Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию

Московский физико-технический институт

В.П.Крайнов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

Москва 1996

К 78
УДК 530.18
Крайнов В.П.
К 78 Нелинейные задачи гидродинамики: Учебное пособие/ МФТИ. М., 1996. 92 с.

ISBN 5-7417-0014-4

Рассмотрены нелинейные задачи гидродинамики, а также ряд нелинейных задач механики, тесно связанных с гидродинамическими задачами по математической постановке. Подробно анализируются солитонные решения при волновом движении в газах и жидкостях, сценарий возникновения турбулентного течения через удвоение периодов вихрей, явление динамического хаоса в механических и гидродинамических задачах, структура ударных волн и волн разрежения.

Данное пособие создано на основе лекций, прочитанных автором студентам старших курсов МФТИ, и является дополнением к общему курсу по гидродинамике.

Библиогр.: 20 назв. Ил. 32

Печатается по решению редакционно-издательского совета Московского физико-технического института

Рецензенты: кафедра теоретической физики
Московского инженерно-физического института

д.ф.- м.н. проф. Б.М.Смирнов

1604030000-01
К———— Без объявл.
1Т4(03)-96

Владимир Павлович Крайнов

Нелинейные задачи гидродинамики

Редактор И.А.Волкова
Лицензия ЛР N 040060 от 21.08.91

Подписано в печать 11.01.96. Формат 60x90 1/16.
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл.печ.л.5,75.
Уч.изд. 5,0. Тираж 100 экз. Заказ N 1/15

Московский физико-технический институт
Лаборатория обработки учебной и научной информации
141700, Моск.обл., г.Долгопрудный, Институтский пер, 9

ISBN 5-7417-0014-4

© МФТИ, 1996

© В.П.Крайнов, 1996

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4

I. Солитоны в математическом маятнике 5

2. Распространение солитонов в системе связанных маятников I2

3. Диффузионное ускорение Ферми I9

4. Маятник Капицы 25

5. Колебания электронной плазмы 32

6. Опрокидывание волн 38

7. Солитонные волны на поверхности мелкой воды 42

8. Вихревое течение жидкости 47

9. Возникновение турбулентности 52

I0. Структура волны разрежения 57

II. Структура слабой ударной волны 66

I2. Сильный взрыв 74

I3. Распространение звука в океане 80

Список литературы 92

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие написано на основе семестрового курса лекций, прочитанных автором осенью 1995 учебного года для студентов пятого курса МФТИ.

Содержание курса является продолжением стандартного курса гидродинамики, читаемого студентам четвертого курса, а потому предполагает, что читатель знаком с основными гидродинамическими уравнениями. Автором были выбраны задачи гидродинамики, которые, с одной стороны, были бы существенно нелинейными, т.е. учитывали нелинейный член в уравнении Навье-Стокса, а с другой стороны, были бы достаточно просты для изложения на лекции у доски с мелом. Таких задач не так уж много, поэтому курс оказался сравнительно небольшим. Однако при решении каждой задачи автор старался не пропускать выкладок, включая даже вычисление нестандартных интегралов. Кроме того, понимание решения нелинейных задач гидродинамики требует рассмотрения таких явлений, как, например, динамический хаос. Для такого понимания нужны прежде всего простые механические аналогии. По этой причине материал особия содержит решение даже таких задач, как движение математического маятника (но, разумеется, с большой амплитудой).

В ряде книг сначала излагаются общие методы решения нелинейных задач, а затем эти методы применяются для конкретных гидродинамических систем. В данном курсе был выбран обратный путь. Так, например, для понимания явления диффувии при воздействии регулярных возмущений был выбран пример маятника Капицы, а затем уже рассмотрены гидродинамические задачи. Всюду автор избегал введения специальных функций, которые не изучаются в стандартных математических курсах, как, например, эллиптических функций Якоби

Курс состоит из ряда небольших глав, каждая из которых посвящена какой-либо нелинейной задаче и читается за одну (иногда за две) лекцию. Материал последующих глав требует знания предыдущих, но скорее не с точки зрения физического содержания,ас точки зрения математической подготовки.

. Автор будет признателен читателям за замечания по содержанию учебного пособия, которые можно прислать через электронную почту: krainov@theory.mipt.su

1. СОЛИТОНЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МАЯТНИКЕ

Солитон, т.е. изолированная бегущая волна, является часто встречающимся образованием в гидродинамике волнового движения. Линейные уравнения гидродинамики могут иметь в качестве решений только монохроматические волны. Одна изолированная волна порождается нелинейными членами при колебательном движении.

Наиболее простым, с математической точки зрения, примером колебательного движения является математический маятник, т.е. точечный груз на невесомой нити в поле тяжести. Нелинейность колебаний достигается при достаточно больших амплитудах. При этом невесомая нить предполагается несжимаемой (невесомый стержень). По этой причине мы изучим понятие солитона именно на простейшем механическом примере колебаний большой амплитуды математического маятника (без учёта трения).

Режим солитонного движения реализуется, как мы увидим ниже, когда точка остановки маятника близка к его наивысшему положению (рис.I). Ниже мы рассмотрим именно такое движение.

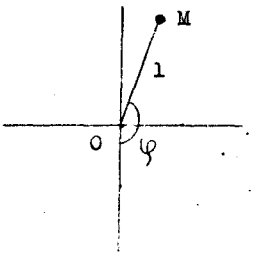


Рис.I. Математический маятник

Наиболее прост случай, когда маятник покоится в наивысшем положении, представляющем собой неустойчивую точку равновесия. Мы начнём с решения уравнений движения для этого случая.

Обозначим через M - массу маятника, l - длину стержня, g - ускорение свободного падения, φ - угол отклонения маятника от наинизшего положения (рис.I). Будем отсчитывать потенциальную энергию маятника в поле тяжести от его точки подвеса O. Для данного случая полная энергия маятника E равна Mgl. Запишем уравнение движения в виде закона сохранения полной энергии:

$$E = \frac{Ml^2(d\varphi/dt)^2}{2} - Mgl\cos\varphi \quad . \qquad (1)$$

Приравнивая эту энергию Mgl, получаем уравнение для $\dot\varphi$:

$$\dot\varphi^2 = 2\omega_0^2(1+\cos\varphi) \quad . \qquad (2)$$

Здесь обозначено $d\varphi/dt \equiv \dot\varphi$, и

$$\omega_0 = (g/l)^{1/2}$$

- частота малых колебаний маятника.

Итак, связь угловой скорости $\dot\varphi$ и угла φ даётся согласно (2) соотношением

$$\dot\varphi = \pm 2\omega_0\cos(\varphi/2) \quad . \qquad (3)$$

График зависимости $\dot\varphi$ от φ называется фазовым портретом движения. Для указанного предельного случая, разделяющего колебание и вращение математического маятника, фазовый портрет называется сепаратрисой. Её график согласно (3) показан на рис.2.

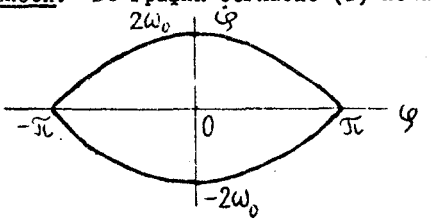


Рис.2. Сепаратриса математического маятника

Точки внутри сепаратрисы соответствуют колебательному движению маятника (с различными амплитудами), а вне её - вращательному движению. Знаки $\pm$ в уравнении (3) отвечают направлению движения по сепаратрисе (по или против часовой стрелки).

Интегрируя уравнение (3), находим:

$$\pm\omega_0 t = \int \frac{d(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)} = \ln\operatorname{tg}(\varphi/4+\pi/4) \quad . \qquad (4)$$

(константа интегрирования соответствует отсчёту времени t). Отсюда для зависимости угла φ от времени t получаем:

$$\varphi = 4\,\mathrm{arctg}(\exp(\pm\omega_0 t)) - \pi \quad . \qquad (5)$$

Значение времени $t = 0$ соответствует наинизшему положению маятника ($\varphi = 0$).

Дифференцируя выражение (5) по времени, находим угловую скорость движения маятника $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 / \mathrm{ch}(\omega_0 t) \quad . \tag{6}$$

Её график (со знаком +) представлен на рис.3.

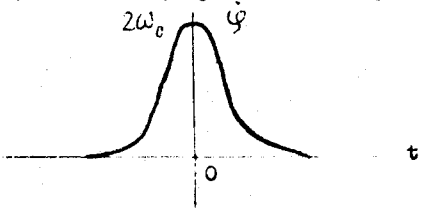


Рис.3. Солитонное решение для математического маятника

Это и есть солитон (изолированная волна скорости). Мы видим, что ширина солитона имеет порядок величины $1/\omega_0$,где, напомним, ω_0 представляет собой частоту малых колебаний маятника. Показанное на рис.3 решение соответствует тому, что маятник длительное время находится вблизи верхнего положения и быстро проскакивает нижнее положение.

Теперь мы обратимся к более сложному случаю колебаний математического маятника, когда положение равновесия близко к верхней точке, но немного не совпадает с ней. В этом случае полная энергия маятника уже не равна Mgl , а на малую величину εMgl меньше: $E = Mgl - \varepsilon Mgl$ $(\varepsilon \ll 1)$. Подставляя это значение в уравнение (I), вместо (2) теперь получаем следующее уравнение:

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega_0^2(1 - \varepsilon + \cos\varphi) \quad . \tag{7}$$

Вычислим период таких (нелинейных) колебаний T . Из (7) находим

$$T = 2\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = 4\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi/\omega_0}{(4\cos^2(\varphi/2) - 2\varepsilon)^{1/2}} \tag{8}$$

Здесь φ_0 - максимальный угол отклонения маятника, соответствующий положению равновесия. Для вычисления интеграла (8) при $\varepsilon \ll 1$

используем следующий приём. Разобьём указанный интеграл на два, введя некоторый угол φ_1 в окрестности π ($\pi-\varphi_1 \ll \pi$), для которого в интервале интегрирования $[0, \varphi_1]$ можно пренебречь ε, а в интервале интегрирования $[\varphi_1, \varphi_c]$, близком к верхней точке, можно упростить тригонометрические функции под знаком интеграла и тем самым вычислить его. Разумеется, произвольный с указанными ограничениями угол φ_1 должен выпасть из окончательного ответа для периода колебаний.

Итак, получаем

$$\omega_0 T = 4\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{2\cos(\varphi/2)} + 4\int_{\varphi_1}^{\varphi_c} \frac{d\varphi}{((\pi-\varphi)^2 - 2\varepsilon)^{1/2}} .$$

Первый из этих интегралов уже вычислялся выше (см. (4)). Во втором делаем замену переменной интегрирования $\pi-\varphi=\psi$. Тогда при $\sqrt{2\varepsilon} \ll \psi_1 \ll \pi$

$$\omega_0 T = 4 \ln \operatorname{tg}(\varphi/4 + \pi/4)\Big|_0^{\varphi_1} + 4 \ln(\psi + (\psi^2 - 2\varepsilon)^{1/2})\Big|_{\psi_0=\sqrt{2\varepsilon}}^{\psi_1}.$$

Подставляя пределы интегрирования в каждом из интегралов, находим

$$\omega_0 T = 4\ln(4/\psi_1) + 2\ln(2\psi_1^2/\varepsilon) = 2\ln(32/\varepsilon) \gg 1 .$$

Итак, окончательно для периода колебаний получаем

$$T = (2/\omega_0)\ln(32/\varepsilon) \quad . \qquad (9)$$

Так как $\varepsilon \ll 1$, то период колебаний логарифмически велик. Как и должно быть, при $\varepsilon = 0$ он обращается в бесконечность.

Когда маятник проходит нижнюю точку равновесия, то положение начальной равновесной точки φ_0 несущественно для этого движения. Следовательно, его угловая скорость может быть описана выражением (6), соответствующим случаю $\varphi_0 = \pi$. Таким образом, зависимость $\dot{\varphi}$ от времени представляет собой цепочку солитонов вида, показанного на рис.3, и повторяющихся (с противоположным знаком) через половину периода $T/2$. Она показана на рис.4.

Следует отметить, что все изложенные выше рассуждения можно легко перенести на случай вращения маятника с полной энергией близкой к Mgl (но, естественно, большей её). Величина $\varepsilon \ll 1$

при этом обозначает относительное превышение полной энергии E маятника над Mgl : $E = Mgl + \varepsilon Mgl$. Для периода вращения T получаем то же соотношение (9). Следовательно, общее выражение для периода может быть записано в виде

$$T = (2/\omega_0)\ln(32/|\varepsilon|) \gg 1/\omega_0 , \qquad (10)$$

где случай $\varepsilon < 0$ соответствует, как и выше, колебанию маятника, а случай $\varepsilon > 0$ - его вращению. График зависимости $\dot{\varphi}$ от t в случае вращения будет аналогичен изображённому на рис.4, но только все пички будут иметь одинаковый знак (положительный или отрицательный, в зависимости от направления вращения маятника).

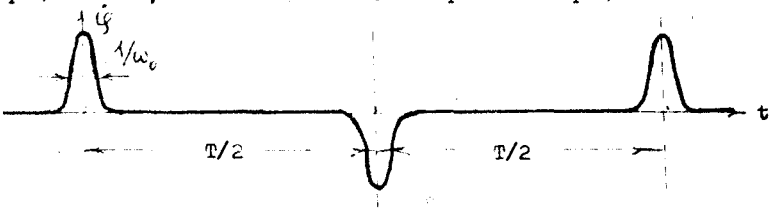


Рис.4. Цепочка солитонов для математического маятника в окрестности сепаратрисы

Указанные солитонные решения реализуются в окрестности сепаратрисы (рис.2), и их фазовые портреты представлены на рис.5 (колебательное движение - внутри сепаратрисы, вращательное движение - вне её). Эллипсы малого размера в окрестности точки $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ соответствуют гармоническому движению при малых колебаниях маятника с частотой ω_0.

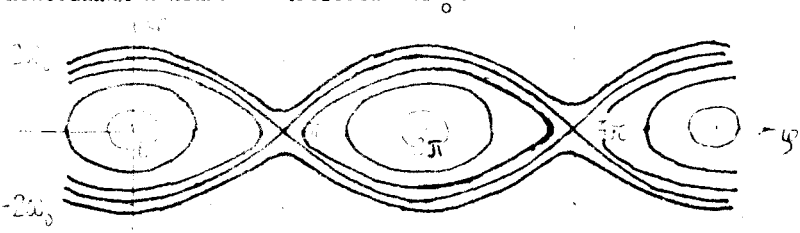


Рис.5. Фазовый портрет математического маятника

Напротив, движение в окрестности сепаратрисы является сильно ангармоническим. Разложим в ряд Фурье значение угловой скорости $\dot{\varphi}$ для решения, изображённого на рис.4, чтобы увидеть, какие характерные гармоники базисной частоты $2\pi/T$ представлены в этом решении. Выбирая интервал $[-T/4,\ T/4]$ для разложения в ряд Фурье, получаем:

$$\dot{\varphi} = \frac{2\omega_0}{\mathrm{ch}(\omega_0 t)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left[\frac{(2n+1)2\pi t}{T}\right]$$

(при таком разложении значение $\dot{\varphi}$ через время $T/2$ автоматически изменит знак, как и должно быть в соответствии с рис.4). Отсюда для компоненты Фурье a_n имеем

$$(T/4)a_n = 2\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)2\pi t/T]}{\mathrm{ch}(\omega_0 t)}\, dt \quad .$$

Вычисляя интеграл согласно правилу

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{\mathrm{ch}(bx)}\, dx = \frac{\pi}{2b}\, \mathrm{sech}(\pi a/2b) \quad ,$$

находим

$$a_n = (4\pi\omega_0)\, \frac{\left[\ln(32/\varepsilon)\right]^{-1}}{\mathrm{ch}\left[\frac{(2n+1)\pi^2}{\omega_0 T}\right]} \quad . \qquad (11)$$

Если $n \ll \omega_0 T$, то из (11) следует постоянное значение a_n :

$$a_n = 8\pi/T \quad , \qquad (12)$$

а в противоположном случае $n \gg \omega_0 T$ фурье-гармоники экспоненциально малы:

$$a_n = (16\pi/T)\exp\left(-2n\pi^2/\omega_0 T\right) \qquad (13)$$

Характерные номера гармоник Фурье, определяющие движение вблизи сепаратрисы, простираются от нулевой до значения порядка

$$n_{max} \sim \omega_0 T/2\pi^2 \gg 1 \quad . \qquad (14)$$

При $n > n_{max}$ компоненты Фурье становятся относительно малыми (достаточно быстро ввиду экспоненциальной зависимости (11)).

Из (I4) следует, что число гармоник Фурье для движения вблизи сепаратрисы порядка отношения расстояния между солитонообразными импульсами скорости к ширине этих импульсов.

Фазовый портрет, представленный на рис.5, имеет неподвижные точки двух типов. Точка $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ является устойчивой неподвижной точкой, а точка $\varphi = \pi$, $\dot{\varphi} = 0$ является неустойчивой неподвижной точкой. Следовательно, малые возмущения разрушают фазовые траектории прежде всего в окрестности сепаратрисы, проходящей через неустойчивую точку равновесия.

В заключение этого раздела сделаем некоторые обобщения. Потенциальная энергия математического маятника имеет вид, изображенный на рис.6.

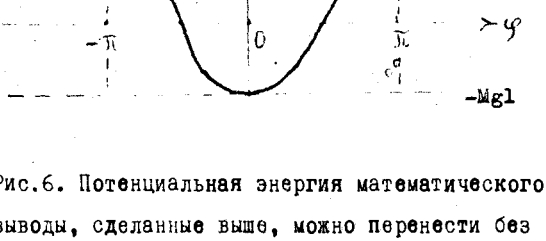


Рис.6. Потенциальная энергия математического маятника

Все выводы, сделанные выше, можно перенести без существенных изменений и на случай произвольного потенциала, имеющего вид, похожий на рис.6, если нас интересует движение с энергией, близкой к высоте потенциальной ямы, т.е. вблизи сепаратрисы. Расстояние между солитонами определяется в основном областью вблизи верхнего положения равновесия, а потому не столь существенно, как ведёт себя потенциальная энергия вдали от этого положения. Поэтому с логарифмической точностью формула (9) для периода колебаний остаётся справедливой и для достаточно произвольного потенциала. При этом величина ω_0 в случае произвольного потенциала определяется кривизной потенциальной энергии в точке верхнего равновесия (но не нижнего!). В случае математического маятника обе кривизны были, разумеется, одинаковы.

Что касается влияния конкретной зависимости потенциальной энергии от координаты, то она влияет только на численные факторы в приведенных выше формулах.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СОЛИТОНОВ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

Собственно говоря, в предыдущем разделе мы имели не изолированную волну, а изолированное колебание. Чтобы получить волновое движение, нужна протяжённая среда, в которой могли бы распространяться волны. В простейшем случае речь идёт об одномерной среде и поперечных волнах, распространяющихся вдоль жёсткой оси, на которой на равных расстояниях друг от друга находятся математические маятники. Все маятники считаются одинаковыми. Они связаны друг с другом упругими пружинками (также одинаковыми). Задачу можно ещё более упростить, если предположить, что каждый маятник связан лишь с соседними маятниками (рис.7).

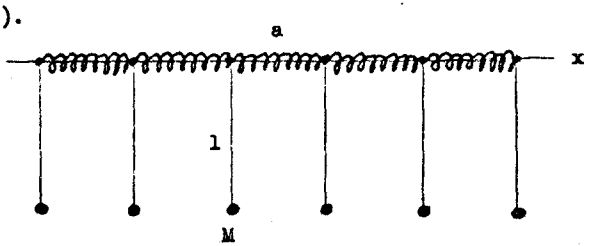


Рис.7. Система связанных маятников

Колебания каждого маятника отнюдь не предполагаются малыми, но колебания соседних маятников близки друг к другу по амплитуде и фазе. Уравнение колебаний для i -го маятника имеет вид

$$d^2\varphi_i/dt^2 + \omega_0^2 \sin\varphi_i = (k/M)(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + (k/M)(\varphi_{i-1} - \varphi_i) \quad (1)$$

Здесь ω_0 - частота малых колебаний изолированного математического маятника, т.е. $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$, M - масса маятника, k - коэффициент упругости пружинки, соединяющей два соседних маятника. Далее, g - ускорение свободного падения и l - длина математического маятника.

Будем полагать, что длина волны велика по сравнению с расстоянием a между соседними маятниками (приближение непрерывной среды). Тогда разностно-дифференциальное уравнение (I) превращается в уравнение в частных производных, так как

$$(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + (\varphi_{i-1} - \varphi_i) = a^2 d\varphi_i/dx^2 \quad . \quad (2)$$

Здесь ось x направлена вдоль оси, на которой расположены все маятники. Считая далее среду непрерывной, индекс i можно опустить. Уравнение (I) приобретает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \omega_0^2 \sin\varphi = (k/M)a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \qquad (3)$$

(так называемое уравнение синус-Гордона).

В случае малых колебаний, когда синус в уравнении (3) можно заменить его аргументом, вдоль оси x могут распространяться монохроматические волны

$$\varphi = \varphi_0 \cos(Kx - \omega t) \qquad (4)$$

с простым законом дисперсии, который получается подстановкой решения (4) в уравнение (3):

$$\omega^2 = \omega_0^2 + (Ka)^2\Omega^2 \qquad (5)$$

Здесь K - волновое число, обозначено $\Omega = (k/M)^{1/2}$ частота упругих колебаний пружинки, и в соответствии с вышесказанным мы должны считать, что $Ka \ll 1$ (условие непрерывности среды).

В случае больших колебаний ищем решение уравнения (3) аналогично (4) в волновой форме

$$\varphi(x,t) = \varphi(x - vt) \quad , \qquad (6)$$

где v - скорость распространения волны. Подставляя (6) в (3), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение ($\xi = x - vt$)

$$v^2 \, d^2\varphi/d\xi^2 + \omega_0^2 \sin\varphi = (\Omega a)^2 \, d^2\varphi/d\xi^2 \, . \qquad (7)$$

Если обозначить

$$\omega^2 \equiv \frac{\omega_0^2}{v^2 - (\Omega a)^2} \, , \qquad (8)$$

формально оно совпадает с уравнением для одного математического маятника, исследованным в предыдущем разделе:

$$d^2\varphi/d\xi^2 + \omega^2 \sin\varphi = 0 \, . \qquad (9)$$

Полная (сохраняющаяся) энергия системы в соответствии с (9) может быть записана в виде

$$E = \frac{1}{2}(d\varphi/d\xi)^2 - \omega^2\cos\varphi \, . \qquad (10)$$

Далее мы можем буквально повторить рассуждения предыдущего раздела: при $E = \omega^2$ солитонное решение имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\omega}{\mathrm{ch}[\omega(x - vt)]} \qquad (11)$$

Далее в соответствии с формулой (5) предыдущего раздела находим зависимость угла поворота маятника от его положения x и времени t :

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg}(\exp(\omega(x - vt))) - \pi . \qquad (12)$$

В каждой точке стержня, на котором находятся маятники, в исходный момент времени $t = -\infty$ из (12) получаем $\varphi = \pi$, а в конечный момент времени $t = \infty$ имеем $\varphi = -\pi$. Это соответствует верхнему положению маятника, т.е. неустойчивому положению. Промежуточный момент времени, когда $x - vt = 0$, соответствует нижнему положению маятника $\varphi = 0$.

Таким образом, полученное солитонное решение является нестабильным; слабое возмущение системы разрушает его.

Скорость v распространения солитонной волны в соответствии с (8) определяется энергией E, вложенной в систему.

В вышеприведенных рассуждениях мы полагали, что $v > \Omega a$, и согласно (8) ω^2 - положительная величина. Рассмотрим теперь другую возможность, а именно, $v < \Omega a$.

В этом случае величина

$$\omega'^2 \equiv \frac{\omega_0^2}{(\Omega a)^2 - v^2} \qquad (13)$$

является положительной. Уравнение (10) приобретает вид:

$$E = \tfrac{1}{2} (d\varphi/d\xi)^2 + \omega'^2 \cos\varphi . \qquad (14)$$

Солитонное решение получится отсюда, если заменить $\varphi = \pi + \psi$ и положить снова $E = \omega'^2$:

$$\omega'^2 = \tfrac{1}{2} (d\psi/d\xi)^2 - \omega'^2 \cos\psi . \qquad (15)$$

Внешне оно выглядит так же, как и (10), но с заменой $\varphi \to \psi$. Поэтому для ψ решение имеет вид, совпадающий с (12). Возвращаясь к углу поворота $\varphi = \pi + \psi$, получим из (12)

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg}(\exp(\omega'(x - vt))) . \qquad (16)$$

В этом случае в каждой точке стержня, на котором находятся маятники, в исходный момент времени $t = -\infty$ из (16) получаем $\varphi = 2\pi$, а в конечный момент времени $t = +\infty$ имеем $\varphi = 0$. Таким образом, при распространении солитонной волны маятник начинает вращение из нижней (устойчивой) точки равновесия и через бесконечное время совершает полный оборот вокруг своей оси. Тем самым данный солитон является, в отличие от предыдущего, стабильным.

Если увеличивать расстояние a между соседними маятниками, то приближение непрерывной среды нарушается, и мы должны возвратиться к исходной цепочке разностно-дифференциальных уравнений (I). Ввиду значительного усложнения задачи мы ограничимся рассмотрением только возможных стационарных состояний системы, когда никаких колебаний или вращений нет, а каждый маятник имеет постоянное во времени отклонение от своего положения равновесия, характеризуемое углом отклонения φ_i.

Итак, рассмотрим систему разностных уравнений

$$\omega_0^2 \sin\varphi_i = (k/M)(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + (k/M)(\varphi_{i-1} - \varphi_i) \quad . \qquad (I7)$$

Для разности отклонений соседних маятников введём обозначение

$$I_i = \varphi_i - \varphi_{i-1} \quad . \qquad (I8)$$

Тогда система (I7) может быть переписана в форме так называемого стандартного (или универсального) отображения:

$$\begin{aligned} I_{i+1} &= I_i + K \sin\varphi_i \quad , \\ \varphi_{i+1} &= \varphi_i + I_{i+1} \quad . \end{aligned} \qquad (I9)$$

Здесь введено обозначение

$$K = M\omega_0^2/k \quad , \qquad (20)$$

имеющее физический смысл отношения квадратов собственных частот колебаний маятника и пружинки.

В отображении (I9) надо иметь в виду, что все углы φ_i отклонений маятников следует приводить к интервалу $[0, 2\pi]$.

Случай $K \ll 1$ малоинтересен, так как малое отклонение φ_0 какого-либо маятника порождает и малые отклонения других маятников. Если же отклонение какого-либо маятника φ_0 велико, то ввиду малости значений I_i отклонения соседних маятников будут близки к φ_0, что также не представляет существенного интереса.

Значительно интереснее случай $K \gtrsim 1$, так как "растяжение" угла

$$\frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1})}{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)} \sim I_{i+1} - I_i \sim K \qquad (2I)$$

велико, т.е. значения φ_i отличаются от соседних углов нерегулярным, хаотическим образом. Это так называемое явление динамического хаоса в применении к рассматриваемой задаче.

Ввиду хаотичности угла φ_i значение $\sin\varphi_i$ принимает достаточно равномерно все величины в интервале $[-I, +I]$. Величина I_i характеризует степень закрученности i-й пружинки.

Следовательно, из первого из соотношений (I9) находим

$$\overline{\Delta I^2} = K^2/2 \quad , \qquad (22)$$

где усреднение производится по различным маятникам. Левая часть (22) описывает средний квадрат изменения величины I за один шаг в цепочке, т.е. при переходе от данного маятника к соседнему. В соответствии со вторым из соотношений (I9) изменение угла φ за этот шаг составляет значение, равное I. Следовательно, соотношение (22) можно переписать в виде

$$\overline{\Delta I^2} = (K^2/2)(\Delta\varphi/I) \quad . \qquad (23)$$

Уравнение (23) описывает диффузионный процесс изменения величины I с изменением φ . При этом коэффициент диффузии

$$D = K^2/2I \qquad (24)$$

является переменной величиной, зависящей от I.

Записывая это уравнение в дифференциальной форме

$$2I^2 dI = K^2 d\varphi/2 \quad , \qquad (25)$$

мы можем легко проинтегрировать его и найти изменение величины I с изменением угла φ :

$$I^3(\varphi) = I^3(\varphi_0) + 3K^2(\varphi - \varphi_0)/4 \quad . \qquad (26)$$

Таким образом, мы видим, что по мере продвижения от одного маятника к другому разность углов отклонения соседних маятников нарастает, т.е. при больших углах отклонения φ соседние маятники отклоняются "невпопад" , т.е. нерегулярным образом.

Из сказанного можно сделать вывод, что если частота колебаний маятника и частота собственных колебаний пружинки имеют одинаковый порядок величины, то, отклоняя какой-либо из маятников, мы получаем стохастическую картину отклонений различных маятников, связанных пружинками на общей оси, не изменяющуюся со временем.

Для применимости диффузионного описания явления необходимо, чтобы исследуемая величина (в данном случае I) мало изменялась по сравнению с самой этой величиной на одном шаге. Таким образом, описанная выше картина диффузии справедлива при $I \gg 1$, т.е. когда отклонения маятников велики, а пружинки, соединяющие маятники, закручены на большое число оборотов каждая. Это число оборотов отличается на один-два оборота для соседних маятников, т.е. относительно мало по сравнению с числом оборотов $I/2\pi$.

При малых значениях K система уравнений (I9) сводится к дифференциальному уравнению:

$$\frac{I_{i+1} - I_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} = \frac{dI}{d\varphi} = \frac{K \sin\varphi}{I} \qquad (27)$$

Его решение имеет простой вид:

$$I^2 = 2K(1-\cos\varphi) + \text{const} \ll 1 . \qquad (28)$$

Рассмотрим неподвижные точки отображения (I9). Для точки $I = 0$, $\varphi = \pi$ из (28) имеем

$$I^2 + K^2(\varphi - \pi)^2 = \text{const} \ll 1 . \qquad (29)$$

Таким образом, указанная точка является эллиптической, а траектории вокруг неё - устойчивыми. Для другой неподвижной точки отображения $I = \varphi = 0$ вместо (29) находим:

$$I^2 - K^2\varphi^2 = \text{const} \ll 1 . \qquad (30)$$

Таким образом, эта точка является гиперболической, а движение вокруг неё - неустойчивым. Соответствующие траектории показаны на фазовом портрете (I, φ), приведенным на рис.8.

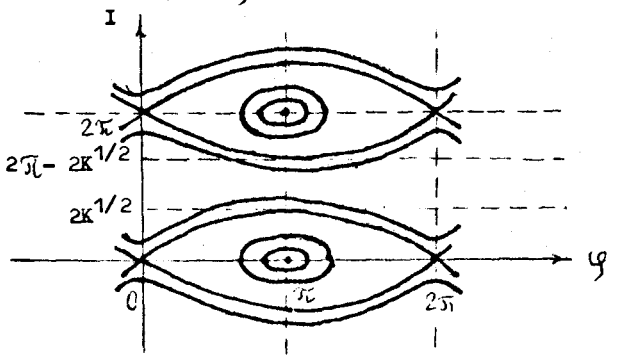


Рис.8. Фазовый портрет универсального отображения при малых значениях параметра K

На этом же рисунке приведена сепаратриса, получаемая из (28) при const = 0. Её уравнение имеет вид

$$I = \pm\, 2(K)^{1/2}\sin(\varphi/2) \quad . \qquad (3I)$$

Сепаратриса отделяет траектории эллиптического типа от траекторий гиперболического типа. Она проходит через неустойчивые гиперболические точки $I = 0$, $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi \ldots$.

На рис.8 показан также фазовый портрет для траекторий с неподвижными точками, соответствующими значению $I = 2\pi$. С качественной точки зрения, разрушение регулярного движения по указанным траекториям возникает при перекрытии соседних сепаратрис, т.е. при выполнении условия

$$K > (\pi/2)^2 \quad . \qquad (32)$$

В окрестности сепаратрис образуется стохастический слой, и в результате в процессе отображения частица может попадать из области внутри одной сепаратрисы в область внутри соседней сепаратрисы и т.д., т.е. свободно перемещаться по оси I на рис.8. При $I \gg 1$ это и соответствует диффузионному процессу, рассмотренному выше, когда значение I в среднем увеличивается при переходе от одного маятника к другому. Закон такого диффузионного роста даётся соотношением (26).

В данной задаче величина K, определяемая формулой (20), не зависит от I и, следовательно, нет ограничений на диффузионный рост I. В других задачах, вообще говоря, величина параметра K зависит от I, что приводит к ограничению диффузии, когда значение K становится малым. Ниже мы рассмотрим и такие примеры.

Компьютерное вычисление согласно универсальному отображению (I9) показывает, что стохастические слои соседних сепаратрис пересекаются несколько раньше, чем согласно условию (32), а именно, при $K > 1$.

Если же $K \gg 1$, то область стохастического движения заполняет практически весь фазовый портрет на рис.8, кроме малых областей около устойчивых эллиптических точек $\varphi = \pi$, $I = 0, 2\pi, 4\pi \ldots$, образуя так называемое "стохастическое море". При этом по переменной φ мы можем ограничиться интервалом изменения $[0, 2\pi]$.

В следующем разделе мы рассмотрим другие физические примеры, приводящие к стохастическому движению под действием регулярных сил, в которых параметр K различным образом зависит от исследуемой переменной величины I.

3. ДИФФУЗИОННОЕ УСКОРЕНИЕ ФЕРМИ

Итак, в этом разделе мы рассмотрим различные физические примеры, в которых имеет место динамический хаос при воздействии на систему регулярно изменяющихся сил.

I) Гравитационная машина

Представим себе упругий шарик, который падает на горизонтальную платформу и отскакивает от неё в пренебрежении всяким трением. Пусть далее эта платформа начинает испытывать высокочастотные дрожания в вертикальном направлении (рис.9).

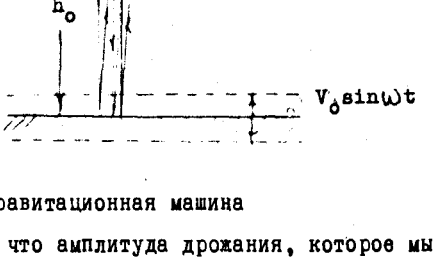


Рис.9. Гравитационная машина

Предположим, что амплитуда дрожания, которое мы будем считать монохроматическим с частотой ω, мала по сравнению с высотой h_o, с которой бросают шарик. Обозначим эту амплитуду a. Тогда скорость платформы изменяется по закону

$$V(t) = V_o \sin\omega t \quad , \qquad (1)$$

где $V_o = \omega a$ - амплитуда скорости дрожания платформы.

Будем считать, что скорость шарика в момент n-го падения на платформу v_n велика по сравнению со скоростью платформы, т.е. $v_n \sim (gh_o)^{1/2} \gg V_o$. Закон сохранения импульса в момент времени t_n падения шарика имеет вид (M - масса шарика):

$$M \cdot v_{n+1} = M \cdot v_n + 2M \cdot V(t_n) \quad . \qquad (2)$$

Здесь v_n - скорость шарика перед n- м ударом, а v_{n+1} - скорость шарика перед $(n+1)$ - м ударом.

Если t_{n+1} - момент времени при следующем, $(n+1)$-м ударе, то согласно законам свободного падения имеем

$$t_{n+1} = t_n + 2v_{n+1}/g \quad . \qquad (3)$$

Таким образом, мы получаем отображение Пуанкаре; его удобно записать, введя фазу $\varphi = \omega t$:

$$I_{n+1} = I_n + K \sin\varphi_n \quad ; \qquad (4)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + I_{n+1}$$

Здесь обозначено

$$I = 2\omega v/g \quad , \quad K = 4\omega V_0/g \quad . \qquad (5)$$

Как и в предыдущем разделе (см. формулу (20) предыдущего раздела), коэффициент растяжения фазы K является постоянной величиной, а отображение (4) является универсальным (см. выражение (I9) предыдущего раздела).

При значении $K > 1$ имеет место стохастическое изменение скорости шарика, сопровождаемое диффузионным увеличением этой скорости. Оно и называется диффузионным ускорением Ферми. Увеличение скорости имеет место вплоть до её релятивистских значений. Закон диффузионного увеличения скорости даётся соотношением (26) предыдущего раздела. Подставляя в него явные значения для I и согласно (5), находим:

$$v^3(t) = v_0^3 + (3/2)V_0^2 gt \quad . \qquad (6)$$

Частота дрожания платформы ω вообще не входит в эту зависимость. Здесь обозначено

$$v_0 = (gh_0)^{1/2}$$

- начальная скорость шарика при ударе о платформу.

Условие $K > 1$ можно записать также в виде

$$(V_0/v_0)^2(h_0/a) > 1 \, . \qquad (7)$$

Оно не противоречит ранее сформулированным условиям

$$V_0 \ll v_0 \quad , \quad h_0 \gg a \quad .$$

Из (6) следует, что при больших временах скорость шарика возрастает как $t^{1/3}$. Характерным признаком диффузионного процесса является то обстоятельство, что на каждом шаге скорость шарика изменяется на малую величину по сравнению с этой скоростью и в хаотическом направлении. Кроме того, период изменения зависит от этой скорости. На каждом шаге фаза φ меняется не только сильно, но и нерегулярно, что и обеспечивает хаотическое направление изменения скорости шарика.

Рассмотренная система носит название гравитационной машины, так как дрожание платформы приводит к увеличению скорости шарика, падающего и отскакивающего от этой платформы.

2) Частица в яме с дрожащими стенками

Рассмотрим стохастический нагрев газа в сосуде малых размеров с дрожащими стенками. Будем предполагать, что длина свободного пробега велика по сравнению с размерами сосуда (газ Кнудсена). Упростим задачу, рассматривая отдельную частицу газа в одномерной бесконечной яме, одна из стенок которой (для определенности - правая) колеблется по гармоническому закону, так что скорость стенки

$$V(t) = V_0 \sin\omega t \quad .$$

Амплитуда скорости стенки V_0 предполагается малой по сравнению со скоростью молекулы v . А размеры сосуда предполагаются большими по сравнению с амплитудой дрожания стенки a , т.е. ширина ямы $l \gg a = V_0/\omega$ (см. рис.10).

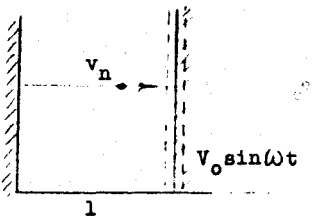


Рис.10. Стохастический нагрев одномерного газа в сосуде шириной l , правая стенка которого дрожит

Аналогично (2) записываем закон сохранения импульса при ударе молекулы о колеблющуюся стенку

$$v_{n+1} = v_n + 2V_0 \sin\omega t_n \quad . \qquad (8)$$

Здесь v_n - скорость молекулы перед n- м ударом, v_{n+1} - скорость молекулы перед $(n+1)$ - м ударом, t_n - момент n-го удара, ω - частота дрожания правой стенки (левая стенка предполагается неподвижной в целях упрощения задачи).

Так как движение молекулы между ударами является свободным, то для времени между соседними ударами о правую стенку имеем:

$$t_{n+1} - t_n = 2l/v_{n+1} \quad . \qquad (9)$$

Вводя фазу $\varphi = \omega t$, получим следующее отображение Пуанкаре:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + 2V_0 \sin\varphi_n \quad , \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + 2l\omega/v_{n+1} \quad . \bmod(2\pi). \end{aligned} \qquad (10)$$

Стохастический режим движения наступает, когда коэффициент растяжения фазы

$$K = \frac{(\varphi_{n+1} - \varphi_n) - (\varphi_n - \varphi_{n-1})}{(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \approx \frac{2l\omega(v_{n+1} - v_n)}{v_n^2} \approx \frac{2l\omega v_o}{v^2}$$

превышает единицу. В данном случае этот коэффициент убывает с ростом скорости v, т.е. имеется максимальная скорость

$$v_{max} \sim v_o(2l\omega/v_o)^{1/2} \gg v_o \quad , \qquad (11)$$

выше которой стохастическое движение прекращается, т.е. прекращается процесс увеличения энергии молекулы.

Из первого из соотношений (10) получаем

$$\overline{\Delta v^2} = \overline{(v - \bar{v})(v - \bar{v})} = 2\,v_o^2 = 2\,v_o^2\,\frac{\Delta t_n}{(2l/v_n)} \qquad (12)$$

ввиду случайности фазы φ_n. Здесь для Δt_n использовано выражение (9), так как $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ - время между соседними ударами. Записывая $\overline{\Delta v^2} = 2\bar{v}\,d\bar{v}$, из (12) получаем дифференциальное уравнение

$$2\bar{v}\,d\bar{v} = (v_o^2\bar{v}/l)\,dt \quad ,$$

элементарное решение которого даёт диффузионное увеличение скорости $\bar{v}$ со временем t:

$$\overline{v(t)} = (v_o^2/2l)t + v_o \quad . \qquad (13)$$

Величина

$$D = v_o^2 v/l \qquad (14)$$

представляет собой переменный коэффициент диффузии в данной задаче.

Таким образом, в среднем рассматриваемое движение является равноускоренным, а диффузионное ускорение Ферми равно $v_o^2/2l$.

Соотношение (13) позволяет определить время диффузии, в течение которого достигается максимальная скорость v_{max} (11):

$$t_D \sim v_o(2l\omega/v_o)^{1/2}(2l/v_o^2) \sim \frac{1}{\omega}\left(\frac{2l\omega}{v_o}\right)^{3/2} \gg \frac{1}{\omega} \quad . \qquad (15)$$

Физическая причина для ускорения состоит в том, что молекула, движущаяся на рис.10 направо, чаще встречает правую стенку, движущуюся навстречу ей, чем от неё. По этой причине увеличение энергии молекулы происходит чаще, чем её уменьшение. При каждом столкновении увеличение или уменьшение скорости молекулы мало по сравнению с самой скоростью, что и в итоге приводит к диффузионному увеличению скорости.

Функция распределения молекул по скоростям удовлетворяет обычному диффузионному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(D(v)\frac{\partial F}{\partial v}\right) \qquad (16)$$

Считая её нормированной на единицу, вычислим среднюю скорость $\bar{v}$, т.е. выведем соотношение (13) ещё раз другим способом, непосредственно из диффузионного уравнения. Умножая соотношение (16) на v и интегрируя по dv, получаем:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{1}\int v\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial F}{\partial v}\right)dv = -\frac{v_0^2}{21}\int v\frac{\partial F}{\partial v}\,dv = \frac{v_0^2}{21}.$$

При этом мы два раза проинтегрировали по частям. Как и должно быть, получаем равноускоренное движение с ускорением, уже найденным выше.

Таким же способом можно определить, например, среднюю энергию молекулы, которая будет расти пропорционально квадрату времени t.

Если время t превышает время диффузии t_D, определяемое формулой (15), то функция распределения $F(v)$ выходит на стационарное значение. Молекулы со скоростями, превышающими v_{max}, движутся в фазовом пространстве (v,φ) по регулярным эллиптическим траекториям, и дрожание стенки не приводит к какому-либо существенному изменению их движения за длительное время. Изменения фазы при последовательных ударах оказываются близкими друг к другу.

В заключение этого раздела можно отметить, что Ферми в действительности рассматривал ускорение космических частиц при столкновениях с <u>хаотически</u> движущимися магнитными облаками. В среднем заряженная частица больше приобретала энергии при таких столкновениях, чем теряла её. Новым в задачах данного типа является то, что возмущение может быть и регулярным, а движение стохастическим при выполнении определённых условий на амплитуду и частоту возмущения. Прежде всего скорость частицы должна быть велика по сравнению со скоростью изменения возмущения в то время как само возмущение должно быть высокочастотным, по сравнению с собственными частотами рассматриваемой системы.

Решение рассматриваемой задачи при регулярном движении оказывается, естественно, гораздо проще, чем при стохастическом движении. Если $v > v_{max}$, то мы можем разностные уравнения (8) и (9) заменить на дифференциальные. Деля почленно уравнение (8) на уравнение (9), получаем дифференциальное уравнение

$$dv/dt = (V_0 v/l)\sin\omega t \ .$$

Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя, находим

$$\ln v + \text{const} = -(V_0/l\omega)\cos\omega t \ ,$$

откуда находим решение в виде

$$v(t) = v_0 \exp\left[-(V_0/l\omega)\cos\omega t\right]$$

где величина v_0 определяется соотношением (II) и играет роль начального условия в данной регулярной задаче.

Так как $V_0/l\omega \ll 1$, то полученное решение упрощается путём разложения экспоненты в ряд Тейлора:

$$v(t) = v_0\left[1 - (V_0/l\omega)\cos\omega t\right] \ . \qquad (I7)$$

Таким образом, скорость частицы остаётся практически постоянной, так как второе слагаемое в правой части мало по сравнению с первым. Малое изменение скорости носит регулярный характер и не приводит к какому-либо диффузионному изменению скорости за большое число циклов дрожания стенки. Это утверждение, как видно из вывода, не связано с приближением разложения в ряд Тейлора, а сохраняет свою силу и в точном решении.

Для справедливости полученного решения в действительности согласно (I0) нужно весьма сильное неравенство

$$v_0 \gg l\omega \ , \qquad (I8)$$

которое значительно превышает оценку v_{max} из (II). Следовательно, имеется ещё переходный режим, в котором

$$v_{max} \ll v \ll l\omega \ .$$

В этом режиме, с одной стороны, уже нет диффузионного увеличения скорости молекулы, а с другой стороны, ещё нет малого изменения фазы при отдельном столкновении: мал только коэффициент растяжения фазы K . При этом уравнения остаются разностными, но их динамика носит регулярный характер.

4. МАЯТНИК КАПИЦЫ

В данном разделе мы рассмотрим движение математического маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные высокочастотные колебания (рис.II).

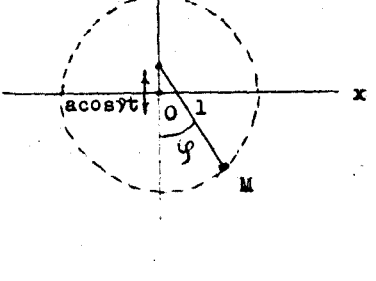


Рис.II. Маятник Капицы

Таким образом, данная задача является продолжением как задачи о нелинейных колебаниях математического маятника, рассмотренных выше, так и задачи о диффузионном изменении энергии системы по Ферми, исследованным в предыдущем разделе.

Горизонтальное и вертикальное отклонения математического маятника даются простыми формулами

$$x = l\sin\varphi \quad , \quad y = l\cos\varphi + a\cos\gamma t \quad .$$

Здесь l - длина математического маятника, a и γ - амплитуда и частота колебаний точки подвеса. Мы предполагаем выполненным условие $a \ll l$, т.е. что амплитуда колебаний точки подвеса мала по сравнению с размерами маятника. Далее φ - угол отклонения математического маятника от равновесного наинизшего положения. Высокочастотность колебаний означает, что $\gamma \gg \omega_0 = (g/l)^{1/2}$, где ω_0 - частота малых свободных колебаний маятника, g - ускорение поля тяжести.

Потенциальная энергия маятника равна

$$U = -Mgl\cos\varphi \quad , \qquad (I)$$

в то время как кинетическая энергия записывается в виде

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (M/2)l^2\dot{\varphi}^2 + Mla\gamma\sin\varphi\sin\gamma t\cdot\dot{\varphi} \quad . \qquad (2)$$

Мы отсчитали потенциальную энергию от точки подвеса маятника O. В кинетической энергии опущено выражение, зависящее от времени.

Последнее слагаемое в (2) можно упростить, выделив из него полную производную по времени

$$\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\gamma t = \gamma\cos\varphi\cos\gamma t - \frac{d}{dt}(\cos\varphi\sin\gamma t) .$$

Тогда функция Лагранжа системы $L = T - U$ может быть записана на основе (I) и (2) в виде

$$L = Ml^2\dot{\varphi}^2/2 + Mgl\cos\varphi + Mla\gamma^2\cos\varphi\cos\gamma t . \qquad (3)$$

Полная производная по времени опущена в этом выражении в соответствии с известными свойствами функции Лагранжа.

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\varphi}$$

после подстановки в него выражения (3) приобретает вид:

$$\ddot{\varphi} = -(g/l)\sin\varphi - (a\gamma^2/l)\sin\varphi\cos\gamma t . \qquad (4)$$

Ввиду сильного различия в собственной и вынуждающей частотах ищем решение уравнения (4) в виде суммы двух слагаемых

$$\varphi(t) = \Phi(t) + \psi(t) , \qquad (5)$$

первое из которых изменяется на масштабе времени порядка собственного периода малых колебаний $(l/g)^{1/2}$, в то время как второе - на малом периоде высокочастотных колебаний $\sim 1/\gamma$.

Подставляя (5) в (4), получаем уравнение в приближении $\psi \ll \Phi$:

$$\ddot{\Phi} + \ddot{\psi} = -\omega_0^2\sin(\Phi+\psi) - (a\gamma^2/l)\sin(\Phi+\psi)\cos\gamma t =$$

$$= -\omega_0^2\sin\Phi - \omega_0^2\psi\cos\Phi - (a\gamma^2/l)\sin\Phi\cos\gamma t - \frac{a\gamma^2}{l}\psi\cos\Phi\cos\gamma t.$$

В нём можно отдельно выделить высокочастотные члены

$$\ddot{\psi} = -(a\gamma^2/l)\sin\Phi\cos\gamma t ,$$

что даёт высокочастотную часть решения

$$\psi = (a/l)\sin\Phi\cos\gamma t \qquad (6)$$

(конечно, к нему имеются высокочастотные поправки, малые по параметру ω_0/γ : мы их опустили в (6)).

Для низкочастотной части имеем после подстановки (6) следующее уравнение

$$\ddot{\Phi} = -\omega_0^2\sin\Phi - (a\gamma/l)^2\sin\Phi\cos\Phi\cos^2\gamma t .$$

В соответствии с общей схемой рассуждений следует заменить в этом выражении $\cos^2\gamma t$ на его среднее значение по высокочастотному периоду, равное 1/2 . Окончательно находим:

$$Ml^2\ddot{\phi} = -Mgl\sin\phi - (Ma^2\gamma^2/2)\sin\phi\cos\phi = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial\phi} \quad .$$

Здесь U_{eff} представляет собой эффективную потенциальную энергию медленной подсистемы, равную

$$U_{eff} = -Mgl\cos\phi + (Ma^2\gamma^2/4)\sin^2\phi \quad . \qquad (7)$$

Она имеет максимум при угле ϕ_0, определяемом из уравнения

$$\cos\phi_0 = -2gl/a^2\gamma^2 \quad .$$

Однако этот максимум имеет место только при выполнении условия

$$2gl/a^2\gamma^2 = (2\omega_0^2/\gamma^2)(1/a)^2 < 1 \quad . \qquad (8)$$

Первый сомножитель в этом выражении мал по сравнению с единицей, а второй - велик, так что указанное неравенство может быть выполнено, не нарушая приведенные выше сильные неравенства.

График зависимости потенциальной энергии U_{eff} от угла показан на рис.I2 при выполнении условия (8).

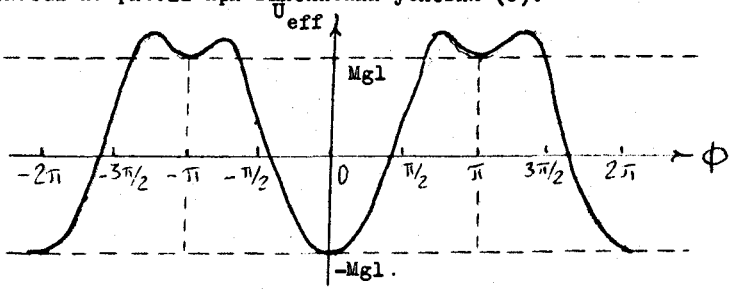


Рис.I2. Эффективные потенциальные ямы для маятника Капицы

Мы видим, что в этом случае как верхнее, так и нижнее положения маятника являются устойчивыми по отношению к малым колебаниям (нетривиальным является устойчивость верхнего положения равновесия). Частоты малых колебаний в этих положениях равны в соответствии с (7)

$$\omega_{\pm}^2 = (g/l)\left[\frac{(a\gamma)^2}{2gl} \pm 1\right] \quad .$$

Далее нас будет интересовать случай, когда условие (8) не выполняется, т.е. верхнее положение маятника является неустойчивым. Это может быть достигнуто путём некоторого уменьшения амплитуды колебаний a (с сохранением условий $a \ll 1$ и $\omega_0 \ll \gamma$).

В этом случае эффективная потенциальная энергия имеет вид, показанный на рис.I3. Имеется только один минимум в нижнем положении равновесия, а основная задача заключается в исследовании динамики маятника в условиях, когда полная энергия близка к Mgl . При этом маятник совершает почти полные колебания, которые вследствие действия внешней силы (дрожания точки подвеса) могут сменяться вращениями и обратно колебаниями.

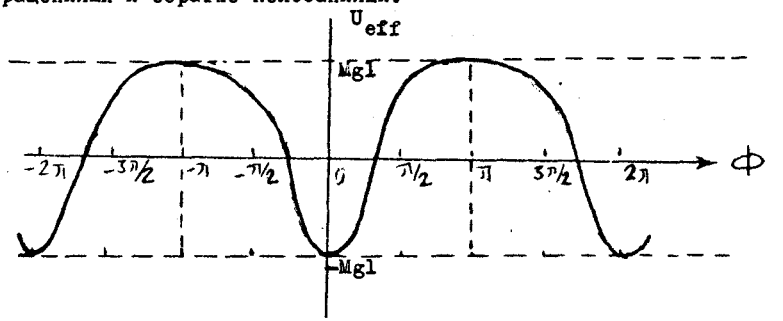


Рис.I3. Эффективная потенциальная яма для маятника с малой амплитудой дрожания точки подвеса

Возвращаясь снова к уравнению (4), умножим его на $\dot{\varphi}$ и проинтегрируем по t . После умножения на ml^2, в левой части получаем изменение полной энергии маятника

$$\Delta E = -Mal\gamma^2 \int \sin\varphi\cdot\cos\gamma t\cdot\dot{\varphi}\,dt \quad . \qquad (9)$$

Так как теперь мы предполагаем, что

$$\gamma \gg \omega_0 \ , \qquad (10)$$

то за одно колебание энергия маятника изменяется на малую величину по сравнению с самой энергией. Следовательно, в правую часть (9) можно подставить решение (6) раздела I для невозмущённых колебаний маятника, т.е.

$$\dot{\varphi} = 2\omega_0/\mathrm{ch}(\omega_0 t) \quad . \qquad (11)$$

Кроме того, следует вычислить $\sin\varphi$ для невозмущённых колебаний, начинающихся с верхней точки равновесия. Из соотношения (2) раздела I имеем

$$\cos(\varphi/2) = \pm\,\mathrm{ch}^{-1}(\omega_0 t) \ ,$$

откуда

$$\sin\varphi = 2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) = 2\,\frac{\mathrm{sh}(\omega_0 t)}{\mathrm{ch}^2(\omega_0 t)}\,.$$

Подставляя эти соотношения в (9), для изменения энергии за одно колебание, при котором нижнее положение маятника проходится в момент времени t_n, получаем

$$\Delta E = \pm\, 4Ma\gamma^2\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sh}(\omega_0 t)\ \mathrm{ch}^{-3}(\omega_0 t)\ \cos(\gamma(t+t_n))\cdot dt \qquad (12)$$

или, используя свойства чётности подынтегрального выражения,

$$\Delta E = \pm\, 4Ma\gamma^2\omega_0 \cdot \sin(\gamma t_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(\omega_0 t)}{\mathrm{ch}^3(\omega_0 t)}\ \sin(\gamma t)\ dt\,. \qquad (13)$$

Упрощаем интеграл, вычисляя его по частям

$$\Delta E = \pm\, 2Ma\gamma^3 \sin(\gamma t_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\gamma t)}{\mathrm{ch}^2(\omega_0 t)}\ dt\,. \qquad (14)$$

Интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{\mathrm{ch}^2 x}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibx}}{\mathrm{ch}^2 x}\ dx$$

вычисляется с помощью теории вычетов. Контур интегрирования показан на рис.14.

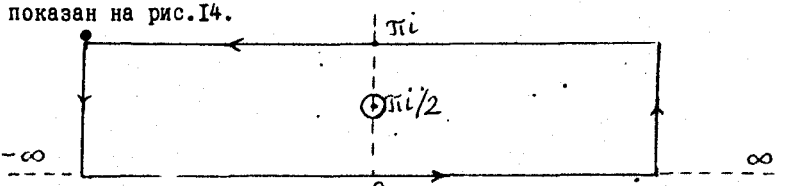


Рис.14. Контур интегрирования для вычисления интеграла (14)

Получаем:

$$I = e^{-\pi b} I + \mathrm{Res}\,,$$

где Res - вычет второго порядка в точке $x = i\pi/2$. Полагая в окрестности этой точки $x = i\frac{\pi}{2} + re^{i\varphi}$, находим

$$\mathrm{Res} = \exp(-\pi b/2) \int_0^{2\pi} \frac{(1 + ibre^{i\varphi})\, ire^{i\varphi}\, d\varphi}{(ire^{i\varphi})^2} = 2\pi b \exp(-\pi b/2)\,.$$

Таким образом, искомый интеграл (интеграл Мельникова-Арнольда) равен:

$$I = \frac{2\pi b \exp(-\pi b/2)}{1 - \exp(-\pi b)} = \frac{\pi b}{\mathrm{sh}(\pi b/2)} \quad .$$

Таким образом, изменение энергии за одно колебание, определяемое формулой (I4), имеет вид:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \pm F \sin(\gamma t_n) \quad . \qquad (I5)$$

Здесь введено определение

$$F = (\pi 4 M a l \gamma^4/\omega_0^2) \exp(-\pi\gamma/2\omega_0)$$

и учтено, что $\gamma \gg \omega_0$.

Расстояние по времени между соседними колебаниями определяется формулой (I0) раздела I, представляя собой половину периода колебаний, т.е.

$$t_{n+1} - t_n = (1/\omega_0)\ln(32/|\varepsilon|) \quad . \qquad (I6)$$

Здесь малая величина ε определена соотношением

$$\varepsilon = E_{n+1}/Mgl - 1 \quad .$$

Вводя фазу $\psi = \gamma t$, запишем отображение Пуанкаре для данной задачи (оно называется сепаратрисным отображением) в виде

$$E_{n+1} - E_n = \pm F \sin(\psi_n) \quad , \qquad (I7)$$

$$\psi_{n+1} - \psi_n = (\gamma/\omega_0) \ln \frac{32}{|E_{n+1}/Mgl - 1|} \quad .$$

Стохастический режим движения начинается при условии на коэффициент растяжения фазы K в виде:

$$K = \frac{(\psi_{n+1} - \psi_n) - (\psi_n - \psi_{n-1})}{(\psi_n - \psi_{n-1})} > 1$$

(см. предыдущий раздел). Подставляя сюда разности фаз из второго из соотношений (I7) и учитывая, что изменение энергии $E_{n+1} - E_n$ за одно колебание мало по сравнению с самой энергией $|E_n - Mgl|$ (всё сказанное выше относится, разумеется, не только к колебаниям, но и к вращениям вблизи сепаратрисы, т.е. вблизи верхнего неустойчивого положения маятника), находим условие возникновения динамического хаоса в системе: $(\psi_n - \psi_{n-1}) \sim 1$,

$$K \sim \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{|E_{n+1} - E_n|}{|E_n - Mgl|} \sim \frac{(\gamma/\omega_0) F}{|E_n - Mgl|} > 1 \quad . \qquad (I8)$$

При этом мы заменили в первом из соотношений (I7) $\sin(\psi_n$ на величину порядка единицы.

Таким образом, ширина сепаратрисного слоя вблизи верхней точки равновесия экспоненциально мала, но при каждом колебании энергия изменяется на величину, ещё в γ/ω_0 раз меньшую. Это изменение энергии носит хаотический характер, и в итоге за большое число колебаний (или вращений) энергия возрастает диффузионным образом. Это увеличение можно найти, возводя в квадрат первое из соотношений (I7) и заменяя $\sin^2\varphi_n$ на I/2 ввиду хаотичности изменения фазы φ_n. Эта фаза меняется сильно и нерегулярно в процессе колебаний.

Итак, получаем:

$$\Delta E^2 = F^2/2 \quad . \tag{I9}$$

Так как это изменение имеет место за одно колебание, то, с учётом второго из соотношений (I7), его можно переписать в виде

$$\overline{\Delta E^2} = (F^2/2)\,(\omega_0 \Delta t)\,\frac{1}{\ln(32/(E/Mgl-1))} \quad . \tag{20}$$

Коэффициент пропорциональности между $\overline{\Delta E^2}$ и Δt как раз и представляет собой коэффициент диффузии

$$D(E) = (\omega_0 F^2/2)\,\frac{1}{\ln(32/(E/Mgl-1))} \quad . \tag{2I}$$

Мы видим, что он зависит от переменной энергии E.

Однако зависимость коэффициента диффузии от энергии является довольно слабой (логарифмической). Поэтому, хотя в процессе диффузии коэффициент диффузии и растёт , но приближённо можно считать, что квадрат энергии маятника, отсчитанный от его верхнего положения равновесия, увеличивается пропорционально времени (хотя и экспоненциально медленно, так как коэффициент диффузии D содержит экспоненциально малый фактор $\exp(-\pi\gamma/\omega_0)$). Итак, в окрестности верхней точки равновесия с течением времени маятник экспоненциально медленно уходит от неё, т.е. амплитуда колебаний постепенно уменьшается. Это происходит до тех пор, пока энергия маятника остаётся в экспоненциально малой области вблизи сепаратрисы, определяемой соотношением (I8).

Аналогичная картина имеет место для вращения маятника. Вследствие дрожания его точки подвеса диффузия приводит к усилению вращения до тех пор, пока не нарушится условие (I8) динамического хаоса в системе. Затем коэффициент растяжения фазы K становится малым, и усиление вращения прекращается: дрожание точки подвеса перестаёт оказывать влияние на систематическое изменение энергии математического маятника.

5. КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ

В этом разделе мы рассмотрим нелинейные колебания электронной компоненты плазмы. Что касается положительно заряженных ионов, то мы будем предполагать, что они столь тяжелы, что их роль сводится только к обеспечению нейтральности рассматриваемой системы. Обозначим через X направление, в котором имеют место такие колебания. Уравнение непрерывности имеет вид

$$\partial\rho/\partial t + \partial(\rho v)/\partial x = 0 \quad , \tag{1}$$

где ρ - плотность электронов, а v - скорость их движения.

Уравнение Ньютона для электрона имеет вид

$$mdv/dt = m(\partial v/\partial t + v\partial v/\partial x) = e\partial\varphi/\partial x \quad , \tag{2}$$

где m - масса электрона, а φ - электростатический потенциал, $(-e)$ - заряд электрона.

Уравнение Пуассона для потенциала запишем в виде

$$\Delta\varphi = \partial^2\varphi/\partial x^2 = 4\pi(\rho-\rho_0)e, \tag{3}$$

где ρ_0 - равновесная плотность электронов в отсутствие колебаний. Она же равна плотности заряда ионной компоненты. Колебания возникают, когда плотность электронной компоненты отклоняется от плотности ионной компоненты.

Обозначим через u скорость распространения колебаний вдоль оси X. Тогда можно ввести автомодельную переменную

$$\xi = x - ut \quad ,$$

от которой зависят переменные величины v, ρ и φ. После этого приведенные выше уравнения в частных производных превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$-u\rho' + v\rho' + \rho v' = 0 \quad , \qquad (v' = dv/d\xi) \tag{4}$$

$$mv'(v-u) = e\varphi' \quad , \tag{5}$$

$$\varphi'' = 4\pi(\rho-\rho_0)e. \tag{6}$$

Обратимся теперь к решению рассматриваемой системы уравнений. Интегрируя уравнение непрерывности (4), находим

$$\rho(v-u) = \text{const} = -\rho_0 u \quad . \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), перепишем уравнение Пуассона в виде

$$(1/2)\varphi'' = 4\pi\rho v/u = -4\pi\rho_0 v/(v-u) \quad . \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (5), находим

$$e\varphi = mv^2/2 - mvu + \text{const} = m(v-u)^2/2 \quad . \tag{9}$$

Константа интегрирования здесь выбрана из соображений удобства. Скорость частиц v должна быть меньше скорости волны u (мы не рассматриваем здесь ударные волны). Поэтому из (9) находим:

$$u - v = (2e\varphi/m)^{1/2} \quad . \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), получаем уравнение, содержащее только φ :

$$\varphi'' = e\,4\pi\rho_0 \frac{(m/2e)^{1/2}u - \varphi^{1/2}}{\varphi^{1/2}} \tag{11}$$

Умножая это соотношение на φ' и интегрируя по ξ , находим закон сохранения эффективной энергии электронов:

$$e\varphi'^2/2 + m\Omega^2(\varphi - u(2m\varphi/e)^{1/2}) = \text{const} \quad . \tag{12}$$

Здесь введено обозначение

$$\Omega^2 = 4\pi\rho_0 e^2/m \tag{13}$$

для лэнгмюровской частоты плазменных колебаний.

Рассмотрим теперь фазовый портрет колебаний, т.е. зависимость φ' от φ согласно уравнению (12). В случае малых скоростей v нелинейными членами можно пренебречь. Согласно (9) имеем

$$e\varphi = -mvu + mu^2/2 + mv^2/2 \doteq mu^2/2 + e\delta\varphi, \quad \delta\varphi \ll \varphi \quad .$$

Подставляя это соотношение в (12), используем разложение:

$$(2e\varphi/mu^2)^{1/2} = 1 + e\delta\varphi/mu^2 - (e\delta\varphi/mu^2)^2/2 \quad . \tag{14}$$

Следовательно,

$$u^2(\delta\varphi')^2 + \Omega^2(\delta\varphi)^2 = \text{const} \quad .$$

Это уравнение определяет гармонические колебания с частотой и волновым числом $k = \Omega/u$:

$$\delta\varphi \sim \cos(kx - \Omega t) \quad . \tag{15}$$

На фазовом портрете они соответствуют эллиптической траектории малого радиуса около точки $\varphi_0 = mu^2/2e$.

Итак, в случае слабого возмущения системы в плазме распространяются продольные электронные плазменные волны с частотой (13) (лэнгмюровской частотой). Мы видим, что частота этих волн не зависит от волнового числа. Пренебрежение нелинейным членом в уравнении (2) означает, что $v\partial v/\partial x \ll \partial v/\partial t$ или согласно (15)

$kv \ll \Omega$.

Таким образом, указанные лэнгмюровские колебания электронной плазмы являются длинноволновыми. Соответствующие эллиптические траектории показаны на фазовом портрете движения (рис.I5).

При увеличении возмущения эти траектории начинают искажаться вследствие нелинейных эффектов. Общее уравнение траектории на фазовом портрете даётся соотношением (I2). В предельном случае const = 0 мы получаем сепаратрису

$$e\varphi'^2/2 = m\Omega^2\left[u(2m\varphi/e)^{1/2} - \varphi\right], \qquad (16)$$

проходящую через начало координат $\varphi = \varphi' = 0$. Она также показана на рис.I5.

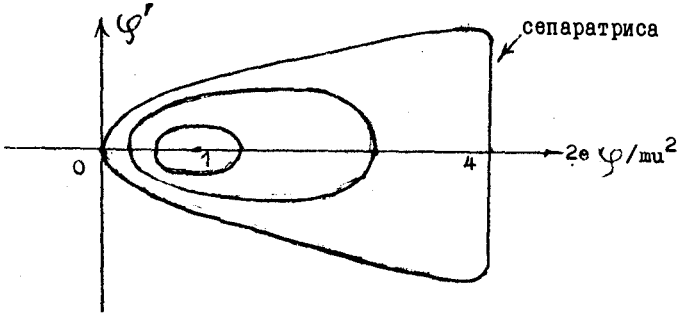


Рис.I5. Фазовый портрет колебаний электронной плазмы

Движение вне сепаратрисы не является колебательным. Мы далее рассмотрим движение внутри сепаратрисы.

Из уравнения (I0) имеем

$$\varphi^{1/2} = (m/2e)^{1/2}(u - v) \ .$$

Подставляя это выражение во второе слагаемое левой части уравнения (I2), запишем это слагаемое в виде

$$\left[(m/2e)(u - v)^2 - u(m/e)(u - v)\right] m\Omega^2 = (m^2\Omega^2/2e)(v^2 - u^2) \ . \qquad (17)$$

Так как

$$\varphi = (m/2e)(u - v)^2 \ ,$$

то

$$\varphi' = (m/e)(v - u)v' \ .$$

Подставляя это выражение в первое слагаемое левой части уравнения (I2), получим для этого слагаемого выражение

$e\varphi'^2/2 = (m^2/2e)(v - u)^2 v'^2$.

Складывая его с выражением (I7) и приравнивая сумму согласно (I2) постоянной величине, а также устраняя постоянный фактор $m^2/2e$, запишем дифференциальное уравнение для скорости v в виде

$$\Omega^2(v^2 - u^2) + (v - u)^2 v'^2 = \text{const}. \qquad (I8)$$

Записывая константу в правой части этого выражения в форме

$$\text{const} = \Omega^2(V^2 - u^2) ,$$

где V - постоянная величина с размерностью скорости, получим из (I8) уравнение

$$(v - u)^2 v'^2 = \Omega^2(V^2 - v^2) .$$

Разделяя в нём переменные, находим

$$\int \frac{(v - u)\, dv}{(V^2 - v^2)^{1/2}} = \pm \Omega \xi .$$

Интеграл в левой части вычисляется элементарно, приводя к неявному выражению для скорости $v(\xi)$:

$$-(V^2 - v^2)^{1/2} - u \arcsin(v/V) = \pm \Omega \xi ,$$

или (величина V имеет физический смысл амплитуды скорости):

$$v = V \sin\left\{\left[\pm \Omega \xi - (V^2 - v^2)^{1/2}\right]/u\right\}. \qquad (I9)$$

Мы видим, что скорость электронов v, как и другие характеристики, является периодической функцией волнового параметра ξ, причём период равен $2\pi/\Omega$ и не зависит от амплитуды волны. Однако колебания в общем случае отнюдь не являются гармоническими. Лишь при $V \ll u$ можно пренебречь вторым слагаемым в аргументе синуса выражения (I9), и мы получаем гармонические волны, соответствующие закону (I5). Знак $\pm$ определяет направление распространения волны.

Обратимся к рассмотрению характера движения по сепаратрисе. Из (I8) видно, что так как для сепаратрисы $\text{const} = 0$, то $V = u$. В этом случае уравнение (I9) приобретает следующий вид:

$$v = u \sin\left[\frac{1}{u}\Omega \xi - (1 - v^2/u^2)^{1/2}\right] . \qquad (20)$$

Рассмотрим это уравнение в окрестности амплитудного значения скорости $v = u$. Полагая $\Omega\xi/u = \pi/2 - \alpha$, $(1 - v^2/u^2)^{1/2} = x$, получим из (20) следующее уравнение:

$$x = \sin(\alpha + x) \approx (\alpha + x) - (\alpha + x)^3/6 ,$$

решение которого имеет вид $(\alpha \ll 1,\ x \ll 1)$:

$$x = (6\alpha)^{1/3} \quad \text{т.е.} \quad 1 - v/u = \frac{1}{2}\left(3\pi - 6\Omega\xi/u\right)^{2/3} . \qquad (21)$$

Таким образом, производная v' обращается в бесконечность в максимуме скорости v. Это означает, что гребни волны заострены, как это показано на рис.16.

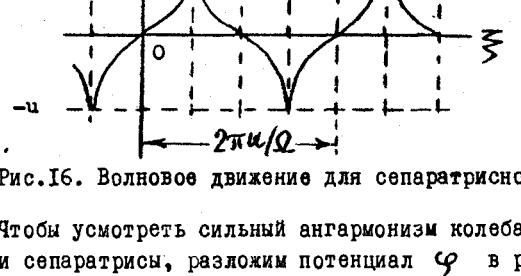


Рис.16. Волновое движение для сепаратрисной траектории

Чтобы усмотреть сильный ангармонизм колебаний плазмы в окрестности сепаратрисы, разложим потенциал φ в ряд Фурье по гармоникам лэгмюровской частоты Ω и определим, какие гармоники φ_n определяют движение для сепаратрисной траектории:

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \exp(in\Omega\xi/u). \qquad (22)$$

Фурье-компонента φ_n отсюда вычисляется как

$$\varphi_n = \frac{\Omega}{2\pi u} \oint \frac{m}{2e}(u - v)^2 \exp(-in\Omega\xi/u)d\xi . \qquad (23)$$

Здесь мы использовали выражение (10) для связи электростатического потенциала со скоростью электронов v.

Подставляя в (23) выражение для ξ из уравнения сепаратрисы (20) для скорости v, находим:

$$\varphi_n = \frac{m\Omega}{4e\pi u} \oint (u - v)^2 \exp\left\{-in\arcsin(v/u) - in(1 - v^2/u^2)^{1/2}\right\}\frac{dv}{v'}$$

Здесь мы заменили переменную интегрирования $d\xi = dv/v'$, а интеграл берётся по замкнутой сепаратрисной траектории. Значение v' подставляем из уравнения (18), взятого при const = 0, т.е. для сепаратрисной траектории:

$$v' = \Omega \frac{(u^2 - v^2)^{1/2}}{u - v} .$$

Следовательно,

$$\varphi_n = \frac{m}{4\pi eu} \oint \frac{(u - v)^3 \, dv}{(u^2 - v^2)^{1/2}} \exp\left\{-in\left[\arcsin(v/u) + (\pi - v^2/u^2)^{1/2}\right]\right\}.$$

Тригонометрическая замена переменной интегрирования $v = -u\cos\theta$ упрощает вычисление указанного интеграла:

$$\varphi_n = \frac{mu^2}{4\pi e} \oint (1 + \cos\theta)^3 \exp\left[-in(-\pi/2 + \theta + \sin\theta)\right] d\theta .$$

Интегрируя по частям, находим:

$$|\varphi_n| = \frac{mu^2}{4\pi en} \oint 2(1 + \cos\theta)\sin\theta \exp(-in(\theta + \sin\theta)) \, d\theta .$$

Интегрируя второй раз по частям, получаем:

$$|\varphi_n| = \frac{mu^2}{2\pi en^2} \oint \cos\theta \exp(-in(\theta + \sin\theta)) \, d\theta .$$

Здесь можно заменить $\cos \to (\cos\theta + 1) - 1$ и учесть, что интеграл с комбинацией $(\cos\theta + 1)$ равен нулю, так как подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал.

Таким образом,

$$|\varphi_n| = \frac{mu^2}{2\pi en^2} \oint \exp(-in(\theta + \sin\theta)) \, d\theta = \frac{mu^2}{en^2} J_n(n) .$$

Здесь $J_n(n)$ - функция Бесселя с аргументом, равным индексу.

При большом номере фурье-компоненты $n \gg 1$ можно учесть, что $J_n(n) \sim n^{-1/3}$. Следовательно,

$$\varphi_n \sim \frac{1}{n^{7/3}} . \qquad (24)$$

Таким образом, в разложении колебательного движения по сепаратрисе существенно большое число гармоник лэнгмюровской частоты Ω в противоположность колебательному движению с малой амплитудой, имеющему место на основной частоте Ω. Впрочем, из-за высокой степени (7/3) убывание фурье-компонент всё же заметно с номером n.

6. ОПРОКИДЫВАНИЕ ВОЛН

В предыдущем разделе мы рассмотрели путь к опрокидыванию волн из-за заострения гребня волны. Теперь мы обсудим, как может опрокидываться волна из-за того, что более высокие её части движутся с большей скоростью, чем средняя часть волны.

Мы рассмотрим обычные гравитационные волны на поверхности мелкой воды. При этом жидкость будем считать несжимаемой, а глубину бассейна малой по сравнению с длиной волны.

Итак, пусть h_0 - глубина невозмущённой воды, а $h(x,t)$ - глубина в данной точке x в момент времени t. При этом X - горизонтальное направление, вдоль которого распространяется волна (рис.I7).

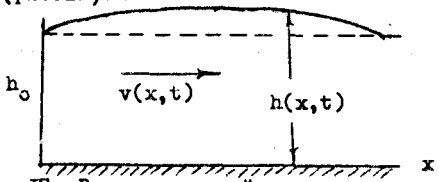


Рис.I7. Волны в мелкой воде

От вертикальной координаты z характеристики задачи не зависят. Итак, $v_z = 0$ и скорость частиц воды $v_x = v(x,t)$. При этом мы пренебрегаем как внутренним трением, так и трением воды о дно бассейна, которые приводят к затуханию волн.

Уравнение Навье-Стокса имеет в указанных условиях простой скалярный вид:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad . \qquad (I)$$

Здесь ρ - плотность жидкости, p - её давление. Последнее в соответствии с рис.I7 определяется высотой жидкости в данной точке пространства $h(x,t)$ с помощью барометрической формулы:

$$p = p_0 + \rho g\left[h(x,t) - h_0\right] \quad . \qquad (2)$$

Наконец, уравнение непрерывности для столба жидкости единичного сечения может быть записано в форме

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0 \quad . \qquad (3)$$

Сначала мы рассмотрим гармонические волны малой амплитуды. Пренебрегая нелинейными членами в уравнениях (I-3), получим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - g \frac{\partial h}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial t} = - h_o \frac{\partial v}{\partial x} \quad . \tag{4}$$

Отсюда получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - gh_o \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \tag{5}$$

описывающее распространение волны со скоростью

$$u_o = (gh_o)^{1/2} \tag{6}$$

в положительном или отрицательном направлении оси X . Мы видим, что скорость волны есть постоянная величина, т.е. волны в мелкой воде не имеют дисперсии.

Решение уравнения (5) имеет вид

$$v = v_o \sin\left[k(x - u_o t)\right] = v_o \sin(k\xi) \quad ,$$

т.е. зависит от волнового параметра $\xi = x - u_o t$.

Имея это в виду, будем искать решение нелинейных уравнений (I-3), зависящее только от этого параметра. Так как $v = v(\xi)$ $h = h(\xi)$, то можно сделать вывод, что $h = h(v)$. Тогда уравнения (I) и (3) можно переписать с учётом (2) в следующей форме:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - g \frac{dh}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad . \, , \tag{7}$$

$$\frac{dh}{dv} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - h \frac{\partial v}{\partial x} \quad . \tag{8}$$

Деля почленно одно уравнение на другое, находим простую связь:

$$\left(\frac{dh}{dv}\right)^2 = \frac{h}{g} \quad , \tag{9}$$

откуда

$$dv/dh = \pm (g/h)^{1/2} \quad ,$$

и простое интегрирование даёт

$$\pm v = 2g^{1/2}(h^{1/2} - h_o^{1/2}) \quad . \tag{I0}$$

Константа интегрирования выбрана из условия, что $v = 0$ при $h = h_o$

Подставляя (9) в (7), получаем уравнение (с учётом (I0)):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mp (gh)^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x} = \left[- \frac{v}{2} \mp (gh_o)^{1/2} \right] \frac{\partial v}{\partial x} \quad . \tag{II}$$

Полагая

$$u(v) = 3v/2 \pm (gh_o)^{1/2} \quad , \tag{I2}$$

получаем решение уравнения (II) в виде $v(\xi)$, где

$$\xi = x - u(v)t \tag{I3}$$

Дифференцируя соотношение (I3) по x при фиксированном t , находим:

$$\frac{d\xi}{dv}\,\frac{\partial v}{\partial x} = 1 - \frac{3t}{2}\,\frac{\partial v}{\partial x} \quad . \qquad (I4)$$

Полагая в этом соотношении t = 0, получаем:

$$\frac{dv}{d\xi} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{t=0} \quad . \qquad (I5)$$

Подставляя (I5) в (I4), находим связь $\partial v/\partial x$ с $(\partial v/\partial x)_{t=0}$:

$$3t/2 = (\partial v/\partial x)^{-1} - (\partial v/\partial x)^{-1}_{t=0} \quad . \qquad (I6)$$

Итак, в соответствии с (I2) скорость волны зависит от её амплитуды: для волны, идущей вправо (знак + в уравнении (I2)) скорость волны повышается при $v > 0$ и понижается при $v < 0$. Это приводит к увеличению крутизны фронта относительно точки, где v = 0 (узла волны), показанному на рис.I8.

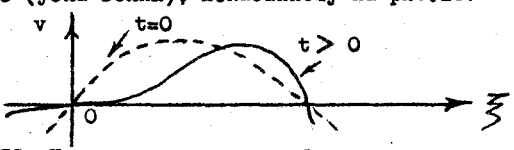


Рис.I8. Увеличение крутизны фронта из-за нелинейности волны

Из соотношения (I6) в общем виде можно определить момент опрокидывания волны, когда в какой-то точке $\partial v/\partial x = \infty$. Получаем:

$$t_c = \min\left(-\frac{2}{3\,\partial v/\partial x}\right)_{t=0} . \qquad (I7)$$

Например, если в начальный момент времени в жидкости распространялась монохроматическая волна, так что скорость в точке x была равна $v = v_0 \sin kx$ (v_0 - амплитуда скорости, k - волновое число), то из (I7) находим

$$t_c = 2/3v_0k \quad , \qquad (I8)$$

причём, как и следовало ожидать, срыв волны имеет место в точке $kx = \pi$.

Для предыдущих моментов времени $t < t_c$ из (I6) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{kv_0 \cos kx}{1 + (3/2)kv_0 t \cos kx} \quad . \qquad (I9)$$

Мы видим, что время опрокидывания волны очень велико, так как оно обратно пропорционально малой амплитуде v_0 начальной скорости частиц жидкости. В момент времени $t = t_c$ из (I9) для производной скорости находим

$$\frac{\partial v}{\partial x} = kv_0 \frac{\cos kx}{1 + \cos kx} \quad . \tag{20}$$

Интегрируя по x это соотношение, находим профиль скорости в момент времени $t = t_c$

$$v(x) = kv_0 x - v_0 tg(kx/2) \quad . \tag{21}$$

Он показан на рис.I9.

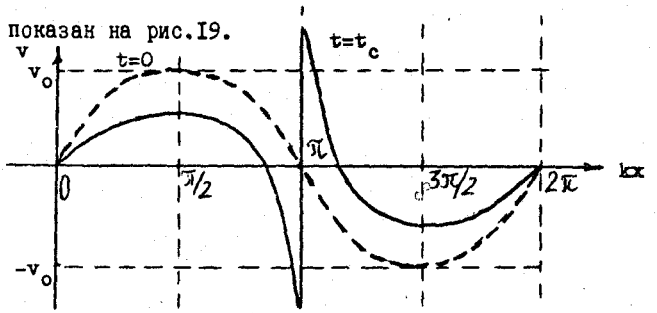


Рис.I9. Профиль скорости волны на поверхности мелкой воды в момент её срыва

На этом же рисунке пунктиром изображён профиль скорости в начальный момент времени $t = 0$. Если выполняется точное соотношение $t = t_c$, то разрыв в точке $kx = \pi$ бесконечен. Если же время t немного меньше t_c, то зависимость является гладкой в меру отклонения t от t_c.

Общее заключение об опрокидывании волны есть следствие нелинейного члена в уравнении Навье-Стокса и не связано с конкретным выбором начального профиля волны, а также с конкретным примером мелкой воды. Кроме того, мы получили, что любая сколь угодно слабая волна за достаточно длительное время опрокидывается. Чем меньше амплитуда волны, тем больше это время. При фиксированной амплитуде скорости время опрокидывания растёт с ростом длины волны (см. (I8)).

7. СОЛИТОННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В предыдущем разделе мы учитывали эффект нелинейности, но не учитывали дисперсию волн. В случае гравитационных волн на мелкой воде малая дисперсия возникает при увеличении волнового числа. В этом разделе мы рассмотрим характер движения при учёте как эффектов нелинейности, так и дисперсии волн на указанном простом примере длинного мелкого канала.

Сначала обратимся к линейным волнам и рассмотрим, что добавляется в уравнение Навье-Стокса для скорости вследствие эффекта дисперсии. Пусть ось X направлена вдоль канала с мелкой водой, глубина которой в состоянии покоя равна h_0. Ось Z направим вдоль вертикали. От y какая-либо зависимость параметров задачи отсутствует. Как и в предыдущей задаче, давление имеет вид

$$p = p_0 + \rho g (h - h_0),$$

где p_0 - равновесное давление, g - ускорение силы тяжести, h - высота жидкости в данной точке пространства x,z в данный момент времени t. ρ - плотность жидкости, которую мы будем предполагать, как и в предыдущем разделе, несжимаемой.

В пренебрежении нелинейными членами (их мы добавим позже, чтобы не загромождать формулы при исследовании дисперсии волн) уравнения Навье-Стокса для проекций скорости частиц жидкости v_x и v_z с учётом приведенного выше выражения для давления имеют вид

$$\partial v_x/\partial t = - g\partial h/\partial x \quad , \quad \partial v_z/\partial t = - g\partial h/\partial z \quad . \qquad (1)$$

Уравнение непрерывности на поверхности воды (при $z = h_0$) записывается в форме

$$v_z = \left(\partial h/\partial t\right)_{z = h_0} \quad . \qquad (2)$$

Кроме того, вследствие несжимаемости жидкости скорости v_x и v_z связаны друг с другом соотношением

$$\partial v_x/\partial x + \partial v_z/\partial z = 0 \quad . \qquad (3)$$

Решение системы (1,3) ищем в виде рядов по степеням kz :

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \sin(kx - \omega t)\left[1 + (kz)^2/2\right], \\ v_z &= -v_0 \cos(kx - \omega t)\left[kz + (kz)^3/6\right], \\ h &= h_0 + (\omega v_0/kg)\sin(kx - \omega t)\left[1 + (kz)^2/2\right]. \end{aligned} \qquad (4)$$

При подстановке выражений (4) в уравнения (I) и (3) последние удовлетворяются тождественно в рамках указанной точности по степеням kz .

Подставляя (4) в (2) и полагая $z=h_0$, получим уравнение, связывающее частоту волны ω с волновым числом k :

$$g\left[kh_0 + (kh_0)^3/6\right] = (\omega^2/k)\left[1 + (kh_0)^2/2\right] ,$$

откуда

$$\omega^2 = gh_0k^2 - gh_0^3k^4/3 \quad . \qquad (5)$$

Ввиду малости волнового числа второе слагаемое в этом соотношении является малой поправкой, так что закон дисперсии гравитационной волны на поверхности мелкой жидкости имеет вид ($u_0 = (gh_0)^{1/2}$)

$$\omega = u_0k - k^3u_0h_0^2/6 \quad . \qquad (6)$$

Подставляя из последнего соотношения (4) величину

$$h = h_0 + (\omega v_x/kg)$$

в первое из уравнений (I), находим:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\omega}{k}\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad .$$

Подставляя частоту ω из соотношения (6) в это уравнение, перепишем его в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + u_0\frac{\partial v_x}{\partial x} - \left[u_0(kh_0)^2/6\right]\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad .$$

Последнее слагаемое в этом уравнении можно записать в форме, не содержащей волнового вектора k . Имея в виду первое из выражений (4), находим

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + u_0\frac{\partial v_x}{\partial x} + (u_0h_0^2/6)\frac{\partial^3 v_x}{\partial x^3} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad . \qquad (7)$$

Мы добавили в это уравнение нелинейный член уравнения Навье-Стокса (выше он всюду подразумевался, но не записывался с целью избежать громоздкости уравнений).

Уравнение (7) называется уравнением Кортевега - де Вриза. Оно и описывает распространение гравитационных волн в мелком канале. Так как $v_z \ll v_x$, то далее мы полагаем $v_x = v(x,t)$ и исследуем решения уравнения (7).

Ввиду волновой природы указанного уравнения мы ищем скорость v как функцию волнового параметра

$$\xi = x - u_0t - Vt \quad .$$

Тогда уравнение (7) становится обыкновенным дифференциальным уравнением. Обозначая $v' = dv/d\xi$, из (7) получим

$$-Vv' + v\cdot v' + (u_0 h_0^2/6)v''' = 0 \quad .$$

Интегрируя это уравнение по ξ, находим

$$-Vv + v^2/2 + (u_0 h_0^2/6)v'' = C \quad .$$

Умножая последнее уравнение на v' и еще раз интегрируя по ξ, получим

$$-V\cdot v^2/2 + v^3/6 + (u_0 h_0^2/12)v'^2 = Cv \quad .$$

Константу интегрирования в этом соотношении можно положить равной нулю, не нарушая общности задачи, путём перехода в соответствующую инерциальную систему координат (скорость V также сдвигается при этом на ту же величину), движущуюся относительно данной с постоянной скоростью.

Квадратичную форму по v в последнем уравнении разложим на произведение $(v - v_1)(v_2 - v)$, где v_1 и v_2 - нули этой формы. Тогда искомое уравнение переписывается в виде

$$(u_0 h_0^2/2)v'^2 = v(v - v_1)(v_2 - v) \quad . \qquad (8)$$

При этом нули v_1 и v_2 удовлетворяют условию

$$v_2 - v_1 = 3V \quad . \qquad (9)$$

Извлекая квадратный корень из (8) и разделяя переменные, можно записать результат интегрирования в общей форме

$$\pm \xi/h_0 = (u_0/2)^{1/2} \int_v^{v_2} \frac{dv}{[v(v - v_1)(v_2 - v)]^{1/2}} \quad . \qquad (10)$$

Ввиду громоздкости интеграла мы рассмотрим его в двух предельных случаях: а) $v_1 \ll v_2$; б) $v_1 \to v_2$.

В случае а) можно положить вообще $v_1 = 0$, после чего интеграл (10) значительно упрощается:

$$\xi/h_0 = (u_0/2)^{1/2} \int_v^{v_2} \frac{dv}{v\,(v_2 - v)^{1/2}} \quad . \qquad (11)$$

(для определённости взята волна в положительном направлении x).

Заменяя переменную интегрирования $v_2 - v = y^2$, получаем

$$\xi/h_0 = (2u_0)^{1/2} \int \frac{dy}{v_2 - y^2} = (2u_0/v_2)^{1/2} \operatorname{arcth} \frac{y}{v_2^{1/2}} ,$$

откуда

$$(1 - v/v_2)^{1/2} = \operatorname{th}\left[(v_2/2u_0)^{1/2}\xi/h_0\right]$$

и

$$v = v_2 / \operatorname{ch}^2\left[(v_2/2u_0)^{1/2}\xi/h_0\right] .$$

С учётом соотношения (9) при $v_1 = 0$ перепишем это соотношение в виде

$$v(x,t) = \frac{3V}{\operatorname{ch}^2\left\{(3V/2u_0)^{1/2} \dfrac{(x - u_0 t - Vt)}{h_0}\right\}} \qquad (12)$$

Это решение представляет собой уединённую волну (солитон) , распространяющуюся вправо со скоростью $V + u_0$. Напомним, что величина $u_0 = (gh_0)^{1/2}$ представляет собой скорость гармонических линейных волн в мелкой жидкости (см. выше уравнение (6)). Зависимость v от x при фиксированном времени t показана на рис.20.

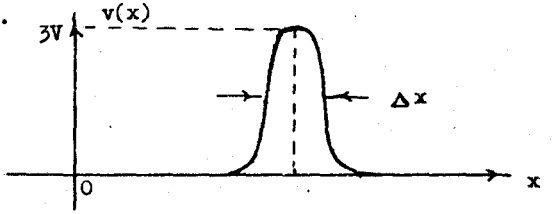


Рис.20. Солитонная волна в мелкой жидкости

Согласно (12) ширина солитона равна

$$\Delta x = (2u_0/3V)^{1/2} h_0 , \qquad (13)$$

т.е. чем больше скорость солитона, тем меньше его ширина и тем больше его интенсивность. При $V \gg u_0$ в соответствии с (13) ширина солитона значительно меньше глубины канала, в котором он распространяется.

Если имеется несколько солитонных волн различной высоты, хаотически движущихся в канале, то более интенсивные волны обгоняют менее интенсивные, не взаимодействуя с ними. В итоге получается упорядоченное расположение волн по интенсивности.

Теперь обратимся к другому предельному случаю б) $v_1 \to v_2$. Он соответствует малой скорости V согласно (9). Естественно, что в этом предельном случае следует ожидать гармоническое движение малой интенсивности, причём скорость волны близка к u_0 . Интеграл (I0) в данном случае также упрощается, если в знаменателе подынтегрального выражения заменить $v \to v_2$. Получаем

$$\zeta/h_0 = (u_0/2v_2)^{1/2} \int_v^{v_2} \frac{dv}{[(v - v_1)(v_2 - v)]^{1/2}} .$$

Элементарное вычисление интеграла даёт

$$(2v_2/u_0)^{1/2}\zeta/h_0 = \arcsin \frac{2v - v_1 - v_2}{v_2 - v_1} ,$$

откуда

$$v(x,t) = v_2 + (3V/2) \sin\left\{(2v_2/u_0)^{1/2} \frac{x - u_0 t}{h_0}\right\} . \qquad (I4)$$

Здесь мы для разности $v_2 - v_1$ воспользовались соотношением (9), а сумму $v_1 + v_2$ положили равной v_2 .

Первое слагаемое в (I4) связано с выбором инерциальной системы отсчёта, в которой рассматривается движение, а потому не представляет интереса. Второе слагаемое, как мы и ожидали, соответствует гармоническому волновому движению со скоростью u_0 и амплитудой волны, равной $3V/2$. Эта амплитуда мала, как и должно быть для колебаний, не учитывающих нелинейные члены в уравнениях движения. Величина

$$k = (2v_2/u_0)^{1/2}/h_0$$

представляет собой волновое число рассматриваемой гармонической волны, что и определяет смысл скорости v_2 . Так как длина волны велика по сравнению с глубиной канала, то $v_2 \ll u_0$. Тем более согласно (9) выполняется неравенство $V \ll u_0$.

В промежуточном случае мы имеем набор солитонных волн, расстояние между которыми определяется интенсивностью волн: чем больше интенсивность, тем больше расстояние между солитонами.

В заключение этого раздела можно сделать вывод, что для возникновения уединённых волн необходима не только нелинейность, но и дисперсия рассматриваемой системы, т.е. зависимость скорости волны от её длины.

8. ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Нелинейность уравнений Навье-Стокса приводит к образованию вихрей в жидкости. Мы рассмотрим стационарное вихревое течение несжимаемой жидкости в отсутствие вязкости, т.е. идеальной жидкости. С целью простоты выкладок ограничимся плоским течением, когда все величины зависят не от трёх, а от двух координат, например, x и y .Итак, представим себе слой жидкости, ограниченный двумя параллельными стенками, движущимися в противоположных направлениях со скоростью v_0 каждая (рис.2I).

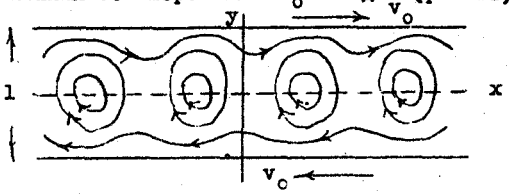


Рис.2I. Вихри в жидкости, ограниченной двумя вертикальными стенками, движущимися в противоположных направлениях

Расстояние между стенками обозначим через l . Оно представляет собой размер максимального вихря. Конечно, вместо указанных вертикальных стенок можно задать два потока жидкости в противоположных направлениях на расстоянии l друг от друга. При этом нет необходимости вводить понятия трения жидкости о стенки. Т.е. они выступают лишь как граничные условия в данной задаче.

Уравнение Навье-Стокса и уравнение непрерывности для стационарного течения несжимаемой жидкости записываются в виде

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = (-1/\rho)\nabla p \quad , \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad . \qquad (2)$$

Здесь $\vec{v}(x,y)$ - скорость частиц жидкости, p - давление, ρ - плотность (предполагаемая постоянной величиной).

Так как

$$\operatorname{grad} v^2 = 2(\vec{v}\nabla)\vec{v} + 2\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v} \quad ,$$

то уравнение Навье-Стокса (1) можно переписать в виде

$$\operatorname{rot}\vec{v}\times\vec{v} = (-1/\rho)\operatorname{grad}(p + \rho v^2/2) \quad . \qquad (3)$$

Введём так называемую завихрённость течения

$$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v} .$$

Беря операцию rot от соотношения (3), находим

$$\mathrm{rot}\,\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0 . \qquad (4)$$

Уравнение непрерывности (2)

$$\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$$

может быть удовлетворено тождественно в двухмерном случае, если ввести функцию тока ψ соотношением

$$v_x = -\partial\psi/\partial y, \quad v_y = \partial\psi/\partial x . \qquad (5)$$

В рассматриваемом двухмерном случае вектор завихрённости направлен вдоль оси Z . Проектируя векторное уравнение (4) на это направление, находим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{\Omega}\times\vec{v})_y - \frac{\partial}{\partial y}(\vec{\Omega}\times\vec{v})_x = 0 , \qquad (6)$$

т.е. с учётом уравнения непрерывности

$$(\partial/\partial x)(\Omega v_x) + (\partial/\partial y)(\Omega v_y) = 0 = v_x \partial\Omega/\partial x + v_y \partial\Omega/\partial y . \qquad (7)$$

Так как

$$\Omega = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y = \partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = \Delta\psi ,$$

то уравнение (7) можно записать как уравнение для функции тока

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi = 0 . \qquad (8)$$

Это уравнение имеет простое общее решение

$$\Delta\psi = F(\psi) , \qquad (9)$$

где F - произвольная функция своего аргумента ψ .

Имея в виду граничные условия, показанные на рис.21, возьмём функцию в форме (ниже мы убедимся, что они действительно удовлетворяются):

$$F(\psi) = v_0 \exp(-2\psi/v_0) . \qquad (10)$$

Получаем так называемое уравнение Стюарта

$$\Delta\psi = v_0 \exp(-2\psi/v_0) . \qquad (11)$$

Для его решения введём новую зависимую переменную f вместо функции тока ψ

$$\psi = v_0 \ln f \quad . \tag{12}$$

Вычисляем первую и вторую производные от ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{v_0}{f}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{v_0}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{v_0}{f^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 .$$

Подставляя вторые производные в уравнение (II), находим

$$\frac{v_0}{f}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1\right]\frac{v_0}{f^2} = 0,$$

или

$$f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 1 = 0 .$$

Ищем решение этого уравнения в форме

$$f = A\cos x + B\,\mathrm{ch}\,y \quad , \tag{13}$$

где A и B - некоторые константы. Подставляя его в уравнение, получим:

$$(A\cos x + B\,\mathrm{ch}\,y)(-A\cos x + B\,\mathrm{ch}\,y) - A^2\sin^2 x - B^2\,\mathrm{sh}^2 y = 1 \quad .$$

Мы видим, что уравнение превращается в тождество, если константы A и B связаны друг с другом соотношением

$$-A^2 + B^2 = 1 \quad . \tag{14}$$

На основе (13) и (5) находим проекции скорости течения v_x и v_y :

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{v_0 B\,\mathrm{sh}\,y}{A\cos x + B\,\mathrm{ch}\,y} \quad , \tag{15}$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{v_0 A\sin x}{A\cos x + B\,\mathrm{ch}\,y} \quad . \tag{16}$$

Деля почленно (15) на (16), получаем уравнение для линий тока:

$$dy/dx = A\sin x / B\,\mathrm{sh}\,y \quad . \tag{17}$$

Простое интегрирование этого уравнения определяет линии тока

$$B\,\mathrm{ch}\,y = -A\cos x + \mathrm{const} \quad . \tag{18}$$

Таким образом, на линиях тока функция ψ является постоянной, что и оправдывает её название. Изобразим эти линии.

Сначала рассмотрим окрестности точек $x = -\pi, \pi, 3\pi \ldots$, $y = 0$. Из (18) в окрестности этих точек находим:

$$By^2 + A(x - \pi)^2 = \text{const} = R^2 .$$

Здесь для определенности была взята точка $x = \pi$. Это - уравнение эллипса, вытянутого вдоль оси X, так как $B > A$.

В окрестности начала координат $x = y = 0$ (а также точек, отличающихся по x от начала координат на целое число 2π) из (I8) получаем уравнение гиперболической траектории

$$By^2 - Ax^2 = \text{const} .$$

Если $y \to \pm\infty$, то из уравнения (I8) находим $B\,\mathrm{ch}\,y = \text{const}$, т.е. $y = \text{const}$. В этом случае уравнение линии тока представляет собой прямые линии, идущие параллельно горизонтальной оси x. В соответствии с этими результатами мы можем изобразить линии тока на рис.22.



Рис.22. Линии тока при вихревом плоском течении

Из (I5) и (I6) следует, что при $y \to \infty$ имеем $v_x = -v_0$, а при $y \to -\infty$ получаем $v_x = v_0$. Таким образом, при $y \to \pm\infty$ удовлетворяются граничные условия, поставленные выше для данной задачи. Из (I6) следует, что при $y \to \pm\infty$ имеем $v_y \to 0$.

Решение, показанное на рис.22, изображает цепочку вихрей вдоль оси x. Финитное вихревое движение отделено от инфинитного сепаратрисой. Из (I8) следует, что для сепаратрисы константа в правой части уравнения (I8) равна $B + A$. Следовательно, уравнение сепаратрисы имеет вид

$$B\,\mathrm{sh}^2(y/2) = A\sin^2(x/2) \quad . \qquad (I9)$$

Оно также показано на рис.22. В соответствии с результатами предыдущих разделов слабое возмущение данной системы приводит к хаотичности траекторий прежде всего вблизи сепаратрисы.

Вычислим период вихря малого размера R. Согласно (I5) для малого вихря имеем

$$v_x = -v_0 \frac{By}{A + B} .$$

Следовательно, для периода вихря получаем

$$T = \oint \frac{dx}{v_x} = \frac{A + B}{Bv_0} \oint \frac{dx}{y} = \frac{A + B}{Bv_0} B^{1/2} \oint \frac{dx}{(R^2 - A(x - \pi)^2)^{1/2}} .$$

Вычисление несложного интеграла приводит к результату

$$T = \frac{(A + B)2\pi}{(AB)^{1/2} v_0} . \qquad (20)$$

Мы видим, что для малого вихря его период не зависит от размера вихря. Что касается зависимости от параметра A, то из (20) следует, что при $A \to 0$ период неограниченно велик, в то время как с увеличением A он уменьшается и при $A \to \infty$ равен $2\pi/v_0$. При этом мы учитываем связь (I4) между константами A и B.

При увеличении размера вихря период начинает увеличиваться и для сепаратрисной траектории, очевидно, обращается в бесконечность. Максимальный размер вихря в соответствии с рис.22 определяется шириной сепаратрисы вдоль оси Y. Из (I9) следует, что при $A \to 0$ максимальный размер вихря имеет оценку $4(A)^{1/2}$, т.е. вихрь остаётся малым. Если же, напротив, $A \to \infty$, то размер вихря в максимуме порядка единицы (как и вдоль оси X). Величина константы A определяет степень эллиптичности вихрей. При $A \to \infty$ вихри являются круговыми, так как при этом $B \to A$.

Отметим, что картина, изображённая на рис.22, с математической точки зрения, весьма напоминает рассмотренный выше фазовый портрет для математического маятника (см. первый раздел). При этом роль координаты x играет угол отклонения маятника, а роль координаты y - угловая скорость маятника. Следовательно, для моделирования цепочки вихрей при плоском течении можно использовать результаты, полученные для математического маятника. В данном случае точка $x = y = 0$ соответствует неустойчивому верхнему положению равновесия маятника.

Завихрённость

$$\Omega = \Delta\psi = v_0 \exp(-2\psi/v_0) \approx v_0/f^2$$

определяется функцией тока ψ и, следовательно, имеет фиксированное значение для данной вихревой траектории.

9. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В этом разделе мы рассмотрим один из механизмов, объясняющих процесс возникновения турбулентного течения жидкости при увеличении числа Рейнольдса. Этот механизм был предложен Фейгенбаумом.

В предыдущем разделе мы рассмотрели, как возникает цепочка вихрей из-за нелинейности уравнения Навье-Стокса. Эта цепочка вихрей соответствует какому-то периоду вихря (см. формулу (20) предыдущего раздела), который не зависит от радиуса вихря при его небольших размерах. Обозначим период такого вихря через T. Рассмотрим сначала вопрос об устойчивости такого вихря. С целью упрощения вычислений мы рассмотрим временную динамику изменения характермстик течения, заменив производные по координатам делением на характерный размер вихря R . Тогда вместо точного уравнения Навье-Стокса для вихревого движения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \vec{v} \qquad (I)$$

с учётом вязкости (ν - коэффициент кинематической вязкости, ρ - плотность, $\vec{v}$ - скорость частиц жидкости, p - давление) получим качественное уравнение, описывающее только изменение движения во времени:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v^2/R = \nu\, v/R^2 \quad . \qquad (2)$$

Слагаемое с давлением в уравнении (I) можно объединить либо со вторым слагаемым левой части (I), либо со вторым слагаемым правой части (I) в зависимости от того, взять ли зависимость давления от скорости квадратичной или линейной.

Дифференциальное уравнение (2) превратим в разностное уравнение, заменив производную от скорости по времени на изменение этой скорости за период вихря:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v(t+T) - v(t)}{T} \quad . \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим:

$$v(t+T) + Tv^2(t)/R = (1 + T\nu/R^2)v(t) \quad . \qquad (4)$$

Без ограничения общности линейный член в правой части (4) может быть устранён, если перейти в другую систему отсчёта, движущуюся относительно данной с некоторой постоянной скоростью.

Эта скорость V в соответствии с (4) должна быть равна

$$V = \gamma/2R \quad .$$

Тогда уравнение (4) преобразуется в уравнение

$$v(t + T) = T\gamma^2/4R^3 - (T/R)v^2(t) \quad . \qquad (5)$$

Обозначим первое слагаемое в правой части этого уравнения как некоторый характерный масштаб v_0 скорости вихревого течения, т.е.

$$v_0 \equiv T\gamma^2/4R^3 \quad .$$

Следовательно, уравнение (5) переписывается в виде

$$v(t + T) = v_0 - (4v_0R^2/\gamma^2)v^2(t) \quad .$$

Вводя число Рейнольдса Re с помощью соотношения

$$Re \equiv 2v_0R/\gamma \quad ,$$

перепишем указанное уравнение в окончательной форме

$$v(t + T) = v_0 - (Re^2/v_0)v^2(t) \quad . \qquad (6)$$

Обратим внимание на отрицательный знак второго слагаемого в правой части этого уравнения. В случае положительного знака скорость частиц жидкости неограниченно нарастала бы при повторении периодов T вихревого течения, а это противоречит закону сохранения энергии.

Исследуем уравнение (6) на устойчивость. Строго периодическое решение уравнения (6) означает, что $v(t+T)=v(t)= v_1$. Следовательно, из (6) получим квадратное уравнение

$$v_1 = v_0 - (Re^2/v_0)v_1^2 \quad ,$$

решение которого имеет вид (при $Re=0$ должно быть $v_1 = v_0$)

$$v_1 = v_0 \frac{(1 + 4Re^2)^{1/2} - 1}{2Re^2} \quad . \qquad (7)$$

Мы здесь взяли положительный корень уравнения. Легко проверить (предоставляем это читателю), что второй корень при любых числах Рейнольдса соответствует неустойчивому периодическому течению.

Рассмотрим малое возмущение этого периодического решения $v = v_1 + \delta v$. Подставляя его в (6) и ограничиваясь членами первого порядка малости по возмущению δv , находим

$$\delta v(t + T) = -(2Re^2v_1/v_0)\,\delta v(t) \quad . \qquad (8)$$

Если выполняется условие

$$2Re^2 v_1 < v_0$$

то, согласно (8) $|\delta v(t+T)| < |\delta v(t)|$, т.е. возмущение со временем уменьшается. Следовательно, периодическое течение со скоростью, определяемой соотношением (7), является устойчивым. В противоположном случае $2Re^2 v_1 > v_0$ это течение неустойчиво, так как возмущение быстро нарастает со временем. Потеря устойчивости происходит при значениях $Re = Re_1$, $v_1 = v_{1c}$, причём

$$2Re_1^2 v_{1c} = v_0 \quad . \tag{9}$$

Исключая v_{1c} из системы двух уравнений (7) и (9), находим

$$Re_1^2 = 3/4 \quad ; \quad v_{1c} = (2/3)v_0 \quad . \tag{10}$$

Итак, периодическое течение с периодом T устойчиво при $Re < Re_1$ и неустойчиво при $Re > Re_1$.

На границе потери устойчивости согласно (8) имеем $\delta v(t+T) = -\delta v(t)$ и, следовательно, $\delta v(t+2T) = \delta v(t)$. Таким образом, течение со скоростью $v_{1c} + \delta v(t)$ периодично с периодом $2T$, т.е. с удвоенным периодом исходного периодического течения (в задаче, рассмотренной в предыдущем разделе, различные периоды течения определяются константой A в соответствии с формулой (20) предыдущего раздела). Это утверждение справедливо не только для $Re = Re_1$, но и в общем случае любых чисел Рейнольдса Re, однако в общем случае величина δv не является произвольным малым возмущением, как выше, а имеет определённое конечное значение: ей соответствует определённое значение скорости $v = v_{1c} + \delta v$ течения, имеющего период $2T$.

Теперь найдём условие потери устойчивости периодического течения с периодом $2T$. Для этого итерируем уравнение (6) ещё на один период

$$v(t+2T) = v_0(1 - Re^2) + 2Re^4 v^2(t)/v_0 - Re^6 \cdot v^4(t)/v_0^3 \quad . \tag{11}$$

Временно с целью упрощения выкладок пренебрежём последним слагаемым в правой части уравнения (II) (ниже мы убедимся, что его вклад невелик по численным причинам). Введём далее обозначения

$$v(t) \equiv (1 - Re^2)u(t) \quad , \quad K^2 \equiv 2Re^4(Re^2 - 1) \quad . \tag{12}$$

Тогда уравнение (II) принимает вид:

$$u(t + 2T) = v_o - K^2u^2(t)/v_o \quad . \qquad (13)$$

Мы видим, что после такой замены формально уравнение (13) совпадает с уравнением (6), если подставить $u(t)$ вместо $v(t)$ и новое число Рейнольдса K вместо старого Re. Повторяя изложенный выше анализ устойчивоти, согласно (10) получаем, что потеря устойчивости периодическим течением с периодом $2T$ происходит при $K^2 = 3/4$. Тогда согласно (12) находим, что $Re_2^2 = 1.243$. Итак, периодическое течение с удвоенным периодом $2T$ устойчиво при $Re^2 < Re_2^2 = 1.243$. При этом $v_2 = -0.162v_o$.

Если вычислить с указанными значениями последнее слагаемое в правой части уравнения (11), которым мы пренебрегли выше, то получаем для него $0.001v_o$, что и оправдывает это пренебрежение.

Производя ещё одну итерацию уравнения (11), можно заключить, что потеря устойчивости периодического течения с периодом $4T$ происходит при условии $L^2 = 3/4$, аналогичном (10), причём L выражается через K так же, как K выражается через Re согласно второму из соотношений (12): $L^2 = 2K^4(K^2 - 1)$. Следовательно, $K^2 = 1.243$. Подставляя это значение K в уравнение (12), находим соответствующее критическое число Рейнольдса, при котором теряется устойчивость течения с периодом $4T$: $Re_3^2 = 1.344$.

Повторяя указанные рассуждения мысленно бесконечное число раз, получим, что полная потеря устойчивости течений со всеми периодами имеет место при достижении критического числа Рейнольдса Re_c. В соответствии со вторым из уравнений (12) это число удовлетворяет уравнению

$$Re_c^2 = 2Re_c^4(Re_c^2 - 1) \quad . \qquad (14)$$

Решая это квадратное относительно Re_c^2 уравнение, находим:

$$Re_c^2 = (1 + 3^{1/2})/2 = 1.366 \quad . \qquad (15)$$

Область $Re > Re_c$ определяет то, что мы называем в данном сценарии турбулентным течением. При этом все вихревые движения неустойчивы и быстро разрушаются вскоре после своего возникновения.

Обратим внимание на быстрое сближение чисел Рейнольдса Re_n с ростом номера n, соответствующего потере устойчивости периодического течения с периодом $2^{n-1}T$.

Скорость приближения числа Рейнольдса к критическому числу Рейнольдса можно характеризовать параметром δ, определённом как

$$Re_c^2 - Re_n^2 = \delta^{-n} \quad . \tag{16}$$

Записывая это соотношение для номера $(n+1)$

$$Re_c^2 - Re_{n+1}^2 = \delta^{-n-1}$$

и вычитая его из соотношения (16), находим

$$Re_{n+1}^2 - Re_n^2 = \delta^{-n} - \delta^{-n-1} \quad .$$

Аналогично для следующего номера $n+1$ получим

$$Re_{n+2}^2 - Re_{n+1}^2 = \delta^{-n-1} - \delta^{-n-2} \quad .$$

Деля два последних соотношения почленно друг на друга, находим формальное определение параметра δ :

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{Re_{n+1}^2 - Re_n^2}{Re_{n+2}^2 - Re_{n+1}^2} \quad . \tag{17}$$

Вычислим величину δ, используя второе из соотношений (12):

$$Re_n^2 = 2Re_{n+1}^4(Re_{n+1}^2 - 1) \quad ,$$

$$Re_{n+1}^2 = 2Re_{n+2}^4(Re_{n+2}^2 - 1) \quad .$$

Подставляя их в (17), получаем:

$$\delta = \frac{2Re_{n+2}^4(Re_{n+2}^2 - 1) - 2Re_{n+1}^4(Re_{n+1}^2 - 1)}{Re_{n+2}^2 - Re_{n+1}^2} = 2(3Re_c^4 - 2Re_c^2) \quad .$$

Теперь можно устремить $n\to\infty$ и подставить значение Re_c из (15). Получаем:

$$\delta = 5.73 \quad . \tag{18}$$

В действительности, точное значение $\delta = 4.67$. Оно получается, если учесть отброшенное слагаемое в преобразовании (11). Ошибка расчёта δ составляет 20% .

Интересно, что значение $\delta = 4.67$, полученное Фейгенбаумом, относится не только к отображению (6), но и к любому отображению, имеющему подобную структуру, т.е. является универсальным.

10. СТРУКТУРА ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ

Волна разрежения образуется при вытягивании газа поршнем из цилиндра (рис.23).

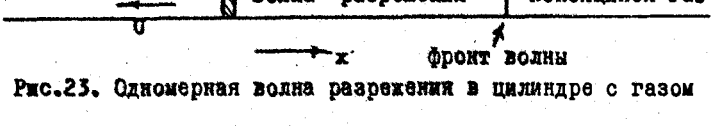


Рис.23. Одномерная волна разрежения в цилиндре с газом

Мы предполагаем, что скорость поршня является достаточно небольшой (обозначим её через U), так что газ успевает двигаться за поршнем. Фронт волны распространяется вправо (поршень движется влево на рис.23), захватывая покоящийся газ.

Ввиду одномерности такой упрощённой задачи скорость частиц газа v, давление p и плотность газа ρ зависят от координаты x (отсчитываемой для определённости вправо) и времени t. Так как в задаче нет характерного параметра длины и времени, то указанные величины зависят только от автомодельного параметра $\xi = x/t$. Это позволяет свести уравнения движения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям и просто решить их.

Что касается термодинамического характера движения, то ввиду малой теплопроводности газа его можно считать адиабатическим, т.е. теплообмен между соседними частями газа отсутствует за характерное время движения. Конечно, это справедливо, если скорость поршня не чрезвычайно мала. Следовательно, для энтропии газа s можно написать уравнение адиабатичности процесса

$$ds/dt = 0 = \partial s/\partial t + v\,\partial s/\partial x = (-x/t^2)s' + (v/t)s' \quad . \qquad (I)$$

Следовательно, $s' = 0$ и $s = \text{const}$. Здесь обозначено $s' = ds/d\xi$. Аналогичные обозначения для производной по ξ будут использованы для других величин, характеризующих течение. Таким образом, течение является не только адиабатическим (энтропия сохраняется вместе с движущимся элементом газа), но и изоэнтропическим (энтропия одинакова во всех точках газа).

Сначала пренебрежём вязкостью газа и напишем уравнение Навье-Стокса и уравнение непрерывности для рассматриваемого одномерного случая:

$$\partial v/\partial t + v\partial v/\partial x = (-1/\rho)\partial p/\partial x \quad , \qquad (2)$$

$$\partial \rho/\partial t + \rho\partial v/\partial x + v\partial\rho/\partial x = 0 \quad . \qquad (3)$$

Введём адиабатическую скорость звука c в данной точке пространства:

$$c^2 = (\partial p/\partial\rho)_s \quad .$$

Тогда уравнения (2) и (3) можно переписать, учтя автомодельный характер движений, как обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$(v - \xi)v' = (-1/\rho)p' = (-c^2/\rho)\rho', \qquad (4)$$

$$(v - \xi)\rho' + \rho v' = 0. \qquad (5)$$

Исключая из уравнений (4) и (5) величины v', ρ', находим:

$$(v - \xi)^2 = c^2 \; ; \quad \xi = x/t = v + c \quad . \qquad (6)$$

Для определённости мы взяли здесь знак, соответствующий распространению волны вправо (в соответствии с рис.23). Подставляя (6) обратно в (4), находим

$$-cv' = (-c^2/\rho)\rho' \quad , \; v = \int c(\rho)\, d\rho/\rho \quad . \qquad (7)$$

Для определения зависимости $c(\rho)$ воспользуемся уравнением адиабаты $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = c_p/c_v$ - отношение теплоёмкости при постоянном давлении c_p к теплоёмкости при постоянном объеме c_v . Отсюда $p \sim \rho^\gamma$ и, следовательно, $c^2 \sim \rho^{\gamma-1}$. Подставляя ρ из этого соотношения в формулу (7), вычисляем интеграл и связываем скорость v со скоростью звука c :

$$v = \int c\, d\ln\rho = \int c\, \frac{2\, dc}{(\gamma-1)c} = \frac{2}{(\gamma-1)}(c - c_0) \quad . \qquad (8)$$

Константа интегрирования c_0 имеет физический смысл скорости звука в неподвижном газе ($v = 0$).

Подставляя далее выражение (6) для c в (8), находим явное выражение для скорости частиц газа в данной точке пространства x в момент времени t :

$$v = \frac{2}{(\gamma-1)}(-v + x/t - c_0) \quad , \quad v = \frac{2}{(\gamma+1)}(-c_0 + x/t) \quad . \qquad (9)$$

Если $v = 0$, то отсюда получаем, что $x = c_0 t$, т.е. фронт волны разрежения движется вправо со скоростью звука c_0 в неподвижном газе, приводя его в движение. Для точек левее этого фронта $x < c_0 t$ и, следовательно, согласно (9) $v < 0$, причём скорость v изменяется по линейному закону с x при фиксированном времени t .

Таким образом, на фронте скорость частиц хотя и непрерывна, но её производная терпит скачок, т.е. имеет место так называемый слабый разрыв.

Убывая, скорость v частиц газа достигает значения $-U$, соответствующего тому, что левее часть газа движется вместе с поршнем. Полагая в (9) $v = -U$, находим точку излома производной:

$$x = (c_0 - \frac{1+\gamma}{2} U)t \quad . \qquad (10)$$

Профиль скорости при заданном времени t показан на рис.24.

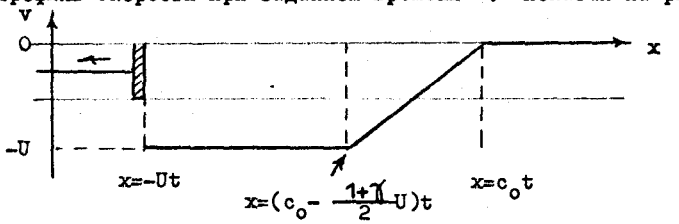


Рис.24. Профиль скорости частиц газа в волне разрежения

В точке, определяемой уравнением (10), также имеет место слабый разрыв.

Картина распределения скорости, изображенная на рис.24, справедлива при условии

$$c_0 - (1+\gamma)U/2 > -U \quad , \quad \text{т.е.} \quad c_0 > (\gamma - 1)U/2 \quad , \qquad (11)$$

когда нижняя точка излома находится правее поршня. Мы ограничимся скоростями поршня U, удовлетворяющими условию (11). В противном случае за поршнем образуется область вакуума.

Следует отметить, что согласно (8) скорость звука внутри волны разрежения равна

$$c = c_0 + (\gamma - 1)v/2 \qquad (12)$$

и, так как $v < 0$, то она меньше, чем скорость звука в покоящемся газе c_0.

В действительности, излома профиля скорости нет, если учесть вязкость газа. Она и определяет структуру фронта волны разрежения, и этот вопрос будет основным предметом рассмотрения данного раздела. Мы ограничимся окрестностью точки излома $x = c_0 t$ (окрестность точки, определяемой уравнением (10), исследуется полностью аналогично вышеуказанной). Пусть ν - кинематическая вязкость газа. Так как величина ν/U имеет размерность длины, то условие автомодельности нарушается, поэтому нам следует заново

обратиться к уравнению Навье-Стокса, но уже с учётом вязкости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad . \qquad (13)$$

Это уравнение, как и уравнение непрерывности (3), можно упростить, если учесть малость скорости v вблизи точки излома $x = c_0 t$. Разлагать по этой малой величине следует с точностью до членов второго порядка, так как члены первого порядка определяют только обычный звук.

Обозначим $p = p_0 + p'$, где p_0 – давление в покоящемся газе, а p' – малая поправка к нему в указанной области излома. Так как согласно адиабатическому уравнению имеем

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^{\gamma},$$

то отсюда с точностью до квадратичных членов по p' получим

$$\rho/\rho_0 = 1 + p'/\gamma p_0 + \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\left(\frac{p'}{p_0}\right)^2 ,$$

или

$$\rho = \rho_0 + p'/c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\cdot\frac{p'^2}{\rho_0 c_0^4} \qquad (14)$$

Подставляя это выражение в уравнение непрерывности (3), находим:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{(\gamma-1)}{c_0^4\rho_0}p'\frac{\partial p'}{\partial t} + \left(\rho_0 + \frac{p'}{c_0^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{c_0^2}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad . \qquad (15)$$

А подстановка (14) в уравнение Навье-Стокса (13) приводит к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{p'}{\rho_0^2 c_0^2}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x} \quad . \qquad (16)$$

В членах уравнений (15) и (16) второго порядка малости можно использовать соотношения, получаемые при анализе этих же уравнений, учитывающих только члены первого порядка малости. Из (16) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \qquad (17)$$

в то время как из (15) получаем

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_0\frac{\partial v}{\partial x} \quad . \qquad (18)$$

Дифференцируя уравнение (17) по времени, а (18) - по координате, и сравнивая результаты друг с другом, получим волновое уравнение для скорости частиц газа v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad . \tag{19}$$

Его решение, соответствующее волне, идущей вправо со скоростью звука c_0 в покоящейся среде, имеет простой вид

$$v = v_0 \cos(\omega t - kx) \quad , \omega = c_0 k \quad . \tag{20}$$

Аналогичный вид имеет давление p'. Подставляя их обратно в (17) (или (18)), связываем скорость v и давление p' линейным соотношением

$$p' = \rho_0 c_0 v \quad . \tag{21}$$

Подставляя (21) во второе слагаемое левой части уравнения (16), мы видим, что оно взаимоуничтожается со вторым слагаемым правой части этого же уравнения. Таким образом, уравнение (16) приобретает более простую форму

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad . \tag{22}$$

Теперь начинаем упрощать уравнение непрерывности (15). Выражая давление p' через скорость v с помощью формулы (21), группируем три квадратичных слагаемых уравнения (15) в один член:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\gamma + 1}{c_0} v \frac{\partial v}{\partial x} \quad . \tag{23}$$

Исключим давление из уравнений (22) и (23). Для этого уравнение (22) продифференцируем по времени t и умножим на $(1/c_0^2)$, а уравнение (23) продифференцируем по координате x. После этого вычтем из второго уравнения первое. Находим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\nu}{c_0^2} \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} = \frac{\gamma + 1}{c_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) . \tag{24}$$

Первые два слагаемых в левой части этого уравнения можно упростить дальше, если учесть операторное соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) .$$

Здесь было использовано, что указанный оператор в действительности является малой величиной второго порядка малости, и эта малость обеспечивается оператором в круглых скобках в последнем

выражении. Действительно, этот оператор обращает в нуль волну (20), движущуюся вправо.

Таким образом, уравнение (24) для скорости v приобретает вид:

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{c_0\partial t}\right)-\frac{\nu}{c_0}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=\frac{\gamma+1}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) . \qquad (25)$$

Здесь в вязком члене (являющимся в действительности членом второго порядка малости вследствие малости коэффициента кинематической вязкости ν) мы заменили по сравнению с (24) $\partial/c_0\partial t = -\partial/\partial x$. Интегрируя (25) по координате x и учитывая, что константа интегрирования равна нулю, так как $v = 0$ в отсутствие движения, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t}+c_0\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\gamma+1}{2}v\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 . \qquad (26)$$

Удобно вместо координаты x использовать независимую переменную

$$\xi = x - c_0 t .$$

Это сокращает количество членов в уравнении (26):

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\gamma+1}{2}v\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\nu\partial^2 v}{2\partial\xi^2}=0 . \qquad (27)$$

Наконец, чтобы избавиться от γ, заменим зависимую переменную

$$u = -(\gamma+1)v/2 , \quad u > 0 .$$

Тогда уравнение (27) приобретает окончательный вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\nu\partial^2 u}{2\partial\xi^2}=0 . \qquad (28)$$

Оно называется уравнением Бюргерса.

Хопф предложил замену

$$u = -\nu\frac{\partial}{\partial\xi}(\ln w) ,$$

позволяющую свести уравнение Бюргерса к уравнению одномерной теплопроводности. Для первой производной имеем

$$\partial u/\partial\xi = (-\nu/w)\partial^2 w/\partial\xi^2 + (\nu/w^2)(\partial w/\partial\xi)^2 .$$

Следовательно, второе слагаемое в уравнении Бюргерса (28) принимает вид

$$u(\partial u/\xi) = (\nu/w)^2(\partial^2 w/\partial\xi^2)(\partial w/\partial\xi) - (\nu^2/w^3)(\partial w/\partial\xi)^3 . \qquad (29)$$

Теперь вычисляем вторую производную $(-\nu/2)\partial^2 u/\partial\xi^2$:

$$(-\nu/2)\partial^2 u/\partial\xi^2 = -(\nu/w)^2(\partial^2 w/\partial\xi^2)(\partial w/\partial\xi) +$$
$$+ (\nu^2/2w)(\partial^3 w/\partial\xi^3) + (\nu^2/w^3)(\partial w/\partial\xi)^3 -$$
$$- (\nu^2/2w^2)(\partial^2 w/\partial\xi^2)(\partial w/\partial\xi) \quad . \qquad (30)$$

Складывая (29) и (30) друг с другом, мы видим, что оба слагаемых выражения (29) взаимоуничтожаются с соответствующими слагаемыми выражения (30). Оставляя сохранившиеся слагаемые, перепишем уравнение Бюргерса (28) в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{\partial \ln w}{\partial t} + \frac{\nu^2}{2w}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right\} = 0 \quad . \qquad (31)$$

Интегрируя его по переменной ξ , обозначим через $f'(t)$ соответствующую константу интегрирования:

$$\frac{\partial \ln w}{\partial t} + \frac{\nu^2}{2w}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} = f'(t) \quad . \qquad (32)$$

Произведём следующую замену зависимой переменной

$$w = z(\xi,t)\exp(f(t)) \quad .$$

Отметим, что она не меняет выражения для u . Подставляя эту замену в (32), находим

$$e^f(\partial z/\partial t) + f'e^f z - (\nu/2)e^f(\partial^2 z/\partial\xi^2) = f'e^f z \quad ,$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\nu}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} \quad . \qquad (33)$$

Это - не что иное, как обыкновенное одномерное диффузионное уравнение. Его решение хорошо известно:

$$z(\xi,t) = \frac{1}{(2\pi\nu t)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\xi'-\xi)^2}{2\nu t}\right]z(\xi,0)\,d\xi \quad , \qquad (34)$$

где $z(\xi,0)$ значение функции z в начальный момент времени $t = 0$.

Для определения начальной функции используем следующий приём. Сформулируем граничные условия для скорости частицы v и затем переведём их в начальные условия, считая, что поршень начинает двигаться в момент времени $t = 0$.

Значение скорости $v = 0$ при $x \to \infty$, т.е. $\xi \to \infty$. Далее, согласно (9) значение скорости

$$v = [2/(\gamma+1)](-c_0 + x/t)$$

при $x \to -\infty$, т.е. $\xi \to -\infty$. Таким образом, для переменной $u=-(\gamma+1)v/2$ граничные условия имеют вид

$$u = 0,\ \xi \to \infty \quad ;\ u = -\xi/t,\ \xi \to -\infty. \tag{35}$$

При малых t эти условия упрощаются:

$$u = \begin{cases} 0, & \xi \to \infty \\ \infty, & \xi \to -\infty \end{cases} \tag{36}$$

Так как $u=(-\gamma)\frac{\partial \ln w}{\partial \xi}$, то для $\partial w/\partial \xi$ из условия (36) находим

$$\partial w/\partial \xi = \delta(\xi),\ t = 0. \tag{37}$$

Интегрируя δ-функцию Дирака $\delta(\xi)$, получим граничное условие для функции w:

$$w(\xi, 0) = \eta(\xi), \tag{38}$$

где $\eta(\xi)$ - ступенчатая функция Хевисайда:

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0; \\ 0, & \xi < 0. \end{cases} \tag{39}$$

Это же начальное условие справедливо и для функции z, так как явный вид функции f несущественен при определении скорости u, как и абсолютное значение функции $z(\xi, 0)$ (оно выпадает при дифференцировании в процессе вычисления функции u). Итак,

$$z(\xi, 0) = \begin{cases} 1, & \xi > 0; \\ 0, & \xi < 0. \end{cases} \tag{40}$$

Подставляя это начальное условие в решение (34) уравнения теплопроводности (или диффузии), находим:

$$z(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi\gamma t)^{1/2}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi' - \xi)^2}{2\gamma t}\right] d\xi'. \tag{41}$$

Следовательно,

$$u = (-\gamma/z)(\partial z/\partial \xi) = (\gamma/2t)^{1/2} \cdot \frac{\exp(-\xi^2/2\gamma t)}{\int_{-\xi/\sqrt{2\gamma t}}^\infty \exp(-y^2)\, dy},$$

и окончательно

$$v(x,t) = -\frac{(2\gamma/t)^{1/2}}{(\gamma+1)} \cdot \frac{\exp(-\xi^2/2\gamma t)}{\int_\beta^\infty \exp(-y^2)\, dy}. \tag{42}$$

Легко видеть, что для скорости v удовлетворяются граничные условия при $x \to \pm\infty$, написанные выше, как и должно быть.

Нижний предел интегрирования в выражении (42) есть

$$b = -\xi/(2\nu t)^{1/2} = -(x - c_0 t)/(2\nu t)^{1/2} \quad .$$

Зависимость v от x при некотором фиксированном значении времени t показана на рис.25.

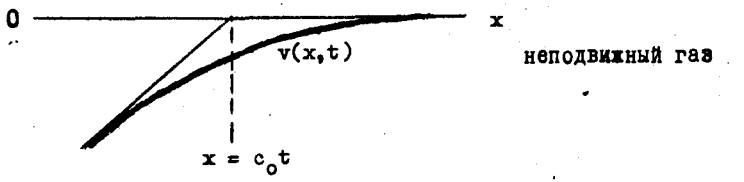


Рис.25. Структура фронта волны разрежения

Мы видим, что в действительности излома скорости нет, а плавность её изменения определяется величиной коэффициента кинематической вязкости газа ν .

В соответствии с (42) характерное расстояние, на котором имеет место изменение скорости (ширина фронта Δx), равно

$$\Delta x = (2\nu t)^{1/2} \quad . \qquad (43)$$

Оно увеличивается со временем и тем больше, чем больше вязкость газа.

Аналогичное исследование можно провести в другой точке излома скорости (см. рис.24), где она достигает значения, равного скорости поршня. Оно приводит к идентичным выражениям для профиля скорости.

Мы учли только вязкость газа при определении структуры фронта волны разрежения. Аналогично можно учесть влияние теплопроводности газа. Если число Прандтля, определяемое как отношение коэффициента кинематической вязкости к коэффициенту температуропроводности газа, порядка единицы, то вклад теплопроводности и вязкости в ширину фронта волны разрежения сравним по величине.

Таким образом, полученные выше результаты, строго говоря, справедливы, когда число Прандтля велико. Для воздуха это число равно 0.73 при комнатной температуре и атмосферном давлении, и, следовательно, полученные результаты носят лишь качественный характер. Однако учёт теплопроводности не приводит к существенному усложнению задачи. Он изменяет в приведенных выше выкладках лишь эффективное значение коэффициента кинематической вязкости.

11. СТРУКТУРА СЛАБОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Содержание данного раздела является до некоторой степени продолжением предыдущего раздела. Отличие в том, что теперь поршень сжимает газ в одномерной трубе, двигаясь направо (рис.23), вследствие чего в газе впереди поршня идёт ударная волна. Фронт ударной волны представляет собой область сильного разрыва, когда основные характеристики газа, например, скорость его частиц терпит разрыв конечной величины. В этом существенное отличие ударной волны от волны разрежения, где фронт волны представлял собой слабый разрыв (см. предыдущий раздел). Наша первая задача - показать, как наличие вязкости сглаживает скачок скорости на фронте ударной волны. При этом мы ограничимся слабыми ударными волнами, скорость которых лишь немного превышает скорость звука c_0 в неподвижном газе. Это превышение скорости обозначим V.

Скорости частиц газа невелики для слабой ударной волны, так что мы можем воспользоваться уравнением Бюргерса (28) из предыдущего раздела:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad . \qquad (1)$$

Здесь u - величина, связанная со скоростью частиц газа $v(x,t)$ соотношением $u = (\gamma+1)v/2$, ν - коэффициент кинематической вязкости газа, и $\xi = x - c_0 t$. При этом для слабой волны мы предполагаем, что $v \ll c_0$. Величина γ представляет собой отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме для политропного идеального газа.

По поводу уравнения (I) следует сделать замечание, которое в равной степени относится и к волне разрежения, исследованной в предыдущем разделе. Для сжимаемого газа уравнение Навье-Стокса вместо вязкого члена $\nu\Delta\vec{v}$ содержит член более сложного вида $\nu\Delta\vec{v} + (\frac{\zeta}{\rho} + \nu/3)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}$. Здесь ζ - вторая вязкость газа, а ρ - его плотность. В случае рассматриваемого здесь одномерного течения это выражение превращается в

$$(4\nu/3 + \zeta/\rho)\partial^2 v/\partial x^2 \quad .$$

Таким образом, в действительности вместо коэффициента кинематической вязкости ν в уравнении (1) следует использовать комбинацию $4\nu/3 + \zeta/\rho$. Если же учесть теплопроводность χ газа, то возникнет ещё одна модификация эффективного коэффициента кинематической вязкости. Мы будем это иметь в виду, не вводя, однако, новых констант.

Будем искать решение уравнения Бюргерса (I), зависящее только от волновой переменной

$$X = \xi - Vt = x - (c_0 + V)t \quad .$$

Тогда оно становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(u - V)u' = (\gamma/2)u'' \quad . \qquad (2)$$

Здесь мы обозначили $u' = du/dX$. Как мы уже отмечали выше, величина $V \ll c_0$ представляет собой малое превышение скорости ударной волны над скоростью звука c_0 .

Интегрирование уравнения (2) элементарно:

$$(u^2/2) - Vu = (\gamma/2)u' + \text{const} \quad . \qquad (3)$$

Будем считать, что ударная волна распространяется слева направо, и нас интересуют характеристики этой волны вблизи её фронта. Тогда граничные условия имеют простой вид: $u(X \to \infty) = 0$ и $u(X \to -\infty) = u_0$. Здесь константа u_0 определяет скорость частиц газа вдали от фронта ударной волны. Кроме того, $u'(X \to \pm\infty) = 0$. Из условия при $X \to \infty$ получаем, что константа в уравнении (3) равна нулю. А из условия при $X \to -\infty$ тогда находим, что $u_0^2 = 2Vu_0$, откуда $u_0 = 2V$. Разумеется, скорость частиц газа u_0 мала по сравнению со скоростью ударной волны $c_0 + V$.

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\gamma\, du}{u(2V - u)} = -dX = \frac{\gamma\, du}{2V}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2V - u}\right) \quad .$$

Интегрируя его, находим

$$-2VX/\gamma = \ln\left(\frac{u}{2V - u}\right) \quad , \quad \frac{2V}{u} = 1 + \exp(2VX/\gamma) \quad .$$

Константа интегрирования при этом без ограничения общности может быть положена равной нулю, что связано с выбором начала отсчёта координаты X .

Таким образом, находим решение

$$u(x,t) = \frac{2V}{1 + \exp\left[\frac{2V}{\gamma}(x - c_0 t - Vt)\right]} \quad . \qquad (4)$$

Оно описывает плавный переход скорости частиц газа от нулевого значения к значению вдали от фронта. Ширина фронта равна

$$\Delta x = \gamma/2V \quad . \qquad (5)$$

Мы видим, что при $\gamma \to 0$ возникает скачок (разрыв) в скорости u частиц газа.

Профиль скорости u (мы не будем обращаться здесь к истинной скорости v, связанной с u линейным соотношением, приведенным выше) как функции x при фиксированном времени t показан на рис.26.

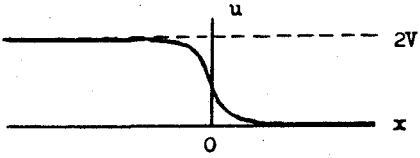


Рис.26. Структура фронта слабой ударной волны

Учтём теперь дисперсию волны таким же путём, как мы это делали для уравнения Кортевега - де Вриза, описывающего гравитационные волны в мелком канале. В случае канала дисперсия волны обязана тому, что глубина канала не слишком мала. В других случаях (плазме и т.п.) дисперсия возникает по другим причинам, однако мы не будем исследовать эти причины, а просто введём универсальный член в уравнение Бюргерса (I), соответствующий слабой дисперсии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = (\gamma/2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad . \qquad (6)$$

Константа b характеризует дисперсию волны, а производными высшего порядка по ξ мы пренебрежём ввиду слабости дисперсии (члена со второй производной нет по причинам, разъяснённым подробно при выводе уравнения Кортевега - де Вриза).

Вводя снова волновую переменную

$$X = \xi - Vt = x - (c_0 + V)t \quad ,$$

мы сводим уравнение (6) в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-Vu' + u\cdot u' + b\cdot u''' = (\gamma/2)u'' \quad . \qquad (7)$$

Как и выше, здесь обозначено $u' = du/dX$. Интегрирование уравнения (7) по X приводит к следующему уравнению:

$$-Vu + u^2/2 + b\cdot u'' = (\gamma/2)u' \quad . \qquad (8)$$

Константа интегрирования равна нулю в соответствии с нулевыми граничными условиями при $X \to \infty$: $u = u' = u'' = 0$.

Уравнение (8) можно записать в форме второго закона Ньютона для частицы с массой b и эффективной потенциальной энергией U

$$b\cdot u'' = (\gamma/2)u' - \frac{dU}{dX} \quad . \tag{9}$$

$$U(u) = -Vu^2/2 + u^3/6 \quad . \tag{10}$$

График потенциальной энергии показан на рис.27.



Рис.27. Механическая аналогия для решения уравнения Бюргерса - Кортевега - де Вриза.

На рис.27 показана типичная траектория частицы, сталкивающейся со стенками потенциальной ямы и постепенно опускающейся вниз из-за релаксационного вязкого члена.

Сначала мы рассмотрим решение уравнения (9) в отсутствие затухания, т.е. в пренебрежении вязким членом. Полная "энергия" модельной частицы при этом сохраняется, так что

$$b\,u'^2/2 + U(u) = \mathrm{const} = 0 \quad . \tag{11}$$

Мы рассмотрели начальный этап движения на рис.27 при $X \to \infty$, положив эту "энергию" равной нулю. Решение уравнения (11) ищем в виде

$$u = \frac{3V}{\mathrm{ch}^2(X/a)} \quad .$$

Тогда, дифференцируя, находим

$$u' = -\frac{6V\,\mathrm{sh}(X/a)}{a\,\mathrm{ch}^3(X/a)} \quad ,$$

а уравнение (11) приобретает вид

$$\frac{bu'^2}{2} = \frac{18V^2b}{a^2}\,\frac{\mathrm{ch}^2(X/a) - 1}{\mathrm{ch}^2(X/a)} = -\frac{9V^3}{2\mathrm{ch}^6(X/a)} + \frac{9V^3}{2\mathrm{ch}^4(X/a)} \quad .$$

Видно, что оно превращается в тождество, если выбрать константу a из условия $4b = Va^2$. Таким образом,

$$a = 2(b/V)^{1/2} \quad . \tag{12}$$

Решение

$$u(x,t) = \frac{3V}{\mathrm{ch}^2((x - c_0t - Vt)/a)} \tag{13}$$

представляет собой солитонную волну. Ширина солитона даётся соотношением (12). Чем больше скорость солитона V, тем этот солитон уже и выше.

Теперь найдём решение в окрестности точки $X \to -\infty$, $u = 2V$ (на дне потенциальной ямы). Полагая $\Delta u = u - 2V \ll V$, перепишем уравнение (8) приближённо в виде

$$b\,\Delta u'' = (\gamma/2)\,\Delta u' - V\Delta u \quad . \qquad (14)$$

Ищем решение этого уравнения в форме

$$\Delta u = \exp(KX) \quad .$$

Тогда из (14) находим квадратное уравнение для K:

$$bK^2 - \gamma K/2 + V = 0 \quad ,$$

решение которого имеет вид

$$K = (1/2b)(\gamma/2 \pm i(4bV - \gamma^2/4)^{1/2}) \quad .$$

Таким образом, величина u представляется в виде затухающей волны

$$u(X) = 2V + u_0 \cdot \exp(\gamma X/2b) \cdot \cos(X/X_0 + \varphi) \quad . \qquad (15)$$

Здесь обозначено

$$X_0 = (V/b - \gamma^2/16b^2)^{-1/2} \quad . \qquad (16)$$

Решение (15) относится к области $X < 0$, и его точность повышается при приближении $X \to -\infty$. Фазовый портрет траектории (15), т.е. зависимость u' от u показана на рис.28

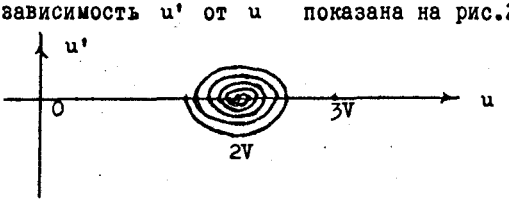


Рис.28. Фазовый портрет затухающего колебательного движения на заднем фронте ударной волны

Решение (15) относится к случаю, когда вязкость невелика, т.е. выполняется неравенство $\gamma^2 < bV$. Если же неравенство имеет обратный знак, то затухающее движение является апериодическим.

Приведенные выше солитонное решение и затухающее осциллирующее решение являются предельными случаями соответственно при $X \to \infty$ и $X \to -\infty$. Рассмотрим теперь, как они переходят друг в друга в промежуточном случае. Для этого умножим уравнение (8) на u' и проинтегрируем по X:

$$bu'^2/2 + u^3/6 - Vu^2/2 = (\gamma/2)\int u'^2\,dX \quad . \qquad (17)$$

Обратимся к верхней части рис.27, соответствующей солитону (13). После первого отражения от правой части потенциальной ямы частица возвращается к началу координат ($u \to 0$), но уже с отрицательной энергией $E < 0$. Величина этой энергии равна правой части (17), так как левая часть есть сумма кинетической и потенциальной энергий частицы, т.е. полная энергия на данном участке траектории. При вычислении правой части (17) мы можем использовать решение (13) и распространить пределы интегрирования на интервал $[-\infty, \infty]$ ввиду быстрой сходимости интеграла (существенный вклад в изменение энергии имеет место вблизи правого края потенциальной ямы, где u' велика). Итак, подставляя в правую часть (17) найденное выше выражение для u', получим

$$-E = \frac{18V^2\gamma}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sh^2(X/a)}{ch^6(X/a)}dX = \frac{18V^2\gamma}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sh^2 z}{ch^6 z}\,dz = \frac{24V^2\gamma}{5a} \quad . \qquad (18)$$

Подставляя (18) в (17), находим уравнение движения на участке пути после первого отражения от правой стенки потенциальной ямы:

$$bu'^2/2 = -|E| + Vu^2/2 - u^3/6 \quad . \qquad (19)$$

Отсюда мы можем вычислить время до следующего отражения от правой стенки, т.е. время между двумя последовательными солитонами; при этом роль времени играет координата X :

$$T = 2\int_{u_1}^{u_2}\frac{du\,(b/2)^{1/2}}{(-|E| + Vu^2/2 - u^3/6)^{1/2}} \quad . \qquad (20)$$

Пределы интегрирования соответствуют левой и правой точкам поворота частицы. Для вычисления интеграла (20) разобьём область интегрирования на две области. Введём скорость u_s, удовлетворяющую неравенству $u_1 \ll u_s \ll V$. В области интегрирования $[u_1, u_s]$ скорость u мала, и мы можем пренебречь кубическим членом $u^3/6$ в подынтегральном выражении (20). Соответствующий интеграл равен

$$I_1 = \int_{u_1}^{u_s}\frac{du}{(-|E| + Vu^2/2)^{1/2}} = (2/V)^{1/2}\ln(2u_s/u_1) \quad . \qquad (21)$$

В области $[u_s, V]$ можно пренебречь членом $|E|$ в подынтегральном выражении в (20), так как он мал по сравнению с другими членами.

Поэтому второй интеграл имеет вид

$$I_2 = \int_{u_s}^{u_2} \frac{du}{(Vu^2/2 - u^3/6)^{1/2}} = \int \frac{4dz}{V - 2z^2} = (2/V)^{1/2} \ln \frac{12V}{u_s} \quad (22)$$

Складывая (21) и (22), мы видим, что произвольно выбранная величина u_s выпадает из ответа, как и должно быть. После подстановки суммарного интеграла в (20) находим расстояние T между двумя соседними солитонами

$$T = 2(b/V)^{1/2} \ln \frac{24V}{u_1} = a \ln \frac{24 V^{3/2}}{(2E)^{1/2}} = \frac{a}{2} \ln \frac{12(bV)^{1/2}}{\nu} \quad (23)$$

Мы видим, что за счёт логарифма большого числа оно велико по сравнению с шириной отдельного солитона (12). При этом должно выполняться условие достаточной малости кинематической вязкости

$$\nu^2 \ll bV \quad (24)$$

(оно уже фигурировало выше).

Итак, передний фронт слабой ударной волны представляет собой цепочку солитонов, расположенных на большом расстоянии друг от друга по сравнению с их шириной. Постепенно эти солитоны сближаются, а их амплитуда уменьшается. На заднем фронте они переходят в гармонические волны, постепенно затухающие с расстоянием X, причём скорость частиц стремится к предельному значению 2V . Картина структуры скорости частиц на фронте слабой ударной волны показана на рис.29.

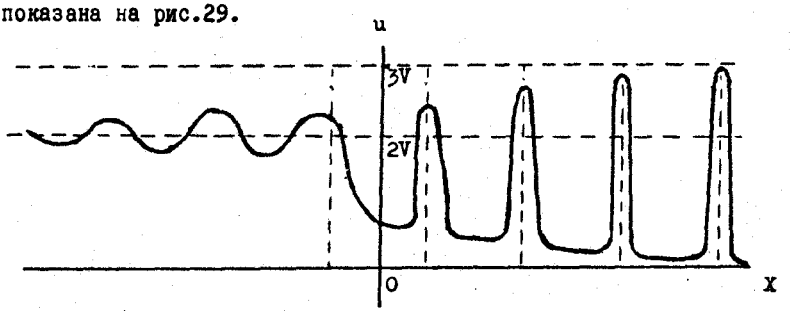


Рис.29. Структура распределения скорости в слабой ударной волне, распространяющейся слева направо

Выражение (23) определяет расстояние между первым и вторым солитонами (считая с правой стороны на рис.29). Расстояние между вторым и третьим солитонами будет несколько меньше, так как энергия $|E|$ после прохождения второго солитона будет вдвое больше. Аналогичные рассуждения относятся к следующим солитонам. Таким образом, для расстояния между n-м и $(n+1)$-м солитонами получим

$$T_n = (a/2)\ln\frac{120(bV)^{1/2}}{n\gamma} \quad . \tag{25}$$

Отсюда можно найти общее число солитонов N, так как при $n = N$ аргумент логарифма в (25) уменьшится до единицы, а само решение примет вид гармонических слабозатухающих волн. Итак,

$$N = 120(bV)^{1/2}/\gamma \quad . \tag{26}$$

Суммируя расстояния (25) по n в интервале $[1, N]$ и заменяя суммирование интегрированием, найдём ширину фронта ударной волны при выполнении условия малой вязкости и сильной дисперсии (24) N (она не зависит от скорости ударной волны!):

$$\Delta x = \int_1^N T_n\, dn = Na/2 = 120b/\gamma \quad . \tag{27}$$

При выполнении обратного условия рис.29 заменяется на рис.26, а ширина фронта определяется выражением (5).

Как мы уже отмечали в начале этого раздела, физическая постановка данной задачи состоит в том, что поршень в одномерной трубе, двигаясь, сжимает газ. При этом скорость поршня мала по сравнению со скоростью звука c_0 в газе. Значение $u=2V$ соответствует скорости газа $v=2u/(\gamma+1)$ слева от фронта ударной волны, как для случая рис.26, так и для случая рис.29. Приравнивая это значение скорости поршня U, находим величину V:

$$V = (\gamma+1)U/4 \quad . \tag{28}$$

В частности, для воздуха ($\gamma = 7/5$) получим $V = 0.6U$.

Чем больше скорость поршня U, тем больше скорость V и тем уже ширина фронта ударной волны согласно (5)(но не (27): в последнем случае ширина определяется солитонной частью, а не затухающими гармоническими волнами на левой части фронта). При достижении скорости поршня U значений порядка скорости звука, т.е. тепловой скорости молекул газа ширина фронта (5) $\gamma/2V$ уменьшается до величины порядка длины свободного пробега молекулы l, так как $\gamma \sim lc_0$. При этом уже нельзя применять законы гидродинамики.

12. СИЛЬНЫЙ ВЗРЫВ

В предыдущем разделе мы рассмотрели структуру слабой ударной волны. Теперь мы обратимся к противоположному случаю очень сильной ударной волны, возникающей при мгновенном выделении большой энергии в какой-то точке газа (мы далее рассмотрим в качестве примера воздух, так как исследование распространения сильной ударной волны в других газах полностью аналогично данному).

Фронт ударной волны представляет собой сферу, радиус которой в заданный момент времени t мы обозначим как R. Сначала рассмотрим картину движения для небольшой области пространства в окрестности фронта, где этот фронт покоится. Напишем законы сохранения, связывающие величины по разные стороны фронта в этой системе отсчёта. Индекс 1 будем относить к невозмущённой области перед фронтом, а индекс 2 - к возмущённой области за фронтом ударной волны. Как мы видели уже из предыдущего раздела, фронт ударной волны представляет собой сильный разрыв, где скорость частиц газа v, давление p и плотность ρ терпят разрывы (если не учитывать вязкость газа, как это делалось в предыдущем разделе). Ввиду большой силы взрыва ширина фронта волны мала, и здесь мы не будем исследовать её структуру (в данном случае эта ширина, как следует из рассуждений в конце предыдущего раздела, имеет порядок длины свободного пробега молекул газа).

Непрерывность количества вещества (потока газа) приводит к уравнению

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = j , \qquad (I)$$

где ρ_1, ρ_2 - плотности газа перед и после фронта, а v_1 и v_2 - скорости частиц газа соответственно до и после прохождения фронта волны (напомним, в системе, связанной с фронтом).

Равенство сил, действующих по обе стороны фронта (третий закон Ньютона), записывается с учётом того, что полное давление складывается из статического давления p и кинематического давления ρv^2:

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 . \qquad (2)$$

Наконец, непрерывность потока энергии вследствие отсутствия каких-либо химических реакций на фронте волны приводит к уравнению

$$v_1\left[\rho_1 v_1^2/2 + \rho_1 \varepsilon_1 + p_1 v_1\right] = \left[\rho_2 v_2^2/2 + \rho_2 \varepsilon_2 + p_2 v_2\right] v_2 . \qquad (3)$$

Первое слагаемое в каждой части этого равенства представляет собой

кинетическую энергию единицы объёма газа, второе слагаемое - внутреннюю энергию (величина ε отнесена к единице массы газа), и, наконец, третье слагаемое - работа сил давления (речь идёт о слагаемых в квадратных скобках выражения (3)).

Величина

$$w = \varepsilon + p/\rho$$

представляет собой энтальпию единицы массы газа. С учётом этого соотношения, а также (I), из (3) находим:

$$w_1 + v_1^2/2 = w_2 + v_2^2/2 \quad . \qquad (4)$$

Исключим скорости v_1, v_2 из соотношения (I), выразив их через плотность потока вещества j ; тогда соотношение (2) принимает вид

$$p_1 + j^2/\rho_1 = p_2 + j^2/\rho_2 \quad .$$

Откуда

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}\rho_1\rho_2 \quad . \qquad (5)$$

Аналогично соотношение (4) принимает вид

$$w_1 + j^2/2\rho_1^2 = w_2 + j^2/2\rho_2^2 \quad . \qquad (6)$$

Исключая j^2 из (5) и (6), получаем уравнение

$$w_2 - w_1 = (p_2 - p_1)\frac{\rho_2 + \rho_1}{2\rho_1\rho_2} \quad . \qquad (7)$$

Для воздуха, рассматриваемого как двухатомный идеальный газ, имеем

$$w = c_p T = 7p/2\rho \quad . \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7), находим связь давлений и плотностей по разные стороны от фронта ударной волны:

$$(7/2)(p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1) = (1/2)(p_2 - p_1)(1/\rho_1 + 1/\rho_2) \qquad (9)$$

В отличие от предыдущего раздела, здесь мы рассматриваем обратный предел очень сильной сферической ударной волны, когда $p_2 \gg p_1$. Пренебрегая атмосферным давлением p_1 по сравнению с давлением p_2 после прохождения фронта ударной волны, из (9) находим

$$\rho_2 = 6\rho_1 \quad . \qquad (10)$$

Итак, сколь угодно сильная ударная волна не может сжать воздух больше, чем в шесть раз.

Теперь возвратимся в лабораторную систему координат и обозначим скорость фронта ударной волны V (как и в других разделах), причём здесь эта скорость значительно превышает скорость звука c_0 в невозмущённом газе. Скорость частиц газа непосредственно за фронтом ударной волны в лабораторной системе координат обозначим через v_f. Тогда из (1) и (10) получим

$$j = \rho_1(-V) = \rho_2(v_f - V) \quad ,$$

откуда

$$v_f = 5V/6 \quad . \tag{11}$$

Мы видим, что, как и должно быть, скорость частиц газа за фронтом несколько отстаёт от скорости фронта ударной волны V. Для давления p_2 непосредственно за фронтом ударной волны получим

$$p_2 = j^2(1/\rho_1 - 1/\rho_2) = (5/6)\rho_1 V^2 \quad . \tag{12}$$

Теперь рассмотрим уравнение Навье-Стокса во внутренней области сферы, где распространяется сильная ударная волна после взрыва. Вследствие сферической симметрии задачи имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \quad . \tag{13}$$

Вязкостью пренебрегаем вследствие большой интенсивности взрыва. Уравнение непрерывности в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v) + \frac{2\rho v}{r} = 0 \quad . \tag{14}$$

Наконец, ввиду больших скоростей теплообмен между соседними участками газа не успевает происходить, так как теплопроводность воздуха невелика. Следовательно, процесс является адиабатическим, т.е. $ds/dt = 0$. Это соотношение можно записать в другой форме, если вспомнить, что для адиабатического процесса в идеальном газе $p \sim \rho^{\gamma}$, где $\gamma = 7/5$ - отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме. Следовательно, это уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{p}{\rho^{\gamma}} = 0 \quad . \tag{15}$$

Распространение сильной ударной волны после точечного сильного взрыва является автомодельным процессом, коль скоро мы пренебрегаем атмосферным давлением невозмущённого газа p_1. Поэтому радиус фронта R может быть образован из величин E, t и ρ_1.

Здесь E - энергия, выделившаяся в момент сильного взрыва. Из соображений размерности находим:

$$R(t) = b(Et^2/\rho_1)^{1/5} \quad , \qquad (16)$$

где b - безразмерная константа, зависящая только от γ .

Вследствие автомодельности удобно ввести безразмерную переменную

$$\xi = r/R \quad ,$$

характеризующую расстояние от центра взрыва до фронта ($0<\xi<1$). Скорость фронта согласно (16) равна

$$V = dR/dt = 2R/5t \quad . \qquad (17)$$

Введём безразмерную характеристику плотности

$$\rho = G(\xi)\rho_2 \quad . \qquad (18)$$

причём, очевидно, $0<G<1$. Введём также безразмерную скорость $u(\xi)$с помощью соотношения

$$v = (r/3t)u(\xi) \quad . \qquad (19)$$

Она также изменяется в пределах $0<u<1$. Наконец, давление p удобно характеризовать безразмерной функцией $Z(\xi)$, определённой соотношением

$$p = G(\xi)Z(\xi)(2r^2/15t^2)\rho_1, \qquad (20)$$

так что согласно (12) граничное условие на фронте волны имеет простой вид $Z(1) = 1$. Итак, для безразмерных плотности, давления и скорости частиц газа мы имеем простые граничные условия

$$G(1) = u(1) = Z(1) = 1 \quad . \qquad (21)$$

Вместо трех дифференциальных уравнений, (13), (14) и (15), можно использовать только два, а вместо одного из них (проще всего, вместо первого) взять алгебраическое соотношение между рассматриваемыми величинами, вытекающее из условия автомодельности. Для этого рассмотрим сферу произвольного радиуса $r<R$ (рис.30) .

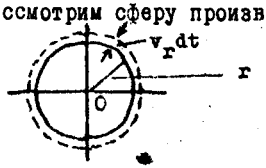


Рис.30. Закон сохранения энергии для сферического слоя

За время dt эта сфера расширится, если считать, что $\xi = const$.

Скорость расширения сферы согласно (17) при $\xi = const$ равна

$$v_r = dr/dt = \xi\, dR/dt = \xi(2R/5t) = 2r/5t \quad .$$

Полная энергия газа в тонком сферическом слое (толщиной $v_r dt$) равна

$$dE = \rho(\varepsilon + v^2/2)4\pi r^2 v_r dt \quad .$$

С другой стороны, эта энергия образовалась из потока энергии через сферу радиуса r :

$$dE = \rho v(w + v^2/2)4\pi r^2 dt \quad .$$

Приравнивая две последних величины друг другу, получаем алгебраическое соотношение между характеристиками движения:

$$v(w + v^2/2) = (2r/5t)(\varepsilon + v^2/2) \quad .$$

Подставляя сюда

$$\varepsilon = 5p/2\rho \quad , \quad w = 7p/2\rho \quad ,$$

получим

$$u(\xi)(7p/2\rho + v^2/2) = (6/5)(5p/2\rho + v^2/2) \quad .$$

В это соотношение теперь следует подставить значения давления из (20), скорости из (19) и плотности из (18), в результате чего мы получим связь безразмерных автомодельных функций параметра ξ :

$$z = \frac{6 - 5u}{7u - 6} u^2 \quad . \qquad (22)$$

Легко видеть, что оно согласуется с граничными условиями (21).

Из соотношения (22) видно, что безразмерная скорость $u(\xi)$ изменяется в весьма малом интервале: $6/7 < u < 1$. Меньший предел соответствует области вблизи центра, а больший предел – области вблизи фронта ударной волны. Забегая вперёд, отметим, что в сильной ударной волне практически все вещество сосредоточено вблизи фронта ударной волны. Поэтому хорошим приближением при решении задачи будет предположение, что при нахождении плотности газа внутри ударной волны можно считать, что $u = 1$. Действительно, меньший предел $u = 6/7$ соответствует области, где газа практически нет.

Уравнение (15) можно использовать для определения давления газа. Если же нас интересует только плотность, то мы ограничимся решением уравнения непрерывности (14), которое и определяет эту плотность. Полагая $u = 1$ и согласно (19) $v = r/3t$, перепишем это уравнение в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r/3t) + \frac{2\rho}{3t} = 0 \quad . \qquad (23)$$

Подставляя для плотности автомодельное выражение (I8), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $G(\xi)$:

$$(-2\xi/5t)G' + (\xi/3t)G' + G/t = 0 \quad , \quad G' = dG/d\xi \quad ,$$

или

$$15G = \xi G' \quad . \qquad (24)$$

Простое решение этого уравнение с граничным условием $G(1) = 1$ имеет вид

$$G(\xi) = \xi^{15} \quad . \qquad (25)$$

В приведенной ниже таблице сравниваются точные значения $G(\xi)$ и полученные по формуле (25). Видно, что согласие между точным и приближённым решениями достаточно хорошее в той области, где плотность не слишком мала. Кроме того, как из (25), так из точного решения видно, что практически вся масса газа при сильном взрыве сосредоточена вблизи поверхности фронта волны.

Таблица

Точные значения безразмерной плотности воздуха $G(\xi)$ и полученные по формуле ξ^{15} как функции безразмерного радиуса $\xi = r/R$.

ξ	ξ^{15}	$G(\xi)$	ξ	ξ^{15}	$G(\xi)$
1.0000	1.00	1.00	0.8747	0.13	0.15
0.9913	0.88	0.84	0.8359	0.07	0.10
0.9773	0.71	0.65	0.7950	0.03	0.06
0.9622	0.56	0.50	0.7493	0.01	0.04
0.9342	0.36	0.32	0.6788	0.00	0.02
0.9080	0.23	0.23	0.5794	0.00	0.00

В заключение этого раздела отметим, что таким же приближённым способом можно показать, что давление в большей части объёма внутри области взрыва постоянно, кроме узкой области вблизи фронта, где оно возрастает. Это постоянное давление отнюдь не мало по сравнению с давлением на фронте, а составляет от него существенную долю. Отсюда на основе уравнения состояния идеального газа получаем значительный рост температуры в центре взрыва.

13. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ОКЕАНЕ

На определённой глубине в океанах имеются области локального повышения показателя преломления для звуковых волн. В результате звуковые волны могут распространяться горизонтально в образующихся каналах на большие расстояния. Такой процесс и будет предметом рассмотрения данного раздела. Распространение звуковых волн обычно происходит в условиях, когда и в горизонтальном направлении показатель преломления слабо осциллирует. Мы исследуем динамику в рамках геометрической оптики лучей, когда характерная длина волны мала по сравнению с типичным размером неоднородности среды как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях , так что понятие лучей является обоснованным.

Схематически картина распространения звука в горизонтальном канале изображена на рис.31.

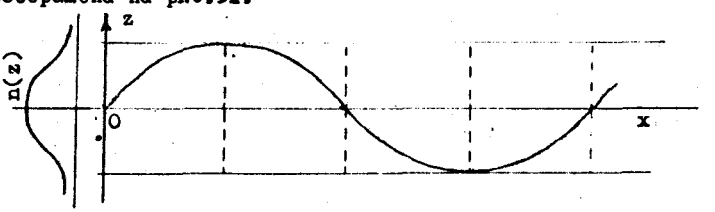


Рис.31. Геометрический звуковой луч в канале

Скорость частиц жидкости при волновом движении даётся соотношением (звук распространяется вдоль оси x):

$$v_x = v_0 \cos(kS(\vec{r}) - \omega t) \quad . \qquad (1)$$

Здесь v_0 - амплитуда скорости, ω - частота волны, $k = \omega/c_0$ - волновое число, c_0 - скорость звука в однородной среде. Величина $S(\vec{r})$ называется эйконалом и может быть разложена в ряд по $\vec{r}$ для малых участков среды, т.е. в условиях слабой неоднородности:

$$S(\vec{r}) = S_0 + \vec{r}\,\nabla S \quad .$$

Следуя обычному определению, можно ввести показатель преломления $n(r)$, полагая

$$\nabla S = n(r)(\vec{k}/k) \quad . \qquad (2)$$

В данном случае показатель преломления характеризует неоднородность среды для звуковых волн.

Волновой вектор $\vec{k}$ характеризует направление луча в данной точке пространства. Если ввести малый вектор $d\vec{r}$ вдоль луча с длиной dl , то получаем $\vec{k}/k = d\vec{r}/dl$.

Дифференцируя соотношение (2) по dl , находим векторное уравнение для распространения звукового луча:

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = \frac{d}{dl}\nabla S = \nabla\frac{d}{dl}S = \nabla n \quad . \tag{3}$$

Считая, что от поперечной координаты y зависимости нет, запишем уравнение (3) в проекциях:

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{dx}{dl}\right) = \frac{\partial n}{\partial x} \quad , \quad \frac{d}{dl}\left(n\frac{dz}{dl}\right) = \frac{\partial n}{\partial z} \quad . \tag{4}$$

Эти уравнения и определяют траекторию лучей.

Сначала мы предположим, что показатель преломления n зависит только от вертикальной координаты z и имеет вид типа, изображённого на рис.3I. Тогда из двух уравнений (4) можно оставить только первое; в данном случае оно принимает вид

$$d\left(n\frac{dx}{dl}\right)/dl = 0 \quad .$$

Тривиальное интегрирование данного уравнения приводит к простому результату

$$n\frac{dx}{dl} = \text{const} = -E \quad . \tag{5}$$

В дальнейшем будем называть величину E энергией, имея в виду механическую аналогию, обсуждаемую ниже.

Так как длина дуги $dl = (dx^2 + dz^2)^{1/2}$, уравнение (5) можно переписать в форме

$$-\frac{n}{E} = \left[1 + (dz/dx)^2\right]^{1/2} \quad , \qquad E < 0 \quad .$$

Интегрирование его в квадратурах элементарно:

$$x = \pm\int \frac{dz}{\left(n^2(z)/E^2 - 1\right)^{1/2}} \quad . \tag{6}$$

Сначала мы обратимся к совсем простой модели параболического профиля показателя преломления:

$$n^2(z) = n_0^2 - (z/a)^2 \quad . \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), интегрируем:

$$x = \pm\, aE \arcsin\frac{(z/aE)}{\left(n_0^2/E^2 - 1\right)^{1/2}} \quad , \quad |E| < n_0 \quad . \tag{8}$$

Отсюда получаем уравнение гармонического распространения луча в канале, показанное на рис.3I:

$$z = \pm\, a\left(n_0^2 - E^2\right)^{1/2} \sin(x/aE) \quad . \tag{9}$$

Величина ε имеет порядок единицы, так что "длина волны" $a\varepsilon$ для луча, описываемого уравнением (9), порядка размера неоднородности среды a, а условие слабой неоднородности означает, что $a \gg \lambda$, где λ - длина волны звука.

Для механической аналогии рассматриваемой задачи обратимся ко второму из уравнений луча (4), которое мы ещё не рассматривали. Полагая в соответствии с (5) $dl = -(n/\varepsilon)dx$, подставим это соотношение во второе из уравнений (4). Находим

$$\frac{\varepsilon^2}{n}\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dn}{dz} .$$

Запишем это уравнение в форме второго закона Ньютона для фиктивной частицы с единичной массой:

$$d^2z/dx^2 = -dU_{eff}(z)/dz . \qquad (10)$$

Здесь определена эффективная потенциальная энергия частицы

$$U_{eff}(z) = -n^2(z)/2\varepsilon^2 = -n_0^2/2\varepsilon^2 + (z/a\varepsilon)^2/2 . \qquad (11)$$

Мы видим, что с математической точки зрения, картина соответствует движению частицы в потенциале гармонического осциллятора. Если записать потенциальную энергию в стандартной форме

$$U_{eff}(z) = U_0 + \Omega^2 z^2/2 , \quad \Omega = 1/a\varepsilon ,$$

то величина Ω представляет собой частоту колебаний частицы, что полностью согласуется с уравнением распространения луча (9).

Отметим, что фазовый портрет этих гармонических колебаний в плоскости $(\dot{z}, z)$ представляет собой эллипс с центром в точке $\dot{z} = z = 0$ ($\dot{z} = dz/dx$).

Теперь обратимся к более реалистическому профилю для показателя преломления, который выходил бы на показатель преломления однородной среды вдали от канала:

$$n^2(z) = 1 + \frac{n_0^2 - 1}{ch^2(z/a)} . \qquad (12)$$

Как и в предыдущем случае, значение n_0 представляет собой максимальное значение показателя преломления, а длина a характеризует вертикальную ширину канала распространения звука. На бесконечности ($z \gg a$) показатель преломления равен единице в соответствии с выбором скорости звука c_0 в однородной среде (см. начало этого раздела). При малых значениях $z \ll a$ из (12) мы снова получаем параболический профиль показателя преломления, исследованный выше.

Подставляя (I2) в (6), получим интеграл

$$x = \pm \int \frac{dz}{\left\{(1/E^2 - 1) + \frac{n_0^2 - 1}{E^2 ch^2(z/a)}\right\}^{1/2}} .$$

Замена переменной интегрирования $t = sh(z/a)$ сводит указанный интеграл к более простому:

$$x = \pm Ea \int \frac{dt}{\left[(n_0^2 - 1) - (E^2 - 1)(1 + t^2)\right]^{1/2}} .$$

Вычисляя его, получим

$$x = \pm \frac{Ea}{(E^2 - 1)^{1/2}} \arcsin\left\{t\left(\frac{E^2 - 1}{n_0^2 - E^2}\right)^{1/2}\right\} .$$

Отсюда находим уравнение траектории геометрического луча, определяющего распространение звуковой волны

$$\pm sh(z/a) = \left(\frac{n_0^2 - E^2}{E^2 - 1}\right)^{1/2} \sin\left[\frac{(E^2 - 1)^{1/2}}{Ea} x\right] . \qquad (I3)$$

Финитное движение соответствует значениям энергии E в интервале $1 < -E < n_0$. Частота волнового движения луча равна

$$\omega_E = \frac{(E^2 - 1)^{1/2}}{Ea} . \qquad (I4)$$

Сначала мы обратимся к пределу малых амплитуд колебательного движения, когда $-E$ близко к n_0, т.е. $n_0^2 - E^2 \ll 1$. Из (I3) получаем:

$$\pm z = a\left(\frac{n_0^2 - E^2}{n_0^2 - 1}\right)^{1/2} \sin\left[\frac{(n_0^2 - 1)^{1/2}}{n_0 a} x\right] . \qquad (I5)$$

Это решение соответствует гармонической зависимости (9), найденной выше для параболического профиля. Частота гармонического движения равна согласно (I4):

$$\Omega = \frac{(n_0^2 - 1)^{1/2}}{n_0 a} . \qquad (I6)$$

Как и выше, фазовый портрет гармонического движения в плоскости $(\dot{z}, z)$ – это эллипсы с центром в точке $\dot{z} = z = 0$.

Теперь рассмотрим другой предельный случай: движения по сепаратрисе, когда $-E = 1$. Из (I3) находим

$$\pm sh(z/a) = (n_0^2 - 1)^{1/2} x/a . \qquad (I7)$$

Частота этого движения равна нулю, а период - бесконечности.

Дифференцируя (I7) по x, находим уравнение сепаратрисы:

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{(n_o^2 - 1)^{1/2}}{ch(z/a)} \quad . \qquad (I8)$$

Фазовый портрет указанного движения, включающий эллиптические траектории и сепаратрису, показан на рис.32.

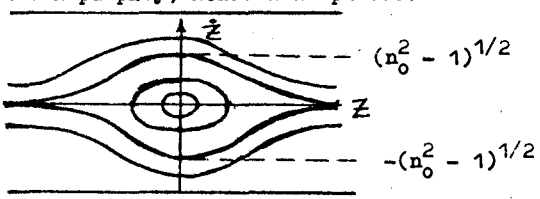


Рис.32. Фазовый портрет траекторий звуковых лучей

На рис.32 показаны также инфинитные траектории, получаемые из (I3), если $E > -1$:

$$\pm\, sh(z/a) = \left(\frac{n_o^2 - E^2}{1 - E^2}\right)^{1/2} sh\left[\frac{(1 - E^2)^{1/2}}{Ea}\, x\right] . \qquad (I9)$$

Они соответствуют уходу геометрического луча из канала. В частности, если $E \to 0$, то согласно (I9) фазовые траектории превращаются в горизонтальные прямые вида $dz/dx = \pm\, 1/E$.

Мы рассмотрели случай, когда показатель преломления зависит только от вертикальной координаты z. Теперь обратимся к ситуации, когда он плавно меняется и вдоль горизонтальной оси x, осциллируя с расстоянием медленно по сравнению с шириной канала:

$$n(z, x) = n(z - z_o \cos(x/x_e)) \quad . \qquad (20)$$

При этом зависимость $n(z)$ определяется, как и выше, соотношением (I2).

Мы предполагаем, что амплитуда осцилляций z_o мала, а именно, $z_o \ll a$. Тогда можно разложить зависимость (20) в ряд Тейлора по степеням z_o и ограничиться линейным членом:

$$n^2(z, x) = n^2(z) - \frac{dn^2}{dz}\, z_o \cos(x/x_e) \quad . \qquad (2I)$$

В соответствии с вышесказанным предполагаем, что выполняется условие $x_e \gg a$ слабой неоднородности вдоль оси x (тем более $x_e \gg \lambda$, где λ - длина волны звука).

Рассмотрим сначала физический смысл "энергии" E. Согласно (13) тангенс угла наклона луча, выходящего из точки $z = 0$, $x = 0$ равен

$$tg\alpha = (dz/dx)_{x=0} = \frac{(n_0^2 - E^2)^{1/2}}{E} \quad . \qquad (22)$$

Таким образом, величина E характеризует этот наклон. Если $-E$ близка к n_0, то наклон мал, если же $-E = 1$, то согласно (18)

$$tg\alpha = (n_0^2 - 1)^{1/2} \quad ,$$

и этот наклон максимален для лучей, отражающихся от стенок канала и распространяющихся в нём. При большем наклоне лучи в соответствии с (19) выходят из канала. При этом $-E < 1$.

Получим теперь для произвольной зависимости $n(z,x)$ уравнения Гамильтона, описывающие движение механической частицы, эквивалентное исследуемому движению луча (выше мы проводили такую аналогию на примере частицы в потенциале гармонического осциллятора). Аналогично уравнению (5) определим функцию Гамильтона соотношением

$$H = -n(dx/dl) \quad . \qquad (23)$$

Координата x играет здесь и далее роль "времени" при одномерном движении механической частицы с координатой z и импульсом p. В отличие от рассмотренного выше случая $n(z)$, когда функция Гамильтона была интегралом движения и равнялась сохраняющейся энергии системы E, теперь, когда $n = n(z,x)$, функция Гамильтона явно зависит от времени, и в общем случае закона сохранения энергии нет.

Определим импульс p с помощью соотношения

$$p = n(dz/dl) \quad . \qquad (24)$$

Так как $dl^2 = dx^2 + dz^2$, то из (23) и (24) находим выражения функции Гамильтона и импульса через скорость $\dot{z} = dz/dx$:

$$H = -n(1 + \dot{z}^2)^{-1/2} \quad , \quad p = n\dot{z}(1 + \dot{z}^2)^{-1/2} \quad . \qquad (25)$$

Исключая из этих двух соотношений скорость $\dot{z}$, находим связь функции Гамильтона H с импульсом p:

$$H = -(n^2(z,x) - p^2)^{1/2} = H(p,z;x) \quad . \qquad (26)$$

Дифференцируя это соотношение по p, получаем первое уравнение Гамильтона, если использовать снова выражения (25):

$$\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{p}{H} = (dz/dl):(dx/dl) = (dz/dx) = \dot{z} \quad . \tag{27}$$

Оно имеет стандартную форму для независимых переменных (p,z).

Чтобы получить второе уравнение Гамильтона, перепишем уравнения луча (4) на основе определений (23) и (24):

$$-dH/dl = \partial n/\partial x \quad , \qquad dp/dl = \partial n/\partial z \quad .$$

Дифференцируя первое из этих соотношений по z, а второе - по x и приравнивая результаты друг другу, находим:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 H}{\partial l \partial z} = \frac{\partial^2 p}{\partial l \partial x} \quad .$$

Интегрируя последнее равенство по dl, находим искомое уравнение Гамильтона (также в стандартной форме):

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{p} \quad . \tag{28}$$

Напомним, что вследствие явной зависимости функции Гамильтона H от "времени" x энергия рассматриваемой системы не сохраняется.

Поскольку нас интересует периодическое движение типа уравнения (I3), то удобно вместо пары переменных (p,z) использовать канонические переменные: действие I и угол φ. Они вводятся следующим образом. Представим функцию Гамильтона (26) в виде:

$$H(p,z,x) = H_0(p,z) + V(p,z,x) \quad , \tag{29}$$

где невозмущённая функция Гамильтона H_0 не зависит от "времени" x и равна энергии E:

$$H_0 = -\left(n^2(z) - p^2 \right)^{1/2} = E \quad , \tag{30}$$

и показатель преломления $n(z)$ определяется выражением (I2). Малое возмущение $V(p,z,x)$ находится из (26) при подстановке в него выражения (2I) для показателя преломления и разложения в ряд Тейлора с учётом только линейного члена по возмущению:

$$V(p,z,x) = -\frac{z_0}{2E} \frac{dn^2(z)}{dz} \cos(x/x_e) \quad . \tag{3I}$$

Переменная действия I определяется как интеграл по замкнутой траектории, взятый при фиксированном значении x:

$$I = (1/2\pi) \oint p(E,z)\, dz \quad . \tag{32}$$

Угловая переменная φ совпадает со своим значением для системы в отсутствие возмущения V (ввиду его малости), т.е.

$$\varphi = (dE/dI)x \quad . \tag{33}$$

В соответствии с (32) энергия невозмущённого движения E зависит только от переменной действия I и не зависит от угла φ.

Что касается переменной действия I, то её изменение со "временем" x определяется уравнением Гамильтона

$$\dot{I} = -\partial H/\partial\varphi = -\partial V/\partial\varphi \, , \tag{34}$$

причём возмущение V находится из выражения (3I). В отличие от (33), здесь мы не можем пренебречь возмущением, так как в его отсутствие действие является интегралом движения.

Если продифференцировать соотношение (32) по энергии E, то используя (27), легко видеть, что $dI/dE = T/2\pi$, где T - период движения. Следовательно, величина

$$\omega(I) = dE/dI \tag{35}$$

представляет собой частоту невозмущённого движения, а согласно (33) имеем

$$\varphi = \omega(I)x \quad . \tag{36}$$

Вследствие малости возмущения V из-за условия $z_0 \ll a$ в выражении (3I) мы можем подставлять для координаты z как функции "времени" x значение из невозмущённого уравнения (I3). Оно соответствует периодической функции z с частотой

$$\omega_E = (E^2 - 1)^{1/2}/Ea \tag{37}$$

(см. (I4)). Если выразить E через переменную действия I, то частота $\omega_E = \omega(I)$, где $\omega(I)$ находится из соотношения (35).

Вследствие периодичности возмущения V по переменной x с частотой (37) можно разложить это возмущение в ряд Фурье:

$$\frac{1}{2E}\cdot\frac{dn^2(z)}{dz} = \sum_m V_m \sin\left[m\omega(I)x\right] \, . \tag{38}$$

Дифференцируя уравнение (30) по z, находим:

$$-\frac{1}{2E}\cdot\frac{dn^2(z)}{dz} = \frac{\partial H_0}{\partial z} = -\dot{p} \quad . \tag{39}$$

При этом мы использовали также уравнение Гамильтона (28) для невозмущённого движения. Из (38) и (39) следует, что компонента Фурье V_m равна (возмущение V - нечётная функция z и x):

$$V_m T/2 = \oint \dot{p} \sin\left[m\omega(I)x\right] dx \quad , \qquad T = 2\pi/\omega(I) \quad . \tag{40}$$

Обратимся к вычислению данной компоненты Фурье. Прежде всего следует вычислить частоту $\omega(I)$ невозмущённого движения как функцию переменной действия I. Приравнивая (35) и (37) друг другу, находим, интегрируя:

$$I = (E^2 - 1)^{1/2}a + \text{const} \quad .$$

Константа интегрирования в этом соотношении определяется из условия, что в состоянии покоя, когда звуковая волна отсутствует, согласно (I5) $-E = n_0$, а согласно (32) $I = 0$. Следовательно,

$$I + I_0 = (E^2 - 1)^{1/2}a \,, \tag{4I}$$

где обозначено

$$I_0 = (n_0^2 - 1)^{1/2}a \,. \tag{42}$$

Из (4I) выразим энергию E через действие I:

$$E^2 = 1 + (I + I_0)^2/a^2 \quad . \tag{43}$$

Подставляя (43) в (37), выражаем частоту $\omega(I)$ через действие I:

$$\omega(I) = \frac{I + I_0}{a\left[(I + I_0)^2 + a^2\right]^{1/2}} \quad . \tag{44}$$

Теперь вычисляем фурье-компоненту V_m в формуле (40). Интегрируя по частям, получим:

$$V_m = (m\omega^2(I)/\pi)\oint p\,\cos\left[m\omega(I)x\right]dx \quad . \tag{45}$$

Наиболее интересная область исследования - это окрестность сепаратрисы. Поэтому мы ограничимся вычислением фурье-компоненты (45) в этой окрестности. Значение p можно подставить при вычислении интеграла в формуле (45) прямо на сепаратрисе. Для частоты $\omega(I)$ этого сделать конечно, нельзя, так как на сепаратрисе $-E = 1$ и согласно (4I) $I = -I_0$, т.е. эта частота равна нулю, как это прямо следует из выражения (44).

Итак, мы можем взять значение импульса p из соотношения (30), положив в нём $-E = 1$:

$$p = \left[n^2(z) - 1\right]^{1/2} = \frac{(n_0^2 - 1)^{1/2}}{\mathrm{ch}(z/a)} = \frac{(n_0^2 - 1)^{1/2}}{\left[1 + (n_0^2-1)(x/a)^2\right]^{1/2}} \,. \tag{46}$$

Здесь мы использовали также уравнение сепаратрисы (I7). Подставляя (46) в (45), приходим к интегралу

$$V_m = \frac{2m(n_0^2 - 1)^{1/2}\omega^2(I)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left[m\,\omega(I)x\right]\,dx}{\left[1 + (n_0^2 - 1)(x/a)^2\right]^{1/2}} \,. \tag{47}$$

Вспомним, что аналогичная процедура, когда значение величин на сепаратрисе было использовано для вычисления изменения энергии системы, применялась выше для маятника Капицы.

Обратимся теперь к расчёту интеграла (47). Хотя его можно вычислить и точно через функцию Макдональда нулевого порядка, здесь это не требуется, так как выполняется условие

$$m\omega(I)a \ll 1 \quad . \tag{48}$$

Оно реализуется за счёт близости траекторий к сепаратрисе, в результате чего частота $\omega(I)$ согласно (44) весьма мала (так как действие I близко к величине $-I_0$). Ниже мы дадим характерную оценку этой частоты и подтвердим выполнение неравенства (48).

Таким образом, область интегрирования, вносящая существенный вклад в компоненту Фурье (47), находится около точки $x = 0$ и в ней значение косинуса можно заменить на единицу. Тогда верхний предел интеграла соответствует аргументу косинуса порядка единицы. При этом $x_{max}=1/m\omega(I)$. В знаменателе подынтегрального выражения (47) можно пренебречь единицей, после чего интегрирование приводит к логарифмической функции x . Нижний предел по x в указанном интеграле определяется из условия, что знаменатель подынтегрального выражения в (47) имеет порядок единицы, т.е. $x_{min}=a(n_o^2-1)^{-1/2}$. Наконец, значение интеграла следует удвоить из-за одинакового вклада положительных и отрицательных значений x . В результате из (47) получаем:

$$V_m = \frac{4ma\omega^2(I)}{\pi} \ln\left[\frac{(n_o^2 - 1)^{1/2}}{m\omega(I)a}\right] \quad . \tag{49}$$

Разумеется, этот результат получен с логарифмической точностью, т.е. множитель перед логарифмом в (49) вычислен точно, а под знаком логарифма может быть ещё число порядка единицы.

Таким образом, из (31) и (38) после подстановки (49) получим для малого возмущения V следующее выражение:

$$V(x,I) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4maz_0\omega^2(I)}{\pi} \ln\left[\frac{(n_o^2 - 1)^{1/2}}{m\omega(I)a}\right] \sin(m\omega x)\cos(x/x_e) \quad . \tag{50}$$

Выделим резонансную часть этого малого возмущения. Она и внесёт основной вклад в изменение невозмущённой траектории луча. Если записать

$$2\sin(m\omega(I)x)\cos(x/x_e) = \sin\left(m\omega(I)x - x/x_e\right) + \sin\left(m\omega(I)x + x/x_e\right),$$

то первое слагаемое этого выражения будет резонансным при условии

$$m\omega(I_m) = 1/x_e \quad . \tag{51}$$

Значение I_m действия в точке m-го резонанса определится при подстановке (44) в (51); при этом ввиду близости траектории к сепаратрисе уравнение (44) может быть упрощено:

$$\omega(I) = (I + I_o)/a^2 \quad . \tag{52}$$

Подставляя (52) в (51), находим

$$I_m = -I_o + a^2/mx_e \quad . \tag{53}$$

Теперь можно проверить выполнение неравенства (48), постулированного выше. Если подставить резонансное значение частоты $\omega(I_m)$ согласно (51) в (48), то это неравенство приобретёт простой вид : $a \ll x_e$. Это означает, что неоднородность среды в горизонтальном направлении (вдоль оси x) должна быть слаба по сравнению с неоднородностью среды вдоль вертикальной оси z . Выше мы уже предполагали, что это условие выполняется, и, таким образом, неравенство (48) является обоснованным.

Сохраняя в сумме гармоник Фурье (50) только одно резонансное слагаемое, запишем его, учитывая (51):

$$V(x,I,\varphi) = -\frac{2az_o}{mx_e^2\pi} \ln\left[\frac{(n_o^2 - 1)^{1/2}x_e}{a}\right] \sin(m\varphi - x/x_e) \, .$$

Следовательно, уравнение Гамильтона (34) с учётом выражения (36) для угловой переменной принимает вид

$$\dot{I} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{2az_o b}{\pi x_e^2} \cos(m\varphi - x/x_e) \ll 1 \, , \tag{54}$$

где

$$b = \ln\left[\frac{(n_o^2 - 1)^{1/2}x_e}{a}\right] \gg 1 \, .$$

Введём новую угловую переменную

$$\psi = m\varphi - x/x_e \quad .$$

Скорость её изменения в окрестности резонанса $I = I_m$ равна

$$\dot{\psi} = m\omega(I) - 1/x_e = m(d\omega/dI)(I - I_m) = m(I - I_m)/a^2 \, .$$

Дифференцируя эту величину ещё раз по "времени" x , с помощью (54) получим замкнутое уравнение для ψ :

$$\ddot{\psi} + \Omega_m^2 \cos\psi = 0. \tag{55}$$

Здесь введена еще одна частота

$$\Omega_m = (2mz_o b/\pi a x_e^2)^{1/2} \quad . \tag{56}$$

Уравнение (55) - это не что иное как уравнение математического маятника, детально исследованного в первом разделе (сдвигом угловой переменной ψ на 90^0 оно приводится к стандартному виду). Следовательно, частота Ω_m - это частота малых колебаний в таком маятнике. Она зависит от номера m, так как соответствует m - му резонансу нелинейной системы с внешним периодическим возмущением.

Для нелинейного маятника частота колебаний изменяется от значения (56), соответствующего малой амплитуде колебаний, до нуля вблизи максимальной амплитуды колебаний. Следовательно, величина (56) представляет собой ширину резонанса по частоте $\dot{\psi}$. В соответствии с определением этой величины ширина резонанса по частоте $\omega(I)$ в m раз меньше, т.е.

$$\Delta\omega = \Omega_m/m \quad . \tag{57}$$

Для того, что можно было говорить об m-м резонансе, очевидно, нужно, чтобы соседние резонансы не перекрывались бы друг с другом. Согласно (51) для частот m-го и $(m+1)$-го резонансов имеем

$$m\omega(I_m) = (m+1)\omega(I_{m+1}) = 1/x_e \quad .$$

Отсюда разность частот соседних резонансов равна:

$$\delta\omega = \omega(I_{m+1}) - \omega(I_m) = \omega(I_m)/m \quad . \tag{58}$$

Таким образом, резонансы не перекрываются при условии $\Delta\omega \ll \delta\omega$. Если же величина

$$K = \left(\frac{\Delta\omega}{\delta\omega}\right)^2 = \left(\frac{\Omega_m}{\omega(I_m)}\right)^2 > 1 \quad , \tag{59}$$

то соседние резонансы перекрываются, и начинается стохастическое блуждание "частицы" по резонансам.

Подставляя в (59) выражения (51) для резонансной частоты $\omega(I_m)$ и (56) для частоты Ω_m, находим условие стохастизации распространения звуковых лучей:

$$(2m^3 z_0 b/a) > 1 \quad . \tag{60}$$

Так как выше мы всюду предполагали, что $z_0 \ll a$, т.е. возмущение является слабым, то условие(60) может быть выполнено за счёт большого номера m резонансной гармоники невозмущённого нелинейного движения. Стохастизации способствует также и большая величина b.

Стохастизация приводит к диффузии звуковых лучей с большими номерами m и уходу их из канала вследствие необратимого изменения действия I, связанного с изменением энергии E, т.е. угла, под которым звуковый луч пересекает ось канала $z = 0$.

Список литературы

I. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Изд. 3-е. М.:Наука, I986.

2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.:Наука, I988.

3. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика /Пер. с англ. М.: Мир, I984.

4. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.:Наука, I99I.

5. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.:Наука, I984.

6. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 9-е. М.:Наука, I987.

7. Крайнов В.П. Качественные методы в физической кинетике и гидрогазодинамике. М.: Высшая школа, I989.

8. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Изд. 5-е. Ч. I и 2. М.:Наука, I99I.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Изд. 4-е. М.:Наука, I988.

I0. Голдстейн Г. Классическая механика /Пер. с англ. Изд.2-е. М.:Наука, I975.

II. Найфэ А. Введение в методы возмущений /Пер. с англ. М.:Мир, I984.

I2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука, I974.

I3. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем /Пер. с англ. М.:Мир, I993.

I4. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение /Пер. с англ. М.:Мир, I988.

I5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.:Наука, I979.

I6. Мун Ф. Хаотические колебания /Пер. с англ. М.:Мир, I990.

I7. Смирнов Б.М. Физика слабоионизованной плазмы. М.:Наука, I988.

I8. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.:Наука,I988.

I9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.:Наука, I987.

20. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.:Наука, I976.