В. А. МАМАЕВ, Г. Э. ОДИШАРИЯ, Н. И. СЕМЕНОВ, А. А. ТОЧИГИН

ГИДРОДИНАМИКА ГАЗО-ЖИДКОСТНЫХ СМЕСЕЙ В ТРУБАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НЕДРА" МОСКВА 1969

УДК (532+533.27).621.643 : 532.5

Гидродинамика газо-жидкостных смесей в трубах. Мамаев В. А., Одишария Г. Э., Семенов Н. И., Точигин А. А. М., изд-во «Недра», 1969. 208 стр.

В монографии рассматриваются вопросы движения газо-жидкостных смесей в трубах. Для обоснования дальнейших положений в гл. 1 выводятся общие уравнения гидродинамики двухфазных жидкостей. Из этих уравнений получен ряд точных решений и критерии подобия.

В гл. 3 для определения основных гидравлических характеристик течения двухфазных жидкостей в трубах применен полуэмпирический метод исследования турбулентного движения. В гл. 4—8 содержатся экспериментальные исследования, проведенные авторами, а также обобщенные результаты других работ.

Экспериментальные исследования построены в критериальной форме, что дает возможность распространить их результаты на натурные объекты. Получены зависимости для коэффициента гидравлического сопротивления и истинного газосодержания. Результаты исследований представлены в виде, удобном для инженерного расчета, особенно в гл. 8, которая может быть использована проектными организациями.

Необходимость и актуальность публикации материала, отражающего вопросы гидравлики газо-жидкостных смесей, назрела давно. Это объясняется, с одной стороны, большим распространением однотрубной системы сбора и транспорта нефти и газа (или газа и конденсата), а с другой, широким применением движения двухфазных жидкостей в самых различных областях техники — химической, котельной, ракетной и др.

Монография будет полезна инженерам и научным работникам, интересующимся теорстическим аспектом проблемы или ее практической стороной.

Таблиц 3, иллюстраций 82, библиография — 105 названий.

3-8-4
107—69

Физика интересуют не столько законы, сколько отклонения от них.
Акад. П. Л. КАПИЦА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Большой интерес к проблемам гидродинамики многофазных систем, наблюдаемый в последние годы, объясняется значимостью этих вопросов для различных отраслей техники.

В химической и нефтегазовой промышленности, энергетике и ракетной технике многочисленные технологические процессы сопровождаются образованием газо-жидкостных смесей или непосредственно связаны с их использованием. К такого рода процессам относится движение паро-жидкостных смесей в элементах паровых котлов и атомных реакторов, в теплообменных и перегонных аппаратах нефтехимических заводов и холодильных установках, в различного рода аппаратах с непосредственным контактом газов и жидкостей (сепараторы, барботеры, смесители и др.).

Процессы, связанные с перемещением газо-жидкостных смесей, в нефтегазодобывающей промышленности распространены исключительно широко, начиная с фильтрации газо-жидкостной смеси в пористой среде и кончая сепарацией ее в промысловых аппаратах.

В последние годы значительное распространение получил весьма эффективный метод совместного сбора и транспортировки нефти и газа в пределах промысла, а в отдельных случаях и на значительные расстояния за счет пластовой энергии. Однотрубная система сбора газо-жидкостной продукции скважин была применена в СССР еще в 1948 г. на промыслах Азербайджана.

Исследование закономерностей изменения основных гидродинамических параметров, характеризующих течение газо-жидкостных смесей, приобретает в связи со сказанным особое значение, так как без знания этих закономерностей нельзя обоснованно проектировать сборные трубопроводные системы и аппараты различных технологических процессов.

Авторы настоящей монографии преследовали цель обобщить достижения в области гидравлики газо-жидкостных смесей и отразить значительный экспериментальный материал, полученный ими в последние годы.

Теоретические исследования С. Г. Телетова и экспериментальные материалы, обработанные на основании этих исследований, позволяют говорить о первом шаге в создании трубной гидравлики газожидкостных смесей.

Нельзя, однако, не заметить, что объем экспериментального материала и особенно его качество не дают воэможности приступить к созданию гидродинамических основ течения газо-жидкостных смесей. В монографии сделана попытка основать полуэмпирические теории для некоторых простейших структур, в целом же методика обобщения экспериментальных данных несовершенна и нуждается в теоретическом исследовании различных структур течения смеси.

Чтобы построить теоретическую или обоснованную полуэмпирическую модель, необходимы экспериментальные данные по локальным скоростям, давлениям, концентрациям фаз, но этих данных пока не имеется.

Стремясь возможно полнее осветить достижения науки в области движения газо-жидкостных смесей в трубах — эту сравнительно узкую область гидродинамики, авторы доводили расчетные зависимости до вида, пригодного для инженерного расчета.

В монографии не рассматриваются такие вопросы гидравлики газо-жидкостных смесей, как движение жидкой пленки, унос и дробление капель жидкости, движение пузырьков газа, работа форсунки и другие, которые должны быть предметом самостоятельной работы.

Основные определения и обозначения

При течении двухфазной жидкости характер потока во времени меняется, так как в процессе движения газо-жидкостная смесь совершает пульсирующие, колебательные движения. Поэтому все физические величины, определяющие движение, осредняются по пространственно-временным координатам. В таком же понимании употребляется термин «установившееся движение». Поскольку в общем случае расход газа или жидкости через произвольное сечение трубы меняет свои значения в различные моменты времени, отклоняясь от средних значений в ту или другую сторону, то для каждой формы течения имеется такой промежуток времени, в течение которого этот расход можно считать постоянным. В дальнейшем все величины, связанные с расходом, употребляются именно в этом смысле. Имея это в виду, примем следующие обозначения, опуская знаки осреднения и термин «среднее» (в тексте дается математическая конструкция пространственно-временного осреднения и осреднения по сечению потока в случае одномерного движения):

Q — объемный расход, *м³/сек*;
G — массовый расход, *кг/сек*;
F — площадь поперечного сечения трубы, *м²*;
$w = Q/F$ — скорость, *м/сек*;
$w_1 = Q_1/F_1$ — истинная скорость жидкости, *м/сек*;
$w_2 = Q_2/F_2$ — истинная скорость газа, *м/сек*;
$w_c = \frac{Q_1 + Q_2}{F}$ — скорость смеси, *м/сек*;

концентрации компонентов смеси:

$\beta_1 = Q_1/Q_c$; $\beta_2 = \beta = Q_2/Q_c$ — объемные расходные;
$\eta_1 = G_1/G_c$; $\eta_2 = \eta = G_2/G_c$ — массовые расходные;
$\varphi_1 = \beta_1 w_c/w_1$; $\varphi_2 = \varphi = \beta_2 w_c/w_2$ — объемные истинные;

$\varkappa_1 = \eta_1 w_x / w_1$; $\varkappa_2 = \varkappa = \eta_2 w_x / w_2$ — массовые истинные;

$w_\omega = w_c = \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2$
$w_x = \varkappa_1 w_1 + \varkappa_2 w_2$
$w_\eta = \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2$
— скорости смеси, *м/сек*;

$w_{от} = w_2 - w_1$ — относительная скорость, *м/сек*;

$\mathrm{Fr_c} = \frac{w_c^2}{gD}$ — критерий Фруда;

g — ускорение свободного падения, *м/сек*^{2};

D — диаметр трубы *м*;

p — давление, *н/м*^{2};

ρ — плотность, *кг/м*^{3};

γ — удельный вес, *н/м*^{3};

μ — вязкость динамическая, *н · сек/м*^{2};

ν — вязкость кинематическая, *м*^{2}*/сек*;

$\mathrm{Re_c} = \frac{\eta_1 w_1 + \eta_2 w_2}{\eta_1 \nu_1 + \eta_2 \nu_2} D$ — критерий Рейнольдса смеси;

$\mathrm{Re_y} = w_c D \left(\frac{\beta_1}{\nu_1} + \frac{\beta_2}{\nu_2} \right)$ — критерий Рейнольдса условный;

σ — поверхностное натяжение системы газ — жидкость, *н/м*;

$\mathrm{We} = \frac{\sigma}{g(\rho_1 - \rho_2) D^2}$ — критерий Вебера;

$\mu = \mu_1 / \mu_2$ — приведенная вязкость;

$\rho = \rho_1 / \rho_2$ — приведенная плотность;

$\varepsilon = k_э / D$ — относительная шероховатость;

λ — коэффициент гидравлического сопротивления;

$\lambda(\mathrm{Re_c}, \varepsilon)$ — коэффициент гидравлического сопротивления при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re_c}$.

$\psi = \lambda_c / \lambda(\mathrm{Re_c}\varepsilon)$ — приведенный коэффициент гидравлического сопротивления;

T — температура, °К;

R — газовая постоянная, *дж/кг · град*;

z — коэффициент сжимаемости.

Индексы

с — смесь:
т — трение;
1 — жидкость;
2 — газ;
к — конечная точка;
н — начальная точка;
н. с — нисходящее течение;
п. д — подъемное (восходящее) течение.

ВВЕДЕНИЕ

Свойства двухфазных жидкостей

Если в турбулентном газовом потоке твердые частицы сохраняют свою форму, то газовые и жидкостные образования смесей деформируются, т. е. поверхности раздела текущих сред являются переменными в пространстве и времени. Эта особенность движения газожидкостных смесей объясняется главным образом различием плотностей фаз и является причиной значительного многообразия форм (видов, структур) течения. Естественно поэтому, что закономерности движения двухфазных жидкостей (так в дальнейшем будем именовать газо-жидкостные смеси) значительно сложнее течения однородной жидкости.

Кроме многообразия форм течения, турбулентный поток двухфазной жидкости характеризуется значительными колебательными движениями и продолжительными пульсациями давления, которые во много раз превышают таковые при однородном турбулентном потоке.

Турбулентные газо-жидкостные потоки имеют крупную структуру, т. е. носят черты начальной стадии турбулентности. При установившемся движении однородной жидкости по трубопроводу структура турбулентности меняется мало; при движении же газо-жидкостной смеси изменение скоростей фаз приводит к перестройке форм течения даже на небольшой длине, особенно в случае сложного гидравлического контура.

Изменения плотности, вязкости, поверхностного натяжения и концентрации смеси вносят в гидродинамику газо-жидкостных смесей вполне определенные закономерности, которых не наблюдается при течении однородной жидкости.

При небольших скоростях смеси влияние гравитационных сил довольно сильно сказывается на форме течения, значении относительной скорости, сопротивлении и пульсациях давления. Поэтому, например, течение смеси в каналах, различно расположенных в пространстве, в отличие от однородного течения не имеет одних и тех же закономерностей.

Развитие методов исследования течения двухфазных жидкостей

Развитие нефтяной промышленности ставило перед наукой ряд проблем, связанных с движением нефте-газовых смесей. Первоначально необходимо было построить теорию воздушного подъемника (эрлифта), в более поздних работах ставятся вопросы фонтанирования. Одновременно появились исследования движения паро-водяных смесей, что диктовалось нуждами котельной техники.

Наиболеее характерной особенностью начального периода исследований процесса течения газо-жидкостных смесей в трубах, к которому можно отнести работы большинства зарубежных и отечественных исследователей 30—40-х годов, является доминирующее использование чисто эмпирических методов решения поставленной задачи, основанных на непосредственном использовании экспериментальных материалов в форме первичных опытных данных, без соответствующего обобщения.

Сущность метода исследований в этих работах заключалась в проведении эксперимента в лабораторных или натурных условиях, в процессе которого определялись лишь расход газа и жидкости и распределение давления по длине трубопровода. При обработке экспериментальных данных обычно устанавливали зависимость между потерями напора на трение при движении смеси (Δp_c) и различного рода комбинациями величин (Δp_1) и (Δp_2). определяемых расчетным путем из условий течения однородной жидкости.

Указанный метод обработки экспериментальных данных наибольшее распространение получил в работах зарубежных исследователей [64—66, 86—88, 97, 100 и др.].

Мартинелли, например, все многообразие форм течения сводит к следующим схемам:

1) газовая и жидкая фазы смеси движутся при ламинарном режиме течения;

2) газовая фаза движется ламинарно, жидкая — турбулентно;

3) жидкая фаза движется ламинарно, газовая — турбулентно;

4) газовая и жидкая фазы движутся при турбулентном режиме течения.

При анализе гидравлического сопротивления для смеси авторы указанных работ исходят из известной в гидродинамике формулы перепада давления при течении однородной жидкости. Эту формулу применяют для течения жидкого и газового компонента при градиентах давления, равных градиенту давления в смеси:

$$\Delta p_c = \frac{\lambda_1 \rho_1 w_1^2}{2D_1} \Delta z, \quad \Delta p_c = \frac{\lambda_2 \rho_2 w_2^2}{2D_2} \Delta z,$$

где D_1 и D_2 — усредненные гидравлические диаметры потоков компонентов смеси; λ_1 и λ_2 — коэффициенты гидравлического сопротивления.

Предполагается, что λ_1 и λ_2 выражаются через критерий Рейнольдса течений, например, жидкости и газа формулами

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{\left(\frac{1}{b_1}\mathrm{Re}_1\right)^{m_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{a_2}{\left(\frac{1}{b_2}\mathrm{Re}_2\right)^{m_2}},$$

где a и m — числовые коэффициенты.

Причем принимается, что

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{4}{\pi}\frac{G_1}{D_1\mu_1}, \quad \mathrm{Re}_2 = \frac{4}{\pi}\frac{G_2}{D_2\mu_2}.$$

Коэффициенты b_1 и b_2 представляют собой отношение осредненных площадей сечения жидкого и газового потоков к их площадям, определяемым через гидравлические радиусы:

$$b_1 = \varphi_1\left(\frac{D}{D_1}\right)^2, \quad b_2 = \varphi_2\left(\frac{D}{D_2}\right)^2,$$

где D — диаметр трубы.

Путем подстановки значений Re_1 и Re_2 в выражения для λ_1 и λ_2, а затем значения λ и выражения для скоростей $w_1 = \frac{4G_1}{g\pi D^2\rho_1\varphi_1}$ и $w_2 = \frac{4G_2}{g\pi D^2\rho_2\varphi_2}$ в исходные формулы градиента давления для турбулентного течения, когда $a_1 = a_2$, $m_1 = m_2 = m$, получаем

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{2}{5-m}}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{2m}{5-m}}\left(\frac{G_1}{G_2}\right)^{\frac{2(2-m)}{5-m}}\left(\frac{b_1}{b^2}\right)^{\frac{2(m-2)}{5-m}}.$$

Так как сумма сечений жидкого и газового потоков равна сечению потока смеси (трубы), то

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = \frac{D}{D_2}\frac{1}{b} - \frac{b_2}{b_1},$$

а предыдущее выражение перепишется в виде

$$\left(\frac{D}{D_2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{2}{5-m}}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{2m}{5-m}}\left(\frac{G_1}{G_2}\right)^{\frac{2(2-m)}{5-m}}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{\frac{m+1}{5-m}}\right] b_2.$$

Если $\lambda_{1(2)}$ подчиняется вышеприведенным закономерностям, то отношение λ течения одного газа при $G = G_2$ в смеси к λ_2 будет равно $1/b_2^m\,(D/D_2)^m$, а это значит, что

$$\Delta p_c = \Delta p_2 b_2^{m-2}\left(\frac{D}{D_2}\right)^{5-m}$$

Подставляя в последнее равенство значение D/D_2, находим

$$\frac{\Delta p_c}{\Delta p_2} = \left[1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\frac{2}{5-m}}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{2m}{5-m}}\left(\frac{G_1}{G_2}\right)^{\frac{2(2-m)}{5-m}}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{\frac{m+1}{5-m}}\right]^{\frac{5-m}{2}} b_2^{\frac{m+1}{2}}.$$

Чтобы исключить один из двух неизвестных коэффициентов, сечение газового потока в смеси приравнивается круглому сечению, тогда $b_2 = 1$, а b_1 определяется экспериментально, если для турбулентного потока считать $m = 0.2$:

$$b_1^{1/4} = F\left[\mu^{0,083},\ \rho^{0,416},\ \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^{0,75}\right].$$

Поскольку при турбулентном движении газовой и жидкой фаз $m = \text{idem}$, коэффициенты сопротивления λ_1 и λ_2 являются функциями только числа Re. Как показывают эксперименты, λ_1 и λ_2 сильно зависят от соотношения газа и жидкости и от структуры течения, в качестве определяющей характеристики которого можно взять, например, критерий Фруда.

Мартинелли ищет закономерность изменения отношения перепадов давления смеси и однородной жидкости. Однако изменение коэффициента сопротивления трения при таком методе обработки трудно обнаружить. В самом деле, поскольку кинетическая энергия при движении газо-жидкостной смеси суть

$$\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2,$$

отношение перепадов давления трения будет иметь вид

$$\frac{\Delta p_c}{\Delta p_2} = \frac{\lambda_c}{\lambda_2}\,\frac{\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2}{\rho_2 w_2^2}$$

или

$$\frac{\Delta p_c}{\Delta p_2} = \frac{\lambda_c}{\lambda_2}\,\frac{G_c^2}{G_2^2}\,\frac{\dfrac{\eta_1^2\rho_c}{\varphi_1\rho_1} + \dfrac{\eta_2^2\rho_c}{\varphi_2\rho_2}}{\dfrac{\rho_c}{\rho_2}}.$$

Если принять

$$\varkappa_1 = \frac{\varphi_1\rho_1}{\rho_c}, \quad \varkappa_2 = \frac{\varphi_2\rho_2}{\rho_c},$$

то

$$\frac{\Delta\rho_c}{\Delta p_2} = \frac{\lambda_c}{\lambda_2}\,\frac{G_c^2}{G_2^2}\,\frac{\rho_2}{\rho_c}\left(\frac{\eta_1^2}{\varkappa_1} + \frac{\eta_2^2}{\varkappa_2}\right).$$

Величина в скобках имеет порядок единицы, а отношение коэффициентов сопротивления находится в интервале

$$1 \leqslant \frac{\lambda_c}{\lambda_2} \leqslant 5,$$

поэтому из приближенного равенства

$$\frac{\Delta p_c}{\Delta p_2} \approx \frac{\lambda_c\rho_2}{\lambda_2\eta_2^2\rho_c}$$

видно, что при изменении газосодержания η отношение перепадов давления $\Delta p_c/\Delta p_2$ быстро растет от единицы до бесконечности. На фоне этого роста изменение коэффициента сопротивления трения λ_c мало заметно. Таким образом, отношение перепадов давления

в основном отражает закономерность сильного роста $\rho_2/\eta_2^2\rho_c$, а не характеризует изменение сопротивления трения.

Указанный метод обработки экспериментальных данных был широко использован также в работах Бекера [64—67], Даклера [103], Ван Вингена [99] и других исследователей. Однако эмпирические зависимости, полученные в этих работах, не могут претендовать на общность хотя бы по той причине, что получены на основании гипотез с весьма искусственными допущениями. Так, например, предположение Мартинелли о том, что можно получить единую зависимость для всей зоны турбулентного течения смеси независимо от структуры потока, не соответствует действительности. В дальнейшем будет показано, как с изменением структуры течения смеси резко меняются закономерности изменения основных гидравлических параметров — истинного газосодержания и коэффициента сопротивления, вследствие чего практически исключается возможность построения единой гидравлической модели всевозможных структур течения.

Кроме того, метод обработки экспериментального материала в форме первичных опытных данных значительно сокращает область применения получаемых эмпирических зависимостей, ограничивая их условиями постановки эксперимента.

Существенным недостатком подобного рода исследований является то, что полученные зависимости невозможно интегрировать, в результате чего они применимы только к коротким участкам трубопровода, где можно ограничиться дифференциальной формой записи уравнений.

В работах советских исследователей, посвященных движению газо-жидкостных систем в установках газ-эрлифта [1, 7] была принята несколько отличная форма обработки экспериментальных данных, устанавливающая зависимость

$$\frac{\Delta p_c}{g\rho_1 \Delta z} = f(Q_1,\ Q_2,\ D),$$

где $\Delta p_c/\Delta z$ — потери давления на единицу длины трубы, обусловленные силами трения и изменением кинетической энергии смеси.

В сущности вышеуказанные методы мало чем отличаются один от другого и им присущ один и тот же недостаток — область применения полученных зависимостей ограничивается теми условиями, какие имели место при постановке эксперимента.

Не лишен этого недостатка и распространенный в наши дни метод обработки экспериментальных данных по величине так называемого «полезного напора» [8, 9]. Он не дает возможности непосредственно исследовать закономерности изменения истинного газосодержания и сопротивления трения.

Наряду с экспериментальными исследованиями были предприняты попытки теоретически решить проблему совместного течения двухфазной газо-жидкостной смеси в трубах (Лоренц Г., 1911 г., Лейбензон Л. С., 1923 г.). Однако основное допущение об отсутствии относительной скорости движения фаз, принятое в этих работах,

вносит существенные ошибки в результаты гидравлического расчета трубопроводов, в особенности при негоризонтальном их расположении.

Естественно, подобного рода исследования (экспериментальные и теоретические) заведомо не позволяли создать обоснованные методы гидравлического расчета двухфазных истоков в трубах, так как были несовершенны методы постановки и обработки эксперимента и не учитывалось влияние относительной скорости движения фаз. Вместе с тем они явились первым шагом к глубокому изучению физической стороны механизма движения смеси и более обоснованной формулировке задачи исследования.

Так, например, анализ перечисленных выше работ показал, что необходимо исследовать закономерности изменения таких исходных параметров, какими являются касательное напряжение (или коэффициент гидравлического сопротивления λ) и истинное газосодержание, а не результирующую величину, которой является удельное падение напора смеси (Δp_c).

Кроме того, чтобы установить закономерности изменения коэффициента гидравлического сопротивления и истинного газосодержания, необходимо создать теоретически обоснованные методы постановки и обработки эксперимента, чего были лишены практически все работы, относящиеся к начальному периоду исследований.

Исследования С. Г. Телетова [46—52], Ф. И. Франкля [54, 55], Х. А. Рахматулина [41], термогидродинамической лаборатории Энергетического института АН СССР и ряда отраслевых институтов страны создали теоретические основы гидродинамики смесей — общие уравнения гидродинамики и энергии и позволили обоснованно подойти к решению сложных экспериментальных задач гидродинамики двухфазных систем.

Примером могут служить теоретические работы С. Г. Телетова, явившиеся основой для разработки весьма эффективного критериального метода обработки экспериментальных данных по газожидкостным смесям. Данный метод дает возможность распространить результаты опытных исследований на любые натурные объекты в установленных пределах изменения соответствующих параметров вследствие соблюдения условий моделирования исследуемого процесса.

Таким образом, в истории развития гидравлики двухфазных жидкостей наблюдается переход от эмпиризма к обоснованным исследованиям. Как известно, такой же переход был при исследовании законов потерь давления при течении однородной жидкости в трубопроводах. На основе простых гидравлических опытов было получено множество частных эмпирических формул коэффициентов сопротивления. Обобщенные же формулы, широко используемые ныне в практике, удалось получить в результате работ Прандтля, Кармана, Никурадзе и других исследователей, когда был найден и изучен процесс турбулентного течения однофазных жидкостей

и установлена зависимость коэффициента сопротивления от структуры потока.

История развития гидродинамики однородной жидкости является убедительным примером того, какую роль играет метод исследования. В основу исследований движения газо-жидкостной смеси положен критериальный метод как первый шаг применения уравнений гидродинамики.

Поскольку при течении газо-жидкостных смесей структуры потока даже визуально отличны одна от другой, то при изучении закономерностей их движения данный фактор нельзя не учитывать. Это относится к начальной стадии исследования, на которой изучаются коэффициент гидравлического сопротивления, пульсации давления и относительная скорость фаз (или истинное газосодержание, газонасыщенность), и тем более к стадиям создания основ гидродинамики двухфазной жидкости (построению тензоров вязких и турбулентных напряжении, изучению закономерностеи пульсаций давления, корреляций между пульсациями скоростей и концентрацией фаз в смеси).

ГЛАВА ПЕРВАЯ

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ И ЭНЕРГИИ ДВУХФАЗНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Многообразие форм течения смеси с различными фазовыми состояниями ее компонентов создает большие трудности в построении для них замкнутой системы дифференциальных уравнений. В 1947 г. С. Г. Телетовым были построены общие уравнения гидродинамики и энергии для двухфазной смеси в интегральной форме и выведены дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения смеси при переходе одного компонента в фазу другого и без такого перехода выводились на основе временного осреднения мгновенных физических величин. Для установившихся течений промежуток осреднения может быть выбран достаточно большим по сравнению со средней или наиболее вероятной продолжительностью пульсаций, а для нестационарных течений — соизмеримый с ней. Поскольку концентрации компонентов φ_1 и φ_2 смеси представляют собою разрывные функции времени и координат, внезапно изменяющиеся от нуля до единицы, С. Г. Телетов рассматривает их как вероятности пребывания в данной точке. Поэтому моменты корреляции вида $\overline{f\varphi}$ при временном осреднении выпадают, что вносит некоторые ограничения в теоретические исследования. Однако осредненные уравнения представляют большую ценность в экспериментальном исследовании, например, гидравлических сопротивлений и относительных скоростей при течении двухфазных жидкостей в каналах различной геометрической формы.

Ф. И. Франкель [54, 55], применив пространственно-временное осреднение мгновенных физических величин потока смеси, построил систему общих усредненных дифференциальных уравнений, в сущности не отличающихся от уравнений С. Г. Телетова. Пространственное осреднение он делает по некоторой области смеси, что загрудняет определение скоростей отдельных компонентов и других параметров. Моменты корреляции указанного выше вида, как и у С. Г. Телетова, сводятся к нулю.

А. К. Дюнин, Ю. Т. Борщевский и Н. А. Яковлев [18] приводят уравнение непрерывности и движения для многокомпонентной смеси в более строгом виде. При выводе уравнений они использовали последовательное пространственное и временное осреднение. Последовательным пространственным осреднением физические величины компонентов смеси осредняются по их объемам в данный момент. Осредненные таким образом величины используются затем при переходе к осредненным величинам по всему элементу смеси. А. К. Дюнин и другие исследователи полагают, что объем осреднения, как часть объема смеси, должен быть равен объему, занимаемому компонентом за характерный период турбулентных пульсаций. Это не совсем четкое определение устраняется, если за объем смеси принять объем, соизмеримый со средней неоднородностью структуры течения.

В гидродинамике двухфазных жидкостей несущественно, какое осреднение какому предшествует. И временное и пространственное осреднение возможно, когда в заданной точке одновременно не находится несколько субстанций с различными физическими свойствами. В объеме смеси, на которую распространяется осреднение в момент времени, заранее предполагается присутствие двух или нескольких компонентов, точно так же как через фиксированную точку пространства попеременно пройдут все компоненты смеси за интервал времени осреднения.

Применим последовательно пространственное и временное осреднение для вывода дифференциальных уравнений гидродинамики и энергии двухфазных жидкостей. Обозначим индексами 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к жидкому и газовому компонентам. Причем если в понятие жидкость включается газ (как сжимаемая жидкость), то вторым компонентом может быть твердый диспersоид или жидкость с физическими свойствами, отличными от первой жидкости (несмешивающиеся жидкости).

Поскольку имеется поверхность раздела фаз, то такие величины, как концентрация компонентов и плотность смеси, в бесконечно малой точке изменяются скачком: концентрация изменяется от нуля до единицы, плотность — от ρ_1 до ρ_2. Следовательно, плотность смеси можно выразить формулой

$$\rho_c = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2, \qquad (1)$$

где φ_1 и φ_2 — относительные объемные концентрации компонентов, являющиеся прерывными функциями времени и координат; они попеременно равны нулю и единице.

Векторы скорости и компонентов обозначим через w_1 и w_2, тогда объемные расходы компонентов ΔV через единицу поверхности за отрезок времени, бо́льший времени пребывания отдельных компонентов в данной точке, будут равны

$$\Delta V_1 = w_1 \Delta t, \quad \Delta V_2 = w_2 \Delta t_2,$$

а средняя скорость смеси за время $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ выразится как

$$w_c = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{\Delta t} = w_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t} + w_2 \frac{\Delta t_2}{\Delta t}.$$

Так как $\Delta t_{1\,(2)}/\Delta t$ представляет собой вероятность пребывания в данной точке компонентов смеси или их объемные концентрации, то скорости смеси в бесконечно малой точке можно представить в виде суммы

$$w_c = \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2, \tag{2}$$

где φ_1 и φ_2 для момента времени по-прежнему равны нулю или единице.

На поверхности раздела фаз $w_1 = w_2$. Следовательно, вектор скорости смеси является непрерывной функцией времени и координат и изменяется от w_2 до w_1, а его производные будут претерпевать разрыв непрерывности.

Аналогично вектор количества движения, который мы обозначим через $\rho_c w_x$, выразится как

$$\rho_c w_x = \varphi_1 \rho_1 w_1 + \varphi_2 \rho_2 w_2. \tag{3}$$

Если под плотностью смеси понимать плотность, выражающуюся формулой (1), то скорость смеси можно представить в виде

$$w_x = \varkappa_1 w_1 + \varkappa_2 w_2, \tag{4}$$

где $\varkappa_1 = \varphi_1 \rho_1 / \rho_c$ и $\varkappa_2 = \varphi_2 \rho_2 / \rho_c$ — относительные массовые концентрации компонентов, попеременно равные нулю и единице (как φ_1 и φ_2).

Относительные объемные концентрации можно определить и как части общего сечения элементарной струйки смеси $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$. Согласно такому определению скорости компонентов смеси будут равны

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{\Delta V_1}{\Delta S_1} = \frac{\Delta V_1}{\Delta S} \frac{\Delta S}{\Delta S_1} = \frac{\beta_1}{\varphi_1} w_c, \\ w_2 &= \frac{\beta_2}{\varphi_2} w_c, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\beta_1 = \Delta V_1 / \Delta V$ и $\beta_2 = \Delta V_2 / \Delta V$ — относительные объемные расходные концентрации компонентов.

Из формул (3) и (5) легко получить соотношение между w_c и w_x

$$w_x = \frac{\rho_\beta}{\rho_c} w_c, \tag{6}$$

где ρ_β — плотность смеси, рассчитанная исходя из объемных расходов компонентов:

$$\rho_\beta = \beta_1 \rho_1 + \beta_2 \rho_2. \tag{7}$$

Для большинства случаев течения газо-жидкостных смесей $\beta_{1\,(2)} \neq \varphi_{1\,(2)}$. Нетрудно заметить, что объемные расходные концентрации также попеременно равны нулю и единице.

Кинетическую энергию $E_к$ единицы объема смеси можно представить в виде суммы

$$E_к = \frac{1}{2}[\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2] \tag{8}$$

или согласно (5) и (6)

$$E_к = \frac{1}{2} w_\eta w_\iota \rho_\beta = \frac{1}{2} w_\eta w_\varkappa \rho_c, \tag{9}$$

где $w_\eta = \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2$ — скорости смеси, выраженные через массовые расходные концентрации компонентов η_1 и η_2,

$$w_\eta w_\varkappa = \varkappa_1 w_1^2 + \varkappa_2 w_2^2,$$

$$\eta_1 = \frac{\beta_1\rho_1}{\rho_\beta}, \quad \eta_2 = \frac{\beta_2\rho_2}{\rho_\beta}.$$

УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Выделим в потоке двухфазной жидкости произвольный объем τ (рис. 1), ограниченный поверхностью σ. Поток массы смеси через поверхность σ будет равен изменению массы смеси во времени

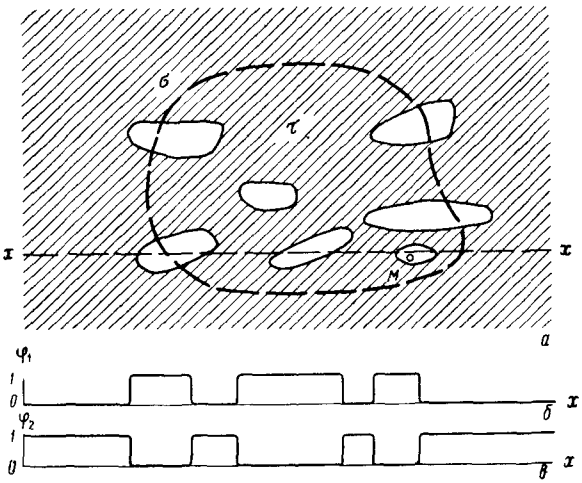


Рис. 1. К выводу уравнений гидродинамики.

в объеме τ. Если за положительное направление скорости принять внешнюю нормаль к поверхности σ, то производные масс по времени должны иметь отрицательный знак. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau (\varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2)\, d\tau + \int_\sigma [\varphi_1\rho_1 (w_1\, d\sigma) + \varphi_2\rho_2 (w_2\, d\sigma)] = 0. \tag{10}$$

Это общее уравнение справедливо для течения смеси как при наличии фазовых превращений одного компонента в другой, так

и без них. Если фазовый переход компонентов не происходит, т. е. не наблюдается кипения или конденсации или отсутствует выделение газа из жидкости, уравнение (10) распадается на два:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}\varphi_1\rho_1\,d\tau+\int\limits_{\sigma}\varphi_1\rho_1\,(w_1\,d\sigma)=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}\varphi_2\rho_2\,d\tau+\int\limits_{\sigma}\varphi_2\rho_2\,(w_2\,d\sigma)=0. \tag{12}$$

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Условием динамического равновесия движущегося объема смеси является равенство инерционных сил сумме объемных или массовых и поверхностных сил.

Суммарный вектор инерционных сил $F_и$ выражает изменение во времени количества движения в объеме τ и его приток через поверхность σ:

$$F_и=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}\rho_c w_x\,d\tau+\int\limits_{\sigma}\varphi_1\rho_1 w_1\,(w_1\,d\sigma)+\varphi_2\rho_2 w_2\,(w_2\,d\sigma)].$$

Суммарный вектор массовой силы $F_м$ запишется в виде

$$F_м=\int\limits_{\tau}a\,(\varphi_1\rho_1+\varphi_2\rho_2)\,d\tau,$$

где a — вектор массовой силы.

Поверхностное напряжение F_σ представляет собой сумму из тензора вязких напряжений

$$\varphi_1\Pi_1+\varphi_2\Pi_2$$

и среднего статического давления

$$-(\varphi_1 p_1+\varphi_2 p_2)\,I,$$

где

$$I=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

единичный тензор. Поэтому

$$F_\sigma=\int\limits_{\sigma}[\varphi_1\Pi_1+\varphi_2\Pi_2-(\varphi_1 p_1+\varphi_2\Pi_2)\,I]\,d\sigma.$$

Приравнивая $F_и$ сумме $F_м + F_σ$, получаем уравнение движения в интегральной форме

$$\int_\tau \left[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1\rho_1 w_1 + \varphi_2\rho_2 w_2) - (\varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2)\, a\right] d\tau =$$

$$= \int_\sigma [\varphi_1\Pi_1 + \varphi_2\Pi_2 - (\varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2)\, I]\, d\sigma -$$

$$- \int_\sigma [\varphi_1 p_1 w_1 (w_1\, d\sigma) + \varphi_2\rho_2 w_2 (w_2\, d\sigma)]. \qquad (13)$$

УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Объем смеси τ испытывает действие объемных сил, сил давления и сил вязких поверхностных напряжений, которые совершают над ним работу, равную сумме $E_a + E_p + E_n$ при

$$E_a = A\int_\tau [\varphi_1\rho_1 (w_1 a) + \varphi_2\rho_2 (w_2 a)]\, d\tau,$$

$$E_p = -A\int_\sigma [\varphi_1 p_1 (w_1\, d\sigma) + \varphi_2 p_2 (w_2\, d\sigma),$$

$$E_n = A\int_\sigma [\varphi_1 (\Pi_1 w_1)\, d\sigma + \varphi_2 (\Pi_2 w_2)\, d\sigma],$$

где A — тепловой эквивалент работы.

Скорости компонентов w_1, w_2 и удельный тепловой поток q приводят в свою очередь к притоку энергии в объем τ

$$E_w = -g\int_\sigma \varphi_1\rho_1\left(u_1 + \frac{A}{2g} w_1^2\right)(w_1\, d\sigma) + \varphi_2\rho_2\left(u_2 + \frac{A}{2g} w_2^2\right)(w_2\, d\sigma),$$

$$E_q = -\int_\sigma (q\, d\sigma).$$

В результате в объеме смеси τ за единицу времени произойдет изменение внутренней и кинетической энергии, равное

$$E_t = g\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi_1\rho_1\left(u_1 + \frac{A}{2g} w_1^2\right) + \varphi_2\rho_2\left(u_2 + \frac{A}{2g} w_2^2\right)\right] dt.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$E_t = E_a + E_p + E_n + E_w + F_q,$$

т. е. уравнение энергии запишется в виде

$$-g\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi_1\rho_1\left(u_1 + \frac{A}{2g} w_1^2\right) + \varphi_2\rho_2\left(u_2 + \frac{A}{2g} w_2^2\right)\right] d\tau =$$

$$= \int_\sigma \left\{\varphi_1\left[A\,(I p_1 - \Pi_1) + g\rho_1\left(u_1 + \frac{A}{2g} w_1^2\right)\right](w_1\, d\sigma) +\right.$$

$$+\varphi_2\left[A(Ip_2-\Pi_2)+g\rho_2\left(u_2+\frac{A}{2g}w_2^2\right)\right](w_2\,d\sigma)+q\,d\sigma\Big\}-$$

$$-A\int_\tau[\varphi_1\rho_1(w_1 a)+\varphi_2\rho_2(w_2 a)]\,d\tau. \qquad (14)$$

МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Прежде чем перейти к осреднению выведенных уравнений течения двухфазной жидкости, сделаем небольшое математическое отступление.

В потоке двухфазной жидкости изменяемость и неупорядоченность гидродинамических величин выражены значительно сильнее, чем в однофазном течении. Если в однофазном течении, например, существуют микропульсации этих величин, то в двухфазном потоке приходится говорить о их макропульсациях, вызванных отсутствием сплошности одного или обоих компонентов.

Вследствие этого использовать уравнения в интегральной форме чрезвычайно трудно. Все величины, входящие в них, необходимо сглаживать или, в частности, осреднять, т. е. рассматривать как непрерывные функции времени и координат.

Пусть требуется осреднить некоторую функцию $f(t)$ в интервале времени θ, достаточно большом по сравнению со средней продолжительностью пульсации. В этом случае $f(t)$ представляют в виде суммы

$$f(t)=F(t)+\dot{f}(t), \qquad (15)$$

где $F(t)$ — слабо меняющаяся функция своего аргумента; $\dot{f}(t)$ — функция пульсации, которая часто проходит через нуль.

Осредненную функцию $\overline{f(t)}$ получают по формуле

$$\overline{f(t)}=\frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{+\theta/2} f(t-\eta)\,d\eta, \qquad (16)$$

а по определению

$$\overline{F(t)}\approx\frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{+\theta/2} F(t)\,d\eta=F(t), \qquad (17)$$

$$\overline{\dot{f}}(t)=0. \qquad (18)$$

Применяя формулу осреднения к сумме двух функций, найдем

$$\overline{f_1(t)+f_2(t)}=\overline{f_1(t)}+\overline{f_2(t)}, \qquad (19)$$

$$\overline{f(t)}=\overline{F(t)+\dot{f}(t)}\approx F(t). \qquad (20)$$

Используя правила дифференцирования и интегрирования, легко получить

$$\overline{\frac{\partial f(t)}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{f(t)}}{\partial t}, \tag{21}$$

$$\int_t \overline{f(t)\,dt} = \int_t \overline{f(t)}\,dt, \tag{22}$$

так как

$$\frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{+\theta/2} \frac{\partial f(t-\eta)}{\partial t}\,dt = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{+\theta/2} f(t-\eta)\,d\eta\right],$$

$$\frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{+\theta/2} d\eta \int_t f(t-\eta)\,dt = \int_t dt\,\frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{+\theta/2} f(t-\eta)\,d\eta.$$

Осредним произведение двух осредненных функций

$$\overline{\overline{f_1(t)}\,\overline{f_2(t)}} = \overline{f_1(t)}\,\overline{f_2(t)}, \tag{23}$$

так как

$$\int_{-\theta/2}^{+\theta/2} \overline{f_1(t-u)}\,\overline{f_2(t-u)}\,du \approx \int_{-\theta/2}^{+\theta/2} \overline{f_1(t)}\,\overline{f_2(t)}\,du = \overline{f_1(t)}\,\overline{f_2(t)}.$$

Запишем осредненное произведение двух функций в виде

$$\overline{f_1(t)\,f_2(t)} = \overline{F_1(t)\,F_2(t)} + \overline{f_1(t)\,f_2(t)} + \overline{F_1(t)\,f_2(t)} + \overline{F_2(t)\,f_1(t)}.$$

Поскольку $F_1(t)$ и $F_2(t)$ — слабо меняющиеся функции, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — быстро меняющиеся функции, часто проходящие через нуль, то

$$\overline{F_1(t)\,f_2(t)} \approx \overline{F_2(t)\,f_1(t)} \approx 0$$

и, следовательно, согласно (20) и (23)

$$\overline{f_1(t)\,f_2(t)} \approx \overline{f_1(t)}\,\overline{f_2(t)} + \overline{f_2(t)\,f_1(t)}. \tag{24}$$

Полученные формулы справедливы и для пространственно-временного осреднения.

Применим их к уравнениям гидродинамики и энергии в интегральной форме, чтобы затем преобразовать в дифференциальные уравнения.

Согласно последовательному осреднению физическая величина, например скорость жидкого компонента, осредняется по объему жидкости $\Delta V_{1м}$, заключенному в элементе объема смеси ΔV_c. Находим среднее мгновенное значение скорости

$$w_{1м} = \frac{1}{\Delta V_{1м}} \int_{\Delta V_c} w_1\,dV.$$

Чтобы получить скорость первого компонента w_{1V}, осредненную по всему элементу объема смеси, достаточно $w_{1м}$ умножить на мгновенное фазосодержание

$$w_{1V} = \frac{\varphi_{1м}}{\Delta V_c \varphi_{1м}} \int_{\Delta V_c} w_1 \, dV.$$

Но так как $\varphi_{1м} V_c = V_{1м}$, то $w_{1V} = \varphi_{1м} w_{1м}$. Осредненная величина скорости за интервал времени Δt будет

$$\bar{w}_{1n} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \varphi_{1м} w_{1м} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} (\bar{\varphi}_1 \bar{w}_1 + \overline{\varphi_1 w_1}) \, dt$$

или

$$\bar{w}_{1n} = \bar{\varphi}_1 \bar{w}_1 + \overline{\varphi_1 w_1}.$$

Аналогично для второго компонента

$$\bar{w}_{2n} = \bar{\varphi}_2 \bar{w}_2 + \overline{\varphi_2 w_2}$$

и, следовательно, скорость смеси определится суммой приведенных скоростей:

$$w_c = \bar{w}_{1n} + \bar{w}_{2n} = \bar{w}_1 + \bar{\varphi}_2 (\bar{w}_2 - \bar{w}_1) + \overline{\varphi_2 (w_2 - w_1)}.$$

Последовательность осреднения скорости w_1 по объему смеси и времени Δt запишется в виде

$$w_{1n} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \left(\frac{1}{\varphi_{1м} \Delta V_c} \int_{\Delta V_c} w_1 \, dV \right) \varphi_{1м} \, dt. \qquad (25)$$

При экспериментальном исследовании более удобен обратный прием осреднения. Вначале определяется среднелокальная скорость за интервал времени $\Delta t_{1л}$, т. е. за время пребывания компонента смеси в данной точке:

$$w_{1л} = \frac{1}{\Delta t_{1л}} \int_{\Delta t_c} w_1 \, dt.$$

Здесь Δt_c — время пребывания обоих компонентов в данной точке. Осредненная скорость за полное время Δt_c, очевидно, будет равна

$$w_{1t} = \frac{\varphi_{1л}}{\Delta t_c \varphi_{1л}} \int_{\Delta t_c} w_1 \, dt.$$

В этом случае $\varphi_л$ рассматривается как вероятность пребывания того или иного компонента в данной точке. Значит, $\Delta t_{1л} = \Delta t_c \varphi_{1л}$. Следовательно, $w_{1t} = \varphi_{1л} w_{1л}$.

Осредняя затем w_{1t} по объему смеси, получим

$$w_{1n} = \frac{1}{\Delta V_c} \int_{\Delta V_c} \varphi_{1л} w_{1л} \, dV.$$

Однако $\varphi_{1л}$ и $w_{1л}$ уже не имеют временных пульсаций.

Отклонения физической величины от среднего значения возникают вследствие неравномерности распределения фаз и скорости в пространстве. Обозначим эти отклонения теми же символами, но с индексом V. Тогда

$$\varphi_{1л} = \bar{\varphi}_1 + \varphi_{1V} \quad \text{и} \quad w_{1л} = \bar{w}_1 + w_{1V}.$$

Средняя приведенная скорость определится как

$$\bar{u}_{1л} = \bar{\varphi}_1 \bar{w}_1 + \overline{\varphi_{1V} w_{1V}}$$

или

$$w_{1л} = \frac{1}{\Delta V_c} \int_{\Delta V_c} \left(\frac{1}{\Delta t_c \varphi_{1л}} \int_{\Delta t} w_1 \, dt \right) \varphi_{1л} \, dV. \tag{26}$$

Осреднения по (25) и (26) тождественны. Они могут отличаться величинами пульсаций φ и w_1, но при этом

$$\overline{\varphi_1 w_1} \simeq \overline{\varphi_{1л} w_{1л}}$$

УСРЕДНЕННОЕ УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Первый и второй члены уравнения (10) согласно (19) можно осреднить независимо один от другого

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \int_\tau (\varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 \rho_2) \, d\tau} = \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau (\overline{\varphi_1 \rho_1} + \overline{\varphi_2 \rho_2}) \, d\tau,$$

$$\int_\sigma \overline{[\varphi_1 \rho_1 (w_1 \, d\sigma) + \varphi_2 \rho_2 (w_2 \, d\sigma)]} \, d\sigma = \int_\sigma [\overline{\varphi_1 \rho_1 (w_1 \, d\sigma)} + \overline{\varphi_2 \rho_2 (w_2 \, d\sigma)}].$$

Здесь $\overline{\varphi_{1\,(2)} \rho_{1\,(2)}}$ и $\overline{\varphi_{1\,(2)} \rho_{1\,(2)} w_{1\,(2)}}$ уже непрерывные функции времени и координат. В таком случае интеграл на поверхности можно преобразовать по теореме Остроградского — Гаусса в объемный

$$\int_\sigma [\overline{\varphi_1 \rho_1 (w_1 \, d\sigma)}] + \overline{\varphi_2 \rho_2 (w_2 \, d\sigma)}] = \int_\tau \mathbf{div} \, (\overline{\varphi_1 \rho_1 w_1} + \overline{\varphi_2 \rho_2 w_2}) \, d\tau.$$

Переходя к бесконечно малому объему, получим уравнения непрерывности в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\varphi_1 \rho_1} + \overline{\varphi_2 \rho_2}) + \mathbf{div} \, (\overline{\varphi_1 \rho_1 w_1} + \overline{\varphi_2 \rho_2 w_2}) = 0.$$

Течение двухфазной жидкости сопровождается пульсациями давления p, значения которых в большинстве случаев значительно меньше среднего статического давления. Это дает основание давление и плотность компонентов смеси приравнять к их средним значениям

$$p_{1\,(2)} \approx \bar{p}_{1\,(2)}, \quad \rho_{1\,(2)} \approx \bar{\rho}_{1\,(2)}.$$

Тогда, имея в виду $\varphi_{1\,(2)} = \bar{\varphi}_{1\,(2)} + \dot{\varphi}_{1\,(2)}$ и $w_{1\,(2)} = \bar{w}_{1\,(2)} + \dot{w}_{1\,(2)}$, уравнение непрерывности запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1 + \bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2) + \mathbf{div}\,(\bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1\bar{w}_1 + \bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2\bar{w}_2) + \mathbf{div}\,(\bar{\rho}_1\overline{\varphi_1 w_1} + \bar{\rho}_2\overline{\varphi_2 w_2}) = 0.$$

Перейдем от истинных объемных к массовым истинным концентрациям компонентов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Так как

$$\bar{\rho}_c = \bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1 + \bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2 \tag{27}$$

и

$$\varkappa_1 = \frac{\bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_c}, \quad \varkappa_2 = \frac{\bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_c}, \tag{28}$$

средний вектор количества движения смеси будет равен

$$\overline{\varphi\rho_1 w_1} + \overline{\varphi_2\rho_2 w_2} = \bar{\rho}_c\bar{w}_x + \overline{\rho w_x}, \tag{29}$$

где $\bar{w}_x$ — средняя скорость центра массы единицы объема смеси;

$$\begin{aligned} \bar{w}_x &= \overline{\varkappa_1 w_1} + \overline{\varkappa_2 w_2}, \\ \overline{\rho_1 w_x} &= \bar{\rho}_1\overline{\varphi_1 w_1} + \bar{\rho}_2\overline{\varphi_2 w_2}. \end{aligned} \tag{30}$$

Используя (27) и (29), уравнение непрерывности можно записать в более компактном виде:

$$\frac{\partial\bar{\rho}_c}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\bar{\rho}_c\bar{w}_x) + \mathbf{div}\,(\overline{\rho_c w_x}) = 0. \tag{31}$$

Если отсутствует переход одного компонента в фазу другого, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1)}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1\bar{w}_1) + \mathbf{div}\,(\bar{\rho}_1\overline{\varphi_1 w_1}) = 0, \\ &\frac{\partial(\bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2)}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2\bar{w}_2) + \mathbf{div}\,(\bar{\rho}_2\overline{\varphi_2 w_2}) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Средняя скорость смеси или средняя скорость центра единицы объема смеси согласно определению равна

$$\bar{w}_\varphi = \bar{w}_c = \overline{\varphi_1 w_1} + \overline{\varphi_2 w_2}. \tag{33}$$

Соотношение между $\bar{w}_x$ и $\bar{w}_c$ легко найти из среднего вектора количества движения. Разделим и умножим его на $\bar{w}_c$

$$\overline{\rho_c w_x} = \left(\frac{\overline{\varphi_1 w_1}}{\bar{w}_c}\bar{\rho}_1 + \frac{\overline{\varphi_2 w_2}}{\bar{w}_c}\bar{\rho}_2\right)\bar{w}_c.$$

Величины

$$\bar{\beta}_1 = \frac{\overline{\varphi_1 w_1}}{\bar{w}_c} \quad \text{и} \quad \bar{\beta}_2 = \frac{\overline{\varphi_2 w_2}}{\bar{w}_c} \tag{34}$$

представляют собой средние объемные расходные концентрации компонентов, по определению они равны отношениям удельных объемных расходов компонентов к общему объемному удельному расходу смеси. $\varphi_1 w_1$ — объемный расход первого компонента через единицу площади по направлению скорости w_1, а w_c — расход смеси через ту же единицу площади. При этом предполагается, что w_1 и w_2 по направлению совпадают. Следовательно,

$$\overline{\rho_c w_x} = (\bar{\beta}_1 \overline{\rho_1} + \bar{\beta}_2 \overline{\rho_2})\, \overline{w_c}.$$

Обозначив среднюю расходную плотность смеси через

$$\bar{\rho}_\beta = \bar{\beta}_1 \overline{\rho_1} + \bar{\beta}_2 \overline{\rho_2}, \tag{35}$$

найдем, что

$$\overline{\rho w_x} = \bar{\rho}_\beta \overline{w_c}. \tag{36}$$

Последнее равенство мы используем при выводе усредненного уравнения движения смеси.

УСРЕДНЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Принимая во внимание $p \approx \bar{p}$ и $\rho_{1\,(2)} \approx \bar{\rho}_{1\,(2)}$, усредним интегральное уравнение (13), причем значение вектора массовой силы тоже приравняем к среднему значению:

$$\int_\tau \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho_1\varphi_1 w_1} + \overline{\rho_2\varphi_2 w_2}\right) - \left(\overline{\varphi_1\rho_1} + \overline{\varphi_2\rho_2}\right)\right] d\tau =$$

$$= \int_\sigma \left[\overline{\varphi_1 \Pi_1} + \overline{\varphi_2 \Pi_2} - \left(\overline{\varphi_1 p_1} + \overline{\varphi_2 p_2}\right) I\right] d\sigma -$$

$$- \int_\sigma \left[\overline{\rho_1\varphi_1 w_1 (w_1\, d\sigma)} + \overline{\rho_2\varphi_2 w_2 (w_2\, d\sigma)}\right].$$

Поскольку все величины рассматриваем как непрерывные функции времени и координат, можно перейти от поверхностных интегралов к объемным и получить дифференциальное уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho_1\varphi_1 w_1} + \overline{\rho_2\varphi_2 w_2}\right) - \left(\overline{\varphi_1\rho_1} + \overline{\varphi_2\rho_2}\right) a = \mathbf{div}\left(\overline{\varphi_1\Pi_1} + \overline{\varphi_2\Pi_2}\right) -$$

$$- \nabla\left(\overline{\varphi_1 p_1} + \overline{\varphi_2 p_2}\right) - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho_1\varphi_1 w_1 w_{1i}} + \overline{\rho_2\varphi_2 w_2 w_{2i}}\right). \tag{37}$$

Объемное содержание компонентов, тензоры вязких напряжений и скорости согласно (15) рассматриваем соответственно как

$$\varphi_{1\,(2)} = \bar{\varphi}_{1\,(2)} + \dot{\varphi},$$

$$\Pi_{1\,(2)} = \bar{\Pi}_{1\,(2)} + \dot{\Pi}_{1\,(2)},$$

$$w_{1\,(2)} = \bar{w}_{1\,(2)} + \dot{w}_{1\,(2)}.$$

В таком случае уравнение (37) согласно правилам усреднения будет включать все средние значения и средние из произведения пульсационных величин, а произведения вида $\overline{\rho\varphi}$ выпадут как равные нулю, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1\bar{w}_1+\bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2\bar{w}_2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho_1\varphi_1 w_1}+\overline{\rho_2\varphi_2 w_2}\right)-$$

$$-a\left(\bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1+\bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2\right)=\mathbf{div}\left(\bar{\varphi}_1\bar{\Pi}_1+\bar{\varphi}_2\bar{\Pi}_2\right)-\nabla\left(\bar{\varphi}_1\bar{p}_1+\bar{\varphi}_2\bar{p}_2\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1\bar{w}_1\bar{w}_{1i}+\bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2\bar{w}_2\bar{w}_{2i}\right)+\mathbf{div}\left(\overline{\varphi_1\Pi_1}+\overline{\varphi_2\Pi_2}\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\bar{\rho}_1\left(\overline{\varphi_1 w_1 w_{1i}}+\bar{w}_1\overline{\varphi_1 w_{1i}}+\bar{\varphi}_1\overline{w_1 w_{1i}}+\overline{\varphi_1 w_1 w_{1i}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\bar{\rho}_2\left(\overline{\varphi_2 w_2 w_{2i}}+\bar{w}_2\overline{\varphi_2 w_{2i}}+\bar{\varphi}_2\overline{w_2 w_{2i}}+\overline{\varphi_2 w_2 w_{2i}}\right)\right]. \qquad (38)$$

Здесь дивергенцией тензора $\overline{\Pi}=\bar{\varphi}_1\overline{\Pi}_1+\bar{\varphi}_2\overline{\Pi}_2$ обозначено

$$\mathbf{div}\,\overline{\Pi}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Pi}_i=i\left(\frac{\partial\overline{\Pi}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\Pi}_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\Pi}_{zx}}{\partial z}\right)+$$

$$+j\left(\frac{\partial\overline{\Pi}_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\Pi}_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\Pi}_{zy}}{\partial z}\right)+k\left(\frac{\partial\overline{\Pi}_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\Pi}_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\Pi}_{zz}}{\partial z}\right).$$

Уравнение (38) показывает, что к средним вязким напряжениям Π добавляются турбулентные напряжения, возникающие вследствие суммарного эффекта всех беспорядочных отклонений скоростей и истинных концентраций от их средних значений. По направлению осей координат изменение полных напряжений составит

$$\tau'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{\Pi}_{xx}+\overline{\varphi_1\Pi_{1xx}}+\overline{\varphi_2\Pi_{2xx}}-\bar{\rho}_1\left(\bar{\varphi}_1\overline{w_{1x}w_{1x}}+\bar{w}_{1x}\overline{\varphi_1 w_{1x}}+\right.\right.$$

$$+\bar{w}_{1x}\overline{\varphi_1 w_{1x}}+\overline{\varphi_1 w_{1x}\bar{w}_{1x}})-\bar{\rho}_2\left(\overline{\varphi_2 w_{2x}w_{2x}}+\bar{w}_{2x}\overline{\varphi_2 w_{2x}}+\right.$$

$$\left.\left.+\bar{w}_{2x}\overline{\varphi_2 w_{2x}}+\overline{\varphi_2 w_{2x}w_{2x}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{\Pi}_{yx}+\overline{\varphi_1\Pi_{1yx}}+\overline{\varphi_2\Pi_{2yx}}-\right.$$

$$-\rho_1\left(\bar{\varphi}_1\overline{w_{1x}w_{1y}}+\bar{w}_{1x}\overline{\varphi_1 w_{1y}}+\bar{w}_{1y}\overline{\varphi_1 w_{1x}}+\bar{\varphi}_1\overline{w_{1x}w_{1y}}\right)-$$

$$\left.-\rho_2\left(\bar{\varphi}_2\overline{w_{2x}w_{2y}}+\bar{w}_{2x}\overline{\varphi_2 w_{2y}}+\bar{w}_{2y}\overline{\varphi_2 w_{2x}}+\overline{\varphi_2 w_{2x}w_{2y}}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}[\overline{\Pi}_{zx}+\overline{\varphi_1\Pi}_{1z}+\overline{\varphi_2\Pi}_{2z}-\bar{\rho}_1(\overline{\varphi_1 w_{1x}w_{1z}}+\bar{w}_{1x}\overline{\varphi_1 w_{1z}}+$$

$$+\bar{w}_{1z}\overline{\varphi_1 w_{1x}}+\overline{\varphi_1 w_{1x}w_{1z}}-\bar{\rho}_2(\overline{\varphi_2 w_{2x}w_{2z}}+\bar{w}_{2x}\overline{\varphi_2 w_{2z}}+\bar{w}_{2z}\overline{\varphi_2 w_{2x}}+\overline{\varphi_2 w_{2x}w_{2z}}] \tag{39}$$

и аналогично для τ'_y и τ'_z.

Если пренебречь пульсациями объемных концентраций ($\varphi_{1(2)}=0$), то уравнение (38) почти точно совпадает с уравнениями С. Г. Телетова. Разница в том, какой смысл вложен под черту усреднения — временное, пространственно-временное или какое-либо другое усреднение.

Франкль приравнивает тензоры напряжения первого и второго компонента к среднему тензору смеси, т. е. $\overline{\Pi}_1=\overline{\Pi}_2=\overline{\Pi}$. Тогда для тензора отдельного компонента, отнесенного к единице объема смеси, получаем

$$\overline{\Pi}_{1V}=\overline{\varphi_1\Pi} \quad \text{и} \quad \overline{\Pi}_{2V}=\overline{\varphi_2\Pi}.$$

Эта неточность устраняется при переходе от уравнений для отдельных компонентов к совместным уравнениям для смеси, так как

$$\Pi=\varphi_1\Pi+\varphi_2\Pi=(\varphi_1+\varphi_2)\,\Pi, \quad \varphi_1+\varphi_2=1.$$

Уравнение (38) можно записать в более простом виде. Для этого обозначим

$$\overline{\varphi_1\rho_1 w_1 w_{1i}+\varphi_2\rho_2 w_2 w_{2i}}=\bar{\varphi}_1\bar{\rho}_1\bar{w}_1\bar{w}_{1i}+\bar{\varphi}_2\bar{\rho}_2\bar{w}_2\bar{w}_{2i}+\bar{T}_i,$$

где

$$\bar{T}_i=\bar{\rho}_1(\overline{\varphi_1 w_1 w_{1i}}+\bar{w}_1\overline{\varphi_1 w_{1i}}+\bar{w}_{1i}\overline{\varphi_1 w_1}+\overline{\varphi_1 w_1 w_{1i}})+$$

$$+\bar{\rho}_2(\overline{\varphi_2 w_2 w_{2i}}+\bar{w}_2\overline{\varphi_2 w_{2i}}+\overline{w_{2i}\varphi_2 w_2}+\overline{\varphi_2 w_2 w_{2i}}).$$

Разделив и умножив последнее усредненное выражение на $\rho_\varphi w_{\gamma i}=\rho_\beta w_{\varphi i}$, получим

$$\overline{\varphi_1\rho_1 w_1 w_{1i}+\varphi_2\rho_2 w_2 w_{2i}}=\bar{\rho}_\varphi\bar{w}_\tau\bar{w}_{\gamma i}+\bar{T}_i.$$

Осредняя произведение трех величин, можно символически записать

$$\bar{T}_i=\bar{\rho}_\varphi\overline{w_\eta w_{\gamma i}}+\bar{w}_\tau\overline{\rho_\varphi w_{\gamma i}}+\bar{w}_{\gamma i}\overline{\rho_\varphi w_\tau}+\overline{\rho_\varphi w_\eta w_{\gamma i}},$$

где $\bar{w}_\tau$ — скорость движения центра массы выделенной частицы смеси; η_1 и η_2 — массовые расходные концентрации компонентов, средние значения которых равны

$$\bar{\eta}_1=\frac{\overline{\varphi_1 w_1\rho_1}}{\bar{w}_c\bar{\rho}_\beta}, \quad \bar{\eta}_2=\frac{\overline{\varphi_2 w_2\rho_2}}{\bar{w}_c\bar{\rho}_\beta}.$$

Из формул (31) и (37) имеем:

$$-\nabla\bar{p}=\bar{\rho}_c\left[\frac{\partial\bar{w}_x}{\partial t}+(\bar{w}_x\nabla)\bar{w}_\eta\right]-a\bar{\rho}_c-\mathbf{div}\,\bar{\bar{\Pi}}-(\bar{w}_\eta-\bar{w}_x)\frac{\partial\bar{\rho}_c}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial\dot{\rho}_c\dot{w}_x}{\partial t}-\mathbf{div}\,\dot{\bar{\Pi}}-\bar{w}_\eta\,\mathbf{div}\,(\overline{\rho w}_x)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{T}_i, \qquad (40)$$

где

$$\bar{\bar{\Pi}}=\overline{\varphi_1\Pi_1}+\overline{\varphi_2\Pi_2}.$$

Уравнение (40) отличается от уравнения движения для однофазной жидкости лишь тем, что в него добавлены напряжения, зависимые от относительного движения компонентов.

Статическое давление смеси включает давления компонентов смеси p_1 и p_2, которые различаются между собой капиллярным давлением. Для газо-жидкостных смесей капиллярное давление выражается через среднее поверхностное натяжение $\bar{\sigma}$ и среднюю кривизну поверхности раздела фаз $1/R$, т. е. $\bar{p}_2=\bar{p}_1+(2\bar{\sigma}/R)$. По Лапласу $1/R=1/R'+1/R''$, где R' и R'' — главные средние радиусы кривизны поверхности раздела фаз, проходящие через данную точку. В большинстве случаев капиллярным давлением можно пренебречь. Поэтому $\bar{p}\approx\bar{p}_1\approx\bar{p}_2$.

Уравнение (40) упрощается для стационарного течения смеси с относительно большими скоростями, когда относительная скорость компонентов очень мала. В этом случае газосодержание истинное равно расходному: $\bar{\varphi}_{1\,(2)}=\bar{\beta}_{1\,(2)}$ или $\bar{\varkappa}_{1\,(2)}=\bar{\eta}_{1\,(2)}$ и, следовательно, $\bar{w}_x=\bar{w}_\eta=\bar{w}_c$ и $\bar{\rho}_c=\rho_\beta$. Поэтому

$$\nabla\bar{p}=\bar{\rho}_c[(\bar{w}_c\nabla)\bar{w}_c-a]-\mathbf{div}\,\bar{\bar{\Pi}}+\overline{\dot{\rho}_c(\dot{w}_c\nabla)w_c}+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}_c\overline{\dot{w}_c\dot{w}_i}+w_i\overline{\rho_c w_c}+\overline{\rho_c w_c w_i}\right). \qquad (41)$$

Уравнение (41) полностью совпадает с уравнением движения сжимаемой жидкости. Система из четырех уравнений (31) и (38), если считать известными тензоры пульсационных напряжений, содержит 17 неизвестных: девять составляющих тензора полных вязких напряжений $\bar{\Pi}_{ik}$, давление $\bar{p}$, газосодержание $\bar{\varphi}$ и шесть составляющих скоростей компонентов $\bar{w}_{1i}$ и $\bar{w}_{2i}$.

Плотности компонентов — известные функции давления и температуры. Для плоского двухкомпонентного потока жидкости с малыми объемными и массовыми концентрациями взвешенных твердых частиц Г. И. Баренблатт [6] замыкает систему дифференциальных уравнений и дает их решение. При этом предполагается малость частиц по сравнению с величиной средней неоднородности структуры

течения и используются идеи А. Н. Колмогорова о балансе пульсационной энергии однофазного течения применительно к течению двухкомпонентной смеси.

УСРЕДНЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

В результате осреднения, преобразования поверхностных интегралов в объемные и перехода к бесконечно малому объему уравнение (14) запишется в виде

$$-g\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{\rho_1\varphi_1}\,\overline{u_1}+\overline{\rho_2\varphi_2}\,\overline{u_2}+\frac{A}{2g}\left(\overline{\rho_1\varphi_1}\,\overline{w_1^2}+\overline{\rho_2\varphi_2}\,\overline{w_2^2}\right)\right]=$$

$$=A\left\{\mathbf{div}\left[\overline{(\varphi_1 w_1+\varphi_2 w_2)}\,\bar{p}\right]\right\}-\mathbf{div}\left[\overline{\varphi_1(w_1\Pi_1)}+\overline{\varphi_2(w_2\Pi_2)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\,\mathbf{div}\left(\overline{\rho_1\varphi_1 w_1^2 w_1}+\overline{\rho_2\varphi_2 w_2^2 w_2}\right)\Big\}+g\,\mathbf{div}\left(\overline{\rho_1\varphi_1 u_1 w_1}+\overline{\rho_2\varphi_2 u_2 w_2}+\right.$$

$$\left.+\mathbf{div}\,\bar{q}-A\left[\overline{\rho_1\varphi_1}\,\overline{(w_1 a_1)}+\overline{\rho_2\varphi_2}\,\overline{(w_2 a_2)}\right]\right. \qquad (42)$$

Это и есть уравнение энергии двухфазной смеси, написанное в усредненном виде.

Внутреннюю и кинетическую энергию единицы объема смеси выразим через плотность ρ_c и через внутреннюю $\overline{u_x}=\overline{\varkappa_1 u_1}+\overline{\varkappa_2 u_2}$ и кинетическую $\overline{w_\gamma^2}=\overline{\varkappa_1 w_1^2}+\overline{\varkappa_2 w_2^2}$ энергию единицы массы смеси. Будем иметь

$$\overline{\rho_1\varphi_1}\,\overline{u_1}+\overline{\rho_2\varphi_2}\,\overline{u_2}=\overline{\rho_c u_\gamma},$$

$$\overline{\rho_1\varphi_1}\,\overline{w_1^2}+\overline{\rho_2\varphi_1}\,\overline{w_2^2}=\overline{\rho_c w_x^2}.$$

Отметим далее, что члены переноса внутренней и кинетической энергий аналогичным образом выразятся соответственно

$$\overline{\rho_1\varphi_1 u_1 w_{1i}}+\overline{\rho_2\varphi_2 u_2 w_{2i}}=\overline{u_\eta w_{xi}\rho_c},$$

$$\overline{\rho_1\varphi_1 w_1^2 w_{1i}}+\overline{\rho_2\varphi_2 w_2^2 w_{2i}}=\overline{w_\eta w_{xi}\rho_c},$$

где

$$\overline{u_\eta}=\overline{\eta_1 u_1}+\overline{\eta_2 u_2},$$

$$\overline{w_\eta^2}=\overline{\eta_1 w_1^2}+\overline{\eta_2 w_2^2}.$$

Дивергенция работы вязких напряжений и массовых сил согласно принятым выше обозначениям запишется как

$$\mathbf{div}\left[\overline{\varphi_1}\,\overline{(w_1\Pi_1)}+\overline{\varphi_2}\,\overline{(w_2\Pi_2)}\right]=\mathbf{div}\,\overline{(w_c\Pi_\beta)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{w_x\Pi_{\beta ix}}+\overline{w_y\Pi_{\beta iy}}+\overline{w_z\Pi_{\beta iz}}\right),$$

$$\overline{\rho_1\varphi_1}\,\overline{(w_1 a)}+\overline{\rho_2\varphi_2}\,\overline{(w_2 a)}=a\overline{\rho_c w_x},$$

где в тензор вязких напряжений входят не истинные, а расходные концентрации, т. е. $\overline{\Pi_\beta}=\overline{\beta_1\Pi_1}+\overline{\beta_2\Pi_2}$.

Ввиду того что пульсации давления незначительны по сравнению со средним статическим давлением, пульсациями внутренней энергии компонентов смеси можно пренебречь. Величиной пульсаций объемных концентраций, вызванных структурой течения смеси, также можно пренебречь. Тогда уравнение энергии в новых переменных будет

$$-g\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\rho}_c\left(\bar{u}_x+\frac{A}{2g}\,\bar{w}_x^2\right)\right]=A\left\{\mathbf{div}\,(\overline{w_c p})-\mathbf{div}\,(\bar{w}_c\bar{\Pi}_\beta)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,\mathbf{div}\,(\overline{w_\eta^2}\bar{\rho}_c\bar{w}_x)-a\bar{\rho}_c\bar{w}_x\right\}+g\,\mathbf{div}\,(\bar{u}_\eta\bar{\rho}_c\bar{w}_x)+$$

$$+\mathbf{div}\,q-A\left[\mathbf{div}\,(\overline{w_c\Pi_\beta})-\frac{1}{2}\,\mathbf{div}\,(\overline{\rho w_\eta^2 w_x})\right]. \qquad (43)$$

Во многих частных случаях дозвуковых течений смесей в каналах различной геометрической формы пренебрегают энергией не только турбулентных, но и общих вязких напряжений.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ СМЕСИ В КАНАЛАХ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

При решении многих задач гидродинамики двухфазной жидкости прибегают к использованию экспериментальных данных по гидравлическим сопротивлениям, относительным скоростям компонентов, пульсациям давления, формам течения и другим величинам, характеризующим течение. Сопротивление трения определяют путем обобщения опытных данных. Относительные скорости компонентов, или, как их часто называют, скольжение, находят в большинстве случаев из опытных данных по истинному и расходному газосодержанию. Что касается форм течения, то большинство исследователей приходит к выводу о существовании трех основных структур: разделенной, пробковой (крупнопузырчатой) и эмульсионной. Пленочное (кольцевое) течение хотя и имеет свои особенности, тем не менее его надо отнести к разделенному течению.

Не вдаваясь в детали отдельных исследований (о них речь будет идти ниже), напишем основные уравнения гидродинамики и энергии в одномерном виде для течения смеси в каналах постоянного сечения (трубах).

Уравнение непрерывности после интегрирования по сечению потока имеет вид

$$\frac{\partial\bar{\bar{\rho}}_c}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\bar{\rho}}_c\bar{\bar{w}}_x\right)=0 \qquad (44)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\bar{\rho}}_1\bar{\bar{\varphi}}_1+\bar{\bar{\rho}}_2\bar{\bar{\varphi}}_2\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\bar{\bar{\varphi}}_1\bar{\bar{\rho}}_1\bar{\bar{w}}_1+\bar{\bar{\varphi}}_2\bar{\bar{\rho}}_2\bar{\bar{w}}_2\right]=0. \qquad (44')$$

Здесь $\overline{\overline{\rho_c}}$ и $\overline{\overline{w_c}}$, $\overline{\overline{w_1}}$, $\overline{\overline{w_2}}$ осреднены не только во времени, но и по сечению потока

$$\overline{\overline{\rho_c}} = \frac{2}{R^2}\int_0^R (\bar{\varphi}_1\rho_1 + \bar{\varphi}_2\rho_2)\, r\, dr,$$

$$\overline{\overline{w_x}} = \frac{2}{R^2}\int_0^R (\bar{\varkappa}_1\bar{w}_1 + \bar{\varkappa}_2\bar{w}_2)\, r\, dr,$$

где r — радиальная координата.

В уравнении (38) вектор массовой силы заменим ускорением свободного падения, а суммарный тензор вязких и турбулентных напряжений представим в виде суммарного касательного напряжения. Тогда уравнение движения для элементарной струи запишется в виде

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\rho_c \cos(g, z) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho}_c \bar{w}_x^2) + \frac{\partial (r\bar{\tau})}{r\, dr} + \rho_c \frac{\partial \bar{w}_\gamma}{\partial t} - (\bar{w}_\eta - \bar{w}_x)\frac{\partial \bar{\rho}_c}{\partial t};$$

где $\frac{1}{r}\frac{\partial (r\bar{\tau})}{\partial r}$ — усредненный во времени градиент касательного вязкого и турбулентного напряжения.

Проинтегрируем это уравнение по сечению потока

$$-\int_0^R \frac{\partial \bar{p}}{dz}\, r\, dr = -\int_0^R g\rho_c \cos(g, z)\, r\, dr + \int_0^R \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho}_c \bar{w}_x^2)\, r\, dr +$$

$$+ R\overline{\overline{\tau_\varphi}} + \int_0^R \left[\bar{\rho}_c \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial t} - (\bar{w}_\eta - \bar{w}_x)\frac{\partial \rho_c}{\partial t}\right] r\, dr.$$

Как показывает опыт, для умеренных размеров трубопровода давление практически остается постоянным по сечению потока. Следовательно, для выделенного сечения потока можно принять постоянными и плотности компонентов. В таком случае после интегрирования будем иметь

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\overline{\overline{\rho_c}} \cos(g, z) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\overline{\rho_c}}\,\overline{\overline{w_x}}\,\overline{\overline{w_\eta}}) + \frac{4}{D}\overline{\overline{\tau_\varphi}} + \overline{\overline{\rho_c}}\frac{\partial \overline{\overline{w_2}}}{\partial t} + \overline{\overline{w_x}}\frac{\partial \overline{\overline{\rho_c}}}{\partial t} \qquad (45)$$

или

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -[\overline{\overline{\varphi_1}}\,\overline{\overline{\rho_1}} + \overline{\overline{\varphi_2}}\,\overline{\overline{\rho_2}}]\, g\cos(g, z) + \frac{4\bar{\tau}_\varphi}{D} + \overline{\overline{\varphi_1}}\,\overline{\overline{\rho_1}}\left(\frac{\partial \overline{\overline{w_1}}}{\partial t} + \overline{\overline{w_1}}\frac{\partial \overline{\overline{w_1}}}{\partial z}\right) +$$

$$+ \overline{\overline{\varphi_2}}\,\overline{\overline{\rho_2}}\left(\frac{\partial \overline{\overline{w_2}}}{\partial t} + \overline{\overline{w_2}}\frac{\partial \overline{\overline{w_2}}}{\partial z}\right) + (\overline{\overline{w_2}} - \overline{\overline{w_1}})\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{\overline{\varphi_2}}\,\overline{\overline{\rho_2}} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\overline{\varphi_2}}\,\overline{\overline{\rho_2}}\,\overline{\overline{w_2}}\right), \qquad (45')$$

где, как в уравнении непрерывности, газосодержание и касательные напряжения на стенках трубы представляют собою средние во времени и по сечению потока величины

$$\overline{\overline{\varphi}} = \frac{2}{R^2}\int_0^R \overline{\varphi} r\, dr,$$

$$\overline{\overline{\tau_\varphi}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\overline{\varphi_1}\overline{\tau_1} + \overline{\varphi_2}\overline{\tau_2})\, d\theta.$$

Уравнение (45) показывает, что полный градиент давления при течении смеси в трубах определяется суммой градиентов силы свободного падения и выражается истинной плотностью смеси с учетом угла наклона трубы, импульса давления, возникающего в результате сжимаемости смеси и относительной скорости компонентов, касательных напряжений или сил трения и градиента давления, возникающего вследствие нестационарности течения отдельных компонентов.

Пользуясь средними во времени и по сечению потока величинами, можно написать уравнение энергии в одномерном виде. Под q будем подразумевать поток тепла к смеси извне, от стенок трубы, пренебрегая теплопроводностью по направлению течения.

Приток тепла к смеси

$$\overline{\overline{q}} = \frac{d}{dV}\int_\sigma \overline{q}\, d\sigma = -\frac{d}{dV}\int_V \frac{4}{D}\overline{q}\, dV = -\frac{4}{D}\overline{q}.$$

Тепловой поток $4q/D$ будет соответствовать $\operatorname{div} q$ в общем уравнении энергии.

Переходя от удельного теплового потока к потоку тепла, отнесенному к единице расхода смеси, получим

$$\overline{\overline{q}} = \frac{4}{\pi D^2}\overline{\overline{q}}_z = -\frac{d}{dz}(\overline{\overline{\rho_c}}\,\overline{\overline{w}}_x\overline{Q}).$$

Здесь q_z — тепло, отнесенное к единице длины трубы.

Работу вязких и турбулентных напряжений смеси выразим через парциальные работы касательных напряжений компонентов. Она, очевидно, для единицы объема смеси будет равна

$$\overline{\overline{w_\tau}} = \frac{4}{D}(\overline{\overline{\varphi_1}}\,\overline{\overline{w}}_1\overline{\tau_1} + \overline{\overline{\varphi_2}}\,\overline{\overline{w}}_2\overline{\tau_2}).$$

Принимая во внимание выражение для $\overline{\overline{q}}$ и $\overline{\overline{W}}_\tau$, уравнение энергии (44) при одномерном течении запишется в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_c\left(\frac{1}{A}\overline{\overline{u}}_x + \frac{1}{2g}\overline{\overline{w}}_x^2\right) + \frac{1}{2g}\overline{\overline{w}}_x^2\right] = -\overline{\overline{\rho_c}}\,\overline{\overline{w}}_x\left[\cos(g, z) - \frac{4}{D}\overline{\overline{\tau_\beta}}\,\overline{\overline{V}}_\tau\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\overline{\overline{\rho_c}}\,\overline{\overline{w}}_x\left[\frac{1}{A}(\overline{\overline{i}}_\eta - \overline{Q}) + \frac{1}{2g}(\overline{w_\eta^2} + 3\overline{\overline{w}}_\eta^2)\right]\right\}. \qquad (46)$$

Здесь, как и в других предыдущих уравнениях, предполагается, что все величины осреднены по времени и по сечению потока. Касательное напряжение τ_β и энтальпия i_η в отличие от τ_φ и i_x выражаются через расходные фазосодержания

$$\tau_\beta = \beta_1\tau_1 + \beta_2\tau_2,$$

$$i_\eta = \eta_1 i_1 + \eta_2 i_2 = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + p(\eta_1 v_1 + \eta_2 v_2).$$

Левая часть уравнения представляет изменение истинных тепловой, кинетической и средней пульсационной энергий единицы объема смеси вследствие работы сил свободного падения, трения, давления и притока тепловой и кинетической энергии. В дальнейшем для сокращения будем опускать значки осреднения, оставив их в виде одной черты у средних квадратичных скоростей смеси. Для стационарного течения уравнение непрерывности будет характеризовать постоянство массового расхода смеси

$$\rho_c w_x = G \tag{47}$$

или

$$\rho_1\varphi_1 w_1 + \rho_2\varphi_2 w_2 = G. \tag{47'}$$

Уравнения движения (45) и (45') для стационарного движения будут иметь вид

$$-\frac{dp}{dz} = -g\rho_c \cos(g, z) + \rho_c w_x \frac{d}{dz} w_\eta + \frac{4}{D}\tau_\varphi \tag{48}$$

или

$$-\frac{dp}{dz} = -g(\varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2)\cos(g, z) + \frac{d}{dz}(\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2) + \frac{4}{D}\tau_\varphi. \tag{48'}$$

Имея в виду, что $\rho_c w_x = \text{idem}$, уравнение энергии для единицы массы смеси запишется в виде

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{A}(i_\eta - Q) + \frac{1}{2g}(\overline{w}_\eta^2 + 3\overline{w}_\eta^2)\right] = \cos(g, z) - \frac{4}{D}\tau_\beta v_\eta. \tag{49}$$

Уравнение (49) — основное уравнение первого закона термодинамики для стационарного течения двухфазной жидкости. Во многих практических расчетах дозвуковых течений при подводе тепла или охлаждении смеси можно пренебречь работой сил свободного падения и средней энергией пульсационного движения. Тогда (49) приобретает известный в термогидродинамике вид

$$i_\eta + \frac{A}{2g}\overline{w}_\eta^2 - Q = \text{idem}. \tag{50}$$

Этим выражением часто пользуются для определения массового и объемного паросодержания в двухфазном потоке. Действительно, если пренебречь и кинетической энергией потока, то

$$\eta = \frac{i_0 - i_1 + Q}{i_2 - i_1},$$

а если тепло отводится, то

$$\eta = \frac{i_0 - i_1 - Q}{i_2 - i_1}.$$

Пренебрегая средней энергией пульсационного движения, придадим уравнению (49) другой вид. Вычтем из правой и левой частей уравнения $v_\eta\,(dp/dz)$, причем в правую часть подставим значение градиента давления из (48). После несложных преобразований получим

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{dQ}{dz}=\frac{1}{A}\cdot\frac{di_\eta}{dz}-v_\eta\frac{dp}{dz}+\left(\frac{v_\eta}{v_x}-1\right)\cos(g,\,z)+$$

$$+\frac{1}{g}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{d\overline{w_\eta^2}}{dz}-w_c\frac{dw_\eta}{dz}\right]+\frac{4v_\eta}{D}(\tau_\beta-\tau_\varphi). \qquad (51)$$

Выразим относительную работу сил свободного падения, инерционных сил и вязких напряжений через концентрации компонентов и их скорости. Получим

$$\frac{v_\eta}{v_x}-1=v_\eta g(\rho_1-\rho_2)(\beta-\varphi),$$

$$\tau_\beta-\tau_\varphi=(\tau_2-\tau_1)(\beta-\varphi),$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\overline{w_\eta^2}}{dz}-w_c\frac{dw_\eta}{dz}=\left[\varphi_1\frac{d(\eta_2 w_2)}{dz}-\right.$$

$$\left.-\varphi_2\frac{d(\eta_1 w_1)}{dz}-\frac{w_1+w_2}{2}\cdot\frac{d\eta_2}{dz}\right]\frac{w_c}{\varphi_1\varphi_2}(\beta-\varphi).$$

Если относительная скорость компонентов равна нулю или, что одно и то же, $\beta-\varphi=0$, то тепло, подведенное к единице массы смеси, выразится через энтропию S смеси

$$\frac{1}{A}T\,dS=\frac{1}{A}di_\eta-v_\eta\,dp.$$

При неравенстве скоростей компонентов

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{dQ}{dz}=\frac{1}{A}\cdot\frac{di_\eta}{dz}-v_\eta\frac{dp}{dz}+(\beta-\varphi)v_\eta g(\rho_1-\rho_2)\cos(g,\,z)+$$

$$+\frac{4}{D}(\tau_2-\tau_1)+\frac{1}{g}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d\overline{w_\eta^2}}{dz}-w_c\frac{dw_\eta}{dz}\right). \qquad (52)$$

ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРЕНИЯ

В настоящее время не представляется возможным проанализировать тензоры вязких и турбулентных напряжений, так как не имеется экспериментальных данных по измерению локальных величин. Поэтому с целью замыкания системы уравнений и экспериментального исследования касательные напряжения τ_1 и τ_2, как и в начальной стадии изучения движения однородной жидкости, выразим через средние в сечении трубы скорость, плотность и коэффициент гидравлического сопротивления λ. В дальнейшем экспериментально

будет доказано, что форма такого представления должна быть разной в зависимости от структуры течения (пробковой или разделенной).

Пробковая структура течения

Эта форма течения газо-жидкостной смеси, называемая иногда снарядной, четочной, характеризуется тем, что граница раздела между газом и жидкостью не является четкой и устойчивой. Пробковая структура включает в себя мелкопузырьковое, эмульсионное и другие переходные формы течения.

Для этой структуры будем считать

$$\tau_1 = \frac{\lambda_c}{8}\rho_1 w_1^2, \quad \tau_2 = \frac{\lambda_c}{8}\rho_2 w_2^2.$$

Следовательно, суммарное выражение для вязких и турбулентных напряжений имеет вид

$$\tau_\varphi = \frac{\lambda_c}{8}(\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2). \tag{53}$$

Подставив это соотношение в уравнения (48) и (48′), получим

$$-\frac{dp}{dz} = -g\rho_c \cos(g, z) + \rho_c w_x \frac{dw_\eta}{dz} + \frac{\lambda_c}{2D}\rho_c w_\gamma w_\eta \tag{54}$$

или

$$-\frac{dp}{dz} = -g\rho_c \cos(g, z) + \frac{d}{dz}(\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2) + \frac{\lambda_c}{2D}[\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2]. \tag{55}$$

Последнее уравнение может быть использовано при исследовании коэффициента гидравлического сопротивления λ_c, для определения которого необходимо изучить истинное фазосодержание φ.

В дальнейшем (гл. 2) на основании теории подобия из уравнений гидродинамики будут получены критерии, от которых следует искать зависимость для λ_c и φ.

Условно вместо истинной кинетической энергии смеси вида (53) можно принять

$$\tau = \frac{\lambda_y}{8}\rho_\beta w_c^2, \tag{56}$$

где

$$\rho_\beta = \beta_1\rho_1 + \beta_2\rho_2, \quad w_c = \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2 = \overline{w}_1 + \overline{w}_2.$$

В этом случае для определения условного коэффициента гидравлического сопротивления λ_y при горизонтальном течении смеси пренебрегают инерционными силами и используют уравнение

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda_y}{2D}\rho_\beta w_c^2. \tag{57}$$

Если в основу обработки экспериментального материала положить уравнение (57), то можно не определять истинную концентрацию фаз φ. В этом случае находят только потери на трение, плотность же смеси $\rho_c = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2$ без φ установить нельзя.

Расслоенная структура течения

Четкая и устойчивая граница раздела между газом и жидкостью, определяющая расслоенную структуру, позволяет записать уравнения движения раздельно для газовой и жидкостной фаз смеси.

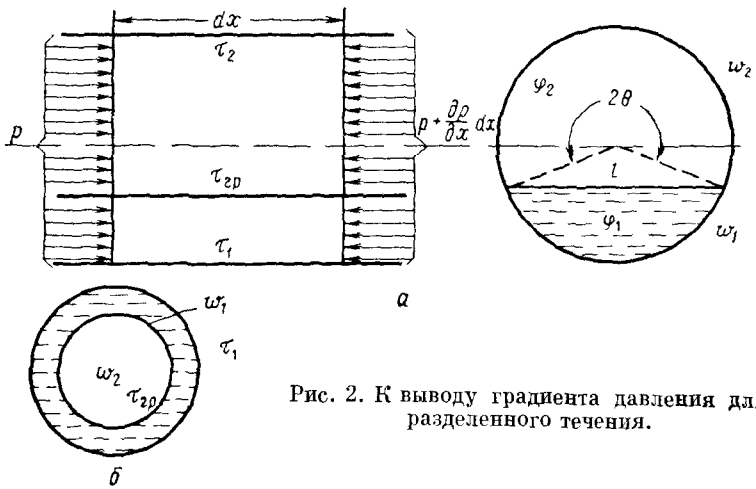


Рис. 2. К выводу градиента давления для разделенного течения.

При этом вводится внутренняя сила взаимного сопротивления компонентов, которая пропорциональна квадрату относительной скорости движения фаз с коэффициентом взаимодействия $\lambda_{гр}$.

Если касательные напряжения на периметре трубы, омываемой газом (жидкостью), части периметра трубы, занятые газом (жидкостью), части сечения трубы, занятые газом (жидкостью), касательное напряжение на границе раздела фаз и границу раздела фаз обозначить соответственно через $\tau_{2\,(1)}$, $U_{2\,(1)}$, $F_{2\,(1)}$, $\tau_{гр}$ и l (рис. 2), то уравнение движения (48′) можно записать в двух видах:

$$\begin{aligned} -\varphi_1 \frac{dp}{dz} &= -g\varphi_1\rho_1 \cos(g, z) + \frac{4U_1}{F}\tau_1 + \frac{l}{F}\tau_{гр}, \\ -\varphi_2 \frac{dp}{dz} &= -g\varphi_2\rho_2 \cos(g, z) + \frac{4U_2}{F}\tau_2 - \frac{l}{F}\tau_{гр}. \end{aligned} \tag{58}$$

В случае собственно разделенного горизонтального течения в трубе (рис. 2, *а*) в уравнениях (58) все члены имеют физический смысл. При пленочном (кольцевом) течении (рис. 2, *б*), которое является осесимметричным лишь в вертикальном потоке, только жидкость смачивает внутренние стенки трубы, газ движется в центре кольца. Поэтому $\frac{U_2}{F}\tau_2 = 0$. В данном случае, как обычно, принимаем

$$\tau_2 = \frac{\lambda_2}{8}\rho_2 w_2^2, \quad \tau_1 = \frac{\lambda_1}{8}\rho_1 w_1^2. \tag{59}$$

Касательное напряжение на границе раздела представим в виде

$$\tau_{гр} = \frac{\lambda_{гр}}{8}(\rho_1 - \rho_2) w_{от}^2. \tag{60}$$

Истинное газосодержание и периметры трубы, смоченные газом и жидкостью, выразим через центральный угол 2θ, стягивающий хорду l (см. рис. 2):

$$\varphi = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi}. \tag{61}$$

С учетом принятого система уравнений (58) принимает вид

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda_2\rho_2 w_2^2\theta}{2D\varphi_2\pi} + \frac{\lambda_{гр}(\rho_1-\rho_2)w_{от}^2\sin\theta}{2D\pi\varphi_2} - g\rho_2\cos(g, z), \tag{62}$$

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda_1\rho_1 w_1^2(\pi-\theta)}{2D\varphi_1\pi} - \frac{\lambda_{гр}(\rho_1-\rho_2)w_{от}^2\sin\theta}{2D\pi\varphi_1} - g\rho_1\cos(g, z). \tag{63}$$

Первые члены правых частей этих уравнений, выражающие сопротивление трения фаз смеси о смоченный ими параметр трубы, содержат коэффициенты сопротивления λ_2 и λ_1, которые в общем случае предполагаются функциями чисел Re_2 и Re_1 и шероховатости внутренней поверхности трубопровода.

Вторые члены уравнений (62) и (63) выражают сопротивления на линии раздела фаз, причем, как сказано, это сопротивление пропорционально относительной скорости с коэффициентом пропорциональности $\lambda_{гр}$.

Третьи члены рассматриваемых уравнений содержат поправку к сопротивлению, отнесенную за счет негоризонтального расположения трубы, т. е. выражают вес столба жидкости, соответствующий разности отметок начала и конца трубы.

При сложении уравнений системы (62) и (63) получим

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda_2\rho_2 w_2^2\theta}{2D\pi} + \frac{\lambda_1\rho_1 w_1^2(\pi-\theta)}{2D\pi} - g(\rho_1\varphi_1+\rho_2\varphi_2)\cos(g, z) \tag{64}$$

или, если считать $\bar{\theta} = \frac{\theta}{\pi}$, $\rho_2\varphi_2 \ll \rho_1\varphi_1$,

$$-\frac{dp}{dz} = g\frac{Fr_c}{2}\left[\lambda_2\rho_2\bar{\theta}\frac{\beta_2^2}{\varphi_2^2} + \lambda_1\rho_1(1-\bar{\theta})\frac{\beta_1^2}{\varphi_1^2}\right] - g\rho_1\varphi_1\cos(g, z). \tag{65}$$

В уравнениях (64) и (65) коэффициенты сопротивления λ_1 и λ_2 должны быть исследованы как функции Re_1 и Re_2 и шероховатости трубы ε. Если же в основу обработки экспериментального материала положить систему уравнений (63), возникает вопрос об исследовании функции $\lambda_{гр}$, которая в общем случае является сложной многопараметрической функцией. Экспериментальные исследования, относящиеся к истинному фазосодержанию φ, коэффициентам сопротивления λ_c, λ_y, λ_1, λ_2, будут приведены ниже.

Заметим, что представления вязких и турбулентных напряжений через истинный динамический напор с коэффициентом пропорциональности λ_c, через условный динамический напор с коэффициентом пропорциональности λ_y и через динамический напор на границе раздела фаз с коэффициентом пропорциональности $\lambda_{гр}$ (поскольку они опираются в конечном счете на эксперимент), носят, естественно, условный характер.

ГЛАВА ВТОРАЯ

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

РАЗДЕЛЕННОЕ ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

В качестве примера точного интегрирования уравнения движения рассмотрим течение вязкой двухфазной жидкости между двумя параллельными стенками [47]. При этом будем иметь дело с установившимся течением, когда жидкость омывает нижнюю стенку, а газовый поток движется вдоль верхней стенки. Поскольку течение обеих фаз смеси ламинарно, инерционными членами в уравнении движения можно пренебречь, т. е. будем считать компоненты смеси несжимаемыми, а слагающие скоростей

$$w_{1x} = w_{1y} = w_{2x} = w_{2y} = 0.$$

Основное уравнение гидродинамики смеси при разделенном течении вдоль оси x и сделанных допущениях можно записать отдельно для жидкой и газообразной фаз

$$\begin{aligned} \frac{d^2w_1}{dy^2} &= \frac{2}{\mu_1} k_1, \\ \frac{d^2w_2}{dy^2} &= \frac{2}{\mu_2} k_2, \end{aligned} \tag{66}$$

где

$$k_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{dp}{dx} - g\rho_1 \cos(g, x)\right],$$

$$k_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{dp}{dx} - g\rho_2 \cos(g, x)\right].$$

Пусть уравнения нижней и верхней плоскостей будут соответственно $y = -h_1$, $y = h_2$, а ось x проходит вдоль границы раздела фаз (рис. 3); интегрирование уравнений (66) дает

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{k_1}{\mu_1} y^2 + A_1 \frac{h}{\mu_1} y + B_1 h^2, \\ w_2 &= \frac{k_2}{\mu_2} y^2 + A_2 \frac{h}{\mu_2} y + B_2 h^2, \end{aligned} \tag{67}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — постоянные интегрирования, а $h = h_1 + h_2$.

Для определения постоянных интегрирования получаем четыре граничных условия. При $y = 0$, т. е. на границе раздела фаз, имеется равенство скоростей фаз смеси и касательных вязких напряжений

$$(w_1)_{y=0} = (w_2)_{y=0},$$

$$\mu_1 \left(\frac{dw_1}{dy}\right)_{y=0} = \mu_2 \left(\frac{dw_2}{dy}\right)_{y=0}.$$

Вследствие прилипания на стенках

$$(w_1)_{y=-h_1} = 0,$$

$$(w_2)_{y=h_2} = 0.$$

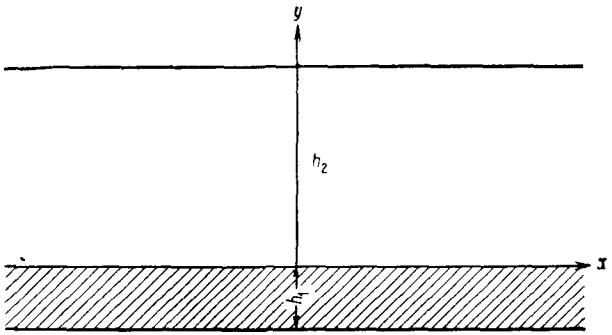


Рис. 3. К решению уравнения плоского ламинарного разделенного течения.

Из первого и второго условий находим, что $B_1 = B_2 = B$, $A_1 = A_2 = A$; из последних двух имеем два уравнения с неизвестными A и B:

$$\begin{aligned} \frac{k_1 h_1^2}{\mu_1} - \frac{h h_1}{\mu_1} A + h^2 B = 0, \\ \frac{k_2 h_2^2}{\mu_2} + \frac{h h_2}{\mu_2} A + h^2 B = 0. \end{aligned} \tag{67'}$$

Истинные объемные фазосодержания согласно определению выразятся через отношение $\varphi_1 = h_1/h$ и $\varphi_2 = h_2/h$. Вводя эти значения в уравнения (67′) и решая последние относительно A и B, находим

$$A = \frac{\varphi_1^2 \mu_2 k_1 - \varphi_2^2 \mu_1 k_2}{\varphi_1 \mu_2 + \varphi_2 \mu_1}, \tag{68}$$

$$B = -\frac{\varphi_2 \varphi_2 (\varphi_1 k_1 + \varphi_2 k_2)}{\varphi_1 \mu_2 + \varphi_2 \mu_1}. \tag{69}$$

Следовательно, скорости компонентов будут равны

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{k_1}{\mu_1} y^2 + \frac{A h}{\mu_1} y + B h^2, \\ w_2 = \frac{k_2}{\mu_2} y^2 + \frac{A h}{\mu^2} y + B h^2. \end{aligned} \tag{70}$$

Изменение скоростей показано на рис. 4. В зависимости от y скорости изменяются по параболическому закону. Их максимальные значения

$$w_{1\,\max} = h^2\left(B - \frac{A^2}{4\mu_1 k_1}\right),$$
$$w_{2\,\max} = h^2\left(B - \frac{A^2}{4\mu_2 v_2}\right), \tag{71}$$

определяемые ординатой вершины парабол, лежат в плоскостях соответственно $y_1 = -Ah/2v_1$ и $y_2 = -Ah/2k_2$. Они проходят внутри своих потоков, если при положительном $Ah/2k_1$ либо отрицательном $-Ah/2k_2$ отношении

$$|A| \leqslant |2k_1|$$

или

$$|A| \leqslant |2k_2|.$$

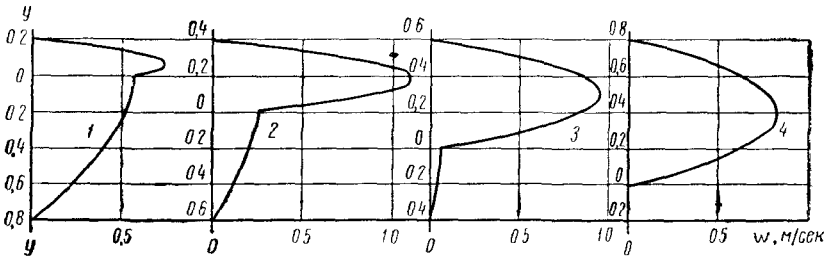


Рис. 4. Профиль скорости при разделенном течении двухфазной жидкости между двумя параллельными стенками.

1 — $\varphi_2 = 0{,}2$, *2* — $\varphi_2 = 0{,}4$, *3* — $\varphi_2 = 0{,}6$, *4* — $\varphi_2 = 0{,}8$, $\mu_1 = 102{,}4 \cdot 10^{-6}$ *н·сек/м²*, $\dot{\mu} = 0{,}0181$, $\cos(g, z) = 0$

Выражение для скоростей примет более простой вид, если перейти от A и B к постоянным $w_{\max}$ и $y_{1\,(2)}$, например

$$w_{1\,\max} - w_1 = -\frac{k_1}{\mu_1}(y - y_1)^2,$$
$$w_{2\,\max} - w_2 = -\frac{k_2}{\mu_2}(y - y_2)^2. \tag{72}$$

Средняя скорость компонента определяется отношением количества жидкости или газа, протекающего в единицу времени через единичную ширину потока, к поперечному сечению h_1 или h_2

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{h_1}\int_{-h}^{0} w_1\,dy = h^2\left(\frac{\varphi_1^2 k_1}{3\mu_1} - \frac{\varphi_1 A}{2\mu_1} + B\right),$$

$$\bar{w}_2 = \frac{1}{h_2}\int_{0}^{h} w^2\,dy = h^2\left(\frac{\varphi_2^2 k_2}{3\mu_2} + \frac{\varphi_2 A}{2\mu_2} + B\right).$$

Заменив A и B их значениями из (68) и (69) и произведя ряд преобразований, для средних скоростей получим

$$\begin{aligned}\bar{w}_1 &= -\frac{h^2\varphi_1}{2}\left[\frac{\varphi_1 k_1}{3\mu_1}+\frac{\varphi_2(\varphi_1 k_1+\varphi_2 k_2)}{\varphi_1\mu_2+\varphi_2\mu_1}\right],\\ \bar{w}_2 &= -\frac{h^2\varphi_2}{2}\left[\frac{\varphi_2 k_2}{3\mu_2}+\frac{\varphi_1(\varphi_1 k_1+\varphi_2 k_2)}{\varphi_1\mu_2+\varphi_2\mu_1}\right].\end{aligned} \tag{73}$$

Так как $\bar{w}_1 h_1$ и $\bar{w}_2 h_2$ представляют собой объемные расходы, приходящиеся на единицу ширины потока, то объемные расходные фазосодержания определятся как

$$\beta_{1\,(2)} = \frac{\bar{w}_{1\,(2)} h_{1\,(2)}}{\bar{w}_1 h_1 + \bar{w}_2 h_2} = \frac{\varphi_{1\,(2)}\bar{w}_{1\,(2)}}{\varphi_1\bar{w}_1+\varphi_2\bar{w}_2}$$

или, подставляя сюда значения средних скоростей и полагая, что $\mu_2/\mu_1 = \dot{\mu}_2$, $\mu_1/\mu_2 = \dot{\mu}_1$:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\varphi_1^2[\varphi_1\dot{\mu}_2+4\varphi_2)\,\varphi_1 k_1+3\varphi_2^2 k_2]}{[\varphi_1^2\mu_2+\varphi_2(4-\varphi_2)]\,\varphi_1^2 k_1+[\varphi_2^2\mu_1+\varphi_1(4-\varphi_1)]\,\varphi_2^2 k_2},\\ \beta_2 &= \frac{\varphi_2^2[(\varphi_2\dot{\mu}_1+4\varphi_1)\,\varphi_2 k_2+3\varphi_1^2 k_1]}{[\varphi_1^2\dot{\mu}_2+\varphi_2(4-\varphi_2)]\,\varphi_1^2 k_1+[\varphi_2^2\dot{\mu}_1+\varphi_1(4-\varphi_1)]\,\varphi_2^2 k_2}.\end{aligned} \tag{74}$$

Определим градиент давления

$$-\frac{dp}{dx} = g(\varphi_1\rho_1+\varphi_2\rho_2)\cos(g,x)+2(\varphi_1 k_1+\varphi_2 k_2).$$

Для этого средние скорости $\bar{w}_1$ и $\bar{w}_2$ умножим соответственно на μ_1/φ_1 и μ_2/φ_2 и сложим. В результате найдем

$$-\left[\frac{dp}{dx}-g(\varphi_1\rho_2+\varphi_2\rho_2)\cos(g,x)\right] = \frac{3}{h^2}\left(\frac{\mu_1\bar{w}_1}{\varphi_1}+\frac{\mu_2\bar{w}_2}{\varphi_2}\right). \tag{75}$$

В пределе при стремлении одного из φ к нулю получаем известное выражение для течения вязкой жидкости между двумя параллельными пластинами. Пусть, например, $\varphi_1 = 0$, тогда $\varphi_2 \to 1$.

Подставив этот предел в выражение (75), когда $\varphi_1 \to 0$, получим

$$-\left[\frac{dp}{dx}-g\rho_2\cos(g,x)\right] = \frac{12\mu_2\bar{w}_2}{h_2}, \tag{76}$$

что требовалось показать.

Для горизонтального разделенного течения $\cos(q,x) = 0$, следовательно, $k_1 = k_2 = k$ и формулы объемных фазосодержаний несколько упростятся:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\varphi_1^2[\varphi_2(3+\varphi_1)+\varphi_1^2\dot{\mu}_2]}{4\varphi_1\varphi_2+\mu_1(\varphi_1^2\mu_2-\varphi_2^2)^2},\\ \beta_2 &= \frac{\varphi_2^2[\varphi_1(3+\varphi_2)+\varphi_2^2\dot{\mu}_1]}{4\varphi_1\varphi_2+\mu_1(\varphi_1^2\dot{\mu}_2-\varphi_2^2)^2}.\end{aligned} \tag{77}$$

По этим формулам на рис. 5 построены кривые зависимости истинного газосодержания от расходного при $\dot{\mu} = \text{idem}$.

Интересно выразить градиент сопротивления трения смеси по Дарси — Вейсбаху, как это делается при одномерном турбулентном течении вязкой жидкости. Коэффициент гидравлического сопротивления в этом случае можно выразить через отношение градиента сопротивления к истинному динамическому напору смеси

$$\lambda_c = \frac{-\left[\frac{dp}{dx} - g\,(\varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2)\cos(g, x)\right] 2h}{\varphi_1\rho_1\bar{w}_1^2 + \varphi_2\rho_2\bar{w}_2^2}$$

или, подставляя значение градиента сопротивления из (75):

$$\lambda_c = \frac{6\,[\mu_1\bar{w}_1/\varphi_1) + (\mu_2\bar{w}_2/\varphi_2)]}{h\,(\varphi_1\rho_1\bar{w}_1^2 + \varphi_2\rho_2\bar{w}_2^2)}.$$

Будем определять критерий Рейнольдса как отношение инерционных сил к вязким напряжениям, т. е.

$$\mathrm{Re}_c = \frac{(\varphi_1\rho_1\bar{w}_1^2 + \varphi_2\rho_2\bar{w}_2^2)\,h}{(\varphi_1\mu_1\bar{w}_1 + \varphi_2\mu_2\bar{w}_2)}, \qquad (78)$$

тогда коэффициент сопротивления выразится как

$$\lambda_c = 24\,\frac{\psi}{\mathrm{Re}_c}, \qquad (79)$$

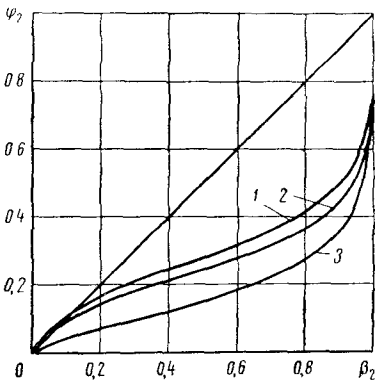


Рис. 5. Зависимость истинного газосодержания от расходного для ламинарного течения двухфазной жидкости между двумя параллельными стенками.

1 — $\dot{\mu} = 0{,}081$, *2* — $\dot{\mu} = 0{,}01$, *3* — φ (β) для ламинарного течения в трубе, $\dot{\mu} = 0{,}01$.

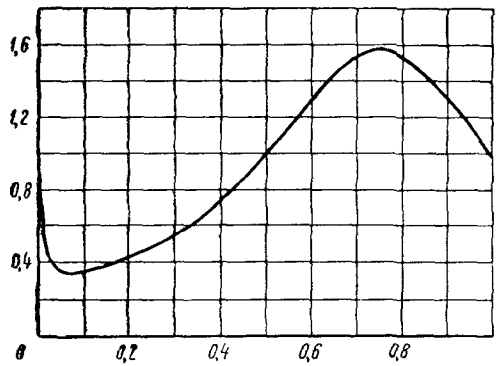


Рис. 6. Изменение приведенного коэффициента сопротивления для разделенного ламинарного течения двухфазной жидкости между двумя параллельными стенками и в трубе.

$\dot{\mu} = 0{,}0181$, $\cos(g, z) = 0$

где

$$\psi = \frac{(\beta_1/\varphi_1^2)\,\mu_1 + (\beta_2/\varphi_2^2)\,\mu_2}{4\,(\beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2)}. \qquad (80)$$

Для горизонтального течения, используя (77):

$$\psi_{\text{гор}} = \frac{\varphi_2 + \varphi_1\dot{\mu}_2}{[1 - 3\varphi_1\,(1 - 2\varphi_1)]\,\varphi_2 + [1 - 3\varphi_2\,(1 - 2\varphi_2)]\,\varphi_1\dot{\mu}_2}. \qquad (81)$$

Из формулы (81) видно, что коэффициент ψ может зависеть от всех критериев гидродинамики смеси, кроме критерия Re_c. При $\varphi_2 = 0{,}05$ и 1 он становится равным 1, в области φ_2 от 0 до 0.5 — минимальным, а от 0,5 до 1 — максимальным. Изменение коэффициента ψ для воздухо-водяного потока показано на рис. 6. Зависимость $\psi(\varphi)$ напоминает деформированную с обратным знаком синусоиду. С ростом приведенной вязкости газового компонента до единицы приведенный коэффициент приближается к единице, т. е. к течению гомогенной жидкости, для которой $\psi = 1$.

РАЗДЕЛЕННОЕ ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЛАБОНАКЛОННОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Уравнение движения для течения смеси в трубе интегрируется довольно сложно. Оно доводится до интегралов, которые в общем случае нельзя взять, если не прибегать к приближенным методам.

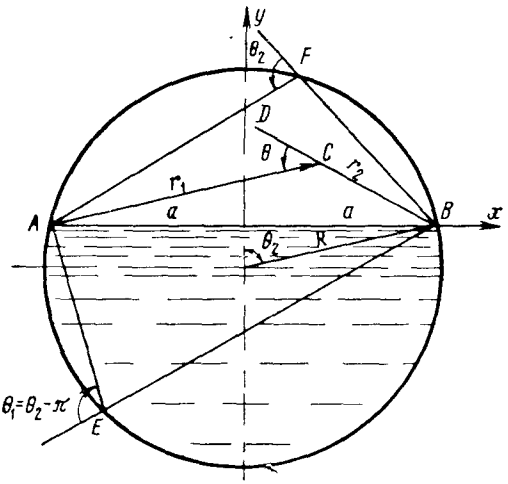


Рис. 7. К выводу уравнения (82).

Как и выше, пренебрегаем изменением скоростей по направлению течения, т. е. вдоль оси x, а компоненты смеси будем считать несжимаемыми. Это ограничение позволяет написать уравнения движения раздельно для жидкости и газа в виде

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{2}{\mu_1} k_1, \qquad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = \frac{2}{\mu_1} k_2 . \tag{82}$$

Здесь k_1 и k_2 имеют те же значения, что и в уравнении (66).

Для решения уравнений (82) целесообразно перейти от декартовых координат к биполярным $\varepsilon = \ln(r_1/r_2)$ и дополнительному углу между этими радиусами-векторами (рис. 7). Переход можно осуществить, используя соотношения

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \varepsilon}{ch\, \varepsilon + \cos\theta}, \qquad y = \frac{a \sin\theta}{ch\, \varepsilon + \cos\theta} \tag{83}$$

и известные математические приемы, например:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varepsilon} - \dfrac{\partial y}{\partial \varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}}{\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\dfrac{\partial y}{d\theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial \varepsilon}}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varepsilon}}{\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial \varepsilon}}, \tag{84}$$

и аналогичные соотношения для вторых производных. В результате получим

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2}=\frac{2k_1a^2}{(\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta)^2\,\mu_1},$$
$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2}=\frac{2k_2a^2}{(\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta)^2\,\mu_2}. \tag{85}$$

Решения этой системы из двух уравнений будем искать в виде

$$w_1(\varepsilon,\ \theta)=-\frac{k_1}{2\mu_1}a^2\left[f_1(\varepsilon,\ \theta)+\frac{2\cos\theta}{ch\,\varepsilon+\cos\theta}\right],$$
$$w_2(\varepsilon,\ \theta)=-\frac{k_2}{2\mu_2}a^2\left[f_2(\varepsilon,\ \theta)+\frac{2\cos\theta}{\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta}\right], \tag{86}$$

где $-\frac{k_1a^2}{\mu_1}\frac{\cos\theta}{\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta}$ и $-\frac{k_2a^2}{\mu_2}\frac{\cos\theta}{\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta}$ частные решения первого и второго уравнений, а $f_1(\varepsilon,\ \theta)$ и $f_2(\varepsilon,\ \theta)$ — решения однородных уравнений. Эти функции должны удовлетворять гармоническим уравнениям

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial \theta^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2}=0.$$

Решение их согласно четности функций f_1 и f_2 по переменной ε будет искать в виде интегралов Фурье:

$$f_1(\varepsilon_1\theta)=\int_0^\infty\{A_1(m)\operatorname{sh}[m(\theta-\theta_1)]+B_1(m)\operatorname{sh}(m\theta)\}\cos(m\varepsilon)\,dm,$$
$$f_2(\varepsilon_1\theta)=\int_0^\infty\{A_2(m)\operatorname{sh}[m(\theta-\theta_2)]+B_2(m)\operatorname{sh}(m\theta)\}\cos(m\varepsilon)\,dm. \tag{87}$$

Функции A_1, B_1, A_2 и B_2 от m определяются из следующих четырех граничных условий:

на дуге, омываемой жидкостью, для которой скорость жидкости $w_1(\varepsilon,\ \theta)=0$;

на дуге, омываемой газом ($\theta=\theta_2=\text{idem}$), скорость газа $w_2(\varepsilon,\ \theta_2)=0$;

на линии раздела фаз ($\theta=0$) имеет место равенство скоростей компонентов $w_1(\varepsilon,\ \theta)=w_2(\varepsilon,\ 0)$ и касательных напряжений $\mu_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{\theta=0}=\mu_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{\theta=0}$.

На основании (85) и (86) первое и второе условия дают

$$\int_0^\infty B_1(m)\operatorname{sh}(m\theta_1)\cos(m\varepsilon)\,dm=-\frac{2\cos\theta_1}{\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta_1},$$
$$\int_0^\infty B_2(m)\operatorname{sh}(m\theta_2)\cos(m\varepsilon)\,dm=-\frac{2\cos\theta_2}{\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta_2}. \tag{88}$$

Правые части этих выражений можно представить в виде интегралов Фурье

$$\frac{\cos\theta_1}{\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta_1}=2\operatorname{ctg}\theta_1\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}(m\theta_1)\cos(m\varepsilon)}{\operatorname{sh}(m\pi)}\,dm,$$

тогда получим

$$\int_0^\infty B_1(m)\operatorname{sh}(m\theta_1)\cos(m\varepsilon)\,dm=-4\operatorname{ctg}\theta_1\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}(m\theta_1)\cos(m\varepsilon)}{\operatorname{sh}(m\pi)}\,dm,$$

откуда

$$B_1(m)=B_2(m)=-\frac{4\operatorname{ctg}\theta_1}{\operatorname{sh}(\pi m)}=-\frac{4\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{sh}(m\pi)}. \tag{89}$$

Условие равенства скоростей фаз при $\theta=0$ дает

$$\frac{k_1}{\mu_1}\left[\frac{2}{1+\operatorname{ch}\varepsilon}-\int_0^\infty A_1(m)\operatorname{sh}(m\theta_1)\cos(m\varepsilon)\,dm\right]=$$

$$=\frac{k_2}{\mu_2}\left[\frac{2}{1+\operatorname{ch}\varepsilon}-\int_0^\infty A_2(m)\operatorname{sh}(m\theta_2)\cos(m\varepsilon)\,dm\right]$$

или, выражая левые слагаемые как

$$\frac{2}{1+\operatorname{ch}\varepsilon}=4\int_0^\infty\frac{m\cos(m\varepsilon)}{\operatorname{sh}(m\pi)}\,dm,$$

$$\frac{k_1}{\mu_1}\left\{\int_0^\infty\cos(m\varepsilon)\left[\frac{4m}{\operatorname{sh}(m\pi)}-A_1(m)\operatorname{sh}(m\theta_1)\right]dm=\right.$$

$$\left.=\left\{\int_0^\infty\cos(m\varepsilon)\left[\frac{4m}{\operatorname{sh}(m\pi)}-A_2(m)\operatorname{sh}(m\theta_2)\,dm\right]\right\}\frac{k_2}{\mu_2},\right.$$

получаем

$$\frac{k_1}{\mu_1}\left[\frac{4m}{\operatorname{sh}(m\pi)}-A_1(m)\operatorname{sh}(m\theta_1)\right]=\frac{k_2}{\mu_2}\left[\frac{4m}{\operatorname{sh}(m\pi)}-A_2(m)\operatorname{sh}(m\theta_2)\right]. \tag{90}$$

Переходя от декартовых координат к биполярным, из условия равенства касательных напряжений на линии раздела фаз будем иметь

$$\mu_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=\mu_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial\theta}\right)_{\theta=0},$$

ибо в формулах (84) при x и y, определяемым по (18):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=0,\quad\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=1.$$

Возьмем производные скоростей (86) компонентов по θ на линии раздела фаз и умножим их соответственно на вязкости μ_1 и μ_2, получим

$$\mu_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=-\frac{a^2k_1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\theta}\right)_{\theta=0},\quad \mu_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=-\frac{a^2k_2}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}$$

или, приравнивая одно равенство к другому:

$$k_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=k_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}. \tag{91}$$

Выражения (87) позволяют взять производные от f_1 и f_2. На границе раздела фаз они равны

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=\int_0^\infty [A_1(m)\operatorname{ch}(m\theta_1)+B_1(m)]\,m\cos(m\varepsilon)\,dm,$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=\int_0^\infty [A_2(m)\operatorname{ch}(m\theta_2)+B_2(m)]\,m\cos(m\varepsilon)\,dm.$$

Заменив B_1 и B_2 их значениями из (89) и подставив затем значения производных в (91), получим

$$k_2\left[A_1(m)\operatorname{ch}(m\theta_1)-\frac{4\operatorname{ctg}\theta_1}{\operatorname{sh}(m\pi)}\right]=k_2\left[A_2(m)\operatorname{ch}(m\theta_2)-\frac{4\operatorname{ctg}\theta_2}{\operatorname{sh}(m\pi)}\right]. \tag{92}$$

Итак, для определения A_1 и A_2 имеем два уравнения: (90) и (92). Решая их, найдем

$$A_1(m)=\frac{8}{\operatorname{sh}(m\pi)}\left[\frac{m\operatorname{ch}(m\theta_2)(\dot\mu_2-k_2)-\operatorname{ctg}\theta_2\operatorname{sh}(m\theta_2)(1-k_2)}{(1-\mu_2)\operatorname{sh}[m(\pi-2\theta_2)]-(1-\mu_2)\operatorname{sh}(\pi m)}\right],$$

$$A_2(m)=\frac{8}{\operatorname{sh}(m\pi)}\left[\frac{m\operatorname{ch}(m\theta_1)(\dot k_1-\dot\mu_1)-\operatorname{ctg}\theta_2\operatorname{sh}(m\theta_1)(\dot k_1-1)}{(\dot\mu_1-1)\operatorname{sh}[m(\pi-2\theta_2)]-(1+\dot\mu_1)\operatorname{sh}(m\pi)}\right], \tag{93}$$

где

$$\dot\mu_1=\frac{\mu_1}{\mu_2},\quad \dot\mu_2=\frac{\mu_2}{\mu_1},\quad \dot k_1=\frac{k_1}{k_2},$$

$$\dot k_2=\frac{k_2}{k_1}.$$

Возвращаясь к (87), заметим, что после подстановки значения $B(m)$ получим

$$\int_0^\infty B(m)\operatorname{sh}(m\theta)\cos(m\varepsilon)\,dm=-4\operatorname{ctg}\theta_1\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}(m\theta)\cos(m\varepsilon)}{\operatorname{sh}(m\pi)}\,dm=$$

$$=2\operatorname{ctg}\theta_1\frac{\sin\theta}{\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta}.$$

Следовательно. учитывая только что написанное соотношение и значения постоянных A_1 и A_2, для скоростей фаз смеси получим

$$w_1(\varepsilon_1\theta) = -\frac{a_1^2 k_1}{\mu_1}\left\{\frac{\sin(\theta_2-\theta)}{(\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta)\sin\theta_2}+\right.$$

$$\left.+4\int_0^\infty \frac{[m\operatorname{ch}(m\theta_2)(\dot{\mu}_2-\dot{k}_2)-\operatorname{ctg}\theta_2\operatorname{sh}(m\theta_2)(1-\dot{k}_2)]\cos(m\varepsilon)\operatorname{sh}m(\theta-\theta_1)}{\{(1-\dot{\mu}_2)\operatorname{sh}[m(\pi-2\theta_2)]-(1+\dot{\mu}_2)\operatorname{sh}(m\pi)\}\operatorname{sh}(m\pi)}\,dm\right\};$$

(94)

$$w_2(\varepsilon,\theta) = -\frac{a_2^2 k_2}{\mu_2}\left\{\frac{\sin(\theta_2-\theta)}{(\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta)\sin\theta_2}+\right.$$

$$\left.+4\int_0^\infty \frac{[m\operatorname{ch}(m\theta_1)(\dot{k}_1-\dot{\mu}_1)-\operatorname{ctg}\theta_2\operatorname{sh}(m\theta_1)(\dot{k}_1-1)]\cos(m\varepsilon)\operatorname{sh}m(\theta-\theta_2)}{\{(\dot{\mu}-1)\operatorname{sh}[m(\pi-2\theta_2)]-(1+\mu_1)\operatorname{sh}(m\pi)\}\operatorname{sh}(m\pi)}\,dm\right\}.$$

Сходимость полученных несобственных интегралов обеспечивается условием $|\theta| < \pi$.

В случае гомогенного течения отношение вязкостей и градиентов сопротивления равно единице и выражение подынтегральных функций в (94) будет равно нулю. Поэтому

$$w_1 = -\frac{a^2 k_1 \sin(\theta_2-\theta)}{\mu_1(\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta)\sin\theta_2}, \qquad w_2 = -\frac{a^2 k_2 \sin(\theta_2-\theta)}{\mu_2(\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta)\sin\theta_2}, \quad (95)$$

т. е. уравнения (94) переходят в уравнения Пуазейля в биполярных координатах. Последние при переходе к полярным координатам имеют известный вид

$$w_1 = -\frac{1}{4\mu_1}\left[\frac{dp}{dx}-\rho_1 g\cos(g,x)\right](R^2-r^2),$$

где r — полярный радиус-вектор.

Интегралы в выражениях для скоростей фаз смеси не сводятся к простым видам, поэтому приходится прибегать к численному интегрированию. В частном случае для течения смеси с газосодержанием $\varphi_2 = 0{,}5$ ($\theta_1 = -\theta_2 = -\pi/2$) квадратуры выражений (94) выполняются точно. В этом случае $\sin\theta_2 = 1$, $\operatorname{ctg}\theta_2 = 0$, $\operatorname{sh}[m(\pi-2\theta_2)] = 0$ и, следовательно, для жидкой фазы

$$w_1(\varepsilon,\theta) = -\frac{R^2 k_2}{\mu_2}\left\{\frac{\cos\theta}{\operatorname{ch}\varepsilon+\cos\theta}-\right.$$

$$\left.-\frac{4(\dot{k}_1-\dot{\mu}_1)}{1+\dot{\mu}_1}\int_0^\infty \frac{m\operatorname{ch}\left(\frac{\pi m}{2}\right)\cos(m\varepsilon)\operatorname{sh}\left[m\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\operatorname{sh}^2(\pi m)}\,dm\right\}$$

и для газовой фазы

$$w_2(\varepsilon, \theta) = -\frac{R^2 k_2}{\mu_2}\left\{\frac{\cos\theta}{\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{4(\dot{k}_1 - \dot{\mu}_1)}{1+\dot{\mu}_1}\int_0^\infty \frac{m \operatorname{ch}\frac{\pi m}{2}\cos m\varepsilon \operatorname{sh}\left[m\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\operatorname{sh}^2(m\pi)}\, dm\right\}.$$

После интегрирования имеем

$$w_1(\varepsilon, \theta) = -\frac{R^2 k_2}{\mu_1}\left\{\frac{\cos\theta}{\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta} - \right.$$

$$- \frac{4(\dot{\mu}_2 k_2)}{1+\dot{\mu}_2}\left[\frac{\theta(1 - \operatorname{ch} 2\varepsilon \cos 2\theta) + \varepsilon \operatorname{sh} 2\varepsilon \sin 2\theta}{\pi(\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\theta)^2} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sin 2\theta}{2\pi(\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\theta)^2} + \frac{1 + \operatorname{ch}\varepsilon\cos\theta}{4(\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta)^2}\right]\right\},$$

$$w_2(\varepsilon, \theta) = -\frac{R^2 k_2}{\mu_2}\left\{\frac{\cos\theta}{\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta} - \right.$$

$$- \frac{4(\dot{k}_1 - \dot{\mu}_1)}{1+\dot{\mu}_1}\left[\frac{\theta(1 - \operatorname{ch} 2\varepsilon \cos 2\theta) + \varepsilon \operatorname{sh} 2\varepsilon \sin 2\theta}{\pi(\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\theta)^2} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sin 2\theta}{2\pi(\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\theta)^2} - \frac{1 + \operatorname{ch}\varepsilon\cos\theta}{4(\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta)^2}\right]\right\}.$$

На границе раздела фаз ($\theta = 0$) функции скорости принимают одно и то же значение

$$w_1(\varepsilon, 0)_{\varphi=0,5} = w_2(\varepsilon, 0)_{\varphi=0,5} = \frac{R^2(k_1 + k_2)}{(1 + \operatorname{ch}\varepsilon)(\mu_1 + \mu_2)}.$$

В качестве примера на рис. 8 показаны профили скоростей и их поля при некоторых параметрах потока смеси.

Найдем объемные расходы Q_1 и Q_2 жидкости и газа, чтобы затем перейти к определению расходных фазосодержаний. Для этого выразим дифференциал площади df через биполярные координаты

$$df = (dl)_\theta (dl)_\varepsilon.$$

Дифференциалы дуг при θ и $\varepsilon = \text{idem}$ определяются через производные от x и y

$$dl_\theta = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)^2\right]} d\varepsilon, \quad dl_\varepsilon = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2\right]} d\theta.$$

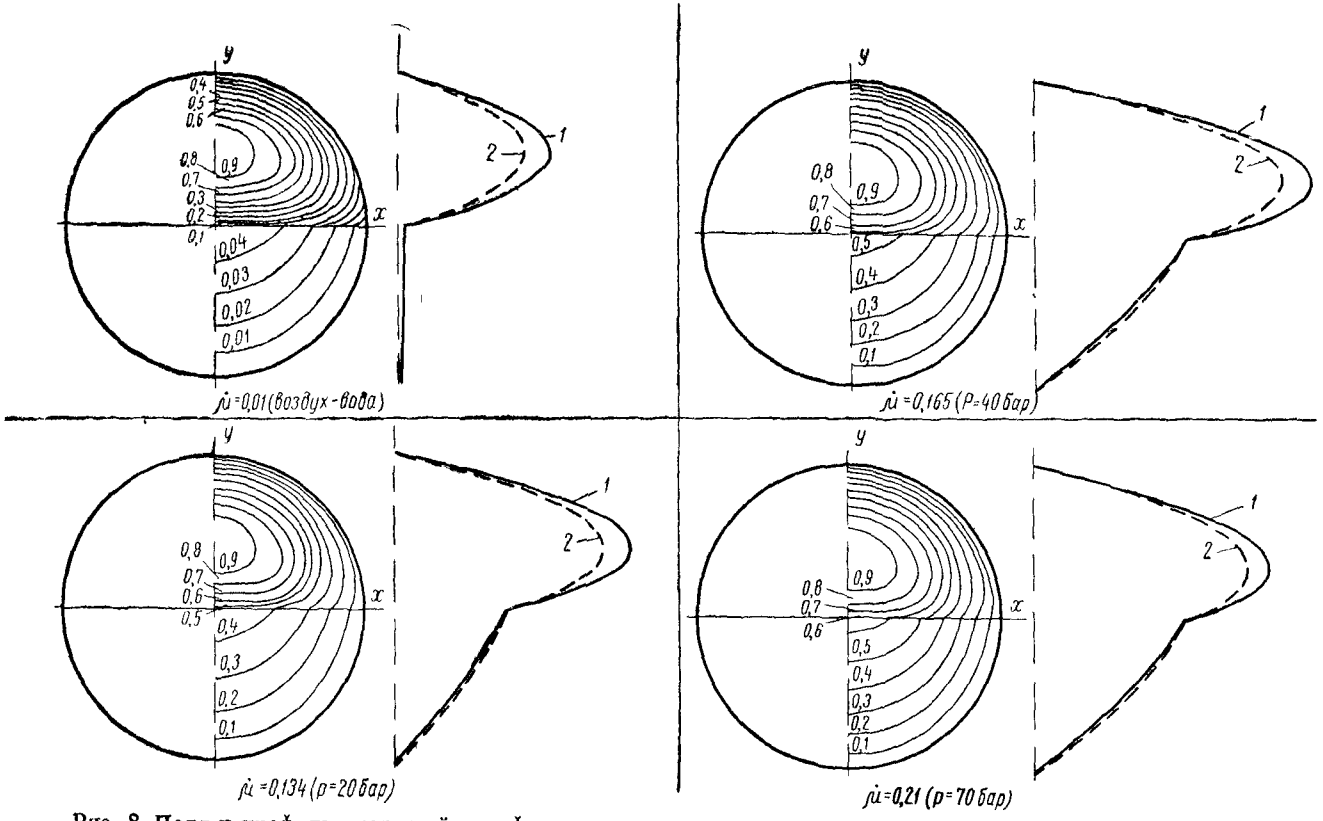


Рис. 8. Поля и профили скоростей двухфазного разделенного течения в круглой трубе при $\varphi_2 = 0{,}5$.

1 — профиль по $x = 0$; *2* — профиль по $y = x$.

Взяв частные производные и произведя элементарные преобразования, найдем df. Тогда расходы определятся интегралами

$$Q_1 = a^2 \int_{\theta_1}^{0} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_1(\theta, \varepsilon)\, d\varepsilon}{(\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta)^2}, \qquad Q_2 = a^2 \int_{0}^{\theta_2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_2(\theta\ \varepsilon)\, d\varepsilon}{(\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta)^2}.$$

Подставим под интегралы значение скоростей из (94), получим

$$Q_1 = \frac{a^4 k_1}{\mu_1}\left\{\int_0^{\theta_1} \cos\theta\, d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{(\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta)^3} - \operatorname{ctg}\theta_1 \int_0^{\theta_1} \sin\theta\, d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{(\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} A_1(m)\, dm \int_0^{\theta_1} \operatorname{sh}[m(\theta - \theta_1)]\, d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(m\varepsilon)}{(\operatorname{ch}\varepsilon + \cos\theta)^2}\, d\varepsilon\right\}.$$

После интегрирования по ε имеем

$$Q_1 = \frac{a^4 k_1}{\mu_1}\left\{\int_0^{\theta_1} [\theta(3 - 2\sin^2\theta) - 3\sin\theta\cos\theta]\, \frac{\cos\theta}{\sin^5\theta}\, d\theta - \right.$$

$$- \operatorname{ctg}\theta_1 \int_0^{\theta_1} [\theta(3 - 2\sin^2\theta) - 3\sin\theta\cos\theta]\, \frac{d\theta}{\sin^4\theta} +$$

$$\left. + \pi \int_0^{\infty} \frac{A_1(m)}{\operatorname{sh}(m\pi)}\, dm \int_0^{\theta_1} \frac{\operatorname{sh}[m(\theta - \theta_1)]}{\sin^3\theta}\, [m\operatorname{ch}(m\theta)\sin\theta - \operatorname{sh}(m\theta)\cos\theta]\, d\theta\right\}.$$

Производя далее интегрирование по θ и осуществляя переход к пределу, под знаком интеграла получаем

$$Q_1 = -\frac{a^4 k_1}{\mu_1}\left\{\frac{\theta_1(1 - 3\operatorname{ctg}^2\theta_1)}{\sin^2\theta_1} + \operatorname{ctg}\theta_1(1 + 3\operatorname{ctg}^2\theta_1)\right] 4 -$$

$$- \frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\sin^2\theta_1}(1 - \theta_1\operatorname{ctg}\theta_1) + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\theta_1 + \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{A_1(m)}{\operatorname{sh}(m\pi)}\, [m\operatorname{sh}(m\theta_1)\operatorname{ctg}\theta_1 -$$

$$\left. - m^2 \operatorname{ch}(m\theta_1)]\, dm\right\}.$$

После элементарных преобразований для объемного расхода жидкости имеем

$$Q_1 = -\frac{\pi R^4}{8\mu_1}\left[\frac{dp}{dx} - g\rho_1\cos(g, x)\right] F_1 \tag{96}$$

и для объемного расхода газа

$$Q_2 = -\frac{\pi R^4}{8\mu_2}\left[\frac{dp}{dx} - g\rho_2\cos(g, x)\right] F_2, \tag{97}$$

где F_1 и F_2 — функции истинного газосодержания одного из углов θ_1 или θ_2 и отношения вязкостей жидкости и газа

$$F_1 = -\frac{1}{\pi}\left[\theta_1 - \frac{1}{6}(3+2\sin^2\theta_2)\sin 2\theta_2\right] - 2\sin^4\theta_2 \times$$

$$\times \int_0^\infty (\operatorname{ctg}\theta_1 \operatorname{sh} m\theta_1 - m\operatorname{ch} m\theta_1)\frac{mA_1(m)}{\operatorname{sh} m\pi}\,dm, \qquad (98)$$

$$F_2 = \frac{1}{\pi}\left[\theta_2 - \frac{1}{6}(3+2\sin^2\theta_2)\sin 2\theta_2\right] -$$

$$-2\sin^4\theta_2 \int_0^\infty (\operatorname{ctg}\theta_2 \operatorname{ch}\theta_2 - m\operatorname{sh} m\theta_2)\frac{mA_2(m)}{\operatorname{sh} m\pi}\,dm.$$

Причем φ_1 и φ_2 как отношение площадей сечения потоков жидкости и газа к сечению трубы определяются формулами:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2\pi}(2\theta_1 - \sin 2\theta_1),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi}(2\theta_2 - \sin 2\theta_2). \qquad (98')$$

Вид функций F_1 и F_2 представлен на рис. 9.

При $\varphi_2 = 0$ имеем $\theta_1 = -\pi$, $\theta_2 = 0$, следовательно, $F_1 = 1$, $F_2 = 0$. В другом крайнем значении газосодержания ($\varphi_2 = 1$) эти функции соответственно равны нулю и единице, так как $\theta_1 = 0$, а $\theta_2 = 1$. В точке $\varphi_2 = 0{,}5$ $\left(\theta_1 = -\theta_2 = -\frac{\pi}{2}\right)$ они приобретают значения

$$(F_1)_{\varphi=0,5} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{32(\dot{k}_2 - \dot{\mu}_2)}{1+\dot{\mu}_2}\int_0^\infty \frac{m^3 \operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi}{2}m\right)}{\operatorname{sh}^3(\pi m)}\,dm\right],$$

$$(F_2)_{\varphi=0,5} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{32(\dot{k}_2 - \dot{\mu}_2)}{\dot{k}_2(1+\dot{\mu}_2)}\int_0^\infty \frac{m^3 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}m\right)}{\operatorname{sh}^3(\pi m)}\,dm\right]$$

или после интегрирования

$$(F_1)_{\varphi=0,5} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\dot{k}_2 - \dot{\mu}_2}{1+\dot{\mu}_2}\cdot\frac{16-\pi^2}{\pi^2}\right),$$

$$(F_2)_{\varphi=0,5} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\dot{k}_2 - \mu_2}{k_2(1+\dot{\mu}_2)}\cdot\frac{16-\pi^2}{\pi^2}\right]. \qquad (99)$$

Попутно отметим, что для горизонтального течения ($\dot{k}_2 = 1$)

$$(F_1)_{\varphi=0,5} + (F_2)_{\varphi=0,5} = 1. \qquad (100)$$

По определению расходное объемное газосодержание равно $\beta_2 = Q_2/(Q_1 + Q_2)$ или после подстановки значений объемных расходов

$$\beta_2 = \frac{1}{1 + \dot{F}_1 \dot{k}_1 \dot{\mu}_2},$$

где $\dot{F}_1 = F_2/F_1$.

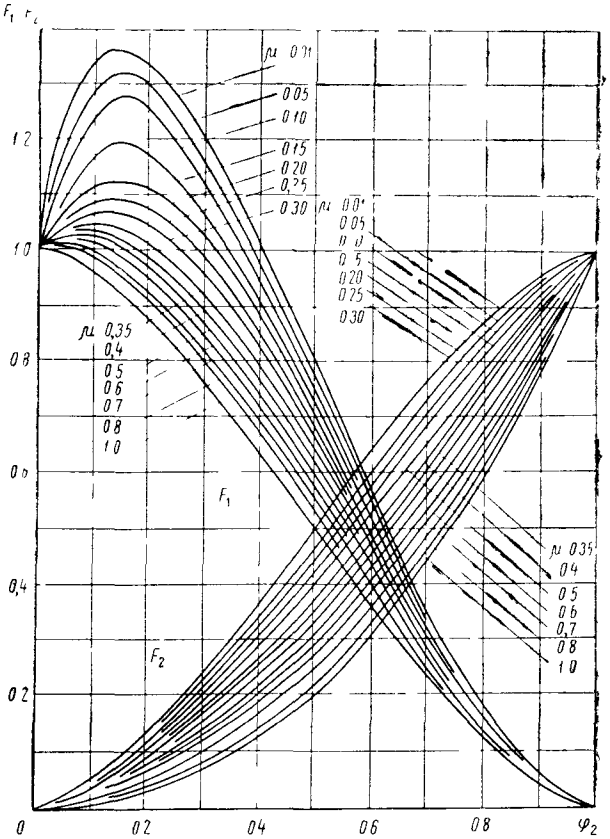


Рис. 9. Вид функции F_1 (φ) и F_2 (φ) при $\dot{\mu}$ = idem.

Зависимость φ (β) разделенного течения смеси в трубе в сравнении с φ (β) для плоского течения показана на рис. 5.

Как и следовало ожидать, из-за повышения вязкости газового компонента смеси уменьшается относительная скорость, что приводит к возрастанию φ_2. Характер зависимости φ (β) для плоского течения и течения смеси в трубе остается одинаковым при небольшом количественном различии. Формулы объемных расходов жидкости и газа позволяют вычислить коэффициент гидравлического сопротивления смеси при ее течении в круглой трубе. Для этого умножим

правую и левую части формул (96) и (97) соответственно на φ_1 и φ_2, выразим объемные расходы через средние скорости, затем их сложим. Получим

$$-\left[\frac{dp}{dx}-g\rho_c\cos(g,\,x)\right]=\frac{32}{D^2}\left(\frac{\varphi_1^2\mu_1 w_1}{F_1}+\frac{\varphi_2^2\mu_2 w_2}{F_2}\right).$$

Представим гидравлическое сопротивление трения смеси в виде формулы Дарси

$$-\left[\frac{dp}{dx}-g\rho_c\cos(g,\,x)\right]=\frac{\lambda_c}{2D}(\varphi_1\rho_1 w_1^2+\varphi_2\rho_2 w_2^2).$$

Приравняв правые части последних двух формул, получим

$$\lambda_c=\frac{64}{\mathrm{Re}_c}\psi.$$

Здесь по-прежнему критерий Рейнольдса смеси определяется по формуле (78), где в качестве характерной линейной величины использован диаметр, а коэффициент

$$\psi=\frac{(\beta_1\varphi_1\mu_1/F_1)+(\beta_2\varphi_2\mu_2/F_2)}{\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2}.$$

Изменение коэффициента ψ для горизонтального течения показано на рис. 6. При $\varphi=0$ и 1 он равен единице, в интервале φ от 0 до 0,5 имеет минимум, а от 0,5 до 1 — максимум.

Так как при $\varphi=0{,}5$ F_1 и F_2 принимают значения, выражающиеся формулами (99), то $\psi(\varphi)$ при этом газосодержании проходит через единицу. В этом легко убедиться, если воспользоваться видоизмененной формулой (99) для горизонтального течения:

$$F_2=\frac{\beta_2\dot{\mu}_2}{1-\beta_2(1-\dot{\mu}_2)}.$$

Подставив это значение в формулу для ψ при $\varphi_1=\varphi_2=0{,}5$, для которой справедливо равенство $F_1+F_2=1$, найдем, что $\psi_{\varphi=0,5}=1$.

Для гомогенного течения коэффициент гидравлического сопротивления $\lambda=64/\mathrm{Re}$. Если два течения (гомогенное и двухфазное) характеризуются одним и тем же критерием Рейнольдса, то ψ будет представлять собой отклонение λ_c от λ. В этой связи представляют интерес закономерности изменения ψ и для турбулентных течений газо-жидкостной смеси. Кроме того, можно допустить, что изменение коэффициента гидравлического сопротивления смеси подчиняется закону для однофазного течения. Тогда ψ становится равным единице, а критерий Рейнольдса приобретает величину, подлежащую исследованию. Для плоского течения он равен

$$\mathrm{Re}_c=\frac{4h(\varphi_1\rho_1 w_1^2+\varphi_2\rho_2 w_2^2)}{\left(\frac{\mu_1 w_1}{\varphi_1}+\frac{\mu_2 w_2}{\varphi_2}\right)},$$

для разделенного течения в цилиндрической круглой трубе:

$$\mathrm{Re}_c = \frac{D\left(\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2\right)}{\left(\frac{\varphi_1^2\mu_1 w_1}{F_1} + \frac{\varphi_2^2\mu_2 w_2}{F_2}\right)}.$$

В общем случае критерий Рейнольдса смеси можно представить в виде

$$\mathrm{Re}_c = \frac{w_c l \Phi}{\nu_c},$$

где $\Phi = \eta_1 \frac{\beta_1}{\varphi_1} + \eta_2 \frac{\beta_2}{\varphi_2}$; l — характерная длина; ν_c — условная кинематическая вязкость смеси, определенная экспериментально.

В двух разобранных частных примерах точного интегрирования уравнений движений введено до некоторой степени условное понятие числа Рейнольдса смеси. В практике гидродинамических расчетов часто используют другую условную величину. Под числом Рейнольдса смеси подразумевают отношение инерционных сил к силам вязких напряжений в виде $\mathrm{Re}'_c = w_c l/\nu_c$. Здесь под скоростью смеси понимается та же величина, что и в разобранных выше примерах, а кинематическая вязкость смеси вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\nu_c} = \frac{\beta_1}{\nu_1} + \frac{\beta_2}{\nu_2}.$$

Условность написания Re'_c заключается в том, что оно не отражает, как и другие его определения, форм течения смеси.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО РАЗДЕЛЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗО-ЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Используем точное решение плоского горизонтального разделенного течения для исследований его устойчивости. Для этого применим метод наложения малых колебаний на основное установившееся течение, причем по-прежнему будем считать постоянными физические свойства компонентов. Пусть скорости и давления основных течений $w_1(y)$, $w_2(y)$, $p(x)$; двумерное возмущенное движение для первого и второго компонентов с параметрами

$$\dot{w}_{1x}(x, y, t), \quad \dot{w}_{1y}(x, y, t), \quad \dot{p}(x, y, t),$$

$$\dot{w}_{2x}(x, y, t), \quad \dot{w}_{2y}(x, y, t), \quad \dot{p}(x, y, t)$$

и результирующее течение с давлением $p_p = p + \dot{p}$, компонентами скоростей по x $w_{1p} = w_1 + \dot{w}_{1x}$, $w_{2p} = w_2 + \dot{w}_{2x}$ и компонентами по y $\dot{w}_{1y}$, $\dot{w}_{2y}$.

Для первого компонента результирующее течение, как и основное, должно удовлетворять уравнениям Навье — Стокса и уравнениям непрерывности

$$\frac{\partial \dot{w}_{x_1}}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \dot{w}_{x_1}}{\partial x} + \dot{w}_{y_1} \frac{\partial \dot{w}_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} + \nu_1 \Delta \dot{w}_{x_1},$$

$$\frac{\partial \dot{w}_{y_1}}{\partial t} + \dot{w}_1 \frac{\partial \dot{u}_{y_1}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial \dot{p}}{\partial y} + \nu_1 \Delta \dot{w}_{y_1}, \tag{101}$$

$$\frac{\partial \dot{w}_{x_1}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_{y_1}}{\partial y} = 0$$

и для второго компонента

$$\frac{\partial \dot{w}_{x_2}}{\partial t} + w_2 \frac{\partial \dot{w}_{x_2}}{\partial x} + \dot{w}_{y_2} \frac{\partial \dot{w}_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} + \nu_2 \Delta \dot{w}_{x_2},$$

$$\frac{\partial \dot{w}_{y_2}}{\partial t} + w_2 \frac{\partial \dot{w}_{y_2}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial \dot{p}}{\partial y} + \nu_2 \Delta \dot{w}_{y_2}, \tag{102}$$

$$\frac{\partial \dot{w}_{x_2}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_{y_2}}{\partial y} = 0.$$

При написании этих уравнений пренебрегаем величинами

$$\dot{w}_{1x} \frac{\partial \dot{w}_{1x}}{\partial x} + \dot{w}_{1y} \frac{\partial \dot{w}_{1x}}{\partial y} \approx 0,$$

$$\dot{w}_{2x} \frac{\partial \dot{w}_{2y}}{\partial y} + \dot{w}_{2y} \frac{\partial \dot{w}_{2y}}{\partial y} \approx 0,$$

как малыми по сравнению с другими членами уравнений. Исключим из (101) и (102) градиенты давления путем дифференцирования первых уравнений по (y), а вторых по (x) и введем функцию тока для отдельных колебаний возмущающих движений в виде

$$\Omega_1 (x, y, t) = \omega_1 (y)\, e^{i\alpha (x - ct)},$$

$$\Omega_1 (x_1, y_1, t) = \omega_2 (y)\, e^{i\alpha (x - ct)}.$$

Тогда составляющие скоростей возмущенного движения выразятся

$$\dot{w}_{1x} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_1}{\partial y} e^{i\alpha (x - ct)},$$

$$\dot{w}_{1y} = -\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} = -i\alpha \omega_1 (y)\, e^{i\alpha (x - ct)}$$

(аналогично и для второго компонента), а уравнения (101) и (102) примут вид обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка для амплитуды возмущенного движения

$$(w_1 - c)\left(\frac{d^2\omega_1}{dy^2} - \alpha^2\omega_1\right) - \omega_1 \frac{d^2w_1}{dy^2} = -\frac{i\gamma_1}{\alpha}\left(\frac{d^4\omega_1}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2w_1}{dy^2} + \alpha^4\omega_1\right), \tag{103}$$

$$(w_2 - c)\left(\frac{d^2\omega_2}{dy^2} - \alpha^2\omega_2\right) - \omega_2 \frac{d^2w_2}{dy^2} = -\frac{i\nu_2}{\alpha}\left(\frac{d^4\omega_2}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\omega_2}{dy^2} + a^4\omega_2\right).$$

Граничные условия для уравнений (103) вытекают из общих соображений гидромеханики: на стенке вследствие прилипания скорости и функции тока равны нулю, т. е.

$$\omega_1(y) = 0, \quad \frac{\partial\omega_1(y)}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = -h_1,$$

$$\omega_2(y) = 0, \quad \frac{\partial\omega_2(y)}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = +h_2.$$

На границе раздела фаз имеет место равенство продольных и поперечных пульсаций скоростей для обеих фаз

$$\omega_1(y) = \omega_2(y), \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial y} = \frac{\partial\omega_2}{\partial y} \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Уравнения основного движения [уравнение (7) плоского течения]

$$w_1 = w_{1\max} + \frac{k}{\mu_1}(y - y_{\max})^2,$$

$$w_2 = w_{2\max} + \frac{k}{\mu_2}(y - y_{\max})^2,$$

где

$$w_{1\max} = -\frac{k}{\mu_1}(h_1 + y_{\max})^2,$$

$$w_{2\max} = -\frac{k}{\mu_2}(h_2 - y_{\max})^2$$

и уравнение (103) приведем к безразмерному виду, вводя следующие безразмерные величины: приведенную скорость $\dot{w}_1 = \frac{w_1}{w_{1\max}}$ и амплитуду возмущенной скорости $\dot{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\omega_{1\max}}$; $\alpha_1 = \alpha(h_1 + y_{\max})$, $\dot{c}_1 = \frac{c}{w_{1\max}} - 1$. Критерий Рейнольдса представим в виде $\mathrm{Re}_1 = \frac{w_{1\max}(h_1 + y_{\max})}{\nu_1}$, новую независимую переменную обозначим

через $\xi = \frac{y - y_{max}}{h_1 + y_{max}}$. Аналогичные безразмерные величины используем и для газового компонента

$$\dot{w}_2 = \frac{w_2}{w_{2\,max}}, \qquad \dot{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_{2\,max}},$$

$$\dot{\alpha}_2 = \alpha(h_2 - y_{max}), \qquad \dot{c}_2 = \frac{c}{w_{2\,max}} - 1,$$

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{w_{2\,max}(h_2 - y_{max})}{\nu_2}, \qquad \xi = \frac{y - y_{max}}{h_2 - y_{max}}.$$

В новых переменных уравнения основного движения и уравнения амплитуд возмущенного движения запишутся

$$\dot{w}_1 = 1 - \xi_1^2, \qquad \dot{w}_2 = 1 - \xi_2^2,$$

$$(\dot{c}_1 + \xi_1^2)\left(\frac{d^2\dot{\omega}_1}{d\xi_1^2} - \dot{\alpha}_1^2\dot{\omega}_1\right) - 2\dot{\omega}_1 = \frac{i}{\dot{\alpha}_1\,\mathrm{Re}_1}\left(\frac{d^4\dot{\omega}_1}{d\xi_1^4} - 2\dot{\alpha}_1^2\frac{d^2\dot{\omega}_1}{d\xi_1^2} + \dot{\alpha}_1^4\dot{\omega}_1\right), \tag{104}$$

$$(\dot{c}_2 + \xi_2^2)\left(\frac{d^2\dot{\omega}_2}{d\xi_2^2} - \dot{\alpha}_2^2\dot{\omega}_2\right) - 2\dot{\omega}_2 = \frac{i}{\dot{\alpha}_2\,\mathrm{Re}_2}\left(\frac{d^4\dot{\omega}_2}{d\xi_2^4} - 2\dot{\alpha}_2^2\frac{d^2\dot{\omega}_2}{d\xi_2^2} + \dot{\alpha}_2^4\dot{\omega}_2\right)$$

с граничными условиями

$$\dot{\omega}_1 = 0, \quad \frac{d(\dot{\omega}_1)}{d\xi_1} = 0 \qquad \text{при } \xi_1 = -1,$$

$$\dot{\omega}_2 = 0, \quad \frac{d\dot{\omega}_2}{d\xi_2} = 0 \qquad \text{при } \xi_2 = 1,$$

$$\omega_{1\,max}\dot{\omega}_1 = \omega_{2\,max}\dot{\omega}_2,$$

$$\frac{\omega_{1\,max}}{(h_1 + y_{max})} \cdot \frac{d\dot{\omega}_1}{d\xi_1} = \frac{\omega_{2\,max}}{(h_2 - y_{max})} \cdot \frac{d\dot{\omega}_2}{d\xi_2}$$

при $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Уравнения (104) по написанию полностью совпадают. Поэтому нет надобности искать их решения отдельно. Достаточно решить одно из них, решение же второго найдется из первого путем замены в нем всех величин соответствующими величинами. Но тем не менее шести граничных условий недостаточно для нахождения восьми *постоянных интегрирования*.

Чтобы привести задачу к разрешимому виду, используем параболическую симметрию профиля скоростей обеих фаз относительно оси z, проходящей вдоль максимальной скорости. Течение смеси мы можем рассматривать как два независимых течения жидкости и газа в условных каналах: течение жидкости — в канале, ограниченном стенками $\xi = \pm 1$, течение газа — в канале с $\xi = \pm 1$. Дифференциальные уравнения возмущенного движения в таких

каналах остаются прежними. Их решение в областях изменения $-1 \leqslant \xi \leqslant +1$ для потоков жидкости в условных каналах будет справедливо и для двухфазной смеси. Но при этом решения распространятся на области потоков жидкости и газа в смеси, т. е. на области

$$-1 \leqslant \xi \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Граничные условия таких течений вытекают из равенства нулю функций тока и их производных на стенках условных каналов.

Оба уравнения могут быть решены, так как имеются по четыре граничных условия для отыскания постоянных интегрирования. Однако необходимо заметить, что вид возмущающего движения можно не отыскивать, поскольку для решения вопроса об устойчивости необходимо лишь найти минимальное значение числа Рейнольдса, выше которого возможны неустойчивые колебания, приводящие ламинарное течение к турбулентному. Пусть мы имеем общее решение, например, для течения жидкой фазы в условном канале в виде

$$\dot{\omega}_1(\xi) = c_1\dot{\omega}_1(\xi) + c_2\dot{\omega}_{II}(\xi) + c_3\dot{\omega}_{III}(\xi) + c_4\dot{\omega}_{IV}(\xi),$$

где $c_1 \ldots$ — постоянные, определяемые из граничных условий; $\dot{\omega}_1 \ldots$ — частные решения.

Так как координаты стенок условного канала равны $+1$ и -1, то для отыскания констант будем иметь четыре уравнения:

$$c_1\omega_I(1) + c_2\omega_{II}(1) + c_3\omega_{III}(1) + c_4\omega_{IV}(1) = 0,$$

$$c_1\omega_I(-1) + c_2\omega_{II}(-1) + c_3\omega_{III}(-1) + c_4\omega_{IV}(-1) = 0,$$

$$c_1\left(\frac{d\omega_I}{d\xi}\right)_1 + c_2\left(\frac{d\omega_{II}}{d\xi}\right)_1 + c_3\left(\frac{d\omega_{III}}{d\xi}\right)_1 + c_4\left(\frac{d\omega_{IV}}{d\xi}\right)_1 = 0,$$

$$c_1\left(\frac{d\omega_I}{d\xi}\right)_{-1} + c_2\left(\frac{d\omega_{II}}{d\xi}\right)_{-1} + c_3\left(\frac{d\omega_{III}}{d\xi}\right)_{-1} + c_4\left(\frac{d\omega_{IV}}{d\xi}\right)_{-1} = 0.$$

Для того чтобы решение этой системы было определенным, необходимо и достаточно равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных c_1, c_2, c_3, c_4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_I(h'), & \omega_{II}(h'), & \omega_{III}(h'), & \omega_{IV}(h') \\ \omega_I(-h'), & \omega_{II}(-h'), & \omega_{III}(-h'), & \omega_{IV}(-h') \\ \left(\frac{d\omega_I}{d\xi}\right)_{h'}, & \left(\frac{d\omega_{II}}{d\xi}\right)_{h'}, & \left(\frac{d\omega_{III}}{d\xi}\right)_{h'}, & \left(\frac{d\omega_{IV}}{d\xi}\right)_{h'} \\ \left(\frac{d\omega_I}{d\xi}\right)_{-h'}, & \left(\frac{d\omega_{II}}{d\xi}\right)_{-h'}, & \left(\frac{d\omega_{III}}{d\xi}\right)_{-h'}, & \left(\frac{d\omega_{IV}}{d\xi}\right)_{-h'} \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, задача об устойчивости сводится к решению определителя, элементы которого определяются на основании параболического распределения скоростей. Но такая задача уже решена Ц. Линем, который нашел критическое значение числа Рейнольдса,

составленного по максимальной скорости и половине высоты b канала:

$$\mathrm{Re}_{кр} = \frac{w_{max} b}{\nu} = 5314, \tag{105}$$

ниже которого движение всегда устойчиво. При течении смеси это число сохраняется для критерия Рейнольдса жидкости и газа

$$\mathrm{Re}_{1\,кр} = \mathrm{Re}_{2\,кр} = 5314. \tag{106}$$

Выразим критические значения Рейнольдса через таковые для смеси. Как уже отмечалось, Re_c для плоского разделенного течения удобно представить в виде

$$\mathrm{Re}_c = \frac{\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2}{\varphi_1\mu_1 w_1 + \varphi_2\mu_2 w_2} \cdot \frac{h}{2} \tag{107}$$

при линейном размере, равном $h/2$. Или, переходя к средней скорости смеси $w_c = \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2$, он запишется как

$$\mathrm{Re}_c = \frac{\Phi \frac{h}{2}(\varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2)}{\eta_1\nu_1 + \eta_2\nu_2}, \tag{108}$$

где

$$\Phi = \eta_1 \frac{\beta_1}{\varphi_1} + \eta_2 \frac{\beta_2}{\varphi_2}$$

является некоторой функцией, характеризующей наличие относительного движения компонентов смеси. В пределе эта функция стремится к нулю при стремлении одного из фазосодержаний к единице.

Максимальные скорости компонентов можно выразить через средние значения. Приравняв $k_1 = k_2 = k$ в формуле (7) и имея в виду

$$y_{max} = -\frac{Ah}{2k} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varphi_2^2 + \varphi_1^2\dot{\mu}_2}{\varphi_2 + \varphi_1\dot{\mu}_2},$$

получим одни и те же функциональные зависимости

$$w_{1\,max}(h_1 + y_{max}) = \frac{3h}{2f_1(\varphi_1\dot{\mu}_1)} \frac{w_1}{2},$$

$$w_{2\,max}(h_2 - y_{max}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{f_2(\varphi_2\dot{\mu}_2)} \cdot \frac{h}{2} w_2,$$

где f_1 и f_2 отличаются только индексами входящих в них величин

$$f_1 = \frac{\varphi_1[\varphi_1 + \varphi_2\dot{\mu}_1]^2[\varphi_1^2 + \varphi_2(3+\varphi_1)\dot{\mu}_1]}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2\mu_1},$$

$$f_2 = \frac{\varphi_2[\varphi_2 + \varphi_1\dot{\mu}_2]^2[\varphi_2^2 + \varphi_1(3+\varphi_2)\dot{\mu}_2]}{\varphi_2^2 + \varphi_1^2\mu_2}.$$

Следовательно, критические значения Рейнольдса можно выразить формулами

$$\mathrm{Re}_{1\,кр}=\frac{w_{1\,\max}(h_1+y_{\max})}{\nu_1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{f_1}\cdot\frac{hw_1}{2\nu_1},$$

$$\mathrm{Re}_{2\,кр}=\frac{w_{2\,\max}(h_2-y_{\max})}{\nu_2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{f_2}\cdot\frac{hw_2}{2\nu_2}. \qquad (109)$$

Скорости w_1 и w_2 выражаются через число Рейнольдса смеси (108) в виде

$$w_1=\frac{\beta_1}{\varphi_1}w_c=\frac{2\beta_1\nu_c\,\mathrm{Re}_c}{\varphi_1\Phi h},$$

$$w_2=\frac{\beta_2}{\varphi_2}w_c=\frac{2\beta_2\nu_c\,\mathrm{Re}_c}{\varphi_2\Phi h}.$$

Подставим эти значения в (109), получим соотношение между $\mathrm{Re}_{c\,кр}$, $\mathrm{Re}_{1кр}$ и $\mathrm{Re}_{2кр}$.

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{Re}_{c\,кр}}{\mathrm{Re}_{1\,кр}}=\frac{\varphi_1\nu_1 f_1\Phi}{\beta_1\nu_c},\qquad \frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{Re}_{c\,кр}}{\mathrm{Re}_{2\,кр}}=\frac{\varphi_2\nu_2 f_2\Phi}{\beta_2\nu_c}.$$

Коэффициент 3/2, как видно из формулы (109), является множителем при переходе от Re, вычисленного по максимальной скорости, к Re, найденному по средней скорости.

Если перейти от Φ и ν_c к переменным φ и $\dot{\mu}$, соотношения между приведенными числами Рейнольдса будут иметь вид

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{Re}_{c\,кр}}{\mathrm{Re}_{1\,кр}}=\frac{\varphi_1 f_I^2+\varphi_2 g\dot{\rho}_2 f_{II}^2}{\varphi_1 f_I+\varphi_2 f_{II}\dot{\mu}_2}\cdot\frac{(\varphi_1+\varphi_2\dot{\mu}_1)^2}{[1-\varphi_1^2(1-\dot{\mu}_2)]},$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{Re}_{c\,кр}}{\mathrm{Re}_{2\,кр}}=\frac{\varphi_1 f_I^2+\varphi_2 g\dot{\rho}_2 f_{II}^2}{\varphi_1 f_I+\varphi_2\dot{\mu}_2 f_{II}}\cdot\frac{\varphi_2+\varphi_1\dot{\mu}_2^2}{[1-\varphi_2^2(1-\dot{\mu}_1)]}\cdot\frac{\dot{\mu}_2}{g\dot{\rho}_2},$$

где

$$f_I=\varphi_1[\varphi_2(3+\varphi_1)+\varphi_1^2\dot{\mu}_2],$$

$$f_{II}=\varphi_2[\varphi_1(3+\varphi_2)+\varphi_2^2\dot{\mu}_1].$$

При $\varphi_2\to 0$ поток смеси переходит в поток жидкости и, следовательно, $\lim\limits_{\varphi_2\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{Re}_{c\,кр}}{\mathrm{Re}_{1кр}}\right)=1$, при этом

$$\lim_{\varphi_2\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{Re}_{c\,кр}}{\mathrm{Re}_{2\,кр}}\right)=\frac{\dot{\mu}_2^4}{g\dot{\rho}_2}.$$

При $\varphi_2\to 1$ поток смеси переходит в течение газа, но

$$\lim_{\varphi_2\to 1}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{Re}_{c\,кр}}{\mathrm{Re}_{1\,кр}}\right)=\frac{\dot{\mu}_2^4}{g\dot{\rho}_1}.$$

На рис. 10 в качестве примера показана зависимость приведенных критериев Рейнольдса смеси для жидкой и газовой фаз воздуховодяного течения в зависимости от истинного газосодержания.

С ростом φ_2 устойчивость газовой и жидкой фаз монотонно возрастает. Причем устойчивость газа ниже устойчивости жидкости. Если для газа она меняется от малого значения $\dot{\mu}_2^4/g\dot{\rho}_2$ до единицы, то для жидкой фазы — от единицы до весьма большого значения $\dot{\mu}_1^4/g\dot{\rho}_1$.

Аналогичными приемами можно исследовать устойчивость двухфазного течения в круглой цилиндрической трубе, но при этом расчеты значительно осложняются в результате интегрирования уравнений в цилиндрических координатах по переменным z, r и полярному углу. К этому надо добавить, что хотя уравнение движения для разделенного течения в цилиндрической трубе и доведены до определенных интегралов, тем не менее они не сводятся к простым табличным интегралам. Следует отметить, что расчеты устойчивости однофазного течения в цилиндрической трубе, выполненные Дж. Пречем [104], а позднее Г. М. Коркосом и Дж. Р. Селлерсом [105], не обнаружили неустойчивости такого течения. Поэтому при исследовании устойчивости двухфазного течения пришлось бы воспользоваться опытным значением критического числа $\mathrm{Re}_{кр} = 2320$, которое больше теоретического, соответствующего лишь началу возникновения неустойчивости. В целях приближенной оценки устойчивости двухфазного течения в круглой трубе можно пользоваться зависимостями, полученными для плоского течения, но при этом надо иметь в виду, что критическое значение Рейнольдса для плоского течения больше такового для течения в трубе.

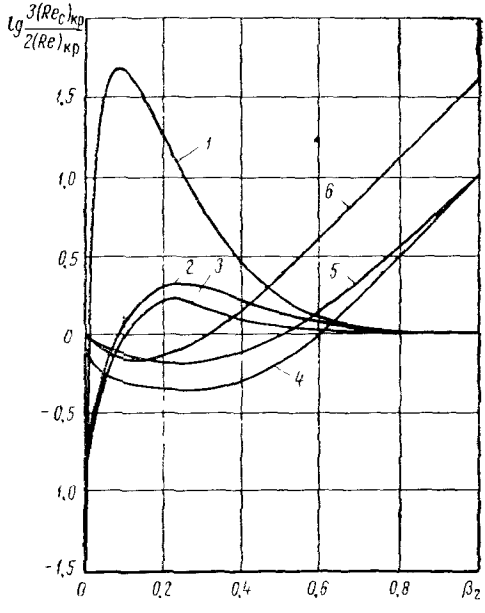


Рис. 10. Зависимость $\mathrm{Re}_{c\,кр}$ от β_2 при разделенном течении двухфазной жидкости между двумя параллельными стенками.

Газовая фаза: 1 — $\dot{\mu} = 0{,}01$, $\dot{\rho} = 0{,}001$, 2 — $\dot{\mu} = 0{,}1$, $\beta = 0{,}1$. 3 — $\dot{\mu} = 0{,}05$; $\dot{\rho} = 0{,}1$. Жидкая фаза: 4 — $\dot{\mu} = 0{,}01$, $\dot{\rho} = 0{,}001$; 5 — $\dot{\mu} = 0{,}1$, $\dot{\rho} = 0{,}1$; 6 — $\dot{\mu} = 0{,}05$, $\dot{\rho} = 0{,}1$.

СКОРОСТЬ ЗВУКА В ДВУХФАЗНЫХ ЖИДКОСТЯХ

Скорость звука в двухфазных жидкостях имеет свои особенности. Газовая и жидкая фазы в потоке смеси создают вполне определенные формы течения: раздельное течение, дисперсную и дисперсионную

макроструктуру, а также структуру с сильно выраженной неоднородностью — крупнопузырчатое течение. Поэтому говорить о скорости звука в двухфазной жидкости имеет смысл тогда, когда среда подвижная, а длина звуковой волны значительно больше средней неоднородности структуры течения (за исключением некоторых отдельных случаев, таких, как неподвижные коллоидные растворы, суспензии).

Скорость звука как скорость распространения слабого упругого возмущения в двухфазной жидкости в сильной степени зависит от истинного объемного паро- или газосодержания, от физических свойств газовой и жидкой фаз смеси, от теплообмена между фазами, от частоты и величины возмущения.

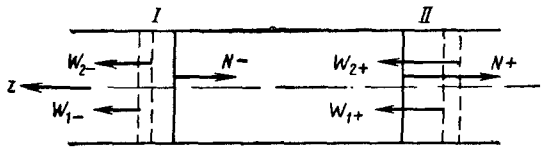


Рис. 11. К выводу уравнения скорости звука в смеси.

Для вывода формулы скорости звука воспользуемся усредненным уравнением гидродинамики и энергии (31) и (40). Запишем их для выделенного объема смеси в интегральной форме, для сокращения опуская значки осреднения. При этом в первом приближении будем пренебрегать массовыми силами и вязкими напряжениями. Уравнения сохранения массы и количества движения будут иметь вид

$$\left[\int_V (\varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2)\, d\tau\right]_{t_2} - \left[\int_V (\varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2)\, d\tau\right]_{t_1} = 0, \qquad (110)$$

$$\left[\int_V (\varphi_1\rho_1 w_1 + \varphi_2\rho_2 w_2)\, d\tau\right]_{t_2} - \left[\int_V (\varphi_1\rho_1 w_1 + \varphi_2\rho_2 w_2)\, d\tau\right]_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_S p\, df\right) dt. \qquad (111)$$

Пусть поток смеси движется против направления оси z (рис. 11). Представим далее, что тем или иным способом в некоторый момент времени поток частично затормаживается. Вследствие этого образуется волна сжатия, фронт которой будет перемещаться по z со скоростью N.

За единицу времени пусть он переместится из положения I в положение II и пройдет через массу жидкости и массу газовой фазы, отнесенные к единице площади сечения потока (фронта волны) и соответственно равные перед фронтом волны $\varphi_{1+}\rho_{1+}(N + w_{1+})$, $\varphi_{2+}\rho_{2+}(N + w_{2+})$ и за фронтом волны $\varphi_{1-}\rho_{1-}(N + w_{1-})$, $\varphi_{2-}\rho_{2-}(N + w_{2-})$. Здесь и дальше индексы (+) и (—) будут относиться к параметрам компонентов соответственно перед и за фронтом

волны. Согласно первому интегральному уравнению массы смеси, пройденные фронтом волны, одни и те же. Поэтому

$$[\varphi_1\rho_1+\varphi_2\rho_2]_+N+[\varphi_1\rho_1w_1+\varphi_2\rho_2w_2]_+=[\varphi_1\rho_1(N+w_1)+\varphi_2\rho_2(N+w_2)]_-. \tag{112}$$

Так как давление перед и за волной различно, возможен фазовый переход, который, однако, учитывается концентрациями φ_1, φ_2 и плотностями ρ_1, ρ_2. Перепишем последние равенства в виде

$$(\varphi_1\rho_1+\varphi_2\rho_2)_+N+(\varphi_1\rho_1w_1+\varphi_2\rho_2w_2)_+=(\varphi_1\rho_1+\varphi_2\rho_2)_-N+$$
$$+(\varphi_1\rho_1w_1+\varphi_2\rho_2w_2)_-$$

или

$$\rho_{c+}(N+w_\tau)=\rho_{c-}(N+w_x), \tag{112'}$$

где, как в гл. 1, ρ_{c+} — средняя истинная плотность; w_x — скорость центра массы единицы объема смеси

$$\rho_{c\pm}=(\varphi_1\rho_1+\varphi_2\rho_2)_\pm,$$
$$w_x=(\varkappa_1w_1+\varkappa_2w_2)_\pm.$$

Аналогичные рассуждения, но относящиеся к количеству движения смеси, согласно второму интегральному уравнению приводят к равенству

$$\varphi_{1+}\rho_{1+}w_{1+}(N+w_{1+})+\varphi_{2+}\rho_{2+}w_{2+}(N+w_{2+})-\varphi_{1-}\rho_{1-}w_{1-}(N+w_{1-})-$$
$$-\varphi_{2-}\rho_{2-}w_{2-}(N+w_{2-})=p_--p_+ \tag{113}$$

или

$$\rho_{c+}w_{x+}(N+w_\eta)-\rho_{c-}w_{x-}(N+w_{\eta-})=p_--p_+,$$

где по-прежнему $w_{\eta-}$ — скорость центра единицы массы смеси.

Представим это равенство в виде

$$\rho_{c+}w_{x+}(N+w_{x+})-\rho_{c-}w_{x-}(N+w_{x-})+(\rho_{c+}w_{x+}\Delta w_+-\rho_{c-}w_{x-}\Delta w_-)=p_--p_+, \tag{113'}$$

где $\Delta w_\pm=w_{\eta\pm}-w_{x\pm}$.

Обозначим скорость перемещения фронта волны относительно смеси через $a_\pm=N+w_x$, а затем, решая (112′) и (113′) относительно a_+ и a_-, найдем

$$a_+^2=\frac{\rho_{c-}}{\rho_{c+}}\,\frac{p_--p_++(\rho_{c-}w_{x-}\Delta w_-+\rho_{c+}w_{x+}\Delta w_+}{\rho_--\rho_+}, \tag{114}$$

$$a_-=\frac{\rho_{c+}^2}{\rho_{c-}^2}\,a_+.$$

Со значительным ростом давления и скорости смеси относительная скорость уменьшается, причем она приближается к нулю при околозвуковой скорости смеси. Это предположение, как будет показано дальше на основании экспериментальных исследований, стано-

вится неверным при скоростях смеси, меньших 100 *м/сек* и давлениях, меньших 150 *бар*.

Следовательно, величинами $\Delta w_{\pm}\rho_{c\pm}$ и $w_{\varkappa\pm}$ можно пренебречь; тогда получим соотношение, аналогичное выражению для скорости распространения сильного разрыва в однофазной среде:

$$a_+^2 = \frac{\rho_{c-}}{\rho_{c+}} \frac{p_- - p_+}{\rho_- - \rho_+}.$$

Здесь плотность смеси ρ_{c-} соответствует давлению p_- и энтропии

$$S_- = S_{1+} + \varkappa (S_{2+} - S_{1-}).$$

Переходя к пределу, когда $p_- \to p_+$, получим для скорости звука общее выражение

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_c}\right)_S + w_\varkappa \Delta w + \rho_c \left[\frac{\partial (w_\varkappa \Delta w}{\partial \rho_c}\right] \qquad (115)$$

или, пренебрегая относительной скоростью и ее изменением по ρ:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_c}\right)_S = -gV^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S, \qquad (116)$$

где V — удельный объем смеси

$$V = \frac{1}{(\varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2)\, g} = \varkappa_1 V_1 + \varkappa_2 V_2.$$

Если далее пренебречь растворимостью газа в жидкости и влажностью его, то величина массовой концентрации газа в звуковой волне будет оставаться постоянной. В этом случае

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_{S_1} + \varkappa_2 \left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_{S_2} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)\right]_{S_1}.$$

Здесь индексами S_1 и S_2 обозначены энтропии жидкости и газа в предположении отсутствия обмена тепла между фазами за время прохождения звуковой волны.

Формуле для звука можно придать другой вид, выражая производные $V_{1\,(2)}$ по p через

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_{S_1} = \frac{C_{1V}}{C_{1p}} \left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T$$

и

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_{S_2} = \frac{C_{2V}}{C_{2p}} \left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T,$$

где $C_{V\,(p)}$ — теплоемкости жидкостей при постоянном объеме (давлении).

Переходя к объемным концентрациям, получим

$$\frac{1}{a^2} = g(\varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2)\left[\varphi_1 \frac{C_{1V}}{C_{1p}} \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial p}\right)_T + \varphi_2 \frac{C_{2V}}{C_{2p}} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial p}\right)_T\right]. \qquad (117)$$

Выразим скорость звука в смеси через скорости звука в жидкости и газе

$$\frac{1}{a^2_{1(2)}} = \left[\frac{C_V}{C_p}\left(\frac{\partial \rho_c}{\partial p}\right)_T\right]_{1(2)}.$$

Подставляя эти значения в выражение для скорости звука в смеси, получим

$$\frac{V^2}{a^2} = \varkappa_1 \frac{V_1^2}{a_1^2} + \varkappa_2 \frac{V_2^2}{a_2^2}. \qquad (118)$$

Согласно формуле (117) скорость звука в смеси в большой степени зависит от объемной концентрации газа. Смесь, состоящая из почти не сжимаемой жидкости с относительно большой плотностью и сжимаемого газа, имеет повышенную сжимаемость, поэтому звуковая скорость в ней ниже, чем в газе в широком диапазоне изменения концентрации газа. При $\varphi_2 = 0$ и 1 она соответственно равна скорости звука в жидкости и газе. Минимальное ее значение равно

$$\dot{a}^2_{\min} = \left(\frac{a}{a_2}\right)^2_{\min} = \frac{4\rho_1\rho_2 a_1^2 (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2)}{\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2} \qquad (119)$$

при

$$\varphi_{\min} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{\rho_2 a_2^2}{\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2}\right). \qquad (120)$$

Если $\rho_2 \ll \rho_1$, а $a_2 < a_1$, то приближенно

$$\dot{a}_{\min} \approx 2\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}, \quad \varphi_{\min} \approx \frac{1}{2}.$$

Например, минимальная приведенная скорость звука в воздухо-водяной смеси при нормальных давлении и температуре составит

$$\dot{a}_{min} = 2\sqrt{0{,}001205} \approx 0{,}07,$$

т. е. звук в смеси вода — воздух при объемной концентрации воздуха 50% составляет ~7% скорости звука в воздухе.

Звуковая скорость в двухфазном потоке, по-видимому, будет несколько отличаться от таковой в двухкомпонентном потоке, так как в звуковой волне возможен частичный переход фаз. Но если предположить, что тепловое равновесие между фазами сохраняется, то уравнения гидродинамики дополняются уравнением Клайперона — Клаузиуса вдоль кривой насыщения

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S = \frac{Ar}{T(V_2 - V_1)},$$

а массовая концентрация пара $\varkappa_2$ будет величиной переменной. Производная V по p запишется в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \varkappa_1\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S + \left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T\right] +$$
$$+ \varkappa_2\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T\right] + (V_2 - V_1)\left(\frac{\partial \varkappa_2}{\partial p}\right)_S. \qquad (121)$$

Из условия постоянства энтропии смеси определим изменение массовой концентрации

$$T\,dS = \varkappa_1 (di_1 - V_1\,dp) + \varkappa_2 (di_2 - v_2\,dp) + r\,d\varkappa_2 = 0.$$

Заменяя дифференциалы энтальпий, например, через

$$di_1 = C_{1p}\,dT + \left[V_1 - T\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p\right] dp,$$

находим

$$\left(\frac{\partial \varkappa_2}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{r}\left\{\varkappa_1\left[T\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p - C_{1p}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S\right] + \right.$$
$$\left. + \varkappa_2\left[T\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p - C_{2p}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S\right]\right\}. \qquad (122)$$

Подставим значение $(\partial T/\partial p)_S$ из (120) в (122) и (121), а производную $(\partial \varkappa_2/\partial p)_S$ в (121), окончательно получим известное выражение для скорости звука a_g в смеси при условии фазового равновесия [34]

$$\frac{1}{a_g^2} = g\,(\varphi_1\rho_1 + \varphi_2\rho_2)\,(\varphi_1\varkappa_1 + \varphi_2\varkappa_2), \qquad (123)$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{AT}{r}(V_2 - V_1)\left[\frac{C_{1p}}{r}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) + \frac{2}{\rho_1}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial T}\right)_p\right] + \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial p}\right)_T,$$

$$\varkappa_2 = \frac{AT}{r}(V_2 - V_1)\left[\frac{C_{2p}}{r}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \frac{2}{\rho_2}\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial T}\right)_p\right] + \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial p}\right)_T.$$

Скорость звука a_g с ростом паросодержания монотонно возрастает от минимального значения при $\varphi_2 \to 1$ до максимального.

Скорость звука в жидкости с ничтожным количеством пара согласно (123) значительно ниже скорости звука в жидкости. Максимальное ее значение в паре с малой влажностью почти совпадает со скоростью в сухом паре. Например, для смеси пар — вода при давлении 10 *бар* и φ_2, близком к нулю:

$$a_{g\,min} \approx \frac{r\rho_2}{\rho_1 \sqrt{\frac{A}{g}\,T C_{1p}}} = 7{,}81\ м/сек.$$

Для пара с влажностью, близкой к нулю,

$$a_{g\,max} \approx g^{0,5}\left\{\frac{AT}{r}\left[\frac{C_{2p}}{r} + \frac{2}{\rho_2}\left(\frac{\partial \rho_2}{dT}\right)_p\right] + \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial p}\right)\right\}^{-0,5} = 476\ м/сек,$$

а для воды и сухого пара при тех же параметрах соответственно 1380 и 504 *м/сек*.

Распространение звука в воздухо-водяном и паро-водяном потоках исследовалось экспериментально [19]. Паро-водяной поток в вертикальной трубе с известными паросодержанием и скоростью

мгновенно перекрывался. Образовавшееся слабое упругое возмущение распространялось против течения с относительной скоростью, равной скорости звука. Распространение упругой волны регистрировалось малоинерционными мембранными датчиками (манометрами), установленными на трубе, с фотозаписью показаний на осциллограмме. Осциллограммы позволяли записать время прохождения волны от одного датчика до другого и тем самым рассчитать ее скорость. Истинное паросодержание определялось гамма-излучением.

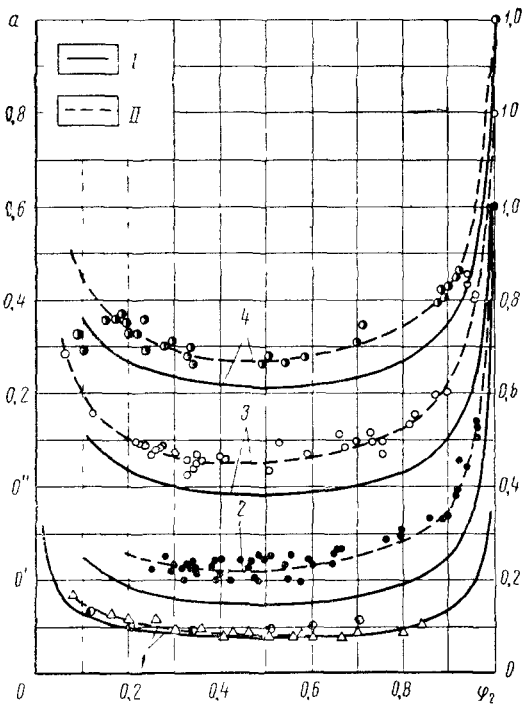


Рис. 12. Зависимость приведенной скорости звука a в смеси от истинного газосодержания φ_2.

I — расчетная; *II* — экспериментальная. *1* — воздухо-водяная смесь, $p = 2$ и 25 *бар*, *2* — паро-водяная смесь, $p = 10$ *бар*; *3* — паро-водяная смесь, $p = 15$ *бар* (начало координат в точке 0'); *4* — паро-водяная смесь, $p = 20$ *бар* (начало координат в точке 0'').

Аналогичные эксперименты проводились и с воздухо-водяным потоком. Результаты расчетных [по формулам (118) и (123)] и экспериментальных данных показаны на рис. 12.

Все экспериментальные точки находятся выше теоретической кривой, когда $\varkappa = \text{idem}$, и значительно выше кривой, когда учтено фазовое равновесие в звуковой волне. Хотя в экспериментах не достигнута достаточная точность, тем не менее все опытные точки группируются около кривых, которые показывают зависимость скорости распространения звука от паросодержания и давления двухфазной жидкости. С ростом паросодержания приведенная скорость звука падает, доходит до минимума и затем возрастает до единицы при паросодержании, равном единице. Давление увеличивает упругость смеси, поэтому с его ростом повышается и скорость звука.

Если предположить, что тепловое равновесие между фазами в звуковой волне частично нарушается, то кривая скорости звука должна проходить между кривыми при $\varkappa = \text{idem}$ и $\varkappa \neq \text{idem}$. Экспериментами (см. рис. 12) это не подтверждается. В действительности возможен частичный переход между фазами, но такой, что паросодер-

жание практически можно считать постоянным. В этой связи интересно сопоставление экспериментальных данных по скорости звука в воздухо-водяной и паро-водяной смесях, потому что в первом случае газосодержание заведомо остается постоянным. Опытные данные, представленные на рис. 12, для скорости звука в смеси вода — воздух почти совпадают с расчетными для $\varkappa = \text{idem}$.

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Приведенная выше система уравнений гидродинамики и энергии смеси является незамкнутой. Для ее замыкания могут быть использованы экспериментальные данные. Но получить такие данные можно на базе имеющихся общих уравнений. Поэтому выведем основные критерии для течения двухфазной жидкости, положив в основу уравнения движения. Выпишем одно из них

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \rho_c \left[\bar{a}_z - \frac{\partial \bar{w}_{xz}}{\partial t} - (\bar{w}_\varkappa \nabla) \bar{w}_{\eta z} \right] + \mathbf{div}\,[\Pi_z - \dot{T}_z] + (\bar{w}_{\eta z} - \bar{w}_{xz}) \frac{\partial \rho_c}{\partial t}.$$

Запишем это уравнение отдельно для первого и второго компонентов, причем если один из компонентов взвешен в другом, представляющем дисперсионную среду, то член $\partial p/\partial z$ должен оставаться только в этой среде. Однако надо заметить, *что если* $\partial p/\partial z$ *отнести* к первому и второму компонентам пропорционально их концентрациям, то ошибки в конечных выводах не будет. Кроме того, физически будет нагляднее в уравнениях дисперсионной среды и дисперсоида силы веса представить в виде архимедовых сил. В этом случае

$$\bar{w}_{1z} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\varphi}_1 \rho_1) + \mathbf{div} (\bar{\varphi}_1 \rho_1 \bar{w}_1) \right] + \bar{\varphi}_1 \rho_1 \left[\frac{\partial \bar{w}_{1z}}{\partial t} + (\bar{w}_1 \nabla) \bar{w}_{1z} \right] =$$

$$= \bar{\varphi}_1 \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) g \cos(g, z) + \mathbf{div} (\bar{\varphi} \bar{\Pi}_{1z}) - \frac{\partial}{\partial z_i} (\bar{\varphi}_1 \rho_1 \overline{w_{1z} w_{1i}}) + \bar{\bar{Z}}; \quad (124)$$

$$\bar{w}_{2z} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\varphi}_2 \rho_2) + \mathbf{div} (\bar{\varphi}_2 \rho_2 \bar{w}_2) \right] + \varphi_2 \rho_2 \left[\frac{\partial \bar{w}_{2z}}{\partial t} + (\bar{w}_2 \nabla) \bar{w}_{2z} \right] =$$

$$= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \rho_2 g \cos(g, z) + \mathbf{div} (\bar{\varphi}_2 \bar{\Pi}_{2z}) - \frac{\partial}{\partial z_i} (\varphi_2 \rho_2 \overline{w_{2z} w_{2i}}) - \bar{\bar{Z}}. \quad (125)$$

Здесь Z — сумма сил взаимного сопротивления между компонентами, отнесенная к единице объема.

Перейдем от написанных уравнений к уравнениям, им подобным. Если два течения подобны, то переход от одного уравнения к другому осуществляется путем использования следующих соотношений:

$$\tilde{\rho}_1 = \dot{\rho}_1 \rho_1, \quad \tilde{w}_1 = \dot{w}_1 \bar{w}_1, \quad \tilde{\mu}_1 = \dot{\mu}_1 \bar{\mu}_1, \quad \tilde{w}_1 = \dot{w}_{01} w_1,$$
$$\tilde{p} = \dot{p} p, \quad \tilde{t} = \dot{t} t, \quad \tilde{x} = \dot{l}_1 x, \quad \tilde{y} = \dot{l}_1 y, \quad \tilde{z} = \dot{l}_1 z. \quad (126)$$

Аналогично и для второго компонента. Волнистая черта означает, что данная величина относится ко второму течению, а точка — безразмерные постоянные. Поскольку истинная концентрация

компонентов и отношение плотностей ρ_2/ρ_1 представляют собой безразмерные величины, они не изменяются при переходе к другому подобному течению. Тензор вязких напряжений при наличии силы взаимодействия между компонентами сохраняет классическое определение через вязкость и градиент скорости, например

$$\mathbf{div}\,(\bar{\varphi}_2\bar{\Pi}_{2z}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_2\Pi_{2zx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_2\Pi_{2zy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_2\Pi_{2zz}), \qquad (127)$$

где

$$\Pi_{2\lambda y} \cong \mu_2 \frac{\partial w_{2z}}{\partial y}.$$

Теперь новому течению будут удовлетворять уравнения в переменных, выраженных через первые величины:

$$\begin{aligned}
&\bar{w}_{1z}\left[\frac{\dot{\rho}_1\dot{w}_1}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\varphi}_1\rho_1) + \frac{\dot{\rho}_1\dot{w}_1^2}{\dot{l}_1}\,\mathbf{div}\,(\bar{\varphi}_1\rho_1\bar{w}_1)\right] + \\
&+\bar{\varphi}_1\rho_1\left[\frac{\dot{\rho}_1\dot{w}_1}{t}\frac{\partial\bar{w}_{1z}}{\partial t} + \frac{\dot{\rho}_1\dot{w}_1^2}{l_1}(\bar{w}_1\bar{\nabla})\bar{w}_{1z}\right] = \dot{g}\dot{\rho}_1\bar{\varphi}_1\rho_1\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)g\cos(z,\ g) + \\
&+\frac{\dot{\mu}_1\dot{w}_1}{\dot{l}_1^2}\,\mathbf{div}\,(\bar{\varphi}_1\bar{\Pi}_{1z}) - \frac{\dot{\rho}_1\dot{w}_{01}^2}{\dot{l}_1}\frac{\partial}{\partial z_i}(\overline{\bar{\varphi}_1\rho_1\dot{w}_{1z}w_{1i}}) + \dot{Z}\dot{Z}; \\
&\bar{w}_{2z}\left[\frac{\dot{\rho}_2\dot{w}_2}{t}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\varphi}_2\rho_2) + \frac{\dot{\rho}_2\dot{w}_2^2}{\dot{l}_2}\,\mathbf{div}\,(\bar{\varphi}_2\rho_2\bar{w}_2)\right] + \\
&+\bar{\varphi}_2\rho_2\left[\frac{\dot{\rho}_2\dot{w}_2}{\dot{t}}\frac{\partial w_{2z}}{\partial t} + \frac{\dot{\rho}_2\dot{w}_2^2}{\dot{l}_2}(\bar{w}_2\nabla)\bar{w}_{2z}\right] = -\frac{\dot{p}}{\dot{l}_2}\frac{\partial p}{\partial z} + \dot{g}\dot{\rho}_2\bar{\varphi}_2\rho_2 g\cos(\boldsymbol{g},\ z) + \\
&+\frac{\dot{\mu}_2\dot{w}_2}{\dot{l}_2}\,\mathbf{div}\,(\bar{\varphi}_2\bar{\Pi}_{1z}) - \frac{\dot{\rho}_2\dot{w}_{02}^2}{\dot{l}_2}\frac{\partial}{\partial z_i}(\overline{\varphi_2\rho_2\dot{w}_{2z}\dot{w}_{1i}}) - \ddot{Z}\ddot{Z}.
\end{aligned} \qquad (128)$$

Принимая во внимание условия динамического подобия, сложим эти уравнения и приравняем все их комплексы безразмерных величин. В результате получим критерии подобия

$$k_1 = \frac{t\bar{w}_1}{l_1},\quad \mathrm{Fr}_1 = \frac{\bar{w}_1^2}{gl},\quad \mathrm{Re}_1 = \frac{\rho_1\bar{w}_1 l_1}{\mu_1},$$

$$w_1 = \frac{\dot{w}_1}{\bar{w}_1},\quad \dot{\rho}_2 = \rho_2/\rho_1,\quad P_1 = \frac{\bar{p}}{\rho_1\bar{w}_1^2}. \qquad (129)$$

Аналогично для второго компонента

$$k_2 = \frac{t\bar{w}_2}{l_2};\quad \mathrm{Fr}_2 = \frac{\bar{w}_2^2}{gl_2},\quad \mathrm{Re}_2 = \frac{\rho_2\bar{w}_2 l_2}{\mu_2}. \qquad (130)$$

Для течения двухфазной жидкости представляется целесообразным объединить некоторые из этих критериев в критерии смеси. Умножим Fr_1 и Fr_2 соответственно на $(\bar{\varphi}_1\rho_1/\rho_1\bar{\varphi}_1 + \rho_2\bar{\varphi}_2)$ и $(\bar{\varphi}_2\rho_2/\bar{\varphi}_1\rho_1 + \bar{\varphi}_2\rho_2)$ и сложим, а в качестве характерного размера

возьмем. например, диаметр трубопровода. В результате получим критерий Фруда смеси, представляющий собой отношение инерционных сил смеси к силам тяжести

$$\mathrm{Fr_c} = \frac{\bar{\varphi}_1\rho_1\bar{w}_1^2 + \bar{\varphi}_2\rho_2\bar{w}_2^2}{(\bar{\varphi}_1\rho_1 + \bar{\varphi}_2\rho_2)\, gD}. \tag{131}$$

Поступим аналогично, чтобы получить критерий Рейнольдса смеси. Умножим Re компонентов: первый — на безразмерный симплекс $(\varphi_1\mu_1\bar{w}_1/\bar{\varphi}_1\mu_1\bar{w}_1 + \bar{\varphi}_2\mu_2\bar{w}_2)$, второй — на $(\bar{\varphi}_2\mu_2\bar{w}_2/\bar{\varphi}_1\mu_1\bar{w}_1 + \bar{\varphi}_2\mu_2\bar{w}_2)$; затем сложим, подразумевая под характерным размером тот же диаметр. Получим известное выражение для $\mathrm{Re_c}$

$$\mathrm{Re_c} = \frac{\bar{\varphi}_1\rho_1\bar{w}_1^2 + \bar{\varphi}_2\rho_2\bar{w}_2^2}{\bar{\varphi}_1\mu_1\bar{w}_1 + \bar{\varphi}_2\mu_2\bar{w}_2} D. \tag{132}$$

$\mathrm{Fr_c}$ и $\mathrm{Re_c}$ можно представить в более удобной для практического их использования форме. Исходя из определения истинной весовой или массовой концентрации компонентов $\varkappa_1 = \varphi_1\rho_1/\rho_c$ и $\varkappa_2 = \bar{\varphi}_2\rho_2/\bar{\rho}_c$, получим

$$\mathrm{Fr_c} = \frac{w_\varkappa^2}{gD} = \frac{\bar{w}_\eta \bar{w}_\varkappa}{gD}. \tag{133}$$

Аналогично преобразуется выражение $\mathrm{Re_c}$. Так как $\mu_1 = \rho_1\nu_1$ и $\mu_2 = \rho_2\nu_2$, $\bar{w}_1 = \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\varphi}_1} w_c$ и $\bar{w}_2 = \frac{\bar{\beta}_2}{\varphi_2} w_c$, то $\mathrm{Re_c} = w_\eta D/\nu_c$, где $\nu_c = \eta_1\nu_1 + \eta_2\nu_2$.

Следующими характерными безразмерными величинами, вытекающими из критериев кинематического подобия, Рейнольдса компонентов смеси и отношения плотностей

$$\dot{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{134}$$

будет отношение вязкостей

$$\dot{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{135}$$

и расходная объемная концентрация

$$\beta_{1\,(2)} = \frac{Q_{1\,(2)}}{Q_1 + Q_2} \tag{136}$$

или

$$\frac{\varphi_2\beta_1}{\varphi_1\beta_2} = \frac{w_2}{w_1}. \tag{137}$$

Экспериментально наиболее трудно изучить закономерности изменения

$$W = \frac{\dot{w}_2}{\bar{w}_1}, \tag{138}$$

выражающего отношение пульсационных скоростей компонентов, а при твердом дисперсоиде отношение пульсаций твердой частицы и несущей среды (жидкости или газа). В ряде случаев критерий динамического подобия удобнее представить в виде отношения сил давления к инерционным силам

$$P = \frac{p}{\bar{\varphi}_1\rho_1\bar{w}_1^2 + \bar{\varphi}_2\rho_2\bar{w}_2^2} \tag{139}$$

или к силам свободного падения смеси

$$P_g = \frac{p}{(\bar{\varphi}_1\rho_1 + \bar{\varphi}_2\rho_2)\, D}. \tag{140}$$

В экспериментальных исследованиях по одномерной гидродинамике пользуются условным критерием Фруда в виде

$$\mathrm{Fr}_c' = \frac{w_c^2}{gD} \tag{140'}$$

и условным критерием Re_c' в виде

$$\mathrm{Re}_c' = \frac{\bar{w}_1 D}{\nu_1} + \frac{\bar{w}_2 D}{\nu_2}. \tag{140''}$$

Полученный набор критериев подобия не является полным, поскольку он получен только на основании уравнения движения без учета уравнения энергии смеси.

Рассмотрение уравнения энергии позволит дополнить систему критериев параметрами Нуссельта, Прандтля и Вебера. Однако в решении дальнейшей задачи — установления закономерностей изменения истинного газосодержания и коэффициента гидравлического сопротивления — интерес представляет только критерий Вебера $\mathrm{We} = (\sigma/g\,(\rho_1 - \rho_2)\, l^2)$, так как исследование ведется при изотермических условиях течения смеси, когда критерии Нуссельта и Прандтля не являются определяющими.

Полученная в гл. 1 система дифференциальных уравнений (31), (40), (43) описывает наиболее общий случай неустановившегося, неизотермического течения смеси с учетом перехода одного компонента в фазу другого (кипение, конденсация), но вместе с тем использование указанной системы для решения конкретных задач техники сопряжено с построением замыкающих уравнений.

Исходная система уравнений гидродинамики и энергии станет замкнутой, если установить закономерности изменения тензора напряжений и сил внутреннего межфазного сопротивления. Но из-за исключительной сложности определения составляющих тензора напряжений и величины межфазового трения в настоящее время используется более простой метод замыкания уравнений гидродинамики, заключающейся в установлении полуэмпирических зависимостей для истинных объемных концентраций и суммарного касательного напряжения (или коэффициента гидравлического сопро-

тивления трения) в функции определяющих процесс течения критериев.

Критерии подобия, являющиеся основой обоснованной постановки и обработки эксперимента, получены из уравнений гидродинамики двухфазных жидкостей. Определение критериев подобия на основе общих уравнений гидродинамики позволяет исключить возможность появления побочных (неопределяющих) критериев и установить физически обоснованные зависимости в полуэмпирической форме для искомых величин — истинных объемных концентраций и коэффициента сопротивления.

Критериальное уравнение установившегося изотермического процесса течения газо-жидкостной смеси может быть представлено соотношением

$$f_1(Eu_1,\ Eu_2) = f_2[\beta\,\mathrm{Fr_c},\ \mathrm{Re_c},\ \mathrm{We},\ \dot{\rho},\ \dot{\mu},\ \cos(g,\ z)]. \qquad (141)$$

Таким образом, для экспериментального исследования коэффициента гидравлического сопротивления при движении двухфазной жидкости имеем критериальное уравнение

$$\lambda_c = \lambda[\beta_1\,\mathrm{Fr_c},\ \mathrm{Re_c},\ \mathrm{We},\ \dot{\rho},\ \mu,\ \cos(g,\ z)] \qquad (142)$$

и такое же уравнение для определения истинного газосодержания

$$\varphi = \varphi[\beta_1,\ \mathrm{Fr_c},\ \mathrm{Re_c},\ \mathrm{We},\ \dot{\rho},\ \dot{\mu},\ \cos(g,\ z)]. \qquad (143)$$

На основе точных решений уравнений гидродинамики смесей при их ламинарном течении представляется удобным выразить коэффициент гидравлического сопротивления смеси произведением, предложенным С. Г. Телетовым [47, 48, 49] (см. гл. 2):

$$\lambda_c = \lambda(\mathrm{Re})\,\psi(\beta,\ \mathrm{Fr},\ \dot{\rho},\ \dot{\mu}\ \ldots), \qquad (142')$$

где λ (Re) — коэффициент гидравлического сопротивления для течения гамогенной среды, рассчитанный по закону турбулентных течений; этот коэффициент, как известно, однозначно выражается через число Рейнольдса жидкости и относительную шероховатость стенок трубы; ψ — приведенный коэффициент, показывающий отклонение λ_c смеси от λ при $\mathrm{Re_c} = \mathrm{Re}$; он является функцией критериев двухфазного течения, кроме $\mathrm{Re_c}$.

Обработка опытных данных в приведенных коэффициентах была применена к турбулентным течениям воздухо-водяных и паро-водяных течений в горизонтальных, слабонаклонных и вертикальных трубах. Она хорошо оправдала себя, так как впервые позволила установить четкую зависимость приведенных коэффициентов от критериев Фруда, газосодержания и отношения вязкостей компонентов или фаз смеси.

Отметим, что установленные на основании уравнений гидродинамики и энергии критериальные уравнения (142′) и (143) позволяют обоснованно подойти к постановке и обработке эксперимента, а также расширить возможности обобщения и переноса результатов наблюдений с модели на натурные условия.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

При исследовании турбулентного движения однородной жидкости по трубам была создана полуэмпирическая теория, объясняющая особенности сопротивления трения.

Создание такой теории хотя бы для некоторых наиболее простых форм течения двухфазной жидкости в настоящее время весьма затруднительно, так как отсутствуют экспериментальные данные о локальных значениях параметров двухфазного потока. До последнего времени основные усилия в области эксперимента направлялись на исследование таких средних характеристик, как гидравлические сопротивления по длине трубопровода, газосодержание в сечении потока или на участке определенной длины. Работы по замерам локальных величин практически отсутствуют.

В настоящей главе, применяя теории волнового движения жидкости и длины пути перемешивания, исследуем гидродинамику двухфазных потоков с разделом фаз, т. е. раздельного и кольцевого осесимметрического течения.

РАЗДЕЛЕННОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

Амплитуда волны на поверхности раздела фаз

Точное решение задачи об определении амплитуды волны на поверхности раздела движущихся в канале жидкости и газа в строгой постановке в настоящее время едва ли возможно. Поэтому ограничимся приближенным вычислением, используя соображения, высказанные по теории волнового движения П. Л. Капицей [33]. Обозначим через z координату вдоль двумерного канала, y — координату, направленную вверх от нижней стенки, δ — толщину жидкого слоя в равновесном состоянии, a — высоту канала.

В работе [33] получено выражение средней мощности, передаваемой газом поверхности жидкости:

$$\overline{W} = \gamma_f \rho_2 (w_2 - c)^2 \alpha^2 c k^2 s, \tag{144}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны; c — фазовая скорость ее распространения; α — амплитуда волны; s — поверхность раздела фаз; γ_f — числовой коэффициент.

Эта мощность отнимается от газового потока и идет на образование волн и в конечном итоге диссипируется вязкостными процессами, т. е.

$$\overline{W} = \overline{N}, \tag{145}$$

где $\overline{N}$ — полная мощность, диссипируемая во всем объеме жидкости. Последняя для волнового турбулентного движения жидкости может быть записана в виде

$$\overline{N} = \rho_1 \int \overline{l_1^2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2 \left|\frac{\partial u_z}{\partial y}\right|} dV. \tag{146}$$

Здесь l_1 — длина пути перемешивания жидкой фазы (масштаб турбулентных пульсаций), u_z — z-вая составляющая скорости, V — объем жидкости, черта означает усреднение по времени.

Используем формулы (144, 145, 146) для вычисления амплитуды волны. С этой целью определим величины l_1 и u_z.

Масштаб турбулентных пульсаций в жидкой фазе определим, исходя из следующих соображений. Поскольку колебательное движение поверхности раздела является следствием турбулентных пульсаций, то их масштаб на поверхности раздела фаз должен быть равен величине порядка $2\eta(z, t)$, где $\eta(z, t)$ — возвышение поверхности раздела в колебательном движении над ее равновесным положением. На нижней стенке l_1 обращается в нуль, а между стенкой и поверхностью раздела изменяется пропорционально расстоянию от стенки

$$l_1 = 2\eta \frac{y}{\delta + \eta}. \tag{147}$$

z-вая составляющая скорости жидкой фазы должна быть вычислена при волновом движении жидкости и газа в канале конечной высоты и при конечном значении амплитуды волны на поверхности раздела. Определим эту скорость, пренебрегая молекулярной вязкостью, так как при турбулентном движении ее влияние невелико. Пользуясь теорией волнового движения [28], получим

$$u_z = \alpha(\omega - k w_1) \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} k(\eta + \delta)} \cos(kz + \omega t) + w_1. \tag{148}$$

В уравнениях (147) и (148) $\eta = \alpha \cos(kz - \omega t)$, $\omega = kc$ — частота колебания. Подставив значения l_1 из (147) и u_z из (148) в формулу (146), произведем интегрирование по объему жидкости и по

времени, т. е. по y от нуля до $\delta + \eta$, по z от нуля до λ и по t от нуля до T. Полученный результат разделим на λT и умножим на s. Тогда получим среднюю за период энергию диссипации во всем объеме жидкости

$$\overline{N} = \frac{5}{24} \rho_1 \alpha^6 k^3 (\omega - k w_1)^3 s. \qquad (149)$$

Волна, длина которой больше глубины жидкости ($\lambda > \delta$), в теории волнового движения называется длинной. Опыт показывает, что при течении газо-жидкостной смеси в трубах имеют место длинные волны. При выводе уравнения (149) были сделаны упрощения, общепринятые для данного типа волны ($\operatorname{sh} \theta = \theta$).

На основании равенства (145) приравняем мощность, поставляемую газом (144), мощности диссипации жидкости (149), и из полученного уравнения найдем

$$\alpha = k_f \dot{\rho}^{1/4} \frac{(w_2 - c)^{1/2} c^{9/4}}{g (c - w_1)^{3/4}}, \qquad (150)$$

где $k_f = (4{,}8\ \gamma_f)^{1/4}$.

Если, следуя Капице, в этом выражении принять $\gamma_f = 1$, то $k_f = 1{,}48$.

Из уравнения (149) следует, что диссипация энергии вызывается только волнообразованием на поверхности раздела фаз и мало зависит от формы канала. Поэтому уравнения (149) и, как следствие, (150) могут быть с достаточной точностью распространены на каналы с произвольной, но постоянной по длине формой поперечного сечения.

Уравнение (150) при данных w_1 и w_2 может быть удовлетворено не при всех значениях c, а лишь при таких, которые находятся между $c_{\alpha\,\max}$ и $c_{\alpha\,\min}$. Здесь $c_{\alpha\,\max}$ и $c_{\alpha\,\min}$ — фазовые скорости распространения волн с максимальной и минимальной амплитудами. Значение последних может быть найдено из условия

$$\frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{(w_2 - c)^{1/2} c^{9/4}}{(c - w_1)^{3/4}} \right] = 0.$$

Решение этого уравнения дает оптимальные значения c

$$c_{\text{опт}} = \frac{1}{16} (6 w_2 + 11 w_1 \pm \Phi), \qquad (151)$$

где

$$\Phi = \sqrt{(6 w_2 + 11 w_1)^2 - 288 w_1 w_2}.$$

Из условия вещественности $c_{\text{опт}}$

$$(6 w_2 + 11 w_1)^2 - 288 w_1 w_2 \geqslant 0$$

следует, что устойчивое волновое турбулентное течение возможно лишь при $1{,}01\ w_1 \geqslant w_2 \geqslant 3{,}33 w_1$.

При последующем анализе формул (150) и (151) нетрудно установить, что при $w_2 < 1{,}01 w_1$

$$c_{\alpha\,\max} = \frac{1}{16}(6w_2 + 11w_1 + \Phi), \tag{152}$$

$$c_{\alpha\,\min} = \frac{1}{16}(6w_2 + 11w_1 - \Phi), \tag{153}$$

а при $w_2 > 3{,}33 w_1$,

$$c_{\alpha\,\max} = \frac{1}{16}(6w_2 + 11w_1 + \Phi), \tag{154}$$

$$c_{\alpha\,\min} = \frac{1}{16}(6w_2 + 11w_1 + \Phi). \tag{155}$$

На рис. 13 представлены графические зависимости c/w_1 от w_2/w_1, построенные по формулам (154) и (155). Пользуясь тем, что кривая *1* близка к прямой и при изменении w_2/w_1 от 3.33 до бесконечности c/w_1 изменяется от 1,94 до 1,5, формулу (154) для приближенных расчетов можно аппроксимировать в виде

$$c_{\alpha\,\max} = \psi w_1, \tag{156}$$

где $\psi = 1{,}94 \div 1{,}5$.

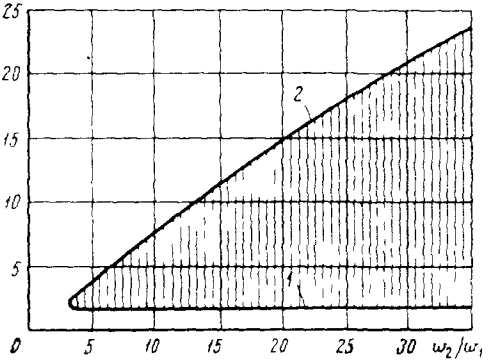


Рис. 13. Зависимость фазовой скорости волны от скоростей компонентов смеси.
$1 - c_{\alpha\,\max}/w_1$; $2 - c_{\alpha\,\min}/w_1$.

Из этой формулы становится ясно, что скорость распространения волны с максимальной амплитудой зависит в основном от скорости жидкой фазы и очень незначительно от скорости газовой фазы. Усредняя $\psi = 0{,}5\ (1{,}94 + 1{,}5)$, можем написать $c_{\alpha\,\max} = 1{,}72 w_1$.

Уместно сравнить данную скорость волны со скоростью распространения ламинарных волн в тонких слоях вязкой жидкости, движущейся вместе с газом. Эта скорость, рассчитанная и проверенная на опыте П. Л. Капицей [33], оказалась равной $2{,}4 w_1$. Учитывая условность данного сравнения, можно, однако, отметить, что с ростом амплитуды волны скорость ее распространения уменьшается.

Из данных рис. 13 и формул (154), (155) следует, что при указанных w_1 и w_2 на поверхности раздела фаз может существовать целый спектр волн с амплитудой от α_{min} до α_{max}. Причем с ростом амплитуды волны скорость ее распространения при $w_2 > 3{,}33 w_1$ уменьшается в пределах от $c_{\alpha\,\min}$ до $c_{\alpha\,\max}$. Очевидно также, что при изменении w_2 от $1{,}01 w_1$ до $3{,}33 w_1$ волновой турбулентный режим не возникает. Качественно эта картина волнообразования совпадает с экспериментальными наблюдениями.

Истинное газосодержание

Для дальнейшего исследования необходимо написать уравнение для фазовой скорости волны. Эта скорость должна быть определена при тех же условиях, что и при нахождении z-вой составляющей скорости жидкой фазы (148). Длинные волны конечной амплитуды на свободной поверхности жидкости исследовали Эри и позднее Г. Лямб [32]. Используя результаты их работ, запишем применительно к нашим условиям:

$$\frac{(c-w_1)^2}{\delta+\eta}+\dot{\rho}\frac{(c-w_2)^2}{(a-\delta)-\eta}=(1-\dot{\rho})g. \qquad (157)$$

Последнюю формулу можно непосредственно распространить на случай канала с произвольной, но постоянной по длине формой поперечного сечения, если предположить $\delta = F_1/b$, $a-\delta = F_2/b$, где F_1 и F_2 — площади поперечных сечений невозмущенных жидкости и газа; b — ширина их поверхности раздела.

Уравнение (157), решенное относительно c, показывает, что скорость волны растет с ростом η, т. е. по мере ее возвышения, поэтому наклон волны на передней стороне делается более крутым и форма ее меняется. Вследствие этого дальнейшее решение задачи требуется проводить методом последовательных приближений. Для упрощения форму волны будем считать неизменной, тогда в уравнении (157) можно считать $\eta = 0$.

При не очень малых газосодержаниях второе слагаемое уравнения (157) допустимо считать равным нулю, так как в большинстве практических случаев $\rho_2 \ll \rho_1$ и $\dot{\rho} \approx 0$. Погрешность в определении c вследствие этого допущения будет тем меньше, чем меньше $\dot{\rho}/\varphi$ по сравнению с единицей. При малых φ погрешность может быть значительной, в таких случаях для определения c следует пользоваться полным уравнением (157). При сделанных допущениях из уравнения (157) найдем

$$c = w_1 + \sqrt{(1-\dot{\rho})g\delta}. \qquad (158)$$

Выше мы определили, что совместное движение жидкости и газа в трубах сопровождается при определенных условиях возникновением спектра волн на поверхности раздела, причем скорость распространения каждой волны зависит от ее амплитуды. Очевидно, средняя скорость спектра должна быть определена как некоторая средняя интегральная всех его скоростей. Однако в теории волнового движения в подобных случаях искомые величины определяются по волне с максимальной амплитудой, а расхождения учитываются поправочным коэффициентом. На этом основании для среднеинтегральной скорости волны в нашем случае можем написать

$$c = c_{\text{ср}} = \xi c_{\alpha\,\max}, \qquad (159)$$

где $\xi > 1$, так как $c_{\alpha\,\max} < c_{\alpha\,\min}$.

Пользуясь последним уравнением, определим зависимость между φ_2, β_2 и Fr_c. Подставляя c из (158) и $c_{\alpha\,max}$ из (154) в (159), после вычислений найдем

$$\beta_2 = 1 - \frac{\varphi_1^{3/2}\left(\frac{D}{b}\right)^{1/2}(1-\rho)^{1/2}}{\theta\sqrt{Fr_c}}, \qquad (160)$$

где $\theta = \frac{\psi\xi - 1}{\sqrt{0{,}785}}$ — численный коэффициент. Поскольку $\psi = 1{,}94 \div 1{,}5$, а $\xi > 1$, то $\theta > 0$. По опытным данным $\theta = 4{,}3$.

Последнее уравнение получено для круглой цилиндрической трубы. При его выводе сделаны очевидные подстановки

$$\delta = \frac{F_1}{b} = 0{,}785\varphi_1\left(\frac{D}{b}\right)D,$$

$$w_1 = \frac{\beta_2}{\varphi_2}w_c,$$

$$w_2 = \frac{\beta_1}{\varphi_1}w_c.$$

На рис. 14 представлены построенные по формуле (160) зависимости φ_2 от β_2 для течения воздухо-водяной смеси при различных критериях Фруда смеси. Там же изображены соответствующие кривые, построенные по экспериментальным данным Г. Э. Одишария [39]. Следует отметить качественную и достаточную количественную сходимость экспериментальных данных с результатами, полученными аналитически.

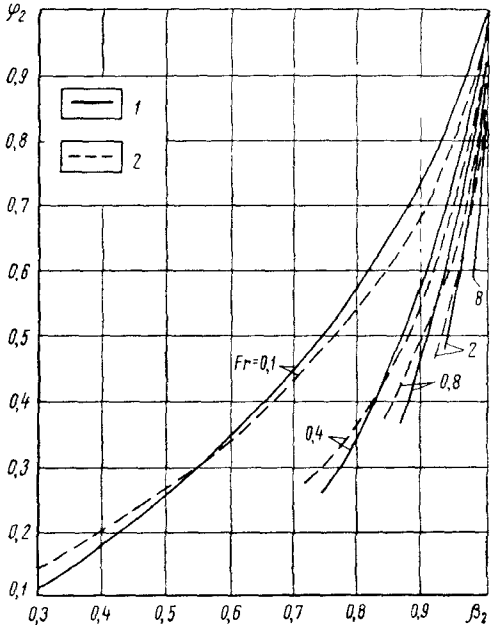


Рис. 14. Зависимость φ_2 от β_2 и Fr_c при разделенном течении воздухо-водяной смеси.
1 — расчетная; *2* — по опытам ВНИИГаза.

Области существования плоского и волнового разделенных течений

Визуальные наблюдения показывают, что при совместном течении в трубах жидкости и газа со сравнительно малыми скоростями или малыми значениями критерия Фруда смеси наблюдается раздельное течение с плоской поверхностью раздела фаз. Начиная с определенной величины критерия Фруда смеси (назовем его первым критическим $Fr_{кр}^{I}$), на поверхности раздела появляются волны. По мере увеличения Fr_c будет расти амплитуда волн, а при его значении,

которое назовем вторым критическим $Fr^{II}_{кр}$, произойдет переход к пробковому режиму течения. Анализ полученных уравнений позволяет определить эти характерные значения критериев.

Из условия вещественности фазовой скорости волны (151) было установлено, что волновой турбулентный режим возникает при $1{,}01\ w_1 \geqslant w_2 \geqslant 3{,}33\ w_1$. Переход от плоского к волновому режиму течения при $w_2 > w_1$ определяется условием $w_2 = 3{,}33\ w_1$ или $\varphi_2 = \beta_2/(3{,}33 - 2{,}33\ \beta_2)$.

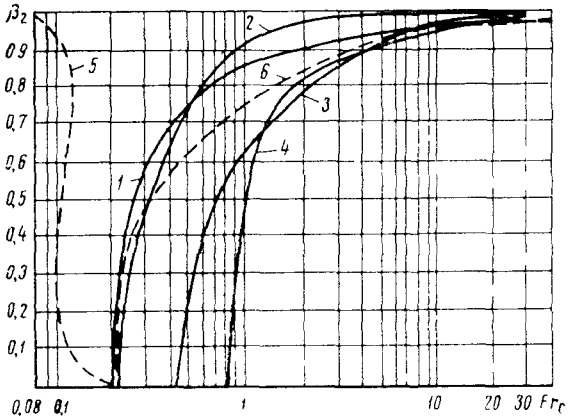


Рис. 15. Границы перехода от разделенного к пробковому течению воздухо-водяной смеси в горизонтальных трубах.

1 — по опытам ВНИИГаза, $D = 56$ *мм*; *2* — *5* — по опытам М. А. Мологина, $D = 25$, 75, 100 *мм*; *6* — расчетная.

Совместим это уравнение со (160). Исключая из них φ_2, найдем уравнение границы перехода от разделенного плоского к разделенному волновому течению в плоскости β_2 — Fr_c

$$Fr^{I}_{кр} = \frac{\beta_1 \frac{D}{b}(1-\dot{\rho})}{\theta^2 (1-0{,}7\beta^2)^3}, \qquad (161)$$

где $\theta^2 = 4{,}3^2 = 18{,}49$; D/b — функция φ_2.

По этой формуле построена зависимость $Fr^{I}_{кр}$ от β для воздухо-водяной смеси (рис. 15, кривая *5*).

Карты форм течений составляются по результатам визуальных наблюдений за изменением структуры потока. Причем переход от разделенного течения к пробковому фиксируется тогда, когда амплитуда волны с ростом скорости смеси возрастает настолько, что волна начинает захлестывать верхнюю образующую стенки трубы, а газовый поток разбивается на пробки. Следовательно, границу перехода от разделенного режима к пробковому можно определить из условия равенства удвоенной амплитуды волны и величины по-

рядка диаметра трубы. Вполне очевидно, что эта величина будет достигнута прежде всего волной с максимальной амплитудой, т. е. $2a_{max} = D$. Раскрывая последнее уравнение с помощью (150), получим

$$D = 2k_f \dot{\rho}^{1/4} \frac{(w_2 - c_{\alpha\,max})^{1/2} c_{\alpha\,max}}{g\,(c - w_1)^{3/4}}. \qquad (162)$$

Подставляя в это выражение $c_{\alpha\,max}$ из (154), можем найти точное уравнение, устанавливающее связь между переменными $\beta_2\varphi_2$ и Fr_c на границе перехода от разделенного волнового режима течения к пробковому. Но полученное таким образом уравнение довольно громоздко. Его можно упростить, если в (162) вместо $c_{\alpha\,max}$ из (154) подставить его аппроксимированное значение $c_{\alpha\,max} = \psi w_1$. После преобразований найдем

$$Fr_c = \frac{A\varphi_1^2\varphi_2^{1/2}}{\dot{\rho}^{1/4}\beta_1^{3/2}\,(\beta_2\varphi_1 - \psi\beta_1\varphi_2)^{1/2}}, \qquad (163)$$

где $A = (\varphi - 1)^{3/4}/2k_f\psi^{9/4}$ — числовой коэффициент. Поскольку $\psi = 1{,}72$ и $k_f = 1{,}48$, то $A = 0{,}0785$.

Чтобы установить связь между Fr_c и β_2 на границе перехода, необходимо, кроме (163), еще одно дополнительное уравнение. В качестве такового может быть использовано уравнение (160), так как оно справедливо для всей области существования волнового разделенного режима. Совместное решение этих уравнений дает для круглой цилиндрической трубы

$$Fr_{кр}^{II} = \frac{\left[B\varphi_2 + \dot{\rho}^{1/2}(1-\rho)\left(\frac{D}{b}\right)^2\varphi_1^2(1+0{,}72\varphi^2)\right]^2}{\theta^2\dot{\rho}\,(1-\dot{\rho})^3\left(\frac{D}{b}\right)^3\varphi_1^3}, \qquad (164)$$

$$\beta_2 = \frac{\left[B + \psi\varphi_1^2\dot{\rho}^{1/2}(1-\dot{\rho})^2\left(\frac{D}{b}\right)^2\right]}{B\varphi^2 + \dot{\rho}^{1/2}(1-\dot{\rho})\left(\frac{D}{b}\right)^2\varphi_1^2(1+0{,}72\varphi^2)}, \qquad (165)$$

где $B = A^2\theta^4 = 0{,}0785^2 \cdot 4{,}3 = 2{,}11$ — числовой коэффициент.

Задаваясь при данном $\dot{\rho}$ различными значениями φ_2, с помощью уравнений (164) и (165) можно подставить зависимость $Fr_{кр}^{II}$ от β_2. Такие вычисления были сделаны для воздухо-водяной смеси ($\dot{\rho} = 0{,}0012$), а по ним построена графическая зависимость (см. рис. 15, кривая 6). На рис. 15 изображены также границы перехода от разделенного течения к пробковому по экспериментальным данным [39].

Таким образом, область существования плоского разделенного течения определяется условием $Fr_c < Fr_{кр}^{I}$, а область волнового разделенного $Fr_{кр}^{I} \leqslant Fr_c \leqslant Fr_{кр}^{II}$.

Разделенное течение с малой амплитудой волны на поверхности раздела фаз

Исследуем турбулентное разделенное течение в двумерном горизонтальном канале с поверхностью раздела фаз плоской или имеющей волны сравнительно малой амплитуды. В этом случае за период колебания средние скорости жидкости и газа не меняются или меняются незначительно, поэтому их можно считать постоянными.

Для решения задачи воспользуемся общими уравнениями теории турбулентности и полученными выше результатами.

Г. Шлихтинг [60] в результате обработки опытных данных показал, что при однофазном течении путь перемешивания $l_{од}$, или масштаб турбулентных пульсаций, фактически изменяется по параболическому закону

$$l_{од} = \varkappa y \left(1 - \frac{y}{a}\right), \tag{166}$$

где $\varkappa$ — первая константа турбулентности.

Предположим, что при разделенном течении жидкости и газа пути перемешивания жидкой фазы l_1 и газовой l_2 также подчиняются параболическому закону, причем l_1 на нижней стенке канала, а l_2 на верхней должны обращаться в нуль. Тогда

$$\begin{aligned} l_1 &= \varkappa y \left(1 - \frac{y}{a_1}\right), \\ l_2 &= \varkappa (a - y) \left(1 - \frac{a - y}{a^2}\right). \end{aligned} \tag{167}$$

Обозначим приведенную длину пути перемешивания на поверхности раздела фаз через

$$t = \frac{l_р}{(l_{од})_р}, \tag{168}$$

где $l_р$ — путь перемешивания на поверхности раздела фаз; $(l_{од})_р$ — путь перемешивания при однофазном течении в том месте, где при двухфазном была бы поверхность раздела.

Поскольку из (166) при $y = \delta$ $(l_{од})_р = \varkappa\delta \left(1 - \frac{\delta}{a}\right)$, то

$$l_р = \varkappa\delta t \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) = \varkappa t \varphi_1 \varphi_2 a,$$

так как (169)

$$\varphi_1 = \delta/a, \quad \varphi_2 = a - \delta/a.$$

На поверхности раздела фаз пульсационные составляющие скорости жидкой и газовой фаз вследствие их контакта одинаковы, поэтому $l_1 = l_2 = l_р$ при $y = \delta$. Пользуясь этим условием и формулами (167) и (169), найдем значения a_1 и a_2. Их подстановка в (167) дает

$$\begin{aligned} l_1 &= \varkappa \dot{y} (1 - k_1 \dot{y})\, a, \\ l_2 &= \varkappa (1 - \dot{y}) [1 - k_2 (1 - \dot{y})]\, a, \end{aligned} \tag{170}$$

где

$$k_1 = \frac{1 - t\varphi_2}{\varphi_1}, \quad k_2 = \frac{1 - t\varphi_1}{\varphi_2}, \quad \dot{y} = \frac{y}{a}.$$

Для газа согласно уравнению Прандтля

$$\tau_0 = \rho_2 l_2^2 \left(\frac{du_2}{dy}\right)^2.$$

Подставляя в это уравнение l_2 из (167) и интегрируя, найдем истинную скорость газовой фазы

$$u_2 = \frac{u_{*2}}{\varkappa} \ln \left[\frac{(1-\dot{y})\, a}{1-(1-\dot{y})\, k_2}\right] + c,$$

где $u_{*2} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_1}}$, τ_0 — касательные напряжения на стенке.

Постоянную интегрирования c определим путем введения на стенке трубы шероховатого подслоя толщиной Δ, на поверхности которого $u_2 = u_\Delta$. Получим

$$u_2'' = \frac{u_{*2}}{\varkappa} \ln \frac{(1-\dot{y})\, m}{1-(1-\dot{y})\, k_2}, \tag{171}$$

где $m = (\varepsilon - k_2)\, n$, $\frac{1}{\varkappa} \ln n = \frac{u_\Delta}{u_{*2}}$, $\varepsilon = \frac{a}{\Delta}$ — приведенная гладкость стенки трубы.

Отсюда следует, что при двухфазном течении по сравнению с однофазным гладкость трубы уменьшается на k_2 и становится равной $\varepsilon - k_2$. При не очень малых φ_2 значение k_2 меньше ε. Следовательно, наличие второй фазы весьма мало влияет на ламинарный или шероховатый подслой из-за большой консервативности последних. В классических работах по гидравлике найдено, что $\varkappa = 0{,}4$ и для шероховатой трубы $u_\Delta/u_* = 8{,}5$. Нет оснований предполагать, что в нашем случае значение этих величин может существенно измениться. Используя их, найдем $n = 30$.

Из (170) следует, что l_2 обращается в нуль при $\dot{y} = 1$ и при $\dot{y} = 1 - 1/k_2$, т. е. на стенках фиктивной плоской трубы шириной $1/k_2$. Скорость газовой фазы на стенках этой трубы также обращается в нуль, и профиль ее должен быть симметричен относительно оси $y_{\max} = 1 - 1/2k_2$. Из последнего условия найдем уравнение нижнего профиля скоростей в газовой фазе u_2', симметричного верхнему профилю u_2'':

$$u_1' = \frac{u_{*2}}{\varkappa} \ln \frac{[1-(1-\dot{y})\, k_2]\, m}{(1-\dot{y})\, k_2^2}. \tag{172}$$

При течении смеси, компоненты которой значительно отличаются плотностью, максимальное значение скорости жидкой фазы обычно находятся выше раздела — в пределах газовой фазы. Ограничиваясь этим наиболее распространенным случаем течения, определим

профиль скоростей в жидкой фазе. Пользуясь тем же методом, что и при определении профиля скоростей в газовой фазе, найдем

$$u_1 = \frac{u_{*1}}{\varkappa}\left[\ln\frac{\dot{y}}{(1-\dot{y}k_1)\,m} + \frac{1}{\sqrt{\dot{\rho}}}\ln\frac{(1-\varphi_2 k_2)\,m}{\varphi_2 k_2^2}\right]. \qquad (173)$$

При выводе формулы (173) постоянная интегрирования была найдена из равенства скоростей фаз на поверхности раздела.

Определим далее расход газовой фазы

$$Q_2 = \int_{\dot{y}_{\max}}^{1} u_2''\,d\dot{y} + \int_{\varphi_1}^{\dot{y}_{\max}} u_2'\,d\dot{y}.$$

Подставляя в это уравнение u_2'' из (171) и u_2' из (172) и учитывая значение $y_{\max} = 1 - 1/2k_2$, а также k_1 и k_2 из (170), после интегрирования найдем

$$Q_2 = \frac{au_{*2}\varphi_2}{\varkappa}\left[\ln\frac{\varphi_2\varphi_1 tm}{(1-\varphi_1 t)^2} - \frac{\ln 4\varphi_1 t}{1-\varphi_1 t}\right]. \qquad (174)$$

Расход жидкой фазы

$$Q_1 = \int_0^{\varphi_1} u_1\,d\dot{y}$$

получим, подставляя в это уравнение u_1 из (173):

$$Q_1 = \frac{au_{*1}}{\varkappa}\left[\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2 t}\ln(t\varphi_2) + \frac{\varphi_1}{\sqrt{\dot{\rho}}}\ln\frac{\varphi_1\varphi_2 tm}{(1-\varphi_1 t)^2}\right]. \qquad (175)$$

Расходное газосодержание $\beta_2 = Q_2/(Q_1 + Q_2)$ определится с помощью формул (174) и (175)

$$\frac{\beta_2}{\varphi_2} = \frac{\ln\dfrac{\varphi_1\varphi_2 tm}{(1-\varphi_1 t)^2} - \dfrac{\ln(4t\varphi_1)}{1-\varphi_1 t}}{\ln\dfrac{\varphi_1\varphi_2 tm}{(1-\varphi_1 t)^2} - \varphi_2\dfrac{\ln(4t+\varphi_1)}{1-\varphi_1 t} + \dfrac{\sqrt{\rho}\,\varphi_1\ln(t\varphi_2)}{1-t\varphi_2}}. \qquad (176)$$

Градиент давления найдем из уравнения для скорости смеси $w_c = (Q_1 + Q_2)/a$, подставляя в него Q_1 из (175) и Q_2 из (174). После преобразований имеем

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_c = \frac{2}{a}(\tau_0) = \frac{2}{a}\rho_2\left(\frac{\varkappa w_c}{\Phi}\right)^2 = 2g\rho_2\left(\frac{\varkappa}{\Phi}\right)^2 \mathrm{Fr}_c,$$

где

$$\Phi = \ln\frac{\varphi_1\varphi_2 tm}{(1-\varphi_1 t)^2} - \varphi_2\frac{\ln(4t\varphi_1)}{1-\varphi_1 t} + \frac{\sqrt{\rho}\,\varphi_1\ln(t\varphi_2)}{1-t\varphi_2}.$$

Полученные выше зависимости выведены без каких-либо ограничений относительно характера поверхности раздела фаз. Поэтому в зависимости от того, какой смысл вкладывается в понятие относительной длины пути перемешивания на поверхности раздела фаз t,

данные формулы могут быть использованы для разделенного течения с поверхностью раздела фаз как *плоской*, так и *имеющей волны* малой амплитуды. Если представить, что поверхностное натяжение имеет бесконечно большое значение, то пульсационные составляющие жидкости и газа будут *полностью гаситься поверхностью* раздела, тогда $t = 0$. Очевидно, во всех случаях разделенного течения с плоской поверхностью раздела поверхностное напряжение уменьшает пульсационные составляющие вблизи поверхности раздела, т. е. $t < 1$.

Появление волн на поверхности раздела вызывается турбулентными пульсациями, поэтому можно считать, что амплитуда волн характеризует их масштаб на поверхности раздела. Если принять, что путь перемешивания на поверхности раздела имеет порядок удвоенной амплитуды максимальной волны ($l_p = 2a_{max}$, то значение t для волнового разделенного течения может быть определено на основании ранее полученных зависимостей. Подставим для этого в формулу (150) $c_{\alpha\,max} = \psi w_1$, найдем α_{max}, а затем l_p и t

$$l_p = \frac{Fr_c}{Fr_{кр}^{II}}\, a, \quad t = \frac{Fr_c}{\varkappa \varphi_1 \varphi_2\, Fr_{кр}^{II}}. \tag{177}$$

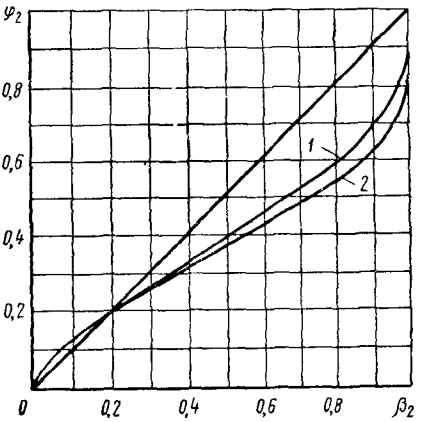


Рис. 16. Зависимость φ_2 от β_2 при $Fr_c = Fr_{кр}^{I}$.
1 — $a/2\Delta = 500$; *2* — $a/2\Delta = 110$.

Здесь $Fr_{кр}^{II}$ определяется формулой (164). Для плоского канала в этой формуле изменяется значение коэффициентов θ и B. Они будут: $\theta = 4{,}3\sqrt{0{,}785} = 3{,}91$, $B = 2{,}11\ (0{,}785)^2 = 1{,}3$, а также $D/b = 1$.

Волны на поверхности раздела начинают появляться при $Fr_c = Fr_{кр}^{I}$. Очевидно, при этом течении условие постоянства средних скоростей фаз за период колебания будет в основном сохраняться. Подставляя значение $Fr_{кр}^{I}$ из (161) в (177), найдем

$$t = \frac{\dot{\rho}(1-\dot{\rho})\,(1+2{,}33\varphi_2)^2\,\varphi_1^3}{\varkappa\varphi_2\left[B\varphi_2 + \dot{\rho}^{1/2}(1-\dot{\rho})^{1/2}\,\varphi_1^2\,(1+0{,}72\varphi_2)\right]^2}. \tag{178}$$

Построенные по формулам (176) и (178) зависимости φ_2 от β_2 при $Fr_c = Fr_{кр}^{I}$ для течения воздухо-водяной смеси ($\dot{\rho} = 0{,}001$) и при значениях относительной гладкости трубы 1000 и 220 представлены на рис. 16.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ СМЕСИ

Осесимметричное кольцевое течение смеси — преобладающая форма при высоких скоростях и больших газосодержаниях. Оно характерно течением жидкости по стенке трубы, а газовой фазы с диспергированной в ней частью жидкостью — в ядре потока.

При полном осесимметричном течении энергия, передаваемая газом жидкости, кроме волнообразования, расходуется еще на удержание жидкого кольцевого слоя у стенки трубы и на срыв с его поверхности части жидкости. Очевидно, эта дополнительная энергия возникает с ростом скорости смеси, после того как ее амплитуда достигнет величины порядка толщины жидкого слоя.

Кольцевое течение без разрушения жидкой пленки — частный случай осесимметричного течения. Рассмотрим сначала этот вид течения. Пользуясь общими положениями теории турбулентности, составим для него основные уравнения. Течение происходит в круглой трубе диаметром $2r$ вдоль оси z, δ — толщина жидкого кольцевого слоя, ось y направим из центра трубы (см. рис. 2, *б*).

Длину пути перемешивания в жидком слое будем считать пропорциональной амплитуде волны на поверхности раздела. В указанной системе координат имеем

$$l_1 = l_p \frac{r-y}{\delta}. \tag{179}$$

Так как при однофазном течении $(l_{од})_p = \varkappa\sigma$, то $t = lp/\varkappa\delta$. Отсюда $l_p = t\varkappa\rho$. Подставим это значение l_p в (179), получим

$$l_1 = \varkappa t (r-y). \tag{180}$$

Длина пути перемешивания газовой фазы на поверхности раздела равна l_p, а с приближением к центру трубы увеличивается пропорционально первой константе турбулентности $\varkappa$

$$l_2 = l_p + \varkappa (r-\delta-y).$$

Подставив в это выражение $l_p = \varkappa t\delta$, получим

$$l_2 = \varkappa (R-y), \tag{181}$$

где $R = r - \delta - t\delta$.

Для жидкой фазы согласно теории турбулентности можем записать

$$\tau_0 = \rho_1 l_1^2 \left(\frac{du_1}{dy}\right)^2.$$

Интегрируя это уравнение с учетом значения l_1 из (180), найдем истинную скорость жидкой фазы

$$u_1 = \frac{u_{*1}}{\varkappa t} \ln (r-y) + c_1.$$

Постоянную интегрирования c_1 определим путем введения вблизи стенки трубы шероховатого подслоя толщиной Δ, на поверхности которого $u_1 = u_\Delta$. Окончательно получим

$$u_1 = \frac{u_{*1}}{\varkappa t} \ln [m(1-y)], \tag{182}$$

где $m = \varepsilon n$; $u_{*1} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_1}}$ — касательное напряжение на стенке; $\varepsilon = r/\Delta$ — относительная гладкость трубы.

При однофазном течении по опытам Никурадзе $n = 30$ при $\varkappa = 0{,}4$ и $n = 16{,}44$ при $\varkappa = 0{,}33$.

Таким же образом можем получить истинную скорость газовой фазы

$$u_2 = \frac{u_{*2}}{\varkappa} \ln (R-y) + c_2.$$

Здесь $u_{*2} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_2}}$.

Постоянную c_2 определим из условия равенства скоростей жидкой и газовой фаз на поверхности раздела. Тогда

$$u_2 = \frac{u_{*2}}{\varkappa}\left[\ln \frac{R-y}{t\delta} + \frac{\sqrt{\rho}}{t} \ln \frac{m\delta}{r}\right]. \tag{183}$$

Зная закон распределения локальных скоростей фаз, нетрудно определить остальные величины.

Объемные расходы жидкости и газа

$$Q_1 = \int_{r-\delta}^{r} u_1 2\pi y\, dy \quad \text{и} \quad Q_2 = \int_0^{r-\delta} u_2 2\pi y\, dy,$$

$$Q_1 = \frac{\pi r^2 u_{*1}}{\varkappa t}\left[\varphi_1 \ln \frac{m\delta}{r} + \sqrt{\varphi_2} + 0{,}5\psi_2 - 1{,}5\right],$$

$$Q_2 = \frac{\pi r^2 u_{*2}}{\varkappa}\left[\frac{R^2}{r^2} \ln \frac{R}{t\delta} - 0{,}5\varphi_2 - \sqrt{\varphi_2}\frac{R}{r} + \frac{\sqrt{\rho}}{t}\varphi_2 \ln\left(\frac{m\delta}{r}\right)\right].$$

Скорость смеси

$$w_c = \varkappa u_{*2}\left[\frac{R^2}{r^2} \ln \frac{R}{t\delta} - 0{,}5\varphi_2 - \sqrt{\varphi_2}\frac{R}{r} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\rho}}{t}\left(\ln \frac{m\delta}{r} + 0{,}5\varphi_2 + \sqrt{\varphi_2} - 1{,}5\right)\right]. \tag{184}$$

Объемное газосодержание

$$\beta_2 = \frac{\left(\frac{R^2}{r^2} \ln \frac{R}{t\delta} - 0{,}5\varphi_2 - \sqrt{\varphi_2}\frac{R}{r}\right) + \frac{\sqrt{\rho}}{t}\varphi_2 \ln \frac{m\delta}{r}}{\left(\frac{R^2}{r^2} \ln \frac{R}{t\delta} - 0{,}5\varphi_2 - \sqrt{\varphi_2}\frac{R}{r}\right) + \frac{\sqrt{\rho}}{t}\left(\ln \frac{m\delta}{r} + 0{,}5\varphi_2 + \sqrt{\varphi_2} - 1{,}5\right)}. \tag{185}$$

Градиент давления при течении смеси в горизонтальной трубе

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_c = \frac{4}{D}\tau_0 = 4g\rho_2\left(\frac{\varkappa}{\Phi}\right)^2 \mathrm{Fr}_c, \qquad (186)$$

где

$$\Phi = \frac{R^2}{r^2}\ln\frac{R}{t\delta} - 0{,}5\varphi_2 - \sqrt{\varphi_2}\frac{R}{r} + \frac{\sqrt{\rho}}{t}\left(\ln\frac{m\delta}{r} + 0{,}5\varphi_2 + \sqrt{\varphi_2} - 1{,}5\right).$$

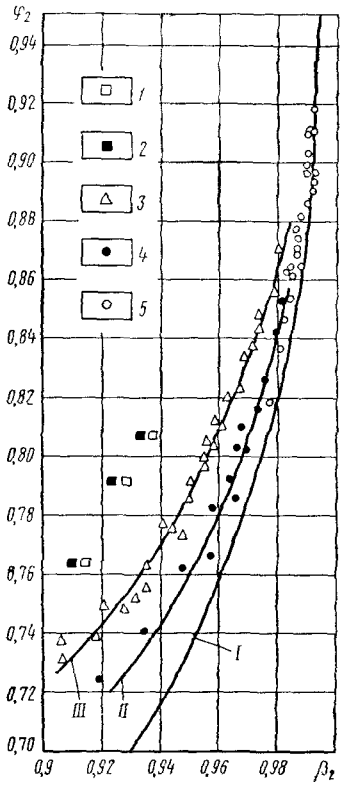


Рис. 17. Сравнение расчетных данных с опытными для кольцевого течения газо-жидкостной смеси по данным А. А. Арманда.

Расчетные кривые: I — без уноса; *II* — $G_1 = 750$ *кг/ч*; *III* — $G_1 = 1000$ *кг/ч*; *1* — расчетные точки $G_1 = 2000$ *кг/ч*; *2* — данные эксперимента, $G_1 = 2000$ *кг/ч*; *3* — то же, $G_1 = 1000$ *кг/ч*; *4* — то же, $G_1 = 750$ *кг/ч*, *5* — то же, $G_1 = 500$ *кг/ч*.

Чтобы пользоваться формулами (182) — (186), нужно знать приведенную длину пути на поверхности раздела. Определим ее из упомянутого выше условия о том, что амплитуда волны на поверхности раздела при кольцевом течении остается порядка δ, тогда $\varkappa = 0{,}4$ и имеем

$$t \approx \frac{2\delta}{\varkappa\delta} = 5.$$

По формуле (185) построена зависимость φ_2 (β_2) для воздухо-водяного кольцевого течения смеси (рис. 17). При расчетах было принято $t = 5$, $\rho = 0{,}0013$, $n = 30$ и $\varepsilon = 1770$.

Рассмотрим далее осесимметричное кольцевое течение со срывом части жидкости более легкой фазой. Чтобы определить количество жидкости, уносимое потоком газа, примем приближенную модель этого течения. Вследствие малой толщины жидкого слоя волны на его поверхности будем считать плоскими, тогда к жидкому слою можно применить все закономерности, полученные для разделенного волнового течения.

Исходя из этого предположения, напишем баланс мощности. Именно мощность, передаваемая потоком газа поверхности жидкости, расходуется на диссипацию в жидком кольцевом слое, на образование этого слоя и на срыв жидкости в виде капель. Мощность, передаваемая газом поверхности жидкости, может быть определена по формуле (144), в данном случае в ней $s = 2\pi(r - \delta)\lambda$. Мощность диссипации определится по той же формуле, если считать $\alpha = \delta$. Мощность на образование жидкого кольца будет $(\pi r^2\varphi_1\lambda\gamma_1)\frac{r}{T} = \pi r^2\varphi_1\gamma_1 rc$.

Мощность на срыв жидкости в виде капель запишется как

$$4\sigma\pi L_0^2 \frac{n}{T} = 4\sigma\pi L_0^2 \frac{F_{\text{ср}}\lambda}{4/3\pi L_0^3 T} = 3\sigma \frac{F_{\text{ср}} c}{L_0},$$

где σ — поверхностное натяжение; n — число капель; L_0 — их размер; $F_{\text{ср}}$ — часть поперечного сечения жидкого слоя, с которого жидкость уносится газом. Согласно [35] $L_0 = \sigma/\rho_2 w_2^2$. Тогда мощность на срыв жидкости будет равна $3\rho_2 F_{\text{ср}} w_2^2 c$.

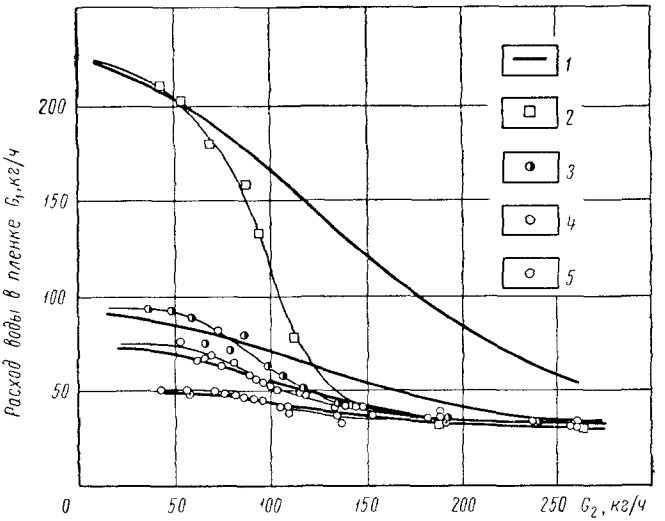


Рис. 18. Сравнение опытных данных А. А. Арманда с расчетными по уносу жидких частиц.

1 — расчетные кривые; *2* — $G_1 = 220$ кг/ч; *3* — $G_1 = 92{,}5$ кг/ч; *4* — $G_1 = 75$ кг/ч; *5* — $G_1 = 50$ кг/ч.

Баланс мощности имеет вид

$$\rho_2 (w_2 - c)^2 (\alpha^2 - \delta^2)\, ck^2 2\pi (r - \delta)\lambda = \pi r^2 \varphi_1 g \rho_1 rc + 3\rho_2 F_{\text{ср}} w_2^2 c.$$

Подставляя в это уравнение $\lambda = 2\pi c^2/g$, $k = g/c^2$, $c = \psi w_1$, $\delta/r = 1 - \sqrt{\varphi_2}$, $w_2 = (\beta_2/\varphi_2) w_{\text{с}}$ и $w_1 = (\beta_1/\varphi_1) w_{\text{с}}$, определим $\varphi_{\text{ср}} = \dfrac{F_{\text{ср}}}{\pi r^2}$:

$$\varphi_{\text{ср}} = \frac{2\pi (\beta_2\varphi_1 - \psi\varphi_1\beta_2)^2 \left[\left(\dfrac{d}{r}\right)^2 - (1 - \sqrt{\varphi_2})^2\right] \sqrt{\varphi_2}}{3\psi^2 \beta_1^2 \beta_2^2 \operatorname{Fr}_{\text{с}}}. \qquad (187)$$

В этом выражении α/r может быть определено согласно (177) по формуле $\alpha/r = (\operatorname{Fr}_{\text{с}}/\operatorname{Fr}_{\text{кр}}^{\text{II}})$.

Полагая, что жидкость, уносимая газом, движется со скоростью, равной средней скорости газа, определим расход жидкости в газовом потоке

$$Q_{ср} = F_{ср} \frac{Q_2 + Q_{ср}}{F_2 + F_{ср}},$$

отсюда $Q_{ср} = Q_2 (\varphi_{ср}/\varphi_2)$.

Аналогично расход жидкости в пленке

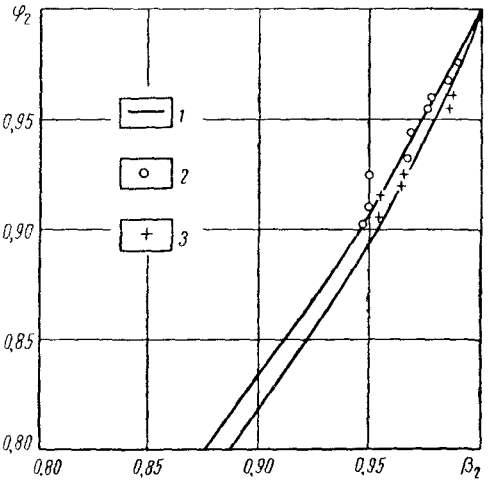


Рис. 19. Сравнение расчетных зависимостей φ (β) с экспериментальными данными для паро-водяной смеси при $p = 40$ *бар* в вертикальной трубе, $D = 17$ *мм*.

1 — расчетные зависимости; *2* — экспериментальные данные Fr = 2270; *3* — то же, Fr = 1276.

$$Q_{пл} = Q_1 \frac{\varphi_1 - \varphi_{ср}}{\varphi_1}. \quad (188)$$

Суммарный расход жидкой фазы со срывом части жидкости будет равен $Q_1^{ср} = Q_{пл} + Q_{ср}$ и расходное газосодержание

$$\beta_{ср} = \frac{Q_2}{Q_1^{ср} + Q_2} = \frac{\beta_2}{1 + \frac{\beta_2 - \varphi_2}{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_{ср}}. \quad (189)$$

В формулах (187) — (189) зависимость φ_2 от β_2 может быть приближенно определена для случая кольцевого течения смеси без уноса, т. е. по формуле (189) при $t = 5$.

Для сравнений были использованы опытные данные А. А. Арманда [2], полученные при течении воздухо-водяной смеси в горизонтальной трубе, и А. А. Точигина, полученные при течении паро-водяной смеси с давлением 40 *бар*. Данные сравнения, производимого в области фактически наблюдаемого кольцевого течения, приведены на рис. 18 и 19.

Характер кривых на рис. 17 и 19 говорит о вполне удовлетворительной сходимости экспериментальных данных с теоретическими, рассчитанными по формуле (189), при течении воздухо-водяной и паро-водяной смесей. Весовой расход жидкости в пленке (рис. 18) удовлетворительно совпадает с теоретическим значением, найденным по формуле (188), при небольших уносах и расходится при больших.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

МЕТОДИКА ПОСТАНОВКИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эффективность экспериментального исследования процесса течения газо-жидкостных смесей в трубах во многом зависит от выбора методики постановки и обработки самого эксперимента, а также от конструкции стенда. Ряд свойств газо-жидкостных течений в самой различной форме проявляется в зависимости от конструктивного исполнения гидравлического контура экспериментальной установки, поэтому, чтобы получить надежные экспериментальные данные, необходимо исключить подобные влияния.

КОНСТРУКЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ СТЕНДОВ

Специфические особенности процесса течения газо-жидкостных смесей в трубах — сильная анизотропность исследуемой среды, сложность и многообразие форм течения, большая разница в физических свойствах компонентов смеси — накладывают определенные условия на конструктивное исполнение экспериментальной установки.

Существующие в настоящее время стенды для исследования движения жидкостных смесей и, в частности, опытные установки авторов состоят из следующих основных систем.

1. Система подачи газа или пара, состоящая из емкости или дроссельных устройств для гашения пульсаций давления, возникающих при работе компрессора, если исследование ведется на газо-жидкостных смесях, или теплоэнергетического агрегата в случае паро-жидкостных смесей, узла замера расхода газа или пара (трубки Вентури, диафрагменные, ротаметрические или другие измерители расхода).

2. Система подачи жидкости и устройства для измерения расходов жидкости.

3. Экспериментальные трубопроводы (или трубопровод), ориентированные в нужном для опыта направлении и оснащенные аппаратурой для измерения статического давления, перепада

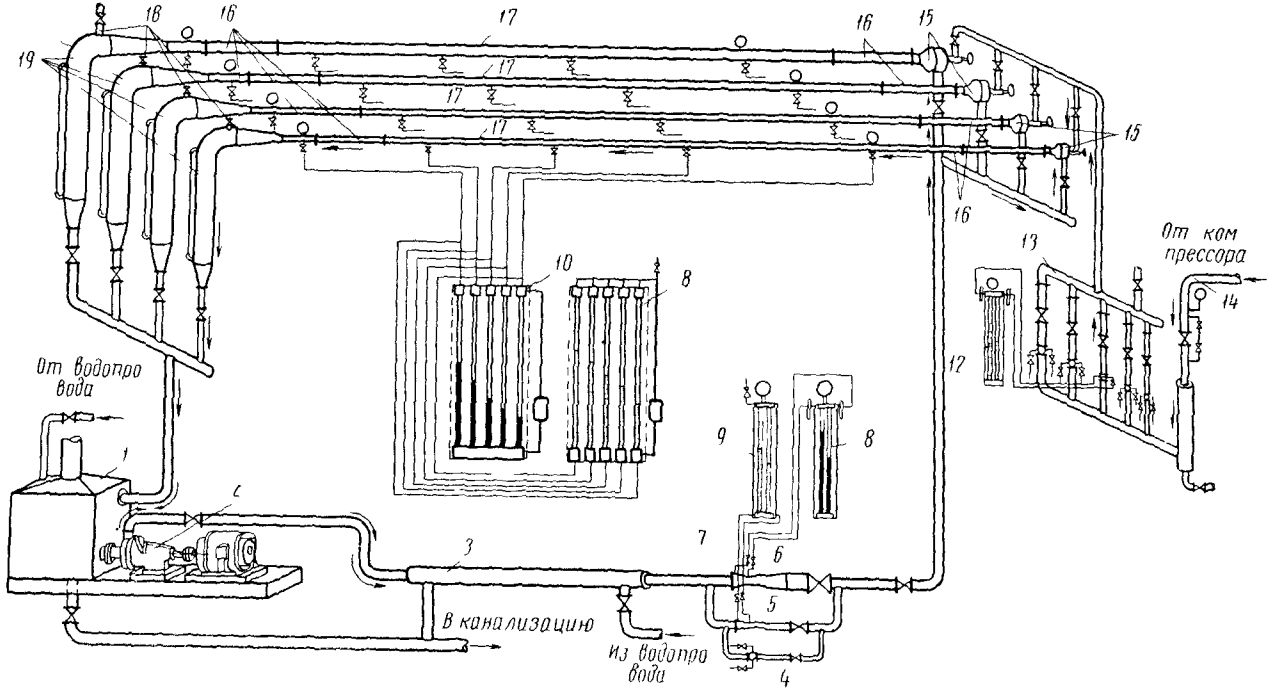


Рис. 20. Схема опытной установки для исследования течений газо-жидкостной смеси в горизонтальных трубах (выполнена частично в аксонометрии).

1 — питательный бак, *2* — центробежный водяной насос; *3* — поверхностный охладитель; *4* — шайба; *5* — малая труба Вентури; *6* — большая труба Вентури; *7* — переключатель дифманометров; *8* — дифманометр ртутный; *9* — дифманометр водяной для замера расхода воды; *10* — дифманометр ртутный (батарейный); *11* — дифманометр водяной (батарейный); *12* — дифманометр водяной для замера расхода воздуха; *13* — гребенка для воздушной диафрагмы; *14* — воздухопровод; *15* — смеситель; *16* — визуальный участок, *17* — экспериментальные трубы диаметром 25, 50, 75, 100 *мм*; *18* — воздушный вентиль; *19* — сепаратор.

давления и температуры, пульсаций давления, истинного газосодержания и других необходимых величин.

Одна из схем опытной установки показана на рис. 20.

Авторы при проведении опытов использовали металлические и стеклянные трубы диаметром до 100 *мм* и максимальной длиной 40 *м*. Для измерения перепада давления применяли батарейные и одиночные дифференциальные манометры. Давление замеряли как в нижней (жидкостной), так и в верхней (газовой) части кольцевых камер, соединенных с внутренней частью трубы через импульсные отверстия.

Газ и жидкость смешивают обычно в смесителе, вводя через решетчатую перегородку газ в жидкую струю или жидкость в газовую струю. Смеситель устанавливают в начале участка стабилизации двухфазного потока. Этот участок принимают равным 100—200 *D*. При такого рода смешении обеспечивается равномерное перемешивание фаз и выравнивание температур.

Из экспериментального трубопровода газо-жидкостная смесь поступает в объемный сепаратор.

Температуру потока замеряют в конце и начале трубопровода термометрами или термопарами. Чтобы определить тепловые потери в теплоизолированном экспериментальном вертикальном трубопроводе, измеряют также температуру окружающей среды у водо- и паропроводов и на самом экспериментальном участке.

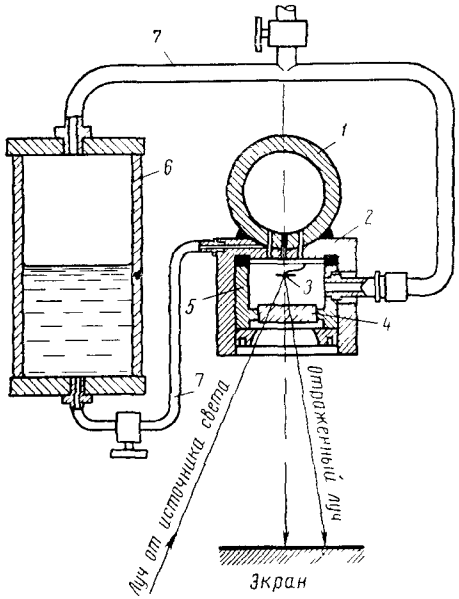


Рис. 21. Схема мембранного пульсациометра.

Пройдя экспериментальный участок, паро-водяная смесь поступает в холодильник.

Для замера пульсаций давления применяют мембранный малоинерционный манометр (рис. 21) с фотозаписью показаний на осциллографе.

Пульсации давления в трубе *1* через три отверстия диаметром 1 *мм* в ее стенке передаются на мембрану *2*. С противоположной стороны мембраны в месте ее прогиба (при деформации) закреплено зеркальце *3* размером 1×1 *мм* (на схеме оно смещено относительно мембраны).

Под действием давления мембрана прогибается, поворачивая зеркальце на некоторый угол. Луч света, направленный на зеркальце через окно *4*, отражается на движущейся фотопленке.

Среднее во времени давление в экспериментальной трубе, действующее на мембрану, уравновешивается давлением с противоположной стороны мембраны. Для этой цели предназначен бачок *6*, который нижней частью через трубку *7* сообщается с экспериментальной трубой, а верхней частью — с камерой *5*, расположенной с противоположной стороны мембраны. Часть воды из экспериментальной трубы, попав в бачок, сжимает в нем воздух, выравнивая давление по обе стороны мембраны. Уровень воды в бачке поддерживается на высоте мембраны в результате ввода или выпуска воздуха.

Собственная частота этих манометров составляет около 500 *гц*, поэтому они с достаточной точностью могут записывать пульсации давления частотой до 20—30 *гц*.

Мембранные манометры были установлены в середине труб, чтобы на замер не могли влиять начальный и конечный участки.

В настоящее время для измерения истинного газосодержания находят применение различные методы.

1. **Метод «отсечек».** Суть его заключается в мгновенном перекрытии быстродействующими клапанами участка экспериментального трубопровода, по которому движется газо-жидкостная смесь, и в последующем измерении количества жидкости в общем объеме «отсеченной» части трубопровода. Метод «отсечек» одним из первых применялся для измерения истинного газосодержания [88, 91].

Устройство для замера истинного газосодержания состояло из отсекателей, устанавливаемых в начальном и конечном участках экспериментального трубопровода, и мерного бачка, куда сливалась жидкость, находящаяся в «отсеченной» части трубы между первым и вторым отсекателями.

Отсекающее устройство представляло собой запорную арматуру (задвижку) с электромагнитным приводом и защелкой, при помощи которых приводилось в движение клиновое соединение задвижки.

Скорость хода клинового соединения в процессе перекрытия сечения трубопровода, а также синхронность работы отсекающих устройств периодически контролировалась при помощи шлейфового осциллографа с записью осциллограмм на фотопленку. С этой целью шток клинового соединения был снабжен двумя контактами, первый из которых замыкал электрическую цепь при крайнем верхнем, или открытом, положении клапана, а второй — при крайнем нижнем положении. Импульсы от замыкания и размыкания сети передавались на осциллограф, который регистрировал продолжительность и синхронность перекрытия сечения трубы отсекающими клапанами.

При обработке осциллограммы выявлено, что общая продолжительность перекрытия трубы не превышала 0,02 *сек*, а запаздывание одного из клапанов — 0,005 *сек*.

Отсекающие устройства устанавливались в 5 *м* от начала и конца экспериментального трубопровода, длина перекрываемого участка трубы составляла 25 *м*.

2. **Метод просвечивания** газо-жидкостной смеси плоским пучком гамма-излучения. В основу данного метода положен принцип ослаб-

ления интенсивности I гамма-излучения при прохождении через исследуемую двухфазную жидкость. Величина этого ослабления от точечного источника определяется из уравнения

$$d(r^2 I) + kr^2 I\, dr = 0. \qquad (190)$$

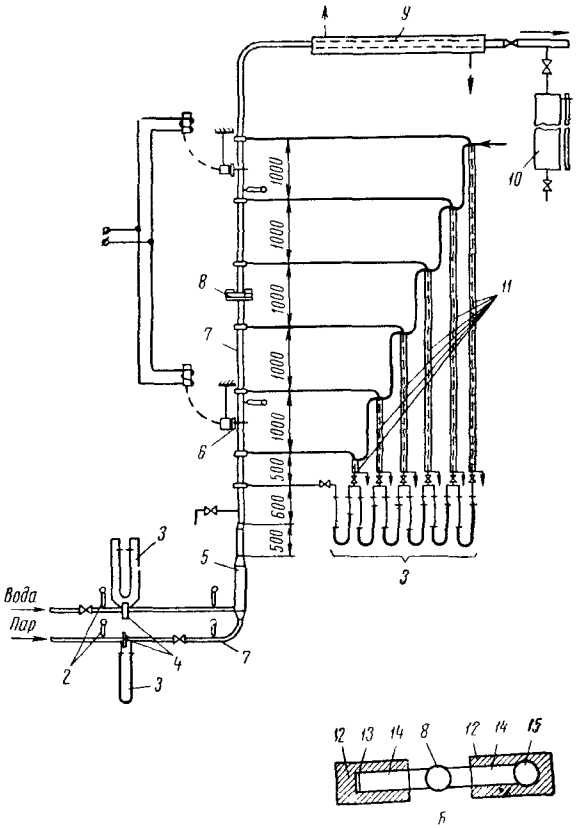


Рис. 22. Схемы вертикального участка гидродинамического стенда (*а*) и установки для просвечивания трубы (*б*).

1 — регулировочный вентиль; *2* — термопара; *3* — дифманометр; *4* — дроссельное устройство; *5* — смеситель; *6* — быстродействующий клапан; *7* — экспериментальная труба; *8* — установка гамма-излучения; *9* — холодильник; *10* — мерный бак; *11* — водяная рубашка; *12* — свинцовая защита; *13* — излучатель; *14* — канал прямоугольного сечения; *15* — счетная трубка.

Интегрируя это уравнение, пренебрегая геометрическими размерами источника по сравнению с величиной радиуса r, находим

$$I = E_0 \frac{e^{-kr}}{r^2}, \qquad (191)$$

где $E_0 = r_0^2 I$ — энергия излучения, отнесенная к единице телесного угла; k — коэффициент ослабления интенсивности, r — расстояние от центра источника.

Схема просвечивания изображена на рис. 22. Источник излучения *13* представлял собой полоску радиоактивного изотопа длиной,

равной внутреннему диаметру просвечиваемой трубы. Этот изотоп окружался массивной свинцовой оболочкой (защитой), имеющей щелевой канал прямоугольного сечения, через который проходили лучи.

Гамма-излучение направлялось каналом на экспериментальную трубу. Проходя ее, гамма-излучение частично ослаблялось и ослабленное через второй противоположный канал попадало на счетную трубку *15*. Расстояние от источника излучения до просвечиваемой трубы относилось к ширине канала, как 30 : 1, поэтому пучок лучей практически можно было рассматривать как параллельный. В этом случае длина луча от источника до счетной трубки равна

$$r \equiv y = y_в + y_м + y_1 + y_2,$$

а энергия лучей, падающих на счетную трубку, определится интегралом

$$E = 2m' \int_0^1 \exp\left[-(\dot{y}_в \dot{k}_в + \dot{y}_м \dot{k}_м + \dot{y}_1 \dot{k}_1 + \dot{y}_2 \dot{k}_2)\right] d\dot{x}, \qquad (192)$$

где $\dot{y}_в = (y_в/D)$, $\dot{y}_м = (y_м/D)$, $\dot{y}_1 = (y_1/D)$; $\dot{y}_2 = (\dot{y}_2/D) =$ суммарные приведенные длины луча соответственно в воздухе, металле и средние во времени в жидкой и газовой фазах смеси; $\dot{k} = kD$ — соответствующие коэффициенты ослабления в этих средах; $\dot{x} = x/R$ — приведенная координата по направлению длины гамма-излучения; R — радиус трубки; m' — постоянная.

Длину луча в газовой и жидкой фазах надо рассматривать как осредненную во времени величину, потому что мгновенное локальное истинное газосодержание, как бы высока ни была степень диспергирования установившегося течения смеси, принимает попеременно значения нуля и единицы. Это осреднение производится малоинерционным прибором, который фиксирует среднюю интегральную величину лучистой энергии за некоторый заданный промежуток времени.

Первый член экспонента под знаком интеграла в уравнении (192) практически можно считать величиной постоянной, так как при изменении $\dot{x}$ от нуля до единицы длина $\dot{y}_в$ будет изменяться на величину ± 1. По сравнению с $\dot{y}_в \dot{k}_в$ значение $\pm \dot{k}_в$ будет практически мало.

Второй член экспонента в результате выравнивания толщины стенки трубы в месте просвечивания доводился до постоянной величины. Так как интегрирование ведется по направлению радиуса трубы, нормального к ходу лучей, то выравнивание толщины стенки трубы производится по всему диаметру трубы в направлении хода лучей.

Теоретическая и экспериментальная проверка точности измерения с выравненной и невыравненной толщиной стенки трубы пока-

зала, что в обоих этих случаях разница в φ находилась за пределами точности измерений. Поэтому можно написать

$$E = 2m \int_0^1 \exp\left[-(\dot{y}_1 \dot{k}_1 + \dot{y}_2 \dot{k}_2)\right] d\dot{x}. \tag{193}$$

Для решения этого интеграла необходимо знать вид функции $\dot{y}_1(\dot{x})$ или $\dot{y}_2(\dot{x})$, т. е. структуру просвечиваемого потока.

Если показатель экспоненты в уравнении (193) достаточно мал по сравнению с единицей и можно ограничиться двумя членами ее разложения в ряд, то для определения истинного газосодержания знание $\dot{y}_1(\dot{x})$ необязательно. В этом случае

$$E = 2m \int_0^1 \left[1 - \dot{k}_1 \dot{y}_1(\dot{x}) - \dot{k}_2 \dot{y}_2(\dot{x})\right] d\dot{x}. \tag{194}$$

При просвечивании трубы, заполняемой поочередно водой и паром с теми же параметрами, что и в смеси, для E_1 и E_2 получим

$$E_1 = 2m \int_0^1 \left[1 - \dot{k}_1 \dot{y}(\dot{x})\right] d\dot{x}, \tag{195}$$

$$E_2 = 2m \int_0^1 \left[1 - \dot{k}_2 \dot{y}(\dot{x})\right] d\dot{x}, \tag{196}$$

где $\dot{y}(\dot{x}) = \dot{y}_1(\dot{x}) + \dot{y}_2(\dot{x})$.

Из трех последних интегралов найдем

$$\frac{E - E_1}{E_2 - E_1} = \frac{\int_0^1 \dot{y}_2(\dot{x})\, d\dot{x}}{\int_0^1 \dot{y}(\dot{x})\, d\dot{x}}.$$

Интеграл в знаменателе представляет приведенную площадь сечения трубы, а интеграл в числителе — часть от этой площади, которую занимает пар. Следовательно, это отношение согласно определению представляет истинное паросодержание.

Применяя аппаратуру, позволяющую регистрировать импульсы n гамма-излучения в единицу времени, пропорциональные энергии E, получим простую формулу для вычисления истинного паросодержания:

$$\varphi = \frac{n - n_1}{n_2 - n_1}, \tag{197}$$

где n, n_1, n_2 — число импульсов, зарегистрированных счетчиком в единицу времени при просвечивании трубы, заполненной соответственно смесью, водой и паром.

Влияние естественного и наведенного фона при расчете по этой формуле исключается, ибо он практически одинаков при измерении как n, так и n_1 и n_2.

Если же показатель экспоненты величина достаточно большая, что может быть, например, при просвечивании мягким гамма-излучением смеси в трубах больших диаметров, то формула (197) будет неточной. Для точного определения φ в этом случае нужно знать вид функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ или структуру просвечиваемого потока. Разберем на двух идеализированных примерах течения смеси влияние структуры потока на эффект просвечивания.

Эмульсионное течение. Под этой формой течения будем понимать сильно диспергированное течение, при котором газ равномерно распределяется по всему сечению потока, т. е. для этого течения справедливо

$$\dot{k} = [k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2]\, D.$$

В этом случае

$$E_{\text{эм}} = 2mS(\dot{k}),$$

где

$$S(\dot{k}) = \int_0^1 \exp\left(-\dot{k}\sqrt{1-\dot{x}^2}\right) d\dot{x}. \tag{198}$$

После разложения в ряд подынтегральной функции и почленного его интегрирования получим

$$S(\dot{k}) = -\frac{\pi}{2} I_1(\dot{k}) + \left(1 + \frac{1}{3}\dot{k}^2 + \frac{1}{3^2\cdot 5}\dot{k}^6 + \frac{1}{3^2\cdot 5^5\cdot 7^2\cdot 9}\dot{k}^8 + \ldots\right). \tag{199}$$

Это выражение аппроксимируется с точностью до четвертого знака формулой $S(\dot{k}) = a(b + e^{-c\dot{k}})$ при $0 \leqslant \dot{k} \leqslant 0{,}6$, $a = 0{,}9253$, $b = 0{,}0808$, $c = 0{,}8488$.

Чтобы определить функции $S(\dot{k}_1)$ и $S(\dot{k}_2)$ при однофазном течении, в формулах (198) и (199) нужно полагать $k = k_1$ или $k = k_2$.

В отличие от φ, определяемого по (197), аналогичный комплекс обозначим через φ_*. Тогда

$$\varphi_* = \frac{S(\dot{k}) - S(\dot{k}_1)}{S(\dot{k}_2) - S(\dot{k}_1)}. \tag{200}$$

Придавая k значение k_1 и k_2 из (199) и (200), найдем

$$\varphi = \frac{1}{a}\ln[\varphi_*(e^a - 1) + 1], \tag{201}$$

где $a = 0{,}8488\ (k_1 - k_2)$.

Кольцевое течение. При кольцевом течении основная масса газовой фазы — в ядре потока, а жидкость — на стенке трубы. Чтобы найти ослабления интенсивности гамма-излучения при просвечивании этого вида течения, необходимо проинтегрировать

уравнение (193) в двух областях — от нуля до границы раздела фаз $\dot{R}_р$ и от границы раздела до единицы, причем граница раздела фаз определяется истинным газосодержанием

$$\varphi_2 = \dot{R}_р^2, \tag{202}$$

где $\dot{R}_р = R_р/R$.

В этом случае для функции при кольцевом течении $S_к$ имеем

$$S_к = \int_{\dot{R}_р}^{1} \exp -\left(\dot{k}_1 \sqrt{1-\dot{x}^2}\right) d\dot{x} + \int_{0}^{\dot{R}_р} \exp\left\{-\right.$$

$$\left. -\left[\dot{k}_1\left(\sqrt{1-\dot{x}^2} - \sqrt{\dot{R}_р^2 - \dot{x}^2}\right) - \dot{k}_2\sqrt{R_р - \dot{x}^2}\right]\right\} d\dot{x}. \tag{203}$$

На основании приближенного интегрирования по уравнениям (202) и (203) найдем зависимости φ (φ_*) для кольцевого течения, где по-прежнему

$$\varphi_* = \frac{S_к - S_1}{S_2 - S_1}.$$

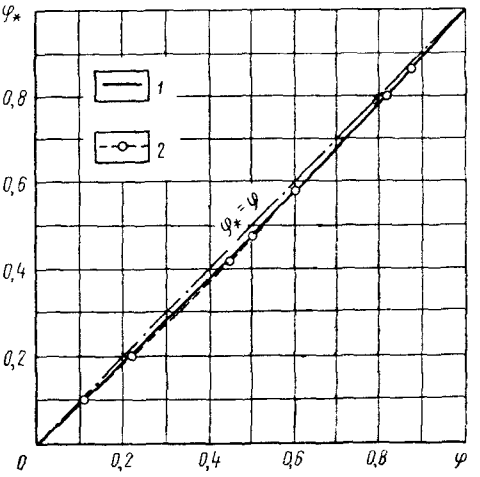


Рис. 23. Зависимость φ_* от φ при просвечивании эмульсионного *1* и кольцевого *2* течений паро-водяной смеси ($p = 40$ *бар*, $D = 30$ *мм*, $\dot{\mu}_0 = 0{,}11$).

Из разобранных примеров видно, что в общем случае в зависимости от структуры течения ослабление интенсивности гамма-излучения будет различным. Но как следует из графиков рис. 23, для вертикальных, осесимметричных форм течения, таких, как кольцевая и эмульсионная, зависимости φ от φ_* весьма близки между собой.

Если учесть, что при малых $\dot{k}$ влияние структуры потока на эффект просвечивания невелико, а в проведенных опытах $\dot{k}$ не превышало 0,21, то применение формулы (201) для определения φ вполне обеспечивало необходимую точность.

Для использования этой формулы необходимо определять φ_*, $\dot{k}_1$, $\dot{k}_2$. Поскольку S пропорционально n, то φ_* вычисляется по формуле

$$\varphi_* = \frac{n - n_1}{n_2 - n_1}.$$

Коэффициенты ослабления воды и газа пропорциональны их плотности, т. е.

$$\dot{k}_1 = \dot{k}_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad \dot{k}_2 = \dot{k}_0 \frac{\rho_2}{\rho_0}. \tag{204}$$

И вообще $\dot{k} = \dot{k}_0\,(\rho/\rho_0)$, где $\dot{k}_0$ — коэффициент ослабления гамма-излучения при просвечивании слоя воды толщиной в единицу длины при $t = 20°$ С и $p = 1$ *бар*.

Определение $\dot{k}_0$. Коэффициент ослабления определяли экспериментально. С этой целью просвечиванием экспериментальной трубы, заполненной водой или паром плотностью сначала $\rho_а$, а затем $\rho_б$, замеряли число импульсов в единицу времени соответственно $n_а$ и $n_б$. Затем по уравнению, составленному на основании формул (199) и (204), определяли $\dot{k}_0$

$$\frac{n_а - n_ф}{n_б - n_ф} = \frac{e^{-0{,}8488\dot{k}_0 \frac{\rho_а}{\rho_0}} + 0{,}0808}{e^{-0{,}8488\dot{k}_0 \frac{\rho_б}{\rho_0}} + 0{,}0808}, \qquad (205)$$

где $n_ф$ — величина естественного и наведенного фона.

Определенные таким образом $\dot{k}_0$ компенсируют до некоторой степени те допущения, которые были сделаны при выводе формулы (199).

Определение n_1 и n_2. Значения n_1 и n_2 определялись путем просвечивания трубы, заполненной водой и паром, той же плотности, какую они имеют в смеси. Если плотности воды и пара в смеси (ρ_1 и ρ_2) несколько отличались от таковых в потоках чистого пара и воды (ρ_1' и ρ_2'), то вместо скорости счета n_1 и n_2 получались скорости счета n_1' и n_2'. В этих случаях для определения n_1 и n_2 использовались формулы

$$n_1 = n_1' \frac{S(\dot{k}_1)}{S(\dot{k}_1')}, \qquad n_2 = n_2' \frac{S(\dot{k}_2)}{S(\dot{k}_2')},$$

где n_1, n_2', n_2, n_1' — соответствующие скорости счета импульсов за вычетом фона.

Величина $S(\dot{k})$ определяется по формуле (199) в зависимости от $\dot{k} = \dot{k}_0\,(\rho/\rho_0)$.

Метод просвечивания гамма-излучением удобен также для определения среднего истинного локального газосодержания. Им легко определяется локальное газосодержание в осесимметричном потоке. Остановимся на приеме, который был нами использован при обработке экспериментальных данных.

При просвечивании трубы узким пучком гамма-излучения вдоль хорды будем иметь среднее по ее длине газосодержание $\bar{\varphi}$, которое сравнительно точно определяется по (191). Как и ранее, φ_* вычисляется по n_1, n, n_2 — количеству зарегистрированных импульсов в единицу времени при просвечивании смеси жидкости и газа (пара),

но уже узким лучом. Среднее значение газосодержания математически представится интегралом

$$\varphi(x) = \frac{1}{y}\int_0^y \varphi(x, h)\, dh,$$

где $\varphi(x, h)$ — локальное газосодержание в точке m с координатами (x, h).

Выражая h через переменные r, x, а y через радиус трубы R и x, получим

$$y^2 = R^2 - x^2,$$

$$h^2 = r^2 - x^2,$$

$$dh = \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$\overline{\varphi(x)}\sqrt{R^2 - x^2} = \int_0^R \varphi(r)\frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Последнее выражение путем подстановки $x^2 = \xi$, $r^2 = z$ сводится к известному интегральному уравнению задачи Абеля

$$F(\xi) = \int_{R^2}^{\xi} \varphi(z)\frac{dz}{\sqrt{z - \xi}},$$

где

$$F(\xi) = -2\overline{\varphi(h)}\sqrt{R^2 - h}.$$

Решение интегрального уравнения известно, оно имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dr^2}\int_{R^2}^{r^2} \overline{\varphi(\xi)}\sqrt{\frac{R^2 - \xi}{\xi - r^2}}\, d\xi.$$

Следовательно, чтобы найти усредненное во времени истинное газосодержание в заданной точке сечения потока, необходимо знать функциональную зависимость усредненного по времени и по хорде газосодержания функции от x. Эта зависимость $\overline{\varphi(\xi)}$ может быть аппроксимирована из экспериментальных данных или при приближенном интегрировании может быть задана кусочно-непрерывной функцией.

Установка для просвечивания гамма-излучением. Толстостенные свинцовые камеры были жестко установлены на станине, которая может свободно поворачиваться вокруг экспериментальной трубы. Чтобы снизить наведенный фон, оба свинцовых корпуса в направлении от изотопа к счетной трубке были значительно утолщены. Для снижения отдачи тепла станина отделена от трубы твердыми теплоизоляторами.

В свинцовом корпусе (см. рис. 22) помещена гильза радиоактивного изотопа (излучатель) *13*, а в другом, противоположном, корпусе — счетная трубка *15*. Гамма-излучение от изотопа направляется по каналу на экспериментальную трубу, проходит ее и через канал противоположного корпуса падает на счетную трубку. Каналы в свинцовых корпусах выполнены с таким расчетом, чтобы второй из них являлся строгим линейным продолжением первого. Ширина первого канала равняется внутреннему диаметру трубы или несколько превышает его.

В качестве источника гамма-излучения использовалось радиоактивное олово-113, заплавленное в гильзу в таком количестве, чтобы начальная активность его составляла 150 милликюри, а начальная удельная активность — не меньше 8 милликюри на 1 *г*. Продолжительность использования каждой гильзы не превышала $^2/_3$ периода полураспада олова-113.

Для замеров интенсивности гамма-излучения могут быть использованы радиометры Б-2, ПП-8 и др.

3. **Емкостный метод,** примененный в работе [98], основан на изменении емкости конденсатора в зависимости от диэлектрических свойств сред, находящихся между пластинами конденсатора, размеров этих пластин и особенно от структуры течения; данный метод в практике используется мало.

4. **Метод измерения истинного газосодержания** основан на измерении динамического напора, возникающего в момент набегания газо-жидкостной смеси на пластину динамометра, установленного в непосредственной близости от выходного сечения экспериментального трубопровода. Этот метод был использован А. А. Армандом [2, 3].

Истинное газосодержание определяется из выражения

$$f_{\text{дин}} = \frac{1}{2}(\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2) = \frac{G_c^2}{2g}\left(\frac{\eta_1^2}{\varphi_1\rho_1} + \frac{\eta_2^2}{\varphi_2\rho_2}\right),$$

где расход смеси, массовые концентрации компонентов и их плотности считаются известными, т. е. на выходе смеси они такие же, как в экспериментальной трубе. Данный метод почти нельзя использовать при течениях паро-жидкостных смесей в сильно пульсирующих режимах воздухо-водяных смесей.

5. **Взвешивание** экспериментального горизонтального трубопровода, укрепленного на гибких шлангах, до начала эксперимента и при движении по нему газо-жидкостной смеси имеет такие же недостатки, что и указанный выше (п. 4) метод. Взвешивание трубопровода было применено А. А. Армандом [2, 3].

6. **Метод инжекции** маркирующего вещества заключается в том, что движущаяся жидкость окрашивается каким-либо мало диффундирующим в ней веществом и по скорости его движения определяют среднюю истинную скорость жидкости. Затем по формуле $F\varphi_1 w_1 = Q_1$ можно определить истинное газосодержание.

Методом инжекции маркирующего вещества можно получить убедительные экспериментальные данные по истинному газосодержанию только на больших длинах. Г. Г. Корнилов и В. И. Черникин [29] получили такие результаты на трубопроводе длиной около 200 *м*.

КОНСТРУКТИВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО КОНТУРА

Условия входа и выхода

Обычно экспериментальные исследования течения газо-жидкостных смесей в трубах ведутся на установках относительно небольших размеров. Поэтому одна из главных задач, решаемых при конструктивном исполнении установки, — полностью исключить влияния внешних факторов (местных сопротивлений, условий смесеобразования, условий входа и выхода смеси из экспериментального участка) на распределение фаз по сечению, истинное газосодержание и величину гидравлического сопротивления.

Необходимо отметить, что привычные для течения однофазной среды размеры, за пределами которых не ощущается влияние источника возмущения, недостаточны для двухфазных жидкостей. Установить пределы влияния местных сопротивлений на параметры, характеризующие течение газо-жидкостных смесей в трубах, достаточно сложно, так как в отдельных случаях местные сопротивления (дросселирование смеси) не только искажают результаты измерений, но даже меняют структуру течения, в результате чего меняется вид функциональной связи искомых величин с определяющими критериями.

Проследить за влиянием местных сопротивлений, в частности, условий выхода смеси из экспериментального участка трубопровода на истинное газосодержание можно путем сопоставления семейства кривых $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$ (рис. 24 и 25), полученных на одной установке, но при различном исполнении выходного участка [39]. В первом случае (рис. 24) зависимость $\varphi(\beta)$ получена, когда выходное сечение экспериментального трубопровода длиною 35 *м* и диаметром 56 *мм* было задиафрагмировано шайбой меньшего сечения (45 *мм*), а во втором (см. рис. 25) диафрагма отсутствовала и газо-жидкостная смесь поступала непосредственно в сепаратор, где происходило разделение жидкости и газа.

Сопоставляя эти кривые, можно заключить, что диафрагмирование выходного сечения трубопровода приводит к преждевременному переходу расслоенной структуры течения смеси (пунктирная линия) в пробковую, вследствие чего меняется общий ход кривой, отражающей зависимость истинного газосодержания от расходного.

Таким же образом сказывается наличие неравнопроходной арматуры на экспериментальном трубопроводе, например вентилей, которые искажают всю картину течения газо-жидкостной смеси.

Местное сопротивление в выходном сечении трубопровода приводит к искусственной задержке жидкости на экспериментальном

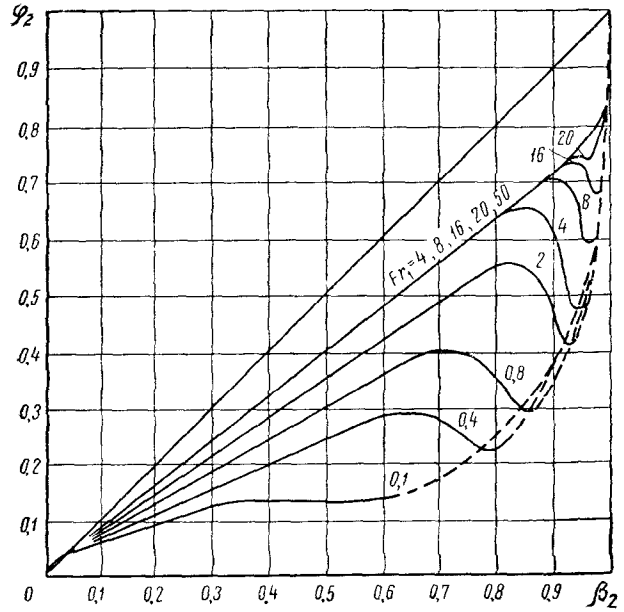


Рис. 24. Зависимость истинного газосодержания от критериев β и Fr_c при наличии местного сопротивления (диафрагмы) в выходном сечении трубопровода ($D = 56$ *мм*, $L = 35$ *м*).

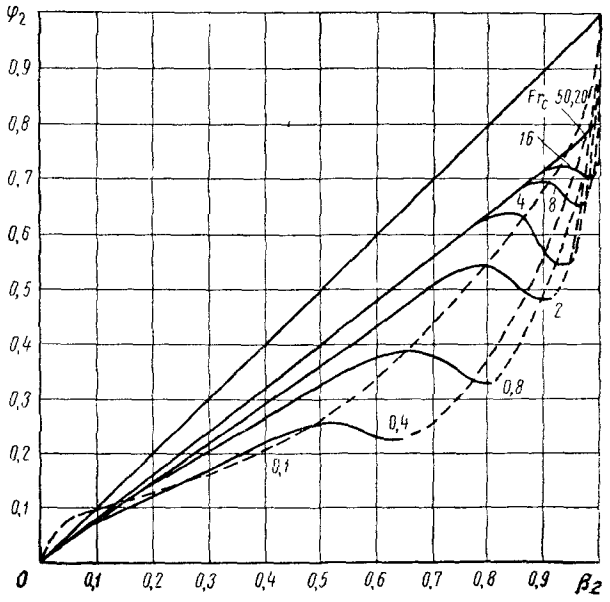


Рис. 25. Зависимость истинного газосодержания от β и Fr_c при исключении влияния местного сопротивления ($D = 56$ *мм*, $L = 35$ *м*).

участке, создает дополнительные пульсации, что, естественно, сказывается на величине и закономерности изменения истинного газосодержания и гидравлических сопротивлений.

Эффект искусственной задержки жидкости по-разному проявляется в зонах расслоенного и пробкового режимов течения смеси.

В зоне существования пробкового режима течения смеси влияние эффекта дросселирования почти не чувствуется. Это объясняется тем, что доля жидкости от эффекта задержки незначительна по сравнению с ее общей массой, находящейся в экспериментальном трубопроводе. Однако дросселирование при пробковой структуре течения влияет на появление наведенных пульсаций.

Указанный эффект наиболее сильно проявляется при расслоенной структуре течения смеси с большим газосодержанием ($\beta > 0{,}8$), когда незначительная задержка жидкости приводит к резкому уменьшению истинного газосодержания.

Неравномерное увеличение истинного газосодержания из-за искусственной задержки жидкости приводит к слиянию экспериментальных кривых, которые при правильной постановке опыта располагаются раздельно, по соответствующим значениям критерия Фруда.

На рис. 24 и 25 видно, что вместо семейства кривых, относящихся к расслоенной структуре течения смеси и отражающих закономерность изменения истинного газосодержания в функции расходного и критерия Fr_c, получается единая кривая $\varphi = \varphi(\beta)$ (рис. 24), не соответствующая условиям течения газо-жидкостной смеси за пределами влияния местного сопротивления.

Следовательно, качественная постановка экспериментальных исследований возможна лишь при условии исключения всевозможных источников возмущений в экспериментальном трубопроводе. Для этого необходимо всю запорно-регулирующую арматуру расположить на подводящих к смесителю и отводящих от сепаратора трубопроводах, по которым движется однородная жидкость.

Длина экспериментального участка трубы

Если исключить внешние источники возмущений в экспериментальном трубопроводе, то все-таки его длина должна быть достаточно большой для получения надежных данных. Так, например, тонкодисперсная на входе в вертикальную трубу воздухо-водяная смесь стабилизируется и становится грубодисперсной пробковой формой течения на расстоянии более 200 калибров ($l/D > 200$) от входа. На рис. 26 показана зависимость истинного газосодержания от расходного и критерия Fr_c, полученная при изучении газо-жидкостного движения на трубе $D = 56$ *мм* и $l = 16$ *м*. Небольшая длина трубы не позволила получить четкую переходную зону от пробковой к расслоенной структуре, как это было сделано на стенде вдвое большей длины (см. рис. 25, начало пунктирных линий), ибо длина газо-жидкостной пробки составляет почти половину длины трубы. В результате трудно получить не только среднее значение истинного

газосодержания в переходной зоне, но и крайние точки — максимум и минимум.

Если же сопоставить кривые $\varphi(\beta)$ при $Fr_c = 0{,}1$ (см. рис. 25 и 26), относящиеся к расслоенной структуре, то и они различны. Это опять подтверждает необходимость особого внимания к созданию гидравлического контура.

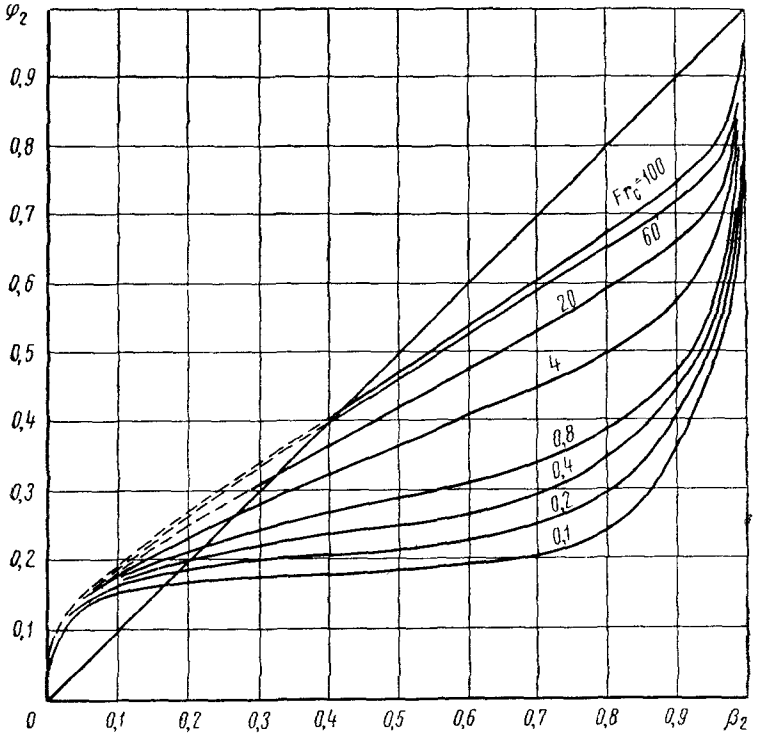


Рис. 26. Зависимость истинного газосодержания от расходного и Fr_c при «петлеобразном» гидравлическом контуре ($D = 56$ *мм*, $L = 16$ *м*).

Экспериментальная установка, на которой получены опытные результаты, показанные на рис. 26, имела следующую конструктивную особенность. Экспериментальный участок трубы заканчивался не свободным выходом в сепаратор, а поворотным коленом, из которого газо-жидкостная смесь по возвратной трубе поступала в сепаратор, установленный в начале экспериментального участка.

Естественно, такая конструкция создает добавочные условия для задержки жидкости не только при малых скоростях. В частности, при малых газосодержаниях и скоростях смеси указанный поворот тормозит движение газа, что будет означать более сильное по сравнению с показанным на рис. 25 возрастание отрицательной относительной скорости ($\varphi > \beta$ при $\beta < 0{,}1$).

Влияние угла наклона трубы

Исследования показывают, что экспериментальный участок трубопровода между смесителем и сепаратором должен быть тщательно пронивелирован, чтобы исключалось влияние наклона трубы на результаты измерений.

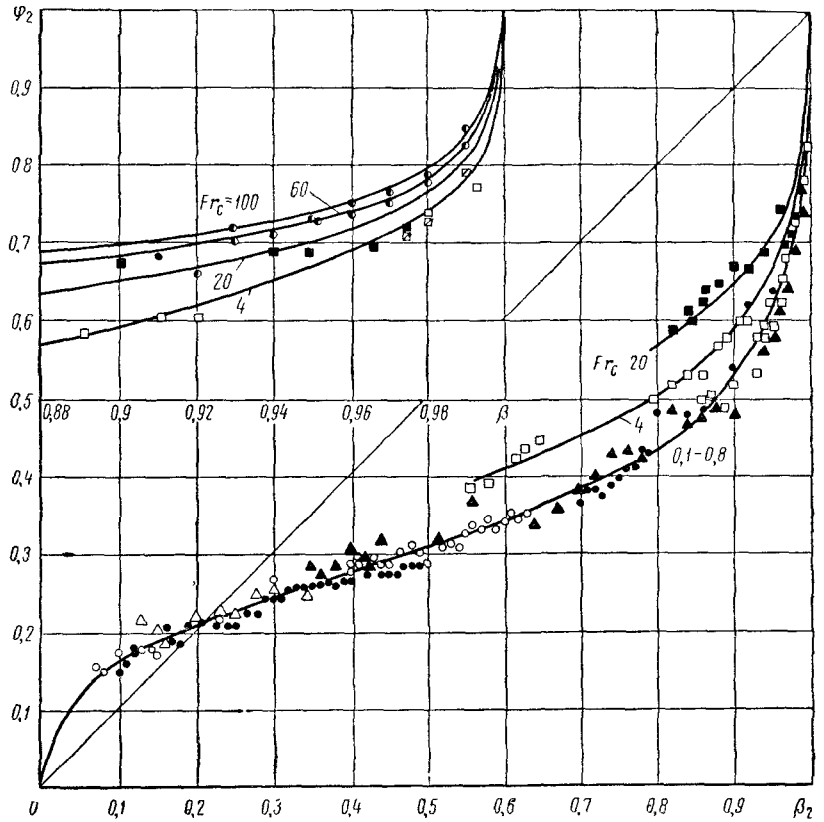


Рис. 27. Зависимость φ (β, Fr_c). Нисходящее течение с углом наклона 0,25° к горизонту ($D = 56$ *мм*, $L = 16$ *м*).

Обнаружено, что даже при небольших углах наклона трубы к горизонту сильно искажаются количественные результаты по истинному газосодержанию и меняется качественная сторона. Результаты измерения истинного газосодержания на трубе, наклоненной к горизонту под углом 0,25° (нисходящее течение), приведены на рис. 27, а результаты, полученные на том же стенде, но при горизонтальном расположении трубы, — на рис. 26. Если сравнить эти результаты, то увидим, что для трубы с наклоном 0,25° кривые φ(β) при Fr_c = = 0,1, 0,2, 0,4 и 0,8 практически слились в одну кривую (см. рис. 27).

Естественно, такой небольшой наклон трубы при увеличении скорости смеси (для $Fr_c > 0{,}8$) перестает оказывать влияние на истинное газосодержание и кривые $\varphi(\beta)$ при $Fr_c = 4$, 20, 60 и 100 почти совпадают с аналогичными кривыми для горизонтальной трубы.

Однако действие такого небольшого наклона выразилось уже в том, что кривые φ (β) с небольшими значениями Fr_c переместились вверх, а кривые со значениями $Fr_c = 4$, 20, 60 и 100 — вниз. В окрестности точек $\beta = 0$ и $\beta = 1$ кривые φ (β) при $Fr_c = idem$ почти не сместились по сравнению с таковыми для горизонтальной трубы.

Подобное перестраивание кривых φ (β) даже при небольших углах наклона трубы к горизонту объясняется тем, что характер влияния критерия Фруда смеси на истинное газосодержание для нисходящего течения становится иным, чем в горизонтальном потоке. Если в горизонтальном течении увеличение Fr_c означало увеличение истинного газосодержания и, следовательно, уменьшение области положительной относительной скорости и приближение истинного газосодержания к расходному, то в наклонной трубе оно приводит к существенному уменьшению истинного газосодержания и, следовательно, к увеличению области положительной относительной скорости.

Таким образом, увеличение угла наклона трубы для нисходящего потока приводит к увеличению истинного газосодержания, а увеличение числа Fr_c — к его уменьшению.

Такая тенденция, как будет показано дальше, наблюдается только до определенного значения скорости или критерия Фруда смеси, начиная с которого истинное газосодержание от него не зависит.

Итак, экспериментальную установку проектировать и сооружать надо в соответствии со следующими требованиями:

1) устранять местные сопротивления и устройства, задерживающие движение жидкости;

2) экспериментальный участок трубопровода должен быть достаточно длинным, чтобы обеспечивать стабилизацию потока и давать возможность с необходимой точностью измерять средние значения параметров (истинное газосодержание и перепад давления);

3) точно ориентировать экспериментальный трубопровод.

Естественно, влияние всех этих факторов на параметры газожидкостного течения — предмет специальных исследований, которые должны быть поставлены дифференцированно, т. е. воздействие каждого фактора (сужения, задержки, поворота, подпора, угла наклона) должно изучаться отдельно.

В настоящее время результаты исследования по местным сопротивлениям ограничиваются теми примерами, которые приведены выше. Влияние же углов потока на различные характеристики в дальнейшем изложении освещено достаточно полно.

МЕТОДИКА ПОСТАНОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Имеется значительное количество экспериментальных работ, отечественных и зарубежных, в которых рассматривались закономерности изменения истинного газосодержания и гидравлических сопротивлений от параметров, в какой-то мере определяющих течение газо-жидкостных смесей в трубах. Однако большинство исследований не отличается полнотой и законченностью, а закономерности, установленные в некоторых из них, носят частный характер, что затрудняет использование их в условиях, отличающихся чем-либо от условий экспериментирования.

Во введении отмечены наиболее характерные недостатки в методике постановки и обработки экспериментов по газо-жидкостным смесям. Самым существенным из них следует считать отсутствие критериального метода постановки эксперимента и обработки его результатов.

«Программа экспериментов должна строиться так, чтобы определяющие процесс критерии изменялись друг от друга независимо и влияние одного критерия по возможности определялось при постоянных других», — отмечал С. Г. Телетов [52]. В исследовании сложных процессов, таких, как течения смесей, обходить этот принцип нельзя.

Поэтому в гл. 2 была получена совокупность определяющих критериев, в результате чего истинное газосодержание и коэффициент сопротивления могут быть представлены в виде

$$\varphi = \varphi\,[\beta,\ \mathrm{Fr_c},\ \mathrm{Re_c},\ \mathrm{We},\ \dot{\mu},\ \dot{\rho},\ \cos(g,\ z)],$$

$$\lambda_c = \lambda\,[\beta,\ \mathrm{Fr_c},\ \mathrm{Re_c},\ \mathrm{We},\ \dot{\mu},\ \dot{\rho},\ \cos(g,\ z)].$$

На основании точных решений уравнений гидродинамики для случая ламинарного движения эти общие функции представляются в виде

$$\varphi = \varphi\,[\beta,\ \mathrm{Fr_c},\ \mathrm{We},\ \dot{\mu},\ \dot{\rho},\ \cos(g,\ z)],$$

$$\lambda_c = \lambda\,[\mathrm{Re_c},\ \varepsilon]\,\psi\,[\beta,\ \mathrm{Fr_c},\ \mathrm{We},\ \dot{\mu},\ \dot{\rho},\ \cos(g,\ z)].$$

Для турбулентного течения газо-жидкостной смеси возможность такого представления истинного газосодержания и коэффициента сопротивления будет показана экспериментально.

Поскольку цель экспериментальных исследований — установить эмпирические зависимости для истинного газосодержания и коэффициента гидравлического сопротивления смеси, являющихся многопараметрическими функциями, то для выявления влияния каждого из определяющих параметров необходима постановка большого числа опытов в определенной последовательности.

Один из путей решения поставленной задачи заключается в проведении серии опытов, соответствующих общему числу

определяющих критериев с изменением в пределах серии одного из параметров при закрепленных значениях всех остальных.

В принципе постановка экспериментальных исследований в такой последовательности возможна. Однако это сопряжено с исключительными неудобствами, так как опыты необходимо проводить на трубах различных диаметров с использованием большого количества разнообразных по физическим свойствам жидкостей и газов.

Кроме этого, результаты исследований, по-видимому, будут несколько ограничены вследствие сложности изменения в широких пределах всех критериев при такой постановке эксперимента.

Поэтому проще проводить серии опытов с изменением не одного, а нескольких параметров одновременно, группируя их определенным образом. Так, например, если закрепить значения We, $\dot{\rho}$, $\dot{\mu}$, $\cos(g, z)$ и провести серию опытов по фиксированным значениям числа Fr_c, изменяя расходное газосодержание в пределах $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ и не принимая во внимание происходящего при этом изменения в значении критерия Re_c, то можно построить семейство кривых, которое будет отражать функциональную зависимость истинного газосодержания или коэффициента сопротивления от совокупности критериев β, Fr_c, Re_c.

Затем, проведя аналогичную серию опытов по изменяющемуся значению следующего критерия, например We, в той же последовательности, что и предыдущие опыты, можно определить влияние данного критерия на исследуемую величину. И так с каждым из оставшихся параметров $\dot{\rho}$, $\dot{\mu}$, $\cos(g, z)$.

После проведения перечисленных серий опытов невыясненной остается лишь степень влияния критериев в отдельности: β, Fr_c и Re_c.

Определить влияние каждого из них будет достаточно просто, если в процессе исследования окажется, например, что критерий Re_c не влияет на искомую величину. Для этого будет достаточно, если изменение хотя бы одного из параметров $\dot{\rho}$ или $\dot{\mu}$ в несколько раз не окажет влияние на исследуемый параметр (φ или λ_c), так как при изменении $\dot{\rho}$ или $\dot{\mu}$ изменяется значение критерия Re_c.

В этом случае можно отобрать и сопоставить между собой определенное количество опытов, в которых были бы закреплены все определяющие критерии, кроме Re_c, и таким образом выяснить влияние критерия Re_c.

Аналогично можно доказать отсутствие влияния критерия Re_c на искомые величины (φ или λ_c) в случае автомодельности последних относительно какого-либо из следующих трех критериев: Fr_c, $\dot{\mu}$, $\dot{\rho}$.

Если в процессе экспериментальных исследований ни одно из вышеперечисленных условий выполнено не будет, то для изучения влияния каждого из критериев Fr_c, Re_c, β в отдельности на истинное газосодержание и коэффициент сопротивления потребуется дополнительное проведение опытов на трубах различных диаметров.

Указанное разделение всех определяющих критериев на подобные группы не является случайным. Во-первых, исходя из физической сути течения двухфазных жидкостей в трубах следует ожидать, что основными определяющими критериями являются β, Fr_c, Re_c, поэтому представление их в одной группе позволяет легко определить влияние остальных четырех: We, $\dot{\rho}$, $\dot{\mu}$, $\cos(g, z)$.

Во-вторых, экспериментальные исследования дают основание полагать, что критерии $\dot{\rho}$, $\dot{\mu}$ и частично We не оказывают существенного влияния на истинное газосодержание и коэффициент гидравлического сопротивления.

Конечно, изложенная концепция не является единственной. Приведенные дальше результаты экспериментальных исследований обрабатывались по этой методике. Но, естественно, можно применять разные модификации общего критериального способа, проводя соответствующие обоснования для каждого конкретного случая.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ХАРАКТЕРНЫЕ ФОРМЫ ГАЗО-ЖИДКОСТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБАХ И ИХ СВЯЗЬ С ПУЛЬСАЦИЯМИ ДАВЛЕНИЯ

Экспериментальные исследования течения газо-жидкостных смесей в горизонтальных и наклонных трубах были начаты с изучения структуры течения смеси и пульсаций давления. Надо было рассмотреть физическую сторону процесса течения двухфазных жидкостей в трубах, чтобы более обоснованно подойти к изучению закономерностей изменения истинного газосодержания φ и коэффициента гидравлического сопротивления λ_c.

СТРУКТУРЫ ГАЗО-ЖИДКОСТНЫХ ПОТОКОВ В ТРУБАХ

Совместное движение газа и жидкости по трубопроводу характеризуется наличием различных форм течения, определяемых в основном распределением фаз по сечению трубы, что в свою очередь зависит от объемного содержания легкой фазы в потоке смеси, скорости течения, физических свойств обеих фаз и других факторов.

При определенных условиях, например при движении газо-жидкостной смеси по вертикальным трубам, легкая фаза — газ может быть распределен в жидкости в виде мелких пузырьков или отдельных газовых скоплений, которые могут занимать все сечение потока, вытесняя, подобно поршню, жидкость, и, наконец, газ может двигаться в виде газового ядра внутри жидкостного кольца правильной формы с волнистой или гладкой поверхностью раздела.

Структуры течения в горизонтальных и наклонных трубах могут быть дополнены расслоенной формой и некоторыми разновидностями пузырькового (пробкового) течения.

Визуальная классификация структур газо-жидкостных течений разработана достаточно полно [21, 24, 25, 27, 39, 64]. Это объясняется сравнительной простотой вопроса.

В соответствии с результатами указанных работ можно отметить следующие основные структуры газо-жидкостных потоков в трубах (рис. 28):

а) расслоенная (разделенная), характеризующаяся послоиными движениями газа и жидкости с четкой гладкой или волнистой поверхностью раздела;

б) кольцевая (пленочная, пленочно-дисперсная), характеризующаяся течением основной массы жидкости по внутреннему периметру трубы в виде жидкостного кольца, внутри которого с высокой скоростью движется газовое ядро со взвесью; в отдельных случаях,

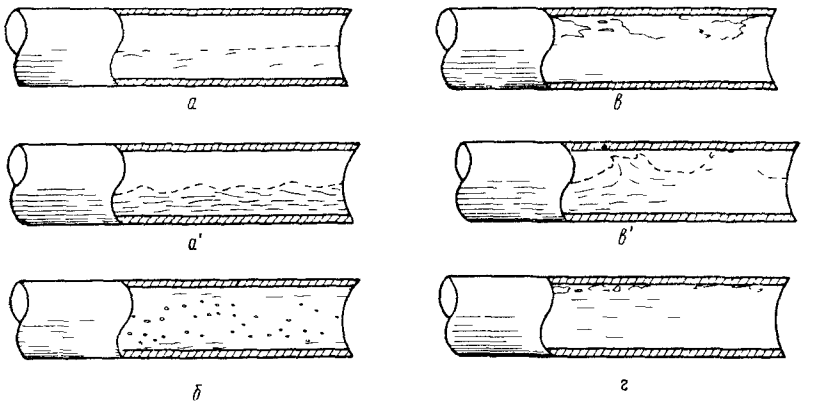


Рис. 28. Структуры течения газо-жидкостных смесей (горизонтальный трубопровод).

а — расслоенная, *а'* — с волновой поверхностью раздела, *б* — кольцевая, *в* и *в'* — пробковая, *г* — пузырьковая

например при движении газо-жидкостной смеси по вертикальной трубе, жидкостное кольцо принимает почти правильную форму с постоянной жидкостной пленкой;

в) пробковая (снарядная, четочная), характеризующаяся чередованием жидкостных и газовых пробок различных размеров;

г) пузырьковая структура: газ движется в виде множества мелких пузырьков по верхней образующей трубы при движении смеси по горизонтальному и наклонному трубопроводу; в вертикальных трубах пузырьки газа распределяются почти равномерно по всему объему жидкости.

Кроме перечисленных, авторы многих работ отмечают существование эмульсионного, распыленного и некоторых других видов потоков.

Рассмотрим качественно каждый из указанных видов. Поток с отдельными пузырьками газа (см. рис. 28, *г*) возникает при малых расходах газа, когда почти все сечение трубы занимает жидкость. Отдельные скопления газа наверху трубы вследствие капиллярных явлений прилипают к стенкам, их скорость уменьшается. Этим

и объясняется отрицательная относительная скорость в зоне малых расходных газосодержаний (β близко к нулю).

При пробковой структуре течения (рис. 28, *в*), возникающей из пузырьковой формы при увеличении газосодержания, газовые и жидкостные скопления двигаются по трубопроводу иногда с очень большими (30—40 *м/сек*) скоростями, что вызывает значительные пульсации давления. Даже при визуальном наблюдении можно заметить положительную относительную скорость газовых скоплений.

С еще большим увеличением газосодержания возникает волновой, а затем расслоенный поток (рис. 28, *а*). Последний (при сравнительно малых скоростях смеси) характеризуется плоской границей

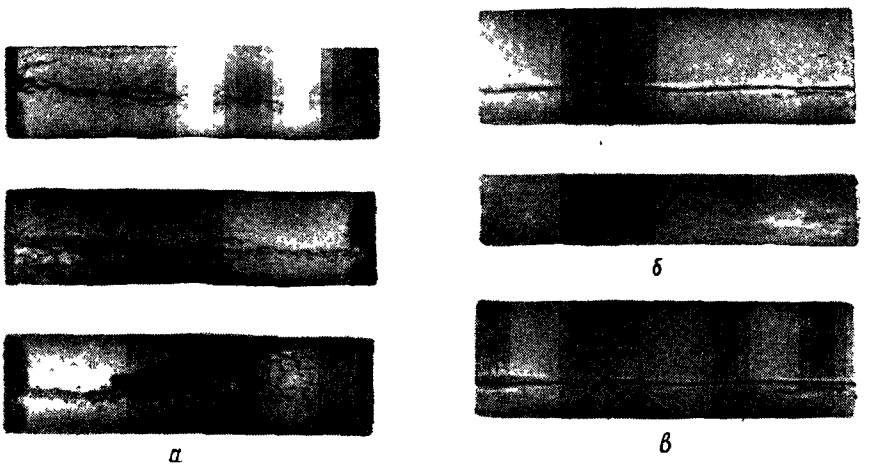


Рис. 29. Фотографии структур газо-жидкостных потоков.

а — $\beta_2 = 0{,}28$, $Fr_c = 7{,}05$, пробковая структура течения; *б* — $\beta_2 = 0{,}89$, $Fr_c = 6{,}05$, пробковое течение с длинными пузырями; *в* — $\beta_2 = 0{,}95$, $Fr_c = 6{,}3$, раздельное течение.

раздела газа и жидкости, причем скорость жидкости, движущейся в нижней части трубы, значительно меньше скорости газа.

На рис. 29 показаны фотоснимки течений в горизонтальной трубе $D = 99{,}8$ *мм* со скоростью $w_c = 2{,}5$ *м/сек* при газосодержании β_2, составляющем 0,28, 0,89 и 0,95.

При газосодержании $\beta_2 = 0{,}28$ имело место пробковое течение со сравнительно короткими пузырьками ($l/D = 9{,}5$, l — длина пузыря или пробки) и относительно длинными водяными поршнями с сильным образованием пены за хвостом пузыря. По верхней стенке стекает пенистая водяная пленка.

При $\beta_2 = 0{,}89$ также наблюдалось пробковое течение с длинными пузырями ($l/D \approx 500$) со сравнительно спокойной поверхностью раздела; пузыри чередуются с относительно короткими водяными поршнями, содержащими некоторое количество воздушных пузырьков.

При $\beta_2 = 0{,}95$ — разделенное течение.

На рис. 30 приведены фотографии, снятые при скорости $w_c = 3$ *м/сек* и $\beta_2 = 0{,}58$. Характер потока близок к течению, изображенному на рис. 29. В момент прохождения пузыря это течение напоминает течение, показанное на рис. 29, *б*. На рис. 31 представлена фотография переходной формы от пробковой к разделенной структуре, а на рис. 32 — фотография газо-жидкостного течения, характеризующегося начальной стадией образования пробок.

При $\beta_2 = 0{,}1$ (см. рис. 32) в верхней части трубы наблюдались насыщенные пеной пузыри, движущиеся в виде непрерывной ленты ($l/D = 7$). Остальная часть сечения трубы, заполненная водой, временами также была насыщена воздушными пузырьками, но

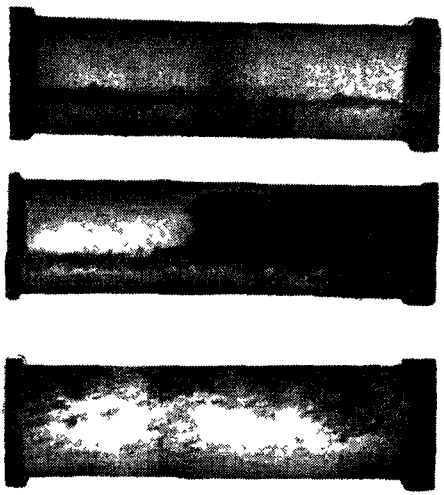


Рис. 30. $\beta_2 = 0{,}58$, $Fr_c = 8{,}8$.

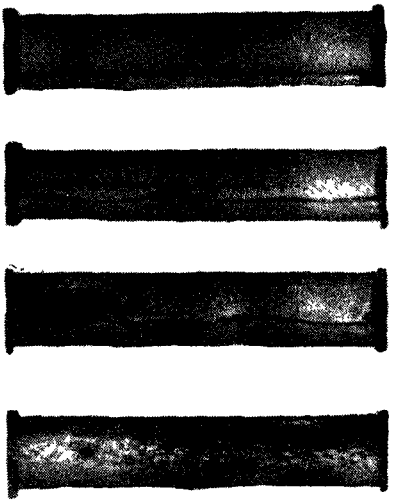


Рис. 31. $\beta_2 = 0{,}95$, $Fr_c = 12{,}2$.

в меньшей степени. На рис. 33 представлены фотографии потоков при $\beta_2 = 0{,}41$. Течение имеет ясно выраженный вид пробковой структуры. Водяной поршень и водяной слой под головной и хвостовой частью пузыря сильно вспенены. В средней части пузыря поверхность раздела спокойная.

На трубе $D = 47{,}4$ *мм* проведено фотографирование кольцевой формы течений газо-жидкостной смеси воздух-вода при скоростях смеси от 8 до 20 *м/сек* и газосодержании от 0,95 до 0,995.

Эта форма течения возникает при больших газосодержаниях и больших скоростях смеси, когда газовая фаза движется в середине трубы, а жидкая фаза — по ее поверхности (рис. 34).

В исследованном нами диапазоне скоростей наблюдалась первая стадия кольцевого течения — кольцевая-эксцентричная и форма, при которой жидкость движется по верхней и боковой поверхностям в виде пленки, а по нижней поверхности — утолщенным слоем в виде лоткового течения.

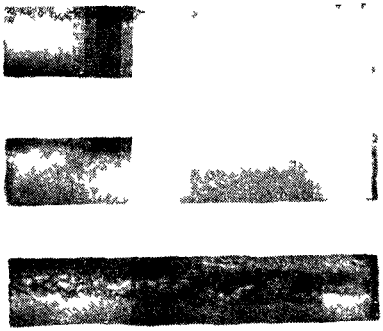


Рис 32. $\beta_2 = 0{,}1$, $Fr_c = 8{,}1$.

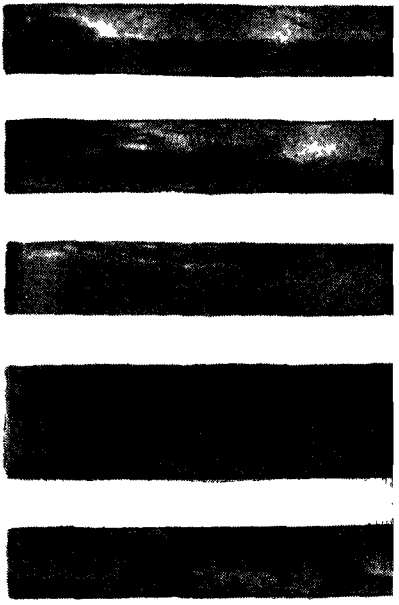


Рис. 33. $\beta_2 = 0{,}41$, $Fr_c = 31$, ярко выраженное пробковое течение.

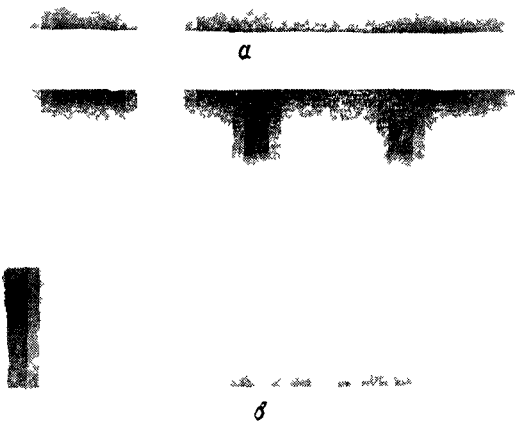


Рис 34. Пробковая структура течения при движении более вязкой, чем вода, жидкости с воздухом.

а — $\mu_1 = 5$ *спз*, *б* — $\mu_1 = 10$ *спз*, *в* — $\mu_1 = 20$ *спз*

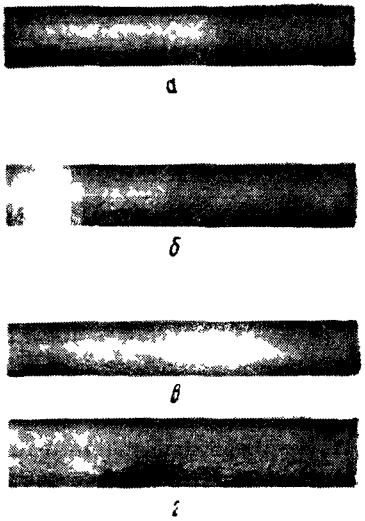


Рис. 35. Кольцевая (пленочно-дисперсная) форма течения.

Движущаяся жидкая пленка наблюдается.

а) в виде колец с ровными очертаниями, наклоненных к оси трубы и выступающих вперед своей нижней частью;

б) то же, с извилистыми очертаниями колец, иногда незамыкающимися;

в) в виде капиллярной «ряби» на верхней и боковой поверхностях трубы.

На рис. 35 представлены наиболее характерные режимы кольцевого-эксцентричного течения:

а — отчетливо видны кольца пленки, движущейся по верхней и боковой стенкам трубы, но кольцо жидкости внизу толще, чем вверху;

б — на поверхности пленки появилась капиллярная «рябь»;

в — при увеличении скорости смеси пленка жидкости стала тоньше;

г — иногда наблюдалось прохождение в трубе пенистых водяных поршней при наличии движущейся пленки и лоткового течения жидкости; эту форму течения следует рассматривать как комбинированную — сочетание кольцевого-эксцентричного течения с пробковым с пеной между пузырями

Резких и четких границ перехода от одного вида потока к другому не наблюдается. Всегда имеются довольно широкие переходные области, обусловливающие изменение структуры движения газа и жидкости.

Механизм изменения форм течения и их перехода из одной в другую заключается в следующем. При ламинарном течении газожидкостной смеси поверхность раздела фаз, как правило, плоская. Турбулизация газа и жидкости приводит к появлению беспорядочных (пульсационных) возмущений. В частности, на границе раздела при увеличении относительной скорости газа случайные возмущения усиливаются так, что частицы жидкости заметно смещаются. В результате поверхность жидкости деформируется, отклоняется от первоначальной формы. Возникает новая равновесная форма поверхности жидкости, капиллярные силы и силы свободного падения которой стремятся вернуть ее в прежнее состояние.

Частицы жидкости, двигаясь под действием силы свободного падения к положению равновесия, по инерции будут проходить его и вновь испытывать действие восстанавливающих сил. Таким образом, на поверхности жидкости, подвергающейся случайному возмущению, появляются волны, в данном случае гравитационные.

Как следует из теории волновых движений жидкости, поток газа над жидкостью стремится сохранить имеющееся на поверхности раздела волновое ее движение. Это можно показать следующим образом. Скорость движения частиц газа при относительной скорости будет больше у гребней волн (линии тока проходят чаще) и меньше на впадине. Следовательно, на основании уравнения Бернулли на впадине волны давление будет больше, чем на ее гребне. И значит

воздействие газа на жидкость сводится к тому, чтобы увеличить амплитуду волны.

При больших скоростях газа амплитуда волн на поверхности жидкости оказывается экспотенциально возрастающей во времени и сама поверхность — неустойчивой. Неустойчивостью волновой поверхности в переходной области и увеличением амплитуды волн объясняется возникновение пробкового с пенообразованиями и пленочно-дисперсного видов потоков, которые появляются при бо́льших, чем у волнового потока, газосодержаниях. Первый из этих потоков характеризуется тем, что амплитуда волн достигает такого значения, при котором волна жидкости омывает верхнюю образующую трубы, причем из-за неустойчивости волновой поверхности пробки имеют различную длину и амплитуду. При еще большем, чем в пробковом режиме, газосодержании пробки и волны жидкости разрушаются, часть жидкости движется в виде пленки по стенкам трубопровода, а другая часть в распыленном дисперсном состоянии в виде капель уносится газом.

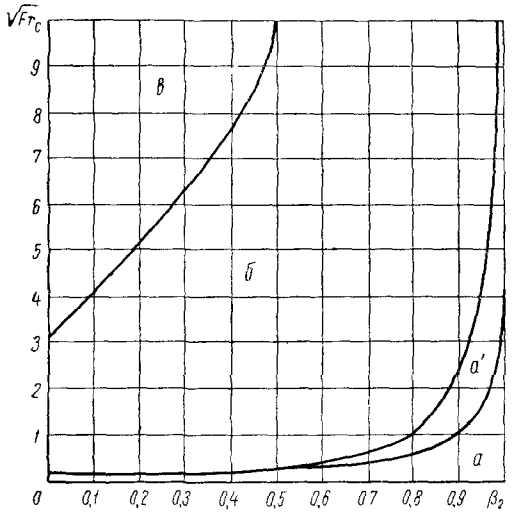


Рис. 36. Диаграмма структур потоков (горизонтальная труба).

а — расслоенная; *а'* — расслоенная с волновой поверхностью раздела; *б* — пробковая (снарядная, четочная); *в* — пузырьковая (эмульсионная).

Таким образом, переход из одного вида потока в другой определяется характером поверхности раздела газа и жидкости в трубопроводе.

Структура поверхности раздела определяется гравитационными волнами, математической и физической характеристиками которых является безразмерный критерий Фруда ($Fr_c = w_c^2/gD$), показывающий соотношение инерционных сил и сил свободного падения. Поэтому для определения вида потока построена диаграмма в координатах основных определяющих критериев — расходного газосодержания β и числа Fr_c (рис. 36).

Заметим, что в указанной диаграмме проведены линии, отделяющие различные структуры потоков. В действительности переход от одной формы течения газо-жидкостной смеси в другую характеризуется сравнительно широкой зоной, поэтому линии границ форм течения проведены в середине переходных областей. В особенности это касается пробкового потока.

Для построения диаграммы использованы данные, полученные авторами и другими исследователями [24, 25, 36, 98] при определении видов (типов, структур) потоков для трубопроводов диаметром от 25 до 100 *мм*. Влияние же диаметра на структуру потока вполне может быть охарактеризовано критерием Fr_c; последний должен быть взят в качестве одной из координат.

Для зоны высокого газосодержания ($\beta > 0{,}9$) построена специальная структурная диаграмма (рис. 37). Самая характерная структура в этой зоне — кольцевая форма течения, называемая

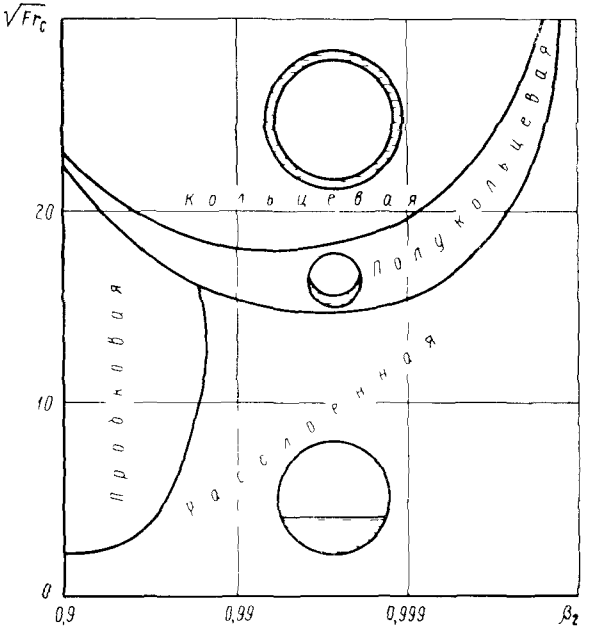


Рис. 37. Диаграмма структур потоков в зоне больших газосодержаний $\beta_2 > 0{,}9$. Течение в горизонтальной трубе.

иногда пленочной или пленочно-дисперсной, ибо основная часть жидкости движется в виде пленки по стенкам трубы, а некоторая часть — в дисперсном виде в центре трубы с газовым потоком.

Многообразие структур течения усложняет рассмотрение вопросов гидродинамики газо-жидкостных смесей, так как невозможно создать единую математическую модель, описывающую всевозможные режимы течения двухфазной жидкости.

Но учитывая, что для отдельных структур течения смеси в трубах можно написать эмпирические уравнения, с достаточной точностью отображающие процесс, необходимо разделить все многообразие структур течения на зоны, объединяющие схожие по форме виды

потоков, чтобы затем математически описать полученную физическую модель.

Так, например, для зоны расслоенного течения с гладкой или волнистой поверхностью раздела фаз, наблюдающейся при течении газо-жидкостных смесей в горизонтальных и наклонных трубах, а также для кольцевого течения в вертикальных трубах можно написать эмпирическую систему уравнений, достаточно точно описывающую турбулентный режим течения обеих фаз с учетом взаимодействия их на границе раздела.

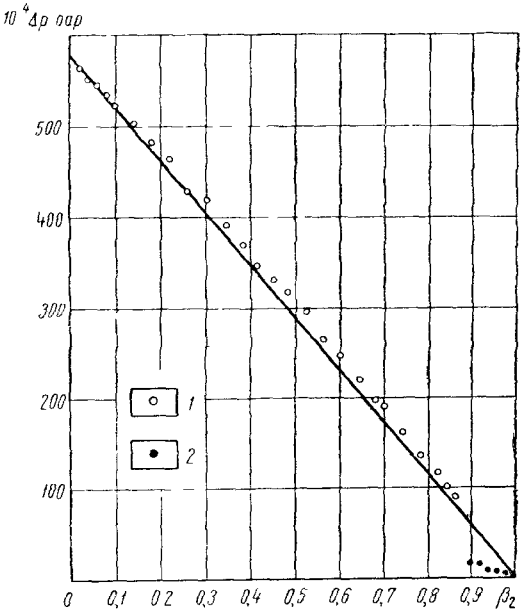


Рис. 38. Закономерность изменения градиента давления на измерительном участке трубопровода от расходного газосодержания β_2 при $Fr_c = 2$.

1 — пробковая структура; *2* — расслоенная структура.

В этой связи наиболее целесообразно разделить всевозможные структуры течения смеси на отдельные зоны в зависимости от наличия и поведения границы раздела фаз газ — жидкость. При таком принципе разделения все структуры течения, присущие потокам в горизонтальных и наклонных трубах, можно сгруппировать по зонам:

а) зона расслоенного (разделенного) течения с гладкой и волнистой границей раздела фаз;

б) зона кольцевого течения;

в) зона пробкового течения (эта зона объединяет все формы течения без четкой границы раздела фаз).

Аналогично для вертикальных труб все структуры течения можно разделить на две зоны: а) кольцевого течения и б) пробкового течения.

Необходимость разделения структур течения на зоны по принципу поведения границы раздела фаз обусловливается еще и тем, что при искусственном изменении структуры течения изменяется значение потерь напора на трение при постоянных значениях давления, расхода смеси и расходного газосодержания. Опыты, проведенные на горизонтальном трубопроводе при движении по нему воздухо-водяной смеси, показали, что искусственный перевод расслоенной структуры течения в пробковую путем диафрагмирования выходного сечения приводит к 2—3-кратному увеличению средней величины потерь напора на трение.

На рис. 38 показано, как с переходом пробковой структуры течения в расслоенную резко снижается перепад давления на трение и меняется ход кривых, характеризующих темп падения давления при изменении расходного газосодержания и фиксированных значениях числа Fr_c.

Это явление можно объяснить следующим. Переход расслоенного режима течения смеси в пробковый сопровождается некоторым увеличением истинного газосодержания из-за перераспределения газовой фазы в смеси и увеличения омываемой жидкостью поверхности трубы.

Увеличение истинного газосодержания приводит, с одной стороны, к увеличению истинной средней скорости жидкости вследствие постоянства расхода смеси и расходного газосодержания, а, с другой — к увеличению площади поверхности, смоченной жидкостью, вследствие пробковой структуры течения, характеризующейся наличием стабильной жидкостной пленки на всей внутренней поверхности трубы.

С появлением такой пленки на поверхности, которая при расслоенной структуре течения омывалась газом, несколько увеличиваются касательные напряжения в этих местах и, следовательно, возрастают суммарные касательные напряжения на всей внутренней поверхности трубы. Вместе с тем, необходимо отметить следующий характерный факт. Внутри пробковой зоны течения газо-жидкостной смеси, объединяющей пузырьковый, эмульсионный, снарядный и некоторые другие структуры течения, для которых характерно отсутствие четкой границы раздела фаз, мы не наблюдаем скачков давления при переходе от одной структуры течения к другой. Происходит лишь естественное уменьшение градиента давления на измерительном участке с увеличением расходного газосодержания при $Fr_c = idem$.

Следовательно, суммарные касательные напряжения, возникающие на стенках трубы в результате движения газо-жидкостной смеси, существенно зависят от структуры течения. Значит, форма математической записи не может быть единой, поскольку каждой из структур соответствует своя определенная физическая модель.

Поструктурное изучение газо-жидкостных потоков, как уже сказано во введении, кроме перечисленных достоинств, дает возможность построить полуэмпирические турбулентные теории. Первый шаг в этом направлении был сделан в гл. 3.

Ряд экспериментов позволил авторам построить специальную диаграмму для определения границы перехода расслоенного течения с гладкой или волновой поверхностью раздела в пробковое течение, объединяющее всевозможные структуры газо-жидкостных потоков, не имеющих четкой границы раздела фаз. Диаграмма соответствует течению газо-жидкостных смесей по горизонтальным трубам (рис. 39).

Для наклонных труб при нисходящем течении газо-жидкостной смеси граница раздела перемещается влево в зависимости от угла наклона трубы к горизонту (рис. 40). Как и следовало ожидать,

наиболее существенно влияние угла наклона сказывается при небольших значениях критерия Fr_c, что соответствует умеренным скоростям движения смеси, при которых весьма существенно проявляется действие сил свободного падения.

Представленное на рис. 40 семейство кривых, соответствующее линиям раздела зон пробкового и расслоенного течений для труб с различным углом наклона, может быть объединено в одну кривую в координатах $\sqrt{Fr_c/Fr_0}$ и β, где Fr_0 соответствует тому предельному значению скорости смеси, при которой во всей зоне существования двухфазного потока ($0 \leqslant \beta \leqslant 1$) наблюдается расслоенный режим течения смеси.

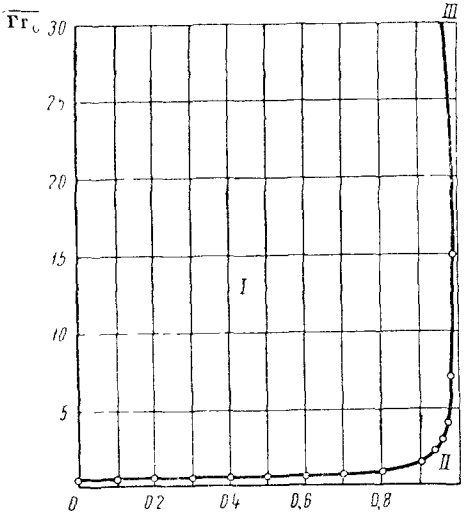


Рис. 39. Структурная диаграмма видов потоков для горизонтального трубопровода.

I — пробковая, II — расслоенная, III — кольцевая

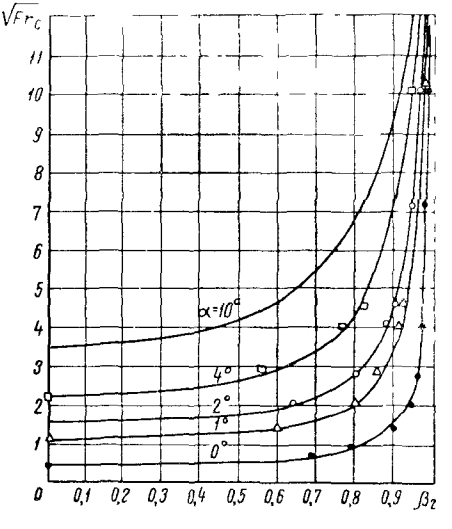


Рис. 40. Влияние угла наклона трубопровода на расположение границы раздела зон с расслоенной и пробковой структурами потока.

Значение Fr_0 может быть определено из эмпирической зависимости

$$Fr_0 = 0{,}2 + 2i/\lambda, \qquad (206)$$

где $\lambda = \lambda(Re_1, \varepsilon)$ — коэффициент гидравлического сопротивления; $i = (\Delta H/\Delta z)$ — геометрический уклон, численно равный гидравлическому $\Delta p_т/\gamma_1 \Delta z$ при безнапорном течении жидкости в наклонном трубопроводе.

Таким образом, выражение $2i/\lambda = 2\Delta p_т/\lambda\gamma_1 \Delta z = \bar{w}_1^2/gD$ соответствует числу Fr, определенному по максимальной приведенной скорости безнапорного течения жидкости в наклонном трубопроводе.

На рис. 41 видно, что экспериментальные точки для нисходящего течения газо-жидкостной смеси по трубам с различным углом наклона

хорошо согласуются с кривой, описываемой эмпирическим уравнением:

$$Fr_c = Fr_0 \left(e^{-2{,}5\beta_2}/\beta_1^2\right). \qquad (207)$$

Следовательно, для всех значений $Fr_c \geqslant [0{,}2 + (2i/\lambda)]\,(e^{-2{,}5\beta_2}/\beta_1^2)$ будем иметь пробковый режим течения смеси, а при $Fr_c < [0{,}2 + (2i/\lambda)]\,(e^{-2{,}5\beta_2}/\beta_1^2)$ — расслоенный с гладкой или волновой поверхностью раздела.

Исследования Худендора [98] показали, что изменение вязкости жидкости от 1 до 25 *спз* существенно не повлияло на расположение границы раздела зон при течении газо-жидкостных смесей в трубах диаметрами 25—140 *мм*, а влияние диаметра в достаточной степени может быть учтено критерием Fr_c.

Таким образом, зоны существования двух наиболее распространенных и обширных структур течения смеси — пробковой и расслоенной — разделены кривой, описываемой эмпирическим уравнением

$$Fr_c = [0{,}2 + (2i/\lambda)]\,(e^{-2{,}5\beta_2}/\beta_1^2), \qquad (208)$$

где $i = \Delta H/\Delta z = \sin\alpha$, α — угол между осью трубы и горизонталью.

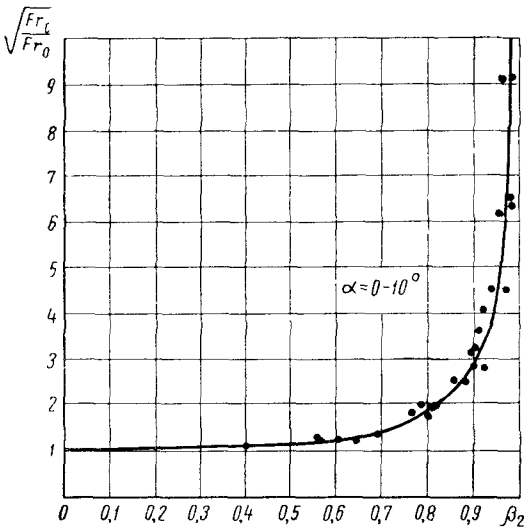


Рис. 41. Обобщенная структурная диаграмма для горизонтальных и наклонных (нисходящих) труб.

М. А. Мологин специально исследовал формы течения газо-жидкостных смесей и скоростей перехода из пробкового в расслоенное течение в горизонтальных трубах. Нами при построении структурных диаграмм, приведенных на рис. 36, 39 и 41, и, следовательно, эмпирической зависимости (208) использованы его данные.

Зону перехода расслоенного течения в пробковое также можно определить, используя полуэмпирическое решение (164) и (165).

Задаваясь различными значениями β при данных ρ и D, можно найти φ, а затем $Fr_{кр}$, определяющий границу перехода. Пусть, например, $\rho = 0{,}0012$, $D = 75$ *мм*. Тогда получим следующие значения:

β_2 . . .	0	0,20	0,4	0,60	0,8	1
$Fr_{кр}$ . . .	0,42	0,55	0,8	1,25	2,3	∞

Сравнение этого расчета с данными эксперимента (рис. 36, 37 и 39) показывает, что полуэмпирическая теория может быть использована для ориентировочного расчета границы перехода от разделенного режима к пробковому при течении смеси с любыми физическими свойствами ее компонентов.

Движение двухфазных жидкостей в горизонтальных и наклонных трубопроводах характеризуется еще одной, так называемой кольцевой, структурой течения смеси (см. рис. 37). Область ее менее обширная, и существует она, как показали исследования [24, 25, 78, 92], лишь при высоких скоростях движения смеси ($Fr_c > 300$) и большом газосодержании ($\beta_2 > 0{,}95$). Это объясняется высокой степенью турбулизации и большой кинетической энергией газового потока, способного изменить форму поверхности раздела газ — жидкость.

Кольцевой структуре течения предшествует расслоенная с волновой границей раздела поверхности. По мере увеличения скорости газового потока зона волновой структуры расширяется вследствие того, что силы взаимодействия фаз на поверхности раздела выше сил поверхностного натяжения.

Разрушение поверхности раздела проявляется в развитии процесса срыва пленки жидкости с гребней волн. Этот процесс возрастает с увеличением скорости газовой фазы. Содержание жидкости в газовой фазе при высокой степени турбулизации последней создает условия для переноса взвешенных частиц жидкости, часть из которых при соприкосновении с внутренней поверхностью трубопровода остается на ней вследствие проявления сил сцепления жидкости с поверхностью твердого тела.

Осаждающиеся на стенки трубы частицы со временем образуют непрерывную жидкостную пленку, которая под действием газовой фазы движется вдоль образующей трубы.

Жидкостная пленка образуется сначала на боковой поверхности трубы, примыкая непосредственно к основной массе жидкости, движущейся по нижней образующей ее с волнистой поверхностью раздела. Затем по мере увеличения скорости газовой фазы она смыкается, образуя непрерывное жидкостное кольцо с различной толщиной пленки по периметру.

Асимметричность жидкостного кольца может быть выправлена лишь при дальнейшем увеличении скорости движения газового ядра потока. Выравнивание толщины пленки жидкостного кольца по мере увеличения скорости газовой фазы объясняется тем, что процесс срыва пленки с поверхности жидкости протекает неодинаково по периметру кольца. Дело в том, что на интенсивность срыва пленки с поверхности жидкости, помимо физических свойств жидкости, существенное влияние оказывает толщина движущейся пленки. Доказательством этого является рис. 42, где представлены результаты исследований Ван Розума [93]. Изменение толщины слоя жидкости (до некоторого предела) оказывает существенное влияние на значение критической скорости набегания газа, при которой начинается срыв пленки с поверхности жидкости. Для пленки

жидкости, толщина которой превышает 5—10 *мм*, критическая скорость набегания газа полностью определяется физическими свойствами жидкости.

Ван Розум широко исследовал влияние физических свойств жидкости на процесс срыва пленки с поверхности движущегося слоя. Исследование проведено на трубопроводе прямоугольного сечения, что позволило с большой точностью измерять толщину движущегося

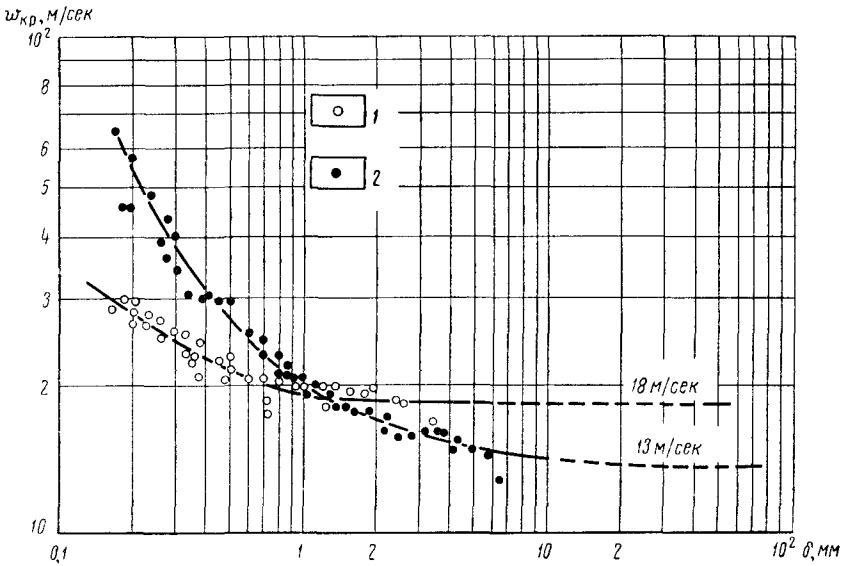


Рис. 42. Зависимость критической скорости набегания газа от толщины пленки жидкости. По данным работы [93].

1 — масло; *2* — вода. $\mu_1 = 16$ *спз*.

слоя жидкости; производились необходимые измерения гидродинамических величин, характеризующих течение, и визуальные наблюдения.

Исследованию были подвергнуты жидкости с различными физическими свойствами: вязкостью от 1 до 51 *спз*, поверхностным натяжением от 30 до 73 *дин/см*, плотностью 0,85—1,0 *г/см*^{3}. Результаты экспериментальных данных были представлены в координатах

$$\mathrm{We} = \rho_1 w_{от}^2 \delta/\sigma \quad \text{и} \quad S = w_{от}\mu_1/\sigma$$

в виде семейства кривых, каждая из них соответствовала определенным физическим свойствам жидкости.

Обработка экспериментальных данных Ван Розума в координатах S (параметр предложен Ван Розумом и может быть определен как $S = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{We}$ и $w_{от}\,[(\rho_1 - \rho_2)/g\sigma]^{0,25}$, позволила получить единую зависимость для критической скорости срыва пленки (δ пленки > 3 *мм*)

с поверхности жидкости и тем самым разделить зону разрушения поверхности раздела и устойчивого волнового течения (рис. 43).

Безразмерный комплекс $w_{от}[(\rho_1-\rho_2)/g\sigma]^{0,25}$, являясь совокупностью критерия Fr_c (характеризующего поведение границы раздела) и критерия Вебера в виде $We = \frac{g(\rho_1-\rho_2)l^2}{\sigma}$ (представляющего собой соотношение геометрической характеристики системы l и линейного размера свободных образований — волны, пузыри газа, капли), точнее отражает физическую суть процесса.

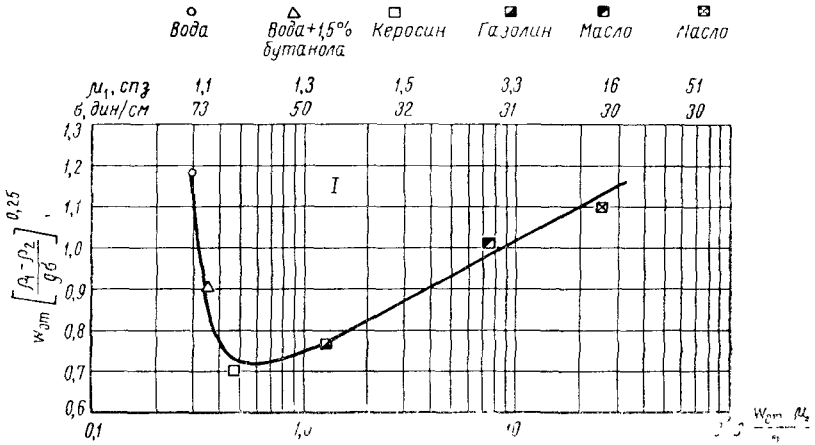


Рис. 43. Влияние физических свойств жидкости на критическую скорость набегания газа (срыв пленки с поверхности жидкости). По данным работы [93]

I — область срыва пленки с поверхности жидкости.

Учитывая изложенное выше, приходим к выводу, что необходимым условием появления кольцевой структуры течения смеси является относительная скорость газа, значение которой превышает критическую скорость срыва пленки с поверхности жидкости, т. е.

$$w_{от} = w_c\left[\frac{\beta_2}{\varphi_2} - \frac{\beta_1}{\varphi_1}\right] > w_{кр}, \qquad (209)$$

$$w_{кр} = f\left[\frac{w_{от}\mu_1}{\sigma},\ w_{от}\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{g\sigma}\right)^{0,25}\right], \qquad (210)$$

и определяется на основании данных рис. 43.

Взаимосвязь между расходным и истинным газосодержанием существенно влияет на величину относительной скорости движения фаз, но поскольку они связаны между собой определенной закономерностью, о чем будет сказано дальше, то расходное газосодержание β_2 может быть одним из параметров, при помощи которых определится зона существования кольцевой структуры течения смеси.

Графически область существования рассматриваемого вида течения газо-жидкостной смеси представлена на структурной диаграмме (см. рис. 37).

В заключение отметим, что область существования кольцевой структуры течения определена на основании исследований [24, 25, 98].

Анализ структурной диаграммы, определяющей области существования определенных форм течения газо-жидкостной смеси в трубах, свидетельствует о том, что для промышленных трубопроводов пробковая структура является наиболее распространенной формой течения смеси.

Однако это не означает, что остальные две структуры (расслоенная и кольцевая) не имеют самостоятельного значения.

Структуры газо-жидкостных потоков в вертикальных и наклонных трубах при восходящем течении смеси менее разнообразны, чем в горизонтальных. Так, например, в наклонных трубах практически полностью исчезает расслоенная структура, которая существует только при больших значениях β_2 и Fr_c и является по существу переходной формой от пробковой к кольцевой структуре.

Таким образом, для наклонных и вертикальных труб основными структурами течения являются пробковая и кольцевая.

При сопоставлении зон пробкового течения смеси в горизонтальных и наклонных (восходящих) трубах обращает на себя внимание некоторое изменение формы газовых включений с изменением угла наклона трубы к горизонту.

Если для горизонтальной трубы характерно неравномерное распределение фаз по сечению и газовые включения, располагаясь в верхней части трубы, имеют вытянутую форму с размытой передней частью, то с увеличением угла наклона газовая пробка занимает все бо́льшую часть сечения. В вертикальных трубах она заполняет почти все сечение трубы и головная часть принимает правильну́ю округлую форму, напоминающую головку снаряда.

Кольцевая структура течения в наклонных и вертикальных трубах характеризуется уменьшением асимметричности жидкостного кольца с увеличением угла наклона и несколько увеличенным содержанием жидкой взвеси в ядре газового потока. Однако основная масса жидкости движется все же в пленочном состоянии по периметру трубы.

ПУЛЬСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗО-ЖИДКОСТНЫХ СМЕСЕЙ В ТРУБАХ

Помимо многообразия структур, отличительной особенностью течения газо-жидкостной смеси в трубе являются высокие пульсации давления, вызванные наличием фаз с различными физическими свойствами, существованием относительной скорости движения компонентов, большой сжимаемостью газо-жидкостной смеси и другими причинами.

Среднюю за характерный промежуток частоту пульсаций n и удвоенную амплитуду a определяли мембранным пульсациометром, схема которого приведена на рис. 21, а на рис. 44 для примера приведены соответствующие осциллограммы. На основании такого рода данных строились графические зависимости $n(\beta)$ и $a(\beta)$ при $w_c = \text{idem}$ [43].

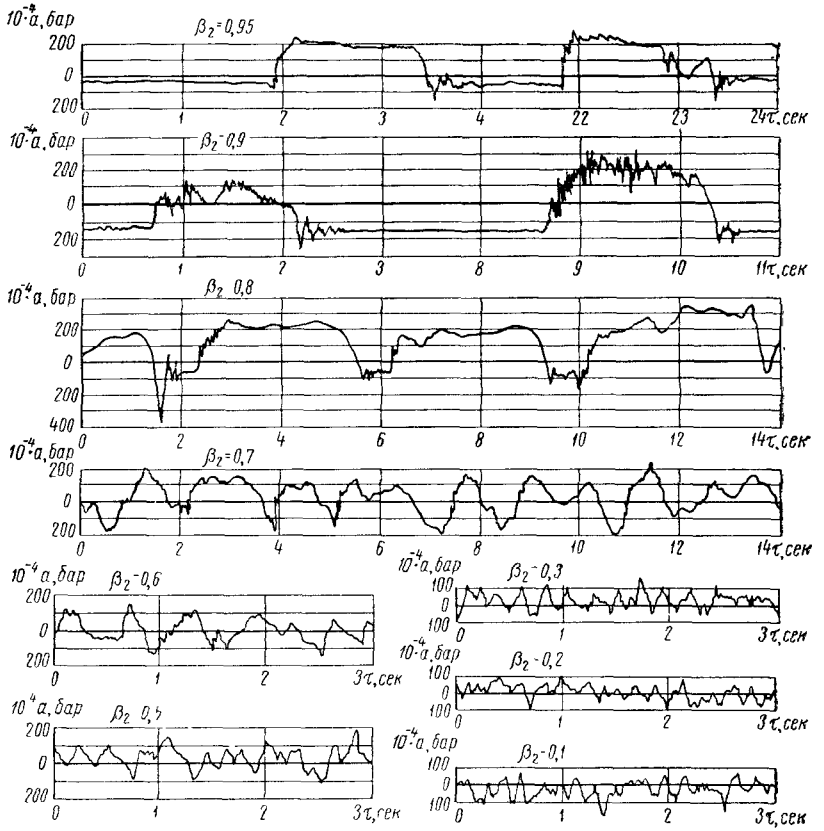


Рис. 44. Осциллограмма записи пульсаций давления в трубе $D = 75$ мм при $w_c = 3$ м/сек.

Согласно этим зависимостям частота и амплитуда пульсаций при повышении газосодержания вначале растут от нуля до максимального значения, затем падают до нуля при $\beta_2 \to 1$.

При заданной (обычно низкой) скорости смеси и вполне определенном газосодержании наступает спокойное разделенное течение, характеризующееся практическим отсутствием пульсаций.

С ростом $\mathrm{Fr_c}$ (возрастание скорости или уменьшение диаметра) частота и амплитуда пульсаций возрастают. Зависимости частоты

и амплитуды пульсаций существенно отличаются: наиболее высокие частоты имеют место в области низких газосодержаний ($\beta_2 \approx 0{,}22$), а наибольшие амплитуды — в области высоких газосодержаний ($\beta_2 \approx 0{,}9$). Последнее объясняется формой течения.

Пульсации давления волнового разделенного течения обусловливаются наибольшей относительной скоростью газа. Относительная скорость вызывает появление волн, бегущих с низкой частотой по поверхности раздела. Этому течению соответствуют пульсации низкой частоты и малой амплитуды.

По мере уменьшения газосодержания при постоянной скорости смеси частота прохождения волн растет слабо, а амплитуда волн возрастает значительно быстрее. Она достигает верхней образующей трубы, создавая жидкую пробку (поршень). При проталкивании этой пробки резко повышается давление, что влечет появление больших по амплитуде пульсаций. Число таких пробок увеличивается с уменьшением газосодержания, а давление для их проталкивания еще более возрастает.

При дальнейшем понижении газосодержания струя воды разрушает пузыри газа на более мелкие. Течение переходит в эмульсионное с наибольшей частотой пульсаций и малой амплитудой. Если газосодержание приближается к нулю, число пузырей резко снижается и пульсации, характерные для двухфазной жидкости, пропадают.

Несколько иные пульсации наблюдаются в вертикальной трубе при низких скоростях смеси, что объясняется отсутствием разделенного течения. Если для горизонтальных труб существует Fr_c, при котором отсутствуют пульсации, то для вертикальных течений пульсации давления наблюдаются при любых Fr_c.

Анализ опытных данных показывает, что частота пульсаций для горизонтальных труб описывается зависимостью вида (рис. 45)

$$N = \frac{D}{w_c - w_c'} n = f(\beta).$$

Здесь w_c' — такая скорость смеси, при которой не происходит пульсаций давления. Она определяется экспериментально. Если $w_c = \mathrm{idem}$, то при возрастании β_2 от нуля до единицы всегда можно найти такое значение w_c', при котором не происходит пульсаций давления. Вид функций $w_c'(\beta)$ представлен на рис. 46. Зависимость амплитуды пульсаций давления от газосодержания более сложного вида. Для труб четырех диаметров она показана на рис. 47, где A — приведенная удвоенная амплитуда (размах колебания давления), т. е.

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{w_c}{w_c'}\right)^2 - 1}} a.$$

Для замера пульсаций давления использовалось также устройство, состоящее из манометрической «трубки Бурдона», датчика

переменного сопротивления, представляющего собой тонкую каучуковую трубку, заполненную ртутью, моста постоянного тока, источника питания и записывающего устройства типа микроамперомилливольтметра с максимальной скоростью движения диаграммной бумаги 9,8 *м/ч* [39].

Давление из трубы через кольцевую камеру подводится к манометрической «трубке Бурдона», при выпрямлении которой растягивается петлеобразная каучуковая трубка и вследствие сужения

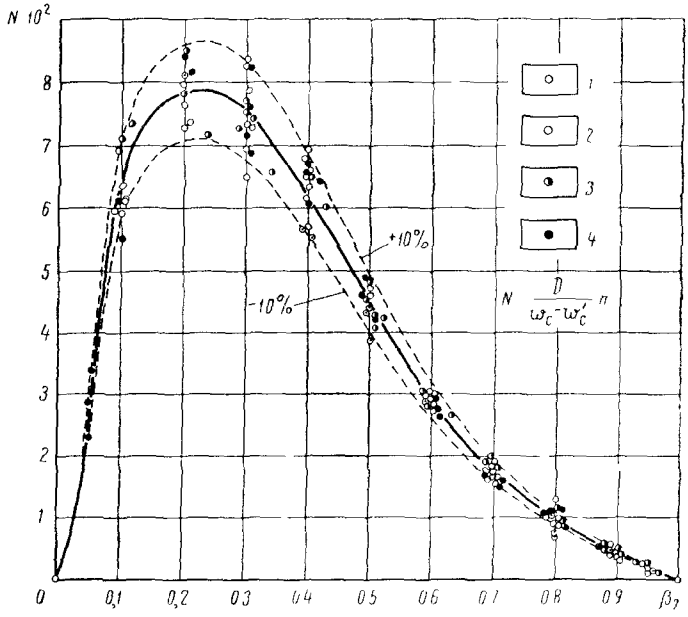


Рис. 45. Зависимость приведенной частоты пульсаций давления от β.

Горизонтальная труба диаметром *1* — 25,8 *мм*, *2* — 47,4 *мм*; *3* — 74,7 *мм*, *4* — 99,8 *мм*

живого сечения ртути, заполняющей трубку, увеличивается сопротивление.

Изменение сопротивления датчика фиксируется самопишущим многопредельным микроамперомилливольтметром на диаграммной бумаге.

Существенный недостаток данного устройства в том, что из-за большой инерционности вторичного прибора нельзя замерять пульсации, частота которых более 2—3 *гц*.

Но, как показали измерения, указанная частота пульсаций соответствует только пузырьковой зоне течения газо-жидкостной смеси.

Поскольку пульсации давления характеризуют степень турбулизации потока, которая в свою очередь зависит от скорости течения

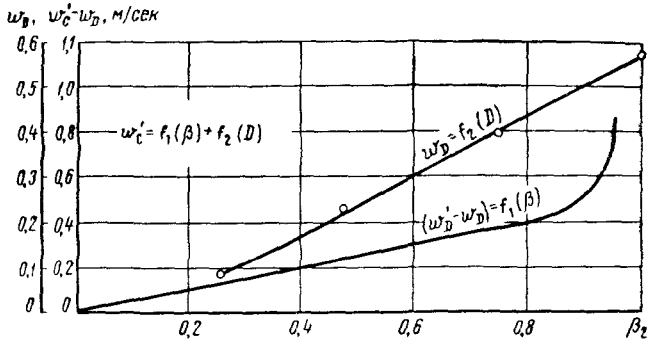


Рис. 46. Зависимость «беспульсирующей» скорости смеси w_c' от β и диаметра трубы $D \cdot 10^{-2}$ *мм*.

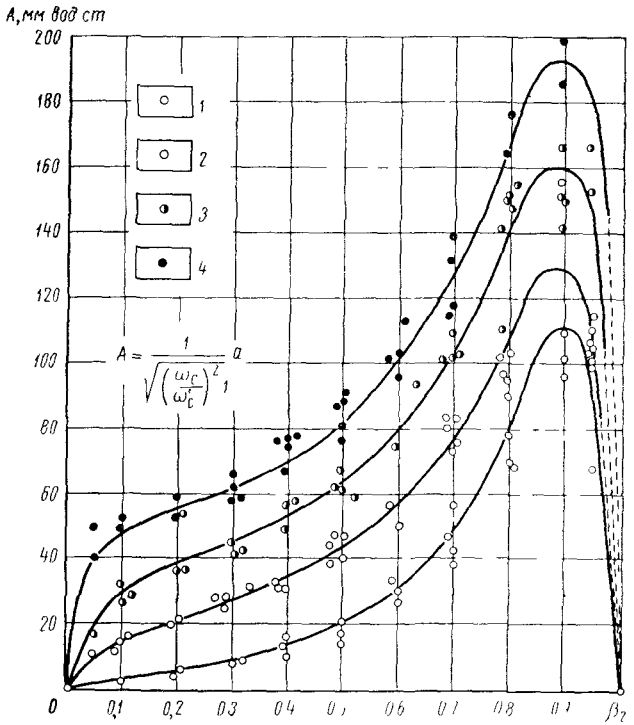


Рис. 47. Зависимость приведенной амплитуды пульсаций давления от газосодержания и диаметра трубопровода.

1 — D = 25,8 *мм*, *2* — D = 47,4 *мм*, *3* — D = 74,7 *мм*, *4* — D = = 99,8 *м*.

и физических свойств компонентов смеси, экспериментальное изучение пульсаций целесообразно проводить при постоянных значениях скорости смеси (или Fr_c = idem) и изменяющемся расходном газосодержании.

Пульсации давления были измерены при расходном газосодержании, изменяющемся в пределах $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, и закрепленных значениях $Fr_c = 0{,}8$, 2, 4, 8 и 16. Результаты измерений представлены на рис. 48, где абсолютные значения пульсаций давления даны в функции расходного содержания жидкости в смеси (β_1) и числа Fr_c.

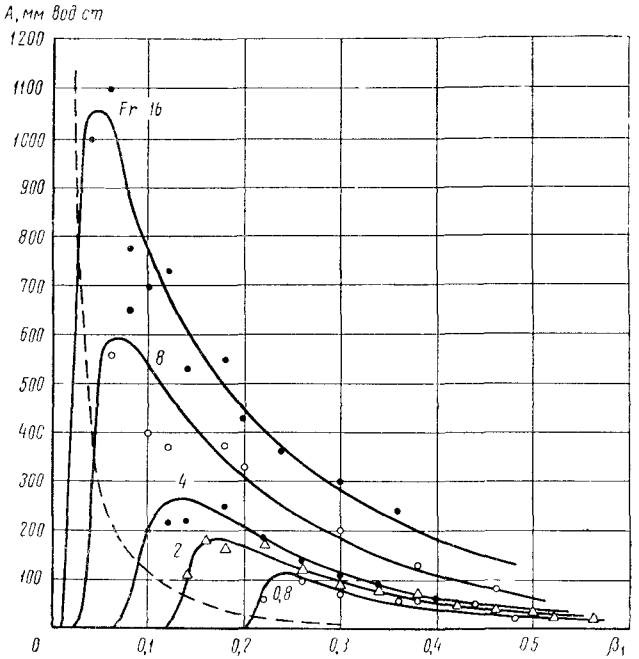


Рис. 48. Абсолютная амплитуда пульсации давления как функция Fr_c и β.

Семейство кривых на рис. 48 также свидетельствует о зависимости амплитуды пульсаций давления от структуры течения смеси, ее скорости и расходного содержания газа или жидкости в смеси.

Максимальные по амплитуде пульсации возникают в так называемой переходной области, где происходит смена структур и расслоенное с волновой поверхностью раздела течение переходит в пробковое.

Чередование жидкостных и газовых пробок, движущихся со скоростью, близкой к скорости смеси, но обладающих различной кинетической энергией из-за разной плотности, вызывает пульсации давления, частота которых соответствует чередованию жидкостных и газовых пробок, а амплитуда находится в определенной зависимости от ско-

рости течения смеси. Динамическая сила удара, возникающая при прохождении жидкостной пробки через точки замера давления, зависит в основном от скорости движения пробки, ее массы и, следовательно, от геометрических размеров, в частности, длины жидкостной пробки.

Если считать, что скорость движения жидкостных пробок приблизительно равна w_c, то максимальные по амплитуде пульсации давления должны соответствовать зоне неустойчивого пробкового течения, характеризующегося большим периодом пробкообразования и значительными размерами жидкостных включений.

Сказанное подтверждается результатами экспериментальных исследований (см. рис. 48), свидетельствующими о наличии максимальных пульсаций давления в той области пробковой структуры течения смеси, которая примыкает непосредственно к границе раздела пробковой и расслоенной форм течения (пунктирная линия) и является зоной неустойчивого пробкового течения.

С уменьшением расходного газосодержания число жидкостных пробок, проходящих в единицу времени, увеличивается, что приводит к увеличению частоты пульсаций, с одной стороны, и уменьшению амплитуды, с другой, вследствие уменьшения массы единичной жидкостной пробки.

Анализ пульсаций давления при движении газо-жидкостных смесей в трубах показывает, что пробковая и расслоенная структуры по своим внутренним гидравлическим характеристикам различны. Это еще раз подтверждает обоснованность деления течений на основные структурные зоны.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ИСТИННОГО ГАЗОСОДЕРЖАНИЯ ОТ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ КРИТЕРИЕВ

В общем случае течения газо-жидкостных смесей в трубах вследствие наличия относительной скорости движения фаз истинное газосодержание φ не равняется расходному, определяемому соотношением

$$\beta_2 = \frac{Q_2}{Q_c}.$$

Существование относительной скорости между фазами ($\varphi \neq \beta$) обусловлено большим различием физических свойств компонентов смеси и различным воздействием фаз друг на друга. Так, в частности, газовая фаза, кроме сил трения, вызванных наличием градиента давления вдоль направления движения, испытывает еще воздействие подъемной силы.

В большинстве случаев осредненная по занятому сечению скорость газовой фазы значительно превосходит соответствующую скорость жидкой фазы, т. е. $w_{от} = w_2 - w_1 > 0$.

Даже при течении газо-жидкостных смесей в горизонтальных трубах, несмотря на то, что газовая фаза под действием подъемной силы, направленной перпендикулярно движению потока, прижимается к верхней образующей трубы, средняя скорость движения газа значительно превышает среднюю скорость жидкости почти при всех режимах течения.

Исключением являются нисходящее течение смеси в наклонных трубах, где очень сильно влияние сил свободного падения на скорость течения жидкости, и горизонтальное течение смеси с малым газосодержанием в трубах, когда газовой фазе, занимающей незначительную долю сечения, приходится тратить энергию на преодоление сил трения о смоченную поверхность. В этом случае нарушаются пропорции в соотношениях площадей и смоченных периметров (гидравлических диаметров) газовой и жидкой фаз.

Поскольку почти при всех режимах течения смеси в трубопроводах существуют относительные скорости движения фаз, необходимо

изучить закономерности изменения истинного газосодержания; без знания этих закономерностей нельзя создать обоснованные методы расчета гидравлических сопротивлений, что было доказано в гл. 1 [формулы (53), (54), (56)].

ЗАВИСИМОСТЬ ИСТИННОГО ГАЗОСОДЕРЖАНИЯ ОТ КРИТЕРИЕВ μ, ρ, Re, We, Fr_c, β

В соответствии с принятой методикой постановки эксперимента (см. гл. 4) авторы в результате экспериментальных исследований получили зависимости истинного газосодержания от определяющих

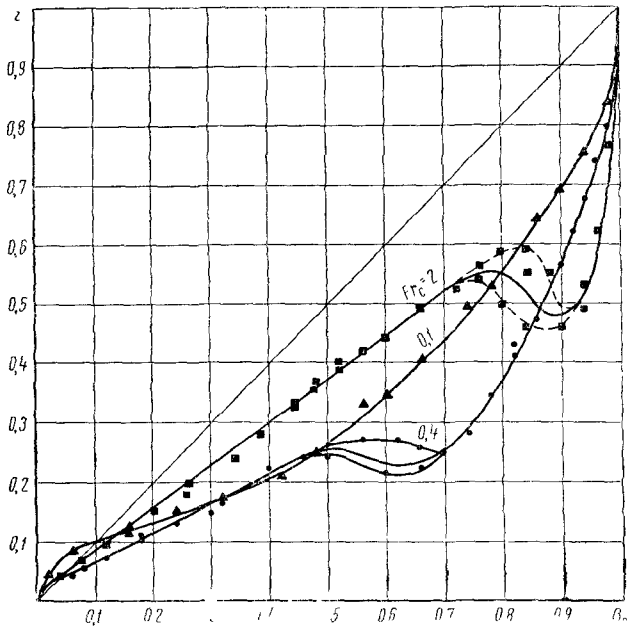


Рис. 49. Закономерность изменения истинного газосодержания от расходного для Fr_c, равного 0,1; 0,4; 2. По данным работы [39].

критериев при движении паро- или газо-водяной смеси в горизонтальных, наклонных и вертикальных трубах при изотермическом режиме течения без фазовых превращений.

Первоначально были закреплены значения следующих параметров: $\dot{\rho}$, $\dot{\mu}$, We, cos (g, z), что обеспечивалось проведением опытов на строго горизонтальном трубопроводе при давлении (~ 1 *бар*) с использованием в качестве компонентов смеси воды и воздуха.

В результате этого параметрическое уравнение (143) существенно упрощается и принимает вид

$$\varphi = (\beta, Fr_c, Re_c). \qquad (211)$$

Исследование этого уравнения проводилось путем постановки серии опытов, каждой из которых соответствовало определенное значение числа Fr_c, изменяющегося от 0,1 до 1000, а расходное газосодержание менялось от нуля до единицы с шагом 0,02, т. е. каждая серия состояла из 50 опытов. Это позволяло решать одновременно несколько задач: установить закономерности изменения истинного газосодержания от расходного, изучить структуры течения газо-жидкостных смесей в трубах и границы раздела между

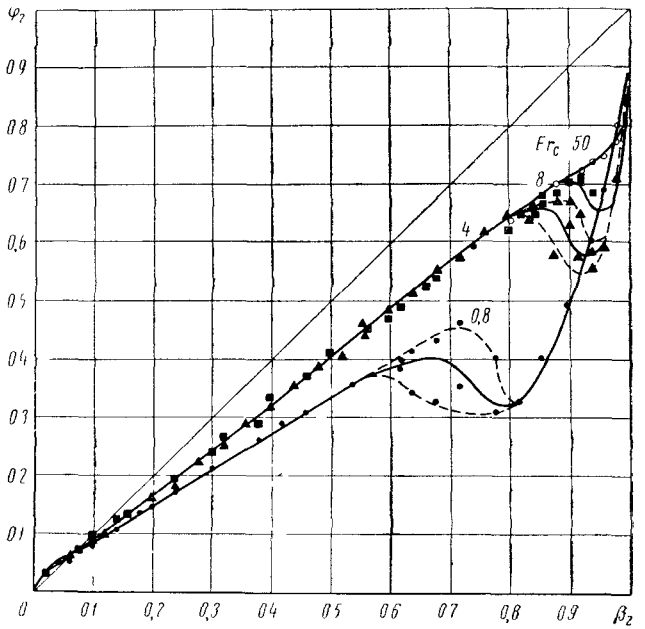


Рис. 50. Закономерность изменения истинного газосодержания от расходного для Fr_c, равного 0,8; 4, 8 и 50. По данным работы [39].

структурными зонами, а также свести к минимуму случайные ошибки, сопутствующие любому эксперименту.

Опыты проведены для значений $Fr_c = 0{,}1$, 0,4, 0,8, 2, 4, 8, 16, 20, 50, 100, 300, 500, 1000. Результаты их представлены частично на рис. 49 и 50 в координатах φ и β по значениям Fr_c, причем влияние критерия Re_c, если оно проявляется, неявно находится в каждой точке, так как критерий Re_c меняется с изменением расходного газосодержания β_2 и числа Fr_c.

Анализ кривых на рис. 49 и 50 свидетельствует о четкой зависимости истинного газосодержания от расходного, числа Fr_c и, возможно, критерия Re_c, поскольку, как было уже отмечено, числовое значение его менялось в процессе опытов.

Чтобы определить степень влияния каждого из указанных критериев, достаточно оценить влияние одного из них, например, Re_c, на истинное газосодержание. Для этого оценим сначала влияние приведенной вязкости $\dot{\mu}$ и приведенной плотности $\dot{\rho}$.

Экспериментальная оценка влияния критерия $\dot{\mu}$ на истинное газосодержание

Влияние критерия $\dot{\mu}$ на истинное газосодержание оценивалось в работе [37] путем сопоставления семейства кривых $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c, Re_c)$, каждой из которых соответствовало свое значение параметра μ.

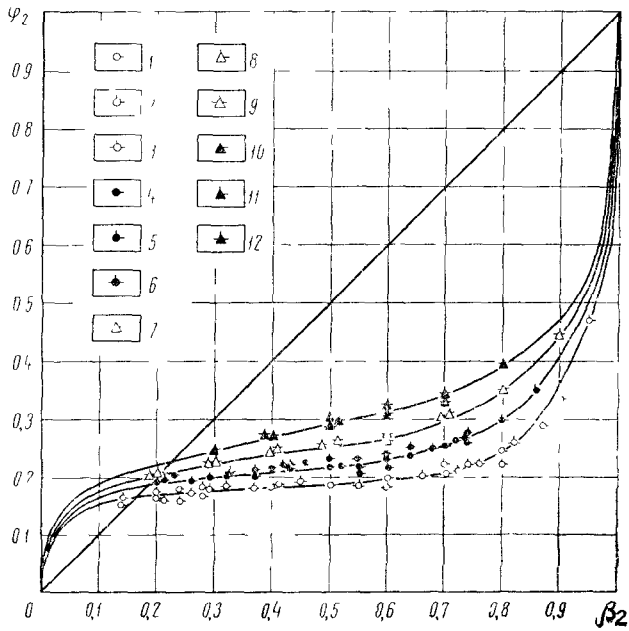


Рис. 51. Влияние параметра $\dot{\mu}$ на истинное газосодержание.

1—3 — $Fr_c = 0{,}1$, $\dot{\mu} = 0{,}0036$, $0{,}0018$ и $0{,}0009$ соответственно, *4—6* — $Fr_c = 0{,}2$ при тех же значениях $\dot{\mu}$, *7—9* — $Fr_c = 0{,}4$ при тех же значениях $\dot{\mu}$, *10—12* — $Fr_c = 0{,}8$ при тех же значениях $\dot{\mu}$.

Постоянство значения критерия Re_c в каждой фиксированной точке ($\beta = idem$, $Fr_c = idem$) кривой $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c, Re_c)$ обеспечивалось изменением диаметра трубопровода и вязкости жидкостной составляющей смеси. Например, одновременное увеличение диаметра трубопровода с 24 до 56 *мм* и повышение вязкости жидкости в пять раз позволило поддержать числовое значение критерия Re_c почти неизменным. Чтобы изменить вязкость жидкостной составляющей смеси — водно-глицеринового раствора, меняли его концентрацию.

Концентрация глицерина в растворе определялась из расчета получения вязкости жидкости 5, 10, 20 *спз*. Таким образом, были

соблюдены все условия, необходимые для оценки влияния $\dot{\mu}$ на истинное газосодержание, ибо в процессе сопоставления семейства кривых $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c, Re_c)$ всегда можно найти совокупность точек, в которых выполняется условие $\varphi = idem$, $Fr_c = idem$, $Re_c = idem$ при переменном значении исследуемого параметра $\dot{\mu}$.

На рис. 51 представлена графическая форма зависимости $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$ для смесей с различным значением вязкости жидкого компонента, анализ которой позволит установить связь истинного газосодержания с критерием $\dot{\mu}$. Однако, прежде чем приступить к анализу данных рис. 51, отметим, некоторое несоответствие зависимостей $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$, установленных на этом рисунке и рис. 49 и 50.

Несколько отличный ход кривых $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$ на рис. 51 объясняется особенностью конструкции экспериментальной установки, имеющей относительно небольшую длину опытного участка и местные сопротивления на входном и выходном участках трубопровода, вызванных необходимостью установки поворотного колена на 180° и отсекающего клапана с несколько заниженным проходным сечением.

Несмотря на то, что указанные особенности экспериментальной установки повлияли на общий ход кривых $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$, они все же не явились помехой для оценки влияния изменения параметра $\dot{\mu}$ на значение истинного газосодержания, поскольку все опыты этой серии были проведены в идентичных условиях.

Сплошные линии на рис. 51 отражают зависимость истинного газосодержания от расходного и критерия Fr_c, полученную на основании опытных данных по течению воздухо-водяной смеси в горизонтальных трубах диаметром в 56 и 24 *мм*, а точки относятся к жидкостям различной вязкости.

Опытные точки, относящиеся к течению системы воздух — вязкая жидкость ($\mu_1 = 5$ *спз*), хорошо группируются вдоль кривой, отражающей аналогичную зависимость для воздухо-водяной смеси. Указанная сходимость экспериментальных данных по жидкостям различной вязкости свидетельствует об отсутствии влияния пятикратного изменения критерия $\dot{\mu}$ на истинное газосодержание, так как в любой точке кривой одновременно с выполнением условий $\varphi = idem$, $Fr_c = idem$, $Re_c = idem$, $\beta = idem$ мы имеем два значения параметра $\dot{\mu}$ (0,0180 и 0,0036).

Отметим, что увеличение вязкости жидкостной составляющей смеси до 20 *спз* не оказало заметного влияния на истинное газосодержание, что также подтверждается данными рис. 51.

Сопоставление опытных данных по течению газо-жидкостных смесей с различными значениями приведенной вязкости $\dot{\mu}$ позволяет считать экспериментально доказанным независимость истинного газосодержания от параметра μ при изменении последнего от 0,0009 до 0,0180.

Зависимость истинного газосодержания от критерия $\dot{\rho}$

Чтобы определить влияние критерия $\dot{\rho}$ на истинное газосодержание, необходимо провести серию опытов с изменяющимся значением приведенной плотности.

На рис. 52 приведены экспериментальные данные работы, в которой p изменялось от 1 (сплошные линии) до 5 *бар* (опытные точки).

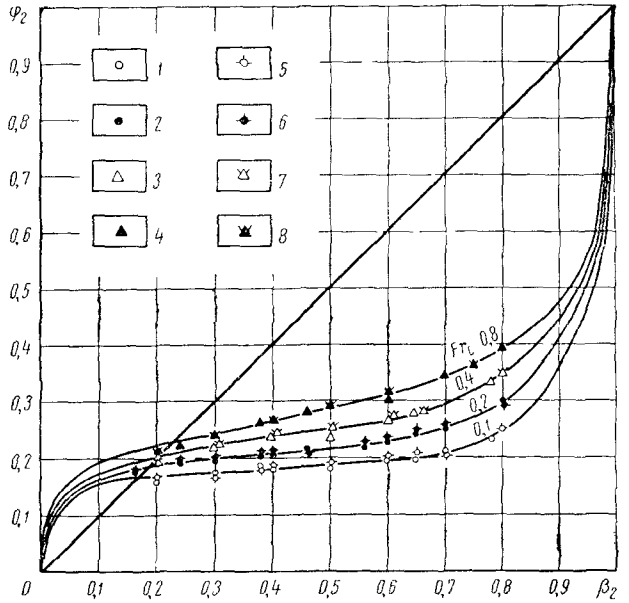


Рис. 52. Влияние критериев $\dot{\rho}$ и We на истинное газосодержание.

1—4 — $\sigma = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ *н/м*, *5—8* — $\dot{\rho} = 6 \cdot 10^{-3}$.

Эти данные говорят о том, что в указанных пределах изменения давления и числа Фруда изменение $\dot{\rho}$ не оказывает влияния на истинное газосодержание φ. Чтобы установить связь между истинным газосодержанием φ и критерием $\dot{\rho}$ в более широких пределах изменения параметров, воспользуемся результатами экспериментальных исследований К. Шварца [91] по течению паро-водяной смеси в горизонтальных трубах диаметром 60 *мм* при значениях избыточного давления 20—80 *бар* и данных наших исследований, относящихся к течению воздухо-водяной смеси при небольших значениях избыточного давления (рис. 53).

Из данных рис. 53 видно, что опытные точки, полученные при атмосферных условиях экспериментирования, хорошо согласуются с данными, относящимися к давлению 5, 20, 40, 60 и 80 *бар*. Это

свидетельствует о том, что при указанных изменениях давления параметр $\dot{\rho}$ не влияет на истинное газосодержание.

Аналогично можно сопоставить результаты экспериментов [3, 4, 23], относящихся к течению газо-жидкостных смесей в вертикальных трубах различных диаметров при изменении давления от атмосферного до 120 *бар*.

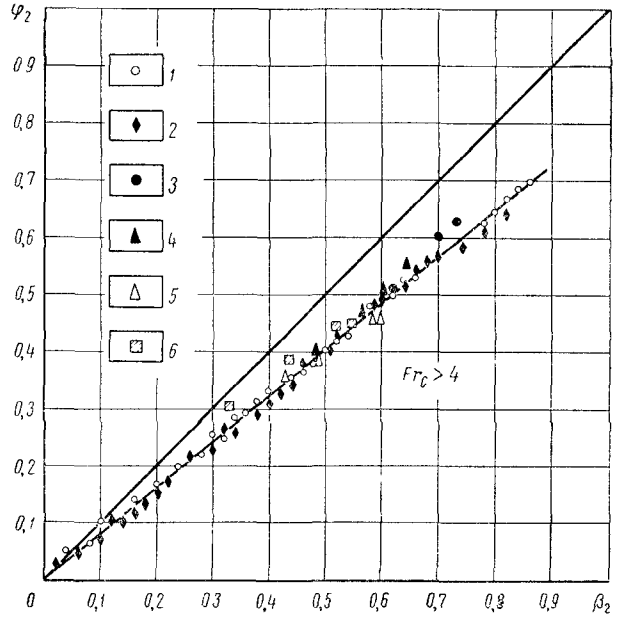


Рис. 53. Влияние критерия $\dot{\rho}$ на истинное газосодержание (горизонтальная труба диаметром 26 и 56 *мм*, вертикальная труба диаметром 60 *мм*).

Опыты ВНИИГаза: *1* — $p = 1$ *бар*; *2* — $p = 5$ *бар*. Опыты К. Шварца: *3* — $p = 20$ *бар*; *4* — $p = 40$ *бар*; *5* — $p = 60$ *бар*; *6* — $p = 80$ *бар*.

Результаты сопоставления экспериментальных данных для значений критерия $Fr_c > 4$ представлены на рис. 54. Они также свидетельствуют об отсутствии влияния параметра $\dot{\rho}$, что подтверждается результатами измерений в пределах изменения $0{,}0012 \leqslant \dot{\rho} \leqslant 0{,}103$.

Однако отметим, что экспериментально установленный факт, свидетельствующий об отсутствии влияния параметра $\dot{\rho}$ на закономерности изменения истинного газосодержания, носит частный характер, поскольку в данных исследованиях значение параметра $\dot{\rho}$ все же довольно низкое (меньше 0,10), а влияние исследуемого параметра на φ, по-видимому, наиболее существенно сказывается при значениях близких к единице. Для двухфазных однокомпонентных жидкостей (жидкость и ее пар) условие $\dot{\rho} \to 1$ означает

сближение физических свойств жидкости и пара и в пределе при $\dot{\rho} = 1$ имеет место однородная жидкость.

Естественно, при больших значениях $\dot{\rho}$, когда компоненты газожидкостной смеси по своим физическим свойствам близки друг другу, относительная скорость движения фаз минимальна, т. е. $\varphi \to \beta$.

При химической неоднородности компонентов смеси условие $\dot{\rho} \to 1$ также должно означать уменьшение относительной скорости,

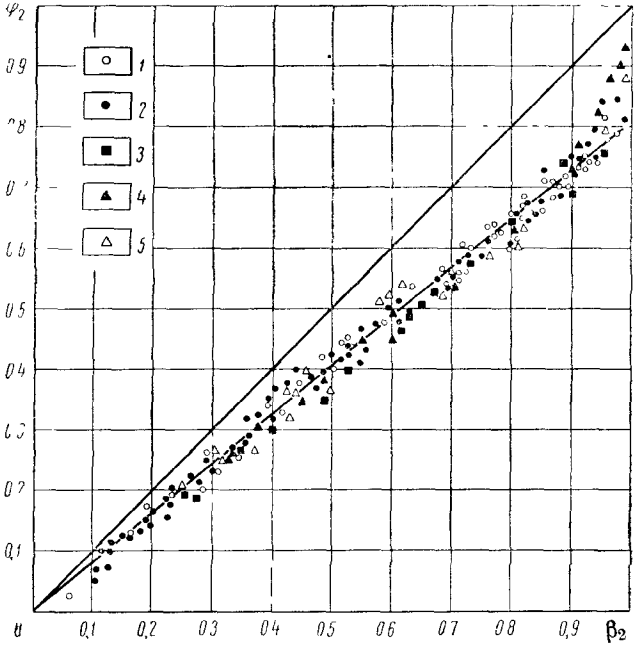


Рис. 54. Влияние критерия $\dot{\rho}$ на истинное газосодержание (вертикальные трубы диаметром $^1/_2$—3″).

1 — $p = 1{,}5$ *бар* (опыты Г. С. Лутошкина); *2* — $p = 1{,}5$ *бар* (опыты А. А. Арманда); *3* — $p = 40$ *бар*; *4* — $p = 70$ *бар*; *5* — $p = 120$ *бар* (опыты ЭНИН).

так как при принятых ограничениях единственным источником возникновения относительной скорости движения фаз будет различная вязкость компонентов газо-жидкостной смеси.

На основании изложенного можно заключить, что экспериментально доказана независимость истинного газосодержания от параметра $\dot{\rho}$ при значениях последнего меньше 0,10. При больших значениях исследуемого параметра ($\dot{\rho} \to 1$) установление закономерностей истинного газосодержания требует постановки специального исследования.

Экспериментальная оценка влияния критерия Re на истинное газосодержание

В исследовании Н. И. Семенова и А. А. Точигина [44] на основании точного решения для расслоенного ламинарного течения газо-жидкостной смеси доказано, что критерий Re не влияет на истинное газосодержание. Из-за того, что получить точное решение невозможно для турбулентного течения смеси, влияние критериев μ и Re на истинное газосодержание может быть оценено только экспериментальным путем.

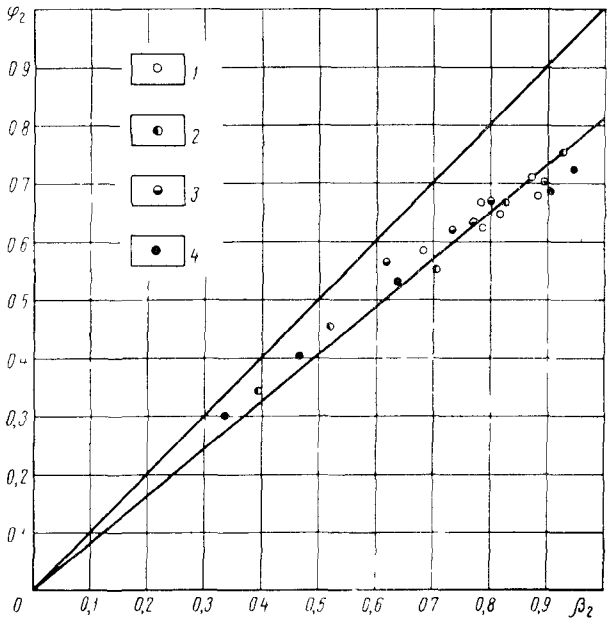


Рис. 55. Влияние диаметра трубы на истинное газосодержание.
1 — $D=1{,}5''$, *2* — $D=2''$, *3* — $D=2{,}5''$, *4* — $D=3''$.

Заметим сначала, что влияние диаметра трубопровода на истинное газосодержание удовлетворительно выражается критерием $\mathrm{Fr_c} = w_c/gD$. На рис. 55 представлены обработанные авторами опытные данные Г. С. Лутошкина для течения газожидкостных смесей в вертикальных трубах при $\mathrm{Fr_c} = 14$. На основании этих данных и результатов, полученных авторами и приведенных на рис. 53 (сплошные линии относятся к опытным данным по течению воздухо-водяной смеси в горизонтальных трубах диаметром около 1 и 2″), можно заключить, что влияние диаметра выражается через критерий Фруда. Это утверждение, естественно, можно считать экспериментально проверенным только в пределах использованных диаметров труб (1—3″).

Теперь перейдем к экспериментальной оценке влияния критерия Re_c на истинное газосодержание при турбулентном течении смеси.

Как было показано, при изменении вязкости жидкости в двадцать раз (от $\mu_1 = 1$ *спз* до $\mu_1 = 20$ *спз*), давления более чем в сто раз (от $p = 1$ *бар* до $p = 120$ *бар*, $0{,}001 \leqslant \dot{\rho} \leqslant 0{,}1$) и диаметра трубопровода в три раза при $\beta = \text{idem}$ и $Fr_c = \text{idem}$ истинное газосодержание остается постоянным.

Если взять Re_c в виде (132)

$$Re_c = \frac{\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2}{\varphi_1\mu_1 w_1 + \varphi_2\mu_2 w_2} D = \sqrt{Fr_c g}\, D^{3/2} \frac{(\rho_1\beta_1/\varphi_1) + (\rho_2\beta_2/\varphi_2)}{\mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2},$$

или в виде (140″)

$$Re_c' = \left(\frac{\beta_1}{\nu_1} + \frac{\beta_2}{\nu_2}\right) w_c D = \sqrt{Fr_c g}\, D^{3/2} \left(\frac{\beta_1\rho_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2\rho_2}{\mu_2}\right),$$

и общую функцию вида

$$Re_c = f(Fr_c, D, \beta, \varphi, \dot{\mu}, \dot{\rho}), \qquad (211')$$

то на основании сказанного выше можно сделать следующий вывод: если на семействе кривых (211′) взять точку $\varphi = \text{idem}$, $\beta = \text{idem}$, $Fr_c = \text{idem}$, то изменением D, $\dot{\mu}$, $\dot{\rho}$ можно добиться того, что Re_c изменит свое числовое значение на три порядка (10^3), а это означает, что истинное газосодержание не зависит от Re_c.

Зависимость истинного газосодержания от критерия We

Влияние критерия We на истинное газосодержание в достаточной степени исследовано в работах Г. С. Лутошкина и В. А. Мамаева, посвященных течению газо-жидкостных смесей в горизонтальных и вертикальных трубах.

Результаты этих исследований, свидетельствующие об отсутствии влияния критерия We на истинное газосодержание при умеренных значениях чисел Fr_c, представлены на рис. 52. Из данных этого рисунка видно, что максимально возможное снижение поверхностного натяжения системы вода — воздух с $7{,}2 \cdot 10^{-3}$ до $2{,}3 \cdot 10^{-3}$ *н/м* не оказало влияния на закономерность изменения истинного газосодержания. Опытные точки, относящиеся к значению $\sigma = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ *н/м*, хорошо согласуются с кривой $\varphi = \varphi(\beta)$ при $Fr_c = \text{idem}$, полученной для воздухо-водяной смеси. Влияние критерия We проявляется лишь при значительных скоростях течения смеси, когда наблюдается интенсивный, развивающийся во времени процесс образования пены.

Необходимо отметить, что интенсивное пенообразование усложняет постановку эксперимента и сказывается на работе измерительной аппаратуры. Следствием указанных причин является невысокая точность измерений, что усложняет возможность количественной оценки влияния критерия We на истинное газосодержание.

Качественно же снижение поверхностного натяжения системы на границе газ — жидкость (уменьшение значения критерия We) с некоторого определенного значения относительной скорости движения фаз должно привести к увеличению истинного газосодержания.

На рис. 43 было показано, что с уменьшением поверхностного натяжения снижается критическая скорость набегания газа $w_{кр}$, при которой начинается разрушение поверхности раздела фаз, т. е. срыв пленки с поверхности жидкости и дробление ее на отдельные капельки, уносимые газовым потоком.

Переход части жидкости из пленочного состояния во *взвешенное* и ее унос газовым потоком означают уменьшение относительной скорости движения фаз, т. е. увеличение *истинного газосодержания*.

Из сказанного следует, что наиболее сильно влияние критерия We на истинное газосодержание может сказаться лишь при большой относительной скорости газа, что соответствует пленочно-кольцевой структуре течения смеси. Для этой структуры течения было обнаружено некоторое влияние критерия We на истинное газосодержание.

Приближенная оценка влияния критерия We на φ составляет 5—10% в сторону увеличения истинного газосодержания при уменьшении значения числа We в 2,5 раза.

Примерно такое же увеличение истинного газосодержания за счет снижения поверхностного натяжения системы газ — жидкость было отмечено Е. Г. Леоновым, который исследовал закономерности течения двухфазных жидкостей в кольцевых каналах («труба в трубе»).

Таким образом, на основании экспериментальных данных можно заключить, что критерий We оказывает заметное влияние (5—10%) на истинное газосодержание лишь при больших значениях критерия Fr_c. При умеренных скоростях течения газо-жидкостной смеси ($Fr_c < 100$) в зоне существования расслоенной и пробковой структур течения влиянием критерия We на истинное газосодержание можно пренебречь.

Зависимость истинного газосодержания от критериев β и Fr_c

Так как истинное газосодержание не зависит от Re, можно считать, что на рис. 49, 50 представлена функциональная зависимость $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$. Эта же зависимость изображена на рис. 56, где приведены кривые для различных значений Fr_c без опытных точек. На приведенных графиках видно, что во всем интервале изменения $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ прослеживается четкая зависимость истинного газосодержания от расходного. Почти во всей зоне существования пробковой структуры течения (от $\beta = 0$ до точки перегиба) истинное и расходное газосодержание связано линейной зависимостью с коэффициентом пропорциональности, являющимся функцией числа Fr_c, т. е. $\varphi = \beta f(Fr_c)$. Исключением являются зона малых газосодержаний $\beta_2 < 0{,}1$, в которой имеет место отрицательная относительная скорость фаз ($w_{от} = w_2 - w_1 < 0$), а также зона неустойчивого

пробкового течения, примыкающая непосредственно к границе раздела расслоенного и пробкового течений, где резко меняется общий ход кривых $\varphi = \varphi(\beta)$. Зона неустойчивого пробкового течения — единственная во всем интервале изменения β, где нарушается общая закономерность увеличения истинного газосодержания с ростом расходного.

Общий ход кривых $\varphi = \varphi(\beta)$ на рис. 24, 25, 49, 50 свидетельствует о существенном влиянии структуры течения на взаимосвязь истинного и расходного газосодержания.

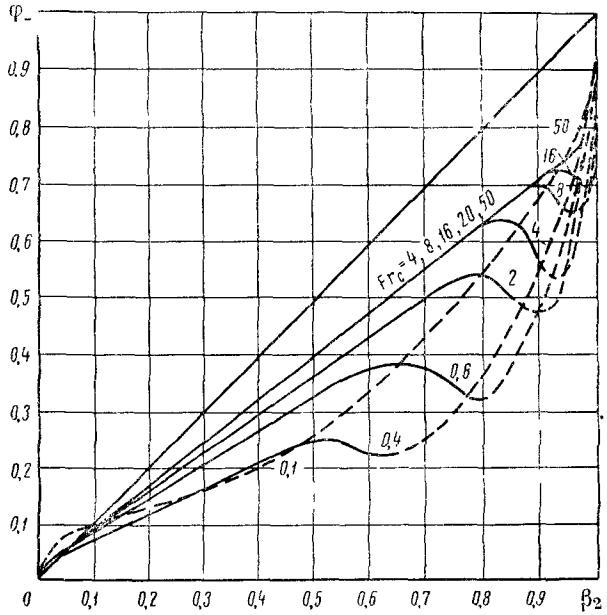


Рис. 56. Зависимость истинного газосодержания от расходного и критерия Фруда. Горизонтальная труба диаметром 56 *мм*.

В зоне расслоенного течения связь между истинным газосодержанием и расходным нелинейная и с ростом скорости течения газожидкостной смеси (или Fr_c) истинное газосодержание уменьшается.

Как видно на рис 56, для пробковой структуры течения газожидкостной смеси также прослеживается четкая зависимость истинного газосодержания от расходного и критерия Fr_c. Однако влияние последнего наблюдается только до определенного его значения. Таким значением является число 4. Существование зоны независимости истинного газосодержания от критерия Фруда смеси (в дальнейшем будем говорить зоны автомодельности по отношению к критерию Фруда) подтверждается экспериментальными данными. Приведенные на рис. 57 опытные результаты относятся как к вертикальным,

так и к горизонтальным течениям в трубах различных диаметров. Некоторые точки относятся к значениям Фруда, меньшим 4. Как показывает анализ, в данном случае расходное газосодержание близко к нулю. В этой зоне достаточно сложно проследить зависимость истинного газосодержания от критерия Fr_c, вследствие чего в исследованиях Г. Г. Корнилова и К. Шварца отдельные точки и при $Fr_c < 4$ лежат на автомодельной линии.

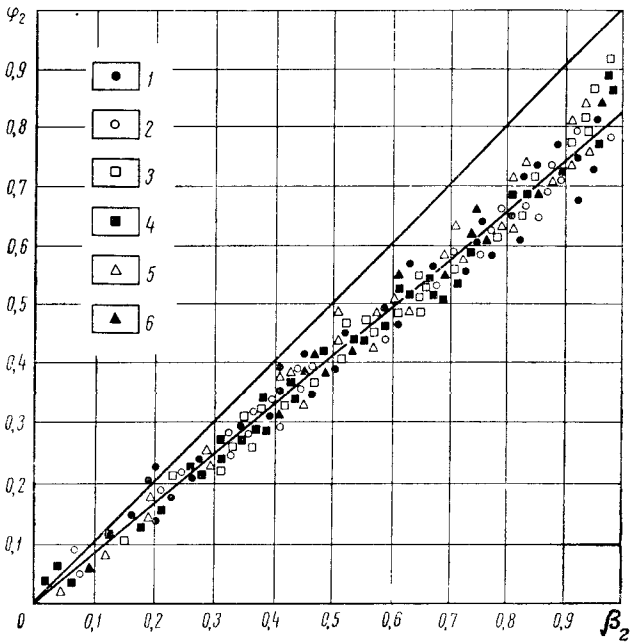


Рис. 57. Зависимость истинного газосодержания от расходного при пробковой структуре течения.

1 — ВТИ (А. А. Арманд), горизонтальная и вертикальная трубы диаметром 26 *мм*, воздух — вода, $Fr_c = 80 — 7000$; *2* — НИИТранснефть (Г. Г. Корнилов), горизонтальная труба диаметром 50 и 26 *мм*, воздух — вода, $Fr_c > 3$; *3* — ЭНИИ (А. А. Точигин, Н. И. Семенов), вертикальная труба диаметром 17 и 30 *мм*, пар — вода, $Fr_c = 20—300$; *4* — ВНИИГаз (Г. Э. Одишария, В. А. Мамаев), горизонтальная труба диаметром 56 *мм*, $Fr_c = 4 — 300$; *5* — ВНИИ (Г. С. Лутошкин), вертикальная труба диаметром $^1/_2$—3″, вода, дизельное топливо — воздух, $Fr_c > 14$; *6* — К. Шварц, вертикальная и горизонтальная трубы диаметром 60 *мм*, пар — вода, $Fr_c > 2$.

Исследуя сопротивления при глиссировании килеватых пластинок, акад. Л. И. Седов [42] отметил наличие автомодельного значения Фруда, равного 4.

Независимость истинного газосодержания от критерия Fr_c в случае движения газо-жидкостной смеси в трубе можно объяснить следующим образом.

Когда инерционные силы, рост которых пропорционален квадрату скорости течения смеси, достигнут определенного значения, исключается влияние сил тяжести. Тогда течение газо-жидкостной смеси

определяется в основном соотношением фаз, составляющих смесь.

Ниже мы увидим, что по мере увеличения влияния силы тяжести на структуру течения смеси, которое имеет место при течении двухфазных потоков в наклонных трубах, зона автомодельности истинного газосодержания существенно отодвигается в сторону больших значений критерия Fr_c. Однако независимость истинного газосодержания от Fr_c не означает постоянства относительной скорости движения фаз.

Относительная скорость фаз в зоне автомодельности истинного газосодержания относительно числа Fr_c определяется скоростью течения смеси и взаимосвязью между истинным и расходным газосодержанием, поскольку относительная скорость по определению является разностью истинных скоростей газа и жидкости, которые в свою очередь определяются через β и φ:

$$w_{от} = w_c\left[\frac{\beta_2}{\varphi_2} - \frac{\beta_1}{\varphi_1}\right]. \qquad (212)$$

Из (212) видно, что в зоне автомодельности истинного газосодержания относительно критерия Fr_c, где истинное и расходное газосодержания связаны определенной зависимостью, рост числа Фруда приводит к увеличению относительной скорости движения фаз, и ни при каких значениях критерия Fr_c (в пределах изменения последнего от 0,1 до $7 \cdot 10^3$) указанная закономерность не нарушается.

Следовательно, допущение об уменьшении относительной скорости движения фаз с ростом числа Fr_c (или скорости течения), которое широко применяется исследователями при решении многих задач гидродинамики двухфазных систем, неправомерно.

На рис. 58 приведены экспериментальные данные В. А. Мамаева, Г. Э. Одишария и А. А. Арманда для зависимости истинного газосодержания от расходного в зоне высоких газосодержаний ($\beta_2 > 0{,}9$). Эти данные подтверждают сделанный вывод, так как всюду $\varphi_2 < \beta_2$.

То, что относительная скорость не уменьшается для этого интервала расходного газосодержания и значений $Fr_c > 200$, означает следующее. Как было показано выше (см. рис. 37), при таких параметрах имеет место пленочно-дисперсная (кольцевая) структура течения смеси. Если бы основная часть жидкости двигалась в дисперсном состоянии в потоке газа, то при увеличении скорости последнего относительная скорость (как разность скоростей газа и жидкости) стремилась бы к нулю.

Но согласно экспериментальным данным уменьшения относительной скорости не происходит, значит можно сделать вывод о том, что значительная часть жидкости движется в виде пленки по внутренней стенке трубы. Если пренебречь существованием очень незначительной зоны отрицательных относительных скоростей фаз ($\varphi_2 > \beta_2$), то

зависимость $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$, изображенная на рис. 56 и 57, может быть представлена эмпирическим соотношением

$$\varphi_2 = 0{,}81\beta_2\left[1 - \exp\left(-2{,}2\sqrt{Fr_c}\right)\right], \qquad (213)$$

справедливым для пробковой структуры течения смеси.

Максимальное отклонение опытных данных от расчетных, определенных по формуле (213), наблюдается в зоне отрицательных относительных скоростей, где эмпирическая зависимость (213)

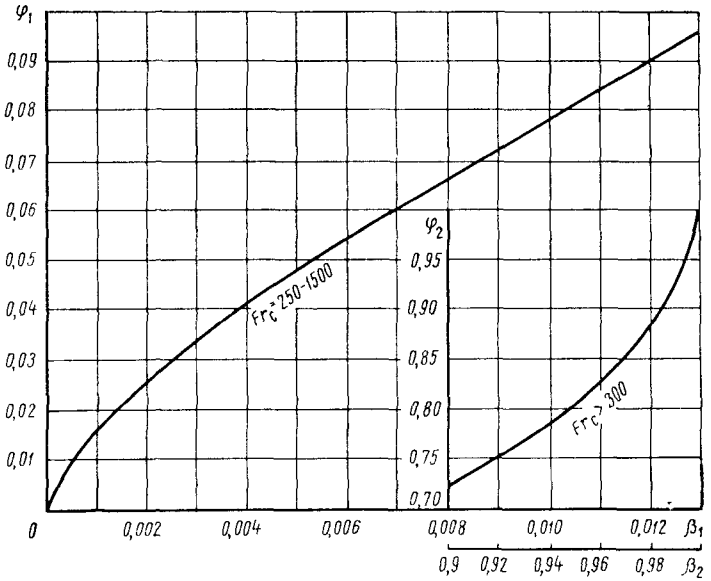


Рис. 58. Зависимость истинного газосодержания от расходного в зоне больших газосодержаний ($\beta_2 > 0{,}9$). По данным А. А. Арманда и авторов.

дает по существу не согласующиеся с опытными данными результаты, поскольку по указанной зависимости получается, что истинное газосодержание всегда меньше расходного.

Однако получаемая при этом погрешность в значении истинного газосодержания φ оказывает пренебрежимо малое влияние на распределение давления по длине трубопровода, ибо условие $\varphi_2 > \beta_2$ справедливо только при малых значениях расходного газосодержания ($\beta_2 < 0{,}1$), где градиент давления определяется в основном содержанием жидкости в потоке смеси, т. е. значением величины φ_1.

Заметим, что при исследовании подъемного течения паро-водяной смеси в вертикальных трубах различного диаметра Н. И. Семенов и А. А. Точигин [45] получили зависимость φ от Fr_c при больших значениях последнего (до 2000). Обработав экспериментальные

данные, они вывели эмпирическую формулу, которая имеет вид

$$\varphi_2 = \beta_2\left[1 - \frac{\theta\beta_1}{n - \beta_2}\right], \tag{214}$$

где

$$\theta = \frac{m\,(1-\rho)}{\left[1 + \frac{k\sqrt{\mathrm{Fr_c}}}{(1-\nu)^4}\right]^2}. \tag{215}$$

Здесь $m = 0{,}342$; $n = 1{,}04$; $k = 0{,}0183$.

Анализ экспериментальных данных и формулы (214) показывает, что зависимость истинного газосодержания от критерия $\mathrm{Fr_c}$ весьма слабая. На это же, но для области высоких газосодержаний ($\beta > 0{,}9$) указывал А. А. Арманд [4].

ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ИСТИННОГО ГАЗОСОДЕРЖАНИЯ ПРИ НЕГОРИЗОНТАЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ СМЕСИ

Течение газо-жидкостных смесей по негоризонтальным трубопроводам характеризуется рядом отличительных особенностей. Если при течении смеси в горизонтальной трубе с уменьшением расходного газосодержания ($\beta \to 0$) соблюдается условие $\varphi \to 0$, то в наклонных трубах при нисходящем течении смеси для определенных скоростей условию $\beta \to 0$ соответствует условие $\varphi \to \mathrm{idem} \neq 0$, что означает безнапорное течение жидкости.

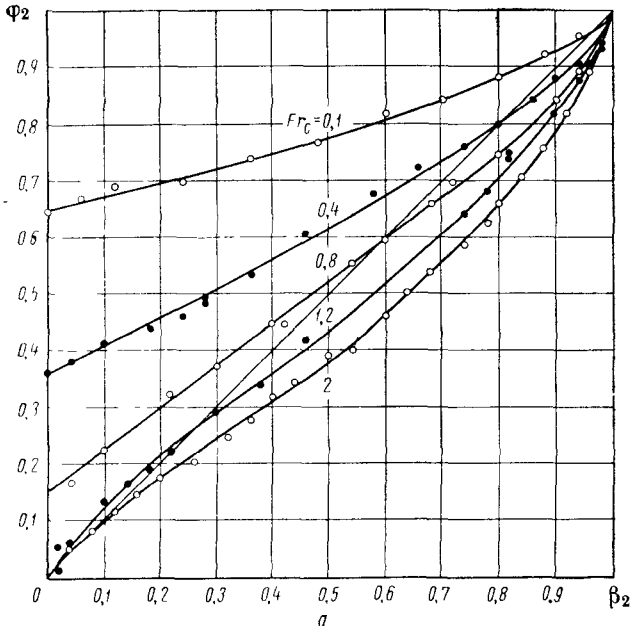
Аналогично для восходящего течения газо-жидкостной смеси условие $\beta \to 1$ может означать $\varphi \to \mathrm{idem} \neq 1$, т. е. барботаж газа через динамический слой жидкости.

Кроме того, ориентация трубопровода в пространстве оказывает влияние на структуру течения газо-жидкостной смеси, а каждой структуре течения, как было показано выше, свойственна определенная закономерность изменения истинного газосодержания.

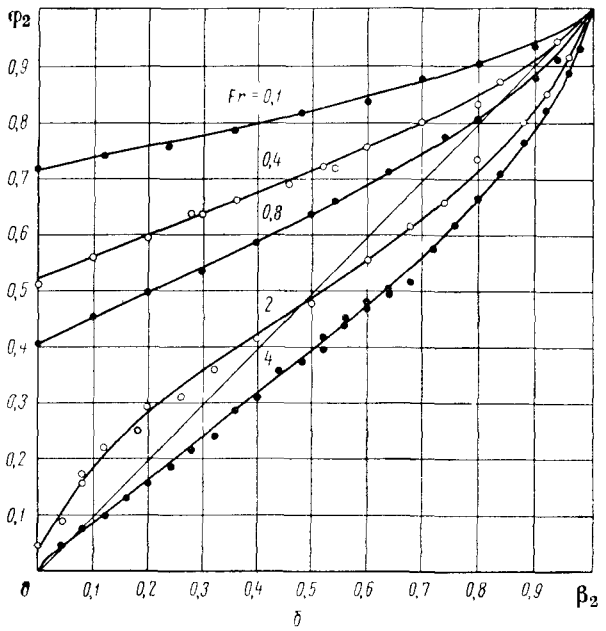
Знать закономерности изменения истинного газосодержания в наклонных трубах особенно важно для гидравлических расчетов трубопроводов, по которым транспортируются газо-жидкостные смеси на значительные расстояния, поскольку при этом практически невозможно сохранить строгую горизонтальность трубопровода.

Даже при условии равенства геометрических отметок начала и конца промышленного трубопровода суммарный запас потенциальной энергии, полученный газо-жидкостной смесью при движении по нисходящим участкам трубопровода, в большинстве случаев не компенсирует потерь напора, затраченных на подъем смеси на восходящем участке. Одна из причин указанного несоответствия — влияние ориентации трубы в пространстве на истинное газосодержание.

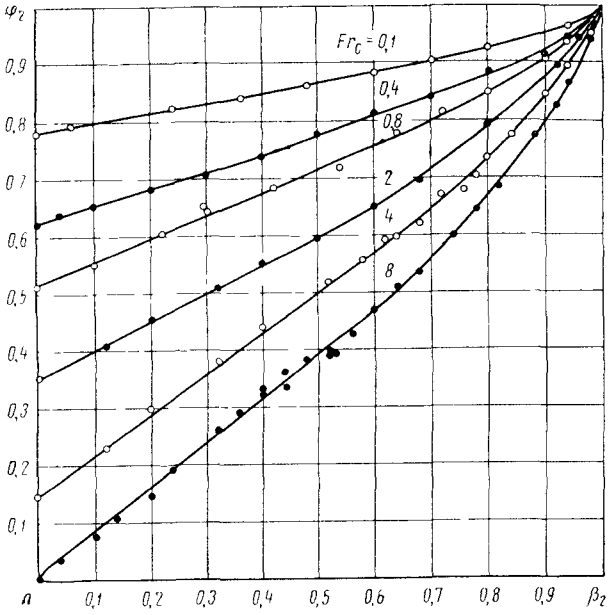
Г. Э. Одишария и В. А. Мамаев провели специальные исследования истинного газосодержания в наклонных трубопроводах. Цель


φ2
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
β2
Fr_C=0,1
0,4
0,8
1,2
2

а


φ2
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
β2
Fr=0,1
0,4
0,8
2
4

б



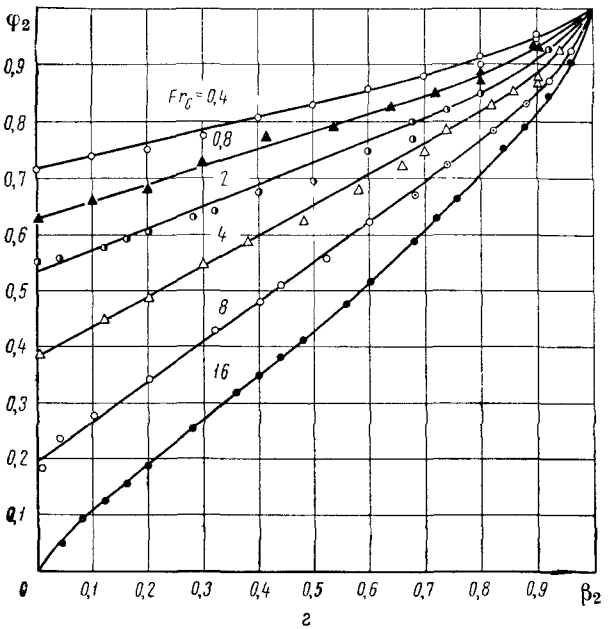


Рис. 59. Зависимость истинного газосодержания от расходного и критерия Fr_C при расслоенном нисходящем течении смеси.

а — при $\alpha = 1°$; *б* — при $\alpha = 2°$; *в* — при $\alpha = 4°$; *г* — при $\alpha = 10°$.

исследований — установить экспериментальную зависимость $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$ для различных углов наклона трубы, поскольку критерии β и Fr_c, как доказано выше, являются основными при определении процесса течения газо-жидкостных смесей в трубах.

Угол наклона трубы к горизонту при нисходящем течении смеси составлял 1, 2, 4 и 10°, при восходящем течении — 1, 2 и 9°.

Несмотря на небольшие изменения угла наклона, результаты экспериментальных исследований могут быть распространены и на большие углы наклона.

В наклонной трубе нисходящее течение газо-жидкостной смеси характеризуется большей асимметричностью потока, чем в горизонтальной трубе, что является следствием воздействия осевой составляющей сил свободного падения на скорость течения жидкой фазы при одновременном, но противоположно направленном воздействии выталкивающей силы на газовую фазу смеси.

В результате суммарного воздействия указанных сил появляется обширная зона отрицательной относительной скорости фаз и значительно расширяются границы расслоенного течения смеси в наклонных трубах при нисходящем движении потока (см. рис. 40).

Закономерности изменения истинного газосодержания для расслоенной структуры течения смеси в наклонных трубах представлены в графической форме на рис. 59.

Данные рис. 59 свидетельствуют о четкой зависимости истинного газосодержания от расходного, критерия Fr_c и угла наклона трубы к горизонту. При увеличении угла наклона экспериментального трубопровода кривая $\varphi = \varphi(\beta)$ сдвигается в сторону больших значений истинного газосодержания для каждого фиксированного значения критерия Fr_c. Это объясняется следующим. С увеличением угла наклона жидкая фаза смеси испытывает возросшее действие осевой составляющей сил свободного падения, в результате возрастает истинная скорость течения жидкости, что означает увеличение истинного газосодержания.

Обратная связь наблюдается между истинным газосодержанием и критерием Fr_c. С ростом значения Fr_c истинное газосодержание уменьшается. Причем указанная закономерность соблюдается и после выполнения условия $\varphi = \beta$.

На рис. 59 видно, что с ростом значения Fr_c часть экспериментальных точек ложится ниже прямой $\varphi = \beta$, т. е. выполняется условие $\varphi_2 < \beta_2$, соответствующее течению смеси с положительной относительной скоростью фаз ($w_{от} > 0$). Во всех случаях увеличение расходного газосодержания β_2 приводит к росту истинного газосодержания φ_2 и в пределе, при значении $\beta_2 = 1$ (однофазное течение), выполняется условие $\varphi_2 = 1$. Вместе с тем, в другой точке однофазного течения ($\beta_2 = 0$) условие $\varphi_2 = 0$ выполняется лишь при определенных значениях критерия Fr_c.

Каждому фиксированному значению угла наклона трубы соответствует определенное, предельное, значение числа $Fr_c = Fr_{пр}$, ниже которого во всей зоне существования двухфазного потока

$(0 < \beta < 1)$ будет расслоенная структура течения смеси, а в точке $\beta_2 = 0$ выполняется условие $\varphi_2 > 0$, соответствующее безнапорному режиму течения жидкости в наклонной трубе со свободным выходом. Это значение критерия $Fr_c = Fr_{пр}$ определяется из условия $\varphi_2 = 0$ при $\beta_2 = 0$, что означает течение жидкости полным сечением в наклонной трубе за счет геометрического уклона i

$$i = \lambda_1 \frac{w_1^2}{2gD} \tag{216}$$

или

$$Fr_{пр} = \frac{2i}{\lambda_1}. \tag{217}$$

Следовательно, при всех значениях числа $Fr_c < \frac{2i}{\lambda_1}$ в точке $\beta_2 = 0$ будет выполняться условие $\varphi_2 > 0$, соответствующее безнапорному режиму течения жидкости в наклонной трубе.

Известно, что при безнапорном режиме движения жидкости в наклонной трубе истинная скорость течения, или доля сечения, занятая жидкостью, определяется соотношением сил свободного падения и трения. Поэтому для расслоенной структуры течения смеси в наклонной трубе вследствие малости сил межфазового трения истинное газосодержание целесообразно представить не в обычной форме $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$, а в виде зависимости $\varphi = \varphi(Fr_1, i)$, где Fr_1 — значение числа Фруда, определенное по приведенной скорости жидкости $(\varphi_1, w_1)^2 = Fr_1 gD$ или, что одно и то же, соотношением $Fr_1 = \beta_1^2 Fr_c$.

Кривые на рис. 59, отражающие закономерности изменения истинного газосодержания в виде функции $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c,)$ при обработке в координатах φ_1 и $Fr_1 = \beta_1^2 Fr_c$ дают единую зависимость для фиксированного значения геометрического уклона i (угла наклона трубы).

Условию $\varphi_1 = 1$ рис. 60 соответствуют предельные значения критерия $Fr_1 = Fr_{пр}$, определяемые формулой (217) для соответствующих величин геометрического уклона. В свою очередь семейство кривых на рис. 60 при обработке опытных данных в координатах φ_1 и $\chi = (Fr_1/Fr_{пр}) = \lambda\beta_1^2 Fr_c/2\sin\alpha$ дает единую линию (рис. 61), описываемую эмпирическим уравнением

$$\varphi_2 = 1 - \chi^{0,4} \tag{218}$$

в пределах изменения $0 \leqslant \chi \leqslant 0{,}18$ и уравнением

$$\varphi_2 = 0{,}615\,(1 - \chi) \tag{219}$$

в пределах изменения $0{,}18 \leqslant \chi \leqslant 1$.

Эмпирические зависимости (218) и (219) отражают закономерности изменения истинного газосодержания для расслоенной структуры течения смеси в наклонной трубе, где наиболее сильно проявляется действие сил свободного падения и, как следствие этого, влияние угла наклона.

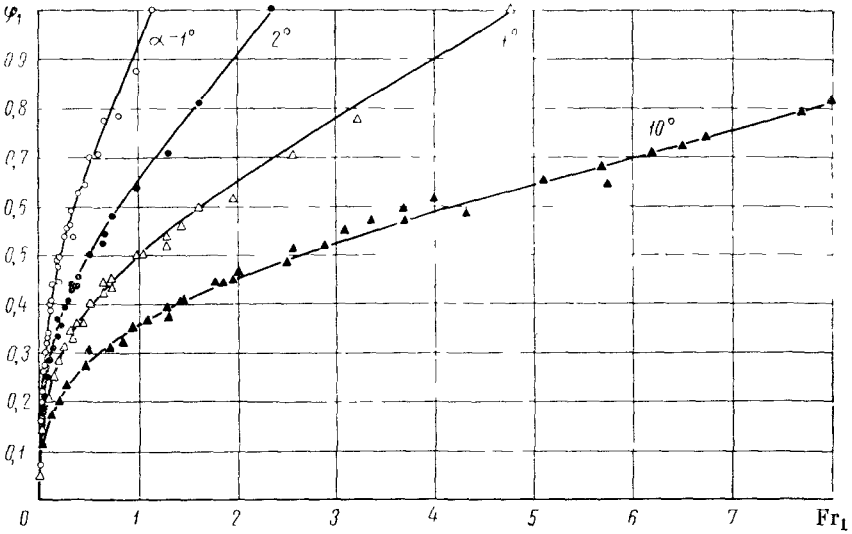


Рис. 60. Зависимость φ_1 от Fr_1 и угла наклона.

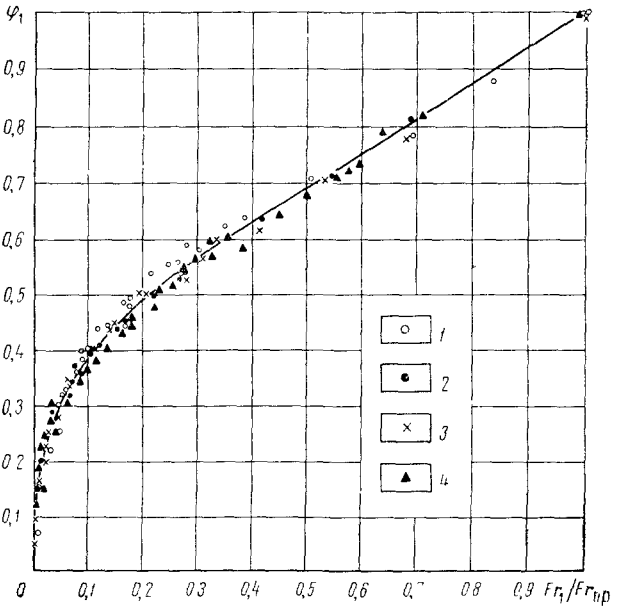


Рис. 61. Зависимость φ_1 от комплекса $Fr_1/Fr_{пр}$ для различных углов наклона.

1 — $\alpha = 1°$, *2* — $\alpha = 2°$; *3* — $\alpha = 4°$, *4* — $\alpha = 10°$.

С ростом скорости течения смеси (или значения Fr_c), что означает увеличение инерционных сил, наступает момент, когда последние превалируют над силами свободного падения. Тогда наклон трубы не оказывает существенного влияния на истинное газосодержание.

Экспериментальные исследования показали, что для всех значений угла наклона с ростом скорости течения смеси (или Fr_c) область отрицательных относительных скоростей ($\varphi_2 > \beta_2$) уменьшается и в пределе (при определенном значении критерия Fr_c) связь между истинным газосодержанием φ_2 и расходным β_2 становится такой же, как и при горизонтальном течении газо-жидкостной смеси.

Значение критерия Fr_c, за пределами которого не чувствуется влияние угла наклона трубы, существенно зависит от величины последнего, так как с увеличением угла наклона растет осевая составляющая сил свободного падения и для исключения ее влияния на истинную скорость течения жидкой фазы требуются большие инерционные силы, т. е. бо́льшее значение числа Fr_c.

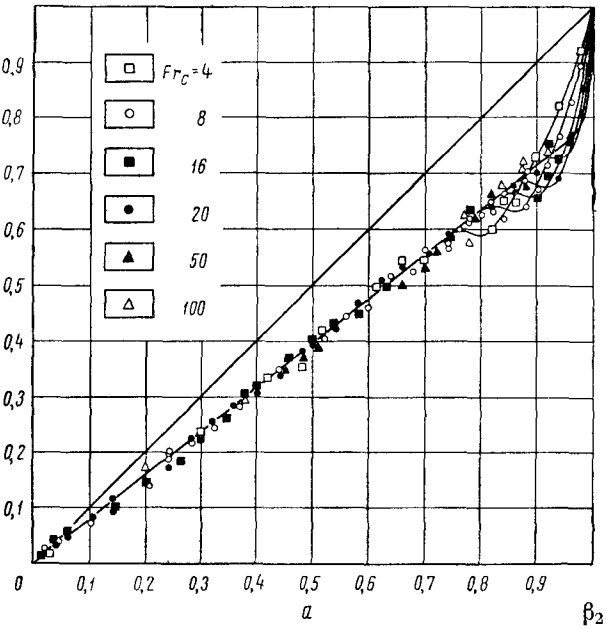
Анализ опытных данных, относящихся к течению газо-жидкостной смеси в наклонных трубах, показывает, что с переходом расслоенной структуры течения смеси в пробковую наступает область автомодельности истинного газосодержания не только относительно критерия Fr_c, но и относительно угла наклона. Получаемая при этом зависимость $\varphi = \varphi(\beta)$ согласуется с соответствующей зависимостью для горизонтальных труб при $Fr_c > 4$.

На рис. 62 в графической форме представлены закономерности изменения истинного газосодержания для пробковой и частично для расслоенной структур течения смеси в наклонных трубах. Опытные данные, относящиеся к расслоенной структуре течения смеси, использованы при составлении эмпирических зависимостей (218) и (219) и на указанных графиках представлены лишь для разграничения пробковой и расслоенной структур течения.

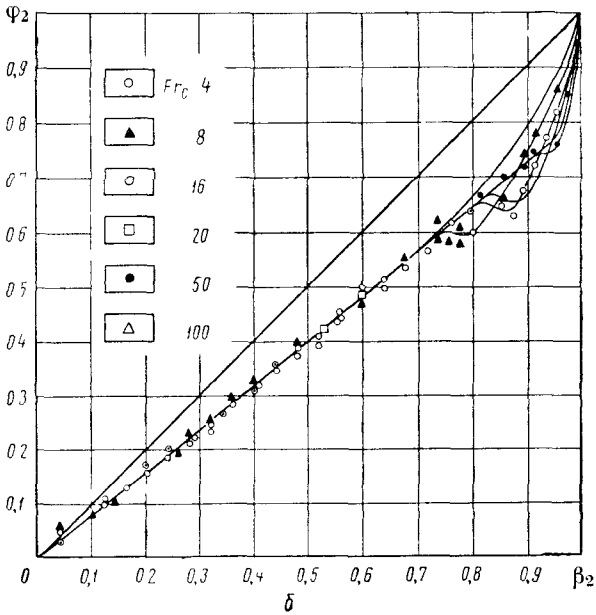
Расслоенной структуре течения смеси на рис. 62 соответствуют семейства кривых, различающихся по значениям критерия Fr_c, а пробковой — единые линии, отражающие линейную зависимость истинного газосодержания от расходного.

Сопоставляя данные рис. 59 и 62 по соответствующим значениям угла наклона, можно заметить, что при каждом фиксированном положении экспериментального трубопровода с увеличением числа Fr_c кривая зависимости $\varphi = \varphi(\beta)$ смещается в сторону меньших значений истинного газосодержания, пересекает линию $\varphi = \beta$ и сливается с прямой, соответствующей зоне автомодельного течения газо-жидкостной смеси в горизонтальных трубах.

Уменьшение истинного газосодержания с ростом числа Fr_c объясняется действием инерционных сил на распределение легкой и тяжелой фаз смеси по сечению трубопровода, а исключение влияния угла наклона на истинное газосодержание с некоторого определенного значения Fr_c — превалирующим действием инерционных сил над силами тяжести. В этом отношении влияние критерия Fr_c показано на примере течения смеси в нисходящем трубопроводе (рис. 62).


Fr_c=4
8
16
20
50
100
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
β_2

а


φ_2
Fr_c 4
8
16
20
50
100
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
β_2

б

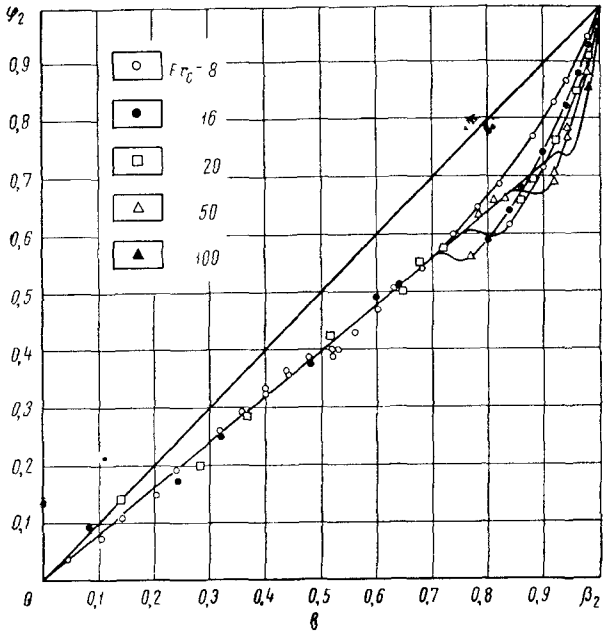


Рис. 62. Зависимость истинного газосодержания от Fr_c и β для пробковой и расслоенной структур восходящего течения смеси.

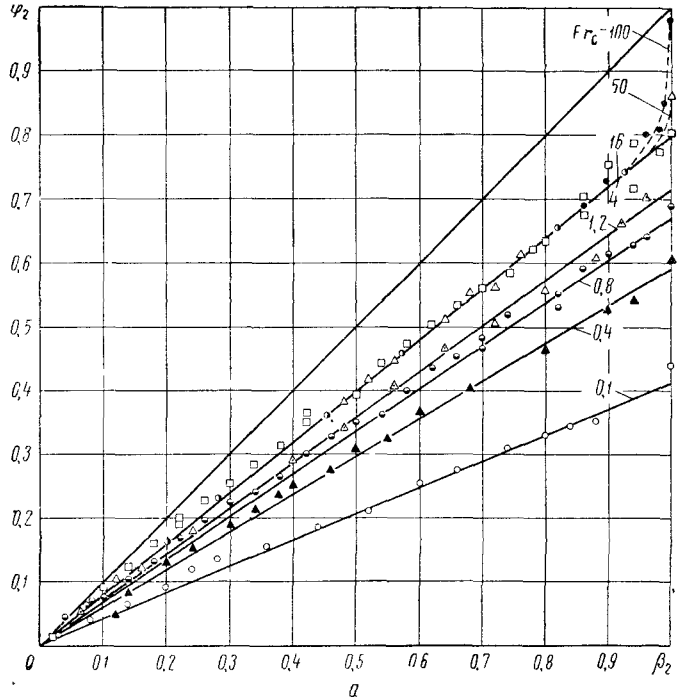
а — при $\alpha = 1°$, *б* — при $\alpha = 2°$, *в* — при $\alpha = 4°$.

С увеличением угла наклона область автомодельности истинного газосодержания относительно критерия Fr_c сдвигается в сторону больших значений последнего.

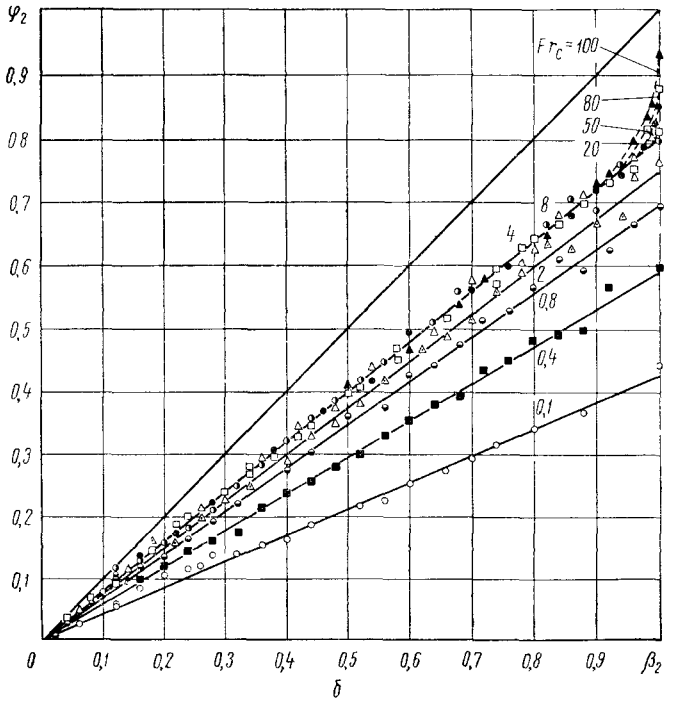
Таким образом, существует единая закономерность изменения истинного газосодержания в функции определяющего критерия β для наклонных (нисходящих) и горизонтальных течений.

Отличительная особенность восходящего течения смеси в наклонных трубах — отсутствие расслоенной структуры течения смеси, за исключением очень малой области, относящейся к большим значениям β и Fr_c при небольших углах наклона трубы к горизонту. Но и здесь расслоенная структура, по существу, является переходной формой между расслоенной и пленочно-кольцевой.

Закономерности изменения истинного газосодержания при восходящем течении смеси в трубе с углом наклона 1, 2 и 9° представлены *на рис. 63 в виде функциональной* зависимости $\varphi = \varphi(\beta, Fr_c)$. Здесь почти во всем интервале изменения расходного газосодержания $0 < \beta_2 < 1$ сохраняется линейная зависимость истинного газосодержания от расходного при фиксированном значении критерия Fr_c. При всех значениях критерия Fr_c с ростом расходного газосодержания β_2 от нуля до единицы происходит монотонный рост истинного


φ_2
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
β_2
$Fr_c = 100$
50
16
4
1,2
0,8
0,4
0,1

а


φ_2
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
β_2
$Fr_c = 100$
80
50
20
8
4
2
0,8
0,4
0,1

б

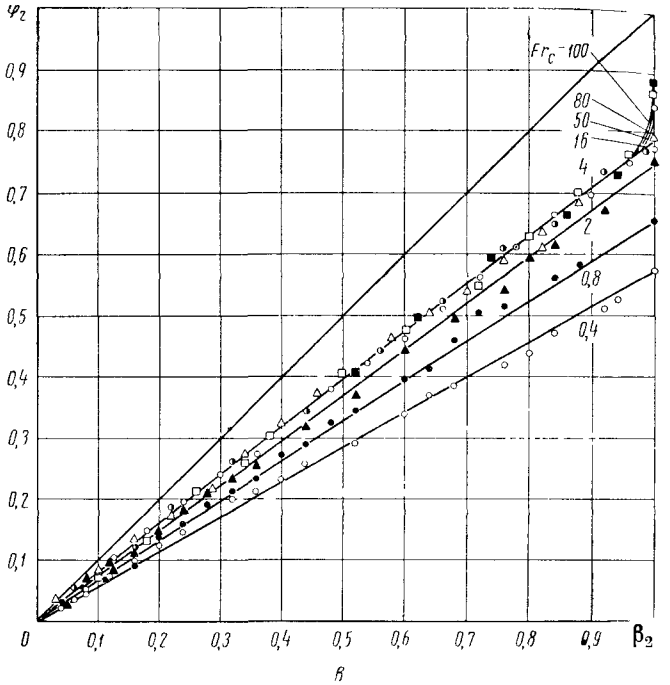


Рис. 63. Зависимость истинного газосодержания от расходного и критерия Фруда при восходящем течении смеси.

а — при $\alpha = 1°$; *б* — при $\alpha = 2°$; *в* — при $\alpha = 9°$.

газосодержания и при $\beta_2 = 1$, $\varphi_2 < 1$. Условие $\varphi_2 < 1$ при $\beta_2 = 1$, как отмечалось, соответствует процессу барботажа газа через слой жидкости, высота столба которого в состоянии покоя составляет $h = \varphi_2 L \sin\alpha$, где L — длина трубы, а α — угол наклона трубы к горизонту. Высота столба жидкости h, соответствующая определенным значениям φ_1 и Fr_c — это минимальная высота жидкости в наклонной трубе, при которой наблюдается вынос жидкости на поверхность газом, барботирующим через указанный слой жидкости с приведенной скоростью $w_2\varphi_2 = \sqrt{gD\,Fr_c}$.

Сопоставляя опытные данные по истинному газосодержанию для пробковой структуры течения смеси в горизонтальной и наклонной трубах (см. рис. 56, 57 и 63), можно заметить, что угол наклона трубы практически не оказывает влияния на закономерность изменения истинного газосодержания. Исключением является лишь область отрицательных относительных скоростей, которая присуща горизонтальному течению газо-жидкостной смеси с небольшим содержанием газа ($\beta_2 < 0{,}1$).

Область существования отрицательных относительных скоростей уменьшается с увеличением угла наклона трубы и полностью

отсутствует при восходящем течении смеси в вертикальных трубах, что является итогом воздействия выталкивающей силы столба жидкости на скорость движения отдельных газовых включений.

Однако действие архимедовых сил приводит к увеличению истинной скорости всплытия газового пузыря только при определенных условиях: при наличии в несущем потоке жидкости небольших по объему газовых включений. Малые пузыри газа, находящиеся в жидкости, обладают большей устойчивостью к сохранению формы, чем большие, вследствие существования обратной зависимости между объемом пузыря и силой поверхностного натяжения. Поэтому влияние архимедовых сил проявляется неодинаково для случаев «малого» и «большого» газовых включений.

При восходящем течении газо-жидкостной смеси в наклонных трубах составляющая архимедовой силы $\mathrm{Ar} = (\gamma_1 - \gamma_2)V \sin \alpha$, направленная вдоль оси трубы, т. е. в направлении действия градиента давления, в случае «малых» включений приводит к некоторому увеличению истинной скорости движения газовой фазы в целом, поскольку форма отдельных пузырьков не меняется и, следовательно, коэффициент сопротивления относительному движению их в потоке может считаться неизменным.

Рост истинной скорости движения газовой фазы приводит сначала к уменьшению абсолютной величины отрицательной относительной скорости движения фаз, затем к появлению положительных относительных скоростей при значительных углах наклона трубы.

Форма больших по объему газовых пузырей достаточно легко меняется под динамическим воздействием среды (жидкости), так как скачок давления на поверхности раздела фаз обратно пропорционален радиусу кривизны поверхности раздела — $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

Работа несущего потока на преодоление сил поверхностного натяжения приводит к уменьшению толщины сфероида и увеличению поверхности трения, что в значительной степени компенсирует эффект архимедовой силы.

На рис. 64, 65 видно, что экспериментальные точки, относящиеся к пробковой структуре течения смеси, независимо от значения угла наклона хорошо группируются вдоль единой линии, отражающей закономерность изменения истинного газосодержания от расходного для соответствующих значений числа $\mathrm{Fr_c}$.

Интересно отметить, что и область автомодельности истинного газосодержания относительно критерия $\mathrm{Fr_c}$ в наклонных трубах с восходящим течением смеси наступает при тех же значениях $\mathrm{Fr_c}$, что и в горизонтальных трубах ($\mathrm{Fr_c} \geqslant 4$).

На рис. 64, 65 видно, как опытные точки для значений $\mathrm{Fr_c} \geqslant 4$ дают единую зависимость $\varphi = \varphi(\beta)$ при углах наклона трубы к горизонту 0, 1, 2 и 9°.

В исследованиях авторов максимальный угол наклона трубы при восходящем течении смеси составлял 9°, однако результаты этих исследований могут быть распространены и на большие углы

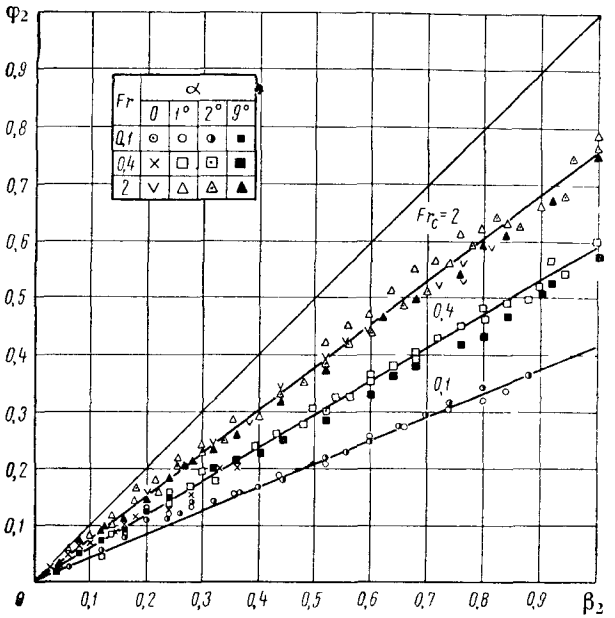


Рис. 64. Зависимость истинного газосодержания от расходного, критерия Fr_c и угла наклона при пробковой структуре для горизонтального и восходящего течения смеси.

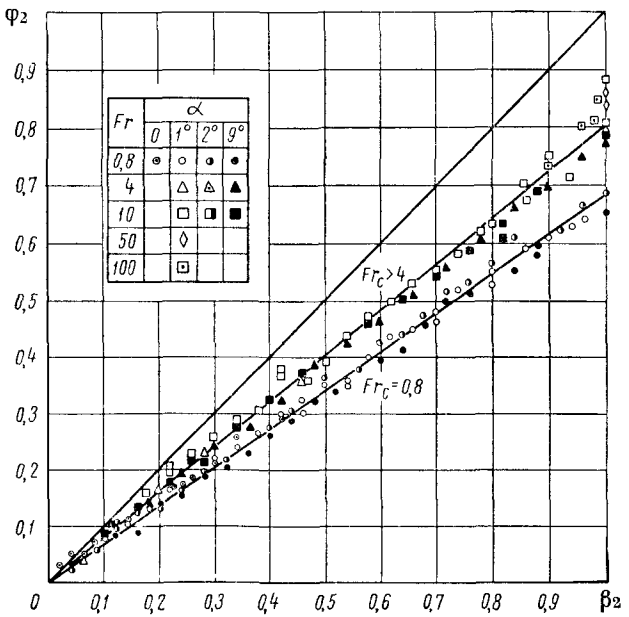


Рис. 65 Зависимость истинного газосодержания от расходного, критерия Fr_c и угла наклона при пробковой структуре для горизонтального и восходящего течения смеси.

наклона, включая вертикальные трубы. Основанием для такого утверждения служит хорошее согласование экспериментальных данных по истинному газосодержанию, относящихся к течению смеси в горизонтальных, слабонаклонных (до 9°) и вертикальных трубах. В качестве таковых для течения смеси в горизонтальных и слабонаклонных трубах могут быть использованы данные по истинному газосодержанию, представленные на рис. 62—65, и результаты исследований А. А. Арманда, Г. С. Лутошкина, С. И. Костерина, Н. И. Семенова, Л. А. Точигина, К. Шварца, Н. Шера по течению газо-жидкостных смесей в вертикальных трубах.

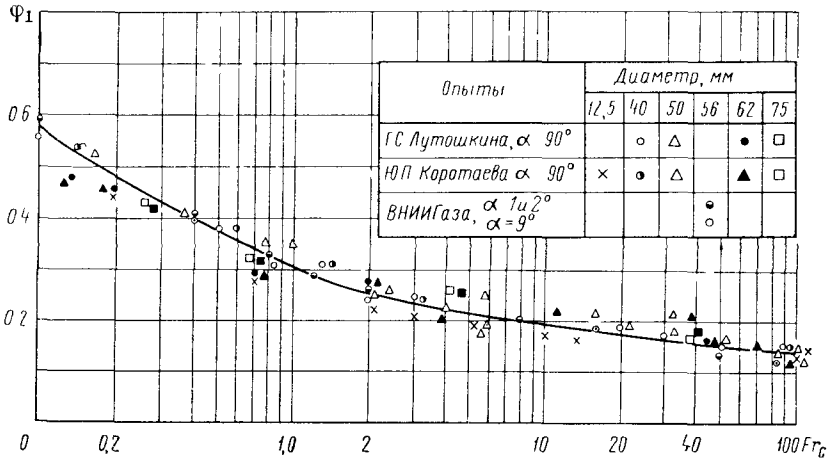


Рис. 66. Зависимость истинного содержания жидкости от критерия Фруда для труб с различным углом наклона при расходном газосодержании, равном единице (барботаж).

На рис. 57 и 65, где приводятся экспериментальные данные указанных исследователей для значений $Fr_c > 4$ (зона автомодельности), видно, что угол наклона трубы при восходящем течении смеси не оказывает влияния на закономерность изменения истинного газосодержания в пределах пробковой структуры течения смеси.

Не обнаруживается влияние угла наклона и для нисходящего течения смеси (см. рис. 62) при условии пробковой структуры течения смеси.

Косвенным доказательством того, что угол наклона не влияет на величину истинного газосодержания при восходящем течении смеси является хорошая сходимость опытных данных по слабонаклонным и вертикальным трубам для условий барботажа газа через динамический слой жидкости.

Поскольку процесс барботажа газа через столб жидкости в трубе является частным случаем течения газо-жидкостной смеси, то сходимость экспериментальных данных по трубам с различным углом

наклона в этом случае будет свидетельствовать об отсутствии влияния угла наклона на истинное газосодержание во всем интервале изменения расходного газосодержания $0 \leqslant \beta_2 \leqslant 1$.

Последнее утверждение основано на существовании линейной зависимости между истинным и расходным газосодержанием (см. рис. 63).

На рис. 66, где представлены результаты экспериментальных исследований Г. С. Лутошкина и Ю. П. Коротаева по истинному газосодержанию в вертикальных трубах различных диаметров и опытные данные для наклонных труб, хорошо видна сходимость экспериментальных данных, относящихся к трубам с различным углом наклона к горизонту.

Кроме того, экспериментальные данные, представленные на рис. 66, показывают, что влияние диаметра трубы на истинное газосодержание достаточно хорошо учитывается критерием Fr_c при обработке опытных данных в координатах φ_1 и Fr_c.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕНИЯ

Во введении отмечались недостатки существующих методов постановки и обработки экспериментов по гидравлике двухфазных жидкостей. В данной главе приводятся экспериментальные данные авторов по гидравлическим сопротивлениям. Эти данные получены и обработаны в соответствии с той концепцией, которая обоснована и разработана в предшествующих главах.

Во-первых, было показано, как со сменой форм течения (переход пробковой в расслоенную) резко меняются закономерности изменения истинного газосодержания (см. рис. 56), амплитуды пульсаций давления (см. рис. 47, 48), градиента давления (см. рис. 38) и другие характеристики потока.

Связь перечисленных характеристик потока со структурой течения, естественно, должна оказать влияние и на общий вид зависимости $\lambda_c = \lambda(\beta)$, которая также будет меняться со сменой структуры потока.

Ниже будет показано, как с переходом пробковой структуры течения смеси в расслоенную резко меняется функция $\psi = \psi(\beta)$ при $\mathrm{Fr}_c = \mathrm{idem}$, что свидетельствует о связи закономерностей изменения коэффициента сопротивления со структурой течения смеси.

Во-вторых, была получена критериальная форма для экспериментального определения коэффициента сопротивления

$$\lambda_c = \lambda(\mathrm{Re}_c, \varepsilon)\,\psi(\beta, \mathrm{Fr}_c, \dot{\rho}, \dot{\mu}, \mathrm{We}, \cos\alpha \ldots).$$

И, в-третьих, в гл. 1 предложено определять из эксперимента коэффициент гидравлического сопротивления для пробковой структуры течения через истинный динамический напор вида (53) и через условный динамический напор (56), а для разделенного течения — через динамические напоры каждой фазы и межфазовое сопротивление. В такой последовательности исследуем гидравлическое сопротивление.

ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРЕНИЯ ПРИ ПРОБКОВОЙ СТРУКТУРЕ ТЕЧЕНИЯ СМЕСИ, ОПРЕДЕЛЕННОЕ ЧЕРЕЗ ИСТИННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ НАПОР

Для определения коэффициента гидравлического сопротивления трения использовалось уравнение (55) при пренебрежении инерционными членами, т. е. уравнение вида

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda_c}{2D}(\varphi_1\rho_1 w_1^2 + \varphi_2\rho_2 w_2^2) - g\rho_c \cos\alpha.$$

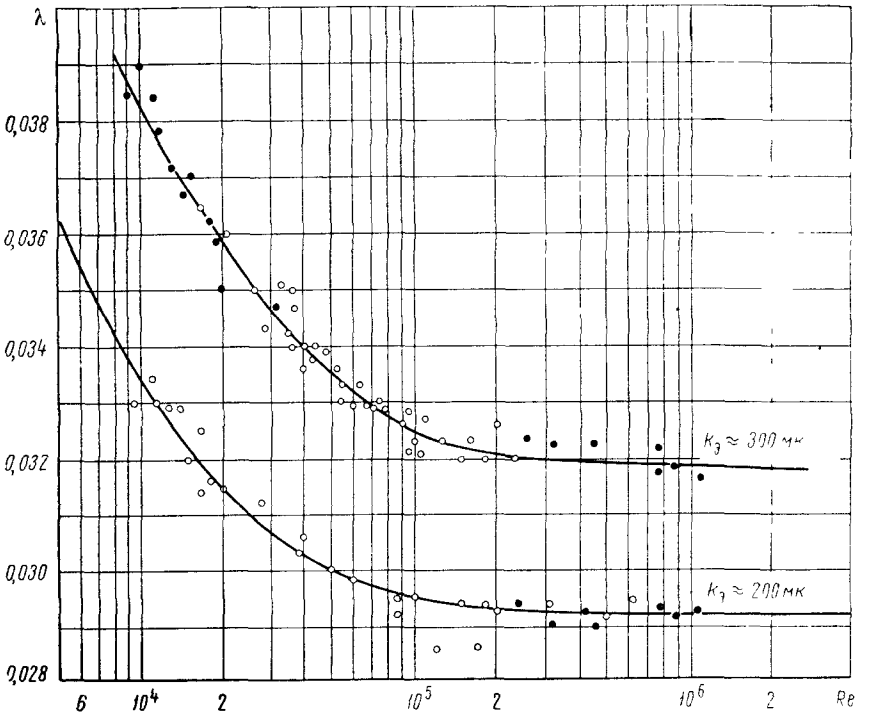


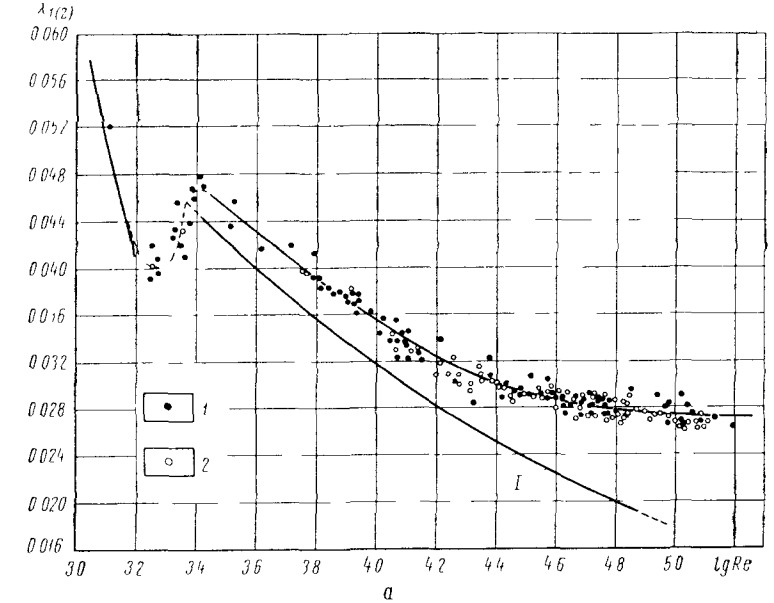
Рис. 67. Гидравлическая характеристика экспериментального трубопровода.

Экспериментальные исследования проводились при скоростях менее 50 *м/сек*, и по аналогии с движением однородной сжимаемой жидкости это может служить основанием для сделанного допущения.

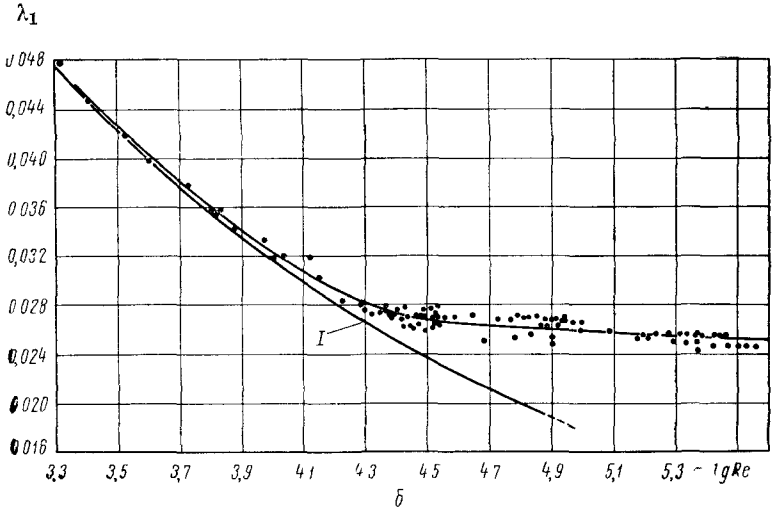
Закономерности изменения приведенного коэффициента сопротивления в форме

$$\psi = \psi(\beta,\ \mathrm{Fr_c},\ \dot{\mu},\ \dot{\rho},\ \mathrm{We},\ \cos\alpha) \qquad (220)$$

экспериментально изучались в той же последовательности, что и истинное газосодержание, только опытам с газо-жидкостной смесью предшествовали эксперименты по измерению коэффициентов



а



б

гидравлического сопротивления металлических трубопроводов течению однородной жидкости (вода или воздух), чтобы установить зависимости $\lambda = \lambda\,(\mathrm{Re}, \varepsilon)$.

Из-за отсутствия защитного антикоррозийного покрытия на внутренней поверхности экспериментального трубопровода с течением времени несколько увеличилась абсолютная шероховатость трубопровода. Так, например, если в начале экспериментирования эквивалентная шероховатость $k_э$ внутренней поверхности трубопро-

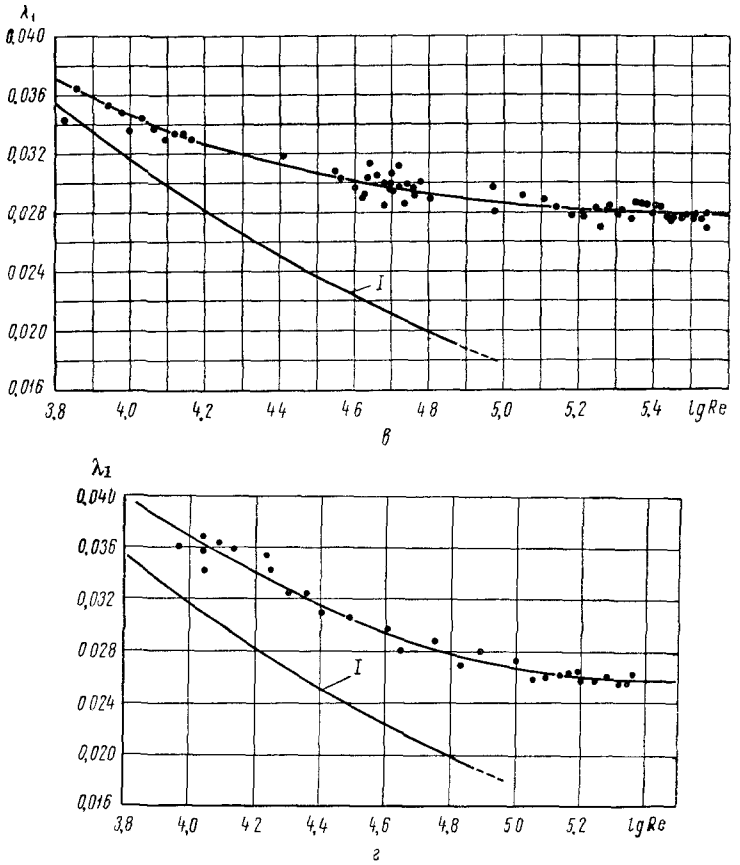


Рис. 68. Зависимость λ (Re, ε) для труб разных диаметров
а — $D = 25{,}8$ *мм* (*1* — вода, *2* — воздух), *б* — $D = 47{,}4$ *мм*, *в* — $D = 74{,}7$ *мм*, *г* — $D = 99{,}8$ *мм*,
I — кривая Блазиуса

вода, определенная гидравлическим путем, составляла 200 *мк*, то к концу опытов (спустя два года) она достигла значения ≈300 *мк*. Это позволило в некоторой степени оценить влияние изменения шероховатости трубопровода на величину коэффициента гидравлического сопротивления смеси.

Результаты опытов с однородной жидкостью представлены на рис. 67 кривыми, полученными на основании опытных данных, относящихся к течению воды или воздуха в экспериментальных трубопроводах.

Нижняя кривая соответствует началу, а верхняя — концу экспериментальных исследовании по течению газо-жидкостной смеси в горизонтальных и наклонных трубопроводах.

Зависимости λ (Re, ε) для труб разных диаметров приведены на рис. 68.

После данных опытов проводилось экспериментальное исследование приведенного коэффициента гидравлического сопротивления, чтобы выявить его зависимость от каждого определяющего критерия в отдельности.

Зависимость λ_c и ψ от расходного газосодержания и критерия Fr_c

Опыты этой серии проводились при строго горизонтальном расположении экспериментального трубопровода, по которому транспортировалась воздухо-водяная смесь со скоростями течения,

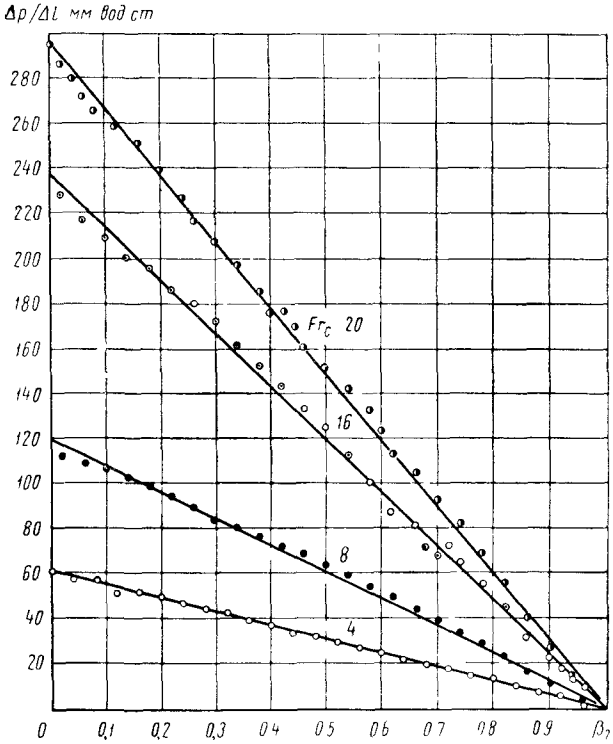


Рис. 69. Опытные данные потерь напора на трение при течении смеси в горизонтальном трубопроводе.

соответствующими значениям критерия $Fr_c = 0{,}1, 0{,}4, 0{,}8, 2, 4, 8, 16, 20, 50, 100$ и 300. Давление в процессе экспериментирования поддерживалось на уровне атмосферного и 5 *бар*.

Опыты проводились при закрепленных значениях критерия Fr_c и охватывали в основном пробковый и расслоенный режимы течения газо-жидкостной смеси в горизонтальном трубопроводе. На рис. 69

в качестве примера приведены первичные результаты измерений перепада давления для пробковой структуры течения воздухо-водяной смеси в функции расходного газосодержания.

Обработка экспериментальных данных подобного рода по формуле (55) позволяет установить зависимость коэффициента гидравлического сопротивления смеси от расходного газосодержания и критерия Fr_c. Графическая форма этой зависимости изображена на рис. 70. Здесь видна четкая зависимость коэффициента гидравлического сопротивления смеси от расходного газосодержания,

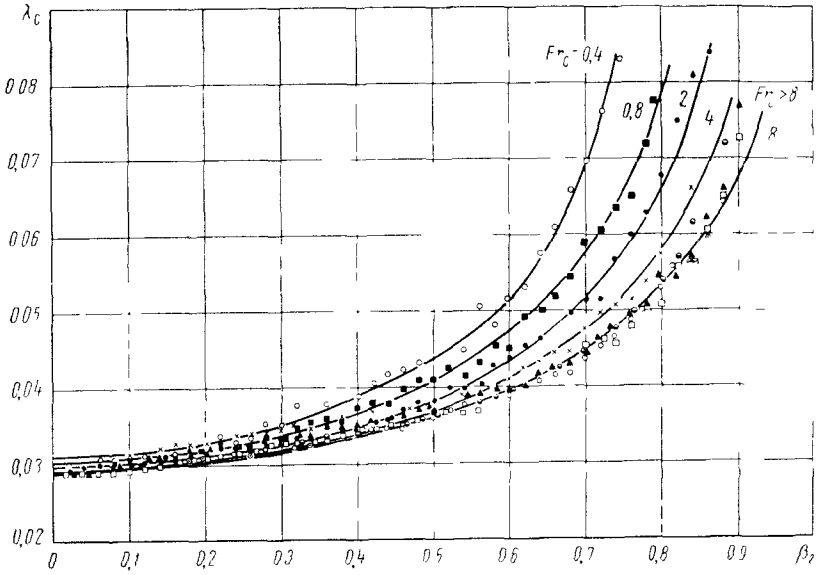


Рис. 70. Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления, определенного по истинному динамическому напору, от критериев β и Fr_c.

критерия Fr_c до определенного его значения и гидравлической характеристики экспериментального трубопровода, так как в точке $\beta_2 = 0$ мы имеем несколько значений λ_c, соответствующих зависимости $\lambda = \lambda\,(Re_c,\ \varepsilon)$.

Аналогичные кривые получаются и для приведенного коэффициента сопротивления с той лишь разницей, что при $\beta_2 = 0$ мы имеем общую точку для всех значений числа Fr_c.

На рис. 70, 71 видно, что для любых значений критерия Fr_c с ростом расходного газосодержания повышается гидравлический и, следовательно, приведенный коэффициент сопротивления смеси.

Это итог нарушения пропорциональности в изменении градиента давления и истинного динамического напора смеси с ростом расходного газосодержания при фиксированном значении критерия Fr_c.

На рис. 69 видно, что градиент давления $\Delta p/\Delta l$ убывает почти линейно с ростом расходного газосодержания при любом фиксированном значении Fr_c, а истинный динамический напор

$$H_д = \frac{Fr_c D}{2}\left[\frac{\beta_1^2}{\varphi_1}\gamma_1 + \frac{\beta_2^2}{\varphi_2}\gamma_2\right]$$

убывает нелинейно и с большей интенсивностью вследствие непрерывного роста по абсолютной величине относительной скорости движения фаз с ростом расходного газосодержания.

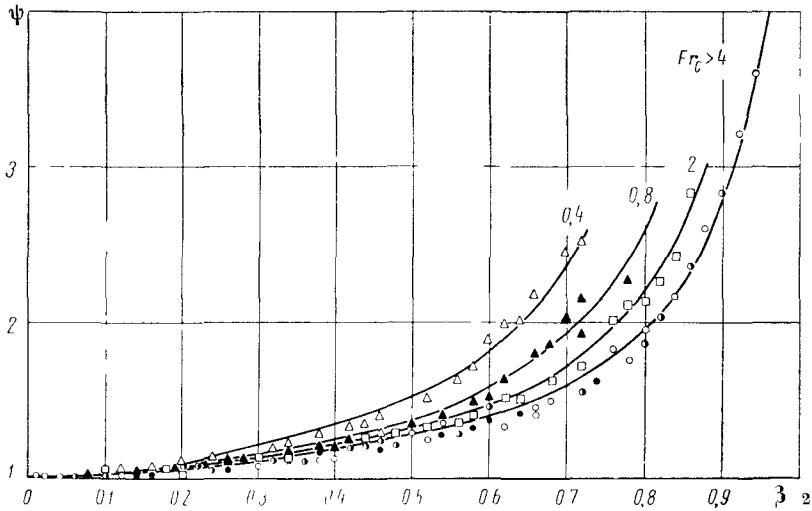


Рис. 71. Приведенный коэффициент гидравлического сопротивления, определенный по истинному динамическому напору, в функции расходного газосодержания и критерия Фруда. $\alpha = 0°$.

Уменьшение коэффициента гидравлического сопротивления смеси λ_c (или приведенного коэффициента сопротивления ψ) с ростом числа Fr_c для значений последнего, меньших 4, объясняется также определенной закономерностью изменения относительной скорости движения компонентов смеси или истинного газосодержания φ_2 с ростом критерия Fr_c, которая была установлена в гл. 6.

Для значений критерия $Fr_c > 4$ истинное газосодержание является функцией расходного и не зависит от числа Фруда. Вследствие этого не прослеживается влияние критерия Fr_c на коэффициент гидравлического сопротивления смеси.

Таким образом, для зависимости коэффициента гидравлического сопротивления (как и для истинного газосодержания) от критерия Фруда имеется зона автомодельности. Приведенные на рис. 70 и 71 экспериментальные данные получены при движении воздухо-водяной смеси в трубопроводе диаметром 56 *мм*. Подтверждением общности приведенной зависимости служат также экспериментальные данные

Н. И. Семенова, полученные им ранее при исследовании течения газожидкостных смесей в горизонтальных трубах диаметром 25, 48, 76 и 100 *мм*.

Обработка этих данных с учетом закономерностей изменения истинного газосодержания, приведенных в гл. 6, позволяет сопоставить результаты всех наших исследований (рис. 72). Кривые на рис. 72 относятся к осредненным значениям ψ по всем нашим экспериментальным данным, а точки — к данному диаметру.

Как видно на рис. 72, удовлетворительная сходимость опытных данных наблюдается при всех значениях критерия Fr_c независимо от диаметра трубопровода во всем интервале изменения расходного газосодержания $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_{кр}$, где $\beta_{кр}$ — соответствует переходу пробковой структуры течения смеси в расслоенную.

Хорошая сходимость экспериментальных данных, относящихся к трубам различных диаметров, по приведенному коэффициенту гидравлического сопротивления, свидетельствует о том, что, во-первых, влияние диаметра трубопровода в достаточной степени учитывается критерием Fr_c и, во-вторых, величина ψ не зависит от гидравлической характеристики экспериментального трубопровода, т. е. влияние Re_c и относительной шероховатости в достаточной мере учитывается через коэффициент гидравлического сопротивления однородной жидкости.

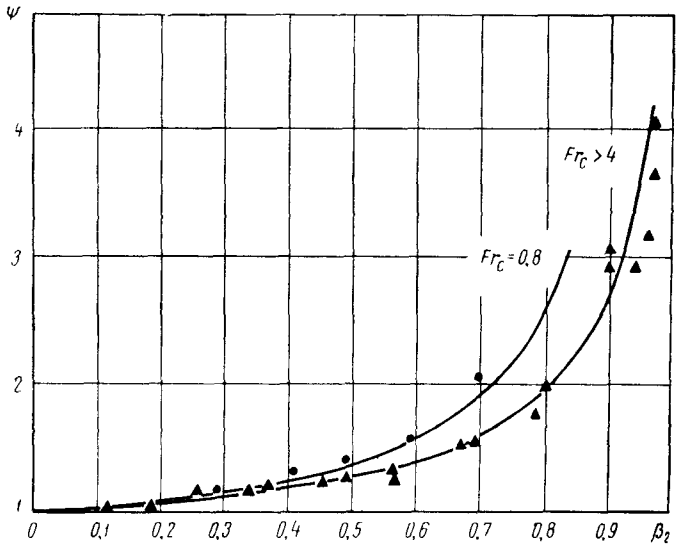
Таким образом, кривые на рис. 72 являются графической формой зависимости гидравлического и приведенного коэффициентов сопротивления от расходного газосодержания и критерия Fr_c при значениях избыточного давления, близких к атмосферному.

Зависимость приведенного коэффициента гидравлического сопротивления от критериев $\dot{\mu}$ и Re_c

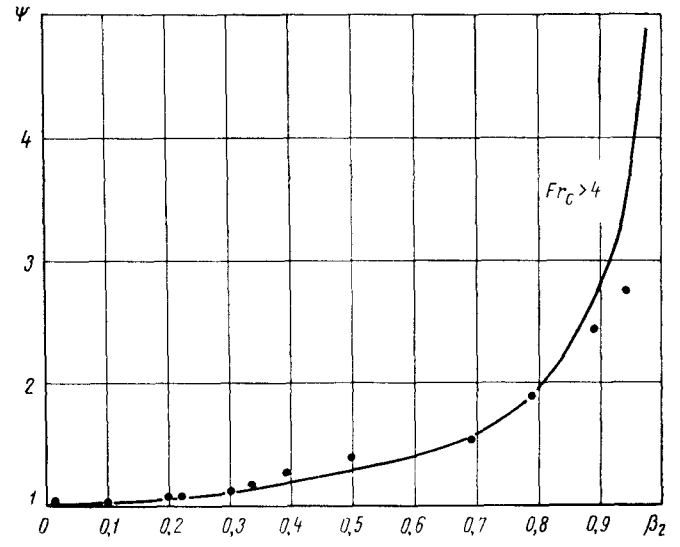
В гл. 2 было показано, что при ламинарном расслоенном режиме течения газо-жидкостной смеси приведенный коэффициент сопротивления существенно зависит от критерия $\dot{\mu}$. При турбулентном режиме течения смеси также прослеживается определенное влияние критерия $\dot{\mu}$ на коэффициент гидравлического сопротивления, что экспериментально доказано для расслоенной структуры потока.

Для пробковой структуры течения смеси влияние критерия $\dot{\mu}$ на приведенный коэффициент сопротивления ψ (или λ_c) может быть определено путем сопоставления различных экспериментальных данных.

На рис. 73 приведены результаты сопоставления экспериментальных данных, относящихся к течению смеси воздух — вязкая жидкость (точки) с данными по движению воздухо-водяной смеси в горизонтальных трубах (сплошная кривая). Как видим, изменение параметра $\dot{\mu}$ в 3,66 раза не повлияло на приведенный коэффициент гидравлического сопротивления ψ.


ψ
4
3
2
1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
β2
Fr_C > 4
Fr_C = 0,8

а


ψ
4
3
2
1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
β2
Fr_C > 4

б

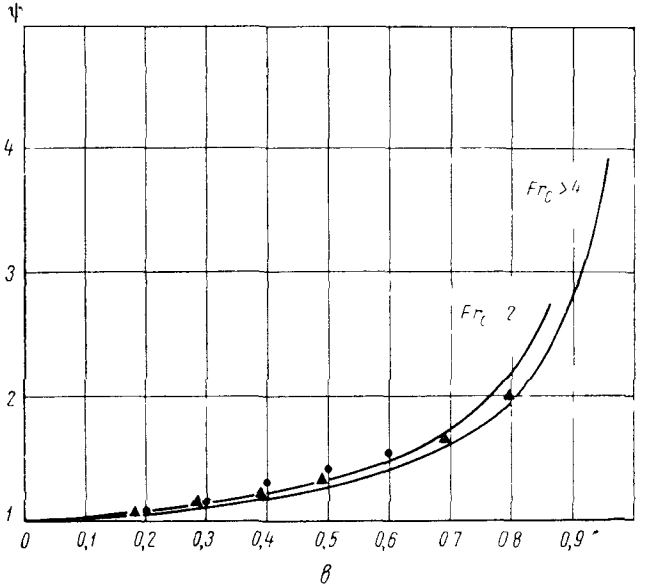


Рис. 72. Приведенный коэффициент сопротивления в функции β и Fr_C.

а — для $D = 25$ *мм*, *б* — для $D = 74{,}7$ *мм*, *в* — для $D = 99{,}8$ *мм*.

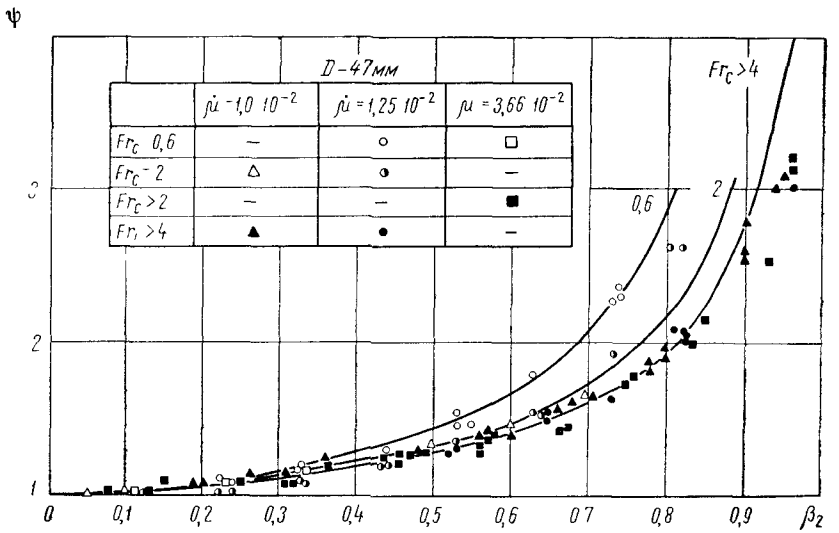


Рис. 73. Влияние μ_1 на приведенный коэффициент сопротивления.

Обработанные таким образом опытные данные по течению смеси воздух — вязкая жидкость в стеклянном трубопроводе также свидетельствуют об отсутствии влияния почти двадцатикратного изменения параметра $\dot{\mu}$ на приведенный коэффициент гидравлического сопротивления.

На рис. 74 приведены опытные данные ($Fr_c = 0{,}8$), относящиеся к жидкостям различной вязкости при пробковой структуре течения газо-жидкостной смеси в горизонтальном стеклянном трубопроводе, свидетельствующие об отсутствии влияния критерия $\dot{\mu}$ на ψ (кривая — осредненные данные для смеси воздух — вода).

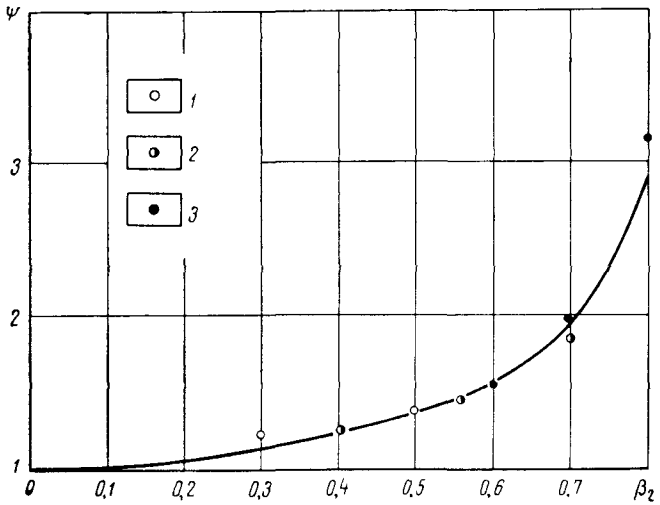


Рис. 74. Влияние μ_1 на приведенный коэффициент сопротивления.

1 — $\mu_1 = 5$ *спз*; *2* — $\mu_1 = 8$ *спз*; *3* — $\mu_1 = 18$ *спз*.

Изменение вязкости жидкостного компонента смеси, естественно, сказывается на значении коэффициента гидравлического сопротивления смеси λ_c, особенно при течении в стеклянных трубах. Однако с повышением вязкости жидкости увеличивается коэффициент сопротивления однородной жидкости. Оба эти эффекта в значительной степени компенсируют влияние параметра $\dot{\mu}$ на приведенный коэффициент гидравлического сопротивления ψ.

Таким образом, можно считать, что при пробковой структуре течения газо-жидкостной смеси приведенный коэффициент сопротивления не зависит от критерия $\dot{\mu}$. Следовательно, этот коэффициент не зависит и от критерия Re_c, как это было показано для ламинарного течения. В самом деле, поскольку в общем случае критерии Re_c и Fr_c связаны соотношением (211′)

$$Re_c = f(Fr_c, D, \dot{\mu}, \dot{\rho}, \beta, \varphi),$$

то при $\varphi = idem$, $Fr_c = idem$, $\dot{\rho} = idem$, $\beta = idem$ изменением μ и D можно добиться изменения Re_c в широких пределах. А это означает, что в точке $\psi = idem$, $\beta = idem$ и $Fr_c = idem$ Re_c меняется, т. е. приведенный коэффициент ψ не зависит от Re_c. Поэтому представление λ_c в виде произведения $\lambda_c = \lambda (Re_c, \varepsilon)\, \psi$ можно считать оправданным и при турбулентном течении газо-жидкостной смеси.

Влияние угла наклона трубопровода на коэффициент гидравлического сопротивления

В гл. 6 было показано, что ориентация трубопровода в пространстве оказывает весьма существенное влияние на закономерности изменения истинного газосодержания из-за влияния угла наклона трубы на структуру течения смеси. Со сменой структур течения смеси меняются закономерности изменения истинного газосодержания, что в свою очередь может повлиять на коэффициент гидравлического сопротивления λ_c.

Оценить влияние угла наклона трубопровода на коэффициент гидравлического сопротивления можно путем сопоставления соответствующих опытных данных, относящихся к течению смеси в горизонтальных и наклонных трубах.

Опыты показали, что в пределах существования пробковой структуры течения смеси ориентация трубопровода в пространстве не оказывает заметного влияния на коэффициент гидравлического сопротивления. Однако область применимости закономерностей изменения коэффициента гидравлического сопротивления, установленная для пробковой структуры течения смеси в горизонтальном трубопроводе, существенно зависит от угла наклона.

Закономерности изменения коэффициента гидравлического сопротивления, полученные для горизонтального пробкового течения газо-жидкостной смеси, могут быть перенесены на восходящие потоки смеси вследствие наличия пробковой структуры течения почти во всем интервале изменения расходного газосодержания $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

На рис. 75 дано сопоставление экспериментальных данных, относящихся к течению газо-жидкостной смеси в горизонтальных и наклонных трубах при нисходящем ($н$) и восходящем ($в$) движениях потока. Опытные точки, относящиеся к восходящему течению смеси в наклонной трубе, при различных значениях Fr_c хорошо согласуются и дополняют соответствующие данные по горизонтальным трубам. На рис. 75 не приведены данные о нисходящем течении смеси для значений числа $Fr_c \leqslant 2$, что объясняется полным отсутствием ($Fr_c = 0{,}4$ и $0{,}8$) или очень малой областью существования ($Fr_c = 2$) пробковой структуры течения смеси при исследуемых значениях угла наклона трубы.

Как и в горизонтальных трубах, с ростом Fr_c уменьшается λ_c и при значениях $Fr_c > 4$ получается общая закономерность изменения коэффициента гидравлического сопротивления, не зависящая

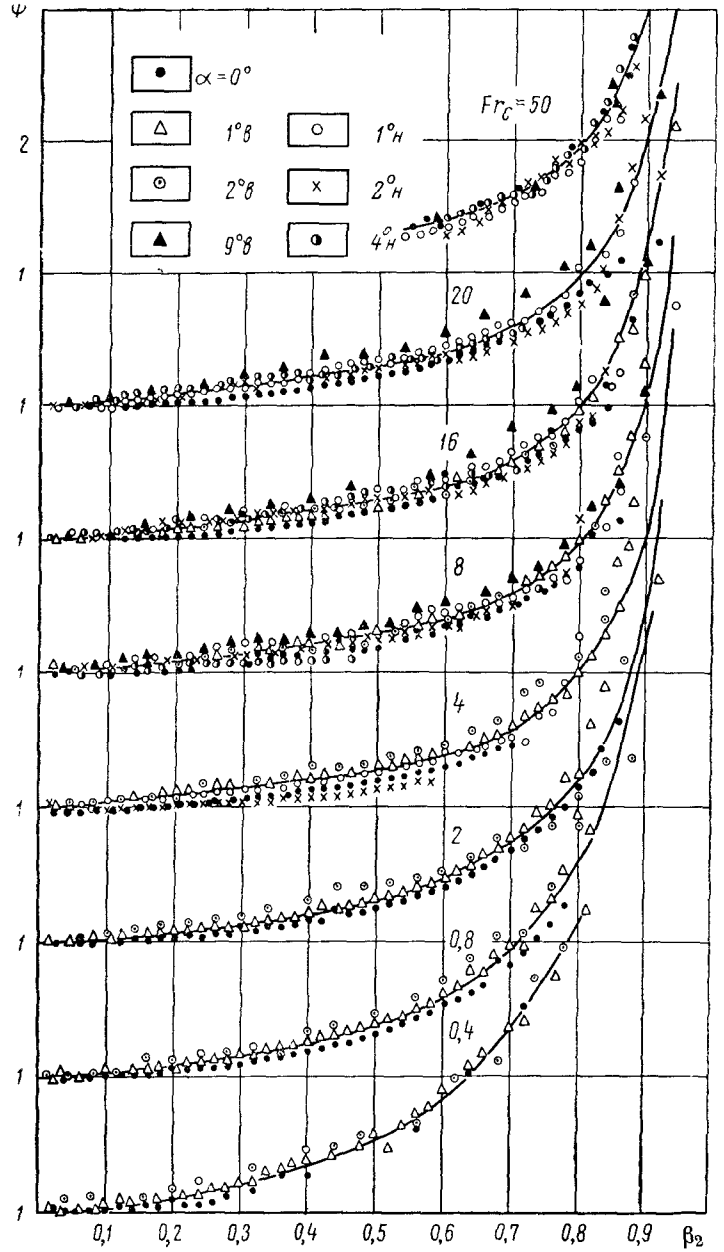


Рис. 75. Зависимость приведенного коэффициента сопротивления от расходного и критерия Фруда для горизонтальных и наклонных течений при пробковой структуре.

от угла наклона и критерия Фруда. Сказанное иллюстрируется рис. 75, где видна удовлетворительная сходимость опытных данных, относящихся к горизонтальному и восходящему течениям смеси в наклонных трубах при соответствующих значениях критерия Fr_c.

Максимальное отклонение опытных данных от осредненных значений ψ наблюдается при значительных углах наклона трубы ($\alpha = 9°$), что объясняется влиянием веса столба смеси на точность определения потерь напора на трение.

Доказательством этому служит лучшая сходимость опытных данных при малых газосодержаниях ($\beta_2 < 0{,}3$), когда величина истинного газосодержания мала, а потери напора на трение имеют максимальное значение при фиксированном Fr_c.

А. А. Арманд [4] отметил при течении смеси в вертикальных трубах по сравнению с горизонтальными незначительное (примерно 5—10%) увеличение потерь напора на трение в зоне малых газосодержаний ($\beta_2 < 0{,}3$). По-видимому, отмеченное А. А. Армандом влияние угла наклона — это итог некоторых ошибок, заложенных в методе измерения сил трения при вертикальном или горизонтальном расположении трубы, поскольку в опытах авторов для этой зоны вес столба смеси на измерительном участке практически уравновешивался столбом жидкости в импульсных трубах дифманометров, т. е. точность измерения потерь напора на трение была достаточной, однако влияние угла наклона не замечено.

Для нисходящего течения газо-жидкостной смеси при пробковой структуре течения смеси также не замечено влияние угла наклона трубы на коэффициент гидравлического сопротивления, что следует из хорошей сходимости опытных данных для горизонтальных и наклонных труб.

Таким образом, можно отметить, что закономерности изменения коэффициента гидравлического сопротивления, установленные для горизонтального течения смеси, применимы и для наклонных труб в пределах *пробковой структуры течения газо-жидкостной* смеси.

Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от критериев $\dot{\rho}$ и We

Критерий $\dot{\rho}$ непосредственно входит в расчетную формулу (55) для коэффициента гидравлического сопротивления, поэтому при определенных условиях его влияние может стать существенным.

Чтобы определить влияние критерия $\dot{\rho}$, А. А. Точигин и Н. И. Семенов [45] провели серию опытов на экспериментальной установке, схема которой изображена на рис. 22. Исследования проводились на вертикальной трубе диаметров 17 и 30 *мм* при давлении 20, 40, 70 и 120 *бар* с паро-водяной смесью. Отработанные в координатах ψ и β_2 данные этих исследований приведены на рис. 76 для критерия $Fr_c > 4$, т. е. в автомодельной зоне.

На рис. 76 видно, что с ростом плотности газовой фазы приведенный коэффициент сопротивления уменьшается, приближаясь к значению $\psi = 1$, во всем интервале изменения расходного газосодержания, что является следствием сближения физических свойств компонентов смеси с ростом плотности газовой фазы.

При критическом давлении наступает однородное течение и ψ становится равным единице. Практически уже при $p \geqslant 120$ *бар* паро-водяная смесь с точки зрения сопротивления трения ведет себя, как однофазная жидкость, и отклонение λ_c от λ (Re_c, ε) не превышает 10%.

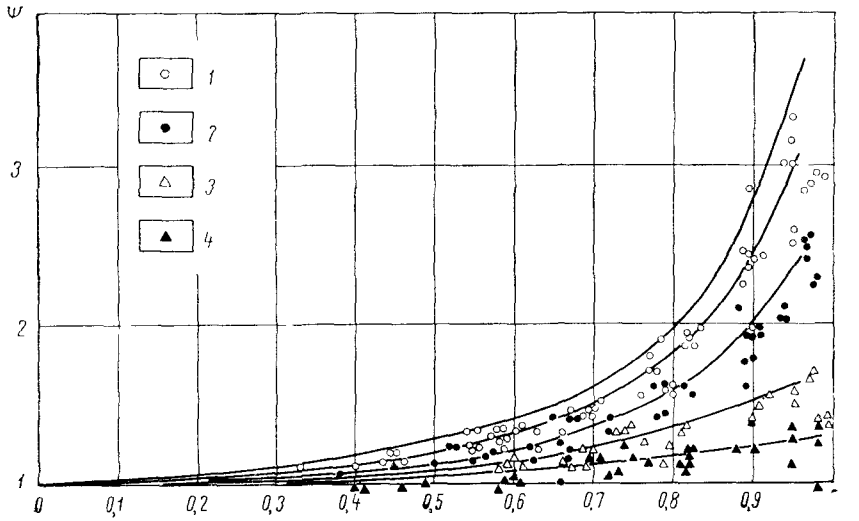


Рис. 76. Влияние критерия $\dot{\rho}$ (избыточное давление в трубе) на приведенный коэффициент сопротивления при $Fr_c > 4$ (автомодельная зона).

1 — $p = 20$ *бар*; *2* — $p = 40$ *бар*; *3* — $p = 70$ *бар*; *4* — $p = 120$ *бар*.

Чтобы исследовать влияние критерия We на гидравлическое сопротивление при движении газо-жидкостной смеси, авторы провели серию опытов. Использовался водный 1—1,5%-ный раствор изоамилового спирта. Такие же эксперименты проведены Г. С. Лутошкиным и Е. Г. Леоновым.

Все опыты показали, что при уменьшении поверхностного натяжения почти в три раза не изменяются ни гидравлическое сопротивление, ни истинное газосодержание, если не происходит интенсивного и устойчивого пенообразования. В последнем случае требуется специальное исследование.

При указанном условии коэффициент гидравлического сопротивления трения не зависит от критерия We.

Таким образом, приведенный коэффициент гидравлического сопротивления трения зависит только от расходного газосодержания,

критерия Фруда смеси и приведенной плотности. На основании графических зависимостей рис. 71 и 76 для приведенного коэффициента сопротивления можно получить эмпирическую формулу вида

$$\psi = \frac{1 - 0{,}78\beta_2 \left[1 - \exp\left(-2{,}2\sqrt{\mathrm{Fr_c}}\right)\right] - 0{,}22\beta_2 \left[1 - \exp\left(-15\rho\right)\right]}{\beta_1}, \qquad (221)$$

где $0 \leqslant \beta_2 \leqslant 0{,}85$

ПРИВЕДЕННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ПО УСЛОВНОМУ ДИНАМИЧЕСКОМУ НАПОРУ

Под условным динамическим напором, как было сказано в гл. 1, понимается выражение

$$H_{\text{у}} = \frac{\rho_\beta w_{\text{c}}^2}{2} = \frac{\mathrm{Fr_c} D}{2} g\rho_\beta,$$

где

$$w_{\text{c}} = \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2; \quad \rho_\beta = \rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2.$$

Коэффициент гидравлического сопротивления трения в этом случае экспериментально определяется из выражения (57)

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = \lambda_{\text{у}} \frac{w_{\text{c}}^2 \rho_\beta}{2D}.$$

Если учесть инерционный член, который напишем без учета скорости скольжения ($\varphi = \beta$), то для определения $\lambda_{\text{у}}$ можно вывести нужное соотношение. Из уравнения

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda_{\text{у}} w_{\text{c}}^2 \rho_\beta}{2D} + \rho_\beta w_{\text{c}} \frac{dw_{\text{c}}}{dz},$$

которое получаем из [48], находим

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda_{\text{у}} G_{\text{c}} w_{\text{c}}}{2FD} + \frac{G_{\text{c}}}{F} \frac{dw_{\text{c}}}{dz}, \qquad (222)$$

так как в этом случае $w_{\text{c}} = \varphi_1 w_1$ и изменение скорости происходит из-за расширения газа по мере изменения давления по длине трубы.

Вследствие большой теплоемкости жидкости (она много выше теплоемкости газа, а теплообмен между жидкостью и газом и между смесью и внешней средой происходит интенсивно в результате большой турбулентности потока смеси) будем считать, что расширение газа происходит изотермически.

Такое условие дает возможность перейти от переменной w_c к переменной давления p. Для этого выразим скорость смеси через $w_c = (G_c/F\rho_\beta)$. Но так как

$$\frac{1}{\rho_\beta} = \frac{Q_c}{G_c} = \frac{\frac{G_1}{\rho_1} + \frac{G_2}{\rho_2}}{G_c} = \frac{\eta_1}{\rho_1} + \frac{\eta_2}{\rho_2}, \qquad (222')$$

а

$$p = g\rho_2 RT,$$

то

$$\frac{1}{\rho_\beta} = \frac{\eta_2 RT}{p} + \frac{\eta_1}{\rho_1} \quad \text{и} \quad d\left(\frac{1}{\rho_\beta}\right) = \frac{\eta_2 RT}{p^2}\,dp.$$

Подставив эти значения в (222), найдем

$$\frac{\lambda_y}{2D}\,dx = \frac{a\,dp}{p\,(a+p)} - \frac{\rho_1 F^2}{G_c^2 \eta_1}\,\frac{p\,dp}{a+p}, \qquad (223)$$

где $a = \frac{\eta_2}{\eta_1} RT\rho_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1} p$ постоянно для любого сечения трубы F.

Произведем интегрирование от x_1 до x_2 ($x_2 - x_1 = \Delta l$) и от p_1 до p_2, получим

$$\lambda_y \frac{\Delta l}{2D} = -\ln\frac{p_1\,(a+p_2)}{p_2\,(a+p_1)} + \frac{\rho_1 F^2}{G_c^2\eta_1}\left[p_1 - p_2 - a\ln\frac{a+p_1}{a+p_2}\right]. \qquad (224)$$

Разложим логарифмы в ряд и ограничимся первым членом разложения

$$\ln\frac{p_1\,(a+p_2)}{p_2\,(a+p_1)} = \frac{2a\,(p_1-p_2)}{a\,(p_1+p_2)+2p_1p_2} + \ldots; \qquad \ln\frac{a+p_1}{a+p_2} = \frac{2\,(p_1-p_2)}{2a+p_1+p_2} + \ldots$$

Тогда

$$p_1p_2 = (p_{cp})^2 - \left(\frac{\Delta p}{2}\right)^2 = p_{cp}^2\left(1 - \frac{\Delta p^2}{4p_{cp}^2}\right)$$

и

$$a = p_{cp}\,\frac{\beta_{2cp}}{\beta_{1cp}}.$$

Используя эти упрощения, после несложных преобразований из (224) получим

$$\lambda_y = D\,\frac{\Delta p}{\Delta l}\left\{\frac{1}{H_y} - \frac{2\beta_2}{p\left[1-\left(\frac{\Delta p}{2p}\right)^2\beta_1\right]}\right\}. \qquad (225)$$

Газосодержание соответствует среднему давлению p, индекс «ср» опущен.

При $p \geqslant 15{,}8\cdot\Delta p$ величина $(\Delta p/2p)^2\,\beta_1 \leqslant 0{,}001$. Не внося больших погрешностей в λ_y, последней величиной можно пренебречь, тогда получим

$$\lambda_y = D\,\frac{\Delta p}{\Delta l}\left\{\frac{1}{H_y} - \frac{2\beta_2}{p}\right\}. \qquad (226)$$

В этом случае коэффициент гидравлического сопротивления также выражен через легко измеряемые величины, а потому может быть определен экспериментально.

По формулам (57) и (226) были обработаны экспериментальные данные авторов. Приведенный коэффициент сопротивления в функции расходного газосодержания β_2 и критерия Fr_c представлен на рис. 77. Здесь на пунктирных линиях нет экспериментальных точек и их начало является переходной зоной от пробковой структуры течения к разделенной.

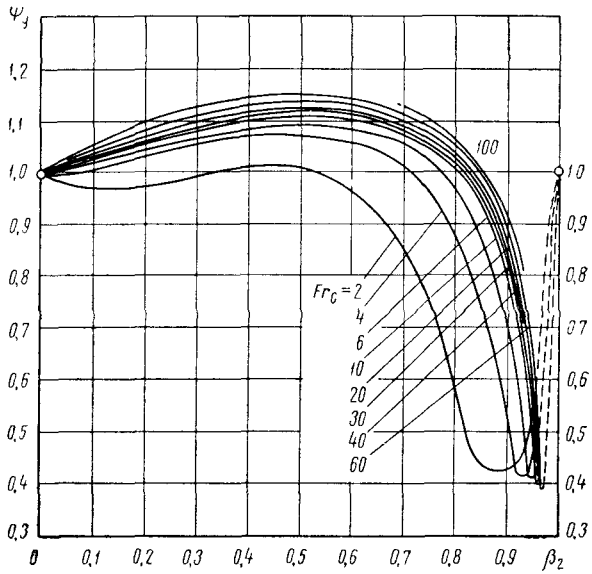


Рис. 77. Приведенный коэффициент сопротивления, определенный по условному динамическому напору, в функции расходного газосодержания и критерия Фруда (данные для пяти различных диаметров труб; с учетом и без учета сжимаемости).

Все кривые этого рисунка можно подразделить на две группы: к первой относятся кривые, для которых ψ_y остается меньше единицы при газосодержании от нуля до единицы; ко второй — кривые, которые начинаются с роста ψ_y от единицы при $\beta_2 = 0$ до некоторого максимума и спада до минимума. Обе эти группы имеют общую граничную кривую с $\psi = 1$ в некоторой точке области $0 < \beta < 1$.

Максимальные значения коэффициента ψ_y для кривых второй группы растут с ростом скорости смеси и асимптотически приближаются к некоторому пределу.

Максимумы для разных скоростей лежат при средних газосодержаниях около 0,5, отклоняясь в ту и другую сторону на 15—20% от единицы.

Достигнув максимального значения, сопротивление с дальнейшим ростом газосодержания падает вначале медленно до единицы и резко до значений 0,40—0,20.

Характер изменения ψ_v, очевидно, зависит от формы течений и пульсаций скоростей потока. Сопоставляя ход изменения ψ_y (β) при $Fr_c = idem$ со структурой потока, можно видеть, что спад ψ_y находится в области перехода от пробкового течения к разделенному, а минимальное его значение соответствует критическим скоростям смеси и газосодержаниям, характеризующим границу этого перехода.

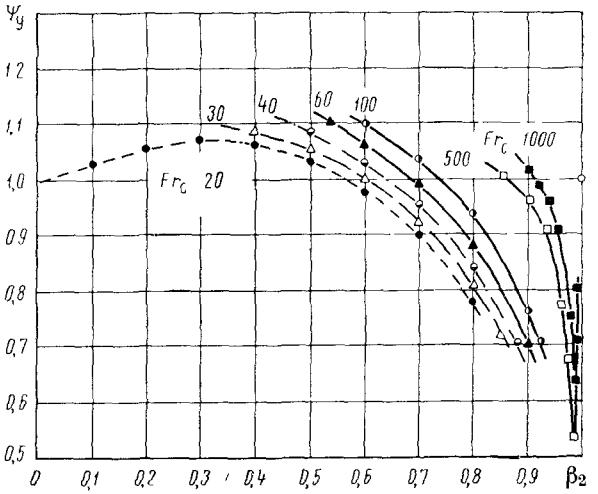


Рис. 78. Приведенный коэффициент сопротивления в функции расходного газосодержания и критерия Фруда. По опытным данным А. А. Арманда.

С изменением $Fr_c \leqslant 4$ сопротивление сильно изменяется. Для $Fr_c \geqslant 4$ оно становится мало заметным и все кривые укладываются в узкий пучок с отклонением от среднего на $\pm 2\%$. Практически при $Fr_c \geqslant 4$ сопротивление не зависит от последнего и максимальное его значение составляет 1,13 при $\beta_2 = 0{,}45 \div 0{,}50$.

То обстоятельство, что при $Fr_c \geqslant 4$ сопротивление не меняется ни от вязкости компонентов, ни от скоростей смеси, а зависит главным образом от газосодержания, находит, по-видимому, объяснение в пульсациях скоростей и давления. Наличие в потоке жидкости газовой фазы создает условия для появления макропульсаций в отличие от микропульсаций в потоке гомогенной жидкости, вызываемых вихревым движением. Макропульсации усиливают турбулентность настолько, что вязкие касательные напряжения в ядре потока становятся значительно меньше турбулентных и пульсационных при $Fr_c \geqslant 4$.

Для приведенного коэффициента гидравлического сопротивления, определенного по условному динамическому напору и гра-

фически представленному на рис. 77, предлагается эмпирическая формула

$$\psi_y = 1 + \frac{0{,}4\beta_1\beta_2\,(a'-\beta_2)}{(b'-\beta_2)^2}\left\{(0{,}82-\beta_2)\left[1-\frac{2\beta_1}{Fr_c}\right]-\frac{0{,}27}{Fr_c}\right\}. \qquad (227)$$

Величины (a') и (b') для $Fr_c < 4$ являются функциями от последнего, для $Fr_c \geqslant 4$ — постоянными величинами; $a' = 1{,}5$; $b' = 1{,}02$.

При $\beta = 0$ и 1 правая часть формулы обращается в единицу, что соответствует течению одной жидкости или одного газа.

Экспериментальные данные А. А. Арманда [4] по ψ_y (β) для $Fr_c = 20$, 30, 40, 60, 100, 500 и 10^3 показаны в виде графиков на рис. 78. Сопоставляя эти зависимости с аналогичными зависимостями

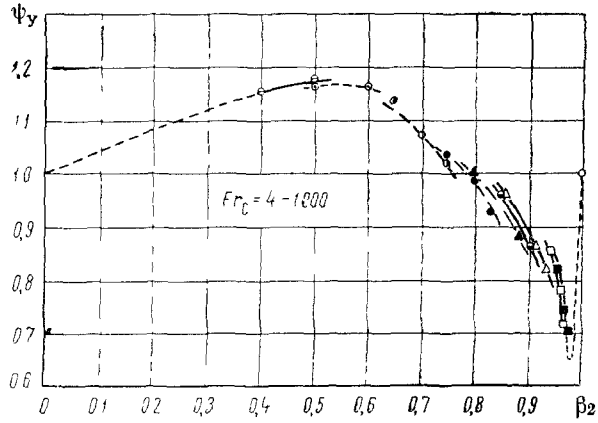


Рис. 79. ψ_y $(\beta,\ Fr_c)$. *По данным Л. Ю. Красяковой.*

рис. 77, можно видеть удовлетворительную их сходимость. Как те, так и другие характеризуют рост ψ_y с увеличением газосодержания, начиная с некоторого значения Fr_c, затем снижение до минимума и снова рост до единицы при $\beta_2 > 0{,}90$.

Опытные данные Л. Ю. Красяковой в тех же зависимостях показаны на рис. 79. Кривые ψ_y (β) при значениях Fr_c, равных 4, 6, 10, 20, 30, 40, 60, 100 и 1000, небольшими отрезками охватывают газосодержание от 0,4 и выше. Наибольшие расхождения между нашими данными и данными указанных исследователей наблюдаются в переходной зоне от пробкового течения к разделенному. Это несоответствие достигает 15%.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ РАЗДЕЛЕННОЙ СТРУКТУРЕ ТЕЧЕНИЯ СМЕСИ

Экспериментальные данные, приведенные на рис. 80, показывают, что коэффициент сопротивления при переходе из пробковой структуры в расслоенную изменяется не монотонно. Об этом же говорят

данные рис. 78, 79 (значения ψ_y при $\beta_2 > 0{,}85$ резко уменьшаются).

В гл. 1, исходя из общих уравнений гидродинамики двухфазных жидкостей, предложены осредненные уравнения одномерного разделенного течения (63) и (64). Здесь приводятся экспериментальные данные авторов для коэффициентов гидравлического сопротивления λ_1 и λ_2, рассчитанные по уравнению (64).

В целом приведенные на рис. 70—79 зависимости отражают закономерности изменения коэффициента гидравлического сопротивления в горизонтальных и наклонных трубах при пробковой

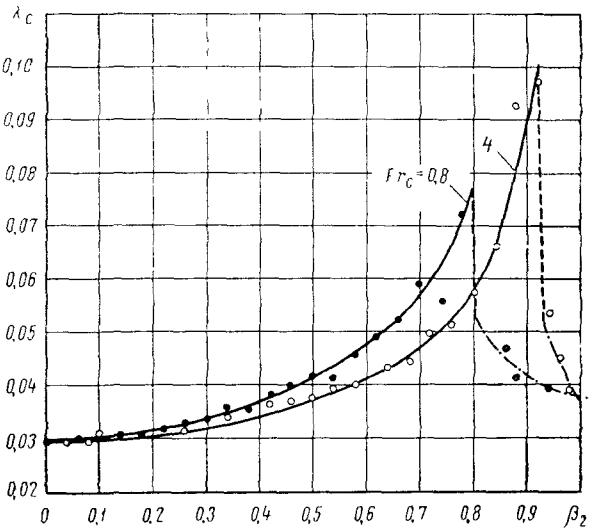


Рис. 80. Закономерность изменения коэффициента гидравлического сопротивления при пробковой (сплошная линия) и расслоенной (пунктирная линия) структурах течения смеси для значений Fr_c, равных 0,8 и 4.

структуре течения смеси, которая имеет место при значениях расходного газосодержания $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_{кр}$.

В точке $\beta = \beta_{кр}$ происходит смена структуры течения смеси и функция λ_c претерпевает резкое изменение. На рис. 80 приведены экспериментальные данные, отражающие закономерность изменения коэффициента гидравлического сопротивления λ_c в пробковой и расслоенной зонах течения смеси.

На этом рисунке видно, что смена структур течения смеси при прочих равных условиях приводит к изменению функциональной связи между коэффициентом сопротивления и определяющими критериями. Данное обстоятельство является одной из причин, вызывающих необходимость раздельного изучения основных гидравлических характеристик потока по соответствующим структурным

зонам (пробковой и расслоенной). Поэтому здесь будут рассмотрены данные, касающиеся λ_1 и λ_2 — коэффициентов гидравлического сопротивления трубопровода при течении компонента смеси, занимающего часть сечения трубы.

С гидравлической точки зрения движение жидкостной фазы смеси при расслоенной структуре течения можно рассматривать как некоторый аналог безнапорного режима течения жидкости в наклонной трубе. Следовательно, экспериментальное исследование закономерностей изменения коэффициентов λ_1 и λ_2, входящих в уравнение (64), можно свести к установлению зависимости $\lambda_{1\,(2)} = f(\mathrm{Re}_{1\,(2)};\ \varepsilon)$ на основании опытных данных по безнапорному режиму течения жидкости при соответствующих значениях чисел Рейнольдса и относительной шероховатости для различных углов наклона труб к горизонту.

Вследствие того что при безнапорном режиме течения жидкости потери напора на трение численно равны геометрическому уклону i, в процессе экспериментирования измерялись только доля сечения трубопровода, занятая жидкостью, и расход ее. Коэффициент гидравлического сопротивления жидкости λ_1 определялся по истинному газосодержанию и скорости w_1 по формуле

$$\lambda_1 = \frac{2i\varphi_1 gD}{w_1^2}\,\frac{\pi}{\pi-\theta}, \tag{228}$$

которая получается из (65) при условии $\beta_2 = 0$.

Известно, что для безнапорного течения жидкости с поверхностью раздела в гладких трубах коэффициент гидравлического сопротивления является функцией числа Re, в котором в качестве линейного размера используется гидравлический диаметр (отношение площади сечения к смоченному жидкостью периметру трубы, см. рис. 2), т. е.

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{\pi w_1 D\varphi_1}{\nu_1(\pi-\theta)} \tag{229}$$

и

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{w_2\pi D\varphi_2}{\nu_2\theta}. \tag{229'}$$

При аналогичном течении жидкости в шероховатых (металлических) трубах коэффициент гидравлического сопротивления определяется не только значением числа Рейнольдса, но и относительной шероховатостью труб $\varepsilon = k_э/D_{1\,(2)}$, где $k_э$ — эквивалентная шероховатость трубопровода, определенная гидравлическим путем; $D_{1\,(2)}$ — гидравлический диаметр.

Относительная шероховатость ε меняется в очень широких пределах даже для одного и того же трубопровода в результате изменения гидравлического диаметра $D_{1\,(2)}$. Поэтому влияние его на коэффициент сопротивления при определенных условиях становится весьма существенным.

Опыты показали, что при увеличении угла наклона экспериментального трубопровода при фиксированном значении числа Re растет коэффициент сопротивления λ_1, что является следствием возросшего влияния относительной шероховатости.

На рис. 81, где представлены экспериментальные данные, относящиеся к безнапорному режиму течения жидкости в наклонных трубах, прослеживается четкая зависимость коэффициента сопротивления λ_1 от относительной шероховатости ε и критерия Re.

Следует отметить также удовлетворительную сходимость указанных экспериментальных данных с расчетными значениями формул

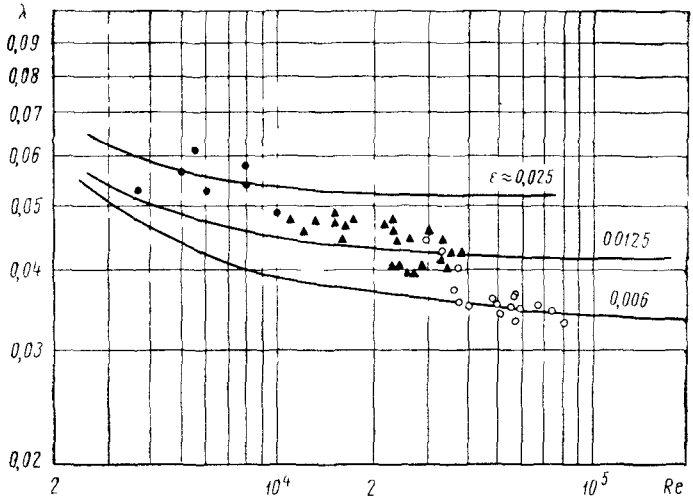


Рис. 81. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Re и относительной шероховатости для газовой и жидкой фаз при расслоенной структуре течения.

Колбрука — Уайта и ВНИИГаза, которые отражают закономерность изменения коэффициента гидравлического сопротивления от числа Re и относительной шероховатости при напорном режиме течения вязкой жидкости в трубах.

Вследствие этого расчетная формула

$$\lambda = 0{,}067\left[\frac{158}{\mathrm{Re}} + \frac{2k}{D}\right]^{0{,}2} \qquad (230)$$

была использована для определения числовых значений λ_1 и λ_2 по соответствующим значениям Re_1, Re_2 и ε_1, ε_2.

При сопоставлении расчетных значений потерь напора, определенных по уравнению (65), с опытными данными по течению газожидкостных систем в горизонтальных и наклонных (нисходящих) трубах видна удовлетворительная сходимость расчетных и фактических данных в пределах расслоенной структуры течения смеси.

Таблица 1

Сопоставление расчетных и опытных данных потерь напора на трение при расслоенной структуре течения смеси

Значения числа Fr_c, давления p и угла наклона трубы к горизонту	β_1	φ_1	$\bar{\theta}=\frac{\theta}{\pi}$	Re_2	Re_1	λ_2	λ_1	$\frac{\Delta p_T}{\Delta l}$, *мм вод ст.* (расчетные)	$\frac{\Delta p_T}{\Delta l}$, *мм вод. ст.* (опытные)
$Fr_c=50$,	0 01	0,08	0,76	$2,30\cdot10^4$	$6,50\cdot10^3$	0,028	0,055	5	4
	0,02	0 14	0,70	2,32	10,70	0 029	0,045	7	7
$p=1,04$ *бар*,	0,03	0,20	0,66	2,34	14,40	0,029	0 041	8	9
	0,04	0,24	0,63	2,35	18 10	0,029	0 038	10	10
$\alpha=2°$	0,05	0,27	0,62	2,35	21,70	0,030	0,037	13	13
$Fr_c=50$,	0,01	0,07	0,76	$2 30\cdot10^4$	$0,68\cdot10^4$	0 028	0,055	6	6
	0,02	0,12	0,72	2 30	1,14	0,029	0,048	9	10
$p=1,04$ *бар*,	0,03	0,15	0,69	2,30	1,56	0,029	0,044	13	12
	0,04	0 19	0,67	2,31	1,94	0,029	0 042	15	16
	0,05	0,22	0,65	2,31	2,32	0,030	0,040	18	18
$\alpha=4°$	0,06	0,25	0,63	2,32	2,65	0,030	0,040	20	21
	0,07	0,28	0,61	2,31	3,00	0,030	0 039	23	23
	0,08	0,30	0,60	2 29	3,38	0,030	0,038	27	25
$Fr_c=100$,	0,01	0,10	0,75	$3 28\cdot10^4$	$0,87\cdot10^4$	0,028	0,051	8	7
$p=1,05$ *бар*,	0,02	0,16	0,69	3,30	1,44	0,029	0 043	12	12
$\alpha=2°$	0,03	0,19	0,67	3,31	1,73	0,029	0,041	13	14
$Fr_c=100$,	0,01	0 09	0,75	$3,26\cdot10^4$	$0,89\cdot10^4$	0,028	0,052	9	9
$p=1 05$ *бар*,	0,02	0 14	0,70	3,28	1,51	0,029	0,044	13	14
$\alpha=4°$	0,03	0,18	0,68	3,29	2,11	0,029	0,041	19	19

В табл. 1 приведены расчетные и опытные данные о потерях напора на трение при нисходящем течении смеси в наклонном трубопроводе. Опытные данные относятся к расслоенной структуре течения смеси и охватывают всю область ее существования при значениях $Fr_c = 50$ и 100. Максимальное расхождение расчетных и опытных данных наблюдается при минимальных и максимальных значениях расходного газосодержания.

В первом случае расхождение вызвано невысокой точностью измерения истинного газосодержания, а во втором — интенсивным процессом волнообразования на поверхности раздела газ — жидкость.

В целом результаты сопоставления расчетных и опытных данных потерь напора на трение свидетельствуют о правомерности представления касательных напряжений, возникающих на поверхностях трубы, смоченных газом и жидкостью, через коэффициенты гидравлического сопротивления и динамические напоры обеих фаз. Причем для расслоенной структуры течения смеси с гладкой поверхностью раздела коэффициенты гидравлического сопротивления обеих фаз могут быть представлены в функции числа Рейнольдса, выраженного через гидравлический диаметр соответствующей фазы и относительной шероховатости.

При наличии волн на поверхности раздела часть энергии движущегося потока расходуется на поддержание и дальнейшее развитие процесса волнообразования, что не учитывается уравнением (65). В результате этого для волнового режима течения смеси кривая распределения давления по длине расчетного участка трубопровода, полученная по уравнению (65), будет несколько выше фактической. На основании данных табл. 1 можно предполагать, что это отклонение не превысит 15%.

Чтобы создать уточненный метод расчета волнового режима течения смеси, необходимо знать закономерности изменения коэффициента взаимодействия для учета сил межфазового трения.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

МЕТОДЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТРУБОПРОВОДОВ

Экспериментальные зависимости истинного газосодержания и коэффициента гидравлического сопротивления от определяющих критериев замыкают систему уравнений для одномерного установившегося течения смеси, которая в самом общем случае доводится до интегральных соотношений двух переменных. Этими переменными могут быть, например, координаты и давление, скорость смеси и давление, истинное газосодержание и скорость и т. д. В переменные не входит удельный тепловой поток от стенки к смеси или от смеси к стенке, так как зависимости для φ и λ определялись для течения смесей в необогреваемых трубах.

Первое уравнение выражает постоянство расхода смеси, запишем его в виде

$$\varphi_1\rho_1 w_1 + \varphi_2\rho_2 w_2 = G_c = \text{idem}. \tag{231}$$

Уравнение движения с учетом предыдущих соотношений примет вид

$$-\frac{dp}{dz} = -g\rho_\varphi \cos(g, z) + \frac{\lambda_c}{2DF^2} G_c^2 \left(\frac{\eta_1^2}{\varphi_1\rho_1} + \frac{\eta_2^2}{\varphi_2\rho_2}\right) + \\ + G_c^2 \frac{d}{F^2\, dz}\left(\frac{\eta_1^2}{\varphi_1\rho_1} + \frac{\eta_2^2}{\varphi_2\rho_2}\right) \tag{232}$$

или

$$-\frac{1 + G_c^2 \dfrac{d}{F^2\, dp}\left(\dfrac{\eta_1^2}{\varphi_1\rho_1} + \dfrac{\eta_2^2}{\varphi_2\rho_2}\right)}{\dfrac{\lambda_c}{2DF^2} G_c^2 \left(\dfrac{\eta_1^2}{\varphi_1\rho_1} + \dfrac{\eta_2^2}{\varphi_2\rho_2}\right) - g\rho_\varphi \cos(g, z)} dp = dz. \tag{233}$$

Все переменные величины, входящие в левую часть последнего равенства, можно выразить через давление. Мы получим некоторую функцию от p, $F(p)$, и тогда

$$z = -\int F(p)\, dp + C.$$

Для газо-жидкостных течений, если пренебречь растворимостью газа в жидкости, массовая концентрация газа остается постоянной

$$\eta = \text{idem}. \tag{234}$$

Для жидкого компонента с большой степенью точности можно считать, что и

$$v_1 = \text{idem}. \tag{235}$$

При изометрическом течении используется уравнение состояния для газового компонента

$$pv_2 = RT, \tag{236}$$

где $v = 1/g\rho$, а при хорошо изолированных трубопроводах уравнение адиабаты для смеси легко выводится из уравнения энергии.

Пренебрегая работой вязких напряжений как заведомо малой величиной, уравнения энергии напишем в виде

$$\eta_1 di_1 + \eta_2 di_2 - (\eta_1 v_1 + \eta_2 v_2)\, dp = 0$$

или

$$\eta_1 du_1 + \eta_2 du_2 + (\eta_1 dv_1 + \eta_2 dv_2)\, p = 0.$$

Выражая дифференциалы энтальпии и внутренней тепловой энергии через теплоемкости и дифференциал температуры смеси, т. е. написав

$$di_1 = C_{p1}\, dT; \quad di_2 = C_{p2}\, dT; \quad du_1 = C_{v1}\, dT; \quad du_2 = C_{v2}\, dT,$$

получим

$$p\,(\eta_1 v_1 + \eta_2 v_2)^{\frac{C_{p\,c}}{C_{v\,c}}} = \text{idem}, \tag{237}$$

где

$$C_{p\,c} = \eta_1 C_{p1} + \eta_2 C_{p2}; \quad C_{v\,c} = \eta_1 C_{v1} + \eta_2 C_{v2}.$$

В выражение (232) входит истинное газосодержание и коэффициент гидравлического сопротивления, которые в общем случае являются функциями расходного объемного газосодержания, критерия Фруда смеси и давления или физических свойств компонентов. Используя одно из равенств (236) или (237) и уравнение непрерывности, эмпирические зависимости для φ и λ_c можно выразить через давления.

Например, расходную объемную концентрацию и число Fr_c можно записать в виде

$$\beta_2 = \frac{\eta_2 v_2}{\eta_1 v_1 + \eta_2 v_2}, \tag{238}$$

$$\mathrm{Fr}_c = \frac{w_c^2}{gD} = \frac{G_c^2}{gDF^2}\,(\eta_1 v_1 + \eta_2 v_2) \tag{239}$$

(v_2, согласно (236) или (237), зависит только от давления).

Для паро-жидкостных течений массовая концентрация будет переменной величиной и определяется из условия постоянства энтропии смеси для хорошо теплоизолированных трубопроводов

$$\eta = \frac{S_c - S_1}{S_2 - S_1} \tag{240}$$

и при незначительном теплоотводе q

$$\eta = \frac{S_c - S_1 + q\frac{1}{T}}{S_2 - S_1}. \tag{241}$$

Энтропия и удельные объемы компонентов смеси в этом случае являются функциями давления насыщения, как и φ и λ.

Рассмотрим некоторые частные случаи течения смесей по трубе.

ТЕЧЕНИЕ ГАЗО-ЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРУБЕ

а. Коэффициент гидравлического сопротивления $\lambda_c = \text{idem}$. В горизонтальной трубе вследствие большой турбулентности потока и хорошего теплообмена с внешней средой течение смеси можно рассматривать как изотермическое. Истинное газосодержание из-за его слабой зависимости от числа Фруда и давления для пробковой структуры течения принимает вид

$$\varphi_2 = k\beta_2, \tag{242}$$

где k — коэффициент, который определяется по начальному значению Fr_c по формуле $k = 0{,}81\left(1 - e^{-2{,}2\sqrt{\mathrm{Fr}_c}}\right)$.

Поскольку коэффициент гидравлического сопротивления слабо зависит от Fr_c и давления, необходимо рассматривать $\lambda = \lambda(\beta)$. Но в качестве первого приближения считаем его неизменным. Такое допущение оправдывается в том случае, когда газосодержание не сильно меняется по длине трубы.

Заменив (242) β его выражением из (238) и подставив затем значение φ в (232), получим

$$\frac{\eta_1^2}{\varphi_1\rho_1} + \frac{\eta_2^2}{\varphi_2\rho_2} = v_c\left[\frac{\eta_1^2 v_1}{\eta_1 v_1 k + (1-k)v_c} + \frac{\eta_2}{k}\right].$$

Используя (236) для исключения удельного объема газа, окончательно получаем

$$Q(p) = G_c^2\left(\frac{\eta_1^2}{\varphi_1\rho_1} + \frac{\eta_2^2}{\varphi_2\rho_2}\right) = \frac{a_1(a_2p+1)(a_3p+1)}{p(a_4p+1)}, \tag{243}$$

где

$$a_1 = \frac{G_c^2\eta_{2*}^2 gRT}{k},$$

$$a_2 = \frac{\eta_1 v_1}{\eta_{2*}^2 RT}, \tag{244}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1-k}\left(1 + k\frac{\eta_1}{\eta_2}\right),$$

$$a_4 = \frac{a_2}{1-k}.$$

После этих преобразований, имея в виду, что $\cos(g, z) = 0$, соотношение (232) запишется в виде

$$\int_{p_к}^{p_н} \frac{dp}{Q(p)} + \int_{p_к}^{p_н} \frac{dQ(p)}{Q(p)} = \frac{\lambda_c}{2D} z$$

или после интегрирования

$$p_н - p_к - b_1 \ln\frac{a_2 p_н + 1}{a_2 p_к + 1} - b_2 \ln\frac{a_3 p_н + 1}{a_3 p_к + 1} +$$

$$+ b_3 \ln\frac{(a_2 p_н + 1)(a_3 p_н + 1)(a_4 p_н + 1)}{(a_2 p_к + 1)(a_3 p_к + 1)(a_4 p_н + 1)} = b_3 \frac{\lambda_c}{2D} z, \qquad (245)$$

где

$$b_1 = \frac{\eta_2 + k\eta_1}{a_2};$$

$$b_2 = \frac{\eta_1\eta_2(1-k)^2}{a_2(\eta_2 + k\eta_1)}; \qquad (246)$$

$$b_3 = \frac{G_c^2 v_1 \eta_1 (\eta_2 + k\eta_1)}{k}.$$

Выражение с коэффициентом b_3 представляет собой перепад давления, зависящий от изменения количества движения по направлению течения смеси.

В некоторых случаях удобнее вести отсчет давления от конечного его значения. Тогда в выражении (245) достаточно сделать перестановку индекса у давления: $p_н$ заменить текущим давлением, а $p_к$ — начальным. Отсчет z в этом случае ведется против течения, т. е. от координаты, в которой $p = p_к$.

Распределение давления, вызванное потерями его на ускорение потока, определяется из (232) с использованием подстановки (243), т. е.

$$p_н - p_у = a_1\left[\frac{(a_2 p + 1)(a_3 p + 1)}{p(a_4 p + 1)} - \frac{(a_2 p_н + 1)(a_4 p_н + 1)}{p_н(a_4 p_н + 1)}\right], \qquad (247)$$

где p — функция z, определяемая по (245).

б. Коэффициент гидравлического сопротивления определяется эмпирической формулой (221).

Чтобы сделать гидравлический расчет трубопровода, транспортирующего газо-жидкостные смеси со значительным изменением расходного газосодержания ($0 \leqslant \beta \leqslant 0{,}85$), проинтегрируем уравнение (232) в предположении изменяемости коэффициента гидравлического сопротивления от расходного газосодержания β в соответствии с эмпирической зависимостью (221).

При этом остается необходимость осреднения коэффициента сопротивления по значению критерия $\dot{\rho}$, так как в общем случае, когда коэффициент λ_c считается функцией критериев β, Fr_c, $\dot{\rho}$ интегрирование уравнения (232) становится невозможным.

Однако в указанных пределах изменения расходного газосодержания и при значении избыточного давления меньше 40 *бар* влияние критерия $\dot{\rho}$ не существенно. С учетом этого эмпирическая зависимость (221) может быть несколько упрощена и представлена в виде

$$\lambda_c = \lambda\,(\mathrm{Re}_c,\ \varepsilon)\,\frac{\varphi_1}{\beta_1}, \tag{248}$$

причем истинное газосодержание, как и прежде, является функцией (242).

Подстановка (248) в (232) при пренебрежении членом ускорения приводит к уравнению

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda\,(\mathrm{Re}_c,\ \varepsilon)}{2D}\,\frac{\varphi_1}{\beta_1}\,(\rho_1\varphi_1 w_1^2 + \rho_2\varphi_2 w_2^2), \tag{249}$$

которое можно переписать в виде

$$-\beta_1\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda\,(\mathrm{Re}_c,\ \varepsilon)}{2DF^2}\left(\frac{G_1^2}{\rho_1} + \frac{G_2^2}{k\rho_2\beta} - \frac{G_2^2}{\rho_2}\right). \tag{250}$$

Интегрирование (250) дает расчетную формулу

$$p_н - p_к = \frac{\eta_2\,(1-k)}{a_1' k}\ln\frac{p_н - p_к}{p_н + \frac{1}{a_1'}} - \frac{\eta_2\,(1-k)+k}{a_2' k}\ln\frac{p_н - p_к}{p_н + \frac{1}{a_2'}} = a_3'\frac{\lambda}{2DF^2}z, \tag{251}$$

где

$$a_1' = a_2'\frac{k + \eta_2\,(1-k)}{\eta_2\,(1-k)}; \qquad a_2' = \frac{\eta_1}{\eta_2 zRT};$$

$$a_3' = \frac{G_c^2\eta_1\,[\eta_2\,(1-k)+k]}{k\rho_1}.$$

ТЕЧЕНИЕ СМЕСИ В НАКЛОННОЙ ТРУБЕ

Как и выше, будем считать, что $\varphi = k\beta$. Тогда истинная плотность смеси, от которой зависит градиент давления, вызываемый силой свободного падения, представится в виде

$$\rho_\varphi = a_5\,\frac{a_6 p + 1}{a_2 p + 1},$$

где

$$a_5 = \frac{1-k}{v_1};$$

$$a_6 = \frac{v_1}{RT}\left[\frac{1}{\eta\,(1-k)} - 1\right].$$

Подставив это выражение для ρ_φ в общее соотношение (232), получим функцию давления

$$F(p)=\frac{1+a_1\frac{d}{dp}\left[\frac{(a_2p+1)(a_2p+1)}{p(a_4p+1)}\right]}{\frac{\lambda_c a_1(a_2p+1)(a_3p+1)}{2Dp(a_4p+1)}-\frac{a_6p+1}{a_2p+1}a_5\cos(g,z)}$$

или, взяв производную от давления в числителе:

$$F(p)=\frac{(a_2p+1)\left[a_1(2a_2a_3p+a_2+a_3)+p(a_4p+1)-\right.}{a_1\lambda_c(a_2p+1)^2(a_3p+1)-2Da_5p(a_4p+1)(a_6p+1)\cos(g,z)}\ldots\rightarrow$$

$$\ldots\rightarrow\frac{\left.-\frac{a_1(a_2p+1)(a_3p+1)(2a_4p+1)}{p(a_4p+1)}\right]2D}{a_1\lambda_c(a_2p+1)^2(a_3p+1)-2Da_5p(a_4p+1)(a_6p+1)\cos(g,z)}. \quad (252)$$

Последнее выражение несколько упрощается, если преобразовать числитель:

$$F(p)=\frac{(a_2p+1)\left[p(a_4p+1)-b_4-\frac{a_1(b_5p+1)}{p(a_4p+1)}\right]2D}{a_1\lambda_c(a_2p+1)^2(a_3p+1)-2Da_5p(a_4p+1)(a_6p+1)\cos(g,z)},$$

где

$$b_4=a_1\left(a_2+a_3+\frac{a_2a_3}{a_4}\right);$$

$$b_5=\left[\frac{a_2a_3}{a_4}-a_2-a_3+2a_4\right]=\frac{\eta+k^2\eta_1}{\eta(1-k)}.$$

Итак, даже в этом относительно простом случае интегрирование $F(p)$ представляет большую сложность. А если учесть, что λ_c является сложной функцией давления, то интеграл не берется.

В разобранном примере, как и в наиболее сложных случаях, приходится прибегать к приближенному интегрированию. Действительно, интегрирование уравнений гидродинамики паро-жидкостных течений, когда имеются только их таблицы или графики состояния, может быть численное или приближенное в конечных разностях.

ТЕЧЕНИЕ ПАРО-ВОДЯНОЙ СМЕСИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ

Выше отмечалось, что массовая концентрация пара будет непостоянна и определяться через энтропию компонентов

$$\eta=\eta(p)=\frac{S_c-S_1(p)+q/T(p)}{S_2(p)-S_1(p)}.$$

Истинное паросодержание (214) может быть представлено в виде

$$\varphi=\frac{v_2\eta}{v_1+\eta(v_2-v_1)}\left[1-\frac{\theta v_1\eta_1}{nv_1\eta_1+\eta v_2(n-1)}\right],$$

где

$$\theta=\frac{0{,}342(1-v_1/v_2)}{\left[1+0{,}0183\sqrt{\frac{g}{D}}\cdot\frac{G_c(\eta_1v_1+\eta_2v_2)}{F(1-\dot{v})^4}\right]^2}.$$

Величину θ, характеризующую изменение φ от Fr_c и давления, приближенно можно принять за постоянную величину и определить из начальных параметров потока. Такое допущение уместно, когда среднее статическое давление на участке трубы много больше перепада давления. Следовательно, $\varphi = \varphi(p)$.

Коэффициент гидравлического сопротивления определяется из экспериментальных зависимостей $\lambda(Re_c, \varepsilon)$ ψ и $\lambda_c = \lambda\psi$ по Рейнольдсу смеси $Re_c = \frac{G_c D}{F}[(\eta_2/\mu_2) + (\eta_1/\mu_1)]$, который сводится к функции давления, так как вязкость и массовые концентрации зависимы от давления насыщения.

Приведенный коэффициент, если известна зависимость его от β, Fr_c и p, подобным образом определится по давлению, ибо β и Fr_c [см. (238) и (239)] выражаются через давление, т. е. мы имеем $\lambda_c = \lambda(p)$.

Соотношение (233) представим в виде суммы двух интегралов, когда $\cos(y, z) = -1$:

$$z = \int \frac{dp}{\frac{\lambda_c}{2DF^2} G_c^2 \left(\frac{\eta_1^2}{\varphi_1\rho_1} + \frac{\eta_2^2}{\varphi_2\rho_2}\right) + \rho_\varphi g} - G_c^2 \int \frac{dy}{\frac{\lambda_c}{2D} G_c^2 y + \rho_\varphi g}. \quad (253)$$

Здесь

$$y = \frac{\eta_1^2}{\rho_1\varphi_1} + \frac{\eta_2^2}{\varphi_2\rho_2}.$$

В первом интеграле подынтегральную функцию можно построить графически и для практических случаев достаточно точно аппроксимировать на некотором участке Δp линейной зависимостью.

Подобный прием можно использовать и для подынтегральной функции второго интеграла. По заданным значениям давления определяются y и истинная плотность смеси. Каждому значению y будет соответствовать вполне определенное значение γ_φ. Следовательно, подынтегральную функцию и в данном случае получаем в виде графика $f_2(y)$ или в виде аппроксимирующей зависимости $f_2(y) = m_2 + n_2 y$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДАРСИ — ВЕЙСБАХА (ОБОБЩЕННОГО ВИДА) ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА

Исходным служит уравнение (57)

$$\frac{dp}{\rho_\beta} + w_c\, dw_c + \lambda_y \frac{w_c^2}{2D} dx = 0,$$

где коэффициент $\lambda_y = \lambda(Re_c, \varepsilon)\,\psi_y$ определен по условному динамическому напору, а член ускорения составлен без учета относительного движения фаз. Для приведенного коэффициента ψ_y в этом случае

получена зависимость (227), которую, не внося существенных погрешностей, можно представить в виде

$$\psi_y = 1 + \frac{0{,}35\beta_2\beta_1 (1{,}6-\beta_2)\,(0{,}79-\beta_2)}{(1{,}02-\beta_2)^2}. \qquad (254)$$

Преобразуем эту зависимость

$$\psi_y = \frac{1{,}5}{\frac{1}{1+\beta_2} + \frac{1}{1+\beta_2} + \frac{\beta_1\beta_2}{100\,(1{,}03-\beta_2)^2}}. \qquad (255)$$

Так как $\beta = a/(a+p)$, $a = (\eta_2/\eta_1)\,\rho_1 RT$, будем иметь

$$\frac{1}{\psi_y} = \frac{a+p}{1\,5}\left\{\frac{1}{2a+p} + \frac{1}{a+2p} + \frac{ap}{100\,[1{,}03\,(a+p)-a]^3}\right\}. \qquad (256)$$

Подставим последнее выражение для ψ_y в (57), имея при этом в виду, что $\lambda_y = \lambda\psi_y$. Получим

$$0{,}75\lambda\,\frac{l}{D} = \int\left\{\frac{1}{2a+p} + \frac{1}{a+2p} + \frac{ap}{100\,[1{,}03\,(a+p)-a]^3}\right\}\left(\frac{a}{p} - kp\right)dp,$$

где

$$k = \frac{\rho_1 F^2}{G_\text{с}^2\eta_1}. \qquad (257)$$

Интеграл распадается на шесть элементарных интегралов. После их определения находим

$$0{,}75\lambda\,(\mathrm{Re_c},\ \varepsilon)\,\frac{L}{D} = F\,(p_\text{н},\ a,\ k) - k\left\{\frac{3}{2}\,p - a\left[2\ln(2a+p) + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{4}\ln(a+2p) - \frac{\frac{0\,06a}{100\cdot 1{,}03^3}}{1{,}03\,(a+p)-a} + \frac{\frac{0{,}03^2}{200\cdot 1{,}03^2}a^2}{[1{,}03\,(a+p)-a]^2} -$$

$$\left.\left. - \frac{1}{100\cdot 1{,}03^3}\ln[1{,}03\,(a+p)-a]\right]\right\} - \left\{\frac{1}{2}\ln\frac{2a+p}{p} + \ln\frac{a+2p}{p} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{206\,[1{,}03\,(a+p)-a]^2}\right\}$$

или, делая приведение числовых коэффициентов:

$$0{,}75\lambda\,(\mathrm{Re_c},\ \varepsilon)\,\frac{L}{D} = F\,(p_\text{н},\ a,\ k) - k\left\{\frac{3}{2}\,p - a\left[2\ln(2a+p) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4}\ln(a+2p)\right] - 5{,}18\cdot 10^{-4}\,\frac{(0{,}02184a+p)\,a}{(0{,}02913a+p)^2} - 0{,}00915\ln[1{,}03\,(a+p) - \right.$$

$$\left. - a] - \left\{\frac{1}{2}\ln\frac{2a+p}{p} + \ln\frac{a+2p}{p} + \frac{a^2}{206\,[1{,}03\,(a+p)-a]^2}\right\}. \qquad (258)$$

Функция $F(p_1, a, k)$ определяется из начальных условий и по заданным параметрам a и k. При $L=0$ $p=p_н$, и, следовательно,

$$F(p_н, a, k)=k\left\{\frac{3}{2}p_н-a\left[2\ln(2a+p_н)+\frac{1}{4}\ln(a+2p_н)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{5{,}18\cdot10^{-4}a(0{,}02184a+p_н)}{(0{,}02913+p_н)^2}-0{,}00915\ln[1{,}03(a+p_н)-a]\right]\right\}-$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{2a+p_н}{p_н}+\ln\frac{a+2p_н}{p_н}+\frac{a^2}{206\,[1{,}03\,(a+p_н-a]^2}\right\}. \qquad (259)$$

Формулы (258) и (259) могут быть использованы для подсчетов распределения давления по длине трубы при изменении газосодержания от нуля до единицы. Они учитывают потери давления на трение и на ускорение вследствие расширения газового компонента.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗО-ЖИДКОСТНЫХ СМЕСЕЙ ПРИ РАССЛОЕННОЙ СТРУКТУРЕ ТЕЧЕНИЯ

Для расслоенной структуры течения смеси в гл. 1 было получено уравнение движения (64), которое нам предстоит проинтегрировать. С этой целью, предположив $\rho_1 \gg \rho_2$, (64) представим в виде

$$-\frac{dp}{dz}=\frac{\lambda_1 G_1^2}{2DF^2\rho_1}\frac{\pi-\theta}{\pi\varphi_1^2}+\frac{\lambda_2 G_2^2}{2DF^2\rho_2}\frac{\theta}{\pi\varphi_2^2}-\sin\alpha g\rho_1\varphi_1. \qquad (260)$$

Подстановка $\varphi_2=(2\theta-\sin 2\theta)/2\pi$, $\rho_2=p/zRT$ дает

$$-\frac{dp}{dz}=\frac{\lambda_2 G_2^2 zRT}{DF^2p}\frac{2\pi\theta}{(2\theta-\sin 2\theta)^2}+\frac{\lambda_1 G_1^2 2\pi\,(\pi-\theta)}{[2\,(\pi-\theta)-\sin 2\theta]^2}-$$

$$-g\rho_1[2\,(\pi-\theta)-\sin 2\theta]\frac{\sin\alpha}{2\pi}. \qquad (261)$$

Поскольку расслоенная структура течения смеси в промышленных трубопроводах имеет место на относительно небольших длинах, то допустимо предположение о малой изменяемости истинного газосодержания по длине расчетного участка. На основании этого центральный угол 2θ определяется по осредненному значению истинного газосодержания $\varphi_{ср}$, которое в свою очередь определяется по соответствующим графикам в гл. 6 или эмпирическим формулам (218) и (219) при нисходящем течении смеси.

Вследствие этого уравнение (261) принимает вид

$$-\frac{dp}{dz}=\frac{A}{p}+C. \qquad (262)$$

Причем коэффициенты A и C уравнения (262) считаются неизменными по длине расчетного участка.

Интегрирование полученного уравнения не представляет сложности, и решение предстает в виде

$$\frac{p_н - p_x}{C} - \frac{A}{C^2} \ln \frac{A + C p_н}{A + c p_x} = x \tag{263}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{p_н^{n+2} - p_x^{n+2}}{(n+2) A^{n+1}} = x, \tag{264}$$

где

$$A = \frac{\lambda_2 G_1^2 z R T}{D F^2} \frac{2\pi\theta}{(2\theta - \sin 2\theta)^2},$$

$$C = \frac{2\lambda_1 G_1^2 \pi (\pi - \theta)}{D F^2 \rho_1 [2(\pi - \theta) - \sin 2\theta]^2} - \frac{\sin\alpha g \rho_1 [2(\pi - \theta) - \sin 2\theta]}{2\pi}.$$

Коэффициенты гидравлического сопротивления λ_2 и λ_1 в приведенных формулах определяются в соответствии с рекомендациями, изложенными в гл. 7.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТРУБОПРОВОДОВ, ТРАНСПОРТИРУЮЩИХ ГАЗО-ЖИДКОСТНЫЕ СМЕСИ

В данной главе на основании эмпирических зависимостей для коэффициента гидравлического сопротивления и истинного газосодержания были проинтегрированы уравнения установившегося одномерного течения смеси при том или ином методе осреднения $\lambda_{c(y)}$ по длине трубопровода с учетом и без учета скорости скольжения.

Полученные в результате интегрирования расчетные формулы (245), (251) и (253) справедливы для пробковой структуры течения смеси в наклонных и горизонтальных трубах, область существования которых при горизонтальном и нисходящем движении потока определяется соотношением (208). Однако вследствие того, что эмпирическая формула (208) не учитывает влияния местных сопротивлений на структуру течения, для промышленных трубопроводов, имеющих значительное количество местных сопротивлений и укладываемых, как правило, по рельефу местности, область существования пробковой структуры течения смеси более обширна.

Анализ опытных данных по течению газо-нефтяных смесей в промысловых трубопроводах позволяет считать, что в «рельефных» трубопроводах при значениях расходного газосодержания $\beta_2 < 0{,}99$ и числа $Fr_c > 50$ имеет место пробковая структура течения смеси.

В принципе все необходимые гидравлические параметры, характеризующие течение газо-жидкостной смеси в промышленном трубопроводе, могут быть определены по расчетным формулам (245) и (251).

По этим же формулам можно рассчитать распределение давления по длине трубопровода, определить расход смеси или диаметр и др.

Недостаток формул (245) и (251), как и выражения (253), заключается в сложности определения усредненного значения приведенного коэффициента гидравлического сопротивления в зоне газосодержаний $\beta_2 > 0{,}85$, где ψ является сложной функцией газосодержания, числа Fr_c и параметра $\dot{\rho}$.

Для гидравлических расчетов трубопроводов, по которым транспортируются двухфазные жидкости с большим газосодержанием, можно воспользоваться приближенной, но, несомненно, более простой зависимостью, которая получается на основании следующих данных.

При исследовании течения газо-жидкостных смесей в трубопроводах было замечено, что при обработке экспериментальных данных, относящихся к пробковой структуре течения смеси, в координатах $\Delta p_т/\Delta l$ (потери напора на трение на единицу длины) и расходное газосодержание β_2 по фиксированным значениям критерия Fr_c с некоторым приближением выполняется условие

$$\frac{\Delta p_т}{\Delta l} = \frac{g\lambda_1\rho_1}{2} Fr_c \beta_1 + \frac{g\lambda_2\rho_2}{2} Fr_c \beta_2. \qquad (265)$$

Из (265) видно, что крайние точки ($\beta_2 = 0$ и $\beta_2 = 1$) соответствуют потерям напора на трение при движении по трубопроводу только жидкости или только газа со скоростью смеси, причем коэффициент гидравлического сопротивления

$$\lambda_{1\,(2)} = f\,(\mathrm{Re}_{1\,(2)};\ \varepsilon),$$

где

$$\mathrm{Re}_1 = w_c D/\nu_1;\ \mathrm{Re}_2 = w_c D/\nu_2.$$

Аналогично нами были обработаны экспериментальные данные других исследователей. Эта обработка показала, что с погрешностью не более 10% в координатах $\Delta p_т/\Delta l$ и β экспериментальные точки лежат на прямой, описываемой формулой (265), так, как показано на рис. 82.

Следует отметить, что в области газосодержаний $\beta_2 < 0{,}1$, где выполняется условие $\varphi_2 > \beta_2$, т. е. наблюдается отрицательная относительная скорость фаз ($w_2 - w_1 < 0$), опытные точки ложатся ниже прямой, описываемой уравнением (265), а в области положительных относительных скоростей опытные точки ложатся выше указанной линии примерно на 5—7%. Поэтому расчетные зависимости, полученные по (265), будут давать значения, заниженные на 5—7% для градиента давления и на 2—3% для пропускной способности трубопровода при течении в нем газо-жидкостной смеси с газосодержанием $\beta_2 > 0{,}1$.

Учитывая изложенное, одномерное установившееся движение газо-жидкостной системы в горизонтальной трубе можно описать уравнением

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda_1\rho_1 w_c^2}{2D}\beta_1 + \frac{\lambda_2\rho_2 w_c^2}{2D}\beta_2, \qquad (266)$$

причем, при $\beta_2 = 0$ $w_c = w_1$ и при $\beta_2 = 1$ $w_c = w_2$.

Принимая во внимание выражение для расходного газосодержания $\beta_2 = \bar{w}_2/w_c$, получаем

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2}{2DF^2}\left[\frac{G_1}{\rho_1} + \frac{G_2}{\rho_2}\right] \tag{267}$$

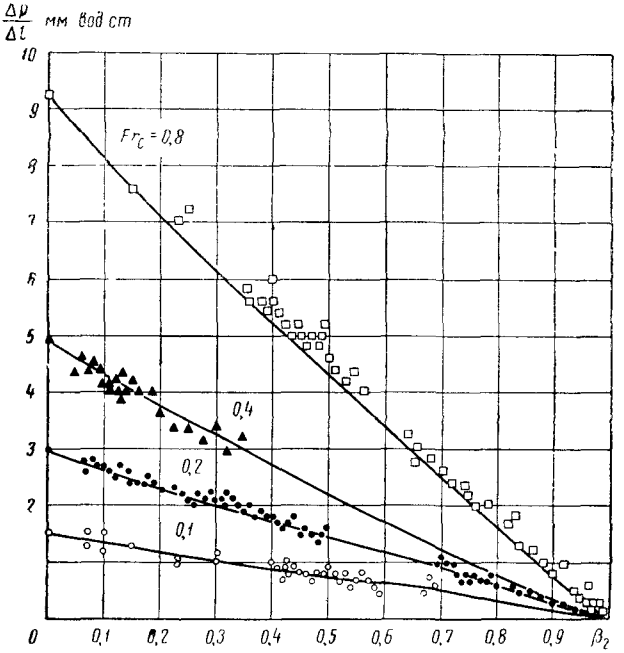


Рис. 82. Зависимость удельных потерь напора на трение от расходного газосодержания и критерия Fr_c. По данным различных авторов.

или с учетом уравнения состояния для газа $p = g\rho_2 zRT$ и соотношения $\eta_{2\,(1)} = G_{2\,(1)}/G_c$

$$-\int_{p_н}^{p_к} \frac{p\,dp}{p + \frac{\eta_2}{\eta_1}\rho_1 zRT} = \frac{\eta_1 G_c^2 [\lambda_1 - \eta_2(\lambda_1 - \lambda_2)]}{2DF^2\rho_1}\int_0^L dx.$$

В результате интегрирования получаем

$$p_н - p_к + \frac{\eta_2\rho_1 zRT}{\eta_1}\ln\frac{p_к + \frac{\eta_2\rho_1 zRT}{\eta_1}}{\rho_н + \frac{\eta_2\rho_1 zRT}{\eta_1}} = \frac{\eta_1 G_c^2 L [\lambda_1 - \eta_2(\lambda_1 - \lambda_2)]}{2DF^2\rho_1} \tag{268}$$

Таблица 2

Опытные (КуйбышевНИИНП) и расчетные (237) и (269) данные по расходу смеси

Показатели	Скв. 337 Муханово, Куйбышевской обл.	Скв. 443 Муханово, Куйбышевской обл.	Скв. 140-бис Дмитриевка, Куйбышевской обл.	Скв. 5 Дмитриевка, Саратовской обл.	Скв. 14 Рыбушка, Саратовской обл.	Скв. 35 Степное, Саратовской обл.	Скв. 19 Степное, Саратовской обл.
Длина исследуемого участка L, *м*	854	1911	1024	2549	3326	2090	1375
Диаметр трубопровода D, *м*	0,15	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,1
Расход нефти Q_1, *т/сутки*	245	265	239	48,9	81	13,9	15,8
Газовый фактор пластовый Γ, *м³/т*	120	120	128,17	116	93,5	1490	2140
Газовый фактор при среднем давлении в трубопроводе $\Gamma_т$, *м³/т*	79	80	102	107	89,8	1480	2134
Начальное абсолютное давление $p_н$, *бар*	12	13,5	11,52	2,86	4,88	14,41	3,78
Конечное абсолютное давление $p_к$, *бар*	11,52	10,34	8,26	1,21	2,87	1,28	1,63
Плотность нефти ρ_1, *кг/м³*	837,1	846,1	836,8	860	847	877	854
Плотность свободного газа ρ_2, *кг/м³*	1 04	1,041	1,19	0,39	0,85	0,78	0,79
Вязкость нефти разгазированной μ_1, *спз*	5 25	5,56	2,5	13	12	22	24
Газовый фактор растворенный, *м³/т*	29	29	24	19	3,7	10	5,6
Плотность растворенного газа, *кг/м³*	1,577	1,577	1,636	1,093	1,087	1,050	1,050
Коэффициент объемного расширения B_0 (при $p_{ср}$)	1,07	1,07	1,0715	1,146	1,06	1,07	1,04
Превышение конечной точки над начальной H, *м*	+9	−15,8	+21,6	+6,6	−24,7	+3,1	+0,6
Сумма подъемов, *м*	9	8,8	28,4	6,6	6,6	3,1	2,7
Расходное газосодержание β_2	0,851	0,852	0,898	0,978	0,954	0,994	0,999
Число Fr_c	1,3	11,3	28,9	18,8	10,6	562	424
Истинное газосодержание φ_2	0,633	0,690	0,726	0,792	0,773	0,8	0,81
Потери напора на трение	0,203	3,574	2,77	1,58	2,48	13,07	2,14
Расход смеси G_c, кг/сек:							
измеренный	3,069	3,322	3,75	0,626	1,01	0,349	0,491
расчетный	3,259	3,447	3,704	0,720	1,104	0,3187	0,518
Погрешность, %	+6,2	+3,76	−1,23	−15,0	+9,35	−8,68	+5,49

или после разложения логарифма в ряд с учетом $p_н - p_к = \Delta p$

$$\Delta p - \frac{\eta_2 \rho_1 z R T}{\eta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta p^n}{n \left(p_н + \frac{\eta_2 \rho_1 z R T}{\eta_1} \right)^n} = \frac{\eta_1 G_c^2 [\lambda_1 - \eta_2 (\lambda_1 - \lambda_2)] L}{2 D F^2 \rho_1}. \quad (269)$$

Из (269) в частном случае $\beta_2 = 0$ и $\beta_2 = 1$ могут быть получены известные формулы гидравлического расчета трубопроводов, транспортирующих однофазные жидкости.

Однако необходимо отметить, что формула (269) применима только для пробковой структуры течения смеси, поскольку при расслоенной структуре опытные точки лежат много ниже прямой, описываемой выражением (266).

Интегрирование (266) с дополнительным членом, учитывающим геометрическую разность отметок начала и конца трубопровода, приводит к не менее сложным и приближенным зависимостям, чем формула (253).

Поэтому в общем случае течения газо-жидкостной смеси в реальном трубопроводе, проложенном в условиях пересеченного рельефа местности, приходится прибегать к приближенным методам расчета, наиболее простым из которых является раздельная оценка потерь напора в восходящих и нисходящих участках трубопровода.

В этом случае суммарные потери напора определяются по формуле

$$\Delta p = \Delta p_т + \sum_{i=0}^{n} H_{i\ пд} g [\rho_1 - \varphi_{i\ пд} (\rho_1 - \rho_2)] + \sum_{i=0}^{n} H_{i\ нс} g [\rho_1 - \varphi_{i\ нс} (\rho_1 - \rho_2)], \quad (270)$$

Данные промысловых исследований Грозненского нефтяного инсти

Расход дегазированной нефти Q_1, $м^3/сек$	Плотность нефти ρ_1, $кг/м^3$	Газовый фактор, $м^3/м^3$	Газовый фактор растворенный, $м^3/м^3$	Коэффициент объемного расширения нефти B_0	μ_1, $спз$	$\mu_2 \cdot 10^{-4}$, $спз$	$p_н$, $бар$
0,00056	806	352	8	1,02	3,0	104	3,0
0,00148	809	349	15	1,04	2,8	110	7,8
0,00288	814	353	28	1,06	2,2	110	14,6
0,00287	807	352	42	1,10	1,4	114	23,3
0,00329	806	354	26	1,07	1,9	113	16,6
0,00329	806	354	30	1,08	1,8	115	18,6
0,00333	806	355	43	1,11	1,2	117	24,2
0,00333	805	350	61	1,16	0,9	121	34,0
0,00446	808	354	38	1,10	1,6	114	25,7

где первое слагаемое выражает потери на трение и может быть определено *по соответствующим формулам, а второе и третье — гравитационные* потери на подъемных и спусковых участках трубопровода.

Значения истинного газосодержания на подъемных участках $\varphi_{пд}$ и на нисходящих участках $\varphi_{нс}$ могут быть определены из эмпирических зависимостей (213), (218) и (219).

По формулам (245), (251) и (269) были сделаны расчеты пропускной способности промысловых газо-нефтяных коллекторов, результаты расчетов сопоставлены с данными натурных измерений, проведенных КуйбышевНИИНП на месторождениях Куйбышевской и Саратовской областей и Грозненским нефтяным институтом [14, 16] на промыслах НПУ Сунжанефть.

Данные промысловых исследований относятся к профильным трубопроводам, а формулы (245), (251) и (269) получены в предположении горизонтальности течения смеси. Поэтому, чтобы сопоставить расчетные и фактические данные, необходимо учесть влияние профиля трассы на суммарные потери напора.

Из (270) видно, что суммарные потери напора существенно зависят не только от потерь на трение $\Delta p_т$, но и от истинного газосодержания в нисходящем ($\varphi_{нс}$) и восходящем ($\varphi_{пд}$) участках трубопровода. Даже если считать, что сумма подъемов равна сумме спусков $\left(\sum H_{пд} = \sum H_{нс}\right)$, влияние профиля трассы все же может быть существенным, поскольку истинное газосодержание, как было показано в гл. 6, зависит от угла наклона трубопровода и направления движения смеси (восходящий или нисходящий поток).

Условие равенства истинного газосодержания в нисходящих и восходящих ветвях трубопровода имеет место в зоне автомодельности истинного газосодержания относительно критерия Фруда при нисходящем течении смеси в наклонном трубопроводе (см. гл. 6).

Таблица 3

тута [14, 17] и расчетные данные (237) и (269) по расходу смеси

$p_к$, *бар*	β_2	η_2	Fr_c	φ_2	G_c, *кг/сек*		Погрешность, %
					измеренный	расчетный	
1,8	0,992	0,304	175,0	0,804	0,6531	0,7092	+8,58
2,0	0,990	0,287	276,1	0,802	1,7274	1,6873	—2,32
3,3	0,979	0 281	305,0	0,793	3,4310	2,9308	—14,58
16,4	0,937	0,269	65,6	0,759	3,4141	3,3448	—2,03
3,4	0,975	0,290	350,9	0,790	3,9117	3,3489	—14,39
6 1	0,962	0,289	238,8	0,779	3,9319	3,6250	—7,50
16,7	0,933	0,269	82,0	0,756	3,9698	3,7970	—4,35
29,0	0,885	0,239	30,0	0,717	3,9286	4,1950	+6,78
11,0	0,944	0,267	201,0	0 765	5,2590	4,8590	—7,61

Значение критерия Фруда, выше которого будет выполняться условие $\varphi_{нс} = \varphi_{пд}$, может быть определено по (208) для соответствующих значений расходного газосодержания и геометрического уклона нисходящего участка трубопровода.

На основании этого при значениях числа Фруда больших, чем $Fr_{кр}$, определенное по (208), потери напора на трение определялись по формуле

$$\Delta p_т = \Delta p - g\,(H_к - H_н)\,(\rho_1\varphi_1 + \rho_2\varphi_2).$$

В остальных случаях ($Fr_c < Fr_{кр}$) приходилось пользоваться формулой (270).

Полученное значение Δp_1 подставлялось в указанные выше формулы, затем определялась производительность трубопровода.

При значениях расходного газосодержания $\beta_2 < 0{,}9$ расчеты велись по формуле (251), а при больших значениях — по (269).

В табл. 2 и 3 для сравнения приводятся расчетные и фактические значения расхода смеси. В большинстве случаев эти значения отличаются незначительно.

Максимальная погрешность, составляющая $\approx 15\%$. относится к приближенной формуле (269) и является, по-видимому, результатом неточного определения $\Delta p_т$, поскольку отклонения от фактических значений G_c наблюдаются в обе стороны, в то время как эта формула должна давать заниженные значения расхода смеси вследствие допущения (265). В целом же сопоставление расчетных значений (251) и (269) с опытными данными лабораторных и промысловых исследований позволяет считать, что с погрешностью порядка ± 5—7% можно пользоваться методикой раздельного учета потерь напора, возникающих при течении смеси в профильных трубопроводах.

1. Аргунов П. П. Исследование работы эрлифта и его расчет. Сб. «Строительное водопонижение, гидромеханика и физика грунтовых вод». Тр. Ин-та оснований и фундаментов. Госстройиздат, 1953.

2. Арманд А. А. Сопротивление при движении двухфазной смеси по горизонтальным трубам. Известия ВТИ, № 1, 1946.

3. Арманд А. А., Невструева Е. И. Исследование механизма движения двухфазной смеси в вертикальной трубе. Известия ВТИ, № 2, 1950.

4. Арманд А. А. Исследование механизма движения двухфазной смеси. Сб. «Гидродинамика и теплообмен при кипении в котлах высокого давления». Изд. АН СССР, 1955.

5. Архангельский В. А. Движение газированных нефтей в системе скважина — пласт. Изд. АН СССР, 1958.

6. Беренблатт Г. И. Движение взвешенных частиц в турбулентном потоке. Прикладная математика и механика, т. 17, вып. 3, 20. Изд-во «Наука», 1953.

7. Багдасаров В. Г. Теория расчета и практика эрлифта. Гостоптехиздат, 1947.

8. Балдина О. М., Петерсон Д. Ф. Исследование полезных напоров в котельных трубах. Сб. «Вопросы теплоотдачи и гидравлики двухфазных сред». Госэнергоиздат, 1961.

9. Балдина О. М. и др. Обобщение опытных данных по объемным паросодержаниям в подъемных и опускных трубах и сопротивлениям движению пароводяной смеси в трубах. Сб. «Котлотурбостроение». Тр. ЦКТИ, вып. 59, ОНТИ, 1965.

10. Васильев Ю. Н., Максутов Р. А., Башкиров А. И. Экспериментальное изучение структуры нефтегазового потока в фонтанной скважине. Нефтяное хозяйство, № 4, 1961.

11. Васильев Ю. Н., Ауэбаев Д. Экспериментальное изучение движения газо-нефтяной смеси по горизонтальным трубам. Нефтяное хозяйство, № 8, 1963.

12. Великанов М. А. Движение наносов. Речиздат, 1948.

13. Гужов А. И., Титов В. Г., Поляков Г. Г. Исследование вопросов совместного транспорта нефти и газа по магистральным трубопроводам. Известия вузов МВ и ССО СССР, «Нефть и газ», № 2, 1960.

14. Гужов А. И., Титов В. Г. Потери напора при совместном транспорте нефти и газа по трубопроводам. Сб. «Вопросы нефтепромыслового дела», Тр. Грозненского нефтяного института, т. II. Чечено-Ингушское книжное изд-во, 1962.

15. Гужов А. И. Оценка потерь напора на относительное движение нефти и газа при совместном их транспорте по магистральным трубопроводам. Сб. «Вопросы нефтепромыслового дела». Тр. Грозненского нефтяного института, т. II. Чечено-Ингушское книжное изд-во, 1962.

16. Гужов А. И., Титов В. Г. К вопросу о путях повышения технико-экономических показателей нефтепромыслового хозяйства Чечено-Ингушского экономического района. Сб. «Вопросы нефтепромыслового дела». Тр. Грозненского нефтяного института, т. II. Чечено-Ингушское книжное изд-во, 1962.

17. Гриффис и Уолис. Теплопередача. Серия С, № 3. ИЛ, 1961.

18. Дюнин А. К., Борщевский Ю. Т., Яковлев П. А. Основы механики многокомпонентных потоков. Изд. АН СССР, Сибирское отделение. Новосибирск, 1965.

19. Костерин С. И., Семенов Н. И. Результаты исследования скорости звука в движущихся газо-жидкостных смесях. Теплоэнергетика, № 6, 1964.

20. Костерин С. И. Исследование гидравлического сопротивления при движении газо-жидкостных сред в горизонтальных трубах. Известия ОТН АН СССР, № 11—12, 1943.

21. Костерин С. И. Исследование структуры потока двухфазной смеси в горизонтальных трубах. Известия ОТН АН СССР, № 7, 1948.

22. Костерин С. И. Исследование влияния диаметра и расположения трубы на гидравлическое сопротивление и структуры течения газо-жидкостной смеси. Известия ОТН АН СССР, № 12, 1949.

23. Костерин С. И., Семенов Н. И., Точигин А. А. Относительные скорости пароводяных течений в вертикальных необогреваемых трубах. Теплоэнергетика, № 1, 1961.

24. Козлов Б. К. Формы течения газо-жидкостных смесей и границы их устойчивости в вертикальных трубах. ЖТФ, т. XXIV, вып. 12, 1954.

25. Козлов Б. К. Режимы и формы движения воздухо-водяной смеси в вертикальной трубе. Сб. «Гидродинамика и теплообмен в котлах высокого давления». Изд-во АН СССР, 1955.

26. Корнилов Г. Г., Черникин В. И. О гидравлическом расчете трубопроводов для газо-жидкостных смесей. Нефтяное хозяйство, № 8, 1964.

27. Красякова Л. Ю. Некоторые характеристики движения двухфазной смеси в горизонтальной трубе. ЖТФ, т. XXII, вып. 2, 1941.

28. Кочин Н. Е., Нибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. Физматгиз, 1959.

29. Кутателадзе С. С. Движение паро-жидкостной смеси в трубах и обобщенные координаты для его анализа. Котлотурбостроение, № 2, 1945.

30. Кутателадзе С. С. Движение двухфазного потока в трубах. Котлотурбостроение, № 5, 1948.

31. Кутателадзе С. С., Стырикович М. А. Гидравлика газо-жидкостных систем. Госэнергоиздат, 1958.

32. Лямб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.

33. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖТФ, т. 18, 1948.

34. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.

35. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.

36. Мамаев В. А., Одишария Г. Э. Трубопроводный транспорт газо-жидкостных смесей. ВНИИОЭНГ, 1966.

37. Мамаев В. А., Одишария Г. Э. Вопросы движения газо-жидкостных потоков в горизонтальных трубах. Научно-технический сборник по геологии, разработке и транспорту природного газа. Гостоптехиздат, 1963.

38. Мамаев В. А., Одишария Г. Э. Об относительной скорости газа при движении газо-жидкостного потока в трубах. Котлотурбостроение. Тр. ЦКТИ, вып. 59. ОНТИ ЦКТИ, 1965.

39. Одишария Г. Э. Некоторые закономерности газо-жидкостных течений в трубах. Нефтяное хозяйство, № 9, 1966.

40. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. ИЛ, 1949.
41. Рахматулин Х. А. Основы гидродинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. Прикладная математика и механика, т. 20, вып. 2. Изд-во «Наука», 1956.
42. Седов Л. И. Теория подобия и размерности в механике. Изд-во «Наука», 1966.
43. Семенов Н. И. Пульсации давления при течении газо-жидкостных смесей в трубах. Теплоэнергетика, № 1, 1959.
44. Семенов Н. И., Точигин А. А. Аналитическое исследование ламинарного разделенного течения двухфазной смеси в наклонных трубах. ИФЖ, № 11, 1961.
45. Семенов Н. И., Точигин А. А. Истинное паросодержание паро-водяных течений в вертикальных необогреваемых трубах. ИФЖ, № 7, 1961.
46. Телетов С. Г. Уравнение гидродинамики двухфазных жидкостей. ДАН СССР, т. 4, 1945.
47. Телетов С. Г. О разделенном течении газо-жидкостных смесей при малых скоростях. ДАН СССР, т. 51, № 3, 1946.
48. Телетов С. Г. О коэффициенте сопротивления при движении двухфазной смеси. ДАН СССР, т. 51, № 8, 1946.
49. Телетов С. Г. Об обработке опытных данных по паро- и газо-жидкостным смесям и о методике эксперимента. Сб. «Гидродинамика и теплообмен при кипении в котлах высокого давления». Изд-во АН СССР, 1955.
50. Телетов С. Г. О максимальном размере парового пузыря. Известия ЭНИН АН СССР, т. XI, 1940.
51. Телетов С. Г. Вопросы гидродинамики двухфазных смесей. Вестник МГУ. Серия математики, № 2. 1958.
52. Телетов С. Г. Вопросы гидродинамики двухфазных смесей. Котлотурбостроение. Тр. ЦКТИ, вып. 59, ОНТИ, 1965.
53. Титов В. Г. Пульсация давлений при движении газо-жидкостных смесей по трубопроводам. Сб. «Вопросы нефтепромыслового дела». Тр. Грозненского нефтяного института, т. II. Чечено-Ингушское книжное изд-во, 1961.
54. Франкль Ф. И. К теории движения взвешенных частиц. ДАН СССР, т. 92, № 2, 1953.
55. Франкль Ф. И. Уравнения энергии для движения жидкостей с взвешенными наносами. ДАН СССР, т. 102, № 5, 1955.
56. Шугаев В. С., Сорин С. И. Изучение коэффициентов гидравлического сопротивления двухфазной системы. Техническая физика, т. IX, № 20, 1939.
57. Шваб В. А. Теоретические основы движения двухфазного потока применительно к расчету циркуляционного контура парового котла. Томск, 1949.
58. Циклаури Д. С. Гидравлическая теория движения водовоздушной смеси в вертикальной трубе. Котлотурбостроение. Тр. ЦКТИ, ОНТИ, 1965.
59. Яблонский В. С. и др. О потерях напора на трение при движении газо-жидкостных смесей по трубопроводам. Тр. НИИТранснефть, вып. II. Гостоптехиздат, 1963.
60. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. ИЛ, 1965.
61. Levy S. Trans. ASME, ser. C. 82, 1966.
62. Moissis R. Trans. ASME, ser. C. 4, 1963.
63. Zivi S. M. Trans. ASME, ser. C. 2, 1964.
64. Baker O. Oil and Gas J., Nov. 11, 1957.
65. Baker O. Oil and Gas J., May, 1955.
66. Baker O. Gas Age, v. 121, 12/VI, 1958.
67. Baker O. Canadian Oil and Gas Industry v. 14, N 3, 1961.
68. Bertutti A., Tex M., Poetmaun F. Journal of Petroleum Technology, v. 207, N 2, 1956.
69. Bennet I. A. R. Two-phase flow in Gas-Liquid Systems, ASME, CL/R, 2497.
70. Alves G. E. Chem. Eng. Prog., v. 50, p. 449, 1954.

71. Chisholm D., Laird A. D. K. Trans. ASME, v. 80, p. 276, 1958.
72. Cook W. H. ANL-2446, p. 110, 1954.
73. Davidson W. F., Hardie P. H. Trans. ASME, v. 85, pp. 553—591, 1943.
74. Dennis I. A. ASME EL/M. 97. Harwell, Berkshire, England, 1958.
75. Dengler C. E. Ph. D. The Mass Inst. Tech, 1952.
76. Dengler C. E. C. E. P. Sympos, Series «Heat Transfer—Louisville», v. 52, N 18, 1956.
77. Gazley C. Ir. Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Berkeley California Meeting, 29, 1949.
78. Govier G. W., Radford G. W., Dunn I. S. C. The Canadian Journal of Chemical Engineering, v. 35, p. 58, 1957.
79. Chavez S. A. Oil and Gas J., v. 57, N 35, 1959.
80. Isbin H. S., Rodrigues H. A., Larson H. C., Pattie B. D. Void Fraction in Two-Physe Flow. University of Minnesota, August 7—15, 1958.
81. Isbin H. S., Sher N. C., Eddy K. C. Am. Inst. Chem. Journal, v. 3, 1957.
82. Jonson H. A., Abou-Sabe A. H. Trans ASME, v. 74, p. 977, 1952.
83. Lorenz H. Die Arbeitweise und Berechnung des Druckvasserhebers Z. d. V. D. I., 1909.
84. Lockhart R. W., Martinelly R. C. Chem. Eng. Progress v. 45, p. 39, 1949.
85. Lottes P. A. Conference on Nuclear Engineering. Univ. of California. L. A. p. 41.
86. Martinelly R. C., Boelter L. M. K., Taylor T. N. M., Morrin E. H. Trans. ASME, v. 66, p. 139, 1944.
87. Martinelly R. C., Putman J. A. and Lockhart R. W. Trans Am. Inst. Chem. Eng., v. 42, p. 681, 1946.
88. Martinelly R. C., Nelson D. B. Trans ASME, v. 70, p. 695, 1948.
89. Mc Adams W. H., Woods W. K., Herrman L. C. Trans ASME, v. 64, p. 193, 1942.
90. Schmodt C., Behringer P., Schuring W. V. D. I. Forsochung sheft, N 365, 1934.
91. Schwarz K. V. D. I., Bd. 20, N 445, 1954.
92. Yagl S. and Sasaki T. Che. Engr. (Japan), v. 17, p. 216, 1953.
93. Van Rossum J. Chem. Eng. Sci., vol. 11, N 1, 1959.
94. Zmola P. C., Bayley R. V. Paper presented at Dec 1954 Meeting of Am. Soc. Mec. Engrs.
95. Zmola P. C., Bayley R. V. ASME, v. 78, p. 881. 1956.
96. Moora T. F., Wild H. D. Experimental Measurements of Slippage in Flow through Vertical Pipes Petr. Dev. and Techn. 1931.
97. Huntington R. L., Brigham W. E., Holstein E. D. Oil and Gas J., Nov. 11, 1957.
98. Hoodendorn C. I. Chemical Eng. Sc. v. 9, N 4, 1959.
99. Van Wingen N. World Oil, v. 122, N 7.
100. Flanigan O. Oil and Gas J., 10—111, 1958.
101. Sobocinski D., Huntington R. Transaction of the ASME, v. 80, N 1, 1958.
102. Yocum B. Two-phase flow in well-floweines. The Petrol. Eng. XI, v. 31, N 12, pp. B40—B47, 1959.
103. Wicks M., Dukler A. Entrainment and pressure drop in Concurrent GS-liquid Flow; Air-Water in horizontal flow. A. J. Ch. E. Journal, IX, v. 6, N 3, pp. 463—468, 1960.
104. Pretgch J. Z. angew Math Mech, 21. 1941.
105. Corcos G. M., Sellars J. R. J. Fruid Mech., S. 1959.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Введение 6

Глава первая. **Уравнения гидродинамики и энергии двухфазных жидкостей** 13

Уравнение непрерывности 16
Уравнение движения 17
Уравнение энергии 18
Методы усреднения гидродинамических величин 19
Усредненное уравнение непрерывности 22
Усредненное уравнение движения 24
Усредненное уравнение энергии 28
Дифференциальные уравнения одномерного течения смеси в каналах постоянного сечения 29
Гидравлическое сопротивление трения 33

Глава вторая. **Некоторые точные решения уравнений движения двухфазных жидкостей** 37

Разделенное ламинарное течение двухфазной жидкости между параллельными стенками 37
Разделенное ламинарное течение в слабонаклонной круглой трубе 42
Устойчивость ламинарного разделенного течения газо-жидкостной смеси 53
Скорость звука в двухфазных жидкостях 60
Критерии подобия 67

Глава третья. **Полуэмпирический метод исследования турбулентного движения двухфазных жидкостей** 72

Разделенное турбулентное течение двухфазной жидкости 72
Осесимметричное течение смеси 84

Глава четвертая. **Методика постановки экспериментов** 89

Конструкции экспериментальных стендов 89
Конструктивные особенности гидравлического контура 101
Методика постановки и проведения экспериментальных исследований 107

Стр.

Глава пятая. **Характерные формы газо-жидкостных течений в трубах и их связь с пульсациями давления** 110

Структуры газо-жидкостных потоков в трубах 110
Пульсации давления при течении газо-жидкостных смесей в трубах 125

Глава шестая. **Экспериментальное исследование зависимости истинного газосодержания от определяющих критериев** 132

Зависимость истинного газосодержания от критериев $\dot{\mu}$, $\dot{\rho}$, Re, We, Fr_c, β 133
Особенности изменения истинного газосодержания при негоризонтальном течении смеси 147

Глава седьмая. **Экспериментальные исследования коэффициентов гидравлического сопротивления трения** 162

Гидравлическое сопротивление трения при пробковой структуре течения смеси, определенное через истинный динамический напор 163
Приведенный коэффициент сопротивления, определенный по условному динамическому напору 177
Гидравлические сопротивления при разделенной структуре течения смеси 181

Глава восьмая. **Методы гидравлического расчета трубопроводов** 187

Течение газо-жидкостной смеси в горизонтальной трубе 189
Течение смеси в наклонной трубе 191
Течение паро-водяной смеси в вертикальной трубе 192
Интегрирование уравнения Дарси — Вейсбаха (обобщенного вида) для горизонтального трубопровода 193
Интегрирование уравнения установившегося одномерного движения газо-жидкостных смесей при расслоенной структуре течения . . 195
Приближенные методы гидравлического расчета трубопроводов, транспортирующих газо-жидкостные смеси 196

Литература 203

МАМАЕВ ВАСИЛИЙ АНДРЕЕВИЧ
ОДИШАРИЯ ГУРАМИ ЭРАСТОВИЧ
СЕМЕНОВ НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ
ТОЧИГИН АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

Гидродинамика газо-жидкостных смесей в трубах

Редактор издательства *А. Ф. Ушакова.* Техн. редактор *А. Е. Матвеева*
Художественный редактор *О. А. Зайцева*
Переплет художника *Б. Г. Дударева.* Корректор *А. П. Стальнова*

Сдано в набор 13/V 1969 г. Подписано в печать 18/VII 1969 г. Т-07599.
Формат 60 × 90¹/₁₆. Печ. л. 13,0. Уч.-изд. л. 12,85. Бумага № 1. Индекс 1—4—1.
Заказ 476/672—8. Тираж 1400 экз. Цена 1 р. 48 к.

Издательство «Недра». Москва, К-12, Третьяковский проезд, д. 1/19.
Ленинградская типография № 14 «Красный Печатник» Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Московский проспект, д. 91.