выше, приближение, в котором получаются решения с частотами (38.9), является асимптотикой при малых $\varepsilon=(2r_0\omega/c_0)^2$, где $c_0=(gh_0)^{1/2}$. Но в земной атмосфере $r_0\omega/c_0\approx 1{,}4$ и $\varepsilon\approx 8$, при малых m, n формула (38.9) оказывается грубоватой (а с ростом m, n ее точность быстро растет). В то же время, например, на Юпитере $r_0\omega/c_0\approx 17$, и нужно использовать асимптотику при больших ε, которое определяется из (10.17′) по аналогии с квазиклассическим приближением в квантовой механике. В случае $\alpha=0$, как указывалось в § 10, эта асимптотика определяется соотношением $E\varepsilon^{1/2}=2n+1$, т. е.

$$\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\sigma}{2\omega}\right)^2+m\varepsilon^{-1/2}\left(\frac{2\omega}{\sigma}\right)=2n+1, \tag{38.12}$$

аналогичным формуле квантования Бора (Г. С. Голицын, Л. А. Дикий, 1966—67; в этих работах вычислены также соответствующие собственные функции).

§ 39. Топографические волны

Рассмотрим теперь океан с неровным дном, рельеф которого описывается уравнением $z=-h+h'(x_h)$, где h — средняя глубина, а h' — возвышения дна над этим средним уровнем. Для линейных волн, считая h' относительно малым, краевое условие (38.2) следует сносить на средний уровень и записывать в виде

$$z=-h:\ \frac{f_0}{N^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial z}=-\frac{\partial(\psi,\ h')}{\partial(x,\ y)}. \tag{39.1}$$

Рассмотрим сначала, следуя П. Райнсу (1970), случай *наклонного* дна с постоянными значениями $h_x=\partial h'/\partial x$ и $h_y=\partial h'/\partial y$ при $N=\mathrm{const}$ и в приближении «твердой крышки» на поверхности океана. В этом случае для амплитуд $\Psi(z)$ линейных волн получаются следующие уравнения и краевые условия:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\mu^2\Psi=0; \tag{39.2}$$

$$z=0:\ \frac{\partial\Psi}{\partial z}=0;\quad z=-h:\ \frac{\partial\Psi}{\partial z}=L_R^2\frac{k_x\beta}{h\sigma}\gamma\Psi;$$

$$\gamma=\frac{f_0}{h\beta}\left(h_y-\frac{k_y}{k_x}h_x\right);\quad \mu=\frac{N}{f_0}\left(k^2+\frac{k_x\beta}{\sigma}\right)^{1/2}.$$

При $k^2+k_x\beta/\sigma>0$ оказывается $\Psi=\mathrm{ch}\,\mu z$, а для μ из краевого условия на дне получается уравнение

$$\mathrm{th}\,\mu h=-\gamma\mu h\left[1-\left(\frac{kL_R}{\mu h}\right)^2\right],$$

имеющее всегда только один корень μ_0. Ему соответствует нулевая топографическая мода с частотой

$$\sigma_0 = -\beta k_x \left(k^2 - \mu_0^2 h^2/L_R^2\right)^{-1}. \qquad (39.3)$$

При $k^2 + k_x\beta/\sigma < 0$ оказывается $\mu = i\lambda$ с вещественным λ, так что $\Psi = \cos \lambda z$, а для λ из краевого условия на дне получается уравнение

$$\operatorname{tg} \lambda h = -\gamma \lambda h \left[1 + \left(\frac{kL_R}{\lambda h}\right)^2\right]$$

со счетным множеством корней λ_1, λ_2, ... Им соответствуют топографические волны с частотами

$$\sigma_m = -\beta k_x \left(k^2 + \lambda_m^2 h^2/L_R^2\right)^{-1}; \quad m = 1, 2, \ldots . \qquad (39.4)$$

При $\gamma > 0$ моды $\Psi_m(z)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, имеют на отрезке $[-h, 0]$ по m нулей. При $\gamma \to 0$ и конечных kL_R они превращаются в соответствующие моды для океана с плоским дном. При $\gamma \sim 1$ в случае длинных волн $kL_R \ll 1$ получается

$$\sigma_0 \approx -k^2 [k_x(\beta + f_0 h_y/h) - k_y f_0 h_x/h],$$

т. е. вклад рельефа дна здесь линейно складывается с β-эффектом; в (39.4) можно опустить k^2, так что длинные бароклинные волны оказываются недисперсивными. При $\gamma \sim 1$ в случае коротких волн $kL_R \gg 1$ получается $\mu_0 h \approx kL_R$ и $\sigma_0 \approx -Nk^{-1}(k_x h_y - k_y h_x)$, т. е. нулевая мода бароклинна и не зависит от β-эффекта; далее, здесь $\lambda_m h \approx \pi(m - 1/2)$ и $\sigma_m \approx -\beta k_x k^{-2}$, т. е. эти моды баротропны, и рельеф дна сказывается лишь в замене m на $m - 1/2$.

При $\gamma < 0$ моды $\Psi_0(z)$ и $\Psi_1(z)$ не имеют нулей, а остальные моды $\Psi_m(z)$ имеют по $m - 1$ нулей. При $\gamma \to 0$ и конечных kL_R нулевая мода концентрируется у дна и $\sigma_0 \to 0$, а моды $m = 1, 2, \ldots$ превращаются в моды $m - 1$ для океана с плоским дном. При конечном γ в случае длинных волн моды $m = 2, 3, \ldots$ оказываются недисперсивными, моды $\Psi_0(z)$ при $\gamma < -1$ и $\Psi_1(z)$ при $\gamma > -1$ баротропны, а $\Psi_0(z)$ при $\gamma \geqslant -1$ и $\Psi_1(z)$ при $\gamma \leqslant -1$, наоборот, бароклинны. В случае коротких волн результаты такие же, как и при $\gamma > 0$.

Для всех мод наклон дна может как усиливать, так и ослаблять β-эффект, но при $m = 1, 2, \ldots$ всегда $\sigma_m/k_x < 0$; что же касается нулевой моды, то при $\gamma < 0$ она движется на восток, а при $\gamma > 0$ — на запад.

Далее в этом параграфе ограничимся рассмотрением только баротропных волн, для которых, по их определению, неоднородности поля плотности не имеют существенного значения. Тогда в силу квазигидростатичности $\partial p/\partial z \approx -g\rho \approx \text{const}$ и, значит, геострофическая горизонтальная скорость почти не зависит от z.

Вследствие бездивергентности это же справедливо для $\partial w/\partial z$. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{w(z=\zeta) - w(z=-h+h')}{H} = \frac{1}{H}\frac{d_h H}{dt};$$

$$H = \zeta + h - h', \tag{39.5}$$

где H — полная толщина слоя жидкости. С другой стороны, из первого уравнения (37.1) получается $w \approx -(\partial\eta_0/\partial z)^{-1} d_h\eta'/dt$, и, используя этот результат и (39.5), уравнение (37.3) в случае баротропных движений удается привести к виду

$$\frac{d_h}{dt}\frac{\Delta\psi + f}{H} = 0. \tag{39.6}$$

Линеаризируя это уравнение и ограничиваясь приближением «твердой крышки» ($\zeta = 0$), получаем

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{f_0}{h}\frac{\partial(\psi, h')}{\partial(x, y)} = 0. \tag{39.7}$$

Пусть L_h — горизонтальный масштаб неровностей дна, а L — типичная длина волны. При $\varepsilon = L/L_h \ll 1$ дно можно назвать *наклонным*, причем при вычислении горизонтальных градиентов $\varepsilon h'$ можно считать функцией от «медленных» координат $\xi = \varepsilon x$, $\eta = \varepsilon y$ (выше был рассмотрен частный случай, когда эта функция линейна, но зато учитывалась бароклинность). Введя также «медленное» время $\tau = \varepsilon t$, можно искать волновое решение уравнения (39.7) в виде $\psi = A\exp(i\varepsilon^{-1}\Phi)$ (где амплитуда A и «быстрая» фаза Φ суть функции от «медленных» переменных), так что $\mathbf{k} = (\partial\Phi/\partial\xi, \partial\Phi/\partial\eta)$ и $\sigma = -\partial\Phi/\partial\tau$ будут играть роль локальных волнового вектора и частоты. Подставляя это решение в (39.7) и приравнивая нулю коэффициенты при ε^0 и ε^1, получим уравнения:

$$|\nabla\Phi|^2\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \frac{\partial(\Phi, K)}{\partial(\xi, h)}; \quad K = \beta\eta + \varepsilon\frac{f_0}{h}h'; \tag{39.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(A|\nabla\Phi|^2) = \frac{\partial(A, K)}{\partial(\xi, \eta)} - (A\nabla\Phi + 2\nabla A\cdot\nabla\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}. \tag{39.9}$$

Первое из этих уравнений, которое локально можно переписать в виде $\sigma k^2 = k_y\partial K/\partial\xi - k_x\partial K/\partial\eta$, является дисперсионным соотношением. Из него видно, что при $h' = 0$ фазовая скорость волн направлена на запад, а также что рассматриваемые волны могут существовать и при $\beta = 0$, создаваясь фактически таким же механизмом, что и волны Россби—Блиновой.

Если $\varepsilon_1 = L_h/L \ll 1$, то дно можно назвать *шероховатым*. Ограничимся рассмотрением цилиндрического рельефа дна (П. Райнс, Ф. Брезертон, 1973) и для простоты положим $h' = h'(y)$. Введем «быструю» ординату $\eta = \varepsilon_1^{-1}y$ и обозначим $(f_0/h)\partial h'/\partial\eta = b(\eta)$.

В этих обозначениях, отыскивая для (39.7) волновое решение $\psi = \Psi(\eta)\exp[i(k_x x - \sigma t)]$, получаем

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} - \varepsilon_1 \frac{k_x}{\sigma} b(\eta)\Psi - \varepsilon_1^2\left(k_x^2 + \frac{\beta k_x}{\sigma}\right)\Psi = 0. \qquad (39.10)$$

Интересуясь крупномасштабными движениями над мелкомасштабным рельефом дна, будем искать функцию Ψ в виде ряда $\Psi_0(y) + \varepsilon_1\Psi_1(\eta, y) + \ldots$ с требованием ограниченности всех Ψ_m при $|y|, |\eta| \to \infty$. Для Ψ_1 из (39.10) получается уравнение $\partial^2\Psi_1/\partial\eta^2 = (k_x/\sigma) b(\eta)\Psi_0(y)$, откуда находим $\Psi_1 = (k_x/\sigma)B(\eta) \times \times\Psi_0(y) + R_1(y)$, где $B(\eta) = (f_0/h)\int h'\, d\eta$ (вследствие ограниченности Ψ_1 при $|\eta| \to \infty$ добавление слагаемого $\eta C(y)$ здесь не нужно). Для Ψ_2 из (39.10) получается уравнение

$$\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\eta\,\partial y}\frac{k_x}{\sigma} b(\eta)\Psi_1 + \frac{\partial^2\Psi_0}{\partial y^2} - \left(k_x^2 + \frac{\beta k_x}{\sigma}\right)\Psi_0 = 0. \qquad (39.11)$$

Применив к нему операцию осреднения $\lim\limits_{D\to\infty} (1/D)\int\limits_{\eta_0}^{\eta_0+D} d\eta$,

получим $$\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial y^2} + \left(-k_x^2 - \frac{\beta k_x}{\sigma} + \frac{f_0^2}{h^2}\frac{k_x^2}{\sigma^2}\overline{h'^2}\right)\Psi_0 = 0 \qquad (39.12)$$

(согласно В. М. Волосову, 1976, аналогично, путем определения Ψ_2 из (39.11) и осреднения уравнения для Ψ_3, определяется слагаемое R_1 в выражении для Ψ_1, и т. д., а в нелинейном случае вместо $\overline{h'^2}$ динамика крупномасштабных движений определяется корреляционной функцией рельефа дна $\overline{h'(\eta)h'(\eta+\zeta)}$). Функция Ψ_0 получается ограниченной и равной $\exp(ik_y y)$, если выражение в скобках в (39.12) положительно; значение k_y при этом соответствует дисперсионному соотношению

$$\sigma^2 + \sigma\beta k_x k^{-2} - f_0^2 k_x^2 k^{-2}\overline{h'^2}h^{-2} = 0. \qquad (39.13)$$

Изученные здесь волны при $\beta = 0$ не исчезают, так что шероховатость дна способна порождать крупномасштабные волны. Эта способность сравнима с β-эффектом, если $h'/h \sim L/r_0$. Поправка $\varepsilon_1\Psi_1$ мала, но она является «быстрой» функцией от y, т. е. $\varepsilon_1\partial\Psi_1/\partial\eta$ сравнимо с $\partial\Psi_0/\partial\eta$. Иначе говоря, скорости (и, значит, энергии) крупномасштабных и мелкомасштабных движений оказываются сравнимыми. Это служит предостережением против сглаживания рельефа дна при расчетах крупномасштабных течений.

При *волнистом* дне $L_h \sim L$ аналитические расчеты удаются лишь в простейших частных случаях. Изолированные особенности дна могут создавать как частичное отражение волн, так и появление новых их типов — *захваченных мод*. Пусть, как и выше, рельеф цилиндрический и особенность занимает полосу $0 \leqslant \eta \leqslant 1$

и имеет в ней максимальный перепад глубин h_0, а вне ее глубины $h_1 = h$ и $h_2 < h$ постоянны и, значит, $b(\eta) = 0$. При падающей волне с амплитудой $\Psi = A\exp(ik_y y)$ и частотой $\sigma = -\beta k_x k^{-2}$ амплитуда $\Psi(y)$ всего волнового поля будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} + \left[\varepsilon_1^2 k_y^2 - \varepsilon_1 \frac{k_x}{\sigma} b(\eta)\right]\Psi = 0. \qquad (39.14)$$

Его решение будем искать при $\eta < 0$ в виде $\Psi_1^{(0)} + \varepsilon_1\Psi_1^{(1)} + \ldots = A\exp(ik_y y) + (B_0 + \varepsilon_1 B_1 + \ldots)\exp(-ik_y y)$, при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ в виде $\Psi_2^{(0)}(\eta) + \varepsilon_1\Psi_2^{(1)}(\eta) + \ldots$, а при $\eta > 1$ в виде $\Psi_3^0 + \varepsilon_1\Psi_3^1 + \ldots = (C_0 + \varepsilon_1 C_1 + \ldots)\exp(ik_y y)$, требуя на границах непрерывности Ψ и $\partial\Psi/\partial\eta$. Первое приближение без труда получается в виде

$$C_0 = A\left[1 + (ik_x/2k_y\sigma)\int_0^1 b(\eta)\,d\eta\right]^{-1}; \quad B_0 = C_0 - A;$$

$$T = |C_0|^2 |A|^{-2} = \left[1 + \frac{1}{4}\frac{k_x^2}{k_y^2}\frac{f_0^2}{\sigma^2}\left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right)^2\right]^{-1}, \qquad (39.15)$$

так что *коэффициент пропускания* T в первом приближении не зависит от ширины L_h и структуры особенности $b(\eta)$, а зависит лишь от относительного перепада глубин $1 - h_2/h_1$. Сильное отражение $T \ll 1$ возможно даже при малых перепадах. Если же $h_2 = h_1$, т. е. особенностью является хребет или ложбина на ровном дне, то $T = [1 + O(\varepsilon_1^2)]^{-1}$ (П. Райнс, 1969).

Для описания захваченных мод используем уравнение (39.10), обозначив в нем $k_x^2 + \beta k_x/\sigma = k_y^2$, и будем искать его решение, экспоненциально затухающее при удалении от особенности, т. е. $\Psi_{1,3} = \Psi_{1,3}^{(0)} + \varepsilon_1\Psi_{1,3}^{(1)} + \ldots = (A_{1,3}^{(0)} + \varepsilon_1 A_{1,3}^{(1)} + \ldots)\exp(-k_y|y|)$. Здесь получается

$$A_{1,3}^{(0)} = -A_1^{(0)}(k_x/2k_y\sigma)\int_0^1 b(\eta)\,d\eta,$$

$$\sigma = -\beta/2k_x + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(h_2 - h_1)\left[\beta^2/k_x^2 + f_0^2(1 - h^2/h_1)^2\right]^{1/2}. \qquad (39.16)$$

Отсюда видно, что захваченные моды существуют и при $\beta = 0$, и тогда $\sigma = f_0(h_2 - h_1)/2h_1$ не зависит от k_x, т. е. чисто топографические захваченные волны в первом приближении недисперсивны, но β-эффект вносит в них дисперсию.

§ 40. Установившиеся волны

Воспользуемся тем, что, аналогично (28.1), всякое установившееся (т. е. распространяющееся без изменения своей формы с постоянной скоростью, скажем с направленной на восток ско-

ростью c) поле $A=A(x-ct,\ y)$, являющееся лагранжевым инвариантом горизонтального соленоидального движения, является функцией от $\psi+cy$ (так как для него уравнение $d_hA/dt=0$ принимает вид $\partial(A,\ \psi+cy)/\partial(x,\ y)=0$). Поэтому все установившиеся решения уравнения (37.5), в котором $A=\mathscr{L}\psi+\beta y$, удовлетворяют условию

$$\mathscr{L}\psi+\beta y=F(\psi+cy), \tag{40.1}$$

где F — произвольная функция. Краевое условие на свободной поверхности, снесенное на ее равновесный уровень $z=0$, сводится к тому, что там $\partial\psi/\partial z+N^2\psi/g$ есть произвольная функция $F_0(\psi+cy)$; в приближении «твердой крышки» это относится только к $\partial\psi/\partial z$. Краевое условие на цилиндрическом дне $z=-h+h'(y)$, снесенное на его средний уровень $z=-h$, сводится к тому, что там $\partial\psi/\partial z+N^2h'/f_0$ есть произвольная функция $F_h(\psi+cy)$; при плоском дне это опять-таки относится лишь к $\partial\psi/\partial z$. Для простоты ограничимся сейчас только приближением «твердой крышки» и волнами над плоским дном. Простейшим будет выбор линейной функции $F=-k_0^2$ и нулевых F_0 и F_h. Чисто волновое решение (без наложенного на него зонального течения) получается при $k_0^2=-\beta/c$, т. е. из уравнения

$$(\mathscr{L}-\beta/c)\psi=0. \tag{40.2}$$

Его решения с разделяющимися переменными $\psi=\psi_m(x-c_mt,\ y)\times\Psi_m(z)$ получаются из (38.3), (38.4) (в приближении «твердой крышки»), так что гармонические волны с фазовыми скоростями $c_m=-\beta(k^2+f_0^2/gh_m)^{-1}$ удовлетворяют не только линейному, но и нелинейному уравнению.

Из нелинейных установившихся волн рассмотрим сначала слабонелинейные и слабодисперсивные волны на зональном течении с меридиональным сдвигом скорости, для простоты баротропные, но зато над цилиндрическим рельефом дна $z=-h+h'(y)$. А именно рассмотрим длинные волны с типичными масштабами L по направлению оси x и εL, $\varepsilon\ll1$, по направлению оси y. Измеряя этими масштабами координаты x и y и масштабом $\beta\varepsilon^3L^3$ функцию тока, указанный выше лагранжев инвариант A представим в безразмерных переменных в виде

$$A=\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\bar{\psi}+\varepsilon^2\psi')+y+b,$$

где $\bar{\psi}(y)$ описывает заданное зональное течение, $\psi'(x,\ y)$-волну, а $b(y)$ — рельеф дна. Величина A будет произвольной функцией от $\bar{\psi}+\varepsilon^2\psi'+cy$, где c — фазовая скорость волны, измеренная масштабом $\beta\varepsilon^2L^2$. Приравнивая нулю якобиан этих двух величин по

(x, y) и полагая $\psi' = \psi_0 + \varepsilon^2\psi_1 + \ldots$ и $c = c_0 + \varepsilon^2 c_1 + \ldots$, в двух младших порядках по ε^2 получим уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2} + G\psi_0\right) = 0; \quad G(y) = -\left(1 + \frac{\partial^3\bar{\psi}}{\partial y^3} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) \times \left(c_0 + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\right)^{-1}; \tag{40.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} + G\psi_1\right) = -\frac{\partial^3\psi_0}{\partial x^3} - c_1\left(c_0 + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial^3\psi_0}{\partial x\,\partial y^2} + \left(c_0 + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial(\psi_0, \partial^2\psi_0/\partial y^2)}{\partial(x, y)}. \tag{40.4}$$

Будем искать ψ_0 в виде $\Phi(x)\Psi(y)$. Тогда Ψ определяется из уравнения $\partial^2\Psi/\partial y^2 + G\Psi = 0$, скажем, с нулевыми краевыми условиями на стенках канала $y = 0$, Y (откуда определяется и собственное значение c_0). Умножив (40.4) на Ψ и проинтегрировав результат по y по ширине канала (где надо — по частям), получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{a_1}{c_1}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{a_2}{c_1}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} = 0; \tag{40.5}$$

$$a_1 = -\left[\int_0^Y \Psi^2 G\left(c_0 + \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial y}\right)^{-1} dy\right]^{-1}\int_0^Y \Psi^3\frac{\partial G}{\partial y}\left(c_0 + \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial y}\right)^{-1} dy;$$

$$a_2 = -\left[\int_0^Y \Psi^2 G\left(c_0 + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\right)^{-1}\right]^{-1}\int_0^Y \Psi^2\, dy.$$

Таким образом, оказалось (Р. Лонг, 1964), что установившееся поле Ψ' в первом приближении удовлетворяет уравнению КдВ типа (22.19), так что среди таких полей могут быть и кноидальные волны (22.14), и солитоны (22.15). Так, например, солитон с амплитудой A имеет вид

$$\Phi(x) = \operatorname{sign}(a_1a_2)\, A\operatorname{ch}^{-2}\left[A^{1/2}\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{1/2} x/2\sqrt{3}\right], \tag{40.6}$$

а нелинейная поправка к скорости солитона при этом оказывается равной $c_1 = -\operatorname{sign}(a_1a_2)\, a_1A/3$. Заметим, что при $G(y) = \text{const}$ влияние нелинейности исчезает, так что здесь для него необходим либо сдвиг зональной скорости, либо нелинейные изменения глубины. Любопытно, что это справедливо и для противоположной асимптотики — коротких волн с масштабами L по осям x и y на зональном течении с масштабом $\varepsilon^{-1}L$, $\varepsilon \ll 1$, по оси y. Следуя В. Д. Ларичеву и Г. М. Резнику (1976), ограничимся баротропными волнами над плоским дном. Измеряя функцию тока зонального течения масштабом $\beta L^3\varepsilon^{-1}$ и волн масштабом $\beta L^3\varepsilon^{-1}\alpha$, а фа-

зовую скорость волны масштабом βL^2 и введя «медленные» координаты $\xi=\varepsilon x$ и $\eta=\varepsilon y$, приведем (40.1) в безразмерных переменных к виду

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial\eta^2}+\alpha\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right)+\eta=F\left(\overline{\psi}+\alpha\psi'+c\eta\right). \qquad (40.7)$$

Считая, что ψ' непрерывно зависит от α в интервале $[0, O(1)]$, в пределе при $\alpha\to 0$ получаем уравнение для определения функции F по заданной функции $\overline{\psi}(\eta)$:

$$F\left(\overline{\psi}+c\eta\right)=\eta+\varepsilon^2\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial\eta^2}. \qquad (40.8)$$

Воспользовавшись малостью ε, будем искать решение уравнений (40.7), (40.8) в виде $F=F_0+\varepsilon^2F_2$ и $\alpha\psi'=\psi_0+\varepsilon\psi_1+\ldots$, где все ψ_n суть функции от «медленных» координат (ξ, η) и 2π — периодические функции от «быстрой» фазы $\theta=\varepsilon^{-1}\varphi(\xi, \eta)$ (так что ψ' ищется в виде квазиплоской волны с медленно меняющимися волновым вектором $\mathbf{k}(\xi, \eta)=(\partial\varphi/\partial\xi, \partial\varphi/\partial\eta)$, частотой $\sigma=c/k$ и амплитудой). Из (40.9) получается

$$F_0\left(\overline{\psi}+c\eta\right)=\eta;\quad F_2\left(\overline{\psi}+c\eta\right)=\partial^2\overline{\psi}/\partial\eta^2. \qquad (40.9)$$

Из (40.7) для ψ_0 и ψ_1 получаются следующие уравнения:

$$k^2\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\theta^2}+\frac{\partial Q}{\partial\psi_0}=0;\quad Q(\psi_0)=\eta\psi_0-\int F_0\left(\overline{\psi}+\psi_0+c\eta\right)d\psi_0; \qquad (40.10)$$

$$k^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2}-\frac{\partial F_0}{\partial\psi_0}\psi_1=-\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\operatorname{div}\mathbf{k}-2\mathbf{k}\nabla\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}. \qquad (40.11)$$

Для существования у уравнения (40.10) периодического решения $\psi_0(\theta)$ необходимо, чтобы функция $Q(\psi_0)$ имела минимум. Очевидно, что он достигается при $\psi_0=0$, так что при этом выполняются условия

$$\partial Q/\partial\psi_0=\eta-F_0\left(\overline{\psi}+c\eta\right)=0 \text{ и } \partial^2Q/\partial\psi_0^2=-\left[\partial F_0\left(\overline{\psi}+\overline{\psi}_0+\right.\right.$$
$$\left.\left.+c\eta\right)/\partial\psi_0\right]_{\psi_0=0}=-\left(c+\partial\overline{\psi}/\partial\eta\right)^{-1}>0$$

(первое из них совпадает с первым уравнением (40.9), а второе получается из него дифференцированием по η). Получившееся неравенство $c+\partial\overline{\psi}/\partial\eta<0$ означает, что волна движется относительно среднего течения на запад, как и в линейной теории. Далее, рассматривая (40.10), как уравнение относительно функции $\theta(\psi_0)$, получаем его решение в квадратурах:

$$\theta-\theta_0=\pm\frac{k}{\sqrt{2}}\int_{\tau_1}^{\psi_0}(E-Q)^{-1/2}\,d\psi_0;\quad 2\pi=k\sqrt{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(E-Q)^{-1/2}\,d\psi_0, \qquad (40.12)$$

где E не зависит от ψ_0 (но может зависеть от ξ, η), а τ_1, τ_2 — минимальный и максимальный корни уравнения $Q(\psi_0)=E$. Второе из этих уравнений есть просто утверждение о 2π-периодичности функции $\psi_0(\theta)$; оно играет роль дисперсионного соотношения для нелинейной волны. Умножив (40.11) на $\partial\psi_0/\partial\theta$ и проинтегрировав по θ от 0 до 2π, получим

$$\operatorname{div}\left\{\left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\right)^2 d\theta\right]\mathbf{k}\right\}=0. \tag{40.13}$$

Уравнения (40.12), (40.13) позволяют определить функции $\varphi(\xi, \eta)$ и $E(\xi, \eta)$ и в первом приближении описывают периодическую нелинейную волну. В качестве конкретного примера В. Д. Ларичев и Г. М. Резник рассчитали волну на зональном течении с постоянным сдвигом s, так что $\bar{\psi}=\frac{1}{2}s\eta^2$. В силу неравенства $c+\partial\bar{\psi}/\partial\eta<0$ решение здесь возможно лишь в области $\eta<-c/s$. Положив $c+s\eta=\zeta$, из первого уравнения (40.9) получим $F_0(\psi_0, \eta)=-cs^{-1}-s^{-1}(\zeta^2+2s\psi_0)^{1/2}$. Перейдя в (40.10) от неизвестной ψ_0 к $\Psi_0=\zeta^{-1}(\zeta^2+2s\psi_0)^{1/2}$, умножив это уравнение на $\partial\Psi_0/\partial\theta$ и проинтегрировав по θ, получим

$$\frac{3}{8}k^2|\zeta|\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\theta}\right)^2=(\gamma-\Psi_0)(\Psi_0-\beta_1)(\Psi_0-\beta_2), \tag{40.14}$$

где γ — произвольная постоянная и

$$\beta_{1,2}=\frac{3}{4}-\frac{\gamma}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4}+\gamma-\gamma^2\right)^{1/2},$$

так что $\gamma>\beta_1>\beta_2$. Это уравнение интегрируется в эллиптических функциях с модулем $\varkappa=(\gamma-\beta_1)^{1/2}(\gamma-\beta_2)^{-1/2}$ и аргументом

$$\chi=\arcsin\left[\varkappa^{-1}(\Psi_0-\beta_1)^{1/2}(\Psi_0-\beta_2)^{-1/2}\right]:$$

уравнения (40.12) здесь приводятся к виду:

$$\frac{\theta-\theta_0}{k\sqrt{6\zeta}}=\beta_2(\gamma-\beta_2)^{-1/2}F(\chi, \varkappa)+(\gamma-\beta_2)^{1/2}E(\chi, \varkappa)-$$
$$-(\gamma-\Psi_0)^{1/2}(\Psi_0-\beta_1)^{1/2}(\Psi_0-\beta_2)^{-1/2};$$
$$c+\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta}=-(\pi^2/6k^2)\left[\gamma(\gamma-\beta_2)^{-1/2}F(\varkappa)+(\gamma-\beta_2)^{1/2}E(\varkappa)\right]^{-2}, \tag{40.15}$$

где F и E — неполные и полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Наконец, входящий в (40.13) интеграл оказывается равным

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}\right)^2 d\theta=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\zeta^{3/2}}{s^2k}\left[(\gamma-\beta_2)^{1/2}\left(\frac{18}{35}+\frac{6}{7}\gamma\beta_1\beta_2\right)E(\varkappa)+\right.$$
$$\left.+6(\gamma-\beta_2)^{-1/2}\left(\frac{3}{35}\beta_2+\frac{1}{35}\gamma\beta_1\beta_2+\frac{1}{7}\gamma\beta_1\beta_2^2\right)F(\varkappa)\right]. \tag{40.16}$$

Расчеты показали, что сильная нелинейность ($\varkappa \to 1$) создает отклонения до 25 % от синусоидальной формы волны $\psi_0(\theta)$, расширяя ее максимумы и сужая минимумы, но отклонение $k^2|c+\partial\bar{\psi}/\partial\eta|$ дисперсионного соотношения от линейного при изменении $\varkappa$ от 0 до 1 возрастает от 1 только до $\pi^2/9 \approx 1{,}1$. Асимптотика слабой нелинейности $\alpha \to 0$ может быть извлечена из (40.14)—(40.16) при малых ψ_0, но проще она получается непосредственно из (40.10) при использовании ряда Тейлора $\partial Q/\partial\psi_0 = b_1\psi_0 + b_2\psi_0^2 + \ldots$ и рядов $\psi_0 = \alpha\psi_{01} + \alpha^2\psi_{02} + \ldots$, где $\psi_{01}, \psi_{02}, \ldots$ — периодические функции от $2\pi\theta/T$, а период $T = 2\pi(b_1^{1/2}k^{-1} + \alpha^2\omega_1 + \ldots)^{-1}$ равен 2π. Положим при этом $\partial\psi_0/\partial\theta = 0$ при $\theta = \theta_0$ и зададим энергию волны $\alpha^2 E = k^2\left[\frac{1}{2}(\partial\psi_0/\partial\theta)^2 + Q\right]$. Тогда при $\theta = \theta_0$ будет $\psi_{0n} = \psi_{0n}^{(0)}(E)$ и $\partial\psi_{0n}/\partial\theta = 0$. Введем обозначения:

$$\bar{c}(\eta) = -\partial\bar{\psi}\,\partial\eta, \quad A = \alpha\,[2E(\bar{c}-c)]^{1/2},$$

$$B = \frac{1}{3}(\bar{c}-c)^{-4}(\partial\bar{c}/\partial\eta)^2 + \frac{1}{4}(\bar{c}-c)^{-3}\,\partial^2\bar{c}/\partial\eta^2.$$

Наконец, для обеспечения ограниченности ψ_{03} потребуем обращения в ноль коэффициента при резонансном слагаемом в уравнении для ψ_{03}, пропорциональном $\cos(2\pi\theta/T)$. В итоге получается

$$\psi_0 = A\cos(\theta-\theta_0) + \frac{A^2}{12}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\eta}(\bar{c}-c)^{-2}\cos 2(\theta-\theta_0) - \frac{A^2}{4}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\eta}(\bar{c}-c)^2 + O(\alpha^3);$$

$$k^2(c-\bar{c}) = -\left[1 + \frac{A^2}{2}B + O(\alpha^4)\right]; \qquad (40.12')$$

$$\operatorname{div}\left\{A^2\left[1 - \frac{3}{8}A^2B + O(\alpha^4)\right]\mathbf{k}\right\} = 0. \qquad (40.13')$$

Таким образом, к нелинейной волне добавляются кратная гармоника и созданное волной среднее течение, аналогичное стоксову дрейфу, а в дисперсионном соотношении появляется зависимость от амплитуды волны. Как было отмечено выше, для всех этих эффектов здесь необходимо наличие сдвига скорости зонального течения $\partial\bar{c}/\partial\eta$.

Уравнения (40.10), (40.11) и т. п. для $\psi_n(\theta)$ могут иметь и солитонные решения, экспоненциально затухающие при $|\theta| \to \infty$. Уравнение (40.10) при этом асимптотически принимает вид

$$k^2\partial^2\psi_0/\partial\eta^2 - (c + \partial\bar{\psi}/\partial\eta)^{-1}\psi_0 = 0,$$

так что солитонное решение возможно лишь в случае $c + \partial\bar{\psi}/\partial\eta > 0$. Это означает, что в противоположность периодической волне солитон должен двигаться относительно среднего течения на

восток. Функция $Q(\psi_0)$ имеет при этом максимум при $\psi_0=0$. Из (40.10) можно убедиться, что для существования ограниченных решений $\psi_0(\theta)$ функция $Q(\psi_0)$ должна еще иметь по меньшей мере один минимум при некотором $\psi_0=\psi_{\min}$. Если положить в (40.12) $E=Q(0)$, то асимптотически при $|\theta|\to\infty$ будет

$$\psi_0 \sim |\psi_0| \exp\left[-(c-\bar{c})^{-1/2} k^{-1} |\theta|\right].$$

В уравнении (40.13) при этом интеграл должен браться не от 0 до 2π, а от $-\infty$ до $+\infty$.

Функция $F_0(\zeta)$, описывающая распределение завихренности на линиях тока $\zeta=\bar{\psi}+\psi_0+c\eta$, в случае периодических волн была монотонно убывающей, а в случае солитона она имеет минимум. Из (40.12) видно, что ψ_0 меняется от $\psi_c=\tau_1<0$ до $\tau_2=0$. Из определения Q получается

$$\int_{\psi_c}^{0} F_0(\Psi+\psi_0)\,d\psi_0 + \eta\psi_c = 0, \quad \Psi=\bar{\psi}+c\eta,$$

причем $F_0(\Psi)=\eta$. Перейдя здесь к переменной $\zeta=\Psi+\psi_0$ и продифференцировав по η, получим

$$[F_0(\Psi_1)-\eta]\frac{\partial\Psi_1}{\partial\eta}=\Psi_1-\Psi; \quad \Psi_1=\Psi+\psi_c. \tag{40.17}$$

Отсюда при граничном условии $\Psi_1=\Psi$ при $\eta=\eta_1$ по заданной функции $F_0(\zeta)$ определяется функция $\Psi_1(\eta)$, а потому и амплитуда солитона $|\psi_c(\eta)|$. Наоборот, задав $\psi_c(\eta)$, можно определить $F_0(\zeta)$, $\zeta<\zeta_{\min}$. Так, на зональном течении *без сдвига* $\bar{c}(\eta)=\text{const}$ получается $F_0(\zeta)=\zeta/\zeta_0$ при $\zeta>0$, где $\zeta_0=c-\bar{c}>0$. Пусть, например $\psi_c=-a\eta$. Тогда $\Psi=\zeta_0\eta$ и $\Psi_1=(\zeta_0-a)\eta$, и из (40.17) получается $F_0(\zeta)=-\zeta/\zeta_1$ при $\zeta<0$, где $\zeta_1=(2a-\zeta_0)\times(a-\zeta_0)^{-2}>0$. Из (40.12) тогда получаем

$$\frac{\psi_0}{\eta}=\begin{cases} -\zeta_1\left(1+\zeta_0/\zeta_1\right)^{1/2}\cos\left(\zeta_1^{-1/2}k^{-1}\theta\right)-\zeta_0+\zeta_1; & |\theta|\leqslant\theta_0; \\ -\zeta_0\exp\left[-\zeta_0^{-1/2}k^{-1}\left(\theta-\theta_0\right)\right]; & \\ & |\theta|>\theta_0=k\zeta_1^{1/2}\arccos\left(1+\zeta_0/\zeta_1\right)^{-1/2}, \end{cases} \tag{40.18}$$

а из солитонного аналога уравнения (40.13) при $k_x=\text{const}$ получается $k_y=\pm a(\eta^4/b^4-1)^{-1/2}$, где b — постоянная. Таким образом, здесь построен пример солитона и без сдвига скорости зонального течения. Другие такие примеры могут быть построены для баротропного течения над цилиндрическим дном, в котором якобиан функций

$$\Delta\psi-\frac{f_0^2}{gh}\psi+\beta y+\frac{f_0}{h}h'(y) \quad \text{и} \quad \psi+cy$$

равен нулю. Измеряя горизонтальные длины масштабом L, функцию тока солитона $\psi' \sim UL$ и зонального течения $\bar{\psi} \sim \varepsilon UL$, где $\varepsilon = \beta L^2/U \sim c/U \ll 1$ (т. е. рассматривая случай сильной нелинейности $U \gg c$), а также c масштабом βL^2, в безразмерных переменных получаем

$$\frac{\partial(\psi', \Delta\psi')}{\partial(x, y)} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(y)\Delta\psi' + \gamma(y)\psi'] = 0;$$

$$\alpha(y) = -\left(c + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\right); \quad \gamma(y) = 1 + \frac{f_0^2 L^2}{gh} c + \frac{\partial^3\bar{\psi}}{\partial y^3} + \frac{f_0}{\beta L h} + \frac{\partial h'}{\partial y}. \tag{40.19}$$

Будем искать решение для ψ' и c, используя ряды $\psi' = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \ldots$, $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \ldots$, $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 + \ldots$, где α_0 и γ_0 не зависят от y, а ψ_0 зависит только от $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, т. е. искомый солитон является почти осесимметричным (В. Д. Ларичев и Г. М. Резиик, 1976; А. Л. Берестов, 1981). Тогда из (40.19) получается, что функция $\psi_0(r)$ может быть произвольной, а для ψ_1 в полярных координатах (r, θ) после однократного интегрирования по θ выводится уравнение

$$\Delta\psi_1 + \gamma_0 r \sin\theta = \Psi_0(r)(\psi_1 - \alpha_0 r \sin\theta) + \Psi_1(r), \tag{40.20}$$

где $\Psi_0 = (\partial\Delta\psi_0/\partial r)(\partial\psi_0/\partial r)^{-1}$, а Ψ_1 — произвольная функция. Решение можно искать в виде $\Psi_1 = \Phi_0(r)\sin\theta + \Phi_1(r)$, и для коэффициентов Φ_0 и Φ_1 получаются уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} - (1 + \Psi_0)\Phi_0 = -r(\alpha_0\Psi_0 + \gamma_0); \tag{40.21}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} - \Psi_0\Phi_1 = \Psi_1. \tag{40.22}$$

ОТ Φ_0 потребуем, чтобы эта функция затухала при $r \to \infty$ быстрее любой степени r. Для этого необходимо, во-первых, условие $\alpha_0\gamma_0 < 0$; при $\bar{\psi} = h' = 0$ оно означает, что солитон движется на восток. Условие быстрого затухания правой части уравнения (40.21) при $r \to \infty$ дает асимптотику

$$\psi_0 \sim r^{-1/2} \exp\left(-|\alpha_0\gamma_0|^{1/2} r\right).$$

Непрерывность скорости в центре солитона дает там условие $\partial\psi_0/\partial r = 0$. В других нулях r_k этой функции должны выполняться условия гладкости

$$(\partial^3\psi_0/\partial r^3)(\partial^2\psi_0/\partial r^2)^{-1} + r_k^{-1} = 0.$$

Наконец, полный кинетический момент солитона должен равняться нулю, откуда $\int_0^\infty (\partial\psi_0/\partial r) r^2 \, dr = 0$, так что круговая ско-

рость $\partial\psi_0/\partial r$ обязательно должна менять знак: в солитоне должны иметь место циркуляции обоих знаков. По Ψ_0 находится Φ_0, а Φ_1 остается произвольным (вследствие произвольности Ψ_1). Суммарная функция тока солитона в его центральной части мало отличается от $\psi_0(r)$, хотя и возникает перезамыкание граничной линии тока, создаваемое, возможно, тем, что этот солитон является лишь асимптотикой точного солитонного решения уравнения (40.1). Перейдем теперь к рассмотрению некоторых из таких точных решений.

Первое из них было построено М. Стерном (1975) в простейшем случае баротропного океана в приближении «твердой крышки» и с плоским дном, без среднего течения и в предположении о равенстве нулю скорости движения солитона c. Уравнение (40.1) в этом случае имеет вид $\partial(\Delta\psi+\beta y, \psi)/\partial(x, y)=0$. Перейдя к полярным координатам с помощью соотношений $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ и отыскивая решение в форме $\psi=\Psi(r)\sin\theta$, мы приведем это уравнение к виду

$$\xi\frac{\partial\eta}{\partial\xi}-\eta=0;\quad \eta=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\right)\Psi+\beta r;\quad \xi=\Psi. \tag{40.23}$$

М. Стерн рассмотрел решение вида $\eta=-k^2\xi$ при $\xi<0$, откуда $\Psi=AJ_1(kr)-\beta k^{-2}r$, где J_1 — функция Бесселя первого рода, а A — произвольная постоянная. Выберем ее так, чтобы было $\Psi(a)=0$, т. е. положим $A=\beta k^{-2}a/J_1(ka)$. Затем выберем k так, чтобы было $\Psi'(a)=0$. Для этого должно выполняться равенство $J_1'(ka)/J_1(ka)=1/ka$, которое при помощи рекуррентной формулы $zJ_1'(z)=J_1(z)-zJ_2(z)$ приводится к виду $J_2(ka)=0$, т. е. ka должно быть одним из корней функции $J_2(z)$ (можно убедиться, что тогда при $r=a$ обращается в ноль и величина η, а потому и абсолютный вихрь $\Delta\psi+\beta y$). Эти корни суть экстремумы функции $z^{-1}J_1(z)$, и если выбрать в качестве ka первый минимум этой функции (он отрицателен), т. е. первый корень функции $J_2(z)$, то при $r<a$ будет $\Psi<0$; *другие же корни этого условия не обеспечат*. Таким образом, при этом выборе k можно положить

$$\psi=\frac{\beta a}{k^2}\left[\frac{J_1(kr)}{J_1(ka)}-\frac{r}{a}\right]\sin\theta \quad \text{при} \quad r<a, \tag{40.24}$$

а при $r>a$ можно выбрать тривиальное решение $\psi=0$, и в таком солитоне поле скорости и абсолютный вихрь будут непрерывными при $r=a$ (М. Стерн, однако, не оговорил, что простой выбор разных решений ψ при $r<a$ и $r>a$ с теми или иными условиями их склейки при $r=a$ был бы некорректен — он не дал бы способа выбора тех корней ka, которые обеспечивают зависимость η только от ξ, а не от ξ и r; это обстоятельство впервые указано А. Л. Берестовым, 1979).

Следующий шаг сделан В. Д. Ларичевым и Г. М. Резником (1976), рассмотревшими баротропный океан, можно со свободной поверхностью и наклонным плоским дном, и тогда β заменяется на

$$\beta' = \beta + \frac{f_0^2 c}{gh} + \frac{f_0}{h}\frac{\partial h'}{\partial y}$$

без среднего течения, но с отличной от нуля скоростью движения солитона c. Здесь

$$\eta\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\right)\Psi(r) + \beta' r$$

оказывается кусочно-линейной функцией от $\xi = \Psi + cr$:

$$\eta(\xi) = \begin{cases} -k^2\xi, & \xi < 0, \\ p^2\xi, & \xi > 0. \end{cases} \tag{40.25}$$

Чтобы обеспечить экспоненциальное убывание ψ при $\xi \to \infty$, выберем здесь $p^2 = \beta'/c$; тогда ψ будет асимптотически пропорциональным

$$r^{-1/2}\exp\left[-(\beta'/c)^{1/2} r\right]$$

(можно показать, что при $\beta' = 0$ никаких стационарных волн, экспоненциально затухающих при $r \to \infty$, вообще не существует). Условие $\beta'/c > 0$ приводит к тому, что либо $c > 0$ (т. е. солитон движется на восток), либо

$$c < -\left(\beta + \frac{f_0}{h}\frac{\partial h'}{\partial y}\right)\frac{gh}{f_0^2}$$

(т. е. солитон достаточно быстро движется на запад). Таким образом, скорость солитона должна быть вне интервала допустимых скоростей периодических волн (иначе их генерация приводила бы к затуханию солитона). Из (40.25) получается следующее непрерывное решение для $\Psi(r)$:

$$\Psi = \begin{cases} \dfrac{\beta' a}{k^2}\dfrac{J_1(kr)}{J_1(ka)} - \dfrac{\beta' + ck^2}{k^2} r & \text{при } \Psi + cr < 0, \\ -ca\dfrac{K_1(pr)}{K_1(pa)} & \text{при } \Psi + cr > 0, \end{cases} \tag{40.26}$$

где K_1 — функция Макдональда. Требование непрерывности $\Psi'(r)$ при $r = a$ с помощью рекуррентных формул для цилиндрических функций приводится к виду

$$-\frac{1}{ka}\frac{J_2(ka)}{J_1(ka)} = \frac{1}{pa}\frac{K_2(ka)}{K_1(ka)}. \tag{40.27}$$

Поскольку $p = (\beta'/c)^{1/2}$, это условие есть дисперсионное соотношение, позволяющее определить c при заданных k и a. Оно обес-

печивает непрерывность при $r=a$ также и второй производной $\Psi''(r)$, а потому и вихря скорости (однако $\Psi'''(r)$ при $r=a$ претерпевает конечный разрыв). Отметим, что условие $\Psi+cr>0$ во второй строке (40.26) удовлетворяется при $r>0$, каковы бы ни были p и a, но условие $\Psi+cr<0$ в первой строке удовлетворяется при $r<a$, лишь если ka находится в интервале между первым нулем и первым минимумом функции $J_1(kr)/kr$. Согласно (40.27), каждому pa соответствует единственное значение ka из этого интервала.

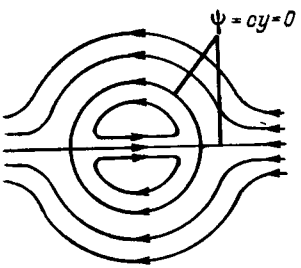


Рис. 40.1. Баротропный солитон В. Д. Ларичева и Г. М. Резника (1976).

Солитон $\psi=\Psi(r)\sin\theta$ с $\Psi(r)$ из формулы (40.26) представляет собою вихревой диполь, линии тока в котором показаны на рис. 40.1. Взаимодействия таких солитонов изучались в численных экспериментах М. Макино, Т. Камимуры и Т. Таниути (1981), В. Д. Ларичева и Г. М. Резника (1982). Они оказались разнообразными. При центральном столкновении солитонов, движущихся в одном и том же направлении, при некоторых значениях параметров «выживали» оба, как на рис. 40.2, иногда же «выживал» только один. При встречных столкновениях всегда «выживали» оба солитона, причем вихри более слабого из них обходили по периферии вихри более интенсивного.

Г. Флерл (1979), В. Д. Ларичев, Дж. Маквильямс, Г. М. Резник (1980) показали, что к решению $\psi=\Psi(r)\sin\theta$ формулы (40.26) можно прибавить функцию $\Psi_1(r)$, равную $LJ_0(kr)-M$ при $r<a$ и $K_0(pr)$ при $r>a$, где

$$L=pK_1(pa)/kJ_1(ka) \quad \text{и} \quad M=2paK_1(pa)\left[(ka)^{-2}+(pa)^{-2}\right],$$

но при этом $\partial^2\psi/\partial r^2$ приобретает разрыв при $r=a$. А. Л. Берестов (1979) указал трехзонный солитон, у которого

$$\Psi=\begin{cases} -\dfrac{\beta' a}{p^2}\dfrac{I_1(pr)}{I_1(pa)} & \text{при } r<a, \\ BJ_1(kr)+E\dfrac{\beta'}{k^3}N_1(kr)-\dfrac{\beta'+ck^2}{k^2}r & \text{при } a<r<b \\ -\dfrac{\beta' b}{p^2}\dfrac{K_1(pr)}{K_1(pb)} & \text{при } r>b, \end{cases} \qquad (40.28)$$

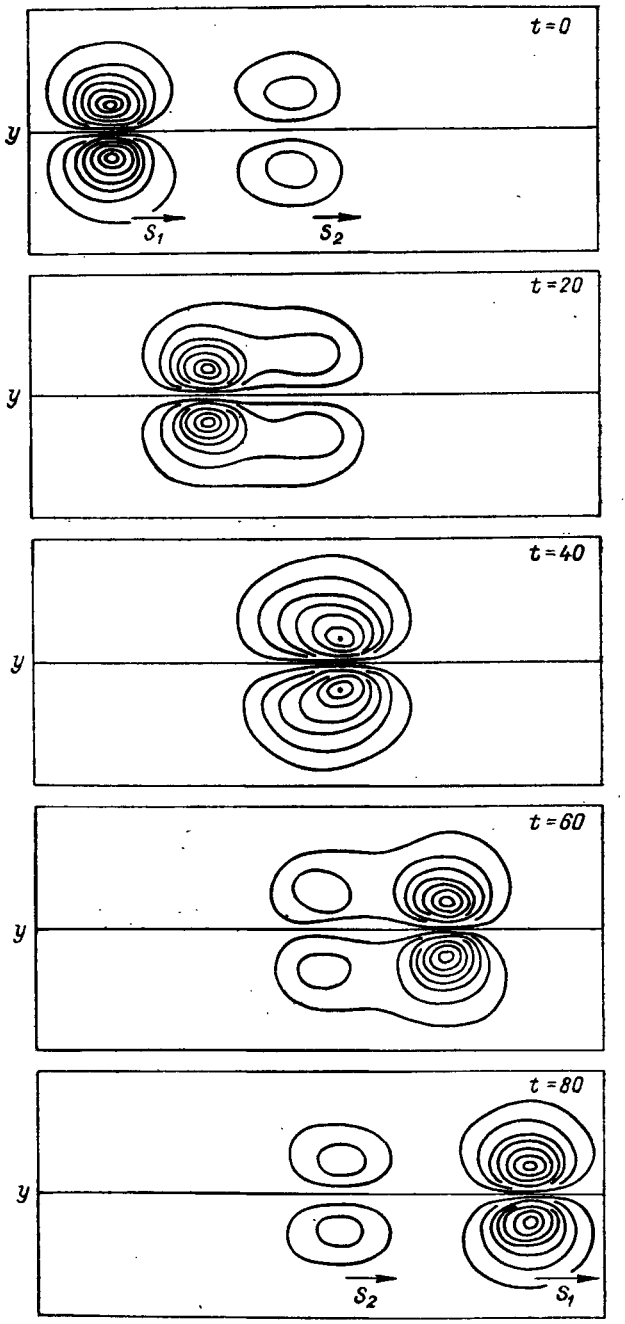


Рис. 40.2. Прохождение одного баротропного солитона через другой, по числ
ному эксперименту М. Макино, Т. Камимуры и Т. Таниути (1981).

причем параметры должны удовлетворять условиям:

$$B=\frac{\beta' a}{k^2 J_1(ka)}\left[1-E\frac{N_1(ka)}{ka}\right]=\frac{\beta' b}{k^2 J_1(kb)}\left[1-E\frac{N_1(kb)}{kb}\right];$$

$$\frac{1}{ka}\frac{J_2(ka)}{J_1(ka)}\left[1-\frac{2E}{\pi kaJ_2(ka)}\right]=\frac{1}{pa}\frac{J_2(pa)}{J_1(pa)};$$

$$-\frac{1}{kb}\frac{J_2(kb)}{J_1(kb)}\left[1-\frac{2E}{\pi kbJ_2(kb)}\right]=\frac{1}{pb}\frac{K_2(pb)}{K_1(pb)}, \qquad (40.28')$$

а условия зависимости η только от ξ имеют вид

$$\frac{kr-EN_1(kr)}{J_1(kr)}<(>)\frac{ka-EN_1(ka)}{J_1(ka)} \quad \text{при} \quad J_1(kr)<(>0),$$

$$a<r<b. \qquad (40.28'')$$

Здесь к $\Psi(r)\sin\theta$ также можно добавить некоторое $\Psi_1(r)$.

Этот же автор построил для случая $N=\text{const}$ трехмерный бароклинный солитон, перейдя от декартовых к сферическим координатам с помощью соотношений

$$x=r\sin\theta\cos\lambda,\quad y=r\sin\theta\sin\lambda,\quad z=(f_0/N)\,r\cos\theta$$

и отыскивая решение уравнения

$$\partial(\mathscr{L}\psi+\beta y,\ \psi+cy)/\partial(x,\ y)=0$$

в виде $\psi=\Psi(r,\ \theta)\sin\lambda$. В результате это уравнение приводится к аналогичному (40.23) виду $\xi\,\partial\eta/\partial\xi=\eta$, где $\eta=\mathscr{L}_1\Psi+\beta r\sin\theta$ с оператором

$$\mathscr{L}_1=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

и $\xi=\Psi+cr\sin\theta$.

Для $\eta(\xi)$ опять берется кусочно-линейное решение (40.25). Для экспоненциального затухания ψ при $r\to\infty$ следует положить $p^2=\beta/c>0$ (так что $c>0$, т. е. солитон движется на восток). Тогда ψ оказывается асимптотически пропорциональным $r^{-1}\exp[-(\beta/c)^{1/2}r]$ (при $c<0$ и $p^2<0$ решение тоже существует, но не является экспоненциально затухающим; например, при $-k^2=p^2=\beta/c$ оно затухает, как r^{-1}). Функция Ψ ищется в виде $\Psi_1(r)\sin\theta$, и получается

$$\Psi_1(r)=\begin{cases}\dfrac{\beta a}{k^2}\dfrac{r^{-1/2}J_{3/2}(kr)}{a^{-1/2}J_{3/2}(ka)}-\dfrac{\beta+ck^2}{k^2}r & \text{при } r<a,\\[2ex] -ca\dfrac{r^{-1/2}K_{3/2}(pr)}{a^{-1/2}K_{3/2}(pa)} & \text{при } r>a.\end{cases} \qquad (40.29)$$

Условие непрерывности $\Psi_1'(r)$ приводится к виду

$$-\frac{1}{ka}\frac{J_{5/2}(ka)}{J_{3/2}(ka)}=\frac{1}{pa}\frac{K_{5/2}(pa)}{K_{3/2}(pa)}, \tag{40.30}$$

аналогичному (40.27). Требование $\xi>0$ при $r>a$ выполняется автоматически, а требование $\xi<0$ при $r<a$ заставляет выбирать из корней ka уравнения (40.30) лишь один — тот, который находится в интервале между первым нулем и первым минимумом функции $(kr)^{-3/2}J_{3/2}(kr)$. При $r=a$ функция $\Psi_1''(r)$ здесь непрерывна, но $\Psi_1'''(r)$ претерпевает конечный разрыв. Линии тока в плоскостях xy и yz в этом солитоне показаны на рис. 40.3 (в плоскости xz получается $\psi\equiv 0$). Заметим еще, что покоящийся трехмерный солитон, аналогичный решению Стерна (40.24), получается, если положить $c=0$ в первой строке формулы (40.29), вторую строку заменить условием $\Psi_1=0$ при $r>a$ и использовать первый корень уравнения $J_{5/2}(ka)=0$.

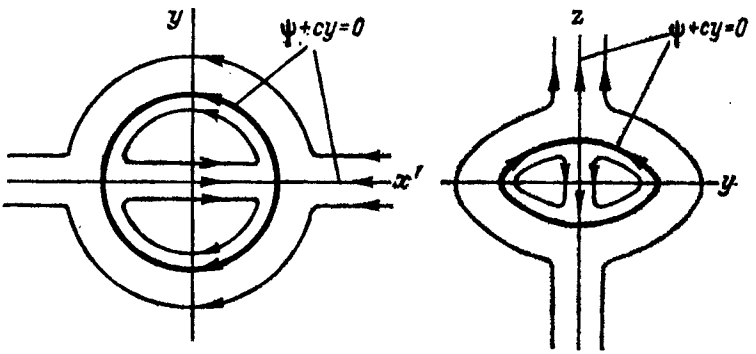


Рис. 40.3. Трехмерный солитон А. Л. Берестова (1979).

Этот же автор построил и трехслойный бароклинный солитон. В нем

$$\Psi_1(r)=\begin{cases} -ca\dfrac{r^{-1/2}I_{3/2}(pr)}{a^{-1/2}I_{3/2}(pa)} & \text{при } r<a; \\ Br^{-1/2}J_{3/2}(kr)+E\dfrac{\beta r^{-1/2}}{k^{7/2}}\times & \\ \times N_{3/2}(kr)-\dfrac{\beta+ck^2}{k^2}r & \text{при } a<r<b, \\ -cb\dfrac{r^{-1/2}K_{3/2}(pr)}{b^{-1/2}K_{3/2}(pb)} & \text{при } r>b, \end{cases} \tag{40.31}$$

а параметры должны удовлетворять условиям:

$$B=\frac{\beta a}{k^2}\frac{1}{a^{-1/2}J_{3/2}(ka)}\left[1-\frac{E}{(ka)^{3/2}}N_{3/2}(ka)\right]=$$

$$=\frac{\beta b}{k^2}\frac{1}{b^{-1/2}J_{3/2}(kb)}\left[1-\frac{E}{(kb)^{3/2}}N_{3/2}(kb)\right];$$

$$\frac{1}{ka}\frac{J_{5/2}(ka)}{J_{3/2}(ka)}\left[1-\frac{2E}{\pi(ka)^{5/2}J_{5/2}(ka)}\right]=\frac{1}{pa}\frac{I_{5/2}(pa)}{I_{3/2}(pa)};$$

$$-\frac{1}{kb}\frac{J_{5/2}(kb)}{J_{3/2}(kb)}\left[1-\frac{2E}{\pi(kb)^{5/2}J_{5/2}(kb)}\right]=\frac{1}{pb}\frac{K_{5/2}(pb)}{K_{3/2}(pb)}, \qquad (40.31')$$

а условия зависимости η только от ξ имеют вид

$$\frac{(kr)^{3/2}-EN_{3/2}(kr)}{J_{3/2}(kr)}<(>)\frac{(ka)^{3/2}-EN_{3/2}(ka)}{J_{3/2}(ka)}$$

$$\text{при}\quad J_{3/2}(ka)<(>)0,\quad a<r<b. \qquad (40.31'')$$

Аналогичные кусочно-линейные решения $\eta(\xi)$ с более чем тремя слоями построить, вообще говоря, невозможно, так как параметров у них оказывается меньше, чем количество условий, которые должны быть удовлетворены. Заметим, что, как и в баротропном случае, к функциям тока ψ двуслойного и трехслойного бароклинных солитонов можно прибавить некоторые определенные чисто радиальные слагаемые $\Psi_2(r)$ (но это нарушает непрерывность $\partial^2\psi/\partial r^2$). Заметим еще, что если поместить начало отсчета на поверхности океана $z=0$, то нижние половины всех указанных выше трехмерных солитонов будут удовлетворять на этой поверхности условию «твердой крышки» и, значит, могут рассматриваться, как самостоятельные солитоны (З. И. Кизнер, 1984).

З. И. Кизнер (1984) предложил рассмотреть бароклинные солитоны другого типа, заметив, что к величинам $\mathscr{L}\psi+\beta' y$ и $\psi+cy$ в (40.1) можно прибавить произвольные функции от z. Выберем, например, $\mathscr{L}\psi+\beta' y-CF(z)$ в виде кусочно-линейной функции (40.25) от $\psi+cy$, а в качестве $F(z)$ возьмем решение задачи Штурма—Лиувилля типа (38.4):

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial F}{\partial z}+m^2F=0;\quad F'(0)=F'(-h)=0. \qquad (40.32)$$

Тогда решение уравнения (40.1) в цилиндрических координатах r, θ, z можно пытаться искать в виде $\psi=\psi_0(r,\theta)+\Phi(r)F(z)$, где $\psi_0(r,\theta)$ — баротропный солитон Ларичева и Резника. Для $\Phi(r)$ при этом получаются уравнения

$$\Phi''+\frac{1}{r}\Phi'-m^2\Phi-C=\begin{cases}-k^2\Phi & \text{при}\quad r<a,\\ p^2\Phi & \text{при}\quad r>a.\end{cases} \qquad (40.33)$$

Решение этих уравнений при $k^2 - m^2 > 0$ имеет вид

$$\Phi(r) = \begin{cases} A_0 J_0\left(r\sqrt{k^2-m^2}\right) + (k^2-m^2)^{-1} C & \text{при } r < a, \\ B_0 K_0\left(r\sqrt{p^2+m^2}\right) - (p^2+m^2)^{-1} C & \text{при } r > a. \end{cases} \tag{40.34}$$

Отметим, что при $r \to \infty$ функция Φ не затухает, а стремится к постоянной как $r^{-1/2}\exp\left(-r\sqrt{p^2+m^2}\right)$, т. е. быстрее, чем ψ_0 стремится к нулю, и, значит, ψ асимптотически пропорционально $F(z)$, но это не портит локализованности солитона, так как горизонтальные скорости u, v при $r \to \infty$ экспоненциально затухают. Условия непрерывности Φ, Φ' и Φ'' при $r = a$ позволяют определить отношения A_0/C и B_0/C и получить дисперсионное соотношение для бароклинной моды, которое оказывается имеющим вид

$$-\frac{a\sqrt{k^2-m^2}\, J_0\left(a\sqrt{k^2-m^2}\right)}{J_1\left(a\sqrt{k^2-m^2}\right)} = \frac{a\sqrt{p^2+m^2}\, K_0\left(a\sqrt{p^2+m^2}\right)}{K_1\left(a\sqrt{p^2+m^2}\right)}. \tag{40.35}$$

Напомним, что $p = (\beta'/c)^{1/2}$ и ak определяется через ap из (40.27). Поэтому при каждом собственном значении m задачи (40.32) и заданном a из (40.35) в принципе можно определить ap и, следовательно, найти скорость движения солитона $c = a^2\beta'/(ap)^2$. Заметим, однако, что возможность обеспечить зависимость $\mathscr{L}\psi + \beta' y - CF(z)$ только от $\psi + cy$ здесь осталась невыясненной.

§ 41. Гамильтонов формализм

Этот мощный метод был использован в § 24 для описания поверхностных волн и в § 30 для описания внутренних гравитационных волн. Он применим и в теории волн Россби—Блиновой, так как описывающее их уравнение (37.5) является гамильтоновой системой (для баротропных волн это было показано независимо В. Е. Захаровым и Е. А. Кузнецовым, 1982, и А. Вайнштейном, 1983). Использование этого метода обеспечивает единообразное и стройное изложение теории волн различной природы (в особенности в приближении слабой нелинейности): динамические уравнения (24.4) в нормальных канонических переменных могут различаться лишь видом дисперсионных соотношений $\sigma_{\mathbf{k}}$ и коэффициентов взаимодействия $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$, $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ и т. д.

Однако введение нормальных канонических переменных в теории волн Россби—Блиновой оказалось нетривиальным делом. Оно осуществлено (по нашей просьбе, для целей настоящей книги) в случае баротропных волн, которым мы здесь ограничимся, В. Е. Захаровым и Л. И. Питербаргом (1986). Для баротропных волн уравнение (37.5) принимает вид (12.11):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \Omega)}{\partial(x, y)} + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad \Omega = \Delta\psi - k_0^2\psi, \tag{41.1}$$

где $k_0^2=f_0^2/gh$ (величина $\Omega+f_0+\beta y$ представляет собою потенциальный вихрь). Оно приводится к гамильтонову виду

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}=\{\Omega,\ \mathcal{H}\};\quad \mathcal{H}=\frac{1}{2}\int\left[|\nabla\psi|^2+k_0^2|\psi|^2\right]dx\,dy, \tag{41.2}$$

где $\mathcal{H}$ — гамильтониан (пропорциональный сумме кинетической и баротропной доступной потенциальной энергии, см. (12.10)), а фигурные скобки обозначают так называемую скобку Пуассона, в данном случае определяемую для любых двух функционалов $F[\Omega]$ и $G[\Omega]$ формулой

$$\{F,\ G\}=\{F,\ G\}_0+\{F,\ G\}_1=\int(\Omega+\beta y)\frac{\partial(\delta F/\delta\Omega,\ \delta G/\delta\Omega)}{\partial(x,\ y)}dx\,dy;$$

$$\{F,\ G\}_1=\beta\int\frac{\delta F}{\delta\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta G}{\delta\Omega}dx\,dy. \tag{41.3}$$

Здесь $\{F,\ G\}_0$ — значение $\{F,\ G\}$ при $\beta=0$; эта скобка Пуассона задает гамильтонову структуру двумерной гидродинамики несжимаемой жидкости (и оказывается скобкой Ли для группы диффеоморфизмов плоскости, сохраняющих площадь). Что же касается скобки $\{F,\ G\}_1$ с постоянными (т. е. не зависящими от Ω) коэффициентами, то это — так называемая скобка Гарднера из теории интегрируемых систем, для которой способ введения нормальных канонических переменных известен.

Идея В. Е. Захарова и Л. И. Питербарга заключается в том, что скобку $\{F,\ G\}$ можно привести к виду $\{F,\ G\}_1$ заменой функционального аргумента $\Omega(x,\ y)$ некоторым новым аргументом $\zeta(x,\ y)$. А именно следует положить

$$\Omega(x,\ y)=\zeta\left[x,\ y+\frac{1}{\beta}\Omega(x,\ y)\right]; \tag{41.4}$$

$$\zeta(x,\ y)=\Omega\left[x,\ y-\frac{1}{\beta}\zeta(x,\ y)\right] \tag{41.4'}$$

(эти соотношения эквивалентны), причем функции

$$w=y-\frac{1}{\beta}\zeta(x,\ y); \tag{41.5}$$

$$y=w+\frac{1}{\beta}\Omega(x,\ w) \tag{41.5'}$$

должны быть обратимыми (они обратны друг другу) — это требование означает незамкнутость изолиний потенциального вихря, т. е. отсутствие солитонов, что выполняется для волн достаточно малой амплитуды. Соотношение (41.4′) с помощью (41.5) переписывается в виде $\zeta(x,\ y)=\Omega(x,\ w)$ и после дифференцирования по y и по x дает

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{\partial\Omega}{\partial w}\left(1-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{\partial\Omega}{\partial x}\left(1-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right). \tag{41.6}$$

Теперь доказательство теоремы В. Е. Захарова и Л. И. Питербарга получается следующим образом:

$$\{F,\ G\}_{1\zeta} = -\beta \int \frac{\delta G}{\delta \zeta(x,\ y)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta F}{\delta \zeta(x,\ y)}\, dx\, dy =$$

$$= -\beta \int \frac{\delta G}{\delta \Omega(x,\ w)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta F}{\delta \Omega(x,\ w)} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} \frac{\delta F}{\delta \Omega(x,\ w)} \right] \times$$

$$\times \frac{dx\, dw}{1 - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}} = -\beta \int \frac{\delta G}{\delta \Omega(x,\ w)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta F}{\delta \Omega(x,\ w)}\, dx\, dw +$$

$$+ \int \frac{\delta G}{\delta \Omega(x,\ w)} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} \frac{\delta F}{\delta \Omega(x,\ w)} - \frac{\partial \Omega}{\partial w} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta F}{\delta \Omega(x,\ w)} \right] dx\, dw =$$

$$= \{F,\ G\}_{\Omega}, \tag{41.7}$$

где во второй строке учтено, что при замене переменных $(x,\ y) \to (x,\ w)$ надо полагать

$$\partial/\partial x \to \partial/\partial x + (\partial w/\partial x)\,\partial/\partial w, \quad \partial w/\partial x = -(1/\beta)\,\partial\zeta/\partial x,$$

а в следующем равенстве использованы соотношения (41.6). Заметим еще, что неявные формулы (41.4) и (41.4′) для замены функциональной переменной $\Omega(x,\ y) \to \zeta(x,\ y)$ при малых Ω, ζ могут быть превращены в явные разложением их в ряды:

$$\Omega(x,\ y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\,\beta^n} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \zeta^{n+1} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \ln\left[1 - \frac{1}{z}\zeta\left(x,\ y + \frac{1}{\beta} z\right)\right] dz; \tag{41.8}$$

$$\zeta(x,\ y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!\,\beta^n} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \Omega^{n+1} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \ln\left[1 - \frac{1}{z}\Omega\left(x,\ y - \frac{1}{\beta} z\right)\right] dz \tag{41.8′}$$

(представление в виде контурных интегралов получается в предположении аналитичности функций Ω, ζ в полосе $-1/\beta < \operatorname{Im} y < 1/\beta$). Теперь нормальные канонические переменные $a_{\mathbf{k}}(t)$ для уравнения (41.1) вводятся при помощи формулы

$$\zeta(\mathbf{k},\ t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{2}} \int_{k_x < 0} \left[a_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^*_{\mathbf{k}}(t)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right] |k_x|^{1/2}\, d\mathbf{k}, \tag{41.9}$$

и в этих переменных справедливы гамильтоновы уравнения и представление гамильтониана в виде функционального степенного ряда (24.4), где все интегрирования производятся по полуплоскости $k_x < 0$. Дисперсионное соотношение для линейных баротропных

волн Россби—Блиновой имеет вид $\sigma_{\mathbf{k}} = -\beta k_x (k^2+k_0^2)^{-1}$, а коэффициенты трехволновых взаимодействий получаются в виде:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = -\frac{i}{2\pi}(-2\beta k_x k_{1x} k_{2x})^{1/2}\left(\frac{k_y}{k^2+k_0^2}+\frac{k_{1y}}{k_1^2+k_0^2}+\frac{k_{2y}}{k_2^2+k_0^2}\right);$$

$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = -\frac{3i}{2\pi}(-2\beta k_x k_{1x} k_{2x})^{1/2}\frac{k_y}{k^2+k_0^2}. \qquad (41.10)$$

Баротропные волны Россби—Блиновой способны к трехволновым резонансным (распадным) взаимодействиям. Это впервые показали и рассчитали такие взаимодействия в приближении слабой нелинейности К. Кенион (1964) для бездивергентных волн и М. Лонге-Хиггинс и А. Гилл (1967) в общем случае. Соответствующий расчет аналогичен выводу уравнений Бломбергена (30.8), но мы изложим его здесь подробнее, следуя указанным работам. Введем при нелинейном слагаемом в уравнении (41.1) малый параметр ε и будем искать решение этого уравнения в виде $\psi_0+\varepsilon\psi_1+\ldots$, где все ψ_n суть функции от x, t и от «медленных» переменных $\mathbf{X}=\varepsilon\mathbf{x}$, $T=\varepsilon t$. Тогда ψ_0 будет удовлетворять линейному уравнению и может быть выбрано в виде суммы трех волновых пакетов $\psi_0 = \sum_1^3 \psi_{\mathbf{k}_n}\cos\theta_n$, где $\psi_{\mathbf{k}_n}$ произвольно зависят от $\mathbf{X}$, T, а $\theta_n = \mathbf{k}_n\cdot\mathbf{x} - \sigma_{\mathbf{k}_n} t$, причем $\mathbf{k}_n$ удовлетворяют условиям резонанса $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3$, $\sigma_{\mathbf{k}_1}+\sigma_{\mathbf{k}_2}=\sigma_{\mathbf{k}_3}$, так что $\theta_1+\theta_2=\theta_3$. Для ψ_1 получается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi_1 - k_0^2\psi_1) + \beta\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = -\frac{\partial(\psi_0, \Delta\psi_0)}{\partial(x, y)} - \left[\frac{\partial}{\partial T}(\Delta\psi_0 - k_0^2\psi_0) + \right.$$

$$\left. + \beta\frac{\partial\psi_0}{\partial X} + 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\,\partial X}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y\,\partial Y}\right)\right] = -D_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}\psi_{\mathbf{k}_2}\psi_{\mathbf{k}_3}\cos(\theta_2+\theta_3) +$$

$$+\left[D_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}\psi_{\mathbf{k}_2}\psi_{\mathbf{k}_3} + (k_1^2+k_0^2)\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1}}{\partial T} + \mathbf{c}_{g\mathbf{k}_1}\nabla\psi_{\mathbf{k}_1}\right)\right]\cos\theta_1 -$$

$$- D_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1}\psi_{\mathbf{k}_3}\psi_{\mathbf{k}_1}\cos(\theta_3+\theta_1) + \left[D_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1}\psi_{\mathbf{k}_3}\psi_{\mathbf{k}_1} + (k_2^2+k_0^2)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_2}}{\partial T} + \mathbf{c}_{g\mathbf{k}_2}\cdot\nabla\psi_{\mathbf{k}_2}\right)\right]\cos\theta_2 + D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\psi_{\mathbf{k}_1}\psi_{\mathbf{k}_2}\cos(\theta_1-\theta_2) +$$

$$+\left[-D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\psi_{\mathbf{k}_1}\psi_{\mathbf{k}_2} + (k_3^2+k_0^2)\left(\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_3}}{\partial T} + \mathbf{c}_{g\mathbf{k}_3}\cdot\nabla\psi_{\mathbf{k}_3}\right)\right]\cos\theta_3, \qquad (41.11)$$

где оператор Δ берется по координатам $\mathbf{x}$, ∇ — по $\mathbf{X}$, $c_{g\mathbf{k}}$ — групповая скорость волн (38.6), а коэффициенты взаимодействия определяются формулой

$$D_{\mathbf{k}_m\mathbf{k}_n} = \frac{1}{2}(k_m^2 - k_n^2)\left(k_{n_x}k_{m_y} - k_{m_x}k_{n_y}\right). \qquad (41.12)$$

Слагаемые в (41.11) с множителями $\cos\theta_n$ оказываются резонансными, и чтобы их аннулировать, множители в квадратных скобках при $\cos\theta_n$, следует положить равными нулю. Это дает уравнения для амплитуд $\psi_{\mathbf{k}_n}$ волновых пакетов из поля ψ_0. Определив их, можно искать решение ψ_1 уравнения (41.11) в виде суммы трех соответствующих волновых пакетов, уравнения для амплитуд которых найдутся путем аннулирования резонансных слагаемых в правой части уравнения для ψ_2, и т. д. Таким образом, зависимость величин ψ_n от «медленных» переменных $\mathbf{X}$, T позволяет аннулировать резонансные слагаемые (без чего ряд $\psi_0+\varepsilon\psi_1+\ldots$ при временах порядка ε^{-1} становился бы непригодным).

Упомянутые выше уравнения для амплитуд $\psi_{\mathbf{k}_n}$ довольно сложны, но если эти амплитуды в начальный момент времени $T=0$ не зависят от $\mathbf{X}$, то это остается справедливым и при любых T, и уравнения для амплитуд принимают простой вид:

$$\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_1}}{\partial T}=b\frac{k_3^2-k_2^2}{k_1^2+k_0^2}\psi_{\mathbf{k}_2}\psi_{\mathbf{k}_3};$$

$$\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_2}}{\partial T}=b\frac{k_1^2-k_3^2}{k_2^2+k_0^2}\psi_{\mathbf{k}_3}\psi_{\mathbf{k}_1};$$

$$\frac{\partial\psi_{\mathbf{k}_3}}{\partial T}=b\frac{k_2^2-k_1^2}{k_3^2+k_0^2}\psi_{\mathbf{k}_1}\psi_{\mathbf{k}_2}, \tag{41.13}$$

где

$$2b=k_{3x}k_{2y}-k_{3y}k_{2x}=k_{1x}k_{3y}-k_{1y}k_{3x}=k_{1x}k_{2y}-k_{1y}k_{2x}$$

есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Эти уравнения эквивалентны триплету (6.13), что доказывается переходом к новым неизвестным $(k_n^2+k_0^2)^{1/2}\psi_{\mathbf{k}_n}$ и новому времени

$$(k_1^2+k_0^2)^{-1/2}(k_2^2+k_0^2)^{-1/2}(k_3^2+k_0^2)^{-1/2}bT,$$

и, стало быть, решаются в эллиптических функциях Якоби (6.15). Таким образом, в приближении слабой нелинейности распадные взаимодействия троек пакетов волн Россби—Блиновой оказываются периодическими (поскольку нелинейность слабая — с большим периодом порядка ε^{-1}). Изложенные расчеты обобщаются для N волновых пакетов с резонансными условиями $\sigma_{\mathbf{k}_m}\pm\sigma_{\mathbf{k}_n}=\sigma_{\mathbf{k}_m\pm\mathbf{k}_n}$ (В. М. Каменкович, Г. М. Резник, 1978).

В упомянутых работах К. Кениона (1964) и М. Лонге-Хиггинса и А. Гилла (1967) в приближении слабой нелинейности было выведено кинетическое уравнение для волн Россби—Блиновой, ана-

логичное уравнениям (24.12′) и (30.10). Пусть $\psi_{\mathbf{k}}$ — преобразование Фурье статистически-однородного поля $\psi(\mathbf{x})$ (которое здесь представляется в виде $\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\ldots$), $\tau=\varepsilon^2 t$ — «медленное» время и спектральная плотность энергии $F_{\mathbf{k}}$ определяется соотношением

$$\frac{1}{2}(k^2+k_0^2)\langle\psi_{\mathbf{k}}(t)\,\psi^*_{\mathbf{k}_1}(t)\rangle = F_{\mathbf{k}}(\tau)\,\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}. \tag{41.14}$$

Аналогично тому, как это было рассказано для уравнения (30.10), для $F_{\mathbf{k}}$ выводится уравнение

$$\frac{\partial F_{\mathbf{k}}}{\partial\tau} = 8\pi\int\frac{D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}F_{\mathbf{k}_1}F_{\mathbf{k}_2}+D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}F_{\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}_1}+D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}F_{\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}_2}}{(k^2+k_0^2)(k_1^2+k_0^2)(k_2^2+k_0^2)}\times$$

$$\times\,\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\,\delta_{\sigma_{\mathbf{k}}+\sigma_{\mathbf{k}_1}+\sigma_{\mathbf{k}_2}}D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2. \tag{41.15}$$

Нетрудно убедиться, что если $\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=0$, то при любых a и b справедливо равенство

$$(ak^2+b)\,D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}+(ak_1^2+b)\,D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}+(ak_2^2+b)\,D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}=0.$$

Отсюда следует, что уравнение (41.15) сохраняет полную энергию $\int F_{\mathbf{k}}\,d\mathbf{k}$ и потенциальную энстрофию $\int(k^2+k_0^2)F_{\mathbf{k}}\,d\mathbf{k}$ (впрочем, они сохраняются не только в приближении слабой нелинейности, но и согласно точному уравнению (41.1)). Из сохранения энстрофии следует, что $F_{\mathbf{k}}=O(k^{-4})$ при $k\to\infty$. Сохранеиие энстрофии эквивалентно сохранéнию зональной компоненты импульса $\int k_x\sigma_{\mathbf{k}}^{-1}F_{\mathbf{k}}d\mathbf{k}$. Если выполняется еще условие резонанса $\sigma_{\mathbf{k}}+\sigma_{\mathbf{k}_1}+\sigma_{\mathbf{k}_2}=0$, то

$$k_y\sigma_{\mathbf{k}}^{-1}D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}+k_{1y}\sigma_{\mathbf{k}_1}^{-1}D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}+k_{2y}\sigma_{\mathbf{k}_2}^{-1}D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}=0,$$

откуда следует, что уравнение (41.15) сохраняет также меридиональную компоненту импульса $\int k_y\sigma_{\mathbf{k}}^{-1}F_{\mathbf{k}}d\mathbf{k}$.

Интегрирование в кинетическом уравнении (41.15) производится при каждом фиксированном $\mathbf{k}$ фактически по так называемой резонансной линии $\mathscr{L}_{\mathbf{k}}$ в четырехмерном пространстве $(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$, на которой выполняются три условия $\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\sigma_{\mathbf{k}}+\sigma_{\mathbf{k}_1}+\sigma_{\mathbf{k}_2}=0$. Однако детальный вывод уравнения (41.5) показывает (Г. М. Резник, 1984), что оно было бы справедливым при всех $\mathbf{k}$, лишь если бы все величины $|c_{g\mathbf{k}_1}-c_{g\mathbf{k}_2}|$ на всех $\mathscr{L}_{\mathbf{k}}$ были равномерно ограниченными снизу. Но у волн Россби—Блиновой $|c_{g\mathbf{k}}|\to 0$ при $k\to\infty$. Поэтому указанное условие нарушается на

очень коротких волнах $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, находящихся в резонансе с волной $\mathbf{k}$.

Если при этом k_x мало́, т. е. резонансное взаимодействие происходит между двумя короткими и длинной волной, то оно сводится в основном ко взаимодействию между короткими волнами и почти не влияет на длинную (служащую, таким образом, лишь «катализатором»). Кинетическое уравнение при этом остается справедливым.

Если же все три волны $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ очень короткие (так что k, k_1, $k_2 \geqslant \varepsilon^{-2}$), то резонансные взаимодействия между ними не отличаются от любых нерезонансных, удовлетворяющих условию $\sigma_{\mathbf{k}} + \sigma_{\mathbf{k}_1} + \sigma_{\mathbf{k}_2} \sim \varepsilon^2$. Приближение слабой нелинейности при этом непригодно, так что при $k \sim \varepsilon^{-2}$ кинетическое уравнение несправедливо.

Однако очень короткие волны обмениваются энергией в основном только друг с другом, а в полную энергию развитого волнового поля вносят лишь очень малый вклад. Поэтому при $k \ll \varepsilon^{-2}$ кинетическим уравнением можно пользоваться, ограничив в нем интегрирование по $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ конечной областью $\Omega_{\mathbf{k}_1} \times \Omega_{\mathbf{k}_2}$ не слишком больших k_1, k_2 (но все же таких, что вне $\Omega_{\mathbf{k}}$ уже выполняется условие $F_{\mathbf{k}} = O(k^{-4})$). Такое «обрезанное» кинетическое уравнение сохраняет «обрезанные» энергию, энстрофию и импульс волнового поля. Далее мы будем иметь дело только с таким уравнением.

Используя справедливые на $\mathscr{L}_{\mathbf{k}}$ тождества

$$\sigma_{\mathbf{k}}^{-1} D_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \sigma_{\mathbf{k}_1}^{-1} D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2} = \sigma_{\mathbf{k}_2}^{-1} D_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1},$$

при помощи кинетического уравнения можно убедиться, что скорость изменения со временем энтропии волнового поля $\int \ln F_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$ равна некоторому взвешенному интегралу от квадрата величины

$$A = \sigma_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}^{-1} + \sigma_{\mathbf{k}_1} F_{\mathbf{k}_1}^{-1} + \sigma_{\mathbf{k}_2} F_{\mathbf{k}_2}^{-1}.$$

Поэтому термодинамически равновесный спектр есть решение уравнения $A = 0$ на $\mathscr{L}_{\mathbf{k}}$. Единственным *дифференцируемым* решением служит такой же, как у статистически равновесной двумерной турбулентности, изотропный спектр $(a + bk^2)^{-1}$, где a и b — постоянные («температуры»), вытекающий из сохранения энергии и энстрофии.

Однако, в отличие от двумерной турбулентности, случайное поле волн Россби—Блиновой со временем анизотропизируется (см. § 37). Поэтому существенно, что стационарным решением кинетического уравнения служит также сингулярный спектр $\Phi(k_y)\,\delta(k_x)$ произвольного стационарного зонального течения. Отметим, что его сумма с любым симметричным по k_x решением $F_{\mathbf{k}}(t)$ кинетического уравнения также удовлетворяет этому урав-

нению; если же решение имеет вид $\Phi(k_y)\,\delta(k_x)+F_k(t)$, где добавка асимметрична, то она со временем симметризуется (до некоторой степени, допускаемой сохранением меридиональной компоненты импульса).

Наконец, можно убедиться, что стационарное решение $\Phi(k_y)\,\delta(k_x)+(a+bk^2)^{-1}$ статистически равновесно. Оно, правда, вообще говоря, недостижимо, так как, согласно кинетическому уравнению, на оси k_y спектр не меняется со временем. Но тенденция решений кинетического уравнения при разнообразных начальных данных эволюционировать к такому статистически равновесному виду была подтверждена рядом численных экспериментов Г. М. Резника с соавторами (1981—1984).

Таким образом, происходит *анизотропизация* волнового поля — концентрация значительной (но не стопроцентной) доли его энергии около оси k_y, т. е. в зональном течении (создаваемое β-эффектом и нелинейностью явление отрицательной вязкости), с одновременным уменьшением энтропии поля в этой области спектра — а также *изотропизация* поля вдали от окрестности оси k_y, т. е. равномерное распределение оставшейся доли энергии по всем направлениям волновых векторов со спектром волновых чисел $(a+bk^2)^{-1}$ в области $|k_x|>\delta>0$ (которая, кроме того, определяет эволюцию суммарной энтропии поля).

§ 42. Генерация и диссипация

Генерация вихрей и волн Россби—Блиновой осуществляется главным образом благодаря бароклинной неустойчивости крупномасштабных течений за счет их доступной потенциальной энергии — см. § 12, где этот процесс был рассмотрен на примере бароклинной неустойчивости зональных течений в земной атмосфере.

Кроме того, синоптические вихри и волны (масштаба L) могут генерироваться при обтекании неровностей h' рельефа дна — их роль становится сравнимой с β-эффектом при $h'/h\sim L/r_0$, и критическое значение $h'=hL/r_0$ в Мировом океане оказывается в десятки раз меньше, чем в атмосфере, что и создает гораздо большую распространенность в нем топографических вихрей и волн Россби—Блиновой. Наконец, для океана специфична возможность генерации синоптических процессов прямыми атмосферными воздействиями.

Из формулы (12.10) для энергии геострофических течений следует, что отношение Π/K их доступной потенциальной и кинетической энергии имеет порядок $(L/L_R)^2$. В океане $L_R\sim 50$ км, так что у крупномасштабных течений с $L\sim 1000$ км получается $\Pi\sim$ $\sim 400\,K$ (порядка $7\cdot 10^2$ Дж/м^2 по эмпирической оценке И. Л. Вулис и А. С. Монина, 1975), а у синоптических течений с $L\sim L_R$ получается $\Pi\sim K$ (порядка 20 Дж/м^2 по эмпирической оценке

К. Виртки, Л. Магаарда и Дж. Хагера, 1976). Таким образом, суммарная энергия синоптических вихрей в океане имеет порядок 10 % от доступной потенциальной энергии крупномасштабных течений, и генерация вихрей мало меняет крупномасштабные наклоны изэнтропических поверхностей.

При помощи уравнений гидродинамики синоптических возмущений зонального течения (12.15) и уравнения их энергии (12.16) можно убедиться, что в бароклинно-неустойчивых возмущениях жидкие частицы должны двигаться в меридиональной плоскости с наклоном к горизонту $w'/v' \sim (Uh/L)/f_0L$, ограниченным наклоном изэнтроп f_0U/N^2h, откуда получается неравенство $(L_R/L)^2 \leqslant 1$. Оно означает, что масштабы L бароклинно-неустойчивых возмущений не могут быть существенно меньше L_R.

В § 12 мы установили *достаточные* условия бароклинной *устойчивости* произвольного зонального течения $U(y, p)$, а для простейшего случая $U=U(p)$ доказали теорему Л. А. Дикого о том, что при условиях Рэлея или Фьортофта и фиксированных значениях параметров не может быть более одного бароклинно-неустойчивого синоптического возмущения. Здесь мы добавим к этим результатам *необходимые* условия бароклинной *неустойчивости* зональных течений, используя, как почти всюду в этой главе, координаты (x, y, z) и ограничившись для упрощения формул краевым условием «твердой крышки» на поверхности океана, но зато рассмотрим более общий вид зонального течения $U=U(y, z)$ и синоптических возмущений $\psi=\psi(y, z)\exp[ik_1(x-ct)]$. Для их амплитуд $\psi(y, z)$ вместо (12.17), (12.18) получаются уравнения:

$$(U-c)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}-k_1^2\psi\right)+B\psi=0;$$

$$B=\beta-\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial U}{\partial z}; \qquad (42.1)$$

$$(U-c)\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}\psi=0 \quad \text{при} \quad z=0,\ -h, \qquad (42.2)$$

где B есть меридиональный градиент квазигеострофического потенциального вихря зонального течения. Пусть у этих уравнений имеется ненулевое решение со значением $\operatorname{Im} c>0$. Разделив (42.1) на $U-c$, умножив на ψ^*, проинтегрировав по y и z и отделив действительную и мнимую части, получим

$$\int\int\frac{B|\psi|^2\,dy\,dz}{|U-c|^2}+\int\left[\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{|\psi|^2}{|U-c|^2}\right]_{z=-h}^{z=0}dy=0; \qquad (42.3)$$

$$\int\int\frac{UB|\psi|^2\,dy\,dz}{|U-c|^2}+\int\left[\frac{f_0^2}{N^2}U\frac{\partial U}{\partial z}\frac{|\psi|^2}{|U-c|^2}\right]_{z=-h}^{z=0}dy=$$

$$=\int\int\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|^2+\frac{f_0^2}{N^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|^2+k_1^2|\psi|^2\right)dy\,dz. \qquad (42.4)$$

Первое из этих равенств показывает, что либо B где-то меняет знак, либо на каком-то участке дна $(\partial U/\partial z)_{-h}$ совпадает по знаку с B, либо на каком-то участке поверхности океана $(\partial U/\partial z)_0$ отличается по знаку от B. Согласно (42.4), либо в какой-то области $UB>0$, либо на каком-то участке дна $(U\,\partial U/\partial z)_{-h}<0$, либо на каком-то участке поверхности $(U\,\partial U/\partial z)_0>0$. Если ни одно из этих шести условий не выполняется, то зональное течение устойчиво (но противоположное положение неустойчивости еще не гарантирует). Укажем также неравенство

$$(2k_1 \operatorname{Im} c)^2 \leqslant k_1^2 (k_1^2 + R_y^{-2} + R_z^{-2})^{-1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{f_0^2}{N^2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right]; \quad (42.5)$$

$$R_y^{-2} = R^{-2} \int \left| \frac{\partial \chi}{\partial y} \right|^2 dy\, dz; \quad R_z^{-2} = R^{-2} \int \frac{f_0^2}{N^2} \left| \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|^2 dy\, dz;$$

$$R^2 = \int |\chi|^2 dy\, dz; \quad \chi = \psi (U - c)^{-1/2}$$

(Дж. Педлоски, 1979), ограничивающее инкремент роста неустойчивых возмущений тем больше, чем меньше k_1. В частности, при бароклинной неустойчивости масштаб L нарастающих возмущений не может быть существенно меньше L_R, но согласно (42.5) с увеличением $L \sim k_1^{-1}$ рост возмущений замедляется, так что можно ожидать, что и у развитых возмущений будет $L \sim L_R$.

Конкретный расчет собственных значений c уравнений (42.1) и (42.2), как обычно, не прост. В двухслойной модели необходимые и достаточные условия *неустойчивости* получаются в виде $U = U_1 - U_2 > \beta g' h_2 f_0^{-2}$ при $U>0$ и $U<-\beta g' h_2 f_0^{-2}$ при $U<0$, где $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$, причем индекс 1 относится к верхнему, а 2 — к нижнему слою (Дж. Педлоски, 1979).

Топографические волны Россби—Блиновой были рассмотрены в § 39. Среди них здесь следует упомянуть те, которые могут возникать только за счет рельефа дна, как, например, нулевая топографическая мода с частотой (39.3) при $\gamma<0$. Напомним также, что волны над наклонным дном с дисперсионным соотношением (39.8), над шероховатым дном с дисперсионным соотношением (39.13) и захваченные моды над волнистым дном с дисперсионным соотношением (39.16) могут существовать и в отсутствие β-эффекта.

Г. Хапперт и К. Брайен (1976) рассмотрели вихри, образующиеся при обтекании со скоростью U изолированной подводной возвышенности высотой h_m с сохранением в жидких частицах квазигеострофического потенциального вихря

$$\omega_* = \omega - \frac{g f_0}{\rho_0 N^2} \frac{\partial \rho'}{\partial z}; \quad \omega = \Delta\psi \quad (42.6)$$

(взятого для простоты при $\beta=0$ и $N=\text{const}$). У частиц, поднимающихся на возвышенность, вследствие подъема холодных вод $(-\partial\rho'/\partial z)$ увеличивается, и ω уменьшается. Наоборот, у частиц,

спускающихся с возвышенности, ω увеличивается. В результате над возвышенностью должен образовываться холодной антициклонической, а за ней вниз по течению — теплый циклонический вихрь. Расчеты показали, что антициклонический вихрь всегда остается «привязанным» к возвышенности, а циклонический при небольших $Nh_m/U \sim 10^0$ сносится вниз по течению (вихри при этом более интенсивны), а при больших $Nh_m/U \sim 10^1$ остается «привязанным» (и вихри менее интенсивны; этот случай, по-видимому, типичен для реального океана).

Из прямых атмосферных воздействий на поверхность океана, способных генерировать в нем синоптические движения, следует рассмотреть напряжение трения ветра и атмосферное давление, а также упоминавшийся в § 46 поток плавучести M_s. Эмпирические данные о пространственно-временных спектрах этих величин в диапазоне масштабов океанских синоптических движений были изучены Л. Магаардом (1977), Дж. Виллебрандом (1978) и особенно детально С. Франкиньюлем и П. Мюллером (1979) (которые построили и излагаемую ниже теорию реакции океана на атмосферные воздействия). Эти данные показали, что основную роль играет лишь напряжение трения ветра (атмосферное давление становится существенным лишь на значительно больших частотах и длинах волн, а роль потока плавучести еще много меньше).

В умеренных широтах спектры атмосферных воздействий имеют максимумы в области периодов в несколько дней и длин волн 3—6 тыс. км, свойственных атмосферным синоптическим процессам, но содержат значительную энергию и на более низких частотах и бóльших волновых числах. Установлено, что на периодах больше 10—20 сут временные спектры становятся слабо зависящими от частоты, а при длинах волн меньше 3000 км пространственные спектры приблизительно изотропны, и что для пространственно-временного спектра вихря напряжения трения ветра при малых частотах пригодна эмпирическая модель:

$$F_{\mathbf{k}} = F_0 k^2 S_{\mathbf{k}}; \quad F_0 = 10^4 H^2 \ (\text{м}^4 \cdot \text{Гц})^{-1}; \tag{42.7}$$

$$2\pi k S_{\mathbf{k}} = \begin{cases} {}^3/_4 k_0^{-3} k^2, & 0 \leqslant k \leqslant k_0 = 2\pi/5\,000 \text{ км}; \\ {}^3/_4 k_0 k^{-2}, & k_0 \leqslant k \leqslant k_1 \gg k_0; \\ 0, & k > k_1, \end{cases}$$

где $S_{\mathbf{k}}$ — нормированный на единицу пространственный спектр (его реальная анизотропность при $k < k_0$ мало существенна, так как в области $k < k_0$ атмосферные возмущения движутся в основном на восток и не вызывают резонансной реакции океана; мало существенно и то, что реальные спектры при $k > k_0$ спадают немного круче, чем по этой модели). Вследствие симметрии $F_{\mathbf{k}\sigma} = F_{-\mathbf{k}, -\sigma}$ здесь учтены и движущиеся на запад атмосферные

возмущения, способные резонансно возбуждать волны Россби—Блиновой в океане.

Реакцию океана на атмосферные воздействия можно рассчитывать при помощи линеаризнрованного уравнения для волн (38.1), введя в первое из краевых условий (38.2) правую часть $Q/g = -\mathrm{rot}\,\tau/\rho_0 f_0^2$, а во втором приняв $h = \mathrm{const}$. Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \int \psi_{n\mathbf{k}}(t)\,\Psi_n(z)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,d\mathbf{k}, \tag{42.8}$$

где $\Psi_n(z)$ — ортонормированные собственные функции уравнения (38.4), а амплитуды $\psi_{n\mathbf{k}}$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial \psi_{n\mathbf{k}}}{\partial t} + i\sigma_{n\mathbf{k}}\psi_{n\mathbf{k}} = \frac{Q_{n\mathbf{k}}}{1+k^2L_n^2} = \frac{s_n Q_{\mathbf{k}}}{1+k^2L_n^2}, \tag{42.9}$$

где $Q_{\mathbf{k}}(t)$ — преобразование Фурье по x функции Q (причем $Q_{n\mathbf{k}}$ — коэффициенты разложения Q вида (42.8)), $L_n^2 = gh_n f_0^{-2}$ — нормированные собственные значения уравнения (38.4) и $s_n = \int_{-h}^{0} \Psi_n\,dz = h_n\Psi_n(0)$. Далее нам понадобится только получающийся из (42.9) асимптотически при $t \to \infty$ пространственный спектр поля ψ:

$$\left\langle \psi_{n\mathbf{k}}(t)\,\psi^*_{n\mathbf{k}_1}(t)\right\rangle = \frac{2\pi t s_n^2}{(1+k^2L_n^2)^2}\,\Phi_{\mathbf{k}\sigma_n}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}, \tag{42.10}$$

где $\Phi_{\mathbf{k}\sigma}$ получается из спектра $F_{\mathbf{k}\sigma}$ формулы (42.7) умножением на $g^2/\rho_0^2 f_0^4$. Пропорциональность времени t здесь связана со стохастичностью резонансного возбуждения. Полная энергия столба воды единичного сечения теперь получается в виде:

$$\langle E(t)\rangle = \frac{1}{2}\rho_0 \int_{-h}^{0} \left\langle |\nabla\psi|^2 + \frac{f_0^2}{N^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|^2 + \frac{f_0^2}{gh}(\psi^2)_{z=0}\right\rangle dz =$$

$$= \int d\mathbf{k} \int_{-h}^{0} E_{\mathbf{k}}(z,\,t)\,dz; \quad E_{\mathbf{k}}(z,\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n\mathbf{k}}(z,\,t);$$

$$E_{n\mathbf{k}}(z,\,t) = \frac{1}{2}\rho_0\Psi_n^2(z)\int \left\langle \psi_{n\mathbf{k}}(t)\,\psi^*_{n\mathbf{k}}(t)\right\rangle (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1 + L_n^{-2})\,d\mathbf{k}_1, \tag{42.11}$$

где $E_{\mathbf{k}}(z,\,t)$ есть спектральная плотность полной энергии. Создаваемый атмосферным воздействием поток энергии к волновому числу $\mathbf{k}$ на глубине z оказывается асимптотически равным

$$\frac{\partial E_{\mathbf{k}}(z,\,t)}{\partial t} = \pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^2 L_n^2 \Psi_n^2(z)\,\Phi_{\mathbf{k}\sigma_n}}{1+k^2L_n^2}. \tag{42.12}$$

В n-й моде он пропорционален $\Psi_n^2(z)$ и потому существенно зависит от профиля $N(z)$; при $n=1$ энергия сосредоточивается в основном в верхнем слое океана, а с ростом n все шире распределяется по глубинам. Менее чувствителен к деталям стратификации поток энергии $\partial E_k/\partial t$, проинтегрированный по глубине (интеграл от Ψ_n^2 равен единице); аналогичный поток кинетической энергии K_k имеет вид

$$\frac{\partial K_k}{\partial t} = \pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^2 k^2 \Phi_{k\sigma_n}}{(1+k^2L_n^2)^2}. \qquad (42.13)$$

Стратификация влияет на эти потоки через величины L_n и s_n, причем при замене $N(z)$ на $N=\text{const}$ величины L_n меняются немного, а s_n при $n>1$ — значительно. Слагаемые с $n=0$ образуют баротропные части потоков энергии (практически не зависящие от стратификации), суммы остальных слагаемых суть бароклинные части. При $N=\text{const}$ и с учетом того, что в рассматриваемом интервале частот $\Phi_{k\sigma} \approx \Phi_{k0}$, для баротропных частей получается

$$\frac{\partial E_k^{bt}}{\partial t} = \frac{\pi\rho_0 f_0^4 \Phi_{k0}}{g^2 h\left(k^2+L_0^{-2}\right)}; \quad \frac{\partial K_k^{bt}}{\partial t} = \frac{\pi\rho_0 f_0^4 k^2 \Phi_{k0}}{g^2 h\left(k^2+L_0^{-2}\right)^2}. \qquad (42.14)$$

Ряды для бароклинных частей в этом случае суммируются и получается

$$\frac{\partial E_k^{bc}}{\partial t} = \frac{\pi\rho_0 f_0^4}{g^2 h k^2}\left(kL_R \operatorname{cth} kL_R - 1\right)\Phi_{k0};$$

$$\frac{\partial K_k^{bc}}{\partial t} = \frac{\pi\rho_0 f_0^4 L_R^2}{2g^2 h}\left(\operatorname{cth}^2 kL_R + \frac{\operatorname{cth} kL_R}{kL_R} - 1 - \frac{1}{k^2L_R^2}\right)\Phi_{k0}. \qquad (42.15)$$

Баротропные передаточные функции сосредоточены в основном около $k=L_0^{-1}$ и затухают при $k\to\infty$, как k^{-2}. Бароклинные функции мало сосредоточены и затухают, как k^{-1}. Проинтегрированные по k в интервале длин волн от 4000 до 50 км баротропные потоки (42.14) оказываются равными $2{,}90\cdot10^{-4}$ и $2{,}85\cdot10^{-4}$ Вт/м², т. е. почти весь поток идет на увеличение кинетической энергии (преимущественно длинных волн; эти цифры не очень чувствительны по отношению к виду спектра S_k). Аналогичные бароклинные потоки равны $1{,}5\cdot10^{-4}$ и $0{,}5\cdot10^{-4}$ Вт/м², т. е. здесь основная доля потока идет на увеличение доступной потенциальной энергии (эти потоки и их распределение по длинам волн чувствительно зависят от вида спектра S_k).

Суммарный поток $0{,}44\cdot10^{-3}$ Вт/м² сравним с осредненной по пространству оценкой 10^{-3} Вт/м² А. Гилла, Дж. Грина и А. Симмонса (1974) потока от бароклинной неустойчивости, но в зонах струйных течений последний много больше. Таким образом,

генерация атмосферными воздействиями существенна вне зон струйных течений, и там резонансное атмосферное воздействие ответственно в основном за баротропные синоптические возмущения. Для нерезонансных воздействий вместо (42.10) получается

$$\langle \psi_{m\mathbf{k}\sigma} \psi^*_{n\mathbf{k}_1\sigma_1} \rangle = \frac{s_m s_n \Phi_{\mathbf{k}\sigma}\, \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}\, \delta_{\sigma-\sigma_1}}{(\sigma-\sigma_{m\mathbf{k}})(\sigma-\sigma_{n\mathbf{k}})(1+k^2L_m^2)(1+k^2L_n^2)}, \qquad (42.16)$$

и при $\sigma \gg \sigma_m$, σ_n этот спектр ведет себя, как σ^{-2}, что подтверждается некоторыми эмпирическими данными по центральной части северной половины Тихого океана.

В высоких широтах уровень F_0 спектра (42.7) оказывается втрое выше, и этот спектр затухает при больших k быстрее. Это вдвое увеличивает баротропные и более чем на порядок уменьшает бароклинные потоки энергии. В тропиках, вероятно, существенную роль играет воздействие ураганов и тайфунов.

Добавив в кинетическое уравнение (41.15) слагаемое, описывающее вязкую диссипацию кинетической энергии, можно убедиться, что ее действие существенно лишь при больших k. Хотя это слагаемое изотропно, его эффект анизотропен: согласно упоминавшимся выше численным экспериментам Г. М. Резника с соавторами, диссипация подавляет короткие волны, направление распространения которых достаточно далеко от меридионального, волны же меридионального направления почти не подавляет (а иногда даже немного усиливает по сравнению с расчетом без вязкости), внося тем самым дополнительный вклад в анизотропизацию волнового поля.

Это подтверждается также конфигурацией областей в плоскости $\mathbf{k}$ с притоком энергии $\partial F_{\mathbf{k}}/\partial\tau > 0$ и с ее оттоком $\partial F_{\mathbf{k}}/\partial\tau < 0$. При наличии диссипации область притока концентрируется около оси k_y и со временем сужается, а вне ее суммарная энергия убывает со временем (и убывает также суммарная энтропия всего поля). При отсутствии диссипации возникает еще область притока далеко от оси k_y, приводящая там к изотропизации поля вследствие его приближения в этой области к статистическому равновесию.

При наличии стационарных источников и стоков энергии, разнесенных по спектру, Е. Н. Пелиновский (1978) указал для инерционного интервала изотропные спектры $F_{\mathbf{k}} \sim k^{-5/2}$, k^{-3} и $k^{-7/2}$, соответствующие постоянным спектральным потокам энергии, энстрофии и импульса. Более детальные предсказания, с учетом анизотропии, вывел А. Г. Сазонтов (1981):

$$F_{\mathbf{k}} \sim k_x^{-3/2} k_y^{-2}, \quad k_x^{-3/2} k_y^{-3} \quad \text{и} \quad k_x^{-1} k_y^{-7/2}$$

(последний спектр соответствует постоянному спектральному потоку меридиональной компоненты импульса).

ЧАСТЬ 3

ГЛОБАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Общая циркуляция атмосферы и океана

Теория климата

Гидродинамика недр планет

ГЛАВА 8

Общая циркуляция атмосферы и океана

§ 43. Общая циркуляция атмосферы

Термин *циркуляция* здесь обозначает движение (иногда этот термин применяется уже, обозначая движения по квазизамкнутым траекториям — «колесам циркуляции»). Атмосферные движения целесообразно подразделять на *мелкомасштабные* — с масштабами L много меньше эффективной толщины атмосферы H (определяемой, например, формулой (2.6)), *мезомасштабные* — с L порядка H или нескольких H и *крупномасштабные* — с $L \gg H$ (В. Н. Колесникова и А. С. Монин, 1965). Последние включают глобальные циркуляции — зональную и муссонные, а также синоптические процессы, т. е. вихри и волны Россби—Блиновой, баротропные с масштабами порядка $L_0 = c_0/f$, $c_0 = (gH)^{1/2}$ и бароклинные с масштабами порядка $L_R = HN/f$. Статистический ансамбль крупномасштабных атмосферных движений образует общую циркуляцию атмосферы.

Атмосферная циркуляция на Земле, Марсе, Венере создается благодаря бароклинности атмосферных газов (зависимости ρ от T типа (1.7)) пространственными неоднородностями их нагрева длинноволновым излучением подстилающей поверхности и непосредственно коротковолновой солнечной радиацией. При нагреве воздух расширяется, и его массы приподнимаются, так что на фиксированной высоте давление в нем увеличивается. Повышенное давление на высотах в теплых районах заставляет воздух на верхних уровнях оттекать в холодные районы. На нижних уровнях при этом образуется компенсирующее подтекание воздуха в теплые районы. Такая циркуляция между экваториальной зоной и умеренными широтами на Земле называется *пассатной* (это представление впервые сформулирован Г. Хэдли, 1735; последующие авторы вводили и дополнительные «колеса» меридиональной циркуляции).

На Земле и Марсе сила Кориолиса поворачивает поток воздуха от экватора к полюсам на верхних уровнях на восток, формируя западный перенос в верхней атмосфере умеренных широт (и направленную на запад составляющую приземных пассатных ветров в тропиках). Метеорологические измерения, однако, показали, что «колеса» меридиональной циркуляции слишком слабы и не могут количественно объяснить наблюдаемой на Земле очень сильной

зональной циркуляции (в том числе субтропических струйных течений на широтах в среднем около $\pm 35°$ и высотах около 12 км, имеющих эффективную ширину 300—400 км, толщину 1—2 км, скорости 60—80 м/с и более — зарегистрированный рекорд 190 м/с).

Количественное объяснение удалось получить, лишь учтя роль синоптических процессов. Впервые это сделал А. Дефант (1921), трактовавший синоптические вихри, как макротурбулентность (см. § 37), осуществляющую меридиональный перенос тепла (по его оценке, с эффективным коэффициентом обмена $\rho\nu \sim 10^8$ г/(см·с)), а Г. Джеффрис (1926) предположил, что она дает основной вклад и в меридиональные потоки момента импульса.

Систематическое гидродинамическое описание общей циркуляции атмосферы одним из первых предложил Н. Е. Кочин (1936). Он учел большую роль сил турбулентной вязкости, которые признал сравнимыми с силой Кориолиса (а не с силами инерции, как в теории пограничного слоя), и показал, как с помощью соответствующим образом упрощенных уравнений гидродинамики можно рассчитать трехмерные поля скорости и плотности по заданным полю наземного давления p_s и трехмерному полю T. Следующий шаг сделала Е. Н. Блинова (1947), добавив к уравнениям Кочина уравнение притока тепла и рассчитав с учетом материков и океанов средние годовые трехмерное поле T и поле p_s (в котором, в частности, впервые были получены теоретически все так называемые *центры действия атмосферы* — квазистационарные субтропические антициклоны и субполярные циклоны); позже она рассчитала и их годовой ход.

В полную теорию должны быть включены обратные связи между зональной циркуляцией и синоптическими процессами. С одной стороны, зональная циркуляция бароклинно неустойчива по отношению к малым незональным возмущениям (см. теорему Л. А. Дикого в § 12), которые, разрастаясь за счет ее доступной потенциальной энергии, превращаются в синоптические вихри (В. Бьеркнес, 1937). С другой стороны, статистический ансамбль синоптических вихрей может переносить момент импульса в широтные зоны со струйными течениями, т. е. действовать, как «отрицательная вязкость», и тем самым питать зональную циркуляцию своей кинетической энергией (К. Россби, 1941, 1947).

Необычный эффект «отрицательной вязкости» создается тем, что оси гребней волн Россби—Блиновой, направленные из тропиков в сторону субтропического струйного течения (в северном полушарии — на север), наклонены преимущественно в сторону течения (направлены на северо-восток). При этом момент импульса перед ложбинами, где он больше (так как течение ближе к зональному), переносится к струйному течению (на север), а за ложбинами, где он меньше (течение ближе к меридиональному), уносится от течения (на юг). В сумме по всей волне остается перенос момента импульса к струйному течению.

Следуя А. С. Монину и Д. Г. Сеидову (1982), продемонстрируем упрощенную качественную модель усиления струйного течения отрицательной вязкостью в однородном по вертикали слое жидкости постоянной глубины, в котором плотность ρ зависит только от температуры T. Выберем начало отсчета горизонтальных координат (x, y) на оси течения, направим ось x на восток, а ось y на север и положим

$$T = \text{const} - T_0 \sin\frac{\pi y}{2Y}; \quad U = -\frac{\alpha g z}{f}\frac{\partial T}{\partial y}; \quad |y| \leqslant Y, \qquad (43.1)$$

где U — скорость термического ветра, α — коэффициент термического расширения жидкости. Для кинетической энергии K струйного течения используем уравнение

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \rho\overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} + \varepsilon; \quad \overline{u'v'} = -k\frac{LU^2}{T_0}\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad (43.2)$$

где ε включает скорости генерации энергии K внешними силами, ее обмена с потенциальной энергией вследствие работы архимедовых сил и ее диссипации мелкомасштабными процессами. Вторая из этих формул дает параметризацию напряжений Рейнольдса, создаваемых синоптическими движениями. Эта параметризация аналогична предложенной Г. Виллиамсом и Д. Дэвисом (1965) (исходившими из того, что синоптические процессы генерируются бароклинной неустойчивостью зонального течения, и поэтому их эффекты должны определяться величиной $\partial T/\partial y$). Здесь L — масштаб синоптических процессов, и k — положительная числовая постоянная. Если в зоне струйного течения $\varepsilon \approx 0$, то получается

$$\frac{\partial K}{\partial t} = m^2\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^3\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\left(\frac{\pi}{2Y}\right)^5 m^2 T_0^4 \cos^3\frac{\pi y}{2Y}\sin\frac{\pi y}{2Y}, \qquad (43.3)$$

где $m^2 = k\rho(\alpha g z/f)^3 L T_0^{-1}$. Таким образом, в зоне $-Y \leqslant y \leqslant 0$ к югу от струйного течения оказывается $\partial K/\partial t > 0$, т. е. струйное течение усиливается за счет синоптических движений: действует отрицательная вякость. В зоне $0 \leqslant y \leqslant Y$ к северу от течения, наоборот, $\partial K/\partial t < 0$: там синоптические движения действуют, как диссипативный фактор, т. е. создают положительную вязкость. Через некоторое время в северной зоне течение затухает, а в южной интенсифицируется, так что в результате течение сузится вдвое, и его стрежень сместится на юг приблизительно на расстояние $Y/2$. Затем все эти процессы могут повторяться, пока этому не воспрепятствуют факторы ε, которыми мы вначале пренебрегали (и, может быть, действие внешних сил приведет к восстановлению струйного течения на его первоначальном месте). Эти предсказания получили подтверждение в численных экспериментах с так называемыми вихреразрешающими моделями, которые будут изложены в § 47.

Модель, в которой струйные течения разграничивают зоны положительной и отрицательной вязкости, можно проиллюстрировать на примере течения в плоском канале $|y| \leqslant Y$ с постоянным градиентом давления $\partial p/\partial x$ при наличии у его стенок $y = \pm Y$ пограничных слоев толщиной h с положительной вязкостью μ (и нулевой скоростью на стенках) и отрицательной вязкости $(-\mu_1)$

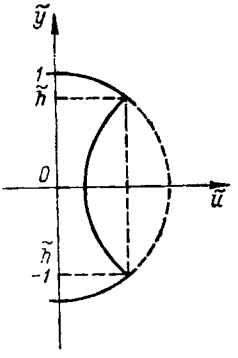


Рис. 43.1. Профиль скорости течения в плоском канале с отрицательной вязкостью в ядре и положительной в пограничных слоях у стенок.

в ядре течения $|y| \leqslant Y - h$. Профиль скорости $U(y)$ здесь состоит из отрезков парабол и имеет заострения в точках $|y| = Y - h$:

$$U(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}(y^2 - Y^2), & |y| \geqslant Y - h; \\ \dfrac{1}{2\mu_1}\dfrac{\partial p}{\partial x}[(Y-h)^2 - y^2] + \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}[(Y-h)^2 - Y^2], & |y| \leqslant Y - h. \end{cases} \tag{43.4}$$

Профиль безразмерной скорости

$$\tilde{U} = -\left(\frac{Y^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{-1} U$$

как функции от безразмерной поперечной координаты $\tilde{y} = y/Y$ при $\mu = \mu_1$ показан на рис. 43.1.

Роль зонального течения в общей циркуляции атмосферы существенно зависит от угловой скорости вращения планеты ω, значение которой удобно охарактеризовать *вращательным числом Маха* $\Pi_\omega = \omega r_0/c_r$, где r_0 — радиус планеты, а c_r — типичная скорость звука в ее атмосфере. При медленном вращении планеты (например, на Венере $\Pi_\omega = 6 \cdot 10^{-3}$) его непосредственное влияние на атмосферную циркуляцию мало, и она в большей мере определяется различием нагрева в подсолнечной и антисолнечной точках. При быстром вращении (например, на Юпитере $\Pi_\omega = 17$) оно определяет решающую роль зонального течения в циркуляции атмосферы.

На Земле $\Pi_\omega = 1{,}4$, и это определяет специфику общей циркуляции земной атмосферы — *сравнимость ролей зональной и муссонных циркуляций.* Последние создаются различиями в нагреве атмосферы над континентами и океанами, испытывающими сезонные колебания — континенты летом теплее, а зимой холоднее, чем океаны (сезонность проявляется и в меридиональной циркуляции: в каждый сезон в ней имеется лишь одна пассатная ячейка — с восходящими движениями на летней стороне от экватора и нисходящими в субтропиках зимнего полушария, так что эта ячейка переносит тепло в зимнюю сторону).

Специфика атмосферной циркуляции на Марсе заключается, во-первых, в том, что основная доля массы M его тонкой атмосферы (при среднем атмосферном давлении на поверхности $p_s \sim$ ~ 6 гПа и ускорении свободного падения $g = 370$ см/с^2 получается $M = p_s/g \approx 16$ г/см^2) сосредоточена в низинах (преимущественно в северном полушарии, которое в среднем на 2 км ниже южного), так что *топографические эффекты должны быть весьма существенными.* Во-вторых, для Марса специфичны *глобальные пыльные бури*, зарождающиеся на высоких плато в южных тропиках преимущественно в периоды солнцестояний в южном полушарии и распространяющиеся вследствие создаваемого ими выхолаживания в нижней атмосфере («антипарникового эффекта»), порождающего термический ветер (завихренный у поверхности циклонически, а в верхней атмосфере антициклонически), который поднимает в атмосферу новые количества пыли (П. Гираш, Р. Гуди, 1972; Г. С. Голицын, 1973; С. Хесс, 1973).

На Венере имеется очень мощная атмосфера ($p_s \sim 90$ кг/см^2, так что при $g = 890$ см/с^2 получается $M \approx 100$ кг/см^2), состоящая преимущественно из углекислого газа, который создает очень сильный парниковый эффект (температура у поверхности около 470 °С, толщина тропосферы 58 км, облачный слой на высотах 35—65 км). Собственное вращение Венеры очень медленное — с периодом 243 сут обратно обращению вокруг Солнца; при этом солнечные сутки на планете равны 117 сут. Атмосферная циркуляция в таких условиях должна развиваться преимущественно между подсолнечной и антисолнечной точками. Это подтверждается расчетами по численной модели С. С. Зилитинкевича, А. С. Монина, В. Г. Турикова и Д. В. Чаликова, 1971 (по которым из-за большой тепловой инерции атмосферы область восходящих движений отстает от подсолнечной точки и сдвинута на 45° к вечернему терминатору, а область нисходящих движений находится на ночной стороне около утреннего терминатора; средняя разность температур поверхности на дневной и ночной стороне получилась равной 1 °С). Согласно фотографиям аппарата «Маринер-10» (1974 г.), в окрестности подсолнечной точки имеется постоянное возмущение с ячеистой структурой облаков, занимающее $\pm 20°$ по широте и не менее 80° по долготе.

Специфической особенностью циркуляции венерианской атмосферы является быстрая (с периодом 4 сут и в ту же сторону, что и собственное вращение планеты) *зональная циркуляция ее верхних слоев*, обнаруженная по наблюдениям облаков в ультрафиолетовом излучении (с длинами волн 300—400 нм), выходящем в космос лишь из слоев выше примерно 60 км с атмосферным давлением меньше 400 гПа (Ш. Байе, 1960; Ш. Байе, А. Камишель, 1961). Ее объяснением может быть глубокий прогрев атмосферы

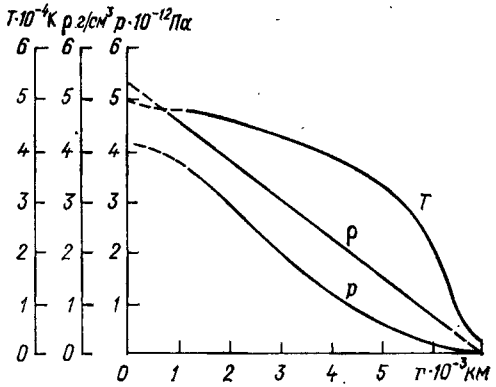


Рис. 43.2. Адиабатическая модель внутренней структуры Юпитера по В. П. Трубицыну (1971).

при медленном вращении планеты, создающий наклонные конвективные ячейки, которые передают импульс зональной циркуляции (Дж. Шуберт, Дж. Уайтхед, 1969).

К Юпитеру плохо применим даже сам термин «атмосфера». Эта планета состоит, как и Солнце, в основном из водорода и гелия (с отношением их удельных концентраций приблизительно 4 : 1). Ее внутренняя структура в первом приближении описывается адиабатической моделью с линейным распределением плотности по радиусу $\rho = 4\rho_0(1 - r/r_0)$ при $0{,}2 < r/r_0 < 0{,}98$, где $\rho_0 = 1{,}332$ г/см^3 — средняя плотность, а $r_0 \approx 70\,000$ км — средний радиус (В. П. Трубицын, 1971). На (p, T)-диаграмме фазового состояния вещества адиабата, проведенная через точку $p = 3 \cdot 10^5$ Па, $T = 150$ К, приписываемую верхней границе облаков, оказывается всюду существенно выше (по T) не только областей существования твердых водорода и гелия (обычных и металлизированных), но и критических точек Д. И. Менделеева, которыми заканчиваются линии, разделяющие газовую и жидкую фазы. Таким образом, вещество всюду находится в одной и той же *газожидкой* фазе (и лишь при $r/r_0 < 0{,}2$, вероятно, имеется твердое силикатное ядро). Радиальные распределения p, ρ, T по этой модели изображены на рис. 43.2.

Заметим еще, что на некоторой глубине (по-видимому, около $r/r_0 \sim 0{,}8$) вещество ионизируется, а затем непрерывно, без скачка плотности, металлизируется. Течения в этом глубинном

электропроводном газожидком веществе, очевидно, и обеспечивают генерацию наблюдаемого сильного магнитного поля Юпитера.

Поскольку считать атмосферой только надоблачный слой газа нет никаких оснований, на Юпитере следует рассматривать циркуляцию вещества всех планеты в целом (кроме относительно небольшого силикатного ядра).

«Горячая» модель Юпитера подтверждается измерениями его поверхностной температуры, которая оказывается заметно выше, чем равновесная температура T_r, определяемая из уравнения

$$f\sigma T_r^4 = q\left[=\frac{1}{4} I_0 (1 - A)\right], \qquad (43.5)$$

где f — излучательная способность, близкая к единице; $\sigma = 5{,}67 \times \times 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) — постоянная Стефана—Больцмана; левая часть — поток уходящего излучения; I_0 — солнечная постоянная, на Юпитере в 27 раз меньшая, чем на Земле; A — альбедо (в видимом свете равное 0,45); q — поток усваиваемого солнечного излучения. Она получается равной $T_r \approx 109$ К, тогда как измерения в инфракрасном излучении дали в среднем $T \approx 129$ К, а в отдельных местах темных полос (в которых недра не перекрыты облаками) — даже 200—310 К (упомянем еще наблюдения Калифорнийской группы в 1962 г., по которым в тени от спутника на диске Юпитера T поднимается на 50 К, так как там, по-видимому, облака тают, и открываются подоблачные недра).

Это означает, что Юпитер имеет внутренние источники тепла (возможно, теплоту продолжающегося сжатия). Создаваемый ими поток уходящего излучения оценивается в $(1{,}8 \ldots 2{,}0) I_0$. Естественно предположить, что он осуществляется конвекцией (вероятно, многоярусной); упомянем великолепные фотографии аппаратов «Пионер-10, -11» (1973—1974 гг.) и «Вояджер-1, -2» (1979 г.), обнаружившие ячеистую конвективную структуру полярных областей Юпитера. Конвекция и формирует адиабатическую структуру недр планеты.

Для Юпитера (и других больших планет) специфично очень быстрое и широтно-дифференциальное собственное вращение (отметим, что его экватор наклонен к плоскости орбиты всего на 3°05′). Для него используются три системы долгот: экваториальная PI с периодом вращения 9 ч 50 мин 30,003 с, для умеренных широт PII с периодом 9 ч 55 мин 40,632 с и по всплескам декаметрового радиоизлучения PIII с периодом 9 ч 55 мин 29,37 с. Наблюдаемая на его видимой поверхности циркуляция, естественно, оказывается зональной и состоит из параллельных экватору светлых *зон* (облака из аммиачного льда) и темных красноватых *полос* (рис. 43.3), испытывающих некоторую изменчивость во времени (как правило, междугодичную, но иногда детали с размерами до 10^4 км изменяются всего за 10^3 с). Квазиперманентным нарушением зональности является Большое красное пятно в Юж-

ной тропической зоне, имеющее размеры 40×13 тыс. км и антициклоническую завихренность и представляющее собою, по-видимому, долгоживущий синоптический вихрь (Г. С. Голицын, 1970). Полосчатая структура объясняется, возможно, конвективными роликами с восходящими движениями в зонах и нисходящими в полосах.

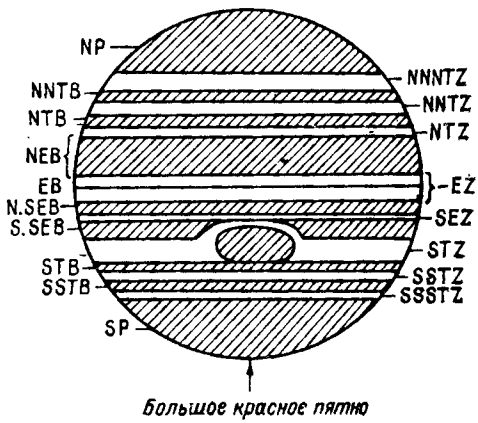


Рис. 43.3. Полосчатая структура поверхности Юпитера.

N — север, S — юг, B — пояс, Z — зона, E — экватор, P — полюс, T — тропики.

Собственно циркуляция распадается на отдельные зональные течения (табл. 43.1), на границах которых (не всегда совпадающих с границами зон и полос) имеются скачки скорости (иногда огромные, больше скорости звука). Их предположительным объяснением может быть упоминавшийся в конце § 37 предел анизотропизации крупных синоптических вихрей. Экваториальное

Таблица 43.1

Зональные потоки на диске Юпитера

Широта, °	Период, 9 ч + ...	Широта, °	Период, 9 ч + ...	Широта, °	Период, 9 ч + ...	Широта, °	Период, 9 ч + ...
90—47	55 мин 42 с	27	53 мин 17 с	10—3	50 мин 24 с	—22	55 мин 38 с
43	55 20	23	49 07	3—(—3)	50 24	—27	53 02
40—36	55 42	22—14	55 29	—3—(—10)	50 26 51 21	—29	55 20
35	53 55	15	55 32	—19	55 39 58 43	—31—(—45)	55 07
33—29	56 05	13	54 09	—21—(—26)	55 36	—45—(—90)	55 30

ускорение может быть глобальным эффектом отрицательной вязкости, создаваемой более мелкими синоптическими вихрями, скачки скорости — эффектом чередования зон положительной и отрицательной вязкости типа (43.3) и (43.4).

Общая циркуляция на других больших планетах, а также в конвективном слое Солнца качественно во многом аналогична тому, что здесь рассказано про Юпитер.

§ 44. Теория подобия для циркуляции планетных атмосфер

Для характеристики атмосферной циркуляции знание равновесной температуры $T_r=(q/f\sigma)^{1/4}$ еще совершенно недостаточно: нужно еще как минимум знать типичную разность температур в атмосфере между экватором и полюсами δT. Она входит в определение удельной скорости ε генерации кинетической энергии в атмосфере (Г. С. Голицын, 1968):

$$\varepsilon=\eta\frac{q}{M};\quad \eta=k\frac{\delta T}{T_r}, \tag{44.1}$$

где M — масса столба атмосферы единичного сечения, η — коэффициент полезного действия атмосферной «тепловой машины», k — коэффициент использования тепла ($k<1$, так как реальная тепловая машина хуже идеальной).

Например, в земной атмосфере при $I_0\approx 1370$ Вт/м^2 и $A\approx 0{,}30$ получается $q\approx 240$ Вт/м^2 и, по (43.5), $T_r\approx 255$ К. Такая температура формируется в атмосфере на высоте около 5 км. Ее отношение $\alpha_r=T_r/T_s\approx 0{,}89$ к средней температуре приземного слоя воздуха $T_s\approx 288$ К характеризует температурную стратификацию нижней атмосферы. При $\varepsilon\approx 4\cdot 10^{-4}$ м^2/с^3 получается $\eta\approx 0{,}018$, и при $\delta T\approx 50$ находим $k\approx 0{,}1$.

По T_r можно определить скорость звука $c_r=\left(\varkappa\frac{R}{\mu}T_r\right)^{1/2}$, где $\varkappa=c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей, $R=8{,}314$ Дж/(моль·К) универсальная газовая постоянная, а μ — относительная молекулярная масса атмосферного газа. Затем можно ввести масштаб синоптических процессов $L=c_r/2\omega$, где ω — угловая скорость вращения планеты, их типичное время $\tau\approx\varepsilon^{-1/3}L^{2/3}$, типичную скорость ветра $U\sim(\varepsilon L)^{1/3}$ и коэффициент создаваемого ими горизонтального перемешивания $K_h\sim 0{,}1\varepsilon^{1/3}L^{4/3}$. Так, для земной атмосферы при $\varkappa\approx 1{,}4$ и $\mu=29$ получается $c_r\approx 320$ м/с, $L\sim 3000$ км, $\tau\sim$ ~ 3 сут, $U\sim 10$ м/с и $K_h\sim 3\cdot 10^6$ м^2/с.

Подчеркнем теперь, что величина δT должна не задаваться, а определяться с помощью термогидродинамических соображений. Так, можно использовать условие равновесия между дивергенцией создаваемого воздушными течениями меридионального

потока тепла и потерями тепла на изучение. Это условие можно записать в следующем упрощенном виде:

$$c_p MU \frac{\delta T}{\pi r_0/2} = q \left[= f\sigma T_r^4 \right]. \qquad (44.2)$$

С помощью указанных выше определений величин T_r, ε и U из (44.2) получаем

$$\delta T = (f\sigma)^{-1/16} c_p^{-3/4} q^{9/16} \left(\frac{\pi r_0}{2M}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{k}\frac{r_0}{2L}\right)^{1/4} \qquad (44.3)$$

Множитель с $r_0/2L$ описывает влияние на δT скорость вращения планеты, которое уже обсуждалось в предыдущем параграфе. При быстром вращении имеем $2L = c_r/\omega < r_0$, так что $r_0/2L = \omega r_0 = \Pi_\omega > 1$, и поскольку перенос тепла от экватора к полюсам относительно мелкими вихрями не очень силен, разность температур $\delta T \sim \omega^{1/4}$ оказывается довольно большой. Наоборот, при медленном вращении $L \sim 2r_0$, и такое вращение на величину δT не влияет. Отметим еще сильную зависимость ряда характеристик атмосферной циркуляции от массы M столба атмосферы единичного сечения:

$$\eta \sim U \sim \delta T \sim M^{-1/2}; \quad \varepsilon \sim M^{-3/2}. \qquad (44.4)$$

Отсюда получается, в частности, любопытный вывод: полная кинетическая энергия атмосферной циркуляции $E \sim MU^2$ от M не зависит.

Изложенные предварительные рассуждения показывают, что характеристики атмосферной циркуляции зависят от семи размерных «внешних» параметров — усваиваемого потока солнечного излучения (или эндогенного тепла) q, радиуса планеты r_0, угловой скорости ее вращения ω, массы столба атмосферы единичного сечения M, ускорения свободного падения в атмосфере g (определяемого массой и радиусом планеты и, в свою очередь, определяющего давление на подошве атмосферы $p_s = Mg$; в недрах больших планет и Солнца надо определять функцию $g(r)$); удельной теплоемкости атмосферного воздуха c_p и приведенной постоянной Стефана—Больцмана $f\sigma$, а кроме того также от безразмерного «внешнего» параметра — относительной молекулярной массы атмосферного воздуха μ (входящей в формулы только через $R/\mu = c_p - c_v$).

Г. С. Голицын (1970, 1973) высказал гипотезу, что эти восемь параметров полностью определяют атмосферную циркуляцию, и построил соответствующую теорию подобия для циркуляции планетарных атмосфер. Поскольку независимых размерностей четыре (длина, время, масса и температура), из семи «внешних»

размерных параметров можно составить три независимые безразмерные комбинации (критерии подобия):

$$\Pi_\omega = \frac{r_0}{2L} = \frac{\omega r_0}{c_r}; \quad \Pi_g = \frac{H}{r_0} = \frac{c_r^2}{\varkappa g r_0}\left(H = \frac{c_r^2}{\varkappa g}\right);$$

$$\Pi_M = \frac{\tau_p}{\tau_r} = (f\sigma)^{3/8} c_p^{-3/2} q^{5/8} \frac{r_0}{M}\left(\tau_p = \frac{r_0}{c_p};\ \tau_r = \frac{c_p M T_r}{q}\right). \quad (44.5)$$

Можно условиться, чтобы ω входило во все формулы только через Π_ω (а если ω столь мало, что $L > 2r_0$, то полагается $\Pi_\omega = {}^1/_4$), g — только через Π_g (в выражении для Π_g величина H есть так называемая толщина однородной атмосферы), а M — только через критерий Π_M, который есть отношение времени релаксации возмущений давления (или плотности) τ_p ко времени тепловой релаксации (к состоянию локального радиационного равновесия) τ_r. Критерии подобия для планет, по Г. С. Голицыну (1973), имеют значения, представленные в табл. 44.1.

Таблица 44.1

Критерии подобия для планет

Планета	Π_ω	Π_g	Π_M
Меркурий	$8{,}5\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-2}$	>1
Венера	$7{,}6\cdot10^{-3}$	$8{,}3\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$
Земля	1,43	$1{,}2\cdot10^{-3}$	$1{,}17\cdot10^{-3}$
Марс	1,05	$3{,}2\cdot10^{-3}$	$3{,}3\cdot10^{-2}$
Юпитер	15,6	$2{,}4\cdot10^{-4}$	10^{-4}
Сатурн	14,7	$5{,}5\cdot10^{-4}$	10^{-4}
Уран	7,5	$1\cdot10^{-3}$	10^{-5}
Нептун	6	$6\cdot10^{-4}$	10^{-5}

Значения Π_M для больших планет даны условно, только для их надоблачных слоев, и то лишь по порядку величины. Малость Π_g и Π_M позволяет надеяться на автомодельность по этим параметрам, тогда как Π_ω меняется в широких пределах и может быть основой для классификации циркуляций планетных атмосфер.

Согласно теории подобия, любая характеристика атмосферной циркуляции F должна иметь вид

$$F = F_0(f\sigma,\ c_p,\ q,\ r_0)\,\Psi_F(\Pi_\omega,\ \Pi_g,\ \Pi_M), \quad (44.6)$$

где F_0 — комбинация размерности F из параметров $f\sigma$, c_p, q и r_0, а Ψ_F — безразмерная функция от критериев подобия (при малых Π_M зависящая от этого критерия, вероятно, степенным

образом). Так, полная кинетическая энергия общей циркуляции атмосферы должна иметь вид

$$E=\frac{1}{2}(4\pi r_0^2 M)\,U_0^2=(f\sigma)^{1/3}c_p^{-1/2}q^{7/8}r_0^3\Psi_E(\Pi_\omega,\ \Pi_g), \qquad (44.7)$$

где U_0 — средняя квадратическая скорость атмосферных движений. При этом оказывается, что Π_M отличается от квадрата числа Маха $(\mathrm{Ma})^2=(U_0/c_r)^2$ лишь множителем $2\pi(\varkappa-1)\Psi_E^{-1}$. Функцию Ψ_E можно определить, положив $\varepsilon=E/4\pi r_0^2\tau_0$, $\tau_0=L/U_0$, и сравнив эту формулу для ε с первой формулой (44.1), что даст η, а затем определив из второй формулы (44.1) величину δT и сравнив ее с (44.3). Таким образом получается

$$\Psi_E=(2\pi)^{1/3}k^{1/2}(r_0/L)^{-1/2},\quad L<r_0;$$
$$E=(2\pi)^{1/3}k^{1/2}(f\sigma)^{1/3}c_p^{-1/2}q^{7/8}r_0^3(r_0/L)^{-1/2}. \qquad (44.8)$$

Затем находится $U=(2E/M)^{1/2}$, из (44.2) получается $\delta T=(\pi r_0/2)\,q/c_pMU$, из (44.1) находятся η и ε.

В целях оценки возможных изменений атмосферной циркуляции при вариациях усваиваемого потока тепла q и его распределения по меридиану изложенную теорию подобия можно детализировать следующим образом (С. С. Зилитинкевич, А. С. Монин, 1973). Уравнение (43.5) остается в силе и записывается с точностью до постоянного (не варьируемого) множителя в виде $T\sim q^{1/4}$. В уравнении (44.1) величина q заменяется на типичную разность δq усваиваемых потоков тепла на экваторе и на полюсе, и это уравнение записывается, также с точностью до фиксированного множителя, в виде $\varepsilon\sim(\delta T/T)\,\delta q$. Уравнение (44.2) записывается в виде $c_pM(LU/r_0)\,(L\,\delta T/r_0)\sim\delta q$, и поскольку $L\sim c_r/\omega\sim T^{1/2}$, оно приводится к виду $TU\delta T\sim\delta q$. Наконец, добавляется определение $\varepsilon\sim U\tau$, где $\tau\sim\rho U^2$ — типичное напряжение трения в пограничном слое атмосферы, а $\rho\sim T^{-1}$ — плотность воздуха, так что оказывается $\varepsilon\sim U^3T^{-1}$. Из четырех перечисленных соотношений получаем следующие простые формулы:

$$T\sim q^{1/4};\quad \delta T\sim q^{-3/16}(\delta q)^{1/2};\quad U\sim q^{-1/16}(\delta q)^{1/2};\quad \varepsilon\sim q^{-7/16}(\delta q)^{3/2}. \qquad (44.9)$$

Оценим по ним сезонные колебания атмосферной циркуляции, считая, что летнее значение q в $1+\alpha$ раз больше среднего годового (по астрономическим данным, на день летнего солнцестояния $\alpha=0{,}33$) и что избыточный поток αq падает в основном на полярную область, т. е. δq приобретает множитель $1-\alpha$. Для зимнего полушария следует положить $\alpha=-0{,}39$. Результаты расчетов приводятся в табл. 44.2.

Сезонные колебания средней температуры T здесь получились заметно завышенными, так как атмосфера в сезонных колебаниях значительно отклоняется от лучистого равновесия, которое только

Таблица 44.2

Результаты расчетов по (44.9)

	$T_К$	δT °С	U м/с	$E \cdot 10^{-20}$ Дж	$\varepsilon \cdot 10^4$ м²/с³
Среднее годовое фактическое	287	60	20	5,3	5
Множитель для лета	1,07	0,78	0,80	0,64	0,48
Множитель для зимы	0,88	1,29	1,22	1,49	2,04
Летний экстремум, оценка	309,3	46,6	16,0	3,4	2,4
Южное полушарие, фактическое	289,2	40,2		3,9	
Зимний экстремум, оценка	254,6	77,6	24,4	7,8	10,2
Южное полушарие, фактическое	284,2	74,2		7,1	

и описывается формулой $T \sim q^{1/4}$. В то же время оценки сезонных колебаний всех остальных характеристик оказались вполне удовлетворительными. Эта успешность формул (44.9) позволяет использовать их для оценки возможностей энергетического воздействия на общую циркуляцию атмосферы.

Так, при увеличении солнечной постоянной в $1+\alpha$ раз или при том или ином размещении по поверхности Земли искусственных источников тепла мощностью αq (в пересчете на единицу площади всей Земли) будет $q \sim 1+\alpha$ и $T \sim (1+\alpha)^{1/4}$. При $\alpha=0{,}1$ это даст прирост средней температуры на 7,2 °С (но эта оценка, как было объяснено, завышенная). При размещении этих источников равномерно по всей поверхности Земли будет $\delta q \sim 1$, по экватору $\delta q \sim 1+\alpha$, на обоих полюсах $\delta q \sim 1-\alpha/2$, на одном полюсе в этом полушарии $\delta q \sim 1-\alpha$ (такой эффект создало бы уменьшение альбедо Арктики; например, уменьшение A с 0,8 до 0,3 увеличило бы локальный поток тепла в $(1-0{,}3)/(1-0{,}8)=3{,}5$ раза или на $2{,}5q$, но в пересчете на единицу площади всей Земли, в 40 раз превышающей площадь Арктики, было бы $\alpha=2{,}5/40 \approx \approx 0{,}06$, вшестеро меньше, чем при сезонных колебаниях). При $\alpha=0{,}1$, что эквивалентно огромной мощности искусственных источников тепла порядка 10^{13} кВт, это даст лишь малые изменения — δT в пределах —4... 2 °С, U в пределах ± 1 м/с и ε в пределах $\pm 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ м²/с³.

§ 45. Численные модели общей циркуляции атмосферы

Рассуждения в § 43 были качественными, а § 44 — хоть и количественными, но только оценочными. Поскольку атмосферы отличаются значительной пространственной неоднородностью, вертикальной и горизонтальной, которая к тому же меняется со временем (например, по сезонам), достаточно полное описание общей

их циркуляции требует расчета соответствующих гидротермодинамических полей.

Ограничиваясь здесь сравнительно тонкими атмосферами Венеры, Земли и Марса, учтем, что движения в подлежащих индивидуальному описанию глобальных и синоптических атмосферных процессах практически квазистатичны и бездивергентны. Их можно описывать соответствующим образом упрощенными уравнениями гидродинамики (в которых при использовании уравнения гидростатики следует применять так называемое «традиционное приближение» для ускорения Кориолиса и, кроме того, вследствие малости высот $z=r-r_0$ по сравнению с расстоянием r до центра планеты можно всюду заменять r на радиус планеты r_0). Уравнение гидростатики и условие бездивергентности поля скорости записываются в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-g\rho;\quad \frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{r_0\sin\theta}\left(\frac{\partial u_\theta \sin\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda}\right)=0. \qquad (45.1)$$

Уравнения горизонтального движения будут иметь вид:

$$\frac{du_\theta}{dt}-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r_0}u_\lambda^2-fu_\lambda=-\frac{1}{r_0\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta}+F_\theta;$$

$$\frac{du_\lambda}{dt}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r_0}u_\theta u_\lambda+fu_\theta=-\frac{1}{r_0\rho\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda}+F_\lambda;$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_z\frac{\partial}{\partial z}+\frac{u_\theta}{r_0}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{u_\lambda}{r_0\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}, \qquad (45.2)$$

где, как обычно, $f=2\omega\cos\theta$ — параметр Кориолиса, а F_θ и F_λ — компоненты силы трения, выражающиеся через тензор напряжений трения τ_{ij}:

$$\rho F_\theta=\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{1}{r_0\sin\theta}\left(\frac{\partial\tau_{\theta\theta}\sin\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta\lambda}}{\partial\lambda}\right)-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r_0}\tau_{\lambda\lambda};$$

$$\rho F_\lambda=\frac{\partial\tau_{\lambda z}}{\partial z}+\frac{1}{r_0\sin\theta}\left(\frac{\partial\tau_{\lambda\theta}\sin\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\lambda\lambda}}{\partial\lambda}\right)+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r_0}\tau_{\lambda\theta}. \qquad (45.3)$$

Для поля скорости краевое условие на поверхности суши $z=h(\theta,\lambda)$ имеет вид $u_z=u_\theta=u_\lambda=0$, а на поверхности океана, которую при рассмотрении крупномасштабных атмосферных процессов можно считать горизонтальной ($z=0$), полагается $u_z=0$ и требуется непрерывность u_θ, u_λ, p, $\tau_{\theta z}$ и $\tau_{\lambda z}$. Обычно, впрочем, уравнения (45.2) интегрируют лишь в области выше атмосферного пограничного слоя (АПС), в которой слагаемыми $\partial\tau_{\theta z}/\partial z$ и $\partial\tau_{\lambda z}/\partial z$ нередко пренебрегают, сам же АПС «параметризуют», т. е. выражают напряжение трения ρu_*^2 и турбулентные потоки тепла q и влаги E на его нижней границе через внешние параметры z_0,

U, δT, δs, f и g/T_0 теми или иными формулами типа (36.8), (36.9).

К уравнениям (45.1), (45.2) добавляется уравнение состояния влажного воздуха (1.7). Оно содержит два новых поля T и s, и для их определения привлекаются уравнения эволюции энтропии и влажности:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\varepsilon + \mathscr{L} m}{T} - \left[\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{r_0 \sin\theta}\left(\frac{\partial Q_\theta \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\lambda}\right)\right]; \quad (45.4)$$

$$\frac{ds}{dt} = -m - \left[\frac{\partial I_z}{\partial z} + \frac{1}{r_0 \sin\theta}\left(\frac{\partial I_\theta \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial I_\lambda}{\partial\lambda}\right)\right], \quad (45.5)$$

где ε — скорость *лучистого* притока тепла (и диссипации кинетической энергии) в единице массы воздуха, m — удельная скорость конденсации или сублимации водяного пара (при $m < 0$ это скорость испарения или возгонки), $\mathscr{L}$ — скрытая теплота конденсации или сублимации (для конденсации $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 - (c_w - c_{pv})(T - T_0)$, $\mathscr{L}_0 = 2\,502\,500$ Дж/кг, $c_w = 4190$ и $c_{pv} = 1810$ Дж/(кг · К), $T_0 = 0$ °С, для сублимации $\mathscr{L} = 2\,836\,300$ Дж/кг), $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{I}$ — мелкомасштабные потоки энтропии и влажности, см. (1.9), (1.10) и (1.13).

Величина m определяется при условии насыщения воздуха влагой в облаках, причем влажность насыщения $s = s_m(T, p)$ определяется по давлению насыщенного водяного пара $p_{vm}(T)$, удовлетворяющему уравнению Клаузиуса—Клапейрона $T^2 \times \times \partial \ln p_{vm}/\partial T = \mathscr{L}/R_v$ (более детальное описание облаков и осадков требует добавления эволюционных уравнений для концентраций жидкой воды и льда).

Краевым условием для уравнения (45.4) на нижней границе атмосферы служит уравнение бюджета тепла

$$q_s = (1 - A) F_s^{\downarrow} + F_L^{\downarrow} - B(T_s) - q - \mathscr{L} E + q_P + q_{wi}, \quad (45.6)$$

где q_s — поток тепла в глубь океана или почвы; $F_s^{\downarrow}$ — нисходящий поток прямой и рассеянной коротковолновой солнечной радиации; A — соответствующее альбедо подстилающей поверхности; $F_L^{\downarrow}$ — нисходящий поток длинноволнового излучения атмосферы; $B(T_s) = f\sigma T_s^4$ — длинноволновое излучение подстилающей поверхности с температурой T_s; q — турбулентный поток тепла в атмосфере (положительный вверх); $E = \rho I_z$ — скорость испарения; $q_P = c_w P (T_P - T_s)$ — поток тепла, приносимый осадками (P — скорость их выпадения, T_P — их температура); q_{wi} — теплота замерзания воды или таяния льда или снега (положительная при замерзании).

Краевым условием для уравнения (45.5) на водной поверхности служит влажность насыщения $s = s_m(T_s, p_s)$ при температуре T_s, а на поверхности суши — уравнение бюджета влаги

$$I_s = P - E - q_{wi}/\mathscr{L}_{wi} - E_s, \quad (45.7)$$

где I_s — поток влаги в почву, $q_{wi}/\mathscr{L}_{wi}$ — потеря воды при ее замерзании (а при $q_{wi}<0$ — приток при таянии; $\mathscr{L}_{wi}=$ $=334\,000$ Дж/кг — удельная теплота таяния льда); E_s — скорость поверхностного стока.

Механизм общей циркуляции атмосферы красноречиво характеризуется происходящими при ней преобразованиями кинетической и доступной потенциальной энергии $K=\overline{K}+K'$ и $\Pi=\overline{\Pi}+\Pi'$, причем, имея в виду, прежде всего, Землю, мы разбиваем их на части ($\overline{K}$, $\overline{\Pi}$) и (K', Π'), относящиеся соответственно к зонально-осредненной циркуляции и к незональным процессам. По образцу уравнения (5.3) для $\overline{K}$ выводится следующее точное локальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\frac{\bar{v}^2}{2}+\bar{\mathbf{v}}\cdot\overline{\rho'\mathbf{v}'}\right)+\nabla_\alpha\left[\left(\bar{\rho}\bar{v}^\alpha+\overline{\rho'v'^\alpha}\right)\frac{\bar{v}^2}{2}+\bar{\mathbf{v}}\cdot\left(\overline{\rho'\mathbf{v}'}\cdot\bar{v}^\alpha+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\overline{\rho\mathbf{v}'v'^\alpha}\right)+\bar{p}\bar{v}^\alpha-\bar{\sigma}^{\alpha\beta}\bar{v}^\beta\right]=\left[\overline{\rho\mathbf{v}'v'_\alpha}\cdot\nabla\bar{v}^\alpha-\overline{\rho'v'_\alpha}\left(\mathbf{v}'\cdot\nabla v'^\alpha+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\overline{\rho^{-1}\nabla_\alpha p}-\overline{\rho^{-1}\nabla_\beta\sigma^{\alpha\beta}}\right)\right]+\left(\bar{\rho}\bar{\mathbf{v}}+\overline{\rho'\mathbf{v}'}\right)\cdot\mathbf{g}+\bar{p}\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{v}}-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\alpha\beta}\bar{\varphi}_{\alpha\beta},\quad(45.8)$$

где $\varphi_{\alpha\beta}$ — тензор скоростей деформации. Аналогично получается и уравнение для K':

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\frac{\overline{v'^2}}{2}\right)+\nabla_\alpha\left(\frac{1}{2}\overline{\rho v'^2 v'^\alpha}+\frac{1}{2}\overline{\rho v'^2 v'^\alpha}+\overline{p'v'^\alpha}-\overline{\sigma'^{\alpha\beta}v'_\beta}\right)=$$

$$=-\left[\overline{\rho\mathbf{v}'v'_\alpha}\cdot\nabla\bar{v}^\alpha-\overline{\rho'v'_\alpha}\left(\mathbf{v}'\cdot\nabla v'^\alpha+\overline{\rho^{-1}\nabla_\alpha p}-\overline{\rho^{-1}\nabla_\beta\sigma'^{\alpha\beta}}\right)\right]+$$

$$+\overline{p'\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}'}-\frac{1}{2}\overline{\sigma'^{\alpha\beta}\varphi'_{\alpha\beta}}.\quad(45.9)$$

Слагаемые в квадратных скобках в правых частях этих двух уравнений отличаются только знаками и, значит, описывают обмен между $\overline{K}$ и K'. Первое и, по-видимому, главное из них $\overline{\rho\mathbf{v}'v'_\alpha}\cdot\nabla\bar{v}^\alpha$, описывающее работу напряжений Рейнольдса на градиентах зональной скорости, по-видимому, в среднем положительно, т. е. соответствует передаче кинетической энергии от незональных движений (синоптических процессов) к зональной циркуляции (отрицательная вязкость, баротропная устойчивость зональной циркуляции). Локальное уравнение для $\overline{\Pi}$ получается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\rho}\left(g\bar{z}+c_v\bar{T}\right)+\nabla_\alpha\left[\left(g\bar{z}+c_v\bar{T}\right)\left(\bar{\rho}\bar{v}^\alpha+\overline{\rho'v'^\alpha}\right)\right]=$$

$$=\left[\overline{\rho'\mathbf{v}'}\cdot\nabla\left(g\bar{z}+c_v\bar{T}\right)-\overline{\rho\mathbf{v}'\cdot\nabla\left(gz'+c_vT'\right)}-\bar{\rho}\,\overline{\rho^{-1}\nabla_\alpha\left(Q^\alpha+\frac{\partial w}{\partial s}I^\alpha\right)}\right]-$$

$$-\overline{\rho\mathbf{v}}\cdot\mathbf{g}-\overline{\rho\rho^{-1}p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}}+\frac{1}{2}\bar{\rho}\,\overline{\rho^{-1}\sigma^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}}.\quad(45.10)$$

Аналогично получается и уравнение для Π':

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\overline{\rho' z'} + c_v\overline{\rho' T'}\right) + \nabla_\alpha\left[\left(g\overline{\rho' z'} + c_v\overline{\rho' T'}\right)\bar{v}^\alpha + \overline{(gz' + c_v T')\rho v'^\alpha} + \right.$$

$$\left. + \bar{Q}^\alpha + \overline{\frac{\partial w}{\partial s} I^\alpha}\right] = -\left[\overline{\rho' \mathbf{v}'} \cdot \nabla\left(g\bar{z} + c_v\bar{T}\right) - \overline{\rho \mathbf{v}' \cdot \nabla (gz' + c_v T')} - \right.$$

$$\left. - \bar{\rho}\bar{\rho}^{-1}\nabla_\alpha\left(Q^\alpha + \overline{\frac{\partial w}{\partial s} I^\alpha}\right)\right] - \overline{\rho' \mathbf{v}'} \cdot \mathbf{g} - \overline{(1 - \bar{\rho}\bar{\rho}^{-1})\, p \operatorname{div} \mathbf{v}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\overline{(1 - \bar{\rho}\bar{\rho}^{-1})\,\sigma^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}}. \qquad (45.11)$$

Слагаемые в квадратных скобках в правых частях этих двух уравнений описывают обмен между $\bar{\Pi}$ и Π'. Первое и, по-видимому, главное из них $\overline{\rho' \mathbf{v}'} \cdot \nabla\left(g\bar{z} + c_v\bar{T}\right)$ описывает бароклинную неустойчивость зональной циркуляции (см. (12.16)). Согласно эмпирическим оценкам, оно в среднем отрицательно, т. е. описывает передачу доступной потенциальной энергии от зональной циркуляции к синоптическим процессам. Кроме того, $\bar{K}$ обменивается с $\bar{\Pi}$ со скоростью $\overline{\rho \mathbf{v}} \cdot \mathbf{g}$ и с Π' со скоростью

$$\overline{\rho' \mathbf{v}' \cdot \mathbf{g}} + \bar{p} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\alpha\beta}\bar{\varphi}_{\alpha\beta},$$

а K' обменивается с Π' со скоростью $\overline{p' \operatorname{div} \mathbf{v}'} - \frac{1}{2}\overline{\sigma'^{\alpha\beta}\varphi'_{\alpha\beta}}$

(а прямого обмена с $\bar{\Pi}$ не имеет).

Эмпирические оценки средних годовых значений элементов энергетического цикла общей циркуляции атмосферы северного полушария Земли, полученные А. Оортом и Дж. Пейшото (1974) по данным за период 1958—1963 гг., приведены на рис. 45.1. Значения энергии там даны в 10^5 Дж/м^2, скорости превращений энергии в Вт/м^2, стрелки наружу вверх и вниз указывают обмен энергией с южным полушарием, наружу направо — переходы $\bar{K}$ и K' в Π' из-за вязкой диссипации кинетической энергии. Основная ветвь энергетического цикла имеет вид $\bar{\Pi} \to \Pi' \to K' \to \bar{K} \to$ $\to (\bar{\Pi}, \Pi')$. Указанные авторы получили аналогичные оценки также за январь и июль и убедились, что зимой энергетический цикл гораздо интенсивнее, чем летом.

Аппроксимируя перечисленные дифференциальные уравнения разностными уравнениями на некоторой конечной пространственной сетке точек, решаемыми конечными шагами по времени, мы получаем численную модель общей циркуляции атмосферы.

Первую такую модель построил Н. Филлипс (1956). Это была двухуровенная квазигеострофическая модель на сетке в β-плоскости с шагами $\Delta x = 375$ км и $\Delta y = 625$ км. Мгновенное состояние

атмосферы характеризовалось 450 числами. Шаг по времени равнялся 0,5—2 ч. Лучистый приток тепла был задан эмпирической формулой $\varepsilon = -2\varepsilon_0 y/L$, $\varepsilon_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^2/с^3. $L = 5000$ км. Конденсационный приток тепла учитывался лишь путем занижения (на 20 %) параметра статической устойчивости. Из диссипативных факторов учитывались горизонтальная турбулентная вязкость и теплопроводность с коэффициентом $\mathcal{K}_h = 10^5$ м^2/с и приземное

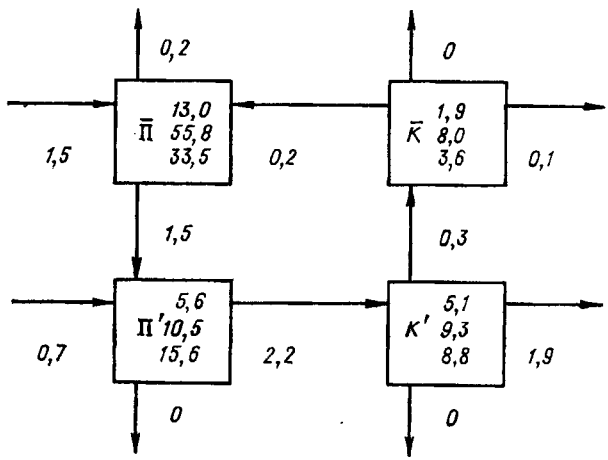


Рис. 45.1. Эиергетический цикл общей циркуляции атмосферы сeвериого полушария Земли по А. Оорту и Дж. Пейшото (1974).

Верхнее число — среднее за год, среднее — за зиму, нижиее — за лето.

трение с коэффициентом сопротивления $c_f = \tau/\rho U^2 = 3 \cdot 10^{-3}$. В основном эксперименте уравнения модели были проинтегрированы, начиная от слабовозмущенного состояния покоя, на 31-дневный срок. За это время модельная атмосфера достигла состояния со скоростями ветра порядка 10 м/с и амплитудами синоптических пульсаций давления порядка 20 гПа.

Этот успех создал основу для последовавшего бурного развития численных моделей планетных атмосфер. Для Земли одними из лучших были 9-уровенные модели сухой атмосферы Дж. Смагоринского, С. Манабе и Дж. Холлоуэя и влажной атмосферы С. Манабе, Дж. Смагоринского и Р. Стриклера, 1965, и 11-уровенная модель с сезонным ходом С. Манабе и Дж. Холлоуэя, 1974 (в дальнейшем же был осуществлен переход к моделям совместной циркуляции атмосферы и океана, которые будут рассматриваться в следующей главе).

В этих моделях в качестве вертикальной координаты использовалось нормированное давление $\sigma = p/p_s$, и величина $\dot{\sigma}$, аналогичная вертикальной скорости, полагалась равной нулю при $\sigma = 1$

и $\sigma=0$. При $\sigma=1$ бралось упрощенное уравнение теплового бюджета (45.6) (в частности, без потока тепла в почву). В «сухой» модели поток длинноволновой радиации вычислялся, как функция от температуры, при заданных климатологических распределениях (по широте и высоте) водяного пара, CO_2, озона, облачности и альбедо подстилающей поверхности, а поток коротковолновой радиации рассчитывался при среднем суточном косинусе зенитного угла Солнца. Было введено завоевавшее затем популярность «конвективное приспособление»: при превышении $|\partial T/\partial z|$ влажноадиабатического градиента $|\partial T/\partial z|_a$ величина $|\partial T/\partial z|$ заменялась на $|\partial T/\partial z|_a$ с сохранением полной потенциальной энергии. Турбулентное перемешивание описывалось при помощи коэффициентов обмена $\mathcal{K}_z$ и $\mathcal{K}_h$, выражавшихся через градиенты скоростей по формулам теории Л. Прандтля (упоминавшимся в § 33).

Уравнения этой модели записывались в разностной форме на пространственной сетке точек с 9 уровнями по вертикали (не считая границ $\sigma=1$ и $\sigma=0$) и 20 уровнями по широте между экватором и полюсом. Они интегрировались с шагом по времени 20 мин на период 310 сут, и по результатам за 231—300-е сутки вычислялись средние значения термогидродинамических полей, элементов энергетического цикла, долготных спектров компонент скорости и ряда других характеристик атмосферной циркуляции.

«Влажная» модель отличалась тем, что поле влажности, тепловые эффекты фазовых превращений влаги и осадки уже не задавались, а рассчитывались. При этом принималось, что подстилающая поверхность является влажной (и не имеет теплоемкости), а «конвективное приспособление» дополнялось запретом пересыщения воздуха влагой $s \leqslant s_m$ (т. е. при $s > s_m$ величина s заменялась на s_m с выделением $\mathcal{L}(s-s_m)$ тепла и образованием $s-s_m$ осадков). Такая модель воспроизвела атмосферную циркуляцию несколько лучше, чем «сухая», и неплохо описала элементы гидрологического цикла (например, среднее годовое количество осадков получилось равным 106 см/год против эмпирической оценки 104 см/год).

Зональным осреднением результатов расчетов по трехмерной модели атмосферы можно выделить зональную циркуляцию, но для ее описания представляется, на первый взгляд, более простым подходом использование зонально-осредненных уравнений гидротермодинамики. При этом из трех пространственных координат (θ, λ, z) остаются только две (θ, z), а три компоненты скорости $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_\lambda$, $\bar{u}_z$ выражаются через две функции от (θ, z, t), скажем функцию тока ψ в плоскости меридиана и угловую скорость α дифференциального зонального вращения атмосферы относительно подстилающей поверхности:

$$\bar{u}_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad \bar{u}_z = -\frac{1}{r_0\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}; \quad \bar{u}_\lambda = \alpha r_0 \sin\theta. \qquad (45.12)$$

Однако возникает и весьма существенное осложнение: в осредненных уравнениях появляются новые неизвестные величины — вторые моменты $\overline{u_i'u_j'}$, $\overline{u_i'\eta}$ и $\overline{u_i's}$, создаваемые крупномасштабными незональными движениями. Их выражение через градиенты осредненных полей и задание соответствующих коэффициентов макротурбулентной вязкости, теплопроводности и диф-

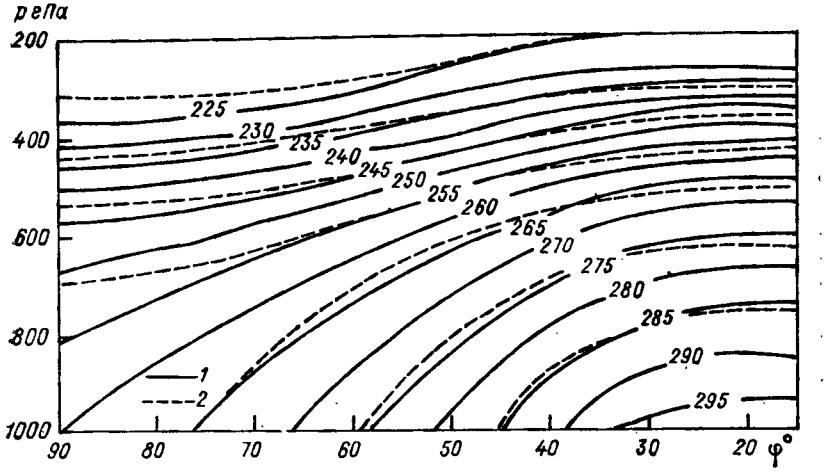


Рис. 45.2. Среднее годовое зональное поле температуры в тропосфере.
1 — фактическое, *2* — по расчету С. Е. Киричкова (1978).

фузии содержит немало произвола. Более того, в случае момента $\overline{u_\theta'u_\lambda'}$ *необходимо* вводить отрицательную вязкость, например, формулой типа (43.2).

Но несмотря на этот произвол, Г. Виллиамсу и Д. Дэвису (1965) и ряду последующих авторов удалось построить таким способом численные модели зональной циркуляции земной атмосферы, очень неплохо воспроизводящие данные наблюдений — см., например, на рис. 45.2 среднее годовое зональное поле температуры в тропосфере по расчету С. Е. Киричкова (1978). Оно практически совпадает с наблюдаемым всюду, кроме верхней тропосферы полярных областей, получившейся немного теплее реальной.

Можно существенно уменьшить произвол в параметризации вторых моментов, используя для них уравнения Фридмана—Келлера (33.2) и, например, пренебрегая в них третьими моментами и дополняя их полуэмпирическими формулами (36.12), аналогично тому, как это делалось в § 36 для ЭПС. Такой подход был реализован А. С. Мониным и Л. М. Симуни (1980) для расчета зональной циркуляции в конвективном слое Солнца. Сильно

упрощенной иллюстрацией этого подхода является следующая нестационарная баротропная модель зональной циркуляции атмосферы с квазигеострофическими квазиизотропными синоптическими процессами:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{1}{r_0^2 \sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\overline{u'_\theta u'_\lambda}\sin^2\theta;$$

$$\frac{\overline{\partial u'_\theta u'_\lambda}}{\partial t} = -\overline{u'^2_\theta}\sin\theta\frac{\partial \alpha}{\partial \theta};\quad \frac{\overline{\partial u'^2_\theta}}{\partial t} = -\overline{u'_\theta u'_\lambda}\sin\theta\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \qquad (45.13)$$

(А. С. Монин, 1958). Отсюда видно, что $U^4 = \overline{(u'^2_\theta)}^2 - \overline{(u'_\theta u'_\lambda)}^2$ не меняется со временем. Эти уравнения приводятся к следующему виду:

$$\alpha = \frac{\omega}{\sin^3\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta};\quad \overline{u'_\theta u'_\lambda} = -\frac{\omega r_0^2}{\sin^2\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial t};$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left[\frac{U^4(\theta)}{r_0^4} + \left(\frac{\omega}{\sin^2\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2\right]^{1/2}\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{1}{\sin^3\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}. \qquad (45.14)$$

Последнее уравнение описывает нелинейные волны, распространяющиеся по меридиану со скоростью $(\overline{u'^2_\theta})^{1/2}$.

§ 46. Циркуляция Мирового океана

Этот термин целесообразно применять к статистическому ансамблю крупномасштабных океанских течений, квазистационарных (из них по-настоящему глобальными являются, пожалуй, лишь Циркумполярное антарктическое течение ЦАТ и медленные придонные течения антарктических вод на север и арктических вод в Атлантике на юг) и синоптических — вихрей и волн Россби—Блиновой (которые, как показано в § 37, в океане имеют горизонтальные масштабы порядка $L_R \sim 50$ км, значительно меньшие, чем в атмосфере, и соответственно много более длинные периоды $\tau \sim (\beta L_R)^{-1}$ порядка месяца).

Квазистационарная циркуляция оказывается весьма различной в верхнем слое океана (скажем, полуторакилометровом) и в его придонных слоях. Верхняя циркуляция хорошо согласуется с динамической топографией поверхности океана (т. е. вариациями высот этой поверхности, отсчитываемых от глубинного уровня с фиксированным давлением, скажем $1{,}5 \cdot 10^6$ кг/м^2): линии дивергенции (конвергенции) поверхностных течений соответствуют осям топографических ложбин (гребней).

Главными элементами этой циркуляции являются гигантские антициклонические круговороты вод вокруг атмосферных субтро-

пических «центров действия» — Азорского и Св. Елены в Атлантике, Маврикия в Индийском океане, Гавайского и о. Пасхи в Тихом океане. Они асимметричны: их западные ветви интенсифицированы и образуют сильные узкоструйные пограничные течения, как Гольфстрим в Северной Атлантике и Куросио в северной половине Тихого океана.

По тропической зоне эти круговороты разделены направленными к экватору и на запад пассатными течениями (причем вдоль экватора под ними на глубинах 50—300 м имеются узкоструйные противотечения, слабо меандрирующие по типу A_2B_2 § 32 с $\cos\beta > 0$). С полярных сторон круговороты ограничены циклоническими циркуляциями, на юге — крупнейшим в Мировом океане Циркумполярным антарктическим течением с расходом до $210 \cdot 10^6$ м^3/с.

Глубинная циркуляция мало связана с поверхностной (и полем ветра над океаном). Она имеет, по-видимому, преимущественно термохалинное происхождение, т. е. создается опусканием и растеканием по дну (с тенденцией следовать линиям постоянной глубины) вод повышенной плотности — охлажденных и осолоненных. Так, антарктические донные воды в Атлантике проникают, главным образом через западные котловины, до 40° с. ш., где встречаются с североатлантическими глубинными и арктическими донными водами. В Индийском океане они заполняют все глубокие котловины. В Тихом океане основной их поток идет вдоль желобов Кермадек и Тонга, на 10° ю. ш. от него отделяется ветвь на северо-восток, а главное течение в северном полушарии раздваивается и доходит по котловинам приблизительно до тропика.

Синоптические течения в океане можно подразделить по механизмам их образования на *фронтальные* (I) — меандры на струйных течениях и их крайнюю форму в виде замкнувшихся кольцевых течений («рингов») — и *свободные*, или вихри открытого океана, порожденные бароклинной неустойчивостью квазистационарных течений (II), топографическими эффектами (III) и воздействием атмосферных синоптических процессов (IV). По знаку вращения они делятся на циклонические и антициклонические. Целесообразно различать *вихри*, перемещающиеся вместе с содержащейся в них водой, и *волны*, бегущие по воде (в том числе уединенные волны — солитоны). Все эти образования существенно изменяются с возрастом.

Для количественного описания общей циркуляции Мирового океана можно использовать те же уравнения гидродинамики (45.1)—(45.3) и краевые условия для поля скорости на дне $z = -h_w(\theta, \lambda)$, что и для общей циркуляции атмосферы (причем аналогично АПС может быть введен и «параметризован» придонный пограничный слой ППС). Но кинематическое краевое условие на поверхности океана $z = \zeta(\theta, \lambda, t)$ должно быть записано аккуратнее, чем это было достаточным для атмосферы: оно

должно позволить определять функцию ζ, которая играет существенную роль в гидродинамике океана. Таким условием служит следующее обобщение уравнения (5.9):

$$u_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u_\theta}{r_0}\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r_0 \sin\theta}\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{1}{\rho_w}(P - E - E_{wi}), \quad (46.1)$$

причем вследствие малости ζ в крупномасштабных течениях (дециметры) значения u_θ, u_λ, u_z здесь можно брать не при $z=\zeta$, а при $z=0$. Динамические краевые условия на поверхности океана с хорошей точностью сводятся к требованиям непрерывности скорости, горизонтальных напряжений и давления (капиллярными эффектами при рассмотрении крупномасштабных течений, конечно, пренебрегают). Условие непрерывности давления с достаточной точностью записывается в виде

$$p = p_a + g\rho_w\zeta \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (46.2)$$

На берегах океана горизонтальная скорость течений должна обращаться в ноль (всюду, кроме устьев рек, где скорость по нормали к берегу определяется средней скоростью течения в реке; сток малых рек и ручьев, а также и айсбергов, надо «параметризовать»; иногда «параметризуют» весь прибрежный пограничный слой, пренебрегая вне его в (45.2) горизонтальным обменом импульсом и требуя обращения в ноль на его внутренней границе только нормальной к ней компоненты скорости).

К уравнениям гидродинамики следует добавить уравнение состояния морской воды (1.14), а для определения входящих в него двух новых функций T и s — уравнения эволюции полей энтропии и солености (45.4), (45.5) (при $m=0$) и формулу для энтропии (1.2). Краевым условием на поверхности океана для уравнения (45.4) будет уравнение бюджета тепла (45.6) (строго говоря, с такими осложнениями, как зависимость альбедо A от морского волнения и от высоты Солнца), а для уравнения (45.5) — аналогичное (45.7) уравнение бюджета соли

$$J_s = -s(P - E - q_{wi}/\mathscr{L}_{wi}). \quad (46.3)$$

где J_s — поток соли в глубь океана. На дне океана и его берегах следует потребовать равенства нулю нормальных компонент потоков тепла и соли (всюду, кроме гидротермальных областей дна, устьев рек и мест отрыва айсбергов).

Отметим полезность расчета комбинации $M_s = J_s + \frac{\alpha}{c_w} q_s$ потоков тепла и соли (45.6) и (46.3), где α — коэффициент теплового расширения, а c_w — теплоемкость воды: эта величина имеет смысл вертикального потока массы на поверхности океана. Там, где она положительна, т. е. поток массы направлен вниз, плавучесть поверхностных вод уменьшается, и они тонут, т. е. зарождается термохалинная циркуляция (А. С. Монин, 1970; эмпириче-

скую карту средних годовых значений M_s построили Е. Г. Агафонова, Л. И. Галеркин и А. С. Монин, 1972, а в работе Л. И. Галеркина, А. С. Монина и С. В. Сергунина, 1985, даны иллюстрации весьма существенной сезонной изменчивости источников M_s термохалинной циркуляции океана).

Краевые условия на поверхности океана, конечно, резко изменяются, если эта поверхность покрывается льдом. Намерзание и таяние льда рассчитывается локально при помощи уравнения вертикального переноса тепла

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(c\rho k \frac{\partial T}{\partial z} + F_0^{\downarrow} e^{\int_0^z \varkappa\, dz}\right), \tag{46.4}$$

где $F_0^{\downarrow}$ — поток коротковолновой солнечной радиации, проходящей через верхнюю поверхность $z=0$ слоев снега и льда (их толщины обозначим h_s и h_i), а $\varkappa=\varkappa(z)$ — коэффициент поглощения этой радиации. Удельные теплоемкости c, плотности ρ, коэффициенты молекулярной температуропроводности k и значения $\varkappa$ у снега и льда различны, и на границе между снегом и льдом $z=-h_s$ надо требовать непрерывности температуры и потока тепла (описываемого выражением в скобках в правой части (46.4)). В краевом условии (45.6) при $z=0$ левую часть надо положить равной

$$q_s = \left(c\rho k \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} + F_0^{\downarrow}.$$

Изменения толщины слоя снега описываются уравнением

$$\frac{\partial \rho_s h_s}{\partial t} = P_s - E + q_{wi}/\mathscr{L}_{wi}, \tag{46.5}$$

справедливым, когда $h_s > 0$ (где ρ_s — плотность снега, а P_s — скорость выпадения снежных осадков). При температуре ниже точки замерзания морской воды (которую часто принимают равной 271,2 К) в (45.6) следует положить $q_{wi}=0$, а при температуре замерзания условие (45.6) определяет величину q_{wi}. Наконец, на нижней границе льда $z=-(h_s+h_i)$ разность потоков тепла во льду и в воде определяет q_{wi}, а потому и значение $q_{wi}/\mathscr{L}_{wi}$, определяющее в водном эквиваленте скорость намерзания или стаивания льда снизу (иногда в целях упрощения потоку тепла из воды в лед приписывают стандартное значение — в Арктике 2 Вт/м^2, а в Антарктике 25 Вт/м^2).

Крупномасштабное горизонтальное движение морского льда с изменениями его толщины h_i вследствие образования торосов или разводий можно описывать кинетическим уравнением

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{r_0 \sin\theta}\left(\frac{\partial \Phi u_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi u_\lambda}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial \Phi \varepsilon_i}{\partial h_i} = \Psi, \tag{46.6}$$

где $\Phi(h_i;\ \theta,\ \lambda,\ t)$ — плотность вероятности для h_i (так что $\int_{+0}^{\infty} \Phi dh_i$ есть *компактность* ледяного покрова, т. е. занимаемая им доля площади); $\varepsilon_i = \partial h_i/\partial t$ — скорость намерзания или стаивания льда, определяемая при помощи уравнения (46.4); Ψ — функция перераспределения, описывающая образование торосов или разводий. Компоненты скорости u_θ, u_λ должны определяться из уравнений гидродинамики (45.1)—(45.3) с учетом суммы сил трения ветра на верхней поверхности ледяного покрова и относительного течения воды на его нижней поверхности, наклонов уровня моря и внутренних сил взаимодействия между льдинами (т. е. компонент F_θ и F_λ дивергенции тензора горизонтальных напряжений при принятой реологии ледяного покрова).

При тех или иных упрощениях перечисленные уравнения позволяют дать качественное объяснение ряду специфических особенностей общей циркуляции Мирового океана. Наиболее специфическими представляются особенности, создаваемые наличием меридиональных «стенок» (берегов). Выше указывалось, что они сводятся, прежде всего, к западно-восточной асимметрии гигантских субтропических антициклонических круговоротов вод с интенсификацией западных пограничных течений. Как впервые показал Г. Стоммел (1948), эта особенность объясняется действием «бета-эффекта», т. е. широтного изменения $\beta = \partial f/\partial y$ параметра Кориолиса f.

Чтобы показать это, начнем с приложения к океану теории ЭПС, излагавшейся в § 36. Из условия непрерывности вертикального потока импульса на поверхности океана $\tau = \rho_a u_{*a}^2 = \rho_w u_{*w}^2$ при типичном атмосферном значении $u_{*a} \sim 30$ см/с получаем $u_{*w} = (\rho_a/\rho_w)^{1/2} u_{*a} \sim 1$ см/с. Толщина ЭПС в океане оказывается имеющей порядок $h_0 = \varkappa u_{*w}/f \sim 20$ м, а время реакции течений в ЭПС на ветровые воздействия равняется $\rho_w h_0 u_{ср}/\tau \sim 3$ ч (где $u_{ср} = u_{*w}/\varkappa$ — средняя по толще ЭПС скорость дрейфового течения). Это время мало по сравнению со временем синоптических изменений ветра. Поэтому течения в ЭПС можно считать квазистационарными, и уравнения Рейнольдса (36.10) для ЭПС будут иметь вид:

$$-fv = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho_w}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{K}\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$fu = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho_w}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{K}\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad (46.7)$$

где в правых частях использованы первые два соотношения (36.19). В целях качественного исследования примем $\mathcal{K} = \text{const}$

(более полная теория изложена в § 36); тогда решение уравнений (46.7) для океана постоянной глубины h будет иметь вид

$$u+iv=h\frac{\tau_{x0}+i\tau_{y0}}{\rho_w\mu\mathcal{H}}\frac{\operatorname{sh}\mu(z'+1)}{\operatorname{ch}\mu}+i\frac{g}{f}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\operatorname{ch}\mu z'}{\operatorname{ch}\mu}\right)\approx h\frac{\tau_{x0}+i\tau_{y0}}{\rho_w\mu\mathcal{H}}e^{\mu z'}+$$

$$+i\frac{g}{f}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\left[1-e^{-\mu(z'+1)}\right], \qquad (46.8)$$

причем $z'=z/h$; $\mu=(1+i)/\mathrm{E}$; $\mathrm{E}=h_\mathrm{E}/h$ — число Экмана (где $h_\mathrm{E}=(2\mathcal{H}/f)^{1/2}$ — новый вертикальный масштаб ЭПС; при $h_\mathrm{E}\sim 20$ м и $f\sim 10^{-4}$ с$^{-1}$ получается $\mathcal{H}\sim 2\cdot 10^{-2}$ м^2/с), которое мало, на чем и основано приближенное равенство в (46.8). Функция $\zeta(x, y)$ должна определяться из уравнения

$$w(z=-h)=\int_{-h}^{0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz=0 \qquad (46.9)$$

при должных граничных условиях на берегах океана. Уравнения (46.7) позволяют потребовать на берегах непротекания лишь в среднем по глубине, т. е. равенстве нулю нормальной компоненты так называемого *полного потока* $\mathbf{S}=\int_{-h}^{0}\mathbf{u}dz$ (впервые введенного В. Б. Штокманом, 1946):

$$S_x+iS_y=\frac{\tau_{x0}+i\tau_{y0}}{if\rho_w}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\mu}\right)+\frac{igh}{f}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\operatorname{th}\mu}{\mu}\right)\approx\frac{\tau_{x0}+i\tau_{y0}}{if\rho_w}+\frac{igh}{f}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\frac{\mu-1}{\mu}. \qquad (46.10)$$

Отметим, что вследствие бездивергентности трехмерной скорости и нулевых краевых условий для w полный поток также бездивергентен, т. е. $\partial S_x/\partial x+\partial S_y/\partial y=0$. Поэтому можно ввести функцию тока ψ, положив $S_x=-\partial\psi/\partial y$ и $S_y=\partial\psi/\partial x$. Выразив из (46.10) $\nabla\zeta$ через ψ, условие $\operatorname{rot}\nabla\zeta=0$ можно с точностью порядка E привести к следующему виду:

$$\frac{fh_\mathrm{E}}{2h^2}\Delta\psi+\frac{\partial(\psi, f/h)}{\partial(x, y)}=\operatorname{rot}\frac{\tau_0}{\rho_w h}. \qquad (46.11)$$

Граничное условие на берегу теперь записывается в виде $\psi=$ $=\mathrm{const}$ (если океан многосвязен, то значения ψ на каждом замкнутом граничном контуре должны определяться из условия однозначности функции ζ).

Рассмотрим сначала океан постоянной глубины ($h=\text{const}$). В его открытой части первым слагаемым в (46.11), описывающим эффект трения, можно пренебречь, и получается

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \operatorname{rot} \frac{\tau_0}{\rho_w} \tag{46.12}$$

(Г. Свердруп, 1947). Отсюда видно, что ψ следует измерять масштабом $\tau_0/\rho_w\beta$. Измеряя, кроме того, длины масштабом $f/2\beta$, мы приведем (46.11) в безразмерных переменных к виду

$$E\,\Delta\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} = F(x,\ y), \tag{46.13}$$

где правую часть можно считать заданной. Рассмотрим модельный океан с формой квадрата $0 \leqslant (x,\ y) \leqslant 1$ и будем искать в нем решение уравнения (46.13) в виде ряда $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n E^n$, который должен удовлетворять краевым условиям $\psi=0$ на всех сторонах квадрата. Считать при этом, что все функции ψ_n, $\partial\psi_n/\partial x$ и $\partial\psi_n/\partial y$ имеют порядок единицы, нельзя, так как тогда для ψ_n получались бы уравнения первого порядка $\partial\psi_n/\partial x = F_n - \Delta\psi_{n-1}$ и было бы невозможно выполнить оба краевых условия по x при $x=0$ и $x=1$.

Поэтому в окрестностях этих берегов надо ввести пограничные слои с «быстрыми» поперечными координатами $x' = x/E$ и $x'' = (1-x)/E$ и искать решение в виде $\psi_n = \psi_n(x,\ y) + \psi_n'(x',\ y) + \psi_n''(x'',\ y)$, где функции ψ_n, ψ_n' и ψ_n'' существенно отличны от нуля соответственно в открытом океане, в западном и в восточном пограничных слоях. Это значит, что функции ψ_n' должны быстро затухать с ростом x', а ψ_n'' — с ростом x''. Из (46.13) получается

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = F_0; \quad \frac{\partial^2 \psi_0'}{\partial x'^2} + \frac{\partial \psi_0'}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi_0''}{\partial x''^2} - \frac{\partial \psi_0''}{\partial x''} = 0. \tag{46.14}$$

Отсюда видно, что быстро затухающего с ростом x'' решения ψ_0'' не существует, так что надо положить $\psi_0''=0$, но решение $\psi_0' = ce^{-x'}$ годится. Таким образом, имеет место западно-восточная асимметрия течения: краевые условия по x принимают вид $\psi_0 + \psi_0' = 0$ при $x=0$ и $\psi_0=0$ при $x=1$, и решение уравнения (46.13) не слишком близко к стенкам $y=0$ и $y=1$ с точностью до слагаемых $O(E)$ имеет вид $\psi = -(1-e^{-x/E}) \int_0^1 F_0 dx$ в пограничном слое

$x \leqslant E^{\nu}$, $0 < \nu < 1$ и $\psi = -\int_{x}^{1} F_0 dx$ в основной части океана $E^{\nu} \leqslant x \leqslant 1$ — см. на рис. 46.1 пример линий тока $\psi = \text{const}$, рассчитанных при $\tau_{x0} = -\cos \pi y$, $\tau_{y0} = 0$.

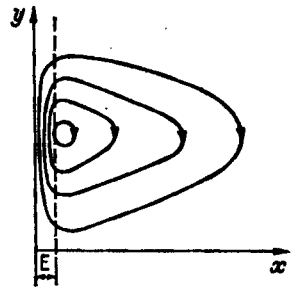


Рис. 46.1. Решение уравнения (46.10) при $\tau_{x0} = -\cos \pi y$, $\tau_{y0} = 0$.

Таким образом, у западного берега имеется сильное пограничное течение, в котором $S_x = O(1)$, $S_y = O(1/E)$, а у восточного берега такого решения нет; эта асимметрия порождается вторым слагаемым в (46.13), т. е. «бета-эффектом». Полный расход течения через круг широты $y = \text{const}$ от западного берега $x = x_W(y)$ до восточного $x = x_E(y)$ равен $Q = \int_{x_W}^{x_E} S_y dx$, где $S_y = \partial\psi/\partial x$ можно определить по формуле Свердрупа (46.12). Вне западного пограничного слоя он получился бы не равным нулю и зависящим от y, что противоречило бы закону сохранения массы воды. Следовательно, он должен компенсироваться расходом Q_W западного пограничного течения, т. е. $Q_W = -Q$ или

$$Q_W = -\frac{1}{\beta} \int_{x_W}^{x_E} \text{rot} \frac{\tau_0}{\rho_w} dx \qquad (46.15)$$

(У. Манк, 1950). Расчеты по этой формуле очень неплохо согласуются с эмпирическими оценками расхода Гольфстрима южнее точки его отрыва от берега 33° с. ш.

В океане переменной глубины, пренебрегая в его открытой части первым слагаемым в (46.11), мы получим обобщенное соотношение Свердрупа, в котором роль кругов широты $f = \text{const}$ занимают изолинии $f/h = \text{const}$. При этом западное пограничное течение существует лишь в случае $(\partial/\partial s)(f/h) > 0$, а восточное — при $(\partial/\partial s)(f/h) < 0$, где ds направлено по касательной к береговой черте на север. Если изолиния $f/h = \text{const}$ в некоторой точке касается берега, то там $(\partial/\partial s)(f/h)$ меняет знак, т. е. пограничное течение под влиянием рельефа дна отрывается от берега.

При более точном расчете в правые части уравнений (46.7) теории Экмана добавляются слагаемые $\mathcal{K}_h\Delta_h u$ и $\mathcal{K}_h\Delta_h v$, описывающие горизонтальное перемешивание. Пусть горизонтальное число Экмана $E_h=(2\mathcal{K}_h/f)^{1/2}/L$ имеет такой же порядок, как вертикальное число $E=(2\mathcal{K}/f)^{1/2}/h$. Тогда (1) в открытом океане u, v, w, ζ имеют значения порядка E; (2) имеется поверхностный ЭПС толщиной $O(E)$, в котором u, $v\sim O(1)$ и $w\sim O(E)$; (3) имеется донный ЭПС толщиной $O(E)$, в котором u, $v\sim O(E)$ и $w\sim O(E^2)$; (4) у западного берега имеется пограничный слой У. Манка толщиной $O(E^{2/3})$, в котором $u\sim O(E)$, $v\sim O(E^{1/3})$, $w\sim O(E^{2/3})$ и $\zeta\sim O(E)$; (5) внутри этого слоя, а также у восточного берега имеются подслои толщиной $O(E)$, в которых u, $v\sim O(E)$, $\zeta\sim O(E^2)$ и $w\sim O(1)$; (6) пограничные слои имеются также у северного и южного берегов.

При еще более полном расчете в уравнениях горизонтального движения (45.2) сохраняют нелинейные (инерционные) слагаемые. Для выяснения *горизонтальной* структуры течений, следуя В. Б. Штокману, ограничиваются рассмотрением этих уравнений, приближенно осредненных по всей толще океана $-h\leqslant z\leqslant 0$. При $h\approx\text{const}$ из них получается следующее уравнение для относительного вихря скорости $\Omega=\operatorname{rot}\bar{\mathbf{u}}_h$:

$$\bar{\mathbf{u}}_h\cdot\nabla(\Omega+f)=\mathcal{K}_h\left(\Delta_h\Omega+\frac{2\Omega}{r_0^2}\right)+\frac{\operatorname{rot}\tau_0}{\rho_w h}. \qquad (46.16)$$

Поскольку $\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}_h=0$, интеграл по любому замкнутому контуру от левой части этого уравнения равен нулю, а интеграл от второго слагаемого в правой части не обязан быть равным нулю (например, в областях атмосферных антициклонов $\operatorname{rot}\tau_0<0$), так что учитывать горизонтальное перемешивание, вообще говоря, необходимо. В открытом океане можно пренебречь адвекцией вихря $\bar{\mathbf{u}}_h\cdot\nabla\Omega$ и горизонтальным перемешиванием, и (46.16) превращается в соотношение Свердрупа $\beta\bar{v}_\theta=-\operatorname{rot}\tau_0/\rho_w h$, описывающее течение на юг с расходом, зависящим от широты. Оно должно компенсироваться прибрежными течениями на север. В них адвекция вихря и горизонтальное трение уже существенны, так что у меридиональных берегов образуются инерционно-вязкие пограничные слои. Их теория построена В. М. Каменковичем (1966). Она основана на том, что в пограничных слоях суммарная адвекция относительного вихря $\int v\Omega dx$ и вклад слагаемого $2\mathcal{K}_h\Omega/r_0^2$ малы, так что адвекция вихря вращения Земли βv должна уравновешиваться диффузией относительного вихря от стенки. У западного берега это осуществимо, так как и переносится на север, и диффундирует от стенки положительный вихрь.

У восточного берега в течении на север это неосуществимо, так как от стенки диффундирует отрицательный вихрь, а в течении на юг возможно лишь за счет слагаемого $\mathrm{rot}\,\tau_0/\rho_w h$, что может создать лишь слабое течение.

Для расчета пограничных слоев удобно перейти в уравнениях гидродинамики к безразмерным переменным, измеряя длины масштабом L, а скорости — масштабом $U=\tau_0/\rho_w\beta Lh$. В таких переменных инерционные слагаемые в уравнениях будут иметь малый множитель $\varepsilon^2=(L_i/L)^2$, где $L_i=(U/\beta)^{1/2}$ (так что ε^2 совпадает с числом Кибеля), а вязкие слагаемые — множитель $\varepsilon^3/\mathrm{Re}$, где $\mathrm{Re}=UL_i/\mathcal{K}_h$ — число Рейнольдса. Решения безразмерных уравнений ищутся в виде таких же рядов, как в случае уравнения (46.13) (лишь с заменой E на ε).

В результате оказывается, что при больших Re у западного берега в южной половине бассейна (где $\partial^2\tau_0/\partial y^2>0$) существует инерционный пограничный слой с вязким прибрежным подслоем, а в северной половине бассейна (где $\partial^2\tau_0/\partial y^2<0$) его не существует уже при $\mathrm{Re}\geqslant 10$ (что, по-видимому, указывает на отрыв пограничного слоя от берега). При малых же Re существует лишь вязкий пограничный слой, в котором инерционные эффекты несущественны.

Перечисленные выше уравнения позволяют строить численные модели общей циркуляции Мирового океана *при заданных атмосферных воздействиях*. Сначала строились стационарные (баротропные) модели средних годовых полных потоков (А. С. Саркисян, 1954, — модель Северной Атлантики; П. Веландер, 1959,— модель Мирового океана между 50° с. ш. и 40° ю. ш.; А. М. Ильин, В. М. Каменкович, Т. Г. Жугрина, М. М. Силкина, 1969,— модель Мирового океана); назовем также нестационарную баротропную модель сезонной изменчивости Мирового океана Б. А. Кагана, Д. Л. Лайхтмана, Л. А. Оганесяна и Р. В. Пясковского (1972).

Затем ряд авторов построил трехмерные (бароклинные) модели океанской циркуляции. Одними из первых это сделали К. Брайен и М. Кокс (1967—1969), рассчитавшие среднюю годовую циркуляции Атлантического океана (моделируемого в форме параллелепипеда). В их модели на поверхности океана задавались T и s или потоки тепла и соли, все вертикальные и горизонтальные коэффициенты обмена брались постоянными и использовалась процедура гидростатического приспособления. Из ряда последних моделей упомянем работу М. Кокса (1970) по сезонной (муссонной) изменчивости циркуляции Индийского океана при заданных на его поверхности напряжении трения ветра, температуре и солености; двухслойную модель Мирового океана с реальной геометрией О. А. Андреева, Б. А. Кагана и Л. А. Оганесяна (1976); шестиуровенные модели Г. И. Марчука и В. Б. Залесного (1974) и В. П. Кочергина и А. В. Щербакова (1977) и, наконец,

12-уровенную модель К. Брайена, С. Манабе и Р. Пакановского (1975), использованную К. Брайеном и Л. Льюисом (1979) для расчета (на 1150 лет) состояния океана при заданных атмосферных воздействиях (с сезонным ходом).

Численные модели последних лет строят методом интегрирования нестационарных уравнений шагами по времени от начального состояния покоя до установления квазистационарного состояния океана (на что требуется большое время $h^2/\mathcal{K}_z$, порядка по меньшей мере 10^3 лет). При этом в глобальных моделях шаг горизонтальной сетки берется, скажем, 500 км, так что синоптические вихри индивидуально не описываются. Создаваемое ими горизонтальное перемешивание традиционно параметризуется при помощи операторов вида $\mathcal{K}_h\Delta_h$ со слишком большими и положительными коэффициентами $\mathcal{K}_h$ (до 10^8 см^2/с), тогда как для формирования наблюдаемой узкоструйности главных океанских течений необходима «отрицательная вязкость» — без нее модели циркуляции океана не вполне адекватны действительности.

§ 47. Вихреразрешающие модели

Чтобы избежать трудностей с априорным заданием «отрицательной вязкости», желательно иметь численные модели циркуляции океана, допускающие индивидуальное описание всех синоптических вихрей. Для этого необходимо, чтобы шаг горизонтальной сетки был во всяком случае не больше радиуса деформации Россби L_R, т. е. не более нескольких десятков километров. Такие численные модели называют *вихреразрешающими.*

Очевидно, что расчеты циркуляции в очень большой акватории (и на большой промежуток времени) по таким моделям требуют очень мощных ЭВМ. Поэтому первые эксперименты производились лишь для ограниченных областей океана, квадратных или прямоугольных протяженностью 1—2 тыс. км, с плоским дном и теми или иными искусственными краевыми условиями. Но за прошедшее десятилетие уже достигнута возможность вихреразрешающего моделирования циркуляции в реальном океане (первым примером явилась Северная Атлантика), и теперь представляется, что вихреразрешающая модель всего Мирового океана является делом недалекого будущего.

Первая вихреразрешающая модель была построена В. Холландом и Л. Лином (1975). Это была *двуслойная* (по плотности воды) модель с обычными уравнениями гидродинамики (так называемыми «примитивными», т. е. «исходными» — без отфильтровывания внутренних волн путем квазигеострофического или квазисоленоидального приближения). Она интегрировалась в квадрате 1000×1000 км на сетке из 51×51 точек (шаг сетки 20 км в некоторых экспериментах увеличивался или уменьшался вдвое) при постоянной глубине океана 4 км (толщины h_1 и h_2 верхнего

и нижнего слоев 1 и 3 км). Учитывалось только ветровое возбуждение (стационарным зональным ветром) без дифференциального нагрева. Ветер подбирался так, чтобы образовывались один или два крупномасштабных горизонтальных круговорота.

Численные эксперименты по этой модели показали, что при стационарном возбуждении образуется нестационарная циркуляция с крупномасштабными круговоротами и синоптическими вихрями (размерами $L \approx 400$ км и периодами $\tau \approx 64$ сут), предопределенными заданным $L_R = (gh\delta\rho/\rho_0)^{1/2} f^{-1}$, где $h = h_1 h_2 (h_1 + h_2)^{-1}$. Сначала (около 500 сут) нарастают кинетическая энергия круговоротов $\overline{K}$ и доступная потенциальная энергия $\overline{\Pi}$, связанная с изгибом поверхности раздела слоев вследствие течений в верхнем слое. По достижении некоторого критического значения $\overline{K}$ круговороты становятся бароклинно неустойчивыми из-за большого сдвига скорости между слоями, и $\overline{\Pi}$ падает, освобождаясь в виде K' и Π' вихрей в обоих слоях (причем течения в нижнем слое индуцируются вихрями верхнего слоя). После переходного периода (еще 500—600 сут) между круговоротами и вихрями устанавливается статистическое равновесие.

В случае одного круговорота направленное на север западное интенсифицированное течение переходит у северной стенки в сильное течение на восток и затем в возвратное течение в восточной и южной областях. У северной стенки и в возвратном течении возникают баротропные, а в возвратном течении иногда также бароклинные синоптические вихри. Двухкольцевая циркуляция с меандрирующей срединной струей проявляет и бароклинную, и баротропную неустойчивость.

Количественным недостатком этих результатов была слабость колебаний поверхности раздела слоев и меандрирования срединной струи по сравнению с наблюдаемыми в природе. Аналогичные результаты дала двухслойная квазигеострофическая модель В. Холланда (1978), добавившего в нее придонное трение и описавшего горизонтальный турбулентный обмен вместо обычного лапласиана бигармоническим оператором, что искусственно обостряет синоптические вихри.

Более совершенные (и фактически одинаковые) многослойные вихреразрешающие модели были построены И. Ханом (1975), А. Робинсоном, Д. Харрисоном, И. Минцем и А. Семтнером (1977). В них учитывалось как ветровое, так и термическое возбуждение (поток тепла через поверхность океана считался пропорциональным $T_w - T_a$), протяженность бассейна примерно 2000 км, шаг по горизонтали 20—35 км, по времени 20 мин, и производные аппроксимировались разностями со вторым порядком точности и по пространству, и по времени. Во многом аналогичную вихреразрешающую модель построил Д. Г. Сеидов (1978, 1980). Несколько иные модели для описания вихрей в области

открытого океана (с жидкими границами) вскоре построили В. М. Каменкович, В. Д. Ларичев и Б. В. Харьков (1981) и И. А. Неелов и Д. В. Чаликов (1981).

Остановимся подробнее на модели Д. Г. Сеидова. Он учитывал в уравнениях горизонтальные и вертикальные турбулентные вязкость и теплопроводность (при зависимости ρ лишь от T) и задавал на поверхности океана зональное напряжение трения ветра (формировавшее в прямоугольном бассейне один или два крупномасштабных круговорота вод) и зональный поток тепла (пропорциональный $T_w - T_a$). Чтобы избежать вычислений малых разностей больших величин, а также для возможности увеличения шага по времени путем отфильтровывания гравитационных и инерционных колебаний он разделил средние по глубине и сдвиговые части гидродинамических полей и принял для сдвиговых скоростей квазигеострофическое приближение. При этом эволюционными («прогностическими») остались уравнения лишь для вихря полного потока и температуры.

Кроме того, на горизонтальных стенках бассейна принималось условие скольжения, а на дне (постоянной глубины) — линейное трение (т. е. пропорциональность вертикального потока вихря самому вихрю). Для численного решения уравнений использовалась эйлерово-лагранжева схема расщепления адвективных и диффузионных операторов. Основные численные эксперименты производились в бассейне размером $960\times1440\times5$ км по x, y, z с числом узлов пространственной сетки $25\times37\times5$ и шагом по времени около 6 ч на срок 10 лет (хотя рассчитывались и другие варианты).

В числе своих выводов Д. Г. Сеидов отметил существенную роль инерционных эффектов для синоптических вихрей (по сравнению с крупномасштабными круговоротами), пространственную неоднородность процессов превращений энергии (в особенности важную роль эффекта отрицательной вязкости в обострении струйных течений, см. формулы (43.1)—(43.3)) и осуществление вихрями «туннельного эффекта» переноса тепла через зональные струи, а также концентрации тепла в западных пограничных течениях.

Полученный Сеидовым упрощенный (средний по объему) энергетический цикл системы крупномасштабных круговоротов (течений, осредненных по времени) и синоптических вихрей (отклонений от среднего течения) показан на рис. 47.1 *а*. Этот цикл имеет вид $\overline{K} \to \Pi \to K' \to \overline{K}$, причем обратная связь $K' \to \overline{K}$ относительно слаба лишь в среднем по объему, но в зонах струйных течений она играет решающую роль. На рис. 47.1 *б* показан энергетический цикл системы полных потоков (средних по глубине) и сдвиговых течений (отклонений от среднего по глубине). Он имеет вид $K' \to (\Pi, \overline{K})$, причем и Π, и $\overline{K}$ получают от K' (т. е. за счет баротропизации) значительно больше энергии, чем от внешних ис-

точников. Таким образом, система далека от консервативной: энергия поступает в нее извне, проходит через нее и диссипируется.

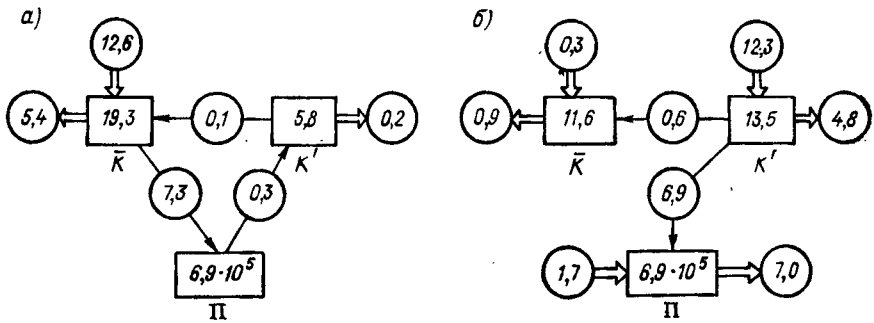


Рис. 47.1. Энергетические циклы в вихреразрешающей модели Д. Г. Сеидова.

а) в системе крупномасштабные круговороты — синоптические вихри; *б*) в системе полные потоки — сдвиговые течения. Плотность энергии в 10^{-1} Дж/м^3, плотность преобразований энергии в 10^{-6} Дж/(м^3·с).

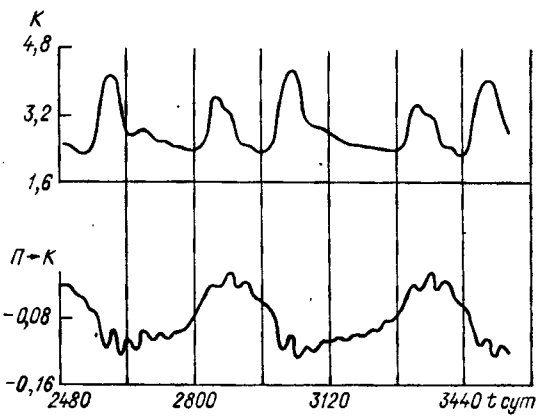


Рис. 47.2. Автоколебания в вихреразрешающей модели Д. Г. Сеидова при $\Delta x = 65$ км.

В таких системах возможно возникновение релаксационных колебаний с периодами накопления и последующего сбрасывания энергии. И действительно, в численных экспериментах Сеидова обнаружено, что после прихода системы в состояние статистического равновесия в ней возникают автоколебания с чередованием длительных периодов слабой вихревой активности, роста П и уменьшения K и более коротких (в 1,5—2,5 раза) периодов сильной вихревой активности, падения П и роста K.

В качестве иллюстрации на рис. 47.2 приведены графики колебаний K и скорости превращений энергии $П \to K$ за 2480—3500 сут численного эксперимента с большим горизонтальным шагом сетки (65 км). Период колебаний $П \to K$ здесь равен около

420 сут (рост 300 и падение 120 сут), и любопытно, что K колеблется с удвоенной частотой — максимуму $\Pi \to K$ соответствует меньший $\max K$, а минимуму — больший $\max K$. При меньшем шаге сетки (40 км) разрешаются менее крупные вихри, и спектр периодов автоколебаний усложняется — см. рис. 47.3. Эта картина

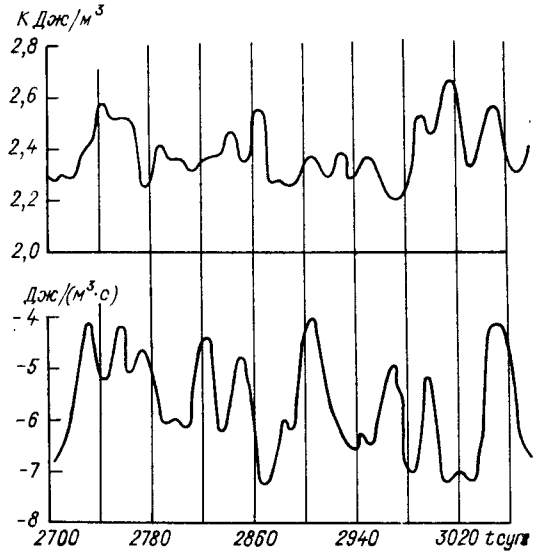


Рис. 47.3. Автоколебания в вихреразрешающей модели Д. Г. Сеидова при $\Delta x = 40$ км.

очень похожа на реально наблюдавшуюся в природе во время эксперимента ПОЛИМОДЕ в Саргассовом море (рис. 47.4).

При расчетах по вихреразрешающим моделям в областях открытого океана, т. е. при синоптическом прогнозе океанских течений, необходимо задавать нормальную компоненту скорости на всей границе и, кроме того, квазисохраняющиеся вдоль траекторий жидких частиц прогностические величины (в модели Д. Г. Сеидова — вихрь полного потока и температуру) на тех участках границы, где жидкость втекает в область (Дж. Чарни, Р. Фьертофт, Дж. Нейман, 1960).

Этих трудностей можно избежать, лишь применив вихреразрешающую модель к целому океану. Впервые это сделали Д. Г. Сеидов, А. Д. Марушкевич и Д. А. Нечаев (1986), применив изложенную выше модель Д. Г. Сеидова к Северной Атлантике в пределах 13—61° с. ш. с реальной конфигурацией берегов и рельефа дна и с условием непротекания и скольжения на всех границах. Модель содержала семь расчетных горизонтов (с глубинами 0, 200, 500, 800, 1200, 2000 и 3000 м) и горизонтальную

сетку $40 \times 40'$ (для сравнения рассчитывалась и «безвихревая» модель на сетке $2 \times 2°$). Шаг по времени брался 12 ч, и расчет производился на 5 лет.

Результаты продемонстрировали активное вихреобразование в зоне Гольфстрима и на юго-востоке области у ядра вод средиземноморского происхождения (а также при перетекании Средин-

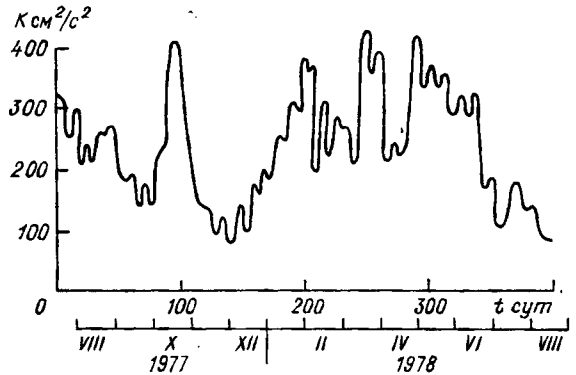


Рис. 47.4. Колебания кинетической энергии вихрей на глубине 100 м во время эксперимента ПОЛИМОДЕ в Саргассовом море.

но-Атлантического хребта). Вихри приводили к интенсификации струйных течений (Гольфстрима в 1,5—2 раза, Лабрадорского течения втрое) и к обострению градиентов температуры.

Мировой океан можно разделить на 11 областей — северные, тропические и южные части трех океанов, Антарктическое циркумполярное течение и Арктику, для каждой из которых можно построить вихреразрешающую модель по указанному образцу. Тогда останется лишь задача склейки этих 11 моделей.

ГЛАВА 9

Теория климата

§ 48. Понятие о климате

Рассмотрим планеты, имеющие *атмосферу* (А), т. е. внешнюю газовую или газожидкую оболочку, ограниченную снизу жидкой или твердой *подстилающей поверхностью* (ПП). Слой жидкости и/или твердого вещества под этой поверхностью, состояния которого изменяются из-за атмосферных воздействий и, в свою очередь, влияют на изменения состояний атмосферы, назовем *деятельным слоем* (ДСПП). Таким образом, А и ДСПП образуют единую изменчивую глобальную систему, которую можно назвать *климатической.*

На Земле ДСПП включает весь Мировой океан (О) и деятельный слой суши (С) с иногда образующимися на ней ледниками, так что климатической является система АОС (иногда в ее составе выделяют криосферу и биосферу). На Марсе активность ДСПП в настоящее время проявляется в нарастании и таянии полярных шапок и окружающей их мерзлоты, а также в подъеме пыли во время пыльных бурь. На больших планетах влияние их твердых ядер на поведение газожидких атмосфер, по-видимому, второстепенно, но, вероятно, увеличивается от Юпитера к Нептуну. На Солнце ДСПП отсутствует.

Климатическая система А—ДСПП глобальна, но она обладает внутренними пространственными неоднородностями различных масштабов (скажем, от долей миллиметра и вплоть до размеров планеты) как вертикальных, так и горизонтальных. При рассмотрении системы А—ДСПП в целом описать индивидуально все эти неоднородности, конечно, невозможно. В определение *состояний климатической системы* следует включать индивидуальные характеристики крупномасштабных неоднородностей (глобальных и синоптических) и только статистические характеристики мезомасштабных и мелкомасштабных неоднородностей (которые желательно «параметризовать», т. е. выражать через индивидуальные характеристики крупномасштабных неоднородностей).

Неоднородности каждого масштаба изменяются со временем с некоторыми типичными для них периодами. Изменениям состояний климатической системы свойственны как *внешние*, астрономически обусловленные периоды, так и *внутренние* — присущие системе периоды ее возможных автоколебаний. В целях определения понятия климата мы допустим, что и внешние, и внутрен-

ние периоды *естественно разделяются* на короткие и длинные. Это значит, что колебания и с короткими, и с длинными периодами интенсивны, но имеется интервал промежуточных периодов, в котором колебания малоинтенсивны или вовсе отсутствуют. По крайней мере, так обстоит дело на Земле.

Короткие астрономические периоды включают создаваемые собственным вращением планеты *суточные колебания инсоляции*, т. е. притока солнечной радиации (на Венере, как упоминалось выше, этот период составляет 117 сут; на далеких планетах его роль быстро убывает), и *приливные колебания* из-за гравитационного воздействия спутников и Солнца (на Земле это в первую очередь главные полусуточный и суточный лунные приливы M_2 и O_1 с периодами около 12 ч 25 мин и 24 ч 50 мин и главные полусуточный и суточный солнечные приливы S_2 и P_1), а также *сезонные колебания* инсоляции при обращении планеты вокруг Солнца вследствие наклона ее экватора к эклиптике и эксцентриситета орбиты.

Короткие внутренние периоды включают создаваемые волнами и вихрями Россби—Блиновой *синоптические колебания*, а также *глобальные колебания* (на Земле с периодами от недель до месяцев, включая приблизительно двухнедельный цикл колебаний зональной циркуляции атмосферы (45.13) и (45.14), автоколебания в системе А—О с периодами порядка месяцев и автоколебания вихреобразования типа рис. 47.2) и *междугодичные колебания* (на Земле преимущественно с периодами 2—5 лет, включая упоминавшуюся в § 6 квазидвухлетнюю цикличность атмосферной циркуляции, явление Эль-Ниньо в восточной части экваториальной зоны Тихого океана, 3,5-летние автоколебания северной ветви Гольфстрима и т. п.).

Длинные астрономические периоды создаются, прежде всего, возмущениями движения планеты вследствие притяжения остальных планет, из-за чего наклон экватора к эклиптике ε, эксцентриситет орбиты e и долгота ее перигелия Π совершают *условно-периодические* колебания (в системе n планет с $3n-1$ независимыми частотами). На Земле преимущественными являются астрономические периоды в 100, 41, 23 и 19 тыс. лет, и именно они оказались выраженными в спектрах колебаний ряда климатических индикаторов за время оледенений плейстоцена (Дж. Хейс, Дж. Имбри, Н. Шеклтон, 1976). На Марсе преимущественные астрономические периоды равны 117 и 52 тыс. лет и соответствующие колебания инсоляции далеко не малы — на летних полюсах они достигают 32,5 % от средней инсоляции, тогда на Земле они составляют самое большее 5 % (А. С. Монин, 1979).

Имеющиеся исторические данные по Земле показывают, что колебания в системе АОС с промежуточными периодами в десятки лет (*внутривековые*) и сотни лет (*междувековые*, в том числе так называемый «малый ледниковый период» XVII—

XIX веков) в среднем заметно менее интенсивны, чем короткопериодные колебания, указанные выше, и чем длиннопериодные колебания (тысячи и десятки тысяч лет), проявлявшиеся в образовании, росте и разрушении континентальных ледниковых щитов. Это, вероятно, относится и к Марсу, который, по-видимому, находится сейчас в состоянии оледенения (с широким развитием вечной мерзлоты).

Выбрав на короткопериодном конце интервала промежуточных периодов пограничный период τ_0 (для Земли по международному соглашению выбирается $\tau_0 = 30$ лет), примем следующее определение: *климатом называется статистический ансамбль состояний, проходимых системой А—ДСПП за периоды времени порядка* τ_0. При этом колебания в климатической системе с короткими периодами $\tau < \tau_0$ следует называть изменениями погоды, а колебания с длинными периодами $\tau \gg \tau_0$ — изменениями климата.

Наиболее важным определяющим климат параметром, внешним по отношению к климатической системе, представляется поток излучаемого или поглощаемого этой системой тепла $q_i + q_r$, где q_i — поток внутреннего тепла, а q_r — поток усваиваемого солнечного излучения, задаваемый формулой (43.5). На планетах земной группы основную роль играет q_r; например, на Земле $q_r \approx 240$ Вт/м^2, а геотермический поток тепла q_i оценивается всего в $5 \cdot 10^{-2}$ Вт/м^2. На больших планетах, наоборот, главную роль, по-видимому, играет q_i. На Солнце $q_i \approx 6{,}31 \cdot 10^7$ Вт/м^2, а поток q_r, конечно, равен нулю.

Климат планеты определяется, во-первых, астрономическими факторами — светимостью Солнца (а для спутников — также светимостью их центральной планеты), положением и движением планеты в Солнечной системе, наклоном ее оси вращения к плоскости орбиты и скоростью вращения. Эти факторы определяют инсоляцию и ее распределение по внешней границе атмосферы, а также гравитационные воздействия внешних тел, создающие как приливы, так и колебания характеристик орбитального движения и собственного вращения (а потому и колебания инсоляции).

Во-вторых, климат определяют размеры и масса планеты, внутренние источники тепла, а также, возможно, ее гравитационное и магнитное поля. В-третьих, определяющими являются характеристики самой климатической системы — масса и состав атмосферы (включая и ее постоянные составные части, и переменные термодинамически активные примеси, в частности облакообразующие) и особенности ДСПП (рельеф твердой поверхности, распределение суши и, если таковые есть, как на Земле, бассейнов с жидкостью, ее масса и состав, а также структура и свойства ДСПП под твердой поверхностью).

Является ли климатическая система при фиксированных значениях всех климатообразующих факторов *транзитивной*, т. е. *эр-*

годической в смысле (15.5), так что изображающая ее эволюцию траектория в соответствующем фазовом пространстве с течением времени обходит все точки этого пространства (и, значит, статистика состояний, проходимых системой за достаточно большое время, мало зависит от начального состояния)? Или же климатическая система *интранзитивна*, и при одних и тех же значениях климатообразующих факторов из-за небольших различий в начальных состояниях системы могут получаться разные климаты?

Или, наконец, система А—ДСПП *почти интранзитивна* (Э. Лоренц, 1960) и может испытывать «перебросы» (по определению А. М. Обухова, см. § 6) из одного климатического режима в другой, как это имеет место для системы уравнений (17.10) со странным аттрактором Лоренца, и как это было, например, на Земле во время чередования ледниковых и безледниковых климатов плейстоцена? Но упомянутые выше фактические данные о проявлении в спектрах этих колебаний длинных астрономических периодов показывают, что такие колебания создавались изменениями внешних климатообразующих факторов (служившими, может быть, триггерными механизмами для «перебросов»).

§ 49. Упрощенные модели климата

Модели климатической системы должны включать все ее основные части, на Земле — атмосферу, океан и деятельный слой суши. В моделях атмосферы, рассматривавшихся в § 44 и 45, ДСПП приходилось учитывать хотя бы в виде упрощенных краевых условий. В моделях океана § 46 и 47 атмосферные воздействия приходилось задавать. Теперь предстоит объединить эти модели, т. е. перейти, как минимум, к моделям глобального *взаимодействия атмосферы и океана* (ВАО).

Простейшими являются модели типа теории подобия § 44 с уравнениями лишь для небольшого числа интегральных параметров системы, а также одномерные модели, описывающие, например, только ее вертикальную или только широтную неоднородность. Они, конечно, неполны и обычно позволяют получить правильные оценки лишь некоторых из характеристик системы, тогда как другие характеристики получаются нереальными (так, например, в (44.9) сезонные колебания δT, U и ε получились удовлетворительными, а T — завышенными).

Для Земли обобщение теории подобия § 44 с включением глобального ВАО было построено С. С. Зилитинкевичем и А. С. Мониным (1976). Оно заключается, прежде всего, во введении наряду с меридиональным потоком тепла в атмосфере

$$Q_a = c_p M \frac{\overline{U'T'}}{\pi r_0/2} = \frac{m}{\Pi_M \Pi_\omega^2} \frac{U\delta T}{c_r T_r} q \qquad (49.1)$$

также меридионального потока тепла в океане $2Q$, где Q — типичное значение вертикального потока тепла из атмосферы в океан в низких широтах и из океана в атмосферу в высоких широтах (формула (49.1) вполне аналогична (44.2) и отличается лишь заменой $U\delta t$ на $\overline{U'T'} \sim \sigma_U \sigma_T \sim (LU/r_0)(L\delta T/r_0)$, откуда с использованием для U формулы термического ветра $U = R\delta T/(\omega\sqrt{2})$ ($\pi \times$ $\times r_0/2$) при эффективном параметре Кориолиса $\omega\sqrt{2}$ и с учетом (44.5) получается правая часть (49.1) с коэффициентом $m \approx 1{,}2$). Умножив $2Q$ на относительную площадь Мирового океана, имеем

$$Q_a(1+\xi) = q; \quad \xi = {}^2/_3(2Q/Q_a). \tag{49.2}$$

Величину Q можно определить с помощью полуэмпирических формул типа (34.5), (34.6):

$$Q/c_w\rho_w = \alpha\mathcal{K}\delta T_w/h; \quad u_*^2 = \mathcal{K}\delta U_w/h;$$

$$\mathrm{Rf} = \frac{\beta Q}{c_w\rho_w}\left(u_*^2\,\frac{\delta U_w}{h}\right)^{-1}. \tag{49.3}$$

Здесь c_w и ρ_w — удельная теплоемкость и плотность морской воды; $\beta \approx 0{,}2$ см/(с$^2\cdot$ K) — ее параметр плавучести; $\delta T_w \sim \delta T$ и δU_w — типичные вертикальные перепады температуры и скорости течения в верхнем деятельном слое океана (толщиной h); $\mathcal{K}$ и $\alpha\mathcal{K}$ — коэффициенты вертикального обмена импульсом и теплом в океане; $u_* = \left(c_f \frac{\rho_a}{\rho_w} U^2\right)^{1/2}$ — скорость трения в океане ($c_f \sim 10^{-3}$ — коэффициент трения морской поверхности); Rf — динамическое число Ричардсона.

При $\alpha\mathrm{Rf} = R_0 \approx 5\cdot 10^{-4}$, $u_* \sim 1$ см/с, $\delta T_w \sim 27$ °C, $h \sim 300$ м получается $\alpha\mathcal{K} = u_*^2(R_0 h/\beta\delta T_w)^{1/2} = {}^5/_3$ см^2/с и $M_s = \beta Q/c_w g \sim$ ~ 10 г/(см$^2\cdot$ год), в неплохом соответствии с эмпирическими оценками. Однако h желательно не задавать, а определять, как результат ВАО. Для этого можно принять, что в течение холодного полугодия h растет со временем по закону $\partial h/\partial t = b\alpha\mathcal{K}/h$, где b — числовая постоянная, и правая часть есть скорость вовлечения воды в деятельный слой океана. Тогда типичное значение h будет равно $(b\alpha\mathcal{K}t_0)^{1/2}$, где t_0 — годовой период, и для совпадения с предыдущими оценками следует положить $b \approx 17$. При таком h из (49.3) получается

$$\alpha\mathcal{K} = \left(\frac{R_0 u_*^4}{\beta\delta T_w}\right)^{2/3}(bt_0)^{1/3}; \quad h = \left(\frac{R_0 u_*^4}{\beta\delta T_w}\right)^{1/3}(bt_0)^{2/3};$$

$$\frac{Q}{c_w\rho_w} = \left(\frac{R_0 u_*^4}{\beta\delta T_w}\right)^{1/3}\delta T_w (bt_0)^{-1/3}. \tag{49.4}$$

При фиксированном u_* более медленная зависимость Q от δT_w, чем прямая пропорциональность, может быть объяснена за-

трудняющей вертикальной обмен устойчивой стратификацией океана. Однако u_* не фиксировано, а пропорционально U, а потому и δT. Если не различать δT_w и δT, то из (49.4) получается $Q \sim \alpha\mathcal{K} \sim (\delta T)^2$ и $h \sim \delta T$. Подставив Q из (49.4) в соотношения (49.2) и (49.3) и затем разрешив их относительно δT и ξ, получим

$$\frac{\delta T}{T_r} = \left(\frac{2{,}2}{m}\,\frac{\Pi_M \Pi_Q}{1+\xi}\right)^{1/2}; \quad \xi = \Pi_Q \left(\frac{\delta T_w}{\delta T}\right)^{2/3}, \tag{49.5}$$

где Π_Q — безразмерный множитель, имеющий смысл верхнего предела отношения океанского меридионального потока тепла к атмосферному. Явное выражение для него через Π_ω, Π_M и другие введенные выше параметры выписать нетрудно, но оно нам здесь не понадобится; отметим лишь, что при указывавшихся выше значениях параметров получается $\Pi_Q \approx 0{,}42$.

Изложенная теория (вместе с теорией подобия § 44) позволяет рассчитать по внешним параметрам климатические характеристики атмосферы — среднюю температуру приземного слоя воздуха $T_s = T_r/\alpha_r$, меридиональную разность температур δT, температуры на экваторе $T_E = T_s + \frac{1}{3}\,\delta T$ и на полюсе $T_P = T_s - \frac{2}{3}\,\delta T$, типичную скорость ветра U, меридиональный атмосферный поток тепла Q_a, а также характеристики океана $\delta T_w = T_E - \max(T_P, T_{wi})$, $\alpha\mathcal{K}$ и h и мелкомасштабного ВАО $\tau = \rho_w u_*^2$ и Q.

Так, например, для современного климата, при котором Арктика полуизолирована от Мирового океана, а Антарктида покрыта льдом, в формуле (49.5) для δT можно приближенно положить $\xi \approx 0$ и при современных значениях $T_r = 255$ К, $\Pi_\omega = 1{,}7$ и $\Pi_M = 2{,}17 \cdot 10^{-3}$ получается $\delta T = 36\,^\circ$C и затем $T_s = 15\,^\circ$C, $T_E = 27\,^\circ$C, $T_P = -9\,^\circ$C, $U = 10$ м/с, $\tau = 0{,}1$ Па, $Q_a = 244$ Вт/м^2, $^4/_3 Q = 84$ Вт/м^2, $\delta T_w = 27\,^\circ$C, $\alpha\mathcal{K} = 1{,}7$ см^2/с и $h = 300$ м, в общем вовполне удовлетворительном согласии с эмпирическими данными.

Этот успех позволяет применять аналогичные оценки и к климатам прошлого. Так, в мезозое оба полюса находились, по-видимому, в открытом океане и, как будет видно из приведенных чуть ниже оценок, в полярных областях, вероятно, не было многолетних льдов. Поэтому суммарное альбедо Земли было, вероятно, несколько меньше современного. Значит, q было несколько больше. Если принять это превышение равным 4 %, то T_r и T_s получаются на 3 °C выше современных, и при $\xi = 0{,}42$ получается $\delta T = 31\,^\circ$C, $T_E = 301$ К (на 1 К выше, чем сейчас) и $T_P = 270$ К (на 6 К выше, чем сейчас — отсюда и упомянутое выше отсутствие многолетних льдов).

Во время знаменитого пермокарбонового оледенения Гондваны 300—250 млн. лет тому назад Южный полюс находился на Гондванском континенте, а Северный, по-видимому, в открытом

океане. Если в первом приближении оценивать климаты для южного и северного полушарий по отдельности, то южному полушарию можно приписать значение $\xi=0$ и повышенное среднее альбедо, скажем $A=0{,}37$ (20 % площади льдов с альбедо 0,8 и 80 % безледных площадей с альбедо 0,26). Тогда там T_r и T_s получаются на 7 °С ниже современных, $\delta T=35$ °С, $T_E=293$ К, $T_P=258$ К. В северном же полушарии, взяв указанное T_E и мезозойское $\delta T=31$ °С, получаем близкую к современной температуру полярной области $T_P=262$ К.

Заранее ясно, что *одномерные* модели *вертикальной структуры* атмосферы и океана не могут быть полными, так как в формировании вертикальной структуры всегда участвует *горизонтальный перенос* тепла и других субстанций. Продемонстрируем это на примере изящной теории вертикальной структуры океана, построенной В. М. Каменковичем (1958) и П. Веландером (1959). В этой теории принимается, что вариации плотности морской воды ρ'_w пропорциональны вариациям температуры T', а течения бездивергентны и геострофичны:

$$\frac{\partial p'}{\partial z}=g\rho_0\alpha_0 T';\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

$$fv=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x};\quad fu=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}. \tag{49.6}$$

Изящность заключается в том, что эти уравнения позволяют выразить все неизвестные поля u, v, w, p' и T' через одну функцию M:

$$u=-\frac{1}{f}\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial z};\quad v=\frac{1}{f}\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial z};\quad w=\frac{\beta}{f^2}\frac{\partial M}{\partial x};$$

$$p'=\rho_0\frac{\partial M}{\partial z};\quad T'=\frac{1}{g\alpha_0}\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}. \tag{49.7}$$

Тогда уравнение конвективной теплопроводности с вертикальным турбулентным обменом $\mathbf{u}\cdot\nabla T'=\alpha\mathcal{K}\,\partial^2 T/\partial z^2$ и краевые условия на поверхности океана $z=0$ (заданные температура T'_s и вертикальная скорость $w_s=\mathrm{rot}\,\tau_0/f$) и на дне $z=-h$ (заданная температура $T'_h\approx 0$ и условие непротекания $w=-\mathbf{u}\cdot\nabla h$ принимают вид

$$\alpha\mathcal{K}f\frac{\partial^4 M}{\partial z^4}+\frac{\partial\,(\partial^2 M/\partial z^2,\ \partial M/\partial z)}{\partial\,(x,\ y)}-\frac{\beta}{f}\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial^3 M}{\partial z^3}=0;$$

$$z=0;\quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}=g\alpha_0 T'_s;\quad M=M_s=\frac{f^2}{\beta}\int_0^x w_s\,dx;$$

$$z=-h:\quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}=0;\quad \frac{\beta}{f}\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial\,(h,\ \partial M/\partial z)}{\partial\,(x,\ y)}. \tag{49.8}$$

Пусть масштаб горизонтальной длины $L=f/\beta\approx 6\cdot 10^3$ км, вертикальной скорости $W\approx 10^{-4}$ см/с и температуры $\Theta\approx 10$ К. Из третьего уравнения (49.8) для M получается масштаб $M_h=fL^2W$, а из пятого для z получается *адвективный* масштаб $Z_a=(fL^2\times\times W/g\alpha_0\Theta)^{1/2}\approx 400$ м (при $\alpha_0\approx 2{,}5\cdot 10^{-4}$ $(\text{К})^{-1}$). При переходе к безразмерным переменным в (49.8) останутся только малый параметр $\varepsilon=Z_d/Z_a\approx 1/40$ (где $Z_d=\alpha\mathcal{H}/W\approx 10$ м — *диффузионный* масштаб при $\alpha\mathcal{H}\approx 10^{-1}$ см^2/с) и $\delta=Z_a/Z_h$ (где Z_h — масштаб вариаций глубины h). Таким образом, за исключением пограничных слоев у поверхности океана и у дна вертикальная адвекция тепла должна уравновешиваться горизонтальной, так что модель не может быть одномерной.

Впрочем, чтобы не ограничиваться здесь одним лишь этим отрицательным выводом, укажем удовлетворяющее обоим верхним краевым условиям частное решение уравнения (49.8), аналогичное полученному Г. Нидлером (1967, 1971):

$$M=M_s+A(x,\ y)z-\frac{g\alpha_0 f^2}{b^2}T_s'(1-e^{bz/f});$$

$$\frac{\partial(A,\ \ln T_s')}{\partial(x,\ y)}=\frac{b^2}{f}\alpha\mathcal{H}-bw_s+\frac{g\alpha_0\beta}{b}\frac{\partial T_s'}{\partial x}. \qquad (49.9)$$

При большом bh оно приближенно удовлетворяет и первому из донных условий (второе же удовлетворяется лишь при специальном выборе w_s, т. е. поля ветра). Оказалось, что это решение в общем неплохо описывает вертикальные распределения u, v, T в океане.

Для вертикальной термической структуры атмосферы кроме турбулентного перемешивания и крупномасштабного переноса существенную роль играет еще лучистый теплообмен (так как в воздухе, в отличие от воды, длина свободного пробега фотонов, и не только коротковолнового солнечного, но и длинноволнового собственного излучения, довольно велика). Здесь он настолько важен, что некоторый смысл имеет расчет вертикального профиля температуры *лучистого равновесия*. Впервые его рассчитал Р. Эмден (1913), используя так называемое двухпотоковое приближение (т. е. учитывая только вертикальные потоки лучистой энергии вверх $F^{\uparrow}$ и вниз $F^{\downarrow}$) и допуская, что атмосфера поглощает длинноволновое излучение, как «серое» тело (т. е. коэффициент поглощения $\alpha_{\text{п}}$ не зависит от длины волны излучения):

$$\frac{\partial F^{\downarrow}}{\partial z}=\alpha_{\text{п}}\rho_{\text{п}}(F^{\downarrow}-f\sigma T^4);\quad \frac{\partial F^{\uparrow}}{\partial z}=\alpha_{\text{п}}\rho_{\text{п}}(f\sigma T^4-F^{\uparrow});$$

$$z=0:\ F^{\uparrow}-F^{\downarrow}=S;\ z=\infty:\ F^{\downarrow}=0, \qquad (49.10)$$

где $\rho_{\text{п}}$ — плотность поглощающих излучение веществ, а S — поток солнечного излучения. Поскольку при лучистом равновесии должно

быть $F^{\uparrow}-F^{\downarrow}=\text{const}$, эти уравнения легко решаются относительно T, но, естественно, дают завышенные вертикальные и широтные контрасты, которые в реальности сглаживаются турбулентным перемешиванием и крупномасштабным переносом тепла. Это лишь отчасти подправил отказ от приближения «серого» тела (т. е. суммирование по всем спектральным линиям), осуществленный С. Манабе и Р. Стриклером, 1964 (вводившими также «конвективное приспособление»).

И. А. Кибель (1943) предпринял попытку скомпенсировать дефицит лучистого равновесия турбулентным перемешиванием, оставаясь в рамках только вертикального теплообмена (т. е. без учета крупномасштабного теплопереноса). Для этого он заменил условие лучистого равновесия $F^{\uparrow}-F=\text{const}$ уравнением

$$\alpha_{\text{п}}\rho_{\text{п}}\left(F^{\uparrow}+F^{\downarrow}-2f\sigma T^{4}+\gamma S\right)+\frac{\partial}{\partial z}\rho\alpha\mathscr{K}\frac{\partial T}{\partial z}=0, \qquad (49.11)$$

где γ — отношение коэффициентов поглощения «серого» коротковолнового и длинноволнового излучения, профиль S описывается уравнением $\partial S/\partial z=\gamma\alpha_{\text{п}}\rho_{\text{п}}S$, краевые условия при $z=0$ берутся в виде $F^{\uparrow}-F^{\downarrow}=S+\rho\alpha\mathscr{K}\,\partial T/\partial z$ и $F^{\uparrow}=f_{*}\sigma T^{4}$, а при $z=\infty$ добавляется условие $F^{\uparrow}=S=q$. Введя вместо z оптическую толщину $\tau=\int\limits_{z}^{\infty}\alpha_{\text{п}}\rho_{\text{п}}dz$ и перейдя к безразмерным переменным:

$$\xi=q^{-1}\left(F^{\uparrow}+F^{\downarrow}\right);\quad \eta=q^{-1}\left(F^{\uparrow}-F^{\downarrow}\right);\quad \zeta=q^{-1}f\sigma T^{4};$$
$$\frac{m^{2}-1}{2}=\frac{4f\sigma T^{3}}{\alpha_{\text{п}}\rho_{\text{п}}\rho\alpha\mathscr{K}}, \qquad (49.12)$$

уравнения теории Кибеля удается привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{2}{m^{2}-1}\frac{\partial\zeta}{\partial\tau}+\xi-2\zeta+\gamma e^{-\gamma\tau}=0;\quad \frac{\partial\xi}{\partial\tau}=\eta;\quad \frac{\partial\eta}{\partial\tau}=\xi-2\zeta;$$

$$\tau=\tau_{0}:\ \eta=e^{-\gamma\tau_{0}}-\frac{2}{m^{2}-1}\frac{\partial\zeta}{\partial\tau};\quad \xi+\eta=2\frac{f_{*}}{f}\zeta; \qquad (49.13)$$

$$\tau=0:\ \xi=\eta=1,$$

где τ_{0} — полная оптическая толщина атмосферы. При $m\approx\text{const}$ эти уравнения легко решаются. Кибель принял $m=1{,}75$ и $\rho_{\text{п}}=\rho_{\text{п}0}(T_{0}/T_{\infty})\,(1+\tau)^{-1/4}e^{-z/L}$ и при вполне разумном подборе параметров получил хорошо согласующийся с фактическим профиль температуры (на выбранной им широте 42°). Но для τ_{0} при этом получилось сильно завышенное значение 12,6, так что потоки лучистой энергии в этой модели далеки от реальности. Таким обра-

зом, пренебрежение крупномасштабным теплопереносом нарушает реальные связи между вертикальными профилями температуры и излучения, как того и следовало ожидать.

Аналогичные неувязки возникают и в *одномерных* моделях *широтной структуры* климата. Они обычно основываются на уравнении годичного бюджета тепла широтных зон

$$QS(y)[1-A(y)]-I(y)=\mathscr{D}(y), \tag{49.14}$$

где $y=\sin\varphi$ — меридиональная координата, $Q=\frac{1}{4}I_0$ — четверть солнечной постоянной, $QS(y)$ — определяемое астрономическими формулами меридиональное распределение инсоляции, $A(y)$ — планетарное альбедо (так что $QS(1-A)$ есть годичное усваиваемое солнечное тепло), $I(y)$ — годичный поток уходящего солнечного излучения (так что левая часть (43.14) — это суммарный годичный поток лучистой энергии на внешней границе атмосферы), $\mathscr{D}(y)$ — дивергенция проинтегрированного по всей толще атмосферы и океана годичного меридионального потока тепла, создаваемого меридиональными движениями.

Это уравнение самоочевидно, но при попытках выразить в нем величины A, I, $\mathscr{D}$ через температуру приземного слоя атмосферы $T(y)$ могут возникнуть неувязки, так как состояние приземного слоя атмосферы вряд ли определяет само себя. Рассмотрим этот вопрос на примерах модели М. И. Будыко (1968):

$$I(y)=(a-na_1)+(b-nb_1)T(y); \tag{49.15}$$

$$\mathscr{D}(y)=\beta[T(y)-\overline{T}]; \tag{49.16}$$

$$A(y)=\begin{cases}A_i & \text{при } T(y)<T_c,\\ A_w & \text{при } T(y)>T_c,\end{cases} \tag{49.17}$$

где полагалось $a=14$; $a_1=125{,}7$ МДж/м² за месяц; $b=0{,}14$; $b_1=0{,}10$; $\beta=9{,}85$ МДж/(м²·К) за месяц; $n=0{,}5$ — балл облачности; $T_c=-10$ °С; $A_i=0{,}62$ и $A_w=0{,}32$ — альбедо ледовых и безледных зон; $\overline{T}$ — средняя планетарная температура, вносящая в модель нелокальность, и модели В. Селлерса (1969):

$$I(y)=\sigma T^4(y)\left\{1-\frac{1}{2}\operatorname{th}[\sigma_1 T^6(y)]\right\}; \tag{49.15'}$$

$$\mathscr{D}(y)=-\frac{\partial}{\partial y}(1-y^2)\mathscr{D}\frac{\partial T(y)}{\partial y}; \tag{49.16'}$$

$$A(y)=\begin{cases}A_0-A_1T(y) & \text{при } A\leqslant 0{,}85 \text{ и } T<10\,^\circ\text{С},\\ \text{const} & \text{в остальных случаях}\end{cases} \tag{49.17'}$$

(где полагалось $\sigma_1=1{,}9\cdot10^{-15}$; $\mathscr{D}=0{,}45$ Вт/(м²·К); $A_0=0{,}486$; $A_1=0{,}092$ К$^{-1}$; нелокальность введена через (49.16′)). Особенностями этих моделей оказываются неединственность их решений

(указывающая, возможно, на интранзитивность климата в смысле Э. Лоренца) и неустойчивость некоторых из них по отношению к малым вариациям параметров.

Так, для модели (49.15)—(49.17) на критической широте $y = y_c$, где $T = T_c$, получается

$$F(y_c) = \frac{I_0}{Q}\frac{1+\beta_1}{\beta_1}\frac{1-\alpha_c}{\beta_1}S(y_c) + \overline{A}(y_c) - 1 = 0, \qquad (49.18)$$

где $\beta_1 = \beta/(b - nb_1) \approx 2{,}61$, а $\overline{A}$ — среднее взвешенное по $S(y)$ значение альбедо. Если аппроксимировать $S(y)$ кусочно-линейной функцией, то $\overline{A}$ будет квадратичной функцией от y_c и (49.18) — квадратным уравнением относительно y_c. При современных значениях параметров оно имеет два вещественных корня, из которых современному климату отвечает наибольший ($\varphi_c = 72°$ с. ш.). При уменьшении Q всего на 1,6 % они сливаются (на широте $\varphi_c = 50°$), а еще ниже становятся комплексными (т. е. граница льдов скачкообразно перемещается на экватор, и наступает полное оледенение всей Земли — состояние, устойчивое относительно малых вариаций Q).

По расчетам Г. С. Голицына и И. И. Мохова (1978), минимум скорости обмена энтропией между климатической системой и внешней средой, обеспечивающий устойчивость системы, достигается при заметно меньшем значении β, чем указывалось выше, и, значит, при большей разности температур между экватором и полюсами δT, чем в реальности.

Заменив (49.17) более удобной формулой $A = A_0 - (\partial A/\partial T)T$ (в интервале температур, вне которого A не зависит от T), эти авторы приближенно вывели для критической широты φ_*, ниже которой происходит полное оледенение Земли, уравнение

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_*}{2} - \frac{\sin 2\varphi_*}{4} = \frac{b - nb_1 + \beta}{Q\,\partial A/\partial T} = B. \qquad (49.19)$$

Климаты с широтой границы льдов выше φ_*, в том числе современный климат, теперь получаются устойчивыми, так как отрицательная обратная связь $I(T)$ оказывается сильнее положительной обратной связи $A(T)$ (в частности, при $\partial A/\partial T$ все климаты устойчивы); в противном случае климаты неустойчивы. При достаточном условии устойчивости $B \geqslant 1$ критическая широта φ_* исчезает, и переход от частичного к полному оледенению Земли и обратно при постепенном изменении параметров Q и $b - nb_1 + \beta$ происходит плавно.

Чрезмерную чувствительность модели (49.15)—(49.17) к малым изменениям Q и слишком высокое значение $\varphi_* = 50°$ можно подправить, введя зависимость альбедо $A_{i,w} = nA_0 + (1-n)A'_{i,w}$ от балла облачности n. Если, кроме того, ввести еще зависимость

n, A_0, $A'_{i,w}$ от широты, то, по расчетам Голицына и Мохова, φ_* снижается до 20° и достигается при уменьшении Q на 8 %, в хорошем согласии с результатами, получаемыми по трехмерным моделям климатической системы. Однако так подправленную модель простой уже не назовешь.

Такие же результаты получаются и по модели (49.15′)—(49.17′). А. Фаигр (1972) решал эти уравнения численно (заменив (49.15′) формулой $I=K\sigma T^4$, где $K=K(y)$ подбиралось по современному климату). Он получил пять решений: неустойчивые по отношению к снижению Q на 2 % решения 1 (современный климат) и 2 (на 15° ниже и с $\varphi_c=50°$), устойчивое решение 3 (на 100° ниже) и решения 4 и 5 с более теплым южным полушарием, исчезающие при замене $K(y)$ константой.

Дж. Норт (1975) рассмотрел смешанную модель (49.15), (49.16′), (49.17), уравнения которой при $S(y)=1+S_2P_2(y)$ решаются в гипергеометрических функциях, где $P_2(y)$ — полином Лежандра. Полученная им функция $y_c(Q)$ отвечает пяти климатическим режимам. Современный климат и полное оледенение Земли оказались устойчивыми, а климат ледниковых периодов — неустойчивым и, значит, недостижимым из современного состояния (что Дж. Норт предлагает объяснять неполнотой модели — отсутствием в ней ряда важных обратных связей $n(T)$, $\mathscr{D}(T)$ и т. п.).

Г. С. Голицын и И. И. Мохов, положив $A_w=0{,}3-0{,}08P_2(y)$, установили, что в модели Дж. Норта скорость обмена энтропией между климатической системой и внешней средой достигает минимума при значительно меньшем значении $\mathscr{D}$ и, значит, большем меридиональном температурном контрасте δT, чем при современном климате. Кроме того, они получили такие же, как и выше, критерии устойчивости различных климатов.

Таким образом, упрощенная параметризация слагаемых в уравнении (49.14) приводит к ряду противоречий, и необходимо построение более полных моделей климата.

§ 50. Трехмерные численные модели

В достаточно полных моделях земной климатической системы АОС атмосфера описывается уравнениями (45.1)—(45.5) с надлежащими краевыми условиями на нижней границе, включающими уравнения бюджета тепла и влаги (45.6), (45.7). Океан описывается такими же уравнениями гидродинамики (45.1)—(45.3) и аналогами уравнений термодинамики (45.4), (45.5) с включением в число краевых условий на поверхности океана уравнений (46.1) и (46.2) для определения формы этой поверхности, а также уравнения бюджета соли (46.3).

Кроме того, нужно решать еще три задачи: во-первых, в целях определения потоков тепла и влаги в почву q_s и I_s, входящих в условия (45.6) и (45.7), нужно описывать гидрологические

процессы в деятельном слое почвы на суше; во-вторых, надо преодолеть трудность, создаваемую очень большой механической и тепловой инерцией океана по сравнению с атмосферой и требующую интегрирования уравнений динамики океана на гораздо большие сроки; в-третьих, надо описывать состояние и эволюцию континентальных ледниковых щитов, имеющих еще много большую инерцию, чем океан. Рассмотрим эти три задачи по очереди.

Программа описания гидрологических процессов на суше сформулирована А. С. Мониным (1979). Нужно задать осредненный по ячейкам избранной пространственной сетки рельеф $z=h(\theta, \lambda)$ (с проведенными по осям гребней *водоразделами* и по осям ложбин *руслами рек*, разделяющими *склоны*); «высоту шероховатости» z_0; альбедо A и излучательную способность f; теплоемкость и теплопроводность почвы; рельеф $z=h_2(\theta, \lambda)$ подпочвенной водоупорной поверхности (рельеф поверхности грунтовых вод $z=h_1(\theta, \lambda, t)$, $h_2 \leqslant h_1 \leqslant h$ не задается, а подлежит расчету); капиллярную m_0 и некапиллярную m_1 объемную *пористость* грунта и соответствующие *коэффициенты фильтрации* k_0 и k_1 в слое $h_1 \leqslant z \leqslant h$ (а также m и k в слое $h_2 \leqslant z \leqslant h_1$).

При неполном насыщении слоя $h_1 \leqslant z \leqslant h$ (когда объемная *влажность* грунта σ меньше m_0) капиллярную фильтрацию в нем рассчитывают по уравнению сохранения влаги $\partial\sigma/\partial t+\partial V_z/\partial z=0$, где *скорость фильтрации* V_z определяется по *закону Дарси* $V_z=-k_0\,\partial Z/\partial z$, а $Z=z+(p_a+p_к)/g\rho_w$ — *напор*, причем зависимости k_0 и капиллярного давления $p_к$ от σ задаются эмпирическими формулами. Отсюда получается уравнение фильтрации

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}-W\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{D}\frac{\partial\sigma}{\partial z};\quad W=\frac{\partial k_0}{\partial\sigma};\quad \mathscr{D}=\frac{k_0}{g\rho_w}\frac{\partial p_k}{\partial\sigma}. \qquad (50.1)$$

Краевое условие для σ на поверхности грунта $z=h$ при наличии на ней жидкой воды имеет вид $\sigma=m_0$, а при ее отсутствии $\rho_w V_z=E$; на поверхности грунтовых вод $z=h_1$ опять $\sigma=m_0$. Входящий в (45.7) поток влаги в почву I_s складывается из $\rho_w V_z$ и *инфильтрации* $(-\rho_w k_1)$.

Подземный сток рассчитывают в так называемом *гидравлическом приближении* — в среднем по слою h_1-h_2, полагая $\mathbf{V}=-k\nabla h_1$. Уравнение сохранения влаги при этом приводится к виду

$$\frac{\partial m h_1}{\partial z}=\operatorname{div}(\mathscr{D}_1\nabla h_1)+\frac{I_1-E_1}{\rho_w};\quad \mathscr{D}_1=k(h_1-h_2) \qquad (50.2)$$

(*уравнение Буссинеска* для h_1), где I_1 и E_1 — инфильтрация и испарение на поверхности грунтовых вод, а $\mathscr{D}_1$ — так называемая *проводимость пласта*.

Поверхностный сток, источник которого E_s определяется из (45.7), является суммой склонового и речного стока. Склоновый сток можно описывать, как двумерное течение сжимаемой жидко-

сти с поверхностной плотностью ρ_s, удовлетворяющей уравнению неразрывности с источниками

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_s \mathbf{v} = E_s \qquad (50.3)$$

(справедливому в областях θ, λ, t, в которых $\rho_s > 0$), где скорость $\mathbf{v} = (v_\theta, v_\lambda)$ определяется из уравнений:

$$\frac{dv_\theta}{dt} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r_0} v_\lambda^2 - fv_\lambda = -\frac{g}{r_0}\frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{E_s v_\theta}{\rho_s} - \frac{vv_\theta}{l} + F_\theta;$$

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r_0} v_\theta v_\lambda + fv_\theta = -\frac{g}{r_0 \sin\theta}\frac{\partial h}{\partial \lambda} - \frac{E_s v_\lambda}{\rho_s} - \frac{vv_\lambda}{l} + F_\lambda. \qquad (50.4)$$

Вторые слагаемые в правых частях здесь появились после перехода от уравнений для плотности импульса $\rho_s \mathbf{v}$ к уравнениям для $\mathbf{v}$ с использованием (50.3), третьи описывают квадратичное сопротивление (по *формуле Шези*), а четвертые — диффузию течения на склоне (с коэффициентом вязкости, зависящим как от среднего квадрата мелкомасштабных наклонов рельефа, так и от крупномасштабной кривизны склона, определяющей знак вязкости — так, чтобы при положительной кривизне поток растекался, а при отрицательной сходился). Из-за источников или стоков E_s склоновый поток может иметь изменчивые края $\rho_s = 0$ (подлежащие расчету), в том числе содержать «дырки» и выделять «капли».

Речной сток можно описывать, как *одномерное* течение сжимаемой жидкости с линейной плотностью $\rho_l = \rho_w \Sigma$ (где Σ — площадь живого сечения реки, занятого водой), удовлетворяющее *уравнениям Сен-Венана* — уравнению неразрывности с источниками, складывающимися из нормальных к реке компонент склонового и подземного стоков с правого и левого склонов, и аналогичных (50.4) уравнений движения (с заменой h на $h + h_r$, где h_r — глубина реки, и с описанием при помощи $\mathbf{F}$ продольной тейлоровской диффузии), причем дополнительно надо задать «уравнение состояния» $\Sigma = \Sigma(h_r)$.

Приходится отметить, что в климатических моделях изложенная гидрологическая программа пока еще не использовалась, а заменялась теми или иными упрощенными эмпирическими соотношениями. Забегая немного вперед, укажем также, что почти во всех климатических моделях не рассчитывались и континентальные ледниковые щиты, а лишь задавались их рельеф и наличие на них снегового покрова (причем это делалось при расчете как современного климата, так и климата максимума Вюрмского оледенения 18 тыс. лет назад).

Первая трехмерная климатическая модель была построена С. Манабе и К. Брайеном (1969). Атмосфера описывалась в ней так же, как в изложенной в § 45 «влажной» модели. Для описа-

ния гидрологии принималось, что испарение E с океана, сильно увлажненной поверхности суши (включая густую растительность) и льда или снега пропорционально разности влажности насыщения воздуха при температуре T_s и влажности на верхней границе АПС, а при влажности почвы σ меньше критического значения $\sigma_* = {}^3/_4\sigma_m$ (где σ_m — влагоемкость почвы) уменьшалось в σ_*/σ раз. При $\sigma = \sigma_*$ и скорости фильтрации $V_z \approx P - E > 0$ полагалось $\partial\sigma/\partial t = 0$, а при $\sigma < \sigma_*$ использовалось уравнение $\partial\sigma/\partial t = P - E$. Эволюция снежного покрова описывалась уравнением (46.5), в котором q_{wi} определялось из (45.6) при температуре замерзания T_{wi} и $q_s = 0$. Влагосодержание снега считалось нулевым (а почвы под снегом — как выше).

Океан описывался, как в изложенной в § 46 модели К. Брайена и М. Кокса 1967—1969 гг. (с коэффициентами обмена $\mathcal{K}_z = 1{,}5$ см^2/с и $\mathcal{K}_h = 10^8$ см^2/с, из которых второй, по-видимому, слишком велик). Глубина океана принималась постоянной ($h = 4$ км). Несколько иначе, чем в (46.6), вводился паковый лед, толщина которого h_i определялась из уравнения

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \bar{\mathbf{V}}_h h_i) = \mathcal{K}_h \Delta h_i + P_s - E - (Q_1 + Q_2)\rho_i^{-1}\mathcal{L}_{wi}^{-1}, \qquad (50.5)$$

где $\gamma = 1$ при $h_i < 3$ м и $\gamma = 0$ при $h_i > 3$ м; $\bar{\mathbf{V}}_h$ — средняя скорость течения в верхнем слое океана; Q_1 и Q_2 — потоки тепла в лед сверху и снизу. На первом этапе расчетов τ_0, E, P и T_w задавались по данным атмосферного блока в среднем за последние 100 сут его интегрирования при инертном океане без горизонтального теплопереноса, и полагалось $Q_1 = kT_1(h_i + k/\varepsilon)^{-1}$ и $Q_2 = kT_2 h_i^{-1}$, где температуры T_1 и T_2 отсчитываются от уровня замерзания морской воды 271,2 К, причем $k = 2{,}1$ Вт/(м · К) и $\varepsilon = 123$ Вт/(м^2 · К). На втором этапе на водной поверхности полагалось $\mathcal{K}_z \partial T_w/\partial z = q_s$, где q_s определялось из (45.6), а надо льдом применялась процедура, обеспечивающая условия $T_1 \leqslant 273{,}1$ К и $T_2 = 271{,}2$ К. Аналогично «параметризовался» и поток соли (46.3).

Главным нововведением в этой климатической модели была искусственная «синхронизация» океана и атмосферы (в целях решения второй из названных выше задач): уравнения атмосферного блока интегрировались (по 9-уровенной схеме) шагами по времени 10 мин (сроком на год), а океанского блока (по 5-уровенной схеме) — шагами по 166,7 мин (сроком на 100 лет), и состояние океана на каждом его шаге «склеивалось» со сглаженным по времени (с экспоненциально затухающими в прошлое весами) состоянием атмосферы на каждом ее 18-м шаге.

Расчеты по этой модели производились в условной сферической области (в проекции Меркатора) с размером по долготе 120° (с циклическим повторением), в которой в широтной зоне

$\pm 66{,}5°$ суша и море имели одинаковые размеры, а полярнее (до широт $\pm 81{,}7°$) имелась только суша. Результаты расчетов были статистически осреднены за последние 100 атмосферных суток. Успехом модели явилось заметно более хорошее воспроизведение ряда особенностей современного климата по сравнению с изолированной атмосферной моделью при инертном океане.

А именно появившийся здесь меридиональный перенос тепла океанскими течениями, составивший около половины от атмосферного переноса, уменьшил меридиональный перепад температур δT. Соответственно уменьшились все зависящие от δT величины — интенсивность зональной циркуляции, градиент $\partial u_h/\partial z$ скорости ветра в тропосфере, бароклинная неустойчивость атмосферы, кинетическая энергия макротурбулентности, интенсивность обратной ячейки меридиональной циркуляции в умеренных широтах и «центров действия» атмосферы, меридиональный поток импульса и обмен моментом импульса между атмосферой и твердой Землей и т. п.

Из-за нагрева атмосферы океаном на восточном берегу континента в умеренных и высоких широтах усилился циклогенез и увеличилось количество осадков (что ограничило субтропическую пустыню западной половины континента), а холодный апвеллинг на экваторе в океане ослабил над ним тропические осадки и, наоборот, усилил их над континентом. В северных широтах перенос теплой воды субарктическим круговоротом привел к аналогичным эффектам на западном берегу континента. Поясы дождей умеренных широт и границы снегового покрова несколько передвинулись к полюсам.

Важным шагом вперед явился также расчет полей T и s на поверхности океана (которые в предыдущих моделях не рассчитывались, а задавались). При этом удалось вполне удовлетворительно воспроизвести поле солености во всей толще океана с халоклином в арктической зоне, максимумом s на поверхности океана в субтропиках и слабым минимумом на глубине около 1 км.

В целом переход от описанных в § 45—46 моделей невзаимодействующих атмосферы и океана к объединенной модели климатической системы АОС позволил ввести в эту модель новое качество — эффекты крупномасштабного ВАО, наиболее очевидные из которых перечислены в трех предыдущих абзацах, и которые, по-видимому, ответственны за долгосрочные аномалии погоды.

В то же время следует отметить, что осуществленная в модели Манабе и Брайена искусственная «синхронизация» океана и атмосферы количественно оказалась недостаточной: статистическое равновесие в термическом состоянии океана за рассчитанные 100 океанских лет так и не было достигнуто, и в конце этого срока океан продолжал получать тепло от атмосферы в среднем со скоростью 10 Вт/м² (что соответствует средней скорости его нагрева около 2 °С за столетие). Тем не менее аналогичная

«синхронизация» применялась и в ряде последующих моделей, которые будут охарактеризованы несколько ниже.

Другой способ «склейки» океана и атмосферы был применен в модели Института океанологии АН СССР (С. С. Зилитинкевич, А. С. Монин, В. Г. Туриков, Д. В. Чаликов, 1976). Он заключался в разделении океана на верхний деятельный слой (толщиной $h_1 = 350$ м), синхронно «склеиваемый» с атмосферой, и глубокий океан, климатическое состояние которого рассчитывалось отдельно. Таким образом, эта модель состояла из четырех блоков: свободная атмосфера (А), атмосферный пограничный слой (АПС), деятельный слой океана (ДСО) и глубокий океан (О).

В блоке А с помощью прогностических уравнений рассчитывались поля скорости, температуры, влажности и наземного давления и «параметризовались» горизонтальный обмен, радиационный теплообмен, конвекция, фазовые превращения влаги и осадки. Блок АПС «параметризовался» по рецептам § 36. В блоке ДСО рассчитывались температура T_s верхнего перемешанного слоя и его толщина h и «параметризовались» горизонтальный обмен, вертикальная структура и вертикальная скорость. В блоке О рассчитывались функция тока баротропного течения ψ и температура и «параметризовались» горизонтальный обмен и вертикальная структура.

Из А передавались в АПС значения $\mathbf{u}_1$, T_1, s_1, $\overset{\downarrow}{F}$ и в ДСО — p_a. Из АПС передавались в А значения T_s, q, E и τ, в ДСО — q_s и τ, в О — q_s и τ. Из ДСО передавалось в АПС значение T_s. Из О передавались в ДСО значения T и $\mathbf{u}$. На суше и поверхности морского льда полагалось $q_s = 0$. В областях вечных льдов при $T_s > 0\,^\circ\mathrm{C}$ эта температура заменялась нулем и считалось, что q_s затрачивается на таяние льда. Влажность воздуха на поверхности океана, а во время дождя и на суше считалась насыщающей (но через 2 ч после дождя на суше снижалась вдвое). Альбедо льда и снега принималось равным 0,7, растительности — 0,2 и водной поверхности — 0,1.

В блоке А в качестве вертикальной координаты использовалось нормированное давление $\sigma = p/p_s$, причем наземное давление p_s определялось из так называемого *уравнения тенденции*

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} + \frac{1}{r_0 \sin\theta} \int_0^1 \left(\frac{\partial p_s u_\theta \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial p_s u_\lambda}{\partial\lambda} \right) d\sigma = 0, \qquad (50.6)$$

получаемого интегрированием уравнения неразрывности по всей толще атмосферы. В проводившихся численных расчетах атмосфера разделялась всего на четыре слоя с границами на высотах 1,5; 4,5 и 11 км, но зато баллы облачности не задавались климатически, и на каждом из этих трех уровней рассчитывались по эмпирическим формулам, как линейные функции от соответствую-

щей относительной влажности s/s_m, и суммарный балл равнялся $n=1-(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)$.

С учетом баллов облачности рассчитывались и лучистые потоки тепла — коротковолновые по коэффициентам пропускания и поглощения в облачных и безоблачных ячейках горизонтальной сетки, длинноволновые по значениям функции пропускания водяного пара $\mathcal{P}(m)$ (где m — его масса). Применялось «конвективное приспособление». Снижение влагосодержания из-за выпадения осадков полагалось равным $\delta s=s-cs_m$ (если $s\geqslant cs_m$), где $c=0{,}7$ для конвективных и $c=1$ для неконвективных осадков. Соответствующее повышение температуры равнялось $\delta T=\mathcal{L}\times\times\delta s/c_p$. Делением δT и δs на время «конвективного приспособления» (2 ч) получались притоки тепла Q_c+Q_p и влаги P_c-P_p (где Q_c, P_c — конвективные притоки). Суммированием P_p по всем слоям получались осадки. Наконец, коэффициент горизонтального обмена полагался равным $\mathcal{K}_h=0{,}1\tilde{\varepsilon}^{-1/3}l^{4/3}U/U_0$, где $\tilde{\varepsilon}=0{,}5$ Вт/г, l — шаг сетки, U — скорость ветра, $U_0=17$ м/с.

В блоке ДСО средние по глубине течения брались, как суммы климатических течений (из блока О) и экмановского дрейфа, рассчитываемого по напряжению трения ветра. Предполагалось, что вертикальные профили температуры в ДСО обладают подобием, и их параметры T_s и h определялись из проинтегрированных по толщине ДСО уравнений переноса тепла и бюджета турбулентной энергии. Принималось, что при $T_s<-1{,}8$ °С на поверхности океана имеется лед.

В качестве блока О использовалась модель океанской циркуляции Б. А. Кагана, Д. Л. Лайхтмана, Л. А. Оганесяна и Р. В. Пясковского (1974), в которой в верхнем 2-км слое океана полагалось $T=T_в+A(z)\Theta(\theta, \lambda, t)$, где $T_в$ — фиксированная глубинная температура, $A(z)$ — стандартная функция (с фиксированной толщиной ВПС), а Θ определялось из уравнения среднего по глубине горизонтального переноса тепла дрейфовым и баротропным течениями. Функция тока ψ баротропного течения определялась из уравнения вихря с учетом ветрового и придонного напряжения трения. Уравнения этого блока интегрировались на широтно-долготной сетке с шагом 5° методом стационирования при нулевых начальных условиях $\psi=\Theta=0$ со значениями τ_0 и q_s, найденными по современным средним годовым атмосферным данным.

С этой моделью системы АОС был проведен лишь предварительный численный эксперимент — с реальным распределением континентов и океанов на сфере, но со слишком большим горизонтальным шагом сетки, около 1000 км (360 точек в каждом сферическом слое, только 7560 степеней свободы). Начальными условиями были близкие к средним годовым зональные распределения T в А и ДСО, адиабатический профиль $T(A)$, отсутствие

ветра, $p_s = \text{const}$, $s/s_m = 0{,}5$, толщина ВПС 50 м. Интегрирование велось шагами по времени 20 мин в А и 2 ч в ДСО с их естественной синхронной «склейкой».

Расчет был произведен на 1000 сут с учетом годового хода инсоляции. Статистически равновесный квазипериодический режим был достигнут за год. В нем средняя по массе тропосферы скорость ветра получилась равной 17 м/с, а температура 244 К ($T_s = 282$ К с минимальным средним месячным значением 234 К в Антарктиде и максимальным 308 К в северной Африке), средняя массовая доля водяного пара 1,6 ‰, $n = 0{,}47$, усваиваемый поверхностью Земли лучистый поток тепла 470 Вт/м² (его 80 % отводилось длинноволновым излучением), толщина ВПС 82 м.

Над океанами атмосферное давление получилось ниже, чем над сушей (994 гПа против 1040 гПа), но выше оказались температура воздуха (на 5 °С), массовая доля водяного пара (2,1 ‰ против 1,2 ‰), балл облачности (0,8 против 0,4), испарение и осадки (6 мм/сут против 3,1 мм/сут). Амплитуды годового хода средней по массе температуры атмосферы оказались максимальными в экваториальной зоне, особенно над океанами северной зимой (а над континентами — в тропиках летом), испарение максимально над океанами умеренных широт зимой, облачность весь год велика на экваторе и имеет зимние максимумы в умеренных и высоких широтах. ВПС зимой распространяется на весь ДСО, с началом весеннего прогрева h уменьшается до десятков метров в умеренных широтах и 120—150 м в субтропиках, а летом h минимально и обладает пространственной пестротой.

Третий способ «склейки» океана и атмосферы предложили в своей модели сезонных колебаний климатической системы У. Вошингтон, А. Семтнер, Дж. Милл, Д. Найт и Т. Мейер (1980). В этой модели уравнения атмосферного блока интегрировались (по 8-уровенной схеме) на январь, апрель, июль и октябрь, определялись годовая и полугодовая гармоники воздействия атмосферы на океан, с ними интегрировались (по 4-уровенной схеме) уравнения океанского блока на период 5 лет, результаты использовались для нового интегрирования атмосферного блока, и т. д.

Из изложенных трех способов «склейки» океана и атмосферы наиболее удобным для изучения колебаний современного климата и его реакции на антропогенные воздействия представляется способ Института океанологии АН СССР, и в будущем можно ожидать его широкое использование. Пока же дальнейшее развитие получил способ С. Манабе и К. Брайена. Он был использован, во-первых, в их следующем варианте модели среднего годового состояния системы АОС (С. Манабе, К. Брайен, М. Спелман, 1975; К. Брайен, С. Манабе, Р. Пакановский, 1975), во-вторых, в их модели с сезонными колебаниями (С. Манабе, К. Брайен, М. Спелман, 1979) и, в-третьих, в модели Сибирского отделения АН СССР (Г. И. Марчук, В. П. Дымников, В. Б. Залес-

ный, В. Н. Лыкосов, И. М. Бобылева, В. Я. Галин, В. Л. Перов, 1980).

Модель 1975 г. была построена при реальной геометрии континентов и океанов на сфере с шагом горизонтальной сетки 500 км, 9 уровнями в атмосфере и 12 в океане, с расчетом лучистых потоков тепла по постоянной концентрации CO_2 и заданным зональным климатическим распределениям облачности и озона, но с расчетом эволюции распределения водяного пара. Осуществлялась «синхронизация» каждых 1,3 атмосферных лет с 430 океанскими годами.

В модели 1979 г. сезонные колебания вводились через инсоляцию и распределение озона и с учетом сезонных изменений заданных зональных распределений альбедо континентов и океанов. Она интегрировалась на сетке с горизонтальным шагом в атмосфере 500 км в первые 3 года и 250 км после этого и в океане 500 км. Начальное состояние системы АОС было взято по результатам долгосрочного интегрирования модели со средней годовой инсоляцией (начатого с сухой атмосферы с $T = \text{const} = 6{,}8\,^{\circ}\text{C}$ и однородного океана с $T = \text{const} = 2{,}5\,^{\circ}\text{C}$ и $s = \text{const} = 34{,}8\,‰$). Граничными условиями для А на поверхности океана служили средние месячные значения температуры ВПС и толщины морского льда, а для О — средние месячные значения потоков импульса и влаги, а также температура, влажность воздуха, скорость ветра и лучистый поток тепла на нижнем уровне в атмосфере.

Расчет был произведен на 4,2 атмосферных года, «синхронизированных» с 1200 океанскими годами, причем время релаксации в океанском блоке сокращалось путем искусственного усиления реакции полей температуры и солености в глубоких слоях океана (на наибольших глубинах — впятеро). Несмотря на это, через 1200 модельных океанских лет температура, в верхних слоях океана достигшая статистически равновесных значений, в глубоких слоях еще продолжала расти (со скоростью около 0,1 °С за столетие). Соленость же, особенно в верхних слоях океана, приближалась к статистически равновесным значениям еще медленнее (так как между нею и гидрологическим циклом нет обратной связи) и за 1200 лет достигла в верхних слоях лишь заниженного значения менее 34 ‰.

Эта модель вполне удовлетворительно воспроизвела сезонные колебания ряда характеристик системы АОС (например, теплосодержаний А и О) и улучшила воспроизведение некоторых характеристик по сравнению с моделью со средней годовой инсоляцией (в частности, толщины пакового льда в Арктике, получившейся немного менее 3 м, и снегового покрова в высоких широтах на континентах северного полушария, который ранее непрерывно нарастал). В то же время, например, меридиональные потоки тепла в океане и амплитуды годового хода T_w в умеренных широтах северного полушария получились несколько занижен-

ными, а значения T_w вокруг Антарктиды — завышенными на 6—10 °С.

В модели Сибирского отделения АН СССР при шагах по времени 40 мин в А и 2 сут в О осуществлялась «склейка» атмосферных и океанских полей через каждые 6 атмосферных и 7 океанских шагов, причем данные из А передавались в О сглаженными с экспоненциально затухающими в прошлое весами. При «склейке» влияние О на А определялось полем $T_s = T_w$, определяемым из термодинамического уравнения для О с учетом переноса тепла течениями, в пренебрежении соленостью и с фиксированной толщиной ВПС 100 м. По T_w рассчитывались лучистый перенос тепла через поверхность океана и турбулентные потоки явной и скрытой теплоты в приводном слое воздуха, а затем из уравнения теплового бюджета (45.6) определялся поток тепла в глубь океана. Напряжение трения ветра на поверхности океана рассчитывалось в блоке А без учета океанских течений.

Блок А включал эволюционные уравнения для u_θ, u_λ, T, s и p_s, «параметризацию» АПС по рецептам, аналогичным § 36, «конвективное приспособление», несколько различающееся в случаях сухой и влажной конвекции, и т. п. По этому блоку при заданных климатически средних январских температуре поверхности океана $T_w(\theta, \lambda)$, распределении морских льдов и снегового покрова на суше (считавшейся плоской) и инсоляции и при начальных условиях $u_\theta = u_\lambda = 0$, $p_s = 1018$ гПа, $T = 287 + 60(p/p_s - 1)$, $s = 0{,}8 s_m(T)$ была рассчитана средняя январская циркуляция атмосферы (по 3-уровенной модели с горизонтальными шагами 6° по θ и 10° по λ и шагом по времени 10 мин). Расчет был произведен на 131 сут, за период 100—131 сут были вычислены статистические характеристики атмосферной циркуляции.

Эта модель неплохо воспроизвела уровень кинетической энергии атмосферы K (хотя, из-за малого пространственного разрешения, с некоторым занижением доступной потенциальной энергии П и незональных частей K' и П′); долготные спектры зональной и меридиональной частей K на всех трех уровнях и величины K' на широте 45° (с интервалом с законом обратного куба в спектре K'); зональные распределения T, s и u_λ (хотя и с занижением субтропического струйного течения в южном полушарии); трехъячеистую меридиональную циркуляцию в зимнем полушарии; качественное (но лишь посредственно-количественное) поведение меридиональных потоков тепла, влаги и момента импульса; квазистационарные ультрадлинные волны в поле p_s.

Блок О модели Сибирского отделения АН СССР включал полную систему уравнений динамики океана переменной глубины $h_w(\theta, \lambda)$ с реалистическим уравнением состояния $\rho_w(p, T, s)$, описанную в § 46 (где упомянута и первая публикация этой модели Г. И. Марчуком и В. Б. Залесным, 1974). По этому блоку при фиксированной температуре поверхности океана $T_w(\theta, \lambda)$ был

произведен расчет на период 118 лет (100 лет диффузии тепла и 18 лет взаимодействия полей температуры и течений).

Полученные по изолированным блокам А и О при фиксированных полях $T_w(\theta, \lambda)$ и инсоляции квазиравновесные состояния атмосферы и океана были использованы, как начальные данные для интегрирования объединенной модели системы АОС. Расчет был произведен на 11 океанских лет ≈ 2 атмосферных месяца, и были определены статистические характеристики состояний системы за последние 20 атмосферных суток.

Включение ВАО привело к уменьшению зональных значений T_w в северном полушарии и тропиках и их увеличению в южном полушарии, понижению на 5 °С температуры средней тропосферы в тропиках, уменьшению меридиональных адвективных и турбулентных потоков тепла в атмосфере, ослаблению бароклинной неустойчивости атмосферы, уменьшению кинетической энергии и других звеньев энергетического цикла атмосферы, ослаблению субтропического струйного течения южного полушария и обратной ячейки меридиональной циркуляции в северном полушарии, углублению центров низкого давления p_s над континентами южного полушария, смещению зоны тропических дождей на 10° к югу и т. п.

В целом включение крупномасштабного ВАО привело к таким же эффектам, как в модели Манабе и Брайена 1969 г., так что характер этих эффектов уже можно считать надежно установленным во многих деталях. В то же время надо отметить, что из-за отсутствия в модели СОАН 1980 г. сезонных колебаний инсоляции и стоков тепла у Антарктиды в Южном океане возникал тренд роста T_w, сохранившийся даже при фиксации $T_w = 1$ °С на берегах Антарктиды в дополнительном численном эксперименте.

Таким образом, пожалуй, можно признать, что трудность, связанная с большими временами релаксации океана (столетия) по сравнению с атмосферой (месяцы), в трехмерных моделях системы АОС в некоторой мере преодолевается хотя бы с помощью искусственных приемов (и пока что без должного учета вихревой «отрицательной вязкости» в океане). Расчеты же формы и эволюции континентальных ледниковых щитов, времена релаксации которых составляют десятки тысячелетий, в этих рамках возможны лишь без учета обратного влияния эволюции ледниковых щитов на статистически-равновесные состояния атмосферы и океана, т. е. пока что без описания ледниковых колебаний климата (которому будет посвящен следующий параграф).

Континентальные ледниковые щиты можно рассматривать, как растекающиеся под действием собственной тяжести *псевдопластичные* тела, в которых при увеличении скоростей деформации Ф вязкие напряжения τ растут замедляющимся образом,

а вязкость, следовательно, убывает; кроме того, она убывает и при увеличении температуры:

$$\Phi_{ik} = K\tau^{n-1}F(T)\tau_{ik};\quad F(T) = e^{-\varkappa\,(T_{wi}/T-1)} \tag{50.7}$$

(П. А. Шумский, 1975), где при давлении в одну атмосферу $T_{wi}=273{,}15$ К (а с ростом давления T_{wi} убывает со скоростью $7{,}52\cdot 10^{-8}$ К/Па); $\varkappa\approx 21{,}1$; при значениях τ не свыше 10^5 Па, типичных для ледниковых щитов, $n\approx 1$ и $K\sim 10^{-14}$ $(\text{Па})^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$. Течение льда в щитах можно считать квазигидростатическим и бездивергентным, причем напряжения в нем приблизительно уравновешиваются силами давления:

$$(\tau_{xz},\ \tau_{yz}) = -g\rho_i(\zeta - z)\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x},\ \frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big), \tag{50.8}$$

где $z=\zeta(\mathrm{x}_h,\ t)$ — уравнение поверхности ледникового щита, а $\rho_i\approx 0{,}91676$ г/см^3 — плотность льда, очень мало зависящая от давления и температуры. Учитывая, что $(\Phi_{xz},\ \Phi_{yz}) = {}^1\!/_2(\partial u/\partial z,\ \partial v/\partial z)$, из (50.7) и (50.8) интегрированием по z при условии $u,\ v\to 0$ $(z\to 0)$ получаем

$$(u,\ v) = -U\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x},\ \frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big);\quad U = 2g\rho_i K\int\limits_0^z(\zeta - z)F(T)\,dz. \tag{50.9}$$

В этих формулах для поля скорости в ледниковом щите имеются две неизвестные функции ζ и T. Для определения первой из них, определяющей размеры и форму ледникового щита, следует использовать кинематическое краевое условие на его поверхности, аналогичное (46.1), но записанное не при $z=0$, а при $z=\zeta$ (так как здесь ζ не мало), и с заменой вычитаемого в его правой части величиной $W=\rho_i^{-1}(P_s - E + E_{wi})$. Интегрируя при этом условии уравнение бездивергентности поля скорости по толще ледника $0\leqslant z\leqslant\zeta$, получаем для z нелинейное неоднородное параболическое уравнение

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \operatorname{div}(V\nabla\zeta) + W + w_0;\quad V = \int\limits_0^\zeta U\,dz, \tag{50.10}$$

где w_0 — вертикальная скорость на нижней границе ледникового щита. Сравнивая здесь первое и второе слагаемые в правой части и учитывая (50.9), для высоты ледникового щита с горизонтальным размером L получаем оценку

$$\zeta\sim(WL^2/2g\rho_i K)^{1/4}. \tag{50.11}$$

Для определения поля T в ледниковом щите, определяющего вязкость льда и входящего в формулу (50.9) для величины U, можно использовать обычное уравнение теплопроводности $dT/dt = \chi_i\Delta T + \varepsilon/c_i\rho_i$, где d/dt — индивидуальная производная, $c_i = 2\cdot 10^3$ Дж/(кг · К) — удельная теплоемкость льда, $\chi_i = 1{,}1\times 10^{-6}$ м^2/с — коэффициент температуропроводности в нем, а $\varepsilon = \tau_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}$ — скорость диссипации кинетической энергии в теплоту.

Для описания ледниковых щитов при фиксированном климате на их поверхности задают температуру T_ζ и значения W. На дне при $T < T_{wi}$ полагают $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, и поток тепла в толщу дна снизу $(-c_i\rho_i\chi_i\,\partial T/\partial z)$ приравнивают геотермическому потоку $q_г$, а при $T = T_{wi}$ полагают

$$w_0 = -\rho_i^{-1}\mathscr{L}_{wi}^{-1}\,(c_i\rho_i\chi_i\,\partial T/\partial z + q_г),$$

допуская, что даже при таянии льда его течение на дне испытывает полное торможение. На краях ледникового щита можно положить $\zeta = 0$.

Изложенная модель континентальных ледниковых щитов была сформулирована М. Я. Вербицким и Д. В. Чаликовым (1980) и использована М. Я. Вербицким (1981) для описания стационарного режима Восточно-Антарктического, Гренландского и Северно-Земельского щитов при современном климате. При этом вертикальные профили температуры аппроксимировались квадратичными полиномами от z/ζ, и уравнение теплопроводности использовалось в проинтегрированном по толще ледника виде.

Результаты расчетов оказались в хорошем согласии с эмпирическими данными. Так, для Восточно-Антарктического ледникового щита, площадью $10{,}5 \cdot 10^6$ км^2, скорость питания атмосферными осадками была задана от 30 мм/год в центре до 500 мм/год на краях, температура на нижней границе деятельного слоя от -50 °С в центре до -20 °С на краях, $q_г = 0{,}063$ Вт/м^2. Расчеты производились на сетке с горизонтальным шагом 200 км. Объем этого щита получился равным $24{,}3 \cdot 10^6$ км^3, в пределах эмпирических оценок. Скорости течения льда получились порядка 1 м/год в центре и 10 м/год на краях щита. На дне ледника выявлена область таяния льда, максимального (до 3 мм/год) в центре щита и вновь возрастающего к его краю, где максимальна (и сравнима с $q_г$) скорость диссипации кинетической энергии. Объем донного таяния получился равным 16,8 км^3/год при эмпирической оценке И. А. Зотикова (1977) 20 км^3/год.

§ 51. Моделирование ледниковых периодов

Такое моделирование требует расчета эволюции (возникновения, роста и распада) континентальных ледниковых щитов на интервалы времени в сотни тысячелетий с учетом их обратного влияния на состояния атмосферы и океана. Но интегрирование на такие сроки уравнений нестационарных трехмериых моделей, описанных в предыдущем параграфе, конечно, практически неосуществимо. Поэтому приходится возвращаться к упрощенным моделям типа § 49, усовершенствовав их соответственно поставленной здесь цели.

Первая численная модель ледниковых периодов (со сравнительно небольшим числом интегральных параметров, связанных

простыми эмпирическими и полуэмпирическим формулами и уравнениями) была построена в серии работ братьев В. Я. и С. Я. Сергиных, просуммированной в их книге 1978 г. Колебания климата в этой модели создавались главным образом отрицательной обратной связью между океаном и континентальными льдами (их

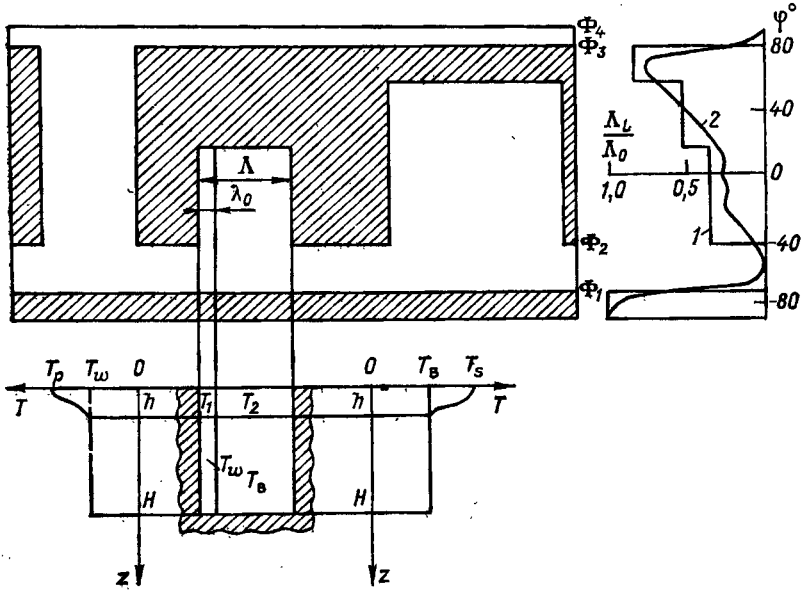


Рис. 51.1. Модельные океаны (континенты заштрихованы).

Справа — модельное (*1*) и эмпирическое (*2*) распределения по широте доли континентов Λ_L/Λ_0. Внизу — вертикальный разрез океана и типичные профили температуры; T_2 и T_B соответствуют верхнему и нижнему слоям открытого океана (угловой ширины $\Lambda - \lambda_0$), T_1 и T_w — западного пограничного слоя (угловой ширины λ_0); H и h — глубины океана и термоклина; T_S, T_p — температуры поверхности открытого океана и западного пограничного слоя; $\Phi_1 = -72{,}5°$; $\Phi_2 = -42{,}5°$; $\Phi_3 = 77{,}5°$; $\Phi_4 = 90°$.

площадью в северном полушарии $S^c_{кл}$): рост $T_w \to$ рост E и $P \to$ $\to$ рост $S^c_{кл} \to$ понижение T_w и т. д. Но эта обратная связь могла создавать автоколебания лишь при занижении времен релаксации ледниковых щитов до значений, сравнимых с океанскими, что, конечно, порождает сомнения.

Здесь мы изложим более современную, квазигидродинамическую модель климатической системы с эволюционирующими ледниковыми щитами по работам М. Я. Вербицкого и Д. В. Чаликова (1983) и М. Я. Вербицкого, А. С. Монина и Д. В. Чаликова (1986). Поскольку заранее предполагалось, что возможность образования континентальных ледниковых щитов существенно зависит от распределения континентов и океанов относительно полюсов и экватора, в модели это распределение было задано в реалистическом, хотя и упрощенном виде (рис. 51.1).

Были выделены Тихий, Атлантический и Индийский океаны с постоянными угловыми ширинами Λ_i и постоянной глубиной h, соединяющий их Южный океан с широтными границами $\Phi_1 = -72{,}5°$ и $\Phi_2 = -42{,}5°$ и соединенный с Атлантикой Северный Ледовитый океан с широтными границами $\Phi_3 = 77{,}5°$ и $\Phi_4 = 90°$. Каждый из трех основных океанов был разделен по горизонтали на западный пограничный слой постоянной угловой ширины λ_0 и открытый океан, а по вертикали — на термоклин толщиной h_0 и абиссаль. Южный и Северный Ледовитый океаны рассматривались как целые. Таким образом, Мировой океан был разделен на 14 «боксов». Течения в открытом океане *в среднем по его толщине* h определялись при помощи соотношения Свердрупа (46.12) (при $\tau_\lambda = \tau = \text{const}$, $\tau_\varphi \approx 0$) и условия бездивергентности полного потока (с условием $U_0 = 0$ на правом берегу океана):

$$V_0 = \operatorname{rot} \tau/\beta h; \quad U_0 = (\Lambda - \lambda) \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_0 \cos \varphi). \tag{51.1}$$

Используя уравнение гидростатики $p \approx -g\rho_0 \zeta + g \int_{-z}^{0} \rho dz$ при $\rho \approx \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)]$, для течений в среднем по термоклину ($i = 1$) и абиссали ($i = 2$) можно вывести формулы:

$$V_i = V_0 - \frac{P_{0\lambda} - P_{i\lambda}}{f r_0 \cos \varphi} \frac{h - h_0}{h_0} \frac{\tau}{fh}; \quad U_i = U_0 + \frac{P_{0\varphi} - P_{i\varphi}}{f r_0}; \tag{51.2}$$

$$\frac{1}{r_0 \cos \varphi} \left(\frac{\partial V_1 \cos \varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_1}{\partial \lambda} \right) + \frac{W_0}{h_0} = 0 \tag{51.3}$$

(причем при $i = 2$ надо заменить $(h - h_0)/h_0$ единицей), где $(P_{i\lambda}, P_{i\varphi})$ — средние значения по соответствующим слоям от $-g\alpha \int_{-z}^{0} (\partial T/\partial \lambda, \partial T/\partial \varphi) dz$, а W_0 — вертикальная скорость на глубине h_0 (у экватора полагалось $W_0 = 0$). Температурный профиль брался в универсальной форме $T = T_в + (T_s - T_в)\Theta(z)$ в термоклине (со средним значением T_z) и $T = T_в$ глубже термоклина. При этом вторые слагаемые в (51.2) суть линейные комбинации градиентов T_2 и $T_в$. В западном пограничном слое полагалось $(\overline{V}_{ip}, \overline{W}_p) = -(\overline{V}_i, \overline{W}_0)(\Lambda - \lambda_0)/\lambda_0$, где черта сверху обозначает осреднение по широте. Уравнения переноса тепла в океане осреднялись по каждому «боксу». Так, например, для термоклина открытого океана получилось

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\partial [(\overline{V}_1 T_2 - \varkappa \partial T_2/r_0 \partial \varphi) \cos \varphi]}{r_0 \cos \varphi \partial \varphi} - \frac{U_1(\lambda_0)}{r_0 (\Lambda - \lambda_0) \cos \varphi} \cdot \frac{T_2 + T_1}{2} + \frac{\overline{W}_0}{h_0} \cdot \frac{T_2 + T_в}{2} = \frac{Q - Q_1}{\rho_w c_w h_0}, \tag{51.4}$$

а для $(T_в, T_1, T_w)$ величина $\overline{V}_1$ во втором слагаемом слева заменяется на $(\overline{V}_2, \overline{V}_{1p}, \overline{V}_{2p})$; $\Lambda - \lambda_0$ и T_1 во втором слагаемом заме-

няются на $(\Lambda - \lambda_0, \lambda_0, \lambda_0)$ и $(T_w, T_2, T_в)$; $\overline{W}_0$, h_0 и $T_в$ в третьем слагаемом — на $(\overline{W}_0, \overline{W}_p, \overline{W}_p)$, $(h_0 - h, h_0, h_0 - h)$ и (T_2, T_w, T_1); $Q - Q_1$ и h_0 в правой части — на $(Q_1, Q_p - Q_{1p}, Q_{1p})$ и $(h - h_0, h_0, h - h_0)$, где Q и Q_p — потоки тепла из атмосферы, определяемые из атмосферного блока, а Q_1 и Q_{1p} — потоки тепла в глубокий океан, «параметризуемые» следующим образом:

$$Q_1 = 2\rho_w c_w k (T_2 - T_в)/h; \quad Q_{1p} = 2\rho_w c_w k (T_1 - T_w)/h, \qquad (51.5)$$

причем $k = 5$ см^2/с при $T_2 \geqslant T_в$ и $T_1 \geqslant T_w$ и $5 \cdot 10^2$ см^2/с в противоположных случаях. Температуры Южного и Северного Ледовитого океанов определяются из уравнений интегрального теплового бюджета

$$\cos\Phi_2 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{0} (VT)_{\Phi_2}\, dz\, d\lambda = \frac{r_0}{\rho_w c_w} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \int_0^{2\pi} Q \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda;$$

$$-\cos\Phi_3 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{0} (VT)_{\Phi_3}\, dz\, d\lambda = \frac{r_0}{\rho_w c_w} \int_{\Phi_3}^{\Phi_4} Q \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda, \qquad (51.6)$$

причем при температуре замерзания полагалось $Q = 0$. Расчеты среднего годового состояния океанов по изложенной модели при заданной атмосфере дали вполне удовлетворительные результаты. Значения T_s совпали с эмпирическими с точностью до 1 °С. Интегральные потоки тепла в Тихий, Атлантический и Индийский океаны получились равными $Q = (1{,}38;\ 0{,}55;\ 0{,}72) \cdot 10^{15}$ Вт и балансировались потоком из Южного океана $-2{,}65 \cdot 10^{15}$ Вт, а Северный Ледовитый океан получился замерзшим ($Q = 0$). Получились антициклонические круговороты вод в термоклине и циклонические в нижнем слое в обоих полушариях, даунвеллинг в полярных областях и апвеллинг в умеренных широтах и тропиках.

Для атмосферы была принята средняя годовая зональная и осредненная по толщине модель, включающая уравнения меридионального переноса тепла и влаги:

$$-\frac{1}{r_0 \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathcal{K}_h \left| \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} \right| \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} \cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{g}{c_p p_s}\left(\frac{p_s}{p_{500}}\right)^{R/c_p} \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{2} \Lambda_k q_{ik}, \qquad (51.7)$$

$$-\frac{1}{r_0 \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathcal{K}_h \left| \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} \right| \frac{\partial s}{\partial\varphi} \cos\varphi\right) = \frac{g}{p_s}(E - P), \qquad (51.8)$$

где Θ — потенциальная температура, s — удельное влагосодержание, Λ_1 и Λ_2 — доли континентов и океанов, q_1 и q_{2k} — приток коротковолновой и бюджет длинноволновой радиации, q_{3k} — вертикальный турбулентный приток тепла, q_{4k} — теплота фазовых превращений влаги (в которую входит и слагаемое с бюджетом массы ледниковых щитов $\rho_i \mathcal{L}_{wi}(1 - \chi) W$, где χ — доля моря в границах щитов).

Все потоки тепла и влаги в правых частях (51.7) и (51.8) «параметризовались» аналогично тому, как это делалось в § 45, с определением T_s на суше (с нулевой теплопроводностью) и Q на океане из несколько упрощенного краевого условия (45.6), теперь имеющего вид $Q = q_{1s} + q_{2s} - q_{3s} - \mathscr{L}E$, причем $q_{1s} = (1-\chi)\times$ $\times(1-A_0)(1-A)S_0$ (χ — коэффициент непрозрачности атмосферы, A_0 — ее альбедо; A — альбедо подстилающей поверхности, принимавшееся равным на суше 0,2 при $\zeta = 0$ и 0,8 при $\zeta > 0$ или $T_s < -10\,°C$, а на океане 0,05 при $T_s > T_{wi}$ и 0,8 при $T_s \leqslant T_{wi}$; S_0 — инсоляция), и, кроме того, $q_{2s} = \sigma(\nu^{\downarrow}T^4 - T_s^4)$. Массовая доля водяного пара на подстилающей поверхности брались насыщающей при температуре T_s. Температура на границе АПС бралась равной $T - \gamma(\Delta z - \zeta)$, где T — определяемая по решению Θ уравнения (51.7) температура на среднем уровне атмосферы, Δz — расстояние от него до невозмущенной границы АПС, γ — стандартный температурный градиент. Осадки P определялись из (51.8) при $s \approx s_m\,(p_{500}/p_s)^2$.

Расчеты по изложенной модели атмосферы при заданных распределениях S_0, T_w, A_0 и ζ вполне удовлетворительно воспроизвели меридиональные распределения T_s и Q. Хотя в распределении P не получился субтропический минимум, наиболее важные для расчета ледниковых щитов значения P в высоких широтах оказались в хорошем согласии с эмпирическими данными. Этот успех позволил попытаться рассчитать годичные колебания характеристик атмосферы, задав сезонный ход распределений S_0 и T_w, и результаты вновь оказались удовлетворительными.

В излагаемой модели континентальные ледниковые щиты рассчитывались не по уравнению (50.10), а по вытекающей из (50.11) формуле $\zeta^* = BS^{1/4}$, $B = (W^*/2g\rho_i\mathscr{K})^{1/4}$, для средней по площади щита S его высоте ζ^*. Уравнение бюджета массы щита $\partial(\zeta^* S)/\partial t = (1-\chi)W^* S$ тогда легко интегрируется, и после дифференцирования по времени формул

$$S_1 = r_0^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\Phi_1^*} \Lambda_1 \cos\varphi\, d\varphi;\quad S_2 = r_0^2 \int\limits_{\Phi_2^*}^{\pi/2} \Lambda_1 \cos\varphi\, d\varphi, \qquad (51.9)$$

где S_1 — площадь южного щита с северной широтной границей Φ_1^*, а S_2 — площадь северного щита с южной границей Φ_2^*, получается

$$\Lambda_1(\Phi_1^*)\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial t}\cos\Phi_1^* = \frac{4(1-\chi)W^*}{5Br_0^{1/2}}\left[\int\limits_{-\pi/2}^{\Phi_1^*}\Lambda_1\cos\varphi\, d\varphi\right]^{3/4};$$

$$-\Lambda_1(\Phi_2^*)\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial t}\cos\Phi_2^* = \frac{4(1-\chi)W^*}{5Br_0^{1/2}}\left[\int\limits_{\Phi_2^*}^{\pi/2}\Lambda_1\cos\varphi\, d\varphi\right]^{3/4}. \qquad (51.10)$$

По атмосферной модели вместе с уравнениями (51.10) были рассчитаны климаты палеоцена и эоцена 67—37 млн лет назад, когда отклонения T_w от современных значений были равны +13 °С в полярных областях и 0 °С в тропиках, а также климаты олигоцена и раннего — среднего миоцена 37—15 млн лет назад (+5 и —8 °С), позднего миоцена — раннего плиоцена 15—5 млн лет назад (0 и 0 °С). Получилось, что в первый из этих периодов ледники существовали только на небольшой площади в центре Антарктиды. В связи с образованием глубокого пролива между Антарктидой и Австралией 38 млн лет назад произошло повсеместное похолодание, и Антарктида оледенела. В связи с образованием глубоководного пролива Дрейка и завершением формирования ЦАТ 12 млн лет назад обострилась широтная зональность климата, и оледенела Арктика. На 70° с. ш. средняя годовая температура континентов упала от +2 до —16 °С.

Уравнения объединенной модели системы АОС интегрировались на пятиградусной сетке так, что на каждом шаге по времени в 1000 лет для ледников уравнения океанской модели интегрировались шагами по 3 сут на 10 лет, и отыскивалось соответствующее квазистационарное состояние атмосферы. Интегрирование всей системы производилось на несколько сотен тысячелетий. Оказалось, что климатическое состояние системы в целом достаточно полно характеризуется четырьмя параметрами — широтными границами ледниковых щитов Φ_1^* и Φ_2^* и температурами T_A поверхности Атлантики на 45° с. ш. и $T_Ю$ Южного океана.

Численные эксперименты с различными начальными значениями широт Φ_1^* и Φ_2^* и температур всех пяти океанов обнаружили неединственность климата — наличие пяти стационарных состояний (Φ_1^*, Φ_2^*, T_A, $T_Ю$): I — современный климат без континентальных оледенений в северном полушарии, но с оледенением Антарктиды ($\Phi_1^*=-72{,}5°$, $\Phi_2^*=77{,}5°$), который воспроизводится моделью вполне удовлетворительно во многих деталях; II — климат без континентальных оледенений ($\Phi_1^*=-87{,}5°$, $\Phi_2^*=77{,}5°$); III — ледниковый период ($\Phi_1^*=-72{,}5°$, $\Phi_2^*=40°$); IV — климат с оледенением только в северном полушарии ($\Phi_1^*=-87{,}5°$, $\Phi_2^*=40°$); V — «белая Земля» с покрытыми льдом континентами и замерзшими почти до дна океанами ($T_s=226$ К, $T_a=201$ К; толщина ледниковых щитов $\zeta^*=3500$ м, понижение уровня моря 1300 м, толщина морского льда 2300 м; для одного только повышения T_s до T_{wi} здесь потребовалось бы утроение солнечной постоянной!). В районах с континентальным льдом средняя годовая температура понижается на 20 °С.

Оледенения в каждом из полушарий оказались очень устойчивыми, они не могут быть ликвидированы (или переведены в ре-

жим «белой Земли») вариациями внешних параметров в разумных пределах. Безледниковые состояния, наоборот, неустойчивы: для их перехода в оледенения достаточна начальная протяженность ледников не менее 5°. Для образования первичного ледникового щита за счет солнечной постоянной необходимо ее понижение почти на 20 %; в этих условиях оледенение в северном полушарии быстро разрастается и доходит уже не до 40° с. ш., а почти до экватора. В горных районах первичный ледниковый щит может возникнуть и при небольшом уменьшении солнечной постоянной.

Теперь приходится отметить, что у изложенной модели системы АОС не удалось обнаружить колебательных решений, которые соответствовали бы чередованию ледниковых и безледниковых периодов: при найденных стационарных решениях небольшие колебания инсоляции могут порождать лишь небольшие вариации кромок ледниковых щитов, но не более того. Причиной этого недостатка представляется наличие в модели только одного высокоинерционного звена — континентальных ледниковых щитов, тогда как для генерации колебательных режимов в системе должны присутствовать хотя бы два связанных звена со сравнимыми временами релаксации.

По идее Д. Полларда (1982), вторым таким звеном может быть вязкопластичный подлитосферный слой верхней мантии Земли — *астеносфера*. Под действием ледниковой нагрузки плавающие на астеносфере блоки континентальной литосферы оседают, края ледникового щита оказываются ниже уровня океана, скорость абляции возрастает (до 20 м/год), и это приводит к быстрому разрушению щита. Этот механизм может объяснить обнаруженную палеогеографами асимметрию в эволюции плейстоценовых континентальных ледниковых щитов (нарастание за десятки тысячелетий и разрушение за тысячелетия), послеледниковый подъем Фенноскандии и Гудзонской области Северной Америки (по-видимому, уже на 400—600 м с перспективой дальнейшего подъема еще на 200 м до достижения изостатического равновесия) и образование на их краях послеледниковых морей и озер.

Зональные течения в астеносфере будем считать квазигидростатическими, бездивергентными и с равновесием между градиентом давления и силой вязкости. На дне астеносферы $z=-h_a$ примем условия прилипания $v=w=0$, на ее возмущенной поверхности $z=\zeta_a$ положим $v=0$, $p=g\rho_i\zeta$ и $\partial\zeta_a/\partial t=w$ (поскольку $|\zeta_a|\ll h_a$, эти условия можно снести на невозмущенную поверхность $z=0$). Тогда вполне аналогично выводу уравнения (50.10) для ζ_a получаем

$$\frac{\partial\zeta_a}{\partial t}=\frac{1}{\tau_a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{\partial\zeta_a}{\partial\varphi}-\frac{\rho_i}{\rho_a}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right)\cos\varphi\right];\quad \tau_a=\frac{12\mu_a r_0^2}{g\rho_a h_a^3}, \qquad (51.11)$$

где μ_a — вязкость астеносферы. Если принять для нее значение 10^{18} кг/(м · с) и положить $h_a \approx 200$ км, то получится $\tau_a \sim 30$ тыс. лет, как у ледниковых щитов. Заметим, что стационарное решение этого уравнения имеет вид $\zeta_a = (\rho_i/\rho_a)\zeta \approx \zeta/3$, так что при $\zeta \sim$ ~ 3 км ледниковые щиты могут оседать на 1 км — это неплохо согласуется с приведенными выше данными о послеледниковом подъеме Фенноскандии и Канады.

При использовании (51.11) высоту поверхности ледниковых щитов нужно отсчитывать от уровня $h - \zeta_a$ рельефа h безледной суши, «опущенного» на глубину ζ_a оседания поверхности астеносферы, внося соответствующие поправки в уравнение (50.10). В модели настоящего параграфа вместо (50.10) используется (51.10), и поправку нужно вносить лишь в расчет температуры на границе АПС, которую теперь надо брать в виде $T - \gamma(\Delta z - \zeta - h + \zeta_a)$. Это значит, что при оседании ледниковых щитов на их поверхности становится теплее, и их таяние ускоряется. Но более сильной является гидроабляция: если в краевой области щита $\zeta_a > h$ и $\rho_w(\zeta_0 + \zeta_a) > \rho_i\zeta$ (где $\zeta_0 = \rho_i \delta V/\rho_w S_w$ — уровень океана, который при эволюции ледниковых щитов меняется, так что его тоже надо рассчитывать; здесь δV — объем щитов, S_w — площадь океана), то абляция в этой области увеличивается на 20 м/год.

При интегрировании уравнений модели с астеносферой шаг по времени для (51.11) брался равным 1000 лет, как и для океана. Полагалось, что в зоне 67,5—72,5° с. ш. имеются горы высотой 2,5 км. Результаты интегрирования на 500 тыс. лет для северного полушария показаны на рис. 51.2. Оказалось, что в такой системе возникают автоколебания с наибольшим периодом около 120—140 тыс. лет.

Ледниковый щит, зарождаясь в горах на северных окраинах континентов и воздействуя на атмосферу через альбедо, продвигается к югу до широты 40°; под щитом астеносфера с запаздыванием опускается, а перед ним поднимается. На широте 40° край щита совершает высокочастотные колебания вследствие обратной связи $T - P$. Затем щит быстро разрушается, астеносфера медленно перетекает обратно, и создаются условия для нового роста щита. Но астеносфера еще прогнута, и щит продвигается на юг лишь до широты 62,5°. Затем он разрушается, астеносфера возвращается почти к начальному состоянию, и весь цикл повторяется (хотя на рис. 51.2 и виден небольшой тренд в поведении системы, так что время интегрирования желательно увеличить; желательно также провариировать значения τ_a и, если удастся, ввести в модель сезонные колебания).

Условия возникновения ледниковых периодов представляются следующими: (1) расположение континентов должно обеспечивать наличие у системы АОС (без астеносферы) по меньшей мере двух устойчивых состояний — ледникового и безледного (при географии, близкой к современной, северные окраины континентов дол-

жны находиться на достаточно высоких широтах и Арктический бассейн должен сообщаться с океаном); (2) рельеф суши должен способствовать зарождению первичных ледниковых щитов, включающих альбедный механизм — суша должна быть достаточно близкой к полюсу или иметь достаточно высокие горы (чтобы

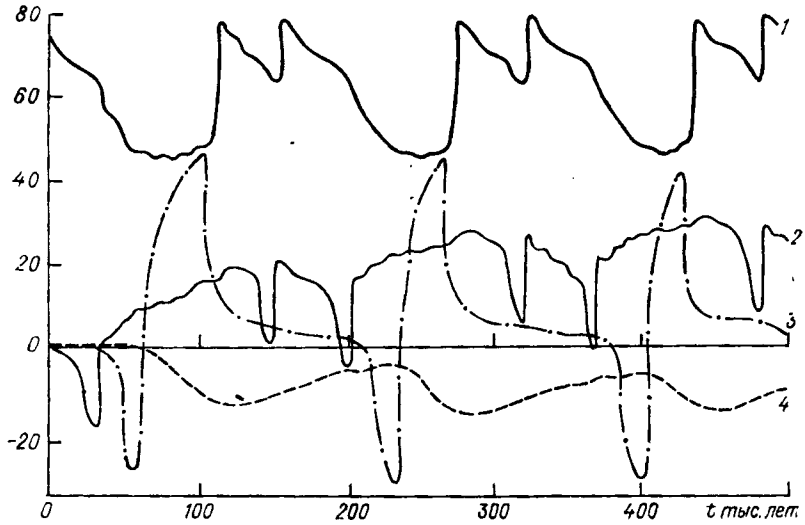


Рис. 51.2. Ледниковые периоды.

1 — широта в градусах южной границы северного ледникового щита; *2, 3, 4* — ζ_a в десятках километров на широтах 62,5; 47,5 и 32,5°.

могли сказаться астрономические колебания распределения инсоляции, порождающие в районах зарождения ледников холодные лета и снежные зимы); (3) рельеф континентов в умеренных широтах должен быть преимущественно равнинным.

Такие условия в течение геологической истории Земли могли возникать многократно. И действительно, геологическая летопись хранит следы ледниковых периодов раннего протерозоя 2300—2100 млн лет назад, позднего рифея 850—750 млн лет назад, возможно, ордовика девона, несомненно, карбона — перми 300—250 млн лет назад, и, наконец, с 38 млн лет назад — Антарктиды и последние 1,5—2 млн лет назад — плейстоценовых оледенений северных континентов (от которых сейчас еще остался ледниковый щит Гренландии).

ГЛАВА 10

Гидродинамика недр планет

§ 52. Гидродинамика земного ядра

Следуя работам А. С. Монина (1973) и Б. Л. Гаврилина и А. С. Монина (1974), рассмотрим упрощенную модель Земли из трех слоев — внешнего твердого шарового слоя (мантии и коры) с внешним радиусом $r_1 \approx 6370$ км (радиус Земли) и внутренним радиусом $r_2 \approx 3470$ км, жидкого внешнего слоя ядра и твердого сферического ядра с радиусом $r_3 \approx 1470$ км, плавающего в жидкости, заполняющей внутримантийную полость. Величины, относящиеся к этим трем слоям, будем отмечать индексами 1, 2, 3. Плотности мантии ρ_1 и твердого ядра ρ_3 будем считать зависящими лишь от расстояний до их центров.

Поставим задачей описать движения внутри Земли, слагающиеся из вращения мантии (т. е. наблюдаемого астрономическими методами так называемого *вращения Земли*), магнитогидродинамических течений в жидком слое и смещений и вращения твердого ядра. Эти движения трех слоев взаимодействуют благодаря гидромагнитным напряжениям на обеих границах жидкого слоя и изменениям собственного гравитационного поля при смещениях твердого ядра.

В этой модели имеется ряд упрощений. Не учитывается сплюснутость Земли из-за ее вращения (и, значит, способность к прецессии, хотя роль последней, как источника тепловыделения, учитывать можно). Исключены приливные и конвекционные движения в мантии и внутреннем ядре. Не учитываются влияния движений атмосферы и океана и гравитационные воздействия внешних сил Солнечной системы. Эти упрощения мало искажают интересующий нас здесь класс движений внутри Земли, указанный выше.

Уравнения движения во всех трех средах возьмем в виде (5.1), (5.2), причем в мантии и твердом ядре следует опустить напряжения $p\delta_{ik} - \sigma'_{ik}$ и можно положить

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}; \quad \mathbf{v}_3 = \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{x}), \tag{52.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в абсолютной системе отсчета, связанной с центром мантии; $\mathbf{x}(t)$ — координата центра твердого ядра; $\boldsymbol{\omega}_1(t)$ и $\boldsymbol{\omega}_3(t)$ — угловые скорости вращения мантии и твердого ядра. К уравнениям движения надо присоединить магнитогидродинамическое уравнение эволюции магнитного поля — уравнение индук-

ции (3.6). Из них выводятся локальные уравнения энергии (5.3)—(5.5).

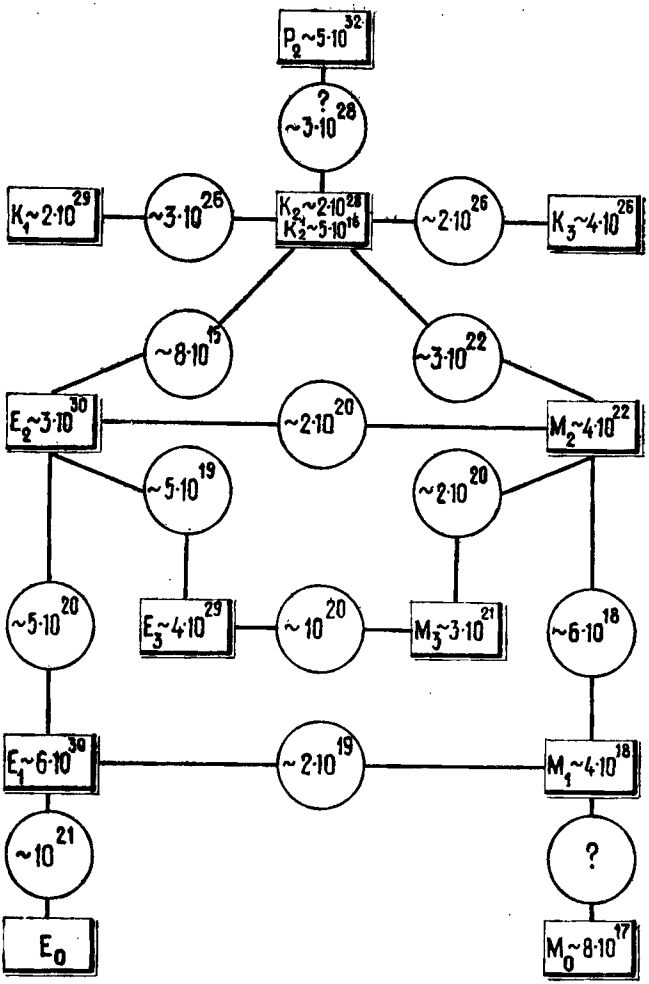


Рис. 52.1. Диаграмма превращений энергии во внутренних слоях Земли.

Прямоугольники — компоненты энергии в джоулях, кружки — скорости превращений энергии в джоулях за столетие.

Проинтегрировав их по объемам мантии, жидкого слоя и твердого ядра, получим 9 уравнений для кинетической K, магнитной M и внутренней E энергии каждого из этих трех слоев. Соответствующая диаграмма превращений энергии (с количественными оценками, которые обосновываются ниже) приведена на рис. 52.1. Одной из наиболее интересных ее частей является скорость пре-

вращения энергии $K_2 \to M_2$, равная $\int \Pi'_{ik}(\partial v_i/\partial x_k)\,dV_2$ и описывающая генерацию геомагнитного поля гидромагнитным динамо в жидком слое.

Сначала рассмотрим смещения твердого ядра. Уравнение движения его центра получается интегрированием (5.1) по объему V_3 с использованием для v второй формулы (52.1) и для объемного интеграла от $\operatorname{div}\Pi$ — формулы Гаусса—Остроградского

$$m_3\ddot{\mathbf{x}} = -\int \mathbf{n}\cdot\Pi\,dS_{23} + \int \rho\nabla\Phi_2\,dV_3, \qquad (52.2)$$

где S_{23} — граница между жидким слоем и твердым ядром, и учтено, что гравитационный потенциал Φ_1, создаваемый массами мантии, во внутримантийной полости постоянен, а собственный потенциал Φ_3 массы ядра на его смещения не влияет. Потенциал Φ_2 рассчитаем при упрощающем предположении $\rho_2 \approx \text{const}$ (на самом деле ρ_2 слегка растет с глубиной — приблизительно от $9{,}9\times$ $\times 10^3$ до $12{,}2\cdot 10^3$ кг/м^3). Тогда в точках r твердого ядра

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = G\rho_2\left[\int\limits_{(2)+(3)} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \int\limits_{(3)} \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}-\mathbf{r}'|}\right] =$$

$$= 2\pi G\rho_2\left[\left(r_2^2 - \frac{1}{3}r^2\right) - \left(r_3^2 - \frac{1}{3}|\mathbf{r}-\mathbf{x}|^2\right)\right] =$$

$$= \text{const} + \frac{2}{3}\pi G\rho_2(|\mathbf{r}-\mathbf{x}|^2 - r^2), \qquad (52.3)$$

где $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2) — гравитационная постоянная. Отсюда для второго слагаемого в правой части (52.2) получается значение $-G\bar{m}_3 r_3^{-3}\mathbf{x}$, где $\bar{m}_3 = {}^4/_3\pi r_3^3\rho_2$ — масса, которую имело бы твердое ядро, если бы его плотность равнялась ρ_2. Таким образом, при смещениях твердого ядра гравитационное поле жидкого слоя создает возвращающую силу (пропорциональную этим смещениям) и тем самым тенденцию к колебательному характеру этих смещений.

Из сил, которые представлены в первом слагаемом правой части (52.2), выделим гидростатическое давление $p_0 = \rho_2\Phi_2(\mathbf{r}) + \text{const}$, а остальные условно назовем силами сопротивления. Вклад гидростатического давления $\int -\mathbf{n}p_0\,dS_{23}$ равен $-\int \rho_2\nabla\Phi_2\,dV_3 = G\bar{m}_3^2 r_3^{-3}\mathbf{x}$, так что, оставляя пока в стороне силы сопротивления, для периода колебаний твердого ядра, создаваемых гравитацией и гидростатическим давлением, из (52.2) получаем

$$\tau_0 = 2\pi\left[\frac{4}{3}\pi G\rho_2\left(1 - \frac{\bar{m}_3}{m_3}\right)\right]^{-1/2} = \left[\frac{G\rho_2}{3\pi}\left(1 - \frac{\rho_2}{\bar{\rho}_3}\right)\right]^{-1/2}, \qquad (52.4)$$

где $\bar{\rho}_3$ — средняя плотность твердого ядра. Например, при $\rho_2 = 10{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $\bar{\rho}_3 = 12{,}1 \cdot 10^3$ кг/м^3 получаем $\tau_0 \approx 3$ ч, т. е. период оказывается очень малым. Силы сопротивления увеличивают период, но создают затухание колебаний. Например, при сопротивлении по Стоксу $\mathbf{F} = 6\pi r_3 \rho_2 \nu_2 \dot{\mathbf{x}}$ период возрастает в $[1 - (3r_3\rho_2\nu_2\tau_0/2m_3)^2]^{-1/2}$ раз, и при $\nu_2 > (8\pi/3)(\bar{\rho}_3/\rho_2) r_3^2 \tau_0^{-1} \approx \approx 6 \cdot 10^{-8}$ м^2/с колебания становятся невозможными. Для вязкости ν_2 жидкого слоя обычно принимаются гораздо меньшие оценки, но все же в дальнейших расчетах мы будем полагать $\mathbf{x} = 0$.

При этом условии выведем уравнение вращения твердого ядра, умножив (5.1) слева векторно на $\mathbf{r}$ и затем проинтегрировав по V_3. Левая часть примет вид $I_3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3$, где $I_3 = (8\pi/3) \int_0^{r_3} \rho r^4 dr \approx 1{,}4 \times \times 10^{35}$ кг·м^2 — момент инерции ядра. Считая теперь гравитационное поле симметричным, имеем $\Phi = \Phi(r)$ и $\mathbf{r} \times \nabla\Phi = 0$. Для $\int \mathbf{r} \times \operatorname{div} \Pi \, dV$ используем выражение $\int \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \Pi) dS + 2 \int \boldsymbol{\omega} \, dV$, аналогичное формуле Гаусса—Остроградского, где $\omega_i = {}^1/_2 \varepsilon_{ijk} \Pi_{kj}$ в нашем случае обращается в ноль вследствие симметрии тензора Π. На S_{23} имеем $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ и, используя (5.2), получаем

$$\mathbf{n} \cdot \Pi = \rho_2 v_r \mathbf{v} + \left[p - \rho_2 \left(\nu_1 - \frac{2}{3}\nu\right) \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{H^2}{8\pi}\right] \frac{\mathbf{r}}{r} - \\ - \rho_2 \nu_2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} - \frac{\mathbf{v}}{r} + \nabla v_r + \frac{v_r}{r}\mathbf{r}\right) - \frac{H_r \mathbf{H}}{8\pi}. \qquad (52.5)$$

Учитывая, что на S_{23} должно быть $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}$, так что $v_r = 0$, и $\partial \mathbf{v}/\partial r - \mathbf{v}/r = \partial(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r})/\partial r$, окончательно получаем

$$I_3 \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 = \int \mathbf{r} \times \left[\rho_2 \nu_2 \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}) + \frac{H_r \mathbf{H}}{4\pi}\right] dS_{23}. \qquad (52.6)$$

Аналогично выводится уравнение вращения мантии. После векторного умножения (5.1) на $\mathbf{r}$ и интегрирования по V_1 левая часть принимает вид $I_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$, где $I_1 = (8\pi/3) \int_{r_2}^{r_0} \rho r^4 dr \approx 7{,}25 \cdot 10^{37}$ кг·м^2 — момент инерции мантии. Правая же часть становится равной разности интегралов от $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \cdot \Pi/r)$ по поверхностям $r = r_2$ и $r = r_1$. Гидродинамические напряжения на поверхности твердой Земли, т. е. поток механического импульса из атмосферы и океана, как оговаривалось выше, мы здесь не учитываем (он создает, например, годичные колебания ω_1, но их расчет должен осуществляться

отдельно). Магнитное поле вне Земли потенциально, так что интеграл по поверхности $r=r_1$ от $\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\cdot\Pi'/r)$, равный интегралу от $\mathbf{r}\times\operatorname{div}\Pi'_p$ по всему объему Земли, исчезает, поскольку $\operatorname{div}\Pi'_p\equiv\equiv 0$. В результате аналогично (52.6) получаем

$$I_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1=-\int\mathbf{r}\times\left[\rho_2\nu_2\frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{v}-\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r})+\frac{H_r\mathbf{H}}{4\pi}\right]dS_{12}. \qquad (52.7)$$

Правая часть этого уравнения должна объяснять наблюдаемые флюктуации ω_1 с периодами в десятилетия, которые, по Э. Вестину (1953), коррелируют с флюктуациями скорости западного дрейфа недипольной компоненты геомагнитного поля. Так, за 1910—1930 гг. отмечено ускорение $\dot{\omega}_1\approx 7\cdot10^{-21}$ с$^{-2}$, и если записать правую часть (52.7) в виде $4\pi r_2^3\rho_2 u_*^2$, то этому ускорению соответствует на S_{12} «скорость трения» $u_*\approx 0{,}03$ см/с. Для Земли в целом при исключении внешних сил момент импульса сохраняется:

$$I_1\boldsymbol{\omega}_1+\int\mathbf{r}\times\rho\mathbf{v}\,dV_2+I_3\boldsymbol{\omega}_3=\text{const}. \qquad (52.8)$$

Поскольку $I_1:I_2:I_3\approx 725:86:1{,}4$, ясно, что умеренные изменения вращения жидкого слоя будут приводить к малым изменениям вращения мантии и большим изменениям вращения твердого ядра.

Для оценки компонент энергии твердого ядра проинтегрируем по его объему уравнения (5.3)—(5.5), в правых частях которых здесь отличны от нуля лишь слагаемые с ν_m и Q:

$$\dot{K}_3=\int(\boldsymbol{\omega}_3\times\mathbf{r})\left[\rho_2\nu_2\frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{v}-\boldsymbol{\omega}_3\times\mathbf{r})+\frac{H_3\mathbf{H}}{4\pi}\right]dS_{23};$$

$$\dot{M}_3=\frac{1}{4\pi}\int\nu_m(\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H})_r\,dS_{23}+\frac{1}{4\pi}\int\nu_m|\operatorname{rot}\mathbf{H}|^2\,dV_3;$$

$$\dot{E}_3=-\int q_r\,dS_{23}+\frac{1}{4\pi}\int\nu_m|\operatorname{rot}\mathbf{H}|^2\,dV_3+\int Q\,dV_3. \qquad (52.9)$$

Оценим здесь слагаемые, используя характеристики стационарной модели геомагнитного динамо Э. Булларда и Г. Геллмана (1954): $u\sim 2{,}5\cdot10^{-4}$ м/с, $H_T\sim 500$ Гс (*тороидальное поле*; некоторые авторы приписывают ему значительно меньшие значения), $H_r\sim 4\cdot10^{-4}$ Тл, $H^2/8\pi\sim 2{,}3\cdot10^2$ Дж/м^3, $^1/_2\rho u^2\sim 3\cdot10^{-4}$ Дж/м^3 (т. е. плотность кинетической энергии относительных движений на шесть порядков меньше, чем у магнитного поля). При $\omega_3\sim\omega_1=7{,}29\times\times10^{-5}$ с$^{-1}$ получается $K_3=^1/_2I_3\omega_3^2\sim 3{,}7\cdot10^{26}$ Дж, $M_3=(H^2/8\pi)V_3\sim\sim 3\cdot10^{21}$ Дж и $E_3\sim c_3m_3T_3\sim 3{,}7\cdot10^{29}$ Дж (где $c_3\sim 4{,}6\cdot10^2$ Дж/(кг$\times\times$К), $T_3\sim 5\cdot10^3$ К и $m_3\approx 1{,}6\cdot10^{23}$ кг).

Приняв для ν_2 около S_{23} по В. Н. Жаркову (1962) оценку 10^7 м^2/с (хотя часто берут много меньшие оценки), для вклада в $\dot{K}_3$ вязких напряжений получаем $4\pi\omega_3 r_3^2 \rho_2 \nu_2 u \sim 5\cdot 10^{13}$ кВт, а вклад от магнитных напряжений имеет порядок $\omega_3 r_3^2 H_\tau H_r \sim$ $\sim 4{,}6\cdot 10^{13}$ кВт. Время изменений ω_3 получается порядка $K/\dot{K} \sim$ ~ 250 лет, т. е. оно очень невелико, и вращение твердого ядра можно считать приспособленным к режиму гидромагнитных процессов в жидком слое.

Приняв $\nu_m \sim 2{,}5$ м^2/с, получаем $\dot{M}_3 \sim {}^1/_3 \nu_m r_3 H^2{}_\tau \sim 3\cdot 10^7$ кВт, так что время омической диссипации равно $M_3/\dot{M}_3 \sim 3000$ лет. Для отвода джоулева тепла из твердого ядра потребовался бы поток тепла на S_{23} с плотностью $q \sim \dot{M}_3/4\pi r_3^2 \sim 10^{-3}$ Дж/(м$^2\cdot$с), чему при адиабатическом градиенте температуры в жидком слое $|\partial T/\partial r| \approx 1{,}4\cdot 10^{-4}$ К/м соответствует коэффициент температуропроводности порядка $1{,}4\cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Для мантии уравнения, аналогичные (52.9), имеют вид

$$\dot{K}_1 = -\int (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r})\left[\rho_2\nu_2 \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}) + \frac{H_r \mathbf{H}}{4\pi}\right] dS_{12};$$

$$\dot{M}_1 = -\dot{M}_0 - \frac{1}{4\pi}\int \nu_m (\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H})_r \, dS_{12} - \frac{1}{4\pi}\int \nu_m |\operatorname{rot} \mathbf{H}|^2 \, dV_1;$$

$$\dot{E}_1 = -\int q_r \, dS_{01} + \int q_r \, dS_{12} + \frac{1}{4\pi}\int \nu_m |\operatorname{rot} \mathbf{H}|^2 \, dV_1 + \int Q \, dV_1, \tag{52.10}$$

где M_0 — энергия потенциального магнитного поля $\mathbf{H} = \nabla W$ вне Земли (полностью определяемого полем H_r на S_{01} путем решения задачи Неймана для уравнения Лапласа $\Delta W = 0$). При средней плотности мантии $\rho_1 \approx 4{,}37\cdot 10^3$ кг/м^3 ее масса равна $m_1 = 4{,}2\times$ $\times 10^{24}$ кг, объем $V_1 = 9{,}2\cdot 10^{20}$ м^3, внешняя поверхность $S_{01} =$ $= 5{,}1\cdot 10^{14}$ м^2, внутренняя $S_{12} = 1{,}5\cdot 10^{14}$ м^2, кинетическая энергия $K_1 = {}^1/_2 I_1 \omega_1^2 = 1{,}9\cdot 10^{29}$ Дж. Для дипольного внешнего поля с потенциалом $W = h_1^0 r_1^3 r^{-2}\cos\theta$, $h_1^0 = -0{,}3\cdot 10^{-4}$ Тл, получается $M_0 =$ $= {}^1/_3 (h_1^0)^2 r_1^3 \approx 7{,}8\cdot 10^{17}$ Дж и $M_1 = M_0[(r_1/r_2)^2 - 1] \approx 4{,}3\cdot 10^{18}$ Дж. При $c_1 = 7{,}1\cdot 10^2$ Дж/(кг$\cdot$К) и $T_1 \sim 2\cdot 10^3$ К имеем $E_1 \sim c_1 m_1 T_1 \sim$ $\sim 6\cdot 10^{30}$ Дж.

Вклад магнитных напряжений в $\dot{K}_1$ приблизительно таков же, как и в $\dot{K}_3$, но вклад вязких напряжений много меньше, так как ν_2 около S_{12} много меньше, чем около S_{23}. Для получения за счет вязких напряжений указанного выше значения $u_* \approx 3\cdot 10^{-4}$ м/с на S_{12} надо иметь там $\nu_2 \sim u_*^2 \delta/u$, и при толщине пограничного слоя $\delta \sim 10^6$ м получается $\nu_2 \sim 3\cdot 10^2$ м^2/с. Омическая диссипация $\dot{M}_1 \sim$

$\sim \nu_m \delta_1 H_т^2$ происходит лишь в нижнем слое мантии толщиной $\delta_1 \sim 10^7$ см, выше которого электропроводность ничтожно мала; в этом слое ν_m, по-видимому, на три порядка выше, чем в жидком слое, но зато там $H_т$ быстро ослабевает.

Для жидкого слоя при условии $\operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$ уравнения, аналогичные (52.9), получаются в виде

$$\dot{K}_2 = -\dot{K}_1 - \dot{K}_3 + \int \rho_2 \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi \, dV_2 - \mathscr{D} - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} \, dV_2;$$

$$\dot{M}_2 = \frac{1}{4\pi} \int \nu_m (\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H})_r \, dS_{12} - \frac{1}{4\pi} \int \nu_m (\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H})_r \, dS_{23} -$$

$$- \mathscr{D}_m + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} \, dV_2;$$

$$\dot{E}_2 = -\int q_r \, dS_{12} + \int q_r \, dS_{23} + \int Q \, dV_2 + \mathscr{D} + \mathscr{D}_m, \qquad (52.11)$$

где $\mathscr{D}$ — вязкая диссипация кинетической энергии, а $\mathscr{D}_m$ — омическая диссипация магнитной энергии в жидком слое. Объем жидкого слоя равен $V_2 = 1{,}6 \cdot 10^{20}$ м^3, при средней плотности $\overline{\rho}_2 = 10{,}9 \times \times 10^3$ кг/м^3 его масса равна $m_2 = 1{,}7 \cdot 10^{24}$ кг, кинетическая энергия вращения $K_2 = {}^1/_2 I_2 \omega_1^2 \sim 2{,}3 \cdot 10^{28}$ Дж. С помощью приводившихся выше оценок кинетическая энергия относительных движений получается равной $K_2' \sim 4{,}8 \cdot 10^{16}$ Дж, магнитная энергия $M_2 \sim 3{,}7 \cdot 10^{22}$ Дж и при $c_2 \sim c_3 \sim 4{,}6 \cdot 10^2$ Дж/(кг · К) и $T_2 \sim 4{,}3 \cdot 10^3$ К внутренняя энергия $E_2 \sim c_2 m_2 T_2 \sim 3{,}4 \cdot 10^{30}$ Дж.

Первопричиной относительных движений в жидком слое (создающих, в свою очередь, механизм геомагнитного динамо) может быть освобождение потенциальной энергии $K_2 \sim m_2 g' v_r$, где g' — эффективное архимедово ускорение. Так, например, при $g' \sim 10^{-1}$ м/с^2 и $v_r \sim 10^{-4}$ м/с получилось бы $K_2 \sim 10^{16}$ кВт, чего с избытком хватило бы для восполнения всех энергетических потерь. Скорость взаимных превращений K_2 и M_2 (последнее слагаемое в двух первых уравнениях (52.11)), т. е. скорость генерации геомагнитного поля $\dot{M}_2 \sim {}^1/_3 r^2 u H_т^2$ получается имеющей порядок 10^{10} кВт. Джоулевы потери, потоки тепла и коэффициент теплопроводности оцениваются так же, как это делалось для твердого ядра.

Все перечисленные количественные оценки показаны на рис. 52.1 (но многие из них следует рассматривать лишь как пример, поскольку пока что нет уверенности даже в порядке величины ряда характеристик, как u, $H_т$, ν_2 и др.). Качественным представлениям о характере гидромагнитных процессов в жидком слое посвящается следующий параграф.

§ 53. Гидромагнитные динамо

Так называются механизмы генерации магнитного поля течениями электропроводящих жидкостей или газов. По современным представлениям, механизмами динамо объясняется наличие магнитного поля у Солнца (состоящего из высокоэлектропроводной плазмы), Земли (имеющей расплавленный слой в ядре). Меркурия (по-видимому, по такой же причине), Юпитера (содержащего газожидкий металлизированный водород), вероятно, Сатурна (по такой же причине), Урана (с его аномально большим наклоном в 55° оси магнитного поля к оси вращения планеты), магнитных звезд и Галактики в целом.

Гидромагнитные динамо описываются уравнениями магнитной гидродинамики, т. е. уравнениями движения (3.2), включающими силу Лоренца (3.3), вместе с уравнением индукции (3.6) и условием $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$. Отметим некоторые особенности этих уравнений: (1) из-за воздействия магнитного поля на движение в числе их решений появляются волны нового типа — магнитогидродинамические (Х. Альфвен, 1942), роль которых для динамо следует выяснить; (2) для проблем генерации магнитных полей планет и звезд специфична сферическая геометрия; (3) для динамо существенно, чтобы движение не обладало «отражательной симметрией», т. е. имело бы отличную от нуля *плотность спиральности* $\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}$; (4) теория динамо должна объяснять способность глобальных магнитных полей к наблюдаемым на Солнце и на Земле обращениям их полярности.

Начнем с волн. Рассмотрим сначала для простоты невращающуюся ($\omega=0$) однородную жидкость ($\rho=\text{const}$) без вязкости и омических потерь ($\nu=\nu_m=0$), учитывая из внешних сил только силу Лоренца, и будем использовать обозначение $\mathbf{h}=(4\pi\rho)^{-1/2}\mathbf{H}$. Тогда нетрудно убедиться, что уравнения магнитной гидродинамики имеют решения $\mathbf{u}=\pm\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}=\mathbf{h}_0+\mathbf{h}_1$, где $\mathbf{h}_0=\text{const}$, а $\mathbf{h}_1$ — произвольная функция от $\mathbf{x}\pm\mathbf{h}_0 t$. Если она локализована, то эти решения описывают стационарные волны, распространяющиеся с альфвеновской скоростью $\pm\mathbf{h}_0$ (при $h_1\ll h_0$ они представимы в виде суперпозиций плоских гармонических поперечных волн с двумя независимыми плоскими поляризациями и с частотами $\sigma=\mathbf{k}\cdot\mathbf{h}_0$).

В этих волнах плотности кинетической и магнитной энергии $\rho u^2/2$ и $\rho h_1^2/2=H_1^2/8\pi$ одинаковы. Интегралы $^1/_2\int|\mathbf{u}\pm\mathbf{h}_1|^2dV$ не меняются со временем; следовательно, это же относится к их полусумме (полной энергии волн) и полуразности $\int\mathbf{u}\cdot\mathbf{h}_1\,dV$ (так называемой *взаимной спиральности* полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{h}_1$, служащей мерой сцепления вихревых линий поля $\mathbf{u}$ с силовыми линиями поля $\mathbf{h}_1$).

Эти волны, по-видимому, не участвуют в гидромагнитных динамо и при описании последних могут быть «отфильтрованы» путем сохранения в проекциях уравнения индукции (3.6) только одной производной по времени, фигурирующей в (4.7) (А. С. Монин, 1971).

Теперь введем вращение, но рассмотрим только линеаризированные уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla P_1 + (\mathbf{h}_0 \cdot \nabla)\,\mathbf{h}_1 + \nu\,\Delta \mathbf{u};$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial t} = (\mathbf{h}_0 \cdot \nabla)\,\mathbf{u} + \nu_m\,\Delta \mathbf{h}_1 \qquad (53.1)$$

(где P_1 включает и гидродинамическое, и магнитное давление). Для плоских волн (в силу соленоидальности — поперечных) выводится соотношение $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \pm k\mathbf{u}$ (где k — волновое число), означающее, что волна имеет круговую поляризацию ($|\mathbf{u}| = \text{const}$, и вектор $\mathbf{u}$ поворачивается вдоль направления $\mathbf{k}$). Спиральность $\langle \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{u}\rangle = \pm k\,|\mathbf{u}|^2 e^{-2|\sigma_I|t}$ при этом максимальна. Такие волны могут образовывать динамо. При отсутствии магнитного поля и вязкости здесь остались бы только инерционные колебания. Появление магнитного поля их несколько искажает, но, главное, порождает еще новый класс волн, так называемых *магнитострофических*, в которых $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \approx -\nabla P_1 + (\mathbf{h}_0 \cdot \nabla)\,\mathbf{h}_1$. Дисперсионное соотношение у них имеет вид

$$\sigma = -i\nu_m k^2 \pm {}^1\!/_2 k\,(\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_0)^2\,(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})^{-1}. \qquad (53.2)$$

Добавим теперь еще архимедову силу и рассмотрим так называемые МАК-волны (С. И. Брагинский, 1964), в которых магнитная, архимедова и кориолисова силы приблизительно уравновешивают друг друга:

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \approx -\nabla P_1 + (\mathbf{h}_0 \cdot \nabla)\,\mathbf{h}_1 - \alpha T_1 \mathbf{g}, \qquad (53.3)$$

где T_1 — возмущение температуры, удовлетворяющее линеаризированному уравнению $\partial T_1/\partial t - \Gamma w = \chi\,\Delta T_1$, причем $(-\Gamma) < 0$ — градиент температуры в покоящейся неустойчиво стратифицированной среде. Постоянное поле $\mathbf{h}_0$ здесь будем считать горизонтальным. Рассмотрим распространяющиеся по горизонтали и стоячие по вертикали плоские волны в плоском слое $|z| \leqslant z_0$ (на границах которого $w = \partial u/\partial z = \partial v/\partial z = T_1 = h_{1z} = \partial h_{1x}/\partial z = \partial h_{1y}/\partial z = 0$), в которых u, v, P_1, h_{1x}, h_{1y} зависят от z, как $\cos nz$, а w, T_1, h_{1z} — как $\sin nz$, где nz_0/π — целое число. Для частот σ этих волн получается кубическое уравнение

$$(-i\sigma + \chi k^2)\,[1 + Y^2(-i\sigma + \nu_m k^2)^2] - Z\,(-i\sigma + \nu_m k^2) = 0;$$

$$Y = 2\omega n/h_0^2 k_y^2 k; \quad Z = \alpha\Gamma g\,(k_x^2 + k_y^2)/h_0^2 k_x^2 k^2, \qquad (53.4)$$

причем представляют интерес неустойчивые моды с $\operatorname{Im}\sigma > 0$ (при $\operatorname{Re}\sigma = 0$ они являются неосциллирующими). Ось y удобно

направить на восток, и тогда $k_y = Nm_1$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Приближение (53.3) пригодно только для низкочастотных мод $|\sigma| \ll \omega$. Диссипативные факторы ν_m и χ здесь существенны. Можно убедиться, что при $q = \chi/\nu_m < 2$ или $Q = 2\omega\nu_m/h_0^2 \geqslant 3{,}273$ из неустойчивых мод первыми возбуждаются неосциллирующие, в противоположном же случае в плоскости (q, Q) имеется область, в которой первыми возбуждаются осциллирующие моды. Укажем, наконец, спиральность неустойчивых мод:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[i (k_x v - k_y u) w^* \right] e^{2\sigma_i t} \sin 2nz, \qquad (53.5)$$

причем осреднение производится по горизонтальным плоскостям, а в правой части u, v, w — комплексные амплитуды волн.

Перейдем теперь к специфике сферической геометрии, в которой соленоидальные векторные поля $\mathbf{A}$ нам будет удобно представлять в виде суммы $\mathbf{A}_T + \mathbf{A}_P$ *тороидальной* и *полоидальной* компонент, определяемых формулами:

$$\mathbf{A}_T = \operatorname{rot}(T\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \times \nabla T; \quad T = -\Delta_h^{-1}(\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}),$$

$$\mathbf{A}_P = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(P\mathbf{r}) = -\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \nabla P); \quad P = -\Delta_h^{-1}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}), \qquad (53.6)$$

где $T(\mathbf{r})$ и $P(\mathbf{r})$ — соответствующие скалярные поля, а $\Delta_h = (\mathbf{r} \times \nabla)^2$ — оператор импульса, т. е. двумерный оператор Лапласа на сфере единичного радиуса (его собственные значения равны $-n(n+1)$, им соответствуют собственные функции $S_n = \sum_{m=0}^{n} A_n^m P_n^m(\cos\theta) e^{im\lambda}$ с произвольными комплексными постоянными A_n^m). Векторные линии $\mathbf{A}_T$ лежат на сферах $r = \text{const}$, а $\mathbf{A}_P$, наоборот, имеет ненулевую радиальную компоненту. Если поле $\mathbf{A}$ осесимметрично (т. е. инвариантно относительно поворотов вокруг оси), то T и P не зависят от λ, и получается

$$\mathbf{A}_T = (0,\ 0,\ A_\lambda), \quad A_\lambda = -\partial T/\partial\theta,$$

$$\mathbf{A}_T = \left(-\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\chi}{\partial\theta},\ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\chi}{\partial r},\ 0 \right), \quad \chi = -r \sin\theta\, \partial P/\partial\theta;$$

оба поля $\mathbf{A}_T$ и $\mathbf{A}_P$ здесь имеют нулевую спиральность.

Используя представление (53.6) для магнитного поля $\mathbf{A} = \mathbf{H}$, уравнение индукции (3.6) можно привести к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h T - \frac{\nu_m}{r^2} \Delta_h T = \frac{1}{r^2} \left(\mathbf{u}_h \times \nabla_h \frac{\partial r P}{\partial r} \right)_r; \qquad (53.7)$$

$$\frac{\partial \Delta_h P}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mathbf{u}_h \Delta_h P + u_r \nabla_h \frac{\partial r P}{\partial r} \right) - \nu_m \Delta\Delta_h P = (\nabla_h T \times \nabla_h u_r)_r. \qquad (53.8)$$

Правая часть первого из этих уравнений описывает генерацию (или поглощение) тороидального поля полоидальным, возможную

благодаря горизонтальным течениям. Правая часть второго уравнения описывает генерацию (или поглощение) полоидального поля тороидальным, возможную благодаря вертикальным течениям. Если поля T и u_r имеют общую ось симметрии (не зависят от долготы), то эта правая часть обращается в ноль. Тогда поле P будет затухать со временем из-за омических потерь, а без возбуждения полем P будет затухать и поле T, т. е. динамо оказывается невозможным. Это — теорема «антидинамо» Т. Каулинга (1934).

Такой же результат получается при $u_r \equiv 0$. Это — теорема Э. Булларда и Г. Геллмана (1954) о невозможности динамо с чисто тороидальным полем скорости. Этими авторами был развит метод решения уравнения индукции с помощью разложения по сферическим гармоникам и была построена при $\nu_m = 0$ приближенная стационарная модель $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ из сферических гармоник до 2-го порядка при заданном $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в виде зонального течения $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ и нескольких конвективных ячеек $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$. Типичное отношение u_0/u_1, игравшее роль собственного значения, оказалось положительным, как это требовалось для существования динамо. Для Земли получилось $H_T \sim 0{,}05$ Тл $\gg H_P$ (заметим, однако, что задававшееся в этой работе поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ было позже откорректировано Д. Габбинсом, 1973).

Аналогичная теорема «антидинамо» для плоского двумерного течения (при котором $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$, где $\mathbf{k}$ — фиксированный вектор) была доказана Я. Б. Зельдовичем (1956) (им было рассмотрено также начальное усиление и последующее затухание магнитного поля и процесс «диамагнитного» выталкивания магнитных силовых линий из турбулизированной области). Таким образом, теоремы «антидинамо» показывают, что движения, способные генерировать и поддерживать магнитное поле, должны быть трехмерными и несимметричными.

Выпишем еще выражение для «заряда магнитного поля» (4.7) при использовании представления (53.6):

$$r\rho H_* = (\nabla_h \eta \times \nabla_h T)_r + \frac{1}{r} \nabla_h \eta \cdot \nabla_h \frac{\partial rP}{\partial r} - \frac{\partial \eta}{\partial r} \Delta_h P \qquad (53.9)$$

(формулы (53.7) — (53.9) были опубликованы Б. Л. Гаврилиным и А. С. Мониным, 1972). Отсюда видно, что если поле энтропии $\eta(\mathbf{r})$ мало отличается от сферически-симметричного поля $\eta_0(r)$, то тороидальное магнитное поле может вносить в H_* вклад, не малый по сравнению с вкладом полоидального поля, лишь если оно сильнее последнего по меньшей мере в $\eta_0 | \eta - \eta_0 |^{-1}$ раз. Согласно оценкам Э. Булларда и Г. Геллмана, такие условия, по-видимому, имеют место в земном ядре.

Рассмотрим еще *спиральность* $I = \int \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}\, dV$ векторных полей $\mathbf{A}$, плотность которой $\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}$ есть произведение полярного

вектора на аксиальный, т. е. псевдоскаляр, меняющий знак при отражениях $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ (так что у полей с отражательной симметрией плотность спиральности тождественно равна нулю). Топологически спиральность является мерой структурной сложности (зацепления или заузления) вихревых трубок поля $\mathbf{A}$. Так, если $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ отличен от нуля лишь внутри двух тонких трубок с осями C_1 и C_2, обвивающимися одна вокруг другой N раз, то спиральность равна $\pm N\Phi_1\Phi_2$, где $\Phi_i = \int\limits_{S_i} \mathbf{r}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}\,dS = \oint\limits_{C_i} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ — потоки вихря через сечения трубок S_i. При существовании представления Клебша $\mathbf{A} = \psi\nabla\varphi + \nabla\chi$ (так что $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\psi\times\nabla\varphi$) спиральность равна нулю. Можно убедиться, что при использовании обозначения $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ из уравнения индукции вытекает равенство

$$dI/dt = \nu_m \int (\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{H})\,dV \qquad (53.10)$$

(Г. Моффат, 1969), где интегрирование можно производить по любому объему, на поверхности которого $\mathbf{n}\cdot\mathbf{H} = 0$. Таким образом, из-за диффузии топологическая структура магнитного поля меняется со временем и прослеживание за индивидуальными силовыми линиями невозможно. Если же $\nu_m = 0$, по спиральность магнитного поля не меняется со временем. Впрочем, вскоре мы увидим, что для динамо более существенна спиральность поля скорости.

Представим поле скорости и магнитное поле в виде $\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$ и $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$, где ноликом обозначаются осредненные значения (по ансамблю реализаций случайных полей либо по большому для флюктуаций, но малому для осредненных полей интервалу пространства или времени), а штрихом — флюктуации, т. е. отклонения от осредненных значений. Осредненное уравнение индукции и разность полного и осредненного уравнений будут иметь вид:

$$\partial\mathbf{H}_0/\partial t - \operatorname{rot}(\mathbf{u}_0\times\mathbf{H}_0) - \nu_m\Delta\mathbf{H}_0 = \operatorname{rot}\mathbf{F};\quad \mathbf{F} = \langle\mathbf{u}'\times\mathbf{H}'\rangle; \qquad (53.11)$$

$$\partial\mathbf{H}'/\partial t - \operatorname{rot}(\mathbf{u}_0\times\mathbf{H}') - \operatorname{rot}\mathbf{G} - \nu_m\Delta\mathbf{H}' = \operatorname{rot}(\mathbf{u}'\times\mathbf{H}_0);$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{u}'\times\mathbf{H}' - \mathbf{F}. \qquad (53.12)$$

Уравнение (53.11) является аналогом уравнений Рейнольдса в теории турбулентности, а его правая часть $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, играющая роль источника для осредненного поля $\mathbf{H}_0$,— аналогом напряжений Рейнольдса. Однако, в отличие от теории турбулентности, в *электродинамике осредненного поля* осредненная электродвижущая сила $\mathbf{F}$ в ряде случаев может быть точно вычислена (выражена через поле скорости), так как уравнение (53.12) для $\mathbf{H}'$ линейно; после этого для $\mathbf{H}_0$ можно искать простые симметричные решения, так как к уравнению (53.11) теоремы «антидинамо» не относятся. Эта идея, восходящая еще к Э. Паркеру (1955), была развита потсдамской группой М. Штеенбека, Ф. Краузе и К. Рёдлера (1966 и их последующие работы).

Вследствие линейной зависимости $\mathbf{H}'$, а потому и $\mathbf{F}$ от $\mathbf{H}_0$ поле $\mathbf{F}$ можно представить в виде быстро сходящегося ряда

$$F_i = \alpha_{ij} H_{0j} + \beta_{ijk} \frac{\partial^2 H_{0j}}{\partial x_k} + \gamma_{ijkl} \frac{\partial^2 H_{0j}}{\partial x_k \partial x_l} + \ldots, \qquad (53.13)$$

где коэффициенты α_{ij}, β_{ijk}, γ_{ijkl}, ... суть псевдотензоры, полностью определяемые полем $\mathbf{u}_0$, статистическими свойствами поля $\mathbf{u}'$ и значением ν_m. Антисимметричная часть псевдотензора α_{ij} имеет вид $(-\varepsilon_{ijk}a_k)$ и вносит в $\mathbf{F}$ вклад $\mathbf{a}\times\mathbf{H}_0$, т. е. приводит в (53.11) к замене $\mathbf{u}_0$ на $\mathbf{u}_0+\mathbf{a}$. Если поле $\mathbf{u}'$ статистически однородно и *псевдоизотропно* (т. е. инвариантно относительно поворотов, но не обязательно относительно отражений системы отсчета), то $\alpha_{ij}=\alpha\delta_{ij}$, где α — псевдоскаляр, так что $\mathbf{u}'$ порождает электродвижущую силу $\mathbf{F}=\alpha\mathbf{H}_0$ (и ток $\sigma\mathbf{F}$, параллельный $\mathbf{H}_0$, в отличие от обычного тока индукции $\sigma\mathbf{u}_0\times\mathbf{H}_0$, перпендикулярного $\mathbf{H}_0$). Появление такой электродвижущей силы М. Штеенбек и Ф. Краузе (1966) назвали α-эффектом (открыт же он был еще Э. Паркером, 1955). В псевдоизотропном случае $\beta_{ijk}=\beta\varepsilon_{ijk}$, где β — просто скаляр. Если он постоянен, то его вклад в $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ равен $\beta\Delta\mathbf{H}_0$, т. е. он приводит к замене ν_m на $\nu_m+\beta$ (причем обычно β положительно, но все же не исключена экзотическая возможность $\nu_m+\beta<0$; согласно Р. Крейчнану, 1976, она может реализовываться благодаря флюктуациям спиральности поля $\mathbf{u}'$).

Для конкретного расчета коэффициентов α_{ij} и β_{ijk} эффекты, связанные с $\mathbf{u}_0$, оставим для отдельного рассмотрения, ограничимся бездивергентными статистически-стационарными и однородными полями $\mathbf{u}'$ со спектральным тензором $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \sigma)$ и соответственно спектром спиральности

$$F(k, \sigma) = i \int\limits_{\Omega_k} \varepsilon_{lmn} k_m \Phi_{ln}(\mathbf{k}, \sigma)\, d\Omega \qquad (53.14)$$

(где Ω_k — сфера радиуса k в $\mathbf{k}$-пространстве) и в так называемом квазилинейном приближении пренебрежем в уравнении (53.12) слагаемым $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ (по С. И. Вайнштейну, 1972, такое приближение соответствует марковскому случайному процессу), так что это уравнение берется в виде $\partial\mathbf{H}'/\partial t - \nu_m\Delta\mathbf{H}' = (\mathbf{H}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}'$. Решив его спектральным методом и рассчитав $\mathbf{F}$, получим

$$\alpha_{ij} = i\nu_m\varepsilon_{ikl}\int k^2 k_j \Phi_{kl}(\mathbf{k}, \sigma)\left(\sigma^2 + \nu_m^2 k^4\right)^{-1} d\mathbf{k}\, d\sigma;$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha_{ii} = -\frac{\nu_m}{3}\int k^2 F(k, \sigma)\left(\sigma^2 + \nu_m^2 k^4\right)^{-1} dk\, d\sigma. \qquad (53.15)$$

Первая из этих формул является, по существу, суперпозицией значений $\alpha_{ij}=\alpha^{(3)}\delta_{i3}\delta_{j3}$ для отдельных «спиральных волн» $\mathbf{u}'=\operatorname{Re}\mathbf{u}_1\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\sigma t)]$, $\mathbf{u}_1=u_1(-i, 1, 0)$, $\mathbf{k}=(0, 0, k)$, вторая же показывает, что α есть взвешенный интеграл от спектра спиральности с обратным знаком (видно также, что для создания

α-эффекта необходима диффузия магнитного поля, создающая фазовый сдвиг между $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{u}'$). Аналогично рассчитывается (при линейном по $\mathbf{x}$ поле $\mathbf{H}_0$) коэффициент β_{ijk}.

Первый вариант электродинамики осредненного поля (лишь со спецификой сферической геометрии, нацеленной на геомагнитное динамо) был построен немного раньше потсдамской группы С. И. Брагинским (1964). Он использовал осреднение по долготе и искал осесимметричное поле $\mathbf{H}_0$, полагая $\mathbf{u}=\mathbf{u}_{0T}+\varepsilon^2\mathbf{u}_{0P}+\varepsilon\mathbf{u}'$ и $\mathbf{H}=\mathbf{H}_{0T}+\varepsilon^2\mathbf{H}_{0P}+\varepsilon\mathbf{H}'$, где $\varepsilon=\mathrm{Re}_m^{-1/2}$ — малый параметр. При этом оказалось, что тороидальное поле $\mathbf{H}_{0T}$ генерируется дифференциальным вращением $\mathbf{u}_{0T}$, а полоидальное поле $\mathbf{H}_{0P}$ генерируется α-эффектом. Такой механизм генерации осредненного поля называется $\alpha\omega$-динамо.

Если же α-эффект доминирует в уравнениях и для $\mathbf{H}_{0T}$, и для $\mathbf{H}_{0P}$, то механизм генерации называется α^2-динамо. Приведем пример такого динамо с анизотропным α_{ij}. Пусть $\mathbf{u}_0=0$ и $F_i=\alpha_{ij}H_{0j}$. Тогда уравнения (53.11) имеют решения в виде плоских волн $\mathbf{H}_0=\mathbf{H}_1\exp(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}+pt)$, $\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{H}_1=0$, и для этих решений принимают вид $(p+\nu_m k_1^2)H_{1i}=i\varepsilon_{ijk}\alpha_{km}k_{1j}H_{1m}$, причем детерминант из коэффициентов при H_{1i} должен обращаться в ноль. Это дает кубическое уравнение для p, корни которого в главных осях псевдотензора α_{ij} имеют вид

$$p_1=-\nu_m k_1^2;\quad p_{2,3}=-\nu_m k_1^2\pm Q;$$
$$Q^2=\alpha^{(2)}\alpha^{(3)}k_{11}^2+\alpha^{(3)}\alpha^{(1)}k_{12}^2+\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}k_{13}^2, \qquad (53.16)$$

Экспоненциальный рост $\mathbf{H}_0$ возможен при $\mathrm{Re}\,p>0$, т. е. при $Q^2>\nu_m^2k_1^4$. В осесимметричном случае ($\alpha^{(1)})=\alpha^{(2)}$) при $\alpha^{(1)}\alpha^{(3)}>0$ и достаточно малых k_1 усиление $\mathbf{H}_0$ происходит при любом направлении $\mathbf{k}_1$, но при $\alpha^{(1)}\alpha^{(3)}<0$ оно возможно лишь при малых k_1 и значениях $\mathbf{k}_1$ в конусе $Q^2>0$. Такое анизотропное усиление возможно, в частности, при пространственно-периодическом поле $\mathbf{u}'$. Так, в «спиральных волнах» $\mathbf{u}'=u_1(\sin kz,\ \cos kz,\ 0)$ получается $\alpha_{ij}=\alpha\delta_{i3}\delta_{j3}$, $\alpha=-u_1^2/\nu_m k_3$, но в поле $\mathbf{u}'$, инвариантном относительно группы вращений куба (С. Чайлдрисс, 1970), например, $\mathbf{u}'=u_1(\sin kz+\cos ky,\ \sin kx+\cos kz,\ \sin ky+\cos kx)$, получается все же изотропность $\alpha_{ij}=\alpha\delta_{ij}$, $\alpha=-u_1^2/\nu_m k$.

Итак, спиральность поля скорости $\mathbf{u}'$ благодаря α-эффекту приводит к усилению магнитного поля $\mathbf{H}_0$. С. И. Вайнштейн и Я. Б. Зельдович (1972) в случае турбулентности и Г. Моффат (1972) для случайных волн показали, что, наоборот, рост магнитного поля $\mathbf{H}_0$ благодаря действию силы Лоренца приводит к ослаблению α-эффекта, ограничивающему рост H_0 некоторым равновесным значением H_c.

Переходим, наконец, к обращениям полярности глобальных магнитных полей. Наиболее наглядно они видны на Солнце. Силь-

ные магнитные поля порядка 0,01—0,4 Тл наблюдаются (по раздвоению спектральных линий с их противоположной круговой поляризацией вследствие эффекта Зеемана) в солнечных пятнах. Магнитный поток через типичное пятно имеет порядок 10^{13} Вб. Пятна наблюдаются обычно группами, из которых более 90 % образуют биполярные (БМО), более 8 % — униполярные (УМО) и менее 1 % — мультиполярные магнитные области. В каждой

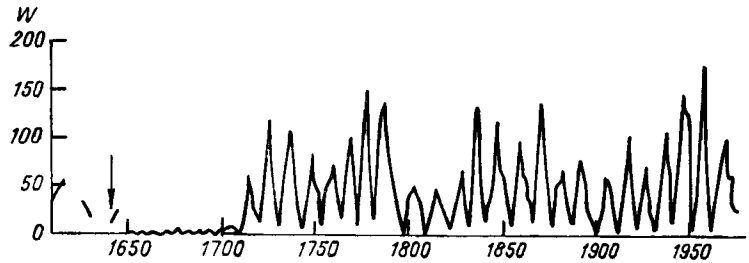


Рис. 53.1. График колебаний чисел Вольфа.

БМО имеется переднее (по вращению Солнца) пятно p и, немного дальше от экватора, одно или несколько задних пятен f противоположной магнитной полярности. Все пятна p одного полушария и пятна f другого полушария имеют одинаковую полярность (Дж. Хейл, С. Николсон, 1938).

Вне пятен напряженность магнитного поля равняется $(1\ldots 20)\cdot 10^{-4}$ Тл. В широтной зоне $|\varphi|<40°$ господствуют БМО, и на каждой широте области положительной и отрицательной полярности чередуются с преобладающим долготным волновым числом $m=6$, причем их оси наклонены к кругам широты так, что их западные концы ближе к экватору, чем восточные (эти области, по-видимому, соответствуют волнам Россби—Блиновой, переносящим момент импульса к экватору). В областях $|\varphi|>40°$ господствуют УМО такой же полярности, как пятна p (указывая тем самым на наличие полоидального поля).

Гелиомагнитное поле циклически, в среднем каждые 11,2 года, изменяет свою полярность на противоположную. В течение цикла число Р. Вольфа (1848) $W=N_1+10N_2$, где N_1 — количество пятен, а N_2 — количество групп пятен, возрастает от минимума 0—11 до максимума 49—190 и затем падает до нового минимума. График колебаний W за 1610—1974 гг. см. на рис. 53.1 (Е. Маундер, 1890, заметил, что в период 1645—1715 гг. пятен на Солнце практически не наблюдалось; Дж. Эдди, 1977, насчитывает по колебаниям ^{14}C в годичных кольцах деревьев за последние 5000 лет шесть таких минимумов солнечной активности).

Цикл начинается с появления пятен новой полярности в обоих полушариях на дальних краях зон «королевских широт» 52—5°

(в подавляющем большинстве случаев 30—8°), последующие пятна появляются, как правило, все ближе и ближе к экватору, во время максимума числа пятен — у широт 15°, и последние пятна этой полярности — на приэкваториальных краях «королев-

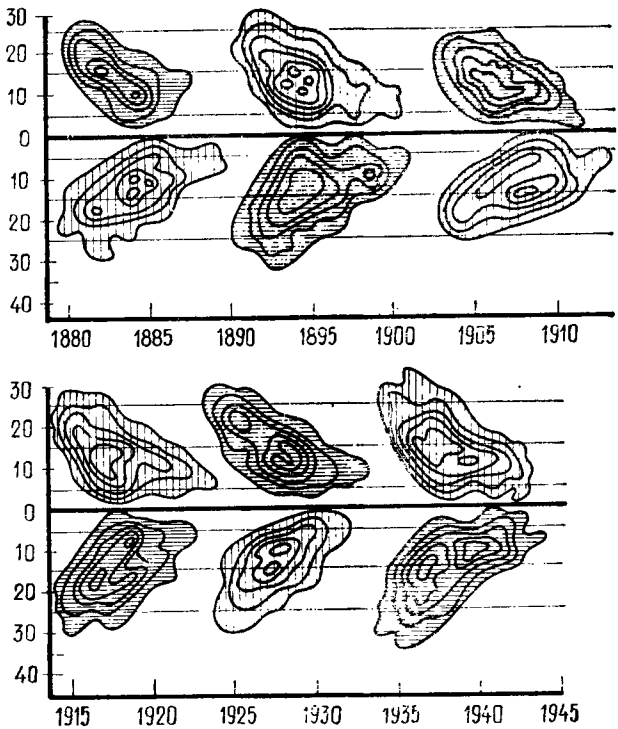


Рис. 53.2. Бабочки Маундера за 1874—1913 гг.

Вертикальная штриховка — одна полярность, горизонтальная — противоположная полярность.

ских широт» (Р. Керрингтон, 1858; Г. Шперер, 1894, проследил эту закономерность назад до 1621 г.). Изолинии количества пятен на диаграмме широта—время имеют форму бабочек (Е. Маундер, 1922), см. рис. 53.2. Они показывают, что первые пятна новой полярности появляются на высоких широтах раньше (в среднем на 3 года) последних пятен старой полярности на низких широтах (так что минимумы кривой $Q(t)$ сглаживаются), но «бабочки» не пересекаются.

Гораций Бэбкок (1961) трактует БМО как результат всплывания из подфотосферного конвективного слоя некоторого участка силовой трубки тороидального магнитного поля (имеющей небольшой наклон к кругу широты). Плавучесть может создаваться локальным усилением поля (из-за неравномерности растяжения

трубки дифференциальным вращением), что при тенденции к выравниванию полного давления $p+H^2/8\pi$ должно приводить к уменьшению p путем вытеснения из области увеличения H части газа и, следовательно, к уменьшению ρ и появлению архимедовой силы (Э. Паркер, 1955). Частичное подавление конвекции сильным магнитным полем (затрудняющим движения плазмы поперек магнитных силовых линий) приводит к ослаблению конвективного теплопереноса, охлаждению фотосферного газа и появлению относительно холодных пятен.

Гелиомагнитное поле генерируется, по-видимому, механизмом $\alpha\omega$-динамо: тороидальное поле создается из полоидального дифференциальным вращением конвективной зоны Солнца. По модели Г. Бэбкока, за 3 года до начала очередного цикла на Солнце образуется полоидальное магнитное поле с напряженностью на экваторе $H_0 \sim 5 \cdot 10^{-4}$ Тл и полным магнитным потоком порядка $8 \cdot 10^{13}$ Вб, силовые линии которого в зоне $|\varphi| \lesssim 55°$ проходят вдоль меридианов в конвективном слое под фотосферой, а при $|\varphi| \gtrsim 55°$ выходят из-под фотосферы и замыкаются высоко над нею.

Дифференциальное вращение $\omega \approx 14{,}28° - 2{,}77° \sin^2\varphi$ сут$^{-1}$ растягивает отрезки силовых линий в конвективном слое, создавая за $(n+3)$ лет их смещение по долготе $\delta_\lambda = 17{,}6(n+3)\sin^2\varphi$ радиан и превращая их в спирали, образующие углы ψ с меридианом, где $\operatorname{tg}\psi = d\delta_\lambda/d\varphi$, и имеющие напряженность $H = H_0 \sec\varphi \times \sec\psi$. За 3 года ($n=0$) поле на широтах $|\varphi| \sim 30°$ достигает критического значения в среднем по намагниченному слою $H_c \sim 264 \cdot 10^{-4}$ Тл, а в некоторых магнитных трубках — в несколько раз больше, при котором растянутые участки трубок всплывают, образуя пятна, и растяжение прекращается. На более низких широтах растяжение продолжается дольше. За $(n+3)$ лет значение H_c достигается на широтах, определяемых уравнением $(n+3) \times \sin\varphi = 1{,}5$.

Если исходное погруженное полоидальное поле состояло, скажем, из 8 трубок длиной около $2R_\odot$, то за 3 года они растянутся в спирали с 5 витками в каждом полушарии суммарной длиной около $500R_\odot$. За цикл их суммарная длина достигнет $10^5 R_\odot$. Если каждый отрезок растянутой трубки длиной $R_\odot$ создаст 3—4 БМО, то всего их за цикл образуется около 3000. Это хорошо согласуется с данными наблюдений.

Полоидальное поле новой полярности создается из тороидального α-эффектом. По Г. Бэбкоку, образующиеся над БМО петли из магнитных силовых линий уже вносят вклад в новое полоидальное поле, так как их p-части находятся ближе к экватору, чем f-части. Всплывая в корону, они отшнуровываются и уносятся солнечным ветром. Предполагается, что оставшиеся их концы перезамыкаются и нижняя ветвь нового полоидального поля погружается под фотосферу.

Задав тем или иным образом функцию $\alpha(r, \theta)$ и дифференциальное вращение $\omega(r, \theta)$ (или также еще полоидальное поле скорости $u_{0p}(r, \theta)$), можно искать периодические решения уравнений электродинамики осредненного поля (53.11) и строить «бабочки Маундера», как изолинии функции $H_{0\lambda}(r, \theta, t)$ при некотором фиксированном r. Такие расчеты производились рядом авторов, в том числе М. Штеенбеком и Ф. Краузе (1969), П. Робертсом (1972), Т. С. Ивановой и А. А. Рузмайкиным (1976, 1977) (причем в модели 1977 г. учитывался и нелинейный эффект убывания α с ростом H_0, который, по-видимому, в принципе открывает перспективы и для объяснения таких длиннопериодных вариаций солнечной активности, как упоминавшийся выше «минимум Маундера» 1645—1715 гг.). Эти расчеты показали, что при разумном подборе параметров (в том числе $\nu_m \approx 10^8$ м^2/с) можно получить правильную длительность солнечного цикла. Важные предсказания могли бы дать аналогичные расчеты $\alpha\omega$-динамо для больших планет.

Обращения полярности, хотя и гораздо более длиннопериодные, свойственны и геомагнитному полю. На поверхности Земли и вне ее это поле потенциально: $\mathbf{H} = -\nabla\Psi$, $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n$ ($n=1$ соответствует *диполю*), где в сферических координатах

$$\Psi_n = -r_1 (r_1/r)^{n+1} S_n(\theta, \lambda);$$

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} \left(g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda\right) P_n^m(\cos\theta). \qquad (53.17)$$

На поверхности Земли $r = r_1$ дипольная компонента является основной. Северный геомагнитный полюс (к которому притягивается северный конец стрелки компаса) находится около Гренландии (73° с. ш., 100° з. д.), южный — в австралийском секторе Антарктики (68° ю. ш., 143° в. д.), значения H там равны соответственно $0{,}6 \cdot 10^{-4}$ и $0{,}7 \cdot 10^{-4}$ Тл; а на магнитном экваторе H меняется от $0{,}42 \cdot 10^{-4}$ Тл в Индонезии до $0{,}25 \cdot 10^{-4}$ Тл у восточного берега Южной Америки. Значения младших геомагнитных элементов g_n^m и h_n^m в единицах гамма ($1\gamma = 10^{-9}$ Тл) и скорости их изменений со временем $\dot{h}_n^m$ и $\dot{g}_n^m$ в γ/год в эпоху 1975 г. даны в табл. 53.1. Пересчет на поверхность ядра $r = r_2$ показывает, что там $\mathbf{H}$ имеет мультипольный характер.

В настоящую эпоху диполь затухает со скоростью около 5 % за столетие. Недипольная компонента дрейфует на запад со скоростью $(0{,}18 \pm 0{,}015)°$ долготы в год (Э. Буллард, С. Фридман, Г. Геллман, Дж. Никсон, 1950). Это может быть указанием на отставание вращения ядра от мантии порядка 20 км/год $\approx$ $\approx$0,7 мм/с. Э. Вестин (1953) обнаружил корреляцию между колебаниями скорости западного дрейфа и скорости ω_1 вращения Земли.

По намагниченности лав различных возрастов А. Кокс, Р. Доэлл и Г. Далримпл (1963—1968) обнаружили обращения полярности геомагнитного поля — за последние 4,5 млн. лет четыре *эпохи* чередующихся знаков полярности (названные, от настоящего в прошлое, эпохами Брюнес, Матуяма, Гаусс и Гильберт), прерываемые кратковременными всплесками противоположной полярности — *событиями* (рис. 53.3). По полосчатым магнитным аномалиям чередующихся знаков интенсивностью порядка 500γ на океанском дне, параллельным осям срединно-океанских хребтов и симметричным относительно этих осей, календарь обращений полярности был продлен до 162 млн. лет в прошлое («Ламонтская шкала»), причем обнаружена эпоха 110—85 млн. лет назад без обращений полярности. По намагниченности континентальных пород А. Н. Храмов и Л. А. Шолпо (1967) предложили ориентировочную шкалу эпох полярности на весь фанерозой (включающую и эпохи без обращений полярности, например, 280—230 млн. лет на-

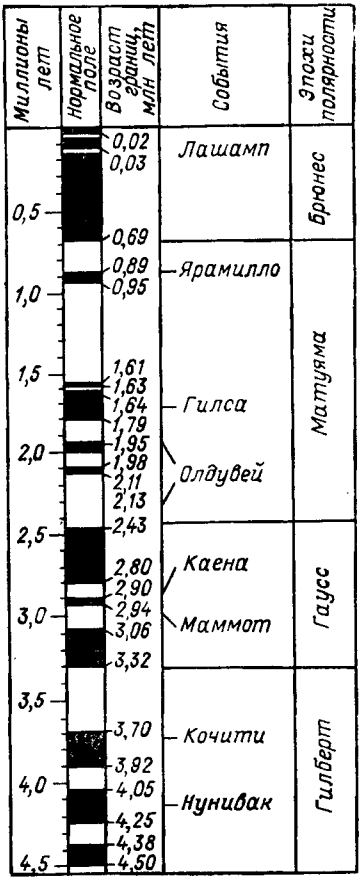


Рис. 53.3. Обращения полярности геомагнитного поля.

Таблица 53.1

Младшие геомагнитные элементы

n	*m*	*g*	*h*	$\dot{g}$	$\dot{h}$
1	0	—30 103,6	—	26,8	—
	1	—2 016,5	5682,6	10,0	—10,1
2	0	—1 906,7	—	—25,0	—
	1	3 009,9	—2054,7	0,3	—2,8
	2	1 633,0	—58,1	5,5	—18,9
3	0	1 278,2	—	—3,8	—
	1	—2 142,0	—329,8	—10,5	7,2
	2	1 254,7	265,9	—4,7	2,8
	3	831,0	—227,0	—4,7	—6,4

зад). Наличие геомагнитного поля теперь прослежено уже по меньшей мере до 3 млрд. лет назад.

Для расчета геомагнитного поля, возможно, пригодна та же модель $\alpha\omega$-динамо, так как вращение жидкого слоя земного ядра вполне может быть дифференциальным благодаря переносу момента импульса в меридиональной плоскости, скажем, волнами Россби или точнее, МАК-волнами (отметим еще возможность образования спиральных волн при обтекании неровностей внутренней поверхности мантии, на существование которых указывает обнаруженная Р. Хайдом и С. Мейлиным (1970, 1971) корреляция между недипольным геомагнитным потенциалом $\Psi - \Psi_1$ и сдвинутыми по долготе гравитационными аномалиями). При этом важно знать, родственны ли эти волны внутренним гравитационным волнам или, наоборот, конвективным ячейкам, т. е. устойчива или неустойчива стратификация жидкого слоя.

Устойчивость может создаваться выделением тепла в верхней части жидкого слоя за счет гравитационной энергии при росте ядра (увеличении его радиуса r_2, см. § 54 ниже) или за счет различия в скоростях прецессии мантии и ядра, пропорциональных их динамическим эллиптичностям $\varepsilon = (C - A)/C$, где C и A — их главные моменты инерции (фактически $\varepsilon_c \approx (3/4)\varepsilon_m$; прецессионную гипотезу анализировали В. Малкус, 1963, 1968 и Д. Лопер, 1975). Предположения С. Хиггинса и Дж. Кеннеди (1971, 1973) об устойчивости вследствие близости температуры в ядре к доадиабатически стратифицированной точке плавления вряд ли убедительны; представляется более вероятным, что жидкий слой перегрет. Неустойчивость может создаваться выделением тепла снизу при росте внутреннего твердого ядра.

А. П. Мирабель, А. С. Монин и М. А. Чусов (1980) рассчитали модель геомагнитного динамо с генерацией тороидального поля за счет дифференциального вращения и полоидального поля за счет радиальной компоненты квазигеострофических движений (с горизонтальным масштабом L и малым числом Кибеля $\mathrm{Ki} = u_0/2\omega L$). Магнитогидродинамические поля брались в виде:

$$\mathbf{u} = u_0[\mathbf{k} \times \nabla(\psi + \mathrm{Ki}\,\psi_1) + \mathrm{Ki}\,\nabla\sigma + \delta\,\mathrm{Ki}\,\omega\mathbf{k}];$$

$$\mathbf{H} \approx H_0(\mathbf{k} \times \nabla\chi + \nabla\gamma + \delta H_1\mathbf{k}); \quad p = p_0\left(1 + \frac{g_0\rho_0\mathscr{D}}{p_0}\,\mathrm{Fr}\,\mathrm{Ki}\,p_1\right);$$

(53.18)

$$\rho = \rho_0\left(1 + \frac{r_1}{\mathscr{D}r}\,\mathrm{Fr}\,\mathrm{Ki}\,\rho_1\right); \quad T = T_0\left(1 + \frac{r_1}{\alpha T_0 \mathscr{D}r}\,\mathrm{Fr}\,\mathrm{Ki}\,T_1\right),$$

где r_1 и $\mathscr{D}$ — внешний радиус и толщина жидкого слоя; r и ∇ — безразмерные радиальная координата и оператор горизонтального градиента, измеренные масштабом $\mathscr{D}$; $\mathbf{k}$ — единичный вектор вертикали; $\delta = \mathscr{D}/L$; $\mathrm{Fr} = 4\omega^2L^2/g_0\mathscr{D}$ — вращательное число Фруда; α — коэффициент теплового расширения.

Десять неизвестных функций ψ, ψ_1, σ, w, χ, γ, H_1, p_1, ρ_1, T_1 связаны уравнениями движения (с силой Лоренца), неразрывности, индукции, бездивергентности, состояния и притока тепла. Из них в квазигеострофическом приближении выводятся уравнения для потенциального вихря, вихревой и радиальной компоненты магнитного поля, соленоидальности ($\partial H_1/\partial r+\Delta\gamma=0$) и притока тепла, содержащие только ψ, w, χ, γ и H_1. Приведем лишь уравнение притока тепла

$$\alpha T_0 w=\varepsilon\left\{-\mu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\mathrm{Pe}^{-1}\left[\Delta\left(\mu\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\delta^{-2}\mu\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right]+Q\right\},\tag{53.19}$$

где $\mu=\cos\theta$ (причем $\varepsilon=L^2/L_R^2$; $L_\mathrm{R}=\mathscr{D}N/2\omega$ — радиус деформации Россби), Pe — число Пекле, Q — приток тепла в единицах $2\mathrm{Ki}^2\,\mathrm{Fr}\,\alpha T_0\omega r^{-1}$. Величины $\partial\psi/\partial r$, w, $\partial\chi/\partial r$, H_1 считались обращающимися в ноль на границах жидкого слоя. Жидкий слой разбивался на четыре подслоя с границами сверху вниз 0, 1, 2, 3, 4, и отделялись шесть уравнений относительно $\psi=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_3)$, $\xi=\frac{1}{2}(\psi_3-\psi_1)$, $\chi=\frac{1}{2}(\chi_1+\chi_3)$; $\eta=\frac{1}{2}(\chi_3-\chi_1)$; $\gamma=\gamma_3=-\gamma_1$ и $w=w_2$ (последняя величина исключается при помощи (53.19). Эти неизвестные, а также Q разлагались в ряды по сферическим гармоникам, причем для Q брались гармоники P_0, P_1, P_2, $P_1^1\cos\lambda$, $P_1^1\sin\lambda$; для ψ и ξ — гармоники P_1, P_2, а для χ, η, γ — гармоники P_1, $P_1^1\cos\lambda$, $P_1^1\sin\lambda$ — итого 13 неизвестных. Положив в начальный момент времени $\psi=\eta=\xi_1=0$, удалось отделить минимально возможную семикомпонентную систему. Далее пренебрегалось выбирались $L^2=L_\mathrm{R}^2$ и $H_0^2=4\pi\rho_0u_0^2$ и вводилась нормировка:

$$y=\frac{24}{5Q_1}\xi_2;\quad z_1=\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{Ki}^{1/2}\chi_1;\quad z_2=\frac{\tau^{-2}}{6\sqrt{2}}Q_1\mathrm{Ki}^{1/2}\gamma_1;$$

$$(x_1,\,x_2)=\frac{1}{3}\mathrm{Ki}^{1/2}(\chi_{11}^1\mp\chi_{21}^1);\quad (x_{11},\,x_{22})=\frac{\tau^{-2}}{24}Q_1\mathrm{Ki}^{1/2}(\gamma_{11}^1\mp\gamma_{21}^1);\tag{53.20}$$

где $\tau=r_1/\mathscr{D}-\frac{1}{2}\approx 1{,}235$. В этих переменных семикомпонентная система имела вид:

$$\dot y=3-AC;\quad (\dot z_1,\,\dot x_1,\,\dot x_2)+\mu_1(z_1,\,x_1,\,x_2)=y(-z_2,\,x_{11},\,x_{22});$$
$$(\dot z_2,\,\dot x_{11},\,\dot x_{22})+\mu_2(z_2,\,x_{11},\,x_{22}-B\mu_2^{-1}z_1)=(-2Bx_1,\,Cx_1,\,-Cx_2);$$
$$A=\frac{128}{5}\tau^2Q_1^{-2}\mathrm{Ki}^{-1};\quad B=\frac{1}{4\sqrt{2}}\tau^{-2}Q_1\mathrm{Ki}\,w_0;$$
$$C=x_1x_{11}+x_2x_{22}-z_1z_2+2/A;\quad w_0=w_1^1=w_1^{11};\tag{53.21}$$
$$\mu_1=2\tau^{-2}\mathrm{Re}_m^{-1};\quad \mu_2=\mu_1+8\delta^{-2}\mathrm{Re}_m^{-1}.$$

Эта система имеет два стационарных решения с одинаковым $y=\mu_1\mu_2 A/3$, отличающимся по знаку значениями z_1 и пропорциональными z_1 остальными переменными. Она интегрировалась численно при $\mathrm{Ki}=10^{-4}$ и 10^{-6}, $\mathrm{Re}_m=10^2$ и 10^3, $Q_1=1$ и 2 соответственно, $E=(15Q_1/16w_0)^2=0{,}5$, и начальных условиях, отвечающих одному из стационарных состояний. После длительного периода накопления малых ошибок система переходила в колебательный режим с обращениями полярности, при $\mathrm{Ki}=10^{-4}$ — почти регулярными с длиной цикла порядка 10^4 лет, а при $\mathrm{Ki}=10^{-6}$ — нерегулярными с типичной длиной цикла порядка 10^6 лет и неосесимметричным полоидальным полем (см. рис. 53.4).

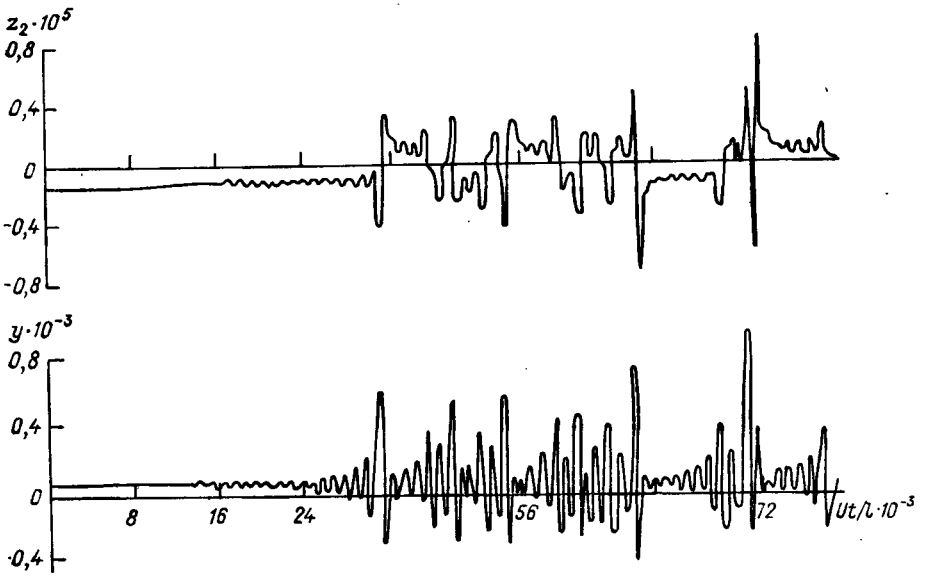


Рис. 53.4. Полоидальное поле $z_2(t)$ и дифференциальное вращение $y(t)$ в семикомпонентной модели геомагнитного поля при $\mathrm{Ki}=10^{-6}$.

§ 54. Эволюция недр планет

Первоосновой эволюции каждой планеты является, конечно, эволюция ее внутренней структуры, т. е. распределения по глубинам химического состава вещества, его фазового состояния (газообразное, жидкое или твердое, в последнем случае — вид кристаллических решеток) и физических характеристик — давления, плотности, температуры, упругости, вязкости, электропроводности и т. д. Рассмотрим эти распределения сначала на примере Земли, затем распространим результаты (с необходимыми модификациями) на другие планеты земной группы, а потом остановимся

вкратце и на эволюции больших планет.

При расчетах внутренней структуры планет исходят, прежде всего, из представления о хотя бы приближенном *гидростатическом равновесии* их недр, т. е. при упрощении сферической симметрии из уравнений

$$\frac{dp(r)}{dr} = -g(r)\rho(r); \quad g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}; \quad m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr, \tag{54.1}$$

которые связывают распределения давления $p(r)$ и плотности $\rho(r)$ ($g(r)$ — распределение ускорения свободного падения). Но уравнение состояния вещества, т. е. зависимость ρ от p, включает еще хотя бы один термодинамический параметр. В качестве такового можно избирать температуру T, допуская, как это довольно часто представляется возможным, что в недрах хотя бы послойно происходит конвективное перемешивание и распределение $T(r)$ является адиабатическим (а адиабаты рассчитываются методами теоретической физики).

Рассчитанная модель внутренней структуры должна обеспечивать правильные значения измеренных астрономическими методами радиуса планеты R, ее массы M, момента инерции $I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho r^4 dr$ и доступных гравитационных моментов более высоких порядков (причем на этих уровнях точности может стать целесообразным перейти от сферически-симметричных к осесимметричным моделям).

В случае Земли гипотезы о $T(r)$ необходимы лишь для суждений о температуре самой по себе, а уравнения (54.1) вместо этого можно дополнить соотношением

$$\frac{dp}{d\rho} = c_P^2 - \frac{4}{3} c_S^2;$$

$$c_P = \left(\frac{K}{\rho} + \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}; \quad c_S = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}, \tag{54.2}$$

где $c_P(r)$ и $c_S(r)$ — распределения скоростей продольных и поперечных упругих волн, измеряемые сейсмическими методами (K и μ — модули сжатия и сдвига). Результаты таких измерений по К. Буллену (1966) приведены на рис. 54.1. Они показывают, что недра Земли слоисты, причем наиболее резко различаются мощная твердая верхняя оболочка — мантия $B - C - \mathscr{D}' - \mathscr{D}''$ и ядро $E - F - G$. На разделяющей их поверхности $\mathscr{D}'/E$ на глубине 2920 км скорость c_P резко уменьшается (приблизительно от 13,6 до 8,1 км/с), а c_S падает от 7,4 км/с до нуля (последнее

означает, что по меньшей мере верхний слой ядра E находится в жидком, т. е. расплавленном состоянии; об этом имеются и другие геофизические свидетельства).

Из рис. 54.1 видно, что глубже переходного слоя F (4980—5120 км) скорость c_P с небольшим скачком возрастает (приблизительно от 10,4 до 11,4 км/с). Данные об отражениях продольных волн от поверхности внутреннего ядра F'/G и о прохожде-

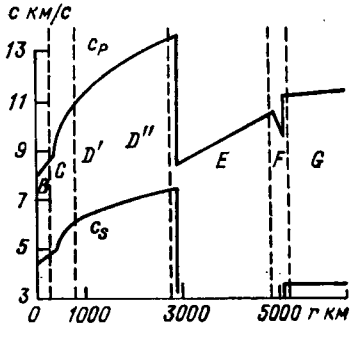


Рис. 54.1. Распределения $c_P(r)$ и $c_S(r)$ в Земле по К. Буллену.

B — верхняя мантия, C — средняя мантия или слой Голицына, D' — нижняя мантия, D'' — переходный слой, E — внешний слой ядра, F — переходный слой, G — внутреннее ядро.

нии сейсмических волн от Аляскинского землетрясения 1964 г. показали, что через внутреннее ядро G проходят и поперечные волны, хотя и с довольно маленькими скоростями $c_S \approx 3{,}6$ км/с. Это значит, что оно все же твердое (по-видимому, размягченное, близкое к плавлению).

По уравнениям (54.1), (54.2) некоторые авторы рассчитали модели $\rho(r)$, $p(r)$. Так, по модели «Земля-2» В. Н. Жаркова, В. П. Трубицына и Л. В. Самсоненко (1971), на глубине 2920 км при давлении $p_0 = 1{,}386$ Мбар плотность совершает скачок $\rho_0^- - \rho_0^+ = 5{,}56 - 10{,}08$ г/см³, а в центре Земли $p_0 = 3{,}657$ Мбар и $\rho_c = 12{,}68$ г/см³.

Различие между мантией и ядром, по-видимому, прежде всего, химическое: грубо говоря, мантия состоит из силикатов, а ядро — из железа (которое при фиксированном давлении имеет бóльшую плотность, но меньшую температуру плавления, чем силикаты). Гипотеза о составе ядра из металлизированных силикатов (В. Н. Лодочников, 1939; У. Рамзей, 1949), по-видимому, не подтверждается опытами по металлизации веществ в *статических* p, T-условиях земного ядра и, несомненно, опытами по *ударному* сжатию веществ и теоретическими оценками (да и сомнительно, чтобы глубины металлизации у разных силикатов были одинаковыми).

Установлено, что земная кора состоит из легкоплавких алюмосиликатов. В континентальной коре (массой $2{,}25 \cdot 10^{22}$ кг) имеется в среднем 58 % SiO_2; 15 % Al_2O_3; 8 % $FeO + Fe_2O_3$; 6 % CaO; 4 % MgO; 4 % Na_2O; 2—2,5 % K_2O и т. д. В океанской

коре (массой $0{,}6 \cdot 10^{22}$ кг) в среднем под 0,5-км слоем рыхлых осадков имеется 1,7-км «второй слой» из так называемых толеитовых базальтов (наверху — подушечных, ниже — дайковых форм), содержащих 50,1 % SiO_2; 16,7 % Al_2O_3; 8,8 % $FeO + Fe_2O_3$; 11,6 % CaO; 7,8 % MgO; 2,8 % Na_2O; 0,19 % K_2O и т. д.; 5-км «третий слой» состоит, по-видимому, из глубинных форм (габброидов) приблизительно такого же состава.

По имеющимся образцам пород подкоровой верхней мантии из рифтовых зон срединно-океанских хребтов и из алмазоносных кимберлитовых трубок для нее составлена модель *лерцолита* — пяти частей тугоплавкового магнийсиликата перидотита (габсбургита) и одной части толеитового базальта, а всего 45,7 % SiO_2; 3,7 % Al_2O_3; 5,1 % $Fe_2O_3 + 3{,}6$ % FeO; 2,3 % CaO; 38,4 % MgO; 0,3 % Na_2O_3; 0,1 % K_2O и т. д. Признав, что вся мантия находится в состоянии конвективного перемешивания, на всю нее можно распространить лерцолитовую модель.

Гипотеза о составе ядра преимущественно из железа восходит к Э. Вихерту (1897). Согласно опытам по ударному сжатию веществ, в ядре должно быть не менее 80—90 % железа, причем чистое железо или его сплав с никелем имели бы слишком большие плотность и температуру плавления. Поэтому в ядре (хотя бы в слое E) должны быть небольшие добавки более легких веществ.

Учтя, что наиболее древние горные породы заметно обогащены железом, преимущественно в форме FeO, но обеднены легкими веществами Si, Al, Mg, Ca, C, S, O. Г. Сорохтин (1971) предположил, что основной легкой добавкой к железу во внешнем ядре служит наиболее распространенный в коре и мантии элемент кислород. По данным об ударном сжатии Fe и FeO он подобрал их соединение Fe_2O, имеющее плотность, подходящую для внешнего ядра, и, по-видимому, при соответствующих давлениях устойчивое, образующееся, в частности, при распаде фаялита $Fe_2SiO_4 \rightarrow Fe_2O + SiO_2 + O$.

При давлениях же около 3 Мбар у поверхности внутреннего ядра в железе возможен новый электронно-фазовый переход, приближающий его к свойствам никеля, с реакцией $Fe_2O \rightarrow 2Fe + O$. Тогда внутреннее ядро состоит из Fe или сплава Fe — Ni. Рост внутреннего ядра может создавать источник энергии для конвекции в жидком слое, порождающей геомагнитное поле. Но в этом параграфе, учитывая, что жидкий слой составляет около 30 %, а внутреннее ядро — только 1,2 % от массы всей Земли или 2,5% от массы всего ядра, мы будем последним пренебрегать и считать, что «ядерное» вещество имеет просто состав Fe_2O.

Просуммировав указанные выше составы земной коры, мантии и ядра с весами, равными относительным массам этих оболочек, для Земли в целом получаем следующий состав: 31,2 %

SiO_2; 2,6 % Al_2O_3; 23,6 % FeO; 13,1 % Fe; 1,6 % CaO; 26,2 % MgO; 0,2 % Na_2O; 0,1 % K_2O и т. д. Исходя из космогонических соображений, первичную Землю, по-видимому, следует считать однородной, так что таким же был состав пород на ее поверхности — они радикально отличались от современных.

Главным процессом эволюции недр планет (по крайней мере, планет земной группы) является гравитационная дифференциация веществ различного веса, при которой более тяжелые (т. е. имеющие на той же глубине бо́льшую плотность) вещества опускаются вниз, а более легкие поднимаются наверх. В результате планета должна расслоиться на оболочки так, чтобы более глубокие оболочки состояли из более тяжелых веществ.

Простейшей является двухфазная модель, в которой планета состоит из двух веществ — тяжелого «ядерного» со средней концентрацией c_0 и легкого «мантийного» со средней концентрацией $c_1 = 1 - c_0$. Эволюция недр планеты здесь заключается в выделении и постепенном росте ядра. Стадия эволюции характеризуется долей x ядерного вещества, уже отдифференцировавшегося и перешедшего в ядро, которое, следовательно, на этой стадии имеет массу $c_0 x M$, где M — масса планеты. Мантия на этой стадии имеет массу $(1 - c_0 x)M$ и содержит всю массу $(1 - c_0)M$ мантийного вещества и массу $c_0(1 - x)M$ еще оставшегося в ней ядерного вещества, так что их средние концентрации в мантии равны $(1 - c_0)(1 - c_0 x)^{-1}$ и $c_0(1 - x)(1 - c_0 x)^{-1}$.

Так, например, в лерцолите современной мантии Земли имеется 6,5 % Fe и, значит, $c_0(1 - x)(1 - c_0 x)^{-1} = 7{,}52$ % ядерного вещества Fe_2O. Относительная масса современного земного ядра равна $c_0 x = 32{,}18$ %. Отсюда получается концентрация ядерного вещества в Земле в целом $c_0 = 37{,}3$ % и доля этого вещества, сейчас уже перешедшая в ядро, $x = 86{,}3$ %. Таким образом, процесс гравитационной дифференциации ядерного вещества в Земле осуществился уже на 86,3 %.

Можно приближенно рассчитать ряд деталей этого процесса. Будем обозначать $c(A)$ *мантийную* концентрацию вещества A и $c_0(A)$ — его начальную концентрацию (в первичной Земле). Будем считать, что ядерное вещество Fe_2O может образовываться в мантии из свободного железа Fe, его закиси FeO и окиси Fe_2O_3, так что с учетом их молекулярных масс имеем

$$c(Fe_2O) = \frac{128}{112} c(Fe) + \frac{128}{144} c(FeO) + \frac{128}{160} c(Fe_2O_3). \qquad (54.3)$$

В первичной Земле кислорода не хватало, и окись железа отсутствовала, т. е. было

$$c_0(Fe_2O) = \frac{128}{112} c_0(Fe) + \frac{128}{144} c_0(FeO). \qquad (54.4)$$

Выше были указаны значения $c_0(\mathrm{Fe}) \approx 13{,}1\ \%$ и $c_0(\mathrm{FeO}) \approx 23{,}6\ \%$, при которых $c_0 = c_0(\mathrm{Fe_2O}) \approx 36{,}7\ \%$ (приводившееся выше значение $c_0 \approx 37{,}3\ \%$ получалось с учетом дополнительных примесей во внутреннем ядре). На первом этапе, пока в мантии еще имелось свободное железо, $\mathrm{Fe_2O}$ образовывалось путем восстановления FeO по реакции $\mathrm{FeO + Fe \to Fe_2O}$ (при разложении $\mathrm{2FeO \to Fe_2O + O}$ кислород, скорее всего, шел на окисление Fe до $\mathrm{Fe_2O}$, что в сумме давало предыдущую реакцию; разложение $\mathrm{4FeO \to Fe_2O + Fe_2O_3}$ в присутствии свободного Fe гораздо менее вероятно, и мы им пренебрежем). Бюджеты мантийных веществ в этой реакции имеют следующий вид:

$$c_0 - c(\mathrm{Fe_2O})(1 - c_0 x) = \frac{128}{72}[c_0(\mathrm{FeO}) - c(\mathrm{FeO})(1 - c_0 x)] =$$

$$= \frac{128}{56}[c_0(\mathrm{Fe}) - c(\mathrm{Fe})(1 - c_0 x)]. \qquad (54.5)$$

Отсюда получаем

$$c(\mathrm{Fe}) = (1 - c_0 x)^{-1}\left[c_0(\mathrm{Fe}) - \frac{56}{128} c_0 x\right];$$

$$c(\mathrm{FeO}) = (1 - c_0 x)^{-1}\left[c_0(\mathrm{FeO}) - \frac{72}{128} c_0 x\right]. \qquad (54.6)$$

По первой из этих формул $c(\mathrm{Fe})$ обращается в ноль, т. е. свободное железо исчезает из мантии, при $x = x_1 = (128/56) \times c_0(\mathrm{Fe})/c_0 \approx 0{,}816$ (по приведенной ниже хронологической шкале — около 600 млн. лет назад, т. е. в начале фанерозоя). Концентрации при $x = x_1$ будем обозначать индексом 1, так что $c_1 = c_1(\mathrm{Fe_2O}) \approx 9{,}8\ \%$ и $c_1(\mathrm{FeO}) \approx 11\ \%$. На втором этапе при $x > x_1$ ядерное вещество образуется по реакции $\mathrm{4FeO \to Fe_2O + Fe_2O_3}$ (к которой приводят и реакции $\mathrm{2FeO \to Fe_2O + O}$ и $\mathrm{Fe_2O_3 \to Fe_2O + O_2}$, так как кислород, скорее всего, идет на окисление FeO до $\mathrm{Fe_2O_3}$). При этом получаются следующие бюджеты масс:

$$c_1(1 - c_0 x_1) - c(\mathrm{Fe_2O})(1 - c_0 x) = \frac{128}{160} c(\mathrm{Fe_2O_3})(1 - c_0 x) =$$

$$= \frac{128}{288}[c_1(\mathrm{FeO})(1 - c_0 x_1) - c(\mathrm{FeO})(1 - c_0 x)]. \qquad (54.7)$$

Отсюда получаем

$$c(\mathrm{FeO}) = (1 - c_0 x)^{-1}\left[c_1(\mathrm{FeO})(1 - c_0 x_1) - \frac{288}{128} c_0 (x - x_1)\right];$$

$$c(\mathrm{Fe_2O_3}) = \frac{160}{128} c_0 (x - x_1)(1 - c_0 x)^{-1}. \qquad (54.8)$$

По первой из этих формул $c(\mathrm{FeO})$ обратится в ноль, т. е. закисное железо исчезнет из мантии, при $x=x_2=(128/288)\times\times c_1(\mathrm{FeO})\,(1-c_0x_1)/c_0\approx 0{,}908$ (через 1000 млн. лет в будущем). Концентрации при $x=x_2$ будем обозначать индексом 2, так что $c_1=c_2(\mathrm{Fe_2O})\approx 5\ \%$ и $c_2(\mathrm{Fe_2O_3})\approx 6{,}4\ \%$. На третьем этапе при $x>x_2$ ядерное вещество образуется по реакции $\mathrm{Fe_2O_3}\to\mathrm{Fe_2O}+\mathrm{O_2}$ с бюджетом масс

$$c_2(1-c_0x_2)-c(\mathrm{Fe_2O})(1-c_0x)=$$
$$=\frac{128}{160}\left[c_2(\mathrm{Fe_2O_3})(1-c_0x_2)-c(\mathrm{Fe_2O_3})(1-c_0x)\right], \qquad (54.9)$$

откуда получаем

$$c(\mathrm{Fe_2O_3})=(1-c_0x)^{-1}\left[c_2(\mathrm{Fe_2O_3})(1-c_0x_2)-\frac{160}{128}c_0(x-x_2)\right]. \qquad (54.10)$$

Из (54.3) следует, что это выражение должно совпадать с $(160/128)c(\mathrm{Fe_2O})$, где $c(\mathrm{Fe_2O})=c_0(1-x)\,(1-c_0x)^{-1}$. Учитывая вторую формулу (54.8), получаем $2x_2=1+x_1$.

Мантийные концентрации малоподвижных веществ, не уходящих из мантии ни в ядро, ни в верхние оболочки Земли или столь распространенных в мантии, что их относительные потери остаются малыми, как SiO_2, MgO и MnO, возрастают со временем по закону

$$c(A)=c_0(A)(1-c_0x)^{-1}. \qquad (54.11)$$

В частности, как указывалось выше, концентрация кремнезема SiO_2 возрастала от 31,2 % в первичной Земле до 45,7 % в современном мантийном лерцолите (что, конечно, привело к качественным изменениям мантийных пород). Мантийные концентрации веществ, уходящих из мантии в верхние оболочки, должны убывать со временем быстрее, чем по закону (54.11). Для их расчета удобно характеризовать стадию эволюции планеты вместо x долей $y=nM_m/n_1M_{m1}$ завершившегося конвективного массообмена в мантии, где $M_m=(1-c_0x)M$ — масса мантии, n — ее доля, уже прошедшая дифференциацию, а индекс 1 соответствует значению $x=1$ (О. Г. Сорохтин, 1972); можно считать, что величине y пропорциональна масса образовавшейся *континентальной* земной коры. Безразмерную скорость конвективного массообмена dy/dt будем называть *тектонической активностью* планеты. Можно принять, что скорость конвективного массообмена $d(nM_m)/dt$ пропорциональна скорости роста массы ядра и обратно пропорциональна массе мантии, т. е. равна $(M/M_m)\times\times d(c_0xM)/dt$. Отсюда при условиях $y=0$ $(x=x_0)$ и $y=1$ $(x=1)$ получается

$$y=\left(\ln\frac{1-c_0x_0}{1-c_0}\right)^{-1}\ln\frac{1-c_0x_0}{1-c_0x}. \qquad (54.12)$$

При $x_0 = 0$ современному значению $x = 0{,}863$ отвечает $y = 0{,}833$. Теперь, записав скорость убывания мантийной массы подвижного вещества A в виде $\dot{M}(A) = -\varkappa(A) M(A) \dot{y}$, где $\varkappa(A)$ — его *подвижность*, вместо (54.11) получим

$$c(A) = c_0(A) \frac{1 - c_0 x_0}{1 - c_0 x} e^{-\varkappa(A) y}. \qquad (54.13)$$

Рассчитанные А. С. Мониным и О. Г. Сорохтиным изменения со временем мантийных концентраций ряда веществ показаны на

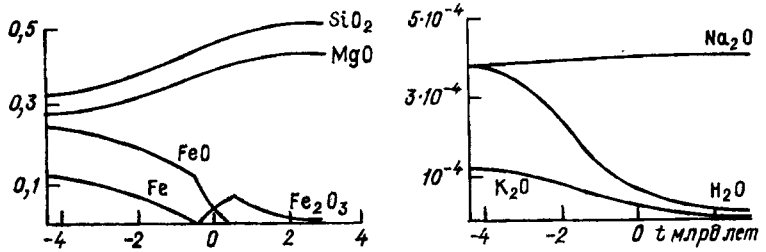


Рис. 54.2. Изменения со временем мантийных концентраций ряда веществ.

рис. 54.2 (в приведенной ниже хронологической шкале). В качестве важного примера рассчитаем содержание в Земле долгоживущих радиоактивных изотопов ^{40}K, ^{238}U, ^{235}U и ^{232}Th, учитывая, что они *литофильны*, т. е. имеют сродство с силикатами, так что в ядре их нет. В настоящее время ^{40}K составляет 0,0119 % от природного калия, причем 88 % ^{40}K путем β-распада превращаются в ^{40}Ca с постоянной распада $\lambda_\beta \approx 0{,}472$ (млрд лет)$^{-1}$, а остальные 12 % ^{40}K путем K-захвата превращаются в ^{40}Ar с постоянной $\lambda_K = 0{,}0585$ (млрд лет)$^{-1}$, и ^{40}Ar составляет 99,6 % природного Ar. У остальных трех изотопов постоянные распада равны $\lambda_{238} = 0{,}153\,69$, $\lambda_{235} = 0{,}972\,16$ и $\lambda_{232} = 0{,}048\,813$ (млрд лет)$^{-1}$.

Сейчас в атмосфере имеется $6{,}526 \cdot 10^{16}$ кг и в гидросфере $0{,}084 \cdot 10^{16}$ кг ^{40}Ar. По А. Б. Ронову и А. А. Ярошевскому (1967), в континентальной коре (массой $2{,}25 \cdot 10^{22}$ кг) имеется 2 % K, причем $K/U = 1{,}3 \cdot 10^4$, $K/Th = 3{,}3 \cdot 10^3$ и $^{238}U/^{235}U = 137{,}7$. Это дает в континентальной коре $5{,}49 \cdot 10^{16}$ кг ^{40}K (плюс $0{,}0066 \cdot 10^{16}$ кг в морской воде), $3{,}46 \cdot 10^{16}$ кг U и $1{,}36 \cdot 10^{17}$ кг Th. Используем уравнение эволюции ^{40}K в континентальной коре и дегазации ^{40}Ar из мантии и коры:

$$^{40}K_{cr} = {}^{40}K_0 e^{-\lambda_\beta t - \lambda_k t}\left(1 - e^{-\varkappa y}\right);$$

$$^{40}Ar_{atm} = \frac{{}^{40}K_0 \lambda_k}{\lambda_k + \lambda_\beta}\left(1 - e^{-\lambda_\beta t - \lambda_k t}\right)\left(1 - e^{-\varkappa y}\right)\left(1 + e^{-\varkappa y} - e^{-\varkappa_1 y}\right), \qquad (54.14)$$

где $\varkappa_1 \approx 0{,}976$ — подвижность дегазирующегося из коры Ar при превращении ее коренных пород в осадочные, находимая из условия $dm_{cr} = -k_1 m_{cr}\, dy$ при современном значении $\dot{y} \approx \approx 0{,}25$ (млрд лет)$^{-1}$. При $t = 4{,}65$ млрд лет и $y = 0{,}833$ из (54.14) получается $\varkappa(\mathrm{K}) = 0{,}8$, начальное количество ^{40}K в Земле $^{40}\mathrm{K}_0 = 1{,}315 \cdot 10^{18}$ кг и современное количество $1{,}131 \cdot 10^{17}$ кг.

По изотопным отношениям в лунных и в современных базальтах О. Г. Сорохтин нашел значения $\varkappa(\mathrm{U}) = 2{,}17$ и $\varkappa(\mathrm{Th}) = 2{,}85$. При их использовании получились современные количества в Земле $^{238}\mathrm{U} = 4{,}11 \cdot 10^{16}$ кг, $^{235}\mathrm{U} = 3 \cdot 10^{14}$ кг и $^{232}\mathrm{Th} = 1{,}5 \cdot 10^{17}$ кг и их начальные количества $^{238}\mathrm{U}_0 = 8{,}4 \cdot 10^{16}$ кг, $^{235}\mathrm{U}_0 = 2{,}76 \cdot 10^{16}$ кг и $^{232}\mathrm{Th}_0 = 1{,}88 \cdot 10^{17}$ кг. При скоростях тепловыделения $0{,}94 \times \times 10^{-4}$ Вт/кг у ^{238}U, $5{,}7 \cdot 10^{-4}$ Вт/кг у ^{235}U, $0{,}26 \cdot 10^{-4}$ Вт/кг у ^{232}Th и $0{,}29 \cdot 10^{-4}$ Вт/кг у ^{40}K сегодняшнее радиогенное тепловыделение в Земле получается равным $1{,}13 \cdot 10^{13}$ Вт, а начальное (не учитывая короткоживущих изотопов) — $6{,}56 \cdot 10^{13}$ Вт, т. е. вшестеро больше, чем теперь. При удельной теплоемкости вещества $1{,}3 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) оно приводило к медленному прогреву Земли — порядка 0,3 °С/млн. лет. Интегрирование по времени показывает, что всего за время существования Земли долгоживущие радиоактивные изотопы выделили в ней $0{,}41 \cdot 10^{31}$ Дж тепла.

Как второй важный пример, изложим расчет роста гидросферы на Земле по А. С. Монину и О. Г. Сорохтину (1982), согласно которому на первом этапе, в раннем катархее 4600—3800 млн. лет назад, свободной воды на поверхности Земли было еще мало. Масса m_w воды в океанской коре росла соответственно убыванию массы M_w воды в мантии, происходившему со скоростью $\dot{M}_w = -\varkappa_w M_w \dot{y}$. Отсюда

$$m_w = M_{w0}\left(1 - e^{-\varkappa y}\right) = 23{,}6\left(1 - e^{-4{,}05y}\right), \qquad (54.15)$$

где M_{w0} — полная масса воды в Земле (числовые значения будут пояснены ниже). На втором этапе, в позднем катархее и архее 3800—2600 млн. лет назад, океаны уже появились, но уровень воды еще не достигал гребней срединно-океанских хребтов, и насыщались водой только первый (осадочный) и второй (базальтовый) слой океанской коры, а третий слой еще оставался безводным. Примем, что доля s континентальной коры от площади поверхности Земли росла по закону $s = s_2 y / y_2$, где индексом 2 обозначены значения в момент времени 2600 млн. лет назад. Тогда на этам этапе

$$m_w = \frac{m_{w2}}{1 - s_2}\left(1 - s_2 \frac{y}{y_2}\right) = 1{,}35 - 0{,}54y. \qquad (54.16)$$

На третьем этапе, в первой половине раннего протерозоя 2600—2200 млн. лет назад, происходило постепенное насыщение водой уже и третьего слоя океанской коры, и вновь действовал закон (54.15). На четвертом этапе, во все последующее время,

гидросфера опять росла по закону, аналогичному (54.16), но с другими параметрами:

$$m_w = \frac{m_{w1}}{1 - s_1}\left(1 - s_1 \frac{y}{y_1}\right) = 5 - 2y, \qquad (54.17)$$

где индексом 1 обозначены значения в настоящий момент времени. Всюду, измеряя m_w в единицах 10^{20} кг, здесь принято

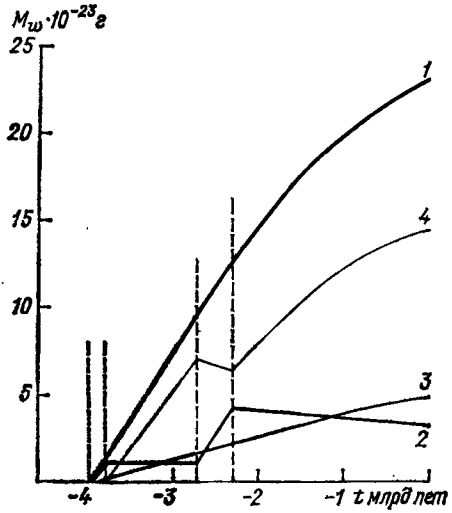


Рис. 54.3. Изменения со временем масс воды, дегазированной из мантии (*1*), в океанской коре (*2*), в континентальной коре (*3*) и в гидросфере (*4*).

$m_{w1} = 3{,}34$, а $s_1 = 1/3$ (и, как и выше, $y_1 = 0{,}833$). Ориентируясь на современную площадь океанской коры, содержание воды в ее первом и втором слоях 0,9 и значение y_2 (см. ниже), получены коэффициенты в (54.16). Зная m_{w1}, y_1, m_{w2} и y_2, определены коэффициенты в (54.15). Скорость выделения воды при образовании континентальной коры может быть рассчитана, как $\dot{z}_w = m_w \dot{y}/m_{w1}\dot{y}_1$. Интегрированием по времени получается масса воды в континентальной коре $m_{wc} = m_{wc1} z_w / z_{w1} \approx m_{wc1} y / y_1$, где по современным оценкам $m_{wc1} = 4{,}86$. Теперь, наконец, можно рассчитать и массу растущей гидросферы:

$$M_{\text{hydro}} = M_{w0}\left(1 - e^{-\varkappa y}\right) - m_w - m_{wc}. \qquad (54.18)$$

Результаты расчетов показаны на рис. 54.3.

Таким образом, двухфазная модель дала возможность очень простого расчета целого ряда важных характеристик эволюции Земли. Рассмотрим в рамках этой модели еще две задачи — расчет эволюции распределений $p(r)$ и $\rho(r)$ и установление связи между эволюционным параметром x и временем t. Для решения первой из них надо знать уравнения состояния $\rho_0(p, T)$ ядерного и $\rho_1(p, T)$ мантийного веществ. Имея в виду планеты зем-

ной группы, в которых плотности варьируют в сравнительно небольшом интервале 2—15 г/см³ и их температурные зависимости довольно слабы, А. С. Монин аппроксимировал уравнения состояния параболами

$$\rho_0 = \alpha_0 \rho_1(p); \quad \rho_1 = \left(\rho_s^2 + \frac{p}{2\pi G L}\right)^{1/2}, \tag{54.19}$$

причем параметры $\alpha_0 > 1$, ρ_s и L и два коэффициента для «склейки» решений уравнений (54.1) на поверхности ядра (т. е. для обеспечения там непрерывности p и g) должны подбираться по современным массе Земли $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, радиусу $R = 6371$ км, безразмерному моменту инерции $I_1 = I/MR^2 = 0{,}3308$, радиусу ядра $R_0 = 3451$ км и его относительной массе $c_0 x = 0{,}3218$. Уравнение состояния вещества мантии при этом имеет вид $\rho = \alpha_0 \beta \rho_1(p)$, где $\beta = (1 - c_0 x)\,[c_0(1-x) + \alpha_0(1-c_0)]^{-1}$, и уравнения (54.1) решаются аналитически: в ядре $\rho_0 = A\xi^{-1} \sin \xi$, а в мантии $\rho_1 = \xi^{-1}(B \sin \xi + C \cos \xi)$, где $\xi = \alpha_0 r/L$, причем коэффициенты A, B и C определяются из условий склейки и требования $\rho_1 = \rho_s$ при $r = R$. Расчет дал следующие значения параметров модели (54.19): $\alpha_0 = 1{,}68$; $\rho_s = 3{,}42 \cdot 10^3$ кг/м³; $L = 4017$ км.

Рассчитанная при этих параметрах структура Земли на различных стадиях x ее гравитационной дифференциации характеризуется следующими данными. Радиус Земли R за время от $x = 0$ до $x = 1$ почти не изменяется (по расчету убывает на 25 км — вероятно, это не выходит за пределы точности модели). Радиус ядра R_0 растет чуть быстрее, чем $x^{1/3}$ (достигая в пределе 3635 км), так что средняя плотность ядра слегка убывает (от $11{,}65 \cdot 10^3$ кг/м³ при $x = 0{,}2$ до $11{,}09 \cdot 10^3$ кг/м³ при $x = 1$). Плотность в центре Земли ρ_c растет от 11,34 до современного 13,86 и предельного значения $14{,}08 \cdot 10^3$ кг/м³, давление p_c — от 2,30 до 3,82 и 3,97 Мбар. По мере роста ядра количество находящегося над ним вещества (ядерного) уменьшается, так что уменьшаются давление p_0 на границе ядра (от 2,04 при $x = 0{,}2$ до 1,25 Мбар при $x = 1$) и соответствующие плотности ρ_0^+ ($7{,}43 \cdot 10^3$—$5{,}50 \cdot 10^3$ кг/м³) и ρ_0^- ($10{,}86 \cdot 10^3$—$9{,}25 \times 10^3$ кг/м³), но их разрыв $\rho_0^- - \rho_0^+$ растет. Увеличение концентрации массы к центру тяжести уменьшает и абсолютный момент инерции I (от $9{,}00 \cdot 10^{37}$ кг·м² при $x = 0$ до $7{,}88 \cdot 10^{37}$ кг·м² при $x = 1$), и относительный I_1 (от 0,3681 до 0,3250). Потенциальная энергия Земли в поле ньютоновского притяжения всех ее масс рассчитывается следующим образом:

$$U = -G \int_0^M \frac{m(r)\,dm(r)}{r} = -\int_0^M g(r)\, r\, dm(r) =$$

$$= -4\pi \int_0^R g(r)\rho(r) r^3\, dr = 4\pi \int_0^{p_c} r^3\, dp(r) = -12\pi \int_0^R p(r) r^2\, dr. \tag{54.20}$$

Ее уменьшение $E(x)=U(0)-U(x)$ есть мощный источник выделения энергии внутри Земли. По расчету он увеличивается от $0{,}32\cdot10^{31}$ при $x=0{,}2$ до $1{,}61\cdot10^{31}$ Дж в настоящее время и $1{,}86\times\times10^{31}$ Дж в пределе (подчеркнем, что суммарное энерговыделение за всю прошедшую историю Земли вчетверо превышает тепловыделение долгоживущих радиоактивных изотопов). Пространственная плотность притока этой энергии (с точностью до слагаемых вида трехмерной дивергенции) равна $e(r,\ t)=3[p(r,\ t)-p(r,\ 0)]$, так что скорость энерговыделения (превращения гравитационной энергии во внутреннюю, деление последней на тепловую и упругую мы здесь не рассматриваем) в единице объема равна $\dot{e}=3(\partial p/\partial x)\dot{x}$. Она положительна в ядре и максимальна в его центре, в мантии же, которая слегка расширяется, потенциальная энергия затрачивается. Подсчет скорости энерговыделения в сферических слоях единичной толщины $4\pi r^2\dot{e}$ показал, что основное энерговыделение происходит в ядре у его верхней границы.

Чтобы завершить оценки составляющих теплового бюджета Земли, осталось еще рассчитать только скорость $\varepsilon_т$ тепловыделения в Земле вследствие диссипации энергии приливов. При этом учтем лишь лунные приливы (поскольку момент приливообразующих сил Солнца много меньше лунного — в $(m_1r_s^3/m_sr_1^3)^2$ раз, где индекс 1 относится к Луне, а s — к Солнцу; сейчас это отношение приблизительно равно 5). Кроме того, этот расчет очень упрощается тем, что для него пригодно приближение круговой экваториальной орбиты Луны (Е. Л. Рускол, 1975). Тогда работа момента приливообразующих сил Луны за единицу времени $\varepsilon_т$ определяется формулой

$$\varepsilon_т=\frac{3}{2}\frac{k_2Gm_1^2R^5}{Qr_1^6}(\omega_0-\omega_1), \tag{54.21}$$

где R — радиус Земли, $m_1=7{,}35\cdot10^{22}$ кг — масса Луны, r_1 — расстояние до Луны, ω_0 и ω_1 — угловые скорости вращения Земли и орбитального движения Луны, $k_2\approx0{,}29$ — так называемое число Лява, а $Q\approx(2\delta)^{-1}$ — *добротность* Земли (δ — угол запаздывания приливов). Коэффициент при $\omega_0-\omega_1$ в правой части здесь равен dM_1/dt где $M_1=m_0m_1(m_0+m_1)^{-1}r_1^2\omega_1$ — момент импульса орбитального движения Луны. Величины ω_0, ω_1 и r_1 связаны друг с другом законом сохранения момента импульса и третьим законом Кеплера:

$$C\omega_0+M_1=\text{const};\quad C=I+\frac{2k_sR^5}{9G}\omega_0^2;$$

$$\omega^2r_1^3=\mu=\text{const}\approx4{,}036\cdot10^{14}\ \text{м}^3/\text{с}^2, \tag{54.22}$$

где $k_s\approx0{,}947$ — так называемое вековое число Лява. Отсюда и из упомянутого выражения для dM_1/dt в интервалах времени, в тече-

ние которых значения Q можно считать квазипостоянными, получается

$$r_1^{13/2}(t_2) - r_1^{13/2}(t_1) = \frac{39}{2}\,\frac{k_2 m_1 \mu^{1/2} R^5}{m_0 Q}\,(t_2 - t_1). \qquad (54.23)$$

А. С. Монин, О. Г. Сорохтин и С. А. Ушаков (1986) разделили историю Земли на пять таких интервалов: (1) ранний катархей 4,65—4,0 млрд. лет назад, пока Земля не разогрелась и океанов еще не было, так что было $Q \sim 1500$, как у современной литосферы при $r_1(4{,}6) = 2 \cdot 10^7$ м (у предела Роша, на котором приливные силы разрывают спутник), из (54.23) $r_1(4{,}0) = 1{,}576 \cdot 10^8$ м; (2) поздний катархей и ранний архей 4,0—3,2 млрд. лет назад, когда из-за выделения первичного ядра земные недра перегрелись и Q резко упало; (3) средний — поздний архей 3,2—2,6 млрд. лет назад, когда Земля несколько остыла, и Q увеличилось; (4) протерозой 2,6—0,6 млрд. лет назад, когда Q еще немного увеличилось; (5) фанерозой 0,6—0 млрд. лет назад, когда из-за изобилия мелководных морей Q заметно уменьшилось.

Для интервала (5) по суточной микрослоистости кораллов среднего девона с возрастом 0,38 млрд. лет установлено наличие 400 дней в году, т. е. $\omega_0(0{,}38) = 7{,}964 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, откуда по (54.22) получается $r_1(0{,}38) = 3{,}844 \cdot 10^8$ м, и по (54.23) $Q \approx 11{,}8$ (**сейчас** же геократическая эпоха и $Q \approx 13$). Отсюда же находится $r_1(0{,}6) = 3{,}569 \cdot 10^8$ м. Для интервала (4) по слоистости строматолитов с возрастом 1,8 млрд. лет установлено наличие 445 дней в году, т. е. $\omega_0(1{,}8) = 8{,}86 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, откуда по (54.22) $r_1(1{,}8) = 3{,}451 \cdot 10^8$ м, и с учетом $r_1(0{,}6)$ из (54.23) получается $Q \approx 75$ и $r_1(2{,}6) = 3{,}361 \cdot 10^8$ м. По $r_1(2{,}6)$ и $r_1(4)$ для интервала (3) + (4) из (54.23) получается в среднем $Q = 25{,}6$; разделив Q^{-1} по интервалам (3) и (4) пропорционально их длинам, получаем для (4) $Q = 17{,}8$ и для (3) $Q = 61$.

Рассчитанный с найденными значениями Q график $\varepsilon_т$ изображен на рис. 54.4 кривой *1*. Она показывает, что в начальный момент $\varepsilon_т \approx 1{,}3 \cdot 10^{12}$ МВт, что в 30 000 раз превышает современную скорость суммарных теплопотерь Земли, равную примерно $4{,}5 \times 10^7$ МВт. Но через 10 млн. лет $\varepsilon_т$ уменьшилось в 1800 раз, а ко времени 4,0 млрд. лет назад упало до $1{,}2 \cdot 10^7$ МВт. На этом рубеже вследствие падения Q из-за перегрева при выделении первичного ядра возник новый пик $\varepsilon_т \approx 1{,}04 \cdot 10^9$ МВт, но и здесь $\varepsilon_т$ быстро спадало. Современное значение $\varepsilon_т = 2{,}76 \cdot 10^6$ МВт весьма мало́. Кривыми *2* и *3* на рис. 54.4 показаны скорости радиогенного и гравитационного энерговыделения (и видно, что последнее является главным).

Расчет эволюции недр при помощи двухфазной модели можно распространить на другие планеты земной группы, приняв, что все они состоят из таких же мантийного и ядерного веществ (с такими же уравнениями состояния (54.19) и параметрами α_0, ρ_s

и L), но только в других количествах и, стало быть, в другой пропорции c_0. В этих целях для каждой планеты по заданным ее радиусу R и массе M надо определить по формулам двухфазной

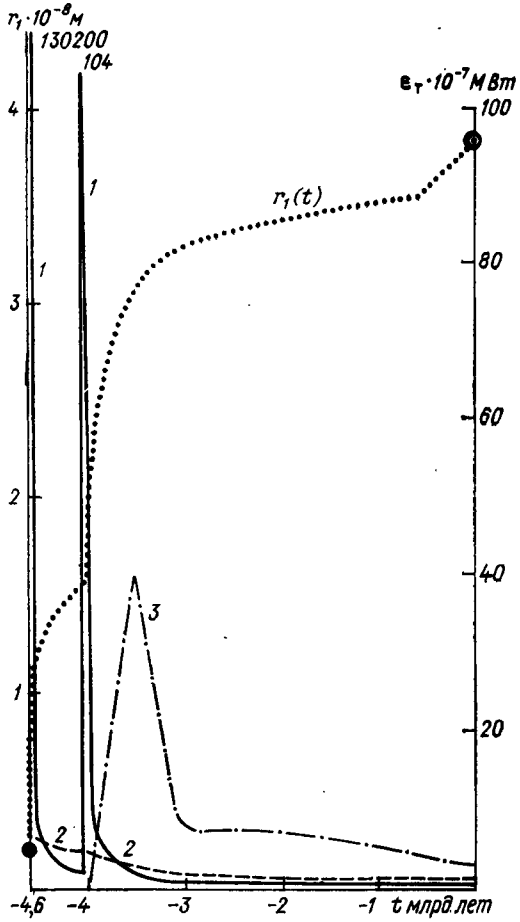


Рис. 54.4. Скорости энерговыделения e_T в Земле.

1 — приливная, *2* — радиогеинная, *3* — гравитациоиная; r_1 — расстояние до Луны.

модели концентрацию c_0 и современное значение x^* эволюционного параметра.

Это удается сделать для Меркурия, Венеры и Марса, но не для Луны, у которой средняя плотность $3{,}34 \cdot 10^3$ кг/м^3 меньше минимальной плотности в нашей модели $\rho_s = 3{,}42 \cdot 10^3$ кг/м^3 (вероятно, из-за наличия у Луны очень мощной коры, требующей введения в модель третьего, наиболее легкого «кóрового» вещества, скажем, с плотностью $\alpha_2 \rho_1(p)$, $\alpha_2 < 1$). Поэтому вместо Луны рассчитывалась эволюция гипотетической Квазилуны с массой Луны и концентрацией железа 13 %, полученной для Луны из оценки ее средней магнитной восприимчивости по данным о возмущении

ею магнитного шлейфа Земли, и находился ее радиус (он оказался на 68 км меньше, чем у Луны, а средняя плотность получилась равной $3{,}68 \cdot 10^3$ кг/м^3 — это все же позволяет по эволюции Квазилуны качественно судить о Луне). Результаты расчетов приведены в табл. 54.1 и на рис. 54.5 *а*.

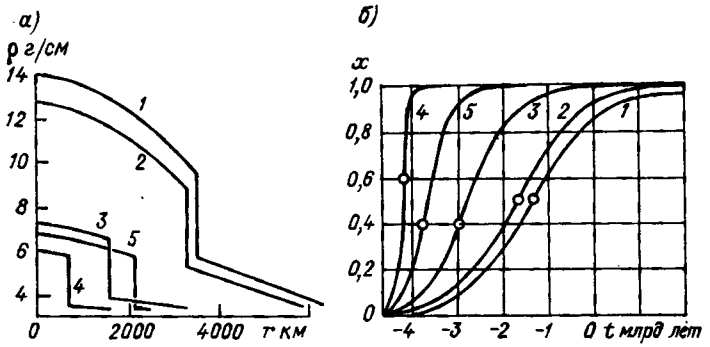


Рис. 54.5. Планеты земной группы.

а — современная структура $\rho(r)$; *б* — эволюция $x(t)$; *1* — Земля, *2* — Венера, *3* — Марс, *4* — Меркурий, *5* — Квазилуна.

В таблице приведены современные радиусы ядер R_0^*, начальные и предельные центральные плотности ρ_{c0}, ρ_{c1} в 10^3 кг/м^3 и давления p_{c0}, p_{c1} в мегабарах, современные безразмерные моменты инерции I_1^*, предельные значения гравитационной энер-

Таблица 54.1

Эволюция планет земной группы

Планета	R^* км	$M/M_\oplus$	c_0	x^*	R_0^* км	ρ_{c0}
Земля	6371	1	0,373	0,863	3451	11,34
Венера	6050	0,815	0,358	0,92	3342	10,37
Марс	3394	0,1077	0,183	1	1615	6,65
Меркурий	2439	0,0543	0,792	1	2144	6,60
Квазилуна	1738	0,0123	0,149	1	759	5,96

Планета	ρ_{c1}	p_{c0}	p_{c1}	I_1^*	E_1	k_0
Земля	14,08	2,30	3,97	0,3308	1,86	0,891
Венера	12,64	1,790	3,050	0,3337	1,252	0,994
Марс	6,99	0,267	0,377	0,3712	0,167	1,689
Меркурий	6,76	0,252	0,303	0,3639	0,007 48	5,748
Квазилуна	6,02	0,058	0,075	0,3778	0,000 228	3,283

гии E ($x=1$) в 10^{25} МДж. Отметим, что радиусы R всех планет монотонно убывают, но не более чем на 0,4 %. Концентрация c_0 тяжелого вещества убывает с удалением от Солнца; небольшое отступление Земли от этого правила частично компенсируется малым значением c_0 у Луны. Величина $E(x)$ резко убывает с уменьшением размеров планеты: у Венеры она лишь на четверть меньше, чем у Земли, у Марса — меньше в 100 раз, у Меркурия — в 200 раз, у Квазилуны — в 8000 раз. Радиогенное же тепло приблизительно пропорционально массе, так что его относительная роль у малых планет возрастает.

Теперь перейдем, наконец, к установлению хронологической шкалы $x(t)$. Для этой цели О. Г. Сорохтин (1971) предположил, что скорость роста массы ядра $c_0M\dot{x}$ пропорциональна площади его поверхности $4\pi R_0^2$ и концентрации ядерного вещества в мантии $c=c_0(1-x)(1-c_0x)^{-1}$, точнее, ее разности $c-c_1^*$ с насыщающей концентрацией c_1^* ядерного вещества в мантийных твердых растворах на поверхности ядра:

$$c_0M\dot{x}=\mathscr{K}\cdot 4\pi R_0^2(c-c_1^*), \qquad (54.24)$$

где $\mathscr{K}$ — коэффициент пропорциональности. Он должен быть определен согласно принимаемому представлению о микромеханизмах разделения мантийного и ядерного веществ. Сначала было принято упрощенное представление, что это — поверхностная реакция, эквивалентная выплавлению, так что $\mathscr{K}$ может отличаться лишь числовым множителем от константы скорости этой реакции. Тогда в (54.24) оставалось подставить $R_0=\left(c_0Mx\Big/\frac{4}{3}\pi\rho_c\right)^{1/3}$, где ρ_c — средняя плотность ядра, которая, как упоминалось выше, слабо (можно считать, квазилинейно) убывает с ростом x, т. е. $\rho_c=\rho_\infty(1+\delta-\delta x)$, где $\delta\sim 10^{-2}$. Коэффициент $\mathscr{K}$, вообще говоря, может зависеть от температуры и давления на поверхности ядра. Значение c в (54.24), строго говоря, надо брать на поверхности ядра, а не в среднем по мантии — эту разницу может создавать переходный слой D''. Насыщающая концентрация ядерного вещества в мантийных твердых растворах определяется обычной термодинамической формулой

$$c^*=c_0^*\exp(-p\,\delta V/RT), \qquad (54.25)$$

где c_0^* — значение при $p=0$; δV — изменение мольного объема раствора при растворении одного моля ядерного вещества; R здесь — газовая постоянная. Величина c^* уменьшается с глубиной и на поверхности земного ядра принимает значение около 0,03 (см. ниже). Пренебрегая при вышеуказанном упрощенном представлении всеми малыми поправками, уравнение (54.24) можно

привести к виду $\dot{x}=k_0 x^{2/3}c$, где $k_0=4\pi R_0^2(1)\mathscr{K}/M$. Оно интегрируется в элементарных функциях, и по значению $x=0{,}863$ для современной Земли при $t=4{,}6$ млрд. лет находится универсальная постоянная $\mathscr{K}=33{,}4$ кг/(м$^2\cdot$год). После этого для каждой планеты находится определяющее скорость ее эволюции значение k_0. Эти значения в (млрд. лет)$^{-1}$ приведены в табл. 54.1. Эволюционные кривые $x(t)$ для разных планет изображены на рис. 54.5 *б*.

Чем больше у планеты значение k_0, тем она в фиксированный момент времени эволюционно старше. Поскольку $k_0\sim R_0/M$, скорость эволюции меньше у более массивных планет, а при фиксированной массе она тем меньше, чем меньше у планеты ядро, т. е. чем меньше в ней ядерного вещества. Рисунок 54.5 *б* показывает, что быстрее всего проэволюционировал наиболее богатый железом Меркурий (наибольшая скорость эволюции $\max\dot{x}$ была достигнута за $t_m=0{,}47$ млрд. лет, конец эволюции $x=0{,}99$ — около $t_\infty=0{,}7$ млрд. лет). Затем застыла маленькая Луна ($t_m=0{,}86$; $t_\infty=2{,}13$), лишь недавно — более массивный Марс ($t_m=1{,}65$; $t_\infty=4{,}15$), Венера еще эволюционирует ($x^*=0{,}92$; $t_m=2{,}94$; $t_\infty=5{,}93$), а Земля эволюционно еще моложе ($x^*=0{,}863$; $t_m=3{,}25$ — это время, 1,4 млрд. лет назад, соответствует так называемой Готской тектоно-магматической эпохе, разделившей ранний и средний рифей и считающейся началом так называемого *неогея*; $t_\infty=6{,}45$, так что по этой шкале Земля будет эволюционировать замедляющимся образом еще 1,8 млрд. лет).

Заметим, однако, что рассмотренная хронологическая шкала $x(t)$, полученная из (54.24) при упрощенном предположении $\mathscr{K}=\text{const}$, дает лишь качественно правдоподобную картину эволюции планет, но количественно нуждается в корректировке. Так, получающаяся для Земли в настоящий момент времени $t=t_1$ скорость эволюции $\dot{x}_1=\dot{x}(t_1)=0{,}15$ (млрд. лет)$^{-1}$ дает слишком большую скорость $(\varepsilon_G)_1=(\dot{x}_1/x_1)\mathrm{E}(x_1)\approx 9{,}3\cdot 10^7$ МВт (при $x_1=0{,}863$ и $\mathrm{E}=1{,}6\cdot 10^{25}$ МДж), втрое превышающую представляющееся наиболее правдоподобным термически-равновесное значение $\varepsilon_G=\varepsilon_F-\varepsilon_R-\varepsilon_\mathrm{T}=(4{,}5-1{,}13-0{,}276)\cdot 10^7$ МВт$=3{,}094\cdot 10^7$ МВт.

Чтобы «замедлить» сегодняшнюю эволюцию, надо «ускорить» раннюю, т. е. согласно А. С. Монину и О. Г. Сорохтину (1981) перейти от недостаточно интенсивной *поверхностной* реакции отделения ядерного вещества от мантийного с $\mathscr{K}=\text{const}$ к более интенсивной *объемной* реакции с $\mathscr{K}=\mathscr{K}_1 g_0$, где $g_0=GM_0/R_0^2$ — ускорение свободного падения на поверхности ядра, $M_0=c_0 xM$ — его масса, а R_0 — радиус. Такая объемная дифференциация окислов железа и силикатов должна происходить вследствие распада их твердых растворов при высоких давлениях и, скажем, глубже 2000 км (где наблюдается заметное снижение добротности мантии), диффузии окислов железа из зерен силикатов в межгранулярные пространства (при условии $c>c^*$), а затем фильтрации

расплавленного ядерного вещества вниз под действием тяжести. Уравнение (54.24) при $\mathscr{K}=\mathscr{K}_1 g_0$ и его решение принимают вид:

$$\dot{x}=\frac{x}{\tau}\left(c_0\frac{1-x}{1-c_0x}-c_1^*\right);\quad \tau=(4\pi\mathscr{K}_1 G)^{-1}; \tag{54.26}$$

$$\frac{t-t_0}{\tau}=\frac{1}{1-c_1^*}\left[\ln\frac{a-x}{a-x_0}-\frac{1}{ac_0}\ln\frac{x_0(a-x)}{x(a-x_0)}\right];$$

$$a=\frac{c_0-c_1^*}{c_0(1-c_1^*)} \tag{54.27}$$

(А. С. Монин, О. Г. Сорохтин, 1982). Для вычисления a учтем, что при нулевом давлении смесимость окислов железа с силикатами полная, так что в фаялите Fe_2SiO_4 имеем $c_0^*(Fe_2O)=0{,}63$. В лерцолите современной мантии, в надлежащем пересчете, $c(Fe_2O)=0{,}073$. Принимая на глубине 2000 км в мантии $c^*(Fe_2O)=0{,}073$ и беря там адиабатическую температуру 2450 К и давление $p=0{,}87-0{,}13=0{,}74$ Мбар (где 0,87 — фактическое давление, а 0,13 — давление первого фазового перехода в железе), из (54.25) находим $\delta V=0{,}59$ см³/моль. Считая, что отношение $\delta V/V$ с глубиной меняется мало, на подошве мантии ($p=1{,}35$ Мбар, $T=2650$ К) получаем $c_1^*(Fe_2O)=0{,}027$. По (54.4) $c_0=0{,}367$, и окончательно $a\approx 0{,}946$.

Функция $x(t)$ по (54.27) существенно отличается от решения при $\mathscr{K}=\text{const}$ наличием особенности при $x_0=x(t_0)\to 0$, возникшей из-за того, что в уравнение (54.26) введено ускорение свободного падения g_0, в центре Земли обращающееся в ноль. Поэтому гравитационная дифференциация не может начаться из этой точки, и для ее начала необходимо наличие зародыша ядра с относительной массой $x_0>0$, на поверхности которого $g_0>0$.

Ранний зародыш ядра мог образоваться путем расплавления центра Протоземли вследствие тепловыделения короткоживущих радиоактивных изотопов. Но более определенным представляется образование позднего зародыша ядра вследствие появления в одном из верхних слоев Земли расплава ядерного вещества и его стекания к центру Земли каплями или струйками. Наиболее подходящим слоем представляется тот, в котором в конце формирования Земли имелся максимум температуры (по космогоническим расчетам В. С. Сафронова, 1978, $T_{max}=2200$ К на глубине около 1500 км), а причиной появления расплава — постепенный прогрев Земли вследствие тепловыделения долгоживущих радиоактивных изотопов (тогда распределенных по недрам Земли приблизительно равномерно) и диссипации энергии приливов.

Вследствие выделения при этом гравитационной энергии образование позднего зародыша ядра происходило, вероятно, бурно и быстро. Расчеты структуры первичной однородной Земли по

(54.1) и (54.19) дают $p_c = 2{,}30$ Мбар, ниже второго электронно-фазового перехода в железе, так что зародыш ядра представлял собой расплав Fe_2O (с плотностью $11{,}34 \cdot 10^3$ кг/м^3 и адиабатической температурой 2900 К). Дальнейшая же эволюция недр Земли происходила уже спокойно, в соответствии с формулой (54.27).

Эта формула содержит два параметра, x_0 и τ. Второй из них можно определить из (54.26), задав современное (т. е. при $x =$

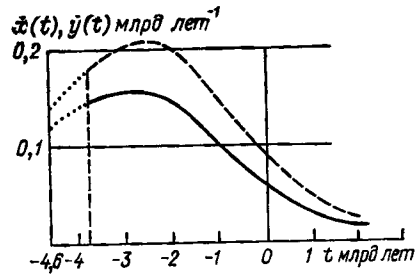


Рис. 54.6. Скорость эволюции Земли при объемной дифференциации ее недр.

Сплошная кривая — $\dot{x}(t)$, штриховая — $\dot{y}(t)$.

$= 0{,}863$) значение $\dot{x}_1 = (x\varepsilon_G/E)_1$, которое при указанном выше термически равновесном $(\varepsilon_G)_1 \approx 3{,}094 \cdot 10^7$ МВт и оценке О. Г. Сорохтина $1{,}23 \cdot 10^{25}$ МДж для тепловой части E_1 получается равным $\dot{x}_1 \approx 0{,}065$ (млрд. лет)$^{-1}$. При этом находим $\tau \approx 640$ млн. лет. Затем параметр x_0 можно определить из (54.27), задав возраст зародыша ядра $t_1 - t_0$. Положив $t_1 - t_0 = 3{,}8$ млрд. лет (возраст древнейших континентальных магматических и осадочных пород), находим $x_0 \approx 0{,}35$, т. е. при этих исходных данных зародыш ядра получился очень большим. Определяемая из (54.12) максимальная тектоническая активность $\max \dot{y}$, достигаемая при $x = a(2 - ac)^{-1}$, по (54.27) оказывается имеющей возраст $t_1 - t_m \approx 2{,}6$ млрд. лет (что соответствует так называемой Беломорской тектоно-магматической эпохе, разделившей архей и протерозой). Соответствующие кривые $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ изображены на рис. 54.6.

В заключение этого параграфа остановимся на эволюции больших планет. Современные представления об их внутренней структуре, изложенные на примере Юпитера в § 43, сводятся к тому, что они имеют газожидкие горячие адиабатические недра, находящиеся в состоянии конвекции. Ряд их характеристик приведен в табл. 54.2. Солнечная постоянная I дана в 10^{-3} от значения у Земли. Средние радиусы R и массы M (в долях земной) известны довольно точно. Средние плотности $\bar{\rho}$ красноречиво демонстрируют отличие от планет земной группы: большие планеты — газожидкие, J и S — водородно-гелиевые (у J отношение He/H, по-видимому, близко к солнечному, в верхних слоях S, возможно, оно несколько меньше солнечного), а U и N состоят, по-видимому, в основном из «льдов» — воды, метана, аммиака и др. Период собственного вращения τ нужен для объяснения сплюснутости фигур

Таблица 54.2

Структура больших планет

	$10^3 I/I_\oplus$	$M/M_\oplus$	R км	$\rho \cdot 10^{-3}$ кг/м³	τ ч, мин, с	T К	T_r К
Юпитер J	37	317,8	70000	1,314	9 50 30	130±4	109,4
Сатурн S	11	95,2	57820	0,703	10 14	95±5	76±4
Уран U	2,7	14,6	25800	1,25	17 12	58±2	57
Нептун N	1,1	17,2	24500	1,67	17 48	55,5±2	46

	Rm/R	Ms/M	Rs/R	ps Мбар	pc Мбар	10^{-3} Tc К	$\bar{\rho} \cdot 10^{-3}$ кг/м³	$10qi$ Вт/м³
Юпитер J	0,76	3—4%	0,15	45	78	24	16,5	8100±1500
Сатурн S	0,46	20—25%	0,27	10	48	22	13,5	2800±1400
Уран U		0,94	0,78	0,12	5,8	11	4,43	<180
Нептун N		0,97	0,85	0,07	7,4	12	4,85	285±80

этих планет. Наблюдаемые эффективные температуры поверхности T оказываются заметно больше, чем равновесные температуры T_r, вычисленные по солнечной постоянной и альбедо по формуле (43.5) — это указывает на наличие внутреннего потока тепла q_i.

Дальнейшие данные в табл. 54.2 получены в расчетах по некоторым из моделей В. Н. Жаркова и В. П. Трубицына (1980). Они включают относительный радиус R_m/R металлизации водорода и подбираемые по средней плотности планеты массу M_s/M и радиус R_s/R (а также давление p_s на границе) ядра, состоящего из «тяжелой компоненты» и «льдов» (ТКЛ). Указаны также давление p_c, температура T_c в 10^3 К и плотность ρ_c в центре планеты. Наконец, даны оценки внутреннего потока тепла q_i в 10^{-1} Вт/м³.

Эволюция больших планет заключается в их сжатии под действием их собственной гравитации. Наиболее драматической была протопланетная стадия. Так, например, по расчетам П. Боденхеймера, А. Гроссмана, У. Декампли, Дж. Марси и Дж. Поллака (1980), протопланета с массой Юпитера (74 % водорода и 24 % гелия) имела вначале радиус в 4530 раз больше современного значения R, свойственные околосолнечной туманности среднюю и центральную плотности 1,47 и $6{,}3 \cdot 10^{-8}$ кг/м³, температуры 45 и 51 К, светимость $L = 10^{-4{,}1}$ от солнечной $L_\odot$. За $4{,}5 \cdot 10^5$ лет она сжалась до радиуса в 168 раз больше современного с $\rho_c = 2 \cdot 10^{-5}$, $T_c = 2100$ К и $L = 10^{-6} L_\odot$, причем до $T_c = 1600$ К она была конвективной, после чего постепенно образовалось лучисто-равновесное ядро (35 % по массе).

Затем вследствие диссоциации молекулярного водорода произошел гравитационный коллапс, за 0,25 года образовавший гидростатическое ядро с $\rho_c = 0{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $T_c = 2 \cdot 10^4$ К и распространяющуюся наружу ударную волну аккреции внешнего вещества с радиусом $3R$ (на которой молекулярный водород нагревается и диссоциирует). Практически вся планета приходит в гидростатически-равновесное конвективное состояние за 10^7 лет, причем ее радиус достигает $1{,}3R$, $\rho_c = 2{,}73 \cdot 10^3$ кг/м^3, $T_c = 3{,}5 \cdot 10^4$ К и $L = 10^{-5{,}65} L_\odot$.

Дальнейшая эволюция (за 4,5 млрд. лет) — это квазигидростатическое сжатие и охлаждение, при котором излучение $4\pi R^2 \sigma (T^4 - T_r^4)$ происходит за счет уменьшения суммы гравитационной энергии $(-U)$ (определяемой формулой (54.20)) и внутренней энергии. По имеющимся оценкам, современное значение q_i у Юпитера обеспечивается сжатием $\dot{R} \approx 1$ мм/год.

§ 55. Мантийная конвекция

Конвекция — это движение, возникающее в среде с неустойчивой стратификацией плотности $\rho_0(r)$ в результате действия на объемы с флюктуациями плотности ρ' архимедовых сил $\rho' \mathbf{g}$: объемы, более легкие, чем окружающая среда ($\rho' < 0$), всплывают вверх, а более тяжелые ($\rho' > 0$) опускаются вниз (см. (11.1)—(11.6) и (17.3)—(17.5)).

Термическая конвекция (при которой $\rho' \sim (-T')$) образуется, вследствие нагрева снизу, во внешнем слое Солнца (толщиной около $^1/_3 R_\odot$), в недрах больших планет, атмосфере Венеры, иногда (а во внутритропической зоне всегда) в нижних слоях земной атмосферы, а также, вследствие охлаждения сверху, в некоторых районах Мирового океана.

Конвекция может возникать и в мантии Земли, которую в противоположность § 52 при больших временах релаксации (более 10^4 лет) следует считать не твердым, а *упруговязким* или даже *вязкопластическим* телом (испытывающим пластические деформации, когда напряжения превосходят *порог текучести*, причем скорость деформации пропорциональна избытку напряжения над этим порогом). В земной мантии уравнение состояния вещества можно записать в виде $\rho = \rho(p, T, c)$, где c — концентрация тяжелого ядерного вещества, и флюктуации плотности имеют вид

$$\rho'/\rho_0 \approx -\alpha T' + \beta c', \qquad (55.1)$$

где α и β — некоторые положительные коэффициенты. Если здесь учитываются только флюктуации температуры T', то конвекция трактуется, как термическая, если же учитывать только флюктуации концентрации c', то конвекцию можно назвать *концентрационной.*

Многие авторы, рассматривавшие только термическую конвекцию, ограничивали ее развитие лишь верхней мантией до глубины 650—700 км, где наблюдается возрастание скоростей сейсмических волн, связываемое с переходом кварца в более плотно упакованную кристаллическую решетку стишоверита. Это ограничение налагалось как из опасения, что поверхности фазовых переходов для конвекции непроницаемы, так и потому, что число Рэлея $\mathrm{Ra}=\rho g\alpha h^3\delta\Theta/k\eta$ в нижней мантии (при толщине слоя $h\sim$ ~ 2500 км, $\rho\sim 5\cdot 10^3$ кг/м^3, $\alpha\sim 10^{-5}$ К$^{-1}$, температуропроводности $k\sim 10^{-6}$ м^2/с и, главное, огромной вязкости $\eta\sim 10^{25}$ Па·с) может достичь нужного для термической конвекции критического значения порядка $2\cdot 10^3$ лишь при нереально больших перепадах *потенциальной* температуры $\delta\Theta\sim 2600$ К. В верхней же мантии эта трудность снимается тем, что вязкость оказывается на несколько порядков меньше. Но зато конвекция в тонком слое дает заниженные на порядок значения геотермического потока тепла и скоростей движения литосферных плит и вряд ли может развиваться в форме ячеек с глобальными горизонтальными размерами, свойственными основным литосферным плитам.

Имеются и более важные аргументы за то, что концентрационный фактор учитывать необходимо. Так, радиогенное тепловыделение достаточного источника для термической конвекции не дает. Действительно, радиоактивные изотопы литофильны и значительная их доля уже вынесена из недр в земную кору, где их тепловыделение (т. е. нагрев сверху) не способствует, а препятствует мантийной конвекции. В мантии же, по данным предыдущего параграфа, сейчас имеется только 52 %, или $5{,}8\cdot 10^{16}$ кг K^{40}; 16 %, или $6{,}8\cdot 10^{15}$ кг U^{238}; 16 %, или $4{,}9\cdot 10^{13}$ кг U^{235}, и 9,3 %, или $1{,}4\cdot 10^{16}$ кг Th^{232}, что создает радиогенное тепловыделение со скоростью $2{,}7\times$ $\times 10^6$ МВт — всего около 6 % современных теплопотерь Земли; еще меньше (втрое) выделяется в мантии тепла вследствие диссипации энергии приливов.

Значит, основным источником для термической конвекции должно служить тепловыделение при гравитационной дифференциации веществ. Оно, кстати, и происходит в основном непосредственно под мантией, в верхних слоях ядра, так что создаваемая им конвекция должна пронизывать всю мантию снизу доверху. Но при гравитационной дифференциации возникает и концентрационный фактор, так как объемы, теряющие часть тяжелого вещества, становятся легче и должны всплывать.

При не слишком сильно неустойчивой стратификации конвекционные движения имеют спокойный и плавный *ламинарный* характер и организуются по горизонтали в ролики или ячейки, иногда шестиугольные так называемые ячейки Бенара (см. (17.6) и (17.7)). При слабой неустойчивости образуются так называемые *закрытые* ячейки, в центрах которых движения восходящие, а по периферии нисходящие (их иногда образно называют кострами

Авеля), а при более сильной неустойчивости — *открытые* ячейки с нисходящими движениями в центрах и восходящими по периферии (костры Каина).

В сферическом слое, каковым является земная мантия, простейшей формой конвекции оказывается одна глобальная ячейка с противоположными полюсами подъема и опускания вещества. При этом мантийные течения переносят плавающие на астеносфере литосферные плиты в область полюса опускания. Если такая форма конвекции сохраняется достаточно долго, то в области опускания сгруживаются все континенты, т. е. образуется единый суперконтинент.

Направление $\mathbf{m}=\boldsymbol{\omega}/\omega$ оси вращения Земли вследствие сохранения момента импульса в масштабах времени конвективных циклов (порядка 10^2 млн. лет) должно оставаться неизменным (в пространстве неподвижных звезд). Земля же должна поворачиваться относительно $\mathbf{m}$ так, чтобы максимум приподнятых континентальных масс оказался на экваторе вращения (поскольку реология допускает образование экваториального вздутия, она, очевидно, должна позволять ему и перемещаться по телу Земли). Такой поворот тела Земли можно описать, как движение по этому телу полюса вращения.

Поэтому при одноячейковой конвекции центр суперконтинента (полюс конвекции) должен оказаться на экваторе вращения, т. е. на расстоянии около 90° от полюса вращения. Согласно палеогеографическим реконструкциям, такая обстановка имела место в период 300—220 млн. лет назад существования суперконтинента Пангеи (А. Вегенер, 1912); Южный полюс находился тогда на ее краю, у оконечностей Южной Америки, Южной Африки и Западной Антарктиды. Отметим еще, что одноячейковую структуру имеют поверхности Марса и Луны (А. С. Монин, 1982).

Следующей по сложности формой мантийной конвекции является двухячейковая с закрытыми ячейками — с двумя противоположными полюсами подъема и экватором опускания вещества (причем экватор конвекции может быть изогнут, как шов на склеенном из двух лоскутов теннисном мяче). При этом мантийные течения должны переносить литосферные плиты к экватору опускания и распределять по нему континенты, в результате чего с ним должен совпасть и экватор вращения. Если при переходе от одноячейковой конвекции к двухъячейковой с закрытыми ячейками (или обратно) ось конвекции в теле Земли сохраняется, то полюс вращения должен при этом смещаться на 90°.

При двухъячейковой конвекции с открытыми ячейками имеются экватор подъема и два полюса опускания вещества, в областях которых должны сгруживаться континенты. Экватор вращения должен проходить через полюсы опускания (как и при одноячейковой конвекции). Этой форме конвекции (в конфигурации «теннисного мяча») хорошо соответствует современное движение ли-

тосферных плит. Роль экватора подъема играет цепочка срединно-океанских хребтов (почти замыкающаяся через Арктику, но осложненная ответвлением через Индийский океан в Красное море и восточно-африканские рифты), роль одной из областей опускания — западно-тихоокеанская область зон субдукции (осложненная ответвлением в Гималайско-Средиземноморский пояс), второй областью опускания служат восточно-тихоокеанские зоны субдукции в Центральной и Южной Америке (с ответвлениями в Карибское море и к Сандвичевым островам).

Двухъячейковая структура Земли проявляется и в геофизических полях (А. С. Монин, 1986) — в отклонениях (до ± 100 м) геоида от осесимметричного референц-эллипсоида, отрицательных в двух областях (Азии — Антарктиды и Северной Америки) и положительных в разделяющем их поясе, а также в недипольной компоненте $\mathbf{H}'$ геомагнитного поля (азиатская и американская области одного знака H'_z, разделенные полосой с другим знаком H'_z). Отметим также двухъячейковую структуру поверхности Венеры (два приблизительно антиподных суперконтинента — Иштар и Афродита).

Можно высказать гипотезу о чередовании одноячейковой и двухъячейковых форм мантийной конвекции; см. рис. 55.1 (А. С. Монин, О. Г. Сорохтин, 1977). В одноячейковой форме 55.1 *а* образуется застойная зона З с тенденцией к опусканию (экватор опускания О в промежуточной форме 55.1 *б*). Это приводит к двухъячейковой форме с закрытыми ячейками 55.1 *в*. В ней образуются уже две зоны З. При прорыве накопившегося под ними в зонах О (55.1 *г*) облегченного вещества по одной из имеющихся осей подъема восстанавливается одноячейковая форма. Если же прорыв произойдет в зоне прежнего экватора опускания, то образуется двухъячейковая форма с открытыми ячейками 55.1 *д*, и уже после ее распада через промежуточную форму 55,1 *е* — исходная одноячейковая форма.

Эта гипотеза может объяснить чередование тектоно-магматических эпох в истории Земли с возможным образованием суперконтинентов около 2600, 1650 (Мегагея Г. Штилле), 950 и 300 млн. лет назад (Пангея А. Вегенера).

Для расчета мантийной конвекции в рамках изложенной в § 54 двухфазной модели следует положить $\rho = \left(\sum_1^2 c_n \rho_n^{-1} \right)^{-1}$ и $\mathbf{u} = \sum_1^2 c_n \mathbf{u}_n$, где $n=1$ соответствует ядерному, а $n=2$ — мантийному веществу. По Г. И. Баренблатту (1953) можно принять, что горизонтальные компоненты скоростей течения обоих веществ одинаковы, а вертикальные различаются на величину w («гидравлическую крупность» частиц тяжелого вещества), так что

$$u_{1r} = u_r - w(1-c); \quad u_{2r} = u_r + wc. \tag{55.2}$$

Из законов сохранения массы обоих веществ выводятся уравнение неразрывности для смеси, которое можно приближенно брать в виде $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$, и уравнение конвективной диффузии тяжелого вещества

$$\rho\frac{dc}{dt}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\rho w c(1-c)-\operatorname{div}\mathbf{i}, \tag{55.3}$$

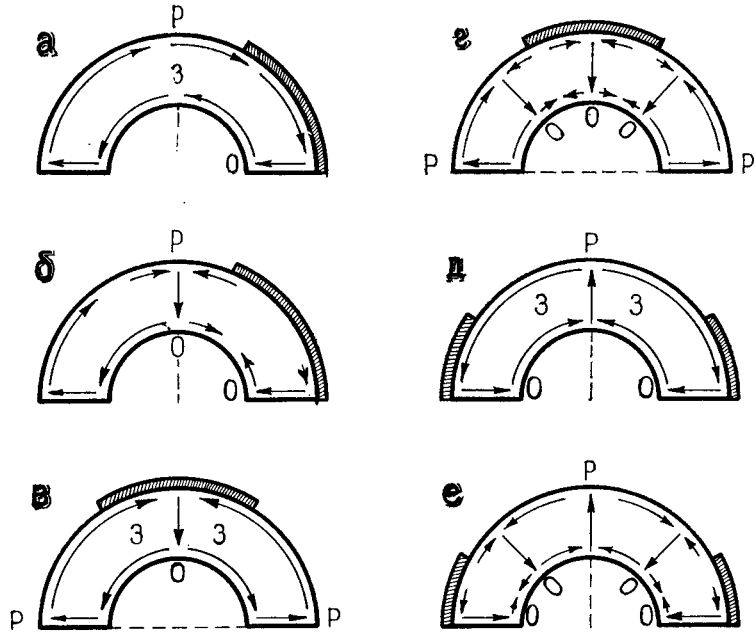


Рис. 55.1. Чередование форм мантийной конвекции.

где $\mathbf{i}$ — плотность диффузионного потока массы тяжелого вещества. В уравнениях движения использование формул (55.2) приводит к прибавлению к ускорению свободного падения g седиментационного ускорения

$$g'=\frac{1}{r^2\rho}\frac{\partial}{\partial r}r^2\rho w^2 c(1-c). \tag{55.4}$$

Кроме того, коэффициент вязкости приобретает эйнштейновский поправочный множитель $1+{}^5/_2 c\rho/\rho_1$. Уравнения движения можно брать в приближении Буссинеска и вследствие медленности мантийной конвекции и огромной вязкости можно пренебрегать силами инерции по сравнению с силами вязкости. Тогда уравнение для вихря скорости принимает простой вид

$$\nabla r\times\nabla(g\rho'+\rho_0 g')+\operatorname{rot}\mathbf{F}=0, \tag{55.5}$$

где $\mathbf{F}$ — сила вязкости. В осесимметричном случае при помощи условия бездивергентности скорости в меридиональной плоскости конвекции можно ввести функцию тока ψ, положив

$$u_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi \sin\theta}{\partial\theta}; \quad u_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi r}{\partial r}. \tag{55.6}$$

При этом достаточно рассмотреть только долготную проекцию уравнения (55.5), приводящуюся к виду

$$\frac{g}{r}\frac{\partial \rho'}{\partial\theta} + \frac{\rho_0}{r}\frac{\partial g'}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2\eta\Phi_{rr} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\eta\Phi_{r\theta}\sin\theta - \right.$$
$$\left. - \eta\frac{\Phi_{\theta\theta}+\Phi_{\lambda\lambda}}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^3\eta\Phi_{\theta r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\eta\Phi_{\theta\theta}\sin\theta - \eta\Phi_{\lambda\lambda}\operatorname{ctg}\theta\right). \tag{55.7}$$

где Φ_{ik} — тензор скоростей деформации, выражающийся обычными формулами через компоненты скорости (55.6) и, следовательно, через ψ. Это уравнение надлежит интегрировать совместно с уравнением состояния (55.1) при $\beta = \rho_0(\rho_1 - \rho_2)\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}$ уравнением конвективной диффузии (55.3) (с краевым условием поглощения ядерного вещества $c=0$ или при заданном потоке этого вещества на нижней границе мантии) и уравнением переноса тепла. Предварительные численные эксперименты (без термического фактора и, к сожалению, пока что лишь с малыми c) воспроизводили, как правило, 3—4 ячейки с квазипериодической перекачкой энергии между ними, так что основную долю времени доминировали одна или две ячейки. Скорости конвекции получались до десятков см/год.

Мантийная конвекция рассматривается, как единственная кандидатура на роль движущей силы тектоники литосферных плит. Одним из следствий этой тектоники (а потому, в конечном счете, и мантийной конвекции) является движение полюсов. Его можно рассчитать при помощи уравнения Лиувилля $\dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{M} = \mathbf{K}$ для момента импульса Земли $\mathbf{M}$ в системе отсчета, вращающейся вместе с Землей, где $\mathbf{K}$ — момент внешних сил. В геоцентрической декартовой системе координат $OX_1X_2X_3$ будет $M_i = I_{ij}\omega_j + M'_i$, где $\mathbf{M}'$ — момент импульса внутренних движений в Земле (которым, как и $\mathbf{K}$, здесь можно пренебречь), а I_{ij} — тензор инерции, определяемый формулой

$$I_{ij} = \int (x^2\delta_{ij} - x_ix_j)\rho\, dV = \frac{2A+C}{3}\delta_{ij} +$$
$$+ \frac{C-A}{1+\mu}\left(m_im_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) + I'_{ij}, \tag{55.8}$$

где C и A — главные моменты инерции, второе слагаемое описывает вклад деформации Земли из-за ее вращения (экваториального вздутия) в рамках жесткоупругой реологии, $\mu = {}^{19}/_{2}\mu_0/\overline{\rho} gR \approx \approx 2{,}3$ — безразмерная (а μ_0 — размерная) «эффективно-приливная» жесткость, а I'_{ij} — вклад невращательных деформаций, создаваемых распределением масс между океанами и континентами и, следовательно, определяемых тектоникой плит:

$$I'_{ij} = \int \left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right)[\rho_{\text{ос}}(r)(1 - \chi_{\text{соп}}) - \rho_{\text{соп}}(r)\chi_{\text{соп}}] r^4\, dr\, d\Omega = $$

$$= -N \int n_i n_j (\chi_{\text{соп}} - \overline{\chi}_{\text{соп}})\, d\Omega(\mathbf{n}); \qquad (55.9)$$

$$N = \int (\rho_{\text{соп}} - \rho_{\text{ос}})\, r^4\, dr,$$

где $\rho_{\text{соп}}(r)$ и $\rho_{\text{ос}}(r)$ — радиальные распределения плотности на континентальных и океанских площадях; $\mathbf{n}$ — переменная интегрирования (точка на сфере единичного радиуса) в абсолютной («древней») системе координат, отсчитываемых от *начального* положения полюса; $\chi_{\text{соп}}[\mathbf{n}, t; \mathbf{m}(t)]$ — характеристическая функция континентов в момент t (равная 1 на них и 0 вне их), задаваемая эмпирически (по палеогеографическим реконструкциям) в относительных координатах, отсчитываемых от палеополюса $\mathbf{m}(t)$, и затем переводимая в координаты $\mathbf{n}$ поворотом $\mathbf{m}(t) \to \mathbf{m}(0)$.

Чтобы сделать движение полюсов возможным, перейдем к упруговязкой реологической модели Максвелла, в которой скорости деформации суть линейные комбинации скоростей изменения напряжений с коэффициентом μ_0^{-1} и самих напряжений с коэффициентом η_0^{-1}, где $\eta_0 = \tau\mu_0$ — вязкость, а τ — время вязкой релаксации напряжений. При этом напряжения пропорциональны деформациям с коэффициентом $\mu_0\tau\mathscr{D}(1+\tau\mathscr{D})^{-1}$, где $\mathscr{D} = d/dt$.

Время τ много меньше типичного времени перемещения полюса на заметные расстояния, так что оператор $\tau\mathscr{D}$ можно считать малым. Поэтому переход к такой реологии сводится к замене в (55.8) μ на $\mu\tau\mathscr{D}$ и $(1+\mu)^{-1}$ на $1 - \mu\tau\mathscr{D}$. После этого при помощи (55.8) получаем $\mathscr{D}I_{ij}m_j \approx C\dot{m}_i$ (А. С. Монин, 1972) и уравнение Лиувилля приближенно приводится к виду

$$C\dot{m}_i - \varepsilon_{ijk}(C - A)\mu\tau\omega m_j \dot{m}_k + \varepsilon_{ijk}\omega m_j I'_{kl} m_l = 0. \qquad (55.10)$$

Поскольку безразмерная вязкость $\eta = \mu\tau\omega(C - A)/2C$ велика (при $\eta_0 \sim 10^{23}$ Па·с получается $\eta \sim 10^5$), первым слагаемым в уравнении (55.10) можно пренебречь, и тогда это уравнение с учетом (55.9) приводится к виду

$$\dot{\mathbf{m}} = -\mathscr{K} \int \mathbf{n}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})(\chi_{\text{соп}} - \overline{\chi}_{\text{соп}})\, d\Omega(\mathbf{n}); \quad \mathscr{K} = \frac{\omega N}{2\eta C}. \qquad (55.11)$$

Оно содержит единственный параметр $\mathscr{K}$, поглощающий ненадежно оцениваемые величины N и η. Предварительные расчеты по фанерозойским палеогеографическим реконструкциям с идеализацией палеостабильных континентальных блоков, как материальных точек (с весами, пропорциональными их площадям), показали, что экскурсии полюса на предсказанное выше расстояние 90° получаются при $\mathscr{K}=0{,}133$. При оценке $N=1{,}78\cdot10^{32}$ кг·м^2 У. Манка (1958) этому соответствует эффективная вязкость мантии $\eta_0=5{,}9\cdot10^{22}$ Па·с.

Рекомендуемые книги

Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение.— М.: Физматгиз, 1981.

Голицын Г. С. Введение в динамику планетных атмосфер.— Л.: Гидрометеоиздат, 1973.

Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

Дикий Л. А. Теория колебаний земной атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1969.

Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1976.

Жарков В. Н., Трубицын В. П. Физика планетных недр.— М.: Физматгиз, 1980.

Жарков В. Н., Трубицын В. П., Самсоненко Л. В. Физика Земли и планет. М.: Физматгиз, 1971.

Каменкович В. М. Основы динамики океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1973.

Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. Синоптические вихри в океане.— Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехтеориздат, 1953.

Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана/Г. И. Марчук, В. П. Дымников, В. Б. Залесный и др.— Л.: Гидрометеоиздат, 1984.

Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики.— М.: Наука, 1969.

Монин А. С. Вращение Земли и климат.— Л.: Гидрометеоиздат; 1972.

Монин А. С. История Земли.— Л.: Наука, 1977.

Монин А. С. Солнечный цикл.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.

Монин А. С. Введение в теорию климата.— Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1985.

Монин А. С., Озмидов Р. В. Океанская турбулентность.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

Монин А. С., Шишков Ю. А. История климата.— Л.: Гидрометеоиздат, 1979.

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, Ч. 1, 1965; Ч. 2, 1967.

Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде.— М.: Мир, 1980.

Нелинейные системы гидродинамического типа/Ф. В. Должанский, В. И. Кляцкин, А. М. Обухов, М. А. Чусов.— М.: Наука, 1974.

Океанология: Геофизика океана.— М.: Наука, 1979.— Т. 2: Геодинамика.

Океанология: Физика океана.— М.: Наука, 1978.— Т. 1: Гидрофизика океана; Т. 2: Гидродинамика океана.

Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

Предметный указатель

Автомодуляция 203, 207
Адаптация 48, 49, 61, 64
— гидродинамических полей 44, 48, 63
Анизотропизация 292, 298
Антидинамо 378
Астеносфера 365, 366
Астрономические периоды 336, 337
Атмосфера 27, 300, 305
— однородная гидростатическая 15
Аттрактор 95, 110, 118
— Лоренца 130, 131, 132

Бездивергентность 43, 53
Бифуркация 94, 96, 117, 118
обратная 99
Хопфа нормальная 97, 98

Вертикаль 12
— термодинамическая 19
Вещество мантийное 392, 393
Взаимодействие атмосферы и океана 338
Вихрь 18
потенциальный 19, 42, 87, 89
псевдопотенциальный 23
Тейлора 127, 128
— стационарный тороидальный роликовый 127
Влажность грунта 348
Водораздел 348
Воздействие атмосферное 296, 329
Возмущение
поперечное 160, 203, 207
продольное 203, 207
Волна 41, 44
акустическая 47, 60, 75
бароклинная 48, 76
баротропная 76
ветровая 177, 178, 180, 182
внутренняя 46, 47, 76
гармоническая 59
— внутренняя плоская 59
— несущая 164
гироскопическая 46, 76
гравитационная 48, 76
гравитационно-капиллярная 148, 169
кноидальная 158
магнитострофическая 376
нерегулярная 148
неустановившаяся свободная 172
огибающая 164, 206
свободная 137
топографическая 266
трохоидальная 146, 148
установившаяся 145
— гравитационная 148, 155
— капиллярная 148, 165
— потенциальиая 148
уходящая 48
Волновой канал 195, 197
Волновой пакет 163, 206
Волны
капиллярные 138
Россби—Блиновой 76
— — свободные 137
Стокса 148
уединенные 148
Вращение Земли 368
— дифференциальное 306, 384
Высота однородной атмосферы 15
— шероховатости 233, 234
Вязкопластическое тело 409

Гамильтонов формализм 172, 208, 285
Гелиомагнитное поле 382, 384
Гельмгольциан 17
Генерация 178, 205, 214, 292, 375, 387
Гидродинамика 15
Горизонтально-однородное состояние 183, 227
Граница твердая нижияя 25

Давление поверхностное 26
Движение 300
второго рода 44
вынуждеиное 49
инерционное 45
первого рода 43
Движения
крупномасштабные 300
мезомасштабные 300
мелкомасштабные 300
собственные 44
стационарные 43
Действие термодинамическое 20
— волновое 173, 174, 191, 212
Динамически эквивалентная глубина 67
Динамо гидромагнитное 375
Диполь 385
Диполь вихревой 280
Дисконтинуум канторов 114
Дискретный набор параметров 28
Дисперсия 137, 138

Диссипация 15
Дно
волнистое 269
наклонное 266, 268
цилиндрическое 268, 269
шероховатое 268
Добротность Земли 400
Дорожка Кармаиа 108

Емкость 116

Закон
Дарси 348
пяти третей 239
двух третей 239
универсальный 238
Закрытая ячейка 410
Заряд магнитного поля 23
Зона пассатная 300

Изотропизация 229
Импульс 137, 175
Инвариант адиабатический лагранжев 20
— линейный 42, 53
Инварианты движения лагранжевы 12
Индекс циркуляции 265
Инсоляция 337
Интеграл Бернулли 136, 146
— волнового действия 173
— кинетический 174, 219
Интенсивность векторных трубок 17
Интервал
инерционный 238
конвективный 239
накачки 179
Инфильтрация 348
Инфинитезимальная частица 11

Климатическая система 336
интранзитивная 339
транзитивная 338
эргодическая 111, 338
Колебания
глобальные 337
изотермической атмосферы малые 52
инерционные 45
междугодичные 337
приливные 50, 337
сезонные 337
синоптические 337
собственные 45
суточные 337
условно-периодические 337
Компактность ледяного покрова 324
Компонента полоидальная 377
— тороидальная 377
Конвекция
концентрационная 409
маитийная 409
термическая 128
Континентальная кора 391
Концентрация мантийная 393
Координата лагранжева 20
Координаты изобарические 61, 86
Коэффициент
магнитной вязкости 17
поверхностного натяжения 26
пропускания 270
сжимаемости 9
термического расширения 8
фильтрации 348
Краевое условие кинематическое 25
Кривые собственные 67, 68, 69, 70, 72, 74, 75
Критический уровень 188, 189, 190, 194, 196

Лестница Ламерея 119
Линия резонансная 290

Масштаб плавучести 239
— турбулентности 228, 230
Матрица устойчивости 39
Мера хаусдорфова 115
Метод
Галеркина 29
конечных элементов 29
Микроструктура вертикальная тонкослойная 208, 241
Многообразие неустойчивое 111
Множество
бэровское 117
инвариантное 95
конечномерное 109
минимальное 95
предельное 95
Мода захваченная 269
Модель
атмосферы эквивалентная 27
вихреразрешающая 330, 335
двухслойная 329, 330
двухфазная 393
квазигеострофическая 332
лерцолита 392
одномерная 337, 342, 345
трехмерная численная 347
Мультипликатор 98

Напор 348
Напряжение Рейнольдса 227
Неогей 405
Неустойчивость 77
бароклинная 86
взрывная 212
конвективная 214
течений вязкой жидкости 99
— идеальной жидкости 77

Оператор монодромии 98
Отображение последования Пуанкаре 112

Параметр
Кориолиса 21
макроустойчивости 28
плавучести 232
Переменная нормальная 172
— — каноническая 137, 209, 287
Пересечение трансверсальное 112, 114
Период
внутривековой 337
возврата Пуанкаре 117
межвековой 337
Периоды внешние 336
— внутренние 336
Перемешивание 224
Пикноклин 186
Плотность
потенциальная 13
спектральная 174, 216, 218, 238, 254, 255, 256, 257, 295, 298
спиральности 375, 378, 380
условная 11
Подвижность 396
Подслой динамической турбулентности 233
Подстилающая поверхность 336
Показатель Ляпунова 116
Поле
геомагнитное 385
полоидальное 377
псевдоизотропное 380
тороидальное 377
Положение полюса начальное 415
Полярность 375, 382, 385
Пористость грунта 348
Порог текучести 409
Постояниая Кармана 228
Потенциал термодинамический 8
— химический 8
Поток зональный 259, 291, 301, 303, 304, 318, 320
— фазовый 80, 94, 95, 109, 110, 114
Представление энергетическое 30
Преобразование каноническое 173
— Фурье 172
Приближение
адиабатическое 179
Буссинеска 16
гидравлическое 348
квазигеострофическое 86
квазиклассическое 73
потенциальное 136
слабой нелинейности 173, 174, 210
традиционное 43, 44, 46
Принцип исчезающей вязкости 101, 110
Приток тепла
конденсационный 314
лучистый 314
Проводимость пласта 348
Пространство фазовое 80, 94
Процесс
адиабатический 12
изэнтропический 12
термодинамический 12
Псевдопластичное тело 357
Псевдоэнтропия 23
Путь перемешивания 228
Пыльные бури глобальные 304

Равновесие гидростатическое 390
— лучистое 343
Радиус деформации Россби 22
Размерность топологическая 115
— хаусдорфова 115
Реакция объемная 405
— поверхностная 404, 405
Резонанс параметрический 37
Решение волновое 54
— стационарное 43, 53, 54
Русло 348

Самофокусировка 203, 207
Сепаратриса 112
неустойчивая 95, 112
устойчивая 95, 112
Сжатие ударное 391, 392
Сила пондеромоторная 15
— приливообразующая 49
Симметризатор 39
Синхронное соотношение 17
Система
гамильтонова 39
гидродинамического типа 28, 30
М. Морса—С. Смейла 113
симметризуемая 39
структурно-устойчивая 113
Скорость
абсолютная 24
звука 9, 11
преломления 191
трения 232
фильтрации 348
Слой деятельный 336
— экмановский 248, 324
Смена устойчивости 96
Событие 386
Соленоид
изобаро-изоконцентрационный 18
изобаро-изостерический 18
изобаро-изотермический 18
одномерный 115
Соленые пальцы 245
Солитон 145, 156, 158, 160, 201, 202, 203, 205, 272, 275, 276, 277
наклонный 171
огибающей 164
рациональный 171
Россби—Блиновой 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285
Спектр волнового действия 174
волновых чисел 179

колмогоровский 175, 176
несимметричный 212, 215
— пространственный 174, 212
Спиральность 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381
Среда бароклинная 9, 17
— баротропная 9, 17
Статистическая гидромеханика 224
Стохастичность 110
Стратификация 12
нейтральная 13
неустойчивая 13
Сценарии стохастизации 117
Сценарий
Ландау—Хопфа 117
Помо—Манневиля 125
Рюэлля—Тэкенса 118
Фейгенбаума 118

Тектоническая активиость 395
Температура максимальной плотности 11
— потенциальная 20
Тензор
динамический 30
метрический 30
радиационных напряжений 142
Теория турбулентности полуэмпирическая 228
Термодинамика 8
Термодинамически-активная примесь 8
Течение
двумерное 254
Куэтта круговое 126
Лоренца 130
стохастическое 111
Тейлора 96, 126
Ток смещения 16
Точка
гетероклиническая 111
гиперболическая 111
гомоклиническая 111
неподвижная 94
поворота 193
Точки
неблуждающие фазовые 94
периодические 95
траектории предельные 95
рекуррентные предельные 95
рекуррентные 95
Траектория гомоклиническая 112
Триплет 32
Турбулентность
геострофическая 251
квазидвумерная 254
локально-изотропная 230
локально-осесимметричная 231
развитая 230

Удвоение периода 37, 98, 118
Удельная термодинамическая характеристика 8
Удельный объем 8
Узел 95
Упруго-вязкое тело 409
Уравнение
Бернулли 136
Буссинеска 183, 348
Гельмгольца 31
гидростатики 14
двумерное 254
индукции 17
квазиламинарное 178
кинетическое 174, 176, 213, 290
Коши—Римана 165
логистическое 119
Орра—Зоммерфельда 99
приливное Лапласа 46
Рэлея 79
Сен-Венана 349
состояния среды 9, 11
сохранения числа волн 141
тенденции 352
Шредингера 73
эволюционное 15
Ускорение Кориолиса 15
Устойчивость бароклинная 90, 91

Фаза газожидкая 305
Фокус 95
Формула Шези 349
Фрактальность 115
Функция
корреляционная 231
спектральная 238
структурная 231
тепловая 8
эллиптическая 33

Характеристическая квадратичная форма 39

Центры действия атмосферы 301
Циркуляция
атмосферы 300
зональная 90, 91, 304
муссонная 304

Частота Вяйсяля—Брента 13
Число
Маха вращательное 303
Рейнольдса 35
— магнитное 18
Ричардсона 84, 233
— динамическое 233
Фруда 387

Эйконал 141
Эквивалентная глубина 262
Электродинамика осредненного поля 379
Элемент геомагнитный 386
Энергия 24
внутренняя 24

доступная потенциальная 27
кинетическая 24
лабильная 26
— недоступная 27
свободная 8
термобарическая 42
упругая 42
Энстрофия 254
Энтальпия 8
— свободная 8
Эргодичность 111

Явление переброса 35
— самофокусировки 203
Ядерное вещество 393
Ячейка Бенара 129
— открытая 411

Оглавление

Предисловие 3

Введение 5

Часть 1. Общие понятия

Глава 1. Уравнения геофизической гидродинамики 8

§ 1. Термодинамика 8
§ 2. Стратификация 12
§ 3. Гидродинамика 15
§ 4. Потенциальный вихрь 19
§ 5. Энергия 24
§ 6. Системы гидродинамического типа 28

Глава 2. Малые колебания 41

§ 7. Типы адиабатических движений 41
§ 8. Малые колебания изотермической атмосферы 52
§ 9. Адаптация 61
§ 10. Приливное уравнение Лапласа 66

Глава 3. Гидродинамическая неустойчивость 77

§ 11. Неустойчивость течений идеальной жидкости 77
§ 12. Бароклинная неустойчивость 86
§ 13. Бифуркации 94
§ 14. Неустойчивость течений вязкой жидкости 99
§ 15. Стохастичность 109
§ 16. Сценарии стохастизации 117
§ 17. Течения Тейлора и Лоренца 126

Часть 2. Процессы

Глава 4. Поверхностные волны 136

§ 18. Линейная теория 136
§ 19. Лучевая теория 141
§ 20. Установившиеся волны 145
§ 21. Установившиеся потенциальные волны 148
§ 22. Устаиовившиеся гравитационные волны 155
§ 23. Установившиеся капиллярные волны 165
§ 24. Гамильтонов формализм 172
§ 25. Ветровые волны 177

Глава 5. Внутренние волны 183

§ 26. Линейная теория 183
§ 27. Лучевая теория 191
§ 28. Установившиеся волны 200
§ 29. Генерация микроструктуры 205
§ 30. Гамильтонов формализм 208
§ 31. Спектры 215
§ 32. Инерционные колебания 220

Глава 6. Геофизическая турбулентность 224

§ 33. Статистическая гидромеханика 224
§ 34. Турбулентность в стратифицированных средах 231
§ 35. Вертикальная тонкослойная микроструктура 241
§ 36. Пограничные слои 245
§ 37. Геострофическая турбулентность 251

Глава 7. Волны Россби—Блиновой 261

§ 38. Линейная теория 261
§ 39. Топографические волны 266
§ 40. Установившиеся волны 270
§ 41. Гамильтонов формализм 285
§ 42. Генерация и диссипация 292

Часть 3. Глобальные проблемы

Глава 8. Общая циркуляция атмосферы и океана 300

§ 43. Общая циркуляция атмосферы и океана 300
§ 44. Теория подобия для циркуляции планетных атмосфер . . . 308
§ 45. Численные модели общей циркуляции атмосферы 312
§ 46. Циркуляция Мирового океана 320
§ 47. Вихреразрешающие модели 330

Глава 9. Теория климата 336

§ 48. Понятие о климате 336
§ 49. Упрощенные модели климата 339
§ 50. Трехмерные численные модели 347
§ 51. Моделирование ледниковых периодов 359

Глава 10. Гидродинамика недр планет 368

§ 52. Гидродинамика земного ядра 368
§ 53. Гидромагнитные динамо 375
§ 54. Эволюция недр планет 389
§ 55. Мантийная конвекция 409

Рекомендуемые книги 417

Предметный указатель 418

Монография

Андрей Сергеевич Монин
Теоретические основы геофизической гидродинамики

Редактор *В. И. Кузьменко.* Художник *Е. Е. Городная.* Художественный редактор *Б. А. Денисовский.* Технический редактор *М. И. Брайнина.* Корректор *А. В. Хюркес.* ИБ № 1838. Сдано в набор 26.08.87. Подписано в печать 25.02.88. М-27052. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Литературная гарнитура. Печать высокая. Печ. л. 26,5. Кр.-отт. 26,5. Уч.-изд. л. 29,16. Тираж 1740 экз. Индекс МОЛ-155. Заказ № 536 М. Цена 4 р. 80 к. Гидрометеоиздат. 199226. Ленинград, ул. Беринга, д. 38.

Ленинградская типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград, Прачечный переулок, 6.