Библиотека СОК



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. **Основные уравнения** 7

§ 1. Уравнения электродинамики 7
§ 2. Уравнения механики сплошной среды с учетом электромагнитных сил 18
§ 3. Закон Ома 28
§ 4. Уравнения магнитной гидродинамики 43
§ 5. Простейшие интегралы системы уравнений магнитной гидродинамики 50

Глава II. **Движения несжимаемой жидкости** 56

§ 1. Движение вязкой электропроводной жидкости с прямолинейными линиями тока 56
§ 2. Стационарные движения вдоль магнитного поля . . . 71
§ 3. Волновые движения идеальной жидкости 75

Глава III. **Простые волны и малые возмущения в идеальном газе** 82

§ 1. Слабые разрывы 82
§ 2. Простые волны 89
§ 3. Малые возмущения 100

Глава IV. **Поверхности разрыва в идеальном газе** . . . 106

§ 1. Классификация поверхностей сильного разрыва . . . 106
§ 2. Эволюционность магнитогидродинамических ударных волн 111
§ 3. Разрешение условий на ударных волнах в совершенном газе 119

Глава V. **Нестационарные движения идеального газа** . . 135

§ 1. Задача о плоском поршне 135
§ 2. Распад произвольного разрыва 142
§ 3. Распространение слабых ударных волн и слабых разрывов в пространстве 152
§ 4. Одномерные осесимметричные движения с однородной деформацией 158

Глава VI. **Стационарные движения идеального газа** . . . 164
§ 1. Характеристики уравнений магнитной гидродинамики, описывающих стационарные течения 164
§ 2. Линейные задачи 168
§ 3. Стационарные простые волны 183

Глава VII. **Стационарные движения неидеального газа** 192
§ 1. Течения в трубках тока 192
§ 2. Структура магнитогидродинамической ударной волны 200

Глава VIII. **Обтекание намагниченных тел проводящей жидкостью** 223
§ 1. Обтекание намагниченных тел идеальной жидкостью 223
§ 2. Пример обтекания намагниченного тела жидкостью с конечной электропроводностью. 228

Библиография 239

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы в ряде областей физики и техники (астрофизика, аэродинамика больших скоростей, проблемы управляемых термоядерных реакций и т. д.) все чаще возникает необходимость изучения движений сильно нагретых и ионизованных жидкостей и газов в электромагнитном поле. В связи с этим в настоящее время одной из наиболее интенсивно развивающихся областей механики и физики является магнитная гидродинамика. Магнитная гидродинамика изучает движение электропроводящих жидкостей и газов в электромагнитном поле. При такого рода движении возникают новые механические эффекты и открываются новые методы воздействия на движение жидкости.

Наличие электромагнитного поля при движении в нем проводящей среды приводит к тому, что в ней возникают электрические токи. Возникновение в движущейся жидкости электрических токов приводит, с одной стороны, к тому, что, взаимодействуя с магнитным полем, они вызывают появление дополнительных сил, которые изменяют гидродинамическое движение жидкости. С другой стороны, возникновение электрических токов приводит к изменению электромагнитного поля. При теоретическом рассмотрении всех этих вопросов необходимо учитывать как гидродинамические, так и электродинамические эффекты. Совместное рассмотрение этих эффектов представляет предмет магнитной гидродинамики.

Несмотря на то, что магнитная гидродинамика является молодой и интенсивно развивающейся наукой, в настоящее время можно утверждать, что некоторые основные качественные закономерности, присущие магнитной гидродинамике, уже установлены и исследованы.

В связи с возросшим интересом к вопросам магнитной гидродинамики со стороны научных работников разного профиля представляется целесообразным изложить в систематизированном виде основные принципиальные вопросы магнитной гидродинамики. Мы не ставим перед собой цели

изложить все имеющиеся результаты, относящиеся к вопросам магнитной гидродинамики и ее приложений.

При подборе материала книги мы стремились изложить основные результаты, связанные с выявлением новых качественных эффектов и закономерностей, возникающих при взаимодействии проводящей среды с электромагнитным полем. Особое внимание при этом уделяется получению и исследованию точных решений уравнений магнитной гидродинамики, а также качественному исследованию задач в тех случаях, когда точного решения получить не удается. Подробно выведены уравнения магнитной гидродинамики и исследованы пределы их применимости. Всюду, где это было возможно, мы стремились дать наглядное физическое объяснение рассматриваемому явлению, а также отчетливую формулировку постановки различных задач.

В связи с тем, что книга носит теоретический характер и посвящена в основном выявлению качественных особенностей магнитной гидродинамики, в ней не нашли отражения вопросы технических приложений магнитной гидродинамики, приближенные методы решения задач, а также результаты экспериментальных исследований. В книге не затронуты также вопросы, касающиеся магнитогидростатики и устойчивости, особо интересные для лиц, занимающихся проблемами управляемых термоядерных реакций. Эти вопросы, довольно хорошо разработанные в настоящее время, могли бы составить предмет самостоятельной монографии.

Как и во всякой развивающейся науке, в магнитной гидродинамике многие результаты получаются одновременно или с небольшим расхождением во времени разными авторами, причем иногда совершенно различными методами. При изложении этих результатов мы стремились выбрать самый, с нашей точки зрения, физически ощутимый и математически простой путь изложения.

В конце книги приводится список литературы, непосредственно использованной при изложении материала, а также тесно примыкающей к рассматриваемым вопросам.

Считаем своим приятным долгом выразить глубокую благодарность М. Н. Когану и В. П. Коробейникову, сделавшим ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению книги.

Авторы

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнения электродинамики [1])

Согласно современным представлениям, все тела в природе состоят из элементарных частиц. Элементарные частицы могут обладать электрическим зарядом (электроны, протоны и т. д.) [2]). Взаимодействие между заряженными частицами осуществляется посредством электромагнитного поля, которое они создают в пространстве вокруг себя. Хотя электромагнитное поле и его изменение связаны с движением заряженных частиц, оно обладает известного рода самостоятельностью, подчинено своим, присущим только ему закономерностям и может рассматриваться как самостоятельный материальный объект.

Электромагнитное поле в каждой точке пространства и в каждый момент времени характеризуется двумя векторами: напряженностью электрического поля $\boldsymbol{E}$ и напряженностью магнитного поля $\boldsymbol{H}$.

Напряженности электрического и магнитного полей в данной точке пространства могут быть определены по силе, действующей на пробные электрические заряды, помещенные в данную точку. Сила, с которой электромагнитное поле действует на частицу, имеющую заряд e и движущуюся со

---

[1]) В этом параграфе приведены основные уравнения электродинамики. Изложение основ электродинамики можно найти в книгах [6, 17].

[2]) Электромагнитные свойства частиц характеризуются также их магнитным моментом, связанным со спином. Этот момент является чрезвычайно малой величиной, и влиянием его в интересующих нас вопросах можно пренебречь [17].

скоростью $\boldsymbol{v}$, равна

$$\boldsymbol{F}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right), \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей в рассматриваемой точке пространства, когда пробный заряд в этой точке отсутствует, а c — константа с размерностью скорости и равная по величине скорости распространения света в пустоте $c=3\cdot10^{10}$ *см/сек*. Равенство (1.1) установлено на основании опытных фактов и будет рассматриваться как одна из основных гипотез при построении теории. Оно показывает, что силу, действующую на заряженную частицу в электромагнитном поле, можно формально разбить на две составляющие: электрическую, параллельную $\boldsymbol{E}$, и магнитную, перпендикулярную к $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{v}$. При движении заряженной частицы электрическая сила может производить работу, а магнитная — не может, так как она перпендикулярна к скорости.

При написании соотношения (1.1) использована так называемая *абсолютная гауссова система единиц*. В этой системе напряженности полей, а также заряд частиц, измеряются в механических единицах (сантиметр-грамм-секунда), причем размерности напряженностей электрического и магнитного полей считаются одинаковыми:

$$[E]=[H]=M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1};\quad [e]=M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}.$$

При изучении физических явлений можно пользоваться различными системами координат. Так как всюду в дальнейшем изучаются нерелятивистские явления, то будут использоваться только системы координат, относительная скорость U которых много меньше скорости света $\left(\frac{U^2}{c^2}\ll 1\right)$. При переходе от системы координат K к системе координат K', движущейся с постоянной скоростью $\boldsymbol{U}$ относительно K, кинематические величины преобразуются по формулам Галилея

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{U}t;\quad t'=t;\quad \boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U}$$

(величины со штрихом относятся к системе K', без штриха — к системе K). Отсюда следует, что ускорение, а следовательно, и сила не должны зависеть от системы координ-

нат, в которой они измеряются. Поэтому из (1.1) будет следовать, что величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ связаны с выбором системы координат. В теории относительности на основании равенства (1.1) выводятся формулы преобразования напряженностей электрического и магнитного полей при переходе от одной инерциальной системы координат к другой [14]. Эти формулы с точностью до членов порядка $\frac{U^2}{c^2}$ имеют вид

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{U}}{c} \times \boldsymbol{H}; \quad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{U}}{c} \times \boldsymbol{E}. \tag{1.2}$$

Нетрудно проверить, что при использовании преобразований (1.2) сила, с которой электромагнитное поле действует на частицу, инвариантна с точностью до членов порядка $\frac{U^2}{c^2}$. Действительно,

$$\boldsymbol{F}' = e\left(\boldsymbol{E}' + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{H}'\right) =$$

$$= e\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{H} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{U}) \times \left(\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{E}\right)\right] =$$

$$= e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}\right) = \boldsymbol{F}.$$

Рассмотрим движение частицы с зарядом e и массой m в однородном электромагнитном поле [15]; при этом ограничимся случаем $E^2 \ll H^2$. Предположим сначала, что векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ параллельны. Разложим движение частицы на продольное движение вдоль поля и поперечное движение перпендикулярно к полю, при этом скорость представится в виде суммы $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp$. Сила, действующая на частицу вдоль поля, будет равна $\boldsymbol{F}_\parallel = e\boldsymbol{E}$, а движение, вызванное этой силой, будет равноускоренным $\frac{dv_\parallel}{dt} = \frac{eE}{m}$. Составляющая силы, перпендикулярная к полю, равна $\boldsymbol{F}_\perp = e\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} = \frac{e\boldsymbol{v}_\perp}{c} \times \boldsymbol{H}$. Эта сила работы не производит. Следовательно, $m\frac{v_\perp^2}{2} = \text{const}$, поэтому $v_\perp = \text{const}$ и $F_\perp = \text{const}$. Так как, кроме того, $\boldsymbol{F}_\perp \perp \boldsymbol{v}_\perp$, то поперечное движение будет

равномерным движением по окружности радиуса $R = \frac{mv_\perp c}{eH}$. Эта величина получается из условия равенства центробежной силы и $F_\perp$. При этом частицы, обладающие зарядом разных знаков, будут вращаться в противоположные стороны. Суммарное движение будет представлять собой движение по винтовой линии с переменным шагом вдоль направления полей.

Рассмотрим теперь движение заряженной частицы при произвольном расположении векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Если перейти к системе координат, движущейся с некоторой скоростью $\boldsymbol{U}$, перпендикулярной к $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, то можно добиться того, чтобы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в этой системе координат были параллельны. В самом деле, согласно формулам перехода (1.2),

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{e}_i\left(E_i - \frac{U}{c} H_j\right) + \boldsymbol{e}_j\left(E_j + \frac{U}{c} H_i\right),$$
$$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{e}_i\left(H_i + \frac{U}{c} E_j\right) + \boldsymbol{e}_j\left(H_j - \frac{U}{c} E_i\right)$$

(система координат выбрана так, чтобы векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ лежали в координатной плоскости x_i, x_j; $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_j$ — единичные векторы). Для параллельности векторов $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{H}'$ необходимо, чтобы

$$(H_iE_j - H_jE_i)\frac{U^2}{c^2} + (E^2 + H^2)\frac{U}{c} + (H_iE_j - H_jE_i) = 0.$$

Так как, согласно предположению, $E^2 \ll H^2$, то, разыскивая корень этого уравнения, для которого $\frac{U^2}{c^2} \ll 1$, получим

$$\frac{U}{c} = \frac{H_jE_i - H_iE_j}{H^2}. \qquad (1.3)$$

Таким способом может быть найдена система координат, в которой движение частицы сводится к предыдущему случаю. Эта система координат зависит только от векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и не зависит от рассматриваемой частицы. Скорость движения этой системы координат называется *скоростью дрейфа частиц*. Кроме найденной системы координат, существуют и другие системы координат, в которых $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ параллельны. Во всех таких системах координат векторы

$\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ одинаковы, а скорости этих систем отличаются на вектор, параллельный общему направлению $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Движение частицы в исходной системе координат будет складываться из движения в подвижной системе координат (винтовое движение с переменным шагом) и движения со скоростью подвижной системы (дрейфа).

Будем в дальнейшем рассматривать движение не одной частицы, а огромного числа заряженных частиц — сплошной среды; при этом будем интересоваться только средними характеристиками такого движения.

Пусть в пространстве, занятом средой, задано электромагнитное поле. Вычислим силу, с которой это поле действует на физически бесконечно малый объем среды $\Delta\tau$. Под физически бесконечно малым объемом будем понимать объем, протяженность которого мала по сравнению с характерной длиной задачи, но достаточно велика для возможности осреднения по этому объему.

Суммируя (1.1) по всем частицам, находящимся в этом объеме, и считая $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ постоянными на протяжении пространства, занятого этими частицами, получим для искомой силы следующее выражение:

$$\boldsymbol{F}=\left[\sum_{\alpha} e_{\alpha}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\sum_{\alpha} e_{\alpha}\boldsymbol{v}_{\alpha}\times\boldsymbol{H}\right], \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{v}_{\alpha}$ — скорость частицы, и суммирование производится по всем частицам внутри объема $\Delta\tau$.

Введем величины

$$\rho_e=\frac{\sum\limits_{\alpha} e_{\alpha}}{\Delta\tau},\quad \boldsymbol{j}=\frac{\sum\limits_{\alpha} e_{\alpha}\boldsymbol{v}_{\alpha}}{\Delta\tau}, \tag{1.5}$$

которые называются соответственно *плотностью заряда* и *плотностью тока*. Если имеются частицы ν сортов, то эти выражения можно представить в следующем виде:

$$\rho_e=\sum_{k=1}^{\nu} N_k e_k,\quad \boldsymbol{j}=\sum_{k=1}^{\nu} N_k e_k \boldsymbol{v}_k,$$

где N_k — плотность частиц k-го сорта, $\boldsymbol{v}_k$ — средняя скорость частиц k-го сорта.

Плотность силы $\boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{F}}{\Delta\tau}$, согласно (1.4), равна

$$\boldsymbol{f}=\rho_e\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}). \tag{1.6}$$

Как следует из (1.5), при переходе от одной системы координат к другой системе, движущейся со скоростью $\boldsymbol{U}$ относительно исходной,

$$\boldsymbol{j}'=\frac{\sum\limits_{\alpha} e_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha}{\Delta\tau}=\frac{\sum\limits_{\alpha} e_\alpha(\boldsymbol{v}_\alpha-\boldsymbol{U})}{\Delta\tau}=\boldsymbol{j}-\rho_e\boldsymbol{U}. \tag{1.7}$$

Так как заряд частицы не меняется с течением времени, то изменение заряда в каком-либо объеме может происходить только за счет входа и выхода заряженных частиц через границу объема. Через элемент поверхности $\Delta\Sigma$ с нормалью $\boldsymbol{n}$ в единицу времени проходит $\sum\limits_k N_k(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{n})\Delta\Sigma$ частиц, которые переносят заряд

$$\sum_k e_k N_k(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{n})\Delta\Sigma=\Delta\Sigma(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n})=j_n\Delta\Sigma.$$

Через замкнутую поверхность ($\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль) втекает заряд

$$-\oint\limits_{\Sigma} j_n\,d\Sigma.$$

Это количество равно изменению заряда в объеме в единицу времени

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}\rho_e\,d\tau.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial 0}{\partial t}=-\oint\limits_{\Sigma} j_n\,d\Sigma, \tag{1.8}$$

где $0=\int\limits_{\tau}\rho_e\,d\tau$ — заряд, заключенный внутри Σ.

При изучении изменения и свойств электромагнитного поля пользуются системой уравнений Максвелла (см., напри-

мер, [6, 17]). Эта система, записанная в интегральной форме, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} &= \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\int_\Sigma \frac{\partial E_n}{\partial t}\, d\Sigma,\\ \oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{1}{c}\int_\Sigma \frac{\partial H_n}{\partial t}\, d\Sigma,\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

где L — контур, на который натянута поверхность Σ и который покоится в выбранной системе координат, I — ток, протекающий через Σ и равный

$$I = \int_\Sigma j_n d\Sigma.$$

Индекс n означает нормальную составляющую вектора, причем направление нормали к поверхности выбирается так, чтобы направление обхода при интегрировании по контуру L и направление нормали образовывали правовинтовую систему.

К уравнениям Максвелла относят также следующие два соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\oint_\Sigma E_n\, d\Sigma &= 4\pi 0,\\ \oint_\Sigma H_n\, d\Sigma &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Уравнения Максвелла являются обобщением опытных фактов и представляют фундаментальные постулаты электродинамики. Правильность этих постулатов проверена тем, что все выводы, следующие из (1.9), согласуются с известными экспериментальными данными.

В ряде случаев, когда значительная часть токов или зарядов сосредоточена в областях, объем которых мал по сравнению со всем рассматриваемым объемом, бывает удобно использовать суммарные характеристики токов и зарядов этих областей, вводя такие понятия, как плотность поверхностного тока и плотность поверхностного заряда, линейный ток и плотность линейного заряда, точечный заряд и т. д. При этом интегральные соотношения (1.8), (1.9) и (1.10) сохраняют свой вид.

Если рассматриваемая среда состоит из сложных частиц — молекул и атомов, то могут возникать внутримолекулярные токи, связанные с движением зарядов внутри молекулы, и заряды, связанные с разделением зарядов внутри молекулы (поляризацией).

Чтобы избежать рассмотрения этих величин при изучении сплошной среды, наряду с векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ вводятся векторы электрической и магнитной индукции $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$. Если электромагнитное поле не очень быстро меняется в пространстве и во времени, то для большинства сред в системе координат, в которой элемент среды покоится, векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ пропорциональны соответственно векторам $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{D}' = \varepsilon \boldsymbol{E}', \quad \boldsymbol{B}' = \mu \boldsymbol{H}'.$$

Здесь ε и μ — безразмерные коэффициенты, связанные с физическими свойствами среды.

Во многих случаях при рассмотрении жидких и газообразных проводников с большой степенью точности можно считать $\mu = 1$[1]).

Для хорошо проводящих сред с не слишком большим ε можно не учитывать поляризацию среды. Это связано с тем, что поляризация среды вызывается электрическим полем $\boldsymbol{E}'$, которое, как будет видно из дальнейшего, является малой величиной[2]). В связи с этим в уравнениях Максвелла (1.9) (и всюду в дальнейшем) будем считать $\mu = \varepsilon = 1$.

---

[1]) В рассматриваемой постановке величина $\boldsymbol{B}$ вводится так, что ее отличие от $\boldsymbol{H}$ обусловлено внутримолекулярными токами.

В некоторых случаях при изучении плазмы величина $\boldsymbol{B}$ иногда вводится так, что ее отличие от $\boldsymbol{H}$ обусловлено также токами, связанными с вращением заряженных частиц в магнитном поле. В этом случае величина μ может сильно отличаться от 1.

[2]) Если учесть ε в уравнениях Максвелла, а также в выражении для силы, с которой электромагнитное поле действует на среду, и в выражении для энергии, сообщаемой полем среде, то нетрудно убедиться в том, что при сделанных в § 4 гл. I предположениях относительно величины проводимости среды все оценки, которые делаются в § 4, остаются в силе, и все члены, содержащие ε, выпадают из системы уравнений магнитной гидродинамики.

Если поверхность Σ замкнута, то контур L в уравнениях (1.9) можно считать стянувшимся в точку. Поэтому левые части в (1.9) выпадают и

$$\oint\limits_{\Sigma} j_n\, d\Sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\oint\limits_{\Sigma} E_n\, d\Sigma,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint\limits_{\Sigma} H_n\, d\Sigma = 0.$$

Преобразуем первое уравнение, воспользовавшись равенством (1.8):

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint\limits_{\Sigma} E_n\, d\Sigma = 4\pi\frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

Таким образом, так как соотношения (1.10) выполнены в начальный момент, то они, в силу уравнений (1.9) и уравнения сохранения заряда (1.8), будут выполнены всегда, следовательно, в нестационарных задачах уравнения (1.10) играют роль начальных условий. В стационарных задачах уравнения (1.10) не зависят от уравнений (1.9) и совокупность уравнений (1.9) и (1.10) надо рассматривать как единую систему, описывающую изменение поля. Так как уравнение (1.8) является следствием уравнений (1.9) и (1.10), то при интегрировании этой системы его можно не рассматривать. Кроме того, первое из уравнений (1.10) выражает плотность заряда через напряженность электрического поля, и поэтому при интегрировании вышеупомянутой системы его тоже можно не рассматривать, а использовать как уравнение для определения θ.

Если все функции, входящие в уравнения (1.9) и (1.10), дифференцируемы, то эти уравнения можно записать в дифференциальной форме:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{E} &= 4\pi\rho_e, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Если функции, входящие в (1.9) и (1.10), терпят разрыв на некоторой поверхности, покоящейся в выбранной системе координат, то, предполагая $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$ ограниченными, получим соотношения, которым должны удовлетворять компоненты полей при переходе через поверхности разрыва [17]. Чтобы получить эти условия, поступим следующим образом. Выберем систему координат, в которой поверхность разрыва покоится. Пусть Σ — поверхность разрыва, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности разрыва, $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ — единичные координатные векторы в плоскости разрыва. Выберем замкнутый контур в плоскости, нормальной к $\boldsymbol{\varkappa}$ так, как указано на рис. 1. Примем этот контур и ограниченную им часть плоскости $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ за контур и поверхность, фигурирующие в уравнениях Максвелла (1.9) Тогда, если контур настолько мал, что в его пределах подынтегральные функции в уравнениях (1.9) можно считать постоянными с каждой стороны от поверхности разрыва и если $\frac{h}{l} \ll 1$, то получим

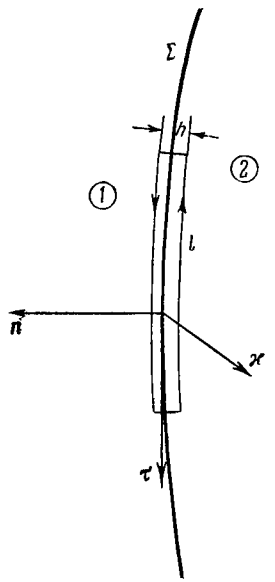


Рис. 1.

$$\left.\begin{aligned}(H_{\tau 1} - H_{\tau 2})\, l &= \frac{4\pi}{c} I_{\varkappa} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_{\varkappa}}{\partial t} lh,\\ (E_{\tau 1} - E_{\tau 2})\, l &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_{\varkappa}}{\partial t} lh.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда, переходя к пределу при $h \to 0$ и считая, что $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$ ограничены, а $i_{\varkappa} l = \lim\limits_{h \to 0} I_{\varkappa}$ ($i_{\varkappa}$ — величина, называемая *плотностью поверхностного тока в направлении* $\boldsymbol{\varkappa}$), найдем

$$\left.\begin{aligned}H_{\tau 1} - H_{\tau 2} &= \frac{4\pi}{c} i_{\varkappa},\\ E_{\tau 1} - E_{\tau 2} &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Проделав ту же операцию в плоскости $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, получим

$$H_{\varkappa 1} - H_{\varkappa 2} = -\frac{4\pi}{c} i_\tau; \quad E_{\varkappa 1} - E_{\varkappa 2} = 0.$$

Эти две группы соотношений можно объединить в одну группу соотношений, которым должны удовлетворять проекции векторов напряженности полей на плоскость, касательную к поверхности разрыва, при переходе через поверхность разрыва:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}_{t1} - \boldsymbol{H}_{t2} &= \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}), \\ \boldsymbol{E}_{t2} - \boldsymbol{E}_{t1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

Здесь $\boldsymbol{H}_t$, $\boldsymbol{E}_t$ — проекции соответствующих векторов на плоскость разрыва, а

$$\boldsymbol{i} = i_\tau \boldsymbol{\tau} + i_\varkappa \boldsymbol{\varkappa}.$$

Заключим теперь некоторый «кусок» поверхности разрыва внутрь призмы высотой h с основаниями Σ, параллельными

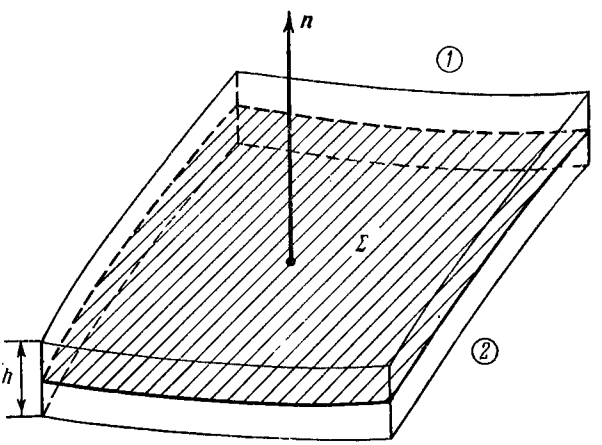


Рис. 2.

поверхности разрыва (рис. 2). Принимая поверхность призмы за замкнутую поверхность, фигурирующую в уравнениях Максвелла (1.10), и считая призму настолько малой, что в ее пределах подынтегральные функции можно считать с обеих

сторон разрыва постоянными, а $\frac{h}{\sqrt{\Sigma}} \ll 1$, получим

$$\left.\begin{aligned}(E_{n1} - E_{n2})\,\Sigma &= 4\pi\vartheta,\\ (H_{n1} - H_{n2})\,\Sigma &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Переходя здесь к пределу при $h \to 0$ и вводя обозначение $\lim_{h\to 0} \vartheta = \vartheta\Sigma$ (ϑ — величина, называемая поверхностной плотностью заряда), найдем

$$\left.\begin{aligned}E_{n1} - E_{n2} &= 4\pi\vartheta,\\ H_{n1} - H_{n2} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Условия (1.13) и (1.14) являются условиями, которым должны удовлетворять компоненты электромагнитного поля на поверхностях разрыва.

§ 2. Уравнения механики сплошной среды с учетом электромагнитных сил

Уравнения движения сплошной среды получаются из законов сохранения массы, количества движения и энергии:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho\, d\tau = 0,\\ &\frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho \boldsymbol{v}\, d\tau = \int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n\, d\Sigma + \int_{\tau} \boldsymbol{f}\, d\tau,\\ &\frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) d\tau = -\int_{\Sigma} q_n\, d\Sigma + \int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{v}\, d\Sigma + \int_{\tau} A\, d\tau.\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ — скорость сплошной среды, равная скорости центра инерции частиц, находящихся в физически бесконечно малом объеме в окрестности рассматриваемой точки; τ — «жидкий» объем, т. е. объем, ограниченный поверхностью Σ, движущейся в направлении нормали со скоростью v_n; ρ — плотность среды, т. е. сумма масс всех частиц, находящихся в физически бесконечно малом объеме, отнесенная к величине этого объема; q_n — поток тепла через поверхность Σ, т. е. поток энергии через «жидкую» поверхность, который возникает за счет переноса энергии молекулами, пересекающими данную

поверхность, а также за счет работы сил межмолекулярного взаимодействия; $\boldsymbol{p}_n$ — плотность поверхностных сил, равная с обратным знаком потоку импульса через «жидкую» поверхность, который возникает за счет переноса импульса молекулами, пересекающими данную поверхность, а также за счет сил межмолекулярного взаимодействия; $\rho\varepsilon$ — внутренняя энергия единицы объема среды, т. е. сумма кинетической энергии хаотического движения и потенциальной энергии взаимодействия частиц, находящихся в данном объеме [1]); $\boldsymbol{f}$ — плотность внешних объемных сил; A представляет собой разность полного притока энергии к выделенному объему и притока энергии за счет потока тепла через ее поверхность и за счет работы поверхностных сил.

Так как в качестве объемных сил в дальнейшем будем рассматривать только силы воздействия электромагнитного поля на среду, то, согласно (1.6),

$$\boldsymbol{f} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}).$$

Кроме того, в дальнейшем под A будем понимать только приток энергии за счет внешнего электромагнитного поля

$$A = \boldsymbol{E} \sum_\alpha e_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}.$$

В механике сплошных сред доказывается, что плотность поверхностных сил $\boldsymbol{p}_n$ задается тензором напряжений

$$\hat{P} = \{p_{ij}\}, \quad p_{ij} = p_{ji};$$

при этом p_{ij} представляет собой напряжение, действующее на площадке, перпендикулярной к $\boldsymbol{e}_j$, в направлении $\boldsymbol{e}_i$.

Суммарное напряжение, действующее на площадку, перпендикулярную к $\boldsymbol{e}_j$, есть

$$\boldsymbol{p}_j = p_{ij} \boldsymbol{e}_i.$$

Суммарное напряжение, действующее на площадку Σ с нормалью $\boldsymbol{n}$, равно

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_j n_j,$$

[1]) Изложение вопросов, связанных с этими понятиями, можно найти в книге: С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.

где n_j — проекция $\boldsymbol{n}$ на ось $\boldsymbol{e}_j$. Поток тепла через поверхность задается *вектором потока тепла* $\boldsymbol{q}$, причем $q_n = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = q_i n_i$.

В механике сплошной среды задаются выражениями для $\hat{\boldsymbol{P}}$, $\boldsymbol{q}$ и ε таким образом, чтобы система (2.1) совместно с выражениями для $\hat{\boldsymbol{P}}$, $\boldsymbol{q}$ и ε представляла собой замкнутую систему уравнений. Эти выражения могут задаваться на основании опытных данных.

Всюду в дальнейшем будем считать среду двухпараметрической, то есть считать, что все термодинамические величины (например, температура T и внутренняя энергия ε) и вообще все величины, характеризующие среду при термодинамическом равновесии, являются функциями двух параметров: плотности ρ и давления p [1]). При этом тензор напряжений будет иметь вид

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik},$$

причем τ_{ik} будем считать функциями от ρ, p, $\boldsymbol{H}$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, такими, что если все $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0$, то напряжения в рассматриваемом элементе среды должны совпадать с напряжениями в равновесном состоянии, т. е. $p_{ik} = -p\delta_{ik}$, или $\tau_{ik} = 0$. Поэтому при не слишком больших градиентах скоростей можно принять линейную зависимость τ_{ik} от $\frac{\partial v_k}{\partial x_m}$. Тензор $\hat{\tau}$ с компонентами τ_{ij} будем называть тензором вязких напряжений. Аналогично, предполагая, что $\boldsymbol{q}$ зависит от ρ, p, $\boldsymbol{H}$, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, получим, что при не слишком больших градиентах температуры зависимость q_i от $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ линейная. Задание $\boldsymbol{q}$ и $\hat{\boldsymbol{P}}$, т. е. их выражение через другие величины, связано с некоторыми предположениями относительно свойств среды.

В дальнейшем при конкретных расчетах для вектора потока тепла и тензора напряжений примем выражения,

[1]) Если $\varepsilon \neq 1$ и $\mu \neq 1$, то термодинамические функции, характеризующие среду, могут зависеть также от напряженности электромагнитного поля (см. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957).

используемые в обычной гидродинамике, т. е. будем предполагать, что

$$\boldsymbol{q} = 0, \quad \tau_{ik} = 0, \tag{2.2}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{q} &= -k \operatorname{grad} T, \\ \tau_{ik} &= \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\delta_{ik}\right) + \zeta\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Здесь T — температура, μ и ζ — первый и второй коэффициенты вязкости, k — коэффициент теплопроводности. В дальнейшем во многих случаях μ, ζ и k будут считаться постоянными.

Равенства (2.2) и (2.3) могут быть оправданы с молекулярно-кинетической точки зрения следующим образом. Если в газообразной среде расстояние, на котором существенно изменяются скорость и температура, велико по сравнению с длиной свободного пробега и расстоянием, на котором электрическое поле заряженной частицы экранируется частицами другого знака [1]), и если, кроме того, характерное время задачи значительно больше времени между столкновениями частиц, то распределение скоростей частиц близко к изотропному. В этом случае касательные напряжения малы по сравнению с давлением и потоки тепла невелики. Поток тепла и касательные напряжения связаны с переносом количества движения и энергии хаотическим движением частиц. Если электромагнитное поле существенно искривляет пути заряженных частиц, то расстояния, на которые частицы перемещаются без столкновений, будут различны вдоль и поперек поля, что приведет к анизотропии явлений переноса. Как известно, равенства (2.3) могут быть получены при предположении об изотропности свойств среды. Следовательно, они могут быть применены, строго говоря, только в том случае, когда пути заряженных частиц слабо искривляются за время движения между двумя столкновениями. Такое положение вещей имеет место в жидкости и плотных газах. В противном случае выражения для тензора напряжений и вектора потока тепла имеют более сложный вид [1, 4, 18].

В дальнейшем при конкретных расчетах будем считать, что рассматриваемая среда является совершенным газом, т. е.

---

[1]) Это расстояние называется дебаевской длиной (см. Л. Спитцер, Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957).

температура и внутренняя энергия определяются соотношениями

$$p = R\rho T; \quad \varepsilon = c_v T = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}. \tag{2.4}$$

Здесь c_v — теплоемкость газа, соответствующая нагреванию при постоянном объеме, которую в дальнейшем будем считать постоянной, R — газовая постоянная, γ — показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{R + c_v}{c_v}.$$

В дальнейшем будем также рассматривать движения несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), причем внутреннюю энергию несжимаемой жидкости будем считать пропорциональной температуре

$$\varepsilon = c_v T \qquad (c_v = \text{const}). \tag{2.5}$$

Преобразуем в уравнениях (2.1) поверхностные интегралы в объемные, предполагая подынтегральные функции дифференцируемыми:

$$\left.\begin{aligned}
&\oint_\Sigma q_n \, d\Sigma = \oint_\Sigma q_i n_i \, d\Sigma = \int_\tau \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \, d\tau = \int_\tau \operatorname{div} \boldsymbol{q} \, d\tau, \\
&\oint_\Sigma \boldsymbol{p}_n \, d\Sigma = \boldsymbol{e}_k \oint_\Sigma p_{ki} n_i \, d\Sigma = \int_\tau \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_k \, d\tau = \int_\tau \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{P}} \, d\tau, \\
&\oint_\Sigma \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{v} \, d\Sigma = \oint_\Sigma p_{ki} v_k n_i \, d\Sigma = \\
&\qquad = \int_\tau \frac{\partial p_{ki} v_k}{\partial x_i} \, d\tau = \int_\tau \operatorname{div} (\hat{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{v}) \, d\tau,
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

где

$$\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{P}} = \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_k, \quad \hat{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{v} = p_{ki} v_k \boldsymbol{e}_i.$$

Тогда если подынтегральные функции в объемных интегралах равенств (2.1) и (2.6) непрерывны, то, используя формулу Остроградского, из интегральных уравнений (2.1) можно

получить дифференциальные уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\\ &\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{P}}+\rho_e\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}),\\ &\rho\frac{d}{dt}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)=-\operatorname{div}\boldsymbol{q}+\operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}. \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

При получении первого уравнения использовано равенство $\frac{d\tau}{dt}=\tau\operatorname{div}\boldsymbol{v}$, а при выводе остальных — равенство $\frac{d}{dt}(\rho\, d\tau)=0$.

На практике в разных задачах используются другие формы записи уравнения энергии, которые получаются из последнего уравнения (2.7) при помощи термодинамических соотношений и первых двух уравнений движения (2.7). Умножая уравнение импульсов на $\boldsymbol{v}$ скалярно, получим

$$\frac{1}{2}\rho\frac{dv^2}{dt}=\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{P}}+\rho_e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{v}.$$

Подставляя это выражение в уравнение энергии, получим

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}=-\operatorname{div}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}-\rho_e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}-\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{v}+$$
$$+\operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{P}}=-\operatorname{div}\boldsymbol{q}+D-p\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\Phi, \quad (2.8)$$

где

$$D=A-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}-\rho_e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}-\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{v}=$$
$$=\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right)(\boldsymbol{j}-\rho_e\boldsymbol{v})=\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{j}',$$
$$\Phi=\tau_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\tau_{ik}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right),$$
$$\tau_{ik}=p_{ik}-p\delta_{ik}.$$

D называется *джоулевым теплом*, Φ называется *диссипативной функцией* (связана с выделением тепла за счет вязкого трения). Так как для двухпараметрических сред

$$\rho\, d\varepsilon+p\, dt\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\rho(d\varepsilon+p\, dV)=\rho T\, ds,$$

где $V=\frac{1}{\rho}$ — удельный объем, s — энтропия среды, то

уравнение (2.8) можно записать в виде

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \boldsymbol{q} + \Phi + D. \tag{2.9}$$

Так как энтропия среды не может убывать ни при каком адиабатическом ($\operatorname{div} \boldsymbol{q} = 0$) процессе, то это накладывает некоторое ограничение на вид зависимости τ_{ik} от $\frac{\partial v_l}{\partial x_m}$ и $\boldsymbol{j}'$ от $\boldsymbol{E}'$, а именно зависимость должна быть такой, чтобы выполнялись неравенства

$$\Phi \geqslant 0, \quad D \geqslant 0.$$

Легко проверить, что если τ_{ik} выражается через $\frac{\partial v_l}{\partial x_m}$, согласно равенствам (2.3), то

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \sum_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right)^2.$$

Нетрудно убедиться, что при любых $\mu > 0$, $\zeta > 0$ условие $\Phi \geqslant 0$ всегда выполняется.

Для совершенного газа $\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$ и, следовательно,

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \frac{d\rho}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{\gamma - 1} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dp}{dt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} -$$

$$- p \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{p}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^\gamma} - p \operatorname{div} \boldsymbol{v}.$$

Подставляя это выражение в (2.8), получим

$$\frac{p}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = -\operatorname{div} \boldsymbol{q} + \Phi + D. \tag{2.10}$$

Так как для совершенного газа энтропия

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const},$$

то уравнение (2.10) совпадает с (2.9).

Если жидкость невязкая, нетеплопроводная и $\boldsymbol{E}' = 0$, то из (2.9), (2.10) следует постоянство энтропии в частице газа

$$s = \text{const}, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const},$$

причем const могут быть различными для разных частиц жидкости.

Займемся преобразованием системы (2.7). В силу уравнений Максвелла

$$\rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}) = \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\left[\left(\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \times \boldsymbol{H}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) - \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad}(H^2 + E^2) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{4\pi}(H_i H_j + E_i E_j)\, \boldsymbol{e}_j = -\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{T}}, \quad (2.11)$$

где

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}), \quad \hat{\boldsymbol{T}} = \{T_{ik}\},$$

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}(H_i H_k + E_i E_k) - \frac{1}{8\pi}(H^2 + E^2)\,\delta_{ik}.$$

При преобразовании было использовано векторное тождество

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} a^2 = \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \frac{\partial a_i a_j}{\partial x_i}\, \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{a}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{E} \cdot \left(\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) =$$

$$= -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) =$$

$$= -\operatorname{div} \boldsymbol{s} - \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (2.12)$$

где

$$\boldsymbol{s} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}), \quad w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2).$$

При преобразовании было использовано векторное тождество

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}.$$

В электродинамике и теории относительности вектору $\boldsymbol{g}=\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$ приписывают смысл *плотности электромагнитного количества движения*; тензору $\hat{\boldsymbol{T}}$ — смысл *тензора напряжений электромагнитного поля*; величине $w=\frac{1}{8\pi}(H^2+E^2)$ — смысл *плотности электромагнитной энергии*, вектору $\boldsymbol{s}=\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$ — смысл *плотности потока электромагнитной энергии* (вектор Умова — Пойнтинга) [17].

Равенство (2.11) выражает тот факт, что изменение электромагнитного количества движения в некотором объеме происходит за счет электромагнитного потока импульса через поверхность, ограничивающую объем, и за счет силы $-\left(\rho_e\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}\right)$, с которой среда воздействует на электромагнитное поле. Равенство (2.12) показывает, что изменение электромагнитной энергии w в объеме в единицу времени происходит за счет потока электромагнитной энергии $\boldsymbol{s}$ через поверхность, ограничивающую объем, и за счет работы $-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$ вещества над полем.

Используя введенные понятия, преобразуем уравнения движения (2.7) к следующему виду:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}), \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial t}=-\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{\Pi}}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\operatorname{div}\boldsymbol{S}. \tag{2.15}$$

Здесь $\boldsymbol{G}=\rho\boldsymbol{v}+\boldsymbol{g}$ — плотность полного количества движения; $\hat{\boldsymbol{\Pi}}=\{\pi_{ij}\}=\{\rho v_i v_j-p_{ij}-T_{ij}\}$ — тензор плотности полного потока импульса; $W=\rho\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}+w\right)$ — плотность полной энергии; $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q}-\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{v}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)$ — плотность полного потока энергии. При преобразовании уравнений импульсов и энергии использовано уравнение неразрывности.

Соотношения (2.13) — (2.15), написанные в интегральной форме, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_v \rho\, d\tau &= -\oint\limits_\Sigma \rho v_n\, d\Sigma, \\ \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_v \boldsymbol{G}\, d\tau &= -\oint\limits_\Sigma \hat{\boldsymbol{\Pi}}\cdot\boldsymbol{n}\, d\Sigma, \\ \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_v W\, d\tau &= -\oint\limits_\Sigma S_n\, d\Sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

Первое из этих соотношений выражает тот факт, что изменение массы в некотором неподвижном объеме происходит за счет потока массы $\boldsymbol{m} = \rho\cdot\boldsymbol{v}$ через границу объема, причем через площадку $d\Sigma$ с нормалью $\boldsymbol{n}$ протекает $\rho v_n d\Sigma$ массы в единицу времени.

Второе равенство (2.16) показывает, что изменение полного количества движения в неподвижном объеме происходит за счет потока импульса через границы объема. При этом плотность потока импульса через площадку с нормалью $\boldsymbol{n}$ задается вектором

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}\cdot\boldsymbol{n} = \Pi_{ik} n_i \boldsymbol{e}_k = (\rho v_i v_k - p_{ik} - T_{ik})\, n_i \boldsymbol{e}_k.$$

Первый член в этом выражении связан с притоком импульса за счет движения жидкости через границу объема, второй связан с переносом импульса за счет внутренних напряжений в среде (если молекулы среды взаимодействуют путем столкновений, то этот член связан с переносом импульса при хаотическом движении молекул). Последний член представляет собой перенос импульса электромагнитным полем. Через площадку $d\Sigma$ протекает в единицу времени $\Pi_{ik} n_k d\Sigma$ i-й компоненты импульса.

Последнее равенство (2.16) выражает тот факт, что полное изменение энергии в объеме происходит за счет потока энергии через его границу. Плотность потока энергии задается вектором $\boldsymbol{S}$. Через площадку с нормалью $\boldsymbol{n}$ будет протекать в единицу времени количество энергии

$$S_n = \rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) v_n + q_n - (\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n} + \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n},$$

Полученная выше система (2.7) уравнений движения сплошной среды, состоящей из заряженных частиц, не является замкнутой, так как она содержит члены, связанные с электромагнитным полем, законы изменения которого не содержатся в законах механики. В качестве законов изменения электромагнитного поля мы будем пользоваться рассмотренными ранее уравнениями Максвелла. В связи с этим при решении задач о движении сплошной среды, состоящей из заряженных частиц, мы должны пользоваться совместно системой (2.7) и системой уравнений Максвелла (1.11) и (1.12). Но, как нетрудно заметить, и такая совместная система уравнений все еще оказывается незамкнутой. Действительно, уравнения механики (2.7) определяют движение и все механические характеристики среды, если известно электромагнитное поле. В свою очередь для однозначного определения электромагнитного поля из уравнений Максвелла (1.11) необходимо либо задать плотность тока как функцию координат и времени, либо связать плотность тока с остальными величинами, входящими в уравнения, причем в последнем случае система уравнений механики, уравнений Максвелла и выражение для плотности тока должны рассматриваться совместно.

Соотношение, связывающее плотность тока с остальными величинами, называемое *законом Ома* (или *обобщенным законом Ома*), зависит, вообще говоря, от свойств рассматриваемой среды.

§ 3. Закон Ома [1])

Законом Ома обычно называют соотношение, связывающее величину плотности тока $\boldsymbol{j}$ с напряженностью электромагнитного поля и параметрами, определяющими свойства и движение проводящей среды.

В электродинамике и магнитной гидродинамике обычно используется простейшая форма связи между плотностью тока и напряженностью электрического поля

$$\boldsymbol{j}' = \sigma \boldsymbol{E}'. \tag{3.1}$$

[1]) Этот параграф посвящен выяснению границ применимости закона Ома в форме (3.1), используемой в дальнейшем при выводе уравнений магнитной гидродинамики, и при первом чтении книги может быть опущен.

Здесь j' и E' — плотность тока и напряженность электрического поля в системе координат, в которой элемент среды покоится, σ — величина, называемая *проводимостью среды* и зависящая от свойств среды.

Для того чтобы понять смысл и определить границы применимости соотношения (3.1) к жидким и газообразным проводникам, рассмотрим простейшую молекулярно-кинетическую модель среды [10, 12, 13, 15, 22–24].

1. Уравнения движения трехкомпонентной среды, состоящей из электронов, ионов и нейтральных частиц. Пусть в единице объема среды содержится n_a нейтральных частиц, n ионов и $n+n'$ электронов. Для простоты будем считать, что электроны и ионы несут одинаковый по величине, но разного знака заряд e; тогда плотность объемного заряда равна $\rho_e = -n'e$. Кроме того, массу иона будем считать много больше массы электрона

$$m_i \gg m_e \tag{3.2}$$

и совпадающей с массой нейтральных частиц

$$m_i = m_a. \tag{3.3}$$

Назовем *степенью ионизации* величину

$$\alpha = \frac{n}{n+n_a}. \tag{3.4}$$

В качестве простейшей модели примем, что каждая из компонент — электроны, ионы и нейтральные частицы — представляет собой газ, движущийся независимо от других компонент, в том смысле, что для каждой из компонент в отдельности могут быть написаны гидродинамические уравнения движения. Взаимодействие между компонентами происходит в результате столкновений и сводится к некоторой усредненной объемной силе, равной среднему изменению импульса при столкновениях частиц, принадлежащих разным компонентам. Электронный, ионный и нейтральный газы считаются идеальными, так что напряжения внутри компонент сводятся к соответствующим давлениям. Если скорости относительного движения компонент малы по сравнению с хаотическими скоростями частиц, то и смесь в целом можно считать идеальной, а суммарное давление — равным сумме

парциальных давлений каждой из компонент

$$p = p_e + p_i + p_a. \tag{3.5}$$

При этом в равновесном состоянии вследствие пропорциональности давления числу частиц имеют место следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{n}{2n + n_a + n'}\, p, \\ p_e &= \frac{n + n'}{2n + n_a + n'}\, p, \\ p_a &= \frac{n_a}{2n + n_a + n'}\, p. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

В пространстве, занятом движущейся средой, задано электрическое поле $\boldsymbol{E}$ и магнитное поле $\boldsymbol{H}$. При этом предполагается, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ определяются как внешними полями, так и зарядами и токами в самой среде.

Определим силу, действующую на каждую из компонент, возникающую за счет столкновений частиц этой компоненты с частицами другой компоненты. Силу, действующую на единицу объема ν-й компоненты со стороны частиц k-й компоненты, можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{f}_{\nu k} = \Delta \boldsymbol{I}_{\nu k} n_\nu \tau_{\nu k}^{-1}, \quad \nu,\ k = e,\ i,\ a, \tag{3.7}$$

где n_ν — число частиц ν-го сорта в единице объема, $\tau_{\nu k}$ — среднее время между столкновениями частиц ν-го сорта с частицами k-го сорта, причем за среднее время между столкновениями принимается промежуток времени, за который частица ν-го сорта при взаимодействии с частицами k-го сорта теряет в среднем импульс $\Delta \boldsymbol{I}_{\nu k}$. Обычно в качестве $\Delta \boldsymbol{I}_{\nu k}$ выбирается величина

$$\Delta \boldsymbol{I}_{\nu k} = -\frac{m_\nu m_k}{m_\nu + m_k} \boldsymbol{v}_{\nu k}$$

($\boldsymbol{v}_{\nu k}$ — средняя скорость частиц ν-й компоненты относительно частиц k-й компоненты), которая соответствует средней потере импульса при упругом столкновении двух частиц m_ν и m_k, движущихся с относительной скоростью $\boldsymbol{v}_{\nu k}$ в предположении о равной вероятности любого угла отклонения

частицы в результате столкновения. Согласно неравенству (3.2), для электронного газа

$$\Delta \boldsymbol{I}_{\nu k} = -\boldsymbol{I}_{\nu k}, \quad \nu = i, a, \quad k = e,$$

а для ионного и нейтрального газов

$$\Delta \boldsymbol{I}_{\nu k} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{I}_{\nu k}, \quad k, \nu = i, a, \quad k \neq \nu,$$

где $\boldsymbol{I}_{\nu k}$ — импульс частиц ν-го газа относительно частиц k-го газа.

Теперь легко написать уравнения движения для каждой из компонент среды. Пусть $\boldsymbol{v}$ — скорость движения всей среды, $\boldsymbol{v}_i$ — скорость движения ионного газа относительно среды и $\boldsymbol{v}_e$ — скорость движения электронного газа относительно ионного газа. Скорость движения нейтрального газа определяется через скорость среды и скорости ионного и электронного газов по формуле

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v} - \frac{n}{n_a}\left(\boldsymbol{v}_i + \frac{m_e}{m_i}\boldsymbol{v}_e\right). \tag{3.8}$$

При выводе этого соотношения считается, что скорость элемента среды совпадает со скоростью его центра масс, и используется неравенство $m_e \ll m_i$. Последний член оставлен, несмотря на малую массу электрона, в связи с тем, что соотношение между $\boldsymbol{v}_e$ и $\boldsymbol{v}_i$ неизвестно, и может оказаться, что $m_e v_e \sim m_i v_i$. Кроме того, здесь и всюду в дальнейшем считается, что

$$n' \ll n. \tag{3.9}$$

(Значительные концентрации объемного заряда не могут возникнуть при отсутствии специальных внешних условий, обеспечивающих удержание этого заряда. В связи с этим членами $\sim \frac{n'}{n}$ всюду пренебрегаем по отношению к членам ~ 1. Отметим, что условие (3.9) не равносильно предположению об отсутствии пространственного заряда, так как малое превышение числа электронов над числом ионов может дать заметный вклад в силу, действующую на среду со стороны электрического поля ($-n'e\boldsymbol{E} = \rho_e \boldsymbol{E}$), и в плотность тока за счет переноса зарядов вместе с движущейся средой ($-n'e\boldsymbol{v} = \rho_e \boldsymbol{v}$). Если газ полностью ионизован ($n_a = \boldsymbol{v}_a = 0$), то соотношение (3.8) упрощается и дает связь $\boldsymbol{v}_i$ и $\boldsymbol{v}_e$. Выкладки,

аналогичные тем, которые будут проделаны здесь в предположении $\alpha \neq 1$ ($n_a \neq 0$), можно проделать и для случая полной ионизации (двухкомпонентная среда, $\alpha = 1$), причем, как легко проверить, получающуюся при этом форму обобщенного закона Ома можно получить из соотношения (3.24) предельным переходом при $\alpha \to 1$ (соотношение (3.25)).

Кроме силы, обусловленной столкновениями частиц разных компонент, на электронный и ионный газы будет действовать объемная сила, обусловленная электромагнитным полем.

Так как средний импульс электронов относительно ионов равен $\boldsymbol{I}_{ei} = m_e \boldsymbol{v}_e$, а относительно нейтральных частиц

$$\boldsymbol{I}_{ea} = m_e(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_a) = m_e\left[\boldsymbol{v}_e + \left(1 + \frac{n}{n_a}\right)\boldsymbol{v}_i + \right.$$
$$\left. + \frac{n}{n_a} \cdot \frac{m_e}{m_i}\boldsymbol{v}_e\right] = m_e\left(\boldsymbol{v}_e + \frac{\boldsymbol{v}_i}{1-\alpha}\right),$$

то уравнение движения электронного газа можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &m_e n \frac{d_e(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_e)}{dt} = \\ &= -\operatorname{grad} p_e - ne\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_e) \times \boldsymbol{H}\right] - \\ &\qquad - m_e n \boldsymbol{v}_e \tau^{-1} - m_e n\left(\boldsymbol{v}_e + \frac{\boldsymbol{v}_i}{1-\alpha}\right)\tau_e^{-1}, \\ &\frac{d_e}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_e)\nabla] = \frac{d}{dt} + (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_e)\nabla. \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

Импульс ионов относительно нейтральных частиц равен

$$\boldsymbol{I}_{ia} = m_i(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_a) = m_i \frac{\boldsymbol{v}_i}{1-\alpha} + m_e \frac{\alpha}{1-\alpha}\boldsymbol{v}_e.$$

Используя это выражение, запишем уравнение движения ионного газа в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &m_i n \frac{d_i(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i)}{dt} = -\operatorname{grad} p_i + ne\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i) \times \boldsymbol{H}\right] + \\ &+ m_e n \boldsymbol{v}_e \tau^{-1} - \frac{1}{2} n m_i \frac{\alpha}{1-\alpha}\boldsymbol{v}_e \tau_i^{-1}\frac{m_e}{m_i} - \frac{1}{2} n m_i \frac{\boldsymbol{v}_i}{1-\alpha}\tau_i^{-1}, \\ &\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_i)\nabla. \end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

В уравнениях (3.10) и (3.11) τ, τ_i, τ_e — соответственно время между столкновениями электронов с ионами, ионов с ней-

тральными частицами и электронов с нейтральными частицами. Вместо уравнения движения нейтрального газа будем пользоваться уравнением движения для смеси в целом, которое, конечно, является следствием уравнения движения нейтрального газа и уравнений (3.10), (3.11), (3.5) и (3.2):

$$\left.\begin{aligned} m_i(n+n_a)\frac{dv}{dt} &= -\operatorname{grad} p - n'eE - \\ &\quad -\frac{e}{c}[nv_e + n'(v+v_i)]\times H, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (v\nabla). \end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

Здесь мы воспользовались определением плотности тока

$$j = \sum_k n_k e_k v_k = -(n+n')e(v+v_i+v_e) + \\ + ne(v+v_i) = -nev_e - n'e(v+v_i)$$

и неравенством (3.9).

2. Получение обобщенного закона Ома. Уравнения (3.10), (3.11), (3.12) служат для получения соотношения, связывающего плотность тока с другими величинами (обобщенного закона Ома). Прежде чем выводить это соотношение, оценим в этих уравнениях члены, содержащие производные.

Будем предполагать, что характерное время задачи много больше времени между столкновениями частиц и что скорость компонент относительно центра масс мала по сравнению с хаотическими скоростями частиц, принадлежащих данной компоненте (это условие использовано нами при получении соотношений (3.5) и (3.6)). Если T — характерное время задачи, L — характерный размер и U — характерная скорость $\left(U \sim \frac{L}{T}\right)$, то эти предположения равносильны следующим:

$$\left.\begin{aligned} &T \gg \max\{\tau, \tau_i, \tau_e\}, \\ &v_i \ll v_{ix}, \quad |v_i + v_e| \ll v_{ex}, \quad |v - v_a| < v_{ax}. \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

Здесь v_{ix}, v_{ex}, v_{ax} — хаотические скорости ионов, электронов и нейтральных частиц, причем если состояние равновесное (температуры электронов, ионов и нейтральных частиц равны), то

$$m_e v_{ex}^2 = m_i v_{ix}^2 = m_i v_{ax}^2.$$

Так как давление пропорционально произведению массы частиц на средний квадрат хаотической скорости, то при условиях (3.13) членами

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_e),\ (\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_e)\nabla(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_e),$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\quad\text{и}\quad \boldsymbol{v}_i\nabla(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i)$$

в левых частях уравнений (3.10) и (3.11) можно пренебречь по сравнению с последними членами в правой части этих уравнений и с градиентами соответствующих давлений.

Кроме того, в силу уравнения (3.12), при условиях (3.2), (3.3), (3.6) и (3.9) имеет место соотношение

$$m_e n\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = \frac{m_e}{m_i}\frac{n}{n+n_a}\left|\left[-n'e\boldsymbol{E}-\operatorname{grad}p-\frac{ne}{c}(\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{H})-\right.\right.$$
$$\left.\left.-n'e(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i)\times\boldsymbol{H}\right]\right| \ll$$
$$\ll\left|-\operatorname{grad}p_e-ne\boldsymbol{E}-\frac{ne}{c}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_e)\times\boldsymbol{H}\right|,$$

т. е. членом $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}m_e n$ в левой части уравнения (3.10) тоже можно пренебречь. Таким образом, при условии (3.13) уравнения (3.10) — (3.12) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&-\operatorname{grad}p_e-ne\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_e)\times\boldsymbol{H}\right]-\\
&\qquad-m_e n\boldsymbol{v}_e\tau_e^{-1}-m_e n\left(\boldsymbol{v}_e+\frac{\boldsymbol{v}_i}{1-\alpha}\right)\tau_e^{-1}=0,\\
&m_i n\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\operatorname{grad}p_i+ne\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i)\times\boldsymbol{H}\right]+\\
&+nm_e\boldsymbol{v}_e\tau_e^{-1}-\frac{1}{2}nm_i\frac{\alpha}{1-\alpha}\boldsymbol{v}_e\tau_i^{-1}\frac{m_e}{m_i}-\frac{1}{2}nm_i\frac{\boldsymbol{v}_i}{1-\alpha}\tau_i^{-1},\\
&m_i(n+n_a)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\operatorname{grad}p-n'e\boldsymbol{E}-\\
&\qquad-\frac{e}{c}[n\boldsymbol{v}_e+n'(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i)]\times\boldsymbol{H}.
\end{aligned}\right\}\quad(3.14)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{j} = -ne\boldsymbol{v}_e - n'e(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i), \quad \boldsymbol{j}_i = ne\boldsymbol{v}_i, \\ &\varkappa \equiv \frac{1}{\omega_e\tau} = \frac{cm_e}{eH}\tau^{-1}, \quad \varkappa_e \equiv \frac{1}{\omega_e\tau_e} = \frac{cm_e}{eH}\tau_e^{-1}, \\ &\varkappa_i \equiv \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_i\tau_i} = \frac{1}{2}\frac{cm_i}{eH}\tau_i^{-1}. \end{aligned}\right\} \quad (3.15)$$

Величины $\omega_e\tau$, $\omega_e\tau_e$, $2\omega_i\tau_i$ представляют собой числа витков винтовых линий, которые проходит соответствующая частица за время между двумя столкновениями с частицами других компонент (см. § 1 этой главы). Величины ω_e, ω_i представляют собой частоты обращения электронов и ионов в их движении по винтовой траектории.

В обозначениях (3.15) при условиях (3.9) и (3.2) уравнения (3.14) примут вид:

$$-\operatorname{grad} p_e - en\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right) - \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_i\times\boldsymbol{H} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H} + \frac{1}{c}(\varkappa+\varkappa_e)H(\boldsymbol{j}+n'e\boldsymbol{v}) - \left(\frac{H}{1-\alpha}\frac{\varkappa_e}{c} - \frac{\varkappa}{c}H\frac{n'}{n}\right)\boldsymbol{j}_i = 0, \quad (3.16)$$

$$-\operatorname{grad} p_i + ne\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right) + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_i\times\boldsymbol{H} - \left(\frac{\varkappa}{c}H - \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\frac{\varkappa_i}{c}H\right)(n'e\boldsymbol{v}+\boldsymbol{j}) - \left(\frac{\varkappa}{c}H\frac{n'}{n} + \frac{H}{1-\alpha}\frac{\varkappa_i}{c}\right)\boldsymbol{j}_i = nm_i\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \quad (3.17)$$

$$-\operatorname{grad} p + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H} - n'e\boldsymbol{E} = \frac{m_i n}{\alpha}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \quad (3.18)$$

Сложим (3.16) и (3.17) и исключим $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ при помощи (3.18); при этом получим выражение для $\boldsymbol{j}_i$

$$\boldsymbol{j}_i = \frac{(1-\alpha)c}{H(\varkappa_e+\varkappa_i)}\left[\alpha\operatorname{grad} p - \operatorname{grad}(p_e+p_i) - (1-\alpha)ne\boldsymbol{E} + n'e\boldsymbol{v}\frac{H}{c}\left(\varkappa_e + \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\varkappa_i\right) + \frac{(1-\alpha)}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H} + \frac{H}{c}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\varkappa_i + \varkappa_e\right)\boldsymbol{j}\right] \quad (3.19)$$

(в сумме уравнений (3.16) и (3.17) надо учесть член $n'e\boldsymbol{E}$, так как члены $\pm ne\boldsymbol{E}$, входящие в эти уравнения при

сложении, сокращаются). Исключив теперь $\boldsymbol{j}_i$ из уравнения (3.16), при помощи соотношения (3.19) получим соотношение, связывающее плотность тока с напряженностью электромагнитного поля и параметрами, характеризующими среду и ее движение:

$$
\begin{aligned}
&-[\operatorname{grad} p_e+\beta(\alpha\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}(p_i+p_e))]-\\
&-ne\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right)+\left[1-2(1-\alpha)\beta-\alpha\frac{\varkappa_i}{\varkappa_i+\varkappa_e}\frac{m_e}{m_i}\right]\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}+\\
&+\beta\alpha n'e\boldsymbol{E}-\frac{1-\alpha}{c}\left(\beta+\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\frac{\varkappa_i}{\varkappa_e+\varkappa_i}\right)en'\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}+\\
&+\left[\varkappa+(1-\beta)\varkappa_e-\beta\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\varkappa_i\right]\frac{H}{c}(\boldsymbol{j}+n'e\boldsymbol{v})-\\
&-\frac{1-\alpha}{H(\varkappa_e+\varkappa_i)}\left\{[\alpha\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}(p_e+p_i)]\times\boldsymbol{H}+\right.\\
&\left.+\frac{1-\alpha}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}-(1-\alpha)n'e\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right\}=\\
&=-\varkappa\frac{n'}{n}\frac{1-\alpha}{\varkappa_e+\varkappa_i}\left[\alpha\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}(p_e+p_i)-(1-\alpha)n'e\boldsymbol{E}+\right.\\
&\left.+(\boldsymbol{j}+n'e\boldsymbol{v})\frac{H}{c}\left(\varkappa_e+\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m_e}{m_i}\varkappa_i\right)+\frac{1-\alpha}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}\right], \quad (3.20)
\end{aligned}
$$

где $\beta=\dfrac{\varkappa_e}{\varkappa_i+\varkappa_e}$.

Соотношение (3.20) можно рассматривать как обобщенную форму закона Ома для частично ионизованных газов.

Если скорости хаотического движения велики по сравнению с относительными скоростями движения компонент, то время между столкновениями определяется хаотическими скоростями (v_{ex}, v_{ix}). Так как в равновесном состоянии электроны и ионы обладают сравнимой кинетической энергией хаотического движения, а длина свободного пробега иона между его столкновениями с нейтральными частицами (l_{ia}) меньше длины свободного пробега электронов между их столкновениями с нейтральными частицами (l_{ea}), то

$$
\frac{\tau_i}{\tau_e}=\frac{v_{ex}}{l_{ea}}\frac{l_{ia}}{v_{ix}}\sim\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\frac{l_{ia}}{l_{ea}}<\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}.
$$

В силу (3.2) отсюда следует, что

$$
\frac{\varkappa_e}{\varkappa_i}=\frac{2\omega_i\tau_i}{\omega_e\tau_e}\sim 2\frac{m_e}{m_i}\frac{\tau_i}{\tau_e}<2\frac{m_e}{m_i}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\ll 1, \quad (3.21)
$$

т. е. электроны между двумя столкновениями с нейтральными частицами проходят значительно больше витков по винтовой траектории, чем ионы. При этом $\beta \ll 1$, и соотношение (3.20) упрощается:

$$-\operatorname{grad} p_e - ne\left(E+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right)+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}+\frac{\varkappa+\varkappa_e}{c}H(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{v}\rho_e)-$$
$$-\frac{1-\alpha}{\varkappa_i H}\left\{[\alpha\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}(p_e+p_i)]\times\boldsymbol{H}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-\alpha)}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}+(1-\alpha)\rho_e\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right\}=$$
$$=-\frac{\varkappa}{\varkappa_i}\frac{n'}{n}(1-\alpha)\left[\alpha\operatorname{grad} p-\operatorname{grad}(p_e-p_i)+\right.$$
$$\left.+(1-\alpha)\rho_e\boldsymbol{E}+\frac{1-\alpha}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}\right]. \qquad (3.22)$$

В правой части уравнения (3.22) опущены некоторые члены, малые в силу (3.2), (3.9) и (3.21). Членами, стоящими в правой части уравнения (3.22), можно пренебречь, в силу (3.9), по отношению к соответствующим членам в левой части этого уравнения, если выполняется соотношение

$$\frac{\varkappa}{\varkappa_i}=\frac{2\omega_i\tau_i}{\omega_e\tau}\sim 2\frac{m_e}{m_i}\frac{\tau_i}{\tau}<2\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\frac{\tau_e}{\tau}\lesssim 1. \qquad (3.23)$$

Время между столкновениями электронов с нейтральными частицами (τ_e) может быть больше времени между столкновениями электронов и ионов (τ) благодаря далеким столкновениям между заряженными частицами (см., например, [15]). Для не очень разреженных газов при умеренных температурах справедливо соотношение (3.23), и обобщенный закон Ома имеет вид

$$-\operatorname{grad} p_e - ne\left(E+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right)+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}+$$
$$+\frac{\varkappa+\varkappa_e}{c}H(\boldsymbol{j}-\rho_e\boldsymbol{v})-\frac{(1-\alpha)^2}{H\varkappa_i}\left\{-\frac{\alpha}{\alpha+1}\operatorname{grad} p\times\boldsymbol{H}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}+\rho_e\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right\}=0. \qquad (3.24)$$

Для упрощения последующих формул первый член последнего слагаемого преобразован для случая $n=\text{const}$, $n_a=\text{const}$. Если газ полностью ионизован ($\alpha=1$), то $\varkappa_e=\varkappa_i=0$. Кроме

того, из (3.8) следует, что $\boldsymbol{j}_i = \frac{m_e}{m_i}\boldsymbol{j}$, т. е. при $\alpha \to 1$ величины $\varkappa_i$, $\varkappa_e$ и $\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i}$ стремятся к нулю, и закон Ома принимает вид

$$-\operatorname{grad} p_e - ne\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right) + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H} + \\ + \frac{\varkappa}{c}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{j} - \rho_e\boldsymbol{v}) = 0. \quad (3.25)$$

Всюду в дальнейшем неравенство (3.23) считается выполненным. Если для конкретной задачи это неравенство нарушается, то при получении закона Ома необходимо учитывать члены, стоящие в правой части уравнения (3.22).

3. Различные формы обобщенного закона Ома. Величины коэффициентов в уравнении (3.24) зависят от физических свойств рассматриваемой среды. Кроме того, величины отдельных членов в этом уравнении зависят от механических характеристик (скорость, давление и т. д.) рассматриваемой задачи и величины напряженности электромагнитного поля. В связи с этим при рассмотрении той или иной конкретной задачи может оказаться, что некоторые члены в уравнении (3.24) пренебрежимо малы. При этом можно использовать более простые формы обобщенного закона Ома. Для того чтобы выяснить, какие параметры определяют собой форму обобщенного закона Ома, оценим относительную величину членов, входящих в уравнение (3.24).

Отметим прежде всего, что если газ частично ионизован, но

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i} \ll 1, \quad (3.26)$$

то

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i H}\left|\left[-\frac{\alpha}{\alpha+1}\operatorname{grad} p\times\boldsymbol{H} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H} + \rho_e\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right]\right| \ll \\ \ll \left|-\operatorname{grad} p_e + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H} - ne\boldsymbol{E}\right|, \quad (3.27)$$

и, следовательно, закон Ома для частично ионизованного газа при условии (3.26) совпадает с законом Ома для полностью ионизованного газа (3.25) с точностью до коэффициента при плотности тока.

Если электромагнитное поле оказывает существенное влияние на движение среды (именно такие задачи представляют интерес с точки зрения магнитной гидродинамики и ее приложений), то электромагнитные силы имеют порядок величины сил инерции среды

$$\rho U^2 \sim (n + n_a) m_i U^2 = \frac{1}{\alpha} n m_i U^2 \sim \frac{1}{c} jHL \sim \frac{H^2}{4\pi} \sim p, \quad (3.28)$$

L, U — характерные длина и скорость задачи (предполагается, что конвективные токи и токи смещения не превосходят по порядку величины токов проводимости). Соотношение (3.28) показывает, что при любой степени ионизации

$$|\operatorname{grad} p_e| \leq \frac{1}{c} |\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}|, \quad (3.29)$$

причем $\operatorname{grad} p_e$ несущественен при малой степени ионизации. Если скорость электронного газа относительно ионного много меньше характерной скорости задачи

$$U \gg v_e, \quad (3.30)$$

то имеет место соотношение

$$\frac{1}{c} |\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}| \ll \frac{ne}{c} |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}|. \quad (3.31)$$

Соотношению (3.30) можно придать более обозримый вид, если воспользоваться (3.28), именно:

$$U \gg \frac{nev_e}{ne} \sim \frac{j}{ne} \sim \frac{1}{\alpha} \frac{m_i U^2 c}{eLH},$$

или

$$\frac{1}{\alpha} \frac{U}{L} \frac{1}{\omega_i} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Omega}{\omega_i} \ll 1. \quad (3.32)$$

$\Omega = \dfrac{U}{L} \sim \dfrac{1}{T}$ назовем *характерной частотой задачи.* Таким образом, условие (3.30) равносильно предположению о том, что угловая частота ионов ω_i больше характерной частоты задачи. Если имеет место неравенство

$$U \gg (\varkappa + \varkappa_e) v_e \quad \text{или} \quad \frac{\Omega}{\omega_i} \ll \frac{\alpha}{\varkappa + \varkappa_e}, \quad (3.33)$$

то

$$\frac{\varkappa + \varkappa_e}{c} H |\boldsymbol{j} - \rho_e \boldsymbol{v}| \ll \frac{ne}{c} |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}|. \quad (3.34)$$

При выполнении неравенств (3.26) и (3.32) закон Ома будет иметь вид (3.1), обычно используемый в магнитной гидродинамике:

$$\boldsymbol{j}=\sigma\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right),\quad \sigma=\frac{nec}{H(\varkappa+\varkappa_e)}. \tag{3.35}$$

Если определить время между столкновениями электронов τ^* с ионом или нейтральной частицей по формуле

$$\frac{1}{\tau^*}=\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau_e} \tag{3.36}$$

(частота столкновений равна сумме частот столкновений разного рода), то для проводимости получим формулу

$$\sigma=\frac{ne^2\tau^*}{m_e},$$

совпадающую по форме с формулой для проводимости полностью ионизованного газа.

Если кроме неравенств (3.26) и (3.32) имеет место неравенство (3.33), то закон Ома сводится к соотношению

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}. \tag{3.37}$$

Это соотношение используется при изучении движений бесконечно проводящих сред. При этом соотношения (3.28) позволяют привести неравенство (3.32) к виду, указанному в [2]:

$$\frac{U}{v_e}\sim\frac{neU}{j}\sim\frac{e\alpha HL}{cm_iU}\sim\sqrt{\frac{4\pi\alpha ne^2L^2}{c^2m_i}}\gg 1. \tag{3.38}$$

При этих же условиях неравенство (3.26) можно привести к виду

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i}=\frac{2(1-\alpha)^2\tau_ieH}{m_ic}\sim\sqrt{\frac{16\pi(1-\alpha)^4}{\alpha}\frac{\tau_i^2e^2U^2n}{m_ic^2}}\ll 1. \tag{3.39}$$

Подчеркнем, что неравенства (3.38) и (3.39) могут быть использованы вместо (3.26) и (3.32) только при рассмотрении движений хорошо проводящих сред, когда справедливо соотношение (3.33).

Относительная величина членов $\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}$ и $\frac{\varkappa+\varkappa_e}{c}H(\boldsymbol{j}-\rho_e\boldsymbol{v})$ определяется числом $\omega_e\tau^*$.

Если

$$\omega_e\tau^* \ll 1, \tag{3.40}$$

то имеет место соотношение

$$|\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}| \ll (\varkappa_e+\varkappa)H\,|\boldsymbol{j}-\rho_e\boldsymbol{v}|. \tag{3.41}$$

Наконец, при выполнении неравенства

$$\frac{2(1-\alpha)^2\tau_i}{\alpha T} \ll 1 \tag{3.42}$$

имеет место соотношение

$$\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i H}\left|\left\{-\frac{\alpha}{1+\alpha}\operatorname{grad} p\times\boldsymbol{H}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}\right\}\right| \ll$$
$$\ll\left|-\operatorname{grad} p_e-\frac{en}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right|. \tag{3.43}$$

Таким образом, относительная величина членов в уравнении (3.24), представляющем собой обобщенный закон Ома, определяется величиной следующих безразмерных параметров:

$$\omega_e\tau^*,\quad \frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i},\quad \frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i},\quad \frac{2(1-\alpha)^2\tau_i}{\alpha T},\quad \frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i}(\omega_e\tau^*)^{-1}, \tag{3.44}$$

связанных как с физическими свойствами среды, так и с условиями рассматриваемой задачи.

Параметр $\omega_e\tau^*$, характеризующий спиральный пробег электрона между двумя столкновениями, определяет относительную величину членов $\frac{\omega_e\tau^*}{H}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{j}$. При давлении 1 *атм*, температуре $\sim 10\,000^\circ$K и умеренных магнитных полях ($H\sim 10\,000$ гаусс) этот параметр невелик и членом $\frac{\omega_e\tau^*}{H}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}$ можно пренебречь. Однако при тех же температурах и полях, но при давлениях $\sim 0{,}01$ *атм*, величина $\omega_e\tau^*$ становится порядка 1 и член $\frac{\omega_e\tau^*}{H}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}$ становится существенным. При этом имеет место явление «анизотропии проводимости» газа.

Параметр $\frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i}$ определяет относительную величину членов $\frac{\omega_e\tau^*}{H}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}$ и $\frac{\sigma}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$. Так как угловая частота ионов ω_i тяжелых газов (аргон, воздух и т. д.) при $H\sim 10^4$ гаусс

имеет порядок 10^6 $1/сек$, то для течений с характерной скоростью $U \sim 10^5$ $см/сек$ при характерном размере $L \sim 10$ $см$ величина $\frac{\Omega}{\omega_i} \sim 10^{-2}$. Для «чистых» газов при термической ионизации параметр $\frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i}$ велик вследствие малости α при температурах ниже 10 000° К в широком диапазоне давлений, т. е. член $\frac{\omega\tau^*}{H}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}$ значительно больше $\frac{\sigma}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$. Если ионизацию газа повысить при тех же условиях путем добавления легко ионизующихся присадков, то член $\frac{\omega\tau^*}{H}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}$ становится несущественным по сравнению с $\frac{\sigma}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$. При более высоких температурах это же явление имеет место и для «чистых» газов.

Параметр $\frac{(1-\alpha)^2}{\varkappa_i}$, определяющий относительную величину членов $\frac{\omega_e\tau^*}{H}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}$ и $\frac{\omega_e\tau^*}{H^2\varkappa_i}(1-\alpha^2)[(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}]$, может стать сравнимым с 1 только для разреженных газов, движущихся в сильных магнитных полях (когда не только электроны, но и ионы обладают спиральным пробегом). При умеренных полях и температурах этот параметр для плотных сред всегда много меньше единицы.

Параметр $\frac{2(1-\alpha)^2}{\alpha}\frac{\varkappa_i}{T}$, определяющий относительную величину членов $\frac{\omega_e\tau^*(1-\alpha)^2}{H^2\varkappa_i}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}$ и $\frac{\sigma}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$, в силу условия (3.13), может стать сравнимым с 1 только при очень низкой ионизации газа.

Параметр $\frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_i}(\omega_e\tau^*)^{-1}$, являющийся произведением двух рассмотренных выше параметров, определяет относительную величину $\frac{\sigma}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{j}$.

Рассмотрим движение плотного газа в умеренном магнитном поле, так что электроны, а следовательно, в силу (3.21) и (3.23), и ионы не обладают спиральным пробегом ($\omega_e\tau^* \ll 1$, $\varkappa_i \gg 1$). В этих условиях имеют место неравенства (3.26) и (3.40). Если при этом степень ионизации значительна, т. е. имеет место (3.32), то (3.42) удовлетворяется автоматически,

и закон Ома принимает форму (3.37) при выполнении неравенства

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_l} \ll \omega_e\tau^* \tag{3.45}$$

(это преобразованное при помощи (3.36) неравенство (3.33)) и форму (3.35), если имеет место соотношение $\frac{1}{\alpha}\frac{\Omega}{\omega_l} \sim \omega_e\tau^*$. Эти формы закона Ома используются в магнитной гидродинамике. Если для рассматриваемой задачи имеют место другие соотношения между определяющими параметрами, то необходимо пользоваться той или иной формой обобщенного закона Ома, которая зависит от относительной величины параметров (3.44) [12]. Величины параметров, характеризующих состояние среды и ее физические свойства в различных условиях, оценены в работе [7].

§ 4. Уравнения магнитной гидродинамики

В магнитной гидродинамике в качестве связи плотности тока с остальными величинами используется закон Ома в форме (3.1) или, что то же самое, в форме (3.35):

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right) + \rho_e\boldsymbol{v}. \tag{4.1}$$

В дальнейшем, на основании равенства (4.1) и при некоторых дополнительных предположениях, уравнения Максвелла и уравнения механики будут упрощены и приведены к виду, используемому в магнитной гидродинамике [21].

Заменим в первом уравнении Максвелла плотность тока $\boldsymbol{j}$ выражением (4.1)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\left[\sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right) + \rho_e\boldsymbol{v}\right]. \tag{4.2}$$

Оценим порядки величин входящих сюда членов

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} \sim \frac{H_0}{L}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \sim \frac{E_0}{cT}, \quad \frac{4\pi\rho_e\boldsymbol{v}}{c} \sim \frac{E_0 V}{cL},$$

$$\frac{4\pi\sigma\boldsymbol{E}}{c} \sim \frac{\sigma\boldsymbol{E}_0}{c}, \quad \frac{4\pi\sigma}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} \sim \frac{cVH_0}{c^2},$$

где H_0, E_0, V, L, T — характерные величины для напряженностей магнитного и электрического полей, скорости,

линейного размера и времени. Если величина σ такова, что имеют место неравенства

$$\frac{1}{\sigma T} \ll 1, \quad \frac{V}{\sigma L} \ll 1, \tag{4.3}$$

то в равенстве (4.2) членами $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ и $4\pi\rho_e \boldsymbol{v}$ можно пренебречь по сравнению с членом $4\pi\sigma \boldsymbol{E}$. Для сильно ионизованных газов критерий (4.3) выполняется для широкого класса явлений, так как проводимость газа в этом случае приближается к проводимости металлов, а для меди, например, $\sigma = 54 \cdot 10^{16}$ *сек*$^{-1}$. В дальнейшем, как это всегда делается при выводе уравнений магнитной гидродинамики, неравенства (4.3) будем считать выполненными. Если (4.3) выполнены, то (4.2) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{c}[\nu_m \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}], \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}. \tag{4.4}$$

Величина ν_m имеет такую же размерность, как кинематическая вязкость и называется *магнитной вязкостью*. Подставив (4.4) во второе уравнение Максвелла, получим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} (\nu_m \operatorname{rot} \boldsymbol{H}) - \frac{1}{c} \operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) - \operatorname{rot} (\nu_m \operatorname{rot} \boldsymbol{H}). \tag{4.5}$$

Если $\sigma = \text{const}$, то

$$\operatorname{rot} (\nu_m \operatorname{rot} \boldsymbol{H}) = -\nu_m \Delta \boldsymbol{H}.$$

Уравнение (4.5) называется *уравнением индукции* и является одним из основных уравнений магнитной гидродинамики. Оценивая порядок членов в правой части уравнения индукции, можно прийти к выводу, что если

$$R_m \equiv \frac{VL}{\nu_m} \equiv \frac{4\pi\sigma VL}{c^2} \gg 1,$$

то последним членом можно пренебречь, и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}).$$

Безразмерная величина R_m, составленная из размерных величин аналогично числу Рейнольдса, но с использованием магнитной вязкости вместо обычной, называется *магнитным числом Рейнольдса.*

При предположении (4.3) из (4.4) следует

$$E \leqslant \max\left\{\frac{cH}{\sigma L}, \frac{V}{c}H\right\}. \tag{4.6}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} &\leqslant \max\left\{\frac{H}{\sigma LT}, \frac{V^2H}{c^2L}\right\},\\ \frac{4\pi\rho_e v}{c} &\leqslant \max\left\{\frac{HV}{\sigma L^2}, \frac{V^2H}{c^2L}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Отсюда следует, что отношение каждого из этих членов к $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}$ имеет порядок

$$\frac{1}{\sigma T}, \quad \frac{V}{\sigma L} \quad \text{или} \quad \frac{V^2}{c^2}.$$

Таким образом, при предположении (4.3) и при условии $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$, которое мы считаем всегда выполненным, токами смещения $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ и конвективными токами $\rho_e \boldsymbol{v}$ можно всюду пренебречь также по сравнению с суммарным током $\frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$. Закон Ома при этом примет вид

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right), \tag{4.8}$$

а первое уравнение Максвелла запишется следующим образом:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \tag{4.9}$$

Уравнениями (4.4), (4.9) и уравнением индукции (4.5) будем пользоваться в дальнейшем вместо уравнений Максвелла.

Из формул преобразования (1.7), в рамках сделанных предположений, получим для магнитной гидродинамики следующее соотношение:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}', \tag{4.10}$$

а из формул преобразования (1.2), используя оценку (4.6) порядка величины E, получим

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}', \tag{4.11}$$

т. е. в рамках магнитной гидродинамики напряженность магнитного поля и плотность тока не зависят от выбора инерциальной системы координат.

При помощи соотношений (4.4) и (4.9) можно исключить $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{j}$ из уравнений механики (2.7). При этом если

$$R_m \gtrsim 1, \tag{4.12}$$

что предполагается в дальнейшем, то в уравнениях движения можно пренебречь электрической силой по сравнению с магнитной. Действительно,

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H} \sim \frac{H^2}{L},$$

$$\rho_e E = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E} \sim \frac{E^2}{L} \sim \frac{H^2}{L}\max\left\{\left(\frac{c}{\sigma L}\right)^2, \frac{V^2}{c^2}\right\} =$$

$$= \frac{H^2}{L}\max\left\{\frac{V}{\sigma L}\frac{1}{R_m}, \frac{V^2}{c^2}\right\}.$$

Отсюда в силу (4.3) и (4.12) следует, что

$$E^2 \ll H^2 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{f} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}) = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}. \tag{4.13}$$

Преобразуем, кроме того, выражение для джоулева тепла

$$D = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{j} - \rho_e\boldsymbol{v}) - \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{E}' =$$

$$= \frac{j'^2}{\sigma} = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{\nu_m}{4\pi}(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^2.$$

Таким образом, предполагая выполненными неравенства (4.3) и используя закон Ома в форме (4.1), можно привести систему уравнений, описывающую движение проводящей среды в электромагнитном поле и поведение магнитного поля, к следующей системе, которая называется системой уравнений магнитной гидродинамики:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\\
&\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad}p + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H} + \operatorname{div}\hat{\boldsymbol{\tau}},\\
&\rho T\frac{ds}{dt} = -\operatorname{div}\boldsymbol{q} + \Phi + \frac{\nu_m}{4\pi}(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^2,\\
&\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) - \operatorname{rot}(\nu_m\operatorname{rot}\boldsymbol{H}),\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

где

$$\operatorname{div}\hat{\tau}=\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i,\quad \tau_{ik}=\tau_{ik}\left(\rho,\ p,\ \boldsymbol{H},\ \frac{\partial v_l}{\partial x_m}\right),$$

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}\left(\rho,\ p,\ \boldsymbol{H},\ \frac{\partial T}{\partial x_m}\right),$$

$$\Phi=\frac{1}{2}\tau_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right),\quad T=T(\rho,\ p).$$

Если среда является совершенным газом, в котором тензор вязких напряжений и поток тепла выражаются согласно (2.3) с постоянными μ, ζ и k, то

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{p}{R\rho},\quad \operatorname{div}\hat{\tau}=\mu\,\Delta\boldsymbol{v}+\left(\zeta+\frac{\mu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v},\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{q}=-\,k\,\Delta T,\\ \Phi&=\sum_{i,\ k}\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2+\left(\zeta-\frac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2. \end{aligned}\right\}\quad (4.15)$$

Среду будем называть *идеальной*, если одновременно равны нулю $\boldsymbol{q}$, τ_{ik} и ν_m.

При $\nu_m=\text{const}$ имеем $\operatorname{rot}(\nu_m\operatorname{rot}\boldsymbol{H})=\nu_m\Delta\boldsymbol{H}$, и уравнение индукции принимает вид

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})+\nu_m\Delta\boldsymbol{H}.$$

Для несжимаемой среды в системе уравнений магнитной гидродинамики уравнение неразрывности необходимо заменить уравнением

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0.$$

В этом случае три уравнения (4.14) могут решаться независимо от уравнения энергии, которое в этом случае может быть записано в виде $\rho c_v\frac{dT}{dt}=-\operatorname{div}\boldsymbol{q}+\Phi+\frac{\nu_m}{4\pi}(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^2$ и служит для определения поля температур после определения поля скоростей и магнитного поля.

В § 1 было показано, что уравнение $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$ играет особую роль в системе уравнений электродинамики. Применив операцию дивергенции к уравнению индукции, получим, что в магнитной гидродинамике имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0.$$

Поэтому, для того чтобы решение удовлетворяло уравнению $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$, достаточно потребовать, чтобы этому уравнению удовлетворяли начальные условия. Таким образом, равенство $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ выполняется в силу уравнения индукции, а также начальных условий. Тем не менее во многих задачах является удобным использование этого уравнения вместо одной из проекций уравнения индукции.

Уравнения движения и индукции при постоянных ν_m, μ, ζ, k можно представить еще и в таком часто употребляемом виде:

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{H}\nabla)\boldsymbol{H} + \\ + \mu \Delta \boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{v}), \\ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{H}\nabla)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \nu_m \Delta \boldsymbol{H}. \end{aligned}\right\} \quad (4.16)$$

В систему (4.14) не входят величины $\boldsymbol{E}$, ρ_e и $\boldsymbol{j}$. Эти величины выражаются через $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{v}$ по формулам

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{c}[\nu_m \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}], \quad \rho_e = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div} \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}\right) = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot} \boldsymbol{H}.$$

Вследствие (4.13) в магнитной гидродинамике вид тензора напряжений электромагнитного поля упрощается, а именно:

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} H_i H_j - \frac{\delta_{ij}}{8\pi} H^2. \quad (4.17)$$

Если одну из осей координат (например, x_1) направить вдоль силовой линии магнитного поля, а две другие — в плоскости, перпендикулярной к силовой линии, то тензор (4.17) можно записать в виде следующей матрицы:

$$\hat{T} = \begin{Vmatrix} \frac{H^2}{8\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{H^2}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{H^2}{8\pi} \end{Vmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что напряжения, обусловленные магнитным полем, сводятся к натяжению $\frac{H^2}{8\pi}$ вдоль силовой линии (T_{11} дает проекцию на нормаль напряжения на площадке, перпендикулярной к силовой линии) и к давлению $\frac{H^2}{8\pi}$ поперек силовых линий магнитного поля (так как T_{22} и T_{33} дают проекции напряжения на нормаль к площадкам, содержащим силовую линию). Можно считать также, что напряжения, обусловленные магнитным полем, представляют собой сумму равномерного по всем направлениям давления $\frac{H^2}{8\pi}$ и натяжения $\frac{H^2}{4\pi}$ в направлении магнитного поля. В приближении магнитной гидродинамики электрическое поле напряжений в среде не создает. Кроме того, в уравнении (2.14), в приближении магнитной гидродинамики, можно пренебречь изменением электромагнитного количества движения по сравнению с электромагнитным потоком импульса, т. е.

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} \ll \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{T}}.$$

Действительно,

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} \sim \frac{1}{cT} EH \lesssim \frac{H^2}{L} \max\left\{\frac{1}{\sigma T}, \frac{V^2}{c^2}\right\}.$$

Система уравнений (4.14) описывает движение проводящего газа или несжимаемой жидкости в тех областях, где движение непрерывно. Если в области движения существуют поверхности разрыва, то решения уравнений (4.14), описывающие движение и поведение магнитного поля в каждой из областей, не содержащих поверхностей разрыва, должны сопрягаться при помощи соотношений на поверхностях разрыва. К этим соотношениям относятся соотношения (1.13) и (1.14), связывающие величины напряженностей полей при переходе через поверхность разрыва, а также соотношения, полученные из интегральных уравнений движения (2.16) и представляющие собой законы сохранения массы, импульса и энергии при переходе через поверхность разрыва.

Будем рассматривать поверхность разрыва в системе координат, в которой она покоится. Соотношения (1.13) и (1.14) сводятся к условиям непрерывности касательной соста-

вляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля при переходе через поверхность разрыва

$$\{E_\tau\} = \{H_n\} = 0, \tag{4.18}$$

где фигурные скобки обозначают, что берется разность значений соответствующей величины с одной и другой стороны разрыва. Два других соотношения из (1.13) и (1.14) служат для определения поверхностного тока и поверхностного заряда. Если в выбранной системе координат за объем и поверхность, фигурирующие в уравнениях (2.16), взять такие объем и поверхность, как на рис. 2, и перейти к пределу при $h \to 0$, то из уравнений (2.16) получим следующие соотношения:

$$\{\rho v_n\} = \{\hat{\Pi} \cdot \boldsymbol{n}\} = \{S_n\} = 0$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\{\rho v_n\} = 0, \\ &\{\rho v_n \cdot \boldsymbol{v} - \hat{P} \cdot \boldsymbol{n} - \hat{T} \cdot \boldsymbol{n}\} = 0, \\ &\left\{s_n + q_n - (\hat{P} \cdot \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} + \rho v_n \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

Соотношения (4.18) и (4.19) являются в магнитной гидродинамике условиями на поверхностях разрыва. В дальнейшем, используя известные выражения для входящих сюда величин, мы будем приводить эти соотношения к виду, удобному для решения той или иной задачи.

§ 5. Простейшие интегралы системы уравнений магнитной гидродинамики

Полученная система уравнений движения при некоторых условиях имеет интегралы аналогично интегралам уравнений движения идеальной жидкости в обычной гидродинамике.

Будем рассматривать движения бесконечно проводящей жидкости или газа ($\nu_m = 0$). Тогда уравнение индукции даст

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) = 0.$$

Рассмотрим поток вектора, стоящего в левой части этого равенства, через произвольную жидкую поверхность Σ, огра-

ниченную контуром L. Используя теорему Стокса, получим

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial H_n}{\partial t}\, d\Sigma - \oint_{L} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H})\, d\boldsymbol{l} = 0. \tag{5.1}$$

Рассмотрим теперь два момента времени t_1 и t_2. Пусть Σ_1— положение жидкой поверхности в момент t_1, Σ_2—ее положение в момент t_2, Σ_3—поверхность, состоящая из траекторий, которые прошли частицы, составляющие контур L за время $\Delta t = t_2 - t_1$ (рис. 3). Поток вектора $\boldsymbol{H}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Записывая это условие в момент t_2 для поверхности $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$, получим

$$\int_{\Sigma_2} H_n(t_2)\, d\Sigma - \int_{\Sigma_1} H_n(t_2)\, d\Sigma + \int_{\Sigma_3} H_n(t_2)\, d\Sigma = 0.$$

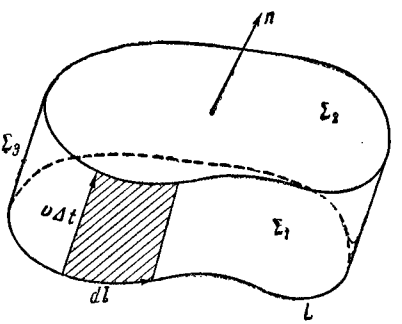


Рис. 3.

Перед вторым слагаемым стоит знак минус, так как на поверхности Σ_1 взята нормаль, внутренняя по отношению к объему, ограниченному поверхностями Σ_1, Σ_2, Σ_3. Считая $t_2 - t_1 = \Delta t$ малым, можно переписать последнее равенство следующим образом:

$$\int_{\Sigma_2} H_n(t_2)\, d\Sigma - \int_{\Sigma_1} H_n(t_1)\, d\Sigma + \int_{\Sigma_1} H_n(t_1)\, d\Sigma - \int_{\Sigma_1} H_n(t_2)\, d\Sigma - \oint \boldsymbol{H}(t_1)\, (\boldsymbol{v}\, \Delta t \times d\boldsymbol{l}) = 0.$$

Разделим это соотношение на Δt и устремим Δt к 0, тогда получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} H_n\, d\Sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} H_n\, d\Sigma - \oint (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{l} = 0.$$

Отсюда в силу (5.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} H_n\, d\Sigma = 0, \tag{5.2}$$

т. е. поток магнитного поля через любую жидкую поверхность с течением времени не меняется [16, 20].

Рассмотрим две жидкие поверхности, на которых в некоторый момент времени $H_n = 0$. На основании (5.2) это равенство сохраняется во все последующие моменты времени на каждой из поверхностей. Линия пересечения этих поверхностей всегда является магнитной силовой линией (так как магнитная силовая линия лежит в каждой из этих поверхностей). С другой стороны, линия пересечения является жидкой линией, как линия, принадлежащая двум жидким поверхностям. В связи с этим можно считать, что магнитные силовые линии (аналогично вихревым линиям в газовой динамике) скреплены с жидкими частицами. Это свойство называется свойством *вмороженности силовых линий*. Поверхность, состоящую из магнитных силовых линий, проходящих через некоторую замкнутую кривую, будем называть *магнитной силовой трубкой*. Как следует из второго уравнения (1.10), поток магнитного поля через любое сечение магнитной силовой трубки постоянен.

Рассмотрим деформацию жидкого элемента магнитной силовой трубки достаточно малого диаметра, возникающую при движении среды [10]. Из (5.2) и закона сохранения массы следует

$$\rho \Sigma\, dl = \rho^0 \Sigma^0\, dl^0,$$

$$H\Sigma = H^0 \Sigma^0,$$

где Σ и dl — площадь поперечного сечения и длина магнитной силовой трубки, индексом 0 обозначены значения соответствующих величин до деформации. Из последних равенств получим

$$\frac{H}{\rho\, dl} = \frac{H^0}{\rho^0\, dl^0} = C = \text{const}, \tag{5.3}$$

т. е. величина $\dfrac{H}{\rho}$ изменяется пропорционально длине элемента магнитной силовой линии. Так как элементы $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_i\, dx_i$ жидких линий преобразуются при деформации среды согласно равенствам

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}\, dx_j^0, \tag{5.4}$$

то для элемента жидкой линии, совпадающего с магнитной силовой линией $\left(dx_l = \frac{H_l}{H}\,dl\right)$, воспользовавшись (5.3), получим

$$dx_i = \frac{H_l}{C\rho}, \qquad dx_j^0 = \frac{H_j^0}{C\rho^0}.$$

Отсюда, используя (5.4), найдем

$$H_l = \frac{\rho}{\rho^0}\frac{\partial x_l}{\partial x_j^0}H_j^0 = \frac{\dfrac{\partial x_l}{\partial x_j^0}}{\left|\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j^0}\right|}H_j^0, \tag{5.5}$$

где через $\left|\frac{\partial x_l}{\partial x_j^0}\right|$ обозначен определитель матрицы $\left\|\frac{\partial x_l}{\partial x_j^0}\right\|$. Соотношение (5.5), следующее из (5.2), назовем интегралом вмороженности. В частных случаях интегралу вмороженности можно придать более обозримый вид. Пусть, например, движение плоское, и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярно к плоскости движения; тогда из (5.3) следует

$$\frac{H}{\rho} = b = \text{const}, \tag{5.6}$$

так как в этом случае длина элемента магнитной силовой линии не меняется. Равенство (5.6) имеет место для каждой жидкой частицы. Для различных частиц константы в (5.6) могут быть различными.

При изучении плоских движений бесконечно проводящего газа в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости движения, соотношения (5.6) позволяют исключить $\boldsymbol{H}$ из уравнений магнитной гидродинамики (4.14). Кроме того, если вместо давления и внутренней энергии ввести функции

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \frac{b^2\rho}{8\pi}, \qquad p^* = p + \frac{b^2\rho^2}{8\pi},$$

то уравнения (4.14) для таких движений будут по форме совпадать с уравнениями обычной газовой динамики [3, 9, 16]. Отсюда ясно, что решения задач магнитной гидродинамики в этом случае могут быть получены путем пересчета соответствующих задач обычной газовой динамики. Необходимо

только помнить при этом о граничных условиях. Если граничные условия соответствующей газодинамической задачи сформулированы для скоростей (задача о поршне, обтекание тел и т. д.), то эти граничные условия остаются неизменными и для соответствующей магнитогидродинамической задачи. Если же граничные условия сформулированы для давлений (например, в задачах истечения), то надо помнить, что в соответствующей магнитогидродинамической задаче p^* обозначает суммарное напряжение. В этом случае граничные условия для магнитного поля должны быть использованы при решении задачи о поле скоростей и давлений. Заметим еще, что для совершенного газа при $\gamma = 2$ все формулы термодинамики остаются теми же, но с заменой p на p^*, ε на ε^*.

В магнитной гидродинамике при некоторых условиях оказывается верным также интеграл, аналогичный интегралу Бернулли [11, 19]. Рассмотрим стационарные движения невязкой и нетеплопроводной жидкости. В стационарном случае уравнение энергии (2.15) имеет вид $\operatorname{div} \boldsymbol{S} = 0$. При отсутствии вязкости и теплопроводности в том случае, когда вектор $(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$ параллелен $\boldsymbol{v}$, энергия не подтекает к трубке тока. Отсюда следует, что поток энергии постоянен вдоль трубки тока, т. е.

$$\left[\rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)v + pv + \frac{c}{4\pi v}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{v}\right]\Sigma = \text{const}.$$

Так как $\rho v \Sigma = \text{const}$ из условия постоянства расхода массы, то вдоль линии тока имеем

$$\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{c}{4\pi}\frac{(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{v}}{\rho v^2} = \text{const}, \tag{5.7}$$

причем постоянные, стоящие в правых частях трех последних равенств, зависят, вообще говоря, от выбора линии тока. Если $\boldsymbol{E} = 0$ или $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ параллельны, то поток электромагнитной энергии отсутствует и уравнение (5.7) принимает вид

$$\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \tag{5.8}$$

по форме совпадающий с интегралом Бернулли в обычной газовой динамике [11]. Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярны к $\boldsymbol{v}$, то, исключая $\boldsymbol{E}$ из равенства (5.7), при помощи (4.4) получим

$$\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{4\pi}\frac{H^2}{\rho} + \frac{\nu_m}{4\pi\rho v^2}(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{v} = \text{const}. \quad (5.9)$$

Заметим, что известная в обычной гидродинамике теорема Томпсона о сохранении циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру, верна в магнитной гидродинамике только в том случае, если магнитное поле удовлетворяет условию [5, 8]

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}) = 0, \quad (5.10)$$

которое, конечно, выполняется не всегда. Условие (5.10) выполнено, если движение плоское и магнитное поле перпендикулярно к плоскости движения.

ГЛАВА II

ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Движение вязкой электропроводной жидкости с прямолинейными линиями тока

Из стационарных движений представляют интерес движения проводящей жидкости с прямолинейными линиями тока, так как они могут описывать движения по трубам и каналам.

Будем считать, что скорость $\boldsymbol{v}$ и магнитное поле $\boldsymbol{H}$ не меняются вдоль линий тока, которые мы будем считать параллельными оси x. Тогда уравнения, описывающие такие движения, примут вид [3]:

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{1}{4\pi}\left(H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) + \mu \Delta u, \tag{1.1}$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{1}{4\pi}\left(H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_y}{\partial z}\right), \tag{1.2}$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \frac{1}{4\pi}\left(H_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial z}\right), \tag{1.3}$$

$$H_y \frac{\partial u}{\partial y} + H_z \frac{\partial u}{\partial z} + \nu_m \Delta H_x = 0, \tag{1.4}$$

$$\Delta H_y = 0, \quad \Delta H_z = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \tag{1.6}$$

где u — x-я составляющая скорости (y-я и z-я составляющие в рассматриваемом случае равны нулю: $v = w = 0$), $p^* = p + \frac{H^2}{8\pi}$ — полное давление, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Если ввести функцию $A(y, z)$ такую, что

$$H_z = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial z}, \tag{1.7}$$

то уравнение (1.6) удовлетворяется, а уравнения (1.5) дают

$$\frac{\partial}{\partial z}\Delta A = \frac{\partial}{\partial y}\Delta A = 0,$$

следовательно,

$$\Delta A = \text{const} = \omega. \tag{1.8}$$

С другой стороны,

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \boldsymbol{e}_x \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \omega.$$

Таким образом, введенная выше постоянная ω пропорциональна x-й составляющей плотности тока. Эта величина, согласно равенству (1.8), должна быть постоянной и должна быть задана из граничных условий при $x = \pm\infty$.

Если рассматривать течение в трубе, то на поверхности трубы может быть задана величина A. Это равносильно заданию H_n. Тогда для определения A получается задача Дирихле для уравнения Пуассона, которая имеет однозначное решение. Решив эту задачу, находим H_y и H_z из равенств (1.7).

Преобразуем теперь уравнения (1.2) и (1.3):

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(H_y^2 + H_z^2\right) - H_z\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\right],$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(H_y^2 + H_z^2\right) + H_y\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\right].$$

Если обозначить

$$p^{**} = p + \frac{H_x^2}{8\pi},$$

то получим

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\frac{\partial p^{**}}{\partial y} &= -H_z\omega = -\frac{\partial A}{\partial y}\omega, \\ 4\pi\frac{\partial p^{**}}{\partial z} &= H_y\omega = -\frac{\partial A}{\partial z}\omega, \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

или

$$4\pi p^{**} = -A\omega + f(x). \tag{1.10}$$

Продифференцировав (1.10) по x и учтя, что A, ω, H_x^2 и $\frac{\partial p}{\partial x}$ не зависят от x, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x) = \text{const} = C_1.$$

Таким образом, $f = C_1 x + C_2$.

Соотношение (1.10) служит для определения давления в том случае, если известны функции $A(y, z)$ и $H_x(y, z)$. Для того чтобы найти u и H_x и тем самым завершить решение задачи, необходимо проинтегрировать оставшиеся уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial x} = C_1 = \frac{1}{4\pi}\left(H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) + \mu \Delta u, \\ H_y \frac{\partial u}{\partial y} + H_z \frac{\partial u}{\partial z} + \nu_m \Delta H_x = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.11)$$

Так как функции H_y и H_z определяются из (1.7) независимо от u и H_x, то в (1.11) эти функции можно считать известными. При этом (1.11) представляет собой систему линейных уравнений. Эту систему можно преобразовать к виду, который в ряде случаев может оказаться полезным. Введем новые переменные [17]

$$\left.\begin{aligned} u_1 = u + \sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}}\, H_x, \\ u_2 = u - \sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}}\, H_x. \end{aligned}\right\} \quad (1.12)$$

Тогда уравнения (1.11) примут вид

$$\left.\begin{aligned} H_y \frac{\partial u_1}{\partial y} + H_z \frac{\partial u_1}{\partial z} + \\ + \sqrt{4\pi\mu\nu_m}\, \Delta u_1 - \sqrt{\frac{4\pi\nu_m}{\mu}}\, \frac{\partial p^*}{\partial x} = 0, \\ - H_y \frac{\partial u_2}{\partial y} - H_z \frac{\partial u_2}{\partial z} + \\ + \sqrt{4\pi\mu\nu_m}\, \Delta u_2 - \sqrt{\frac{4\pi\nu_m}{\mu}}\, \frac{\partial p^*}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

Таким образом, определение u_1 и u_2 производится независимо, если граничные условия сформулированы для каждой из этих функций. Кроме того, в ряде случаев оказывается,

что если u_1 известна, то функция u_2 находится простым пересчетом. На границе должны быть заданы скорость u и напряженность магнитного поля H_x. При этом u_1 и u_2 на границе оказываются известными.

Пусть течение происходит в ограниченном объеме — «трубе» — и магнитное поле однородно на бесконечности. Пусть вне трубы токов нет, а внутри трубы $\omega = 0$. Тогда во всем пространстве $\boldsymbol{H} = H_y \boldsymbol{e}_y + H_z \boldsymbol{e}_z = \text{const}$, так как во всем пространстве выполняются равенства $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$, $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$. Поворотом осей координат всегда можно добиться выполнения равенства $H_y = 0$. При этом уравнения (1.13) превращаются в уравнения с постоянными коэффициентами. Если внешнее поле неоднородно, то уравнения (1.13) в общем случае являются уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами. Однако если ток вдоль оси x отсутствует ($\omega = 0$), то можно ввести новые независимые переменные так, что уравнения (1.13) перейдут в уравнения с постоянными коэффициентами при производных. Используя соотношения (1.7), перепишем уравнения (1.13) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \varkappa_1 \Delta u_1 + \varkappa_2 = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial z} + \varkappa_1 \Delta u_2 + \varkappa_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

где

$$\varkappa_1 = \sqrt{4\pi\mu\nu_m} = \text{const}; \quad \varkappa_2 = -\sqrt{\frac{4\pi\nu_m}{\mu}}\frac{\partial p^*}{\partial x} = \text{const}.$$

Так как $\omega = 0$, то из (1.8) следует, что $A(y, z)$ в этом случае является гармонической функцией. Пусть $B(y, z)$ — сопряженная с $A(y, z)$ гармоническая функция. Перейдем в (1.14) к новым независимым переменным [8]

$$y_1 = A(y, z), \quad z_1 = B(y, z). \qquad (1.15)$$

Используя условия Коши — Римана для сопряженных гармонических функций, получим

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 \Delta_1 u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\varkappa_2}{D} \equiv \Phi(u_1) = 0, \\ \varkappa_1 \Delta_1 u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial z_1} + \frac{\varkappa_2}{D} \equiv \Psi(u_2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

Здесь

$$D=\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2=D(y_1,\ z_1),$$
$$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}.$$

Если в плоскости y, z задан контур «трубы» L и задана функция $A(y, z)$ (она определяется из решения (1.8) при заданных граничных условиях), то для определения $u_1(y, z)$ и $u_2(y, z)$ необходимо решить систему (1.16) с граничными условиями, заданными на контуре L, полученном конформным отображением L при помощи функции $w(y+iz)=A(yz)+iB(yz)$.

Если магнитное поле в (1.13) однородно, то эти уравнения отличаются от (1.16) только тем, что у них члены, не содержащие u_1 и u_2, постоянны, а в (1.16) эти члены являются некоторыми функциями независимых переменных. Это обстоятельство оказывается полезным при решении задач о течении в «трубах» в неоднородных полях. Действительно, пусть известно решение u_1^* и u_2^* задачи о течении в «трубе» с контуром L_1 в однородном магнитном поле при заданных граничных условиях $u_1^*(L_1)$, $u_2^*(L_1)$ и при $H_y=0$. Пусть, кроме того, известно некоторое частное решение уравнений

$$\Phi\left(u_1^0\right)-\frac{\varkappa_2}{H_z}=0,$$
$$\Psi\left(u_2^0\right)-\frac{\varkappa_2}{H_z}=0.$$

Так как уравнения (1.13) и (1.16) линейны, то

$$u_1=u_1^*+u_1^0 \quad \text{и} \quad u_2=u_2^*+u_2^0 \tag{1.17}$$

будут являться решением системы (1.16), причем на контуре L_1 это решение будет принимать значение

$$\left.\begin{aligned} u_1(L_1)&=u_1^*(L_1)+u_1^0(L_1),\\ u_2(L_1)&=u_2^*(L_1)+u_2^0(L_1). \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

Если L_1 получено из L конформным преобразованием при помощи функции $y_1+iz_1=W(y+iz)=A(y, z)+iB(y, z)$, то решение (1.17) после замены в нем y_1 и z_1 по формулам (1.15) будет решением задачи о течении в «трубе» с контуром L при тех же значениях констант $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, при-

нимающим в соответствующих точках границы значения (1.18). При этом магнитное поле определяется по формулам (1.7).

Рассмотрим теперь простейший случай течений с прямолинейными линиями тока. Пусть все величины не зависят от y и $H_y = 0$. Это может соответствовать движению жидкости между двумя плоскостями. Движение может вызываться либо градиентом давлений вдоль оси x, либо движением самих плоскостей (всегда можно считать, что движется только одна из них). При этом уравнения (1.13) и (1.6) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u_1}{dz^2} + k_1\frac{du_1}{dz} + k_2 = 0,\\ &\frac{d^2u_2}{dz^2} - k_1\frac{du_2}{dz} + k_2 = 0,\\ &k_1 = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\mu\nu_m}} = \text{const},\\ &k_2 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x} = \text{const},\\ &H_z = H_0 = \text{const}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.19)$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\frac{k_2}{k_1}z + A_1e^{-k_1z} + A_2,\\ u_2 &= \frac{k_2}{k_1}z + B_1e^{k_1z} + B_2, \end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

и зависят от шести констант: A_1, A_2, B_1, B_2, k_1, k_2. Все остальные величины, характеризующие течение, выражаются через u_1 и u_2 по формулам:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2),\\ H_x &= \sqrt{\frac{\pi\mu}{\nu_m}}(u_1 - u_2),\\ j_y &= \frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sqrt{\frac{c^2\mu}{16\pi\nu_m}}\frac{\partial}{\partial z}(u_1 - u_2),\\ cE_y &= \nu_m\frac{\partial H_x}{\partial z} + uH_z = \sqrt{\pi\mu\nu_m}\frac{\partial}{\partial z}(u_1 - u_2) +\\ &+ \frac{1}{2}(u_1 + u_2)H_z = -\sqrt{4\pi\mu\nu_m}\frac{k_2}{k_1} + \frac{1}{2}(A_2 + B_2)H_z =\\ &= \frac{-4\pi\nu_m}{H_z}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}(A_2 + B_2)H_z = \text{c nst}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.21)$$

Константы, входящие в решение, определяются из граничных условий, связанных с постановкой той или иной конкретной задачи.

Рассмотрим три примера.

1. Задача Гартмана [14]. Пусть обе плоскости покоятся, а движение происходит за счет перепада давлений. Магнитное поле считаем заданным на обеих пластинах нормально к их поверхности. Выбрав систему координат так, чтобы плоскость $z=0$ была равноудалена от стенок, можно записать граничные условия в следующем виде:

$$u=0,\quad H_x=0,\quad H_z=H_0 \quad \text{или} \quad u_1=u_2=0 \quad \text{при} \quad z=\pm\delta.$$

Отметим, что в данной постановке E_y является определяемой величиной. Подставляя общее решение (1.20) в граничные условия, получим соотношения для определения постоянных A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{aligned}
-\frac{k_2}{k_1}\delta + A_1 e^{-k_1\delta} + A_2 &= 0,\\
\frac{k_2}{k_1}\delta + A_1 e^{k_1\delta} + A_2 &= 0,\\
\frac{k_2}{k_1}\delta + B_1 e^{k_1\delta} + B_2 &= 0,\\
-\frac{k_2}{k_1}\delta + B_1 e^{-k_1\delta} + B_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Сравнивая первые два уравнения с двумя последними, получаем $A_1=B_1$, $A_2=B_2$. Из первых двух уравнений следует

$$A_1=-\frac{\frac{k_2}{k_1}\delta}{\operatorname{sh} k_1\delta},\qquad A_2=-A_1\operatorname{ch} k_1\delta.$$

Решение задачи будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
u=\frac{1}{2}(u_1+u_2)&=A_1\operatorname{ch} k_1 z+A_2=\\
&=\frac{\frac{k_2}{k_1}\delta}{\operatorname{sh} k_1\delta}(\operatorname{ch} k_1\delta-\operatorname{ch} k_1 z),\\
\sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}}\,H_x=\frac{1}{2}(u_1-u_2)&=-\frac{k_2}{k_1}z-A_1\operatorname{sh} k_1 z=\\
&=-\frac{k_2}{k_1}z+\frac{\frac{k_2}{k_1}\delta}{\operatorname{sh} k_1\delta}\operatorname{sh} k_1 z.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.22)$$

Если в (1.22) перейти к безразмерной переменной $\frac{z}{\delta}$, то решение будет зависеть только от безразмерной комбинации $G = k_1\delta = \frac{H_0\delta}{\sqrt{4\pi\mu\nu_m}}$. Эта комбинация, называемая *числом Гартмана*, характеризует соотношение между вязкими и магнитными силами. Качественный вид профиля скоростей и магнитных силовых линий представлен на рис. 4.

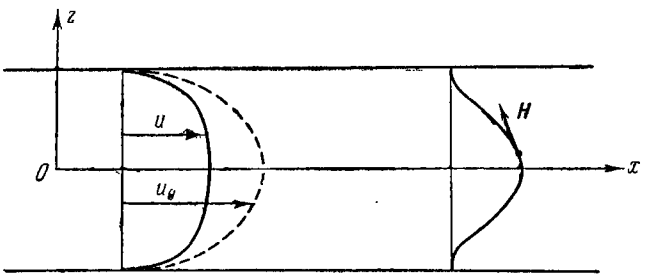


Рис. 4.

Будем изменять напряженность магнитного поля H_z, оставляя μ и $\frac{\partial p}{\partial x}$ постоянными. При этом меняется величина $k_1^2 = \frac{\sigma H_z^2}{\mu c^2}$, а величина $k_2 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$ остается неизменной. Нетрудно убедиться, что если $k_1 \to 0$ при $k_2 = \text{const}$, то профиль скоростей стремится, как и следовало ожидать, к пуазейлевскому $u_0(z)$:

$$u \to u_0 = \frac{1}{2} k_2 (\delta^2 - z^2).$$

Если $k_1 \to \infty$ при $k_2 = \text{const}$, то $u \to 0$ при всех z. Из равенств (1.22) видно, что при увеличении k_1 профиль скоростей становится все более и более плоским и при достаточно большом k_1 основное изменение скорости происходит в узком пристеночном слое. Для того чтобы понять это явление, рассмотрим закон Ома:

$$j_y = \sigma\left(E_y - \frac{u}{c} H_0\right). \qquad (1.23)$$

Так как

$$\int_{-\delta}^{\delta} j_y\,dz = +\frac{c}{4\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\partial H_x}{\partial z}\,dz = \frac{c}{4\pi}\left[H_x(+\delta) - H_x(-\delta)\right] = 0,$$

то, интегрируя (1.23), получим

$$\int_{-\delta}^{\delta} E_y\,dz = \frac{H_0}{c}\int_{-\delta}^{\delta} u\,dz,$$

или, так как $E_y = \text{const}$ (что следует из уравнения $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$),

$$E_y = \frac{H_0}{c}\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} u\,dz = \frac{u_{\text{ср}}}{c}H_0. \tag{1.24}$$

При этом из закона Ома (1.23) следует, что ток течет в одну сторону, если $u > u_{\text{ср}}$, и в другую, если $u < u_{\text{ср}}$. В первом случае поток замедляется, а во втором ускоряется. Это приводит к *уплощению* профиля скоростей. Чтобы показать, что по сравнению с немагнитным случаем, при том же градиенте давления, скорость всюду падает, рассмотрим баланс импульса в объеме, заключенном между плоскостями $z = \pm h$ ($h < \delta$) и имеющем единичную длину в направлении осей x и y. Так как количество движения в этом объеме не изменяется, то силы, действующие на него вдоль оси x, должны уравновешиваться:

$$2h\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} + \mu\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=-h} +$$

$$+\left.\frac{H_0}{4\pi}H_x\right|_{z=h} - \left.\frac{H_0}{4\pi}H_x\right|_{z=-h} = -2\mu\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} + \left.\frac{1}{2\pi}H_xH_0\right|_{z=h}.$$

Члены, связанные с магнитным полем, представляют собой x-е составляющие магнитных напряжений, приложенных к плоскостям $z = \pm h$. Из последнего равенства, учтя знаки входящих в него членов, получим, что при наличии магнитного поля величина $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|$ в каждой точке z меньше, чем $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|$ при отсутствии магнитного поля

$$\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \left|\frac{\partial u_0}{\partial z}\right|. \tag{1.25}$$

Исключение составляют точки $z = \pm \delta$ и $z = 0$, где $H_x = 0$ и наличие магнитного поля не оказывает влияния на величину производной $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|$ и на величину вязкого трения. Из неравенства (1.25) следует, что наличие магнитного поля приводит к уменьшению скорости в каждой точке z по сравнению с немагнитным случаем:

$$u < u_0. \tag{1.26}$$

Заметим, что, кроме задачи Гартмана, можно было бы рассмотреть и другие задачи, когда жидкость приводится в движение перепадом давлений, и стенки неподвижны. При этом на стенках необходимо задать величины x-х составляющих напряженностей магнитного поля (которые в задаче Гартмана равны нулю) или напряженность электрического поля и величину x-й составляющей магнитного поля на одной из стенок.

2. Рассмотрим теперь следующий пример [11]. Пусть $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ($k_2 = 0$), а жидкость приводится в движение верхней стенкой $z = \delta$, которая движется со скоростью U (течение Куэтта). На нижней неподвижной стенке $z = 0$ задано $H_z = H_0$, $H_x = H_{x0}$, $\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$. Верхняя стенка считается диэлектриком. Прежде чем переходить к решению задачи о течении Куэтта, остановимся несколько подробнее на ее постановке. Течение Куэтта может рассматриваться как некоторое приближение к задаче о пограничном слое. При этом неподвижная стенка может трактоваться как обтекаемое тело, а движущаяся стенка — как внешний поток. В отличие от задач пограничного слоя, в задаче о течении Куэтта можно выписать решение в конечном виде, и это решение может служить для выяснения различных закономерностей, присущих пограничному слою. Отметим, что, как будет видно из дальнейшего, решение задачи Куэтта, полученное для несжимаемой жидкости, верно также и для газа, так как плотность или ее производные не входят в уравнения. Если тело обтекается газом с большой сверхзвуковой скоростью, то газ вследствие его нагревания на ударной волне и в пограничном слое ионизуется и становится проводником. При этом появляется возможность повлиять на движение газа и получить полезные

эффекты, создавая вокруг тела магнитное поле. В ряде случаев можно считать, что газ является проводящим только вблизи тела, так как этот газ прошел через участок ударной волны наибольшей интенсивности и подвергается дополнительному подогреву за счет диссипативных процессов в пограничном слое. Поэтому в рассматриваемой задаче верхняя стенка считается диэлектриком. Если электромагнитное поле создается источниками, заключенными внутри тела, то вдали от тела $\boldsymbol{H}=0$ и $\boldsymbol{E}=0$ в системе координат, связанной с летящим телом. В этой системе координат движение стационарно и электрическое поле, согласно равенствам (1.21), постоянно:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_y=\text{const}.$$

Так как $\boldsymbol{E}=0$ на бесконечности, то

$$\boldsymbol{E}_y=0.$$

Далее на неподвижной стенке $u=0$, следовательно,

$$\frac{4\pi}{c}j_y=\frac{\partial H_x}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}\sigma\left(E_y+\frac{1}{c}uH_0\right)=0.$$

Таким образом, граничные условия на нижней стенке связаны с тем, что магнитное поле создается только токами, текущими внутри тела.

После этих предварительных замечаний приступаем к решению задачи. Граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} H_x=H_{x0},\quad \frac{\partial H_x}{\partial z}=0,\quad u=0 \quad &\text{при} \quad z=0,\\ u=U \quad &\text{при} \quad z=\delta. \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

Подставляя в эти равенства общее решение (1.20), получим:

$$\left.\begin{aligned} A_1-B_1+A_2-B_2=2H_{x0}\sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}}\equiv 2C,\\ -k_1A_1-k_1B_1=0,\\ A_1+B_1+A_2+B_2=0,\\ A_1e^{-k_1\delta}+B_1e^{k_1\delta}+A_2+B_2=2U. \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

Из второго и третьего равенств (1.28) следует

$$A_1=-B_1,\quad A_2=-B_2,$$

а из первого и четвертого получим

$$-2B_1 - 2B_2 = 2C, \quad 2B_1 \operatorname{sh} k_1\delta = 2U,$$

или

$$B_1 = \frac{U}{\operatorname{sh} k_1\delta}, \quad B_2 = -B_1 - C.$$

Итак, решение задачи имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{U}{\operatorname{sh} k_1\delta} \operatorname{sh} k_1 z, \\ \sqrt{\frac{\nu m}{4\pi\mu}}\,(H_x - H_{x0}) &= -\frac{U}{\operatorname{sh} k_1\delta}(1 - \operatorname{ch} k_1 z). \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

Качественный вид профиля скорости и магнитных силовых линий представлен на рис. 5. Заметим, что если магнитное

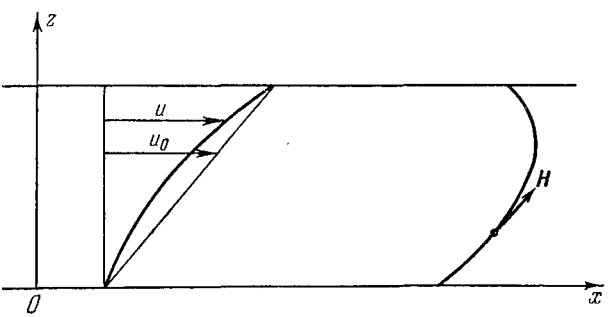


Рис. 5.

поле отсутствует, то распределение скоростей в течении Куэтта линейно: $u_0 = U\frac{z}{\delta}$. Наличие магнитного поля приводит к торможению потока $u < u_0$, а также к тому, что напряжение трения $\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial z}$ на верхней стенке возрастает, а на нижней падает. Однако на нижнюю стенку, которая считается источником магнитного поля, кроме силы трения, действует еще магнитная сила. Чтобы найти суммарную силу, действующую на нижнюю стенку, заметим, что ее следует считать равной и противоположной по знаку силе, действующей на верхнюю стенку. Так как верхняя пластинка является

диэлектриком, то эта сила равна силе трения $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=\delta}$, которая при усилении магнитного поля возрастает. Физически увеличение силы, действующей на неподвижную стенку, связано с тем, что необходимо прилагать дополнительные усилия, чтобы заставить проводящую жидкость двигаться через магнитное поле.

Пользуясь полученным решением, найдем распределение температуры $T(z)$ в течении Куэтта. Если диссипативные коэффициенты постоянны, то уравнение энергии в течении Куэтта будет иметь вид

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + k \frac{d^2T}{dz^2} + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\left(\frac{dH_x}{dz}\right)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} k\frac{d^2T}{dz^2} &= -\frac{\mu U^2 k_1^2}{\operatorname{sh}^2 k_1\delta}\left[\operatorname{ch}^2 k_1 z + \operatorname{sh}^2 k_1 z\right] = \\ &= -\frac{\mu U^2 k_1^2}{\operatorname{sh}^2 k_1\delta}\operatorname{ch} 2k_1 z, \\ kT &= -\frac{\mu U^2}{4\operatorname{sh}^2 k_1\delta}\operatorname{ch} 2k_1 z + C_1 z + C_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.30)$$

Если стенка теплоизолирована, то на ней $\frac{dT}{dz} = 0$ и $C_1 = 0$. Подставив в (1.30) $z = \delta$, получим

$$c_2 = kT_\infty + \frac{\mu U^2 \operatorname{ch} 2k_1\delta}{4\operatorname{sh}^2 k_1\delta},$$

где через T_∞ обозначена температура движущейся стенки $z = \delta$. Таким образом,

$$kT = kT_\infty + \frac{\mu U^2}{4\operatorname{sh}^2 k_1\delta}(\operatorname{ch} 2k_1\delta - \operatorname{ch} 2k_1 z). \qquad (1.31)$$

Температура стенки при этом равна

$$T|_{z=0} = T_\infty + \frac{\mu U^2}{2k}, \qquad (1.32)$$

то есть температура стенки не зависит от величины магнитного поля. Аналогично можно показать, что если задана

температура неподвижной стенки $T|_{z=0}$, то тепловой поток на стенку равен

$$q|_{z=0} = k\frac{T_\infty - T|_{z=0}}{\delta} + \frac{\mu U^2}{2\delta} \qquad (1.33)$$

и также не зависит от величины приложенного магнитного поля.

Если результаты, полученные при изучении течения Куэтта, считать применимыми к задаче о пограничном слое, возникающем на поверхности летящего тела, то их можно сформулировать следующим образом:

а) Магнитное поле оказывает тормозящее воздействие на течение в пограничном слое. Можно ожидать, что это торможение приведет к утолщению пограничного слоя.

б) Тепловой поток при заданной температуре стенки и заданной толщине пограничного слоя не меняется при наложении магнитного поля. Как видно из формулы (1.33), утолщение пограничного слоя приведет к уменьшению теплообмена.

в) Наличие магнитного поля приводит к уменьшению вязкого трения на поверхности тела и к увеличению полного сопротивления летящего тела. Правда, последний эффект может несколько уменьшиться за счет утолщения пограничного слоя.

Отмеченные свойства остаются качественно справедливыми и при рассмотрении течения Куэтта для газа, у которого диссипативные коэффициенты являются функциями термодинамических параметров, а также для точного решения задачи о пограничном слое на пластине.

3. Пусть полупространство $z > 0$, занятое вязкой электропроводной жидкостью, ограничено плоскостью, движущейся со скоростью u_0 в направлении оси x. Найдем движение жидкости и распределение магнитного поля в ней, предполагая, что при $z \to \infty$ все функции ограничены и

$$u \to u_\infty, \quad H_x \to H_{x\infty}.$$

Кроме того, будем считать, что изменение давления вдоль оси x отсутствует:

$$k_2 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Отметим, что соответствующая задача при $H_z = 0$ имеет только тривиальное решение $u = u_0$.

Используя ограниченность решения при $z \to \infty$, получим из соотношений (1.20) и (1.21) решение задачи для рассматриваемого случая

$$u = \frac{1}{2}(A_1 e^{-k_1 z} + A_2 + B_2),$$

$$\sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}}\, H_x = \frac{1}{2}(A_1 e^{-k_1 z} + A_2 - B_2).$$

Константы A_1, A_2, B_2 можно определить по условиям на бесконечности и на плоскости $z = 0$; при этом решение задачи примет вид

$$\left.\begin{aligned} u - u_\infty &= (u_0 - u_\infty)\, e^{-k_1 z}, \\ \sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}}\,(H_x - H_{x\infty}) &= (u_0 - u_\infty)\, e^{-k_1 z}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.34)$$

Положив в этом решении $z = 0$, получим следующее соотношение, связывающее полное изменение скорости и магнитного поля в полупространстве:

$$u_0 - u_\infty = \sqrt{\frac{\nu_m}{4\pi\mu}}\,(H_{x0} - H_{x\infty}). \qquad (1.35)$$

Из решения (1.34) следует, что основное изменение скорости и магнитного поля происходит в слое, ширина которого имеет порядок $\frac{1}{k_1}$. В пределе, при $k_1 = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\nu_m\mu}} \to \infty$, этот слой превращается в разрыв, причем предельная форма уравнения (1.35) представляет собой соотношение, которое должно выполняться на поверхности этого разрыва [18]. Это соотношение зависит от предела отношения $\frac{\nu_m}{\mu}$, который может быть нулем, конечным числом или бесконечностью. В частности, если $\nu_m \to 0$ и $\mu \to 0$, и при этом $\frac{\nu_m}{\mu} \to \infty$, то $H_{x0} = H_{x\infty}$.

В дальнейшем при изучении задач об обтекании тел идеальной жидкостью или газом предельная форма соотношения (1.35) будет использована в качестве граничного условия на поверхности тела.

§ 2. Стационарные движения вдоль магнитного поля

Если жидкость несжимаемая ($\rho = \text{const}$), то уравнения магнитной гидродинамики в этом случае имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{H}\nabla)\boldsymbol{v} - \operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot}\boldsymbol{H}),\\ &\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\operatorname{grad}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \\ &\qquad + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{H}\nabla)\boldsymbol{H} + \mu\Delta\boldsymbol{v},\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

В ряде случаев интегрирование уравнений магнитной гидродинамики может быть сведено к интегрированию уравнений обычной гидродинамики. Одним из таких случаев является случай стационарного движения, когда магнитное поле и скорость параллельны друг другу [3, 7, 12, 15]

$$\boldsymbol{H} = K\boldsymbol{v}. \tag{2.2}$$

Из двух последних уравнений (2.1) следует

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = \operatorname{div} K\boldsymbol{v} = K\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}K = \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}K = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{grad}K$ не имеет составляющей вдоль скорости, и K принимает постоянное значение на каждой линии тока. Будем в дальнейшем считать, что

$$K = \text{const}$$

всюду. При этом уравнения магнитной гидродинамики примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = 0,\\ &\rho\left(1 - \frac{K^2}{4\pi\rho}\right)(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\left(p + \frac{K^2v^2}{8\pi}\right) + \mu\Delta\boldsymbol{v},\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Последние два уравнения могут быть приведены к виду уравнений обычной гидродинамики. Действительно, введем обозначения

$$\rho\left(1 - \frac{K^2}{4\pi\rho}\right) = \rho^*,$$

$$p + \frac{K^2v^2}{8\pi} = p^*;$$

тогда два последних уравнения (2.3) примут вид уравнений движения жидкости с плотностью ρ^*, давлением p^* и вязкостью μ:

$$\rho^*(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} p^* + \mu\Delta\boldsymbol{v}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{2.4}$$

Тензор потока импульса при течениях с $\boldsymbol{H} = K\boldsymbol{v}$ имеет вид

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik} + \frac{H^2}{8\pi}\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}H_iH_k - \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right) =$$
$$= \rho\left(1 - \frac{K^2}{4\pi\rho}\right)v_iv_k + \left(p + \frac{K^2v^2}{8\pi}\right)\delta_{ik} - \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right) =$$
$$= \rho^* v_i v_k + p^*\delta_{ik} - \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right). \tag{2.5}$$

Следовательно, поток импульса при течениях с $\boldsymbol{H} = K\boldsymbol{v}$ оказывается равным потоку импульса жидкости с плотностью ρ^*, давлением p^* и вязкостью μ, текущей с той же скоростью $\boldsymbol{v}$ при отсутствии магнитного поля.

Можно указать два случая, когда первое уравнение (2.3) удовлетворяется тождественно:

1. Потенциальные движения $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$. При этом, как известно из гидродинамики, первое уравнение (2.4) служит только для определения давления, а второе уравнение (2.4) служит для определения потенциальной функции $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi = 0$ при заданных граничных условиях. Таким образом, любое потенциальное течение несжимаемой жидкости является решением уравнений магнитной гидродинамики, если $\boldsymbol{H} = K\boldsymbol{v}$.

2. Движение бесконечно проводящей жидкости $\nu_m = 0$.

Рассмотрим прежде всего частный случай [4, 12], когда $\nu_m = \mu = 0$ и $1 - \frac{K^2}{4\pi\rho} = 0$. В этом случае в уравнениях (2.3) первое удовлетворяется автоматически, а из второго следует соотношение

$$p + \frac{H^2}{8\pi} = p + \frac{K^2v^2}{8\pi} = \text{const},$$

служащее для определения давлений по известному полю скоростей, которое должно удовлетворять только условию несжимаемости

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0.$$

Пусть поле скоростей удовлетворяет этому уравнению и на бесконечности скорость постоянна $\left(\boldsymbol{v}_\infty = \text{const} = \frac{\boldsymbol{H}_\infty}{K}\right)$. Тогда, если перейти к системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится, то получим, что при отсутствии внешних сил некоторая конфигурация, образованная магнитным полем и полем скоростей, движется со скоростью $\boldsymbol{v}_{A,\infty} = \pm \frac{\boldsymbol{H}_\infty}{\sqrt{4\pi\rho}}$. Эти движущиеся конфигурации можно рассматривать как волны. Они называются *волнами Альфвена* [1]).

Рассмотрим теперь движения вязкой жидкости ($\mu \neq 0$). В этом случае задача об отыскании поля скоростей сводится к интегрированию уравнений обычной гидродинамики вязкой жидкости (2.4).

Если $1 - \frac{K^2}{4\pi\rho} > 0$, то течение жидкости с плотностью ρ и с коэффициентом вязкости μ в магнитном поле $\boldsymbol{H}$ совпадает с течением жидкости плотности ρ^* с коэффициентом вязкости μ при отсутствии магнитного поля.

Однако если $\frac{K^2}{4\pi\rho} > 1$, или, что то же самое, $v < \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} = v_A$, то $\rho^* < 0$. В этом случае, введя величины [15] $\rho_1 = -\rho^*$, $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}$, $p_1 = -p^* + \text{const}$, получим, что они удовлетворяют уравнениям гидродинамики с положительной плотностью ρ_1:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 (\boldsymbol{v}_1 \nabla) \boldsymbol{v}_1 &= -\operatorname{grad} p_1 + \mu \Delta \boldsymbol{v}_1, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

В рассматриваемом классе решений можно находить решение задач об обтекании тел. Если $\boldsymbol{v} < \boldsymbol{v}_A$, то скорость и градиент давления в магнитогидродинамическом течении противоположны по знаку скорости и градиенту давления в течении жидкости с плотностью $\rho_1 = -\rho^* > 0$ и вязкостью μ при отсутствии магнитного поля. Так как в обычных течениях за обтекаемым телом имеется вязкий след, то при наложении достаточно сильного магнитного поля (чтобы $v < v_A$, или $K^2 > 4\pi\rho$) этот след будет обращен вперед. Можно

[1]) См. также следующий параграф этой главы.

предположить, что возмущения переносятся в этом случае альфвеновскими волнами [13, 15].

В задачах об обтекании тел гидродинамические граничные условия непротекания и прилипания удовлетворяются при нахождении поля скоростей, подчиняющегося гидродинамическим уравнениям (2.4) или (2.6). Кроме того, необходимо удовлетворить электродинамическим граничным условиям на поверхности тела:

$$\{H_n\} = 0 \quad \text{и} \quad \{E_\tau\} = 0. \tag{2.7}$$

Так как $H = K\boldsymbol{v}$, то на внешней стороне поверхности тела имеем $H_n = 0$ и $E_\tau = 0$. Тогда из (2.7) следует, что на внутренней стороне поверхности тела должны выполняться условия

$$H_n = 0 \quad \text{и} \quad E_\tau = 0, \tag{2.8}$$

которые служат для определения электрического и магнитного полей внутри тела, где они удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e, \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

причем $\boldsymbol{j}$ и ρ_e следует считать известными функциями, так как распределение токов и зарядов внутри тела может быть задано. Электромагнитное поле, удовлетворяющее уравнениям (2.9) и граничным условиям (2.8), определяется однозначно. В этом нетрудно убедиться, рассматривая разность двух решений системы (2.9), удовлетворяющих условиям (2.8).

Найдем теперь силу, действующую на тело при обтекании с $\boldsymbol{H} = K\boldsymbol{v}$. Рассмотрим произвольную поверхность Σ, содержащую внутри себя обтекаемое тело. Из закона сохранения импульса следует, что сила, действующая на тело, равна

$$\boldsymbol{F} = -\oint_\Sigma \Pi_{ik} n_k \boldsymbol{e}_i \, d\Sigma. \tag{2.10}$$

Так как поток импульса Π_{ik} в магнитогидродинамическом течении совпадает с потоком импульса в гидродинамическом течении жидкости плотности ρ^*, с коэффициентом вязкости μ, со скоростью $\boldsymbol{v}$ при $v > v_A$ и противоположен по знаку потоку импульса при течении жидкости плотности ρ_1, с коэф-

фициентом вязкости μ, со скоростью $v_1 = -v$ при $v < v_A$, то аналогичное заключение верно и для сил, действующих на тело со стороны жидкости

$$F = F^* \quad \text{или} \quad F = -F_1. \tag{2.11}$$

Если жидкость невязкая, то поле скоростей не будет меняться при наложении магнитного поля, так как после исключения давления из уравнений (2.4) или (2.6) при $\mu = 0$ получаются уравнения, не зависящие от величины магнитного поля [1]). Из уравнений (2.4) или (2.6) следует, что давление пропорционально p^* или p_1. При этом тензор (2.5), а следовательно, и сила, действующая на тело, пропорциональны p^* или p_1, т. е.

$$\frac{F}{F_0} = \frac{p^*}{p} = -\frac{p_1}{p} = \left(1 - \frac{K}{4\pi\rho}\right), \tag{2.12}$$

где F_0 — сила, действующая на тело со стороны жидкости плотности ρ при отсутствии магнитного поля.

§ 3. Волновые движения идеальной жидкости

В предыдущем параграфе было показано, что в несжимаемой жидкости при $\nu = \nu_m = 0$ существуют волны с конечной амплитудой, которые распространяются по покоящейся жидкости со скоростью

$$v_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Рассмотрим подробнее плоские волны такого типа [9, 10]. В плоских волнах все величины зависят от одной пространственной координаты и времени. Выбирая ось x перпендикулярно к фронту волны, получим из уравнений $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.$$

Будем считать, что на бесконечности $H_x = H_{x0}$ и $u = 0$. Тогда из последних равенств вытекает, что всюду

$$u = 0 \quad \text{и} \quad H_x = H_{x0}. \tag{3.1}$$

---

[1]) Решения с $\boldsymbol{H} = K\boldsymbol{v}$ в невязкой жидкости использовались в работах [2, 7] для изучения магнитно-вихревых колец.

При этом проекция уравнения индукции на ось x превращается в тождество, а из проекции уравнения движения на ось x получим, используя равенства (3.1),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)=0,$$

или

$$p+\frac{H^2}{8\pi}=\text{const}. \tag{3.2}$$

Проектируя уравнения индукции и движения на плоскость, перпендикулярную к оси x, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}_\tau}{\partial t}=H_x\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x},\qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{H_x}{4\pi\rho}\frac{\partial \boldsymbol{H}_\tau}{\partial x}, \tag{3.3}$$

где

$$\boldsymbol{H}_\tau=H_y\boldsymbol{e}_y+H_z\boldsymbol{e}_z.$$

Исключая перекрестным дифференцированием $\boldsymbol{H}_\tau$ и $\boldsymbol{v}$ из уравнений (3.3), получим, что каждая из величин $\boldsymbol{H}_\tau$ и $\boldsymbol{v}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_\tau}{\partial t^2}&=\frac{H_x^2}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_\tau}{\partial x^2},\\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2}&=\frac{H_x^2}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x^2}.\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Этот факт указывает на то, что изучаемые движения носят характер волнового процесса, причем скорость распространения волн в направлении x равна проекции скорости распространения альфвеновских волн на ось x $v_{Ax}=\dfrac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}$.

Так как волны плоские, то можно считать скоростью их распространения вектор альфвеновской скорости $\boldsymbol{v}_A=\dfrac{\boldsymbol{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}$. Сами эти волны являются частным случаем альфвеновских волн.

Рассматриваемые волны являются поперечными, так как приращения векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Общее решение уравнений (3.4) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}_\tau&=\boldsymbol{H}_{\tau 1}(x-v_{Ax}t)+\boldsymbol{H}_{\tau 2}(x+v_{Ax}t),\\ \boldsymbol{v}&=\boldsymbol{v}_1(x-v_{Ax}t)+\boldsymbol{v}_2(x+v_{Ax}t).\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.3), получим

$$-v_{Ax}H'_{\tau 1}+v_{Ax}H'_{\tau 2}=H_x(v'_1+v'_2),$$
$$-v_{Ax}v'_1+v_{Ax}v'_2=\frac{H_x}{4\pi\rho}(H'_{\tau 1}+H'_{\tau 2}).$$

Отсюда следует, что

$$v'_1=-\frac{H'_{\tau 1}}{\sqrt{4\pi\rho}},\qquad v'_2=\frac{H'_{\tau 2}}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

или

$$v_1=-\frac{H_{\tau 1}}{\sqrt{4\pi\rho}},\qquad v_2=\frac{H_{\tau 2}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{3.6}$$

В последних равенствах векторные константы, которые появляются при интегрировании, включены в v_1 и v_2. Таким образом, общее решение (3.5) содержит две произвольные функции $H_{\tau 1}$ и $H_{\tau 2}$, которые в каждой конкретной задаче определяются из начальных или граничных условий.

Решение (3.5) указывает на то, что плоские волны, идущие навстречу друг другу, не взаимодействуют между собой.

Волновой характер полученных решений можно объяснить следующим образом. Согласно § 4 гл. I, тензор напряжений магнитного поля можно представить как сумму равномерного давления $\frac{H^2}{8\pi}$ по всем направлениям и натяжения $\frac{H^2}{4\pi}$ вдоль магнитных силовых линий. В полученном решении $p+\frac{H^2}{8\pi}=\text{const}$, так что единственной силой, действующей на жидкость, является сила, возникающая за счет натяжения магнитных силовых линий. Не удивительно поэтому, что движение жидкости описывается уравнением колебаний натянутой струны. Отметим, что при выводе волнового уравнения амплитуды волн не считались малыми.

С помощью общего решения (3.5), (3.6) можно решить различные конкретные задачи. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть в начальный момент $t=0$ в пространстве задано некоторое распределение скоростей $v_0(x)$ и магнитного поля $H_{\tau 0}(x)$. Найдем скорость движения жидкости и напряженность магнитного поля в последующие моменты времени.

Будем искать решение задачи в виде (3.5). Тогда, используя начальные данные и (3.6) для определения функции $\boldsymbol{H}_{\tau 1}$ и $\boldsymbol{H}_{\tau 2}$, получим

$$\boldsymbol{v}_0 = -\frac{\boldsymbol{H}_{\tau 1}}{\sqrt{4\pi\rho}} + \frac{\boldsymbol{H}_{\tau 2}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \boldsymbol{H}_{\tau 0} = \boldsymbol{H}_{\tau 1} + \boldsymbol{H}_{\tau 2}.$$

Так как определитель этой системы $D = -\frac{1}{4\pi\rho}$, то функции $\boldsymbol{H}_{\tau 1}$ и $\boldsymbol{H}_{\tau 2}$ определяются однозначно.

2. Пусть жидкость заполняет полупространство $x > 0$ и граничит с бесконечно проводящей стенкой $x = 0$, которая совершает произвольные движения параллельно самой себе со скоростью $\boldsymbol{U}(t)$. При $t = 0$ в жидкости $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\tau 0} = \text{const}$, $H_x \neq 0$, $v = 0$. Найти дальнейшее движение жидкости.

Вследствие бесконечной проводимости стенки и жидкости при $x = 0$ имеют место соотношения, которые следуют из условия непрерывности касательной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля на поверхности раздела двух сред:

$$H_{x\,\text{ж}} = H_{x\,\text{ст}} = H_x, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{U}(t)}{c} \times \boldsymbol{H}_x = -\frac{\boldsymbol{v}(0, t)}{c} \times \boldsymbol{H}_x.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{v}(0, t) = \boldsymbol{U}(t), \tag{3.7}$$

т. е. скорость прилегающего слоя жидкости равна скорости стенки.

Будем снова искать решение в виде (3.5). Из начальных условий следует, что при $t = 0$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}_{\tau 0} &= \boldsymbol{H}_{\tau 1}(x) + \boldsymbol{H}_{\tau 2}(x), \\ 0 &= \boldsymbol{v}_1(x) + \boldsymbol{v}_2(x) = -\boldsymbol{H}_{\tau 1}(x) + \boldsymbol{H}_{\tau 2}(x). \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Отсюда для положительных значений аргумента находим

$$\boldsymbol{H}_{\tau 2}(x + v_A t) = \boldsymbol{H}_{\tau 1}(x - v_A t) = \frac{\boldsymbol{H}_{\tau 0}}{2}, \tag{3.9}$$

поэтому при $x > v_A t$ имеем

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\tau 1} + \boldsymbol{H}_{\tau 2} = \boldsymbol{H}_{\tau 0},$$

т. е. движение жидкости сосредоточено в области $0 < x < v_A t$. Для определения движения жидкости в этой области вос-

пользуемся граничным условием (3.7) и равенствами (3.9):

$$U(t) = \boldsymbol{v}_1(-v_A t) + \boldsymbol{v}_2(v_A t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}[-\boldsymbol{H}_{\tau 1}(-v_A t) + \\ + \boldsymbol{H}_{\tau 2}(v_A t)] = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\left[-\boldsymbol{H}_{\tau 1}(-v_A t) + \frac{\boldsymbol{H}_{\tau 0}}{2}\right].$$

Определив отсюда $\boldsymbol{H}_{\tau 1}(x)$, найдем решение задачи:

$$\boldsymbol{H}_\tau = \boldsymbol{H}_{\tau 1} + \boldsymbol{H}_{\tau 2} = -\sqrt{4\pi\rho}\,U\left(t - \frac{x}{v_A}\right) + \boldsymbol{H}_{\tau 0},$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{U}\left(t - \frac{x}{v_A}\right).$$

Таким образом, движение представляет собой уходящую от стенки волну.

Рассмотрим теперь слабые возмущения в несжимаемой жидкости [16]. Будем считать отклонения $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{h}$ от основного состояния $\boldsymbol{U} = 0$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 = \text{const}$ малыми, и квадратами этих отклонений будем пренебрегать. Тогда уравнения движения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} = (\boldsymbol{H}_0 \nabla)\,\boldsymbol{v}, \\ &\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p^* + \frac{1}{4\pi\rho}(\boldsymbol{H}_0 \nabla)\,\boldsymbol{h}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \\ &p^* = p + \frac{\boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{h}}{4\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Направим ось x параллельно $\boldsymbol{H}_0$, тогда $(\boldsymbol{H}_0 \nabla) = H_0 \frac{\partial}{\partial x}$. Исключив из второго уравнения $\boldsymbol{h}$, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\frac{\partial p^*}{\partial t} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x^2}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Если применить операцию rot к первому уравнению, то получим, что вектор вихря $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial x^2}. \tag{3.12}$$

Поступая аналогичным образом, получим следующее уравнение для $\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \frac{4\pi \boldsymbol{j}}{c}$:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{j}}{\partial t^2} = \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \boldsymbol{j}}{\partial x^2}. \tag{3.13}$$

Общие решения уравнений (3.12) и (3.13) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1(x - v_A t,\ y,\ z) + \boldsymbol{\omega}_2(x + v_A t,\ y,\ z), \\ &\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_1(x - v_A t,\ y,\ z) + \boldsymbol{j}_2(x + v_A t,\ y,\ z),\ v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Отметим, что так как $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$, то $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{j}_1$ и $\boldsymbol{j}_2$ должны удовлетворять условиям

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}_2 = \operatorname{div} \boldsymbol{j}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{j}_2 = 0.$$

Подставляя выражения (3.14) в равенства (3.10), получим

$$\boldsymbol{\omega}_1 = -c^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{\rho}}\,\boldsymbol{j}_1 + \text{const},\ \boldsymbol{\omega}_2 = c^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{\rho}}\,\boldsymbol{j}_2 + \text{const}. \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) следует, что величина

$$\boldsymbol{\omega} - c^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{\rho}}\,\boldsymbol{j} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)$$

зависит от $x - v_A t$, y, z, а величина

$$\boldsymbol{\omega} + c^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{\rho}}\,\boldsymbol{j} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)$$

зависит от $x + v_A t$, y, z. Отсюда можно сделать вывод о постоянстве циркуляций векторов $\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}$ и $\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}$, взятых по контурам, которые перемещаются в пространстве относительно газа со скоростью $\pm \boldsymbol{v}_A$ [1].

Будем рассматривать движения в неограниченной жидкости. В этом случае поле скоростей однозначно определяется распределением вихрей и, следовательно, скорость и магнитное поле могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1(x - v_A t,\ y,\ z) + \boldsymbol{v}_2(x + v_A t,\ y,\ z), \\ &\boldsymbol{h} = -\frac{v_1(x - v_A t,\ y,\ z)}{\sqrt{4\pi\rho}} + \frac{v_2(x + v_A t,\ y,\ z)}{\sqrt{4\pi\rho}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

где $\boldsymbol{v}_1$ определяется по $\boldsymbol{\omega}_1$, а $\boldsymbol{v}_2$ по $\boldsymbol{\omega}_2$, причем $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{v}_2 = 0$. В этом случае член $\operatorname{grad} \frac{\partial p}{\partial t}$, входящий в уравнение (3.11), равен нулю.

Равенства (3.14), (3.15) и (3.16) позволяют решать задачи с начальными данными. Отсюда, в частности, следует, что если начальные возмущения сосредоточены в ограниченной области, то, так как решение имеет вид (3.14), (3.15), эта область разделится с течением времени на две возмущенные области, расходящиеся в разные стороны вдоль направления $\boldsymbol{H}_0$.

ГЛАВА III

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ И СЛАБЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ[1])

§ 1. Слабые разрывы

В этой главе рассматриваются движения идеального совершенного газа.

Система уравнений, описывающая такие движения, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)+\\
&\qquad+\frac{1}{4\pi\rho}\left(H_x\frac{\partial H_x}{\partial x}+H_y\frac{\partial H_x}{\partial y}+H_z\frac{\partial H_x}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)+\\
&\qquad+\frac{1}{4\pi\rho}\left(H_x\frac{\partial H_y}{\partial x}+H_y\frac{\partial H_y}{\partial y}+H_z\frac{\partial H_y}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)+\\
&\qquad+\frac{1}{4\pi\rho}\left(H_x\frac{\partial H_z}{\partial x}+H_y\frac{\partial H_z}{\partial y}+H_z\frac{\partial H_z}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\\
&\qquad+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

[1]) Для удобства в этой книге среду будем называть идеальной, если в ней напряжения сводятся к давлению, отсутствует теплопроводность и проводимость равна бесконечности (см. § 4 гл. I). В противном случае среду будем называть *неидеальной*.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)+\\
&\qquad\qquad+w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0,\\
&\frac{\partial H_x}{\partial t}+u\frac{\partial H_x}{\partial x}+v\frac{\partial H_x}{\partial y}+w\frac{\partial H_x}{\partial z}-H_x\frac{\partial u}{\partial x}-\\
&\quad-H_y\frac{\partial u}{\partial y}-H_z\frac{\partial u}{\partial z}+H_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\\
&\frac{\partial H_y}{\partial t}+u\frac{\partial H_y}{\partial x}+v\frac{\partial H_y}{\partial y}+w\frac{\partial H_y}{\partial z}-H_x\frac{\partial v}{\partial x}-\\
&\quad-H_y\frac{\partial v}{\partial y}-H_z\frac{\partial v}{\partial z}+H_y\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\\
&\frac{\partial H_z}{\partial t}+u\frac{\partial H_z}{\partial x}+v\frac{\partial H_z}{\partial y}+w\frac{\partial H_z}{\partial z}-H_x\frac{\partial w}{\partial x}-\\
&\quad-H_y\frac{\partial w}{\partial y}-H_z\frac{\partial w}{\partial z}+H_z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\\
&\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}
\right\}\qquad(1.1)
$$

Будем называть *поверхностью слабого разрыва* некоторой функции поверхность, на которой имеет место разрыв производных некоторого порядка этой функции при непрерывности самой функции. Если на некоторой поверхности имеет место разрыв самой функции, то такая поверхность называется *поверхностью сильного разрыва*. Поверхности, на которых возможен слабый разрыв решения некоторой системы дифференциальных уравнений, являются характеристическими поверхностями для этой системы дифференциальных уравнений. Это свойство характеристических поверхностей может быть принято за их определение.

Установим соотношения, которые должны удовлетворяться на поверхности слабого разрыва [2, 14]. Рассмотрим некоторую точку на поверхности слабого разрыва и выберем ось x перпендикулярно к поверхности разрыва. Будем пока считать, что разрыв терпит хотя бы одна из первых производных решения. Вследствие непрерывности всех функций на поверхности слабого разрыва, производные по y и z должны быть непрерывны. Действительно, рассмотрим приращение некоторой функции при смещении из некоторой точки, лежащей на поверхности слабого разрыва, в произвольную бесконечно близкую точку, также лежащую на этой

поверхности. Так как в исходной и конечной точках значения функции по обе стороны от разрыва равны между собой, то приращения функции с обеих сторон от разрыва также должны быть равны между собой. Отсюда и следует равенство производных, взятых в направлениях касательных к поверхности разрыва. Таким образом, на поверхности слабого разрыва могут претерпевать разрыв только производные по x и по t.

Если выписать систему уравнений для двух точек, лежащих по обе стороны от поверхности слабого разрыва сколь угодно близко друг от друга, и затем вычесть друг из друга получившиеся уравнения, то пропадут все члены, содержащие $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, а вместо производных по x и по t будут входить разности их значений по обе стороны от разрыва. Проделав эту операцию для системы (1.1), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}+u\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=-\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial p}{\partial x}\right\}-\frac{1}{8\pi\rho}\left\{\frac{\partial\left(H_y^2+H_z^2\right)}{\partial x}\right\},\\
&\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\}+u\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}=\frac{1}{4\pi\rho}H_x\left\{\frac{\partial H_y}{\partial x}\right\},\\
&\left\{\frac{\partial w}{\partial t}\right\}+u\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\}=\frac{1}{4\pi\rho}H_x\left\{\frac{\partial H_z}{\partial x}\right\},\\
&\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\}+u\left\{\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\}+\rho\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=0,\\
&\left\{\frac{\partial p}{\partial t}\right\}-\frac{\gamma p}{\rho}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\}+u\left\{\frac{\partial p}{\partial x}\right\}-u\frac{\gamma p}{\rho}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\}=0,\\
&\left\{\frac{\partial H_y}{\partial t}\right\}+u\left\{\frac{\partial H_y}{\partial x}\right\}-H_x\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}+H_y\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=0,\\
&\left\{\frac{\partial H_z}{\partial t}\right\}+u\left\{\frac{\partial H_z}{\partial x}\right\}-H_x\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+H_z\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=0,\\
&\left\{\frac{\partial H_x}{\partial t}\right\}+u\left\{\frac{\partial H_x}{\partial x}\right\}=0,\\
&\left\{\frac{\partial H_x}{\partial x}\right\}=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(1.2)$$

где символом $\{\ \}$ обозначена разность значений соответствующей величины перед и за слабым разрывом. Из последних двух уравнений следует, что производные H_x непрерывны.

Так как для любой функции, входящей в решение, условие $\{f\}=0$ выполняется тождественно по t, то функция f

с обеих сторон от поверхности слабого разрыва получает одинаковые приращения

$$\{df\} = 0,$$

где $df = f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ t+dt) - f(x,\ y,\ z,\ t)$, причем точки с координатами $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ и $(x,\ y,\ z)$ лежат на поверхности разрыва соответственно в моменты времени $t+dt$ и t. Используя равенство производных по направлениям, касательным к поверхности слабого разрыва, получим

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}\frac{dx}{dt} = 0,$$

где dx — расстояние, на которое передвинулся разрыв за время dt, $\frac{dx}{dt}$ — скорость движения слабого разрыва в направлении оси x, т. е. в направлении нормали. Если обозначить через a скорость движения слабого разрыва относительно жидкости

$$a = \frac{dx}{dt} - u,$$

то

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\} + u\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} = -a\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}.$$

При помощи аналогичных равенств исключим из уравнений (1.2) производные всех величин по времени:

$$\left.\begin{aligned}
-a\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial p}{\partial x}\right\} + \frac{H_y}{4\pi\rho}\left\{\frac{\partial H_y}{\partial x}\right\} + \\
+ \frac{H_z}{4\pi\rho}\left\{\frac{\partial H_z}{\partial x}\right\} = 0,\\
-a\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} - \frac{H_x}{4\pi\rho}\left\{\frac{\partial H_y}{\partial x}\right\} = 0,\\
-a\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} - \frac{H_x}{4\pi\rho}\left\{\frac{\partial H_z}{\partial x}\right\} = 0,\\
\rho\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - a\left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} = 0,\\
\frac{\gamma p}{\rho}a\left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} - a\left\{\frac{\partial p}{\partial x}\right\} = 0,\\
H_y\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - H_x\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\} - a\left\{\frac{\partial H_y}{\partial x}\right\} = 0,\\
H_z\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - H_x\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} - a\left\{\frac{\partial H_z}{\partial x}\right\} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

Таким образом, скачки производных различных функций на поверхности слабого разрыва должны удовлетворять этой системе линейных однородных алгебраических уравнений. Для того чтобы эта система имела нетривиальное решение, т. е. существовал бы нетривиальный слабый разрыв, необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю. Определитель этой системы равен

$$D(a) = a\left(a^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho}\right)\left[a^4 - a^2\left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + a_0^2\right) + \frac{H_x^2}{4\pi\rho}\,a_0^2\right] = 0,$$

где через a_0 обозначено выражение $\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$, равное скорости звука в газе при отсутствии магнитного поля. Корнями этого уравнения являются

$$\left.\begin{aligned} &a_э = 0, \quad a_A = b_x \quad \left(\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right), \\ &a_{+,-} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_0^2 + b^2 + 2a_0 b_x} \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2a_0 b_x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

и те же величины с обратным знаком.

При этих значениях a одно из уравнений (1.3) становится линейной комбинацией остальных, а из оставшихся шести уравнений можно выразить скачки производных всех величин через скачок производной одной из них.

Слабые разрывы, имеющие скорости относительно жидкости $a_э$, a_A, a_+ и a_-, называют соответственно *энтропийными*, *альфвеновскими*, *быстрыми магнитозвуковыми* и *медленными магнитозвуковыми*. Смысл этих названий будет ясен из дальнейшего.

Предположим теперь, что разрыв претерпевают не первые производные функций, входящих в решение, а производные более высокого порядка. Пусть, например, это будут производные 2-го порядка. Нетрудно убедиться, что из вторых производных разрыв могут претерпевать только производные $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Продифференцировав уравнения (1.1) по t (или по x) и вычитая полученные системы, написанные для двух точек, лежащих по обе стороны от разрыва сколь угодно близко от него, получим систему соотношений на разрыве. Эта система будет совпадать с системой (1.2), только в фигурных скобках вместо $\frac{\partial}{\partial t}$ будет

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ (или $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}$), а вместо $\frac{\partial}{\partial x}$ будет $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}$ (или $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$), т. е. скачки вторых производных. Так как первые производные непрерывны, то с обеих сторон они получают одинаковые приращения, и следовательно,

$$\left\{d\frac{\partial f}{\partial t}\right\}=0,\quad \left\{d\frac{df}{dx}\right\}=0.$$

Аналогично предыдущему получаем

$$\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right\}+\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}\right\}\frac{dx}{dt}=0,$$
$$\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}\right\}+\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial x}{\partial t}=0.$$

Это позволяет получить для скачков вторых производных систему, совпадающую с (1.3). Приравнивая нулю определитель этой системы, получим, что поверхность разрыва старших производных должна двигаться по частицам газа с одной из найденных ранее скоростей: $a_э$, a_A, $a_\perp$ или a_-.

Из равенства (1.4) следует, что при фиксированной напряженности магнитного поля скорость распространения плоских поверхностей слабого разрыва зависит от ориентации этих поверхностей.

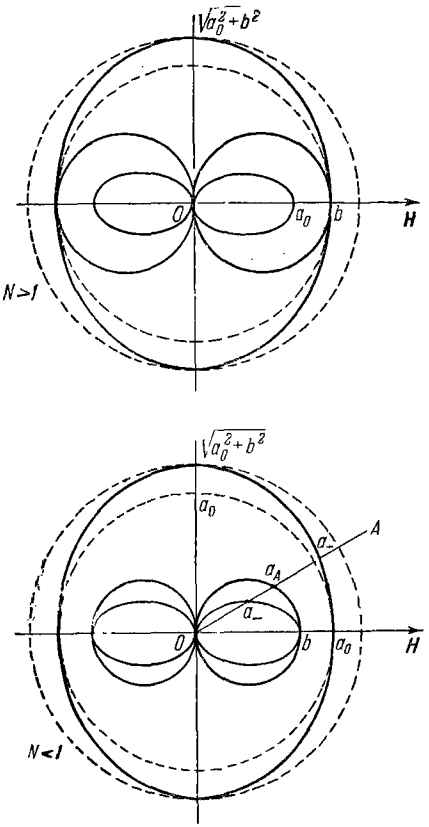


Рис. 6.

Обозначая через $\boldsymbol{n}$ нормаль к поверхности разрыва, можно переписать равенства (1.4) следующим образом:

$$a_э=0,\quad a_A=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n},$$
$$a_\pm=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a_0^2+b^2+2a_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}}\mp\sqrt{a_0^2+b^2-2a_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}}\right).\qquad(1.5)$$

Построим теперь диаграмму скоростей распространения слабых разрывов (рис. 6), откладывая вдоль лучей OA, выходящих из некоторой точки O скорости a_+, a_A, a_- распространения слабых разрывов, плоскости которых нормальны к данному лучу. Из (1.5) очевидно, что так как эта диаграмма имеет ось симметрии, параллельную вектору $\boldsymbol{b}$, тод остаточно начертить эту диаграмму в одной из плоскостей, проходящих через ось симметрии. На этой плоскости диаграмма скоростей распространения альфвеновских разрывов представляет собой две окружности радиуса $\frac{b}{2}$ с центрами на оси симметрии, касающиеся друг друга в начале координат. Установим качественный вид диаграмм скоростей распространения магнитозвуковых разрывов. Скорости этих разрывов в направлении $\boldsymbol{b}$ равны

$$\left.\begin{aligned} a_+ &= \max[a_0, b], \\ a_- &= \min[a_0, b], \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

а в направлении, перпендикулярном к $\boldsymbol{b}$, равны

$$\left.\begin{aligned} a_+ &= \sqrt{a_0^2 + b^2}, \\ a_- &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Установим теперь некоторые неравенства, которым удовлетворяют a_+ и a_-. Из равенства (1.4) получим

$$a_{+,-}^2 = \frac{1}{2}\left[a_0^2 + b^2 \pm \sqrt{(a_0^2 + b^2)^2 - 4a_0^2 b_n^2}\right], \tag{1.8}$$

или

$$a_{+,-}^2 = \frac{1}{2}\left[a_0^2 + b_\tau^2 + b_n^2 \pm \sqrt{(a_0^2 + b_\tau^2 - b_n^2)^2 + 4b_n b_\tau^2}\right], \tag{1.9}$$

где

$$b_\tau^2 = b^2 - b_n^2.$$

Если в правой части (1.8) отбросить в подкоренном выражении член $-4a_0^2 b_n^2$, то правая часть возрастет при знаке «+» и уменьшится при знаке «—». Поэтому

$$a_+^2 \leqslant a_0^2 + b^2, \quad a_-^2 \geqslant 0, \tag{1.10}$$

причем равенства имеют место только при $b_n = 0$.

Заменяя в подкоренном выражении правой части равенства (1.8) член $-4a_0^2b_n^2$ выражением $-4a_0^2b^2$, приходим к другой паре неравенств

$$a_+^2 \geqslant \max\left[a_0^2,\ b^2\right], \quad a_-^2 \leqslant \min\left[a_0^2,\ b^2\right], \tag{1.11}$$

которые обращаются в равенства при $b_\tau = 0$. Последние неравенства можно усилить. В самом деле, отбросив в подкоренном выражении равенства (1.9) член $4b_n^2b_\tau^2$, получим неравенства

$$a_+^2 \geqslant \max\left[a_0^2 + b_\tau^2,\ b_n^2\right], \quad a_-^2 \leqslant \min\left[a_0^2 + b_\tau^2,\ b_n^2\right]. \tag{1.12}$$

Из (1.10), (1.11) и (1.8) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\max\left[a_0^2 + b_\tau^2 b_n^2\right] \leqslant a_\tau^2 \leqslant a_0^2 + b^2, \\ &0 \leqslant a_-^2 \leqslant \min\left[a_0^2,\ b_n^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

Неравенства (1.9) и (1.12) и равенства (1.6) и (1.7) позволяют начертить качественно диаграмму скоростей слабых магнитозвуковых разрывов [8] (рис. 6), которая получается различной для случаев $a_0 > b$ и $a_0 < b$. Удобно ввести параметр [4] $N = \dfrac{b}{a_0}$ и различать случаи $N < 1$ и $N > 1$.

§ 2. Простые волны

Рассмотрим движение идеального бесконечно проводящего газа плоскими волнами, когда все величины зависят только от x и t. Система уравнений, описывающая такое движение, будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{8\pi\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(H_y^2 + H_z^2\right), \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{H_x}{4\pi\rho}\frac{\partial H_y}{\partial x}, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{H_x}{4\pi\rho}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\gamma p}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\gamma p}{\rho}u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H_y}{\partial t}+u\frac{\partial H_y}{\partial x}-H_x\frac{\partial v}{\partial x}+H_y\frac{\partial u}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial H_z}{\partial t}+u\frac{\partial H_z}{\partial x}-H_x\frac{\partial w}{\partial x}+H_z\frac{\partial u}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial H_x}{\partial t}+u\frac{\partial H_x}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial H_x}{\partial x}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Из последних двух уравнений следует, что $H_x = \text{const}$.

Будем разыскивать те решения этой системы, в которых все величины зависят от некоторой комбинации независимых переменных $\varphi(x, t)$ [1, 3, 5–7, 11]. Такие решения будем называть *простыми волнами* или *волнами Римана*. Характерной особенностью простых волн является то, что среди непрерывных решений только они могут граничить с невозмущенной средой, в которой все параметры постоянны [7]. При этом передний фронт простой волны является слабым разрывом и движется относительно среды с одной из скоростей $a_э$, a_A, a_+, a_-. В простых волнах для производных искомых функций получим выражения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f'\varphi'_x,\\
&\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{df}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=f'\varphi'_t.
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Функция φ, а вместе с ней и все остальные величины, остается постоянной, если

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx=0,\\
&\frac{dx}{dt}\equiv\lambda=-\frac{\varphi'_t}{\varphi'_x}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

или

Таким образом, *фаза волны* (поверхность $\varphi = \text{const}$) должна перемещаться в направлении x со скоростью $-\dfrac{\varphi'_t}{\varphi'_x}$. Рассмотрим скорость движения фазы волны относительно частиц жидкости

$$a=\frac{dx}{dt}-u. \tag{2.4}$$

Если подставить равенства (2.2), (2.3), (2.4) в систему (2.1), то для производных искомых функций получим линейную однородную систему уравнений:

$$-au' + \frac{1}{\rho} p' + \frac{H_y}{4\pi\rho} H_y' + \frac{H_z}{4\pi\rho} H_z' = 0, \tag{2.5}$$

$$-av' - \frac{H_x}{4\pi\rho} H_y' = 0, \tag{2.6}$$

$$-aw' - \frac{H_x}{4\pi\rho} H_z' = 0, \tag{2.7}$$

$$\rho u' - a\rho' = 0, \tag{2.8}$$

$$a\frac{\gamma p}{\rho}\rho' - ap' = 0, \tag{2.9}$$

$$H_y u' - H_x v' - aH_y' = 0, \tag{2.10}$$

$$H_z u' - H_x w' - aH_z' = 0. \tag{2.11}$$

Так как определитель этой системы совпадает с определителем системы (1.3), то для того, чтобы решение этой системы было нетривиальным, необходимо, чтобы a имело одно из значений $a_э$, a_A, a_+, a_-. Подставляя каждое из этих значений в систему (2.5)—(2.11) и интегрируя ее, будем получать различные решения, соответствующие разным типам простых волн. Будем рассматривать общий случай, когда все $a_э$, a_A, a_+, a_- различны. Тогда все эти величины являются однократными корнями определителя системы (2.5)—(2.11). При этом для каждого из указанных значений a одно уравнение системы (2.5)—(2.11) будет линейно зависеть от остальных. Отсюда следует, что все производные искомых функций пропорциональны одной из них, причем коэффициенты пропорциональности зависят от искомых функций u, v, w, p, ρ, H_y, H_z и от H_x=const. Если проинтегрировать систему уравнений, то получим, что в волне каждого типа все искомые функции выражаются через одну из них, которую можно принять за $\varphi(x, t)$. Зависимость этой функции от x и t будет определяться начальными или граничными условиями. Если все решение выражено, например, через ρ, то

$$-\frac{\varphi_t'}{\varphi_x'}\bigg|_{\rho=\text{const}} = a(\rho)\big|_{\rho=\text{const}} + u(\rho)\big|_{\rho=\text{const}} = \frac{dx}{dt}.$$

Отсюда

$$x = [a(\rho) + u(\rho)]\, t + f(\rho), \tag{2.12}$$

где $f(\rho)$ — произвольная функция, которая определяется по начальному распределению плотности $\rho(x, 0)$.

Рассмотрим теперь различные типы простых волн.

1. $a = a_э = 0$. В этом случае из уравнений (2.7), (2.6), (2.5) следует

$$H_z' = H_y' = p' = 0,$$

а из уравнений (2.8), (2.10), (2.11) имеем

$$u' = v' = w' = 0.$$

Отсюда

$$p = \text{const}, \quad \boldsymbol{H} = \text{const}, \quad \boldsymbol{v} = \text{const}. \tag{2.13}$$

Таким образом, в волне данного типа может изменяться только функция ρ, которая в этом решении является произвольной функцией. Полученная волна носит название *энтропийной*, так как изменение ρ при неизменном p связано с изменением энтропии. Эта волна может перемещаться в пространстве только вместе с частицами. Так как $u = \text{const}$, то все фазы перемещаются с одной скоростью, и профиль волны не деформируется.

Заметим теперь, что если $a \neq 0$, то из (2.9) следует

$$p' = \frac{\gamma p}{\rho}\rho' = a_0^2\rho' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho'. \tag{2.14}$$

Так как вообще $dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) ds$, то из (2.14) следует, что $ds = 0$ или $s = \text{const}$. Таким образом, все простые волны с $a \neq 0$ представляют собой изоэнтропические течения, и мы можем понизить порядок системы, подставив выражение (2.14) в (2.5).

2. $a = a_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}$. Из уравнений (2.6) и (2.7) в этом случае получим

$$\left.\begin{aligned} v' + \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} H_y' = 0, \\ w' + \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} H_z' = 0. \end{aligned}\right\}$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что

$$u' = 0.$$

С учетом предыдущего уравнения (2.8), (2.9) и (2.5) соответственно дают:

$$\rho' = 0, \quad p' = 0, \quad H_y H_y' + H_z H_z' = 0.$$

Интегрируя систему получившихся соотношений, найдем:

$$\left.\begin{aligned} &u = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad p = \text{const}, \\ &H_\tau^2 = H_y^2 + H_z^2 = \text{const}, \quad \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\boldsymbol{H} + \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

Очевидно, что решение (2.15) содержит одну произвольную скалярную функцию, за которую можно принять угол θ поворота вектора $\boldsymbol{H}_\tau = \boldsymbol{e}_y H_y + \boldsymbol{e}_z H_z$ относительно начального положения. Тогда $H_y = H_\tau \cos\theta$, $H_z = H_\tau \sin\theta$, причем $H_\tau = \text{const}$. Выбором скорости движения системы координат можно добиться того, чтобы решение имело вид

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

В этой системе координат

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) = 0,$$

следовательно, $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0$, т. е. движение стационарно. В такой волне касательные составляющие векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ поворачиваются, не изменяя своей величины. Такие волны называются *вращательными* или *альфвеновскими простыми волнами*. Во вращательной простой волне $u = \text{const}$, $a_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}} = \text{const}$ и, следовательно, все фазы этой волны перемещаются с одинаковыми скоростями $u + a_A$ и профиль волны не деформируется. При этом θ является произвольной функцией от $x - (a_A + u)t$:

$$\theta = \theta[x - (a_A + u)t].$$

Если θ представляет собой разрывную функцию, то вместе с θ претерпевают разрыв также $\boldsymbol{H}_\tau$ и $\boldsymbol{v}_\tau$. Такой разрыв называется вращательным.

3. $a = a_{+,-}$. Выберем систему координат так, чтобы в некоторой произвольно выбранной точке выполнялись условия: $w = 0$ и $H_z = 0$. Тогда из (2.7) и (2.11) следует, что если $a^2 \neq \frac{H_x^2}{4\pi\rho}$, то $H_z' = w' = 0$, т. е. приращения векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ лежат в плоскости (x, y). Очевидно, что и сами векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ всюду лежат в этой плоскости ($H_z \equiv 0$, $w \equiv 0$). При этом система уравнений упрощается и принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} -au' + \frac{a_0^2}{\rho}\rho' + \frac{H_y}{4\pi\rho}H_y' &= 0, \\ -av' - \frac{H_x}{4\pi\rho}H_y' &= 0, \\ \rho u' - a\rho' &= 0, \\ H_y u' - H_x v' - aH_y' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Очевидно, что $a_{+,-}$ является корнями определителя этой системы уравнений. Из дальнейшего будет видно, что при подстановке $a = a_{+,-}$ первые три уравнения будут линейно независимыми. Следовательно, последнее уравнение можно отбросить.

Приняв ρ за независимое переменное, можно привести первые три уравнения системы (2.16) к следующему виду:

$$\frac{dH_y^2}{d\rho} = 8\pi\left(a_{+,-}^2 - a_0^2\right), \tag{2.17}$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{a_{+,-}}{\rho}, \tag{2.18}$$

$$\frac{dv}{dH_y} = -\frac{H_x}{4\pi\rho a_{+,-}} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{d\rho} = -\frac{H_x\left(a_{+,-}^2 - a_0^2\right)}{\rho a_{+,-} H_y}. \tag{2.19}$$

Уравнения (2.17), (2.18) и (2.19) представляют собой полную систему уравнений, связывающую изменение величин в быстрой и медленной простых волнах (так мы будем называть волны, распространяющиеся соответственно со скоростями $a = a_+$ и $a = a_-$). Так как $a_{+,-}$ зависит только от ρ и H_y, то очевидно, что достаточно проинтегрировать уравнение (2.17), чтобы отыскание остальных величин свелось к вычислению квадратур. Подставляя в (2.17) выражения (1.4) для $a_{+,-}$,

получим [5]

$$\frac{dH_y^2}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\left[H_x^2 + H_y^2 - 4\pi a_0^2\rho \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{(4\pi a_0^2\rho + H_x^2 + H_y^2)^2 - 16\pi a_0^2\rho H_x^2}\right] \equiv f_{+,-}. \quad (2.20)$$

Из уравнения (2.17) и неравенств (1.13) следует, что $f_+ \geqslant 0$, $f_- \leqslant 0$, причем равенства могут иметь место только при $H_y = 0$. Следовательно, в быстрой простой волне H_y^2 при увеличении ρ растет, а в медленной — убывает.

Рассмотрим поведение функций $f_{+,-}$ при $H_y^2 \to 0$. Если $H_y = 0$, то подкоренное выражение в равенстве (2.20) равно $(4\pi\rho a_0^2 - H_x^2)^2$. Так как корень берется арифметический, то он равен $|4\pi\rho a_0^2 - H_x^2|$. При этом если $H_y = 0$ и $4\pi\rho a_0^2 > H_x^2$, то

$$\left.\begin{aligned} f_+ &= 0, \\ f_- &= \frac{2}{\rho}(H_x^2 - 4\pi\rho a_0^2) < 0, \end{aligned}\right\}$$

если $H_y = 0$ и $4\pi\rho a_0^2 < H_x^2$, то

$$\left.\begin{aligned} f_+ &= \frac{2}{\rho}(H_x^2 - 4\pi\rho a_0^2) > 0, \\ f_- &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Будем считать, что ρa_0^2 — возрастающая функция ρ. Тогда если $\rho > \rho_*$, то имеет место первый случай, если $\rho < \rho_*$, то имеет место второй случай (ρ_* определяется из равенства $4\pi\rho_* a_0^2(\rho_*) = H_x^2$).

Пусть теперь $\rho \to 0$. Тогда если $a_0\rho \to 0$, то $f_+ \to \infty$,

$$f_- \to \frac{1}{\rho}\left[-8\pi\rho a_0^2 + \frac{8\pi a_0^2\rho H_x^2}{H_x^2 + H_y^2}\right] = -\frac{8\pi a_0^2 H_y^2}{H_x^2 + H_y^2}.$$

Если $a_0(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, то $f_- \to 0$.

Рассмотренные свойства функций $f_{+,-}$ позволяют качественно представить картину интегральных кривых уравнений (2.20) (рис. 7). Рассмотрим теперь поведение интегральных кривых уравнения (2.20) вдали от начала координат, когда выполняется хотя бы одно из неравенств $H_y^2 \gg H_x^2$ или

$4\pi\rho a_0^2 \gg H_x^2$ (последнее неравенство можно считать эквивалентным неравенству $\rho \gg \rho_*$, или $p \gg H_x^2$). В этом случае

$$f_+ = \frac{2H_y^2}{\rho}, \quad f_- = -8\pi a_0^2, \tag{2.21}$$

и интеграция уравнения (2.20) даст для быстрой волны

$$H_y = b\rho, \quad \text{где } b = \text{const}, \tag{2.22}$$

а для медленной волны —

$$p + \frac{H_y^2}{8\pi} = \text{const}, \tag{2.23}$$

так как $p = \int a_0^2 d\rho$.

Равенство (2.22) имеет вид интеграла вмороженности компоненты H_y, а равенство (2.23) выражает постоянство

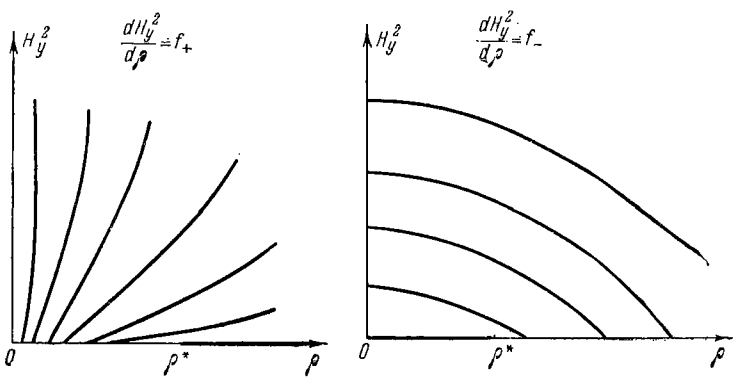


Рис. 7.

полного давления для этой же компоненты магнитного поля. Чтобы представить качественное поведение функций $u(\rho)$ и $v(\rho)$ в простых волнах, достаточно заметить, что знак приращения u совпадает со знаком приращения ρ, а знак приращения v противоположен знаку приращения H_y (уравнения (2.18) и (2.19)).

Особый интерес представляют простые волны в совершенном газе, когда $p = C\rho^\gamma$ и $a_0^2 = C\gamma\rho^{\gamma-1}$.

Введем безразмерные переменные согласно равенствам:

$$R=\frac{\rho}{\rho_*},\quad U=\frac{\sqrt{4\pi\rho_*}}{H_x}u,\quad V=\frac{\sqrt{4\pi\rho_*}}{H_x}v,\quad h=\frac{H_y}{H_x},$$

$$A_{+,-}=\frac{\sqrt{4\pi\rho_*}}{H_x}a_{+,-}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{R^{\gamma-1}+\frac{1+h^2}{R}+2R^{\frac{\gamma}{2}-1}}\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{R^{\gamma-1}+\frac{1+h^2}{R}-2R^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right),$$

где ρ_* определяется из условия $4\pi\gamma C\rho_*^{\gamma}=H_x^2$. Тогда уравнения (2.17), (2.18) и (2.19) можно привести к системе

$$\frac{dh^2}{dR}=2A_{+,-}^2-2R^{\gamma-1}\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{R}\left[1+h^2-R^{\gamma}\pm\sqrt{(1+h^2+R^{\gamma})^2-4R^{\gamma}}\right],\qquad(2.24)$$

$$\frac{dU}{dR}=\frac{A_{+,-}}{R},\qquad(2.25)$$

$$\frac{dV}{dR}=-\frac{1}{RA_{+,-}}\frac{A_{+,-}^2-R^{\gamma-1}}{h},\qquad(2.26)$$

не содержащей никаких параметров, кроме γ. Таким образом, поле интегральных кривых системы (2.24)—(2.26), описывающей простые волны в совершенном газе, зависит только от γ.

Рассмотрим, как изменяется профиль простой волны с течением времени. Скорость движения фазы равна

$$\lambda_{+,-}(\rho)=u(\rho)+a_{+,-}(\rho).$$

Покажем, что

$$\frac{d\lambda_{+,-}}{d\rho}>0,\qquad(2.27)$$

если

$$\frac{da_0}{d\rho}+\frac{a_0}{\rho}>0\quad\text{или}\quad\frac{d(a_0\rho)}{d\rho}>0.\qquad(2.28)$$

В самом деле, используя уравнение неразрывности, получим

$$\frac{d\lambda_{+,-}}{d\rho}=\frac{du}{d\rho}+\frac{da_{+,-}}{d\rho}=\frac{a_{+,-}}{\rho}+\frac{da_{+,-}}{d\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho a_{+,-})}{d\rho},$$

причем

$$\rho a_{+,-} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a_0\rho)^2 + (b\rho)^2 + 2a_0\rho b\rho\cos\alpha} \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{(a_0\rho)^2 + (b\rho)^2 - 2a_0\rho b\rho\cos\alpha}\right), \quad (2.29)$$

где α — угол между направлением магнитного поля и осью x, который для определенности будем считать острым. Как видно из формулы (2.29), величины ρa_+ и ρa_- представляют собой соответственно полусумму и полуразность сторон параллелограмма с диагоналями l_1 и l_2 длины $l_1 = a_0\rho$ и $l_2 = b\rho$, составляющих между собой угол α (рис. 8). Значит,

$$\rho a_+ = \frac{1}{2}(L_1 + L_2), \quad \rho a_- = \frac{1}{2}(L_1 - L_2),$$

где L_1 и L_2 — длины сторон BC и CD этого параллелограмма. Пусть в простой волне плотность увеличилась на $\Delta\rho$.

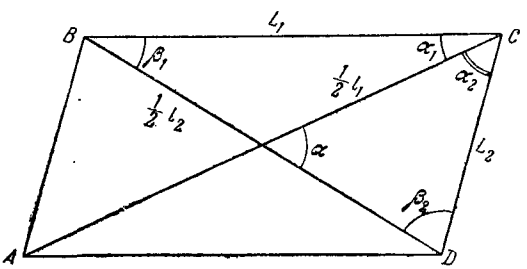


Рис. 8.

При этом из (2.28) и равенства $b\rho = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\rho}$ следует, что длина обеих диагоналей увеличится. Если рассматриваемая волна является быстрой, то происходит увеличение α; в медленной волне α уменьшается. Изменение величин ρa_+ и ρa_- при бесконечно малом изменении плотности можно представить в виде

$$d(\rho a_+) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial L_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial L_2}{\partial\alpha}\right)d\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial L_1}{\partial l_1} + \frac{\partial L_2}{\partial l_1}\right)dl_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial l_2} + \frac{\partial L_2}{\partial l_2}\right)dl_2\right],$$
$$d(\rho a_-) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial L_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial L_2}{\partial\alpha}\right)d\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial L_1}{\partial l_1} - \frac{\partial L_2}{\partial l_1}\right)dl_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial l_2} - \frac{\partial L_2}{\partial l_2}\right)dl_2\right],$$

причем, согласно предыдущему, в первом равенстве необходимо считать $d\alpha > 0$, а во втором $d\alpha < 0$. Частные производные по α, l_1 и l_2 берутся при фиксированных значениях двух из этих переменных. Из геометрических соображений легко получить следующие выражения для входящих в эти равенства производных:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} l_1 \sin \alpha_1 = -\frac{1}{2} l_2 \sin \beta_1, \quad \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha_2 = \frac{1}{2} l_2 \sin \beta_2,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial l_1} = \frac{1}{2} \cos \alpha_1, \qquad \frac{\partial L_2}{\partial l_1} = \frac{1}{2} \cos \alpha_2,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial l_2} = \frac{1}{2} \cos \beta_1, \qquad \frac{\partial L_2}{\partial l_2} = \frac{1}{2} \cos \beta_2,$$

причем $\alpha_1 < \alpha_2 < \pi - \alpha_1$ и $\beta_1 < \beta_2 < \pi - \beta_1$.

Так как $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ и $\beta_1 < \frac{\pi}{2}$, то

$$\left| \frac{\partial L_1}{\partial \alpha} \right| < \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} > 0,$$

$$\left| \frac{\partial L_2}{\partial l_1} \right| < \frac{\partial L_1}{\partial l_1} > 0,$$

$$\left| \frac{\partial L_2}{\partial l_2} \right| < \frac{\partial L_1}{\partial l_2} > 0.$$

Отсюда следует, что при $d\rho > 0$ имеют место следующие неравенства:

$$d(\rho a_+) > 0 \quad \text{и} \quad d(\rho a_-) > 0.$$

Таким образом, справедливость неравенств (2.27) доказана.

В газодинамической простой волне ($H = 0$) имеет место соотношение

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{a_0}{\rho},$$

и, следовательно, условие (2.28) запишется в виде

$$\frac{da_0}{d\rho} + \frac{a_0}{\rho} = \frac{d}{d\rho}(a_0 + u) = \frac{d\lambda_0}{d\rho} > 0,$$

где $\lambda_0 = a_0 + u$ — скорость движения фазы в простой волне при $H = 0$.

Если $\frac{d\lambda}{d\rho} > 0$, то более плотные части простой волны движутся быстрее менее плотных. Таким образом, неравенства

(2.27) и (2.28) означают, что в средах, в которых при отсутствии магнитного поля более плотные части простых волн движутся быстрее менее плотных, это свойство простых волн сохранится и при наличии магнитного поля. При этом фронт волны сжатия становится все круче и круче, пока не образуется сильный разрыв, а фронт волны разрежения становится все более и более пологим (рис. 9).

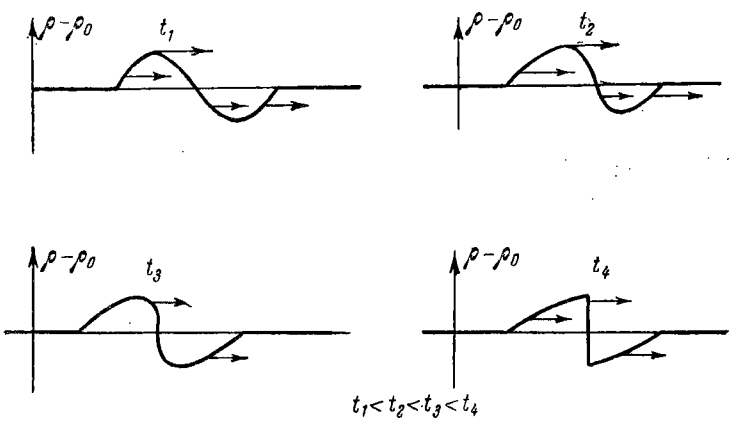


Рис. 9.

Система (2.17) — (2.29) может быть проинтегрирована в квадратурах, если в качестве новой переменной ввести $q = \frac{a_{+,-}}{a_A}$ [11]. Однако это решение не упрощает качественного исследования поля интегральных кривых.

§ 3. Малые возмущения

Если считать, что отклонения всех величин от некоторого равновесного состояния $v_0 = 0$, p_0, ρ_0, $\boldsymbol{H}_0 (\boldsymbol{H}_{z0} = 0)$ малы, то простые волны обращаются в малые возмущения, распространяющиеся по покоящемуся газу [9, 10, 12, 13]. В этом случае для каждого типа волн можно написать конечные соотношения, связывающие искомые величины. Отклонения величин от равновесного состояния будем обозначать через $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{v}$, ρ и p и квадратами этих величин по отноше-

нию к ним самим будем пренебрегать. Рассмотрим различные типы малых возмущений, являющиеся пределом соответствующих простых волн.

1. Энтропийная волна ($a = a_э$). Так как $v_0 = 0$ и $a_э = 0$, то эта волна не распространяется в пространстве и представляет собой произвольное малое отклонение в распределении энтропии от значения энтропии в равновесном состоянии. В энтропийной волне

$$h = v = 0, \quad p = 0, \quad \rho = \rho(x), \tag{3.1}$$

где $\rho(x)$ — произвольная функция.

2. Вращательная или альфвеновская волна ($a = a_A$). Так как в простых волнах этого типа плотность и давление непрерывны, то и в малых возмущениях этого типа имеем

$$h_x = p = \rho = 0, \quad a_A = \frac{H_{x0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \tag{3.2}$$

Кроме того, из равенств (2.15) при $H_{z0} = 0$, $v_0 = 0$ получим для случая малых возмущений:

$$\left.\begin{aligned} &h_y = 0, \quad v = u = 0, \\ &h_z = h_z(x + a_A t), \quad w = \frac{h_z}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

где $h_z(x + a_A t)$ — произвольная функция.

3. Быстрая и медленная магнитозвуковые волны ($a = a_{+,-}$). В линейной теории скорость распространения фазы волны будет совпадать со скоростью звука, вычисленной по невозмущенному состоянию

$$\lambda^2_{+,-} = a^2_{+,-} = \frac{1}{2}\left(a_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \pm \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\right)^2 - \frac{a_0^2 H_{x0}^2}{\pi\rho}}\right). \tag{3.4}$$

Эта величина является постоянной для всех точек профиля волны, поэтому в рамках линейной теории профиль звуковой волны не меняется с течением времени.

Из уравнений (2.17) — (2.19) получим следующие выражения, связывающие величины в быстрой и медленной

магнитозвуковых волнах:

$$\left.\begin{aligned} h_y &= \frac{4\pi\left(a_{+,-}^2 - a_0^2\right)}{H_{y0}}\rho, \\ u &= \frac{a_{+,-}}{\rho_0}\rho, \\ v &= -\frac{H_{x0}\left(a_{+,-}^2 - a_0^2\right)}{\rho_0 a_{+,-} H_{y0}}\rho, \\ h_x &= h_z = 0, \\ w &= 0, \\ p &= a_0^2\rho. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Равенства (3.3) и (3.5) справедливы для волн, распространяющихся в положительном направлении оси x. Связь величин в волнах, движущихся в противоположном направлении, получается путем замены в равенствах (3.3) и (3.5) h_z на $-h_z$ и $a_{+,-}$ на $-a_{+,-}$. В дальнейшем, кроме соотношений (3.5), будет использоваться соотношение

$$a_{+,-}h_y = -H_{x0}v + H_{y0}u. \tag{3.6}$$

Это соотношение в рамках линейной теории является интегралом последнего уравнения (2.16) и поэтому представляет собой линейную комбинацию из соотношений (3.5), что можно проверить и непосредственно. Уравнения (3.5), (3.6) можно преобразовать к виду

$$\left.\begin{aligned} u\left(a_{+,-} - \frac{a_0^2}{a_{+,-}}\right) &= \frac{H_{y0}}{4\pi\rho_0}h_y, \quad -a_{+,-}v = \frac{H_{x0}}{4\pi\rho_0}h_y, \\ -a_{+,-}h_y &= H_{x0}v - H_{y0}u, \quad u = \frac{a_{+,-}}{\rho_0}\rho. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Чтобы наглядно представить себе изменение скорости в каждой из этих волн, проделаем некоторое геометрическое построение [15]. Для этого сделаем некоторые предварительные преобразования

$$\begin{aligned} a_{+,-}^2 &= \frac{1}{2}\left(a_0^2 + b^2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_0^4 + b^4 + 2a_0^2b^2 - 4a_0^2b_x^2} = \\ &= \frac{1}{2}\left(a_0^2 + b^2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_0^4 + b^4 + 2a_0^2b^2\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)} = \\ &= \frac{1}{2}\left(a_0^2 + b^2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_0^4 + b^4 - 2a_0^2b^2\cos 2\alpha}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}$, $b_x=b\cos\alpha$. Кроме того, исключая h_y из первого и третьего равенств (3.7), получим

$$u\left(a_{+,-}-\frac{a_0}{a_{+,-}}\right)=\frac{H_{y0}}{4\pi\rho_0}\,\frac{H_{y0}u-H_{x0}v}{a_{+,-}},$$

или

$$u\left(a_{+,-}^2-a_0^2-b^2\sin^2\alpha\right)=-b^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot v.$$

Исключая h_y из второго и третьего равенств (3.7), получим

$$a_{+,-}^2 v=\frac{H_{x0}}{4\pi\rho_0}(H_{x0}v-H_{y0}u),$$

или

$$\left(a_{+,-}^2-b^2\cos^2\alpha\right)v=-b^2\cos\alpha\sin\alpha\cdot u.$$

Составим отношение

$$\operatorname{tg}^2\psi_{+,-}\equiv\frac{v^2}{u^2}=\frac{\left(a_{+,-}^2-a_0^2-b^2\sin^2\alpha\right)}{a_{+,-}^2-b^2\cos^2\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\cos 2\psi_{+,-}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\psi_{+,-}}{1+\operatorname{tg}^2\psi_{+,-}}=$$

$$=\frac{a_0^2-b^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}{2a_{+,-}^2-a_0^2-b^2}=\frac{a_0^2-b^2\cos 2\alpha}{\pm\sqrt{a_0^4+b^4-2a_0^2b^2\cos 2\alpha}}.$$

Пусть OG и Ox (рис. 10) представляют соответственно направление поля $\boldsymbol{H}_0$ в невозмущенном состоянии и направление распространения волны. Отложим на Ox отрезок $OB=\frac{b^2}{2}$ и отрезок $BA=\frac{a_0^2}{2}$. Построим равнобедренный треугольник OBE и соединим точки A и E. Тогда

$$OA=\frac{1}{2}(a_0^2+b^2)\quad\text{и}\quad AE=\frac{1}{2}\sqrt{a_0^4+b^4-2a_0^2b^2\cos 2\alpha}.$$

Если теперь из точки A провести окружность радиуса AE, то точки пересечения прямой Ox и этой окружности определяют на прямой Ox отрезки $OM=a_-^2$ и $OK=a_+^2$. Отрезок $OD\,(ED\perp Ox)$, равный $b^2\cos^2\alpha$, соответствует квадрату

скорости распространения альфвеновской звуковой волны. На рис. 10 непосредственно видно, что

$$a_- \leqslant a_A \leqslant a_+.$$

Так как $AD = \frac{1}{2}(a_0^2 - b^2\cos 2\alpha)$, $AE = \sqrt{a_0^4 + b^4 - 2a_0^2b^2\cos^2\alpha}$, то

$$\angle OAE = 2\psi_+, \quad \text{а} \quad \angle KAE = 2\psi_-,$$

отсюда $\angle AKE = \psi_+$, а $\angle AME = \psi_-$. Таким образом,

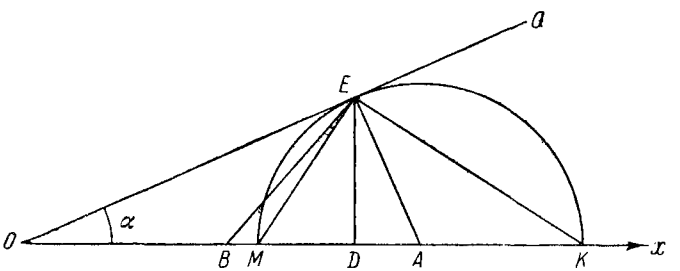


Рис. 10.

быстрая и медленная магнитозвуковые волны различаются тем, что изменение скорости в них происходит во взаимно

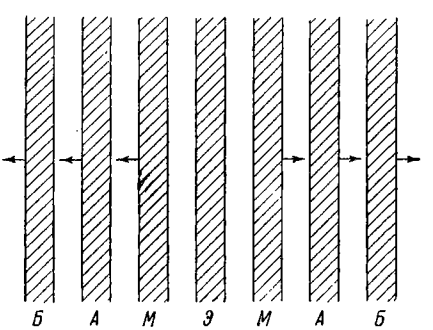


Рис. 11.

перпендикулярных направлениях ($\angle KEM = \frac{\pi}{2}$ как вписанный и опирающийся на диаметр окружности).

Волны малой амплитуды могут быть использованы для построения решения задачи Коши. Пусть в момент $t=0$ заданы начальные данные. Будем считать, что все величины при $t=0$ являются функциями только x, и вне некоторого интервала значений x эти функции принимают постоянное значение. Кроме того, будем считать, что отклонения всех функций от этих постоянных значений малы, так что можно пользоваться линейной теорией. Решение уравнений, соответствующее заданным начальным условиям, можно представить в виде суперпозиции различного типа волн, движущихся в обе стороны.

По прошествии достаточно большого времени волны разойдутся и возмущенная область будет иметь вид, представленный на рис. 11, где заштрихованные области соответствуют быстрым, альфвеновским, медленным и энтропийной волнам, обозначенным буквами *Б*, *А*, *М*, *Э*. Незаштрихованные участки соответствуют невозмущенному состоянию.

ГЛАВА IV

ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА В ИДЕАЛЬНОМ[1]) ГАЗЕ

§ 1. Классификация поверхностей сильного разрыва

В предыдущей главе было показано, что простые волны сжатия с течением времени превращаются в сильные разрывы. Разрывы являются необходимым элементом течения и во многих других случаях движений идеального газа. В связи с этим представляет интерес исследование свойств магнитогидродинамических разрывов. Для изучения этих свойств обратимся к полученным ранее соотношениям, которые должны выполняться на поверхности сильного разрыва. Для идеального газа эти соотношения имеют вид:

$$\left.\begin{gathered}\{H_n\}=\{\boldsymbol{E}_\tau\}=0, \quad \{\rho v_n\}=0, \quad \{p\boldsymbol{n}+\rho\boldsymbol{v}v_n-T_{ik}n_k\boldsymbol{e}_i\}=0, \\ \left\{\rho\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)v_n+pv_n+\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_n\right\}=0,\end{gathered}\right\} \tag{1.1}$$

причем

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}, \quad T_{ik}=\frac{1}{4\pi}H_iH_k-\frac{1}{8\pi}H^2\delta_{ik}.$$

Преобразуем некоторые входящие сюда члены:

$$T_{ik}n_k\boldsymbol{e}_i=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}H_n-\frac{\boldsymbol{n}H^2}{8\pi}=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}_\tau H_n+\frac{H_n^2}{8\pi}\boldsymbol{n}-\frac{H_\tau^2}{8\pi}\boldsymbol{n}.$$

$$\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_n=-\frac{1}{4\pi}[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}]\cdot\boldsymbol{n}=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}[H_n(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H})-H^2v_n]=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}[H_n(v_nH_n+\boldsymbol{H}_\tau\cdot\boldsymbol{v}_\tau)-(H_n^2+H_\tau^2)v_n]=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}[H_n(\boldsymbol{H}_\tau\cdot\boldsymbol{v}_\tau)-H_\tau^2v_n].$$

[1]) См. сноску на стр. 82.

Соотношение

$$\{E_\tau\} = -\frac{1}{c}\{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})_\tau\} = 0$$

равносильно следующему:

$$\{H_n\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{H}_\tau v_n\} = 0.$$

Подставляя полученные выражения в (1.1) и проектируя векторные соотношения на нормаль и касательную плоскость к поверхности разрыва, получим следующие условия, которые должны быть выполнены на поверхности магнитогидродинамических разрывов

$$H_{n1} = H_{n2} \equiv H_n, \tag{1.2}$$

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} \equiv m, \tag{1.3}$$

$$H_n\{\boldsymbol{v}_\tau\} = \{\boldsymbol{H}_\tau v_n\}, \tag{1.4}$$

$$\left\{p + \rho v_n^2 + \frac{H_\tau^2}{8\pi}\right\} = 0, \tag{1.5}$$

$$\left\{\rho v_n \boldsymbol{v}_\tau - \frac{H_n}{4\pi}\boldsymbol{H}_\tau\right\} = 0, \tag{1.6}$$

$$\left\{\rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)v_n + pv_n + \frac{1}{4\pi}H_\tau^2 v_n - \frac{H_n}{4\pi}(\boldsymbol{H}_\tau\cdot\boldsymbol{v}_\tau)\right\} = 0. \tag{1.7}$$

Соотношения (1.2) — (1.7), как будет видно из дальнейшего, могут описывать поверхности разрыва различных типов [6, 8, 11, 13].

Прежде всего рассмотрим поверхности разрыва, через которые отсутствует поток вещества ($m = 0$). На таких разрывах должны выполняться следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} H_n\{\boldsymbol{v}_\tau\} &= 0, \\ \{p\} &= -\frac{1}{8\pi}\{H_\tau^2\}, \\ H_n\{\boldsymbol{H}_\tau\} = 0, \quad & H_n\{\boldsymbol{H}_\tau\cdot\boldsymbol{v}_\tau\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Из этих соотношений видно, что возможны два типа подобных разрывов. Если вектор напряженности магнитного поля параллелен поверхности разрыва ($H_n = 0$), то скорость и магнитное поле с обеих сторон разрыва параллельны

поверхности разрыва и испытывают произвольные скачки. Произвольный скачок испытывает также плотность, скачок давления же связан со скачком поля. Такая поверхность разрыва есть поверхность раздела двух жидкостей с разными термодинамическими параметрами, которые двигаются друг относительно друга с некоторой скоростью, параллельной поверхности раздела. Поэтому, по аналогии с обычной газодинамикой, такой разрыв называют *тангенциальным*. Если же напряженность магнитного поля составляет некоторый угол с поверхностью разрыва ($H_n \neq 0$), то на поверхности разрыва скорость, магнитное поле, а также давление непрерывны. Плотность и другие термодинамические параметры, за исключением давления, могут испытывать произвольный разрыв. Такой разрыв называют *контактным*.

Если через поверхность разрыва существует поток массы ($m \neq 0$), то параметры потока и поля с обеих сторон такого разрыва должны быть связаны соотношениями (1.2) — (1.7). Прежде всего заметим, что среди этих поверхностей разрыва должны содержаться вращательные разрывы, полученные нами ранее как предел вращательной волны Римана. На вращательном разрыве

$$m \neq 0, \quad \{v_n\} = \{V\} = 0,$$

где $V = \frac{1}{\rho}$ — удельный объем.

Рассмотрим все возможные поверхности разрыва, обладающие этим свойством. Из соотношений (1.4) и (1.6) находим, что

$$m = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi V}} \quad \text{или} \quad v_n = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

т. е. все поверхности разрыва, обладающие тем свойством, что $m \neq 0$, $\{V\} = 0$, распространяются по частицам жидкости со скоростью вращательного разрыва. Оставшиеся соотношения на разрыве дают:

$$\{\boldsymbol{v}_\tau\} - \sqrt{\frac{V}{4\pi}}\{\boldsymbol{H}_\tau\} = 0, \quad \left\{p + \frac{1}{8\pi}H_\tau^2\right\} = 0,$$

$$\{\varepsilon\} + V\left\{p + \frac{H_\tau^2}{8\pi}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\boldsymbol{v}_\tau - \sqrt{\frac{V}{4\pi}}\cdot\boldsymbol{H}_\tau\right)^2\right\} = \{\varepsilon\} = 0.$$

Так как $\{V\}=0$ и $\{\varepsilon\}=0$, то на этом разрыве непрерывны все термодинамические параметры. В частности, $\{p\}=0$, откуда следует, что $\{H_\tau^2\}=0$, т. е. модуль вектора H непрерывен при переходе через разрыв. В системе координат, движущейся относительно исходной системы со скоростью $\boldsymbol{v}_\tau - \sqrt{V}\boldsymbol{H}_\tau/\sqrt{4\pi}$, векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ параллельны с обеих сторон разрыва и поворачиваются вокруг нормали. Все эти свойства совпадают со свойствами вращательных разрывов. Таким образом, при $m \neq 0$, $\{V\}=0$ не существует других разрывов, кроме вращательных.

Теперь, для того чтобы исчерпать все возможные поверхности разрыва, описываемые (1.2)—(1.7), необходимо рассмотреть поверхности разрыва, на которых

$$m \neq 0, \quad \{V\} \neq 0.$$

Такие поверхности разрыва называются *ударными волнами*.

Отметим, что при любой скорости набегающего потока можно выбрать движущуюся систему координат так, чтобы движение было плоским и с обеих сторон от ударной волны. Действительно, из (1.4) и (1.6) следует, что векторы $\boldsymbol{H}_{\tau 1}V_1 - \boldsymbol{H}_{\tau 2}V_2$ и $\boldsymbol{H}_{\tau 1} - \boldsymbol{H}_{\tau 2}$ параллельны одному и тому же вектору $\{\boldsymbol{v}_\tau\}$. Так как в ударных волнах $V_1 \neq V_2$, то отсюда следует, что $\boldsymbol{H}_{\tau 2}$ и $\{\boldsymbol{v}_\tau\}$ параллельны $\boldsymbol{H}_{\tau 1}$. Если выбрать движущуюся систему координат так, чтобы вектор скорости $\boldsymbol{v}_1$ лежал в плоскости, проходящей через $\boldsymbol{H}_{\tau 1}$ и нормаль к поверхности разрыва, то в этой плоскости будут лежать также $\boldsymbol{H}_2$ и $\boldsymbol{v}_2$. В дальнейшем при изучении ударных волн будем пользоваться такими системами координат.

Кроме того, выбором системы координат можно добиться того, чтобы векторы скорости и напряженности магнитного поля были параллельны между собой перед и за ударной волной. Действительно, выбором скорости системы координат в направлении касательной составляющей магнитного поля можно сделать векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{H}_1$ параллельными. При этом из условия (1.4) следует, что

$$\left\{\left(\frac{v_\tau}{v_n} - \frac{H_\tau}{H_n}\right)\boldsymbol{v}_n\right\} = 0,$$

т. е. векторы $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{H}_2$ тоже параллельны.

Приступая к исследованию ударных волн, докажем, что в магнитной гидродинамике при обычных предположениях относительно термодинамических свойств газа $\left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s < 0, \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p > 0, \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0\right]$ энтропия может возрастать только в волнах сжатия [3, 9]. Для этого прежде всего исключим $\{v_\tau\}$ из соотношений (1.4) и (1.6), которые в выбранной системе координат являются скалярными:

$$m^2 \{VH_\tau\} = \frac{H_n^2}{4\pi} \{H_\tau\}. \tag{1.9}$$

Из равенства (1.5) следует, что

$$m^2 = -\frac{\{p\} + \frac{1}{8\pi}\{H_\tau^2\}}{\{V\}}. \tag{1.10}$$

Равенство (1.6) можно переписать в виде

$$\left\{v_\tau - \frac{H_n}{4\pi m} H_\tau\right\} = 0. \tag{1.11}$$

Соотношение (1.7) преобразуем следующим образом:

$$\{\varepsilon\} + \{pV\} + \frac{m^2}{2}\{V^2\} + \frac{1}{2}\left\{\left(v_\tau - \frac{H_n}{4\pi m} H_\tau\right)^2\right\} + \\ + \frac{1}{4\pi}\{VH_\tau^2\} - \frac{H_n^2}{32\pi^2 m^2}\{H_\tau^2\} = 0.$$

Подставляя сюда в третий член m^2 из (1.10), а в последний — из (1.9) и воспользовавшись (1.11), получим

$$\{\varepsilon\} + \{pV\} - \frac{1}{2}\frac{\{p\} + \{H_\tau^2\}/8\pi}{\{V\}}\{V^2\} + \frac{1}{4\pi}\{VH_\tau^2\} - \\ - \frac{1}{8\pi}\frac{\{H_\tau^2\}\{VH_\tau\}}{\{H_\tau\}} = 0.$$

Сделав приведение подобных членов, получим

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \frac{p_2 + p_1}{2}(V_2 - V_1) + \frac{1}{16\pi}(V_2 - V_1)(H_{\tau 2} - H_{\tau 1})^2 = 0. \tag{1.12}$$

Соотношение (1.12) отличается от уравнения адиабаты Гюгонио в обычной газовой динамике только последним членом. Так как последнее слагаемое при $V_2 < V_1$ отрицательно, а при $V_2 > V_1$ положительно, то в области $V_2 < V_1$ на плоскости (p, V) (рис. 12) точки, которые могут удовлетворять уравнению (1.12) (сплошная линия на рис. 12), лежат выше адиабаты Гюгонио (штрихпунктирная линия), а в области $V_2 > V_1$ — ниже ее (рис. 12). Нанесем на этот же чертеж адиабату Пуассона, т. е. кривую $s = s_1$ (пунктирная линия). Известно, что в обычной газовой динамике при принятых предположениях адиабата Гюгонио при $V < V_1$ лежит выше адиабаты Пуассона, а при $V > V_1$ ниже нее. Следовательно, точки плоскости (pV), которые могут удовлетворять уравнению (1.12), лежат при $V < V_1$ в области $s > s_1$, а при $V > V_1$ — в области $s < s_1$. Таким образом, при принятых предположениях в магнитной гидродинамике невозможны скачки разрежения, так как им соответствуют переходы с уменьшением энтропии. Детальному исследованию соотношений на ударных волнах будет посвящен отдельный параграф (см. § 3 этой главы).

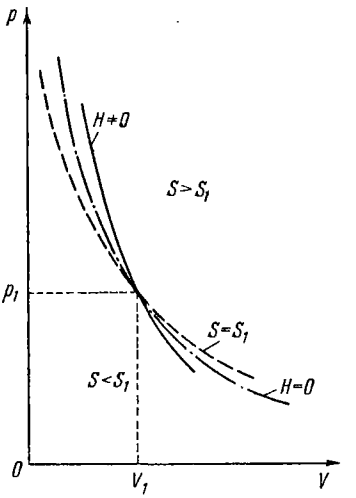


Рис. 12.

§ 2. Эволюционность магнитогидродинамических ударных волн

Рассмотрим плоскую ударную волну, перемещающуюся относительно выбранной системы координат со скоростью D. Плоская ударная волна разделяет два поступательных потока газа, параметры которых связаны соотношениями на ударной волне. Эти соотношения получены в предыдущем параграфе в предположении, что ударная волна покоится в выбранной системе координат ($D = 0$). Если $D \neq 0$, то условия на

магнитогидродинамической ударной волне примут следующий вид:

$$H_{x1} = H_{x2} \equiv H_n, \tag{2.1}$$

$$\rho_1 (v_{x1} - D) = \rho_2 (v_{x2} - D), \tag{2.2}$$

$$H_n (v_{y1} - v_{y2}) = H_{y1} (v_{x1} - D) - H_{y2} (v_{x2} - D), \tag{2.3}$$

$$p_1 + \rho_1 (v_{x1} - D)^2 + \frac{H_{1y}^2 + H_{z1}^2}{8\pi} =$$

$$= p_2 + \rho_2 (v_{x2} - D)^2 + \frac{H_{y2}^2 + H_{z2}^2}{8\pi}, \tag{2.4}$$

$$\rho_1 v_{y1} (v_{x1} - D) - \rho_2 v_{y2} (v_{x2} - D) = \frac{H_n}{4\pi} (H_{y1} - H_{y2}), \tag{2.5}$$

$$(v_{x1} - D) \rho_1 \left[\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2} (v_{y1}^2 - v_{y2}^2) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} (v_{x1} - D)^2 - \frac{1}{2} (v_{x2} - D)^2 + \frac{1}{2} (v_{z1}^2 - v_{z2}^2) +$$

$$\left. + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{H_{y1}^2 + H_{z1}^2}{\rho_1} - \frac{H_{y2}^2 + H_{z2}^2}{\rho_2} \right) \right] =$$

$$= \frac{H_n}{4\pi} [(H_{y1} v_{y1} - H_{y2} v_{y2}) + (H_{z1} v_{z1} - H_{z2} v_{z2})], \tag{2.6}$$

$$H_n (v_{z1} - v_{z2}) = H_{z1} (v_{x1} - D) - H_{z2} (v_{x2} - D), \tag{2.7}$$

$$\rho_1 v_{z1} (v_{x1} - D) - \rho_2 v_{z2} (v_{x2} - D) = \frac{H_n}{4\pi} (H_{z1} - H_{z2}). \tag{2.8}$$

Соотношения (2.1) –(2.8) выписаны в системе координат, ось x которой направлена по нормали к поверхности ударной волны, а оси y и z лежат в плоскости волны.

Рассмотрим вопрос о взаимодействии ударной волны с малыми возмущениями [1,10]. Будем предполагать, что ударная волна разделяет два слабовозмущенных поступательных потока, причем ограничимся случаем, когда все функции возмущенного движения зависят только от координаты x и времени t, т. е. будем рассматривать взаимодействие плоской

ударной волны с плоскими малыми возмущениями. Естественно, что возмущенное движение должно удовлетворять уравнениям магнитной гидродинамики с обеих сторон от ударной волны и условиям на ударной волне (2.1)—(2.8). Так как невозмущенный поток задан и, по предположению, возмущения малы, то они должны удовлетворять линеаризированной системе уравнений магнитной гидродинамики и соотношениям на ударной волне, которые получаются путем линеаризации условий (2.1)—(2.8). Отметим, что линейные системы, описывающие возмущения с разных сторон от ударной волны, отличаются значениями коэффициентов.

Произвольное плоское (в том смысле, что все функции зависят только от x и t) малое возмущение может быть представлено в виде суммы линейных простых волн (см. § 3 гл. III). Каждая из этих волн характеризуется одной величиной, которую будем называть *амплитудой волны*. Если амплитуда волны задана как функция $x \pm a_i t$, то распределение всех остальных величин в волне находится в зависимости от типа волны по формулам (3.1), (3.3) и (3.5) гл. III. Скорость линейных волн относительно ударной волны зависит от типа линейной волны и скорости ударной волны относительно газа. Можно различать волны, приходящие на ударную волну, скорость которых относительно ударной волны направлена к ударной волне, и расходящиеся волны, относительная скорость которых направлена от ударной волны.

Амплитуды приходящих волн определяются начальными данными. В результате взаимодействия падающих волн с ударной волной возникают расходящиеся линейные волны (отраженные и преломленные). Их амплитуды определяются амплитудами приходящих волн и условиями на ударной волне. Если при заданных амплитудах приходящих возмущений условия на данной ударной волне позволяют однозначно определить амплитуды расходящихся волн, то ударную волну будем называть *эволюционной*. Понятие эволюционности связано с возможностью по строения решения нестационарных задач по начальным данным [2]. Если линеаризированная задача о взаимодействии малых возмущений с ударной волной не имеет решения или имеет неединственное решение, то ударную волну будем называть *неэволюционной*.

Если линеаризированная задача не имеет однозначного решения, то, следовательно, она может иметь нетривиальное

решение и в том случае, когда на ударную волну не падает фактически никаких возмущений. Это соответствует самопроизвольному излучению ударной волной малых возмущений. Если же линеаризированная задача не имеет решения, то так как решение физической задачи должно существовать, необходимо предположить, что линейная задача плохо описывает в этом случае взаимодействие ударной волны с малым возмущением, т. е. явление взаимодействия в целом нелинейно и возникающие при взаимодействии возмущения не являются малыми [1,7]. В этом случае при падении на ударную волну малых возмущений должны появиться конечные возмущения.

Обозначим через δq_i (через q_i обозначены величины ρ, p, v_x, v_y, H_y и т. д.) отклонение параметров от их значений в невозмущенном потоке. Если выбрать систему координат так, чтобы невозмущенная ударная волна покоилась относительно этой системы координат ($D = 0$) и невозмущенные векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ были бы в этой системе координат параллельны и лежали в плоскости x, y (в этой системе координат компоненты скорости будем обозначать u, v, w, при этом $w = H_z = 0$), то из условий (2.1)—(2.8) можно получить следующую систему линейных соотношений, которым должны удовлетворять на ударной волне соответствующие возмущения (δq_i):

$$\delta H_{x1} = \delta H_{x2}, \tag{2.9}$$

$$\rho_1 (\delta u_1 - \delta D) + u_1 \delta\rho_1 = \rho_2 (\delta u_2 - \delta D) + u_2 \delta\rho_2, \tag{2.10}$$

$$H_n (\delta v_1 - \delta v_2) = u_1 \delta H_{y1} - u_2 \delta H_{y2} + \\ + H_{y1} \delta u_1 - H_{y2} \delta u_2 - \delta D (H_{y1} - H_{y2}). \tag{2.11}$$

$$\delta p_1 + 2\rho_1 u_1 \delta u_1 + u_1^2 \delta\rho_1 + \frac{H_{y1} \delta H_{y1}}{4\pi} = \\ = \delta p_2 + 2\rho_2 u_2 \delta u_2 + u_2^2 \delta\rho_2 + \frac{H_{y2} \delta H_{y2}}{4\pi}, \tag{2.12}$$

$$\rho_1 v_1 \delta u_1 - \rho_2 v_2 \delta u_2 + u_1 v_1 \delta\rho_1 - u_2 v_2 \delta\rho_2 + \rho_1 u_1 (\delta v_1 - \delta v_2) - \\ - \delta D (\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2) = \frac{H_n}{4\pi} (\delta H_{y1} - \delta H_{y2}), \tag{2.13}$$

$$\left(\frac{H_{y1}^2}{4\pi}+\rho_1 u_1^2\right)\delta u_1-\left(\frac{H_{y2}^2}{4\pi}+\rho_2 u_2^2\right)\delta u_2+\rho_1 u_1(\delta l_1-\delta l_2)+$$

$$+\left(\rho_1 u_1 v_1-\frac{H_n H_{y1}}{4\pi}\right)\delta v_1-\left(\rho_2 u_2 v_2-\frac{H_n H_{y2}}{4\pi}\right)\delta v_2+$$

$$+\frac{H_{y1}u_1}{4\pi}\delta H_{y1}-\frac{H_{y2}u_2}{4\pi}\delta H_{y2}=\delta D\left(-\frac{H_{y1}^2-H_{y2}^2}{4\pi}+\rho_1 u_1^2-\rho_2 u_2^2\right), \tag{2.14}$$

$$u_1\delta H_{z1}-u_2\delta H_{z2}=H_n(\delta w_1-\delta w_2), \tag{2.15}$$

$$\rho_1 u_1(\delta w_1-\delta w_2)=\frac{H_n}{4\pi}(\delta H_{z1}-\delta H_{z2}). \tag{2.16}$$

В этих соотношениях $i=\varepsilon+\frac{p}{\rho}$ — теплосодержание единицы массы газа. Так как в плоских линейных волнах компонента магнитного поля, нормальная к волне, не меняется, то

$$\delta H_{x1}=\delta H_{x2}=0.$$

Это соотношение было использовано при получении уравнений (2.10)—(2.16). Из (2.10) следует, что

$$\delta D=-\frac{\rho_1\delta u_1-\rho_2\delta u_2+u_1\delta\rho_1-u_2\delta\rho_2}{\rho_1-\rho_2}. \tag{2.17}$$

Это равенство позволяет исключить δD из соотношений (2.11)—(2.14).

Таким образом, условия, которым должны удовлетворять возмущения параметров потока на ударной волне, представляют собой систему шести линейных уравнений (2.11)—(2.16). Эта система уравнений, как легко видеть, распадается на две системы: уравнения (2.15) и (2.16), связывающие между собой величины δH_{z1}, δH_{z2}, δw_1, δw_2, и уравнения (2.11)—(2.14), связывающие возмущения остальных величин.

Система (2.11)—(2.16) связывает между собой четырнадцать величин: $\delta p_{1,2}$, $\delta\rho_{1,2}$, $\delta u_{1,2}$, $\delta v_{1,2}$, $\delta w_{1,2}$, $\delta H_{y_{1,2}}$, $\delta H_{z_{1,2}}$.

Любое возмущение с каждой стороны от ударной волны может быть представлено в виде суммы, вообще говоря, семи линейных волн, каждая из которых определяется одной величиной — амплитудой. Следовательно, путем линейной замены переменных из системы (2.11)—(2.16) можно получить систему шести линейных алгебраических уравнений, связывающих между собой амплитуды четырнадцати линейных волн. Часть из этих амплитуд, соответствующих приходящим волнам, является заданной, остальные амплитуды должны быть определены из этой системы уравнений. Очевидно, что ударная волна может быть эволюционной только в том случае, когда система (2.11)—(2.16), записанная через амплитуды волн, имеет единственное решение. Это требование накладывает определенные условия на возможное число расходящихся волн различного типа. С другой стороны, возможное количество волн, расходящихся от ударной волны, зависит от скорости невозмущенного потока за и перед ударной волной. Последнее обстоятельство позволяет путем исследования системы (2.11)—(2.16) получить условия, которым должны удовлетворять скорости невозмущенного потока за и перед ударной волной для того, чтобы данная ударная волна была эволюционной. При получении этих условий в дальнейшем будем предполагать, что скорости газа перед ударной волной ($u_1 = D - v_{x1}$) и за ней ($u_2 = D - v_{x2}$) не совпадают ни с одной из скоростей малых возмущений.

Так как в альфвеновских линейных волнах все возмущения, кроме δw и δH_z, равны нулю, а в остальных волнах $\delta w = \delta H_z = 0$, то система (2.11)—(2.16), записанная относительно амплитуд волн, тоже распадается на две независимые системы, причем в уравнения (2.15) и (2.16) входят только амплитуды альфвеновских волн, а в уравнения (2.11)—(2.14) — только амплитуды магнитозвуковых и энтропийных волн. Эти системы можно рассматривать отдельно, т. е. можно рассматривать отдельно задачу о взаимодействии ударной волны с малыми альфвеновскими возмущениями и задачу о взаимодействии с малыми звуковыми и энтропийными возмущениями [10].

Рассмотрим прежде всего задачу о взаимодействии ударной волны с альфвеновскими возмущениями. В этом случае амплитуды расходящихся волн должны определяться из системы двух линейных уравнений. Эта система имеет вид (для

определенности примем, что $u_1 > 0$ и $H_n > 0$):

$$\left.\begin{aligned}(u_1 - a_{A1})\,\delta_{A,-}H_{z1} + (u_1 + a_{A1})\,\delta_{A,+}H_{z1} &= \\ = (u_2 - a_{A2})\,\delta_{A,-}H_{z2} + (u_2 + a_{A2})\,\delta_{A,+}H_{z2}&,\\ \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\,[(u_1 - a_{A1})\,\delta_{A,-}H_{z1} - (u_1 + a_{A1})\,\delta_{A,+}H_{z1}] &= \\ = [(u_2 - a_{A2})\,\delta_{A,-}H_{z2} - (u_2 + a_{A2})\,\delta_{A,+}H_{z2}]&.\end{aligned}\right\}$$

В этих уравнениях символом $\delta_{A,+}H_z$ обозначено изменение магнитного поля в альфвеновской волне, движущейся по частицам газа в положительном направлении, а через $\delta_{A,-}H_z$ изменение H_z в волне, движущейся по частицам в отрицательном направлении. Легко видеть, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов при амплитудах, равен двум, если скорости невозмущенного потока за и перед ударной волной не совпадают с соответствующей альфвеновской скоростью. Очевидно, что эта система будет иметь однозначное решение только в том случае, если число расходящихся волн, которые в этом случае являются волнами Альфвена, равно двум. Необходимыми и достаточными условиями существования двух расходящихся волн Альфвена являются следующие условия:

$$u_1 < a_{A1}, \quad u_2 < a_{A2}, \tag{2.18}$$

или

$$u_1 > a_{A1}, \quad u_2 > a_{A2}. \tag{2.19}$$

В первом случае (2.18) одна альфвеновская волна распространяется по газу перед ударной волной и одна по газу за волной, во втором случае (2.19) обе альфвеновские волны распространяются по газу за ударной волной. Условия (2.18) и (2.19) являются необходимыми условиями эволюционности ударных волн. На плоскости (u_1, u_2) (рис. 13) точки, удовлетворяющие неравенствам (2.18) и (2.19), лежат в областях, покрытых вертикальной штриховкой. Вопрос об эволюционности ударных волн, соответствующих границам этих областей, не исследован.

Рассмотрим теперь вопрос о взаимодействии ударной волны со звуковыми и энтропийными возмущениями. В этом

случае амплитуды расходящихся волн должны определяться из системы четырех линейных уравнений (2.11)—(2.14), записанных через амплитуды волн. Эта система будет иметь однозначное решение, если число расходящихся волн равно четырем. При этом предполагается, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных амплитудах,

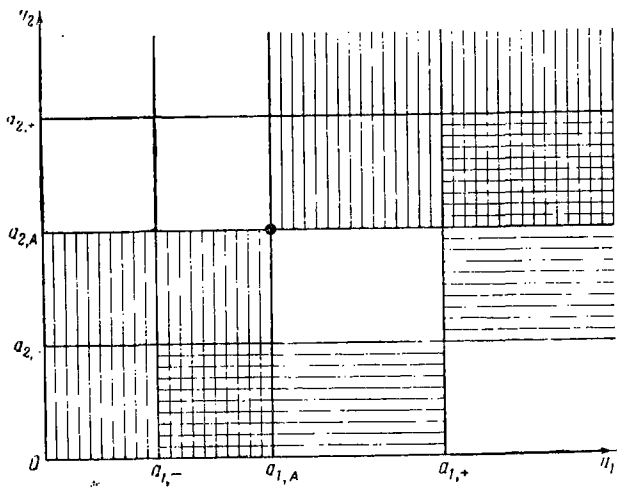


Рис. 13.

равен четырем (фактическое исследование этого вопроса в общем случае в настоящее время не проведено.) Так как среди расходящихся волн рассматриваемого типа обязательно присутствует энтропийная волна, движущаяся вместе с газом за ударной волной, то необходимыми и достаточными условиями существования решения системы (2.11)—(2.14) является условие того, что имеются три расходящиеся магнитозвуковые волны. Легко проверить, что условие существования трех магнитозвуковых волн эквивалентно следующим условиям, наложенным на скорости газа за и перед ударной волной:

$$a_{1,-} < u_1 < a_{1,+}, \quad u_2 < a_{2,-} \tag{2.20}$$

или

$$a_{1,+} < u_1, \quad a_{2,-} < u_2 < a_{2,+}. \tag{2.21}$$

В случае (2.20) одна волна распространяется по газу перед ударной волной и две по газу за ней. В случае (2.21) все три волны распространяются по газу за ударной волной. Условия (2.20) и (2.21) являются необходимыми условиями эволюционности ударной волны.

На плоскости (u_1, u_2) (рис. 13) точки, удовлетворяющие неравенствам (2.20) и (2.21), лежат в областях, покрытых горизонтальной штриховкой. Эволюционными ударными волнами являются волны, удовлетворяющие обеим системам неравенств (2.18)—(2.19) и (2.20)—(2.21). Точки, соответствующие эволюционным волнам, лежат на плоскости (u_1, u_2) (рис. 13) в областях, покрытых двойной штриховкой. При этом скорости газа за и перед эволюционной ударной волной должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$a_{1,-} \leqslant u_1 < a_{A1}, \quad u_2 \leqslant a_{-,2}, \tag{2.22}$$

$$a_{+,1} \leqslant u_1, \quad a_{A2} < u_2 \leqslant a_{+,2}, \tag{2.23}$$

которые являются *необходимыми и достаточными условиями эволюционности ударной волны.* Знаки равенства в (2.22) и (2.23) соответствуют ударным волнам бесконечно малой интенсивности. Ударные волны, удовлетворяющие (2.23), будем называть *быстрыми*, а удовлетворяющие (2.22)—*медленными*.

Аналогично тому, как это сделано для ударных волн, может быть поставлен вопрос об эволюционности других поверхностей разрыва (в частности, вращательный разрыв удовлетворяет условиям эволюционности [1]).

§ 3. Разрешение условий на ударных волнах в совершенном газе

Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена по нормали к ударной волне и векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ лежали бы в плоскости x, y (см. § 1 настоящей главы). В этой системе координат систему соотношений, эквивалентную соотношениям на ударной волне в совершенном газе,

можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &m = \frac{v_{x1}}{V_1} = \frac{v_{x2}}{V_2}, \qquad m^2 = \frac{H_x^2}{4\pi}\frac{H_{y2}-H_{y1}}{V_2H_{y2}-V_1H_{y1}},\\ &m^2 = \frac{p_2-p_1+\frac{1}{8\pi}\left(H_{y2}^2-H_{y1}^2\right)}{V_1-V_2},\\ &\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(p_2V_2-p_1V_1\right)-\frac{1}{2}\left(V_1+V_2\right)\left(p_2-p_1\right)+\\ &\qquad+\frac{1}{16\pi}\left(V_2-V_1\right)\left(H_{y2}-H_{y1}\right)^2=0,\\ &v_{y2}-v_{y1}=\frac{H_x}{4\pi m}\left(H_{y2}-H_{y1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

В настоящем параграфе будет показано, что можно ввести некоторую величину, характеризующую интенсивность ударной волны так, что все величины за ударной волной и скорость волны выражаются явным образом через эту величину и параметры, характеризующие состояние перед волной [12] [1]).

Предполагая, что $H_x \neq 0$, введем безразмерные переменные по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &h_i = \frac{H_{yi}}{H_x} = \lg \alpha_i,\\ &\eta = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \qquad P_i = \frac{4\pi p}{H_x^2},\\ &v_i^* = \frac{v_i}{a_{A1}} = \frac{v_i\sqrt{4\pi\rho_1}}{H_x},\\ &v_i^{**} = \frac{v_i}{a_{A2}} = \frac{v_i\sqrt{4\pi\rho_2}}{H_x}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Здесь всюду $i = 1, 2$, причем индекс 1 относится к параметрам перед волной, а индекс 2 — к параметрам за волной. Величина P связана с ранее введенным вектором $\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{b}}{a_0}$

[1]) В данном параграфе излагается метод разрешения условий на ударных волнах, предложенный Л. А. Барминым.

(§ 1 гл. III) соотношением

$$\gamma P = \frac{1}{N_x^2}.$$

Вместо P_2 введем переменную

$$z = \frac{P_2 - P_1}{h_2 - h_1} + \frac{1}{2}(h_2 + h_1). \tag{3.3}$$

Заметив, что

$$m^2 = \frac{\rho_1 H_x^2}{4\pi} v_{x1}^{*2},$$

преобразуем соотношения (3.1) к новым переменным (3.2)—(3.3)

$$\frac{v_{x2}^*}{v_{x1}^*} = \eta, \tag{3.4}$$

$$v_{x1}^{*2} = \frac{h_2 - h_1}{\eta h_2 - h_1}, \tag{3.5}$$

$$v_{x1}^{*2} = \frac{(h_2 - h_1)z}{1 - \eta}, \tag{3.6}$$

$$\eta\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} z(h_2 - h_1) + \frac{2\gamma}{\gamma-1} P_1 - \frac{1}{\gamma-1}(h_2 - h_1)(h_2 + \gamma h_1)\right] -$$

$$- z(h_2 - h_1) - \frac{2\gamma}{\gamma-1} P_1 + h_1(h_2 - h_1) = 0, \tag{3.7}$$

$$v_{y2}^* - v_{y1}^* = \frac{h_2 - h_1}{v_{x1}^*}. \tag{3.8}$$

Перед волной будем считать заданными все величины, кроме v_{x1}, т. е. величины h_1, P_1, H_x, ρ_1, v_{y1}. Для определенности положим $h_1 > 0$. Интенсивность скачка будем характеризовать величиной z, что равносильно заданию одного параметра за волной. Считая z переменной, исследуем зависимость от нее остальных величин — h_2, P_2, η, v_{x1}, v_{x2}, v_{y2}.

Из равенств (3.5) и (3.6) находим

$$\eta = \frac{h_1 z + 1}{h_2 z + 1}. \tag{3.9}$$

Подставляя это выражение в (3.7), получим после деления на $h_2 - h_1$:

$$(h_2 - h_1)[(\gamma - 1)z^2 + (2 - \gamma)h_1 z + 1] - \\ - 2[h_1 z^2 - (h_1^2 + \gamma P_1 - 1)z - h_1] = 0 \quad (3.10)$$

или

$$h_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} h_1 - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\beta z + \gamma h_1}{(\gamma - 1)z^2 + (2 - \gamma)h_1 z + 1}, \quad (3.11)$$

где

$$\beta = h_1^2 + (\gamma - 1)(\gamma P_1 - 1).$$

Так как $P_1 \geqslant 0$, то $\beta \geqslant \beta_{\min} \equiv h_1^2 - (\gamma - 1)$.

Если z задано, то по формуле (3.11) находим h_2, затем из равенства (3.9) находим η. По известным z, h и η равенства (3.5) или (3.6) определяют v_{x1}^*, а равенство (3.4) — v_{x2}^*. Наконец, уравнение (3.8) определяет v_{y2}. Таким образом, если ρ_1, h_1, P_1, H_x, v_{y1} и z заданы, то соотношения (3.11), (3.9), (3.5), (3.4) и (3.8) являются соотношениями, разрешающими условия на ударной волне (3.1). Пользуясь равенствами (3.2)—(3.3), легко найти любые параметры за и перед волной, в частности давление P_2:

$$P_2 = P_1 + (h_2 - h_1)z - \frac{1}{2}(h_2^2 - h_1^2).$$

Исследуем кривую $h = h_2(z)$ на плоскости z, h_2. Для того чтобы не рассматривать большого числа различных случаев, будем в дальнейшем предполагать, что $\gamma < 2$. Случай $\gamma > 2$ исследуется аналогичным образом.

При $z \to \pm\infty$ кривая (3.11) стремится к асимптоте $h_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} h_1$, с которой она имеет точку пересечения при $z = z_* \equiv -h_1\gamma/\beta$. Знак z_* противоположен знаку β. Кривая (3.11) пересекается с осью h_2 в точке с ординатой

$$h_2 = -h_1.$$

Отметим, кроме того, что точка

$$z = \frac{\beta - \gamma(2 - \gamma)h_1^2}{\gamma h_1(\gamma - 1)}, \quad h_2 = -h_1$$

также лежит на кривой (3.11). Если $h_1 > 2\sqrt{\gamma - 1}/(2 - \gamma)$, то знаменатель в правой части равенства (3.11) имеет два

корня (z_1 и z_2), и кривая (3.11) имеет вертикальные асимптоты $z=z_1$ и $z=z_2$. При $h_1<\frac{2\sqrt{\gamma-1}}{2-\gamma}$ кривая не имеет вертикальных асимптот. Для того чтобы было удобнее различать возможные случаи расположения кривой (3.11), введем плоскость начальных данных (P_1, h_1) (рис. 14). На этой

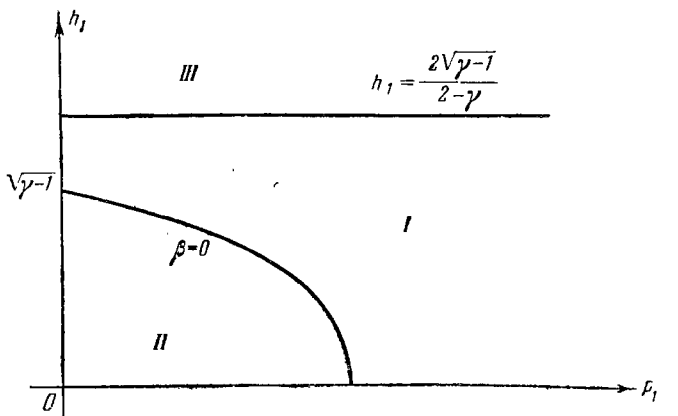


Рис. 14.

плоскости $\beta>0$ для точек, лежащих правее параболы $\beta=0$ и $\beta<0$ для точек, лежащих левее ее. Проведем на плоскости (P_1, h_1) прямую $h_1=\frac{2\sqrt{\gamma-1}}{2-\gamma}$. Кривая $\beta=0$ и прямая $h_1=2\sqrt{\gamma-1}/(2-\gamma)$ не пересекаются при $h_1>0$ и $P_1>0$, так как $\frac{2}{2-\gamma}\sqrt{\gamma-1}>\sqrt{\gamma-1}$. Таким образом, эти кривые ограничивают на плоскости начальных данных (P_1, h_1) три области (I—III). Положение начальной точки в одной из областей (I–III) будет определять, во-первых, наличие или отсутствие у кривой $h=h_2(z)$ вертикальных асимптот и, во-вторых, знак абсциссы $\left(z_*=-\frac{\gamma h_1}{\beta}\right)$ точки пересечения кривой $h=h_2(z)$ с горизонтальной асимптотой. Отметим еще, что если у кривой (3.11) имеются две вертикальные асимптоты, то

$$z_1<z_2<z_*<0. \tag{3.12}$$

Действительно, z_1 и z_2 имеют одинаковые знаки, совпадающие со знаком

$$z_{\text{ср}} = -\frac{1}{2}\frac{2-\gamma}{\gamma-1}h_1 = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

Точка z_* при $h_1 > 2\sqrt{\gamma-1}/(2-\gamma)$ принадлежит отрезку

$$z_{\min} < z_* < 0,$$

где

$$z_{\min} = -\frac{\gamma h_1}{\beta_{\min}} = -\frac{\gamma h_1}{h_1^2-(\gamma-1)}.$$

При подстановке $z = z_{\min}$ в знаменатель правой части равенства (3.11) получим

$$(\gamma-1)z_{\min}^2 + (2-\gamma)h_1 z_{\min} + 1 = \frac{(\gamma-1)^2(h_1^2+1)^2}{[h_1^2-(\gamma-1)]^2}.$$

Таким образом, $z_{\min}$ лежит вне отрезка $[z_1, z_2]$. Легко проверить также, что при $h_1 > 2\sqrt{\gamma-1}/(2-\gamma)$ выполняется неравенство $z_{\text{ср}} < z_{\min}$. Этим доказываются неравенства (3.12).

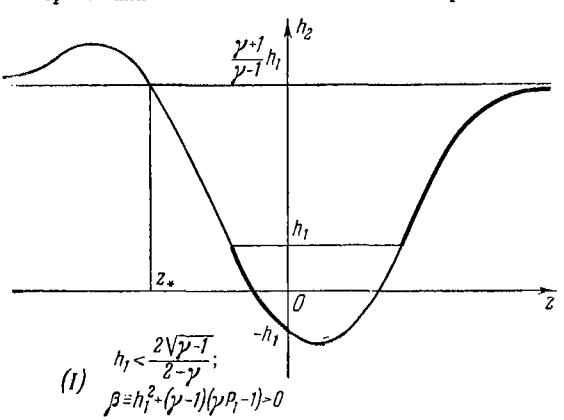


Рис. 15.

На основании вышеизложенного нетрудно качественно построить график функции $h_2 = h_2(z)$. Этот график будет различным в зависимости от того, в какой из областей *I*—*III* на плоскости начальных данных лежит начальная точка (рис. 15—17). Отметим, что в случаях *I* (рис. 15) и *III*

(рис. 17) минимум кривой (3.11) лежит в области $z > 0$, если $\beta > \gamma(2-\gamma)h_1^2$, и в области $z < 0$ при $\beta < \gamma(2-\gamma)h_1^2$.

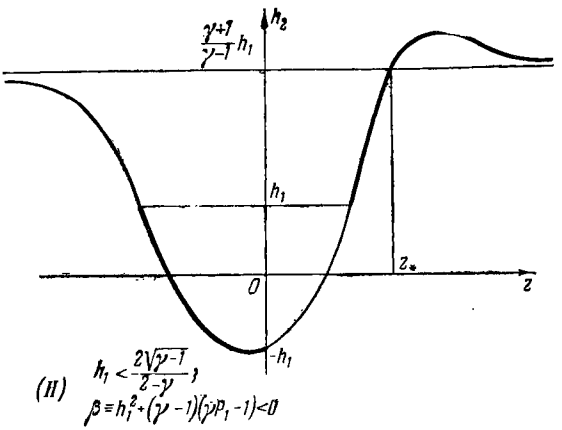


Рис. 16.

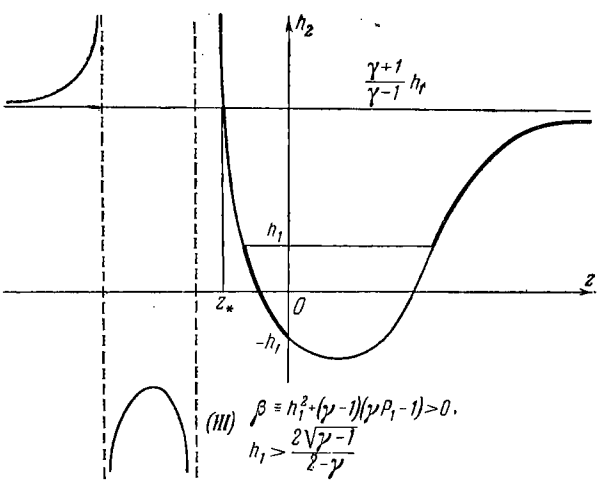


Рис. 17.

Однако не все части графика $h = h_2(z)$ отвечают ударным переходам из состояния 1 в состояние 2, сопровождающимся увеличением энтропии. Как было показано в § 1,

условие возрастания энтропии эквивалентно условию возрастания давления $P_2 > P_1$. В переменных z, h_2 это условие примет вид

$$\left.\begin{aligned} z &> \frac{1}{2}(h_2 + h_1) \quad \text{при} \quad h_2 > h_1, \\ z &< \frac{1}{2}(h_2 + h_1) \quad \text{при} \quad h_2 < h_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Подставляя $h_2 = 2z - h_1$ в уравнение (3.11), получим

$$z[(\gamma - 1)(z - h_1)^2 + \gamma P_1] = 0.$$

Таким образом, единственной точкой пересечения кривой $h = h_2(z)$ с прямой $z = \frac{1}{2}(h_2 - h_1)$ является точка $z = 0$, $h_2 = -h_1$. Поэтому ударным переходам $1 \to 2$ с увеличением энтропии соответствуют те части кривой $h = h_2(z)$ (выделенные на рис. 15–17 жирной линией), которые удовлетворяют неравенствам:

$$h_2 > h_1, \quad z > 0,$$
$$h_2 < h_1, \quad z < 0.$$

Точки остальных частей кривой соответствуют разрывам, в которых энтропия убывает при ударном переходе из состояния 1 в состояние 2. Можно считать, что они соответствуют ударным переходам $2 \to 1$, сопровождающимся увеличением энтропии.

Если известна зависимость $h = h_2(z)$, то, используя равенства (3.5), (3.9), нетрудно найти зависимости величин v_{x1}^* и v_{x2}^{**} от z или от h_2

$$v_{x1}^{*2} = 1 + h_2 z, \quad v_{x2}^{**2} = 1 + h_1 z.$$

Если h_2 отрицательно, то очевидно, что величины $v_{1x}^* - 1$ и $v_{x2}^{**} - 1$ имеют разные знаки, или, что то же самое, либо $v_{x1} > a_{A1}$, $v_{x2} < a_{A2}$, либо $v_{x1} < a_{A1}$, $v_{x2} > a_{A2}$. Отсюда, пользуясь результатами предыдущего параграфа, можно сделать вывод, что ударные волны, в которых касательная составляющая магнитного поля меняет знак, неэволюционны. В связи с этим в дальнейшем будем изучать только те части графиков, в которых $h_2 > 0$, и, следовательно, только те ударные волны, в которых $h_2 > 0$.

Качественный вид зависимостей $v_{x1}^{*2}(h_2)$ для случаев *I* — *III* представлен соответственно на рис. 18—20.

При $h_2 = h_1$ имеем

$$v_{x1}^{*2} = 1 + h_1 \frac{h_1^2 + \gamma P_1 - 1 \pm \sqrt{(h_1^2 + \gamma P_1 - 1)^2 + 4h_1^2}}{2h_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\gamma P_1 + h_1^2 + 1 \pm \sqrt{(h_1^2 + \gamma P_1 - 1)^2 - 4h_1^2}\right] = a_{+,-}^{*2} = \frac{a_{+,-}^2}{a_{A1}^2}.$$

Таким образом, точки $h_2 = h_1$ соответствуют магнитозвуковым волнам.

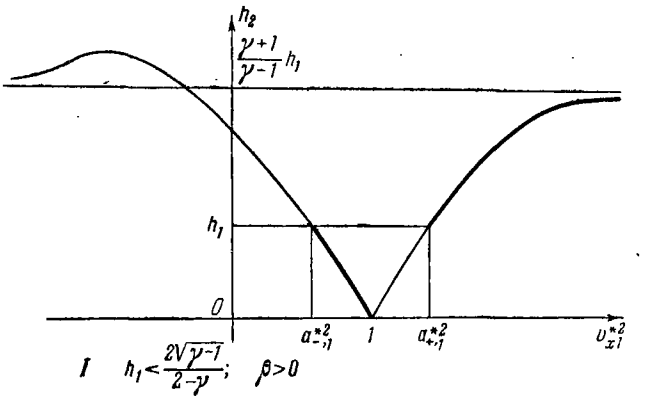


Рис. 18.

Жирной линией на рис. 18—20 выделены отрезки кривой, точки которых соответствуют ударным переходам $1 \to 2$. Характер зависимости v_{x1}^{*2} от h_2 позволяет сделать вывод о том, что

$$v_{x1} \geqslant a_{+,1} \tag{3.14}$$

для ударных волн, в которых магнитное поле возрастает, и

$$a_{-,1} \leqslant v_{x,1} \leqslant a_{A1} \tag{3.15}$$

для ударных волн, в которых магнитное поле убывает. При этом очевидно, что на отрезке $\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}h_1,\ 0\right]$ скорость ударной волны v_{x1} меняется монотонно в зависимости от h_2.

Остальные части кривой $v_{x1}^{*2}(h_2)$, проведенные на чертежах тонкой линией, состоят из точек, которые соответствуют ударным переходам $2 \to 1$ с возрастанием энтропии. Если

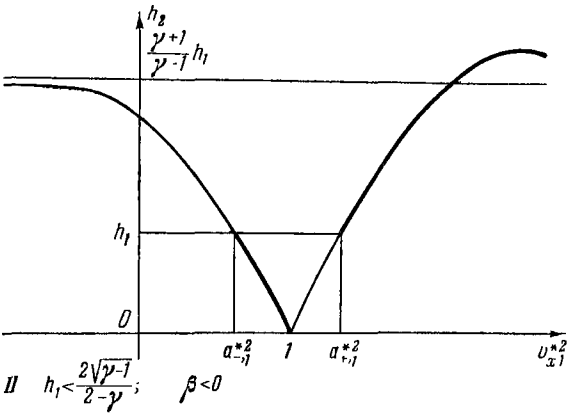


Рис. 19.

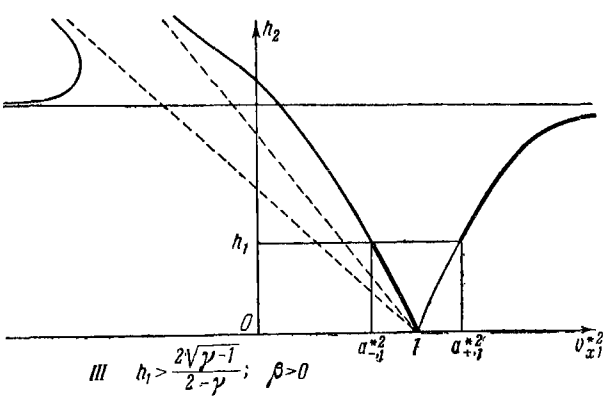


Рис. 20.

в этих ударных переходах переобозначить состояния так, чтобы 2 обозначало состояние за ударной волной (фиксированное), а 1 — состояние перед ударной волной (переменное), то непосредственно из рис. 18—20 (в этом случае ударным

переходам с возрастающей энтропией соответствуют части графика $v_{x1}^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$, начерченные тонкой линией) следует неравенство

$$a_{A2} < v_{x2} < a_{+,2} \tag{3.16}$$

для ударных волн, в которых магнитное поле возрастает, и

$$v_{x2} < a_{-,2} \tag{3.17}$$

для ударных волн, в которых магнитное поле убывает. Из сопоставления неравенств (3.14) и (3.16), (3.15) и (3.17) следует, что ударные волны, в которых магнитное поле возрастает, являются быстрыми, а ударные волны, в которых магнитное поле убывает, не меняя знака, являются медленными.

Рассмотрим теперь характер изменения давления в ударных волнах. Из (3.3) следует, что

$$P_2 - P_1 = (h_2 - h_1)\left[z - \frac{1}{2}(h_2 + h_1)\right]. \tag{3.18}$$

Так как для эволюционных ударных волн с возрастающей энтропией квадратная скобка в (3.18) нигде не обращается в нуль, то на плоскости (P, h) кривая $P_2 = P_2(h_2)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 21. На рис. 21 показаны

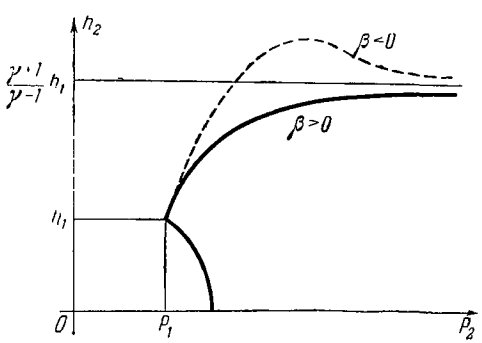


Рис. 21.

только те участки кривой $P_2 = P_2(h_2)$, где $P_2 > P_1$ и $h_2 > 0$, т. е. те части кривой, точки в которых соответствуют эволюционным ударным волнам с возрастанием энтропии из состояния P_1, h_1. Для быстрой ударной волны кривая $P_2 = P_2(h_2)$

при $\beta > 0$ не пересекает, а при $\beta < 0$ пересекает асимптоту

$$h_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} h_1.$$

Первый случай изображен на рис. 21 сплошной линией, а второй — пунктиром.

Пользуясь (3.9), нетрудно построить график зависимости $\eta = \eta(h_2)$. Качественный вид этой зависимости изображен

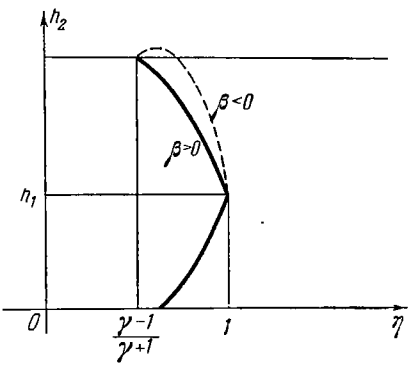


Рис. 22.

на рис. 22. Сплошная линия отвечает случаю $\beta > 0$, пунктирная — случаю $\beta < 0$.

Используя выражения

$$\left.\begin{aligned} v^*_{y2} - v^*_{y1} = \Delta v^*_y = \frac{h_2 - h_1}{v^*_{x1}}, \\ \Delta v^*_x = v^*_{x2} - v^*_{x1} = -v^*_{x1}(1-\eta) = \frac{(h_2 - h_1)z}{v^*_{x1}} = z\,\Delta v^*_y, \end{aligned}\right\} \quad (3.19)$$

которые следуют из (3.6), (3.8), (3.9), нетрудно графически определить общий ход изменения функций $\Delta v^*_x = \Delta v^*_x(h_2)$ и $\Delta v^*_y = \Delta v^*_y(\Delta v^*_x)$ (рис. 23 и 24). При построении графиков было принято, что $v^*_{x1} < 0$, т. е. графики построены для волн, движущихся относительно газа в положительном направлении оси x. Как это следует из теории малых возмущений, кривые $\Delta v^*_y = \Delta v^*_y(\Delta v^*_x)$ для быстрой и медленной волн ортогональны в начале координат.

Рассмотрим теперь, что происходит с ударными волнами, когда $h_1 \to 0$. Прежде всего изучим, как меняется при этом предельном переходе скорость ударных волн v^*_{x1}.

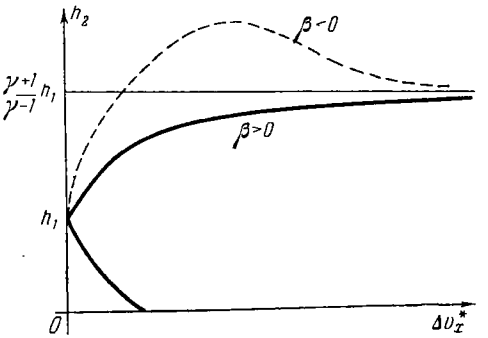


Рис. 23.

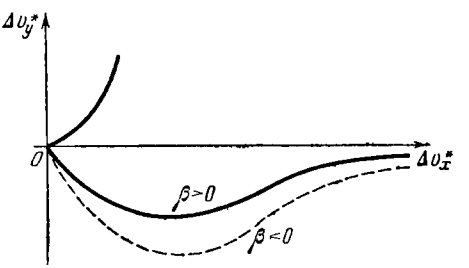


Рис. 24.

В зависимости от знака величины $\gamma P_1 - 1$, который при $h_1 = 0$ совпадает со знаком

$$\beta \equiv h_1^2 + (\gamma - 1)(\gamma P_1 - 1),$$

возможны два предельных случая:

1. $\gamma P_1 > 1$. Имеем

$$a^{*2}_{-,1} \to 1,$$

$$a^{*2}_{+,1} \to \gamma P_1 \equiv \left(a_0^{*2}\right)_1 = \frac{a_{01} 4\pi \rho_1}{H_x^2}. \qquad (3.20)$$

При этом отрезок кривой $v_x^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$, представляющий скорости медленных ударных волн, стягивается к точке $v_{x1}^{*2} = 1$, $h_2 = 0$, а отрезок, представляющий скорости быстрых ударных волн, стремится к совпадению с полубесконечным отрезком $[a_0^{*2}, \infty]$ оси v_{x1}^{*2} (рис. 25). Последнее утверждение

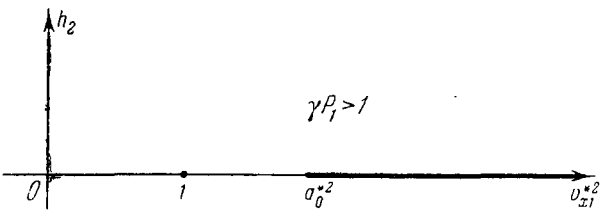


Рис. 25.

вытекает из того факта, что кривая $v_{x1}^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$ при $P_2 > P_1$ не может пересечь прямую $(\gamma + 1)h_1/(\gamma - 1)$. Очевидно, что быстрая ударная волна в этом случае стремится к совпадению с газодинамической ударной волной, а интенсивность медленной ударной волны должна стремиться к нулю, так как в противном случае медленная ударная волна в пределе

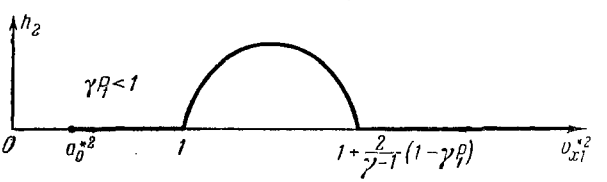


Рис. 26.

должна была бы обратиться в газодинамическую ударную волну, что невозможно, так как ее скорость $a_A < a_0$.

2. $\gamma P_1 < 1$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} a_-^{*2} &\to \gamma P_1 \equiv a_0^{*2}, \\ a_+^{*2} &\to 1. \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

В предельном состоянии отрезок кривой $v_{x1}^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$, представляющий медленную ударную волну, совпадает с отрезком $[(a_0^{*2})_1, 1]$ оси v_{x1}^{*2} (рис. 26). Отрезок кривой $v_{x1}^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$,

соответствующий быстрой волне при $h_1 = 0$, имеет часть, не совпадающую с осью v_{x1}^{*2}. Эта часть описывается уравнением

$$v_{x1}^{*2} = 1 + h_2 z = 1 + \frac{1 - \gamma P_1 \pm \sqrt{(1-\gamma P_1)^2 - (\gamma - 1) h_2^2}}{\gamma - 1}. \quad (3.22)$$

Ее концы лежат на оси v_{x1}^{*2} в точках

$$v_{x1}^{*2} = 1 \quad \text{и} \quad v_{x1}^{*2} = 1 + \frac{2}{\gamma - 1}(1 - \gamma P_1).$$

Так как при любом h_1 кривая $v_{x1}^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$ уходит в бесконечность, то очевидно, что при $h_1 = 0$ к кривой $v_{x1}^{*2} = v_{x1}^{*2}(h_2)$ относится также полубесконечный отрезок $\left[1 + \frac{2}{\gamma - 1}(1 - \gamma P_1), \infty\right]$ оси v_{x1}^{*2}. Таким образом, при $h_1 = 0$ и $\gamma P_1 < 1$ медленные ударные волны совпадают с газодинамическими ударными волнами не очень большой интенсивности (такой, что их скорость относительно газа перед волной не превосходит альфвеновской). Быстрые ударные волны малой интенсивности, скорость которых относительно газа перед волной не превосходит $a_A\left[1 + \frac{2}{\gamma - 1}(1 - \gamma P_1)\right]$, являются магнитогазодинамическими, и касательная составляющая магнитного поля за ними отлична от нуля. Более мощные быстрые ударные волны

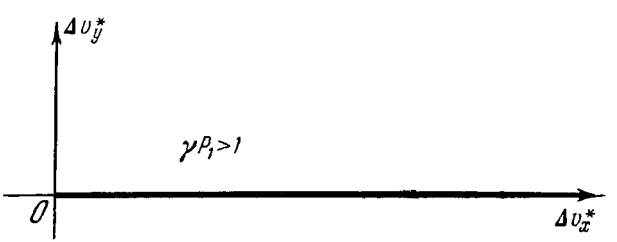


Рис. 27.

совпадают с газодинамическими ударными волнами, движущимися со скоростями, превышающими $a_A\left[1 + \frac{2}{\gamma - 1}(1 - \gamma P_1)\right]$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что газодинамические ударные волны, движущиеся со скоростями $1 < v_{x1}^{*2} < 1 + \frac{2}{\gamma - 1}(1 - \gamma P_1)$, не эволюционны, так как

в этом случае выполняются неравенства $v_{x1}^{*2} > 1$ и $v_{x2}^{**2} < 1$. Для обоих случаев ($\gamma P_1 > 1$ и $\gamma P_1 < 1$) нетрудно представить зависимость $\Delta v_y^* = \Delta v_y^*(\Delta v_x^*)$ (см. соответственно рис. 27 и 28), причем в первом случае отрезок кривой, представляющий медленную волну, вырождается в точку.

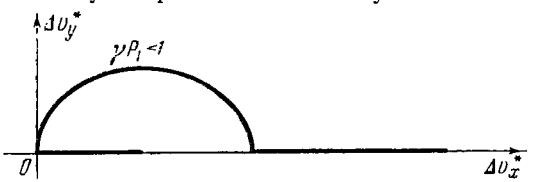


Рис. 28.

Пользуясь полученными соотношениями и качественными зависимостями, можно выяснить характер изменения любой величины в зависимости от интенсивности ударной волны. Например, могут быть построены поляры скорости и магнитного поля, которые были получены другим методом в [4, 5].

ГЛАВА V

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО[1]) ГАЗА

§ 1. Задача о плоском поршне

Пусть в момент времени $t=0$ идеальный газ занимает полупространство $x>0$ и ограничен при $x=0$ плоским, бесконечно проводящим поршнем. В начальный момент газ покоится ($\boldsymbol{v}_0=0$), давление и плотность его постоянны ($p=p_0$, $\rho=\rho_0$) и задано однородное магнитное поле ($\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0=H_{x0}\boldsymbol{e}_x+H_{y0}\boldsymbol{e}_y$, $H_{x0}>0$, $H_{y0}>0$). В момент времени $t=0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью $\boldsymbol{U}=U_x\boldsymbol{e}_x+U_y\boldsymbol{e}_y+U_z\boldsymbol{e}_z$. Необходимо найти движение газа в последующие моменты времени $t>0$ [1, 2, 3, 8, 10, 15]. На поверхности поршня должно быть выполнено условие непротекания и обычные электродинамические граничные условия.

Решение задачи о движении газа в этом случае может зависеть только от определяющих задачу параметров $\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{U}$, p_0, ρ_0, а также от координаты x и времени t. Так как из этих величин можно составить безразмерные комбинации, в которые x и t входят только в виде отношения $\frac{x}{t}$, то решение задачи будет зависеть только от $\varphi(x, t)=x/t$, и рассматриваемое движение будет автомодельным. Поэтому решение задачи может состоять только из непрерывных простых волн и поверхностей разрыва. При $x/t=k=\text{const}$ все величины постоянны, и на плоскости (x, t) возмущения распространяются вдоль прямых $x=kt$. Отсюда следует, что области, занятые простыми волнами, расширяются с течением времени. Поэтому ясно, что непрерывная вращательная волна в решении задачи о поршне присутствовать не может,

[1]) См. сноску на стр. 82.

так как ширина этой волны не меняется с течением времени. Так как в простых волнах скорость фазы $k = \frac{x}{t}$ при фиксированном t пропорциональна x, то меньшим x должны соответствовать меньшие скорости фазы волны, что возможно только для волн разрежения. Следовательно, непрерывные решения не могут содержать простых волн сжатия (волны сжатия в момент $t = 0$ превращаются в ударные волны). Таким образом, решения задачи о движении плоского поршня с постоянной скоростью могут содержать только простые волны разрежения, вращательные разрывы и ударные волны.

Из условия эволюционности ударных волн следует, что скорость быстрых волн относительно газа перед и за волной удовлетворяет неравенствам

$$u_1 > a_{1,+}, \quad a_{2A} < u_2 < a_{2,+},$$

а скорость медленных волн относительно газа — неравенствам

$$a_{1,-} < u_1 < a_{1A}, \quad u_2 < a_{2,-}.$$

Скорость вращательного разрыва относительно газа перед и за разрывом совпадает с альфвеновской скоростью:

$$u_1 = u_2 = a_{A1} = a_{A2}.$$

Скорость движения переднего и заднего фронтов быстрой и медленной простых волн относительно газа совпадает с магнитозвуковыми скоростями, т. е. для быстрых волн

$$u_1 = a_{1,+}, \quad u_2 = a_{2,+},$$

а для медленных волн

$$u_1 = a_{1,-}, \quad u_2 = a_{2,-}.$$

Соотношения между скоростями различных волн показывают, что решение задачи может состоять только из одной быстрой волны (ударной или волны разрежения), вращательного разрыва и только из одной медленной волны (ударной или волны разрежения), которые идут от поршня одна за другой в указанном порядке и разделены между собой интервалами, где параметры газа постоянны. Если последней идет медленная волна разрежения, то в ней плотность газа может упасть до нуля, и между поршнем и газом может существовать область пустоты.

Рассмотрим пространство скоростей u, v, w. Заданной скорости поршня соответствует в этом пространстве точка. Предположим, что при любой скорости поршня задача о движении газа имеет единственное решение. Тогда каждой точке пространства скоростей соответствует определенное решение задачи, состоящее из некоторого набора волн разрежения, ударных волн и вращательного разрыва. Найдем в пространстве скоростей геометрические места точек скоростей поршня, соответствующих тому или иному набору, распространяющихся от поршня волн. Невозмущенному состоянию газа в пространстве скоростей соответствует начало координат.

Рассмотрим сначала решение задачи в случаях, когда газ граничит с поршнем. В этих случаях из граничных условий на поверхности поршня следует, что скорость частиц газа, прилегающих к поршню, совпадает со скоростью поршня. Действительно, так как поршень и газ бесконечно проводящие, то в системе координат, связанной с поршнем, электрическое поле в поршне равно нулю. Из условия непрерывности касательной составляющей электрического поля на поверхности поршня следует, что в газе, прилегающем к поршню,

$$E'_\tau = -\left[\frac{1}{c}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{U}) \times \boldsymbol{H}\right]_\tau = 0.$$

Так как $v_n = U_n$ и $H_n \neq 0$, то отсюда следует, что $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{U}$.

Если по невозмущенному газу распространяется быстрая волна разрежения, то скоростям газа за этой волной соответствуют в пространстве скоростей точки некоторой кривой OA (рис. 29). Эта кривая, как следует из равенств (2.18) и (2.19) гл. III, лежит в квадранте $w = 0$, $u < 0$, $v > 0$. На плоскости ρ, H_y (рис. 7) этой кривой соответствует отрезок интегральной кривой от точки (ρ_0, H_{y0}) до точки, в которой $H_y = 0$. Этой точке на рис. 29 соответствует точка A. Нетрудно убедиться, что в точке A касательная к кривой OA параллельна оси v.

Если по невозмущенному газу распространяется быстрая ударная волна, то скоростям газа за ней соответствуют точки кривой OB (рис. 29). Согласно § 3 гл. IV, кривая OB лежит в квадранте $w = 0$, $u > 0$, $v < 0$ и имеет вид, изображенный на рис. 29.

Таким образом, если точка пространства скоростей, соответствующая скорости поршня, лежит на кривой $S = OA + OB$ (рис. 29), то решение задачи о поршне содержит только одну быструю волну (разрежения или сжатия).

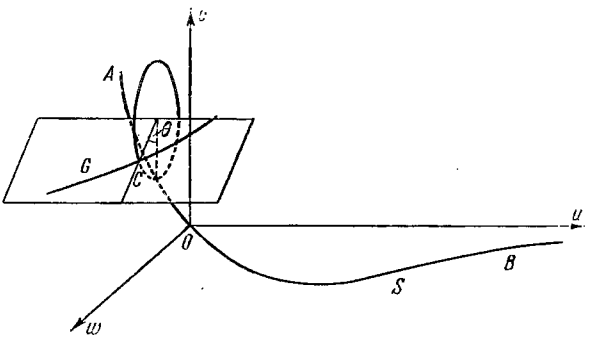


Рис. 29.

Если по газу, движущемуся со скоростью $ue_x + ve_y$, распространяется вращательный разрыв, то, так как во вращательном разрыве изменение касательных составляющих скорости и магнитного поля связаны соотношением

$$\{\boldsymbol{v}_\tau\} = -\left\{\frac{\boldsymbol{H}_\tau}{\sqrt{4\pi\rho}}\right\},$$

то скорости газа за вращательным разрывом может соответствовать любая точка

$$\left(u,\ v + \frac{H_y}{\sqrt{4\pi\rho}}(1 - \cos\theta),\quad \frac{H_y}{\sqrt{4\pi\rho}}\sin\theta\right) \qquad (1.1)$$

окружности радиуса $H_y/\sqrt{4\pi\rho}$ с центром в точке $(u,\ v + H_y/\sqrt{4\pi\rho},\ 0)$. При этом вектор $\boldsymbol{H}_\tau = \boldsymbol{e}_y H_y + \boldsymbol{e}_z H_z$ поворачивается на угол θ.

Таким образом, если решение задачи состоит из быстрой волны (ударной или разрежения) и вращательного разрыва, то точки, соответствующие скорости поршня, должны лежать в пространстве скоростей на поверхности Σ (рис. 30), состоящей из окружностей (1.1), построенных для каждой точки кривой S. Если скорость поршня не лежит на поверх-

ности Σ, то в решении задачи должна содержаться медленная волна (ударная или волна разрежения). При этом точки, соответствующие скоростям поршня, при которых решение содержит комбинацию быстрой волны и вращательного разрыва с фиксированными интенсивностями, а также медленную волну, лежат на некоторой кривой G (рис. 29), проходящей через точку C, на поверхности Σ соответствующую заданной

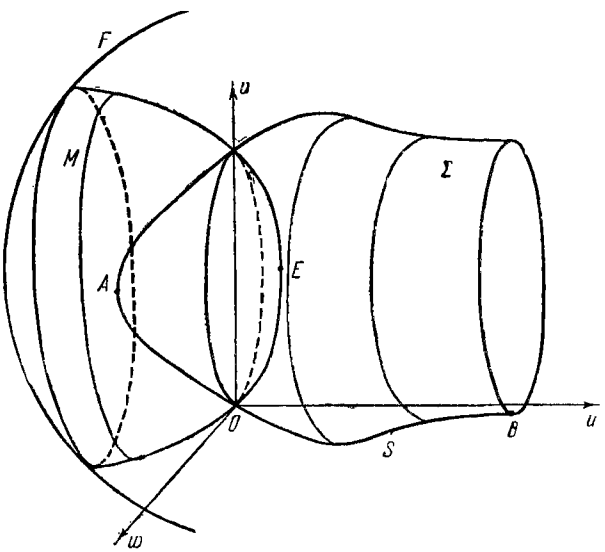


Рис. 30.

комбинации быстрой волны и вращательного разрыва. При этом вектор, проведенный из точки C в точку, соответствующую скорости поршня, представляет собой изменение скорости газа, происходящее в медленной волне. Как следует из результатов гл. III и IV, это изменение, а следовательно и вся кривая G, лежит в плоскости, параллельной оси u и вектору $\boldsymbol{H}_\tau = \boldsymbol{e}_y H_y + \boldsymbol{e}_z H_z$, направление которого в медленной волне не меняется. Эта плоскость составляет с осью v угол θ (θ — угол, на который поворачивается магнитное поле во вращательном разрыве). Кривые G, непрерывным образом зависящие от точки C, заполняют некоторую область, которую обозначим через Q.

Так как в медленной волне разрежения плотность газа может упасть до нуля, а скорость при этом остается ограниченной, то геометрическое место точек концов кривых G, соответствующих равной нулю плотности, образует поверхность F (рис. 30), являющуюся границей области Q. Другие концы кривых G, соответствующие медленным ударным волнам максимальной интенсивности (за которыми магнитное поле нормально к волне), сходятся к некоторой линии, лежащей внутри поверхности Σ. Для доказательства этого утверждения покажем, что все кривые G, проходящие через точки одной и той же окружности (1.1), сходятся к одной точке. Действительно, так как медленная ударная волна максимальной интенсивности движется с альфвеновской скоростью по газу перед волной, то из сохранения касательной составляющей импульса следует соотношение $\{v_\tau\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\{H_\tau\}$, которое выполняется как на ударной волне, так и на вращательном разрыве. А так как изменение касательной составляющей магнитного поля в такой волне равно половине изменения магнитного поля во вращательном разрыве, поворачивающем поле на 180°, то изменение v составит половину диаметра окружности (1.1), и все кривые G, вышедшие из этой окружности, сойдутся в некоторой точке, лежащей на прямой, параллельной u, и проходящей через центр окружности (1.1). Может показаться, что при скоростях поршня, соответствующих одной из точек, в которой сходятся кривые G, отсутствует единственность решения, так как интенсивность вращательного разрыва в этом случае не определена. Однако вращательный разрыв при этом фактически не входит в решение задачи, так как скорость его движения совпадает со скоростью медленной ударной волны, и эти две поверхности разрыва представляют, по существу, одну поверхность разрыва, которая является медленной ударной волной.

Если точка, соответствующая скорости поршня, принадлежит области Q, то существует решение задачи, в котором газ граничит с поршнем; в противном случае в окрестности поршня имеется пустота.

Очевидно, что кривая G, соответствующая медленной волне, не может пересекать поверхность Σ в точке, отличной от исходной, так как иначе для скорости поршня, соответ-

ствующей этой точке, существовало бы два решения: одно — содержащее медленную волну, а другое — не содержащее, что противоречит предположению о единственности решения.

Так как поверхность F не пересекается с поверхностью Σ и лежит вне поверхности Σ, то отсюда следует, что точкам области Q, лежащим вне Σ, соответствуют решения, содержащие медленные волны разрежения. Точкам же внутри поверхности Σ могут соответствовать только решения, содержащие ударные волны.

Для того чтобы при заданной скорости поршня определить характер быстрой волны, рассмотрим поверхность M (рис. 30), состоящую из точек, соответствующих скоростям поршня, при которых решение содержит только вращательный разрыв и медленную волну (ударную или разрежения). Очевидно, что эта поверхность является поверхностью вращения с осью симметрии

$$w = 0, \quad v = \frac{H_{y0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}.$$

Точка E поверхности M, лежащая на оси симметрии, соответствует скорости поршня, при которой в решении присутствует вращательный разрыв произвольной интенсивности и медленная ударная волна максимальной интенсивности, слившиеся друг с другом. Если точка, соответствующая скорости поршня, лежит в ограниченной области между поверхностями M и F, то быстрая волна является волной разрежения, если же скорость поршня лежит вне этой области (но в области $\rho > 0$), то быстрая волна является ударной.

Если между поршнем и газом имеется пустота, то в ней электрическое и магнитное поле постоянны, так как единственным автомодельным решением $\left(\text{зависящим от } \frac{x}{t}\right)$ уравнений Максвелла в пустоте для области $x < ct$ является постоянное электромагнитное поле. Магнитное поле на границе газа с пустотой должно быть непрерывным, так как в противном случае при $H_x \neq 0$ на этой поверхности существовал бы разрыв касательных напряжений. Поэтому скорость поршня U и скорость газа на границе с вакуумом v должны быть связаны соотношением

$$(U \times H)_\tau = (v \times H)_\tau,$$

которое выражает непрерывность касательных составляющих электрического поля на поверхности разрыва. Так как $H_x \neq 0$, то из последнего равенства следует

$$(U - v) \times H = 0. \tag{1.2}$$

Таким образом, если интенсивности всех волн зафиксированы и между газом и поршнем имеется пустота, то точки, соответствующие скорости поршня, должны лежать на прямой, параллельной магнитному полю в пустой области между поршнем и газом, выходящей из точки поверхности $\rho = 0$, характеризующей состояние газа на границе с пустотой.

Построенная диаграмма (рис. 30) позволяет по заданной скорости поршня определить комбинацию возникающих при его движении волн, что облегчает численное решение задачи об определении их интенсивностей.

§ 2. Распад произвольного разрыва

Пусть в момент времени $t = 0$ величины p, ρ, H, v терпят разрыв на плоскости $x = 0$. Если на этой плоскости не выполняются соотношения законов сохранения, начальный разрыв не может существовать. Необходимо определить движение газа в последующие моменты времени [4, 9, 15].

К задаче о распаде произвольного разрыва сводятся многочисленные задачи о столкновениях масс газа, движущихся навстречу друг другу, о различных столкновениях плоских поверхностей разрывов, о разлете масс газа друг от друга и др. Будем в дальнейшем предполагать, что на первоначальном разрыве $H_x \neq 0$, так как в противном случае задача сводится к газодинамической (гл. I, § 4).

Из автомодельности задачи следует, что движение должно состоять из идущих в обе стороны различных комбинаций быстрых S^+ и медленных S^- ударных волн, быстрых R^+ и медленных R^- автомодельных простых волн, вращательных разрывов A и контактного разрыва T. Символы S^+, S^-, R^+, R^-, A, T обозначают соответствующие волны и разрывы. Скорость распространения этих волн такова, что впереди идет волна S^+ или R^+, за ней разрыв A, за которым

следует волна S^- или R^-. Таким образом, в обе стороны могут идти по три волны, а на месте первоначального разрыва остается контактный разрыв, неподвижный относительно газа. Схематически решение задачи о распаде произвольного разрыва изображено на рис. 31.

Параметры, характеризующие среду, а также скорость и магнитное поле в начальный момент времени, будем обозначать индексом 0. Величины, относящиеся к области, рас-

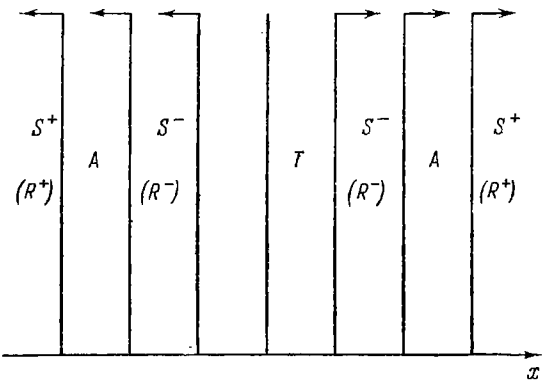


Рис. 31.

положенной в начальный момент справа от плоскости разрыва, а в последующие моменты времени справа от плоскости контактного разрыва, будут писаться со штрихом. Величины, относящиеся к области, расположенной слева от контактного разрыва, будут писаться без штриха. Величины, относящиеся к области за быстрой волной, идущей влево или вправо, будем обозначать индексом 1, за вращательным разрывом — индексом 2, за медленной волной — индексом 3.

В дальнейшем выясним, какие волны возникают при распаде произвольного разрыва в зависимости от величины начального разрыва скорости $\Delta u = u_0 - u_0'$, $\Delta v_0 = v_0 - v_0'$, $\Delta w = w_0 - w_0'$ при фиксированных, ρ_0, ρ_0', p_0, p_0', $\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{H}_0'$. В результате пространство начальных разностей скоростей (Δu, Δv, Δw) будет разбито на ряд областей, так что комбинация волн, возникающих при распаде начального разрыва, будет зависеть от того, в какую из областей попадает точка, соответствующая начальной разности скоростей.

Выясним прежде всего, при каких условиях произвольный разрыв распадается на две ударные, или простые, волны и контактный разрыв. На контактном разрыве должны быть непрерывны магнитное поле, скорость и давление. Так как в ударных и простых волнах движение можно считать плоским, то очевидно, что для возможности осуществления описанного выше распада начального разрыва необходимо, чтобы векторы $\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{H}'_0$ и $\Delta\boldsymbol{v}$ лежали в одной плоскости, которую примем за плоскость (x, y). Рассмотрим плоскость переменных H_y и p (рис. 32). Через каждую точку H_y^*, p^*

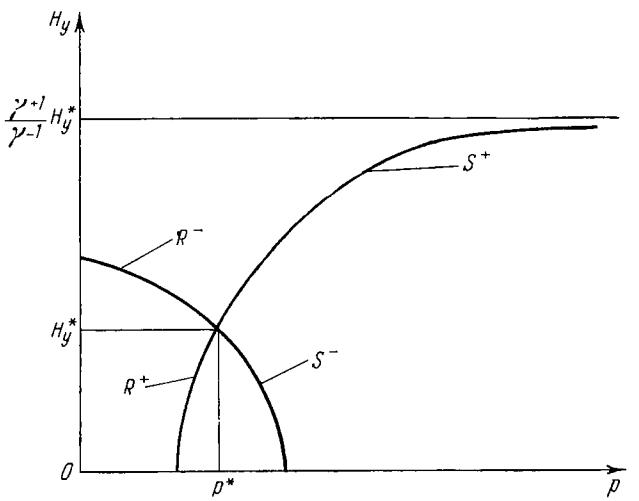


Рис. 32.

этой плоскости можно провести кривые $p = p_{S^+}(H_y, H_y^*, p^*)$, $p = p_{R^+}(H_y, H_y^*, p^*)$, $p = p_{S^-}(H_y, H_y^*, p^*)$ и $p = p_{R^-}(H_y, H_y^*, p^*)$, изображающие зависимости p от H_y соответственно в S^+, R^+-, S^-- и R^--волнах. Пары кривых $p = p_{S^+}$ и $p = p_{R^+}$ $p = p_{S^-}$ и $p = p_{R^-}$ являются продолжением одна другой. Так как на контактном разрыве p и H_y должны быть непрерывны, то на плоскости p и H_y контактному разрыву должна соответствовать либо точка пересечения двух кривых

$p = p(H_y, H_y^*, p^*)$, причем одна из них имеет в качестве начальной точку (p_0, H_{y0}), а другая — точку (p_0', H_{y0}'), либо одна из точек (p_0, H_{y0}) или (p_0', H_{y0}') (последний случай имеет место, когда обе волны распространяются в одну сторону от поверхности начального разрыва). Точки (p_0, H_{y0}), (p_0', H_{y0}') на плоскости (p, H_y) могут располагаться различным образом.

Рассмотрим более подробно случай, когда $H_{y0} > H_{y0}' > 0$, $p_0 > p_{S^+}(H_{y0}, H_{y0}', p_0')$, $p_0' < p_{R^+}(H_{y0}', H_{y0}, p_0)$, изображенный на рис. 33 (остальные случаи взаимного расположения точек (p_0, H_{y0}) и (p_0', H_{y0}') могут быть исследованы аналогично). При этом, как видно из рис. 33, возможны следующие комбинации волн, решающие задачу о распаде начального разрыва:

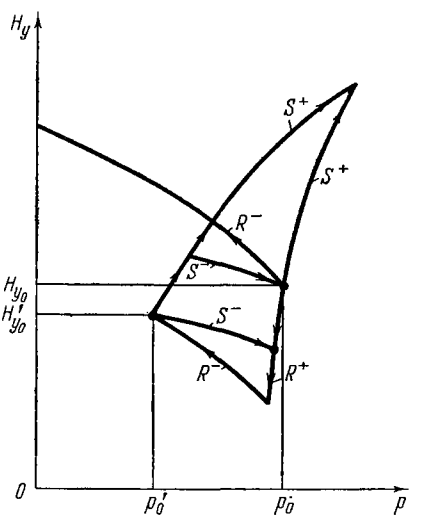


Рис. 33.

$$R^-TS^+, \quad R^+TS^-,$$
$$S^+TS^+, \quad R^+R^-T,$$
$$TS^-S^+. \qquad (2.1)$$

Здесь предполагалось, что кривые $p = p_{S^-}(H_y, H_{y0}, p_0)$ и $p = p_{S^-}(H_y, H_{y0}', p_0')$ не пересекаются, а кривые $p = p_{S^+}(H_y, H_{y0}, p_0)$ и $p = p_{S^+}(H_y, H_{y0}', p_0')$ пересекаются один раз. Условия, при которых могут осуществляться другие случаи, не исследованы.

В комбинациях (2.1) интенсивности входящих в них волн однозначно определены значениями величин p_0, H_{y0}, p_0', H_{y0}'. Поэтому каждой из рассмотренных комбинаций соответствует вполне определенная величина начального разрыва скорости Δu, Δv. Эти значения определяют на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ пять точек (рис. 34, где около каждой из этих точек написана комбинация волн, которой она соответствует).

Рассмотрим теперь случаи, когда решение задачи о распаде начального разрыва состоит из трех ударных или простых волн и контактного разрыва. Покажем, что в плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ комбинации такого типа соответствует линия. Рассмотрим в качестве примера комбинацию $R^-TR^-S^+$.

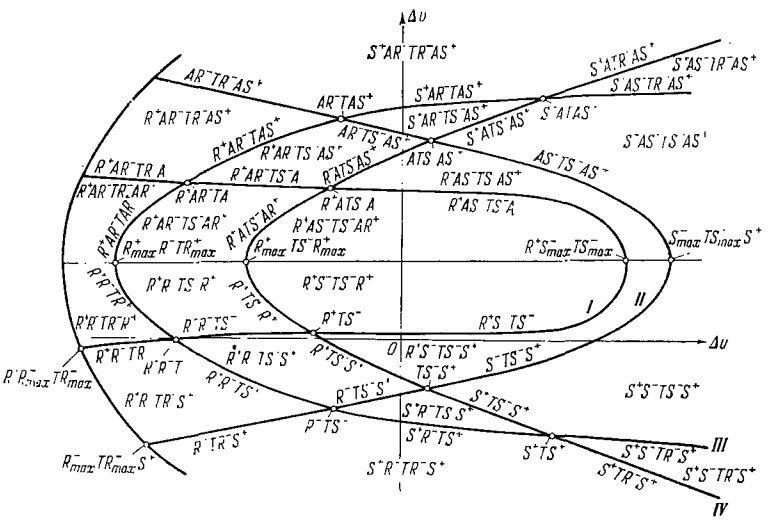


Рис. 34.

Характер изменения давления и магнитного поля в волнах, составляющих эту комбинацию, изображен на рис. 35 (ломаная линия $DBGC$). Контактному разрыву соответствует в этом случае точка B, лежащая на кривой R^-, выходящей из точки (p_0, H_{0y}). Решение задачи о распаде начального разрыва при заданных p_0, p_0', H_{y0}, H_{y0}' возможно при любом положении точки B на кривой $p = p_{R^-}(H_y, H_{y0}, p_0)$. Каждому положению точки B, которое мы будем задавать значением давления $p_3 = p_3'$ в этой точке, соответствуют определенные интенсивности всех волн, составляющих рассматриваемую комбинацию, а следовательно, определенные значения Δu и Δv, т. е. точка на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$. Меняя p_3, на плоскости начальных разрывов скорости, получим кривую.

Очевидно, что сумма изменений компонент скорости в каждой из волн, составляющих комбинацию, равна начальному разрыву скоростей, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\Delta u &= u_0 - u_0' = -\left|\Delta u_{R^-}\right| - \left|\Delta u_{R^-}'\right| + \left|\Delta u_{S^+}'\right|,\\ \Delta v &= v_0 - v_0' = -\left|\Delta v_{R^-}\right| - \left|\Delta v_{R^-}'\right| - \left|\Delta v_{S^+}'\right|.\end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

В этих выражениях знаки поставлены с учетом того, что каждый член представляет собой разность скорости слева от волны и скорости справа от волны. Интенсивность ударной волны в этой комбинации фиксирована (см. рис. 35). Интенсивности же волн разрежения связаны между собой и возрастают с уменьшением давления на контактном разрыве. При этом, как следует из (2.2), Δu и Δv убывают, т. е. на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ кривая, соответствующая рассматриваемой комбинации, имеет положительный наклон. Если интенсивность идущей вправо R^--волны равна нулю, то рассматриваемая комбинация переходит в комбинацию R^-TS^+, состоящую из двух волн и контактного разрыва. Таким образом, кривая, соответствующая комбинации $R^-TR^-S^+$, проходит на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ через точку, соответствующую комбинации R^-TS^+ (рис. 34). Когда интенсивность волн разрежения максимальна ($p_3 = 0$), то на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ получаем точку, которой соответствует комбинация $R^-_{\max}TR^-_{\max}S^+$. При этом после прохождения волн разрежения образуется пустота.

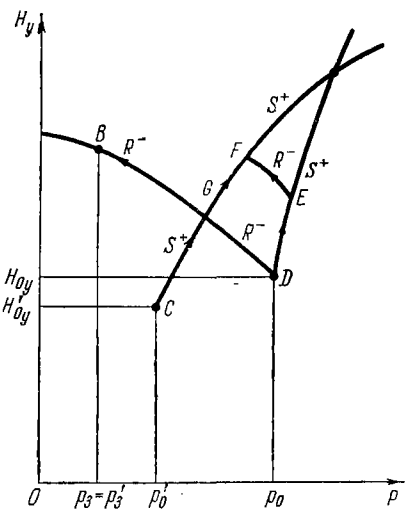


Рис. 35.

Нетрудно видеть, что в точке R^-TS^+, помимо линии $R^-TR^-S^+$, оканчиваются линии, которым соответствуют комбинации $R^+R^-TS^+$, $S^+R^-TS^+$, $R^-TS^-S^+$, когда интенсивность соответствующих волн равна нулю. Из уравнений этих линий, составленных аналогично уравнениям (2.2), следует, что они расположены так, как показано на рис. 34.

Выясним теперь, где оканчивается линия $S^+R^-TS^+$, выходящая из точки R^-TS^+. Из рис. 35 (ломаная $DEFC$) видно, что при движении по этой линии (на рис. 35 этому соответствует изменение положения точек F и E) интенсивность R^--волны будет уменьшаться до нуля. Таким образом, $S^+R^-TS^+$-линия приходит в точку, соответствующую S^+TS^+-комбинации. Из аналогичных рассуждений следует, что линии $R^+R^-TS^+$ и $R^-TS^-S^+$ оканчиваются соответственно в точках, которым соответствуют комбинации R^+R^-T и TS^-S^+. Во все эти точки могут приходить еще по три линии и т. д. Из сказанного следует, что комбинациям, состоящим из трех ударных или автомодельных волн и контактного разрыва в плоскости $(\Delta u, \Delta v)$, соответствуют линии. Точкам пересечения линий соответствуют рассмотренные выше комбинации, состоящие из двух ударных или автомодельных волн и контактного разрыва. Каждая такая точка отделяет одну линию от другой. Некоторые линии, например $S^+S^-TS^+$, $S^+TR^-S^+$, могут простираться до бесконечности. Кроме того, линии могут оканчиваться в точках, соответствующих максимальной интенсивности некоторых из входящих в комбинации волн. Так, например, линии $R^+R^-TR^+$, $S^-TS^-S^+$, $R^+TS^-R^+$ и $R^+S^-TS^-$ оканчиваются в точках $R^+_{\max}R^-TR^+_{\max}$, $S^-_{\max}TS^-_{\max}S^+$, $R^+_{\max}TS^-R^+_{\max}$ и $R^+S^-_{\max}TS^-_{\max}$, где интенсивность волн максимальна, т. е. тангенциальная составляющая магнитного поля за R^+- или S^--волнами равна нулю. Линии же $R^+R^-TR^-$ и $R^-TR^-S^+$ заканчиваются в точках $R^+R^-_{\max}TR^-_{\max}$ и $R^-_{\max}TR^-_{\max}S^+$, где интенсивность R^--волн максимальна и, следовательно, $\rho = 0$. Будем говорить, что точки $R^+_{\max}R^-TR^+_{\max}$, $R^+_{\max}TS^-R^+_{\max}$, $S^-_{\max}TS^-_{\max}S^+$ и $R^+S^-_{\max}TS^-_{\max}$ принадлежат *линии центров*, а точки $R^+R^-_{\max}TR^-_{\max}$, $R^-_{\max}TR^-_{\max}S^+$ принадлежат *линии*

вакуума. Смысл этих выражений будет ясен из дальнейшего.

Линии, соответствующие некоторым из рассмотренных комбинаций, являются продолжением одна другой и образуют на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ четыре кривые (*I*—*IV* на рис. 34). Например, кривая *I* состоит из линий, соответствующих комбинациям $R^+R^-TR^-$, $R^+R^-TS^-$, $R^+S^-TS^-$. Исследуя наклон кривых *I*—*IV*, легко убедиться в том, что максимальной ординатой каждой кривой являются точки линии центров.

Нетрудно видеть, что комбинациям, состоящим из четырех волн и контактного разрыва, в плоскости $(\Delta u, \Delta v)$ соответствуют области, так как в каждой комбинации из четырех волн и контактного разрыва Δu и Δv зависят от двух независимых параметров. Рассмотренные ранее линии, соответствующие комбинациям из трех ударных, или простых, волн и контактного разрыва, являются границами этих областей. Кроме того, границами рассматриваемых областей являются линии, на которых некоторые из входящих в комбинацию волн достигают максимальной интенсивности. Такими линиями является линия центров, на которой достигают максимальной интенсивности R^+- или S^--волны, а также линия вакуума, на которой максимальной интенсивности достигают R^--волны.

На рис. 34 в каждой из областей обозначена комбинация волн, возникающая при распаде начального разрыва, когда точка, соответствующая начальному разрыву скорости, принадлежит данной области.

Для завершения качественного исследования задачи, рассмотрим случаи, когда решение задачи о распаде начального разрыва содержит вращательные разрывы. Так как касательная составляющая магнитного поля $\boldsymbol{H}_\tau$ поворачивается только во вращательных разрывах, то углы поворота $\boldsymbol{H}_\tau$ во вращательных разрывах, идущих вправо и влево, связаны соотношением

$$\theta - \theta' = \alpha, \tag{2.3}$$

где α — угол между $\boldsymbol{H}_{\tau 0}$ и $\boldsymbol{H}'_{\tau 0}$.

Выясним прежде всего, при каких Δu, Δv и Δw решение задачи о распаде начального разрыва содержит три ударных или простых волны, а также вращательные и тангенциальный

разрывы. Рассмотрим в качестве примера комбинацию $AR^-TR^-AS^+$. Так как изменение $\boldsymbol{H}_\tau$ и давления p в ударных и простых волнах не зависят от направления вектора $\boldsymbol{H}_\tau$, то интенсивности волн R^-, S^+, входящих в данную комбинацию, определяются так же, как в плоском случае (рис. 35). Таким образом, при фиксированных p_0, p_0', $H_{\tau 0}$, $H_{\tau 0}'$ интенсивность волны S^+ в рассматриваемой комбинации фиксирована, а интенсивности волн R^- связаны между собой, причем интенсивность одной из них можно считать произвольной. Кроме того, в рассматриваемой комбинации имеется еще один произвольный параметр, характеризующий угол поворота вектора $\boldsymbol{H}_\tau$ в одном из вращательных разрывов (угол поворота вектора $\boldsymbol{H}_\tau$ в другом вращательном разрыве определяется соотношением (2.3)). Следовательно, в пространстве $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ комбинации $AR^-TR^-AS^+$ соответствует некоторая поверхность. Начальный разрыв скорости складывается из изменений скоростей в каждой из волн, составляющих комбинацию:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta u = -|\Delta u_{R^-}| - |\Delta u'_{R^-}| + |\Delta u'_{S^+}|,\\
&\Delta \boldsymbol{v}_\tau = \Delta v \boldsymbol{e}_y + \Delta w \boldsymbol{e}_z =\\
&= \frac{H_{\tau 2} - H_{\tau 0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} - \frac{H_{\tau 2}}{H_{\tau 2}} |\Delta \boldsymbol{v}_{\tau R^-}| - \frac{H'_{\tau 2}}{H_{\tau 2}} |\Delta \boldsymbol{v}'_{\tau R^-}| +\\
&\qquad + \frac{-H'_{\tau 1} + H'_{\tau 2}}{\sqrt{4\pi\rho'_1}} - \frac{H'_{\tau 0}}{H'_{\tau 0}} |\Delta \boldsymbol{v}'_{\tau S^+}|.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

При фиксированных интенсивностях ударной волны и волны разрежения уравнения (2.4) определяют в пространстве $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ окружность радиуса

$$R = \frac{H_{\tau 2}}{\sqrt{4\pi\rho_1}} + \frac{H'_{\tau 2}}{\sqrt{4\pi\rho'_1}} - |\Delta \boldsymbol{v}'_{\tau R^-}| - |\Delta \boldsymbol{v}_{\tau R^-}|, \qquad (2.5)$$

лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси Δu, центр которой находится в точке

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta u = L_x \equiv -|\Delta u_{R^-}| - |\Delta u'_{R^-}| + |\Delta u'_{S^+}|,\\
&\boldsymbol{L}_\tau \equiv -\frac{H_{\tau 1}}{\sqrt{4\pi\rho_1}} - \frac{H'_{\tau 1}}{\sqrt{4\pi\rho'_1}} - \frac{H'_{\tau 0}}{H_{\tau 0}} |\Delta \boldsymbol{v}'_{\tau S^+}|.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Таким образом, каждой из линий, изученных в плоском случае, в пространственном случае можно поставить в соответствие поверхности типа (2.4), отвечающие комбинациям, состоящим из тех же ударных и простых волн и вращательных разрывов. Линии вакуума при этом соответствует поверхность вакуума. Эти поверхности разбивают пространство $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ на области, точкам которых соответствует одна и та же комбинация волн в задаче о распаде начального разрыва.

Рассмотрим случай, когда векторы $\boldsymbol{H}_\tau$ и $\boldsymbol{H}'_\tau$ параллельны $(\alpha = 0)$. Выберем это направление за ось y. Тогда $L_z = 0$, т. е. центр окружности лежит в плоскости $(\Delta u, \Delta v)$. Сечения поверхности типа (2.4) плоскостью $w = 0$ являются в данном случае линиями, соответствующими комбинациям, содержащим три ударных или простых волны, тангенциальный разрыв и, возможно, вращательные разрывы, поворачивающие касательную составляющую магнитного поля на 180°.

Если $\boldsymbol{H}_{\tau 0}$ и $\boldsymbol{H}'_{\tau 0}$ одинаково направлены, то в комбинации могут присутствовать либо два вращательных разрыва, либо ни одного. Кривые, соответствующие комбинациям без вращательных разрывов, исследованы ранее. Каждой кривой, отвечающей комбинации без вращательных разрывов, можно поставить в соответствие кривую, отвечающую комбинации тех же простых и ударных волн с вращательными разрывами.

Точки этих кривых при одном и том же Δu одинаково удалены от центров окружностей (2.6). Можно показать, что центры этих окружностей составляют линию центров на плоскости $(\Delta u, \Delta v)$, рассмотренную ранее. Если $\Delta w = 0$ и векторы $\boldsymbol{H}_{\tau 0}$ и $\boldsymbol{H}'_{\tau 0}$ имеют противоположное направление, то в каждую комбинацию волн входит один вращательный разрыв. Исследование этого случая можно провести аналогичным образом.

Если точка в пространстве $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$, соответствующая начальному разрыву скоростей, лежит за поверхностью вакуума, то необходимо дополнительное исследование. За идущими в обе стороны R^--волнами максимальной интенсивности образуется пустота. На границе с пустотой выполняются соотношения $p = 0$, $\{\boldsymbol{E}_\tau\} = 0$, $\{\boldsymbol{H}_\tau\} = 0$. Но в силу

бесконечной проводимости среды $\boldsymbol{E}_{\tau 3} = -\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{H}_3)_\tau$, а

$$\boldsymbol{E}'_{\tau 3} = -\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}'_3 \times \boldsymbol{H}'_3)_\tau.$$

В пустоте в силу автомодельности задачи векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ постоянны. Аналогично предыдущему параграфу можно показать, что

$$(\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}'_3) \times \boldsymbol{H}_3 = 0. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) описывает прямую в пространстве (Δu, Δv, Δw). Из каждой точки поверхности вакуума можно провести прямые (2.7). Таким образом, если точка, соответствующая начальному разрыву скоростей, находится за поверхностью вакуума, то в решении задачи о распаде начального разрыва возникает область пустоты, и границы ее движутся со скоростями, разность которых представляется отрезком прямой (2.7) от точки, соответствующей начальному разрыву скоростей до поверхности вакуума.

§ 3. Распространение слабых ударных волн и слабых разрывов в пространстве

Пусть имеется некоторое магнитогидродинамическое течение:

$$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t), \quad \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}, t), \quad \rho_0(\boldsymbol{r}, t), \quad p_0(\boldsymbol{r}, t),$$
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z.$$

Будем изучать распространение по этому течению фронтов слабых разрывов, а также фронтов сильных разрывов, интенсивность которых достаточно мала, так что нормальную составляющую скорости такого разрыва относительно жидкости можно считать совпадающей с одной из скоростей малых возмущений [16, 17]. Уравнение движущейся поверхности разрыва будем искать в виде

$$w(\boldsymbol{r}) = t - t_0, \tag{3.1}$$

где $w(\boldsymbol{r})$ — функция, подлежащая определению. При этом поверхность $w(\boldsymbol{r}) = 0$ должна совпадать с начальной поверхностью разрыва Σ, которую будем считать известной. Таким образом,

$$w(\boldsymbol{r})|_\Sigma = 0. \tag{3.2}$$

Обозначим

$$\boldsymbol{q} = \operatorname{grad} w, \quad q_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}. \tag{3.3}$$

Так как нормальная составляющая скорости распространения поверхности разрыва (3.1) относительно газа равна одной из скоростей распространения малых возмущений, то

$$[v_{0n}(\boldsymbol{r}, t) \pm a_i(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n})] = \frac{1}{q}. \tag{3.4}$$

Здесь $v_{0n}(\boldsymbol{r}, t)$ — нормальная к поверхности составляющая скорости $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ основного течения, а $a_i(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n})$ — одна из скоростей малых возмущений. Скорость a_i зависит не только от параметров основного потока, но и от направления нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности разрыва. Так как $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}/q$, то уравнение (3.4) может быть записано в виде

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, w + t_0) - 1 \pm q a_i\left(\boldsymbol{r}, w + t_0, \frac{\boldsymbol{q}}{q}\right) = 0. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5), являющееся уравнением в частных производных первого порядка, совместно с граничным условием (3.2) служит для определения функции $w(\boldsymbol{r})$.

Как известно из теории уравнений в частных производных первого порядка [13], для решения такой задачи необходимо проинтегрировать характеристическую систему уравнений:

$$\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{dw}{ds} = \sum_\alpha q_\alpha \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{dq_\alpha}{ds} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial w} q_\alpha\right), \tag{3.6}$$

где через $F(\boldsymbol{r}, w, \boldsymbol{q})$ обозначена функция, стоящая в левой части уравнения (3.5), а s — параметр вдоль кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, которая находится при интегрировании системы (3.6) наряду с функциями $w(s)$ и $\boldsymbol{q}(s)$. В рассматриваемом случае из первой группы уравнений системы (3.6) получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{v}_0 \pm (a_i \boldsymbol{n} + q \operatorname{grad}_q a_i), \tag{3.7}$$

где через $\operatorname{grad}_q a_i$ обозначен вектор $\boldsymbol{e}_\alpha \partial a_i / \partial q_\alpha$, который ортогонален к $\boldsymbol{n}$ (так как a_i зависит от q_α только через $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}/q$). Вектор $q \operatorname{grad}_q a_i$ представляет собой градиент от a_i,

взятый по n_α, когда конец вектора $\boldsymbol{n}$ остается на поверхности единичной сферы

$$q \operatorname{grad}_q a_i \equiv \operatorname{grad}_{|n|=1} a_i.$$

Второе равенство (3.6) в силу (3.7) и (3.5) преобразуется к виду

$$\frac{dw}{ds} = \boldsymbol{q} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{v}_0 \pm q a_i = 1, \tag{3.8}$$

т. е. в качестве параметра s на интегральной кривой системы (3.6) можно принять $w = t - t_0$.

Кривые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ могут быть проведены из каждой точки $\boldsymbol{r}$ поверхности Σ, так как координаты этой точки x_α, совместно с выражениями

$$w = 0, \quad \boldsymbol{q} = q\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}}{v_{0n}(\boldsymbol{r}, t_0) \pm a_i(\boldsymbol{r}, t_0, \boldsymbol{n})} \tag{3.9}$$

представляют собой начальные данные, необходимые для интегрирования системы (3.6). Для того чтобы найти положение поверхности разрыва в момент времени t, необходимо на каждой такой кривой взять точку $\boldsymbol{r}$, в которой $w = t - t_0$. Совокупность этих точек и образует поверхность разрыва в момент t, причем вектор нормали к ней в некоторой точке $\boldsymbol{r}$ выражается через найденное при интегрировании системы (3.6) значение q_i в этой точке ($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}/q$). Очевидно, что при этом каждый элемент поверхности разрыва перемещается независимо от остальных, причем траекторией его движения является кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(w)$, а вектор нормали к поверхности есть $\boldsymbol{q}(w)/q(w)$.

Если поверхность разрыва Σ в начальный момент не является волной какого-либо определенного типа, то в следующий момент времени она должна распасться на несколько поверхностей различного типа, каждая из которых будет двигаться рассмотренным выше образом.

Рассмотрим подробнее простейший случай, а именно, пусть

$$\left.\begin{aligned} v_0(\boldsymbol{r}, t) &= 0, & \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}, t) &= \text{const}, \\ \rho_0(\boldsymbol{r}, t) &= \text{const}, & p_0(\boldsymbol{r}, t) &= \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

При этом уравнения (3.5) и (3.6) приобретают соответственно вид

$$qa_i\left(\frac{q}{q}\right) = \pm 1, \tag{3.11}$$

$$\frac{dr}{dw} = \pm (a_i n + \operatorname{grad}_{|n|=1} a_i), \quad \frac{dq}{dw} = 0. \tag{3.12}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае каждый элемент поверхности разрыва перемещается, не вращаясь ($dq/dw = 0$), с постоянной скоростью $\pm (a_i n + \operatorname{grad}_{|n|=1} a_i)$, причем нормальная к разрыву составляющая этой скорости равна a_i. Это позволяет применять следующий способ построения поверхности разрыва в момент времени t. Проведем всевозможные касательные плоскости к поверхности разрыва в начальный момент времени t_0. Затем, переместив эти плоскости в направлении нормали на расстояние $a_i(t - t_0)$, найдем для них огибающую поверхность. Эта огибающая поверхность и является поверхностью разрыва в момент времени t.

Построим таким способом для момента времени $t = t_0 + 1$ поверхность разрыва, которая получается из начальной поверхности разрыва, сосредоточенной вблизи начала координат. Будем считать, что размеры начальной поверхности разрыва пренебрежимо малы по сравнению с характерным размером задачи, который при $t - t_0 = 1$ имеет порядок a_i. Так как в этом случае поверхности разрыва должны обладать осевой симметрией с осью симметрии, параллельной H, то достаточно построить линии разрыва на плоскости, проходящей через H, которые являются линиями пересечения поверхностей разрыва с этой плоскостью. Откладывая в этой плоскости от начала координат векторы $na_i(n)$ и считая, что начальная поверхность разрыва таковá, что содержит всевозможно ориентированные элементы, получим, что концы этих векторов образуют кривые, совпадающие с диаграммой скоростей малых возмущений для быстрых и медленных волн (кривые l_+ и l_- на рис. 36). Для построения линий разрыва необходимо через концы векторов $na_i(n)$ провести перпендикулярно к ним прямые и найти огибающую этих прямых.

Так как $a_э = 0$, то очевидно, что линия энтропийного разрыва будет в любой момент времени совпадать с линией начального разрыва, т. е. в рассматриваемом приближении будет неподвижной точкой. Линия альфвеновского разрыва

будет представлять собой точки с координатами $\pm H/\sqrt{4\pi\rho}$, так как прямые, огибающими которых должны быть линии разрыва, в данном случае пересекаются в этих точках. Отсюда следует, что скорость произвольно ориентированного элемента энтропийного разрыва равна нулю, а скорость произвольно ориентированного элемента альфвеновского разрыва равна $\pm H/\sqrt{4\pi\rho}$. Эти результаты следуют также непосредственно из равенства (3.12) при подстановке $a_э = 0$ и $a_A = \pm H_n/\sqrt{4\pi\rho}$.

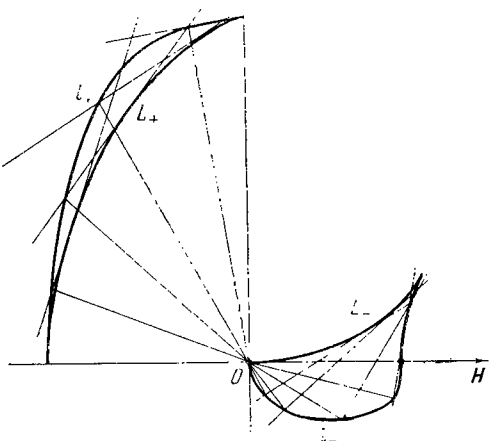


Рис. 36.

Построение линий быстрых и медленных магнитозвуковых разрывов (линии L_+ и L_-), возникающих из точечного возмущения, проведено на рис. 36. Полная картина линий разрыва, возникающих из точечного возмущения, изображена на рис. 37. Поверхности разрыва, которые являются поверхностями вращения линий разрыва вокруг H, обладают следующими свойствами [16]. Внешняя поверхность разрыва, которая является быстрой магнитозвуковой волной, представляет собой выпуклую осесимметричную поверхность. Медленный магнитозвуковой разрыв сосредоточен на поверхности, образованной вращением двух криволинейных треугольников CDN и $C'D'N'$ вокруг их оси симметрии. Эти треугольники имеют точки возврата в вершинах и лежат целиком внутри внешней поверхности разрыва. Кривые,

образующие стороны треугольников, обращены выпуклостью внутрь. Точки, представляющие альфвеновские разрывы, лежат при $H/\sqrt{4\pi\rho} > a_0$ на внешней поверхности (точки A и A'), а при $a_0 > H/\sqrt{4\pi\rho}$ — на внутренних поверхностях (точки B и B'). При $a_0 \to H/\sqrt{4\pi\rho}$ поверхности, образованные вращением сторон CD и $C'D'$ треугольников CDN и $C'D'N'$, стремятся к совпадению с некоторым участком внешней поверхности разрыва. При совпадении этих поверхностей образуются куски плоскостей, ограниченные окружностями. Точки, представляющие альфвеновские возмущения, лежат при этом в центрах этих окружностей.

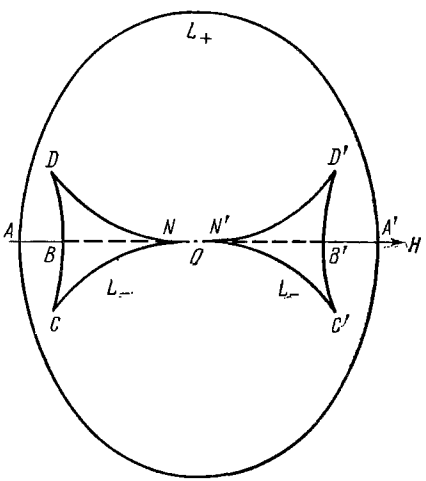


Рис. 37.

Отметим, что приведенный метод построения поверхностей разрыва не всегда может быть применим к элементам поверхности разрыва, которые представляют собой два фронта разрывов различных типов, слившихся вследствие совпадения скорости распространения в данном направлении. В этом случае могут существовать плоские поверхности разрыва, расширяющиеся с течением времени. Выше путем предельного перехода было рассмотрено распространение разрывов в том случае, когда в направлении магнитного поля совпадают скорости быстрых, медленных и альфвеновских возмущений. Кроме этого, в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, всегда совпадают скорости распространения медленных и альфвеновских возмущений ($a_- = a_A = 0$). Этот случай не может быть рассмотрен путем предельного перехода. Исследование распространения поверхностей разрывов от точечного возмущения показывает [17], что на оси симметрии в направлении магнитного поля имеется

разрыв между точками, соответствующими альфвеновским возмущениям. В плоском случае, когда все величины зависят от двух координат, а возмущения скорости и магнитного поля в направлении третьей оси равны нулю, этот разрыв заключен между точками N и N' (рис. 37). Построенные выше поверхности разрыва, распространяющиеся от точечного возмущения, могут служить для определения скорости

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dw} = \pm (a_i \boldsymbol{n} + \operatorname{grad}_{|\boldsymbol{n}|=1} a_i)$$

движения элемента поверхности разрыва с нормалью $\boldsymbol{n}$. Для этого на построенной поверхности разрыва нужно найти точку с нормалью $\boldsymbol{n}$, и радиус-вектор, проведенный в эту точку, даст скорость движения рассматриваемого элемента разрыва. Интересно отметить, что векторы $\frac{d\boldsymbol{r}}{dw}$ и $\boldsymbol{n}$ в быстрых возмущениях образуют с магнитным полем углы одного знака, а в медленных возмущениях — углы разных знаков.

§ 4. Одномерные осесимметричные движения с однородной деформацией

В настоящем параграфе будет рассмотрено некоторое точное решение [6] уравнений магнитной гидродинамики, аналогичное известному газодинамическому решению [12]. Оно может быть полезным при решении различного рода конкретных задач [5]. Обобщения этого решения получены в работах [5, 7, 11, 14, 18].

Рассмотрим одномерные осесимметричные движения совершенного газа. Если за лагранжеву координату принять расстояние r^0 частицы от оси симметрии при $t = 0$, то уравнения магнитной гидродинамики могут быть записаны в этом случае следующим образом:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}\left\{\left[\frac{\partial p}{\partial r^0} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial r^0}(H_z^2 + H_\varphi^2)\right]\left(\frac{\partial r}{\partial r^0}\right)^{-1} + \frac{1}{4\pi}\frac{H_\varphi^2}{r}\right\}, \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho^0 \frac{r^0}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial r^0}\right)^{-1}, \quad p = p^0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \\ H_\varphi &= \left(\frac{\partial r}{\partial r^0}\right)^{-1} H_\varphi^0, \quad H_z = H_z^0 \frac{r^0}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial r^0}\right)^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Здесь H_z и H_φ — компоненты напряженности магнитного поля в направлении, параллельном оси симметрии, и в направлении, перпендикулярном к ней, ρ — плотность, p — давление, r — координата частицы. Индекс нуль означает, что соответствующая величина взята при $t = 0$. Производная $\frac{\partial}{\partial t}$ берется при постоянном r^0, а производная $\frac{\partial}{\partial r^0}$ — при постоянном t.

Первое уравнение выражает закон сохранения количества движения, второе, третье, четвертое и пятое представляют собой законы сохранения массы, энтропии и магнитного потока. В этом параграфе будут рассмотрены все осесимметричные движения с однородной деформацией, т. е. такие, что

$$\frac{r}{r^0} = \mu(t), \tag{4.3}$$

где μ не зависит от r^0. При этом

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} = r^0 \mu'(t) = r \frac{\mu'(t)}{\mu(t)},$$

т. е. скорость линейно зависит от радиуса.

Из равенств (4.2) и (4.3) непосредственно следует:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho^0 \mu^{-2}, & p &= p^0 \mu^{-2\gamma}, \\ H_\varphi^2 &= H_\varphi^{02} \mu^{-2}, & H_z^2 &= H_z^{02} \mu^{-4}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Подставляя равенства (4.3) и (4.4) в уравнение (4.1), получим

$$r_0 \frac{d^2\mu}{dt^2} = -\frac{1}{\rho^0}\left[\mu^{1-2\gamma}\frac{\partial p^0}{\partial r^0} + \mu^{-1}\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial H_\varphi^{02}}{\partial r^0} + 2\frac{H_\varphi^{02}}{r^0}\right) + \right.$$
$$\left. + \mu^{-3}\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H_z^{02}}{\partial r^0}\right]. \tag{4.5}$$

Так как левая часть равенства пропорциональна r^0, то коэффициенты, стоящие в правой части при различных степенях μ, должны быть также пропорциональны r^0. Отсюда при $\gamma \neq 2$ получаются следующие выражения для p^0, H_φ^0 и H_z^0 через

плотность ρ^0, которая считается произвольной функцией r^0:

$$p^0 = A\int_0^{r^0} \rho^0 r^0\, dr^0 + N, \tag{4.6}$$

$$H_\varphi^{02} = \frac{4\pi B}{r^{02}}\int_0^{r^0} \rho^0 r^{03}\, dr^0 + \frac{M}{r^{02}}, \tag{4.7}$$

$$H_z^{02} = 8\pi D\int_0^{r^0} \rho^0 r^0\, dr^0 + L. \tag{4.8}$$

Здесь A, B, D, N, M, L — произвольные постоянные, причем $N \geqslant 0$, $M \geqslant 0$ и $L \geqslant 0$. Знаки A и D совпадают соответственно со знаками производных $\partial p/\partial r$ и $\partial H_z^2/\partial r$. Плотность тока $\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot} H$ определяется равенствами

$$\left.\begin{aligned} j_z = \mu^{-2} j_z^0 &= \frac{c}{4\pi}\mu^{-2}\frac{1}{r^0}\frac{\partial}{\partial r^0}\left(r^0 H_\varphi^0\right) = \\ &= \pm\,\mu^{-2}\frac{c}{8\pi}\frac{B\varphi'(r^0)}{\sqrt{M + B\varphi(r^0)}}, \\ j_\varphi = \mu^{-3} j_\varphi^0 &= \frac{c}{4\pi}\mu^{-3}\frac{\partial H_z^0}{\partial r^0} = \pm\,\mu^{-3}\frac{c}{8\pi}\frac{D\psi'(r^0)}{\sqrt{L + D\psi}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

где

$$\varphi = 4\pi\int_0^{r^0} \rho^0 r^{03}\, dr^0, \quad \psi = 8\pi\int_0^{r^0} \rho^0 r^0\, dr^0.$$

Кроме того, по оси симметрии течет концентрированный ток

$$i = \frac{c}{2}\sqrt{M}. \tag{4.10}$$

Если $B > 0$, то распределенный ток j_z совпадает по направлению с концентрированным током; если $B < 0$, то эти токи противоположны. Если же $M = 0$, т. е. концентрированного тока нет, то B должно быть обязательно положительным.

Если $\gamma = 2$, то в первый и последний члены правой части уравнения (4.5) $\mu(t)$ входит в одинаковых степенях. Поэтому

(4.6) и (4.8) заменяются одним соотношением

$$p^0 + \frac{H_z^{02}}{8\pi} = A \int_{0-}^{r^0} \rho^0 r^0 dr^0 + N, \tag{4.11}$$

и решение содержит две произвольные функции $\rho^0(r^0)$ и $H_z^0(r^0)$.

Используя равенства (4.6) — (4.8), перепишем (4.5) следующим образом:

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} = -A\mu^{1-2\gamma} - B\mu^{-1} - D\mu^{-3}, \tag{4.12}$$

где при $\gamma = 2$ следует считать $D = 0$. Уравнение (4.12) служит для определения $\mu(t)$. Умножая равенство (4.12) на $d\mu/dt$ и интегрируя, получим уравнение

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \frac{A}{\gamma - 1}\mu^{2-2\gamma} - 2B\ln\mu + \frac{1}{2}D\mu^{-4} + C \equiv f(\mu), \tag{4.13}$$

или

$$t = \pm \int \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}.$$

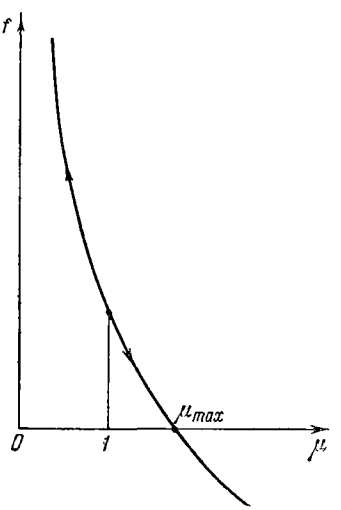


Рис. 38.

Здесь C — произвольная постоянная, которая при заданных A, B и D определяется начальной «скоростью» $\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_t = 0$. Постоянная C должна быть такой, что $f(1) \geqslant 0$.

Качественное поведение решения уравнения (4.13) зависит от вида функции $f(\mu)$, который в свою очередь зависит от постоянных A, B, C, D. Рассмотрим для простоты случай $H_z^0 = \text{const}$, когда $D = 0$. В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие случаи:

1) $A > 0$, $B > 0$. В этом случае $f(\mu)$ имеет вид, изображенный на рис. 38. Если $d\mu/dt < 0$ при $t = 0$, то μ

становится равной нулю через конечное время. При этом μ все время убывает и происходит сжатие всего газа к оси симметрии. Если же $d\mu/dt > 0$, то μ сначала достигает своего максимального значения в точке $\mu = \mu_{max}$. В этой точке производная $d\mu/dt$ меняет знак, после чего за конечное время происходит уменьшение $\mu(t)$ до нуля. Таким образом, в рассматриваемом случае, если при $t = 0$, $d\mu/dt > 0$, то происходит сначала расширение газа, а затем его сжатие к оси симметрии.

2) $A < 0$, $B < 0$. Если $d\mu/dt > 0$ при $t = 0$, то μ возрастает до бесконечности при $t \to \infty$, т. е. происходит разлет газа. При этом «скорость» $d\mu/dt \to \infty$. Если же $d\mu/dt < 0$ при $t = 0$, то μ сначала достигает своего минимального значения, а затем возрастает до бесконечности.

3) $A > 0$, $B < 0$. Возможны следующие подслучаи:

а) $f(\mu)$ не имеет корней. Тогда, если $d\mu/dt > 0$ при $t = 0$, то происходит разлет газа, а если $d\mu/dt < 0$ при $t = 0$, то происходит сжатие газа к оси.

б) $f(\mu)$ имеет один двойной корень μ_0. При этом если знаки $d\mu/dt$ и $\mu_0 - 1$ совпадают, то происходят лимитационные движения газа $\mu \to \mu_0$ при $t \to \infty$. В противном случае будет происходить разлет или сжатие газа к оси в зависимости от знака $\mu_0 - 1$. Если $\mu_0 = 1$, то имеем положение неустойчивого равновесия.

в) $f(\mu)$ имеет два корня, причем единица не может лежать между ними. Если $1 \leqslant \mu_1 < \mu_2$, то движение газа происходит аналогично случаю 1). Если же $\mu_2 < \mu_1 \leqslant 1$, то движение происходит аналогично случаю 2).

4) $A < 0$, $B > 0$. При этом существуют либо два корня $\mu_1 < 1 < \mu_2$, либо один двойной корень $\mu_1 = \mu_2 = 1$. В случае двойного корня точка $\mu = 1$ является положением устойчивого равновесия. При $\mu_1 < 1 < \mu_2$ происходят периодические колебания μ между значениями μ_1 и μ_2 с периодом, зависящим от постоянных A, B, C, т. е. происходят пульсации газа.

Рассмотрим теперь цилиндр конечной длины и конечного радиуса $r^0 = a$. Пусть $H_z^2 = 0$. Для того чтобы явление внутри цилиндра описывалось полученным решением, достаточно с торцов поставить проводящие стенки, а к боковой его поверхности приложить давление, равное полному

давлению изнутри:

$$p^*(a, t) = p^0(a)\,\mu^{-2\gamma} + \frac{H_\varphi^{02}(a)\,\mu^{-2}}{8\pi}.$$

Это давление можно создать внешним магнитным полем. Давление магнитного поля на поверхность цилиндра равно $H_в^2/8\pi$ ($H_в$ — напряженность внешнего поля). Так как циркуляция магнитного поля вдоль некоторого контура пропорциональна полному току, протекающему через поверхность, натянутую на этот контур, то суммарная сила тока, текущего вдоль цилиндра, должна быть равна

$$I(t) = \frac{c}{2}\,a\mu H_в = \frac{c}{2}\,a\sqrt{8\pi p^0(a)\,\mu^{2-2\gamma} + H_\varphi^{02}(a)}.$$

В частности, при $p^0(a) = 0$ суммарная сила тока получается постоянной по времени. Таким образом, для того чтобы явление внутри цилиндра описывалось полученным решением, необходимо к концам цилиндра приложить такое напряжение, чтобы суммарный ток был равен $I(t)$. При этом ток, который течет внутри цилиндра, не зависит от приложенного напряжения, а находится из уравнений магнитной гидродинамики. Приложенное же напряжение влияет только на величину поверхностного тока.

ГЛАВА VI

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

§ 1. Характеристики уравнений магнитной гидродинамики, описывающих стационарные течения

В этом параграфе будут рассмотрены свойства характеристик системы уравнений магнитной гидродинамики, описывающей плоские (в плоскости x, y) стационарные движения бесконечно проводящего газа при $w = 0$ и $H_z = 0$ [1, 2, 5, 6, 7]. Эта система уравнений может быть записана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi\rho}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}, \\ \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} &= 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) &= 0, \quad \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\frac{p}{\rho^{\gamma}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Как уже указывалось ранее, характеристическими поверхностями называются поверхности, на которых возможны слабые разрывы. В случае плоских движений характеристические поверхности являются цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси z. Линии пересечения этих поверхностей с плоскостью (x, y) называются *характеристическими линиями* или просто *характеристиками*. Было выяснено, что скорость распространения поверхностей слабого разрыва равна сумме нормальной составляющей скорости газа и одной из скоростей распространения малых возмущений. В случае стационарных движений, когда характеристики неподвижны, это условие принимает вид

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \pm a_i = 0 \tag{1.2}$$

($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к характеристике, лежащий в плоскости x, y) и служит для определения направления характеристик. Так как в настоящем параграфе рассматриваются плоские движения, при которых $H_z = 0$, $w = 0$, то альфвеновские возмущения невозможны, потому что они нарушают это условие. Характеристики, соответствующие энтропийным разрывам, должны, очевидно, совпадать с линиями тока. Направления характеристик, соответствующих быстрым и медленным магнитозвуковым разрывам, определяются из условия

$$v_n^2 = a_{+,-}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(a_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right) \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right)^2 - \frac{H_n^2 a_0^2}{\pi\rho}}\right] \qquad (1.3)$$

(верхний знак соответствует быстрой магнитозвуковой скорости, нижний знак — медленной). Перейдя в (1.3) к безразмерным переменным

$$M_i = \frac{v_i}{a_0} \quad \text{и} \quad N_i^2 = \frac{H_i^2}{4\pi\gamma p} = \frac{H_i^2}{4\pi\rho a_0^2}, \qquad i = x,\ y, \qquad (1.4)$$

и воспользовавшись тем, что

$$v_n = v_x \sin\alpha - v_y \cos\alpha, \quad H_n = H_x \sin\alpha - H_y \cos\alpha,$$
$$H^2 = H_x^2 + H_y^2, \quad \operatorname{tg}\alpha = y'(x), \quad N^2 = N_x^2 + N_y^2,$$

где $y = y(x)$ — уравнение характеристики в плоскости течения, преобразуем (1.3) к следующему виду:

$$(y')^4\left[M_x^4 + N_x^2 - M_x^2(1+N^2)\right] + (y')^3\left[2M_xM_y(1+N^2) - \right.$$
$$\left. - 4M_x^2M_y - 2N_xN_y\right] + (y')^2\left[6M_x^2M_y^2 - M^2(1+N^2) + N^2\right] +$$
$$+ y'\left[M_xM_y(1+N^2) - 4M_xM_y^3 - 2N_xN_y\right] +$$
$$+ \left[M_y^4 - M_y^2(1+N^2) + N_y^2\right] = 0. \qquad (1.5)$$

Чтобы получить уравнение для тангенса угла наклона характеристики к линии тока, достаточно в (1.5) положить $M_y = 0$.

Направления характеристик можно найти также и графическим путем. Направления характеристик в точке потока r совпадают с направлениями касательных, проведенных из

точки $-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ к линиям L_+ и L_-, построенным в начале координат по параметрам потока в точке $\boldsymbol{r}$ (рис. 39). Действительно, согласно результатам § 3 гл. V, векторная скорость движения относительно газа элемента поверхности разрыва, лежащего на построенной таким образом касательной, равна

$$a_i\boldsymbol{n}+\operatorname{grad}_{|\boldsymbol{n}|=1} a_i$$

($\boldsymbol{n}$ — нормаль к касательной, a_i — одна из скоростей малых возмущений) и совпадает с радиусом-вектором (например, OC, рис. 39), проведенным из начала координат в точку

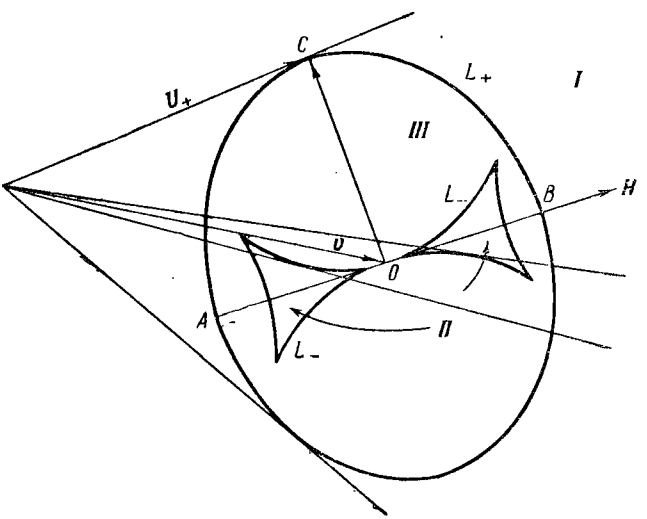


Рис. 39.

касания. Очевидно при этом, что равенство (1.2) выполняется и, следовательно, построенное направление является характеристическим. Скорость элемента разрыва, расположенного вдоль характеристики, равная

$$\boldsymbol{U}_i=\boldsymbol{v}+a_i\boldsymbol{n}+\operatorname{grad}_{|\boldsymbol{n}|=1} a_i,$$

представляет собой вектор, проведенный из точки $-\boldsymbol{v}$ в точку касания. Таким образом, элементы разрывов

движутся вдоль характеристик со скоростью U_t от источника возмущения.

Проведенное исследование позволяет определить число и направление характеристик в каждой точке потока, а также показывает, что разрывы малой интенсивности, возникающие от стационарного точечного возмущения, помещенного в данную точку потока, локализуются на лучах характеристик, проведенных из данной точки в направлении векторов U_t. Эти лучи будем называть *уходящими характеристиками*, а остальные части характеристик, проведенных через эту точку, — *приходящими в данную точку характеристиками*.

В зависимости от того, в какую из трех областей, изображенных на рис. 39, попадает конец вектора $-v$ в потоке газа, движущегося со скоростью v, будет различное число действительных характеристик. Если конец вектора $-v$ попадает в область *I*, то существует четыре действительные характеристики (см. рис. 39). Эту область значений параметров потока будем называть *гиперболической* (смысл названий различных областей станет ясен из дальнейшего). Если конец вектора $-v$ попадает в область *II*, то в потоке существует также четыре действительные характеристики (рис. 40). В отличие от области *I* эту область значений параметров потока назовем *квазигиперболической*. Если же конец

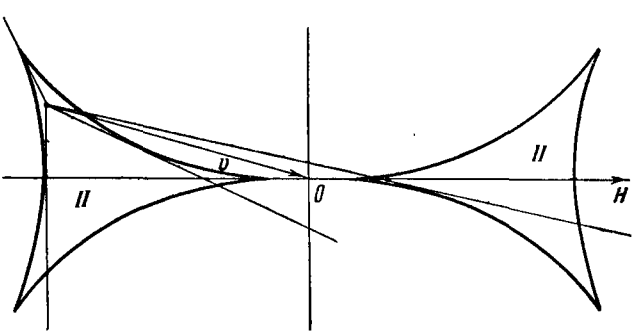


Рис. 40.

вектора $-v$ попадает в область *III*, то существует только две действительные характеристики (рис. 41). Эта область значений параметров потока называется *эллиптико-гипербо-*

лической. Заметим, что если векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ параллельны, то в этом случае направление двух характеристик совпадает с направлением скорости (две характеристики вырождаются в линии тока) и, следовательно, кроме линий тока, в областях *I* и *II* существует по две действительные характеристики, а в области *III* — ни одной.

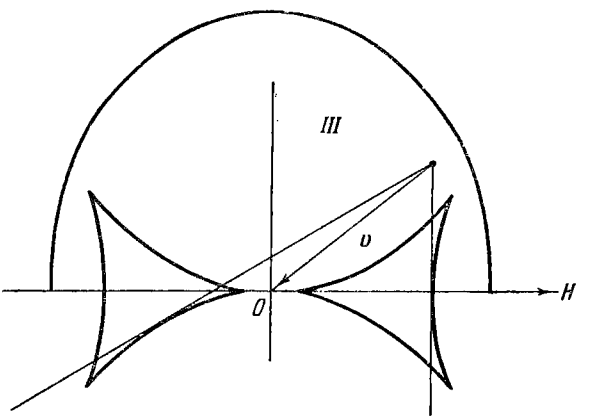


Рис. 41.

Характеристики плоского поступательного потока играют важную роль при решении задач об обтекании тонких тел потоком газа. Рассмотрению этих задач посвящен следующий параграф.

§ 2. Линейные задачи

В этом параграфе рассмотрим задачу об обтекании тонких тел потоком идеального газа [1, 2, 3, 6, 7].

Пусть имеется поступательный поток идеального газа, скорость которого равна $\boldsymbol{U}_0 = U_0\boldsymbol{e}_x$. В этот поток помещено тело такое, что вызванные им возмущения основного потока можно считать столь малыми, что их квадратами по сравнению с параметрами основного потока можно пренебрегать. Решим задачу о стационарном обтекании рассматриваемого тела в присутствии внешнего однородного магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$ составляющего с направлением скорости некоторый угол α. Линеаризируя систему (1.1), получим следующие уравнения

для определения параметров возмущенного движения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \rho}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial h_x}{\partial x}+\frac{\partial h_y}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{N_y}{M}\left(\frac{\partial h_x}{\partial y}-\frac{\partial h_y}{\partial x}\right),\\ &\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{N_x}{M}\left(\frac{\partial h_x}{\partial y}-\frac{\partial h_y}{\partial x}\right),\\ &h_y+\frac{N_y}{M}u-v\frac{N_x}{M}=0, \quad p=\frac{1}{M^2}\rho, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где

$$u=\frac{u'}{U_0}, \quad v=\frac{v'}{U_0}, \quad p=\frac{p'}{\rho_0 U_0^2}, \quad \rho=\frac{\rho'}{\rho_0},$$

$$h_x=\frac{h_x'}{\sqrt{4\pi\rho_0}U_0}, \quad h_y=\frac{h_y'}{\sqrt{4\pi\rho_0}U_0}, \quad M^2=\frac{U_0^2\rho_0}{\gamma p_0}, \quad N=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\gamma p_0}}.$$

p_0, ρ_0 — давление и плотность в невозмущенном потоке, а величины со штрихом означают возмущения параметров поступательного потока.

Линии разрыва решения системы (2.1) располагаются вдоль характеристик невозмущенного потока, число и направление их легко определить, пользуясь результатами предыдущего параграфа. Следовательно, возникающие при обтекании тела ударные волны и волны разрежения будут, согласно линейной теории, направлены вдоль характеристик невозмущенного потока (интенсивность этих волн будет, естественно, малой, и энтропия при переходе через ударные волны не меняется). Таким образом, картина обтекания тонкого тела будет существенным образом зависеть от того, в какую из трех областей (рис. 39) попадает конец вектора $-U$ при заданных параметрах невозмущенного потока.

Если, преобразуя систему (2.1), исключить из нее все искомые функции, кроме одной, то для определения этой последней получится дифференциальное уравнение четвертого порядка, причем вид уравнения не зависит от того, какая

из искомых функций определяется:

$$\left[(1-M^2)(M^2-N_x^2)+M^2N_y^2\right]\frac{\partial^4\eta_l}{\partial x^4}+\left[M^2-(1-M^2)\times\right.$$
$$\left.\times(N_x^2+N_y^2)\right]\frac{\partial^4\eta_l}{\partial x^2\partial y^2}-N_y^2\frac{\partial^4\eta_l}{\partial y^4}-2N_xN_y\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta\eta_l=0, \quad (2.2)$$

где под η_l подразумевается любая из искомых функций u, v, ρ, h_x или их производные. Это уравнение легко получить, если воспользоваться следующим правилом. Пусть система линейных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{lj}u_l=0, \quad (2.3)$$

где u_l — матрица-столбец искомых функций, а $\|a_{lj}\|$ — матрица дифференциального оператора системы (2.2). Тогда каждая из искомых функций обращает в нуль оператор, представляющий собой определитель матрицы $\|a_{lj}\|$.

В частных случаях, когда коэффициенты исходной системы (2.1) таковы, что она может быть преобразована к виду, распадающемуся на независимые части, функции, входящие в каждую из подсистем, удовлетворяют уравнениям типа (2.2) более низкого порядка, а оператор уравнения (2.2) является произведением соответствующих операторов для подсистем. При этом очевидно, что все искомые функции будут удовлетворять уравнению (2.2), но не все решения уравнений (2.2) будут удовлетворять исходной системе.

Будем искать решения уравнения (2.2) в виде

$$\eta_l=f_l(y+\xi x), \quad (2.4)$$

где f_l — произвольная функция своего аргумента. Очевидно, что число решений уравнения (2.2) такого вида совпадает с числом действительных характеристик уравнения (2.2), причем ξ представляет собой тангенс угла наклона характеристики к оси x. Подставляя (2.4) в (2.2), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&(\xi^4+a\xi^3+b\xi^2+a\xi+c)f_l^{\mathrm{IV}}=0,\\
&a=-2\frac{N_xN_y}{(1-M^2)(M^2-N_x^2)+M^2N_y^2},\\
&b=\frac{M^2-N^2(1-M^2)}{(1-M^2)(M^2-N_x^2)+M^2N_y^2},\\
&c=-\frac{N_y^2}{(1-M^2)(M^2-N_x^2)+M^2N_y^2}, \quad N^2=N_x^2+N_y^2.
\end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

Таким образом, условием существования нетривиального решения типа (2.4) уравнения (2.2) является выполнение равенства

$$\xi^4 + a\xi^3 + b\xi^2 + a\xi + c = 0. \tag{2.6}$$

Если (2.6) имеет четыре действительных корня, то оператор (2.2) является гиперболическим и уравнение (2.2) имеет четыре действительные характеристики и четыре решения вида (2.4). Если (2.6) имеет два действительных корня, то оператор (2.2) имеет две действительные характеристики и два решения вида (2.4). В этом случае уравнение (2.2) будем называть *эллиптико-гиперболическим*.

Очевидно, что оператор (2.2) всегда может быть представлен как произведение двух операторов второго порядка (этот вопрос равносилен вопросу о разложении многочлена (2.6) на множители):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + P\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + Q\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + R\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + S\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\eta_i = 0. \tag{2.7}$$

Если (2.2) имеет гиперболический тип, то оба оператора в (2.7) гиперболические, если же (2.2) — эллиптико-гиперболический оператор, то в (2.7) один оператор эллиптический, а другой гиперболический. Так как вопрос о типе оператора (2.2) связан с вопросом о числе действительных характеристик невозмущенного потока, то при заданных параметрах невозмущенного потока тип оператора (2.2) определяется тем, в какую из областей на рис. 39 попадает конец вектора $-U_0$. В областях *I* и *II* рис. 39 оператор (2.2) имеет гиперболический тип, а в области *III* — эллиптико-гиперболический.

Для того чтобы найти искомые функции, соответствующие конкретной задаче, необходимо сформулировать граничные условия для уравнения (2.2). Если все точки обтекаемого тела расположены вблизи оси x, то, как обычно в линейной теории, граничные условия ставятся на некотором отрезке оси x. С гидродинамической точки зрения граничные условия должны выражать тот факт, что обтекаемое тело является линией тока. Кроме того, должны быть выполнены электродинамические условия, определяющие разрыв электромагнитного поля в точках оси x, соответствующих

обтекаемому телу. Эти условия сводятся к условию непрерывности нормальной составляющей магнитного поля (h_y) и к тому, что разрыв касательной составляющей магнитного поля определяется суммой токов, текущих в теле, и поверхностных токов, текущих в жидкости на границе с телом. Условие непрерывности касательной составляющей электрического поля выполняется автоматически, так как при плоских движениях во всем пространстве $\boldsymbol{E} = E_z \boldsymbol{e}_z$ и $E_z = \text{const}$. Кроме указанных условий, будем всюду предполагать, что в потоке, кроме рассматриваемого тела, нет никаких других источников возмущений.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть в невозмущенном потоке магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$ параллельно вектору скорости ($N_y = 0$). Так как течение плоское, то в этом случае из уравнения $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) = 0$ следует, что $\boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} = 0$, т. е. во всех точках возмущенного потока магнитное поле и скорость параллельны. Это обстоятельство вместе с условием, что поверхность тела есть линия тока, обеспечивает равенство нулю на поверхности тела нормальной составляющей магнитного поля. Таким образом, в данном случае решение задачи зависит только от гидродинамических граничных условий. Разрыв касательной составляющей магнитного поля определяется токами, текущими в теле, и поверхностными токами — в жидкости, причем токи, текущие в теле, надо считать заданными, а поверхностные токи в жидкости определяются решением задачи.

Пусть функции $y_\pm = f_\pm(x)$ задают форму обтекаемого тела, причем плюс относится к верхней поверхности тела, а минус — к нижней. Вне отрезка оси x, занятого телом, функции $f_\pm \equiv 0$. Так как поверхность тела есть линия тока, то задание функции $f_\pm(x)$ определяет значение v в точках поверхности тела, т. е. приводит к следующим граничным условиям для определения функции v:

$$v = f'_\pm(x) \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \tag{2.8}$$

Здесь L — длина тела. Уравнение (2.2) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\eta_i = 0.$$

Величина b определена в (2.5). Однако в этом случае система легко преобразуется к виду, распадающемуся на подсистемы. При этом функция v удовлетворяет уравнению более низкого порядка, которое получается из (2.1) последовательным исключением входящих туда функций:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{2.9}$$

Для определения функции v необходимо решить это уравнение при граничном условии (2.8). Если $v(x, y)$ найдена, то остальные функции находятся по формулам, получаемым путем последовательного интегрирования системы (2.1):

$$\left.\begin{aligned} h_y = \frac{N_x}{M}\, v, \quad \rho = -\frac{M^2}{M^2-1}\int_{-\infty}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}\, dx, \\ u = -p, \\ p = \frac{1}{M^2}\,\rho; \quad h_x = \frac{N_x}{M}(1 - M^2)\, u. \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

В этих равенствах произвольные функции y, возникающие при интегрировании системы (2.1), положены равными нулю в силу отсутствия в потоке источников возмущений, кроме обтекаемого тела, так как эти функции связаны с характеристиками исходной системы, параллельными оси x и не проходящими через тело.

Если конец вектора $-U$, лежащего на прямой AB (рис. 39), находится в области III, то $b > 0$ и уравнение (2.9) имеет эллиптический тип. Для определения $v(x, y)$ в этом случае надо решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа с граничными условиями (2.8). Суммарная сила, действующая на тело, представляет собой сумму сил магнитного и гидродинамического давлений. Коэффициент полного давления дается формулой

$$C_p = \frac{p' + p'_m}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0'} = 2\frac{p' + \frac{H_0}{4\pi}h'_x}{\rho_0 U_0^2} =$$

$$= 2\left(p + \frac{N_x}{M}h_x\right) = -2\frac{M^2 - N_x^2(1-M^2)}{M^2}\,u. \tag{2.11}$$

Как видно из рис. 39, возможны эллиптические области трех типов. В области $N_x < 1$, $N_x < M < 1$ добавочные скорости и коэффициент давления имеют те же знаки, что и при дозвуковом обтекании тонкого тела в обычной гидродинамике. Поэтому и характер течения в этой области аналогичен гидродинамическому. В области $0 < M < M^* = N_x/\sqrt{1+N_x^2}$ картина скоростей аналогична гидродинамической, но сила имеет направление, противоположное направлению силы в обычной гидродинамике. В области $N_x > 1$, $1 < M < N_x$, все величины p, ρ, u, C_p имеют знаки, обратные знакам этих величин в обычной гидродинамике.

Если конец вектора $-\boldsymbol{U}$, лежащего на прямой AB (рис. 39), находится в областях I и II, то $b < 0$ и уравнение (2.9) имеет гиперболический тип. Его общим решением будет

$$v_{\pm} = f_{1\pm}\left[x - (-b)^{-\frac{1}{2}}y\right] + f_{2\pm}\left[x + (-b)^{-\frac{1}{2}}y\right].$$

Функции $f_{1\pm}$ и $f_{2\pm}$ должны быть определены из граничных условий. Так как мы предполагаем, что кроме обтекаемого тела источников возмущения нет, то те из функций, аргумент которых связан с приходящими характеристиками, тождественно равны нулю.

В гиперболической области (рис. 39) приходящими являются характеристики, направленные вверх по потоку от тела, следовательно, для течений в гиперболической области

$$f_{2+} = f_{1-} = 0,$$

и решение сверху от тела имеет вид

$$v_+ = f_{1+}\left[x - (-b)^{-\frac{1}{2}}y\right],$$

а снизу от тела вид

$$v_- = f_{2-}\left[x + (-b)^{-\frac{1}{2}}y\right].$$

Функции f_{1+} и f_{2-} определяются из условия (2.8). Харак-

тер течения в гиперболической области аналогичен течению при сверхзвуковом обтекании тела. Образующиеся в потоке волны сжатия и разрежения направлены вдоль уходящих от тела характеристик вниз по потоку. В область перед телом, ограниченную уходящими от передней кромки характеристиками, возмущения не проникают. Характер течения изображен на рис. 42. Жирные линии представляют собой волны сжатия, тонкие — волны разрежения. Решение (2.10) в этом случае принимает вид:

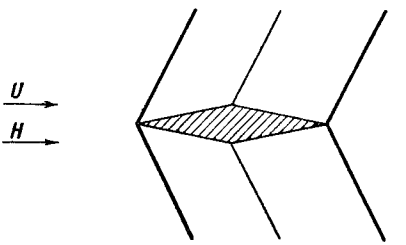


Рис. 42.

$$\left.\begin{aligned} v_+ &= f'_+\left[x-(-b)^{-\frac{1}{2}}y\right], \quad h_{y+}=\frac{N_x}{M}v_+, \\ p_+ &= \frac{M^2}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}}v_+, \\ p_+ &= \frac{1}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}}v_+, \quad u_+ = -\frac{1}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}}v_+, \\ h_{x+} &= \frac{N_x}{M}(-b)^{-\frac{1}{2}}v_+, \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

$$\left.\begin{aligned} v_- &= f'_-\left[x+(-b)^{-\frac{1}{2}}y\right], \quad h_{y-}=\frac{N_x}{M}v_-, \\ p_- &= -\frac{M^2}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}}v_-, \\ p_- &= -\frac{1}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}}v_-, \quad u_- = \frac{1}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}}v_-, \\ h_{x-} &= -\frac{N_x}{M}(-b)^{-\frac{1}{2}}v_-. \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

В квазигиперболической области (рис. 40) приходящие характеристики направлены от тела вниз по потоку, поэтому

$$f_{1+} = f_{2-} = 0,$$

и решение в квазигиперболической области выше тела имеет вид

$$v_+ = f_{2+}\left[x + (-b)^{-\frac{1}{2}} y\right],$$

а ниже тела

$$v_- = f_{1-}\left[x - (-b)^{-\frac{1}{2}} y\right].$$

Функции f_{2+} и f_{1-} определяются граничным условием (2.8). В отличие от течений в газовой динамике и течения в гиперболической области, волны сжатия и волны разрежения в этом случае направлены вдоль уходящих от тела характеристик вверх по потоку (рис. 43). Решение (2.10) в этом случае имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} v_+ &= f'_+\left[x + (-b)^{-\frac{1}{2}} y\right], \quad h_{y+} = \frac{N_x}{M} v_+, \\ \rho_+ &= -\frac{M^2}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}} v_+, \\ p_+ &= -\frac{1}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}} v_+, \quad u_+ = \frac{1}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}} v_+, \\ h_{x+} &= -\frac{N_x}{M}(-b)^{-\frac{1}{2}} v_+, \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

$$\left.\begin{aligned} v_- &= f'_-\left[x - (-b)^{-\frac{1}{2}} y\right], \quad h_{y-} = \frac{N_x}{M} v_-, \\ \rho_- &= \frac{M^2}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}} v_-, \\ p_- &= \frac{1}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}} v_-, \quad u_- = -\frac{1}{M^2-1}(-b)^{-\frac{1}{2}} v_-, \\ h_{x-} &= \frac{N_x}{M}(-b)^{-\frac{1}{2}} v_-. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

Сравнение соотношений (2.12), (2.13) и (2.14), (2.15) показывает, что величины ρ, p, u имеют в соответствующих

точках в квазигиперболической области те же знаки, что и в гиперболической области, в частности, направление силы совпадает с ее направлением при обтекании того же тела в гиперболической области. В данном случае картины течения (рис. 42 и 43) легко нарисовать, если знать направления уходящих характеристик и учесть характер изменения скорости в соответствующих разрывах. В нелинейной теории получающимся здесь слабым разрывам соответствуют ударные волны, или волны разрежения.

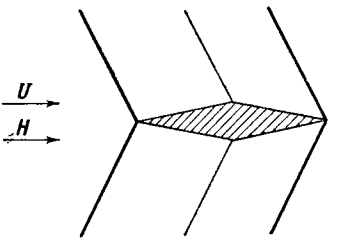


Рис. 43.

2. Направление поля в невозмущенном потоке $\boldsymbol{H}_0$ перпендикулярно к скорости ($N_x = 0$). В этом случае уравнение (2.6) превращается в биквадратное и имеет корни

$$\xi = \pm \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При этом уравнение (2.2) может быть представлено в виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta_i = 0,$$
$$A = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad B = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \qquad (2.16)$$

Выражения (2.5) для b и c показывают, что невозможно одновременное выполнение неравенств $b > 0$, $c > 0$, так как при этом должно было бы быть

$$M^2 [(1 - M^2) + N_y^2] < 0 \quad \text{и} \quad M^2 - N_y^2 (1 - M^2) < 0,$$

что невозможно. Отсюда следует, что либо $A > 0$ и $B > 0$, либо A и B разных знаков. В первом случае оба оператора в (2.16) имеют гиперболический тип (соответствующая точка находится в гиперболической области) (рис. 39) и в каждой точке имеется четыре действительные характеристики; во втором случае один оператор гиперболический, а другой — эллиптический (эллиптико-гиперболическая область — в каждой точке существует две действительные характери-

стики). Если оператор (2.16) эллиптико-гиперболический, то для определенности будем считать, что $A > 0$, а $B < 0$. Заметим, что при $N_x = 0$ квазигиперболической области не существует (рис. 39).

Рассмотрим в качестве примера обтекание плоской полубесконечной пластины ($x > 0$, $y = 0$), по которой течет поверхностный ток плотности $i_z(x) = \frac{c}{4\pi} i(x)$. В этом случае, при отсутствии поверхностных токов в жидкости, граничные условия будут формулироваться следующим образом:

$$v_+ = v_- = 0, \quad h_{y+} = h_{y-}, \quad h_{x+} - h_{x-} = i(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x > 0. \tag{2.17}$$

Вообще говоря, плотность поверхностных токов в жидкости при $\nu_m = \nu = 0$ определяется скоростью потока на поверхности тела и отношением ν_m/ν (см. § 1 гл. II), которое зависит от свойств жидкости. Условие отсутствия поверхностных токов в жидкости эквивалентно условию $\nu_m/\nu = \infty$.

Если параметры невозмущенного потока соответствуют гиперболической области и если за искомую функцию принять $v(x, y)$, то общее решение уравнения (2.16) будет иметь вид

$$v = f_1\left[x - (A)^{-\frac{1}{2}} y\right] + f_2\left[x - (B)^{-\frac{1}{2}} y\right] + f_3\left[x + (A)^{-\frac{1}{2}} y\right] + f_4\left[x + (B)^{-\frac{1}{2}} y\right],$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 — произвольные функции своих аргументов. Так как, кроме обтекаемого тела, в потоке отсутствуют источники возмущений, и следовательно, возмущения распространяются только вдоль уходящих от тела характеристик, то решение в верхней и нижней полуплоскостях будет соответственно иметь вид

$$\left.\begin{aligned} v_+ &= f_{1+}\left[x - (A)^{-\frac{1}{2}} y\right] + f_{2+}\left[x - (B)^{-\frac{1}{2}} y\right], \\ v_- &= f_{1-}\left[x + (A)^{-\frac{1}{2}} y\right] + f_{2-}\left[x + (B)^{-\frac{1}{2}} y\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Так как уходящие от тела характеристики направлены в этом случае вниз по потоку (см. рис. 39), то поток впереди тела не возмущен вплоть до характеристик большего наклона, проходящих через точку $x = 0$. Произвольные функции

в (2.18) должны быть определены из условий (2.17). Первое условие (2.17) дает, что при $y=0$

$$f_{1+}=-f_{2+}\equiv f_{+}, \qquad f_{1-}=-f_{2-}\equiv f_{-}. \tag{2.19}$$

Решение задачи, которое, воспользовавшись (2.18) и (2.19), можно получить последовательным интегрированием системы (2.1) (при $N_x=0$), можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&v_{+}=f_{+}(\zeta_1)-f_{+}(\zeta_2), \quad p_{+}=A^{\frac{1}{2}}f_{+}(\zeta_1)-(B)^{\frac{1}{2}}f_{+}(\zeta_2),\\
&\rho_{+}=M^2p_{+}, \quad u_{+}=\left[(A)^{-\frac{1}{2}}-M^2(A)^{\frac{1}{2}}\right]f_{+}(\zeta_1)-\\
&\qquad -\left[(B)^{-\frac{1}{2}}-M^2(B)^{\frac{1}{2}}\right]f_{+}(\zeta_2),\\
&h_{y+}=-\frac{N_y}{M}u_{+}, \quad \frac{N_y}{M}h_{x+}=-\left[\left(1-\frac{N_y^2}{M^2}\right)\times\right.\\
&\qquad \left.\times(1-M^2A)+A\right]f_{+}(\zeta_1)+\left[\left(1-\frac{N_y^2}{M^2}\right)\times\right.\\
&\qquad \left.\times(1-M^2B)+B\right]f_{+}(\zeta_2),
\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

$$\left.\begin{aligned}
&v_{-}=f_{-}(\zeta_3)-f_{-}(\zeta_4), \quad p_{-}=-A^{\frac{1}{2}}f_{-}(\zeta_3)+\\
&\qquad +B^{\frac{1}{2}}f_{-}(\zeta_4), \quad \rho_{-}=M^2p_{-},\\
&u_{-}=-\left(A^{-\frac{1}{2}}-M^2A^{\frac{1}{2}}\right)f_{-}(\zeta_3)+\\
&\qquad +\left(B^{-\frac{1}{2}}-M^2B^{\frac{1}{2}}\right)f_{-}(\zeta_4), \quad h_{y-}=-\frac{N_y}{M}u_{-},\\
&\frac{N_y}{M}h_{x-}=-\left[\left(1-\frac{N_y^2}{M^2}\right)(1-M^2A)+A\right]\times\\
&\qquad \times f_{-}(\zeta_3)+\left[\left(1-\frac{N_y^2}{M^2}\right)(1-M^2B)+B\right]f_{-}(\zeta_4),
\end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

где

$$\zeta_1 = x - A^{-\frac{1}{2}}y, \quad \zeta_2 = x - B^{-\frac{1}{2}}y, \quad \zeta_3 = x + A^{-\frac{1}{2}}y,$$

$$\zeta_4 = x + B^{-\frac{1}{2}}y.$$

Функции f_+ и f_- определяются из оставшихся условий (2.17), причем из условия $h_{y+} = h_{y-}$ в силу (2.20) и (2.21) следует, что

$$f_+(\zeta) = -f_-(\zeta), \tag{2.22}$$

а из последнего условия заключаем, что

$$\left.\begin{aligned} h_{x+} &= -h_{x-} = \frac{1}{2}\,i(x), \\ f_+(\zeta) &= \frac{1}{2}\,\frac{N_y}{M}\,[(A-B)(M^2-N^2-1)]^{-1}l(\zeta). \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

Пользуясь выражениями (2.5), (2.16) и (2.23), легко показать, что в гиперболической области ($M^2 > N^2 + 1$)

$$A > B \text{ и } \operatorname{sign} f_+(\zeta) = \operatorname{sign} l(\zeta). \tag{2.24}$$

где

$$\operatorname{sign} a = \begin{cases} 1 & \text{при } a > 0, \\ -1 & \text{при } a < 0, \end{cases} \qquad \operatorname{sign} 0 = 0.$$

Соотношение (2.22), совместно с (2.20) и (2.21), показывает, что течение в нижней полуплоскости является в данном случае зеркальным отражением течения в верхней полуплоскости. В области между характеристиками, проходящими через точку $x = 0$, имеют место равенства $f_+(\zeta_2) = 0$ и $f_-(\zeta_4) = 0$. Из соотношений (2.24), (2.20) и (2.21) вытекает, что

$$\operatorname{sign} p_+ = \operatorname{sign} p_- = \operatorname{sign} l. \tag{2.25}$$

Отсюда следует, что если $l(0) > 0$, то в силу (2.25) вблизи характеристик, ограничивающих область невозмущенного потока,

$$p_+ > 0 \quad \text{и} \quad p_- > 0,$$

т. е. эти характеристики являются волнами сжатия. Если же $i(0) < 0$, то характеристики, ограничивающие область невозмущенного потока, являются волнами разрежения. Так как вблизи пластины $v \to 0$, то характеристики, находящиеся внутри возмущенной области, в первом случае являются волнами разрежения, а во втором — сжатия (это легко установить, если учесть характер изменения скорости в волнах сжатия и разрежения малой интенсивности).

Проведенный анализ позволяет построить картину течения при обтекании пластины с током (рис. 44). Жирные линии на чертеже представляют волны сжатия, тонкие — разрежения. Заметим, что течение в области между пластиной и второй волной является возмущенным. При $N_y \to 0$ эта область превращается в тангенциальный разрыв.

Если параметры невозмущенного потока таковы, что оператор (2.16) имеет эллиптико-гиперболический тип, то будем искать решение задачи в виде суммы

$$\eta_i = \eta_{i\text{г}} + \eta_{i\text{э}}, \qquad (2.26)$$

причем $\eta_{i\text{г}}$ и $\eta_{i\text{э}}$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\eta_{i\text{г}} = 0, \quad A > 0, \qquad (2.27)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - B\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\eta_{i\text{э}} = 0, \quad B < 0. \qquad (2.28)$$

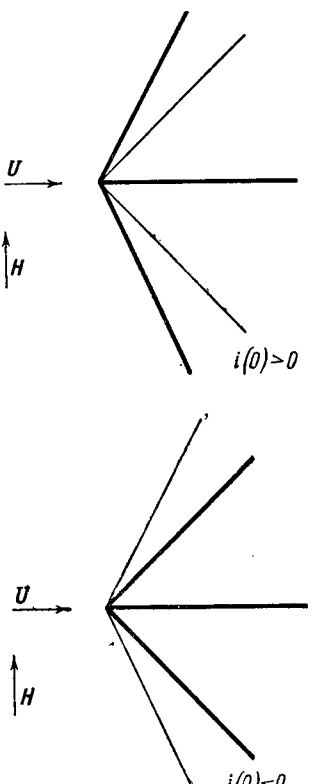


Рис. 44.

Если в качестве искомой функции в уравнении (2.27) выбрать $v_\text{г}(x, y)$, $(\eta_{i\text{г}} = v_\text{г})$, то эта часть решения может быть

записана в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&v_{\text{г},+} = f_+\left(x - A^{-\frac{1}{2}}y\right), \quad p_{\text{г},+} = A^{\frac{1}{2}} f_+,\\
&\rho_{\text{г},+} = M^2 A^{\frac{1}{2}} f_+, \quad u_{\text{г},+} = \left(A^{-\frac{1}{2}} - M^2 A^{\frac{1}{2}}\right) f_+,\\
&h_{x,\text{г},+} = -\frac{M}{N_y}\left[\left(1 - \frac{N_y^2}{M^2}\right)(1 - M^2 A) + A\right] f_+ \equiv \lambda f_+,\\
&h_{y,\text{г},+} = -\frac{N_y}{M}\left(A^{-\frac{1}{2}} - M^2 A^{\frac{1}{2}}\right) f_+,\\
&v_{\text{г},-} = f_-\left(x + A^{-\frac{1}{2}}y\right), \quad p_{\text{г},-} = -A^{\frac{1}{2}} f_-,\\
&\rho_{\text{г},-} = -M^2 A^{\frac{1}{2}} f_-, \quad u_{\text{г},-} = -\left(A^{-\frac{1}{2}} - M^2 A^{\frac{1}{2}}\right) f_-,\\
&h_{x,\text{г},-} = -\frac{M}{N_y}\left[\left(1 - \frac{N_y^2}{M^2}\right)(1 - M^2 A) + A\right] f_- \equiv -\lambda f_-,\\
&h_{y,\text{г},-} = -\frac{N_y}{M}\left(A^{-\frac{1}{2}} - M^2 A^{\frac{1}{2}}\right) f_-.
\end{aligned}\right\} \quad (2.29)$$

Здесь, аналогично предыдущему, функции f_+ и f_- описывают решение соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Выберем за искомую функцию в уравнении (2.28) $v(x, y)$, $(\eta_{l\text{э}} = v)$. Остальные функции будут выражаться через нее по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&v_\text{э} = v(x, y), \quad h_{y,\text{э}} = -\varkappa \int_0^y \frac{\partial v}{\partial x}\, dy + h(x),\\
&h(x) = \varkappa \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial x}\, dy, \qquad u_\text{э} = \frac{M}{N_y}\varkappa\left[\int_0^y \frac{\partial v}{\partial x}\, dy - h(x)\right],\\
&\rho_\text{э} = M^2 p_\text{э}, \qquad p_\text{э} = \int_{-\infty}^x \frac{\partial v}{\partial y}\, dx, \qquad h_{x,\text{э}} = \varkappa v,\\
&\varkappa \equiv -B\left[\frac{N_y}{M}(1 + B) - \frac{M}{N_y}B\right]^{-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (2.30)$$

Здесь мы воспользовались тем, что возмущения, описываемые этой частью решения, на бесконечности должны затухать, так как уравнение (2.28) является эллиптическим.

Вид граничных условий для определения $v(x, y)$ из уравнения (2.28), а также функций f_+ и f_- в (2.29) должен быть определен из граничных условий (2.17). Используя уравнения (2.26), (2.29) и (2.30), можно записать эти граничные условия в следующем виде:

$$f_{\text{г}, +}(x) + v_{\text{э}}(x, +0) = 0, \quad f_{\text{г}, -}(x) + v_{\text{э}}(x, -0) = 0,$$
$$-f_{\text{г}, -}(x) = f_{\text{г}, +}(x),$$
$$\lambda f_{\text{г}, +}(x) + \varkappa v_{\text{э}}(x, +0) - \lambda f_{\text{г}, -}(x) - \varkappa v_{\text{э}}(x, -0) = i(x).$$

Отсюда следует, что

$$f_{\text{г}, +}(x) = \frac{i(x)}{2} \frac{1}{(\lambda - \varkappa)}, \quad f_{\text{г}, -}(x) = -\frac{i(x)}{2} \frac{1}{(\lambda - \varkappa)} \tag{2.31}$$

и

$$v(x, +0) = -\frac{i(x)}{2(\lambda - \varkappa)}, \quad v(x, -0) = \frac{i(x)}{2(\lambda - \varkappa)}. \tag{2.32}$$

Таким образом, для завершения решения задачи необходимо решить задачу Дирихле для уравнения (2.28) с граничными условиями (2.32), заданными на положительной части оси x. После этого по формулам (2.31), (2.30), (2.29) и (2.26) можно определить все искомые функции.

Так как решение в данном случае содержит эллиптическую часть ($\eta_{\text{э}i}$), то возмущения, вызванные пластиной с током, проникают во все пространство, затухая лишь на бесконечности. Кроме того, в области течения существуют две поверхности разрыва, совпадающие с уходящими характеристиками уравнения (2.27), проходящими через точку $x = 0$.

В заключение отметим, что решение задачи об обтекании тонких тел можно получать, используя соотношения, которые выполняются вдоль характеристик системы (2.1) [1, 2]. Выражения (2.12) — (2.15), (2.20), (2.21) и (2.29) являются, по существу, разрешением соотношений вдоль характеристик системы (2.1).

§ 3. Стационарные простые волны

В этом параграфе рассматриваются стационарные движения идеального газа, в которых все величины зависят только от некоторой комбинации пространственных переменных. Такие движения будем называть *стационарными простыми*

волнами. Ниже будут рассмотрены простые волны, в которых все величины зависят только от угла φ, отсчитываемого в плоскости (x, y), и не зависят от координаты z [4]. Эти волны могут быть использованы при решении задачи об обтекании угла.

Если перейти к цилиндрической системе координат (r, φ, z) с осью, параллельной оси z, и учесть, что все функции зависят только от φ, то систему уравнений магнитной гидродинамики можно привести к виду:

$$\rho v_r + v_\varphi \rho' + \rho v'_\varphi = 0, \tag{3.1}$$

$$v_\varphi (H'_r - H_\varphi) = H_\varphi (v'_r - v_\varphi) - H_r (v'_\varphi + v_r), \tag{3.2}$$

$$H'_\varphi + H_r = 0, \tag{3.3}$$

$$v_\varphi H'_z = H_\varphi v'_z - H_z (v'_\varphi + v_r), \tag{3.4}$$

$$v_\varphi (v'_r - v_\varphi) = \frac{H_\varphi}{4\pi\rho} (H'_r - H_\varphi), \tag{3.5}$$

$$v_\varphi (v'_\varphi + v_r) = -\frac{1}{\rho}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right)', \tag{3.6}$$

$$v_\varphi v'_z = \frac{H_\varphi}{4\pi\rho} H'_z, \tag{3.7}$$

$$p = C\rho^\gamma. \tag{3.8}$$

Штрихом обозначены производные по φ. Прежде всего заметим, что системе (3.1) — (3.8) должно удовлетворять решение, описывающее поступательный поток в однородном магнитном поле. В поступательном потоке отсутствует расширение частиц жидкости. Кроме того, при рассмотрении нестационарных одномерных движений газа было показано, что в магнитной гидродинамике возможны и другие движения газа, в которых газ ведет себя как несжимаемая жидкость (вращательные простые волны). В связи с этим изучим решения системы (3.1) — (3.8), в которых не происходит расширение газа:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = v'_\varphi + v_r = 0. \tag{3.9}$$

При этом система (3.2) — (3.8) упростится и перейдет в следующую:

$$v_\varphi (H_r' - H_\varphi) = H_\varphi (v_r' - v_\varphi), \tag{3.10}$$

$$H_\varphi' = -H_r, \tag{3.11}$$

$$v_\varphi H_z' = H_\varphi v_z', \tag{3.12}$$

$$v_\varphi (v_r' - v_\varphi) = \frac{H_\varphi}{4\pi\rho}(H_r' - H_\varphi), \tag{3.13}$$

$$p + \frac{H^2}{8\pi} = \text{const}, \tag{3.14}$$

$$v_\varphi v_z' = \frac{H_\varphi}{4\pi\rho} H_z', \tag{3.15}$$

$$p = C\rho^\gamma. \tag{3.16}$$

В решениях этого типа, согласно (3.9), (3.16) и (3.14),

$$\rho = \text{const}, \quad p = \text{const} \quad \text{и} \quad H^2 = \text{const}.$$

Комбинируя (3.12) и (3.15), получим

$$\left(v_\varphi^2 - \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho}\right) v_z' = 0, \qquad \left(v_\varphi^2 - \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho}\right) H_z' = 0. \tag{3.17}$$

Комбинируя (3.10) и (3.13), получим

$$\left(v_\varphi^2 - \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho}\right)(v_r' - v_\varphi) = 0, \quad \left(v_\varphi^2 - \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho}\right)(H_r' - H_\varphi) = 0. \tag{3.18}$$

Из (3.17) и (3.18) следует, что либо

$$v_z' = H_z' = v_r' - v_\varphi = H_r' - H_\varphi = 0, \tag{3.19}$$

либо

$$v_\varphi^2 = \frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho}. \tag{3.20}$$

В первом случае, используя уравнения (3.13) и (3.11), получим решение в виде:

$$\left.\begin{aligned} &v_z = \text{const}, && H_z = \text{const}, \\ &v_r = A\cos(\varphi - \varphi_0), && v_\varphi = -A\sin(\varphi - \varphi_0), \\ &H_r = B\cos(\varphi - \varphi_1), && H_\varphi = -B\sin(\varphi - \varphi_1), \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

где A, B, φ_0, φ_1 — постоянные.

Полученное решение представляет собой поступательный поток, причем постоянные A, B, φ_0 и φ_1 определяются граничными условиями.

Из равенств (3.12) и (3.10) следует, что

$$\left.\begin{aligned} H'_z &= \frac{H_\varphi}{v_\varphi} v'_z, \\ H'_r &= \frac{H_\varphi}{v_\varphi} v'_r. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Если имеет место равенство (3.20), то

$$\frac{H_\varphi}{v_\varphi} = \sqrt{4\pi\rho} = K = \text{const}.$$

Интегрируя уравнения (3.22), получим, что

$$H_z = Kv_z + K_1, \quad H_r = Kv_r + K_2, \quad \begin{matrix} K_1 = \text{const}, \\ K_2 = \text{const}. \end{matrix}$$

Из уравнений (3.9) и (3.11), при условии (3.20), следует

$$H'_\varphi + H_r = Kv'_\varphi + Kv_r + K_2 = K_2 = 0.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{H} = K\boldsymbol{v} + K_1\boldsymbol{e}_z, \tag{3.23}$$

т. е. в этом решении в системе координат, движущейся со скоростью $K_1K_2^{-1}\boldsymbol{e}_z$, векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ параллельны и постоянны по абсолютной величине. Для завершения построения решения в этом случае необходимо найти вектор $\boldsymbol{H}$. Для его определения служат только соотношение $H^2 = \text{const}$ и уравнение (3.11), из которых следует:

$$H'^2_\varphi = H^2 - H^2_\varphi - H^2_z. \tag{3.24}$$

Следовательно, решение задачи зависит от одной произвольной функции, за которую можно принять $H_z(\varphi)$. Тогда уравнение (3.24) определяет H_φ, а H_r находится из соотношения

$$H^2_r = H^2 - H^2_\varphi - H^2_z.$$

Полученное решение назовем *стационарной вращательной простой волной*. Это решение может описывать движения как газа, так и несжимаемой жидкости. Выберем систему координат, движущуюся вдоль оси z, так, чтобы в равенствах (3.23) было $K_1 = 0$; тогда во всем потоке $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{H}/\sqrt{4\pi\rho}$. Отсюда

следует, что для несжимаемой жидкости полученное решение есть частный случай решений, рассмотренных нами ранее, в которых $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{H}/\sqrt{4\pi\rho}$, и форма линий тока произвольна, а именно такое решение из этого класса, в котором все величины зависят только от угла φ и давление постоянно. Если $H_z(\varphi)$ меняется разрывным образом, то решение (3.22)—(3.24) описывает стационарный вращательный разрыв. Если $H_z(\varphi) = \text{const}$, то получаем частный случай решения (3.21), описывающего поступательный поток.

Рассмотрим теперь решения, в которых происходит изменение плотности. Система (3.1)—(3.8) в общем случае пока не исследована, известно только, что в области, где происходит изменение параметров потока, она имеет алгебраический интеграл вида

$$v_\varphi^4 - \left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + C\gamma\rho^{\gamma-1}\right) v_\varphi^2 + C\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{H_\varphi^2}{4\pi\rho} = 0,$$

который показывает, что решения системы (3.1)—(3.8) обладают тем свойством, что нормальная к лучу $\varphi = \text{const}$ скорость равна одной из скоростей звука. Отсюда следует, что в искомом решении прямые $\varphi = \text{const}$ являются характеристиками, так же как в соответствующем решении в обычной газовой динамике.

В дальнейшем будем рассматривать простые волны, в которых вектор скорости $\boldsymbol{v}$ параллелен вектору напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$. В этом случае из уравнений $\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$ следует, что

$$\boldsymbol{H} = C_1\rho\boldsymbol{v}, \qquad C_1 = \text{const}. \tag{3.25}$$

При этом уравнения индукции удовлетворяются, а уравнения неразрывности и движения приводятся к виду:

$$v_\varphi' + v_r = -\frac{v_\varphi\rho'}{\rho}, \tag{3.26}$$

$$v_\varphi^2 = \frac{d}{d\rho}\left(p + \frac{C_1^2\rho^2 v^2}{8\pi}\right), \tag{3.27}$$

$$\left(1 - \frac{C_1^2}{4\pi}\rho\right)(v_r' - v_\varphi) = \frac{C_1^2}{4\pi}\rho' v_r, \tag{3.28}$$

$$\left(1 - \frac{C_1^2}{4\pi}\rho\right) v_z' = \frac{C_1^2}{4\pi}\rho' v_z, \tag{3.29}$$

$$p = C\rho^\gamma. \tag{3.30}$$

Уравнение (3.29) интегрируется:

$$v_z = C_2\left(1 - \frac{C_1^2}{4\pi}\rho\right)^{-1} = C_2(1 - b\rho)^{-1}, \qquad (3.31)$$

где

$$b = \frac{C_1^2}{4\pi}.$$

Если в уравнениях (3.26) — (3.28) выразить v_z из (3.31) и p из (3.30), то получим три обыкновенных дифференциальных уравнения для определения ρ, v_φ, v_r.

Произведем дифференцирование в правой части (3.27):

$$v_\varphi^2 = C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho v^2 + \frac{b}{2}\rho^2\left[\frac{2C_2^2 b}{(1-b\rho)^3} + \frac{d}{d\rho}(v_\varphi^2 + v_r^2)\right]. \qquad (3.32)$$

Умножая (3.26) на v_φ, (3.28) на v_r, получим, что

$$\frac{1}{2}\frac{dv_\varphi^2}{d\rho} + \frac{v_\varphi v_r}{\rho'} = -\frac{v_\varphi^2}{\rho}, \qquad \frac{1}{2}\frac{dv_r^2}{d\rho} - \frac{v_\varphi v_r}{\rho'} = \frac{bv_r^2}{1-b\rho}.$$

Складывая эти уравнения и подставляя в (3.32), найдем конечное соотношение, связывающее v_φ, v_r, ρ, которое является, следовательно, интегралом системы (3.26) — (3.30):

$$v_\varphi^2 = C\gamma\rho^{\gamma-1} + \frac{b^2\rho^2 C_2^2}{(1-b\rho)^3} + b\rho(v_\varphi^2 + v_r^2 + v_z^2) + \\ + b\rho^2\left(\frac{bv_r^2}{1-b\rho} - \frac{v_\varphi^2}{\rho}\right) = C\gamma\rho^{\gamma-1} + \frac{b\rho C_2^2}{(1-b\rho)^3} + \frac{b\rho}{1-b\rho}v_r^2. \qquad (3.33)$$

Так как $\boldsymbol{H} = C_1\rho\boldsymbol{v}$ и $\sigma = \infty$, то $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) = 0$, и, следовательно, система (3.26) — (3.30) имеет еще один интеграл — интеграл типа Бернулли:

$$\frac{v_\varphi^2 + v_r^2 + v_z^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}C\rho^{\gamma-1} = C_3. \qquad (3.34)$$

Из соотношений (3.33) и (3.34) можно выразить v_φ и v_r через ρ. После этого функция $\rho(\varphi)$ находится квадратурой

из уравнения неразрывности

$$\rho = -\int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{v_r v_\varphi \, d\varphi}{\frac{v_\varphi^2}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{dv_\varphi^2}{d\rho}} + C_4. \tag{3.35}$$

Убедимся в том, что $v_\varphi^2 = a_{+,-}^2$, т. е. что лучи $\varphi = \text{const}$ являются характеристиками. Действительно,

$$a_{+,-}^2 = \frac{1}{2}\left[(C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho v^2) \pm \sqrt{(C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho v^2)^2 - 4b\rho C\gamma\rho^{\gamma-1}v_\varphi^2}\right],$$

но в силу (3.34) и (3.33)

$$C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho v^2 = C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho\left(v_\varphi^2 + v_r^2 + v_z^2\right) =$$

$$= C\gamma\rho^{\gamma-1} + b\rho\left[v_\varphi^2 + \frac{C_2^2}{(1-b\rho)^2}\right] +$$

$$+ (1-b\rho)v_\varphi^2 - C\gamma\rho^{\gamma-1}(1-b\rho) - b\rho\frac{C_2^2}{(1-b\rho)^2} = v_\varphi^2 + C\gamma b\rho^\gamma,$$

следовательно,

$$a_{+,-}^2 = \frac{1}{2}\left[(v_\varphi^2 + C\gamma b\rho^\gamma) \pm |v_\varphi^2 - C\gamma b\rho^\gamma|\right].$$

Таким образом:

$$a_+^2 = v_\varphi^2, \quad a_-^2 = C\gamma b\rho^\gamma \quad \text{при} \quad v_\varphi^2 > C\gamma b\rho^\gamma,$$
$$a_+^2 = C\gamma b\rho^\gamma, \quad a_-^2 = v_\varphi^2 \quad \text{при} \quad v_\varphi^2 < C\gamma b\rho^\gamma,$$

то есть v_φ совпадает с медленной скоростью звука, если $v_\varphi^2 < C\gamma b\rho^\gamma$; при обратном знаке неравенства v_φ совпадает с быстрой скоростью звука.

Решение содержит пять констант: C, C_1, C_2, C_3 и C_4. Эти константы должны быть определены из граничных условий, которые могут быть заданы на одном из лучей $\varphi = \varphi^*$.

Заметим, что если $v_z = 0$ при $\varphi = \varphi^*$, т. е. на начальной характеристике движение плоское, то $C_2 = 0$ и $v_z \equiv 0$, т. е. все течение является плоским.

Так как все величины в полученном решении выражаются через ρ, то для выяснения характера зависимости всех

величин от угла φ в простых волнах разного типа достаточно выяснить характер зависимости ρ от угла φ. Из (3.35) следует, что

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = -\frac{1}{v_r v_\varphi}\left[\frac{v_\varphi^2}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{dv_\varphi^2}{d\rho}\right] =$$
$$= -\frac{1}{v_\varphi v_r}\left[\frac{\gamma+1}{2} C\gamma\rho^{\gamma-2} - \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{2(\gamma-1)} C\gamma b\rho^{\gamma-1} + \frac{3}{2} C_3\right] =$$
$$= -\frac{1}{v_\varphi v_r}\left[\frac{\gamma+1}{2} C\gamma\rho^{\gamma-2}\left(1 - \frac{\gamma+2}{\gamma-1} b\rho\right) + \frac{3}{2} C_3\right] = -\frac{F}{v_\varphi v_r}.$$

Для того чтобы определить характер изменения $\rho(\varphi)$, надо знать знак F в последнем выражении. Так как

$$b\rho = \frac{N^2}{M^2} \equiv \frac{H^2}{4\pi\rho v^2},$$

то в медленных волнах ($M^{*2} \equiv N^2/1 + N^2 < M^2 < \min(1, N^2)$) имеем

$$1 < b\rho \ll 1 + N^2,$$

а в быстрых волнах ($\max(1, N^2) \ll M^2 < \infty$) —

$$0 \ll b\rho < 1.$$

Используя (3.33), вычислим выражение F для случая $b\rho = 1$,

$$F|_{b\rho=1} = F^* = \frac{\gamma+1}{2} C\gamma\rho^{\gamma-2}\left(1 - \frac{\gamma+2}{\gamma-1} b\rho\right) + \frac{3}{2} C_3 =$$
$$= -\frac{3}{2}\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} C\gamma\rho^{\gamma-2} + \frac{3}{2} C_3 =$$
$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{\gamma+1}{\gamma-1} C\gamma\rho^{\gamma-2} + C_3\right] = \frac{3}{2}\frac{1}{\rho}\left(v_\varphi^2 - C\gamma\rho^{\gamma-1}\right) =$$
$$= \frac{3}{2}\frac{1}{\rho}\left(v_\varphi^2 - a_0^2\right).$$

Так как для медленных волн $F < F^*$, а для быстрых волн $F > F^*$, то для быстрых волн $F > 0$, для медленных волн $F < 0$. Отсюда следует, что в медленных волнах

$$\frac{d\varphi}{d\rho} > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{sign} v_r = \operatorname{sign} v_\varphi,$$
$$\frac{d\varphi}{d\rho} < 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{sign} v_r = -\operatorname{sign} v_\varphi,$$

а в быстрых волнах

$$\frac{d\varphi}{d\rho} < 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{sign} v_r = \operatorname{sign} v_\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{d\rho} > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{sign} v_r = -\operatorname{sign} v_\varphi.$$

Следовательно, медленные волны сжатия состоят из характеристик, направленных вниз по потоку, а волны разрежения — из характеристик, направленных вверх по потоку. В быстрых волнах положение обратное.

Быстрые и медленные стационарные простые волны разрежения и сжатия могут описывать решение задачи о стационарном обтекании угла, меньшего π. При этом если в потоке отсутствуют другие источники возмущений, то волна, описывающая течение газа, должна располагаться вдоль уходящих от угла характеристик. В этом случае, если в набегающем потоке $M^* < M < \min(1, N)$, то решение описывается медленной простой волной разрежения, направленной вверх по потоку. Если же $\max(1, N) < M < \infty$, то решение описывается быстрой простой волной разрежения, направленной вниз по потоку (рис. 45).

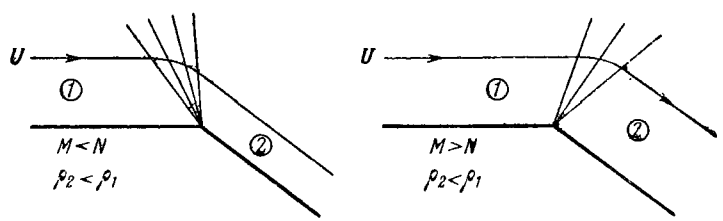


Рис. 45.

При обтекании угла, большего π, возникает ударная волна. При $M^* < M < \min(1, N)$ ударная волна направлена вверх по потоку, а при $\max(1, N) < M < \infty$ — вниз по потоку.

ГЛАВА VII

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО[1]) ГАЗА

§ 1. Течения в трубках тока

При изучении движения газа в трубах и каналах переменного сечения часто пользуются теорией одномерных стационарных движений (гидравлическое приближение).

Будем считать, что газ является невязким и нетеплопроводным, и все параметры потока не меняются в плоскости сечения трубы, перпендикулярной к оси трубы, т. е. что все функции зависят только от одной координаты x, отсчитываемой вдоль оси трубы. Такой подход эквивалентен предположению о возможности осреднения потока в плоскости, перпендикулярной к оси трубы. Если рассмотреть трубу бесконечно малого сечения — трубку тока, то такое осреднение всегда возможно сделать вследствие малой пространственной протяженности сечения трубки и соответственно малого отличия функций от их значений на оси трубки. Таким образом, одномерная теория течений газа по трубам эквивалентна теории течения в трубках тока.

Рассмотрим вопрос о том, к каким результатам может привести воздействие внешнего электромагнитного поля на поток газа в трубке тока. При этом не будем интересоваться способами создания электромагнитного поля. Будем считать, что вдоль трубки тока задано некоторое электрическое поле $\boldsymbol{E}(x)$ и магнитное поле $\boldsymbol{H}(x)$, влияние которых на стационарный поток проводящей жидкости будем изучать. В связи с этим отпадает необходимость использования уравнения индукции. Задание $\boldsymbol{E}(x)$ и $\boldsymbol{H}(x)$ вдоль трубки тока не означает того, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ являются функциями

---

[1]) См. сноску на стр. 82.

только x во всем пространстве. Эти величины могут быстро меняться в направлении, перпендикулярном к трубке тока, однако внутри трубки тока это изменение мало, так как ширина трубки тока предполагается достаточно малой. Отсюда следует, что хотя электромагнитное поле в пространстве $\boldsymbol{E}(x, y, z)$, $\boldsymbol{H}(x, y, z)$ удовлетворяет системе уравнений Максвелла, значения напряженностей полей вдоль трубки тока $\boldsymbol{E}(x) = \boldsymbol{E}(x, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{H}(x) = \boldsymbol{H}(x, y_0, z_0)$ ($y = y_0(x)$, $z = z_0(x)$ — уравнение оси трубки тока), вообще говоря, не удовлетворяют системе одномерных уравнений Максвелла $\left(\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$.

Если канал имеет конечное сечение, то введение средних по сечению канала значений механических величин и напряженностей электрического и магнитного полей позволяет применять теорию одномерных движений для каналов конечной ширины, когда движение, строго говоря, не является одномерным (такие движения называют *квазиодномерными*).

Итак, рассмотрим одномерные стационарные движения невязкого нетеплопроводного проводящего газа в трубке тока переменного сечения $\Sigma = \Sigma(x)$ и в заданном электромагнитном поле $\boldsymbol{E}(x)$ и $\boldsymbol{H}(x)$ [11]. Для простоты будем считать, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярны друг к другу и лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению движения. Выберем ось x вдоль оси трубки тока, ось y — по направлению электрического поля, ось z, перпендикулярную к x и y, — вдоль направления магнитного поля (рис. 46).

Уравнения, описывающие движения в трубке тока, можно представить в виде

$$\rho u \Sigma = m = \text{const}, \tag{1.1}$$

$$\rho u u' + p' = \frac{1}{c}[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}] = \frac{1}{c} j_y H = \frac{1}{c} \sigma \left(E - \frac{u}{c} H\right) H, \tag{1.2}$$

$$\rho u (c_p T' + u u') = \boldsymbol{E}\boldsymbol{j} = \sigma \left(E - \frac{u}{c} H\right) E, \tag{1.3}$$

$$p = R\rho T, \tag{1.4}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x. Первое из этих уравнений выражает постоянство расхода массы вдоль трубки тока, второе — изменение количества движения, третье — изменение энергии, четвертое — уравнение

состояния газа. Из этих уравнений получим соотношения, выражающие изменение скорости и числа Маха M вдоль трубки тока через параметры потока.

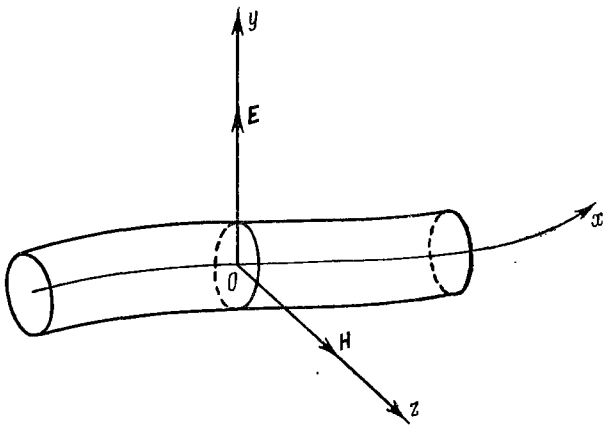


Рис. 46.

Дифференцируя уравнения (1.1) и (1.4) по x, получим

$$\frac{\rho'}{\rho}+\frac{u'}{u}+\frac{\Sigma'}{\Sigma}=0,$$

$$\frac{p'}{p}+\frac{\rho'}{\rho}+\frac{T'}{T}=0.$$

Исключая при помощи этих соотношений T' из уравнения (1.3), получим

$$p'=-p\left(\frac{u'}{u}+\frac{\Sigma'}{\Sigma}\right)+\frac{\gamma-1}{\gamma}\left[-\rho u u'+\frac{\sigma}{u}\left(E-\frac{u}{c}H\right)E\right].$$

Подставляя это соотношение в уравнение (1.2), преобразуем его к следующему виду:

$$u'=\frac{1}{M^2-1}\left[u\frac{\Sigma'}{\Sigma}-\frac{\sigma H^2}{c^2 p}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{c^2E^2}{H^2}-\frac{\gamma-1}{\gamma}u\frac{cE}{H}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{cE}{H}u+u^2\right)\right],$$

или окончательно:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{1}{M^2-1}\left[u\frac{\Sigma'}{\Sigma} - \frac{\sigma H^2}{c^2 p}(u-u_1)(u-u_3)\right], \\ u_1 &= \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{cE}{H}, \quad u_3 = \frac{cE}{H}. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Аналогичным образом может быть получено следующее выражение, определяющее изменение числа M вдоль трубки тока:

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{M^2-1}\left[M\frac{\Sigma'}{\Sigma} - \frac{\sigma H^2}{a_0 \rho c^2}(u-u_3)(u-u_2)\right], \\ a_0^2 &= \frac{\gamma p}{\rho}, \quad u_2 = \frac{1+\gamma M^2}{2+(\gamma-1)M^2}u_1. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Если электромагнитное поле отсутствует, то полученные соотношения переходят в известные газодинамические соотношения для течения в каналах переменного сечения. Для того чтобы исследовать характер влияния электромагнитного поля на течение газа, рассмотрим течение в трубке тока постоянного сечения $\Sigma' = 0$. Характер влияния определяется знаком правых частей равенств (1.5) и (1.6). Так как при $M < 1$ выполняются неравенства $u_2 < u_1 < u_3$, а при $M > 1$ — неравенства $u_1 < u_2 < u_3$, то влияние электромагнитного поля на движение будет разным в областях $M > 1$ и $M < 1$. Кроме того, в отличие от обычной газовой динамики, характер влияния (знаки правых частей уравнений (1.5) и (1.6)) зависит от абсолютных значений u и M в данном сечении.

Линии $u = u_1$, $u = u_2$, $u = u_3$, $M = 1$ разбивают плоскость u, M (рис. 47) на области:

I. $M > 1$	II. $M < 1$
A_1 $u_3 < u$,	A_2 $u_3 < u$,
B_1 $u_2 < u < u_3$,	B_2 $u_1 < u < u_3$,
C_1 $u_1 < u < u_2$,	C_2 $u_2 < u < u_1$,
D_1 $u < u_1$.	D_2 $u < u_2$.

Характер воздействия электромагнитного поля на течение в сечении x зависит от того, в какую из этих областей попадает точка, соответствующая u и M в данном сечении x.

При этом надо помнить, что u_1, u_2, u_3, вообще говоря, различны в различных сечениях трубки тока.

Пусть u и M — значения скорости и числа Маха в некотором сечении. Тогда при смещении вдоль оси x эти параметры меняются так, что точка (u, M) смещается в областях A_2, B_1, D_2 — направо вверх, в областях A_1, B_2 D_1 — налево вниз, и в областях C_1 и C_2 — налево вверх. На линии $u = u_2(M)$ смещение происходит в вертикальном направлении. На рис. 47 направления изменения величин u и M в различных областях указаны стрелками.

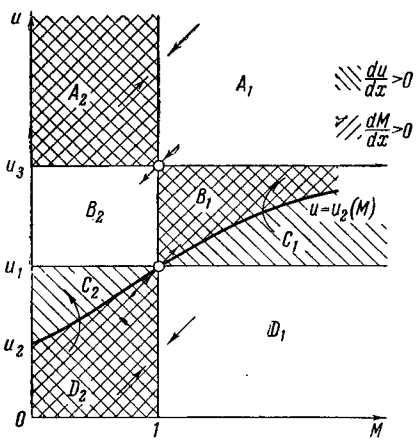


Рис. 47.

Из уравнений (1.5) и (1.6) ясно, что переход через значение $M = 1$ в точках, отличных от u_3 и u_1, невозможен (рис. 47). Здесь явление аналогично подобным явлениям обычной газовой динамики. Если при $M = 1$ скорость u равна u_1 или u_3, то при этих условиях возможен непрерывный разгон или замедление потока с переходом через скорость звука.

Области C_1 и C_2 соответствуют ускорению потока при уменьшении числа M. В этих областях скорость звука растет быстрее скорости потока.

Полученные результаты относительно характера изменения скорости можно пояснить, если пользоваться тем, что воздействие электромагнитного поля на течение выражается в силовом воздействии и в выделении тепла. Отношение работы механических сил $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{v}$ к полной подводимой энергии $N = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}$ в данном случае равно

$$\eta = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}}{N} = \frac{\sigma\left(E - \frac{u}{c} H\right) Hu}{\sigma\left(E - \frac{u}{c} H\right) cE} = \frac{u}{u_3}.$$

Если $u > u_3$, то $N < 0$, $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} < 0$ и, следовательно, механическая энергия газа при его движении переходит в энергию электромагнитного поля. Если же $u < u_3$, то энергия электромагнитного поля передается газу в виде механической и тепловой энергии. В последнем случае при η, близких к единице (u близко к u_3), воздействие поля выражается в основном в виде работы электромагнитных сил над газом, а при малых η (u мало) — в основном в виде подвода тепла. Если воспользоваться результатами газовой динамики, то можно сделать вывод, что при η, близких к единице, дозвуковой поток газа должен замедляться, а сверхзвуковой ускоряться, а при малых η, наоборот, дозвуковой поток должен ускоряться, а сверхзвуковой замедляться. Эти выводы находятся в соответствии с результатами, полученными выше. Из (1.5) следует, что $u' = 0$ при $u = u_1$ и при $u = u_3$, причем при $u = u_1$ тепловое и механическое воздействия компенсируют друг друга, а при $u = u_3$ оба эти воздействия равны нулю.

Рассмотрим теперь движение электропроводного невязкого и нетеплопроводного совершенного газа в строго одномерной постановке (поле удовлетворяет одномерным уравнениям Максвелла, сечение трубки тока постоянно) [1]. Уравнения, описывающие такие движения, можно привести к четырем конечным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &\rho u = m, \\ &\rho u^2 + p + \frac{H^2}{8\pi} = \mathcal{J}, \\ &\rho u\left(i + \frac{u^2}{2}\right) + E_0 H = \mathcal{E}, \\ &\frac{c}{4\pi} E = E_0, \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

выражающим законы сохранения массы, импульса, энергии и напряженности электрического поля вдоль трубки тока, и одному дифференциальному уравнению

$$-\nu_m \frac{dH}{dx} = 4\pi E_0 - uH, \tag{1.8}$$

описывающему изменение магнитного поля вдоль трубки тока. В уравнениях (1.7) — (1.8), как и раньше, $\boldsymbol{v}(u, 0, 0)$,

$\boldsymbol{H}(0, 0, H)$, $\boldsymbol{E}(0, E, 0)$, $i = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$ — теплосодержание единицы массы совершенного газа, $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ — магнитная вязкость. Константы $(m, \mathcal{J}, \mathcal{E}, E_0)$ определяются заданием потоков массы, импульса, энергии и напряженности электрического поля в некотором сечении, которое можно принять за начальное.

Исключая из (1.7) давление и плотность, получим, что скорость и магнитное поле связаны вдоль трубки тока соотношением

$$u = \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{m}\left(\mathcal{J} - \frac{H^2}{8\pi}\right) \pm$$
$$\pm \sqrt{\left[\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{m}\left(\mathcal{J} - \frac{H^2}{8\pi}\right)\right]^2 + \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\left(\frac{E_0}{m}H - \mathcal{E}\right)}. \qquad (1.9)$$

В плоскости (u, H) точки, соответствующие различным сечениям трубки тока (различным x), лежат на кривой (1.9). Вид кривой (1.9) в зависимости от определяющих констант может быть легко исследован. Для примера рассмотрим случай не очень больших E_0, когда кривая (1.9) имеет вид, представленный на рис. 48. Исключая в (1.8) u при помощи (1.9) и интегрируя, получим зависимость напряженности магнитного поля вдоль трубки тока от координаты x

$$x = \int \nu_m (u(H)H - 4\pi E_0)^{-1}\, dH + \text{const}. \qquad (1.10)$$

Сечениям трубки тока, в которых отсутствует ток $\left(\frac{dH}{dx} = 0\right)$, соответствуют на плоскости (u, H) точки гиперболы

$$uH = 4\pi E_0, \quad \left(u = u_3 = \frac{cE}{H}\right). \qquad (1.11)$$

Следовательно, сечениям трубки тока, в которых отсутствует электромагнитное воздействие на поток, соответствуют точки пересечения кривых (1.9) и (1.11). В этих точках (A, B, G на рис. 48) все производные равны нулю, т. е. поток является поступательным. Если точка, соответствующая u и H, в данном сечении трубки тока лежит на плоскости (u, H) выше гиперболы (1.11), то с ростом x магнитное поле вдоль трубки тока возрастает $(dH/dx > 0)$, если же эта точка лежит ниже гиперболы (1.11), то с ростом x магнитное поле убывает $(dH/dx < 0)$. Направление изменения магнитного поля вдоль трубки тока указано на

рис. 48 стрелками. Точкам, в которых скорость потока равна скорости звука, соответствуют на плоскости (u, H) точки параболы

$$u = \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{m}\left(\mathcal{J} - \frac{H^2}{8\pi}\right). \qquad (1.12)$$

Кривые (1.9) и (1.12) пересекаются в точках, в которых $dH/du = 0$ (точки C, D, F на рис. 48).

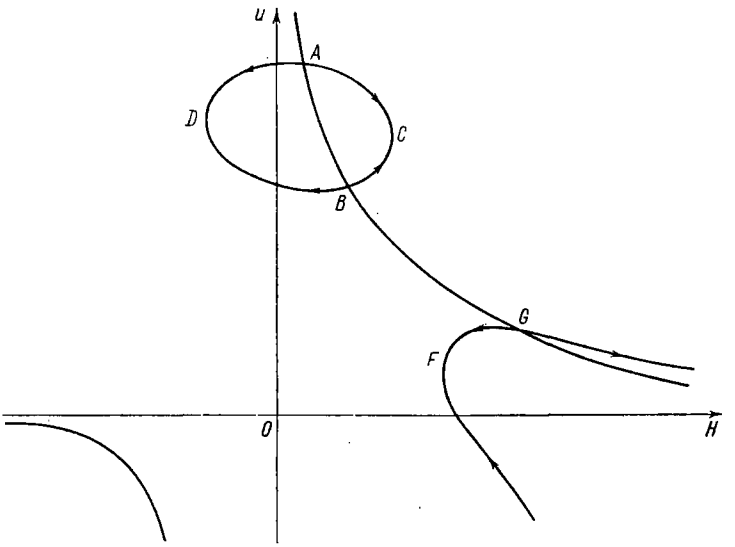


Рис. 48.

Очевидно, что при расположении кривых (1.9) и (1.11), указанном на рис. 48, непрерывный переход через скорость звука ($u = a_0$) при заданных константах m, $\mathcal{J}$, $\mathcal{E}$, E_0 невозможен ни при каких начальных данных (см. знак изменения H). Непрерывный переход через скорость звука возможен при

$$u = u_3 = a_0,$$

т. е. при таких начальных данных, при которых точки B и C (рис. 48) совпадают. В этом случае происходит непрерывный переход из сверхзвуковой области в дозвуковую (см. для сравнения рис. 47). Если начальные данные таковы,

что точка B лежит выше точки C, звуковая скорость при положительных H недостижима.

Отметим, что если в некотором сечении трубки тока параметры потока таковы, что через это сечение продолжить поток непрерывным образом нельзя, то в некоторых случаях возможно построить течения, содержащие на исследуемом участке трубки тока скачки уплотнения. Скачкам уплотнения в данной постановке соответствуют переходы при постоянном магнитном поле с верхней ветви кривой (1.9) на нижнюю ветвь. Эти скачки представляют собой обычные ударные волны, так как соотношения (1.7) при $H=\text{const}$ представляют собой условия на газодинамической ударной волне.

Точкам потока, в которых силовое воздействие электромагнитного поля компенсируется тепловым воздействием ($u=u_1$), соответствуют на плоскости (u, H) точки гиперболы

$$u=u_1=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{cE}{H}, \tag{1.13}$$

лежащей ниже гиперболы (1.11). Если гипербола (1.13) не проходит через точку C, то в точках ее пересечения с кривой (1.9) $\frac{du}{dH}=0$, т. е. при переходе через точки гиперболы (1.13), замедляющийся дозвуковой поток начинает ускоряться, а ускоряющийся сверхзвуковой поток замедляется, что находится в соответствии с результатами, полученными выше (см. рис. 47).

Заметим, что рассмотренная задача о течении в трубке тока постоянного сечения аналогична задаче о структуре магнитогидродинамической ударной волны с учетом только диссипации за счет электрических токов (магнитогидродинамической ударной волне на плоскости (u, H) соответствует переход $A\to B$). В более полной постановке эта задача будет рассмотрена в следующем параграфе.

§ 2. Структура магнитогидродинамической ударной волны

К задаче об одномерных стационарных течениях газа приводит также задача о структуре ударной волны [1–10]. Ударная волна в идеальном газе представляет собой геометрическую поверхность разрыва параметров газового потока.

В действительности, конечно, ударная волна представляет собой узкий слой, в котором параметры потока изменяются от их значений перед поверхностью разрыва до значений за ней. Если ширина этого слоя много меньше характерной длины задачи, то законно отождествлять этот слой с поверхностью разрыва в идеальном газе. Но если интересоваться характером изменения параметров внутри самого слоя, представляющего ударную волну, а это может в ряде вопросов оказаться необходимым, то благодаря узости слоя и связанным с этим большим градиентом газодинамических величин, диссипативными процессами в этом слое пренебрегать нельзя. Вблизи некоторой точки волну можно считать плоской и движение внутри слоя, представляющего ударную волну, стационарным в системе координат, в которой волна покоится. В связи с этим задача о структуре ударной волны, или, что то же самое, о течении внутри узкого слоя, представляющего ударную волну, сводится к рассмотрению одномерных стационарных движений вязкого, теплопроводного и электропроводного газа.

Рассмотрим задачу о структуре ударной волны [4, 8] в газе, уравнение состояния которого имеет вид

$$p = p(V, s),$$

где V — удельный объем, s — энтропия. На функцию $p(V, s)$ наложим ограничения довольно общего типа, а именно, будем считать, что

$$p'_V < 0, \quad p''_{VV} > 0, \quad p'_s > 0. \tag{2.1}$$

Первые два неравенства показывают, что на плоскости (p, V) кривая $s = \text{const}$ имеет отрицательный наклон и обращена выпуклостью вниз.

Ниже будет показано, что если два стационарных однородных потока идеального газа в магнитном поле связаны через быструю магнитогидродинамическую ударную волну, то всегда найдется единственное непрерывное решение уравнений магнитной гидродинамики, описывающее стационарное одномерное течение вязкого теплопроводного конечнопроводящего газа (при произвольной зависимости диссипативных коэффициентов от параметров потока), обращающееся при удалении в бесконечность вверх и вниз по течению

в однородные потоки, параметры которых связаны соотношениями на быстрой ударной волне. Общего доказательства существования решения, описывающего структуру медленной ударной волны, в настоящее время нет. Существование такого решения доказано для медленных ударных волн малой интенсивности. Для неэволюционных ударных волн, в которых изменяется магнитное поле, показано, что всегда можно так подобрать диссипативные коэффициенты, что решение, представляющее структуру ударной волны, не существует.

Для описания стационарных одномерных (вдоль оси x) течений газа воспользуемся непосредственно уравнениями Максвелла, законом Ома и законами сохранения массы, импульса и энергии, следствиями которых являются уравнения магнитной гидродинамики. Из уравнений Максвелла и закона Ома

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \quad \boldsymbol{j} = \sigma\left[\boldsymbol{E} + \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right)\right], \tag{2.2}$$

в случае одномерного движения следует, что

$$E_y = \text{const}, \quad E_z = \text{const}, \quad H_x = \text{const}, \tag{2.3}$$

$$\nu_m \frac{dH_y}{dx} = uH_y - vH_x + cE_z,$$

$$\nu_m \frac{dH_z}{dx} = uH_z - wH_x - cE_y.$$

Законы сохранения массы, импульса и энергии в этом случае выражают постоянство потока массы

$$\rho u = m, \tag{2.4}$$

составляющих потока импульса

$$\left.\begin{aligned} \rho u^2 + p + \frac{H^2 - H_x^2}{8\pi} - \mu_1 \frac{du}{dx} &= \mathcal{J}_x, \\ \rho uv - \frac{H_x}{4\pi} H_y - \mu \frac{dv}{dx} &= \mathcal{J}_y, \\ \rho uw - \frac{H_x}{4\pi} H_z - \mu \frac{dw}{dx} &= \mathcal{J}_z, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

и потока энергии

$$\rho u\left[i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right] + \frac{c}{4\pi}(E_y H_z - E_z H_y) - \mu_1 u \frac{du}{dx} - \\ - \mu v \frac{dv}{dx} - \mu w \frac{dw}{dx} - k \frac{dT}{dx} = m\mathcal{E}. \tag{2.6}$$

Здесь m, $\mathcal{J}_x$, $\mathcal{J}_y$, $\mathcal{J}_z$ и $m\mathcal{E}$ — постоянные, представляющие собой потоки массы, составляющих импульса и энергии, которые могут быть выражены, например, через параметры потока при $x = -\infty$; $i = \frac{p}{\rho} + \varepsilon$ — энтальпия газа, μ — коэффициент вязкости, $\mu_1 = \zeta + \frac{4}{3}\mu$, ζ — вторая вязкость, k — коэффициент теплопроводности.

Обозначим

$$H_0 = \frac{H_x}{4\pi m}, \quad E_0 = \frac{cE_x}{4\pi m}, \quad \mathcal{J}_x = \mathcal{J}$$

и выберем систему координат так, чтобы в ней $E_y = \mathcal{J}_y = \mathcal{J}_z = 0$ (эти равенства имеют место в системе координат, повернутой относительно исходной системы вокруг оси x так, чтобы $E_y = 0$, и движущейся относительно исходной системы со скоростью $U_y = \frac{\mathcal{J}_y}{m}$, $U_z = \frac{\mathcal{J}_z}{m}$).

Из уравнения (2.4) следует, что

$$u = mV, \quad \left(V = \frac{1}{\rho}\right).$$

При этом система уравнений, описывающая задачу о структуре ударной волны в выбранной системе координат, примет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\nu m}{4\pi}\frac{dH_y}{dx} = m\left(\frac{H_y V}{4\pi} - H_0 v + E_0\right),\\
&\frac{\nu m}{4\pi}\frac{dH_z}{dx} = m\left(\frac{H_z V}{4\pi} - H_0 w\right),\\
&\mu\frac{dv}{dx} = m(v - H_0 H_y),\\
&\mu\frac{dw}{dx} = m(w - H_0 H_z),\\
&\mu_1 m^2\frac{dV}{dx} = m\left(p + m^2 V + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} - \mathcal{J}\right),\\
&k\frac{dT}{dx} = m\left(\varepsilon - \frac{m^2V^2}{2} - \frac{v^2}{2} - \frac{w^2}{2} - \frac{H_y^2 V}{8\pi} - \frac{H_z^2 V}{8\pi} - \right.\\
&\qquad \left. - E_0 H_y + H_0 H_y v + H_0 H_z w + \mathcal{J}V - \mathcal{E}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

Введем в рассмотрение две функции:

$$D=\frac{1}{2mT}\left\{\frac{\nu_m}{4\pi}\left(\frac{dH_y}{dx}\right)^2+\frac{\nu_m}{4\pi}\left(\frac{dH_z}{dx}\right)^2+\mu_1 m^2\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\mu\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\mu\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\frac{k}{T}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2\right\} \qquad (2.8)$$

и

$$P=\frac{1}{T}\left\{\frac{H_y^2V}{8\pi}+\frac{H_z^2V}{8\pi}+\frac{m^2V^2}{2}+\frac{v^2}{2}+\frac{w^2}{2}-\right.$$
$$\left.-f(V,\ T)+E_0H_y-H_0H_yv-H_0H_zw-\mathcal{J}V+\mathcal{E}\right\}, \qquad (2.9)$$

где $f=\varepsilon-Ts$ — массовая плотность свободной энергии, удовлетворяющая термодинамическому тождеству

$$df=-s\,dT-p\,dV,$$

которое является следствием первого и второго законов термодинамики ($T\,ds=d\varepsilon+p\,dV$). При этом нетрудно выразить энтропию s через функцию P:

$$s=-\frac{\partial f}{\partial T}=\frac{\partial}{\partial T}(PT)=P+T\frac{\partial P}{\partial T}. \qquad (2.10)$$

Система уравнений (2.7) может быть записана через функции (2.8) и (2.9) следующим образом:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial P}{\partial q_j}, \qquad (2.11)$$

где через q_j обозначены величины H_y, H_z, v, w, V, T, а $\dot q_j=dq_j/dx$.

Так как $D(\dot q_i)$ — квадратичная форма переменных $\dot q_i$, то

$$2D=\frac{\partial D}{\partial \dot q_i}\dot q_i=\frac{\partial P}{\partial q_i}\dot q_i=\frac{dP}{dx}, \qquad (2.12)$$

или

$$P(x_2)-P(x_1)=2\int_{x_1}^{x_2}D\,dx. \qquad (2.13)$$

Так как $D\geqslant 0$, то $P(q_i)$ — неубывающая функция вдоль интегральных кривых системы (2.11), причем $P(q_i)$ возрастает, когда действует хотя бы один механизм диссипации. В особых точках A_k системы уравнений (2.11), которые являются

стационарными точками функции P (так как в этих точках $\partial P/\partial q_i = 0$), имеют место равенства

$$D = 0, \quad \frac{dP}{dx} = 0. \tag{2.14}$$

Поступательному однородному потоку ($\dot{q}_i = 0$) соответствуют особые точки A_k системы (2.11). Поэтому решение задачи о структуре ударной волны должно представляться интегральной кривой системы (2.11) в пространстве q_i, соединяющей особые точки этой системы, вдоль которой x меняется монотонно от $-\infty$ до $+\infty$. При этом если A_i — особая точка, соответствующая начальному состоянию, а A_j — особая точка, соответствующая конечному состоянию, то из уравнений (2.13) и (2.10) следует, что

$$P(A_i) < P(A_j), \quad s(A_i) < s(A_j). \tag{2.15}$$

Введем пространство переменных,

$$\{H_y,\ H_z,\ v,\ w,\ V,\ T,\ m,\ H_0,\ \mathcal{J},\ \mathcal{E},\ E_0\}$$

и рассмотрим в нем поверхность Σ, точки которой удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial P}{\partial H_y} = \frac{\partial P}{\partial H_z} = \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial w} = \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial T} = 0. \tag{2.16}$$

В силу определения Σ очевидно, что все особые точки системы (2.11) лежат на поверхности Σ. Две точки поверхности Σ будем называть *объединенными*, если они имеют одну и ту же проекцию на подпространство $\{m,\ H_0,\ E_0,\ \mathcal{J},\ \mathcal{E}\}$. Такие точки могут быть связаны ударным переходом. Из равенств (2.9) и (2.10), в силу (2.16), следует, что на Σ имеет место равенство

$$T\,dP = T\,ds = H_y\,dE_0 + d\mathcal{E} - V\,d\mathcal{J} - H_y v\,dH_0 - H_z w\,dH_0 + \frac{V^2\,dm^2}{2}. \tag{2.17}$$

Вводя обозначения $4\pi H_0^2 = V_0 = \dfrac{a_A^2}{um}$, можно записать первые четыре равенства (2.16) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} v = H_0 H_y, \quad w = H_0 H_z, \quad H_y(V - V_0) + 4\pi E_0 = 0, \\ H_z(V - V_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Как следует из (2.18), в случае $E_0 = 0$ в особых точках системы (2.11) выполняется равенство

$$\boldsymbol{H}_\tau (V - V_0) = 0, \quad (\boldsymbol{H}_\tau = H_y \boldsymbol{e}_y + H_z \boldsymbol{e}_z),$$

которые показывают, что при $E_0 = 0$ ударные волны являются либо газодинамическими, либо лежат на границе эволюционности, так как условие $V = V_0$ эквивалентно условию $u^2 = a_A^2$. Поэтому будем в дальнейшем предполагать, что $E_0 \neq 0$, при этом из равенств (2.18) получим, что в особых точках системы (2.11) имеет место

$$H_z = 0, \quad w = 0.$$

Два последних уравнения в (2.16), преобразованные при помощи (2.18), принимают вид

$$p + m^2 V + \frac{4\pi E_0^2}{2(V - V_0)^2} = \mathcal{J}, \quad i + \frac{1}{2} m^2 V^2 + \frac{4\pi E_0^2 (2V - V_0)}{2(V - V_0)^2} = \mathcal{E}. \tag{2.19}$$

На плоскости (V, p) особые точки A_k являются точками пересечения кривых, определяемых уравнениями (2.19). Количество особых точек, отвечающих начальному или конечному состоянию в задаче о структуре ударной волны, равно числу точек пересечения этих кривых в области $V > 0$, $p > 0$.

Будем менять постоянную $\mathcal{E}$, оставляя неизменными остальные постоянные (m, H_0, E_0, $\mathcal{J}$). Тогда особые точки системы (2.11), лежащие на поверхности Σ, опишут кривую, проекция которой на плоскость pV есть кривая l (рис. 49), точки которой удовлетворяют первому уравнению (2.19). Согласно равенству (2.17), на этой кривой

$$T\,ds = d\mathcal{E}. \tag{2.20}$$

Следовательно, $\mathcal{E}$ и s одновременно принимают на этой кривой максимальные и минимальные значения. С другой стороны, дифференцируя первое из равенств (2.19), получим

$$\frac{dp}{dV} = -m^2 + \frac{4\pi E_0^2}{(V - V_0)^3} = p'_V + p'_s \frac{ds}{dV}, \tag{2.21}$$

$$\frac{d^2p}{dV^2} = -\frac{12\pi E_0^2}{(V - V_0)^4} = p''_{VV} + p'_s \frac{d^2s}{dV^2} + p''_{sV} \frac{ds}{dV} + p''_{ss} \left(\frac{ds}{dV}\right)^2. \tag{2.22}$$

Если $ds/dV = 0$, то из (2.1) и (2.22) следует, что $d^2s/dV^2 < 0$. Поэтому точки, в которых $ds/dV = 0$, являются максимумами энтропии, и на каждой связной ветви кривой l имеется не более одного такого максимума s, а следовательно, и $\mathscr{E}$. Таким образом, кривая, определенная вторым из уравнений (2.19), может иметь с каждой ветвью кривой l не

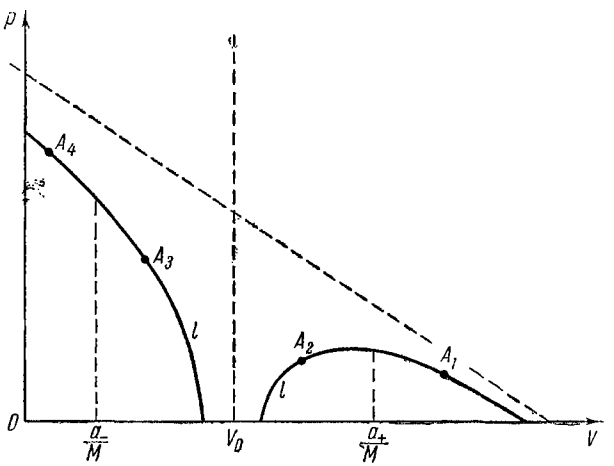


Рис. 49.

более двух точек пересечения. Занумеруем точки пересечения кривых в порядке убывания V: A_1, A_2, A_3, A_4, причем A_1 и A_2 принадлежат ветви, лежащей в области $V > V_0$, а A_3 и A_4 — ветви, лежащей в области $V < V_0$. В точках A_1 и A_3 величины $\mathscr{E}$ и s убывают с ростом V, а в точках A_2 и A_4 — возрастают.

Согласно (2.21),

$$p'_s \frac{ds}{dV} = -m^2 - p'_V + \frac{4\pi E_0^2}{(V-V_0)^3} = -\frac{1}{V^2}\left[u^2 - a_0^2 - \frac{4\pi E_0^2 V^2}{(V-V_0)^3}\right],$$

где a_0 — газодинамическая скорость звука $\left(a_0^2 = -V^2 p'_V\right)$. Преобразуем последний член в правой части этого равенства

при помощи соотношений (2.18)

$$\frac{4\pi E_0^2 V^2}{(V-V_0)^3} = \frac{H_y^2 V}{4\pi}\,\frac{V^2}{V^2 - V_0 V} = \frac{\alpha^2 u^2}{u^2 - a_A^2},$$

здесь a_A и α — альфвеновские скорости в направлении осей x и y:

$$a_A^2 = \frac{H_x^2 V}{4\pi} = mV_0 V, \quad \alpha^2 = \frac{H_y^2 V}{4\pi}.$$

При этом предыдущее равенство перейдет в следующее:

$$p_s' \frac{ds}{dV} = -\frac{1}{V^2} R(u), \quad R(u) = u^2 - a_0^2 - \frac{\alpha^2 u^2}{u^2 - a_A^2}. \quad (2.23)$$

Так как в точках кривой l, где s достигает максимума, $R(u)$ обращается в нуль, то в этих точках u удовлетворяет уравнению

$$u^4 - \left(a_0^2 + \alpha^2 + a_A^2\right) u^2 + a_0^2 a_A^2 = 0,$$

т. е. совпадает с одной из магнитозвуковых скоростей

$$u = a_{+,-} \quad \text{или} \quad V = \frac{a_{+,-}}{m}.$$

Очевидно, что больший корень ($u = a_+$) лежит на правой ветви кривой l, где $V > V_0$, или, что то же самое, $u > a_A$, а меньший корень ($u = a_+$) лежит на левой ветви, где $V < V_0$, или $u < a_A$. Точки A_1 и A_2, A_3 и A_4 лежат соответственно по разные стороны от точек $V = \frac{a_+}{m}$ ($u = a_+$) и $V = \frac{a_-}{m}$ ($u = a_-$), причем, как это следует из (2.1) и (2.23), значения функции $R(u)$ в точках A_1, A_2, A_3 и A_4 удовлетворяют неравенствам

$$R(u)|_{A_1} > 0, \quad R(u)|_{A_2} < 0, \quad R(u)|_{A_3} > 0, \quad R(u)|_{A_4} < 0.$$

Из этих неравенств, а также из вида функции $R(u)$ (график функции $R(u)$ изображен на рис. 50) следует, что

$$\left.\begin{array}{ll} u(A_1) > a_+, & a_- < u(A_3) < a_A, \\ a_+ > u(A_2) > a_A, & u(A_4) < a_-. \end{array}\right\} \quad (2.24)$$

Очевидно, что переход $A_1 \to A_2$ представляет быструю ударную волну, а переход $A_3 \to A_4$ — медленную ударную волну. Все остальные переходы являются неэволюционными ударными волнами. При некоторых значениях постоянных точки A_1 и A_2 или A_3 и A_4 могут совпадать; при этом $u = a_\pm$, и ударные волны превращаются в быстрые или медленные магнитозвуковые волны.

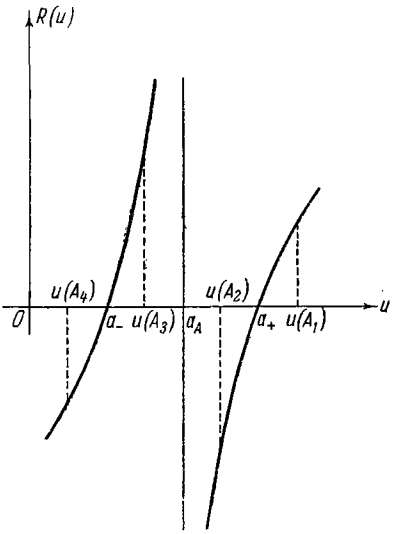


Рис. 50.

Так как все точки A_k отвечают одним и тем же значениям постоянных (m, $\mathcal{J}$, E_0, H_0, $\mathfrak{E}$) и обращают в нуль правые части уравнений (2.7), то каждая пара этих точек может быть связана ударным переходом (возможно, неэволюционным). В § 1 гл. IV показано, что ударные волны сжатия сопровождаются возрастанием энтропии, следовательно,

$$s(A_1) < s(A_2) < s(A_3) < s(A_4).$$

Отсюда, используя (2.10), получим

$$P(A_1) < P(A_2) < P(A_3) < P(A_4). \tag{2.25}$$

Перейдем теперь к изучению характера интегральных кривых системы (2.11). Рассмотрим прежде всего поведение интегральных кривых в окрестности особых точек A_k системы (2.11). Введем в окрестности A_k новые переменные H_y^*, H_z^*, v^*, w^*, V^*, T^*, согласно равенствам

$$\left.\begin{aligned} &H_y = H_{yk}(1 + H_y^*), \quad H_z = H_{yk} H_z^*, \quad v = v_k + u_k v^*, \\ &w = u_k w^*, \quad V = V_k(1 + V^*), \quad T = T_k(1 + T^*). \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Индекс k показывает, что значение соответствующей переменной взято в точке A_k. При изучении особых точек

можно без ограничения общности предполагать, что H_0 и H_{yk} положительны. Линеаризуем систему уравнений по этим переменным. Подставляя (2.26) в уравнения (2.11) и сохраняя только линейные члены, получим, что в окрестности каждой особой точки функции v^*, w^*, H_y^*, H_z^*, V^*, T^* удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial D^*}{\partial \dot{q}_j^*} = \frac{\partial P^*}{\partial q_j^*}, \tag{2.27}$$

где через q_j^* обозначены величины H_y^*, H_z^*, v^*, w^*, V^*, T^*.

$$D^* = \frac{1}{2mT_k}\left\{ \frac{\nu_m H_{yk}^2}{4\pi}\left(\frac{dH_y^*}{dx}\right)^2 + \frac{\nu_m H_{yk}^2}{4\pi}\left(\frac{dH_z}{dx}\right)^2 + \mu_1 u_k^2\left(\frac{dV^*}{dx}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \mu u_k^2\left(\frac{dv^*}{dx}\right)^2 + \mu u_k^2\left(\frac{dw^*}{dx}\right)^2 + kT_k\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 \right\},$$

$$P^* = \frac{1}{2T_k}\left\{ \alpha_k^2\left(2H_y^*V^* + H_y^{*2}\right) + \alpha_k^2 H_z^{*2} + u_k^2\left(v^{*2} + w^{*2} + V^{*2}\right) - \right.$$
$$- 2a_{Ak}\alpha_k H_y^* v^* - 2a_{Ak}\alpha_k H_z^* w^* + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{Tk} V_k^2 V^{*2} +$$
$$\left. + 2\left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_{Tk} V_k T_k V^* T^* + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{Vk} T_k^2 T^{*2} \right\}$$

— функции D и P, вычисленные в окрестности точки A_k с точностью до квадратов q_i^*. Представим квадратичную форму P^* в виде суммы квадратов

$$P^* = \frac{1}{T_k}\left\{ \left(\alpha_k H_y^* + \alpha_k V^* - a_{Ak} v^*\right)^2 + \left(\alpha_k H_z^* - a_{Ak} w^*\right)^2 + \right.$$
$$+ \left(u_k^2 - a_{Ak}^2\right)\left(v^* + \frac{a_{Ak}\alpha_k V^*}{u_k^2 - a_{Ak}^2}\right)^2 + \left(u_k^2 - a_{Ak}^2\right) w^* +$$
$$+ \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{Vk}\left(T_k T^* + \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_{Tk}}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{Vk}} V_k V^*\right)^2 +$$
$$\left. + \left(u_k^2 - \alpha_k^2 - a_0^2 - \frac{a_{Ak}^2 \alpha_k^2}{u_k^2 - a_{Ak}^2}\right) V^{*2} \right\}. \tag{2.28}$$

При этом преобразовании были использованы тождества, которые следуют из того, что

$$df = -s\,dT - p\,dV \quad \text{и} \quad d\varepsilon = T\,ds - p\,dV$$

являются полными дифференциалами, и из определения a_0:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V} = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T, \\ &\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T - \left(\frac{\partial s}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_V = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s = -\frac{a_0^2}{V^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

Так как теплоемкость газа при постоянном объеме положительна, то

$$c_V = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V > 0. \tag{2.30}$$

Коэффициент при V^{*2} в (2.28) представляет собой $R(u)$. Отсюда в силу неравенств (2.24) следует, что в стационарных точках A_k коэффициенты при квадратах в выражении (2.29) имеют следующие знаки:

в точке A_1 все шесть коэффициентов положительны,

в точке A_2 пять коэффициентов положительны и один отрицателен.

в точке A_3 четыре коэффициента положительны и два отрицательны,

в точке A_4 три коэффициента положительны и три отрицательны.

Обозначим через λ собственные значения системы (2.27), т. е. такие значения λ, при которых существуют решения вида

$$q_j^* = q_j^{**} e^{\lambda x}. \tag{2.31}$$

Легко показать, что число положительных и отрицательных λ совпадает с числом положительных и отрицательных коэффициентов в выражении (2.28). Действительно, подставляя (2.31) в (2.27), получим, что λ удовлетворяет уравнению

$$|M - \lambda K| = 0,$$

где M — матрица квадратичной формы P^*, а K — диагональная матрица, у которой по главной диагонали стоят удвоен-

ные коэффициенты при q_j^{*2} в выражении для D^*. Это уравнение, в силу теоремы об определителе произведения матриц, эквивалентно уравнению

$$|A'(M-\lambda K)A| = |A'||M-\lambda K||A| = 0.$$

Пусть A — матрица линейного преобразования, одновременно преобразующего матрицы M и K двух квадратичных форм к диагональному виду так, что $A'MA = N$, $A'KA = L$. Известно, что такое преобразование всегда существует. При этом уравнение для определения λ примет вид

$$|N-\lambda L| = 0.$$

Так как в силу теоремы об инерции квадратичных форм число положительных и отрицательных элементов матрицы N совпадает с числом положительных и отрицательных коэффициентов в выражении (2.28), а все элементы матрицы L положительны, то из последнего равенства следует справедливость доказываемого утверждения. Таким образом, в каждой особой точке A_k имеется шесть собственных направлений, отвечающих шести действительным собственным значениям, $7-k$ из которых положительны, а $k-1$ отрицательны. Каждой особой точке A_k соответствует $7-k$-мерная поверхность, состоящая из интегральных кривых, выходящих из этой точки, и $k-1$-мерная поверхность, состоящая из интегральных кривых, входящих в нее.

Перейдем теперь к доказательству существования непрерывных решений, представляющих структуру эволюционных ударных волн. Рассмотрим поверхность $P(q_i) = C$, $C = \text{const}$. Нетрудно убедиться, что часть этой поверхности, лежащая в области $V > 0$, $T > 0$, содержит бесконечно удаленную точку. Действительно, уравнение поверхности $P(q_i) = C$ можно привести к виду

$$2P \equiv \frac{1}{T}\left[\frac{V}{4\pi}\left(H_y - \frac{4\pi H_0}{V}v + \frac{4\pi E_0}{V}\right)^2 + \frac{V}{4\pi}\left(H_z - \frac{4\pi H_0}{V}w\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)\left(v + \frac{4\pi H_0 E_0}{V - V_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{V_0}{V}\right)w^2\right] +$$
$$+ 2F(V, T) = 2C, \quad (2.32)$$

$$2F(V, T) = -\frac{1}{T}\left[\frac{4\pi E_0}{V - V_0} - m^2V^2 + 2\mathcal{J}V - 2\mathcal{E} + 2f(VT)\right].$$

Пересечение ее с плоскостью $V=\text{const}$, $T=\text{const}$ представляет собой поверхность второго порядка в четырехмерном пространстве $\{H_y, H_z, v, w\}$, которая при $V<V_0$ простирается до бесконечности и представляет собой гиперболоид в четырехмерном пространстве.

Придадим постоянной C в равенстве $P(q_i)=C$ очень большое отрицательное значение и будем затем увеличивать C. При этом поверхность $P(q_i)=C$ будет изменяться, однако топологический тип поверхности $P(q_i)=C$ может меняться только при переходе постоянной C через значение $C=P(A_k)$. Две поверхности имеют один топологический тип, если они путем взаимно однозначной и взаимно непрерывной деформации могут быть переведены одна в другую. При $C\neq P(A_k)$ в каждой точке поверхности $P(q_i)=C$ существует вектор градиента функции $P(q_i)$, являющийся непрерывной функцией на поверхности. При изменении C поверхность $P(q_i)=C$ деформируется взаимно-однозначным образом.

В силу неравенств (2.25) первое изменение топологического типа поверхности произойдет, когда в процессе увеличения C поверхность $P(q_i)=C$ пройдет через точку A_1 (если она существует при заданных значениях постоянных E_0, H_0, $\mathcal{J}$, $\mathcal{E}$). При $C=P(A_1)+\Delta$, где $\Delta>0$ — некоторое достаточно малое число, поверхность $P(q_i)=C$ в окрестности точки A_1 представляет собой поверхность эллипсоида (см. (2.28)), содержащую внутри себя точку A_1. Так как поверхность $P(q_i)=C$ содержит бесконечно удаленную точку, то у нее при $C>P(A_1)$ должна существовать другая ветвь, уходящая в бесконечность. Область $P(q_i)\leqslant C$ расширяется с увеличением C.

Замкнутая ветвь поверхности $P(q_i)=C$, содержащая внутри себя точку A_1, не выходит из области $V>V_0$, $T>0$. Действительно, пересечение замкнутой ветви поверхности $P(q_i)=C$ любой плоскостью представляет собой замкнутую поверхность. Но при $V<V_0$ пересечение поверхности (2.32) плоскостью $V=\text{const}$, $T=\text{const}$ не содержит замкнутых ветвей. Кроме того, пересечение поверхности $P(q_i)=C$ плоскостью $T=0$ не зависит от значения константы C. При значениях C, близких к $P(A_1)$, замкнутая ветвь поверхности $P(q_i)=C$, содержащая внутри себя точку A_1, не пересекается с плоскостью $T=0$, и, следовательно, не пересекает этой плоскости ни при каких C.

При увеличении C обе ветви поверхности должны соединиться при некотором значении C в точке, лежащей в области $V > V_0$, $T > 0$. Действительно, внутри области $V > V_0$, $T > 0$, $\operatorname{grad} P$ нигде не обращается в бесконечность, и поэтому обе части поверхности $P(q_i) = C$ при увеличении C движутся с конечной скоростью навстречу друг другу. Соединение двух частей поверхности $P(q_i) = C$ должно произойти в стационарной точке функции $P(q_i)$, так как при этом изменяется топологический тип поверхности. Эта точка является точкой A_2, так как из оставшихся стационарных точек только точка A_2 лежит в области $V > V_0$, и только она может описывать слияние двух частей поверхности $P(q_i) = C$.

Так как особая точка A_1 является узлом для системы (2.11), то в окрестности точки A_1 все пространство заполнено интегральными кривыми, выходящими из этой точки. Поэтому каждая точка замкнутой ветви поверхности $P(q_i) = C$ при $P(A_1) < C < P(A_2)$ может быть соединена интегральной кривой с точкой A_1. При этом одна интегральная кривая, вышедшая из точки A_1, достигает точки A_2, так как при $C = P(A_2)$ некоторая (единственная) точка этой поверхности совпадает с точкой A_2. Этим доказано существование и единственность решения, представляющего структуру быстрой ударной волны.

Общего доказательства существования решения, представляющего структуру медленной ударной волны, в настоящее время пока нет. Однако имеется доказательство существования такого решения для достаточно слабых волн [4, 6]. Изложим кратко идею этого доказательства [4].

Можно показать, что при $P(A_3) < C < P(A_4)$ в области $P(q_i) \leqslant P(A_3)$ можно построить двумерную замкнутую поверхность Σ, проходящую через точку A_3, которая не может быть стянута в точку непрерывной деформацией в этой области. Рассмотрим двумерную поверхность $\Sigma^*(C)$, являющуюся пересечением трехмерной поверхности, составленной из интегральных кривых, входящих в точку A_4, с поверхностью $P(q_i) = C$. При $C = P(A_4) - \delta$ ($\delta > 0$ — достаточно малое число) $\Sigma^*(C)$ представляет собой замкнутую двумерную поверхность, которая может быть переведена в положение Σ непрерывной деформацией в области $P(q_i) \leqslant C$. Будем теперь изменять C в пределах $P(A_3) < C < P(A_4)$.

Если диссипативные коэффициенты непрерывны и их отношения ограничены, то $\Sigma^*(C)$ будет испытывать непрерывную деформацию. При этом пока поверхность $\Sigma^*(C)$ остается в рассматриваемой области (возможность выхода поверхности $\Sigma^*(C)$ к плоскостям $T=0$, $V=0$, а также в бесконечность будет обсуждена ниже), она остается замкнутой поверхностью, которая может быть переведена в положение Σ непрерывной деформацией в области $P(q_i) \leqslant C$.

Структура поверхности $P(q_i)=C$ при $C=P(A_3)+\delta$ в окрестности особой точки A_3 такова, что кратчайшее расстояние любой замкнутой двумерной поверхности, которая может быть переведена в положение Σ путем непрерывной деформации в области $P(q_i)<C$, до точки A_3, имеет порядок $\sqrt{\delta}$. Таким образом, при $C=P(A_3)$ поверхность $\Sigma^*(C)$ пройдет через A_3 и найдется хотя бы одна интегральная кривая, соединяющая особые точки A_3 и A_4. Эта интегральная кривая представляет решение, соответствующее структуре медленной ударной волны.

Приведенные соображения теряют силу, если поверхность размыкается при изменении C, вследствие того, что она или ее часть выходят из рассматриваемой области $T>0$, $V>0$. Можно показать, что ни одна интегральная кривая, а следовательно, и поверхность $\Sigma^*(C)$, не может при конечном изменении P подойти к плоскостям $V=0$ и $T=0$. Остается не выясненным вопрос, может ли поверхность $\Sigma^*(C)$ разомкнуться через бесконечно удаленную точку. Можно только утверждать, что если ударная волна не слишком сильная и отношения диссипативных коэффициентов ограничены, то так как вдоль интегральной кривой, представляющей структуру такой волны, P меняется мало, а интегральные кривые составляют не слишком малый угол с поверхностью $P(q_i)=C$, то, очевидно, в этом случае поверхность $\Sigma^*(C)$ не может уйти на бесконечность и, таким образом, решение, представляющее структуру медленной ударной волны, в этом случае существует.

Покажем теперь, что не при всех соотношениях между диссипативными коэффициентами существуют решения, представляющие структуру неэволюционных ударных волн, в которых изменяется магнитное поле. При этом предполагается, что в течении, представляющем структуру ударной волны, все величины ограничены. Обозначим через H_m, T_m, V_m, u_m

максимальные значения соответствующих величин (предполагаем, что они не зависят от диссипативных коэффициентов). Из тождества

$$\frac{\partial P}{\partial H_y}+H_0\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{1}{T}\left[\frac{H_y}{4\pi}(V-V_0)+E_0\right]$$

следует, что если δ определено соотношением $2H_m\delta=4\pi|E_0|$, то на отрезке

$$V_0-\delta\leqslant V\leqslant V_0+\delta \tag{2.33}$$

выполняется неравенство

$$m^2T\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial H}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2\right\}>\frac{k}{T_m}, \tag{2.34}$$

где k — некоторая постоянная, отличная от нуля, если $E_0\neq 0$. Пусть теперь x_1 и x_2 являются границами интервала на оси x, на котором всюду выполняются неравенства (2.33), причем $V(x_1)=V_0+\delta$, $V(x_2)=V_0-\delta$ (такой интервал должен существовать для неэволюционной ударной волны), а Q_1 и Q_2 — точки в пространстве q_i, соответствующие x_1 и x_2. Оценим величину отрезка $[x_1, x_2]$. Заметим прежде всего, что

$$D=m^2T\left\{\frac{4\pi}{\nu_m}\left(\frac{\partial P}{\partial H_y}\right)^2+\frac{4\pi}{\nu_m}\left(\frac{\partial P}{\partial H_z}\right)^2+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial w}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\mu_1 m^2}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2+\frac{T}{k}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)^2\right\}\geqslant m^2T\left\{\frac{4\pi}{\nu_m}\left(\frac{\partial P}{\partial H_y}\right)^2+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2\right\}.$$

Согласно равенству (2.13), с учетом (2.34), получим

$$P(A_f)-P(A_i)>P(Q_2)-P(Q_1)=2\int_{x_1}^{x_2}D\,dx\geqslant$$

$$\geqslant 2\int_{x_1}^{x_2}m^2T\left[\frac{4\pi}{\nu_m}\left(\frac{\partial P}{\partial H_y}\right)^2+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2\right]dx\geqslant\frac{k\,[x_2-x_1]}{T_m\sup\left(\frac{\nu_m}{4\pi},\,\mu\right)},$$

где A_i и A_f соответствуют состояниям перед и за ударной волной. Отсюда следует, что

$$x_2-x_1<k_1\sup\left(\frac{\nu_m}{4\pi},\,\mu\right), \tag{2.35}$$

где k_1 не зависит от диссипативных коэффициентов. Но вдоль интегральной кривой, как следует из третьего уравнения (2.7),

$$\frac{dV}{dx} < \frac{C_2}{\mu_1},$$

где C_2 не зависит от диссипативных коэффициентов. Отсюда получаем, что

$$x_2 - x_1 > 2\delta \frac{1}{C_2} \inf \mu_1. \tag{2.36}$$

Очевидно, что неравенства (2.35) и (2.36) не могут выполняться при произвольных соотношениях между диссипативными коэффициентами. Это противоречие означает, что не при всех соотношениях между диссипативными коэффициентами существует интегральная кривая, представляющая структуру неэволюционной ударной волны.

Для того чтобы нагляднее представить характер интегральных кривых, соответствующих задаче о структуре ударной волны, а также выяснить характер зависимости решения от соотношений между диссипативными коэффициентами, рассмотрим задачу о структуре ударной волны в случае, когда отличны от нуля только два диссипативных коэффициента μ_1 и ν_m ($\mu = k = 0$) [5]. Кроме того, предположим, что $w = 0$ и $H_z = 0$.

В этом случае система (2.7) превращается в систему двух дифференциальных уравнений и двух алгебраических интегралов. Поле интегральных кривых становится плоским, что делает решение задачи наглядным.

Если ввести безразмерные переменные по формулам

$$V = \frac{u_0}{m}\tau, \quad v = u_0 \nu, \quad p = \rho_0 u_0^2 0, \quad H_y = \sqrt{4\pi\rho_0 u_0^2}\, h,$$

$$H_x = \sqrt{4\pi\rho_0 u_0^2}\, h_x,$$

то система уравнений, описывающих задачу о структуре ударной волны, в этом случае запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\nu_m}{u_0}\frac{dh}{dx} = h(\tau - h_x^2) - e, \\ &\frac{\mu_1}{\rho_0 u_0}\frac{d\tau}{dx} = 0 + \tau + \frac{1}{2}h^2 - J, \quad \nu - h_x h = 0, \\ &k0\tau + \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{2}h_x^2 h^2 + eh = \mathcal{E}, \quad k = \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

Здесь ρ_0 и u_0 — характерные плотность и скорость (например, значения этих величин при $x = -\infty$); J, $\mathcal{E}$, e — константы, связанные с потоком импульса, потоком энергии и электрическим полем.

На плоскости (τ, h) изоклина $dh/dx = 0$ представляет собой гиперболу

$$h(\tau - h_x^2) = e, \tag{2.38}$$

а изоклина $d\tau/dx = 0$ представляет собой кривую, описываемую уравнением

$$h^2(k\tau - h_x^2) - 2eh + (2k-1)\tau^2 - 2kJ\tau + 2\mathcal{E} = 0. \tag{2.39}$$

Из определений h_x и τ следует, что в точках, лежащих выше асимптоты $\tau = h_x^2$ гиперболы (2.38), скорость газа больше альфвеновской, а ниже асимптоты скоростей меньше альфвеновской. Вид кривой (2.39) на плоскости (τ, h) зависит от значений, определяющих задачу констант, входящих в это уравнение.

Особыми точками системы (2.37) являются точки пересечения кривых (2.38) и (2.39). В зависимости от значений определяющих констант может быть либо две, либо четыре точки пересечения этих кривых (один из возможных случаев расположения кривых (2.38) и (2.39) представлен на рис. 51). Исследование характера особых точек в этом случае показывает, что точка A_1 является узлом, из которого выходят интегральные кривые при увеличении x, точки A_2 и A_3 являются седлами, точка A_4 является узлом, в который входят интегральные кривые при возрастании x. Если имеются все четыре особые точки, то две из них лежат выше прямой $\tau = h_x^2$, а две другие — ниже ее. Если имеются только две особые точки, то они лежат по одну сторону от этой прямой.

Исследование изоклин (2.38) и (2.39) позволяет качественно построить поле интегральных кривых системы дифференциальных уравнений (2.37). Если изоклины (2.38) и (2.39) имеют вид, представленный на рис. 51, то соответствующее поле интегральных кривых в зависимости от величины отношения диссипативных коэффициентов $\mu_1/\rho_0\nu_m$ имеет вид, представленный на рис. 52—54 (стрелками указано направление движения точки (τ, h) вдоль интегральной кривой при возра-

стании x). Во всех остальных случаях расположения изоклин, если имеются четыре особые точки, характер интегральных кривых остается тем же самым. Если имеются две особые точки (та или другая пара), то поведение интегральных кривых в окрестности этих точек остается тем же самым, что и при наличии четырех особых точек.

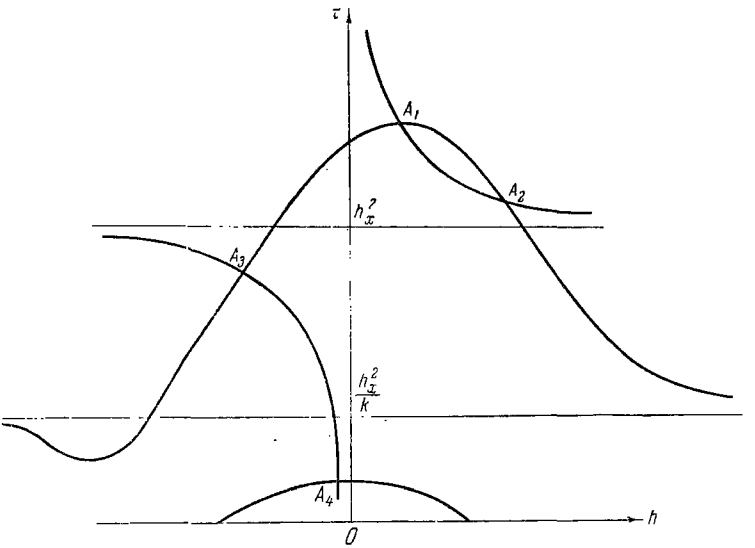


Рис. 51.

Картина интегральных кривых, представленная на рис. 52, соответствует случаю, когда отношение $\mu_1/\rho_0 v_m$ велико. В этом случае точки A_1 и A_2, A_3 и A_4 соединяются между собой попарно единственными интегральными кривыми, представляющими соответственно структуру быстрой и медленной ударных волн. Точки из первой пары и точки из второй пары не соединяются между собой интегральными кривыми, что соответствует отсутствию структуры у промежуточных ударных волн. Если $\mu_1/\rho_0 v_m \to \infty$, то интегральные кривые, представляющие структуру быстрой и медленной ударных волн, стремятся к совпадению с соответствующими отрезками изоклины $dh/dx = 0$.

Случай, представленный на рис. 53, соответствует одному-единственному значению отношения $\mu_1/\rho_0 v_m = (\mu_1/\rho_0 v_m)_{кр}$, при котором интегральная кривая, выходящая из точки A_2, входит в точку A_3. Это значение $\mu_1/\rho_0 v_m$ разделяет случаи, представленные на рис. 52 и 54. При этом интегральными кривыми соединены точки $A_1 \to A_2$ (быстрая волна), $A_3 \to A_4$

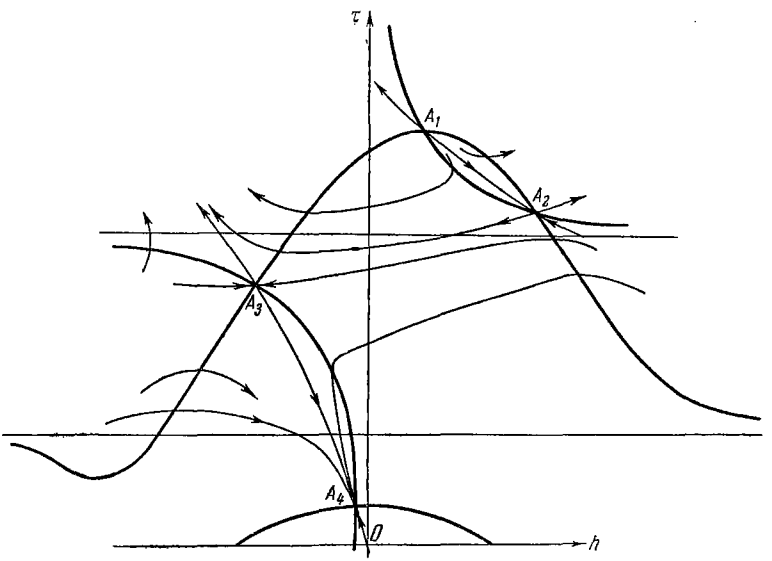


Рис. 52.

(медленная волна) и $A_2 \to A_3$ (промежуточная волна), причем интегральные кривые, соединяющие эти особые точки, единственные. Возможны также сложные переходы $A_1 \to A_2 \to A_3$, $A_2 \to A_3 \to A_4$, $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4$.

При малых значениях отношения $\mu_1/\rho_0 v_m$ осуществляется случай, представленный на рис. 54, когда интегральными кривыми соединены следующие пары особых точек: $A_1 \to A_2$, $A_3 \to A_4$, $A_1 \to A_3$, $A_1 \to A_4$, $A_2 \to A_4$, причем все эти пары точек соединяются единственными интегральными кривыми, за исключением пары $A_1 \to A_4$, которая соединяется бесчисленным множеством интегральных кривых. Из сложных переходов имеют место следующие: $A_1 \to A_2 \to A_4$, $A_1 \to A_3 \to A_4$.

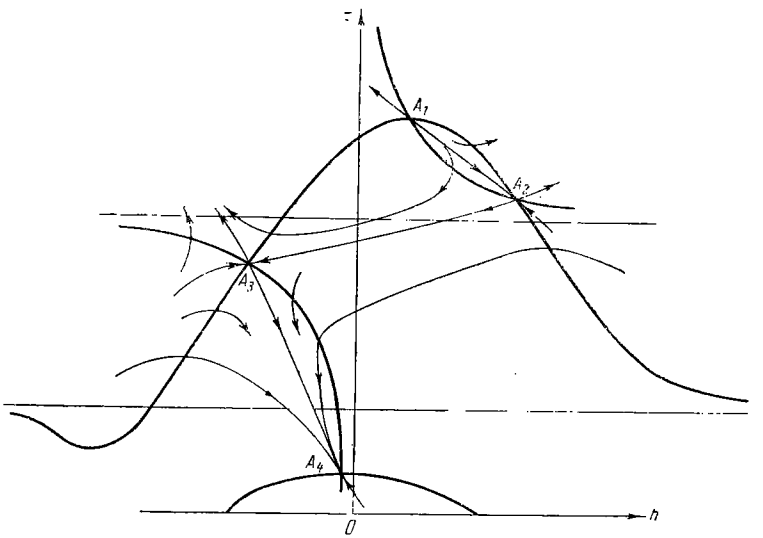


Рис. 53.

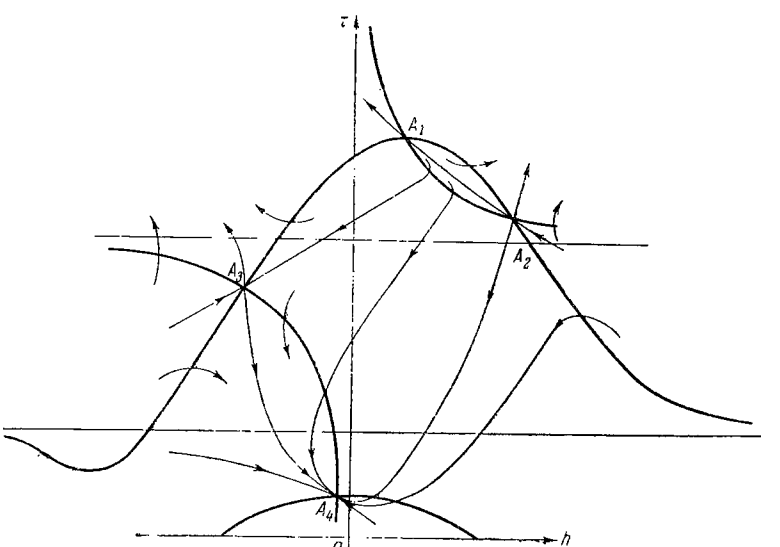


Рис. 54.

Если $\mu_1/\rho_0 v_m \to 0$, то интегральные кривые стремятся к совпадению с изоклиной $d\tau/dx = 0$. Однако в тех случаях, когда в начальной точке движение сверхзвуковое, а в конечной точке — дозвуковое, внутри зоны, представляющей структуру ударной волны, возникает газодинамическая ударная волна, в которой $H = \text{const}$. Отметим, что если такая ударная волна существует, то структура быстрой магнитогидродинамической ударной волны завершается газодинамическим скачком, а структура медленной ударной волны начинается с газодинамического скачка. Структура промежуточных ударных волн также может содержать газодинамические скачки.

Таким образом, в рассматриваемой постановке быстрые и медленные волны обладают структурой при любом отношении диссипативных коэффициентов. В тех случаях, когда имеются четыре особые точки, структурой могут обладать и промежуточные ударные волны. Эволюционные ударные волны отличаются от неэволюционных тем, что только они обладают структурой при любом соотношении между диссипативными коэффициентами.

ГЛАВА VIII

ОБТЕКАНИЕ НАМАГНИЧЕННЫХ ТЕЛ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

§ 1. Обтекание намагниченных тел идеальной жидкостью

Если проводимость жидкости бесконечна, то набегающий поток, в котором магнитное поле предполагается отсутствующим, не может проникнуть в область, занятую полем (при бесконечной проводимости магнитные силовые линии вморожены в жидкость). Отсюда следует, что обтекаемая область состоит из намагниченного тела и «каверны» — области, в которой находится магнитное поле [1, 2]. Эта область может быть пустой или заполненной жидкостью. Будем для определенности считать, что каверна заполнена обтекающей жидкостью, так как при большой, но конечной проводимости жидкость хотя и медленно, но может проникать внутрь каверны.

Рассмотрим случай стационарного обтекания намагниченного тела потоком идеальной жидкости. Внутри каверны, вообще говоря, возможно установившееся движение жидкости. Заметим, что скорость в каверне равна нулю, когда все магнитные силовые линии начинаются и кончаются на теле. В дальнейшем будем считать, что жидкость внутри каверны покоится, и будем разыскивать форму каверны и магнитное поле в ней. Полагая в уравнениях магнитной гидродинамики $\boldsymbol{v} = 0$, получим, что магнитное поле в каверне удовлетворяет системе уравнений

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{grad} p_{\text{кв}} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}, \tag{1.2}$$

где $p_{кв}$ — давление в каверне. На границе каверны с потоком должны выполняться условия

$$(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}) = 0, \tag{1.3}$$

$$p_{п} = p_{кв} + \frac{1}{8\pi} H^2, \tag{1.4}$$

где $p_{п}$ — давление в потоке, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали. Первое условие вытекает из отсутствия источников магнитного поля, а второе выражает факт равенства нормальных напряжений. Условие равенства касательных напряжений при выполнении условия (1.3) выполняется автоматически. Магнитное поле в каверне создается намагниченным телом.

Если применить операцию rot к уравнению (1.2), то получим, что внутри каверны вектор $\boldsymbol{H}$ должен удовлетворять системе уравнений

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}) = 0, \tag{1.5}$$

совпадающей по форме с уравнениями, описывающими стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости, если под $\boldsymbol{H}$ понимать скорость движения жидкости.

В тех случаях, когда на поверхности тела выполнено условие $j_n = 0$, т. е. когда тело электрически изолировано, задачу можно существенно упростить, потребовав, чтобы в каверне отсутствовали токи

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0 \tag{1.6}$$

(если в каверне отсутствует проводящая жидкость, то это условие выполняется автоматически). Из уравнения (1.2) при этом получим

$$p_{кв} = \text{const}, \tag{1.7}$$

форма же каверны должна быть найдена таким образом, чтобы удовлетворить граничному условию (1.4).

Рассмотрим несколько простейших примеров [2].

1. Обтекание несжимаемой жидкостью плоского магнитного диполя, вектор момента которого перпендикулярен к направлению скорости на бесконечности.

В рассматриваемом случае существует решение, когда обтекаемая поверхность представляет собой цилиндр, радиус

которого обозначим через a (рис. 55). Магнитное поле внутри цилиндра и скорость жидкости вне его даются формулами

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= H_0 \operatorname{grad} y\left(1+\frac{a^2}{x^2+y^2}\right), \\ \boldsymbol{v} &= U_0 \operatorname{grad} x\left(1+\frac{a^2}{x^2+y^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

где U_0 и H_0 — постоянные, связанные соотношением

$$H_0^2 = 4\pi\rho U_0^2, \tag{1.9}$$

причем H_0 определяется через момент диполя q из соотношения $q = H_0 a_0^2$. Давление внутри каверны $p_{\text{кв}}$ постоянно и

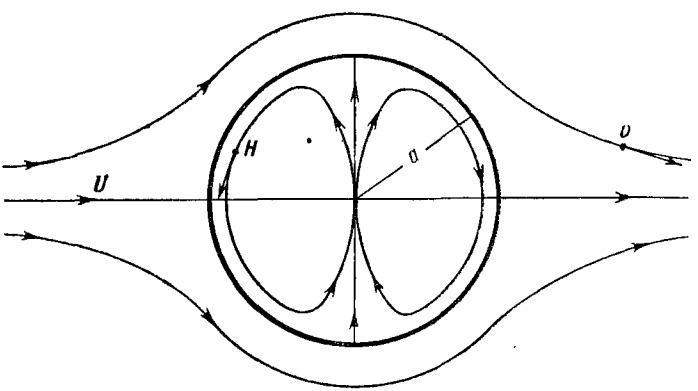


Рис. 55.

связано с давлением в критической точке набегающего потока p_0 следующим образом:

$$p_0 - p_{\text{кв}} = \frac{1}{2\pi} H_0^2. \tag{1.10}$$

2. Сверхзвуковое обтекание клина, по поверхности которого течет ток постоянной плотности i, параллельно ребру клина.

Будем для определенности считать, что по разным граням клина ток течет в противоположные стороны.

Можно построить решение этой задачи, в котором обтекаемая газом область представляет собой клинообразную область с углом раствора большим, чем угол раствора клина. Картина обтекания и поведения магнитных силовых линий представлена на рис. 56.

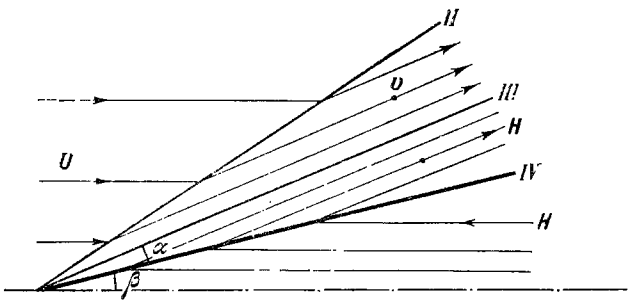


Рис. 56.

Прямая I изображает плоскость симметрии, прямая II — ударную волну, прямая III — границу каверны и прямая IV — границу клина. Линии тока после ударной волны идут параллельно границе каверны; давление внешнего потока $p_{\text{п}}$ на границе каверны постоянно. Магнитные силовые линии в каверне идут параллельно ее границе, а напряженность магнитного поля $H_{\text{кв}}$ постоянна. Давление в каверне связано с давлением в потоке соотношением

$$p_{\text{п}} = p_{\text{кв}} + \frac{1}{8\pi} H_{\text{кв}}^2. \tag{1.11}$$

Внутри клина напряженность магнитного поля $H_{\text{кл}}$ постоянна и связана с $H_{\text{кв}}$ и i соотношениями

$$H_{\text{кв}} \sin \alpha = H_{\text{кл}} \sin \beta, \quad i = \frac{c}{4\pi} (H_{\text{кв}} \cos \alpha + H_{\text{кл}} \cos \beta).$$

Легко видеть, что минимальная сила тока, необходимая для поддержания разности давлений $p_{\text{п}} - p_{\text{кв}}$, достигается при $\alpha = 0$ и равна

$$i_{\text{мин}} = c \frac{\sqrt{p_{\text{п}} - p_{\text{кв}}}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{1.12}$$

$i_{\text{мин}}$ — очень большая величина: так, например, если $p_{\text{п}} - p_{\text{кв}} = 1$ *атм*, то $i_{\text{мин}} = 4000$ *ампер/см*. Итак, при заданной разности $p_{\text{п}} - p_{\text{кв}}$ необходимым условием существования каверны является выполнение неравенства $i > i_{\text{мин}}$. В противном случае каверна отсутствует.

3. Сверхзвуковое обтекание конуса, по поверхности которого течет ток постоянной интенсивности i, перпендикулярно к образующей конуса.

Введем сферические координаты r, θ, φ. Из соображений размерности следует, что все искомые величины могут быть функциями только углов θ и φ. Так как задача осесимметрична, то все искомые величины не зависят от φ и являются функциями только θ. Будем искать решение задачи, предполагая, что $H_\varphi = 0$; тогда уравнения $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{dH_r}{d\theta} = H_\theta,$$

$$\frac{dH_\theta}{d\theta} \sin\theta + H_\theta \cos\theta + 2H_r \sin\theta = 0.$$

Исключая H_θ, получим для H_r линейное однородное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2H_r}{d\theta^2} + \frac{dH_r}{d\theta} \operatorname{ctg}\theta + 2H_r = 0,$$

частным решением которого является $H_r = \cos\theta$. Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид

$$H_r = \cos\theta \left\{ \int \frac{C_1 e^{-\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta}}{\cos^2\theta} d\theta + C_2 \right\} =$$

$$= C_1 \left[1 + \cos\theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right] + C_2 \cos\theta. \quad (1.13)$$

Дифференцируя это выражение по θ, найдем H_θ:

$$H_\theta = \frac{dH_r}{d\theta} = C_1 \left[\operatorname{ctg}\theta - \sin\theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right] - C_2 \sin\theta. \quad (1.14)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условий на границе каверны

$$H_\theta = 0, \quad p_{\text{п}} = p_{\text{кв}} + \frac{H_r^2}{8\pi} \quad \text{при} \quad \theta = \alpha + \beta.$$

Внутри конуса напряженность магнитного поля постоянна, а магнитные силовые линии параллельны оси симметрии. Плотность поверхностного тока i определяется из равенства

$$i = \frac{c}{4\pi}(H_{\text{кв},\tau} - H_{\text{кн},\tau}),$$

где $H_{\text{кв},\tau}$ и $H_{\text{кн},\tau}$ — касательные составляющие напряженности магнитного поля каверны и конуса на поверхности конуса. Для конуса также существует плотность тока $i_{\text{мин}}$, которая выражается той же формулой, что и для клина.

Отметим, что при заданной плотности тока i угол α определяется заданием $p_{\text{кв}}$. Параметр $p_{\text{кв}}$ остается в решении свободным. Он должен задаваться из каких-то дополнительных соображений.

§ 2. Пример обтекания намагниченного тела жидкостью с конечной электропроводностью

Решение задачи об обтекании намагниченных тел, когда $R_m \neq \infty$, представляет большой интерес для аэродинамики больших скоростей. При больших сверхзвуковых скоростях полета перед телом образуется сильная ударная волна. За ударной волной вследствие сильного нагревания газ становится проводящим. В этих условиях, если тело намагничено, поток газа между телом и ударной волной будет взаимодействовать с магнитным полем, связанным с телом. Это взаимодействие приводит к изменению сил, действующих на тело, а также к изменению тепловых потоков от газа к телу.

Точных решений задачи об обтекании намагниченных тел потоком неидеального газа не существует. Однако развиты различного рода приближенные методы решения задачи, причем приближенные методы связываются с конкретной задачей (либо тепловой, либо задачей обтекания) [3–11]. При обтекании затупленных тел область высоких температур и интенсивных тепловых потоков находится вблизи передней критической точки, поэтому строятся приближенные методы решения задач, опирающиеся на свойства течения газа вблизи критической точки. Один из таких методов будет рассмотрен ниже [3]. При этом будем рассматривать течение невязкого, нетепло-

проводного газа с конечной электропроводностью, изучая тем самым влияние магнитного поля на движение газа вне пограничного слоя. Такое рассмотрение имеет смысл, так как известно, что изменение скорости внешнего к пограничному слою потока влияет на течение внутри пограничного слоя, и следовательно, на тепловые потоки и сопротивление тела. Изучение характера влияния магнитного поля на течение в пограничном слое и оценки суммарного изменения тепловых потоков и вязкого трения проведены в работах [7, 8, 10, 11].

Рассмотрим обтекание гиперзвуковым потоком ($U \gg a_1$) затупленного осесимметричного тела. При таком обтекании образуется отошедшая ударная волна. Так как скорость набегающего потока велика ($M_1 \gg 1$), и скачок вблизи критической точки мало отличается от прямого, то для числа Маха за скачком вблизи критической точки получим выражение (газ считаем совершенным)

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \approx \frac{\gamma - 1}{2\gamma}.$$

При больших скоростях набегающего потока на ударной волне происходят диссоциация и ионизация газа, которые сопровождаются поглощением энергии. Это добавочное поглощение энергии можно трактовать как увеличение теплоемкости c_V в совершенном газе. В связи с этим за сильной ударной волной эффективная величина γ становится близкой к единице ($\gamma \approx 1,2$). При этом M_2 за скачком становится малой величиной и газ в сжатом слое в окрестности носовой части тупого тела может рассматриваться с достаточной степенью точности как несжимаемая жидкость. Поэтому при изучении движения вблизи критической точки будем пользоваться моделью несжимаемой жидкости. Параметры, характеризующие течение непосредственно за ударной волной, могут быть рассчитаны по параметрам набегающего потока из условий на ударной волне. Газ перед ударной волной будем считать непроводящим, а за ударной волной — обладающим постоянной проводимостью σ.

В дальнейшем при решении задачи будем задавать форму ударной волны и определять форму обтекаемого тела. Пусть ударная волна имеет сферическую форму, а магнитное поле вне ударной волны является полем диполя, расположенного

в центре этой сферы (внутри тела электрические токи должны быть заданы таким образом, чтобы они совместно с токами, текущими в газе за ударной волной, образовывали дипольное магнитное поле перед ударной волной). Решение будет разыскиваться в окрестности оси симметрии потока.

Уравнения, описывающие движение за ударной волной, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \\ &\operatorname{grad} \frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho c} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}, \\ &\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right), \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi \mathrm{j}}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Будем считать, что магнитное поле лежит в меридиональных плоскостях и обладает осевой симметрией. Тогда скорость $\boldsymbol{v}$ будет лежать в меридиональных плоскостях, а плотность тока $\boldsymbol{j}$ и электрическое поле $\boldsymbol{E}$ будут иметь только

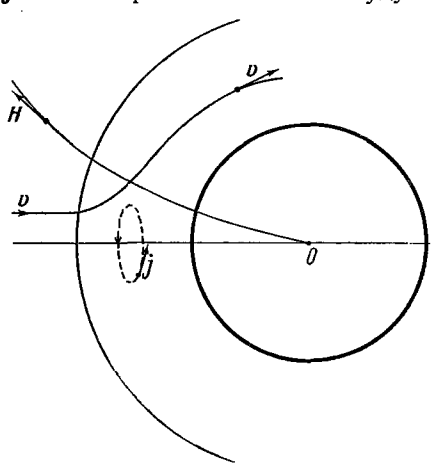


Рис. 57.

составляющие, перпендикулярные к меридиональной плоскости (рис. 57). При этом из условия $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ и из предположения, что электромагнитное поле вдали от тела равно нулю,

следует, что $\boldsymbol{E}$ всюду равно нулю. Действительно, составляющая $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$, перпендикулярная к оси симметрии, равна производной от $\boldsymbol{E}$ по направлению, параллельному оси симметрии. Таким образом, $\boldsymbol{E}$ зависит только от расстояния до оси симметрии и, следовательно, $\boldsymbol{E}$ равно нулю всюду. В связи с этим уравнения, описывающие электромагнитное поле, можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{j}=\sigma\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}\right),\\ &\boldsymbol{j}=\frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H},\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\quad \boldsymbol{E}=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

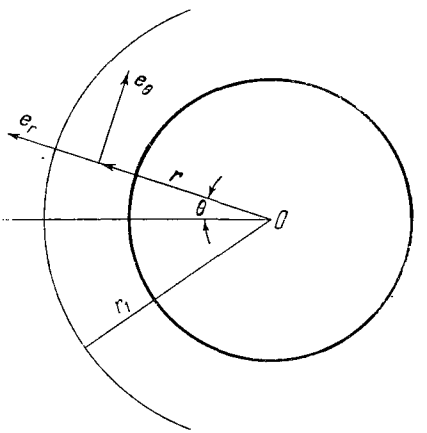


Рис. 58.

Решение задачи должно удовлетворять условиям на поверхности тела

$$v_n=0 \tag{2.3}$$

и условиям на ударной волне, которые вследствие конечности проводимости жидкости сводятся к условию непрерывности магнитного поля при переходе через ударную волну и обычным газодинамическим условиям сохранения потока массы, импульса и энергии:

$$\left.\begin{aligned} &H_{n1}=H_{n2},\quad \boldsymbol{H}_{\tau 1}=\boldsymbol{H}_{\tau 2},\quad \rho_1 v_{n1}=\rho_2 v_{n2},\quad \boldsymbol{v}_{\tau 1}=\boldsymbol{v}_{\tau 2},\\ &\rho_1 v_{n1}^2+p_1=\rho_2 v_{n2}^2+p_2,\quad i_1+\frac{v_1^2}{2}=i_2+\frac{v_2^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Всюду в дальнейшем будем использовать сферическую систему координат с началом в центре сферы, задающей форму ударной волны (рис. 58). При этом уравнение ударной волны будет

$$r=r_1,$$

а выражение для напряженности магнитного поля диполя интенсивности Q^*c, расположенного в центре, будет иметь вид

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{H}=2\frac{Q^*}{r^3}\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\frac{Q^*}{r^3}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

В этой системе координат граничные условия (2.4) перепишутся в виде:

при $r = r_1$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{c}\boldsymbol{H}_2 = 2\varkappa\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \varkappa\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta, \quad \left(\varkappa = -\frac{Q^*}{r_1^3}\right), \\ &\boldsymbol{v}_2 = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta = -\eta U\cos\theta\boldsymbol{e}_r + U\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta, \\ &p_2 = p_1 + \rho_1 U^2\cos^2\theta\,(1-\eta), \quad \eta = \frac{\rho_1}{\rho_2} \approx \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

где U — скорость набегающего потока.

Таким образом, задача о течении вблизи критической точки свелась к отысканию решения уравнений (2.1) — (2.2), удовлетворяющего граничным условиям (2.5). Граничное условие (2.3) будет служить для определения формы обтекаемого тела после нахождения решения.

Преобразуем систему уравнений движения. Применив операцию rot к уравнению импульсов, получим

$$-\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\rho c}\operatorname{rot}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}). \tag{2.6}$$

Вследствие осевой симметрии

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \xi\boldsymbol{e}_\varphi,$$

и левая часть уравнения (2.6) преобразуется к следующему виду:

$$-\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}) = (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{v} =$$
$$= \boldsymbol{e}_\varphi\left[(\boldsymbol{v}\nabla)\xi - \frac{\xi}{r^*}(\boldsymbol{v}\nabla)r^*\right],$$

где

$$r^* = r\sin\theta.$$

Умножая обе части (2.6) на $\boldsymbol{e}_\varphi$, получим окончательно

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\xi - \frac{\xi}{r^*}(\boldsymbol{v}\nabla)r^* = \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{\rho c}\operatorname{rot}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}). \tag{2.7}$$

Уравнение неразрывности в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} = 0,$$

где v_r и v_θ — компоненты скорости в сферических координатах. Это уравнение можно также записать в таком виде:

$$\frac{\partial (r^2 v_r \sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial (r v_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} = 0. \tag{2.8}$$

Для того чтобы замкнуть систему, необходимо к уравнениям (2.7) и (2.8) добавить уравнения (2.2). Легко видеть, что решением, удовлетворяющим уравнению (2.8) и имеющим ту же зависимость от θ, что и на ударной волне (см. (2.5)), является выражение

$$\boldsymbol{v} = \left[\frac{2f(r)}{r^2}\cos\theta\right]\boldsymbol{e}_r - \left[\frac{f'(r)}{r}\sin\theta\right]\boldsymbol{e}_\theta.$$

Штрихом здесь и всюду в дальнейшем обозначается производная по r.

Будем рассматривать течение в окрестности оси симметрии, т. е. будем считать, что

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \sin\theta \approx \theta;$$

тогда предыдущее выражение для $\boldsymbol{v}$ перейдет в следующее:

$$\boldsymbol{v} \approx \frac{2f}{r^2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\boldsymbol{e}_r - \frac{f'}{r}\theta\boldsymbol{e}_\theta. \tag{2.9}$$

Так как магнитное поле должно удовлетворять уравнению $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$ и условия на ударной волне для него дают ту же зависимость от θ, что и для скорости, аналогичную операцию можно проделать и для отыскания вида функции $\boldsymbol{H}$. Следовательно, решение для $\boldsymbol{H}$ можно искать в виде

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{H} = \left[\frac{2g(r)}{r^2}\cos\theta\right]\boldsymbol{e}_r - \left[\frac{g'(r)}{r}\sin\theta\right]\boldsymbol{e}_\theta \approx$$
$$\approx \frac{2g}{r^2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\boldsymbol{e}_r - \frac{g'}{r}\theta\boldsymbol{e}_\theta. \tag{2.10}$$

Таким образом, решение задачи свелось к отысканию двух функций $f(r)$ и $g(r)$. Эти функции на ударной волне, т. е. при $r = r_1$, должны обращаться в некоторые константы, определяемые видом решения (2.9) и (2.10) и граничными условиями (2.5). Для определения функций $f(r)$ и $g(r)$ воспользуемся уравнениями (2.7) и законом Ома (2.2). Выразим

члены, входящие в эти уравнения, через функции $f(r)$ и $g(r)$. Так как

$$\xi = (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} =$$
$$= 2\frac{\theta}{r^3} f - f'' \frac{\theta}{r} = -\frac{\theta}{r}\left(f'' - 2\frac{f}{r^2}\right),$$
$$(\boldsymbol{v}\nabla)\xi = v_r \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{2f}{r^2}\left[\frac{\theta}{r^2}\left(f'' - \frac{2f}{r^2}\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{\theta}{r}\left(f''' - 2\frac{f'}{r^2} + 4\frac{f}{r^3}\right)\right] + \frac{f'\theta}{r^2}\frac{1}{r}\left(f'' - 2\frac{f}{r^2}\right) =$$
$$= \frac{\theta}{r^3}\left(-2f'''f + f''f' + 2\frac{ff''}{r} + 2\frac{f'f}{r^2} - 12\frac{f^2}{r^3}\right),$$
$$\frac{\xi}{r^*}(\boldsymbol{v}\nabla) r^* = \frac{\xi}{r\theta}\left(v_r \frac{\partial r^*}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r}\frac{\partial r^*}{\partial \theta}\right) = \frac{\xi}{r\theta}(v_r \theta + v_\vartheta) =$$
$$= \frac{\xi}{r\theta}\left(\frac{2f}{r^2}\theta - \frac{f'}{r}\theta\right) = \xi\left(\frac{2f}{r^3} - \frac{f'}{r^2}\right) =$$
$$= -\frac{\theta}{r^3}\left(f'' - 2\frac{f}{r^2}\right)\left(\frac{2f}{r} - f'\right) =$$
$$= -\frac{\theta}{r^3}\left(-f''f' + \frac{2f''f}{r} + \frac{2f'f}{r^2} - \frac{4f^2}{r^3}\right),$$

то левая часть уравнения (2.7) преобразуется к виду

$$-\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{e}_\varphi = (\boldsymbol{v}\nabla)\xi - \frac{\xi}{r^*}(\boldsymbol{v}\nabla) r^* =$$
$$= -\frac{2f}{r^3}\left(f''' - \frac{2f''}{r} - \frac{2f'}{r^2} + \frac{8f}{r^3}\right)\theta.$$

Преобразуем теперь правую часть уравнения (2.7). Вычислим плотность тока

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{v} \times \frac{\boldsymbol{H}}{c} = \sigma\left(\frac{v_r}{c} H_\theta - \frac{v_\theta}{c} H_r\right)\boldsymbol{e}_\varphi =$$
$$= \sigma\left(\frac{2g}{r^2}\frac{f'\theta}{r} - \frac{2f}{r^2}\frac{g'\theta}{r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{2\sigma\theta}{r^3}(f'g - g'f)\,\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Плотность силы равна

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_r \frac{2\sigma\theta}{r^3}(f'g - gf)\left(\frac{g'}{r}\theta\right) +$$
$$+ \boldsymbol{e}_\theta \frac{2\sigma\theta}{r^3}(f'g - g'f)\left(\frac{2g}{r^2}\right) =$$
$$= \sigma\left[\boldsymbol{e}_r \frac{2\theta^2}{r^4} g'(f'g - g'f) + \boldsymbol{e}_\theta \frac{4\theta}{r^5} g(f'g - g'f)\right].$$

Итак, правая часть уравнения (2.7) выражается через функции f и g следующим образом:

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \operatorname{rot}\left(\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{2\theta^2}{r^4}g'(f'g-g'f)\right]+$$
$$+\frac{1}{\rho r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{4\theta\sigma}{r^4}g(f'g-g'f)=$$
$$=\frac{4\theta\sigma}{\rho r^5}g'(f'g-g'f)-\frac{16\theta\sigma}{\rho r^6}g(f'g-g'f)+$$
$$+\frac{4\theta\sigma}{\rho r^5}g'(f'g-g'f)+\frac{4\theta\sigma}{\rho r^5}g(f''g-g''f)=$$
$$=\frac{4\theta\sigma}{\rho r^5}g\left(-g''f+gf''-\frac{4f'g}{r}+\frac{4fg'}{r}\right).$$

Окончательно уравнение (2.7) примет вид

$$f\left(f'''-\frac{2f''}{r}-\frac{2f'}{r^2}+\frac{8f}{r^3}\right)=$$
$$=\frac{2\sigma g}{\rho r^2}\left(-fg''+f''g+\frac{4fg'}{r}-\frac{4f'g}{r}\right). \quad (2.11)$$

Так как

$$\boldsymbol{e}_\varphi \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial rH_\varphi}{\partial r}=c\left(\frac{2\theta g}{r^3}-\frac{g''\theta}{r}\right),$$

то уравнение, выражающее закон Ома, запишется через функции f и g следующим образом:

$$\frac{2}{r^2}(f'g-g'f)=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\left(\frac{2g}{r^2}-g''\right). \quad (2.12)$$

Уравнения (2.11) и (2.12) служат для определения функций $f(r)$ и $g(r)$.

Перейдем в уравнениях (2.11) и (2.12) к безразмерным переменным

$$R=\frac{r}{r_1},\quad F(R)=\frac{f(r)}{Ur_1^2},\quad G(R)=\frac{g(r)}{\varkappa r_1^2};$$

тогда уравнение (2.11) примет вид

$$F\left(F'''-\frac{2F''}{R}-\frac{2F'}{R^2}+8\frac{F}{R^3}\right)=$$
$$=-\frac{2}{R^2}Q\eta G\left(-FG''+F''G+4F\frac{G'}{R}-4F'\frac{G}{R}\right), \quad (2.13)$$

где

$$Q=\frac{\sigma\varkappa^2 r_1}{U\rho_1},$$

а уравнение (2.12) будет иметь следующий вид:

$$\left(-G''+\frac{G}{R^2}\right)=\frac{2}{R^2}R_m(-FG'+F'G), \qquad (2.14)$$

где $R_m=\dfrac{Ur_1}{\nu_m}=\dfrac{4\pi\sigma U r_1}{c^2}$ — магнитное число Рейнольдса.

Найдем теперь граничные условия, которым должны удовлетворять функции F и G, входящие в эти уравнения. Система (2.13) и (2.14) является системой пятого порядка, поэтому для определения функций $G(R)$ и $F(R)$ необходимо пять граничных условий. Магнитное поле на ударной волне выражается через функцию G следующим образом:

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{H}=\frac{2g(r_1)}{r_1^2}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\boldsymbol{e}_r-\frac{g'(r_1)}{r_1}\theta\boldsymbol{e}_\theta=$$

$$=2\varkappa G(1)\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\boldsymbol{e}_r-\varkappa G'(1)\,\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

Следовательно, в силу (2.10)

$$G(1)=1, \quad G'(1)=-1. \qquad (2.15)$$

С другой стороны, на ударной волне

$$\boldsymbol{v}=2UF(1)\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\boldsymbol{e}_r-UF'(1)\,\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

Следовательно, в силу (2.9)

$$F(1)=-\frac{\eta}{2}, \quad F'(1)=-1. \qquad (2.16)$$

Для получения пятого граничного условия воспользуемся тем, что непосредственно за ударной волной давление известно:

$$\left.\begin{aligned} &p_2=p_1+\rho_1U^2(1-\eta)(1-\theta^2)\\ &\left.\frac{\partial p}{\partial\theta}\right|_{r=r_1}=-2\rho_1U^2(1-\eta)\,\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

или

Проектируя уравнение движения на направление e_θ, получим

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\frac{v_\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{c^2}\left[\frac{\sigma H_r}{\rho}(v_rH_\theta-v_\theta H_r)\right].$$

Используя (2.9), (2.10), найдем

$$\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2f}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f'\theta}{r}\right) - \frac{f'^2\theta}{r^3} + \frac{2f}{r^2}\frac{f'\theta}{r^2} + \frac{\sigma}{\rho}\left[\frac{2g}{r^2}\left(-\frac{2f}{r^2}\frac{g'\theta}{r} + \frac{f'\theta}{r}\frac{2g}{r^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2ff''\theta}{r^3} - \frac{2ff'\theta}{r^4} - \frac{f'^2\theta}{r^3} + \frac{2ff'\theta}{r^4} + \frac{\sigma}{\rho}\frac{4g\theta}{r^5}(f'g - g'f) =$$

$$= \frac{\theta}{r^3}(2ff'' - f'^2) + \frac{\sigma}{\rho}\frac{4g\theta}{r^5}(f'g - g'f).$$

Введя функции $F(R)$ и $G(R)$, получим

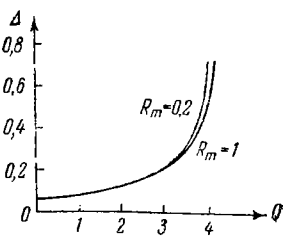
$$\frac{1}{U^2\rho_1\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{\eta R^2}(2FF'' - F'^2) + 4Q\frac{G}{R^4}(F'G - G'F).$$

Подставляя последнее равенство в (2.17) и воспользовавшись граничными условиями (2.16) и (2.15), найдем соотношение, которое должно выполняться на ударной волне:

$$-2(1-\eta) = \frac{1}{\eta}(-\eta F'' - 1) + 4Q\left(-1 - \frac{\eta}{2}\right).$$

Таким образом, пятое граничное условие можно записать в виде

$$F'' = -\frac{1}{\eta} + 2(1-\eta) - 4Q\left(\frac{\eta}{2} + 1\right). \quad (2.18)$$



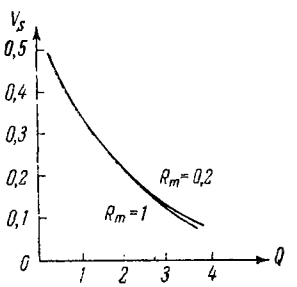


Рис. 59.

Система (2.12), (2.13) с граничными условиями (2.15), (2.16) и (2.18) интегрировалась численно при $\eta = \frac{1}{11}$, $R_m = \frac{1}{5}$ и 1 и различных значениях Q (от 0,1 до 5). Интегрирование велось от $R_1 = 1$ до R^* такого, что $F(R^*) = 0$. В точке R^* скорость $v_r = 0$, и следовательно, эта точка соответствует поверхности тела. Отсюда следует, что сферической ударной волне соответствует обтекание сферы меньшего радиуса $R^* < 1$. Расчет показал, что R^* уменьшается при увеличении Q.

При $Q > Q_{крит}$ величина R^* становится отрицательной, т. е. обтекаемого тела не существует. Величина $Q_{крит}$ для обеих R_m получилась приблизительно равной 4,2. На основании результатов расчета для различных Q и R_m были найдены безразмерное расстояние ударной волны от сферы

$$\Delta = \frac{1 - R^*}{R^*}$$

и безразмерный градиент скорости на теле

$$V_s = -\left(\frac{F'}{R^2}\right)_{R=R^*}.$$

Результаты расчетов этих величин представлены на рис. 59.

Следует отметить, что эти величины слабо зависят от R_m и сильно от Q. При увеличении Q ударная волна удаляется от тела. При $Q = Q_{крит}$ безразмерное расстояние от ударной волны до тела обращается в бесконечность. Градиент скорости на поверхности тела убывает с ростом Q.

Уменьшение касательной составляющей скорости невязкого потока вне пограничного слоя приводит к уменьшению аэродинамического нагрева летящего тела приблизительно в $\sqrt{V_{s0}}/\sqrt{V_{sм}}$ раз, где V_{s0} — градиент скорости на поверхности тела при отсутствии магнитного поля, а $V_{sм}$ — градиент скорости на поверхности тела при наличии магнитного поля [7]. Таким образом, использование магнитного поля может привести к уменьшению нагрева тела.

БИБЛИОГРАФИЯ[1])

Монографии, обзоры, сборники

1. Альфвен Х., Космическая электродинамика, ИЛ, 1952.
2. Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П., Введение в космическую газодинамику, Физматгиз, 1958.
3. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Труды конференции по магнитной гидродинамике. Рига, 1958. Изд. АН Лат. ССР, 1959.
4. Данжи Дж., Космическая электродинамика, Госатомиздат, 1961.
5. Каулинг Т., Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1959.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
7. Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума), перев. с англ., Атомиздат, 1958.
8. Пикельнер С. Б., Основы космической электродинамики, Физматгиз, 1961.
9. Проблемы современной физики, ИЛ, № 2, 1954 (сборник переводов).
10. Проблемы современной физики, ИЛ, № 7, 1957 (сборник переводов).
11. Спитцер Л., Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957.
12. Сыроватский С. И., Магнитная гидродинамика, УФН, т. 62 (1957), № 3.
13. Electromagnetic phenomena in cosmical physics, Edited by B. Lehnert Cambr. Univ. Press, 1958.

---

[1]) В списке литературы приняты следующие сокращения названий журналов:

ДАН — Доклады Академии наук;
ЖТФ — Журнал технической физики;
ЖЭТФ — Журнал экспериментальной и теоретической физики;
ПММ — Прикладная математика и механика;
УФН — Успехи физических наук;
ARS Journ. — American Rocket Society Journal;
JAS — Journal of Aero-Space Sciences;
ONERA — Office National d'Etudes et de Recherches Aeronautiques.

14. Germain P., Introduction a l'étude de l'aeromagnetodynamique, ONERA, publ. 51, 1958.
15. Magneto-fluid dynamics. Symposium 1960, Rev. Modern Physics, т. 32 (1960), № 4.
16. The magnetodynamics of conducting fluids, Edited by D. Bershader, Stanford Univ. Press, 1959.
17. Resler E. L., Sears W. R., The prospects for magneto-aerodynamics, JAS, т. 25 (1958), № 4. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», № 6, 1958.)

Литература к гл. I

1. Брагинский С. И., Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме, ЖЭТФ, т. 33 (1957), № 2.
2. Брагинский С. И., Об одном критерии применимости уравнений магнитной гидродинамики к плазме. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Труды конференции по магнитной гидродинамике. Рига, 1958. Изд. АН Лат. ССР, 1959.
3. Голицын Г. С., Плоские задачи магнитной гидродинамики. ЖЭТФ, т. 34 (1958), № 3.
4. Губанов А. И., Лунькин Ю. П., Уравнения магнитной плазмодинамики, ЖТФ, т. XXX (1960), № 9.
5. Жигулев В. Н., Об одном классе движений в магнитной гидродинамике, ПММ, т. XXII (1958), № 3.
6. Зоммерфельд А., Электродинамика, ИЛ, 1958.
7. Кантрович А. Р., Петчек Г. Е., Вводный обзор магнитной гидродинамики, Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума), перев. с англ., Атомиздат, 1958.
8. Каплан С. А., О сохранении циркуляции скорости в магнитогазодинамике, Астр. журн., т. XXXI (1954), № 4.
9. Каплан С. А., Станюкович К. П., Решение уравнений магнитогазодинамики для одномерного течения, ДАН СССР, 95 (1954), № 4.
10. Каулинг Т., Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1959.
11. Ладыженский М. Д., Гиперзвуковое обтекание тел в магнитной гидродинамике, ПММ, т. XXIII (1959), № 6.
12. Любимов Г. А., О форме обобщенного закона Ома в магнитной гидродинамике, ПММ, т. XXV (1961), № 4.
13. Половин Р. В., О магнитогидродинамическом описании плазмы, ЖТФ, т. XXXI (1962), № 1.
14. Рашевский П. К., Римапова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, 1953.
15. Спитцер Л., Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957.
16. Сыроватский С. И., Магнитная гидродинамика, УФН, т. 62 (1957), № 3.
17. Тамм И. Е., Основы теории электричества, Гостехиздат, 1957.
18. Чепмен С. и Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.
19. Ching Shi-Liu, Ali Bulent Cambel, Magnetogasdynamic flow regimes, ARS Journ., т. 29 (1959), № 11.

20. Elsasser W. M., Induction effects in terrestrial magnetism, Phys. Rev., т. 72 (1947), № 9.
21. Elsasser W. M., Dimensional relations in magnetohydrodynamics, Phys. Rev., т. 95 (1954), № 1.
22. Kihara T., Macroscopic foundation of plasma dynamics, Proc. Phys. Soc. Japan, т. 13 (1958), № 5.
23. Schlüter A., Dynamik des Plasmas I, Zeitschr. Naturforsch., т. 5a (1950), № 1. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 2, 1954.)
24. Schlüter A., Dynamik des Plasmas II, Zeitschr. Naturforsch., т. 6a, (1951), № 1. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 2, 1954.)

Литература к гл. II

1. Коган М. Н., О сохранении вихрей и токов в магнитной гидродинамике, ДАН СССР, т. 139 (1961), № 1.
2. Ладиков Ю. П., Магнитно-вихревые кольца. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение (1960), № 4.
3. Регирер С. А., О течении электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля по трубам произвольного профиля, ПММ, т. XXIV (1960), № 3.
4. Сыроватский С. И., Магнитная гидродинамика, УФН, т. 62 (1957), № 3.
5. Уфлянд Я. С., Установившееся течение электропроводной жидкости в прямоугольном канале при наличии поперечного магнитного поля, ЖТФ, т. XXX (1960), № 10.
6. Уфлянд Я. С., Задача Гартмана для круглой трубы, ЖТФ, т. XXX (1960), № 10.
7. Шафранов В. Д., Магнитно-вихревые кольца, ЖЭТФ, т. 33 (1957), № 3 (9).
8. Якубенко А. Е., Течение по трубам вязкой несжимаемой проводящей жидкости в однородном и неоднородном магнитном поле, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1961.
9. Alfven H., Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves, Nature, т. 150 (1942), № 3805.
10. Alfven H., On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves, Arkiv f. mat., astron., o. fys., т. 29 B (1943), № 2.
11. Blewiss Z. O., Magneto-gas dynamics of hypersonic Couette flow, JAS, т. 25 (1958), № 10. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», № 3, 1959.)
12. Chandrasekhar S., On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics. Proc. Nat. Acad. of Science USA, т. 42 (1956), № 5.
13. Greenspan H. P., Carrier G. F., The magnetohydrodynamic flow past a flat plate, Journ. Fluid Mech., т. 6 (1959), № 1.
14. Hartmann J. Hg-dynamics I: Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field. Det.

Kgl. Danske Videnskabernes Seiskab. Mathematiskfysiske Meddelser, т. XV (1937), № 6.
15. Hasimoto H., Viscous flow of a perfectly conducting fluid with a frozen magnetic field, Phys. of Fluids, т. 2 (1959), № 3.
16. Parker E. N., Hydromagnetic waves and the acceleration of cosmic rays. Phys. Rev., т. 99, (1955), № 6.
17. Shercliff J. A., Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields, Proc. Cambridge Phil. Soc., т. 49 (1953), № I.
18. Stewartson K., On the motion of a non-conducting body through a perfectly conducting fluid. Journ. of Fluid Mech., т. 8 (1960), № 1.

Литература к гл. III

1. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Полоцин Р. В. Простые волны в магнитной гидродинамике, ЖТФ, т. XXIX (1959), № 8.
2. Жигулев В. Н., Анализ слабых разрывов в магнитной гидродинамике, ПММ, т. XXIII (1959), № 1.
3. Каплан С. А., Станюкович К. П., Решение уравнений магнитогазодинамики для одномерного течения, ДАН СССР, т. 95 (1954), № 4.
4. Коган М. Н., Магнетодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью, ПММ, т. XXIII, (1959), № 1.
5. Куликовский А. Г., О волнах Римана в магнитной гидродинамике, ДАН СССР, т. 121 (1958), № 6.
6. Любарский Г. Я., Половин Р. В., Простые магнитозвуковые волны, ЖЭТФ, т. 35 (1958), № 2.
7. Половин Р. В., К теории простых магнитогидродинамических волн, ЖЭТФ, т. 39 (1960), № 2.
8. Сыроватский С. И., Магнитная гидродинамика, УФН, т. 62 (1957), № 3.
9. Baños A., Magneto-hydrodynamic waves in incompressible and compressible fluids. Proc. Roy. Soc. Ser. A., т. 233, (1955), № 1194. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 7, 1957.)
10. Baños A., Fundamental wave equations in an unboundet magneto-hydrodynamic field. Phys. Rev., т. 97 (1955), № 6. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 7, 1957).
11. Bazer J., Resolution of an initial shear-flow discontinuity in one-dimensional hydromagnetic flow, Astrophys. Journ., т. 128, (1958), № 3.
12. Herlofson N., Magneto-hydrodynamic waves in a compressible fluid conductor, Nature, т. 165 (1950), № 4208.
13. Hulst H. C. van de, Interstellar polarization and magneto-hydrodynamic waves. Proc. of the symposium on the motion of gaseous masses. Paris, 1949. (Имеется русский перевод в книге «Проблемы космической аэродинамики», ИЛ, 1953).

14. Ong R. S., Characteristics manifolds in three-dimensional unsteady magnetohydrodynamics, Phys. of Fluids, т. 2 (1959), № 3.
15. Pott N., A simple construction for the determination of the magnetohydrodynamic wave speed in a compressible conductor, JAS, т. 26 (1959), № 4.

Литература к гл. IV

1. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В., Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ, т. 25 (1958), № 3.
2. Гельфанд И. М., Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений, Успехи математических наук, т. 87 (1959), № 2.
3. Иорданский С. В., Теорема Цемплена в магнитной гидродинамике, ДАН СССР, т. 121 (1958), № 4.
4. Кисслев М. И., К расчету наклонных ударных волн в магнитной гидродинамике, ДАН СССР, т. 131 (1960), № 4.
5. Коган М. Н., Ударные волны в магнитной газодинамике, ПММ, т. XXIII (1959), № 3.
6. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред., Гостехиздат, 1957.
7. Любарский Г. Я., Половин Р. В., О расщеплении неустойчивых ударных волн, ЖЭТФ, т. 36 (1959), № 4.
8. Половин Р. В., Ударные волны в магнитной гидродинамике, УФН, т. 72 (1960), № 1.
9. Половин Р. В., Любарский Г. Я., Невозможность ударных волн разрежения в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ, т. 35 (1958), № 2.
10. Сыроватский С. И., Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ, т. 35 (1958), № 6.
11. Сыроватский С. И., Магнитная гидродинамика, УФН, т. 62 (1957), № 3.
12. Bazer J., Ericson W., Hydromagnetic shocks, Astrophys. Journ., т. 129 (1959), № 3.
13. Hoffmann F., Teller E., Magnetohydrodynamic shocks, Phys. Rev., т. 80 (1950), № 4. (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 2, 1954.)

Литература к гл. V

1. Ахиезер И. А., Половин Р. В., О движении проводящего поршня в магнитогидродинамической среде, ЖЭТФ, т. 38 (1960), № 2.
2. Бармин А. А., Гогосов В. В., Задача о поршне в магнитной гидродинамике, ДАН СССР, т. 134 (1960), № 5.
3. Гогосов В. В., О движении поршня в проводящей среде, ДАН СССР, т. 135 (1960), № 1.
4. Гогосов В. В., Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике, ПММ, т. XXV (1961), № 1.

5. Коробейников В. П., Рязанов Е. В., Некоторые решения уравнений магнитной гидродинамики и их приложения к задачам о распространении ударных волн, ПММ, т. XXIV (1960), № 1.
6. Куликовский А. Г., К вопросу о пульсации плазменного шнура, ДАН СССР, т. 114 (1957), № 5.
7. Ладиков Ю. П., Некоторые точные решения уравнений неустановившихся движений в магнитной гидродинамике, ДАН СССР, т. 137 (1961), № 2.
8. Любарский Г. Я., Половин Р. В., Задача о поршне в магнитной гидродинамике, ДАН СССР, т. 128 (1959), № 4.
9. Любарский Г. Я., Половин Р. В., Расщепление малого разрыва в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ, т. 35 (1958), № 5.
10. Половин Р. В., О движении поршня в проводящей среде, ЖЭТФ, т. 38 (1960), № 5.
11. Рязанов Е. В., О решении уравнений магнитной гидродинамики, описывающих одномерные осесимметрические движения гравитирующего газа, ПММ, т. XXIII (1959), № 1.
12. Седов Л. И., Об интегрировании уравнений одномерного движения газа, ДАН СССР, т. 90 (1953), № 5.
13. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1953.
14. Яворская И. М., Колебания бесконечного газового цилиндра с собственной гравитацией в магнитном поле, ДАН СССР, т. 114 (1957), № 5.
15. Bazer J., Resolution of an initial Shear-flow discontinuity in one-dimensional hydromagnetic flow. Astrophys. Journ., т. 128 (1958), № 3.
16. Bazer J., Fleischmann O., Propagation of weak hydromagnetic discontinuities, Phys. of Fluids, т. 2 (1959), № 4.
17. Grad H., Propagation of magnetohydrodynamic waves without radial attenuation, The magnetodynamics of conducting fluids, Stanf. Univ. Press, 1959.
18. Mc. Vittie G. C., Some exact solutions of the equations of magneto-hydrodynamics when both self-attraction and magnetic fields are present. Rev. Mod. Phys., т. 30 (1958), № 3.

Литература к гл. VI

1. Коган М. Н., Магнетодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью, ПММ, т. XXIII (1959), № 1.
2. Коган М. Н., Плоские течения идеального газа с бесконечной электропроводностью в магнитном поле, не параллельном скорости потока, ПММ, т. XXIV (1960), № 1.
3. Коган М. Н., О распространении возмущений в плоских магнитогидродинамических течениях, ПММ, т. XXIV (1960), № 3.
4. Любимов Г. А., Стационарное обтекание угла потоком бесконечно проводящего газа, ДАН СССР, т. 126 (1959), № 4.

5. Kato Y., Taniuti T., Hydromagnetic plane steady flow in compressibie ionized gases, Progr. Theoret. Phys., т. 21 (1959), № 4.
6. McCune J. E., Resler E. L., Compressibility effects in magneto-aerodynamic flows past thin bodies, JAS, т. 27 (1960), № 7.
7. Resler E. L., McCune J. E., Electromagnetic interaction with aerodynamic flows, The magnetodynamic of conducting fiuids, Stanf. Univ. Press, 1959.

Литература к гл. VII

1. Бюргерс Ж. М., Проникание ударной волны в магнитное поле, Магнитная гидродинамика (материалы симпозиума), перев. с англ., Атомиздат, 1958.
2. Голицын Г. С., Станюкович К. П., Некоторые вопросы магнитогазодинамики с учетом конечной проводимости, ЖЭТФ, т. 33 (1957), № 6.
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Замечания относительно структуры перпендикулярной магнитогидродинамической ударной волны, ПММ, т. XXIII (1959), № 6.
4. Куликовский А. Г., О структуре ударных волн в магнитной гидродинамике при произвольном законе диссипации, ПММ, т. XXVI (1962), № 2.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Структура наклонной магнитогидродинамической ударной волны, ПММ, т. XXV (1961), № 1.
6. Сиротина Е. П., Сыроватский С. И., Структура ударных волн слабой интенсивности в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ, т. 39 (1960), № 3.
7. Bleviss Z. O., A study of the structure of the magnetohydrodynamic swich-on shock in steady plane motion. Journ. of Fluid Mech., т. 9 (1960), № 1.
8. Germain P., Contribution a ia théorie des ondes de choc en magnétodynamique des fluides. ONERA, publ. 97, 1959.
9. Ludford G. S. S., The Structure of a hydromagnetic shock in steady plane motion, Journ. of Fluid Mech., т. 5 (1959), № 1.
10. Marshall W., The structure of magneto-hydrodynamic shock waves, Proc. Roy. Soc., Ser. A, т. 233 (1955). (Имеется русский перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 7, 1957.)
11. Resler E., Sears W., The prospects for magneto-aerodynamics, JAS, т. 25 (1958), № 4. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», № 6, 1959).

Литература к гл. VIII

1. Жигулев В. Н., О явлении магнитного отжатия потока проводящей среды, ДАН СССР, т. 126 (1959), № 3.
2. Куликовский А. Г., Об обтекании намагниченных тел проводящей жидкостью, ДАН СССР, т. 117 (1957), № 2.
3. Bush W., Magneto-hydrodynamic hypersonic flow past a blunt body, JAS, т. 25 (1958), № 11. (Имеется русский перевод в сборнике «Вопр. ракет. техн.», № 4, 1959.)

4. Freeman N. C., On the flow past a sphere at hypersonic speed with a magnetic field, JAS, т. 26 (1959), № 10. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», № 3, 1960).
5. Kemp N. H., On hypersonic stagnation-point flow with a magnetic field, JAS, т. 25 (1958), № 6; Author's repiy, JAS, т. 26 (1959), № 10. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», № 1, 1959 и № 3, 1960).
6. Kemp N. H., Hydromagnetic effect on heating and shear at a three-dimensional stagnation point in hypersonic flow, JAS, т. 27 (1960), № 7.
7. Meyer R. C., On reduction aerodynamic heat-transfer rates by magnetohydrodynamic techniques, JAS, т. 25 (1958), № 9. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», № 2, 1959.)
8. Meyer R. X., Magnetohydrodynamics and acrodynamic heating, ARS Journ., т. 29 (1959), № 3.
9. Neuringer J. L., McIlroy W., Incompressible two-dimensional stagnation-point flow of an electricaiiy conducting viscous fluid in the presence of a magnetic fields, JAS, т. 25 (1958), № 3. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», № 1, 1959.)
10. Neuringer J. L., McIlroy W., Hydromagnetic effects on stagnation — point heat transfer, JAS, т. 25 (1958), № 5. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», № 1, 1959.)
11. Rossow V. J., Magnetohydrodynamic analysis of heat transfer near a stagnation point, JAS, т. 25 (1958), № 5. (Имеется русский перевод в сборнике «Механика», № 1, 1959.)

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
«ФИЗМАТГИЗ»

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ

1. Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А., Синтез плоских механизмов, Физматгиз, 1959, стр. 1084, 3 р. 49 к.
2. Березанцев В. Г., Осесимметрическая задача теории предельного равновесия сыпучей среды, Гостехиздат, 1952, 120 стр., 33 коп.
3. Вилькер Д. С., Лабораторный практикум по гидромеханике, Физматгиз, 1959, стр. 352, 70 коп.
4. Дорфман Л. А., Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел, Физматгиз, 1960, стр. 260, 58 коп.
5. Иванов Н. И., Элементарный учебник сопротивления материалов, изд. 3, 1956, стр. 216, 45 коп.
6. Искрицкий Д. Е., Усталость металлов в конструкциях, Физматгиз, 1960, стр. 86, 12 коп.
7. Качанов Л. М., Основы теории пластичности. Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для государственных университетов, Гостехиздат, 1956, 324 стр., 69 коп.
8. Кирпичев В. Л., Беседы о механике, Гостехиздат, 1951, 360 стр., 69 коп.
9. Колесников К. С., Автоколебания управляемых колес автомобиля, Гостехиздат, 1955, 240 стр., 71 коп.
10. Красильщикова Е. А., Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, Гостехиздат, 1952, 158 стр., 45 коп.
11. Коваленко А. Д., Круглые пластины переменной толщины, Физматгиз, 1959, стр. 294, 1 р. 11 к.
12. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В., Теория точечного взрыва, Физматгиз, 1961, стр., 332, 1 р. 22 к.
13. Локк А. С., Управление снарядами (Основы проектирования управляющих снарядов). Перевод с английского, Физматгиз, 1958, 776 стр., 2 р. 70 к.

Книги продаются в книжных магазинах и высылаются также почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями «Книга — почтой».