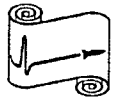
Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, Э. Е. Сон

ГИДРОДИНАМИКА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Периодические структуры

Усиление субгармоник

Инверсный каскад



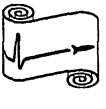
Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, Э. Е. Сон

ГИДРОДИНАМИКА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Периодические структуры

Усиление субгармоник

Инверсный каскад



Москва
Издательство МФТИ
1999

ББК 22.253.3
И 67

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 95-02-07274

И67 ИНОГАМОВ Н. А., ДЕМЬЯНОВ А. Ю., СОН Э. Е. Гидродинамика перемешивания.—М.: Изд-во МФТИ, 1999.—464 с.—ISBN 5-89155-017-2

Рассматривается перемешивание, обусловленное неустойчивостями Рэлея–Тейлора (РТН) и Рихтмайера–Мешкова (НРМ). РТН имеет много общего с тепловой и концентрационной конвекциями. С НРМ связана задача Коши («расползание» начального толчка) с полем исходных скоростей, сосредоточенных возле контактной границы (КГ). В частности, такое поле возникает при пересечении КГ ударной волной. РТН и НРМ имеют обширный круг приложений в инерционном синтезе (разрушение лазерных оболочек, снижение нейтронного выхода) и астрофизике (фрагментация остатков сверхновых, неустойчивости магнитосфер релятивистских звезд). Их теория оказывается математически содержательной. Она тесно связана с теорией гравитационных волн на воде. Книга начинается с доходчивого изложения причин и основных принципов, сразу вводящего читателя в суть дела. Она хорошо иллюстрирована. Описаны интересные геометрические эффекты, возникающие в 3D случае. Широко используются методы вычислительной физики и компьютерных символических преобразований. На основе схемы — периодическая динамика/субгармоническая неустойчивость/инверсный турбулентный каскад — выяснено происхождение крупных структур в слое перемешивания. Вместе со сведениями, собранными из рассеянной литературы, приводится много оригинальных результатов.

Это первая монография по РТН и НРМ. Она рассчитана на аспирантов и студентов-физиков, матфизиков, вычислительных математиков и механиков, занимающихся вопросами нелинейной физики, инерционного синтеза, гидродинамической неустойчивости и турбулентности.

Табл. 8. Ил. 154. Библиогр. 513 назв.

Научное издание

ГИДРОДИНАМИКА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Периодические структуры
Усиление субгармоник
Инверсный каскад

Текст книги дается в авторской редакции

Верстка *А. П. Носова*
Художник *М. В. Ивановский*

ЛР № 064290 от 14.11.95. Подписано в печать 15.09.99. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,0. Уч.-изд. л. 31,0.
Тираж 1000 экз. Заказ 985

Издательство МФТИ. 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел./факс 408-76-81. http:\\www.fizmatlit.ru.

Отпечатано с готовых позитивов в ООО «Политех-4».
129110 Москва, ул. Б. Переяславская, 44.

ISBN 5-89155-017-2

© Коллектив авторов, 1999

Оглавление

Предисловие 5

Список основных сокращений и обозначений 6
§ 1. Введение 7

Глава I. ПРИЧИНЫ И ТИПИЧНЫЕ ДВИЖЕНИЯ 13

§ 2. Об относительно небольшом влиянии сжимаемости на обменные или энтропийно-вихревые движения 13
§ 3. Механические причины рэлей-тейлоровской неустойчивости 15
§ 4. Физика неустойчивости Рихтмайера–Мешкова 18
§ 5. Физические проблемы, связанные с НРМ 26
§ 6. Столкновение потоков и появление эффективной гравитации 32

Глава II. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ 45

§ 7. Физика высоких плотностей энергии 45
§ 8. Астрофизика 65

Глава III. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЧИВОСТИ 75

§ 9. Теплопроводность и абляция вещества 76
§ 10. Поверхностное натяжение 81
§ 11. Магнитное поле и проводимость 83
§ 12. Вязкость в комбинации с поверхностным натяжением 88
§ 13. О жидком металле в электрическом поле 91
§ 14. Стабилизация тепловым потоком 93
§ 15. Несжимаемые стратифицированные среды 96
§ 16. Динамика сжимаемых сред 134

Глава IV. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА 158

§ 17. Численное исследование РТН в сжимаемых средах 158
§ 18. Численное моделирование в несжимаемой жидкости 171

Глава V. ПРИБЛИЖЕНИЕ «МЕЛКОЙ ВОДЫ» 202

§ 19. Метод обобщенных координат 202
§ 20. Основа метода обобщенных координат 206
§ 21. Аналитическое решение задачи неустойчивости ОМВ методом обобщенных координат 209
§ 22. Корректность постановки задачи Коши для абсолютно неустойчивых сред 214

Глава VI. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИЛИ ОДНОМОДОВЫЕ РЕШЕНИЯ 215

§ 23. Классификация нарушений горизонтальной сдвиговой симметрии. Место периодических возмущений в этой классификации 215
§ 24. Спектр фурье-потенциала, ССК и сходимость рядов: предпосылки описания с помощью одной гармоники 218
§ 25. Наиболее существенные моменты процедуры вывода уравнений 221
§ 26. Описание перехода и насыщения в модели с $N=1$ 224
§ 27. О стационарных РТ пузырях 244
§ 28. Самообразование сингулярных пузырей 263
§ 29. Периодические решения при конечном отношении плотностей μ 267
§ 30. Грибовидные образования 282

Глава VII. СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И УСИЛЕНИЕ СУБГАРМОНИК 316

§ 31. Периодичность и симметрия субгармонических возмущений 318
§ 32. Аналитическая теория субгармоник 324
§ 33. Численное моделирование субгармонической неустойчивости 328
§ 34. Зонно-лакунарная структура субгармонического спектра 335
§ 35. Рациональные и иррациональные квазиимпульсы в ячейке Бриллюэна 339

Глава VIII. ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ 351

§ 36. Общий план 352
§ 37. Горизонтальное устройство слоя перемешивания–двухпотоковость и крупные структуры 353
§ 38. Специфика нестационарности при РТ турбулентности: рост масштаба, эстафетность или каскадность этого роста, его иерархичность и автомодельность 365
§ 39. Спонтанная РТТ и ее взаимодействие с длинноволновым течением 372
§ 40. Однородные начальные шумы и стимулированная турбулентность 375
§ 41. Сравнение спонтанной и стимулированной РТТ, порог и предельная чистка 383
§ 42. Разнообразие лакунарных форм 392
§ 43. Численное моделирование РТТ 396
§ 44. Модели укрупнения 413
§ 45. Турбулентное перемешивание при неустойчивости Рихтмайера–Мешкова 432

Список литературы 447

Предисловие

Известно несколько гидродинамических неустойчивостей, возникающих на границах раздела сред. Ими обусловлено развитие фрактальных деформаций границ — процесса, который на турбулентной стадии называется турбулентным перемешиванием. Это классические неустойчивости Рэлея–Тейлора (РТН), Рихтмайера–Мешкова (НРМ), Кельвина–Гельмгольца (НКГ) и Саффмана–Тейлора. РТН — это неустойчивость тяжелого над легким. Она ответственна за распад неустойчивых гидростатических равновесий. Неустойчивость приводится в действие силами плавучести, из-за которых тяжелое тонет в легком. Она имеет много общего с тепловой конвекцией над источником тепла. НРМ является вариантом задачи Коши, в которой при $t = 0$ задаются распределение скорости или завихренности и распределение плотности. НРМ представляет собой простейшую базовую задачу в сложной проблеме о распространении ударных волн через неоднородные среды.

Наибольшее внимание в книге уделяется первым двум неустойчивостям. Рассматриваются теоретические, численные, экспериментальные и прикладные аспекты проблемы перемешивания. Проблема оказывается нетривиальной в математическом отношении и имеющей многочисленные приложения. По ней в литературе накоплен обширный материал. При его структуризации авторы старались руководствоваться принципами физической ясности и целесообразности. Поэтому ядро изложения составляет описание классической ситуации со скачком плотности в несжимаемой жидкости, а уже затем на основе представлений, полученных при решении этой классической задачи, рассматриваются прикладные вопросы.

Книга суммирует результаты многолетних исследований по гидродинамической неустойчивости и турбулентности, проводившихся в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН и Московском физико-техническом институте. Это первая монография, посвященная неустойчивостям Рэлея–Тейлора и Рихтмайера–Мешкова.

Авторы выражают глубокую благодарность С. И. Анисимову за постоянное доброжелательное внимание к данной работе, за помощь на трудных этапах и за многочисленные полезные обсуждения и ценные советы, без которых появление этой книги не было бы возможным. Авторы благодарят О. М. Белоцерковского за поддержку численных исследований, сыгравших важную роль в развитии теории. Особую благодарность они выражают А. В. Чехлову, разработавшему оригинальную модификацию метода искусственной сжимаемости. Посредством этой модификации было численно промоделировано развитие неустойчивости во многих постановках важных для понимания процесса перемешивания. С А. В. Чехловым связан целый ряд совместных работ, в частности, подготовленных в свое время для конференции по турбулентному перемешиванию в Раймонте, Франция (1991).

Список основных сокращений и обозначений

РТ Рэлей–Тейлор

РТН, (НРТ) РТ неустойчивость

РТТ РТ турбулентность

РМ Рихтмайер–Мешков

РМН (НРМ) РМ неустойчивость

РМТ РМ турбулентность

КГ Кельвин–Гельмгольц

КГН (НКГ) КГ неустойчивость или сдвиговая неустойчивость

КГТ КГ турбулентность

$\mathbf{A} = (1 - \mu)/(1 + /mu)$ число Атвуда; $\mu = (1 - \mathbf{A})(1 + \mathbf{A}) = \rho_l/\rho_h$ отношение малой и большой плотностей на КГ

КГ контактная граница или граница раздела Г: линия $y = \eta(x, t)$ или поверхность $z = \eta(x, y, z)$ в 2D и 3D случаях соответственно

КС крупные, крупномасштабные, большие или доминирующие структуры

ЛСК лабораторная система координат

ССК связанная система координат

МОК метод обобщенных координат

ОМВ "опрокинутая" мелкая вода

СП, (СПФ) случайно-периодическая (функция)

УВ ударная волна

ЦВР центрированная волна разрежения

§ 1. Введение

Назначение. Цель книги состоит в описании гидродинамического перемешивания. Рассматривается стратифицированная (слоистая) среда. В отсутствие возмущений она является инвариантной относительно сдвигов по направлениям вдоль слоев. Слоистые распределения равновесны. Зачастую эти равновесия неустойчивы по отношению к неустойчивостям Рэлея–Тейлора (РТН) (Rayleigh, 1883, 1894, 1900; Taylor, 1950) и Рихтмайера–Мешкова (НРМ) (Richtmyer, 1960; Мешков, 1969). Неустойчивость проявляется в том, что нарушения симметрии слоев растут с течением времени. Развитие возмущений ведет к растягиванию и перекручиванию слоев. На поздних стадиях при больших деформациях слоев этот процёсс называется турбулентным перемешиванием. Во многих случаях рассматривается простейшая (базовая или фундаментальная) ситуация с однородными несжимаемыми жидкостями и стратификацией в виде скачка плотности на контактной границе.

Даже в этой базовой ситуации система в динамическом отношении оказывается чрезвычайно сложной. Действительно, очень сложна уже турбулентность в неограниченной однородной несжимаемой жидкости. Между тем, в этом случае имеется только эволюция вихрей, поскольку нет генерации завихренности ω. В изучаемом в книге случае жидкость неоднородна. Поэтому необходимо рассматривать генерацию ω совместно с ее эволюцией.

Наша цель заключается в изложении последовательной теории перемешивания, которая вскрывает смысл динамических явлений. Теория относится прежде всего к базовой или классической ситуации. Она отправляется от периодических решений и их нелинейности и продвигается шаг за шагом в направлении выявления механико-математического содержания турбулентного перемешивания. Представлены также результаты детальных продолжительных исследований динамики осложненных систем, в которых существенно влияние жесткой границы, находящейся близко к контактной границе (опрокинутая мелкая вода), а также динамики тонких пленок, неустойчивости при наличии абляционного уноса вещества и других.

Проблемы и достижения теории. Даже в простейшей постановке со скачком плотности на границе имелась "дыра" в понятийном плане между конечномерными или конечномодовыми подходами, применяемыми обычно для описания пространственно-периодической динамики, и турбулентностью, описываемой в восходящем к Прандтлю и Карману полуфеноменологическом приближении пути перемешивания. Трудности конечномерных подходов были связаны с сильной нелинейностью системы и в случае неустойчивости Рэлея–Тейлора с вопросом об однопараметричности стационарных решений.

Статистическая гидромеханика, основанная на пути перемешивания и диффузионном приближении, относительно проста и эффективна. Она позволяет получить представление о расползании слоя турбулентного

перемешивания. Кстати, ее первые применения к описанию перемешивания связаны с именами Российских ученых. Пионерскую работу в этом направлении выполнили Беленький и Фрадкин еще в 60-е годы. Важные усовершенствования были сделаны в работах Мешкова, Неуважаева, Никифорова, Анучиной, Зайцева, Кучеренко и других.

Некоторым недостатком подхода является то, что диффузионное описание слоя перемешивания оказывается грубым. Оно не дает информации о такой существенной черте слоя перемешивания, как большие или доминирующие структуры. Конечномерная модель описывает эти структуры. Понятийная "дыра" заключается именно в отсутствии этих структур при диффузионном подходе. Важно было "дотянуть" конечномерную модель до турбулентности, чтобы понять механизм появления и поддержания этих структур.

Ранние попытки в этом направлении привели к следующей схеме, относящейся к РТН. Согласно ей (Биркгоф, 1962, п. 4 и п. 18), имеются этапы:

(I) экспоненциальный рост амплитуды, определяемый линейной теорией, пока суммарная амплитуда $a_\Sigma = a_+ + |a_-|$ (a_+ и a_- — амплитуды пузыря и струи) не достигнет значения около $0,4\lambda$;

(II) стадия перехода, в течение которой амплитуда a_Σ возрастает от $0,4\lambda$ до $0,75\lambda$ и возмущение поверхности приобретает форму закругленных столбиков воздуха (пузырей), проникающих в жидкость, которая в свою очередь образует узкие столбы (струи), чередующиеся со столбиками воздуха;

(III) заключительная стадия проникновения пузырей в жидкость с постоянной скоростью;

(IV) нерегулярная стадия перехода, в течение которой первоначально периодически искривленная поверхность раздела становится нерегулярной и размывается (при $\mu \neq 0$, μ — отношение плотностей на скачке) в результате продолжающей развиваться неустойчивости Кельвина–Гельмгольца;

(V) статистическая асимптотическая стадия, в течение которой поверхность раздела предсказуема только статистически.

Прокомментируем эту схему. На ее примере будет яснее видна разница между современными представлениями и схемой (I)–(V). В схеме представлено развитие периодического возмущения во времени. Границы этапов (I)–(III) следуют из работы (Lewis, 1950), развивающей работу (Taylor, 1950). Они получены для случая, когда отношение плотностей мало $\mu \ll 1$. В дальнейшем было осознано, что поскольку при $\mu \ll 1$ струи мало влияют на движение пузырей, то удобнее оперировать с амплитудой (пройденным путем) пузырей a_+, а не полной амплитудой a_Σ. В диффузионном приближении также фигурирует амплитуда a_Σ. В теории пузырьковой оболочки, справедливой при $\mu \ll 1$, вместо a_Σ появляются амплитуда a_+ и средний путь пузырей $H_+ = \langle a_+ \rangle$, более адекватные гидромеханике этой оболочки.

Недостатком схемы (I)–(V) является то, что в ней нет разделения на свободную и стесненную турбулентность. При свободной турбулентности жидкость неограничена в вертикальном и горизонтальном направле-

ниях. При горизонтально стесненной турбулентности имеется горизонтальный масштаб L (диаметр трубы или период), которым лимитировано движение. Схема относится к стесненному случаю.

Принципиальный недостаток схемы состоит в том, что в ней нет субгармонической неустойчивости, а вместе с ней и инверсного каскада. Поэтому "дыра" между периодической и турбулентной динамикой сохраняется. Стесненность же не позволяет развить представления о больших структурах и их характерных горизонтальных масштабах $\langle\lambda\rangle$, поскольку горизонтальный масштаб L уже "навязан" стеснением.

В новом разделении движения на составные элементы стесненная и свободная турбулентности явно сепарированы. Стесненный случай делится на качественно отличные случаи с $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$. При наличии конечного диаметра L турбулентность свободна, пока $\langle\lambda\rangle \ll L$. Возле горловины $\langle\lambda\rangle \sim L$ начинается смена асимптотик. За горловиной турбулентные асимптотики в случаях $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ различны. Если находиться в рамках представлений о свободной турбулентности (т. е. не замечать горловины) и вычислять коэффициент турбулентного перемешивания α_+ по формуле $\alpha_+ = H_+/\mathrm{A}gt^2$, то приближение к "горловине" будет выглядеть как снижение коэффициента α_+ (здесь и далее A — число Атвуда).

В новом подходе учтено взаимодействие мод, которое в случае РТН приводит к усилению субгармоник. Классификация элементов выглядит так:

(I) нелинейные периодические решения, с периодом которых связывается характерный масштаб больших структур $\langle\lambda\rangle$;

(II) субгармоническая неустойчивость, разрушающая текущий масштаб $\langle\lambda\rangle$ и формирующая новый масштаб, который больше исходного;

(III) инверсный турбулентный каскад, этапы или звенья которого образуют промежутки времени, в течение которых разрушается один масштаб и формируется следующий.

В отличие от схемы (I)–(V) классификация (I)–(III) дает не развитие процесса во времени (хотя она и связана с таким развитием), а разделение на составные элементы по смыслу. Важное значение здесь имеют:

(i) модель пузырьковой оболочки;

(ii) переменные H_+ и α_+;

(iii) масштаб $\langle\lambda\rangle$ и его переменность

$$\frac{d\langle\lambda\rangle}{dt}.$$

Важно то, что $d\langle\lambda\rangle/dt \neq 0$ и

$$\frac{d\langle\lambda\rangle}{dt} > 0.$$

Рост $\langle\lambda\rangle$ с t соответствует инверсному каскаду.

На базе этой классификации в настоящее время развиваются пузырьковые и спектральные теории турбулентного перемешивания, отправляющиеся не от вертикальной длины пути турбулентного перемешивания

L_{MLT}, входящей в уравнение диффузионного турбулентного массопереноса, а от горизонтальной длины $\langle\lambda\rangle$ и уравнения

$$\frac{dH_+}{dt} = \beta\sqrt{\mathrm{A}g\langle\lambda\rangle},$$

описывающего расширение вверх в сторону тяжелой жидкости слоя перемешивания, здесь β — безразмерный коэффициент.[1] Они улавливают большие или доминирующие структуры и закрывают упомянутую выше "дыру" и в качественном отношении, и количественно. В частности, они применяются для описания промежуточной стадии эволюции между маломодовыми возмущениями, спектр которых еще редок, и многомодовыми турбулентными возмущениями с густым спектром.

Гидромеханика процесса. *Для понимания механики перемешивающих* неустойчивостей существенны понятия об инерционности, вихрях и бароклинике.

Неустойчивости Рэлея–Тейлора, Рихтмайера–Мешкова и Кельвина–Гельмгольца (НКГ) представляют собой инерционные явления. РТН переходит в НРМ при уменьшении гравитационного ускорения g и увеличении начальных скоростей $v/\sqrt{g/k} \to \infty$. Эти три неустойчивости отличаются распределениями завихренности ω на контактной границе (КГ). При РТН и НРМ распределения ω, если рассмотреть их функциональную зависимость от смещения вдоль КГ, осциллируют около нулевого значения. В случае же НКГ осцилляции происходят около отличного от нуля среднего значения.

По существу, задачи о РТН, НРМ и НКГ — это задачи об эволюции поля завихренности. При этом в случаях РТН и НРМ имеются еще бароклинические источники и стоки завихренности (при НКГ также имеется бароклиника, если $\mu \neq 1$). В случае резкой (по скачку плотности ρ при РТН и НРМ и скачку тангенциальной скорости при НКГ) контактной границы поле ω стягивается на границу, которая становится вихревой поверхностью.

РТН возникает из-за неустойчивости стратификации и силы Архимеда. НРМ представляет собой эволюцию вихревого следа, оставляемого ударной волной на неровной контактной границе. НКГ относится к течениям со сдвигом, в которых непрерывно и/или скачкообразно варьирует тангенциальная скорость.

Другой пример неустойчивости, приводящей к перемешиванию, представляют неустойчивость Саффмана–Тейлора и неустойчивость в ячейке

[1] В принципе информацию о $\langle\lambda\rangle$ можно извлекать и из расчетов перемешивания в диффузионной модели. При турбулентном перемешивании, как в кнудсеновском газе, "диффузия" происходит при сопоставимых длине "свободного пробега" и толщине перемешанного слоя. Следует положить, что масштабы L_{MLT} и $\langle\lambda\rangle$ пропорциональны, и определять $\langle\lambda\rangle$ из формул $H = \alpha_{VH}\langle\lambda\rangle$ или $H_+ = \alpha^+_{VH}\langle\lambda\rangle$. Коэффициенты α_{VH} и α^+_{VH} отыскиваются из натурных или численных экспериментов. При этом необходимо зафиксировать определение $\langle\lambda\rangle$, поскольку имеются разные эквивалентные определения. Например, можно принять, что $\langle\lambda\rangle$ находится по положению максимума фурье-образа вертикальной компоненты скорости, взятой в горизонтальном сечении, совпадающем с начальным положением границы раздела.

Хеле–Шоу. Они приводят к образованию пальцев или плохо прокачиваемых целиков (высоковязких пальцев). Этот процесс обусловлен вариацией вязкого сопротивления в пористой среде (Saffman & Taylor, 1958; Chuoke et al., 1959) или в узком зазоре между стенками (Хеле–Шоу) в смежных средах (жидкостях или газах). Эти среды имеют различную вязкость ν, а следовательно, различные коэффициенты в законе Дарси $\mathbf{v} = -\alpha\nabla p$ ($\alpha \propto 1/\nu$), и находятся в контакте вдоль границы раздела. При этом невозмущенное движение устроено так, что одна среда проталкивает другую через поры или зазор. Неустойчивость возникает в случае, когда менее вязкая среда проталкивает более вязкую.

Интересно, что динамически эти неустойчивости напоминают РТН. В них мал[2] проталкивающий градиент давления в маловязкой среде. Этот градиент определяет скорость движения согласно закону Дарси. Эта малость градиента распространяется на пальцы высоковязкой жидкости в маловязкой. Это и является причиной застревания высоковязких пальцев. Аналогично в РТН движущей силой неустойчивости является снижение градиента давления в пальцах плотной жидкости, погруженных в малоплотную среду. В этих пальцах градиент подстраивается под малый градиент, характерный для малоплотной среды. Таким образом, имеется определенное динамическое сходство между вязким пальцеобразованием и РТН.

Приложения. Неустойчивости РТ и РМ имеют широкий круг практических приложений. Они особенно важны в задачах инерционного синтеза при изучении устойчивости сжатия оболочек. Кроме того, РТН существенна в процессах кипения и кавитации, при взрывах и в установках по генерации сверхсильных магнитных полей. Эта неустойчивость возникает при столкновениях тяжелых ядер, изучаемых в ядерной физике. Она приводит к перемешиванию нуклонного вещества взаимодействующих ядер. Имеется также много астрофизических приложений и приложений из области физики атмосферы и океана. Обсуждению прикладных аспектов посвящена специальная глава.

Трехмерная динамика. Благодаря прогрессу вычислительной техники и вычислительной математики, удалось достичь уровня, позволяющего проводить численные исследования в трехмерной (3D) геометрии (функции зависят от переменных x, y, z, t). Качество 3D численного моделирования непрерывно улучшается.[3] Можно сказать, что здесь происходит вторая революция, если за первую считать переход к двумерным расчетам (функции равны $f(x,y,t)$) в 60–70-е годы от одномерных (функции равны $f(x,t)$). Сказанное свидетельствует об актуальности исследований в этой области. Отметим, что первая работа по численному моде-

[2] В невозмущенном случае по сравнению с градиентом в высоковязкой среде.

[3] Моделирование заключается в прямом численном решении разностными методами полной системы уравнений газовой динамики, часто с "навешенной" на эти уравнения физикой, *которая относится к уравнениям термодинамического состояния вещества* (УРС), транспортным свойствам (проводимость, теплопроводность), радиации (излучательная способность, коэффициенты поглощения) и т. п. Чтобы уточнить популярную терминологию, скажем, что к вычислительной физике относится разработка процедур, позволяющих включить физические процессы в методику разностного интегрирования.

лированию 3D РТН (Давыдов, Пантелеев, 1981) была выполнена в нашей стране методом крупных частиц Белоцерковского и Давыдова (1982). В обзорной части описаны работы по многомерному моделированию.

В то же время 3D аналитическая теория отстает от прямого моделирования. В книге сделана попытка восполнить этот пробел. Построена теория асимптотических состояний, изучены структурные эффекты, относящиеся к топологии пузырей и струй, в случае возмущений в виде трехмерных решеток.

Компьютерная алгебра и вычислительная физика. Представленные в монографии результаты получены на основе методов теоретической и математической физики, вычислительного эксперимента и компьютерных алгебраических вычислений. Одной из первых машин, предназначенных для алгебраических символических преобразований, была машина для инженерных расчетов МИР, разработанная в нашей стране. В настоящее время имеются несколько пакетов программ, выполняющих эти вычисления (Reduce, Mathematica, Maple и др.).

Компьютерная алгебра, коллокации и теория потенциала. Используя производительные компьютеры с большой памятью и многозначную арифметику, можно вычислять галеркинские аппроксимации нелинейных задач при больших значениях порядка N, определяющего число слагаемых в галеркинском ряду (число трункации). Такие расчеты можно проводить как в рамках компьютерной алгебры, так и коллокационными, интегральными или спектральными методами теории потенциала. Это позволяет, в частности, решать вопрос о существовании решений путем проверки разложения на сходимость. Можно также вычислять высокие порядки нелинейности по теории возмущений. Раньше, когда алгебраические вычисления выполнялись вручную, удавалось вычислить только самые нижние порядки. Указанные методы позволяют далеко продвинуться в теории неустойчивости. Соответствующие подходы разрабатывались одним из авторов (И. Н. А.). Они представлены в книге. В результате удается, по существу, аналитически описать сильно нелинейную стадию развития неустойчивости. Это позволяет на новом гораздо более высоком уровне подойти к сопоставлению данных прямого численного моделирования и аналитической теории.

Содержание. В главах I и II рассматриваются причины, приводящие к обменам, и приложения. Глава III посвящена линейной теории, а главы IV и V — численным методам и опрокинутой мелкой воде. В главах VI, VII и VIII представлены описания периодических решений, субгармонической неустойчивости и турбулентности.

Введение, гл. I, II, VI, VII, VIII и §§ 9, 15, 16 в главе III написаны Н. А. Иногамовым, § 17 в главе IV написан А. Ю. Демьяновым, §§ 10–14 в главе III и глава V написаны Э. Е. Соном.

Глава I
ПРИЧИНЫ И ТИПИЧНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим вопросы качественного характера — общие принципы и движущие силы, приводящие к РТН, НРМ и перемешиванию.

§ 2. Об относительно небольшом влиянии сжимаемости на обменные или энтропийно-вихревые движения

Сначала рассмотрим несжимаемый случай. Для того чтобы описать вид типичных движений, этого будет достаточно. Дело в том, что, как известно из анализа малых возмущений уравнений газовой динамики, имеет место расщепление линейных мод на энтропийно-вихревые и акустические. Это указывает на слабое взаимодействие энтропийно-вихревых движений, если они являются медленными по отношению к скорости звука, и звуковых волн. Это позволяет отложить пока осложнения, связанные со сжимаемостью.[1]

Кроме того, как было сказано выше, нас не будет интересовать турбулентность в толще однородной жидкости. Поэтому $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ везде вне скачков плотности (считается, что вне скачков плотность однородна). Тогда вне скачков движение потенциально ($v = \nabla\varphi$ и $\Delta\varphi = 0$). Из-за эллиптичности уравнения на φ потенциал возмущения (при условии удаленности других границ) экспоненциально убывает при удалении от поверхности скачка плотности. Интересующее нас в связи с неустойчивостью РМ решение имеет разрыв тангенциальной компоненты скорости

[1] При неустойчивости РМ ударная волна пересекает поверхность раздела веществ. После пересечения вещества движутся со скоростями порядка скорости звука. Из-за неровностей поверхности раздела возникают отклонения от невозмущенного движения (возмущения). Если амплитуды a неровностей малы ($ka(k) \ll 1$), то мала амплитуда v поля скоростей отклонений. При этом $v \ll c$ и влияние сжимаемости мало. Вопрос об ударной волне и расчете поля возмущений скорости по форме неровностей рассматривается ниже в отдельном разделе (в этом вопросе, разумеется, сжимаемость играет ключевую роль). Здесь же сосредоточимся на скоростях возмущений, связанных с вихрями, и вызываемых ими смещениях поверхности раздела при неустойчивости РМ. Будет видно, что скорости и смещения имеют вид встречных струй и обменных движений. Подчеркнем, что именно такой вид движений является единственно возможным при этой неустойчивости. Отметим, что для принципиального вывода о том, что движение имеет обменный характер, отношение плотностей оказывается несущественным. Указанное отношение важно, во-первых, при вычислении амплитуды возмущений скорости после прохождения ударной волны. Это связано с тем, что именно из-за изменения плотности на границе и возникают возмущения скорости. И, во-вторых, оно существенно на дальних стадиях развития возмущений, когда начинает формироваться грибовидное образование.

на этой поверхности. Обычно о таких разрывах говорят в связи с неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. Вид такого разрыва или скачка

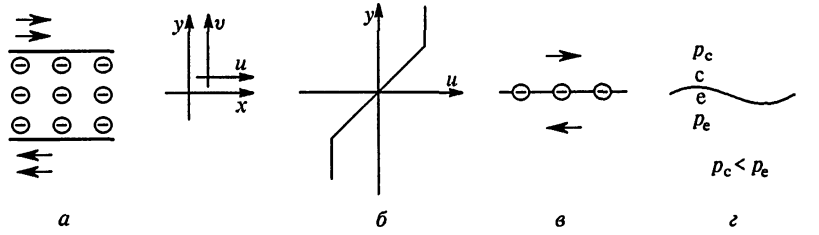


Рис. 2.1. Устройство тангенциального разрыва скорости в случае НКГ. *а*) Слой толщины δ, в котором скорость u меняет знак. Направления скоростей вне слоя показаны стрелками. Знак минус в кружке относится к $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$. *б*) Зависимость $u(y)$. Вертикальная компонента $v \equiv 0$. В слое δ происходит постепенное изменение u. *в*) К тангенциальному разрыву приходим в пределе $\delta \to 0$. *г*) Развитие НКГ вызывается тем, что на искривленной границе скорость уменьшается, а давление p_e возрастает в области расширения потока e из-за эффекта Бернулли, в то время как противодействующее давление p_c наоборот уменьшается из-за увеличения скорости в области c, в которой происходит сжатие потока.

при этой неустойчивости показан на рис. 2.1. Тангенциальный разрыв в случае неустойчивости Рихтмайера–Мешкова показан на рис. 2.2.

Форма возмущенной границы (см. рис. 2.2*г*) очевидна из поля скоростей, показанного на рис. 2.2*в*. С течением времени начальный запас

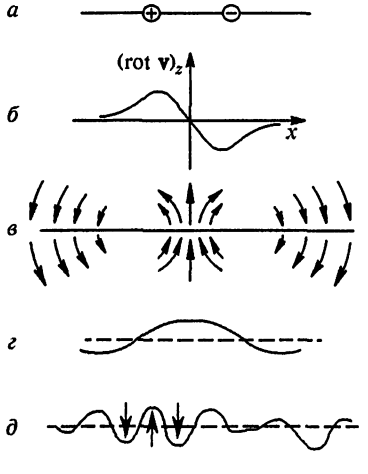


Рис. 2.2. Неустойчивость Рихтмайера–Мешкова. Уединенное возмущение *а*)–*г*).
а), *б*) Распределение завихренности.
в) Поле скоростей.
г) Форма первоначально плоской границы (она показана штриховой прямой) через некоторое время после начала движения.
д) Встречный характер движения жидкостей, разделенных контактной границей. Случай возмущения, состоящего из нескольких струй.

кинетической энергии распределяется среди растущей массы жидкости. Поэтому даже в отсутствии диссипации движение затухает.

Характер единственно возможного типа движений ясен из сказанного. Действительно, вращение в толще жидкости в разбираемом случае отсутствует, поскольку в однородных областях нет завихренности. Проворачивание же частей граничной поверхности приводит к обмену жидкостей, разделенных этой границей, см. рис. 2.2*г*, *д*. Это обусловлено

тем, что $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ (несжимаемость), и естественными условиями на бесконечности. Вследствие этого перемещенный объем компенсируется $\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,t)\,dx = 0$.

В случае уединенного возмущения, показанного на рис. 2.2*а–г*, центральная струя нижней жидкости вызывает периферийное возвратное движение верхней жидкости. Существенно отметить, что эта центральная струя поднимает давление в верхней (на этом рисунке) жидкости. Именно этот подъем давления вызывает возвратное движение. В периодическом случае участки с положительной и отрицательной завихренностью чередуются. Простейшей моделью этого распределения является следующее: $\varphi = -(v_0/k)\cos kx \exp(-k|y|)$, $v = v_0 \cos kx \exp(-k|y|)$, где v — нормальная к границе компонента скорости, см. рис. 2.1*а*. В результате такого распределения скорости v возникает череда струй, пересекающих линию начального положения границы в противоположных направлениях. Следовательно, при рассматриваемой неустойчивости имеет место обмен или перестановка контактирующих веществ.

Обычно об обменных движениях говорят в связи с неустойчивостью Рэлея–Тейлора, см. ниже. На самом деле обмен происходит при всех трех инерционных перемешивающих неустойчивостях Кельвина–Гельмгольца, РМ и РТ (а также и при неустойчивости Саффмана–Тейлора). Вид движений, посредством которых происходит обмен, принципиально отличается в случае неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (граница закручивается в спирали, образуются "кошачьи глаза", см., например, (Саффман, 1992)). В случае же последних двух неустойчивостей вид движений оказывается схожим. Различие между ними заключается в том, как протекает эволюция во времени. При НРМ обмен затухает во времени.[2] А при РТН с постоянным гравитационным ускорением обмен наоборот интенсифицируется с течением временем.

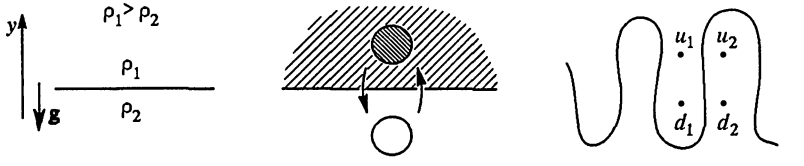
§ 3. Механические причины рэлей–тейлоровской неустойчивости

Как и в случае неустойчивости РМ, при неустойчивости РТ сжимаемость представляет собой один из осложняющих факторов. Поэтому разбор принципиальных особенностей движения целесообразно начать с несжимаемого случая.

О стратификации, плавучести и критерии устойчивости. При неустойчивости РМ, рассматривавшейся в § 2, нет гравитации. Соответственно ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ равно нулю. Поэтому направления вверх и вниз условны. В рассматриваемом в этом разделе случае $\mathbf{g} \neq 0$. Вектор $\mathbf{g}$ определяет направления вверх и вниз. Неустойчивость появляется, если, во-первых, имеется гидростатическое равновесие и, во-вторых, если распределение плотности по высоте таково, что это равновесие неустойчиво. Простейший пример такого распределения по-

[2] Здесь считаем, что спектр по k начальных возмущений ограничен снизу некоторым значением. Отметим, что поведение этого спектра в области малых k определяет индекс степенной асимптотики роста толщины слоя перемешивания во времени.

казан на рис. 3.1*а*. Здесь сверху находится более тяжелая жидкость, чем снизу. Критерий неустойчивости принимает вид $d\rho/dy > 0$ (Рэлей,



а *б* *в*

Рис. 3.1. Рэлей–тейлоровская неустойчивость. *а*) Простейший пример неустойчивого равновесия в поле тяжести. *б*) Перестановка элементов жидкости приводит к понижению центра тяжести и выигрышу потенциальной энергии. Переставляемые элементы охвачены кружками. *в*) Выравнивание давлений по наиболее подвижной компоненте, см. текст.

1883). В случае газа аналогичный критерий гласит $ds/dy > 0$, где s — энтропия газа (Шварцшильд, 1905; Ландау и Лифшиц, 1986).

Свойство плавучести и неустойчивость стратификации, когда легкое вещество подстилает тяжелое, лежат в основе этой неустойчивости. В этом смысле имеется много общего между тепловой или концентрационной конвекциями и рассматриваемой неустойчивостью. Плавучесть предполагает нагруженность или сдавленность силой веса и "противоборство" удельных весов соседних элементов жидкости. Силовое взаимодействие или силовая передача этой нагруженности осуществляется через поле давлений. Отсюда видно, что для движений такого вида требуется наличие окологидростатического состояния, предполагающего существование веса и градиентов давления, противодействующих ему. Отсюда же следует дозвуковой характер соответствующих движений.

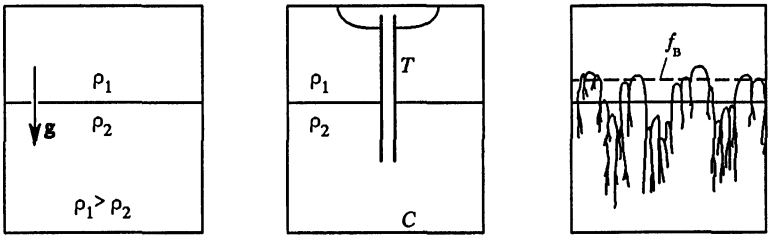
Появление плавучести обусловлено гравитационным полем. Поэтому задачи о конвекции или о неустойчивости РТ так же, как задача о гравитационных волнах на водной поверхности, являются задачами о динамике жидкости или газа в поле тяжести или задачами о динамике тяжелых жидкостей и газов.

Энергетика и обмен. Поддерживающий градиент давления. Хорошо известно, что причиной неустойчивости является то, что обмен или перестановка элементов жидкости приводит к уменьшению гравитационной энергии системы.[3] Этот обмен показан на рис. 3.1*б*. При другом полезном качественном объяснении механизма неустойчивости изображают соседствующие колонки легкой и тяжелой жидкостей, см. рис. 3.1*в*. Предполагается ясным, что эти вещества в некотором смысле "кинематически" сцеплены. Мы хотим сказать, что жидкость неразрывна и в процессе движения в ней не должно возникать пустот. Отсюда следует, что ∇p в легком веществе не может быть так велик, как гидростатический

[3] В связи с этим эту неустойчивость называют также обменной или перестановочной неустойчивостью. Иногда ее называют также гравитационной или по виду возникающих мод — желобковой (или гофрировочной), сосисочной (или перетяжечной), баллонной и т. п. неустойчивостью. Отметим также, что в магнитных приложениях неустойчивость РТ называют иногда неустойчивостью Крускала–Шварцшильда.

градиент давления в тяжелом веществе. В противном случае это легкое вещество выбрасывалось бы вверх с ускорением в $1/\mu$ раз большим ускорения свободного падения, здесь и далее $\mu = \rho_2/\rho_1$ — отношение плотности легкой жидкости к тяжелой. Для убедительности при этом рассматривают случай с $\mu \ll 1$. Говорят, что давление выравнивается по легкому веществу.[4]

Последнее означает, что разность давлений между точками u_2 и d_2, см. рис. 3.1*в*, порядка $(\nabla p)_2 H_{ud}$, где $(\nabla p)_2$ — гидростатический градиент давления в легкой жидкости, а H_{ud} — расстояние по вертикали между точками u_2 и d_2. Выравнивание давлений означает, что разность давлений между точками u_1 и d_1 в тяжелой жидкости примерно такая же, как в легкой жидкости. Ясно, что этого градиента недостаточно для



а *б* *в*

Рис. 3.2. *а*) Случай РТН. Верхний слой поддерживается давлением нижней жидкости. *б*) В этом случае РТН нет, поскольку из-за вентиляции через трубочку Т нет поддерживающей верхний слой разницы давлений. На всех трех рисунках обе жидкости помещены в сосуд С, показанный на рисунках прямоугольником С. При $\mu = \rho_2/\rho_1 \ll 1$ жидкость с плотностью ρ_1 находится в состоянии свободного падения. Область L соответствует легкой жидкости, перетекшей к данному моменту времени по трубочке вверх. *в*) Перемешивание жидкости с "вакуумом" ($\mu = 0$). Штриховой прямой показано мгновенное положение фронта перемешивания. Струи жидкости ветвятся на последовательно уменьшающиеся мелкие струйки. Разветвление струй происходит на мелких пузырьках, отставших на ранних стадиях

поддержания тяжелой жидкости в поле тяжести. Поэтому колонка последней двигается вниз, выдавливая вверх легкую жидкость.

Наконец, чтобы подчеркнуть значение поддерживающего давления легкой жидкости для динамики и кинематики процесса, приводят объяснение, для иллюстрации которого приведен рис. 3.2*а*, *б*. Ясно, что в

[4] В теории фильтрации известна неустойчивость Саффмана–Тейлора (Saffman & Taylor, 1958; Chuoke et al., 1959). Она возникает на границе между разновязкими средами в случае, когда менее вязкое вещество проталкивает более вязкое. Причиной неустойчивости является выравнивание давления по маловязкому веществу. Из-за этого более вязкое вещество застревает среди прорывающихся языков менее вязкого вещества (Paterson, 1981; Spanos, 1981; Chikhliwala et al., 1988; Meiburg & Homsy, 1988; Thome et al., 1989; Chvistie, 1989; Schwartz, 1989). В этом смысле имеется определенная динамическая аналогия с рассматриваемым в тексте случаем РТН, см. § 1 в котором происходит выравнивание давления по легкой жидкости. Аналогия с РТН отмечалась уже в первой работе (Saffman & Taylo, 1958). В результате неустойчивости образуются как пальцы, так и дендриты (ветвящиеся структуры) (Chuoke et al., 1959). Образование пальцев происходит и при движении вязкой жидкости по наклонной плоскости в поле тяжести (Schwartz, 1989a).

случае *а* будет неустойчивость РТ, а в случае *б*, когда в тяжелую жидкость вставлена пронизывающая трубочка, при $\mu \ll 1$ движение тяжелой жидкости будет близко к свободному падению.

Свободное падение и "падение" через обмены. Чтобы подчеркнуть весьма существенную разницу между РТН и свободным падением, рассмотрим развитие процесса перемешивания при $\mu \ll 1$. Оно показано на рис. 3.2*в*. Здесь f_b — это верхний фронт перемешивания (фронт пузырей или пузырьковая оболочка). В задаче нет других размерных параметров кроме g. Поэтому из размерных соображений следует, что этот фронт должен двигаться вверх с ускорением пропорциональным g. Поскольку в задаче нет малых параметров, то коэффициент пропорциональности $2\alpha_b$ должен быть числом порядка единицы. Существенная разница между неустойчивостью и свободным падением заключается в том, что коэффициент α_b оказывается в $10 \div 25$ раз меньшим 1. По-видимому, это обусловлено существованием геометрических "препятствий" и узких мест, сильно замедляющих темп обмена легкой и тяжелой жидкостей. Мы хотим сказать, что при наличии трубочки T, см. рис. 3.2*б*, $\mu \ll 1$, основная масса тяжелой жидкости окажется на дне сосуда C намного раньше, чем в случае неустойчивости, показанном на рис. 3.2*в*.

В среднем этот обмен происходит по вертикальным направлениям вдоль направления силы тяжести. Он имеет вид обмена встречными колонками,[5] при котором тяжелое вещество тонет в легком, а легкое всплывает в тяжелом. Отметим еще полезную аналогию неустойчивости РТ с неустойчивостью перевернутого маятника, а стоячих гравитационных волн с колебаниями обычного устойчивого маятника.

§ 4. Физика неустойчивости Рихтмайера–Мешкова

4.1. Одномерная ситуация

В связи с неустойчивостью Рихтмайера–Мешкова (Рихтмайер, 1960; Мешков, 1969) рассматривается взаимодействие ударной волны (УВ) с контактной границей (КГ) между веществами. В одномерной (1D) ситуации симметрии УВ и границы одинаковы, и они параллельны. В плоской геометрии параллельны плоскости УВ и границы. Задача о взаимодействии является частным случаем задачи о распаде произвольного разрыва, в которой при $t = 0$ в контакте находятся два однородных полупространства с разными значениями параметров. Эта задача является одной из важнейших в газовой динамике, и ее описанию посвящено много работ (см., например, Зельдович и Райзер, 1966). Возможны два случая. В первом из них при $t > 0$ имеются две УВ: прошедшая и отраженная (УВ *2* $\rightarrow$ УВ *3* + УВ *4*), см. рис. 4.1*а–в*. Считаем, что в момент $t = 0$ падающая УВ прибывает на контактную границу.

[5] Эти колонки называют еще пальцами (например, соляные пальцы при опускании более соленой и, следовательно, более тяжелой воды в глубь пресной), языками, выбросами, джетами, даже хоботами, а также термиками (в атмосферных и морских приложениях, где происходит выпадание холодных и всплывание теплых колонок). Здесь будем называть пузырями колонки легкого вещества и струями — колонки тяжелого.

Во втором — после распада появляются волна разряжения и УВ (УВ *2* → УВ *3* + слой *1а–4* + ЦВР *4–5*), см. рис. 4.1*г–е*. Волна разряжения здесь является центрированной (центрированная волна разряжения — ЦВР). Задача о распаде не имеет масштабов и является автомо-

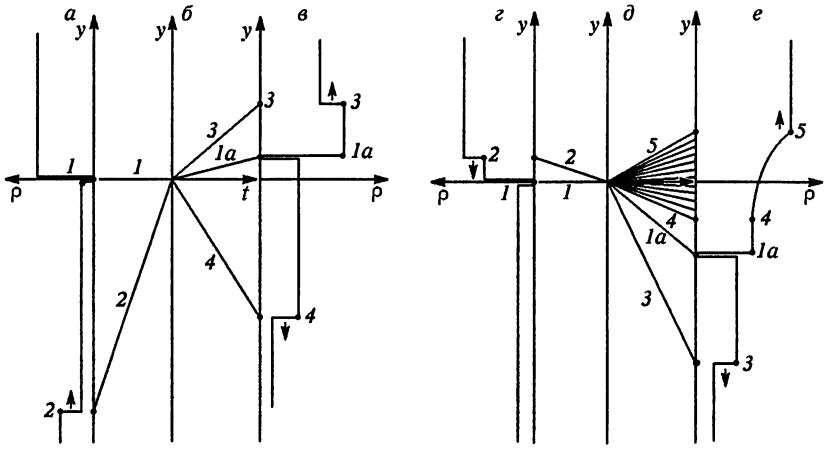


Рис. 4.1. Взаимодействие УВ с границей. В первом случае УВ 2 идет из легкого газа в тяжелый (*а*, *б*, *в*). Она проходит в тяжелый газ в виде УВ 3 и отражается в легкий газ тоже в виде УВ 4. Во втором случае УВ 2 идет из тяжелого газа в легкий *(г, д, е)*. Она проходит в легкий газ в виде УВ 3. Отраженная структура находится в тяжелом газе и устроена более сложно. Она состоит из однородного слоя *1 а–4*, прилегающего к КГ, масса которого линейно растет со временем, и ЦВР 4–5. Распределения ρ до (*а*, *г*) и после (*в*, *е*) взаимодействия и y, t диаграммы (*б*, *д*).

дельной. Автомодельная переменная равна y/t. Разбегание волн после распада происходит со скоростями порядка скорости звука. Известно, что первый случай с двумя УВ проще для анализа.

Контактная граница при $t = 0$ скачком ускоряется от скорости $v_{\text{СВ}}(-0) = 0$ до конечной скорости $|v_{\text{СВ}}(+0)| > 0$. В первом случае область, "знающая" о том, что взаимодействие произошло, находится между двумя УВ *3* и *4*, а во втором между УВ *3* и звуковой волной *5*, за которой следует структура *1а–4–5*. Ее размер растет $\propto t$.

И в том, и в другом случае к КГ с обеих сторон прилегают однородные подобласти. ЦВР, появляющаяся во втором случае, состоит из веера прямолинейных на плоскости y, t характеристик *4–5*. Он показан на y, t диаграмме, см. рис. 4.1*д*. Крайняя характеристика не может быть контактной границей (КГ) (за исключением случая контакта с вакуумом), поэтому необходима переходная прослойка *1а–4*. С течением времени ЦВР растягивается, и градиенты ($\nabla p, \nabla \rho, \ldots$) в ней стремятся к нулю.

Если отношение плотностей $\mu \to 1$ и газы отличаются мало (считаем, что газы идеальные и имеют одинаковые показатели адиабаты), то область, занятая ЦВР, стягивается в нуль, а слой *1а–4* превращается в область между первой характеристикой *5* и лагранжевой поверхностью

1a. Если $\mu \to 0$ и давление в легком газе мало $p_l \to 0$, то слой *1a–4*, во-первых, становится тонким и, во-вторых, смещается к вакуумному краю ЦВР. Напомним, что ЦВР с полным веером характеристик возникает при истечении первоначально однородного газа в вакуум. Веер ЦВР *4–5* при $\mu \neq 0$ представляет собой часть полного веера характеристик.

Важное значение имеет давление p_l в легком газе. Если $p_l \equiv 0$, то имеется только второй случай. После распада возникает полная ЦВР. В этом случае НРМ отсутствует. Если $p_l \neq 0$, то и при $\mu \to 0$ возможны оба случая. Физически это означает, что легкий газ является очень горячим по сравнению с тяжелым газом, поскольку $T \propto p_l/\mu$. Первый из этих случаев соответствует внезапному повышению давления p_l (по тяжелому газу начинает распространяться УВ). Во втором случае (он соответствует внезапному уменьшению давления p_l) в тяжелом газе опять возникает структура из слоя *1a–4* и ЦВР *4–5*, показанная на рис. 4.1*д, е*. В этих двух последних случаях имеется НРМ и при этом $\mu \ll 1$.

Подхват ударной волной и бароклиника. Исследования НРМ образуют определенную базу для анализа сложных явлений, происходящих при и после прохождения УВ через гетерогенные среды. Движение "после" обусловлено полями завихренности. Она генерируется бароклиническим образом на неоднородностях при пересечении их ударной волной. Строгие расчеты генерации требуют учета сжимаемости. Хотя полезные оценки могут быть получены и в приближении несжимаемой жидкости в импульсной модели. В ней рассматривается короткий импульс давления $\propto \delta(t)$, а коэффициент при дельта-функции подбирается таким, чтобы обеспечить необходимую величину скачка скорости. В движении с уже созданной завихренностью влияние сжимаемости (после ухода УВ) невелико.

Механизм генерации связан с разностью давлений перед и за фронтом УВ (бароклиникой). В простейшем случае жесткой границы, окружающей неоднородность, эта разность приводит к метанию твердых тел ударной волной. УВ увлекает также и "мягкие" тела. Взаимодействие УВ с газовыми цилиндром и сферой изучалось экспериментально в работах (Рудигер и Соммерс, 1960), а также (Ас и Стюртевант, 1987); численно в связи с астрофизическими приложениями (например, прохождение УВ через газовые облака) Винклером и др. (1987) и Клейном и др. (1994); в связи гидродинамическими неустойчивостями Самтаней и Забуски (1993). Сильно искривленные УВ приводят к генерации завихренности не только на КГ со скачком ρ и также в областях с непрерывно меняющейся до прохода УВ плотностью или энтропией, но и на тангенциальных разрывах, остающихся за фронтом УВ (в частности, за маховским диском), бегущей по однородному газу, и в виде дисперсной завихренности, непрерывно распределенной в объеме.

Волновые процессы в неоднородных средах. Сложные динамические процессы происходят в пузырьковых и запыленных средах (Нигматулин, 1987),[6] а также при проходе УВ через зоны РМ или РТ турбулент-

[6]Интерес к взаимодействию УВ и пузырьков в жидкости особенно возрос в связи с изучением нелинейных осцилляций за фронтом волны (Нигматулин, 1987) и в связи с

ного перемешивания, например, при повторном проходе УВ, отраженной от торца ударной трубы (Зайцев и др., 1985; Алешин и др., 1995; Ас и др., 1995).

Бароклиника, завихренность и НРМ. Выше была представлена 1D картина газодинамического взаимодействия. При НРМ рассматривается неодномерное взаимодействие с возмущенной границей. До прихода УВ $\nabla p \equiv 0$, и оба газа в приграничной области покоятся, а завихренность отсутствует. Стационарная УВ сообщает плоской границе постоянную во времени скорость движения $v_{\text{СВ}}(t) \equiv v_{\text{СВ}}(+0)$. Она исключается преобразованием Галилея и не существенна при анализе неустойчивости. После взаимодействия в случае возмущенной КГ в системе координат, связанной с ней, появляется неодномерное поле скоростей, локализованное в приконтактном слое.

Это обусловлено бароклиническим механизмом. Он работает здесь вследствие того, что из-за возмущения границы УВ пересекает КГ под углом (Самтаней и Забуски, 1992). В этом случае появляется сдвиговое движение вдоль КГ за УВ. Кроме того, завихренность на КГ продолжает изменяться и за УВ в зависимости от знака $\nabla p \times \nabla s$, поскольку распределение давления неоднородно и КГ не является изобарой.

Если возмущение мало, то завихренность сосредоточена на КГ. Малость возмущения означает малость тангенциального угла α между невозмущенной и возмущенной границами. В случае немалых возмущений завихренность за УВ, вообще говоря, может образовываться не только на поверхности КГ, но и в объеме.

В случае одномодового или периодического возмущения малой амплитуды рассматривают гармоническую гофрировку $\propto \cos x$, поскольку произвольное трехмерное возмущение раскладывается по плоским волнам. Взаимодействие с УВ оставляет вихревой "след" в виде периодиче-

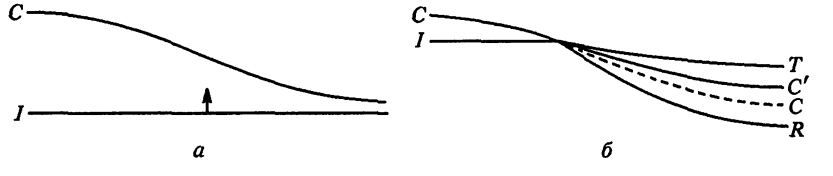


Рис. 4.2. Пересечение ударной волной контактной границы. КГ возмущена по косинусу. Показана половина периода. (*а*) Исходная УВ (I) подходит к невозмущенной покоящейся КГ (C). (*б*) Процесс пересечения границы. Область влияния находится между прошедшей и отраженной волнами. Положение КГ до воздействия УВ показано точками, R — отраженная волна, в зависимости от конфигурации это либо УВ, либо волна разрежения, углы наклона малы, поэтому отражение УВ регулярное, T — прошедшая УВ, C′ — новое положение КГ, она имеет излом в точке пересечения

ски модулированной завихренности и связанных с ней приконтактных скоростей. Процесс пересечения границы показан на рис. 4.2. Если по-

интереснейшей проблемой сонолюминесценции, при которой довольно слабые акустические волны приводят к высокотемпературной кавитации микропузырьков, сопровождающейся световыми вспышками и химическими преобразованиями при их коллапсе (Нигматулин и др., 1995; Крум, 1994; Динг и Грасевский, 1995).

сле отхода ударных и звуковых волн на большие по сравнению с $1/k$ расстояния амплитуда возмущений поверхности еще мала $ka \ll 1$, то поле скоростей, обусловленное данной периодической гофрировкой, состоит из одной гармоники. При удалении волн на такие расстояния можно пренебречь сжимаемостью. Дальнейшее движение происходит по инерции.

Вихри связаны с КГ, поэтому движение в объеме в случае несжимаемой жидкости является потенциальным. В линейном приближении потенциал одной гармоники в плоском случае равен

$$\varphi_+ = -(\delta v)\cos xe^{-y}, \quad y > \eta, \qquad \varphi_- = (\delta v)\cos xe^{y}, \quad y < \eta. \tag{4.1}$$

Модуль скорости $f(y) = |(\delta v)|\exp(-|y|)$ имеет максимум на границе и экспоненциально затухает при удалении от нее. Анализу развития возмущения на нелинейной стадии посвящен п. 26.2. Из (4.1) следует, что нормальная компонента скорости $(\varphi_\pm)_y$ непрерывна на КГ, а тангенциальные $(\varphi_+)_x$ и $(\varphi_-)_x$ испытывают скачок, обусловленный завихренностью.

4.2. Формула Рихтмайера

Амплитуда скорости в линейном случае вычисляется по формуле

$$(\delta v) = \alpha \mathrm{A} a k\,[v_{\mathrm{CB}}(+0) - v_{\mathrm{CB}}(-0)], \tag{4.2}$$

где k — волновое число, а выражение в квадратных скобках равно увеличению скорости КГ под действием УВ в отсутствии возмущений. Эти две величины имеют ясный смысл и фиксированы. Что касается числа Атвуда A и амплитуды возмущений поверхности $a = \delta\eta$, то они меняются в процессе пересечения УВ возмущенной КГ. Поэтому не очевидно, какие значения тут следует брать.

Часто используется приближение Рихтмайера (Рихтмайер, 1960), согласно которому коэффициент $\alpha = 1$, а в качестве параметров A и a в формулу (4.2) подставляются те значения, которые они принимают после прохождения УВ. В случае с ЦВР, когда УВ приходит со стороны тяжелого газа, см. рис. 4.1*г–е*, используют также среднее значение между амплитудами до и после прохождения УВ (Мейер и Блевет, 1972). Для уточнения этих приближений следует ввести поправочный коэффициент α, зависящий от остальных параметров задачи (в случае идеальных газов от показателей адиабаты и числа Маха исходной УВ).

Для отыскания этого коэффициента при разных значениях параметров (общей формулы построить не удается) требуется решение задачи о косых звуковых волнах, распространяющихся в заштрихованных областях между УВ *3* и *4* на рис. 4.1*в* или между волнами *3* и *5* на рис. 4.1*е* с учетом соответствующих граничных условий на границах областей и на КГ. Этим вычислениям посвящено довольно много работ (Nikolaev, 1965; Fraley, 1986; Yang et al., 1994; Holmes et al., 1995; Velikovich, 1996; Wouchuk & Nishihara, 1996).

Теоретические, численные и экспериментальные исследования по НРМ и другим связанным вопросам проводились во многих работах. Первые эксперименты были выполнены в работе Мешкова (1969). Серия интересных экспериментов на ударной трубе с разделением газов с помощью тонких мембран и при диффузионном контакте газов описана в работах (Зайцев и др., 1985; Алешин и др., 1995; Haas et al., 1995). В экспериментах (Benjamin, 1992; Benjamin et al., 1993) изучалась НРМ в случае пар газов воздух–SF_6 и воздух–гелий. Современное состояние ударно-волновых исследований перемешивания с описанием соответствующих экспериментальных методик представлено в работе (Haas et al., 1995). Мощная лазерная система NOVA использовалась для генерации радиационных ударных волн в экспериментах, представленных в работе (Dimonte et al., 1996). Численному моделированию посвящены работы (Алешин и др., 1992; Cloutman & Wehner, 1992; Demchenko, 1993; Pham & Meiron, 1993; Белоцерковского и др., 1994; Youngs, 1994; Holmes et al., 1995). Обзору результатов по НРМ посвящена работа (Rupert, 1992). Аналитическим и численным исследованиям посвящены работы (Mikaelian, 1993, 1994; Fraley, 1986; Sturtevant, 1987). Интересные аналитические результаты, относящиеся к линейной стадии НРМ, были получены в недавних работах (Yang et al., 1994; Velikovich, 1996; Wouchuk & Nishihara, 1996). С этими работами перекликается и работа (Holmes et al., 1995), в которой проводится сравнение линейной теории и нелинейных решений полной газодинамической системы уравнений, полученных путем численного моделирования.

4.3. Эволюция в несжимаемой жидкости

Отдельный большой важный раздел образуют работы по описанию НРМ в приближении несжимаемой жидкости (Kull, 1986; Неуважаев, Паршуков, 1993; Иногамов, 1994, 1995, 1995а; Hecht et al., 1994; Alon et al., 1995; Zhang & Sohn, 1996, 1997; Velikovich & Dimonte, 1996; Jacobs & Sheeley, 1996). В работах Иногамова (1994, 1995, 1995а) развит последовательный подход, основанный на нелинейных разложениях высоких порядков и изучении их сходимости. В работе (Иногамов, 1994) выведены уравнения и проведен их анализ. Обнаружено, что в старших порядках $N > 1$ они описывают эволюцию системы на конечном отрезке времени от начальной линейной и вплоть до почти асимптотической стадии, характеризующейся установившейся формой пузырей и называемой также стадией насыщения линейного роста. В работе Иногамова (1995) проведено сравнение этих сильно нелинейных разложений с одномодовым численным моделированием. В работе Иногамова (1995а) дан подробный анализ модели и высказана гипотеза о причине того, почему уравнения справедливы на конечном временном отрезке. В этой работе также выведены уравнения коллокаций, пригодные для описания нестационарных стадий НРМ и РТН. В этих работах подробно исследован аналог модели Лэйцера (Layzer, 1955), относящейся к отрезку ряда Фурье с $N = 1$, где N — число слагаемых в ряду. Она распространена на случай гравитационных стоячих волн, сведена с помощью упроща-

ющих замен к плоской системе, дан ее общий анализ и в НРМ случае получены точные аналитические интегралы, сквозным образом описывающие динамику пузыря от линейной до асимптотической стадии. Эти вопросы рассмотрены в § 26.

Теоретическому и численному исследованию НРМ в одномодовых и турбулентных режимах в несжимаемом приближении, справедливом при отходе УВ от КГ, посвящены работы (Hecht et al., 1994; Alon et al., 1995). В них проведено численное моделирование в одномодовом, многомодовом и турбулентном случаях. В аналитической части этих работ в ситуации с НРМ при отношении плотностей $\mu = 0$ также изучается аналог модели Лэйцера, развитой первоначально для РТН (Layzer, 1955). Повторен вывод асимптотики закона движения пузырей при $t \to \infty$. Ранее этот закон был получен в работе (Kull, 1986). В рамках этой же модели рассмотрена эволюция пар пузырей, состоящих из большого и малого пузырей. Показано, что малый пузырь с течением времени оказывается внутри струи, возникающей между двух соседних больших пузырей, и выносится этой струей из оболочки пузырей (bubble envelop). Это известный результат для случая РТН и новый результат в НРМ случае. Взаимодействие в паре большой—малый пузырь является частным случаем субгармонической неустойчивости, рассмотренной в главе, посвященной субгармоникам.

Если в работах Иногамова (1994, 1995, 1995а) выведена динамическая система уравнений для амплитуд $\mathbf{A}$ и старших кривизн КГ (контактной границы) η вида $\dot{A}_j = f_j(\mathbf{A}, \eta)$, $\dot{\eta}_j = g_j(\mathbf{A}, \eta)$, то в работах (Zhang & Sohn, 1996, 1997; Velikovich & Dimonte, 1996) для случая $\mu \neq 0$ получены полиномиальные решения в виде отрезков рядов по t, справедливые в слабо нелинейном приближении. Они аналогичны решениям в случае РТН, полученным в работах (Ingraham, 1954; Chang, 1959; Emmons et al, 1960; Rajappa, 1970, 1970a; Jacobs & Catton, 1988; Haan, 1991).

В работе (Youngs, 1994) также анализируется несжимаемая НРМ численными методами.

Вихревое описание и контурная динамика. В работе Неуважаева и Паршукова (1993) численно проинтегрирована система, соответствующая точечным вихрям, размещенным на КГ. Изучено образование грибов, проведено сравнение с одномодовым экспериментом. Ранее такой подход рассматривался для РТН. В данной работе, по-видимому, впервые он распространен на НРМ.

Динамике 2D вихрей посвящено много работ. Их необходимо разделить на два класса. В первом изучается случай однородной жидкости (Ламб, 1947; Ткаченко, 1966 (вихревые решетки); Хазин, 1976 (случаи нелинейной или взрывной неустойчивости стационарных, например, кольцевых вихревых конфигураций); Aref, 1979, 1982 (слияние вихрей или вихревой коллапс); Новиков, Седов, 1979, 1979а (динамика точечных вихрей); Манаков, Щур, 1983 (регулярное и стохастическое рассеяние вихревых пар); Melander et al., 1984 (деформация эллиптических вихрей); Козлов, Макаров, 1985 (образование вихревых пар, далеко отрывающихся от первоначально компактного вихревого облака, состояв-

шего из вихрей разного знака); Чефранов, 1991 (динамика вихревых колец); Saffman, 1992 (книга, посвященная динамике вихрей); Жданов, Прудкой, 1993 (наматывание спиралей из пассивных контуров возле точечных вихрей и многие другие). Во втором классе дискретными вихрями аппроксимируется вихревая поверхность, возникающая или уже существующая на скачках плотности. Если в первом классе возможны постановки задач как об отдельных вихрях, так и о вихревой линии (контурная динамика), то во втором классе имеется только контурная задача.

Если в первом классе интенсивность вихря ω_j фиксирована во времени $\dot{\omega}_j \equiv 0$, то во втором она переменна, и система адвективных уравнений для $\dot{z}_j$, описывающих перенос завихренности ($z_j = x_j + y_j$ — задает позицию j-го вихря на 2D плоскости x, y), дополняется уравнениями для $\dot{\omega}_j$ (Birkhoff, 1962; Baker et al. 1980, 1982; Kerr, 1988; Неуважаев, Паршуков, 1991, 1993). К этому подходу тесно примыкает другой многообещающий подход, основанный на канонических переменных, нестационарных интегральных представлениях (контурная динамика), конформных преобразованиях и спектральных методах (Dyachenko et al., 1996, 1996a, Tanveer, 1993). Он имеет определенные преимущества перед интегральными вихревыми уравнениями.

Нелинейные и сжимаемые эффекты. Как ясно из сказанного, вопросы о применимости линейного и несжимаемого приближений тесно связаны. Коэффициент α в (4.2) может иметь разный знак в зависимости от условий задачи. В некоторых специальных случаях он даже обращается в нуль (Mikaelian, 1993). В этом месте существенно то, что он ограничен $\alpha \sim 1$ или $\alpha < 1$. Поскольку $\Delta v_{\text{СВ}} \sim c$ при числе Маха M порядка и больше единицы и $\Delta v_{\text{СВ}} \ll c$ при $\text{M} \to 1$, то при $ak \ll 1$ будет $\delta v \ll c$. В экспериментах на ударных трубах и при численном моделировании трудно достичь очень малых значений параметра нелинейности ka. Это обусловлено ограниченностью времени наблюдений из-за ограниченности длины трубы. При численном моделировании с УВ ограничения связаны с размерами сетки и временем интегрирования. Обычно, чтобы ускорить наступление нелинейных эффектов, берут начальные значения $ka \sim 0,2$, тогда как форма пузыря устанавливается уже при $ka \approx 0,7$. В этом случае эффекты, связанные со сжимаемостью, и нелинейные эффекты накладываются.

Сжимаемость приводит к осцилляциям скорости возмущений. Они рассматривались в работах (Richtmyer, 1960; Fraley, 1986; Yang et al., 1994; Holmes et al., 1995; Velikovich, 1996; Wouchuk & Nishihara, 1996). Их причиной являются звуковые волны, находящиеся в области влияния распада разрыва. Частоты осцилляций порядка $\sim kc$. Наиболее сильными являются первые из них, потом они быстро затухают. Затухание вызвано удалением ударных волн и/или волны разряжения на расстояния, большие по сравнению с длиной $1/k$. Из-за этого фронты звуковых возмущений в области влияния растягиваются, и амплитуда звуковых возмущений уменьшается. Относительные амплитуды осцилляций, амплитуды, отнесенные к скорости (4.2), в линейном пределе ($ka \to 0$) не

зависят от ka. Амплитуда скорости возмущения КГ выходит при затухании осцилляций на асимптотическое значение. Коэффициент α в (4.2) относится к этому значению.

Нелинейные эффекты могут быть как сжимаемого, так и несжимаемого характера. При больших амплитудах начальных возмущений их нельзя разделить. Детальному сопоставлению линейного и нелинейного сжимаемых решений посвящена работа (Holmes et al., 1995). Нелинейная сжимаемость существенна при больших амплитудах возмущений скорости (4.2), когда эта скорость становится сопоставима со скоростью звука c. При этом с вихрями связаны скорости порядка c. Существование сложной нестационарной ударно-волновой картины с пульсацией струй и многочисленными вторичными внутренними УВ при дифракции и рефракции исходной УВ на возмущении большой амплитуды (начальное $ka \sim 7$) было продемонстрировано в работе Демченко (1995).

Наиболее существенные для НРМ нелинейные эффекты заключаются в деформации возмущений КГ по сравнению с синусоидальной формой и в торможении пузырей. При небольших амплитудах начальных возмущений они носят в основном несжимаемый характер. При очень малых амплитудах сжимаемость вообще не влияет на деформацию и торможение, поскольку установление асимптотической скорости (4.2) происходит до того, как эта скорость успеет заметно уменьшиться (в случае пузыря) под действием нелинейного торможения. В линейном (по сжимаемости) случае нелинейное несжимаемое торможение происходит на больших по сравнению с периодом осцилляций $\tau_{\rm osc} \sim 1/kc$ временах $\tau_{\rm nonl} \sim 1/(\delta v)k$.

Таким образом, линейный (по сжимаемости) случай является "чистым" в том смысле, что эффекты, связанные со сжимаемостью, и несжимаемые эффекты разделены во времени.

§ 5. Физические проблемы, связанные с НРМ

5.1. Генерация завихренности в несжимаемой жидкости

Ограничимся сначала чисто несжимаемым случаем, в котором случае можно анализировать не только эволюцию, но и генерацию завихренности ω в неоднородной жидкости. Выведем известную полезную оценку начальной скорости возмущений, похожую на формулу (4.2). Перед этим коснемся вкратце сравнения НРМ при разных профилях ρ.

Как правило, рассматривается скачок ρ, хотя в случае непрерывного профиля также можно изучать импульсную генерацию поля скоростей возмущений и эволюцию профиля под действием этого поля. Затруднение связано с тем, что не ясно, как выбрать возмущение плотности. Дело в том, что энтропийно-вихревые (сжимаемая среда) возмущения или возмущения вихрь–плотность (несжимаемый случай) "вморожены" в среду и могут быть произвольными функциями. В случае скачка ρ возмущения ρ определяются через кажущиеся естественными возмущения КГ (гофрировка КГ). Видимо, таким же образом следует поступать в случае профиля. При этом в невозмущенном профиле изохоры — плоскости. Возмущение заключается в том, что все изохорические плоскости

гофрируются синусоидально с одинаковой амплитудой и фазой. В случае профиля в виде сглаженной ступеньки такие возмущения ρ будут затухать при $y \to \pm\infty$. Соответствующие функции зависят только от профиля и волнового числа.

Сглаживанию профилей придается большое значение при РТН, поскольку с этим связаны надежды на уменьшение инкремента неустойчивости. Отметим в этой связи интересные эксперименты по сглаживанию при НРМ (Алешин и др., 1995а; Haas et al., 1995), в которых на сглаживание возлагаются аналогичные надежды.

Если обе среды, примыкающие к КГ, являются однородными и несжимаемыми, то для вывода упомянутой выше полезной оценки скорости после импульсного воздействия поступают следующим образом. УВ приводит к приращению скорости КГ $\Delta v \equiv \Delta v_{\text{СВ}} = v_{\text{СВ}}(+0) - v_{\text{СВ}}(-0)$. В несжимаемой жидкости это быстрое (мгновенное) приращение может иметь место только в случае действия импульсного ускорения $g(t) = (\Delta v)\delta(t)$. Коэффициент перед δ-функцией следует из определений ускорения $\dot{v} = g$ и δ-функции $\Delta v = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$.

Аппроксимируем δ-функцию прямоугольником. Тогда в течение короткого промежутка времени δt ($\delta \ll \gamma^{-1}$ или ω^{-1}, где γ — инкремент РТН, а ω — частота гравитационных волн) имеем $g(t) \equiv (\Delta v)/\delta t$. Вне этого промежутка времени $g(t) \equiv 0$. Остается рассмотреть движение в этом промежутке времени. Его скорость в конце промежутка и даст начальное поле завихренностей и скоростей.

Обычно считается, что НРМ — это, так сказать, импульсный вариант РТН (хотя высказывается и другая точка зрения, об этом чуть ниже). На самом деле это не совсем так. Во-первых, НРМ не является неустойчивостью в обычном понимании этого термина. Здесь нет самоусиления возмущений (имеется в виду самоусиление возмущений после импульсного воздействия), т. е. нет отклоняющей силы, которая была бы пропорциональна отклонению. Это движение по инерции. При этом на линейной стадии отклоняющая сила просто равна нулю. Импульс создает поле скоростей, а дальше происходит инерционное "расползание"

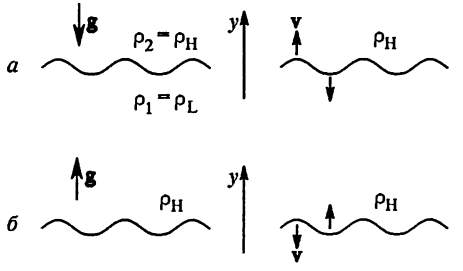


Рис. 5.1. Импульсная ($g \propto \delta(t)$) генерация скоростей в неустойчивом ((*а*) тяжелое сверху) и устойчивом ((*б*) тяжелое снизу, если ориентироваться по ускорению) по отношению к РТН случаях

КГ под действием этого затухающего во времени (на нелинейной стадии) поля. Во-вторых, движение, соответствующее НРМ, развивается как в неустойчивом по РТ критерию случае, так и в устойчивом.

Сказанное относительно критерия пояснено на рис. 5.1. До начала импульса давление однородно $\nabla p \equiv 0$, и гофрированная КГ покоится. В

течение действия импульса КГ не успевает сдвинуться с места — приращение координат равно нулю. Зато приращение скорости конечно. В случае *а*, см. рис. 5.1*а*, это приращение связано с РТН, а в случае *б* — со стоячими гравитационными волнами. При этом в случае *б* фазы возмущений поверхности и скорости сдвинуты на 180°. Поэтому вскоре после окончания импульса КГ становится плоской, а уже затем начинается монотонный рост амплитуды. Происходит так называемая перефазировка, при которой пузыри (на исходной КГ) при развитии возмущения превращаются в струи и наоборот. На этом языке вмятины в тяжелый газ называются пузырями, а выпуклости на ограничивающей этот газ поверхности — струями. Случаю *а* на рис. 5.1 соответствует случай *а* на рис. 4.1 (УВ из легкого в тяжелый газ), а случаю *б*, рис. 5.1, — случай *г*, рис. 4.1 (УВ из тяжелого в легкий).

Амплитуды линейных возмущений скорости подчиняются уравнению

$$v_{tt} = gk\,\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\,v,$$

где v — вертикальная компонента возмущения скорости или собственно компонента скорости, поскольку в невозмущенном состоянии газы покоились. Если $g < 0$ (а), то имеется РТН и

$$\delta\eta = (\delta\eta)_0\,\operatorname{ch}\gamma t, \quad v = (\delta\eta)_0\,\gamma\operatorname{sh}\gamma t, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{|\rho_1 - \rho_2|}{\rho_1 + \rho_2}gk}.$$

Если $g > 0$ (б), то

$$\delta\eta = (\delta\eta)_0\,\cos\omega t, \quad v = -(\delta\eta)_0\,\omega\sin\omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{|\rho_1 - \rho_2|}{\rho_1 + \rho_2}gk}.$$

Подставляя в эти уравнения $g = \Delta v_{\text{СВ}}/\delta t$, найдем, что в момент $t = \delta t$ окончания импульса ($t = 0$ — момент его начала) амплитуда $\delta\eta$ (при $\delta t \to 0$) не изменилась, а амплитуды приращений скорости равны

$$v = \pm(\delta\eta)_0\,k\,|\mathrm{A}|\,\Delta v_{\text{СВ}}. \tag{5.1}$$

Это и есть искомая оценочная формула, аналогичная формуле (4.2). Верхний и нижний знаки относятся к случаям (а) и (б) соответственно. При ее выводе функции sh и sin необходимо разложить по малому аргументу. В отличие от (4 2) в (5.1) число Атвуда A и амплитуда $a = (\delta\eta)_0 = (\delta\eta)$ не меняются в процессе ускорения.

5.2. Сравнение сжимаемой и несжимаемой бароклиник

Физическая проблема заключается в этом сопоставлении. Спрашивается, сжимаемый и несжимаемый механизмы генерации одинаковы, одинаковы по своей сути (по своим принципам) или различны? Здесь мы

продолжим интересную дискуссию, начатую в работе (Velikovich, 1996, с. 1677). Имеются крайние точки зрения. Согласно более распространенной, восходящей к пионерской работе Рихтмайера (Richtmyer, 1960), по смыслу НРМ с УВ (сжимаемая НРМ, РМ бароклиника и РМ генерация) аналогична импульсной РТН или импульсной стоячей гравитационной волне. Будем называть эти два последних случая вместе несжимаемой НРМ и соответственно говорить об РТ или несжимаемой бароклинике и об РТ генерации. Следовательно, формулы (4.2) и (5.1) по сути своей одинаковы. Учет сжимаемости приводит лишь к появлению поправочного коэффициента α в формуле (4.2).

Согласно другой точке зрения, смысл этих механизмов совершенно разный — сжимаемая НРМ не имеет ничего общего (в смысле генерации) с несжимаемой НРМ. Схожесть формул случайна. С любым малым возмущением КГ $\delta\eta \propto \cos x$ будет связано возмущение скорости δv вида (4.1). Действительно, в этом отношении появление множителей ka и $\Delta v_{\text{СВ}}$ в формулах (4.2) и (5.1) является естественным. Последней точке зрения противоречит то, что степень числа **A** в обеих формулах является первой.

Чтобы разобраться в этом, обсудим несжимаемый и слабо сжимаемый случаи более подробно. Система уравнений в несжимаемом случае имеет вид

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \rho D_t v = -\nabla p + g\rho, \quad D_t \rho = 0. \tag{5.2}$$

В сжимаемом случае система равна

$$\epsilon p_t + \operatorname{div} v = 0, \quad \rho D_t v = -\nabla p + g\rho, \quad D_t \rho = 0 \tag{5.3}$$

в рамках подхода, называемого искусственной сжимаемостью (Темам, 1981), или

$$\rho_t + \operatorname{div} \rho v = 0, \quad \rho D_t v = -\nabla p + g\rho, \quad D_t s = 0 \tag{5.4}$$

в своем обычном газодинамическом виде.

Рассмотрим предел $\epsilon \to 0$ в (5.3) или $M \to 1$ и $\delta v/c \to 0$, $\delta v \neq 0$ в (5.4), где M — число Маха волны, а δv — скорости, связанные с движением. Будем называть их в этом пределе предельными системами, а их решения — предельными. Эти решения физически эквивалентны соответствующим несжимаемым решениям. Предельный переход не является тривиальным, поскольку он меняет порядок дифференциальной системы. Поэтому, хотя физически они эквивалентны, формально несжимаемые решения с

$$\epsilon = 0 \tag{5.5}$$

системы (5.2) (РТ или несжимаемые РМ решения) и решения с

$$\epsilon = +0, \qquad M = 1 + 0 \tag{5.6}$$

систем (5.3) и (5.4) (слабосжимаемые РМ решения) являются различными.

Проиллюстрируем это на примере вещества, ограниченного подвижной границей, скажем, вещества в цилиндре между двумя поршнями. Рассмотрим задачу об ударе. Пусть оба поршня мгновенно начинают двигаться со скоростью v. При $t > 0$ несжимаемое и предельное решения совпадают. Посмотрим, как происходит набор скорости. Функции $v(t)$ лагранжевых частиц в обоих случаях похожи. Имеются стадии: (i) покоя, (ii) быстрого набора скорости и (iii) движения со скоростью v. Но пространственные распределения p на стадии (ii) различны. В случае (5.5) $\nabla p \neq 0$ во всем пространстве, а в случае (5.6) $\nabla p \equiv 0$ везде, кроме УВ и/или ЦВР. УВ создает вдвигаемый поршень, а короткий кусочек веера ЦВР — выдвигаемый.

Рассмотрим более сложный случай. Пусть вещество неоднородно. К началу стадии (iii) складывается неоднородное поле скоростей $\mathbf{v}$. Оно индуцируется вихрями и граничными условиями на стенках цилиндра и поршнях. Следствием удара является генерация завихренности. Она сосредоточена на поверхностях скачков ρ и в объеме — в областях непрерывного изменения ρ.

К началу стадии (iii) карты завихренности совпадают в случаях (5.5) и (5.6). Но ее генерация проходит по-разному. В обоих случаях работает бароклиника. Это означает, что переменность давления в пространстве ведет к генерации. Но механизм этот различен в рассматриваемых случаях. В первом из них действует однородное поле ∇p. В случае скачка ρ проектируем его на касательную скачку плоскость (в рассматриваемой точке). Вдоль скачка давление непрерывно. Поэтому вещество на разных берегах скачка приобретает разные тангенциальные скорости. Это и есть бароклинический механизм в несжимаемом случае.

Во втором случае по веществу пробегает УВ. Рассмотрим ее прохождение вдоль скачка ρ. Опять давление непрерывно вдоль скачка ρ. Поэтому подъем давления p в УВ ускоряет лагранжевы частицы на разных берегах до разных тангенциальных скоростей. В этом заключается бароклинический механизм в сжимаемом случае. Кроме того, завихренность продолжает изменяться и после прохождения волны вследствие неоднородности давления за волной.

Как видим, в обоих случаях генератором является векторное произведение $\nabla p \times \nabla \rho$. Но устройство ∇p различно. В одном случае это только размазанная, а в другом — сосредоточенная на УВ и размазанная функции.

Рассмотрим для определенности НРМ с возмущенной по косинусу КГ. Посмотрим, в чем заключаются различия между полями ∇p на стадии (ii) в несжимаемом (5.5) и предельном (5.6) случаях. В случае (5.5) поля возмущений ∇p, обусловленных гофрировкой КГ, квазистационарны и локализованы в слое толщиной $\sim 1/k$ около КГ. В случае (5.6) эти поля ограничены расширяющимися со временем зонами влияния, находящимися между отраженными и прошедшими через КГ волнами, см. рис. 4.2. Но для генерации важно не общее устройство полей градиента, а то, какие тангенциальные скорости он создает на скачке ρ. Если КГ приобретает одинаковые (в отсутствие возмущений $\delta\eta$) скорости $\Delta v_{\text{СВ}}$ в

(5.5) и (5.6) случаях, то плотность (на единицу длины КГ) завихренности (при наличии возмущений) тоже будет одинаковой, поскольку $\Delta v_{\text{СВ}}$ создает нормальная, а завихренность тангенциальная компоненты одного и того же градиента p (в импульсном процессе в несжимаемом и слабосжимаемом случаях КГ не меняет своей формы). Поэтому совпадение формулы (5.2) в пределе (5.6) с формулой (5.1) закономерно.

Сделаем заключение по обсуждавшемуся материалу. Движение, связанное с НРМ, разбивается по времени на участки генерации (создания) завихренности и эволюции уже созданной завихренности.[7] Несжимаемая и сжимаемая НРМ одинаковы в смысле эволюции. В вопросе о генерации правильным является восходящее к Рихтмайеру (Richtmyer, 1960) представление, согласно которому в принципиальном отношении несжимаемая и сжимаемая бароклиники одинаковы (с учетом сделанных оговорок о пространственной структуре ∇p).

Отметим, что если завихренность имелась заранее, то для самой эволюции уже не требуется, чтобы $\nabla p \times \nabla \rho$ было бы конечным числом. Это произведение может быть конечным числом или нулем в несжимаемом и сжимаемом случаях, а эволюция будет типичной для НРМ. Поэтому вопросы генерации и эволюции не следует смешивать.

Например, в однородной несжимаемой жидкости можно разместить вихри на произвольной лагранжевой поверхности. Если суммарная завихренность равна нулю, а вдоль поверхности (пусть плоской) чередуются участки положительной и отрицательной завихренности, то возникает картина течения, характерная для НРМ при $|\mathrm{A}| \ll 1$. При периодическом распределении завихренности на нелинейной стадии пузыри и струи симметричны, напоминают пузыри при $|\mathrm{A}| \sim 1$ и одинаково тормозятся.

В сжимаемом случае можно рассмотреть ситуацию, проанализированную в работе (Velikovich, 1996), с симметричным отходом двух ЦВР от гофрированной КГ. Рассмотрим произвольную точку на КГ. Спрямим КГ в ее окрестности. На малых временах $t \ll (\delta\eta)_0/c$, где $(\delta\eta)_0$ — начальная амплитуда гофрировки, движение разлагается на ЦВР и прилегающий к КГ однородный слой, движущиеся с противоположными тангенциальными скоростями на разных берегах (сторонах) КГ. Поскольку $\nabla\rho$ на КГ равно нулю, то не образуется дополнительной завихренности к уже имеющейся в начальных данных. Нетрудно видеть, что завихренность знакопеременна и периодична вдоль КГ. При этих условиях линейная и нелинейная эволюции будут типичными для НРМ.

В связи со сказанным относительно эволюции искривлений границы целесообразно привести соответствующую динамическую картинку, основанную на представлениях о вихревых диполях и вихревых кольцах. Она пояснит, как динамические образования (диполи и кольца) посредством своего движения растягивают границу.

Как известно, в однородной жидкости такие диполи и кольца перемещаются на большие расстояния ("убегают на бесконечность"). На

[7] Разумеется, в процессе эволюции завихренность остается переменной, если $\mathrm{A} \neq 0$, поскольку КГ, вообще говоря, не является изобарой.

КГ диполи или вихревые пары образуются в 2D плоском случае (см. рис. 5.2), а кольца в 3D случае. В случае, когда завихренность сосредо-

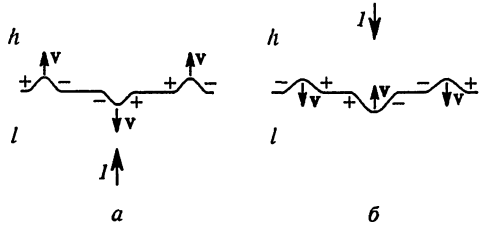


Рис. 5.2. Генерация ударной волной вихревых структур на искривленной границе контакта. Стрелками 1 показано откуда пришла волна. Буквы h и l относятся к тяжелому и легкому газам соответственно. Пары знаков плюс и минус относятся к вихревым диполям, образующимся на вогнутостях и выпуклостях границы. Знаки диполей определяются знаком кривизны границы относительно тяжелого газа и направлением прихода волны. Стрелки v указывают направления "убегания" диполей. В $3D$ случае вместо диполей вокруг бугров и ям поверхности границы образуются вихревые кольца

точена на контактной границе, на которой происходит скачок плотности, диполи и кольца осуществляют свое "убегание на бесконечность" вместе с границей η. Это приводит к росту высоты рельефа на этой границе, к ее растяжению и к увеличению площади ее поверхности, см. рис. 5.2.

§ 6. Столкновение потоков и появление эффективной гравитации

Выше сравнивались сжимаемые и несжимаемые эффекты, обсуждались вид характерных движений и значение вихрей. Обсудим в этом разделе невозмущенную динамику и существенный для РТН вопрос о происхождении ускорения КГ. Одновременно будем держать в поле зрения вопрос о роли сжимаемости в РТН. С ней связано появление крупномасштабных факторов в теории неустойчивости. Во-первых, эта роль проявляется в появлении поправок в линеаризованной теории. Во-вторых, крупномасштабная неоднородность, обусловленная стратификацией в поле тяжести, влияет на перемешивание и на динамическое взаимодействие ударной волны с течением перемешивания. Вопросы линеаризованной теории будут изложены в отдельном разделе. Здесь изучим стратификацию и ударные волны.

Рассмотрим вопрос о происхождении тяжести: оно может быть связано с гравитационным полем или с неинерциальностью соответствующей системы отсчета. Во втором случае неустойчивость и обмен возникают из-за ускорения или торможения вещества, внутри которого находится зона обмена и перемешивания. Среди астрофизических приложений имеются оба этих случая. Например, неустойчивости при взрывах сверхновых связаны с неинерциальностью, а магнитогидродинамические неустойчивости в магнитосферах релятивистских звезд — с гравитацией. В системах инерционного синтеза и при разлете продуктов детонации в газ гравитация является эффективной.

Рассмотрим неинерциальный случай. Анализ и обобщение приложений, относящихся к этому случаю, показывают, что обычно имеет место следующее. Происходит столкновение или соударение двух газовых потоков. Потоки могут быть дозвуковыми или сверхзвуковыми. При столкновении возникает разделяющая эти газы контактная граница η. В ее окрестности движение дозвуковое. В качестве модели будет рассмотрено столкновение потоков от источников. Поскольку источники являются независимыми, то и состояния газов по разные стороны от границы не совпадают. В частности, на границе испытывает скачок плотность ρ.

Поступление импульса со стороны внешних по отношению к окрестности контактной границы потоков в общем случае не сбалансировано. Это связано с переменностью расходов источников и с изменением их положения в пространстве. Поэтому контактная граница нестационарна. Более того, она может двигаться с ускорением. Отсюда при соответствующем знаке ускорения возникает неустойчивость.

Примерами столкновения или пересечения потоков являются следующие. Это столкновение потоков в космологии (Зельдович, 1984) (I). В задаче о сверхновой сталкиваются сверхзвуковые потоки остатков взрыва и межзвездной среды (II). Столкновение потоков возникает и в задачах с переменными во времени звездным ветром или аккреционным потоком (планетарные туманности, звезды Вольфа–Райе, аккреция из межзвездной среды или в двойных системах) (III). К столкновению приводит переменность ветра или аккреции. При переменности скорости более быстрые порции *догоняют* медленные и сталкиваются с ними. Столкновение или пересечение потоков возникает и при выбросе радиоджетов из космических объектов в окружающую среду (IV). Другим примером является столкновение газоплазменного потока от испаряющегося ядра кометы и солнечного ветра (V). Рассматриваются также взаимодействие разлетающегося лазерного факела, созданного точечным импульсным лазерным воздействием на протяженную плоскую мишень, с окружающим газом (VI), разлет остатков сферической лазерной микромишени в газ (VII) и разлет продуктов детонации (VIII).

6.1. Нестационарные и стационарные границы

Представим физический анализ проблемы пересечения потоков. Пусть есть два потока d и r веществ d и r. Это могут быть потоки, производимые двумя источниками S_1 и S_2 (см. рис. 6.1*а*). Как сказано выше, термин "источник" употребляется здесь в широком смысле. Источники могут перемещаться, быть не точечными, а распределенными, могут быть переменными во времени (импульсными или осциллирующими). В такой широкой постановке речь может идти и об эволюции начального распределения скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t = 0)$.

Здесь мы хотели бы обратить внимание на возникновение при такой эволюции зон, в которых происходит сжатие по какому-то направлению или направлениям. Это сжатие можно интерпретировать как столкновение потоков. Таким образом, посредством модели со столкновением мы хотели бы исследовать то, что происходит в зонах сжатия. В этих зонах контактируют первоначально далеко разнесенные порции вещества.

В общей ситуации при неоднородном начальном распределении энтропии эти порции могут иметь разные значения энтропии. Это приводит к пространственной неоднородности плотности.

Мы рассматриваем пересечение потоков от источников. Имеется контактная граница, которая разделяет вещества этих источников (см. рис. 6.1*б*). Потоки произведены двумя различными источниками. Следовательно, в общем случае их плотности не равны. Это проиллюстриро-

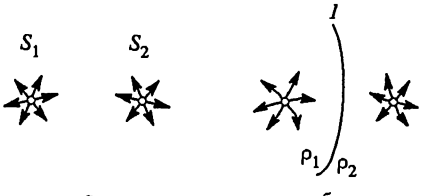


Рис. 6.1. (*а*) Два источника S_1 и S_2 и столкновение их потоков. (*б*) Возникновение контактной границы (она помечена цифрой 1), разделяющей вещества, исходящие из разных источников

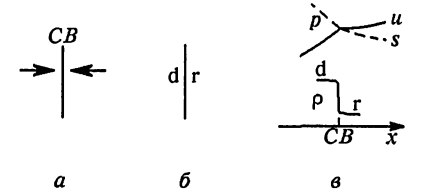
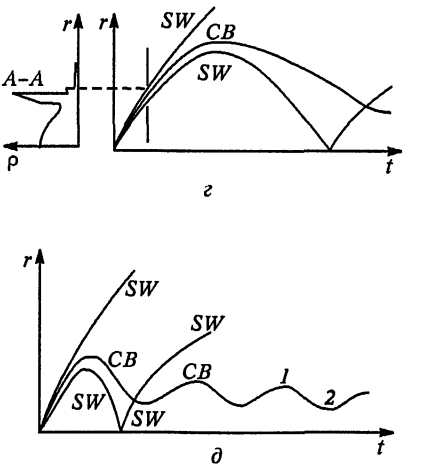


Рис. 6.2. (*а*) Два встречных потока и граница (CB — contact boundary), разделяющая их. (*б*) КГ между плотным (*d*) и малоплотным (*r*) веществами. (*в*) Распределения ρ и p по нормали к границе CB. На КГ может иметься скачок ρ. Распределение p имеет излом в стандартном случае. КГ неустойчива (u — unstable) или устойчива (s — stable) в зависимости от знака ∇p. (*г*) Разлет продуктов детонации в окружающий газ, r, t диаграмма. Продукты образуют шар, ограниченный границей CB. Имеются внешняя и внутренняя УВ (SW — shock wave) возле CB. Облако продуктов совершает несколько затухающих колебаний. Первое из них показано на этом рис. На врезке А-А представлено радиальное распределение ρ вдоль прямой А-А на r, t диаграмме. Близкая ситуация возникает при взрыве сверхновых. (*д*) Осциллирующее облако. Ударные волны затухают при удалении на бесконечность. Наиболее сильной является первая ударная волна. Давление в центре переменно во времени. Всплески давления связаны со сжатиями облака. Этими всплесками обусловлено акустическое излучение из облака. Отметим еще, что если заменить ось t на ось цилиндрической симметрии z и таким образом перейти к стационарной картинке, то получим течение, возникающее при вылете недорасширенных струй реактивных движителей или аналогичных им радиоструй, вылетающих из космических объектов, см., например, Smarr et al., 1984



вано на рис. 6.2*а–в*. Здесь обозначения d и r соответствуют веществам по разные стороны границы. В общем случае нормальные (к границе) компоненты градиента давления $(\nabla p)_n^{d,r}$ являются конечными $(\nabla p)_n^{d,r} \neq 0$. Верхние индексы (d) и (r) относятся соответственно к левой и правой

окрестностям границы, см. рис. 6.2*б*, *в*. Если к тому же знак градиентов $(\nabla p)_{\rm n}^{\rm d}$ и $(\nabla p)_{\rm n}^{\rm r}$ таков, что давление p растет в сторону легкого вещества, как это показано на рис. 6.2*в* сплошной кривой, помеченной буквой u, то контактная граница неустойчива по отношению к РТН. В случае, когда распределение давления p дается штриховой кривой s, граница устойчива.

Посмотрим, при каких условиях градиент p отличен от нуля

$$(\nabla p)_{\rm n}^{\rm d,\,r} \neq 0. \tag{6.1}$$

Возможны три случая:

(i) имеется сила тяжести и/или

(ii) конечное ускорение/замедление контактной границы и/или

(iii) имеются конечная кривизна контактной границы и конечные тангенциальные скорости на ней.

В последнем случае появляются центробежные силы. А вместе с ними и конечный градиент p. Он равен

$$(\nabla p)_{\rm n}^{\rm d,\,r} = \rho^{\rm d,\,r}\,(v_\tau^{\rm d,\,r})^2/R, \tag{6.2}$$

где v_τ — тангенциальная составляющая скорости, R — радиус кривизны контактной границы.

Назовем стандартным случай, в котором тангенциальные составляющие малы или равны нулю $v_\tau^{\rm d,\,r} = 0$. Случай (6.2), в котором "вес" имеет центробежное происхождение, будем называть нестандартным. В стандартном случае для выполнения условия (6.1) необходима гравитация или неинерциальность границы. В нестандартном случае условие (6.1) может быть выполнено на стационарной границе.

6.2. Анализ стандартных случаев

Представим отдельные примеры пересечений потока в стандартном случае. В качестве первого примера рассмотрим разлет продуктов детонации. Он показан на рис. 6.2*г*, *д*. Пусть высокоплотные продукты детонации разлетаются в газ низкой плотности. Газ тормозит разлет продуктов. Поэтому КГ неустойчива (Анисимов и Зельдович, 1977; Анисимов и др., 1983; Иногамов, 1985).

В сущности, это случай столкновения двух встречных сверхзвуковых потоков. Один из них образует продукты детонации, а другой — внешний газ. Поскольку оба потока сверхзвуковые, то не удивительно, что *две* (Анисимов и др., 1983; Иногамов, 1985) ударные волны отделяют потоки от области сжатия около КГ.

Тщательный экспериментальный анализ этого случая был проведен в работах (Давыдов, Лебедев, Перков, 1979; Шурупов, 1983; Шурупова и др., 1985; и Асиновского и др., 1991).

Детальное численное моделирование взрывного процесса с использованием сеток и мелких подсеток было выполнено в работе Kuhl (1994). Он исследовал динамику расширения бариевых облаков на больших высотах в разреженной атмосфере. Эти облака образуются в результате взрыва. Он также изучил турбулентное горение, инициированное

взрывом. Оказалось, что в ряде случаев значительная доля химических взрывчатых веществ догорает уже после прохождения волны детонации. Причем турбулентная диффузия окислителя и горючего, связанная с РТН, имеет важное значение для этого процесса догорания.

Интересным является космологический пример гиперзвукового пересечения потоков. Оказывается, начальное поле скоростей в расширяющейся Вселенной было неоднородным. Даже небольшие по относительной амплитуде флуктуации скорости существенны. Они описываются функциями общего вида. Отсюда следует, что имеется клетчатая структура, в которой чередуются клетки, в одних из которых происходит расширение, а в соседних — сжатие вещества. Это связано со знакопеременностью тензора $\partial v_i/\partial \mathrm{r}_j$, который определяет деформацию вещества, при общего вида зависимости $\mathbf{v}$ от $\mathbf{r}$.

Важно то, что в процессе расширения температура вещества и скорость звука быстро уменьшаются. Поэтому течения сжатия или расширения в клетках становятся гиперзвуковыми.

Неоднородность $\mathbf{v}$ приводит к возникновению крупномасштабной структуры Вселенной (Зельдович, 1984). Она состоит из пустот и сетки уплотнений или сверхскоплений (Зельдович, 1984; Сентрелла, Мелотт, 1988). Пустоты возникают в областях (клетках) расширения, а сетки — в областях сжатия.

Если пренебречь температурой и скоростью звука, то возникает задача о движении лагранжевых частиц по инерции в соответствии с неоднородным распределением скорости. В областях сжатия происходит фокусировка лагранжевых траекторий. Следствием фокусировки является появление каустик. Время их образования равно

$$t_{\mathrm{f}} \sim 1 \,/\, |\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}|.$$

В четырехмерном пространстве–времени $\mathbf{r}$, t с каустик начинается пересечение гиперзвуковых потоков. В дальнейшем при $t > t_{\mathrm{f}}$ образуется сжатый слой. При $0 < t - t_{\mathrm{f}} \ll t_{\mathrm{f}}$ этот слой имеет форму небольшого [8] блиновидного уплотнения (Зельдович, 1984). Слой ограничен двумя ударными волнами, через которые гиперзвуковые потоки втекают в слой. Из-за высвечивания энергии, перешедшей в тепло, слой остается довольно тонким по сравнению с размерами области сжатия.

Слои имеют вид протяженных поверхностей. Они образуют сетки, пересекающие все пространство.

Если плотность ρ вещества переменна, то в сжатом слое функция ρ может быть неоднородной. Важное значение имеет также радиационная история лагранжевых частиц внутри слоя. При наличии неоднородности ρ внутри слоя и неинерциальности его движения возможно появление РТН внутри слоя. Неинерциальность обусловлена переменностью потока импульса, вносимого в слой втекающим веществом. В случае неустойчивости распределение p и ρ по нормали к плотному слою аналогично показанному на рис. 6.2*в* сплошными кривыми Неустойчивость приведет к появлению грануляции внутри слоя.

[8] По сравнению с размером области (клетки) сжатия

Гиперзвуковые потоки втекают в плотный слой с обеих его сторон. Вещество слоя отделено, как сказано выше, от невозмущенных потоков ударными волнами. Интенсивность потоков зависит от начальных данных. В силу пространственной неоднородности начальных распределений скорости эта интенсивность является переменной во времени. При ослаблении и исчезновении потоков ударные волны также исчезают. Плотный слой тем не менее существует и после прекращения выпадения вещества. Дело в том, что вещество в нем остыло, скорость звука невелика по сравнению со скоростями потоков и слой "расползается" медленно. Небольшой разброс скоростей, сохраняющийся внутри слоя, приводит к постепенной сепарации образовавшихся грануляций.

Необходимо отметить, что потоки, втекающие в слой на поздних стадиях, имеют тангенциальную составляющую скорости по отношению к слою. Они перпендикулярны к нему только в момент зарождения слоя при $0 < t - t_f \ll t_f$. Следовательно, внутри слоя имеется сдвиговое течение, а значит, возможно появление и неустойчивость Кельвина–Гельмгольца.

Имеется целый ряд астрофизических примеров пересечений (столкновений) потоков. Это неустойчивость, возникающая при расширении остатков взрыва сверхновой в межзвездный газ, и неустойчивости в планетарных туманностях и звездах Вольфа–Райе, см. § 8. В последних двух примерах причиной неустойчивости является вариация во времени скорости звездного ветра. В этом случае более поздняя (и быстрая) порция ветра догоняет и сталкивается с предыдущей медленно движущейся порцией. Много примеров неустойчивости связано с физикой высоких энергий, см. § 7.

Отметим, что для возникновения РТН не обязательно, чтобы оба сталкивающихся потока были сверхзвуковыми. Имеются много примеров неустойчивости при дозвуковом столкновении (взаимодействии). Например, такое взаимодействие имеет место при сжатии сферических оболочек в системах инерционного удержания плазмы, когда оболочка "сталкивается" с топливом.

Другой пример — неустойчивость схлопывания пузырей при кавитации. В этом случае жидкость "сталкивается" с газом или паром внутри полости.

6.3. Искривленные границы и центробежное ускорение

Нестационарный случай и РТН. На первый взгляд представляется, что в нестандартном случае (6.2) неустойчивость, похожая на РТН, возможна[9] на контактной границе (КГ), если $0 < \mu < 1$, где μ — отношение плотностей на КГ $\mu = \rho_г/\rho_д = \rho_2/\rho_1$. На самом деле положение здесь оказывается гораздо более интересным и содержательным.

Для того чтобы разобраться в этом, необходимо вернуться к физическим основам РТН. Пусть в момент $t = 0$ в точке $r = 0$ "включился"

[9] Кажется, что КГ будет неустойчива, если (i) КГ искривлена и (ii) поворот КГ происходит в сторону плотной жидкости.

источник $\dot{M}$ плотной (d, dense) жидкости (см. рис. 6.3*а*). Пусть плотная жидкость окружена малоплотной (r, rear) и источник $\dot{M}(t)$ работает так,

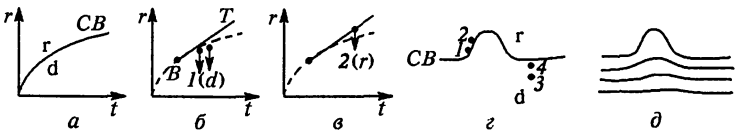


Рис. 6.3. (*а*) Траектория КГ. (*б*, *в*) Иллюстрация РТН. Отрыв и вылет отдельной частицы B (boundary) тяжелой жидкости, "высунувшейся" за КГ (КГ показана штриховой кривой). Если $\mu \ll 1$, то траектория этой частицы в легкой жидкости — прямая T. Вылетевшая частица отрывается от основной массы тяжелой жидкости. (*г*, *д*) Иллюстрация РТН. Изменение распределения p из-за появления выпучивания. (*г*) Разность давлений $p_2 - p_1$ между точками 1 и 2 в легкой (r — rear) жидкости мала по сравнению с разностью давлений между точками 3 и 4 в тяжелой (d — dense) жидкости, разнесенными на такое же расстояние. Эта разность равна $p_4 - p_3 = \rho_d g(r_4 - r_3)$, где $g-$ замедление КГ. (*д*) Вид семейства изобар ($\mu \ll 1$) при наличиии выпучивания. Градиент $|\nabla p|$ мал внутри выпучивания

что происходит замедление КГ с течением времени. Траектория замедляющейся КГ показана на r, t диаграмме на рис. 6.3*а* (сплошная кривая) и на рис. 6.3*б*, *в* (штриховая кривая).

Рассмотрим лагранжеву частицу B (см. рис. 6.3*б*, *в*) плотной жидкости, находящуюся вблизи КГ. Она тормозится градиентом ∇p, направление которого показано стрелкой *1* на рис. 6.3*б*. Если $\nabla p = 0$, то частица двигалась бы по прямой BT, касательной к КГ.

Такая ситуация складывается, если частица B "переставляется" ("обменивается" или "высовывается") через границу контакта CB и таким образом оказывается внутри внутри легкой жидкости. "Высунутый" комочек лагранжевых частиц B образует выпучивание на КГ. Оно показано на рис. 6.3*г*. Из-за РТН вертикальный размер выпучивания будет расти. Траектория вершины выпучивания проходит выше штриховой кривой на рис. 6.3*б*. Если $\mu \ll 1$, то эта траектория близка к прямой CB.

Причиной этого является примерное постоянство давления (при $\mu \ll 1$) в легкой жидкости. В силу этого разница давлений $p_2 - p_1$ между точками *2* и *1* на рис. 6.3*г* и градиент $|\nabla p|$, показанный стрелкой *2* на рис. 6.3*в*, малы по сравнению с разностью $p_4 - p_3$ (точки *4* и *3* на рис. 6.3*г*) и градиентом $|\nabla p|$, показанным стрелкой *1* на рис. 6.3*б*.

Отсюда следует, что расстояния между последовательными изобарами увеличиваются в районе выпучивания, как это показано на рис. 6.3*д*. Результатом этого перераспределения давления является РТН.

Примеры стационарных конфигураций при столкновении потоков. Выше речь шла о физических основах РТН в стандартном случае. Посмотрим, могут ли они быть распространены на нестандартный случай (6.2). Перед этим приведем краткий перечень этих случаев.

Заменим ось t на рис. 6.3*г*, *д* на цилиндрическую[10] ось z. Поток, показанный на рис. 6.3*г*, является потоком, возникающим при выпуске

[10]Возможны $2D_a$ цилиндрический (r, z) и $2D_p$ плоский (x, y) случаи.

недорасширенной струи (Smith, 1966; Гостинцев и др., 1969; Зак, 1969; Васильков, Мурзинов, 1974; Храмов, Чекмарев, 1976; Иванов, Киреев, 1976; Smarr, Norman & Winkler, 1984).[11] Течение, очень похожее на показанное на рис. 6.2*г*, *д* (с заменой осей $r \to t$), возникает и в интересной задаче о разлете в окружающую газовую среду продуктов детонации длинного цилиндрического[12] заряда, детонация которого инициируется с конца цилиндра и поток остатков детонации и окружающего газа (Мержиевский, Филимонов, 1977).

В случае струи, показанной на рис. 6.2*д* ($t \to z$), расширения струи на жаргоне называются бочками *1*, а сжатия струи — узлами *2*. В сжатиях–узлах давление проходит через максимумы.

Еще три стационарных аналога нестационарных течений, представленных на рис. 6.2*д* и 6.3*а*, показаны на рис. 6.4*а* (столкновение сверхзвук/сверхзвук, две УВ (SW)), 6.4*б* (сверхзвук/дозвук, левая половина рисунка и дозвук/дозвук — правая), 6.4*в* (дозвук/дозвук). В случае, при-

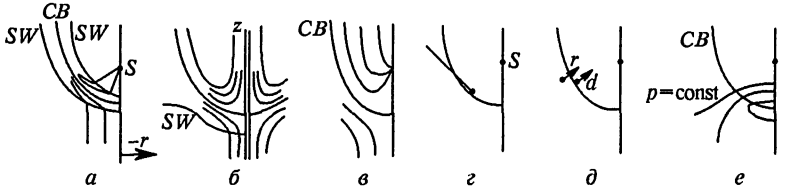


Рис. 6.4. (*а*) Пересечение потоков двух сверхзвуковых источников. Один из них это точечный источник S, тогда как другой представляет собой поток вещества, движущийся на этом рис. снизу вверх. Показаны сжатый слой, граница контакта (CB), линии тока и ударные волны (SW). (*б*) Столкновение дозвуковой струи (она приходит сверху) с дозвуковым (правая половина рис.) и сверхзвуковым (левая половина) потоками. (*в*) То же, что и на рис. (*а*), в дозвуковом случае. (*г*) Возможен ли здесь отрыв частицы, аналогичный показанному на рис. 6.3 (*б*, (*в*)? (*д*) Нормальные к границе CB составляющие ∇p внутри (d) и снаружи (r) от CB. (*е*) Граница CB и изобары. Структура линий тока и изобар не зависит от отношения μ

веденном на рис. 6.4*а* имеются два сверхзвуковых источника. Один из них находится в точке S, а другой представляет собой внешний (по отношению к S) однородный сверхзвуковой поток. Из-за их пересечения возникает сжатый слой, ограниченный двумя УВ (SW). Внутри слоя имеется граница контакта (CB). Этот пример может соответствовать пересечению газоплазменного потока от ядра кометы и солнечного ветра (в газодинамическом приближении), или столкновению звездного ветра от движущейся относительно межзвездной среды звезды и межзвездного газа.

Еще один пример показан на рис. 6.4*б*. Сталкивающиеся потоки могут быть как дозвуковыми, так и сверхзвуковыми (ср. рис. 6.4*а* и 6.4*в*). В правой части рис. 6.4*б* показано столкновение двух дозвуковых потоков, а в левой — столкновение дозвукового и сверхзвукового потоков.

[11] Имеется большое число работ, посвященных такого рода стационарным и нестационарным струям. Здесь приведен далеко не полный их список.

[12] Или в виде плоского листа.

Рис. 6.4*б* отличается от рисунков 6.4*а*, *в* еще и тем, что на нем вместо сплошного потока от изотропного источника S рассматривается случай, когда один из потоков является струей[13] (ограничимся случаем дозвуковых струй). На рис. 6.4*б* струя (ограниченный по ширине поток) находится в верхней части рисунка. Она сталкивается с однородным потоком, показанным в нижней части рисунка. Динамический напор неограниченного потока поворачивает ограниченную струю. Похожее гидродинамическое взаимодействие, поворачивающее струю, приводит к образованию грибов на концах струй. Последние в свою очередь возникают вследствие РТН и НРМ. Этот вопрос рассматривается в главе, посвященной периодическим решениям.

После этого отступления, связанного с описанием примеров, вернемся к вопросу о физических принципах. Сравним нестационарное (рис. 6.3) и стационарные (рис. 6.4) пересечение потоков. Ограничимся несжимаемым случаем (рис. 6.4*в*).

Стационарный случай и РТН. Необходимо выяснить ответ на следующий вопрос. Течение, показанное на рис. 6.3, неустойчиво по отношению к РТН — амплитуда "выпучивания" границы растет. Спрашивается, будет ли внешне похожий поток, представленный на рис. 6.4*в*, также неустойчив?

Пусть плотность жидкости ρ_{d} из источника S на рис. 6.4*в* велика по отношению к плотности однородного потока ρ_{r}, подходящего к КГ (СВ) на этом рисунке снизу. Казалось бы амплитуда выпучивания тяжелой жидкости на КГ по тем же причинам, что и на рис. 6.3, должна расти, см. рис. 6.4*г*. Если это было бы так, то при $\mu \to 0$ лагранжева частица плотной жидкости, "высунувшаяся" за КГ, двигалась бы далее (после "высовывания") в жидкости малой плотности по прямой, касательной к КГ, так, как показано на рис. 6.4*г*. Соответственно инкремент должен был бы включать как неустойчивость Кельвина–Гельмгольца (НКГ), так и РТН. Тогда в квазиклассическом пределе ($kR \gg 1$, k — радиус кривизны КГ) было бы $\gamma^2 \approx \mu(kv)^2 + gk$ (при $\mu \ll 1$) или $(R/v) \approx \sqrt{\mu(kR)^2 + kR}$. В последнем соотношении использована формула центробежного ускорения $g \simeq v^2/R$.

Фактическая ситуация не столь тривиальна. Ниже мы покажем, что если (i) тяжесть отсутствует; (ii) поток установившийся и (iii) вещества несжимаемы[14], то "эффективное число Атвуда" γ^2/gk равно нулю и КГ нейтрально устойчива по отношению к РТН[15].

Действительно, для РТН важно то, что градиент давления испытывает скачок на КГ, как это показано на рис. 6.2*в*. В этом случае мы имеем $\xi \neq 1$, где $\xi = |(\nabla p)^{\mathrm{r}}_{\mathrm{n}}|/|(\nabla p)^{\mathrm{d}}_{\mathrm{n}}|$, см. рис. 6.4*д*, на котором эти нормальные составляющие градиентов показаны стрелками r и d.

[13] Пример "удара" струи в УВ приведен ниже, см. рис. 7.2*в* в § 7, точки J и J'.

[14] Стационарные сверхзвуковые случаи, показанные на рис. 6.4*а*, *б* (левая половина), требуют отдельного анализа. Возможно, что вопрос относительно роли РТН в этих случаях может быть решен при использовании комбинации приближения тонкого ударно сжатого слоя (Черный, 1959) с квазиклассическим (ВКБ) приближением.

[15] НКГ остается.

В рассматриваемом "центробежном" случае мы имеем $\xi = \mu(v^{\mathrm{r}}/v^{\mathrm{d}})^2$. Из-за баланса динамических напоров $\rho v^2/2$ отношение градиентов ξ не будет стремиться к нулю при $\mu \to 0$. Напротив, будет выполняться $\xi \simeq 1$ независимо от значения μ.

Из этого качественного рассмотрения следует, что "эффективное число Атвуда" $\mathrm{A} = \gamma^2/gk$ не стремится к 1, когда $\mu \to 0$. Следовательно, соотношение $(R/v)\gamma \approx \sqrt{\mu(kR)^2 + kR}$, основанное на предположении, что и в центробежном случае мы имеем $A \to 1$, когда $\mu \to 0$, подобно стандартному случаю, является не правильным. В нем необходимо учесть "эффективное число Атвуда" A. Тогда оно примет вид $(R/v)\gamma \approx \sqrt{\mu(kR)^2 + \mathrm{A}kR}$.

Представим точное доказательство. Как видим, оно заключается в вычислении A. Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 6.4*в*. Для установившегося несжимаемого процесса без силы тяжести в плоском случае имеем следующее выражение для комплексного потенциала скорости:

$$f(z) = \frac{\dot{M}}{2\pi\rho} \ln z - ivz, \tag{6.3}$$

где $\dot{M}$ — мощность источника S в расчете на единицу длины, v — скорость однородного потока, $z = x + iy$, x является горизонтальной и y вертикальной координатами (горизонтальное и вертикальное направления относятся к направлениям вправо и вверх на рис. 6.4*в* соответственно).

Расстояние между точкой S и точкой торможения есть $\mathrm{r}_\star = \dot{M}/2\pi\rho v$. Функция тока есть $\psi = \Im f$. В полярных координатах (r, α) на плоскости (x, y) линии тока $\mathrm{r} = \mathrm{r}(\alpha)$, являющиеся линиями уровня функции тока $\psi(\mathrm{r}, \alpha)$, равны $\tilde{\mathrm{r}} = (\alpha - \tilde{\psi})/\cos\alpha$, где выбраны следующие нормировки: $\tilde{\mathrm{r}} = \mathrm{r}/\mathrm{r}_\star$ и $\tilde{\psi} = \psi/(\dot{M}/2\pi\rho)$.

КГ является линией тока, совпадающей с линией уровня

$$\tilde{\psi} = 3\pi/2. \tag{6.4}$$

Пусть источники производят жидкости с различными плотностями. Тогда на сепаратрисе точки торможения (6.4) функция ρ испытывает скачок.

Изменим приведенные выше выражения для того, чтобы описать случай различных плотностей. Обозначим $\rho^{\mathrm{d}} = \rho$ и $\rho^{\mathrm{r}} = \mu\rho$.

Из теоремы Бернулли и условия непрерывности давления на КГ следует, что

$$f^{\mathrm{d}} = f \tag{6.5}$$

и

$$f^{\mathrm{r}} = f/\sqrt{\mu}, \tag{6.6}$$

где $f(z)$ дается (6.3), а потенциалы f^{d} и f^{r} относятся к плотной и малоплотной жидкостям соответственно.

При подобии потенциалов f^{d} и f^{r} формы линий тока остаются такими же, как в случае (6.3). Как видим, скорость малоплотной жидкости увеличивается в $1/\sqrt{\mu}$ раз.

Рассмотрим теперь поведение ∇p на контактной границе (КГ). Структура изобар для случая $\mu = 1$ показана на рис. 6.4*е*. Имеется бугор повышенного давления, связанный с точкой торможения. Ему соответствуют замкнутые изобары вокруг этой точки.

Чтобы решить вопрос об РТН в "центробежном" случае, нам необходимо вычислить параметр ξ на скачке плотности. Легко видеть, что распределение p на всей плоскости (x, y) остается тем же самым, что и в случае $\mu = 1$, вне зависимости от величины μ. Это следует из формул (6.5) и (6.6). Следовательно, $\xi = 1$ всюду, а значит, и на КГ. Поэтому изобары не имеют излома касательной к изобаре на КГ и их графики остаются такими же, как на рис. 6.4*е*, при любых значениях μ.

Из этого можно заключить, что при стационарном или "центробежном" столкновении потоков течение оказывается нейтральным по отношению к РТН.[16] Соответственно "эффективное число Атвуда" A равно нулю, и слагаемое с РТН из формулы комбинированного (НКГ + РТН) инкремента $(R/v)\gamma \approx \sqrt{\mu(kR)^2 + \mathrm{A}kR}$ выпадает.

Неоднородная в лагранжевых координатах объемная сила и РТН. Подчеркнем, что вывод относится к случаю, в котором давление p на КГ на плотную жидкость полностью определяется динамическим напором малоплотной жидкости. Возможны и другие случаи, в которых центро-

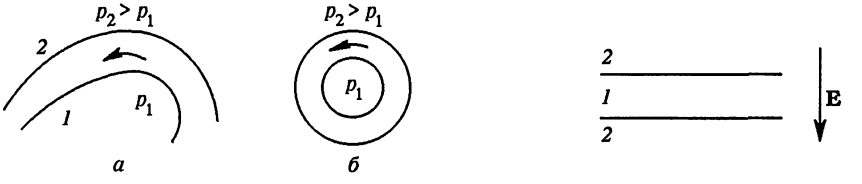


Рис. 6.5. (*а*) Отклонение плоской струи за счет разности статических давлений на ее сторонах. Статическими являются давления в покоящихся жидкостях 1 и 2, окружающих струю. (*б*) Слой, вращающийся в покоящейся жидкости

Рис. 6.6. Любая (а не только неоднородность удельных весов и гравитационное поле) неоднородная объемная сила приводит к РТН

бежное ускорение приводит к неустойчивости, похожей на РТН. Они представлены на рис. 6.5.

На рис. 6.5*б* показан вращающийся цилиндрический слой. Его равновесие поддерживается посредством разности давлений на внешней и внутренней сторонах. Это давления покоящейся или медленно [17] вращающейся жидкости. Такое равновесие неустойчиво[18].

Отметим еще одно обстоятельство. К РТН приводит объемная сила, связанная с лагранжевыми частицами и неоднородно распределенная по ним, см. рис. 6.6. Симметричный (на рис. 6.6 плоский) слой 1 однородно объемно заряженной (непроводящей) жидкости находится в равновесии

[16] Тот же вывод следует и для случая взаимодействия струи и неограниченного потока, показанного в правой половине рис. 6.4*б*.

[17] По сравнению со слоем.

[18] Если $\mu \ll 1$, то оторвавшиеся от внешней границы частицы вращающейся жидкости будут лететь по касательным к границе аналогично тому, как это показано на рис. 6.4*г*.

в окружающей незаряженной жидкости *2* в электрическом поле **E**, если вектор **E** перпендикулярен слою. В жидкости *2* возникает разность давлений, компенсирующая электрическую силу. Эта жидкость опирается на удаленную в бесконечность стенку.

В силу сказанного в §§ 2, 3 и выше в § 6 очевидно, что это равновесие будет неустойчиво по отношению к РТН (энергетическая выгодность перестановок).

Причем отношение плотностей жидкостей *1* и *2* может быть произвольным ($\mu < 1$ и $\mu > 1$). На линейной стадии возмущенное движение симметрично относительно жидкостей *1* и *2*. На нелинейной стадии образуются широкие пузыри малоплотной и узкие струи плотной жидкостей независимо от того, какая из них является носителем объемной силы.

6.4. Взаимодействие вихрей с ударной волной: обрезание спектра со стороны длинных волн и выпучивания ударной волны

Выше мы видели, что в сверхзвуковом случае возле контактной границы находятся две ударные волны. Если КГ неустойчива в РТ смысле, то в ее окрестности происходит обмен (перестановки) между легкой и тяжелой жидкостями. Эти перестановки — результат существования двух противоположно направленных потоков. Они имеют вид перемежающихся пузырей и струй.

Толщина сжатого слоя зависит от термодинамических параметров (от значений показателей адиабаты κ) и излучения[19]. Напротив, толщина слоя перемешивания и средний размер пузырей зависят от закона замедления сжатого слоя в целом. Этот закон определяется потоками массы и импульса от внешних источников и не зависит от термодинамики и излучения. Поэтому возможна ситуация, в которой сжатый слой настолько тонок, что пузыри (а при некоторых условиях и струи) взаимодействуют с ударными волнами.

В случае УВ и КГ, показанных на рис. 6.2*г*, пузыри находятся в плотном подслое $r_{SW} < r < r_{CB}$ сжатого слоя между внутренней УВ и КГ, см. распределение ρ на врезке. Поэтому они взаимодействуют с внутренней УВ. Струи находятся в "пробке" между КГ и внешней УВ. Они могут взаимодействовать с внешней УВ. Пример взаимодействия струи и УВ показан на левой половине рис. 6.4*б*. Обсуждению течений такого вида посвящен п. 7.2.

Таким образом, при "сверхзвуковой" РТН течение состоит из двух внешних сверхзвуковых и одной внутренней дозвуковой зон. Обмен веществ происходит в зоне, прилегающей к контактной границе (КГ). При определенных условиях поднимающиеся и опускающиеся термики[20] могут приближаться к одному или обоим фронтам ударных волн (УВ), ограничивающих зону перемешивания.

[19] Значения κ определяют сжатие в УВ. При близких к единице κ и достаточно больших величинах чисел Маха газ сильно сжимается, и сжатые слои получаются тонкими. В том же направлении действуют радиационные потери сжатого слоя.

[20] В другой терминологии поднимаются пузыри, а опускаются струи. Мы говорим здесь о термиках (т. е. о движущихся разнотемпературных блоках вещества) в связи с тем, что в некоторых приложениях (например, взрыв) важны процессы турбулентного нагрева и охлаждения. В таких приложениях внимание акцентируется на том, что опускаются холодные, а поднимаются горячие блоки вещества.

В сжимаемом случае масштабом стратификации в поле тяжести является высота однородной атмосферы $H = c^2/g$, где c — скорость звука. Сравним толщины слоев тяжелого и легкого газов, прилегающих к КГ. Из-за разности в скоростях звука масштаб $H_\text{г}$ для легкого газа существенно больше масштаба $H_\text{д}$ для тяжелого газа: $H_\text{г}/H_\text{д} \simeq \mu$. Эта оценка следует из условия непрерывности давления на КГ и предположения о том, что показатели адиабаты в легком и тяжелом газах одного порядка.

Обычно толщина ударно сжатого слоя тяжелого газа порядка высоты $H_\text{д}$ для этого газа. Спад плотности при уменьшении r на рис. 6.2*г* (врезка; ход плотности, взятой в сечении A–A) в промежутке между КГ (СВ) и внутренней УВ (SW), находящейся ближе к центру $r = 0$, обусловлен стратификацией тяжелого газа в эффективном поле тяжести. Если толщина подслоя тяжелого газа порядка $H_\text{д}$, то на этой толщине происходит спад плотности на величину порядка единицы (т. е. плотности на КГ и УВ отличаются в разы).

Предельный размер термика ограничен масштабом $\simeq H_\text{д}$. Наибольшие термики, состоящие из тяжелого холодного газа, пролетают расстояния порядка толщины слоя легкого горячего газа и в случаях, далеких от приближения Буссинеска, когда плотности газов существенно отличаются, разгоняются до околозвуковых скоростей. Во всяком случае, они могут догонять фронт внешней ударной волны, движущейся с околозвуковой скоростью относительно газа, прошедшего волну. Эта волна, движущаяся по легкому горячему газу, показана на рисунках 6.2*г*, *д*.

Отметим, что аналогичное выпадание плотных термиков наблюдается и при околозвуковой конвекции (см., например, работу (Cattaneo, et al., 1990)). При этом в случае тепловой конвекции достигается тепловой поток порядка предельного газодинамического потока, равного произведению плотности внутренней энергии на скорость звука. Приближение Буссинеска при этом становится неприменимо для описания конвекции.

Из сказанного следует, что со стороны больши́х масштабов спектр допустимых размеров термиков ограничен размером порядка высоты однородной атмосферы. Это обусловлено балансом массы, втекающей в ударную волну, и массы, перемешиваемой в результате РТН.

Появление этого важного ограничения является наиболее ярким примером сильного влияния сжимаемости и связанных с нею УВ на механику РТН.

Явление обрезания спектра k со стороны больших масштабов было обнаружено независимо по разным поводам в ряде работ. Приведем эти работы: Gull (1975) обнаружил это в связи с неустойчивостью разлета остатков сверхновых; Arons & Lea (1976) — в связи с неустойчивостью ударно сжатых слоев, окаймляющих магнитосферы замагниченных компактных звезд; Anisimov, Zel'dovich', Inogamov & Ivanov (1983) и Иногамов (1985) обнаружили существование этого ограничения масштабов при разлете продуктов детонации; Игуменщев (1989) в планетарных туманностях.

Глава II
ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим приложения теории неустойчивости в физике высоких плотностей энергии, в физике реагирующих систем, а также в астро- и геофизике.

§ 7. Физика высоких плотностей энергии

Как известно, процессы концентрации, кумуляции или фокусировки вещества и энергии обычно сопряжены с развитием гидродинамических неустойчивостей. Данные неустойчивости играют важную роль при этих процессах, поскольку именно степень их развития определяет величину максимальной концентрации вещества и энергии. Между тем для приложений, связанных с лазерным или ионным инерционным синтезом, важно путем фокусировки добиться возникновения плотного комочка вещества с высокой плотностью энергии в нем. Дело в том, что плотности вещества и энергии вместе с размером комочка определяют количество ядерных реакций, поток нейтронов и, следовательно, энергетическую эффективность процесса в целом.

В другой типичной ситуации неустойчивость возникает вследствие создания состояний с высокой плотностью энергии в веществе. Такие состояния появляются при воздействии мощных лазерных, ионных или электронных пучков на первоначально однородные или слоистые мишени или как следствие химического выделения энергии в ограниченном объеме одного вещества внутри другого. Пространственная неоднородность плотности энергии служит причиной динамических явлений, которые в зависимости от условий эксперимента могут носить разнообразный характер. Общим для всех этих ситуаций является то, что после или в течение выделения энергии происходит расширение вещества из области с высокой плотностью энергии, т. е. с высоким давлением, либо в вакуум, либо в материальную среду. Причем при расширении происходит ускорение контактных границ, на которых в соответствии с начальными условиями (слоистые мишени) может испытывать скачок плотность. Это может быть причиной гидродинамических неустойчивостей рэлей-тейлоровского или (при наличиии импульсных ускорений) рихтмайер-мешковского типов, которые, таким образом, могут иметь неустранимый характер, тесно связанный со спецификой расширения.

7.1. Неустойчивость сферических границ. Дробление пузырьков и капель

Радиальное движение сферически симметричного пузырька в неограниченной вязкой несжимаемой жидкости описывается хорошо изученным уравнением Рэлея–Ламба (Биркгоф, Сарантонелло, 1964, гл. XI, пп. 1–3; Биркгоф, 1963, § 52; Нигматулин, 1987, т. I, гл. 1, § 3). Линейная стадия развития возмущения на сферической границе в отсутствие поверхностного натяжения и вязкости подчиняется уравнению

$$R_0(t)\ddot{a}_l + 3\dot{R}_0(t)\dot{a}_l - (l-1)\ddot{R}_0(t)a_l = 0,$$

где $R_0(t)$ дает закон невозмущенного движения границы, а $a_l(t)$ — амплитуда при полиноме Лежандра l-го порядка возмущения границы. Разложения по сферическим функциям рассматривались в работах (Riabouchinsky, 1927), одна из первых работ по РТН; (Demtchenko, 1927); (Cole, 1948, с. 311) и многих других (см. обзор Kull, 1991).

В случае осциллирующих пузырьков неустойчивость (РТН) появляется при торможении границы пузырька из-за противодавления внутренних газов и паров в окрестности минимального значения радиуса (Биркгоф, Сарантонелло, 1964, гл. XI, пп. 11–13; Биркгоф, 1963, § 52; Нигматулин, 1987, т. I, гл. 2, § 2). Развитие РТН приводит к ослаблению последовательных пульсаций. Пульсациям подводных полостей и явлениям на поверхности жидкости при подводном взрыве (образование султанов и струй) посвящен подробный обзор, сделанный Кедринским (1978). Пульсации цилиндрических полостей, образующихся, например, при электрическом или лазерном пробое, посвящена работа Кедринского (1976).

Современный обзор РТН в случае цилиндрических и сферических границ при самых разных зависимостях $R_0(t)$ для случая как неограниченной, так и слоистой (например, оболочка) жидкости дан в работе (Kull, 1991).

Приложения неустойчивости к теории дробления пузырьков рассматривались в ряде книг и обзоров (Левич, 1959; Воинов, Петров, 1976; Plesset & Prosperitty, 1977; Ивандаев и др., 1981). Это может быть дробление при кавитационном захлопывании в зоне повышенного давления или дробление при прохождении ударной волны через пузырьковую среду. Анализу технических вопросов, связанных с кавитацией, посвящена книга (Кнепп и др., 1974). Очень сложным оказывается процесс разрушения капель, в котором важны гидродинамические неустойчивости (Гельфанд и др., 1974; Ивандаев и др., 1981; Борисов и др , 1981; Гонор, Ривкинд, 1982). Подробному анализу физических процессов и неустойчивостей при разрушении одиночных и неодиночных пузырьков и капель посвящены книги (Нигматулин, 1987).

Неустойчивость (РТН) при кипении приводит к разрушению паровых пленок, изолирующих нагревающую поверхность от жидкости (Кутателадзе, 1951; Chang, 1957; Zuber, 1958, Несис, 1973, Panzarella et al., 1995).

Рассматривалась РТН на границе несферических пузырей. Это могут быть одиночные компактные большие пузыри, всплывающие в неограниченной жидкости. В установившемся состоянии они имеют форму перевернутой чашки (Davies & Taylor, 1950; Walters & Davidson, 1962, 1963; Овсянников, 1970; Baker & Moore, 1989). Эти пузыри имеют ограниченный объем. Они изучались теоретически, численно и экспериментально. Рассматривались как процессы перехода, так и установившиеся состояния.

Переход заключался в следующем. В начальном положении внутри жидкости имеется неподвижная газовая полость сферической формы, изучается эволюция границы этой полости от сферической к чашковидной или серповидной форме. При достаточно больших значениях числа Вебера $\mathrm{We} = 2\rho g R^2/\sigma$ сферическая газовая полость разрушается, здесь и далее σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, R — характерный начальный размер полости. При этом вместо чашковидного пузыря образуется тороидальное облако (Жидов и др., 1977), состоящее из более мелких пузырей, для которых значение числа Вебера, вычисленное по их размеру, порядка единицы (разрушение в $2\mathrm{D_p}$ случае рассматривалось в работе (Rowe & Partridge, 1964)). Грибовидное тороидальное облако образуется и при подъеме горячего газового пятна (Онуфриев, 1967).

Геометрически источники могут быть компактными (уединенные термики) или протяженными в виде горизонтальных слоев нагрева или охлаждения (конвекция, горизонтальная квазипериодическая структура термиков, иерархия или каскад этих структур по вертикали). Всплывание термиков, возникающих в силу разных причин, например от лесных пожаров, изучалось в работах (Morton et al., 1956; Morton, 1956; Malkus & Witt, 1956; Тарасов, 1957; Turner, 1957; Ogura, 1962; Гутман, 1969; Мальбахов, 1972; Гостинцев и др., 1982).

Устойчивость чашко- или серповидных пузырей рассматривалась в работах (Dagan, 1975) и (Baker, Moore, 1989).

В другом случае несферические пузыри являются длинными или снарядными. Они поднимаются в трубах и имеют неограниченный объем. Такие пузыри возникают при опорожнении длинных вертикальных труб, наполненных жидкостью, с запаянным концом сверху при открытии задвижки (Davies & Taylor, 1950), запирающей трубу снизу. Они имеют самое непосредственное отношение к РТН (Garabedian, 1957; Birkhof & Carter, 1957; Vanden-Broeck, 1984).

Если размер ограниченного пузыря мал по сравнению с диаметром трубы, то скорость его подъема равна

$$v \approx 0,5\sqrt{gR} \approx (0,58 - 0,68)\sqrt{g\sqrt{S}} \tag{7.1}$$

в 2D случае (или более точно в $2\mathrm{D_p}$ случае) и

$$v \approx \frac{2}{3}\sqrt{gR} \tag{7.2}$$

в осесимметричном $2D_a$ случае (индексы p и a относятся к плоской и осесимметричной геометриям). Формулы (7.1) и (7.2) справедливы при достаточно больших значениях чисел Вебера и Рейнольдса. Считается, что пузырь принимает форму сегмента цилиндра (круга) в $2D_p$ случае (Gilbarg, 1960, с. 350; Garabedian, 1961, с. 365; Walters & Davidson, 1962; Rowe & Partridge, 1964; Collins, 1965, 1967) и сферического сегмента в $2D_a$ случае (Davies & Taylor, 1950; Walters & Davidson, 1963). Углы, под которыми видны края сегмента из центра вписанного в вершину круга или сферы, равны $\approx 53°$ (в $2D_p$ случае) (Walters & Davidson, 1962; Collins, 1965) и $\approx 46° - 64°$ (в $2D_a$ случае) (Davies & Taylor, 1950; Walters & Davidson, 1963; Batchelor, 1967, с. 476). Плотностью газа пренебрегают, S — площадь поперечного сечения $2D_p$ пузыря. Пузырь мал, если мал его характерный размер R (радиус кривизны в вершине) ($2D_p$ и $2D_a$ случаи), $\sqrt{S}$ (случай $2D_p$) или $V^{1/3}$ (случай $2D_a$) по сравнению с диаметром трубы λ (случай $2D_p$) или $2R_a$ (случай $2D_a$), здесь и далее V — объем ограниченного $2D_a$ пузыря.

Коэффициенты 1/2 и 2/3 получаются, если ограничиться разложением до квадратичных членов кинематического и динамического граничных условий. Систематическая теория таких разложений будет дана в главе, посвященной периодическим или одномодовым решениям. Если в $2D_p$ геометрии использовать точное решение Жуковского, полученное в 1891 г. (Жуковский, 1935–1937, т. 3, с. 371), в виде арки циклоиды, то коэффициент 1/2 в (7.1) изменится на несколько процентов (Gilbarg, 1960, с. 350; Garabedian, 1961, с. 365).

Согласно (7.1) и (7.2), v увеличивается при росте R, $\sqrt{S}$ или $V^{1/3}$ при фиксированных диаметрах λ или $2R_a$. Формулы (7.1) и (7.2), описывающие свободный пузырь, завышают скорость v в области "горловины" ($R \sim \lambda$, $\sqrt{S} \sim \lambda$, $R \sim 2R_a$, $V^{1/3} \sim 2R_a$). Это обусловлено "стеснением" пузыря стенками трубы, замедляющими его движение.

В случае бесконечно длинного (снарядного) пузыря его предельная (при $\sqrt{S}/\lambda \to \infty$, $V^{1/3}/2R_a \to \infty$) скорость равна

$$v \approx 0,59\sqrt{g/k}, \quad k = 2\pi/\lambda \quad (2D_p), \tag{7.3}$$

(Layzer, 1955; см. также главу о периодических решениях)

$$v \approx 0,46\sqrt{gR_a} \quad (2D_a) \tag{7.4}$$

(Davies & Taylor, 1950, с. 387). Формула (7.4) следует из разложения потенциала скорости в ряд по функциям Бесселя.

В $2D_p$ случае кривизна предельного пузыря R_∞ равна $R_\infty \approx 2,7/k$ (см. главу о периодических решениях). Здесь скорость предельного "стесненного" пузыря v_∞ на $\approx 40\%$ меньше скорости свободного пузыря $v_{free} \approx 0,5\sqrt{gR_\infty}$ с равным значением кривизны в вершине $v_{free}/v_\infty \approx \approx \sqrt{2,7}/1,18$. Эта величина получается из формул (7.1) и (7.3).

При малом поверхностном натяжении их поверхность неустойчива по отношению к мелкомасштабной РТН (Rowe & Partridge, 1964; Dagan,

1975; Жидов и др., 1977; Baker & Moore, 1989; Иногамов, Чехлов, 1991). И в случае компактных, и в случае длинных пузырей теоретическое рассмотрение ведется в квазиклассическом приближении (ВКБ подход), справедливом, когда длина волны мелкомасштабного возмущения мала по сравнению с размером невозмущенного пузыря. Численный расчет мелкомасштабных возмущений проводился в случае одиночного ограниченного пузыря в работе (Baker, Moore, 1989) (метод поверхностных интегралов), а в случае РТ (длинных или снарядных) пузырей в работах (Иногамов, Чехлов, 1991) и (Ofer et al., 1992) (сквозное численное моделирование).

Итак, вопросы о пузырьках и каплях и их дроблении существенны в приложениях, связанных с физикой реагирующих систем, химической технологией и энергетикой (например, транспорт паро-жидкостных смесей в энергетических установках). В связи с этим рассматриваются (i) механика больших пузырей, (ii) критические значения числа Вебера, отделяющие режим с одиночным большим пузырем от режима с образованием ансамбля мелких пузырей, и (iii) динамика ансамбля в сильно закритических режимах.

7.2. Расширение продуктов детонации или продуктов лазерного воздействия на мишень в окружающую среду

Замечания о динамике важной задачи о взрыве и взаимодействии его продуктов с тормозящим разлет газом были сделаны в п. 6.2 и п. 6.4. Там внимание было сосредоточено на механических аспектах этой проблемы.

В п. 6.2 говорилось о столкновении сверхзвуковых потоков от нестационарных источников. Нестационарность приводила к появлению эффективной гравитации.

В п. 6.4 говорилось о столкновении сверхзвуковых потоков и обусловленном их сверхзвуковым характером появлении двух ударных волн. Взаимодействие обменных движений (перемешивающих вихрей) с УВ в легком (нижняя УВ по отношению к эффективному ускорению $\mathbf{g}$ в системе координат, связанной с границей) и тяжелом (верхняя УВ) газах различно. Стабилизация перемешивания за счет верхней УВ приводит к появлению максимального масштаба РТ мод (обрезание спектра мод по k снизу)[1].

Это важный пример, в котором сжимаемость качественным образом меняет характер РТ турбулентности[2]. Искривления верхней и нижней УВ под действием перемешивания устроены по-разному. Верхнюю УВ искривляют пузыри, а нижнюю — струи[3]. Искривления верхней УВ

[1]Таким образом, сопряжение области стратификации продуктов детонации с верхней УВ контролирует пространственный масштаб РТ мод и, таким образом, темп поступления продуктов детонации в нижний слой, которым в этой задаче является ударно нагретый внешний (по отношению к продуктам детонации) газ.

[2]Обменные движения достигают околозвуковых скоростей (по малой скорости звука в тяжелом газе, скорость звука в легком газе значительно больше). Это приводит к тому, что исчезает субгармоническая неустойчивость и инверсный каскад.

[3]В тех случаях, когда струи достают до УВ.

плавные, а нижней более неровные. Искривления могут перемещаться по поверхности УВ.

Физика МГД-генераторов и импульсных световых источников. Здесь мы хотели бы вкратце остановиться на физических аспектах. Одно из основных приложений, в связи с которым проводились многолетние эксперименты, связано с магнитно-гидродинамическими (МГД) генераторами. Физика этих генераторов особенно тесно связана с РТН (Давыдов, Лебедев, Перков, 1979; Шурупов, 1983; Шурупов и др., 1985; Асиновский и др., 1991).

При расширении быстролетящих продуктов детонации химических ВВ (взрывчатых веществ) в газ в этом газе появляется сильная УВ. Она значительно разогревает газ. Поэтому возникает высокотемпературный ударно сжатый слой газа. На жаргоне экспериментаторов он называется пробкой. Она показана на рис. 6.2*г*, *д*. Пробка находится между УВ в газе (SW) и контактной границей (CB) между газом и продуктами детонации.

На рис. 6.2*г* показано сечение A–A течения на плоскости r, t диаграммы в некоторый фиксированный момент времени t_{obs}. Слева на врезке приведено распределение плотности $\rho(r, t_{\text{obs}})$ в симметричном случае. В случае химических ВВ температура газа в пробке достаточна для ионизации газа. Образующаяся плазма имеет (i) довольно высокую электропроводность σ и (ii) излучает. Температура газа снижается при замедлении границы и УВ, см. рис. 6.2*г*, *д*. Высокая электропроводность необходима для эффективной работы МГД-генератора.

Физические принципы работы генератора просты. Создается система, состоящая из цилиндрического заряда, находящегося на оси системы, и внешнего цилиндра, содержащего заряд на оси и газ вокруг него. Через газ проходит магнитное поле, параллельное оси цилиндра (Давыдов, Лебедев, Перков, 1979; Шурупов, 1983; Шурупов и др., 1985; Асиновский и др., 1991).

Образующиеся после инициирования заряда продукты детонации (i) создают плазменную пробку и (ii) гонят эту пробку в сторону магнитного поля. Она выталкивает поле в направлении от оси цилиндра. Пробка действует как диамагнитный поршень.

В результате во внешнем контуре индуцируется ЭДС. Часть кинетической энергии продуктов детонации перерабатывается при этом в электрическую энергию, выделяющуюся во внешнем контуре. Таким образом, эта система представляет собой импульсную электростанцию. Поэтому она и называется МГД-генератором или взрывомагнитным генератором.

В других приложениях важна вспышка излучения, возникающая из-за радиации плазменной пробки.

В случае генератора хорошая электропроводность необходима для того, чтобы скин-слой был тонок по сравнению с толщиной пробки. Толщина скина определяется электропроводностью. При высокой электропроводности пробка непроницаема для поля. При низкой электропроводности поле проходит через пробку-поршень. В этом случае пробка плохо выталкивает магнитное поле.

Чем хуже пробка выталкивает магнитное поле, тем ниже КПД системы. КПД равен отношению выработанной электроэнергии к энергии ВВ.

Температура в пробке такова, что обычно коэффициент ионизации α невелик $\alpha \ll 1$. Важно то, что при малом по сравнению с единицей коэффициенте ионизации α экспоненциально зависит от температуры T ($\alpha \propto \exp(-T/I_1)$, где I_1 — потенциал первой ионизации).

Неустойчивость приводит к перемешиванию продуктов детонации с веществом пробки. Температура продуктов низкая, а ударно нагретого вещества пробки высокая. Поэтому перемешивание ведет к охлаждению вещества пробки.

В силу сказанного относительно экспоненциальной зависимости от T даже небольшое охлаждение пробки приводит к резкому уменьшению коэффициента ионизации α. Это в свою очередь резко уменьшает электропроводность. Уменьшение электропроводности приводит к увеличению толщины скина, увеличению проницаемости поршня для магнитного поля и резкому снижению КПД системы.

В приложениях со вспышкой (импульсные световые источники) уменьшение температуры излучающей плазмы в пробке из-за перемешивания приводит к ослаблению интенсивности и яркости вспышки и укорочению ее продолжительности по сравнению с теми значениями, которые получаются при расчетах, не учитывающих влияния перемешивания.

Физическая специфика взрыва: тесная связь газодинамики и уравнения термодинамического состояния продуктов детонации. Обсудим физические причины, из-за которых продукты детонации являются (i) холодными и (ii) обладают большой сжимаемостью. Вследствие (ii) слой сжатых продуктов, находящихся между границей CB и внутренней УВ SW (см. рис. 6.2*г*, *д*), оказывается тонким. Это важно, поскольку тонкость приводит к тому, что пузыри из вещества пробки, образующиеся при перемешивании, "пробивают" этот тонкий слой сжатых продуктов детонации и взаимодействуют с УВ в продуктах. Следовательно, (ii) обуславливает появление масштаба, обрезающего спектр РТ мод.

Рассмотрим разлет продуктов взрыва в пустоту (о разлете газового облака в вакуум см. (Зельдович, Райзер, 1966)). Процесс делится на три стадии: начальную, переходную и асимптотическую. Продолжительность средней стадии порядка $t_0 = R_0/c_0$, где R_0 и c_0 — начальные размер и скорость звука.

На последней стадии продукты разлетаются по инерции. Величины p, ρ и T становятся очень малыми по сравнению с начальными значениями. Внутренняя энергия мала по сравнению с кинетической. Число Маха M велико (сверх-, а затем гиперзвук).

Устанавливается линейное распределение скоростей по координате. Расширение вещества становится однородным по облаку. Форма облака и распределение плотности "застывают" в лагранжевых переменных или при нормировке на текущий характерный размер разлетающегося облака. Подчеркнем, что получившееся "застывшее" распределение

плотности не является инвариантным. Оно зависит от уравнения состояния (УРС) вещества, а также от начальных распределений p, ρ и v. В случае, когда начальная форма облака несимметрична, то же относится и к асимптотической форме облака. Сказанное означает, что предельные распределение ρ и форма облака некоторым сложным образом зависят от УРС и начальных условий.

Связь асимптотической и начальной форм для частного случая эллипсоидов и специальных начальных распределений p, ρ и v рассматривалась в работах (Овсянников, 1957; Dyson, 1968; Анисимов, Иногамов, 1974) в книге Богоявленского (1980) и других работах.

Оказывается, что существенную роль в появлении обстоятельств (i) и (ii) (холодность и сжимаемость продуктов детонации) играет уравнение состояния продуктов детонации конденсированных ВВ. А именно, важна его двухступенчатость. Исследованию важного вопроса об адиабате разгрузки посвящена работа (Фортов, Дремин, 1975).

Согласно этой работе первая или начальная ступень разгрузки соответствует "жесткой" конденсированной (к-фаза), а вторая — "мягкой" газовой фазам. Переход между ступенями происходит довольно резко.

В "жесткой" к-фазе показатель адиабаты γ_1 очень велик. Типичные значения равны

$$\gamma_1 = 3,2 - 3,4. \tag{7.5}$$

Физически такие большие значения получаются из-за того, что в к-фазе малы межмолекулярные расстояния (плотная упаковка) и имеется сильное межмолекулярное отталкивание.

Пометим индексами 0, 1 и 2 значения, относящиеся к начальному состоянию, первой (жесткой, конденсированной) и второй (мягкой, газовой) ступеням соответственно. Значения, относящиеся к переходу между первой и второй ступенями, отметим звездочкой p_*, $V_* = 1/\rho_*$.

Первая стадия оказывается довольно затянутой по давлению. Это означает, что отношение начального (за фронтом детонационной волны) p_0 давления к переходному давлению p_* велико:

$$p_0/p_* \simeq 50. \tag{7.6}$$

Типичные значения равны $p_0 \approx 200$ кбар, $p_* \approx 3$ кбар.

В случае конденсированных ВВ такого типа установление асимптотической стадии разлета облака происходит быстро. Мы хотим сказать этим, что уже при весьма небольших линейных расширениях сферического заряда устанавливается гиперзвуковой режим разлета.

Такая яркая специфика газодинамики взрыва обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, существенна жесткость к-фазы (7.5). Во-вторых, важна затянутость по давлению (7.6). Вследствие (7.6) на выходе из к-фазы давление и внутренняя энергия малы по сравнению с начальными значениями. Следовательно, в кинетическую энергию разлета переходит почти вся начальная энергия. Поэтому текущее отношение кинетической энергии к внутренней велико уже на стадии смены ступеней УРС от первой (жесткой) ко второй (мягкой). Этим и обусловлены большие значения числа Маха M на стадии смены ступеней. Таким образом,

к смене ступеней (или раньше) устанавливается асимптотическая стадия разлета облака.

Из-за жесткости УРС (7.5) давление очень быстро падает при линейном расширении. Например, в сферической геометрии имеем

$$p \propto 1/R^{3\gamma_1} \approx 1/R^{10}!$$

Вследствие этого линейное расширение заряда при переходе к асимптотической стадии разлета невелико. Смена ступеней происходит при следующих значениях газодинамических параметров:

$$\mathrm{M} = \frac{v}{c} \simeq \left(\frac{p_0}{p_\star}\right)^{(\gamma_1-1)/2\gamma_1} \simeq 3,6,$$

$$\frac{R_\star}{R_0} = \left(\frac{V_\star}{V_0}\right)^{1/N}, \qquad \frac{R_\star}{R_0} = \left(\frac{V_\star}{V_0}\right)^{1/3} \simeq 1,4, \qquad V_\star/V_0 \simeq 3.$$

Здесь N — размерность пространства, $N = 1, 2, 3$ соответственно в плоской, цилиндрической и сферической геометриях.

К смене ступеней продукты детонации оказываются довольно холодными $T_\star/T_0 \simeq (V_0/V_\star)^{\gamma_1-1} \approx 0,1$.

Мягкость высокомолекулярной газовой ступени адиабаты и устройство слоя ударно сжатых продуктов детонации. Выше обсуждался разлет в вакуум. Рассмотрим теперь разлет при наличии противодавления p_c. Радиус остановки границы заряда $R_s = R(t_s)$ (t_s — момент остановки $\dot{R}(t_s) = 0$) и характерное значение тормозящего ускорения g оцениваются из энергетических соображений. Они равны

$$t_s/t_0 \simeq R_s/R_0 \simeq (p_0/p_c)^{1/N}, \tag{7.7}$$

$$g \simeq (R_0/t_0^2)\,(R_0/R_s).$$

В (7.7) N — размерность пространства. Облако продуктов детонации пульсирует с амплитудой $\simeq R_s$ и периодом $\simeq t_s$, см. рис. 6.2 *д*.

Обычно противодавления малы $p_c \ll p_0$, соответственно остановка происходит при больших расширениях $R_s \gg R_0$. Прилегающий к границе слой, в котором продукты детонации "знают" о том, что имеется конечное противодавление, отделен внутренней УВ от сверхзвукового облака. В области между этой УВ и центром продукты летят так, как в случае разлета в вакуум.

Замедление ударно сжатого слоя продуктов под действием противодавления эквивалентно появлению эффективной гравитации. Это поле прижимает продукты в слое к границе. В результате происходит дополнительное к сжатию в УВ сжатие продуктов детонации. Обычно при $t < t_s$ степени гравитационного и ударного сжатия одного порядка. Поэтому имеем

$$p_{sw}/p_c \lesssim 1, \qquad H \simeq \Delta R. \tag{7.8}$$

В (7.8) p_{sw} — давление за фронтом внутренней УВ, $H = dr/d\ln\rho$ — высота однородной атмосферы и ΔR — толщина слоя сжатых продуктов.

При $p_c < p_*$ на временах $t_0 < t < t_s$ толщина сжатого слоя мала

$$\Delta R \ll R, \tag{7.9}$$

здесь R — радиус границы. Тонкость слоя (7.9) вызвана большой сжимаемостью продуктов на второй ступени адиабаты разгрузки.

Согласно работе Фортова и Дремина (1975), на второй ступени показатель адиабаты мало отличается от единицы

$$\gamma_2 = 1,25 - 1,35. \tag{7.10}$$

Это обусловлено тем, что в результате довольно сильного адиабатического охлаждения происходит образование достаточно многоатомных молекул, имеющих много степеней свободы и соответственно близкое к единице отношение теплоемкостей γ_2.

Устройство пробки. В случае разлета в холодный газ с низкой температурой T_{g0} (по сравнению с начальной температурой T_0 продуктов детонации $T_{g0} \ll T_0$) начальным давлением газа при изучении динамики облака продуктов детонации можно пренебречь. В этом случае вместо (7.7) получаем

$$t_s/t_0 \simeq R_s/R_0 \simeq gt_0^2/R_0 \simeq (\mu_0)^{1/N}, \qquad \mu_0 = \rho_{g0}/\rho_0. \tag{7.11}$$

Эта оценка получается путем приравнивания массы газа, вовлеченного в движение, массе заряда. Здесь N — размерность пространства, ρ_{g0} и ρ_0 — начальные плотности газа и продуктов детонации, индексом g выделены переменные, относящиеся к газу. Опять имеются пульсации облака продуктов детонации, см. рис. 6.2*д*. Постепенно пульсации затухают из-за потерь на акустическое излучение и перемешивание.

К границе СВ, см. рис. 6.2*г*, *д*, прилегает слой ударно сжатого и нагретого газа (пробка). С одной стороны, граница сгребает газ (образование пробки), с другой стороны, она сгребает (или на границу нагребаются или выпадают) налетающие на нее продукты детонации (образование обратной или внутренней УВ и сжатого слоя в продуктах).

Из численных расчетов (Анисимов, Зельдович, 1977; Коробейников и др., 1977; Анисимов и др., 1983; Гальбурт, 1983; Шурупов и др., 1985) и экспериментов (Давыдов, Лебедев, Перков, 1979; Шурупов, 1983; Шурупов и др., 1985; Асиновский и др., 1991) известно, что плотность продуктов детонации в окрестности контактной границы (КГ) намного больше

$$\mu \ll 1, \qquad \mu = \rho_g(R+0)/\rho(R-0), \tag{7.12}$$

чем плотность вещества в пробке.

Поскольку давление на КГ непрерывно, то в силу (7.12) температура ударно нагретого газа гораздо больше температуры продуктов детонации. Продукты образуют темное облако, а пробка ярко излучает.

Соответственно скорость звука в газе гораздо больше скорости звука в продуктах. Поэтому стратификация в пробке (высота однородной атмосферы равна c^2/g) в эффективном поле тяжести незначительна. Из

уравнения гидростатики с однородным g, справедливого в случае тонкого слоя (7.9), условий на УВ, закона сохранения массы сгребаемого газа и предположения об однородности энтропии в пробке (это предположение справедливо по порядку величины; из него при незначительности весовой стратификации следует предположение об однородности плотности газа в пробке) получаем

$$\Delta R_g/R \approx (\gamma_g - 1)/N(\gamma_g + 1),$$

где ΔR_g — толщина пробки, γ_g — показатель адиабаты газа, N — размерность пространства.

Неустойчивость, турбулентность и перемешивание. Важнейшим свойством рассматриваемого течения является то, что отношение плотностей μ на контактной границе (КГ) меньше единицы (7.12). Это приводит к рэлей-тейлоровской неустойчивости границы. В результате в окрестности КГ возникает слой турбулентного перемешивания.

Посмотрим, чем поток с перемешиванием отличается от невозмущенного (симметричного, одномерного) потока. Довольно очевидно, что поскольку величины давлений за первой и второй УВ и радиус КГ R могут

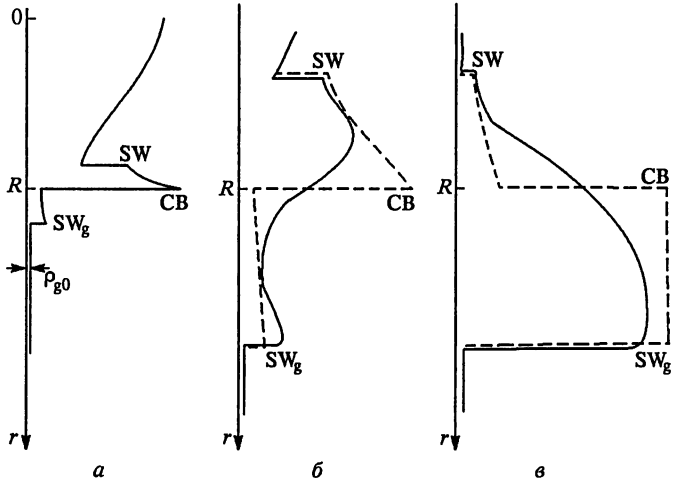


Рис. 7.1. Разница между потоками с "включенным" и "выключенным" перемешиванием. Распределения ρ *(а, б)* и T *(в)* в некоторый фиксированный момент времени. На рис. *(б, в)* область между двумя УВ показана в увеличенном виде. *(а)* Устройство ρ при "выключенном" перемешивании. *(б, в)* Распределения ρ и T при "выключенном" (штриховые кривые) и "включенном" (сплошные) перемешивании. Перемешивание приводит к размытию границы СВ и охлаждению газа в "пробке"

быть с хорошей точностью определены в приближении тонкого ударно сжатого слоя (Черный, 1959), то в том же приближении указанные величины нечувствительны к турбулентности.

Что касается распределений ρ и T в области между двух УВ, то они существенно перестраиваются. Это показано на рис. 7.1. На рис. 7.1*а*

представлено распределение плотности, взятое с рис. 6.2*г*. На рис. 7.1*б* показаны распределения ρ в области между ударными волнами SW (УВ в продуктах) и SW_g (УВ в газе). Сплошная и штриховая кривые относятся к случаям с перемешиванием и с "выключенным" перемешиванием. На рис. 7.1*в* такими же кривыми показаны распределения T. В случае с перемешиванием показаны усредненные по горизонтальным переменным распределения $\langle\rho\rangle$ и $\langle T\rangle$.

Для физических приложений наибольшее значение имеет охлаждение пробки, вызванное перемешиванием.

На рис. 7.2 приведена горизонтальная структура течения при наличии перемешивания.

Толщины слоев ΔR, ΔR_g и H_+ по-разному зависят от параметров задачи и от времени. На начальном этапе развития турбулентности перемешанный слой тонок

$$H_+ \ll \Delta R. \tag{7.13}$$

В случае (7.13) стратификация слоя ΔR несущественна для перемешивания. Турбулентность при этом является классической (свободной). Она

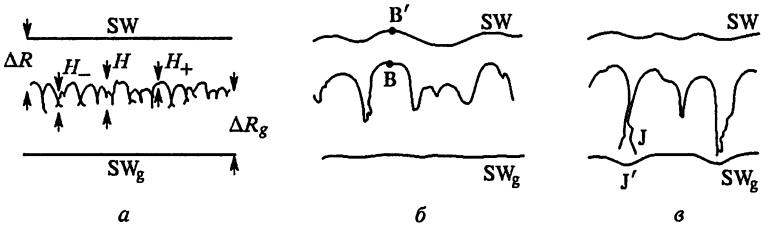


Рис. 7.2. Структура течения при наличии турбулентности. Свободная или классическая турбулентность (*а*): размер пузырей мал по сравнению с толщиной ΔR сжатого слоя продуктов детонации (режим (7.13)). Стесненная или насыщенная турбулентность (*б*): размер пузырей порядка ΔR (режим (7.14)). Граница пузыря в окрестности его вершины B имеет вид арки. (*в*) Взаимодействие струй J продуктов детонации с нижней УВ (SW_g). Напор струи J приводит к выпучиванию фронта УВ J′.

называется свободной, поскольку УВ в продуктах находится далеко от пузырей, и стратификация на масштабе порядка размера пузыря мала, см. рис. 7.2*а*.

Если параметр $\gamma_2 - 1$ (γ_2 — показатель мягкой ступени адиабаты) достаточно мал и соответственно слой ΔR достаточно тонок, то с течением времени достигается такой этап развития турбулентного слоя, на котором условие (7.13) перестает быть справедливым.

Толщины ΔR и H_+ становятся сравнимыми

$$H_+ \simeq \Delta R. \tag{7.14}$$

Пузыри B взаимодействуют с УВ. Они приводят к выпучиванию фронта УВ. Этот случай показан на рис. 7.2*б*. Пузырь B искривляет фронт УВ (сравни точки B и B′.) Обсуждению этих режимов посвящены работы (Anisimov et al., 1983) и (Иногамов, 1985).

Физика взрыва в разреженной атмосфере. Очень важное значение имеют турбулентность и перемешивание при взрывах конденсированных ВВ на больших высотах в сильно разреженной атмосфере. Роль турбулентности растет с уменьшением параметра μ_0 (7.11). Динамика разлета, перемешивания и пульсаций облака похожа на описанную выше.

Турбулентное перемешивание из-за РТН, фрактальность и интенсификация химических реакций. Турбулентность, обусловленная РТН, приводит к перемешиванию смежных веществ. Возникает слой перемешивания. На первом этапе перемешивания веществ образуется структура, состоящая из перемежающихся крупных блоков чистых смежных веществ *1* и *2*. Размеры этих блоков порядка масштаба $\langle\lambda\rangle$ структуры, доминирующей в слое.

Внутри слоя происходит дробление этих блоков на более мелкие. Имеется каскад дроблений, в результате которого образуется фрактальная или мультифрактальная иерархия блоков по размерам. Она покрывает всю область размеров от самого большого $\sim \langle\lambda\rangle$ до самого малого $l_{\min}$, размер которого определяется в случае газов и смешивающихся жидкостей молекулярной диффузией или вязкостью, а в случае несмешивающихся жидкостей — поверхностным натяжением или вязкостью.

Дробление неоднородно в пространстве. Мы хотим сказать, что в одних местах в слое перемешивания соседствуют большие блоки, а в других — мелкие или фрактальная смесь кусочков (блоков) разных размеров.

Рассмотрим плоский слой перемешивания. Проведем горизонтальную прямую через этот слой. Пусть те отрезки на этой прямой, которые проходят через вещество *1*, окрашены в один цвет, а через вещество *2* — в другой.

Рассмотрим множество точек контакта веществ, в которых меняется цвет. Разобъем прямую на равные отрезки. Пусть длина этих отрезков равна $\langle\lambda\rangle$. На каждом из этих отрезков множество точек контакта аналогично канторову множеству (см. Математическая энциклопедия, т. 2, с. 717). В этом и заключается фрактальность перемешивания.

При смещении горизонтальной прямой к краям слоя перемешивания начинает доминировать одна из красок и происходит вырождение канторова множества.

Проведем еще горизонтальную плоскость через слой перемешивания. Рассмотрим систему контактных кривых, разделяющих вещества *1* и *2* на этой плоскости. Опять поделим эту плоскость, как и в случае прямой, на квадраты размером $\langle\lambda\rangle \times \langle\lambda\rangle$.

Системы пятен краски в квадратах аналогичны ковру Серпиньского (Математическая энциклопедия, т. 3, с. 384), а запутанная дробящаяся контактная кривая — канторовой кривой.

Турбулентность, изучаемая в книге, возникает как следствие РТН и НРМ. Вопросы фрактализации и молекулярного перемешивания при этих неустойчивостях рассматривались в работе (Linden & Redondo, 1991). Вопрос об относительной доле веществ *1* и *2*, дошедших через каскад дроблений до блоков минимального размера $l_{\min}$, возникает и в

задаче о сепарации. Эта задача ставится следующим образом (Кучеренко и др., 1994). Рассматривается КГ в поле тяжести. Ускорение g меняет знак. В течение первого промежутка времени $0 < t < t_c$ знак ускорения соответствует неустойчивости. За это время возникает слой перемешивания. В момент t_c происходит смена знака. При $t > t_c$ стратификация устойчива (легкое над тяжелым). При $t > t_c$ фрагменты (блоки) тяжелого вещества, поднятые в слое перемешивания над полупространством, заполненным чистым тяжелым веществом, выпадают (оседают, седиментация) под действием силы тяжести на поверхность тяжелого вещества. Толщина перемешанного слоя уменьшается.

Важность вопроса о доле тонко перемешанных веществ в задаче об обратной сепарации обусловлена тем, что скорость сепарации, т. е. оседания взбаламученных перемешиванием при $t < t_c$ тяжелых блоков, на заключительной самой продолжительной стадии определяется оседанием наиболее тонко перемешанного тяжелого вещества (Кучеренко и др., 1994).

Темп выхода продуктов реакции при химических превращениях в объеме согласно уравнениям химической кинетики определяется концентрациями исходных компонентов, перемешанных на молекулярном уровне, и температурой. Поэтому любая турбулентность, приводящая к росту площади контакта химически взаимодействующих веществ и молекулярному перемешиванию, важна в химико-технологических процессах (Breidenthal, 1981; Бурико, Кузнецов, 1985). Здесь мы интересуемся частным случаем перемешивающей турбулентности, связанной с РТН и НРМ. Вопрос об РТ перемешивании и химических реакциях в связи с изучением догорания недоокисленных продуктов взрыва благодаря перемешиванию с окружающим воздухом рассматривался в работе (Kuhl, 1994).

Торможение лазерного факела окружающим газом. Рассмотрим воздействие лазерного излучения на мишень. В настоящее время имеется очень широкий диапазон интенсивностей I лазерного излучения $0 < I < 10^{20}$ Вт/см^2. Разным частям диапазона соответствует разная физика от плавления и испарения и инерционного синтеза до фемтосекундных лазеров. При малых и умеренных интенсивностях при воздействии на конденсированные материалы существенны неустойчивости фронтов плавления и испарения (Anisimov & Khokhlov, 1995). Эти неустойчивости связаны с самой мишенью.

Если интенсивность достаточна, то начинается испарение вещества мишени. При бóльших интенсивностях образуется плазма. Вместе с паром или плазмой появляется течение разлетающегося от мишени пара или плазмы. Этот поток называется лазерным факелом.

Его форма зависит от параметра

$$p = d_{LS}/c_{LT}\,\tau_L, \tag{7.15}$$

где d_{LS} — диаметр лазерного пятна на мишени, c_{LT} — скорость звука в паре или плазме вблизи поверхности мишени, τ_L — длительность лазерного импульса. Большие значения параметра p (7.15) соответствуют

большим пятнам. В этом случае истечение происходит примерно по нормали к поверхности плоской мишени. Внутренняя энергия разлетающегося газа переходит в его кинетическую энергию при расширении на несколько толщин $c_{LT}\tau_L$. Поэтому факел имеет вытянутую по нормали форму, а угловая поляра вылетевшего вещества оказывается сосредоточенной в малой окрестности нормали.

При $p \sim 1$ и $p \ll 1$ факел и его угловая поляра широкие.

Рассматриваются как разлет вылетевшего из мишени вещества в вакуум, так и разлет при наличии окружающего мишень внешнего газа. Нас будет интересовать второй случай. Обычно рассматривают разлет в газ низкой плотности. Плотность газа является низкой, если ее влияние на динамику факела начинает сказываться на расстояниях R_s, больших по сравнению с размером L, где L равно меньшему из пары размеров d_{LS} и $c_{LT}\tau_L$.

В стационарном случае ($\tau_L \gg L/c_{LT}$) образуется система стоячих волн, аналогичная той, которая возникает в стационарных сверхзвуковых струях реактивных двигателей. Этот случай не имеет отношения к интересующей нас здесь неустойчивости факела, возникающей при его взаимодействии с окружающим газом.

В нестационарном случае взаимодействие разлетающегося газообразного вещества мишени с окружающим газом может быть похоже на то, которое возникает при разлете продуктов детонации в газ. Контактная граница между продуктами лазерного нагрева мишени и тормозящим ее окружающим газом может быть неустойчива так же, как при взрыве. Перемешивание лазерного факела с окружающим газом рассматривалось в работах (Scott et al., 1990; Stangl et al., 1993; Anisimov & Khokhlov, 1995, с. 56). Анализ динамики лазерного факела представляет интерес в связи с задачей о лазерном напылении (Anisimov et al., 1993), например, напыляют тонкие слои дозированной толщины высокотемпературных сверхпроводников на те или иные подложки. Степень однородности пленок во многом определяется взаимодействием факела и газа.

Неустойчивость при разлете в окружающий газ факела, образующегося в результате сверхскоростного удара. При сверхскоростном ударе конденсированной частицы в мишень образуется факел, состоящий из веществ частицы и мишени. Исследованию его структуры посвящена работа (Иногамов и др., 1991). Если газообразная часть вылетевшего вещества частицы и мишени разлетается в газ малой плотности, меньшей, чем плотность факела, то контактная граница между факелом и внешним газом будет неустойчива. Опять ситуация аналогична той, которая имеется в задаче продукты детонации–газ.

Разлет остатков лазерной мишени в газ. В системах инерционного синтеза рассматривается воздействие мощного лазерного импульса на сферическую мишень размером $\sim 100 - 1000$ мкм. В результате воздействия мишень превращается в облачко плотной, сильно нагретой плазмы. Далее начинается разлет этого облачка. Рассмотрим случай, в котором облачко из остатков мишени разлетается в разреженный газ. С его разлетом связана генерация УВ в газе. Исследованию разлета мишени и

генерации УВ посвящена работа (Басов и др., 1987). Здесь мы хотим обратить внимание на то, что это течение похоже на течение в задаче продукты детонации–газ. Поэтому возможно появление внутренней УВ, перемешивания на КГ и пульсаций расширившегося облака остатков мишени.

7.3. Инерционный синтез

Программа лазерного термоядерного синтеза (ЛТС) развивается уже десятки лет (Nuckolls et al., 1972; Brueckner & Jorna, 1974; Афанасьев, Басов и др., 1975; Прохоров, Анисимов, Пашинин, 1976; Анисимов, Прохоров, Фортов, 1984; Lindl, McCrory & Campbell, 1992; Гуськов, Змитренко и Розанов, 1995; Haan, Pollaine, Lindl et al., 1995; Кочемасов, 1997; Гаранин, 1997). Она тесно связана с наращиванием энергетики мощных лазерных систем. Одновременно совершенствовалась технология фабрикации мишеней. Для получения высоких компрессий импульс (длительность, форма), генерируемый лазером, и структура мишени должны быть хорошо "подогнаны" друг к другу.

Важным этапом одномерной оптимизации мишеней стало появление их оболочечных вариантов (Nuckolls et al., 1972; Афанасьев, Басов и др., 1975; Прохоров, Анисимов, Пашинин, 1976). В этих вариантах не требуется специального профилирования лазерного импульса для сильного сжатия мишени[4]. Одномерная оптимизация (Анисимов, Опарин, 1993) заключается в улучшении энергетических показателей процесса сжатия и нагрева в системе лазер–мишень (снижение энергии, которую необходимо затратить для сжатия и нагрева вещества до заданных значений).

Мы подчеркиваем одномерность оптимизации мишеней, так сказать, первого уровня, поскольку вместе с оболочками появляется проблема гидродинамической неустойчивости, развитие которой ведет к резкому снижению эффективности системы. На современном уровне ведется борьба за стабилизацию системы за счет улучшения качества как лазерного импульса, так и мишени.

Другим важнейшим направлением стало применение мощных лазеров в целях исследования термодинамических характеристик конденсированных веществ и плотной сильно неидеальной плазмы в широком диапазоне изменения термодинамических параметров (Анисимов, Прохоров, Фортов, 1984).

С некоторой задержкой параллельно лазерному развивается программа ионного инерционного синтеза и исследований термодинамических свойств веществ (Баско, Имшенник и др., 1989; Basko, Imshennik & Churazov, 1992; Жуков и др., 1993). Аналогично лазерному случаю, основной является оболочечная мишень. Для этой программы также характерны проблемы с гидродинамическими неустойчивостями и их частичной стабилизацией.

[4]При этом вместо трудно осуществимого на практике профилирования мощности лазерного импульса во времени $N(t)$ требуется технологически намного более реальное профилирование мишени.

Схемы мишени и процесса сжатия, нагрева и термоядерного энерговыделения представлены на рис. 7.3*а–в*. Имеются две стадии неустойчивости. Первой является стадия нагона оболочки к центру. На ней неустойчива внешняя граница оболочки E (external). Неустойчивый участок траектории границы E показан волнистой линией на r, t диаграмме. На второй стадии неустойчива внутренняя граница I (internal) оболочка–топливо. На ней происходит торможение оболочки из-за противодавления сжимаемого топлива. При этом кинетическая энергия оболочки переходит во внутреннюю энергию топлива. Неустойчивый участок траектории границы I показан другой волнистой линией.

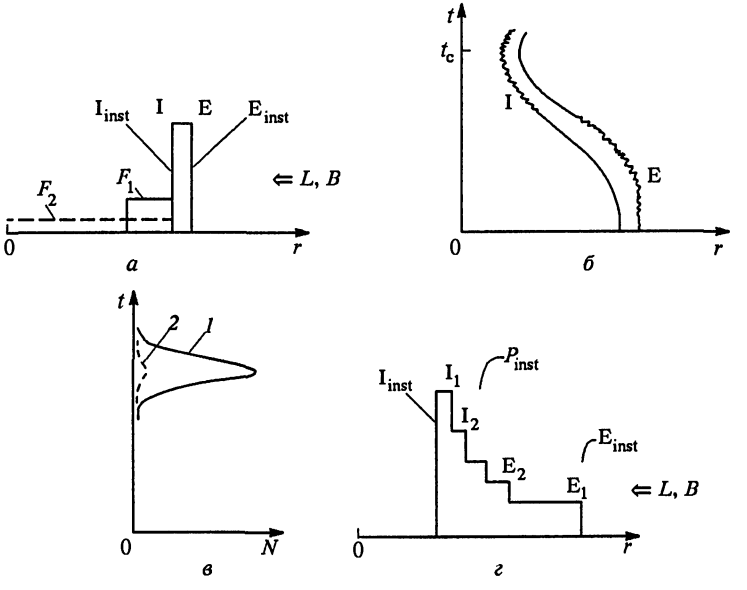


Рис. 7.3. Распрделение $\rho(r, 0)$ в простой оболочечной мишени, E (external) и I (internal) — соответственно внешняя и внутренняя стороны, F_1-вариант с намороженным слоем топлива, F_2-вариант газонаполненной оболочки (*а*). Развитие процесса сжатия во времени, r, t-диаграмма, t_c-момент наибольшего сжатия. На стадии ускорения оболочки неустойчива граница E, а на стадии торможения — граница I. Эти стадии разделяет точка перегиба траектории оболочки $R(t)$ (*б*). Мощность энерговыделения $N(t)$ из-за термоядерных реакций, *1* — 1D расчет, *2* — уменьшенный энерговыход при наличии перемешивания (*в*). Многослойная оболочка, E_1, E_2, ... -внешние подоболочки низкой плотности (пена, композиты, аблятор и т. п.), I_1, I_2, ... -высокоплотные внутренние подоболочки (золото и др. тяжелые металлы). Кроме стадий неустойчивости E_{inst} и I_{inst}, характерных для простых оболочек, появляется неустойчивость во внутренних слоях P_{inst} (Иногамов 1996b, 1997) (*г*)

Многослойные мишени и технологии изготовления. Современные мишени для инерционного синтеза устроены сложно. Они представляют собой многооболочечные конструкции, изготовленные с высокой точностью. Схема многослойной оболочки дана на рис. 7.3*г*. Внешние подоболочки необходимы для создания абляционного давления и сглаживания

пространственных неоднородностей лазерного импульса. Внутренние нужны для аккумулирования кинетической энергии и защиты топлива от преждевременного перегрева сверхтепловыми электронами и рентгеновским излучением. Другой важной целью профилирования плотности оболочки путем подбора материалов и толщин слоев является снижение темпа усиления гидродинамических возмущений (Иногамов, 1996, 1997).

Чрезвычайная важность проблемы гидродинамической неустойчивости для успеха всей программы инерционного синтеза осознана давно. Исследованиям устойчивости посвящено очень много работ, освещающих разнообразные аспекты этой проблемы.

Большое значение имеет качество мишеней. Современные технологии напыления или осаждения пленок позволяют получать покрытия из самых разных материалов. Толщина покрытий регулируется в широких пределах (McEachern et al., 1993; Letts et al., 1994; Aleksandrova et al., 1994; Logan, 1995; Paisner et al., 1995; Меркульев, 1997). Очень важны отбраковка и чистка мишеней. В связи с этим однородность пленочных слоев контролируется специальными приборами (McEachern et al., 1993; Letts et al., 1994; Logan, 1995; Paisner et al., 1995), выявляющими микронеоднородности, начиная с нанометрового диапазона. Таким образом определяются фурье-спектры микронеоднородностей реальных образцов, необходимые для количественных расчетов динамики мишени (Galmiche & Macé, 1995; Cherfils-Clérouin & Galmiche, 1995).

Важное обстоятельство, выявленное при обследованиях микроструктуры мишеней, состоит в том, что спектры Фурье возмущений не имеют какого-либо превалирующего масштаба и оказываются широкодиапазонными (McEachern et al., 1993, Letts et al., 1994, Logan et al., 1995, Paisner et al., 1995). Это указывает на то, что в логарифмически широком диапазоне масштабов неоднородности оболочки носят скрытый фрактальный характер. Спектры начальных возмущений являются широкодиапазонными при относительной равноправности масштабов разных десятичных порядков, т. е. при сравнительной однородности начальных шумов по масштабам.

Намораживание однородных слоев топлива требует применения криогенных технологий (Aleksandrova et al., 1994).

Неустойчивость лазерной абляции. Этот вопрос рассматривался линейными, нелинейными, качественными, численными и экспериментальными методами в ряде работ, см. также следующую главу. Предположение о модификации рэлей-тейлоровской неустойчивости под действием абляции было сделано уже в работе (Nuckolls et al., 1972). Ранние модели абляционной модификации были предложены в работах (Bodner, 1974; Анисимов, Иванов, Иногамов, 1977). Работа (Bodner, 1974) основана на линейной модели, а работа (Анисимов, Иванов, Иногамов, 1977) — на качественном анализе и сравнении характерных скоростей, связанных с классической РТН, и с абляцией (см. также работы Иногамова (1983 и 1985)). Из этого сравнения следовала оценка масштаба $1/k_a \sim v_a^2/g$, при котором гидродинамическая скорость из-за РТН будет порядка скорости

абляционного уноса вещества v_a (с этой скоростью во фронт абляции втекает плотное вещество фольги или, другими словами, это скорость движения фронта по этому веществу). Из рассуждений работы (Анисимов, Иванова, Иногамов, 1977) следовало, что при $k \gg k_a$ неустойчивость незаметна на фоне абляции, а в обратном пределе абляция малосущественна при развитии неустойчивости. Эти оценки были более надежно обоснованы в последующих работах.

В дальнейшем развивались три подхода. Первый из них основан на аналитической модели фронта абляции, в которой фронт заменяется скачком, разделяющим однородные полупространства, и линеаризации возмущений (Baker, 1978; Kull, Anisimov, 1986; Бычков, Гольберг, Либерман, 1991). Аналогичные методы применяются при исследовании неустойчивости фронта пламени (Бычков, Гольберг, Либерман, 1991; Liberman et al., 1994), строгая теория которой была заложена в работе (Ландау, 1944).

Второй подход является аналитически-численным. Невозмущенный поток описывается уравнениями стационарной абляции (аналитически или через решения обыкновенных дифференциальных уравнений по r). Это уравнения газодинамики одно- или двухтемпературной плазмы (обычно при анализе устойчивости ограничиваются однотемпературными уравнениями) с учетом нелинейной электронной теплопроводности. Модель, описывающая стационарную абляцию, во многом аналогична паркеровским моделям солнечного ветра, в которых также важное значение имеет электронная теплопроводность.

Далее выписываются линеаризованные уравнения на фоне этой стационарной абляции. Эти уравнения решаются численно. Причем решается не краевая задача, а задача Коши. То есть собственное число и собственная функция определяются в процессе установления. Понятно, что таким образом можно отыскать только первое, самое жесткое собственное значение. Впрочем, это не является в данном случае недостатком, поскольку интерес представляет как раз это значение[5].

Принципиальным недостатком является другое. Стационарный абляционный поток с источником плазмы в центре при $r = 0$ с учетом положительной силы тяжести[6] хорошо аппроксимирует реальную ситуацию в окрестности фронта абляции. Имеется как убывание ρ с уменьшением r при $r < r_a$, так и рост T в горячей короне при $r > r_a$. Здесь r_a — координата стационарного фронта абляции. Убывание ρ с r при $r < r_a$ соответствует уменьшению ρ из-за весовой стратификации в холодном (по сравнению с короной) веществе оболочки.

Недостатком является то, что в стационарной модели при некотором r_s ($r_s < r_a$) появляется стационарная УВ (Иногамов, 1985). Это означает, что полученный счетом на установление спектр собственных чисел $\gamma(l)$ будет соответствовать реальному при достаточно больших номерах гармоник l. На возмущения с длиной волны $\lambda < \lambda_{crit}$, $\lambda_{crit} \sim r_a - r_s$ и

[5] Скорость роста РТ возмущений наибольшая.

[6] Это необходимо для появления РТН фронта абляции. Ускорение направлено по r в сторону роста r.

$l < l_{\rm crit} \sim 2\pi r_{\rm a}/(r_{\rm a} - r_{\rm s})$ влияет эта внутренняя УВ. Впрочем, в случае длинноволновых возмущений становится непригодным уже само квазистационарное приближение — инкременты их роста невелики, и за время усиления возмущения происходят значительные смещения оболочки.

Коротковолновые возмущения с $l \sim k_{\rm a} r_{\rm a}$, $k_{\rm a} = g/v_{\rm a}^2$ описываются правильно.

Изучению стационарных абляционных течений посвящена серия работ испанских исследователей (Sanmartin et al., 1985; Nicolas & Sanmartin, 1985). Сложное аналитическое решение задачи об абляционной РТН найдено в работе (Sanz, 1994).

Второй подход[7] оказывается трудоемким. Его схема была намечена в работах (Henderson, McCrory & Morse, 1974; Brueckner, Jorna & Janda, 1974). Систематические исследования были проведены в работах (Takabe, Montierth & Morse, 1983) и (Takabe, Mima, Montierth & Morse, 1985). Была получена формула $\gamma \approx \alpha\sqrt{gk} - \beta k v_{\rm a}$, $\alpha \approx 0,9$, $\beta \approx 3 - 4$, аппроксимирующая зависимости $\gamma(l)$ или $\gamma(k)$ при $k \sim k_{\rm a}$. Она называется формулой Такабе. Эта формула широко используется в литературе.

Первые два подхода относятся к линеаризованной теории. При третьем подходе проводят прямое (нелинейное) численное моделирование (уравнения газовой динамики плюс электронная теплопроводность) роста возмущений на ускоряемом фронте абляции (Emery et al., 1981; Emery et al., 1986; Gamaly et al., 1990; Atzeni, 1990, 1991; Жуков, Забродин, Феодоритова, 1993; Galmiche & Macé, 1995).

В современных работах проводится расчет сжатия конкретных мишеней (Gamaly et al., 1990; Atzeni, 1990, 1991; Гуськов, Змитренко и Розанов, 1995) прямым и непрямым[8] излучением. Для компенсации крупномасштабной неоднородности при сжатии непрямым излучением рассматриваются оболочки с плавно меняющейся толщиной (Гуськов, Змитренко, Розанов, 1995).

Модели турбулентного перемешивания на фронте абляции рассматривались в работах (Лыков и др., 1979; Андронов и др., 1979; Takabe & Yamamoto, 1991; Cherfils & Mikaelian, 1996[9]).

Много внимания уделяется экспериментальной стороне дела (Glendinning et al., 1997). Развитие гидродинамических неустойчивостей в лазерных мишенях — весьма скоротечный процесс, протекающий за времена порядка наносекунд. Поэтому диагностика быстропротекающих

[7] Аналитически-численный: (i) полуаналитически описывается невозмущенная абляция и (ii) численно решаются уравнения для возмущений.

[8] Прямое излучение перерабатывается на стенках камеры (хольраума) в рентген, и сжатие осуществляется этим вторичным излучением со стенок. Первичным может быть лазерный или ионный пучок.

[9] Нельзя согласится с утверждением, сделанным в этой работе, о том, что существует универсальная формула, не зависящая от начальных возмущений, которая описывает развитие турбулентного перемешивания, начиная от яруса (масштаба), соответствующего абляционной длине или другому стабилизирующему масштабу. Другими словами, задержка перемешивания из-за того или иного стабилизирующего механизма обязательно должна зависеть от амплитуды начального возмущения на этом стабилизирующем масштабе.

гидродинамических процессов в лазерной плазме является одним из приоритетных направлений в эксперименте. Совершенствование техники позволило достичь впечатляющих успехов в этой области. Фотоматериалы, разворачивающие процесс развития неустойчивости в мишенях, по качеству напоминают те, которые получаются в стандартных гидродинамических экспериментах в лотках и ваннах за характерные времена 10^{-3} – 1 с с помощью обычных кинокамер, см., например, кадры, иллюстрирующие развитие 3D неустойчивости при ускоренном метании лазерных фольг (Marinak, Haan et al., 1995, рис. 4*b*, FXI изображение).

§ 8. Астрофизика

8.1. Фрагментация сверхновых

Нуклеосинтез в процессе образования сверхновых играет важную роль в формировании наблюдаемых обилий химических элементов. Вспышка сверхновой оказывается сложным явлением, описание которого требует учета множества разных физических факторов — от последовательностей реакций ядерных превращений до нейтринного и радиационного излучений и гидродинамической устойчивости.

Физика РТН и наблюдения. Сброс внешних оболочек сверхновой и разлет их в окружающий межзвездный газ сопровождается сгребанием этого газа и образованием сжатого слоя, находящегося в состоянии локального гидростатического квазиравновесия. Термодинамическое состояние влетающих в этот слой потоков вместе с радиационным излучением из этого слоя определяют внутрислойное распределение плотности. Это распределение зачастую оказывается резко неоднородным. Другой причиной скачков плотности является расслоеность самих внешних оболочек сверхновой.

В результате гидростатическое квазиравновесие оказывается неустойчивым. Поэтому при разлете происходит рэлей-тейлоровское перемешивание внутри сжатого слоя. Перемешивание изменяет температуру среды и таким образом влияет на радиационные характеристики сжатого слоя. Кроме того, перемешивание приводит к изменению характеристик оптической толщи. Из-за появления ослабленных (более тонких) мест в фотооболочках эффективная оптическая толща оказывается меньше и становится неоднородной. Это приводит к изменению наблюдаемых кривых блеска и спектров излучения. А именно, приводит к повышению яркости и увеличению жесткости излучения, которое приходит из-под фотооболочки.

В работе (Gull, 1975) рассмотрена простейшая модель, когда остатки сверхновой однородны и все наблюдаемые свойства связаны с рэлей-тейлоровским перемешиванием внутри сжатого слоя. Слой состоит из двух подслоев, разделенных контактной границей. Один из подслоев состоит из вещества сверхновой, другой — из межзвездного газа. Исследуются оптическое и рентгеновское излучения из сжатого слоя, обсуждается возможность образования магнитного поля и соответствующего нетеплового радиоизлучения из-за развития неустойчивости.

Рентгеновское излучение в аналогичной модели изучалось в работе (McKee, 1974).

В подробном обзоре (Imshennik & Nadyozhin, 1982) основное внимание уделяется физической эволюции предсверхновых. Определенное внимание уделено также вопросам неустойчивости на стадии разлета, следующей за вспышкой. В расчетах (Денисов, Попов, Чечеткин, 1988) моделируется нуклеосинтез при несферическом взрыве сверхновой.

Из наблюдательных данных известно, что большая часть сравнительно молодых остатков сверхновых являются сильно неоднородными (Lozinskaya, 1984; Blinnikov et al., 1988).

Более реалистическую сложную[10] модель сверхновой предложили Гребенев и Сюняев (1987). Они исследовали спектры рентгеновского излучения, проходящего через фотооболочки, фрагментированные вследствие неустойчивости. Они показали, что фрагментация приводит к ужесточению спектров и более раннему выходу жесткого излучения по сравнению со случаем однородных оболочек.

Сложная слоистая модель, составленная из слоев разных химических элементов, порядковый номер которых убывает по радиусу, была рассмотрена в работе (Arnett et al., 1989). Была обнаружена рэлей-тейлоровская неустойчивость на ранних стадиях разлета сверхновой. Эта неустойчивость связана с границей между внешним гелиевым слоем и внутренним слоем из более тяжелых элементов (никель, кобальт и др.). Ее наличие существенно меняет наблюдаемые излучательные характеристики. Аналогичная модель со сверхновой, состоящей из слоев водорода, гелия и тяжелых металлов[11], была рассмотрена (Ebisuzaki et al., 1989). Неустойчивость была обнаружена как на границе между водородом и гелием, так и на границе гелий–металлы.

Рассмотрим теперь работы (Nomoto et al., 1987) и (Shigeyama et al., 1988), а также работы (Den et al., 1990) и (Hachisu et al., 1990). Новый момент, относящийся к качественному пониманию причин неустойчивости, высказанный в этих работах, работах (Arnett, 1988), (Arnett et al., 1989) и работе (Ebisuzaki et al., 1989), состоит в следующем. В ранних работах 70-х годов рассматривалась модель, в которой все вещество сверхновой разлетается после взрыва[12], а торможение вещества происходит на межзвездной среде. В этих же работах учитывается неоднородность звезды.

Имеются два вида неоднородности. Во-первых, неоднородность по составу, поскольку нуклеосинтез в звезде приводит к образованию слоистой структуры, при которой порядковый номер элемента в таблице Менделеева убывает по радиусу. И во-вторых, неоднородность распределения скорости по радиусу.

На ранних стадиях после взрыва в движение с большими скоростями вовлечены только центральные области сверхновой. Далее происходит

[10] По сравнению с работами (Gull, 1975) и (McKee, 1974).

[11] Чередование слоев по направлению от внешней границы к центру.

[12] Обычно с линейным по радиусу распределением скорости, соответствующем течению с однородной деформацией.

уменьшение этой скорости из-за вовлечения в движение толстой внешней водородной области сверхновой. При этом тяжелое вещество из центра тормозится и возникает рэлей-тейлоровская неустойчивость.

Таким образом, здесь имеет место не торможение на межзвездной среде, а торможение внутренних слоев на внешних. Возникает, как обычно, сжатый слой, ограниченный прямой и обратной ударными волнами. Возвращаясь к картине с источниками (см. § 6), можно сказать, что происходит сверхзвуковое столкновение потоков внешней водородной оболочки и внутреннего разогнанного взрывом ядра.

Влияние распада радиоактивного никеля рассмотрели Woosley et al. (1988) и Arnett (1988). Этот распад приводит к внутреннему энерговыделению, в результате чего внутри остатков сверхновой образуется горячая область. Образование такой области и ее "распихивающее" по отношению к внешним слоям действие может быть еще одной причиной рэлей-тейлоровской неустойчивости.

Методики расчетов. В работах по перемешиванию в сверхновых (RT/SN) выделяются три основные группы. Они отличаются по методам расчета или учета неустойчивости и перемешивания и глубине проработки наблюдательных последствий, т. е. имеются, так сказать, более гидродинамические и более наблюдательные работы.

В одной группе работ авторы проводят прямое численное моделирование 2D и 3D неустойчивости (Arnett, 1988; Arnett et al., 1989; Chevalier & Klein, 1978; Woosley et al., 1988 и др.). В другой группе производят расчет линейной задачи на фоне сложного одномерного течения, приближенного к реальным данным (Ebisuzaki et al., 1989; Benz & Thielemann, 1989). Наконец, третью группу образуют работы, посвященные предсказанию и интерпретации наблюдательных данных (Гребенев, Сюняев, 1987; Nomoto et al., 1987; Shigeyama et al., 1988 и др.). В них неустойчивость инкорпорируется некоторым феноменологическим образом (обычно в качестве одного из существенных факторов возможных сценариев), производятся детальные расчеты наблюдательных последствий, связанных с неустойчивостью, а затем эти прогнозы сравниваются с экспериментальными данными.

Приведем еще две работы, относящиеся к первой группе. Это работы (Den et al., 1990) и (Hachisu et al., 1990)[13]. В них проведен осесимметричный двумерный численный расчет. Заключение (Den et al., 1990) состоит в том, что развитие неустойчивости оказывается чувствительным к условиям перед взрывом. В этих работах рассматривается неустойчивость на границах между слоями водорода и гелия, гелия и углеродно-кислородным слоем и между последним слоем и металлами.

Сделаем одно кажущееся необходимым критическое замечание относительно работ по неустойчивости при энерговыделении из-за распада радиоактивных кобальта и никеля. Дело в том, что авторы перечи-

[13] По-видимому, имеет смысл упомянуть внешнюю схожесть картин неустойчивости, получаемых в астрофизическом случае, и при расчетах, связанных с управляемым термоядерным синтезом. Сравните, например, рисунки к работам (Hachisu et al., 1990) и (Hoffman et al., 1993).

сленных работ (за исключением осторожной оговорки, сделанной в работе (Гребенев и Сюняев, 1987)) описывают радиационно доминирующую область с помощью уравнений Эйлера, т. е. в пренебрежении вязкостью. При этом доминирование радиации заключается только в том, что принимается радиационное значение для индекса адиабаты ($\gamma = 4/3$). Между тем, в этой области отношение длины пробега излучения к радиусу не слишком мало, а обмен импульсом осуществляется именно через излучение. Это напоминает ситуацию с кнудсеновским газом. В этих условиях представляется целесообразным описание силового взаимодействия в веществе через соответствующее кинетическое уравнение для излучения. Понятно, что при больших пробегах излучения тонкие детали, связанные с неустойчивостью, могут быть полностью подавлены.

Перечислим еще несколько работ, посвященных неустойчивости сверхновых. Это работы (Smarr et al., 1981; Fryxell et al., 1991; Buchler et al., 1980).

Многие работы по неустойчивости в сверхновых, вышедшие после 1987 г., посвящены сверхновой SN 1987 A, вспыхнувшей в Большом Магеллановом облаке. Широкий круг наблюдений определенно свидетельствует о наличии рэлей-тейлоровского перемешивания вещества сверхновой. Перечислим их.

- Гораздо более раннее появление по сравнению с одномерным расчетом гамма- и рентгеновского излучения, связанного с радиоактивным распадом кобальта.
- Сильное уширение гамма-линий кобальта, соответствующее большим скоростям разлета, которые намного превосходят те скорости, которые получались бы, если тяжелые элементы оставались в глубоких внутренних слоях.
- То же относительно инфракрасных наблюдений сильно уширенных линий разных элементов.
- Имеются также указания, полученные из кривой блеска в оптической части спектра. А именно, рост блеска на 25-й день после взрыва может быть объяснен, если принять, что нагреву от распада радиоактивного никеля подвергается вещество во внешних слоях сверхновой. Транспорт никеля во внешние слои указывает на перемешивание внешних и внутренних слоев.
- Кроме того, попадание водорода из внешних во внутренние слои объясняет существование длинного плато между 70 и 100-м днями на оптической кривой блеска.
- Очень медленный спад яркости излучения жесткого рентгена свидетельствует об уменьшении интегрального поглощения тяжелыми элементами. Такое уменьшение поглощения возможно при наличии водородно-гелиевых "дыр", проникающих во внутренние области.

Очень большое число ссылок на экспериментальные работы по этому поводу имеются в работах (Гребенев, Сюняев, 1987; Arnett et al., 1989; Ebisuzaki et al., 1989; Den et al., 1990; Hachisu et al., 1990 и др).

По-видимому, следует отметить объем и качество экспериментального материала, полученного благодаря вспышке сверхновой SN 1987 A. Это событие и его оперативная обработка позволили вывести на новый уровень всю систему представлений о звездах, в том числе и о тонких гидродинамических процессах в них.

8.2. Переменный звездный ветер и РТН

Рассмотрим вопрос об однородности оболочек объектов с сильным ветром: звезд типа Вольфа–Райе и планетарных туманностей.

К настоящему времени открыто примерно 200 звезд Вольфа–Райе, история изучения которых началась в прошлом веке (Wolf & Rayet, 1867; Khaliullin & Cherepashchuk, 1982). Это звезды с широкими эмиссионными линиями, в спектрах которых представлены линии с очень разными потенциалами возбуждения и ионизации. Широта этих линий соответствует скоростям истечения $\simeq$ 1500 км/с. Разброс потенциалов указывает на неоднородность звездных оболочек.

Истечение вещества из звезд Вольфа–Райе считается хорошо установленным фактом (Корнилов, Черепащук, 1979; de Greve & Loore, 1975). То, образуется или нет туманность вокруг звезды вследствие такого истечения, зависит от плотности межзвездной среды. При плотности ниже некоторой критической $\sim 10^{-21}$ г/см^3 туманность не может образоваться (см. Khaliullin & Cherepashchuk, 1982, Chp. 4). Скорость расширения образовавшихся туманностей составляет несколько десятков км/с. Большинство туманностей имеет волокнистую структуру. Появление этой структуры уверено связывают с истечением из звезд Вольфа–Райе. Кроме того, считается, что эти туманности могут быть не просто результатом сгребания межзвездного газа звездным ветром, а следствием сброса оболочки звездой (Bisnovatyi-Kogan & Nadyozhin, 1972; Wendker et al., 1975).

Что касается планетарных туманностей, то считается, что их образование обусловлено истечением из ядра туманности. Предполагается, что это истечение было нестационарным (Хромов, 1985) и представляло собой один или несколько мощных выбросов, связанных с эволюционными процессами в ядре, перемежавшихся с пассивными фазами. Считается, что образование таких туманностей представляет собой результат естественной эволюции массивных звезд с $M \simeq 1 - 10\ M_\odot$ (Потташ, 1987).

Действие звездного ветра от ядра на туманность изучалось в работах (Kahn, 1968, 1973; Pickelner, 1973, 1973a; Giuliani, 1981). В работах (Kahn, 1982) и (Игуменщев, 1989) изучалось образование неоднородностей из-за развития рэлей-тейлоровской неустойчивости, возникающей вследствие переменности звездного ветра. Известно, что большая часть планетарных туманностей имеет несферическую форму (Костякова, 1982; Хромов, 1985; Balick, 1987).

В типичной модели звезда — предшественник планетарной туманности — сбрасывает основную часть массы туманности в фазе *2* за промежуток времени $\sim 10^3$ лет со скоростью ветра *2* $v_2 \sim 10$ км/с. В резуль-

тате этого сброса открывается кислородно-углеродный карлик, который становится источником очень быстрого ($v_3 \sim 10^3$ км/с) малоплотного ветра *3* (фаза *3*). Перед фазой *2* имеется еще несущественная для рассмотренной модели неустойчивости фаза *1*, в которой звезда является красным гигантом, в течение очень продолжительного времени генерирующим протяженную газовую оболочку *1* малой плотности.

Из-за действия ветра *3* между веществами ветров *2* и *3* возникает ударно сжатый слой, движущийся так же, как и ветер *2*, со скоростью примерно 10 км/с, но превышающий по скорости ветер *2*. Тогда за время около 10^3 лет в этот слой попадает основная часть вещества туманности. После этого поток импульса со стороны ветра *2* снижается до низкого значения характерного для ветра *1*, и начинается ускорение этого слоя под действием динамического давления со стороны ветра *3*. Это ускорение и приводит к рэлей-тейлоровской неустойчивости.

Сравним сферически симметричные течения в сверхновых и в звездах Вольфа–Райе и планетарных туманностях. В первых выброс из центральной области взаимодействует с первоначально покоившимся веществом. Этим веществом могут быть либо внешние оболочки сверхновой (на ранних стадиях разлета), либо межзвездный газ (на поздних стадиях). В случае со сверхновой мы имеем ситуацию с импульсным выделением энергии. В случае же звезд Вольфа–Райе и в планетарных туманностях истечение растянуто на очень продолжительные времена. Появление неоднородностей связывается с изменением параметров (скорости, теплового состояния и состава) истекающего потока. Неустойчивость в активных звездах рассматривалась в работах (Дибай, 1958; Spitzer, 1954; Schneps et al., 1980).

Вернемся к модели со столкновением потоков, описанной в § 6. В случае со сверхновой один источник — импульсный, а другой поставляет поток вещества внешней оболочки или межзвездного газа. В случае же продолжительно действующего переменного источника столкновение испытывают испущенные ранее медленные порции с испущенными позднее догоняющими их более быстрыми порциями.

К неустойчивости приводит такая смена фаз активности, обусловленная эволюцией звезды, при которой на место медленного плотного потока приходит быстрый поток малоплотного вещества. Если смена фаз происходит быстро по сравнению с продолжительностью самих фаз, то возникает контактная граница, разделяющая плотное и малоплотное вещества. Вещество в этих потоках обычно находится в инерционном режиме разлета. В этом режиме скорость частиц фиксирована, а число Маха, вычисленное по этой скорости, очень велико. Поэтому появляется характерный ударно сжатый слой с двумя ударными волнами.

В заключение данного раздела приведем сравнительный анализ ориентации струй при неустойчивости в разных случаях.

Течение в области перемешивания состоит из перемежающихся колонок опускающегося тяжелого вещества и поднимающегося легкого вещества. Вне приближения Буссинеска это течение не является симметричным относительно инверсии по высоте, т.е. легкие и тяжелые

колонки отличаются. Говорят о широких пузырях легкой жидкости и узких струях тяжелой жидкости.

Сравнивая сверхновую и модель неустойчивости планетарной туманности, видим, что в первом случае струи ориентированы наружу (т.е. в сторону возрастания радиуса), а во-втором — внутрь[14]. Это соответствует знаку радиальной компоненты вектора ускорения свободного падения $g_{\text{кг}}$ в эффективном поле тяжести, возникающем в неинерциальной системе координат, связанной с контактной границей или с веществом ударно сжатого слоя. Этот знак будет плюсом в первом случае и минусом во втором случае.

Если классифицировать радиальные течения по направлению струй и направлению скорости $v_{\text{кг}}$ контактной границы, т.е. по знакам $g_{\text{кг}}$ и $v_{\text{кг}}$, то, очевидно, возможны следующие четыре случая: $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,+)$ и $(-,-)$. Приведем несколько примеров, относящихся к этим случаям. Примером случая $(+,+)$ является неустойчивость сверхновых. Примером $(+,-)$ — неустойчивость оболочек для термоядерного синтеза на стадии ускорения оболочки к центру абляционным давлением. Пример $(-,+)$ относится к случаю планетарной туманности. А ситуация с $(-,-)$ возникает при торможении разогнанных термоядерных оболочек за счет давления топлива, а также при торможении захлопывающегося кавитационного (рэлеевского) пузырька из-за давления паров внутри пузырька. Отметим, что исследование устойчивости такого пузырька было первым исследованием обменной неустойчивости на скачке плотности (Riabouchinsky, 1927).

8.3. Магнитосферные варианты РТН

Как было сказано выше, рэлей-тейлоровской неустойчивостью является неустойчивость гидростатического равновесия, в котором легкая жидкость подстилает тяжелую. В астрофизических приложениях часто роль легкой жидкости играет магнитное поле. Неустойчивость на границе между плазмой и магнитным полем называют иногда неустойчивостью Крускала-Шварцшильда. Иногда также, отправляясь от морфологии исходного течения и возникающих в результате развития неустойчивости форм, ее могут называть желобковой, перетяжечной и другими аналогичными названиями. Обычно такого рода термины используются в лабораторных исследованиях по сверхсильным магнитным полям, управляемому термоядерному синтезу, пинчам, разрядам, взрывным генераторам и т.п. Зачастую при этом речь идет о цилиндрических системах, ускоряемых или замедляемых давлением магнитного поля.

Изучалось влияние проводимости и конечной толщины скин-слоя, а также вязкости и сжимаемости на неустойчивость в линейном приближении. Соответствующие ссылки собраны в следующей главе, посвященной линейной теории.

[14] Впрочем, в сверхновой имеется случай, когда внешние оболочки "распираются" излучением, идущим из центральной области (Woosley et al., 1988; Arnett, 1988), см. п 8.1. При этом струи направлены внутрь.

В случае однородного магнитного поля с прямолинейными параллельными силовыми линиями и движения плазмы в плоскости, перпендикулярной этим линиям, неустойчивость с магнитным полем полностью аналогична 2D рэлей-тейлоровской неустойчивости с $\mu = 0$, где μ — отношение плотностей легкой и тяжелой жидкости. Движения при этом таковы, что на поверхности образуются гофры или желобки, параллельные силовым линиям. При развитии этих гофр не происходит изгибания силовых линий. Элементы плазмы переставляются с силовыми линиями. Поэтому эту неустойчивость еще называют перестановочной.

Моды, переставляющие плазму и магнитное поле без изгибания, развиваются во времени быстрее, чем моды, развитие которых ведет к искривлению силовых линий.

Остановимся на примере, имеющем важное значение для физики релятивистских рентгеновских источников. Речь пойдет о магнитосферах нейтронных звезд (Arons & Lea, 1976; Elsner, 1976; Michel, 1977; Fortner, Lamb & Zailstra, 1985). Хорошо известна роль аккреционных процессов вблизи поверхности таких объектов. В этих процессах происходит переработка релятивистской энергии падения в жесткое излучение. В свою очередь это излучение является основным наблюдаемым проявлением этих объектов.

В отсутствие магнитного поля механика и физика продвижения вещества к центру сравнительно проста. Это либо сверхзвуковые сферически симметричные потоки, либо обусловленное турбулентной вязкостью спиралеобразное движение в аккреционном диске. При наличии магнитного поля ситуация оказывается намного сложнее.

Попытаемся проанализировать эту ситуацию. Основные ее черты это "расслоение" поля и плазмы, выталкивание плазмы на периферию и возникновение магнитосферической капсулы, которая изолирует компактный объект.

Граница между полем и плазмой образуется вследствие диамагнитных свойств плазмы, выталкивающей магнитное поле.

Рассмотрим условие силового баланса между давлениями магнитного поля и плазмы на этой границе. На расстояниях, больших радиуса нейтронной звезды $r_{\rm NS}$, ее магнитное поле можно приблизить полем магнитного диполя. Давление $p_{\rm M} = H^2/8\pi$ этого поля быстро ($p_{\rm M} \propto 1/r^6$) растет с уменьшением r. Динамическое давление в аккреционном потоке растет значительно медленнее: $p_{\rm A} \propto \dot{M}/r^{5/2}$, где $\dot{M}$ — темп аккреции. Поэтому в сильных полях этого давления недостаточно для "продавливания" плазмы к центру. В то же время поле не может выбросить плазму на бесконечность, поскольку его давление быстро убывает с ростом r.

Условие силового равновесия $p_{\rm M} = p_{\rm A}$ определяет размер магнитосферы $r_{\rm MS}$. Магнитное поле является сильным, если $r_{\rm MS} \gg r_{\rm NS}$.

Вследствие векторного характера магнитного поля образуются два симметричных заострения — каспа, радиусы которых $r_{\rm c}$ меньше радиуса $r_{\rm E}$ экватора магнитосферы. Причина образования каспов довольно очевидна. Действительно, если бы точка разделения магнитного потока на границе была бы гладкой, то вектор $\mathbf{H}$ в этой точке был бы нулем.

Но это означало бы обращение в нуль магнитного давления, а тогда произошло бы выпячивание границы в сторону поля под действием давления плазмы.

Будем обозначать плоский случай знаком $2D_p$ (p — plane), а осесимметричный — $2D_a$ (a — axis). В случае $2D_p$ решение задачи о форме магнитосферы можно искать методами теории функций комплексного переменного. Например, если давление в плазме постоянно, то задача решается с помощью конформного отображения на круг в плоскости $\mathbf{H}$, поскольку, с одной стороны граница совпадает с силовой линией, а с другой, $|\mathbf{H}| = \text{const}$ на границе. Интересно, что задача допускает решение и в случае степенных распределений $p_A(r)$ (Сибгатуллин, 1984). В случае $2D_a$ требуется численный поиск формы магнитосферы, см. пример, рассчитанный (Arons & Lea, 1976).

Систематическая теория явлений, связанных с магнитосферой, развита в книге Сибгатуллина (1984), см. гл. VII. Рассматриваются взаимодействие магнитосферы со звездным ветром, генерация акустических возмущений, влияние вращения и смежные вопросы.

С описанием магнитосфер исчерпывается статическая часть теории. Спрашивается, каким же образом, если пренебречь потоком, связанным с большой, но конечной проводимостью и скин-слоем, аккрецирующее вещество может попасть на поверхность нейтронной звезды? В принципе возможна форма магнитосферы с каспом, "свисающим до звезды". Например, возьмем одну из невозмущенных силовых линий магнитного диполя. Вычислим давление $p_1(r)$ вдоль нее, а затем возьмем плазму с таким распределением плотности и температуры по радиусу, что давление в плазме тоже равно $p_1(r)$. Тогда границей магнитосферы будет как раз эта силовая линия. Это означает, что плазма будет контактировать с поверхностью звезды. Однако, как было сказано выше, это требует слишком быстрого роста давления плазмы при уменьшении r.

Другая возможность, казалось бы, может быть связана с неустойчивостью Рэлея–Тейлора. Вследствие этой неустойчивости от сплошной массы плазмы отрывались бы изолированные плазменные глобулы, которые тонули бы в "подстилающей жидкости" — магнитном поле (Arons & Lea, 1976; Elsner, 1976).

Вопрос с неустойчивостью оказывается не таким простым. Дело в том, что со стороны неоднородного магнитного поля на эти глобулы действует сила, аналогичная силе Архимеда. В этом смысле можно сказать, что такое поле имеет "удельный вес". Этот "удельный вес" равен ∇p_M.

Как известно, неустойчивость Рэлея–Тейлора появляется там, где $|\nabla p_2| < |\nabla p_1|$, здесь p_1 и p_2 — давления в верхней и нижней (подстилающей) жидкостях. Если принять, что $p_M = M/r^6$, а $p_A = A/r^{5/2}$, где M и A константы, то оценка для r_{MS} имеет вид $r_{MS} \simeq (M/A)^{2/7}$. Оценка для $r_{balance}$ такого, что $\nabla p_M(r_{balance}) = \nabla p_A(r_{balance})$, на котором достигалась бы нейтральная плавучесть, дает $r_{balance} = (12/5)^{2/7} r_{MS}$. Аккуратный расчет для случая правдоподобного распределения давления $p_A(r)$ показывает, что ∇p_M действительно больше, чем ∇p_A на границе магнитосферы (Arons & Lea, 1976).

Таким образом, получается, что "удельный вес" магнитного поля в капсуле больше, чем удельный вес плазмы. В этом случае такая плазма будет "плавать" в магнитном поле подобно льду в воде. Следовательно, при таких значениях температуры в плазме граница оказывается не только равновесной, но и устойчивой.

Отсюда ясно, что для того, чтобы глобулы диамагнитной плазмы могли проваливаться в магнитном поле, требуется охлаждение плазмы. Это охлаждение ведет к росту удельного веса, а значит, и к росту ∇p_{A} в плазме. Как только этот градиент превысит величину ∇p_{M}, т.е. как только плазма окажется "тяжелее" магнитного поля, так граница станет неустойчивой и начнется проваливание глобул.

Для дальнейшего опускания диамагнитных глобул требуется их дополнительное охлаждение. Отметим также, что вектора $\mathbf{g}$ и ∇p_{M} направлены строго в противоположные стороны только в экваториальной области. Вне этой области даже при равенстве абсолютных величин $\rho|\mathbf{g}|$ и $|\nabla p_{\text{M}}|$ появляется результирующая, направленная в сторону полярных областей. Еще одним обстоятельством является возможность дробления глобул. Оно, по-видимому, будет иметь место как на стадии отделения глобул от сплошной плазменной атмосферы, так и на стадии их "плавания" в магнитном поле. На высокую вероятность дробления указывают результаты по изучению поведения мелкомасштабных возмущений на фоне крупномасштабных при рэлей-тейлоровской неустойчивости. Дробление приводит к увеличению площади на единицу массы глобулы и, следовательно, к росту отношения толщины скин-слоя к размеру глобулы. Соответственно растет поток плазмы, зацепленной за магнитное поле звезды и спускающейся к поверхности звезды по магнитным силовым линиям.

Охлаждение плазмы в сплошной атмосфере может быть быстрым и медленным по сравнению с t_{ff}, где t_{ff} — время свободного падения с поверхности магнитосферы. В случае медленного охлаждения плазма перетекает в каспы. При этом под действием растущего веса каспы опускаются вниз. В случае быстрого охлаждения основной вклад в аккреционный поток вносят экваториальные области. В этих областях образуются вытянутые по меридианам гофры, которые трансформируются в вытянутые глобулы. Меридиональные гофры имеют преимущество по темпам развития перед широтными возмущениями. Это обусловлено тем, что такие гофры не существенно изменяют форму магнитных силовых линий.

Глава III
ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В линейной постановке можно охватить широкий класс физических процессов. Это позволяет провести их анализ и получить сравнительные характеристики различных эффектов. Линейные методы являются гораздо более универсальными по отношению к нелинейным методам, дающим более глубокую, но и более специальную информацию. В простейшей постановке (однородная неограниченная несжимаемая жидкость, скачок плотности) имеется только один размерный параметр — ускорение g. Отсюда следует масштабная инвариантность $\gamma^2 \propto gk$, имеющаяся в этой задаче. С дополнительно учитываемыми физическими процессами связаны нарушения этой масштабной инвариантности. Эти нарушения заключаются в появлении характерных масштабов.

Нас интересует собственно неустойчивость и влияние на нее различных физических процессов. Этими процессами обусловлено появление короткомасштабных и крупномасштабных ограничений применимости простейшей формулы: $\gamma^2 \propto gk$. Малые характерные масштабы могут быть недиссипативными и диссипативными. К первым относится поверхностное натяжение, а ко вторым — вязкость, диффузия, теплопроводность и электрическая проводимость. Большие характерные масштабы являются недиссипативными. Крупномасштабные эффекты обусловлены сжимаемостью (§ 16) и неоднородностью профиля плотности (§ 15, уравнение Рэлея). Вместе с профилем и сжимаемостью появляются и новые моды. С каждым профилем связана своя динамика развития неустойчивости.

При наличии поверхностного натяжения (§§ 10, 12) выражение для инкремента неустойчивости принимает вид $\gamma^2 = Agk - \sigma k^3/(\rho_1+\rho_2)$, где $A = (1-\mu)/(1+\mu)$ — число Атвуда, σ — коэффициент поверхностного натяжения (Chandrasekhar, 1961). Влияние поверхностного натяжения (см. § 10) в линейной и нелинейной постановках рассматривалось в работах (Bellman & Pennington, 1954; Emmons, Chang & Watson, 1960; Rajappa, 1970; Vanden-Broeck, 1984) см. также обзоры (Sharp, 1984; Kull, 1991).

Влияние вязкости (см. § 12) рассматривалось в работах (Bellman & Pennington, 1954; Carrier & Chang, 1959; Chandrasekhar, 1961; Menikoff, et al., 1977, 1978; Kull, 1991), p. 288). Динамика двухслойной жидкости, нижний слой которой прилегает к твердому дну, с учетом вязкости

и поверхностного натяжения рассматривалась в книге Несиса (1973). В этой книге дается обзор работ, посвященных исследованиям процессов кипения жидкостей (кризис теплопередачи, пленочное кипение и т. д.).

Вязкая двухслойная жидкость, ограниченная дном, в случае, когда придонный слой тонок, рассматривалась в работе (Yiantsios & Higgins, 1989). Вязкие эффекты при РТН и НРМ в стратифицированной среде со слоисто-переменной вязкостью совместно с поверхностным натяжением на КГ и другие вопросы линеаризованной теории рассматривались в серии работ Микаэляна (Mikaelian, 1993; Mikaelian, 1990 (возмущения в сферическом случае); Mikaelian, 1994a (комбинированный РТН, НКГ и НРМ случай); Mikaelian, 1995 (РТН и НРМ в слое конечной толщины)). Опускание вязкой струи под действием тяжести изучалось Елисеевым (1977).

На границах, разделяющих газовые среды, стабилизационный эффект связан с расплыванием скачка плотности из-за действия диффузии. Неустойчивость с учетом диффузии изучалась в работах (Duff, Harlow & Hirt, 1962; Zaytsev, Chebotareva & Titov, 1993a, 1993b).

Неустойчивость в магнитном поле и эффекты, связанные с конечной проводимостью плазмы и проводящих жидкостей (см. §§ 11, 13), рассматривались в работах (Kruskal & Schwarzshild, 1954; Talwar, 1959; Chandrasekhar, 1961; Harris, 1962; Николаев, 1967; Зимин и Эйсмонт, 1970; Полянин, 1975; Щелкачев, 1976, 1979; Сон, 1979; Иевлев и Сон, 1980).

§ 9. Теплопроводность и абляция вещества

Еще одним короткомасштабным фактором является теплопроводность. Обычно плотное вещество является холодным, а малоплотное вещество — горячим. Неустойчивость приводит к появлению неровностей на границе между холодным и горячим веществами. Возникают струи холодного вещества, проникающие в горячее вещество, а вместе с ними возникают флуктуации температуры и плотности. При наличии теплопроводности скачок температуры размывается. Это оказывает стабилизирующее воздействие на неустойчивость.

Для ряда технических приложений[1] ключевую роль играет сохранение чистых (не перемешанных) пространственно разделенных веществ, см. рис. 9.1*а*. При этом имеется резкий скачок температуры, см. рис. 9.1*б*. Вследствие перемешивания профиль температуры размывается (рис. 9.1*в*).

Посмотрим на вопрос о стабилизации с позиций полезности (с позиций повышения эффективности) для этих приложений. В этом смысле стабилизирующие механизмы должны приводить к сохранению скачка температуры. С этих позиций короткомасштабные стабилизирующие

[1]Например, взрывомагнитные генераторы, системы инерционного синтеза и др. Перемешивание приводит к резкому ухудшению их характеристик. Происходит снижение коэффициентов полезного действия этих генераторов и систем, снижается нейтронный выход в случае систем инерционного синтеза и т. п.

механизмы можно разделить на "настоящие" (эффективные) и "ненастоящие" (малополезные). К "настоящим" следует отнести поверхностное натяжение и вязкость, а к "ненастоящим" — диффузию и теплопроводность.

Дело в том, что теплопроводность сама по себе, даже в отсутствие гидродинамического перемешивания приводит к размытию профиля температуры, в некотором смысле аналогичному представленному на

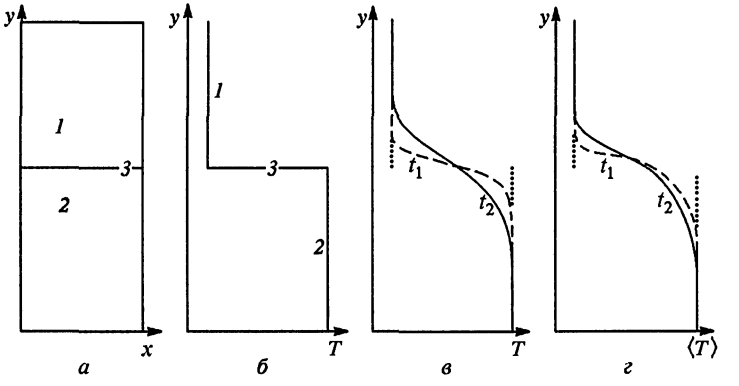


Рис. 9.1. Контактная граница *3*, разделяющая разнотемпературные вещества *2* и *1* (*а*). Скачок температуры на границе *3* в отсутствие перемешивания и теплопроводности (*б*). Размывание профиля температуры с течением времени при наличии молекулярной теплопроводности (*в*). Размывание профиля температуры вследствие гидродинамического перемешивания (*г*). Речь идет о профиле усредненной по x (определение координаты x см. на рис. 9.1 *(а)*) температуры $\langle T(y,t)\rangle$.

рис. 9.1*г*, сравни с рис. 9.1*в*. В этой связи говорят о турбулентной "теплопроводности". Таким образом и турбулентность, и молекулярная теплопроводность приводят к ограничению "времени жизни" чистых состояний.

Поэтому можно поставить вопрос о "цене", которую потребуется "заплатить" за подавление перемешивания. Можно говорить о "конкуренции" между молекулярной и турбулентной теплопроводностями. Конечно, о турбулентной "теплопроводности" можно говорить только в некотором условном смысле. Механизмы молекулярной и турбулентной теплопроводностей разные. Поэтому профили температур $T(y,t)$ и $\langle T(y,t)\rangle$ отличаются, где $\langle T(y,t)\rangle$ — усредненная по горизонтальным координатам температура в турбулентном случае.

Определим ширину размытия температурного профиля следующим образом. Пусть верхней (y_u) и нижней (y_d) границами слоя размытия являются поверхности, на которых температуры равны

$$T_\mathrm{u} = T_\mathrm{cold} + 0,01(T_\mathrm{warm} - T_\mathrm{cold}), \quad T_\mathrm{d} = T_\mathrm{warm} - 0,01(T_\mathrm{warm} - T_\mathrm{cold}),$$
$$T(y_\mathrm{u}(t),t) = T_\mathrm{u}$$

соответственно. Шириной размытия будем называть расстояние $h(t) = y_\mathrm{u} - y_\mathrm{d}$ между этими поверхностями.

В чисто молекулярном и чисто турбулентном случаях эта ширина по-разному зависит от времени[2]. В комбинированном случае вначале доминирует молекулярная теплопроводность[3]. При этом возникает ламинарный переходный слой. После некоторой задержки в дело "вмешивается" турбулентная "теплопроводность". В дальнейшем при рэлей-тейлоровской турбулентности доминирует уже турбулентная "теплопроводность".

В некоторых задачах теплопроводность тесно связана с абляцией холодного вещества. Ниже станет ясна причина применения этого термина. В гляциологии он означает отрыв, унос, потерю массы ледника вследствие дробления, таяния и т. п.

При распаде скачка температуры (рис. 9.1*б*) возникает нестационарная эволюция температурного профиля, см. рис. 9.1*в*, *г*, $t_0 < t_1 < t_2$. В случае же, если тепловой источник перемещается в пространстве, возникает тепловая волна. Асимптотически при постоянстве параметров источника эта волна становится стационарной, см. рис. 9.2.

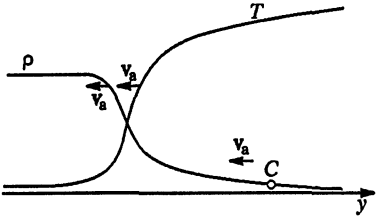


Рис. 9.2. Стационарная ($T(y,t) = T(y + |v_a|t)$) тепловая волна. Случай нелинейной электронной теплопроводности. Волна перемещается влево по холодному веществу. Это вещество разогревается и с большой скоростью оттекает вправо уже в виде горячего вещества. В этой связи говорят об абляции холодного вещества. Волна становится стационарной вследствие того, что источник тепла, расположенный в точке C, перемещается вместе с волной со скоростью v_a. Например так обстоит дело в лазерных абляционных волнах, в которых источник тепла "привязан" к фиксированной плотности плазмы

В этом случае граница между горячим и холодным веществами движется по холодному веществу. Наподобие того, как волна горения ползет по непрореагировавшему веществу. Пусть v_a — скорость этого наползания волны на холодное вещество. О наползании говорят из-за медленности этой скорости по сравнению со скоростью звука. Происходит как бы "поглощение" (абляция, унос) холодного вещества тепловой волной (аналогично пламя поглощает топливо). В этом случае говорят о волне абляции. Волна "перерабатывает" холодное вещество в горячее.

Рассмотрим конкуренцию между гидродинамическим и теплопроводностным механизмами поглощения холодного вещества. Каждый из них

[2]Она пропорциональна $\sqrt{t}$ в молекулярном и t^2 в турбулентном (при рэлей-тейлоровской турбулентности) случаях.

[3]Мы не можем здесь остановиться на важном вопросе о комбинированной молекулярной и турбулентной теплопроводности в случае, когда первая много меньше второй. Отметим только, что довольно ясно, что перемешивание приводит к дроблению крупных однотемпературных глобул на более мелкие. Возникает "поток" массы в область больших волновых чисел. Процесс дробления неоднороден в пространстве. Этот поток поставляет однотемпературное вещество в область настолько больших волновых чисел, при которых начинает работать молекулярная теплопроводность.

поглощает вещество в своем темпе. Требуется сравнить скорости поглощения v_a и v_{turb}, где v_{turb} — это скорость, с которой фронт турбулентного перемешивания распространяется по плотному холодному веществу.

Скорость v_{turb} растет с ростом характерного масштаба $1/k$, $v_{turb} \simeq \simeq \sqrt{g/k}$, а скорость v_a не зависит от масштаба. Поэтому, как показано в работах (Анисимов, Иванов, Иногамов, 1977) и (Иногамов, 1983, 1985d), имеет место короткомасштабное обрезание гидродинамической турбулентности со стороны малых длин волн

$$k \lesssim k_a = g/v_a^2. \tag{9.1}$$

Приведем оценку инкремента неустойчивости при наличии потока массы $\dot{M} = \rho_c v_a\,[\text{г/см}]^2$ через контактную границу, здесь ρ_c — плотность холодного вещества. Пусть холодное вещество, проходя через фронт, сильно перегревается и превращается в очень горячее малоплотное вещество. Будем считать, что фронт превращения холодного вещества в горячее очень тонок и что этот фронт остается изобарической линией. Тогда соответствующие граничные условия имеют вид

$$\eta_t = \varphi_y - \varphi_x\eta_x + |v_a|\sqrt{1+\eta_x^2}, \tag{9.2}$$

$$\varphi_t = -\mathbf{v}^2/2 - |g|\eta, \tag{9.3}$$

где $\eta = \eta(x,t)$ — задает контактную границу, $\varphi(x,y,t)$ — потенциал, $u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$ — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно. В условиях (9.2) и (9.3) функции φ и $\mathbf{v}$ берутся на границе η, т. е. при $y = \eta(x,t)$. Холодная жидкость простирается в сторону $y = +\infty$. Знак при ускорении соответствует неустойчивости. Считается, что v_a сравнимо с характерным гидродинамическим масштабом скорости.

Невозмущенное решение в системе координат, в которой жидкость при $y = +\infty$ покоится, имеет вид $\eta^{(0)} = |v_a|t$, $\varphi^{(0)} = 0$. Перейдем в систему координат $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, связанную с равномерно движущейся невозмущенной границей $\widetilde{x} = x$, $\widetilde{y} = y - |v_a|t$. В этой новой системе имеем: $\widetilde{\eta}^{(0)} = 0$, $\widetilde{\varphi}^{(0)} = -|v_a|y$.

Рассмотрим возмущения

$$\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta}^{(0)} + (\delta\widetilde{\eta}), \quad \widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}^{(0)} + (\delta\widetilde{\varphi}).$$

Вид условий (9.2), (9.3) не меняется при переходе из неподвижной в подвижную систему координат. Подставим эти возмущения в граничные условия (9.2), (9.3). В первом порядке по амплитуде возмущений получим

$$(\delta\widetilde{\eta})_t = (\delta\widetilde{\varphi})_y, \quad (\delta\widetilde{\varphi})_t = |v_a|(\delta\widetilde{\varphi})_y - |g|(\delta\widetilde{\eta}). \tag{9.4}$$

Ищем возмущения в обычном виде

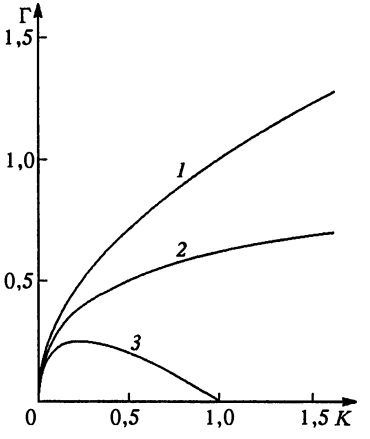
$$(\delta\widetilde{\eta}) = a_\eta \cos kx, \quad (\delta\widetilde{\varphi}) = -(a_v/k)\cos kx \exp(-ky),$$

где a_η и a_v — зависящие о времени амплитуды возмущений. Везде в граничных условиях потенциал возмущения $(\delta\widetilde{\varphi})$ и его производные берутся

на $(\delta\widetilde{\eta})$. Возмущения на границе имеют вид $(\delta\widetilde{\varphi})_t|_{\widetilde{\eta}} = -(a_v/k)\cos kx$, $(\delta\widetilde{\varphi})_y|_{\widetilde{\eta}} = a_v \cos kx$. Подставляя эти выражения в (9.4) и сокращая косинусы, получим

$$\dot{a}_\eta = a_v, \quad -\dot{a}_v/k = |v_a|a_v - |g|a_\eta. \tag{9.5}$$

Используем в качестве единиц длины и времени величины $1/k_a$ и $|v_a|/|g|$ соответственно, где масштаб k_a дается выражением (9.1). Из



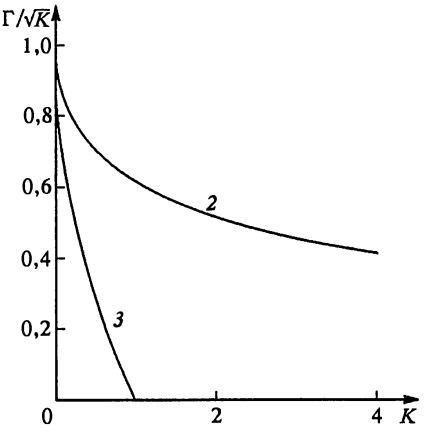


Рис. 9.3. Дисперсионные кривые в отсутствие и при наличии абляции. Кривые *1*, *2* и *3* относятся к зависимостям $\Gamma = \sqrt{K}$, (9.6) и (9.6′) соответственно

Рис. 9.4. Зависимости отношений инкрементов (9 6) и (9 6)′ к классическому инкременту $\Gamma = \sqrt{K}$ от волнового числа K. Эти отношения характеризуют степень стабилизации классической РТН. Зависимости *2* и *3* относятся к выражениям (9 6) и (9.6)′ соответственно

системы (9.5) следует характеристическое уравнение на инкремент γ. Оно имеет вид квадратного уравнения Его корни дают дисперсионные выражения для инкремента. Размерное и безразмерное выражения для корня, соответствующего неустойчивости, имеют вид

$$\gamma = \sqrt{|g|k + k^2 v_a^2/4} - k|v_a|/2, \quad \Gamma = \sqrt{K + K^2/4} - K/2, \tag{9.6}$$

где $\gamma = (|g|/|v_a|)\Gamma$, $k = (|g|/v_a^2)K$.

В статьях, посвященных абляционной модификации РТН, упоминают формулу, приведенную впервые в работе (Bodner, 1974). В размерной и безразмерной формах она имеет вид

$$\gamma = \sqrt{|g|k} - k|v_a|, \quad \Gamma = \sqrt{K} - K. \tag{9.6′}$$

Сравнение классического выражения $\gamma = \sqrt{|g|k}$ и формул (9.6), (9.6′) приведено на рис. 9.3 и 9.4. Для улучшения аппроксимации численных и экспериментальных данных часто используют также выражение вида $\gamma = \alpha\sqrt{|g|k} - \beta k|v_a|$ с подгоночными параметрами α и β, см. по этому поводу работы (Takabe, Mima, Montierth & Morse, 1985; Kull & Anisimov,

1986; Kilkenny, 1990; Gardner, Bodner & Dahlburg, 1991; Remington, Weber, Haan et al., 1993), см. также близкие по теме работы (Manheimer, Colombant & Ott, 1984; Emery, Gardner & Boris, 1982; Verdon, McCrory, Morse et al., 1982). Выражение для γ в таком виде называют формулой Такабе. См. также работы (Bychkov, Golberg & Liberman, 1993; Liberman, Bychkov & Golberg, 1994), посвященные волнам горения и абляции. Подробный анализ неустойчивостей лазерного испарения дан в книгах (Анисимов и др., 1970; Anisimov & Khokhlov, 1995). Кроме того, см. публикации (Dahlburg et al., 1993) и обзор (Kilkenny et al., 1994). Отметим также недавнюю интересную попытку аккуратного аналитического решения задачи об устойчивости абляционной волны, выполненную в работе (Sanz, 1994).

§ 10. Поверхностное натяжение

Исследование рэлей-тейлоровской неустойчивости было начато в работах (Rayleigh, 1984, 1990) и (Taylor, 1950), где рассматривались линейные задачи об устойчивости горизонтального слоя идеальной жидкости в гравитационном поле. В работе (Bellman & Pennigton, 1954) теория была обобщена на случай вязкой жидкости и учета поверхностного натяжения. В классической монографии (Chandrasekhar, 1961) рассмотрены случаи РТН для непрерывных законов изменения плотности с высотой, а также для идеально проводящей жидкости в магнитном поле. Линейная теория РТН проводящей жидкости в магнитном поле при конечных магнитных числах Рейнольдса рассмотрена в работах (Сон, 1978, 1979), стабилизация РТН тепловым потоком — в работе (Иевлев и Сон, 1980), а рэлеевской неустойчивости струй — в работе (Добкин и Сон, 1984).

Рассмотрим слой жидкости высотой d, находящийся под твердой границей в атмосфере. Равновесие такого слоя, необычное на первый взгляд, обеспечивается равенством силы гидростатического давления

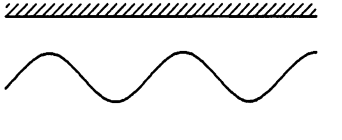


Рис. 10.1. Зависимости отношений инкрементов (9.6) и (9.6′) к классическому инкременту $\Gamma = \sqrt{K}$ от волнового числа K. Эти отношения характеризуют степень стабилизации классической РТН. Зависимости *2* и *3* относятся к выражениям (9.6) и (9.6′) соответственно

жидкости сверху атмосферному давлению снизу. Напомним, что для воды в таком равновесии может находиться слой высотой до 10 м. На рис. 10.1 изображен слой жидкости в гравитационном поле, где ось x соответствует невозмущенной границе жидкости.

Система уравнений, описывающая развитие РТН в линейном приближении, включает уравнения непрерывности и движения — уравнения Эйлера без нелинейных членов

$$\partial \mathbf{v}/\partial t = -\nabla p/\rho, \tag{10.1}$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0. \tag{10.2}$$

При возмущениях граница жидкости колеблется по некоторому закону $\xi = \xi(x,t)$. Граничные условия формулируются на верхней и нижней возмущенной границе и выражают кинематическое условие непротекания жидкости и динамическое условие, связывающее разность давлений по обе стороны раздела с поверхностным натяжением жидкости:

$$z = 0 \ : \ p - p_0 = \rho g \xi + \alpha \partial^2 \xi / \partial x^2, \tag{10.3}$$

$$z = \delta \ : \ v(\delta) = 0. \tag{10.4}$$

Здесь $v = v_z = \partial \xi / \partial t$ — компонента вертикальной скорости жидкости, p_0 — атмосферное давление или давление жидкости на границе раздела, α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Изменение давления и движение газа не учитываем ввиду его малой плотности по отношению к плотности жидкости. В следующих разделах от этого ограничения мы откажемся.

Решение уравнений (10.1–10.2) можно получить в данном случае, вводя потенциал скоростей, но мы предпочтем другой способ, допускающий обобщение и на непотенциальные течения. Применим к уравнению (10.1) двойное векторное произведение, затем полученное векторное уравнение спроектируем на ось z. В результате получим

$$\gamma \Delta v = 0 \quad \text{или} \quad (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2) v = 0.$$

Координата x является циклической, поэтому решение этого уравнения можно искать в виде

$$v = v(z) e^{\gamma t + ikx},$$

где амплитудная функция $v(z)$ удовлетворяет уравнению

$$(D^2 - k^2) v = 0, \quad D \equiv d/dz,$$

В области жидкости $z > 0$ решение имеет вид

$$v = C_1 e^{kz} + C_2 e^{kz}.$$

Из связи вертикальной компоненты скорости и координаты границы следует

$$\xi = \gamma^{-1} (C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}) e^{\gamma t + ikx},$$

а из проекции уравнения движения (10.1) на ось z находим давление

$$p - p_0 = -\rho \gamma k^{-1} (C_1 e^{kz} - C_2 e^{-kz}) e^{\gamma t + ikx}.$$

Подставляя в граничные условия (10.3–10.4), получаем дисперсионное уравнение или выражение для инкремента неустойчивости:

$$\gamma^2 = f(k) \operatorname{th} k\delta, \quad f(k) = gk(1 - \alpha k^2/\rho g). \tag{10.5}$$

В двух предельных случаях "мелкой воды" при $k\delta \ll 1$:

$$\gamma^2 = g\delta k^2 (1 - \alpha k^2/\rho g) \tag{10.6}$$

и "глубокой воды" при $k\delta \gg 1$:

$$\gamma^2 = gk(1 - \alpha k^2/\rho g). \tag{10.7}$$

§ 11. Магнитное поле и проводимость

Рэлей-тейлоровская неустойчивость развивается вследствие движения жидкости в гравитационном поле. К широкому классу объемных сил, действующих в жидкости, относятся электромагнитные силы, величина которых определяется проводимостью среды. Проводящими являются жидкие металлы или газ, при высоких температурах переходящий в плазменное состояние. Рассмотрим влияние магнитного поля на РТН.

Вначале рассмотрим случай бесконечной проводимости среды, т.е. больших магнитных чисел Рейнольдса ($\mathrm{Re_m} = vL/\nu_\mathrm{m}$, где v, L — характерные скорость и размер, $\nu_\mathrm{m} = c^z/4\pi\sigma$ — магнитная вязкость, c — скорость света, s — удельная проводимость среды в гауссовой системе единиц, $\mathrm{Re_m} \ll 1$). Для задачи РТН характерной скоростью является величина $\sqrt{gL}$, где характерный размер $L \sim \delta$ для жидкости конечной глубины или $L \sim 1/k$ для глубокой жидкости. Уравнения движения несжимаемой идеальной жидкости, находящейся во внешнем магнитном поле H в линейном по скорости и индуцированному магнитному полю, имеет вид

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla\left(p + \frac{Hh}{4\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}(H\nabla)h, \tag{11.1}$$

$$\partial h/\partial t = (H\nabla)v, \tag{11.2}$$

$$\nabla v = 0, \quad \nabla h = 0. \tag{11.3}$$

Здесь в уравнении движения учтена сила Ампера, создаваемая внешним H и индуцированным h магнитными полями. Уравнение (11.2) представляет уравнение магнитной индукции для идеально проводящей жидкости, а (11.3) — соленоидальность магнитного поля и условие несжимаемости жидкости.

Рассмотрим случай вертикального магнитного поля, параллельного полю тяжести. Применим, как и в предыдущем случае, операцию двойного ротора и проекции на ось x к уравнению движения (11.1). В результате получим

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\Delta v = \frac{1}{4\pi}\left(H\frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta h, \tag{11.4}$$

где $v \equiv v_z$, $h \equiv h_z$. В этом уравнении x, y являются циклическими координатами, поэтому решение можно искать в виде

$$vh \sim e^{\gamma t + ik_x x + ik_y y}.$$

Из уравнений (11.2–11.4) получаем

$$\gamma(D^2 - k^2)v = (H^2/4\pi\rho)(D^2 - k^2)Dh, \quad \gamma h = HDv.$$

Исключая индуцированное магнитное поле h, получаем аналог уравнения Орра–Зоммерфельда:

$$(D^2 - k^2)v = \frac{H^2}{4\pi\rho\gamma^2}(D^2 - k^2)D^2 v = 0. \tag{11.5}$$

Характеристическое уравнение данного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$(x^2 - k^2) = \frac{H^2}{4\pi\rho\gamma^z}(x^2 - k^2)x^2 = 0.$$

Решения этого уравнения $x = \pm k$, $x = \pm\gamma/c_\Delta$, где $c_\Delta = H\sqrt{4\pi\rho}$ — альвеновская скорость.

Рассмотрим случай двух жидкостей с плотностями ρ_1 ($z < 0$) и ρ_2 ($z > 0$), граница раздела между которыми в начальный момент находится при $z = 0$. Решения уравнения (11.5), ограниченые на $\pm\infty$, имеют вид

$$v_1 = A_1 e^{kz} + B_1 e^x 1^z, \quad \text{где} \quad x_1 = \gamma/c_1, \quad c_1 = H\sqrt{4\pi\rho_\perp};$$

$$v_2 = A_2 e^{-kz} + B_2 e^{-x} 2^z, \quad \text{где} \quad x_2 = \gamma/c_2, \quad c_2 = H\sqrt{4\pi\rho_2}.$$

Сформулируем граничные условия в задаче. Вертикальная компонента скорости связана с координатой колеблющейся поверхности $\xi(x,t)$, как и ранее, соотношением $v = \partial\xi/\partial t$ или для амплитуд $v = \gamma\xi$. Кинематическое условие определяется равенством координат верхней и нижней границ на смещенной поверхности:

$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad \text{или} \quad A_1 + B_1 = A_2 + B_2.$$

Из граничных условий для магнитного поля на границе двух идеально проводящих сред следует, что непрерывными являются все компоненты магнитного поля. Равенство нормальных компонент следует из $Dh = 0$, а равенство тангенциальных компонент — из отсутствия поверхностного тока на границе, что с учетом связи между индуцированным магнитным полем и z-компонентой скорости $gh = HDv$ приводит к непрерывности производной скорости Dv:

$$kA_1 + x_1 B_1 = -kA_2 - x_2 B_2.$$

Непрерывность компонент магнитного поля h_x и h_y вследствие соленоидальности магнитного поля приводит к непрерывности второй производной $D^2 v$ на границе раздела:

$$k^2 A_1 + x_1^2 B_1 = k^2 A_2 + x_2^2 B_2.$$

Динамическое условие на границе двух сред определяется равенством давлений с учетом гидростатического давления:

$$(p - \rho g\xi)_1 = (p - \rho g\xi)_2. \tag{11.6}$$

Магнитное давление можно не учитывать, т. к. оно одинаково по обе стороны раздела, что следует из непрерывности магнитного поля на границе. Давление можно найти из z-компоненты уравнения движения (11.1) :

$$p + \frac{Hh}{4\pi} = -\int \gamma\rho v dz + \frac{Hh}{4\pi}.$$

Подставляя выражения для входящих сюда величин, получаем динамическое условие:

$$-\gamma\rho_1(A_1/k + B_1/x_1) - \rho g\gamma^{-1}(A_1 + B_1) = \\ = \gamma\rho_2(A_2/k + B_2/x) - \rho g\gamma^{-1}(A_2 + B_2).$$

Система уравнений относительно коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2 имеет нетривиальное решение, если определитель (11.6) равен нулю, где $\rho_1 = \rho_1/(\rho_1+\rho_2)$, $\rho_2 = \rho_2/(\rho_1+\rho_2)$, $R = gk(\rho_2-\rho_1)/(\rho_1+\rho_2)$. Полученное дисперсионное уравнение в предельном случае отсутствия магнитного поля совпадает с полученным ранее. Решение дисперсионного уравнения $x_1 = x_2 = k$ определяет тривиальное решение, а в нетривиальном случае находим решение физической задачи:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & x_1 & k & x_2 \\ k^2 & x_1^2 & -k^2 & x_2^2 \\ R/2-\bar\rho_1 & R/2-\bar\rho_1 k/x_1 & R/2-\bar\rho_2 & R/2-\bar\rho_2 k/x_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11.7)$$

Определим альвеновскую скорость $c_\Delta = H\sqrt{4\pi(\rho_1+\rho_2)}$, тогда получаем уравнение для инкремента неустойчивости:

$$R - 1 = \frac{2c_\Delta k\,(2\gamma\sqrt{\bar\rho_1\bar\rho_2} + c_\Delta k(\sqrt{\bar\rho_1}+\sqrt{\bar\rho_2}))}{\gamma\,(\gamma(\sqrt{\bar\rho_1}+\sqrt{\bar\rho_2}) + 2c_\Delta k)}. \qquad (11.8)$$

Правая часть (11.8) всегда положительна, поэтому $R > 1$, а инкремент неустойчивости $\gamma < \gamma_0$, соответствующего нулевому магнитному полю. Следовательно, магнитное поле приводит к стабилизации РТН. Физический механизм стабилизации связан с тем, что при движении жидкости вдоль оси x возникает ток в направлении оси y, который, взаимодействуя с внешним магнитным полем, приводит к силе, направленной против оси x, т.е. к торможению жидкости. Найдем поправку к инкременту неустойчивости для длинноволновых возмущений $k \to 0$, или, при фиксированном размере возмущения — соответствующему слабому магнитному полю. При $c_\Delta k \ll \gamma_0$ из (11.8) следует

$$\gamma = \left(\sqrt{\bar\rho_2} - \sqrt{\bar\rho_1}\right) g/c_\Delta. \qquad (11.9)$$

В данном случае инкремент неустойчивости не зависит от длины волны, и с ростом магнитного поля он убывает, т.е. неустойчивость стабилизируется.

Рассмотрим случай горизонтального магнитного поля при $\mathrm{Re_m} \gg 1$. Если магнитное поле направлено по оси x, то уравнения (11.4) и (11.2) примут вид

$$\rho(\partial/\partial t)\Delta v = (1/4\pi)(H\partial/\partial x)\Delta h,$$

$$\partial h/\partial t = H\partial v/\partial x.$$

Уравнение, аналогичное (11.5), получается после исключения вертикальной компоненты магнитного поля:

$$(D^2 - k^2)\left(\gamma + \frac{k_x^2 H^2}{4\pi\rho\gamma}\right) v = 0. \tag{11.10}$$

Решения этого уравнения, затухающие на бесконечности, имеют вид

$$v_z = ae^{-kz}, z > 0; \quad v_1 = be^{kz}, z < 0.$$

Из кинематического граничного условия $\xi_1 = \xi_2$ следует $a = b$. Для получения динамического граничного условия используем z-компоненты уравнений движения и магнитной индукции:

$$p = -\left(\gamma p + \frac{k_x^2 H^2}{4\pi}\right) \int v\, dz.$$

Подставляя это уравнение в (11.6), находим дисперсионное уравнение:

$$\gamma^2 = gk\left(\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} - \frac{k_x^2 H^2}{2\pi(p_1 + p_2)gk}\right). \tag{11.11}$$

Магнитное поле стабилизирует возмущения, направленные вдоль магнитного поля. Физический механизм стабилизации связан с тем, что действие магнитных сил можно интерпретировать как натяжение силовых линий, которые при вмороженности поля препятствуют движению частиц поперек магнитного поля.

Рассмотрим случай малых магнитных чисел Рейнольдса. Для вертикального магнитного поля обобщим задачу о РТН на случай конечной глубины жидкости (Сон, 1979). Рассмотрим жидкометаллическую пленку проводящей жидкости в вертикальном магнитном поле. Для жидкости конечной проводимости уравнение движения сохраняет вид (11.1), а в уравнении магнитной индукции следует учесть конечную проводимость жидкости:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu_m \Delta h + H\frac{\partial v}{\partial z}. \tag{11 12}$$

В данной задаче внешняя разность потенциалов отсутствует, а индуцированное магнитное поле вызывается электрическими токами, возникающими при движении жидкости во внешнем магнитном поле H. Второй член в правой части уравнения (11.12) описывает "источники", приводящие к появлению индуцированного магнитного поля h. Ограничение индуцированного поля может быть связано либо с омическим, либо с индуктивным сопротивлением. В первом случае $\nu_m \Delta h \approx H\partial v/\partial z$, отношение членов $|\partial h/\partial t||\nu_m \Delta h| \approx \mathrm{Re}_m$, поэтому при малых магнитных числах Рейнольдса ток ограничен омическим, а не индуктивным сопротивлением, и левой частью уравнения (11.12) можно пренебречь. В приведенной оценке предполагалось, что время изменения поля h равно

характерному времени изменения скорости, однако на величину ее изменения могут оказывать существенное влияние магнитные силы. Предполагая, что магнитные силы существенны в уравнении движения, найдем характерное время изменения скорости:

$$\left|p\frac{\partial v}{\partial t}\right| \sim \left|\frac{H}{4\pi}\frac{\partial h}{\partial z}\right|, \quad \text{откуда} \quad \tau \sim \frac{4\pi\delta\rho v}{H^2\mathrm{Re_m}}.$$

В сильных магнитных полях эта величина может быть настолько малой, что $\partial h/\partial t$ станет одним из основных членов. Предположим, что и в этом случае индуктивное сопротивление мало по сравнению с омическим:

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}\right| \ll |\nu_\mathrm{m}\Delta h| \quad \text{или} \quad \frac{Hh^2}{4\pi p\delta v} \ll \frac{\nu_\mathrm{m}h}{\delta^2}.$$

Это условие можно записать в виде

$$(\delta c_\Delta/\nu_\mathrm{m})^2 \ll 1, \tag{11.13}$$

где $c_\Delta = H\sqrt{4\pi\rho}$ — альвеновская скорость. Неравенство (11.13) ограничивает величину внешнего магнитного поля, при этом условии не происходит генерации альвеновских волн.

Сформулируем граничные условия на индуцированное магнитное поле. Будем считать стенку идеально проводящей, тогда магнитное поле не проникает в стенку и все возмущения экранируются, т.е. $h(\delta) = 0$. В области $z < 0$ движения жидкости и токов нет, поэтому уравнение магнитной индукции при $z < 0$, затухающее на бесконечности ($z \to -\infty$), имеет вид

$$(D^2 - k^2)h_1 = 0, \quad h_1 = Ce^{kz}.$$

На границе двух сред с конечными проводимостями непрерывны не только нормальные, но и тангенциальные компоненты магнитного поля. Из условия соленоидальности магнитного поля $\nabla h = 0$ при $z = 0$ следует граничное условие для магнитного поля:

$$\frac{1}{h}\frac{dh}{dz} = \left(\frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{dz}\right)_{z=0} = k.$$

Условие непротекания жидкости на верхней стенке и кинематическое условие при $z = 0$ сохраняются как и в предыдущей задаче. В динамическом условии необходимо учесть тензор максвелловских напряжений. Однако на границе двух сред с конечными проводимостями магнитное поле непрерывно, поэтому скачка максвелловских напряжений нет, и динамическое условие на свободной поверхности (10.3) сохраняется.

Применяя операцию двойного ротора и проектирования на ось z к уравнению движения, получим

$$\gamma\Delta v = (H/4\pi\rho)\,\partial\Delta h/\partial z,$$

$$\nu_\mathrm{m}\Delta h = -H\partial v/\partial z.$$

Последнее уравнение представляет проекцию уравнения магнитной индукции на ось z, $v \equiv v_z$, $h \equiv h_z$. Исключая из полученной системы уравнений индуцированное магнитное поле h, получим аналог уравнения Орра–Зоммерфельда для данной задачи:

$$\gamma(D^2 - k^2)v + \frac{H^2}{4\pi\rho\nu_\mathrm{m}} D^2 v = 0.$$

Давление выражается из проекции уравнения движения на ось z. Решение, соответствующее граничным условиям, приводит к дисперсионному уравнению

$$\gamma(\gamma + \gamma_\mathrm{H}) = f(k)\,\mathrm{th}(\varphi k\delta)/\varphi, \tag{11.14}$$

где $f(k)$ определяется уравнением (10.5), $\gamma_\mathrm{H} = H^2/4\pi\rho\nu_\mathrm{m}$, $\varphi^2 = \gamma/(\gamma + \gamma_\mathrm{H})$. В предельных случаях "глубокой воды" и "мелкой воды" получаем

$$\gamma(k) = \gamma_\mathrm{H}^{-1/3} f^{2/3}(k) \sim H^{-2/3} \quad \text{при} \quad k\delta \gg 1 \tag{11.15}$$

$$\gamma(\gamma + \gamma_\mathrm{H}) = f(k)k\delta \quad \text{при} \quad k\delta \ll 1 \tag{11.16}$$

В последнем случае "мелкой воды", представляющем практический интерес, максимальную величину инкремента можно найти из условия его экстремума ($d\gamma/dk = 0$)

$$\gamma_\mathrm{max} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{H^4}{(4\pi\rho\nu_\mathrm{m})^2} + \frac{\rho g^2\delta}{\alpha}} - \frac{H^2}{4\pi\rho\nu_\mathrm{m}}\right), \tag{11.17}$$

достигающегося при $k = k_\alpha/2^{1/2}$, $k_\alpha = \sqrt{\rho g/\alpha}$. В сильных магнитных полях при

$$R^2 \gg 4\pi\rho\nu_\mathrm{m}(\rho g^2\delta/\alpha), \quad \gamma_\mathrm{max} = \frac{\pi\rho\nu_\mathrm{m}\delta}{H^2}\sqrt{\frac{\rho g}{\alpha}}. \tag{11.18}$$

§ 12. Вязкость в комбинации с поверхностным натяжением

Релей-тейлоровская неустойчивость вязкой жидкости исследовалась в работе (Taylor, 1950) без учета поверхностного натяжения. Рассмотрим эту задачу в более общем виде. В отсутствие магнитного поля уравнение движения Навье–Стокса имеет вид

$$\partial\mathbf{v}/\partial t = -\nabla p/\rho + \nu\Delta\mathbf{v}, \tag{12.1}$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости. Граничные условия включают прилипание жидкости к верхней стенке и равенство нулю двух компонент тензора вязких напряжений:

$$z = \delta : \; v_x = v_y = 0,$$

$$z = 0 : \quad \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = 0, \quad \tau_{zz} = -2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \alpha\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},$$

где $\mu = \rho\nu$ — динамическая вязкость жидкости. Применение двойного ротора с проекцией на ось z к уравнению (12.1) дает:

$$(D^2 - k^2)\left(\gamma + \nu(D^2 - k^2)\right) v_z = 0. \tag{12.2}$$

Граничные условия, переформулированные для вертикальной проекции скорости v, имеют вид

$$z = \delta : v_z(\delta) = Dv_z(\delta) = 0;$$

$$z = 0 : (D^2 - k^2)v_z = 0;$$

$$\gamma D^{-1}v_z + 2\gamma Dv_z - \nu(Dv_z - D^{-1}v_z) + fv_z/\gamma = 0.$$

Решение уравнения (12.2), удовлетворяющее граничным условиям при $z = \delta$, можно записать в следующем виде:

$$v_z = a\left(\mathrm{ch}(E_0 k(z-\delta)) - \mathrm{ch}(k(z-\delta))\right) + \\ + b\left(\mathrm{sh}(E_0 k(z-\delta)) - E_0\,\mathrm{sh}(k(z-\delta))\right),$$

где $E_0 = (\gamma/\nu k^2 + I)^{1/2}$. Использование граничных условий при $z = 0$ приводит к дисперсионному уравнению:

$$(\gamma + 2\nu k^2)\left(1 - \frac{1}{E_0}\,\mathrm{th}(E_0 k\delta)\,\mathrm{th}(k\delta)\right) - \frac{4\nu k^2(\gamma + 2\nu k^2)}{\mathrm{ch}(E_0 k\delta)\,\mathrm{ch}(k\delta)} + \\ + 4\nu^2 k^4(I - E_0\,\mathrm{th}(k\delta)\,\mathrm{th}(Ek\delta)) = f(k)\left(\mathrm{th}(k\delta) - \mathrm{th}(E_0 k\delta)\right). \tag{12.3}$$

В этом уравнении содержатся полученные ранее результаты для невязкой жидкости ($\nu = 0$, $E_0 = \infty$). В предельных случаях "мелкой воды" при $k\delta \ll 1$ отсюда следует:

$$(\gamma + 2\nu k^2) = 4\nu k^2(\gamma + 2\nu k^2) + (k\delta)^3 f(k)(E^2 - 1)/3 \tag{12.4}$$

и "глубокой воды" при $k\delta \gg 1$:

$$(\gamma + 2\nu k^2) - 4\nu^2 k^4 E_0 = f(k). \tag{12.5}$$

Перейдем к решению задачи РТН вязкой проводящей жидкости в магнитном поле при малых магнитных числах Рейнольдса. Система уравнений и граничных условий объединяет обсуждавшиеся выше и имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{Hh_z}{4\pi}\right) + \nu\Delta\mathbf{v} + \frac{H}{4\pi\rho}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nu_{\mathrm{m}}\Delta\mathbf{h} + H\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0,$$

$$z = \delta : v_x = v_y = 0, h = 0,$$

$$z = 0 : \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} = -kh, \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$p - 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \rho g\xi - \alpha\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

После применения операции $(\nabla \times \nabla \times \ldots)_z$ к уравнению движения, получаем

$$\gamma(D^2 - k^2)v_z + \frac{H^2}{4\pi\rho\nu_{\mathrm{m}}}D^2 v_z = \nu(D^2 - k^2)^2 v_z. \qquad (12.6)$$

Координаты t, x являются циклическими, поэтому решение этого уравнения ищем в виде

$$v_z \sim e^{\gamma t + ikx + \varkappa z}.$$

Относительно k получается уравнение

$$(\gamma + \gamma_{\mathrm{H}})\varkappa^2 - \gamma k^2 = \nu(\varkappa^2 - k^2)^2, \qquad (12.7)$$

которое имеет два корня, содержащие предельные случаи невязкой жидкости и отсутствия магнитного поля:

$$\varkappa_1 = k\varphi, \quad \varphi^2 = \frac{1}{2E_0^2}\left(2E_0^2 + 1 - \sqrt{1 + 4E_0^2(1-\varphi_0^2)}\right) \to \varphi_0^2,$$

$$\varkappa_z = kE, \quad E^2 = \frac{1}{2E_0^2}\left(2E_0^2 + 1 + \sqrt{1 + 4E_0^2(1-\varphi_0^2)}\right) \to E_0,$$

где $E_0 = (\gamma + \gamma_{\mathrm{H}})/\nu \gg 1$, $\varphi_0 = \gamma/(\gamma + \gamma_{\mathrm{H}})$.

Решение уравнения (12.6), удовлетворяющее граничным условиям при $z = \delta$, имеет вид

$$v_z = a\left(\mathrm{ch}(Ek(z-\delta)) - \mathrm{ch}(k\varphi(z-\delta))\right) + \\ + bk\left(\varphi\,\mathrm{sh}(Ek(z-\delta)) - E\,\mathrm{sh}(k\varphi(z-\delta))\right).$$

Удовлетворяя граничным условиям при $z = 0$, получим дисперсионное уравнение:

$$(\gamma + 2\nu k^2)\left(\frac{\gamma}{\varphi} + 2\nu k^2\varphi\right)\left(1 - \frac{1}{E}\,\mathrm{th}(kE\delta)\,\mathrm{th}(k\varphi\delta)\right) - \\ - \frac{2\nu k^2}{\mathrm{ch}(k\varphi\delta)\,\mathrm{ch}(kE\delta)}\left(\varphi(\gamma + 2\nu k^2) + \frac{\varphi^2+1}{2}\left(\frac{\gamma}{\varphi} + 2\nu k^2\varphi\right)\right) + \\ + 2(\varphi^2+1)\nu^2k^4\left(1 - E\,\mathrm{th}(kE\delta)\,\mathrm{th}(k\varphi\delta)\right) - \\ - \nu k^2\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)\mathrm{th}(k\varphi\delta)\left((\gamma + 2\nu k^2)\frac{\varphi\,\mathrm{th}(kE\delta)}{E} - \nu k^2(\varphi^2+1)\frac{\mathrm{sh}(k\varphi\delta)}{\mathrm{ch}(kE\delta)}\right) + \\ + \frac{2\nu k^2 f(k)}{\gamma} - \frac{(\varphi^2-1)}{2}\left(\mathrm{th}(k\varphi\delta) - \varphi\,\mathrm{th}(kE\delta)\right) = \\ = f(k)\left(\mathrm{th}(k\varphi\delta) - \frac{\varphi\,\mathrm{th}(kE\delta)}{E}\right). \qquad (12.8)$$

В этом дисперсионном уравнении содержатся рассмотренные ранее частные случаи: в отсутствие вязкости ($\nu = 0, E = \infty$) получаем (11.14), для вязкой непроводящей жидкости ($H = 0$, $\varphi = 1$) получаем (12.3).

§ 13. О жидком металле в электрическом поле

В предыдущих разделах причиной развития РТН являлось гравитационное поле. Рассмотрим случай развития неустойчивости на примере поведения жидкого металла в сильном электрическом поле. Пусть жидкий металл находится в электрическом поле, направленном перпендикулярно его поверхности, см. рис. 13.1.

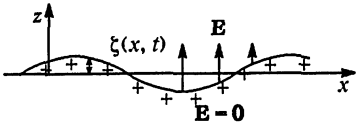


Рис. 13.1. Жидкий металл в электрическом поле

Внутри жидкого металла электрическое поле равно нулю, а над ним определяется поверхностной плотностью заряда. В невозмущенном состоянии электрическое поле $E = 4\pi\sigma_0$, электрический потенциал $\varphi_0 = -4\pi\sigma_0 z$. При возмущениях границы вида $\xi = ae^{ikx-i\omega t}$ возникает возмущение потенциала, которое можно найти из уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad \text{или} \quad (D^2 - k^2)\varphi_1 = 0.$$

Это уравнение имеет следующее решение в области $z > 0$:

$$\varphi_1 = Ce^{-kz+i(kx-\omega t)}.$$

Постоянная C может быть найдена из условия равенства нулю потенциала поверхности, которая является эквипотенциалью с $\varphi = 0$:

$$\varphi_{\text{пов}} = -4\pi\sigma_0\xi + \varphi_1 = 0,$$

откуда следует $C = 4\pi\sigma_0 a$. Распределение потенциала и электрического поля в области $z > 0$ имеет вид

$$\varphi = -4\pi\sigma_0\left(z + ae^{-kz+i(kx-\omega t)}\right),$$

$$E = -d\varphi/dz = 4\pi\sigma_0\left(1 - ake^{-kz+i(kx-\omega t)}\right).$$

С этим электрическим полем связано дополнительное давление

$$p_1 = E^2/8\pi = -4\pi\sigma_0 k\xi.$$

Постоянное давление $p_0 = (4\pi\sigma_0)^2/8\pi$ может быть включено в условие равновесия жидкости и не влияет на возмущения.

В области жидкости $z < 0$ уравнения Эйлера и непрерывности (10.1)–(10.2) имеют решение

$$v_z = be^{kz+i(kx-\omega t)}.$$

Из z-компоненты уравнения движения (10.1) находим связь давления с координатой поверхности:

$$p_2 = \rho\omega^2 D^{-1}\xi = \rho\omega^2\xi/k.$$

Кинематическое и динамическое граничные условия на поверхности раздела имеют вид

$$v_z = \partial\xi/\partial t = -i\omega\xi,$$

$$p_1 - (p_2 - \rho g\xi) = a\partial^2\xi/\partial x^2.$$

В результате получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = k(g + ak^2/\rho - 4\pi\sigma_0^2 k/\rho). \tag{13.1}$$

В достаточно сильном электрическом поле может возникнуть неустойчивость ($\omega^2 < 0$). Критическое поле, при котором возникает неустойчивость, определяемое из (13.1), равно

$$E_{T\Phi}^{\text{кр}} = \sqrt[4]{64\pi^2\alpha\rho g}. \tag{13.2}$$

При решении этой задачи предполагалась независимость величины поверхностного натяжения от потенциала поверхности. Зависимость $a(\varphi)$ можно получить, рассматривая изменение термодинамического потенциала Φ при изотермическом изменении величины поверхности ds и потенциала φ:

$$d\Phi = \alpha\, ds - e\, d\varphi, \tag{13.3}$$

откуда следует $\alpha = (\partial\Phi/\partial s)_\varphi$, $\Phi = \alpha s$. Подставляя в уравнение (13.3), получаем

$$\partial(\alpha s) = \alpha\, ds - e\, d\varphi, \quad d\alpha/d\varphi = -e/s = -\sigma.$$

Из последнего уравнения можно найти явную зависимость поверхностного натяжения от потенциала:

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -\sigma = -\frac{E}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=0},$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\varphi}{4\pi}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = \alpha_0 - 4\pi\sigma_0 L = \alpha_0 - \frac{E^2}{4\pi}L, \tag{13.4}$$

где L — расстояние между электродами, α_0 — поверхностное натяжение незаряженной поверхности. Подставляя (13.4) в (13.1), получаем дисперсионное уравнение:

$$\frac{\rho\omega^2}{k} = \rho g + \left(\alpha - \frac{E^2 L}{4\pi}\right)k^2 - \frac{E^2 k}{4\pi}. \tag{13.5}$$

Рассмотрим два возможных случая. В первом будем предполагать, что электрическое поле не слишком велико ($E^2 < 4\pi\alpha/L$). В этом случае условие возникновения неустойчивости можно записать в виде

$$\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2\ell - I > 0,$$

где $\varepsilon = E/E_{\text{кр}}^{T\Phi}$, $\ell = L/L_{\text{кр}}$, $L_{\text{кр}} = \sqrt{\alpha_0}/\rho g$. Критическое поле, при котором возникает неустойчивость, меньше чем (13.2), что связано с уменьшением коэффициента поверхностного натяжения в электрическом поле.

Во втором случае в сильных полях, когда $E^2 > 4\pi/L$, знак коэффициента поверхностного натяжения становится отрицательным, т. е. уменьшение поверхностной энергии происходит при увеличении поверхности, и любые достаточно мелкомасштабные возмущения становятся неустойчивыми. Критическое поле в этом случае имеет вид (Сон, 1979)

$$E^2 > E_{\text{кр}}^2 = \frac{4\pi\alpha}{L} = \frac{L_{\text{кр}}}{2L}\left(E_{\text{кр}}^{T\Phi}\right)^2$$

Критическое поле в этом случае меньше, чем $E_{\text{кр}}^{T\Phi}$ при $L < L_{\text{кр}}/2$.

§ 14. Стабилизация тепловым потоком

Слой жидкости, поддерживаемый снизу давлением газа, подвержен РТН. Рассмотрим воздействие мощного теплового потока на границу раздела, так что происходит испарение жидкого слоя. Покажем качественно, что такое воздействие приводит к стабилизации РТН. При возникновении выпуклостей и вогнутостей на границе жидкости, находящейся в термодинамическом равновесии с паром, возникают изменения давления у поверхности. Температура кипения поверхности определяется давлением в силу соотношений Клапейрона–Клаузиуса, поэтому постоянный тепловой поток вызывает испарение выпуклостей и конденсацию пара в вогнутостях на границе, что приводит к "полировке" поверхности, т. е. к стабилизации РТН.

Воздействие теплового потока на РТН проявляется также и при взаимодействии мощного излучения с веществом (Анисимов и др., 1970), когда падающий поток излучения испаряет металл с поверхности или создает пузырьковое кипение. Фронт разлетающегося вещества движется навстречу потоку, что вследствие инерционных сил приводит к развитию РТН, на которую воздействует падающее излучение.

Рассмотрим пленку толщиной δ (рис. 10.1), поддерживаемую снизу давлением насыщенного пара, подверженную РТН. В невозмущенном состоянии пленка прогревается тепловым потоком, который испаряет жидкость, поэтому нижняя поверхность пленки имеет толщину кипения $T_{\text{кип}}$, верхняя — температуру стенки $T_{\text{ст}}$, так что толщина пленки определяется величиной теплового потока q и теплопроводностью жидкости λ:

$$\delta = \lambda(T_{\text{кип}} - T_{\text{ст}})/q.$$

В приведенном в разделе 10 решении необходимо изменить граничные условия. В кинематическом условии учитываем, что при испарении поверхности под действием теплового потока жидкость подтекает к поверхности, а при конденсации, наоборот, происходит движение жидкости от поверхности, поэтому при $z = 0$

$$v(0) = \partial\xi/\partial t + v_{\text{исп}},$$

где $v_{\text{исп}}$ — скорость испарения жидкости ($v_{\text{исп}} > 0$, при конденсации $v_{\text{исп}} < 0$). В данном случае примем ось x вдоль границы раздела, а

ось z направим вниз параллельно силе тяжести с началом координат на невозмущенной поверхности.

Динамическое условие выражает равенство разности давлений в жидкости и паре лапласовскому давлению

$$p_{\text{пов}} + \rho g\xi - p_{\text{газ}} = -\alpha\partial^2\xi/\partial x^2,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, $p_{\text{газ}}$ — давление газа у поверхности пленки.

В результате получаем дисперсионное уравнение

$$\gamma(\gamma + \gamma_v) = gk(1 - \alpha k^2/pg - \beta)\,\text{th}(k\delta),$$

где $\gamma_v = v_{\text{исп}}/\xi$, $\beta = p_{\text{газ}}/\rho g\xi$.

Рассмотрим тепловой баланс пленки. В стационарном состоянии распределение температуры линейно

$$T = T^{(0)}_{\text{кип}} + qz/\lambda.$$

Уравнение для возмущений температуры $T_1 \ll T$ имеет вид

$$\partial T_1/\partial t + vq/\lambda = \chi\Delta T_1,$$

где χ — коэффициент температуропроводности жидкости. Подставляя распределение скоростей в жидкости $v = a\,\text{sh}(kz + k\delta)$, получаем уравнение

$$\frac{d^2T_1}{dz^2} - fk^2T_1 = \frac{q}{\lambda\chi}a\,\text{sh}(kz + k\delta),$$

где $f^2 = 1 + \gamma/\chi k^2$. Это уравнение с учетом граничного условия на твердой стенке $T_1(-\delta) = 0$ имеет решение

$$T_1 = b\,\text{sh}[fk(z + \delta)] - a\frac{q}{\lambda\chi k^2(f^2 - 1)}\,\text{sh}(kz + k\delta).$$

Используем граничные условия на свободной поверхности. Температура кипения на поверхности определяется давлением насыщенного пара и уравнением Клаузиуса–Клапейрона

$$T_{\text{кип}} = T^{(0)}_{\text{кип}} + \left(\frac{dT_{\text{кип}}}{dp}\right)p_{\text{газ}}, \quad \frac{dT_{\text{кип}}}{dp} = \frac{R_{\text{ун}}T^2_{\text{кип}}}{P_{\text{абс}}r},$$

где r — теплота испарения, $R_{\text{ун}}$ — универсальная газовая постоянная, $p_{\text{абс}}$ — абсолютное значение давления газа у поверхности. Используя значения температуры кипения невозмущенной поверхности, находим граничное условие на поверхности

$$T_1(0) = -\frac{q}{\lambda}\xi + \left(\frac{dT_{\text{кип}}}{dp}\right)p_{\text{газ}}.$$

Другое граничное условие на свободной поверхности определяется тем, что постоянный внешний тепловой поток вызывает прогрев пленки и испарение вещества

$$q = \lambda\partial T/\partial z + \rho v_{\text{исп}}r,$$

откуда следует граничное условие для возмущений температуры

$$\frac{dT_1}{dz} = -\frac{\rho r v_{\text{исп}}}{\lambda}$$

Подставляя решение T_1 в граничные условия, находим

$$\gamma_v = \gamma\left[\frac{\chi k^2}{\gamma \operatorname{th} fk\delta} + \frac{1}{f^2-\varphi^2}\left(\frac{1}{f\operatorname{th} k\delta} - \frac{1}{\operatorname{th} fk\delta}\right) - \beta\frac{\chi k^2 \lambda p g}{\gamma g \operatorname{th} fk\delta}\left(\frac{dT_{\text{кип}}}{dp}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\frac{\rho r \chi k}{qf} + \frac{1}{f^2-\varphi^2}\left(\frac{1}{f\operatorname{th} k\delta} - \frac{1}{\operatorname{th} fk\delta}\right)\right]^{-1}.$$

Давление газа $p_{\text{газ}}$ у поверхности пленки следует определять из рассмотрения движения испарявшегося газа. Чем больший расход газа перетекает от тех мест, где происходит испарение, к местам, где происходит конденсация, тем больше перепад давления между этими областями. В линейном приближении можно считать $p_{\text{газ}} = mv_{\text{исп}}$, где m — коэффициент сопротивления перетеканию газа под действием сил сопротивления. Скорость испарения газа превышает скорость подтекания жидкости к поверхности пленки из-за различия в плотностях газа и жидкости.

Малые тепловые потоки приводят к малым уменьшениям инкремента неустойчивости. Представляет интерес рассмотреть случай больших тепловых потоков. Численные оценки параметров показывают, что обычно выполняется условие

$$\gamma_0 \gg \chi k_0^2, \quad \gamma_0 = \sqrt{gk_0}, \quad k_0 = \sqrt{\rho g/\alpha}.$$

Поэтому при $\gamma < \gamma_0$ будем считать выполняющимся неравенство $\gamma \gg \chi k^2$ и соответственно

$$f = (1+\gamma/\chi k^2)^{1/2} \cong (\gamma/\chi k^2)^{1/2} \gg 1.$$

Определим безразмерные параметры $\Gamma = \gamma/\gamma_0$, $\varepsilon_T = \chi k_0^2/\gamma_0$, $\chi = k/k_0$, $Q = \frac{q}{k_0\lambda(T_{\text{кип}}-T_{\text{ст}})}$, $R = \frac{\rho\rho\chi}{\lambda(T_{\text{кип}}-T_{\text{ст}})}$, $k\delta = x/Q$. В данном случае $\gamma_v = \frac{q}{\rho r}\sqrt{\gamma/\chi} = \sqrt{\gamma\gamma_0}Q\varepsilon_T^{1/2}/R$, и дисперсионное уравнение в безразмерной форме имеет вид

$$\Gamma(\Gamma + \Gamma^{1/2}Q\varepsilon^{1/2}/R) = x(1-x^2).$$

При больших тепловых потоках ($Q \gg R\varepsilon_T^{-1/2}$) отсюда следует значительное уменьшение инкремента РТН

$$\gamma = \gamma_0 \frac{Z^{2/3}R^{2/3}}{3\varepsilon_T^{1/3}Q^{2/3}} \ll \gamma_0.$$

Рассмотрим теперь совместное действие магнитного поля и теплового потока на РТН. Действие магнитного поля на РТН приводит к уменьшению инкремента неустойчивости. При действии дополнительно теплового потока медленно развивающаяся РТН может быть стабилизирована

полностью, т.е. $\gamma = 0$. Дисперсионное уравнение в этом случае полной стабилизации имеет вид

$$\frac{\varepsilon_{\text{н}}^{(1-x^2)}}{Q\varepsilon_T}\left(\frac{Rx}{Q}\operatorname{th}\frac{x}{Q}+1-\frac{Q}{x}\operatorname{th}\frac{x}{Q}\right)=1.$$

В предельном случае "глубокой" жидкости $k\delta \gg 1 (Q \ll 1)$ получаем

$$Q^2 = \frac{\varepsilon_{\text{н}}}{\varepsilon_T} Rx(1-x^2),$$

и соответственно критический тепловой поток, вызывающий полную стабилизацию, равен $Q_{\text{кр}} = (2^{1/3}/3^{3/4})(\varepsilon_{\text{н}} R/\varepsilon_T)^{1/2}$.

В другом предельном случае "мелкой" жидкости $k\delta \ll 1$ критический тепловой поток равен $Q_{\text{кр}} = (1/2^{2/3})(\varepsilon_{\text{н}} R/\varepsilon_T)^{1/3}$. Безразмерный параметр $R = \rho r\chi/\lambda\Delta T = r/c\Delta T$ порядка единицы, поэтому для того, чтобы условие $Q_{\text{кр}} \gg 1$ согласовалось с условием сильного поля $\varepsilon_{\text{н}} \ll 1$, магнитное поле должно находиться в интервале

$$\frac{\varepsilon_T}{R} \ll \varepsilon \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{4\pi\rho\nu_{\text{m}}\chi g k c_p \Delta T}{\alpha r} \gg H^2 \gg 4\pi\rho\nu_{\text{m}}\sqrt{gk}.$$

§ 15. Несжимаемые стратифицированные среды

Крупно- и короткомасштабные факторы (микро- и макромасштабы). Закончим на этом обзор короткомасштабных эффектов. Перейдем к крупномасштабным эффектам. Крупномасштабными они являются в следующем смысле. Рассмотрим скачок плотности, отделяющий не два однородных полупространства, а два полупространства, в которых плотность переменна[4]. Пусть L — характерный масштаб стратификации. Толщина скачка плотности $l = 0$, см. рис. 15.1*а*. Если длина волны

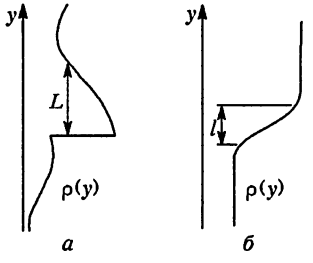


Рис. 15.1. Иллюстрация того обстоятельства, что переменная по высоте y плотность $\rho(y)$ может быть причиной как крупномасштабного, так и короткомасштабного обрезания классического выражения для инкремента неустойчивости $\gamma = \sqrt{Agk}$. Вариант распределения $\rho(y)$, при котором в крупных масштабах $k \simeq 1/L$ начинается отклонение от классического выражения (*а*). Вариант распределения $\rho(y)$, при котором в коротких масштабах $k \simeq 1/l$ происходит ограничение роста классического инкремента с ростом k (*б*). Ограничивающим является инкремент Брента–Вяйсяля

возмущения $\lambda \ll L$, то пригодно простое классическое выражение для инкремента неустойчивости $\gamma = \sqrt{Agk}$, полученное для случая двух смежных однородных полупространств. Отклонения от этого выражения начинаются при возрастании λ до значений порядка L. Именно в

[4] Разумеется, имеется в виду горизонтально стратифицированная переменность плотности.

этом смысле и говорится о крупномасштабных ограничениях классического выражения. Причем эти крупномасштабные неоднородности могут быть обусловлены, как стратификацией профиля плотности несжимаемой жидкости, так и эффектами сжимаемости. В последнем случае крупномасштабными факторами являются высота однородной атмосферы и скорость звука, влияние которой становится существенным при больших скоростях гидродинамических мод.

Квазиклассика и инкремент Брента–Вяйсяля. Разумеется, если скачка плотности нет, то возникает новая задача. Говоря об этой новой задаче, нельзя сказать, что с профилем плотности или со сжимаемостью связаны только крупномасштабные эффекты. Дело в том, что профиль плотности полностью определяет задачу (например, спектр собственных мод). В частности, и ее "ультрафиолетовую" (рис. 15.1*б*) и "инфракрасную" (рис. 15.1*а*) асимптотики. Действительно, именно в "ультрафиолетовой" (короткомасштабной или квазиклассической) асимптотике появляется важный эффект обрезания инкремента неустойчивости на инкрементах Брента–Вяйсяля (Brunt–Väisälä)[5], см. рис. 15.1*б*.

Динамика перестановок в случае профиля плотности. С каждым профилем плотности связана своя специфическая динамика, отражающая структуру этого профиля. То есть с одной стороны, конечно, можно сказать, что сколько профилей столько и динамик. На самом же деле при общем анализе требуется отвлечься от частных деталей, обусловленных частной конкретикой данного профиля. В этом смысле типичных, характерных динамик оказывается немного. Они связаны с характерными

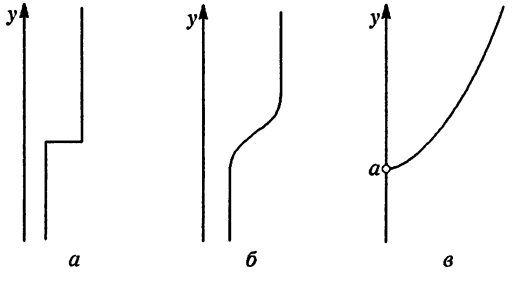


Рис. 15.2. Три основных характерных варианта профиля плотности $\rho(y)$. Резкий скачок плотности (*а*). Сглаженный скачок плотности $\rho(y \to \pm\infty) \to \rho(\pm\infty)$ (*б*). Степенной профиль плотности $\rho \propto y^\beta$ (*в*). В точке *a* плотность обращается в нуль

профилями, представленными на рис. 15.2. К этим профилям относятся: (а) скачок плотности, (б) плавно сглаженный скачок плотности и (в) степенной профиль.

Полный динамический анализ состоит из (а) линейной задачи, (б) нелинейной периодической задачи и (в) исследования турбулентности.

[5] В задачах о внутренних волнах в стратифицированной жидкости говорят о частоте Брента–Вяйсяля.

Все эти исследования тесно связаны. В частности, исследования турбулентности в значительной степени опираются на исследования линейной и нелинейной периодических задач.

Скажем несколько слов о связи между турбулентной динамикой и профилем плотности. Турбулентное перемешивание скачка плотности (а) на рис. 15.2 изучено достаточно подробно. Этот вопрос будет рассмотрен в заключительной части данной книги. Известно, что эта турбулентность оказывается автомодельной. Толщина h перемешанного слоя растет по автомодельному закону $h \propto gt^2$. Имеет место автомодельный каскад укрупнений характерного размера $\langle\lambda\rangle$ поперечных к $\mathbf{g}$ структур, происходящий по аналогичному закону $\langle\lambda\rangle \propto gt^2$. Именно это постоянное укрупнение приводит к росту скорости расширения слоя dh/dt.

Задержка перемешивания и обратный инкремент Брента–Вяйсяля. Посмотрим, как меняется эта картина в случае профиля (б). Разумеется, при наличии короткомасштабных параметров в начальных данных или при короткомасштабном обрезании РТН автомодельные зависимости выполняются только асимптотически при $t \gg t_{\rm sm}$, $h \gg l$ и/или $\langle\lambda\rangle \gg \lambda_{\rm sm}$, где $t_{\rm sm}$ и $\lambda_{\rm sm}$ — это короткомасштабные параметры (sm — small), l — толщина сглаживания скачка плотности в случае профиля (б), см. рис. 15.2.

Рассмотрим переходный процесс и установление автомодельных зависимостей. Говорят о поправках к автомодельным зависимостям

$$h = agt^2 + O(l) = ag(t + O(\sqrt{l/g}))^2,$$

где a — функция отношения плотностей μ. Оказывается, что в случае сглаженного профиля эти поправки соответствуют задержкам в развитии перемешивания.

Происхождение этой задержки тесно связано с обрезанием инкремента неустойчивости на инкременте Брента–Вяйсяля $\gamma_{\rm BV}$ (BV — Brunt–Väisälä).

В литературе много внимания уделяется как линейной теории сглаженных профилей, так и вопросам задержек перемешивания на этих профилях (Mikaelian, 1982, 1990 (линейная теория); Иногамов, 1985с, 1996, 1997 (линейная теория); Ардашева и др., 1988 (эксперимент); Анучина и др., 1988 (численное моделирование)).

Автомодельность линейных и нелинейных движений в случае степенных профилей. Вопрос о турбулентности на степенных профилях (в), см. рис. 15.2, рассмотрен в работе (Иногамов, 1997). Эти профили не превносят в задачу пространственных или временных масштабов. Отражением этого является пространственно-временная инвариантность дисперсионных кривых. Спектр состоит из (Иногамов, 1985, с. 97) мод

$$\gamma_n = \alpha_n(\beta)\sqrt{gk}, \quad \alpha_1(\beta) \equiv 1, \quad \alpha_1(\beta) > \alpha_2(\beta) > \alpha_3(\beta) > \cdots > 0,$$

где β — индекс распределения плотности $\rho(y) \propto y^\beta$ (мода α_1 с наибольшим инкрементом соответствует изобарической моде, см. ниже).

Поэтому в случае этих профилей турбулентность тоже инвариантна (Иногамов, 1997). А это означает, что зависимости характерных пространственных переменных так же, как и в случае скачка плотности, пропорциональны gt^2. Коэффициент пропорциональности и распределения по высоте физических переменных, например, профили усредненной по горизонтали плотности, зависят от β.

Из сказанного следует, что динамика развития обменной неустойчивости тесно связана с профилем плотности. А именно, профиль $\rho^{(0)}(y)$ и, вообще говоря, начальные данные $\rho(\mathbf{r}, t=0)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t=0)$ определяют дальнейший процесс эволюции полей $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и $p(\mathbf{r}, t)$. Здесь для того, чтобы отличить невозмущенный профиль плотности $\rho^{(0)}(y)$, "на фоне" которого развивается процесс, от поля значений плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$, при первом поставлен индекс нуль.

Анализ линейной задачи является одним из инструментов исследования динамики неустойчивости. Его достоинства — простота и универсальность. Другим важнейшим свойством является собственно линейность, позволяющая, как известно, путем разложения по собственным модам спектральной задачи исчерпать все множество возможных начальных данных в соответствующей задаче Коши. В рамках линейной задачи динамические характеристики системы полностью описываются спектральными данными: набором собственных чисел и функций.

15.1. Качественный анализ и уравнение Шредингера

Уравнение Рэлея. Линеаризуя уравнения гидродинамики

$$D_t\mathbf{v} + (\nabla p)/\rho - \mathbf{g} = 0, \qquad \nabla\mathbf{v} = 0, \qquad D_t\rho = 0, \qquad D_t = \partial_t + \mathbf{v}\nabla$$

около состояния гидростатического равновесия профиля $\rho^{(0)}(y)$, получим следующее уравнение для вертикальной компоненты скорости v:

$$\begin{gathered}(\rho v')' - (\rho - E\rho')v = 0, \quad Lv'' + v' - (L - \Gamma^{-2})v = 0,\\ \rho \equiv \rho^{(0)}(y), \quad v' \equiv dv/d\xi,\\ \xi = ky, \quad E = -(\mathbf{g})_y k/\gamma^2 = |\mathbf{g}|k/\gamma^2,\\ L = L(\xi), \quad \Gamma = \gamma/\sqrt{|g|k}.\end{gathered} \tag{15.1}$$

Это уравнение было впервые выведено в классической работе Рэлея (Rayleigh, 1883, 1990). Здесь, как обычно, $\mathbf{v} = \{u, v\}$, ρ, p, $\mathbf{g}$ — скорость, плотность, давление и гравитационное ускорение соответственно. Кроме того, в данном случае считается, что возмущения $\propto \exp(\gamma t)$. Введены обозначения $L = 1/(\ln\rho)'$ для локального масштаба стратификации и Γ — для безразмерного инкремента. Уравнение $D_t\rho = 0$ в этой системе описывает перенос неоднородностей плотности. Положительным направлением оси y является направление вверх против силы тяжести. Поэтому отрицательна вертикальная компонента ускорения ($(\mathbf{g})_y = -|g|$). Уравнение (15.1) описывает колебания внутренних волн (Краусс, 1968; Дикий, 1973; Yih, 1974) и развитие неустойчивых мод

(Yih, 1974; Mikaelian, 1982; Kull, 1991; Иногамов, 1985c). Колебания получаются при $\rho' < 0$, когда плотность убывает с высотой. При этом $E < 0$ и $\gamma = i\omega$. Неустойчивость получается в обратной ситуации, т. е. при $\rho' > 0$. При этом $E > 0$.

Рассматривается случай, когда в невозмущенном состоянии жидкость покоится. В этом случае на линейной стадии развития неустойчивости скорости u и v являются возмущениями и малы. Вывод уравнения (15.1) см. работы (Yih, 1974; Kull, 1991; Иногамов, 1996).

Граничные условия. Рассматриваемое уравнение дополняется двумя граничными условиями. Обычно используется какая-то комбинация из следующих условий:

- (i) Жидкость ограничена жесткой стенкой, находящейся на глубине $\xi = a$, на которой обращается в нуль вертикальная компонента скорости $v(\xi = a) = 0$. Это условие называется жестким граничным условием.
- (ii) Жидкость ограничена свободной границей, на которой обращается в нуль возмущение давления. При этом $v'(a) - Ev(a) = 0$. Это условие называется свободным граничным условием.
- (iii) Условие затухания возмущений на бесконечности. При этом $v(\infty) = 0$ и/или $v(-\infty) = 0$. Это условие используется в случае, когда $\rho(\xi) \to \text{const}$ при $\xi \to \infty$ и/или $\xi \to -\infty$.
- (iv) В случае профиля, представленного на рис. 15.2*в*, когда плотность плавно убывает до нуля на границе профиля $\xi = a$, в точке a следует требовать регулярности функции $v(\xi)$. Условие регулярности позволяет отобрать одно из пары независимых решений, одно из которых является регулярной, а другое нерегулярной в точке a функцией. Обсуждение этого тонкого[6] обстоятельства см. в работах (Иногамов, 1984a, 1996).
- (v) Условие затухания на бесконечности в области возрастания степенного профиля.

Спектральная задача и уравнение Шредингера. Уравнение (15.1), дополненное парой граничных условий, образует спектральную задачу. Обычно рассматривают прямую[7] спектральную задачу. Она заключается в отыскании спектра дисперсионных зависимостей и собственных функций по заданному профилю плотности.

В случае монотонной зависимости $\rho^{(0)}(\xi)$ уравнение (15.1) несложно привести к уравнению Шредингера (Иногамов, 1990b; Mikaelian, 1996). Для этого требуется замена переменных, исключающая первую производную из уравнения Рэлея, см., например, книгу (Левитан и Саргсян, 1970), посвященную задаче Штурма–Лиувилля.

[6] Сравни работы (Иногамов, 1984a; Plesset & Hsieh, 1964).

[7] Об обратной задаче и изоспектральных деформациях уравнения Рэлея см. работы (Иногамов, 1985c, 1990b, 1996, 1997; Kull, 1991; Mikaelian, 1982, 1996).

Наиболее интересным является появление некоторого потенциала $U(X)$, в который пересчитывается распределение плотности $\rho^{(0)}(\xi)$, входящее в уравнение Рэлея[8]. Уравнение Шредингера имеет вид

$$-\Psi_{XX} + U\Psi = E\Psi, \quad U = \frac{\Omega_{XX}}{2\Omega} - \frac{\Omega_X^2}{4\Omega^2} + \Omega_X + \frac{\Omega^2}{4} + \frac{A^2}{\Omega^2},$$

где индекс X означает дифференцирование по независимой переменной X, функции Ψ, U и Ω зависят от X, функции $X(\xi)$ и $\Omega(X)$ известным образом выражаются через распределение $\rho^{(0)}(\xi)$ и A^2 — постоянная.

Если $\rho^{(0)}(\xi) \to \text{const}_{\pm}$ при $\xi \to \pm\infty$, то потенциал $U \to +\infty$ при $\xi \to \pm\infty$. Причем значения $X = \pm\infty$, соответствующие концам оси X, относятся к значениям $\xi = \pm\infty$, также соответствующим концам оси ξ. Отсюда следует, что в случае профиля плотности, показанного на рис. 15.2*б*, относящаяся к этому профилю потенциальная яма в уравнении Шредингера оказывается бесконечно глубокой, а значит, имеет бесконечное число собственных значений.

Уравнение Шредингера: описание колебаний и квантовая механика. С одномерным уравнением Шредингера связаны простые качественные соображения[9], позволяющие провести быстрый качественный анализ спектральной задачи. Эти соображения отправляются от механики точки, движущейся по потенциальному рельефу.

В связи с рассматриваемой спектральной задачей, по-видимому, целесообразно сделать несколько замечаний относительно общей теории задач такого рода. Вопросы полноты, ортогональности, вещественности собственных значений и тому подобные были исчерпаны давно в формальных теориях Штурма–Лиувилля и Штурма–Бохера. Эти теории связывают дифференциальные, фредгольмовские и матричные представления этой задачи.

Физические приложения теорий спектральных задач и уравнения Шредингера образуют два огромных круга, в одном из которых находятся задачи, связанные с колебаниями и волнами, а в другом — задачи, происходящие из квантовой теории конденсированных веществ. В случае колебаний и квантовых систем важное значение может иметь весь спектр собственных мод[10]. В случае же разбираемой здесь неустойчивости основное внимание уделяется моде с наибольшим инкрементом, мажорирующей остальные дисперсионные кривые. В квантовомеханических терминах можно сказать, что эта мода относится к основному уровню в соответствующем потенциале.

[8] То есть распределение $\rho^{(0)}(\xi)$ играет в уравнении Рэлея роль, аналогичную роли потенциала в уравнении Шредингера.

[9] Например, потенциальная яма, захват в яму, точки поворота, резонансы, уровни, квантование уровней, квазиклассическая теория и тому подобное.

[10] Например, тщательно изучаются солнечные осцилляции (Vorontsov & Zharkov, 1989). Существенное значение имеет охват возможно более широкого участка спектра осцилляций. Решение обратной задачи позволяет по спектру восстановить параметры Солнца. Осцилляции разных порядков позволяют зондировать профиль плотности и температуры на различных глубинах.

Математика прямой (качественный анализ и спецфункции) и обратной (нелинейная физика) спектральных задач. В количественном плане, понимаемом в смысле конкретных расчетов и примеров, в современной спектральной теории собраны все частные случаи, в которых решение выражается через элементарные или специальные функции. Перечень этих случаев оканчивается в теории эллиптических функций. Имеется набор особенно хорошо изученных случаев. В уравнении Шредингера часто употребляются потенциал в виде суммы дельта-функций, в виде кусочно-постоянной функции и кулоновский потенциал (Ландау и Лифшиц, 1974). Профили плотности, приводящие к аналогичным потенциалам, хорошо изучены и в линейной теории стратифицированной жидкости (Chandrasekhar, 1961). К перечисленным трем потенциалам в случае несжимаемой жидкости относятся кусочно-постоянный, экспоненциальный и степенной профили плотности соответственно. А в сжимаемом случае к этим потенциалам относятся изохорический, изотермический и изэнтропический профили соответственно.

Еще более существен опыт, накопленный в результате многолетних исследований, относящийся к общему пониманию задачи. Здесь имеются два раздела. Во-первых, разработана качественная классификация потенциальных рельефов. Во-вторых, чрезвычайно тонкие математические сведения получены путем анализа обратной спектральной задачи. В отличие от прямой задачи (дан профиль $\rho^{(0)}(\xi) \to$ найти $\{E\}$) она заключается в восстановлении потенциала (профиля) по спектральным данным $\{E\}$, здесь $\{E\}$ — спектр собственных чисел.

Уравнение Шредингера: уединенный, периодический и случайный потенциалы. В рамках качественной классификации потенциалы поделены на три класса. К первому относятся потенциалы типа уединенных или ограниченных по оси X ям с дискретным спектром. Они связаны с профилями, ограниченными любыми двумя из условий (i)–(v), приведенных выше. Волновая функция (квантовая механика) или область возмущений (линейные осцилляции и неустойчивости) локализованы при этом в области заметных значений функции $(\ln \rho)'_\xi$.

Ко второму классу относятся периодические потенциалы с зонными спектрами, состоящими из участков непрерывного спектра, перемежающихся с лакунарными участками (запрещенные зоны в кристаллах).

А к третьему — случайные потенциалы с соответствующими им случайными спектрами. Как известно, появление разрешенных и запрещенных участков во втором классе профилей обусловлено интерференцией и синхронизацией отраженных волн. Известно также, что из-за несинхронности отраженных волн в третьем классе появляются локализованные моды. Это явление называется андерсоновской локализацией.

Специфика спектральных задач при поиске наиболее неустойчивой моды. В случае неустойчивости речь идет не о волнах и осцилляциях, а об экспоненциально растущих во времени решениях. Естественно, что время существования таких решений ограничено. Поэтому вопросы синхронизации мод на расстояниях, бо́льших длины волны, не имеют важного

значения. Действительно, для синхронизации требуется длительное существование линейного возмущения. Вообще следует отметить, что в случае неустойчивости задачи с потенциалами из второго (периодическая функция $(\ln\rho)'_\xi$) и третьего (случайная функция $(\ln\rho)'_\xi$) классов до сих пор не рассматривались.

Отметим еще, что для существования участка сплошного спектра требуется, чтобы на одной или обеих бесконечностях функция $(\ln\rho)'_\xi$ стремилась бы к постоянному или постоянным значениям. Соответствующее распределение ρ является экспоненциальным по высоте. С экспонентой связан характерный масштаб L, на котором плотность меняется в e раз.

Спрашивается, что будет при $t \gg \sqrt{L/g}$? Становится ясно, что такой профиль может быть только некоторой моделью реального профиля и что это модельное распределение не может быть продолжено на расстояния, существенно превышающие высоту однородности. В реальности экспонента должна быть обрезана какими-то значениями ρ_1 и ρ_2. Об экспоненте имеет смысл говорить, если ρ_1/ρ_2 порядка или больше единицы. Чем больше параметр ρ_1/ρ_2 превышает единицу, тем ближе наибольший инкремент при $k < 1/L$ оказывается к зависимости $\sqrt{gk}$, соответствующей изобарической рэлей-тейлоровской моде[11], см. ниже.

15.2. Смягчение спектра на примере профиля с двумя скачками

Качественное описание волновых функций. Обсудим характерные черты поведения дисперсионных кривых. Многое будет ясно из примера двухступенчатого профиля плотности. Этот профиль, соответствующие волновые поля и дисперсионные зависимости показаны на рис. 15.3.

Номера *1*, *2* и *3* на рис. 15.3*к* относятся к инкрементам $\gamma^2 = \mathrm{A}gk$, $\mathrm{A} = (1-\mu)/(1+\mu)$, связанным со скачками плотности $(\mu_a\mu_b)$, μ_b и μ_a соответственно. Здесь и далее μ — это отношение плотности нижней жидкости к верхней на скачке плотности.

Представляется важным подать материал таким образом, чтобы обеспечить удобное и быстрое ознакомление читателя с предметом на качественном уровне. Поэтому упор сделан на анализ качественного поведения. Здесь необходимо осветить связи, имеющиеся между устройством собственных функций $v(y)$ (число нулей, симметрия) спектром, формой $\eta(x,t)$ смещенных слоев лагранжевых частиц и коротко-, средне- и крупномасштабными асимптотиками.

В случае двух скачков y_a и y_b имеются две моды, см. рис. 15.3*а*. Зависимости инкрементов этих двух мод от k обозначены номерами *4–5–6* и *7–8–9* на рис. 15.3*к*. Участки (*4*, *7*), (*5*, *8*) и (*6*, *9*) этих зависимостей относятся к коротко-, средне- и крупномасштабным асимптотикам соответственно. Участки *4* и *7*, занимающие область $kL \gg 1$, $L = y_b - y_a$, соответствуют асимптотически независимым модам, связанным со скачками в точках y_b и y_a соответственно. На рис. 15.3*б* сплошной кривой показана собственная функция, относящаяся к участку *4*. Возмущение

[11] Эта мода тесно связана с нижним граничным условием. Она появляется в спектре при любой стратификации в случае свободного (изобарического) граничного условия снизу.

сосредоточено около скачка y_b. На рис. 15.3*д* сплошной кривой показана собственная функция, относящаяся к участку *7*. Возмущение сосредоточено около скачка y_a.

В среднемасштабном (переходном) случае $kL \simeq 1$ начинается взаимодействие мод, "сидящих" на скачках y_b и y_a. Волновые поля и смещения

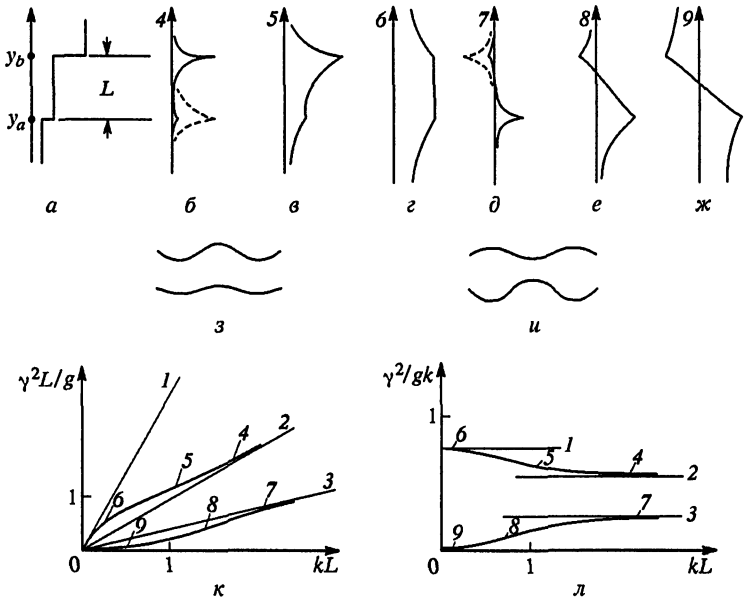


Рис. 15.3. Профиль, возмущения (волновые функции v и смещения лагранжевых частиц) и инкременты. Профиль $\rho^{(0)}(y)$ с двумя скачками плотности μ_a и μ_b, находящимися в точках y_a и y_b (*а*). Схематичное представление зависимостей $v(y)$. Изломы $v(y)$ соответствуют скачкам плотности (*б–ж*). Штриховые кривые относятся к симметричному случаю. Формы возмущенных контактных границ $\eta_a(x,t)$ и $\eta_b(x,t)$ на плоскости x,y (*з* и *и*). Дисперсионные зависимости (*к* и *л*)

лагранжевых границ в этом случае представлены на рис. 15.3*в*, *е* и на рис. 15.3*з*, *и* соответственно.

При $kL \ll 1$ наличие прослойки L не существенно для моды, показанной на рис. 15.3*г*. К ней относится участок *б* на рис. 15.3*к*. Эта мода устроена так, как если бы вместо двух последовательных скачков μ_a и μ_b имелся бы один скачок плотности $\mu_b\mu_a$.

Моды *4–5–6* и *7–8–9*, см. рис. 15.3*к*, отличаются числом нулей. Первая из них относится к основному состоянию. Она не имеет нулей. На ней достигается максимальный инкремент, мажорирующий сверху остальные дисперсионные зависимости. Относящиеся к ней волновые поля и смещения показаны рис. 15.3*б–г*, *з*.

Мода *7–8–9* относится к следующему после основного первому состоянию. Ее собственная функция $v(y)$ имеет один нуль, см. рис. 15.3*д–ж*. Данный нуль находится между скачками y_a и y_b. Эта мода связана с

более слабым скачком y_a, $1/\mu_b > 1/\mu_a$, см. рис. 15.3*к*, *л*. Поэтому при $kL \gg 1$ возмущение сосредоточено около этого скачка, см. рис. 15.3*д*, причем нуль смещен к скачку y_b, см. рис. 15.3*д*.

Симметрия "ямы" и волновой функции. Положение нуля зависит от симметрии профиля. В уравнение (15.1) входит не плотность, а только производная от логарифма плотности. В случае кусочно-постоянного профиля это означает, что задача полностью задается значениями отношений плотностей на скачках. Профиль, представленный на рис. 15.3*а*, будет симметричным, если $\mu_a = \mu_b$. В этом случае функции $v(y)$ симметричны или антисимметричны относительно преобразования $y \to -y$, см. рис. 15.3*б*, *д*, штриховые кривые. При этом нуль находится посередине между скачками y_a и y_b, см. рис. 15.3*д*. В симметричном случае прямые *2* и *3* сливаются, см. рис. 15.3*к*, *л*. Дисперсионные зависимости *5* и *8* подходят к этой прямой соответственно сверху и снизу.

Изгибная (основная или жесткая) и узловатые (старшие или мягкие) моды. Мода *4–5–6* приводит к изгибу прослойки L, см. рис. 15.3*з*. Аналогичный вид имеет и мажорирующая мода в случае непрерывного профиля плотности, показанного на рис. 15.2*б*. Собственная функция $v(y)$ этой изгибной моды не имеет нулей. Поэтому возмущения всех лагранжевых слоев находятся в одной фазе, см. рис. 15.3*з*.

Мода *7–8–9* имеет нуль внутри прослойки L. Пусть y_1 — координата этого нуля. Возмущения лагранжевых слоев, находящихся по разные стороны от этого нуля, находятся в противофазе. Поэтому с данной модой связано появление узловатых возмущений, см. рис. 15.3*и*. Развитие этих возмущений приводит к перетокам жидкости внутри прослойки L.

Таким образом, в случае наличия многих скачков плотности или непрерывного профиля вида рис. 15.2*б* мажорирующая мода является чи-

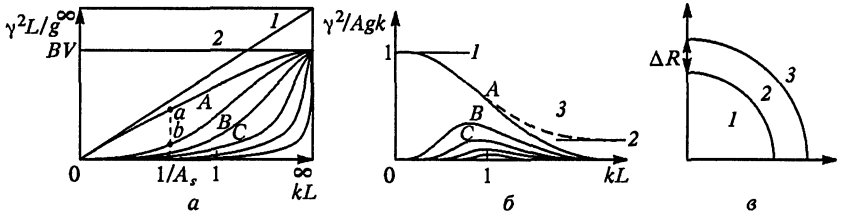


Рис. 15.4. Обрезание короткомасштабной расходимости инкремента на инкременте Брента–Вяйсяля. Устройство спектра инкрементов в случае плавного профиля в виде сглаженной ступеньки (*а*). Буквами BV и горизонтальной прямой *2* помечен инкремент Брента–Вяйсяля. Прямые *1* здесь и на рис. *(б)* соответствуют резкому скачку плотности. Аппроксимация плавного профиля кусочно-постоянным (*б*). Штриховая кривая относится к наибольшему инкременту в случае кусочно-постоянного профиля. С ростом N эта кривая стремится к сплошной кривой, соответствующей наибольшему инкременту в случае плавного профиля. Вид сферического или цилиндрического переходного слоя (*в*)

сто изгибной, а моды старших порядков оказываются узловатыми около нулей функции $v(y)$. При $kL \ll 1$ эти узловатые моды образуют пучок мягких мод, выходящих из нуля $k = \gamma = 0$, касаясь оси k, см. рис. 15.4*а*, *б*. В случае профиля, показанного на рис. 15.3*а*, мягкая мода

одна. Ей соответствует участок *9* рис. 15.3*к*, *л*. Собственная функция этой моды показана на рис. 15.3*ж*.

Длинноволновая асимптотика мягких мод. Лагранжиан. Выпишем асимптотический закон поведения мягких мод при $k \to 0$. Запишем соответствующий лагранжиан. Прежде, чем перейти к анализу мягких мод, рассмотрим случай одного скачка плотности[12]. Возмущение экспоненциально затухает на глубине $\simeq 1/k$ при удалении от поверхности. Поэтому кинетическая энергия K, приходящаяся на единицу длины границы[13], по порядку величины равна $[(1/2)(\rho_1+\rho_2)\dot\eta^2\lambda^2](1/\lambda)$, где в квадратных скобках собрана кинетическая энергия в расчете на одну длину волны возмущения. Изменение потенциальной энергии U на единицу длины границы по порядку величины равно $-[(\rho_1-\rho_2)g\lambda(\eta^2/2)](1/\lambda)$. Если сверху находится тяжелая жидкость, то потенциальная энергия убывает с ростом η, так как центр тяжести системы при этом понижается. Составляя лагранжиан $L = K - U$ и уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\eta} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0,$$

находим $\gamma^2 \simeq gk(\rho_1-\rho_2)/(\rho_1+\rho_2)$.

Если подставить выражения для границы и скорости через exp, sin и cos, то нетрудно вычислить и коэффициент[14].

Рассмотрим теперь случай прослойки. Речь пойдет о формулировке в терминах лагранжиана. Рассматривается крупномасштабное или длинноволновое приближение, когда $kL \ll 1$. Поле скоростей показано на рис. 15.3*ж* и на рис. 15.5.

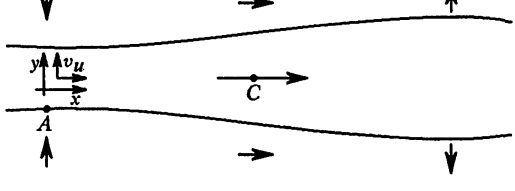


Рис. 15.5. В случае мягких мод скорость перетоков внутри прослойки в $\simeq \lambda/L$ раз превышает скорости движения вне прослойки

[12] В случае одного скачка линейная мода также одна и мягких мод нет.

[13] И в расчете на единицу длины в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой происходит движение.

[14] Вычислим коэффициент. Скорости $u = \dot\eta \exp(-k|y|)\sin kx$ и $v = \dot\eta \exp(-k|y|) \times \cos kx$ равны. Отсюда $u^2 + v^2 = \dot\eta^2 \exp(-2k|y|)$. Тогда

$$K = (1/\lambda)\int_0^\lambda dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ (\rho/2)\dot\eta^2 \exp(-2k|y|), \quad \rho(y) = \rho_2\theta(-y) + \rho_1\theta(y),$$

откуда $K = 1/(4k)(\rho/1+\rho/2)\dot\eta^2$. Возмущение границы равно $y = \eta\cos kx$. Потенциальная энергия элемента жидкости, занимающего площадку $dx\,dy$, равна $dU = \rho|g|y\,dx\,dy$, где y — вертикальная координата этого элемента, g направлено вниз. Интегрируя по dy от нуля до границы и по dx по периоду, получим, что $U = -(\rho_1-\rho_2)g\eta^2/4$. Следовательно, коэффициент равен 1.

Наибольший интерес представляет прослойка и ее окрестность. Нашей целью в этом месте является оценка инкрементов мягких мод на простейшем примере одной прослойки, когда мягкая мода одна. Чтобы избежать появления системы из двух уравнений для каждой из двух (нижней и верхней) границ η_A и η_B прослойки и связанных с этим осложнений, рассмотрим симметричный случай $\mu_a = \mu_b$. При этом жесткая мода симметрична, а мягкая мода антисимметрична относительно инверсии $y \to -y$.

Из антисимметрии следует, что $\eta_A = -\eta_B$, где η_A и η_B относятся к нижней и верхней границам прослойки соответственно. Поэтому вне прослойки $v(y) = \pm\dot{\eta}_A \exp(\pm ky)$, где $\dot{\eta}_A$ — это скорость границы в точке A.

Внутри прослойки в окрестности[15] нуля $x = y = 0$ имеем $v = -\dot{\eta}_A y/(L/2)$. Тогда в силу уравнения неразрывности $u_x + v_y = 0$ в этой окрестности должно быть $u = \dot{\eta}_A x/(L/2)$. Максимальная скорость достигается внутри прослойки в точке C, см. рис. 15.5. Используем для оценки этой скорости выражение для скорости u в нуле. В результате получаем $|\mathbf{v}| \approx u \simeq (\lambda/L)\dot{\eta}_A$.

Смягчение спектра при "размазывании" распределения ρ. Оценим кинетическую энергию на единицу длины границы в случае прослойки. Оказывается, в пределе длинноволновых возмущений основной вклад связан с кинетической энергией $K_\mathrm{L} \simeq (1/2)\rho_2\dot{\eta}_A^2\lambda(\lambda/L)$, сосредоточенной в прослойке, где ρ_2 — плотность в прослойке. Он в $\simeq \lambda/L$ раз превосходит вклады, связанные с движением вещества вне прослойки.

Изменение потенциальной энергии равно $U \simeq -(\rho_1 - \rho_3)g(\eta_A^2/2)$, где ρ_1 и ρ_3 — плотности жидкостей, находящихся вне прослойки. Потенциальная энергия прослойки не меняется, поскольку $|\eta_A| = |\eta_B|$.

Из уравнения Лагранжа следует искомая оценка инкремента мягкой моды $\gamma^2 \simeq [(\rho_1 - \rho_3)/\rho_2]\, gLk^2$.

Как видим, разбиение одного скачка плотности в μ раз ($\mu = \mu_a\mu_b$) на два последовательных скачка μ_a и μ_b "размывает" ("размазывает") резкий скачок и ослабляет его "жесткость"[16]. Это выражается в смягчении спектра в средне- и коротокомасштабных диапазонах, сравни прямые *1* и *2* на рис. 15.3*к*, *л*.

В случае плавного профиля (см. рис. 15.2*б*) асимптотическое поведение мягких мод вблизи нуля имеет вид

$$\gamma^2 \simeq \alpha_n gk^2/[d(\ln\rho)/dy] = \alpha_n gk^2 H_R, \quad H_R = 1/[d(\ln\rho)/dy],$$

где α_n — постоянные, зависящие от функции $H_R(y)$, $n = 1, 2, \ldots$ — указывает число нулей, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$[17] Как было показано выше, смягчение этих мод обусловлено тем, что перемещение жидкости канализируется внутри узких по сравнению с λ горизонтальных прослоек. При

[15] Из-за антисимметрии нуль вертикальной компоненты скорости $v(y)$, соответствующий собственной функции мягкой моды, располагается посередине прослойки. При отсутствии симметрии значений μ_i нуль смещен относительно центра. Например, если $\mu_b = 0$, то он расположен на границе y_b, а при $\mu_a = \infty$ в $y = y_a$.

[16] Смягчение означает уменьшение инкремента и, следовательно, замедление темпа усиления неустойчивости.

[17] Интересно было бы исследовать вопрос об асимптотике α_n при больших значениях n.

этом выигрыш потенциальной энергии примерно такой же, а кинетическая энергия оказывается в $1/(kL)$ раз большей по сравнению с жесткой изгибной модой. Необходимость разгона до больших скоростей тормозит в случае неустойчивости развитие мягких мод. Соответственно выражения для инкрементов (или в случае устойчивой стратификации для частот) этих мод содержат дополнительную степень малого k, и поэтому эти инкременты оказываются малыми, а моды мягкими.

15.3. Обрезание на инкременте Брента–Вяйсяля

Непрерывное распределение ρ. Перейдем к качественному анализу важнейшего случая плавного профиля, показанного на рис. 15.2*б*. Из примера с двумя скачками, приведенного на рис. 15.3*а*, видно, во-первых, как перестраивается спектр между коротко- и крупномасштабными асимптотиками при $kL \sim 1$, во-вторых, этот пример проясняет причину короткомасштабного смягчения спектра, см. снижение относительного инкремента от асимптотики *6* к асимптотике *4* на рис. 15.3*л*, и, в-третьих, он иллюстрирует появление мягких мод. И все же этот пример не позволяет достичь главного — продемонстрировать обрезание спектра на инкременте Брента–Вяйсяля. А именно, в нем в короткомасштабной асимптотике возмущение стягивается к наибольшему скачку плотности и обрезание отсутствует.

Аппроксимируем плавный профиль плотности (рис. 15.2*б*) с помощью монотонной последовательности N скачков плотности. Пусть μ_1, μ_2, ..., μ_N — отношения плотностей на этих скачках. При $kL \to \infty$ имеем: $\gamma^2/gk \to \mathrm{A}_{\max}$, где $\mathrm{A}_{\max} = (1-\mu_{\min})(1+\mu_{\min})$, а $\mu_{\min}$ — наименьшее значение в наборе μ_1, μ_2, ... Значения отношений μ_1, μ_2, ... зажаты на полуинтервале: $\mu_{\min} \leq \mu_i < 1$. Кроме того, выполняется $\mu = \mu_1\mu_2\ldots\mu_N$, где $\mu = \rho(-\infty)/\rho(\infty)$. Поэтому с ростом N значение $\mu_{\min} \to 1$, а $\mathrm{A}_{\max} \to 0$.

Короткомасштабная асимптотика и появление инкремента Брента–Вяйсяля. Процесс перехода к плавному профилю при $N \to \infty$ показан на рис. 15.4*б*. Штриховой кривой дан наибольший инкремент в случае профиля, составленного из скачков плотности. Стрелкой *2* отмечено значение $\mathrm{A}_{\max}$, к которому стремится этот инкремент при $kL \to \infty$. Стрелкой *3* отмечено значение $kL \sim N$, при котором профиль, составленный из скачков, перестает аппроксимировать плавный профиль. При $N \to \infty$ приходим к набору сплошных кривых, соответствующему плавному случаю. При этом зависимости с $\gamma^2 \propto k$ при $k \to \infty$ исчезают и остаются только[18] зависимости с $\gamma^2 \to \mathrm{const}$ при $k \to \infty$.

Кривые A, B, C, ... соответствуют модам с числом нулей n равным 0, 1, 2, ..., соответственно. Чем больше число нулей, тем мягче соответствующая мода. Старшие моды B, C, ... отличаются от моды A наличием точки перегиба на плоскости γ^2, k. Координаты k_n этих точек

[18] Если распределение плотности имеет и участки плавного изменения ρ, и скачки ρ, то короткомасштабная асимптотика содержит как приповерхностные моды $\gamma^2 \propto k$, так и моды, связанные с плавными участками.

растут $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$. При $kL \to \infty$ все моды асимптотически выходят на инкремент Брента–Вяйсяля, т.е. точка ($k = \infty$, $\gamma = \gamma_{BV}$) является точкой сгущения мод[19].

Рассмотрим сферический или цилиндрический переходный слой, см. рис. 15.4*в*. При $r \to 0$ и $r \to \infty$ плотность стремится к некоторым постоянным значениям. Это области *1* и *3* на рис. 15.4*в*. Пусть ΔR — толщина слоя, в котором происходит изменение плотности, а R — его радиус. Это область *2* на рис. 15.4*в*. Обозначим через $A_s = R/\Delta R$. Вместо волновых чисел k возникают сферические или цилиндрические гармоники. Пусть l — номер гармоники. Номера l целочисленные, поэтому вместо непрерывных зависимостей A, B, C, ... возникают цепочки точек. Эти точки сгущаются на правой бесконечности при $l \gg 1$, $l \approx kR$.

В случае наименьшего номера гармоники имеем: $kL = k\Delta R = kR/A_s \simeq l/A_s$. Поэтому зависимости[20] $\gamma_n(l)$ начинаются не из нуля по k, а при некотором конечном значении $\simeq l/A_s$, см. рис. 15.4*а*. На этом рисунке соответствующие крайние точки помечены буквами $a, b, \ldots$ При $A_s \to \infty$ эти точки стремятся в центр $\gamma = k = 0$, а расстояния между последовательными по l точками сокращаются.

Величина A_s не может быть меньше единицы. При $A_s \simeq 1$ абсциссой крайних точек a, b, ... является значение $kL \simeq 1$.

Точка, обозначенная буквами BV на рис. 15.4*а*, относится к инкременту Брента–Вяйсяля $-\gamma_{BV}$. Довольно ясно, что $\gamma_{BV} \simeq \sqrt{g/L}$, если отношение плотностей $\rho(\infty)/\rho(-\infty)$ порядка или больше единицы. Для оценки инкремента γ_{BV} рассмотрим скачок плотности с плотностями ρ_l и ρ_h на разных сторонах скачка. Имеем: $\gamma^2 = (\rho_h - \rho_l)/(\rho_h + \rho_l)gk$. В случае плавного профиля при оценке выигрыша энергии при перестановке элементов жидкости важно изменение плотности на масштабе порядка длины волны λ. Поэтому $\rho_h - \rho_l \simeq (1/2)(\rho_h + \rho_l)(\ln\rho)'_y/k$. Отсюда $\gamma^2_{BV} \simeq g(\ln\rho)'_y$.

Напишем точное выражение для инкремента γ_{BV}. Рассмотрим уравнение (15.1). Инкременты стремятся к γ_{BV} в короткомасштабном пределе. В этом пределе слагаемое $(\ln\rho)'v'$ мало по сравнению с двумя другими слагаемыми, а функцию $(\ln\rho)'$ можно считать медленно меняющейся. Таким образом, приходим к уравнению с постоянными коэффициентами. Зависимость $v(y)$ будем искать в виде $\propto \exp(iqy)$. В короткомасштабном пределе имеем: $1/q \ll L$. Внутри широкого по сравнению с $1/q$ слоя L функция $v(y)$ должна быть ограничена. Поэтому q должно быть действительной величиной. Подставляя $v \propto \exp(iqy)$ в (15.1) с опущенным v' слагаемым[21], получим $q^2 = k^2(-1 + g\gamma^{-2}d(\ln\rho)/dy)$. Если

[19] При плавном распределении ρ число мод бесконечно. Если $k = k_{fix} < \infty$, то инкременты $\gamma_n(k_{fix})$ сгущаются около нуля: $\gamma_n(k_{fix}) \to 0$ при $n \to \infty$.

[20] Здесь индекс n указывает количество нулей.

[21] Дело в том, что второе слагаемое в (15.1) мало по сравнению с первым слагаемым. Таким образом, в короткомасштабной асимптотике нет разницы между точным уравнением (15.1) и модификацией этого уравнения в приближении Буссинеска. В этом приближении переменность ρ учитывается только в динамическом слагаемом, связанном с действием плавучести. При этом вторым слагаемым в (15.1), возникающим из-за влияния переменности ρ на кинетическую энергию, пренебрегают.

жидкость однородна $d(\ln\rho)/dy = 0$, то $q^2 = -k^2$. В этом случае возможны только экспоненциально растущие или убывающие решения. В стратифицированной жидкости из условий $0 < q^2 < \infty$ следует, что $0 < \gamma^2 < gd(\ln\rho)/dy$. Верхний предел интервала допустимых значений γ называется инкрементом Брента–Вяйсяля γ_{BV}, см. рис. 15.4*а*. Он равен

$$\gamma_{BV}^2 = gd(\ln\rho)/dy = g/H_R. \qquad (15.1')$$

Как видим, крупномасштабные (длинноволновые), см. п. 15.2, и коротокомасштабные асимптотики (15.1′) получаются из соотношения $\gamma^2 \sim gk$ соответственно умножением и делением на kH_R.

Обрезание инкрементов коротокомасштабных мод на инкременте γ_{BV}, как было отмечено выше, приводит к задержке развития турбулентного перемешивания. Отметим, что разные по k и числу нулей собственные функции имеют инкременты, примерно равные γ_{BV}. В будущем было бы любопытно рассмотреть вопрос об интерференции этих мод на нелинейной стадии развития.

В случае переменной величины $H_R = H_R(y)$ инкремент γ_{BV} определяется минимальным значением функции $H_R(y)$.

15.4. Взаимодействие объемных и поверхностных мод

Кусочно-непрерывные распределения ρ. Выше в п. 15.2 и п. 15.3 были рассмотрены случаи кусочно-постоянных и непрерывных распределений плотности. С этими распределениями связаны соответственно поверхностные и объемные моды возмущений.

Термины "поверхностные моды" и "объемные моды" используются часто. Их происхождение достаточно прозрачно. Оно связано с тем, что в случае плавного распределения ρ собственные функции $v(k, n; y)$ возмущений с волновыми числами k и числом нулей n делокализованы ("размазаны") внутри объемной прослойки толщиной $L_{\min}$. Здесь $L_{\min}$ — это масштаб однородности прослойки, равный минимальному значению функции $L(y) = (d\ln\rho/dy)^{-1}$. Эта прослойка находится при $y \approx y_{\min}$, где $y_{\min}$ — соответствует положению минимума функции $L(y)$: $L_{\min} = L(y_{\min})$.

С другой стороны, поверхностные моды локализованы около скачка в распределении ρ на толщине $\sim \lambda$.

Разумеется, четкое отличие между этими модами имеется только тогда, когда $\lambda <$ или $\ll L_{\min}$. А в случае кусочно-постоянного распределения при $\lambda <$ или $\ll L$, где L — расстояние между скачками плотности. В случае же длинных волн $\lambda \gg L$ или $\lambda \gg L_{\min}$ разница между поверхностными и объемными модами становится незаметной.

Смешанные волновые функции. Рассмотрим случай смешанного распределения ρ, когда наряду с участками плавного изменения ρ имеются и скачки ρ. В этом случае общее спектральное семейство собственных мод распадается на два подсемейства: более жесткое подсемейство поверхностных мод (S-мод) и более мягкое подсемейство объемных мод

(V-мод), см. рис. 15.6. Поверхностные и объемные моды имеют следующие разные короткомасштабные асимптотики: $\gamma^2 \propto k$ и $\gamma^2 \to \gamma^2_{BV}$ соответственно. Дисперсионные зависимости $\gamma^2(k)$ "отталкиваются" друг

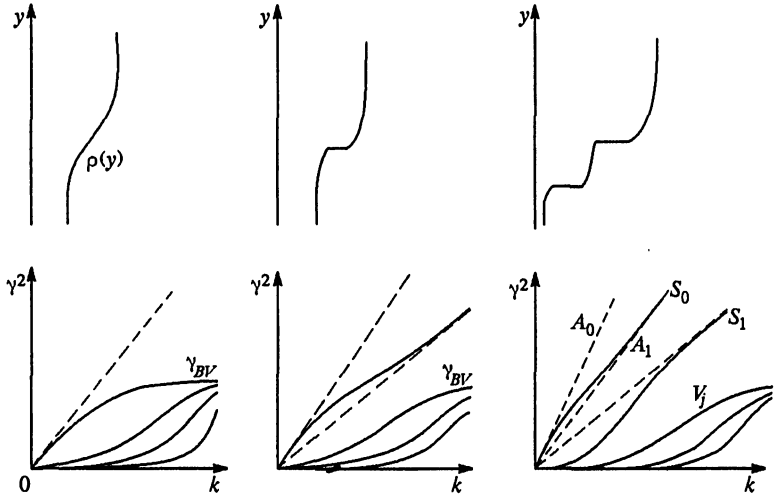


Рис. 15.6. Расщепление спектра на поверхностные S_i и объемные V_j подсемейства. Число поверхностных мод равно числу скачков плотности. Они жестче и занимают основное и следующие за ним состояния

от друга и поэтому не имеют пересечений. С этим связано сохранение последовательности в иерархии мод при варьировании k. Поверхностные моды жестче, чем объемные. Они занимают первые $n = 0$, $n = 1, \ldots,$ $n = N - 1$ состояний, где N — число скачков плотности, а n — число нулей собственной функции.

Рассмотрим распределения плотности, имеющие участки изменения ρ, на которых с ростом y происходит уменьшение ρ, см. рис. 15.1*а*. В этих случаях появляется устойчивая часть спектра, соответствующая внутренним гравитационным волнам, которая занимает квадрант $\gamma^2 < 0$, $k > 0$ на плоскости γ^2, k. Эта часть спектра устроена аналогично спектру неустойчивых мод. Здесь так же, как и в неустойчивом случае, возможны поверхностные и объемные моды. Последовательная нумерация числа нулей начинается с самой жесткой внутренней гравитационной волны. Нумерация нулей на устойчивой и неустойчивой частях спектра производится независимо.

15.5. Об изобарической границе

Изобарические моды с неоднородным распределением давления, стационарным в лагранжевых координатах. Рассмотрим распределение ρ, ограниченное изобарической границей. Эта граница называется также свободной или вакуумной. При этом подразумевается, что она эквива-

лентна границе между плотной жидкостью (или газом) и жидкостью (или газом) с исчезающе малой плотностью ("вакуумом").

С вакуумной границей связана важная специальная мода, называемая изобарической. При движении, соответствующем этой моде, значения давления сохраняются в лагранжевых частицах. В разных частицах давления могут быть разными. То есть тут положение с давлением оказывается таким же, как при адиабатическом движении с энтропией в лагранжевых координатах — значения давлений, а значит, и изобары "вморожены" в жидкость (газ). Здесь нас будет интересовать, каким образом эта мода отделяется или присоединяется к остальному спектру.

Место изобарической моды в спектре. Рассмотрим профиль плотности, имеющий участок сильного понижения плотности. Участок пониженной плотности $\rho_b \ll 1$ "развязывает" участки с $\rho_f \simeq 1$, находящиеся выше и ниже этого участка. Следовательно, участок с $\rho_f \simeq 1$ может быть ограничен участком $\rho_b \ll 1$ или снизу, или сверху, или и снизу и сверху. Нас особо интересует случай неустойчивости. С этой точки зрения наибольший интерес представляет случай, когда малоплотный участок "подпирает" плотный снизу.

Рассмотрим случай, когда плотность между малоплотным и плотным участками изменяется скачком. В этом случае инкремент моды, относящейся к этому скачку, является наиболее жестким в спектре. На плоскости γ^2, k он зажат между прямолинейными асимптотами A_0 и A_1 (A_0 при $k = 0$ и A_1 при $k = \infty$), см. рис. 15.6. При $\rho_b \ll 1$ наклоны $\gamma^2/(gk)$ этих асимптот мало отличаются от единицы. Поэтому при $\rho_b \to 0$ этот инкремент стремится к прямой с наклоном, равным единице.

Нумерация нулей при обращении ρ_b в нуль не нарушается. Основное состояние нулей функции $v(y)$ не имеет, а следующее за основным имеет один нуль. Собственная функция основного состояния затухает экспоненциально при удалении от скачка $v \propto \exp(-k|y - y_b|)$, где y_b задает положение скачка. Прямолинейность квадрата инкремента и экспоненциальность собственной функции, не содержащих никаких данных о распределении плотности, обусловлены изобарическим свойством данной моды, см. ниже.

Выражение $v \propto \exp(-k|y - y_b|)$ описывает как движение плотной жидкости, так и движение "вакуума" — жидкости с $\rho = 0$. Отметим, что с кинематической точки зрения поле скоростей в области с $\rho = 0$ устроено так же, как в слое или в полупространстве, заполненных однородной жидкостью. Это поле определяется движением вакуумной границы (границ).

Степенной профиль. Рассмотрим теперь случай степенного понижения плотности. А именно, пусть в окрестности нуля плотности выполняется: $\rho \propto y^\beta$. В этом случае локальный характерный масштаб $(d \ln \rho/dy)^{-1}$ пропорционален расстоянию до точки, в которой ρ обращается в нуль. Поскольку квадрат инкремента Брента–Вяйсяля обратно пропорционален минимальному значению этого масштаба, то инкремент γ_{BV} "проваливается" в бесконечность. С этой точки зрения полезно сравнить спектры, изображенные на рис. 15.6 и 15.7*а*.

Если обрезать степенную зависимость со стороны коротких масштабов, см. рис. 15.7*б*, то инкремент γ_{BV} остается конечным. В этом случае ситуация становится похожей на изображенную на рис. 15.4*а*. Как ви-

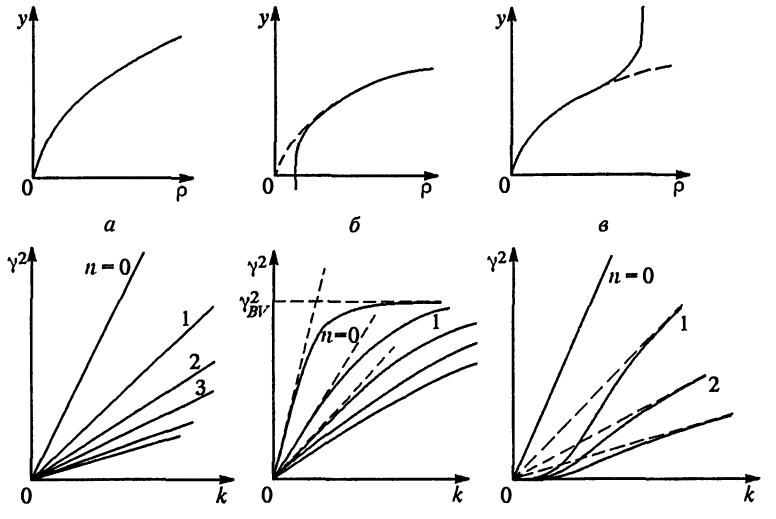


Рис. 15.7. Спектры степенных распределений плотности. Штриховыми прямыми и кривыми показаны асимптотические зависимости. Чисто степенной случай (*а*). Веер прямолинейных дисперсионных зависимостей. Значение n указывает число нулей собственной функции. Изобарической моде соответствует $n = 0$. Степенное распределение, обрезанное со стороны коротких масштабов (*б*). Степенное распределение, обрезанное со стороны крупных масштабов (*в*). Изобарической моде соответствует $n = 0$

дим, отличия остаются только в области крупных масштабов[22]. Кроме того, изобарическая мода, помеченная $n = 0$ на рис. 15.4*а*, сохраняется только в качестве асимптотики при $k \to 0$ на рис. 15.4*б*.

В случае обрезания распределения ρ со стороны крупных масштабов, см. рис. 15.4*в*, изобарическая мода сохраняется, сравни рис. 15.4*а*, *в*. Моды старших порядков с числом нулей $n \geq 1$ становятся мягкими при $k \to 0$, сравни рис. 15.7*в* с рис. 15.3*к* и 15.4*а*.

Совершенно аналогично устроен спектр внутренних волн в случае $\rho \propto (-y)^{\beta}$. Требуется только инкремент неустойчивости заменить на частоту колебаний.

Случай степенного распределения исследован в работе (Иногамов, 1985с).

Общее решение уравнения (15.1) имеет в этом случае вид

$$v(ky) = c_1 e^{-ky} F(\alpha, \beta, 2ky) + \\ + c_2 e^{-ky} (-ky)^{1-\beta} F(\alpha - \beta + 1, 2 - \beta, 2ky). \qquad (15.2)$$

[22] Разные степенные асимптотики при $k \to 0$.

Здесь для определенности рассмотрен случай внутренних волн ($y < 0$), F — вырожденная гипергеометрическая функция. Кроме того, для краткости обозначено $\alpha = (\beta/2)(1 - E)$.

Из анализа краевых условий на вакуумной границе следует, что в (15.2) должно быть отброшено сингулярное решение. Таким образом, получаем, что решение должно иметь вид

$$v \propto e^{-ky} F(\alpha, \beta, 2ky). \tag{15.3}$$

Попытаемся теперь удовлетворить граничному условию, поставленному далеко от вакуумной границы. Для этого требуется проанализировать поведение функции F при больших значениях аргумента. Преобразуя с помощью асимптотического разложения функции F по $1/y$ выражение (15.3), получаем

$$v(ky) \propto \Gamma(\beta) \left(\frac{G(\alpha, \alpha - \beta + 1, -2ky)}{\Gamma(\beta - \alpha)(-2ky)^{\alpha}} e^{-ky} + \frac{G(\beta - \alpha, 1 - \alpha, 2ky)}{\Gamma(\alpha)(2ky)^{\beta - \alpha}} e^{ky} \right), \tag{15.4}$$

где G представляет собой асимптотическое разложение, которое равно

$$G(\alpha, \beta, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!x} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!x^2} + \dots$$

Далеко от вакуумной границы плотность мало меняется на масштабах $\simeq \lambda$. Поэтому асимптотически возмущение должно при $y \to -\infty$ примерно экспоненциально затухать. Отсюда следует, что спектр собственных значений должен быть выбран таким образом, чтобы в выражении (15.4) первое слагаемое обратилось в нуль. Поскольку гамма-функция $\Gamma(x)$ обращается в бесконечность при $x = -m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, то это слагаемое пропадает при

$$\beta - \alpha = -m.$$

Таким образом, спектр собственных чисел внутренних волн равен

$$E_m = -1 - \frac{2m}{\beta}, \quad \frac{\gamma^2}{gk} = -\left(1 + \frac{2m}{\beta}\right)^{-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Соответствующие собственные функции равны

$$v_m(ky) \propto e^{-ky} F(\beta + m, \beta, 2ky), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Нелинейная эволюция возмущения в степенном профиле — укручение градиента плотности в вершине пузыря. Вопрос о турбулентности в степенном распределении плотности обсуждался в начале раздела 2. Скажем несколько слов о нелинейной стадии развития периодического возмущения в случае степенного распределения. При турбулентном перемешивании масштаб больших или когерентных структур "следит" за удалением фронта перемешивания от поверхности $y = 0$. Данный масштаб пропорционален этому удалению и течение оказывается автомодельным. При

периодическом возмущении масштаб равен пространственному периоду и поэтому является фиксированным.

Рассмотрим развитие изобарической (самой быстрой) моды. Распределения плотности по оси симметрии пузыря (bubble) (b) и оси струи (j) (jet) показаны на рис. 15.8. Точками B и J обозначены мгновенные положения вершин (apex) пузыря и струи соответственно. Максимальное

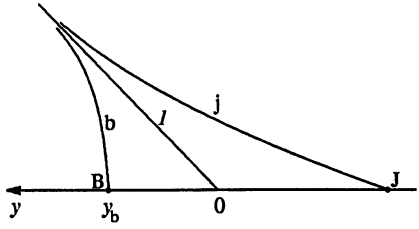


Рис. 15.8. Зависимости $\rho(y)$ при нелинейном развитии изобарической моды в случае степенного распределения плотности. Зависимости *1*, b (bubble) и j (jet) относятся к невозмущенному распределению и распределениям по осям симметрии пузыря и струи соответственно

значение градиента плотности достигается в точке B. С течением времени происходит укручнение распределения плотности b. При больших сдвигах пузыря $y_B \gg 1/k$ относительное изменение плотности $\Delta\rho/\rho$ вдоль оси струи на уровне $y \simeq y_B$ мало. В результате асимптотически движение в окрестности вершины пузыря становится таким же, как в однородной жидкости.

Обсуждение вопросов, касающихся нелинейного периодического и турбулентного режимов развития изобарической моды, представляется здесь уместным вот в какой связи. Дело в том, что в литературе рассматривались предложения задержать развитие перемешивания путем сглаживания распределения плотности. В случае отсутствия подпирающей изобарической границы сглаживание распределения приводит к обрезанию инкрементов неустойчивости на инкременте γ_{BV} и задержке развития перемешивания. В случае же наличия такой границы мажорирующей является изобарическая мода, инкремент которой совпадает с классическим инкрементом на границе раздела между заполняющей полупространство однородной жидкостью и вакуумом. При этом в линейной постановке сглаживание не приводит к задержкам в развитии перемешивания. В связи с этим и возникает вопрос о нелинейном развитии изобарической моды и влиянии на это развитие распределения плотности.

Экспоненциальный переходный слой. В заключение данного подраздела рассмотрим случай экспоненциального распределения плотности. Пусть экспоненциальный слой $\rho \propto \exp(y/L_p)$ непрерывно сшит с областями постоянной плотности, см. рис. 15.9. В этом случае кроме масштаба L_p имеется еще и второй масштаб L_g, характеризующий общую протяженность экспоненциального слоя и отношение плотностей $\mu = \rho_d/\rho_u$ на его границах: $L_g = -L_p \ln \mu$, см. рис. 15.9*а*.

В зависимости от соотношения между L_p и L_g возможны три случая: $L_g \ll L_p$, $L_g \simeq L_p$ и $L_g \gg L_p$, показанные на рис. 15.9*а–в* соответственно.

В случае (а) неустойчивость развивается медленно. Переход мажорирующей моды от крупномасштабной к короткомасштабной асимптотике происходит при больших $k \simeq 1/L_g$. Инкременты Брента–Вяйсяля $\gamma_{BV} = \sqrt{g/L_p}$ одинаковы во всех трех случаях.

В случаях (б) и (в) переход происходит при $k \simeq 1/L_p$. В случае (в) в крупномасштабной асимптотике инкремент и собственная функция мажорирующей моды близки к изобарическим. При этом собственная

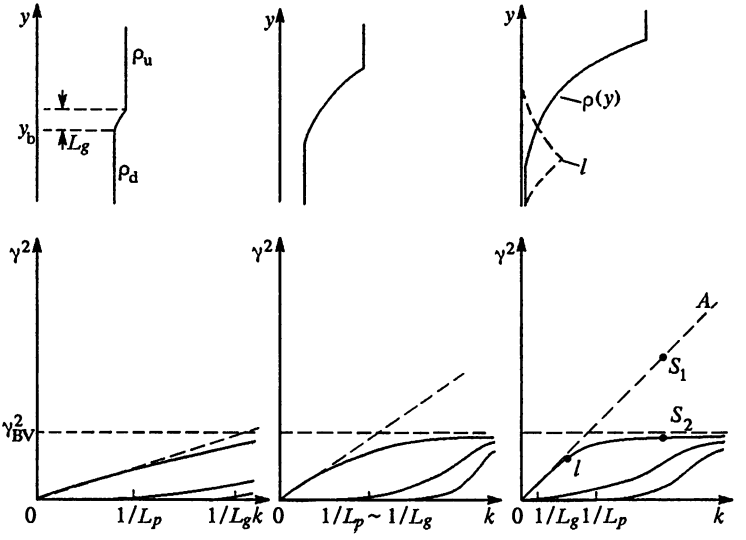


Рис. 15.9. Экспоненциальные распределения плотности (верхний ряд рисунков) и соответствующие им спектры (нижний ряд). В нижнем ряду горизонтальной прямой отчеркнут инкремент γ_{BV}

функция $v \approx c\exp(-k|y - y_b|)$, где c — произвольная постоянная, а y_b — нижняя точка сшивки экспоненциального распределения с однородным. Эта собственная функция и соответствующее ей собственное число помечены буквой l на рис. 15.9*в*.

В случае внутренних волн, когда $\rho \propto \exp(-y/L_p)$ и плотность убывает при возрастании y, аналогичная собственная функция опять сосредоточена возле границы сшивки с областью малой плотности, которая в этом случае находится наверху.

В то же время в короткомасштабной асимптотике наличие "подножки" (то есть фона с $\rho_d \neq 0$) "убивает" изобарическую моду. Соответствующие этой асимптотике собственные числа сильно отличаются от собственных чисел изобарической моды. См. пример, показанный на рис. 15.9*в*. Здесь A — инкремент изобарической моды, а точки s_1 и s_2 относятся к собственным числам изобарической моды и короткомасштабной асимптотики соответственно.

Собственные функции, относящиеся к точкам типа s_2, затухают $\propto \exp(\pm ky)$ вне слоя с переменной плотностью. А внутри данного слоя

эти функции $\propto \exp(-y/(2L_\mathrm{p}))\sin(\pi(y-y_\mathrm{b})/L_\mathrm{g})$. То есть пространственный масштаб, на котором изменяются эти функции внутри переменного слоя, становится равным L_p, а не $1/k$.

Эти изменения обусловлены тем, что изобарическая мода экспоненциально растет внутри слоя при уменьшении y, т. е. она сосредоточена на толщине $\simeq \lambda$ около точки y_b. Между тем при наличии "подножки" и при $\lambda \ll L_\mathrm{p}$ граничное условие в этой точке далеко от изобарического.

15.6. Динамика лагранжевых частиц и изобарическая мода

Разложение произвольного начального возмущения по собственным модам. Начальные возмущения специального вида, в которых отсутствует та или иная мода. Довольно естественно, что при анализе задач с неустойчивостью повышенное внимание уделяется основному состоянию[23]. Этому состоянию соответствует наибольшее значение инкремента, мажорирующее инкременты старших мод.

Действительно, наибольший интерес представляет эволюция системы от возмущений общего вида. Эти возмущения раскладываются в виде суперпозиции по всем имеющимся собственным функциям. Вследствие экспоненциальной зависимости от времени в "конкурентной борьбе" между модами, соответствующими этим функциям, за времена пропорциональные $(\gamma_0 - \gamma_1)^{-1}$ начинает доминировать основная мода[24], здесь γ_0 и γ_1 — это инкременты основной и следующей за ней мод соответственно.

Изобарическая PT мода. В нескольких упомянутых выше важных примерах распределений плотности основное состояние образует изобарическая мода[25]. Отметим, что эта мода имеет инкремент $\gamma = \sqrt{gk}$, который

[23] Так называется мажорирующий инкремент с не имеющей нулей собственной функцией на языке квантовой механики.

[24] В случае кусочно-постоянного распределения плотности собственные функции или собственные вектора могут быть выражены через возмущения позиций и скоростей поверхностей скачков плотности. На две единицы сокращая число свободных параметров, задающих начальное состояние, можно согласовать возмущения на поверхностях скачков таким образом, чтобы "убить" основное состояние. Так же обстоит дело и в случае непрерывного распределения плотности. Это означает, что коэффициенты при собственных векторах, соответствующих неустойчивым модам, равны нулю. Если среди скачков присутствуют один или несколько устойчивых скачков, то можно согласовать возмущения так, чтобы "убить" все неустойчивые моды, оставив только устойчивые, см. работу (Mikaelian, 1995), посвященную этому. Кроме того, отметим еще следующее. Каждой моде соответствуют экспоненциально растущие и затухающие во времени решения. Поэтому в общем множестве начальных данных имеется такое подмножество, при старте от которого возмущения затухают. При этом траектория системы асимптотически стремится к гидростатическому состоянию. Разумеется, так же, как и в случае с сепаратрисой, входящей в седловую особую точку, когда любое инфинитисемальное отклонение от сепаратрисы не позволяет попасть точно в седло, так и здесь любое сколь угодно малое отклонение от этого подмножества не позволит системе вернуться в гидростатическое состояние.

[25] Ввиду ее специальных свойств (консервация давления, экспоненциальное поведение на бесконечности, инвариантность к структуре распределения плотности, инвариантность к УРС), эту моду называют также глобальной или инвариантной. В астрофизике гравитационную волну с аналогичным свойством "вмороженности" давления называют фундаментальной модой. Ее обозначают буквой f в классификации мод Каулинга (соответственно

является максимальным среди всех возможных зависящих от распределений плотности и граничных условий инкрементов основных мод. Изобарическая мода обладает важными свойствами. Эти свойства тесно связаны с изобарическим расслоением, о котором пойдет речь ниже. Этим обусловлено название этой моды.

Изобарическая мода и лагранжевы координаты. Проанализируем эту моду. Начнем с примера однородного полупространства, граничащего с "вакуумом". Приведем выражения для $\varphi(\eta_0, \dot\eta_0; x, y, t)$, $\eta(\eta_0, \dot\eta_0; x, t)$ и $p(\eta_0, \dot\eta_0; x, y, t)$, где η_0 и $\dot\eta_0$ задают начальные данные — амплитуды возмущений позиции границы и скорости границы. Потом проинтегрируем уравнения движения лагранжевых частиц $dx/dt = u$, $dy/dt = v$ с начальными данными $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Подставим найденные таким образом траектории лагранжевых частиц $x = X(x_0, y_0, \eta_0, \dot\eta_0, t)$ и $y = Y(x_0, y_0, \eta_0, \dot\eta_0, t)$ в давление. В результате получим зависимость давления от времени в лагранжевой частице. Вычисление показывает, что в случае изобарической моды это давление оказывается не зависящим от времени. Отсюда следует "вмороженность" изобар в жидкость в случае рассматриваемой моды.

Вкратце приведем некоторые элементы из цепочки описанных элементарных, но громоздких, как это обычно бывает при интегрировании лагранжевых переменных, вычислений.

Внутри жидкости $\Delta\varphi = 0$, а на границе должны выполняться краевые условия

$$\eta_t = \varphi_y|_\eta - \eta_x\varphi_x|_\eta, \quad \varphi_t|_\eta = -v^2|_\eta/2 - |g|\eta. \tag{15.5}$$

Эти условия дополняются условием затухания при $y \to +\infty$. Линеаризуя условия (15.5), получим $\varphi_t|_\eta = -|g|\eta$ и $\eta_t = \varphi_y|_\eta$. Ищем решения в виде $\varphi = T(t)\exp(-ky)\cos kx$, $\eta = B(t)\cos kx$. Вычислим $\varphi|_\eta$. Имеем $\varphi|_\eta = T(t)\exp(-ky)|_\eta \cos kx$. Разлагая экспоненту $\exp(-k\eta)$, получим $\varphi|_\eta = T(1 + B\cos kx + B^2(\cos kx)^2/2 + \ldots)\cos kx$. Оставляя линейные по амплитуде возмущения слагаемые, получим $\dot T = -|g|B$, $\dot B = -kT$. Отсюда $T = \alpha\exp(\sqrt{|g|k}t) + \beta\exp(-\sqrt{|g|k}t)$.

Выражая α и β через η_0 и $\dot\eta_0$, такие что $\eta(x, 0) = \eta_0\cos kx$ и $\eta_t(x, 0) = \dot\eta_0\cos kx$, получим

$$T(t) = -\gamma\eta_0\,\mathrm{sh}\,\gamma t - \dot\eta_0\,\mathrm{ch}\,\gamma t, \quad B(t) = \eta_0\,\mathrm{ch}\,\gamma t + \dot\eta_0/\gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma t,$$

где для краткости введено обозначение $\gamma = \sqrt{|g|k}$.

Займемся теперь интегрированием уравнений $\dot x = u$, $\dot y = v$. Они имеют вид

$$dx/dt = -kT(t)e^{-ky}\sin kx, \quad dy/dt = -kT(t)e^{-ky}\cos kx.$$

звуковые моды обозначаются буквой p — давление, а гравитационные — буквой g) (Cox, 1980; Unno et al., 1979). В работе (Иногамов, 1997) предлагается называть изобарическую РТ моду — f_g^--модой, изобарическую гравитационную волну — f_g^+-модой. Кроме того, в этой работе найдена интересная акустическая фундаментальная мода ($f_g^\pm$-моды являются гравитационными фундаментальными модами), тесно связанная с модой Ламба.

Исключая время, получим $dx = \operatorname{tg} kx dy$. Интегрируя это уравнение с учетом начальных данных, получим

$$\sin kx / \sin kx_0 = \exp[k(y - y_0)]. \tag{15.6}$$

Исключая с помощью этого выражения $\cos kx$ из уравнения $\dot{y} = v$, приведем последнее к виду

$$dy/dt = -kT(t)e^{-ky}\sqrt{1 - (\sin kx_0)^2 e^{2k(y-y_0)}}.$$

Интегрируя возникающий здесь интеграл вида $\int d\xi/\sqrt{1-\xi^2}$ с помощью подстановки $\xi = \sin\theta$ и используя начальные данные, получим

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{k}\ln\frac{\sin\{kx_0 - (k^2/\gamma)[\alpha(e^{\gamma t} - 1) - \beta(e^{-\gamma t} - 1)]e^{-ky_0}\sin kx_0\}}{\sin kx_0}. \tag{15.7}$$

Подставляя (15.7) в (15.6), находим

$$x(t) = x_0 - \frac{k}{\gamma}[\alpha(e^{\gamma t} - 1) - \beta(e^{-\gamma t} - 1)]e^{-ky_0}\sin kx_0 \tag{15.8}$$

В линейном приближении смещения лагранжевых частиц малы. Это означает, что величины α, β и $\alpha\exp(\gamma t)$ тоже малы. Разложим выражение для $y(t)$ (15.13) по этим величинам. Разлагая сначала sin, а затем ln, и оставляя линейные слагаемые, получим

$$y(t) = y_0 - \frac{k}{\gamma}[\alpha(e^{\gamma t} - 1) - \beta(e^{-\gamma t} - 1)]e^{-ky_0}\cos kx_0 \tag{15.9}$$

Отметим, что выражение для $x(t)$ (15.8) уже является линейным по указанным величинам.

Подставим выражения (15.8) и (15.9) в формулу для давления в лагранжевой частице

$$p = p(\eta_0, \dot{\eta}_0, x(t), y(t), t) = -\rho[\varphi_t + |g|y(t)].$$

Вычислим $\varphi_t = \gamma[\alpha\exp(\gamma t) - \beta\exp(-\gamma t)]\exp(-ky(t))\cos kx(t)$. В результате обнаруживается, что, действительно, зависимость от времени t пропадает и давление $p(\eta_0, \dot{\eta}_0, x_0, y_0)$ в лагранжевых частицах при движении сохраняется.

Эволюция моды, которая на линейной стадии являлась изобарической. Сказанное относительно изобарического расслоения и "вмороженности" изобар проиллюстрировано на рис. 15.10. На рис. 15.10*а–в* показано развитие во времени изобарической моды. Эти рисунки соответствуют моментам t_1, t_2 и t_3 соответственно, $t_1 < t_2 < t_3$. Показаны две изобары a–b и c–d, отвечающие давлениям p_{ab} и p_{cd} соответственно. Жидкость сверху (жидкость отмечена буквами F), ускорение свободного падения направлено вниз. Рисунки *а* и *б* относятся к линейной, а рисунок *в*

к нелинейной стадиям развития неустойчивости. На линейной стадии расстояние a–b сокращается, а расстояние c–d растет.

Градиент давления ∇p в вершине пузыря увеличивается по сравнению с гидростатическим[26], а в формирующейся струе — уменьшается. Жидкие частицы перемещаются вместе с изобарами. Например, жидкие

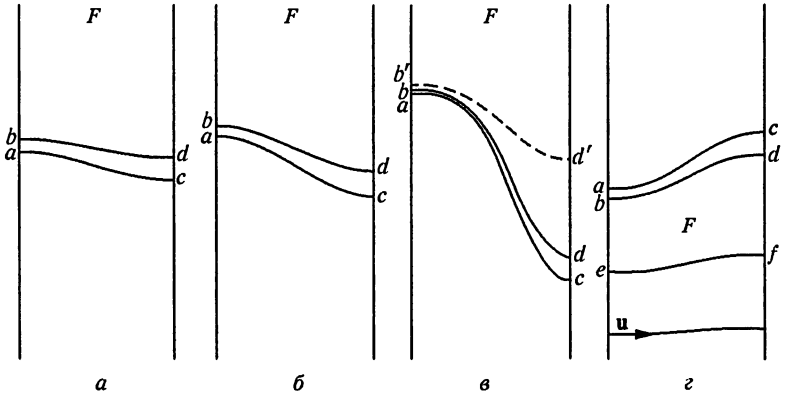


Рис. 15.10. "Вмороженность" изобар. На линейной стадии изобары "склеены" с жидкими линиями и они эволюционируют вместе (*а* и *б*). На нелинейной стадии "вмороженность" нарушается и изобары отрываются от жидких кривых (*в*). Линейная гравитационная волна, ограниченная вакуумной границей (*г*) (рисунки *а*–*в* относятся к изобарической РТ моде). Волна стационарна в системе координат, связанной с границей волны, например, с точкой гребня волны. Траектории жидких частиц $a-c$, $b-d$, $e-f$ и так далее совпадают с изобарическими линиями

частицы, находившиеся на изобаре b–d при $t = t_1$, остаются на этой изобаре и при $t = t_2$. Градиент давления в лагранжевых переменных x_0, y_0 при этом не меняется.

На нелинейной стадии "вмороженность" давлений нарушается. Площадь $abcd$ между жидкими кривыми a–c и b–d сохраняется, поэтому эти кривые вследствие роста длин кривых a–c и b–d должны сближаться. То есть асимптотически все внутренние жидкие кривые типа кривой b–d прижимаются к границе с "вакуумом". Между тем набор изобар асимптотически стремится к некоторому семейству стационарных форм. Если жидкая кривая a–c соответствует вакуумной границе, то на нелинейной стадии она остается единственной жидкой кривой, в которую "вморожена" изобара. Изобара же $b' - d'$ на нелинейной стадии перестает повторять жидкую кривую b–d и "отрывается" от нее.

Аналогичная "вмороженность" имеет место и в случае линейной гравитационной волны с изобарической границей, см. рис. 15.10*г*. Здесь жидкость находится снизу. В стационарной системе координат скорость жидкости в линейной волне на нижней бесконечности равна $\sqrt{g/k}$.

[26] Асимптотически с ростом времени этот градиент стремится к некоторому постоянному значению.

Из свойств "вмороженности" с легкостью следует, во-первых то, что изобарическая рэлей-тейлоровская мода появляется вместе с границей, подпирающей жидкий слой снизу, и, во-вторых то, что изобарическая мода и распределение плотности являются взаимно независимыми, расцепленными. Эта расцепленность означает, что распределение плотности может быть произвольным, более того, жидкость может быть сжимаемой, иметь произвольное распределение энтропии по слоям и даже любое уравнение термодинамического состояния в этих слоях. И, несмотря на все те масштабы, которые привносятся в спектральную задачу этими распределениями, основное состояние будет по-прежнему даваться[27] простейшими безразмерными формулами $\gamma^2 = |g|k$ и $\exp[\pm k(y - y_b)]$ (где y_b — координата изобарической границы), не содержащими параметров стратификации распределения плотности.

Изобарические и трохоидальные движения. Представим попытку исторической справки по разбираемой теме. Между вопросами (1) о модах с γ или ω, равными $\sqrt{|g|k}$, (2) об изобаричности, (3) о трохоидальных или циклоидальных волнах и лагранжевых переменных и (4) о динамике тонких слоев и оболочек имеются существенные связи. Первые работы по линейной гравитационной моде с $\omega = \sqrt{|g|k}$, бегущей по верху толстой[28] газовой атмосферы, иногда называемой волной Пекериса (Pekeris), относятся к началу нашего века[29]. В другой классической ранней работе (Taylor, 1950) были получены обе моды (γ, $\omega = \sqrt{|g|k}$) для случая однородного слоя конечной толщины, ограниченного вакуумными границами. Из ответа удивительным образом выпала толщина слоя[30]. Возникает вопрос о причинах этого. Изобарические свойства рэлей-тейлоровской моды с $\gamma = \sqrt{|g|k}$, по-видимому, впервые были отмечены в работах (Иногамов, 1984a, b, 1985b, c). Там же отмечены связи с трохоидальными волнами, лагранжевыми координатами и тонкими оболочками.

В работах (Mikaelian, 1982) и (Kull, 1991) исследовалась "реакция" спектра инкрементов на изменения в распределении плотности. Высказывалось соображение о том, что сглаживание (смягчение) этого распределения должно приводить к смягчению спектра, заключающемуся в уменьшении инкрементов. Замедление турбулентного перемешивания на сглаженных распределениях исследовалось в работах (Анучина

[27] Разумеется, это не относится к старшим (возбужденным) состояниям.

[28] Это означает, что нижнее граничное условие удалено в минус бесконечность.

[29] Классическая теория распространения волн в газовых (изотермических и политропических) атмосферах, ограниченных снизу твердым дном, при произвольном отношении λ/H (где λ — длина волны, H — толщина атмосферы) построена на рубеже веков, см. книгу (Lamb, 1945, Chp. X) и работу (Pekeris, 1948) и ссылки в них. Конкретные расчеты тогда проводились в длинноволновом приближении. Один из мотивов этих работ был связан с изучением гравитационно-акустических волн (инфразвук), порожденных взрывом Тунгусского метеорита.

[30] Из соображений размерности (в задаче две размерные величины: g и толщина слоя L) следует, что инкремент или частота должны быть пропорциональны $\sqrt{|g|k}$ при $k = 0$ или $k = \infty$. Но в переходном случае при $kL \sim 1$ ответ, вообще говоря, должен содержать и g и L.

и др., 1988), (Ардашева и др., 1988) и (Забабахин, Птицин, 1988). Сравнение резко и плавно изменяющихся распределений представлено на рис. 15.11*а*, *б*. Действительно, при наличии фона при $y \to -\infty$ (т. е. при $\rho(-\infty) \neq 0$) имеет место смягчение спектра, которое должно приводить к задержке в развитии турбулентного перемешивания, обсуждение этого см. выше в начале § 15.

Особыми являются случаи с $\rho(-\infty) = 0$, см. рис. 15.11*в*, *д*. Здесь в линейной теории имеется безразличная к сглаживанию изобарическая мода. Зависимость развития возмущений, соответствующих этой моде,

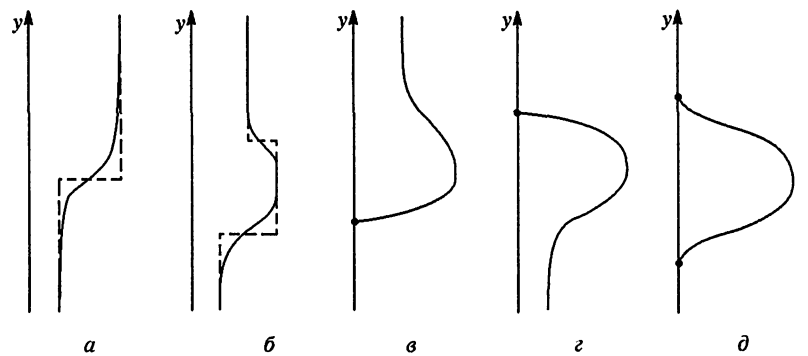


Рис. 15.11. Примеры изобарических и неизобарических случаев вместе с примерами резких (рисунки *а* и *б*, штриховые линии) и сглаженных (рисунки *а*–*д*, сплошные кривые) распределений плотности. В точках касания графика распределения плотности $\rho(y)$ оси y плотность обращается в нуль

от распределения плотности в нелинейном периодическом и турбулентном случаях обсуждалась выше.

Трохоидальные волны. Рассмотрим вопрос о том, имеются ли изобарические решения в нелинейной постановке? Оказывается, такие решения имеются. Они образуют любопытный класс движений, называемый трохоидальными или циклоидальными волнами. Как известно, трохоидами или циклоидами называются кривые, которые прочерчивают точки, прикрепленные к катящемуся колесу.

Линейные изобарические решения являются потенциальными решениями. В нелинейных трохоидальных волнах завихренность не равна нулю. Она постоянна на линиях тока, вычерченных в системе координат, в которой волна стационарна. Завихренность убывает при возрастании глубины. При $y \to -\infty$ она стремится к нулю.

Трохоидальная волна в плоской геометрии открыта Герстнером в 1802 г. [31], и независимо от него Ранкиным в 1863 г. (ссылки на эти и последовавшие за ними публикации см. в работе (Иногамов, 1985b)). Этот результат относятся к числу классических. Она представляет собой единственное известное точное решение, описывающее нелинейные

[31] Поэтому ее называют также волной Герстнера.

волны на поверхности тяжелой жидкости. В работах (Иногамов, 1984b, 1985b) и независимо в работах (Абрашкин, 1984; Абрашкин и Якубович, 1984a) открыта точная нелинейная волна в виде эпи- и гипоциклоид в цилиндрической геометрии. В работе (Иногамов, 1985b) доказана трудная теорема о том, что совокупность этих волн исчерпывает класс нелинейных изобарических решений.

В линейном по амплитуде возмущения приближении нелинейные изобарические цилиндрические волны превращаются в линейные изобарические волны. Кроме того, оказывается имеется и линейная изобарическая рэлей-тейлоровская мода в цилиндрической геометрии, см. работы (Иногамов, 1984b, 1985b). Этот результат может быть обобщен и на случай сферической геометрии.

Длинноволновые приближения и жидкие пленки. Коснемся еще связи между трохоидальными волнами и эволюцией тонких жидких слоев (пленок). Рассмотрим бесконечно тонкую пленку с толщиной $l/\lambda = 0$ (где λ — длина волны возмущения) и поверхностной плотностью σ [г/см^2], разделяющую жидкие среды с плотностями ρ_{d} и ρ_{u}. В крупномасштабном пределе $\lambda \gg \sigma/\rho$ наличие пленки несущественно. В обратном случае, который обычно и рассматривают, наоборот инерция окружающей пленку жидкости несущественна[32]. При этом давления p_{d} и p_{u} на границах пленки постоянны в пространстве вдоль поверхности пленки.

Если $p_{\mathrm{d}} = p_{\mathrm{u}}$, то приходим к задаче о пленочном аналоге неустойчивости Рихтмайера–Мешкова. Если же давления не равны, то получаем пленочную неустойчивость Рэлея–Тейлора. Одной из первых работ по линейной теории пленки была работа (Harris, 1962). При пленочной неустойчивости Рихтмайера–Мешкова градиенты давления отсутствуют[33] и пленка разлетается, двигаясь по инерции. Начальное распределение скоростей обычно вычисляется в следующих предположениях. При $t = -0$ пленка покоится. В течение короткого промежутка времени на пленку действует импульс давления $p_{\mathrm{d}} - p_{\mathrm{u}} \propto \delta(t)$, который сообщает ей конечную скорость, равную

$$\int_{-0}^{+0} [p_{\mathrm{d}}(t) - p_{\mathrm{u}}(t)]\, dt/\sigma.$$

Распределение скоростей по пленке определяется ее начальной формой, см. работу (Иногамов, 1977a) о распределении скоростей и дальнейшей эволюции пленок. Наиболее яркой чертой нелинейной стадии развития неустойчивости на пленке является образование самопересечений поверхности (Ott, 1972; Башилов, Покровский, 1976; Иногамов, 1977a). В момент зарождения самопересечения на поверхности появляется заострение (касп).

[32] Тонкие пленки связаны с длинноволновыми асимптотиками. В отличие от модели мелкой воды, в которой жидкий слой ограничен одной свободной и одной жесткой границами, в модели пленки имеются две свободные границы.

[33] Градиенты давления отсутствуют вне кратковременного интервала, в течение которого ударная волна пересекает пленку.

Можно рассмотреть и серию последовательных импульсов давления $p_d(t) - p_u(t) = k_0\delta(t) + k_1\delta(t-t_1) + k_2\delta(t-t_3) + \ldots$ (Иногамов, 1977a). При небольшом числе (три-четыре) импульсов (ударов) эволюция пленки описывается аналитически. При увеличении числа импульсов N происходит плавный переход[34] от неустойчивости Рихтмайера–Мешкова к неустойчивости Рэлея–Тейлора.

Прямое численное моделирование динамики пленки (тонкой $\Delta R \ll R$ оболочки) под действием короткого импульса обжатия ($\tau_i \ll \tau_c$, где τ_i и τ_c — длительности импульса и продолжительность полета оболочки до коллапса) рассматривалось в работе (Боков и др., 1977). Изучалась деформация оболочки в процессе ее полета (после окончания импульса и до начала торможения на топливе движение оболочки происходит по инерции) к центру. Интересно, что методы работы (Иногамов, 1977a) позволяют описать это решение аналитически (до и после момента появления самопересечений оболочки).

Трохоиды и эволюция пленки. Оригинальные точные решения, описывающие динамику плоских и цилиндрических пленок, были найдены сначала в работе (Ott, 1972) (плоский случай), а затем в работе (Башилов и Покровский, 1976) (цилиндрический случай). Интересно, что эти решения оказались трохоидами! В этом и заключается связь между трохоидальными волнами и пленками[35]. Отметим, что если в трохоидальных волнах амплитуда волны стационарна, то амплитуда трохоид на пленке растет во времени. В случае толстых слоев жидкости нестационарные, растущие во времени[36] изобарические решения можно получить только в линейном по амплитуде возмущения приближении (Иногамов, 1984b, 1985b).

Однородные деформации и эллипсоиды. Единственное содержательное исключение относится к моде с номером цилиндрической гармоники $m = 2$. В этом случае возмущенная форма представляет собой эллипс или в трехмерном случае эллипсоид с произвольным отношением полуосей[37] (Анисимов, Иногамов, 1974). Отметим, что здесь давление в жидких частицах может быть переменным во времени.

Для этих точных решений характерно то, что форма изоповерхностей термодинамических переменных (в том числе и изобар) остается при движении в одном классе поверхностей. При этом скорости пропорциональны удалению от центра $\mathbf{v} \propto \mathbf{r}$, а тензор деформаций $\partial\mathbf{r}/\partial\mathbf{a}$ однороден в пространстве и зависит только от времени, здесь $\mathbf{a} = \mathbf{r}_0$ — лагранжевы координаты (метки). Поэтому эти решения называют решениями с однородными деформациями. В техническом плане задача

[34] Конкретное значение этого числа зависит от номера гармоники.

[35] Связь между изобаричностью (сохранением давления в жидких частицах), трохоидальными волнами и эволюцией пленок становится особенно очевидной при записи динамических уравнений в лагранжевых переменных (Иногамов, 1984b, 1985b).

[36] Они соответствуют неустойчивости.

[37] Поясним, что решения с эллипсами и эллипсоидами — это точные решения полных, а не линеаризованных систем уравнений. Соответственно отношения полуосей не обязаны быть близкими к единице.

приводится к интегрированию набора обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих конечномерную гамильтонову динамическую систему.

По вопросам, связанным с этими решениями, выполнено большое количество интересных работ. Они изучались еще Дирихле, Дедекиндом и Ляпуновым – эллипсоиды Дирихле, Дедекинда и Ляпунова — в связи с задачей о фигурах равновесия самогравитирующих жидких тел. Эта задача возникает при исследованиях быстро вращающихся звезд и планет и при построении теории образования Луны. Огромное количество работ посвящено близким[38] по существу вопросам, относящимся к динамике твердых тел — вращение, прецессия, гироскопы и тому подобные. Здесь найден ряд интегрируемых случаев.

Обобщение на газовый случай было открыто в работе (Овсянников, 1957). Разлет трехосного газового эллипсоида рассматривался в работе (Немчинов, 1965). Изящный групповой анализ был дан в работе (Dyson, 1968). Существование дополнительного интеграла, связанного со скрытой симметрией динамической системы, было открыто в работе (Анисимов и Лысиков, 1970).

Обычно решения такого рода применялись для описания вращения твердых тел или в газовом случае для описания *разлета* газового облака. В работе (Анисимов и Иногамов, 1974) было предложено первое обобщение этих решений на случай *сжатия* и схлопывания в блины. При этом данные решения описывают нелинейную стадию развития неустойчивости Рэлея–Тейлора.

Большой объем исследований по эллипсоидальным решениям и их приложениям в астрофизике и газодинамике представлен в книге (Богоявленский, 1980). В ней описаны интересные режимы с немонотонным поведением переменных во времени. В работе (Осин, 1980) уравнения проинтегрированы в случае вращающегося сфероида с показателем адиабаты, равным 5/3. Разлет с подогревом в связи с лазерными приложениями (нагрев внешним излучением плазменного облака) рассматривался в ряде работ. Влияние гравитации рассматривалось в работах (Лидов, 1954; Зельдович, 1964, 1970; Fujimoto, 1968; Сибгатулин, 1976; Detweiler & Lindblom, 1977; Chan et al., 1978; Богоявленский, 1980). При наличии гравитации требуется однородность по плотности эллипсоида. Тогда течение остается в классе решений с однородной деформацией.

Выполнено много работ, переносящих эти эллипсоидальные решения на случай проводящих сред, движущихся в магнитных полях (и/или с вмороженным магнитным полем), а также на случай наличия объемного электрического заряда (Куликовский, 1957, 1958) (это, видимо, первые исследования в этой области); (Коробейников и Рязанов, 1960; Куликовский и Любимов, 1962; Левин, 1967; Лысиков, 1981; Любимов и др., 1981; Великович, Либерман и Шмальц, 1985; Кутвитский и Соловьев, 1994).

Комбинация магнитного поля и гравитации рассматривалась в работах (Chandrasekhar, 1956; Prendergast, 1956; Яворская, 1957; Рязанов, 1959; Ладиков, 1961; Chan et al., 1980 и др.).

[38] В твердых телах скорость пропорциональна радиусу.

Объемный заряд рассматривался в работах (Невзглядов, 1961, 1970; Еникеев, 1975).

Симметричные случаи, являющиеся частными случаями эллипсоидов, рассматривались в работах (Седов, 1972; Kidder, 1974; Lengyel & Salvat, 1975 (с нагревом газа)) в связи с лазерными и астрофизическими приложениями.

Динамика тонких пленок (магнитное поле и геометрия). Закончим на этом отступление, связанное с эллипсоидами, и вернемся к теории пленок. Кроме перечисленных выше, по пленкам выполнен еще ряд работ. Задача о торможении магнитным полем разлетающейся проводящей пленки рассматривалась в работе (Гайсинский, 1979). Динамика пленок в трех измерениях изучалась в работах (Colombant, Manheimer & Ott, 1984; Manheimer, Colombant & Ott, 1984), а осесимметричный случай — в работе (Basko, 1994).

Работы (Colombant, Manheimer & Ott, 1984; Manheimer, Colombant & Ott, 1984) посвящены численному интегрированию уравнений движения пленки. Пусть текущее положение пленки задается функцией $z = \eta(x, y, t)$ (2D случай, плоская геометрия). Вычислялась поверхностная плотность $\sigma(x, y, t)$. При выбранных в этих работах условиях минимумы поверхностной плотности достигаются в вершинах пузырей. Пусть $\sigma_{\text{apex}}(t)$ — значение этой плотности в вершине. После образования самопересечений пузырем называлась та часть пленки, которая в данный момент находится вне этих самопересечений. Струей же называлась та часть, которая попала в область самопересечения. В этих работах, в частности, утверждается, что доля массы пузыря в 3D случае больше, чем в 2D плоском случае при одинаковых значениях $\sigma_{\text{apex}}(t)$.

Динамика тонких пленок (растягивание и прорыв пленки). В работе (Баско, 1994) сравнивались двумерные осесимметричный и плоский случаи. Изучался темп растягивания пленок в пузырях. Показано, что в осесимметричном случае некоторая небольшая часть вещества пленки в окрестности вершины пузыря набирает бесконечную скорость за конечное время. Дается следующее простое объяснение этому. Раздувание пузыря в осесимметричном случае до некоторой степени эквивалентно раздуванию сферы, а в плоском случае — раздуванию цилиндра. В этих случаях динамические уравнения, прямо следующие из второго закона Ньютона, имеют вид

$$M_{\text{a}}\ddot{R}_{\text{a}} = 4\pi R_{\text{a}}^2(\Delta p), \quad M_{\text{p}}\ddot{R}_{\text{p}} = 2\pi R_{\text{p}}(\Delta p),$$

где M_{a}, R_{a} и M_{p}, R_{p} — массы и радиусы сферической и цилиндрической оболочек соответственно, $\Delta p = p_{\text{in}} - p_{\text{out}}$ — разность давлений. Сфера аппроксимирует осесимметричный случай, отсюда индекс a (axis), а цилиндр — плоский, отсюда индекс p (plane).

Помножая, как обычно, эти уравнения на $\dot{R}$, интегрируя один раз и пренебрегая на больших временах начальными значениями $R(0)$ и $\dot{R}(0)$ по сравнению с сильно превышающими их значениями $R(t)$ и $\dot{R}(t)$,

получим, что кинетическая энергия пропорциональна объему. Отсюда

$$\dot{R}_\mathrm{a} \propto R_\mathrm{a}^{3/2}, \quad \dot{R}_\mathrm{p} \propto R_\mathrm{p}.$$

Поэтому

$$R_\mathrm{a} \propto \frac{1}{(t_\mathrm{c}-t)^2}, \quad \dot{R}_\mathrm{a} \propto \frac{1}{(t_\mathrm{c}-t)^3}, \quad t < t_\mathrm{c}$$

в осесимметричном случае и $R_\mathrm{p} \propto \exp(ct)$, где c — некоторая постоянная, в плоском случае.

Таким образом, если в плоском случае поверхностная плотность экспоненциально быстро убывает, то в осесимметричном случае она "взрывным" образом обращается в нуль.

Прорыв пленки и ускорение малой доли ее частиц до больших скоростей. Отметим, что при значительных раздуваниях и больших скоростях действует ряд "обрезающих" факторов, ограничивающих максимальную скорость, набираемую небольшой долей частиц пленки. Среди них степень растяжения пленки, до которой она может считаться еще не прорванной[39] и удерживающей разность давлений, и, кроме того, способ поддержания давления под расширяющейся пленкой. Например, если под пленкой находится несжимаемая жидкость, объем которой должен сохраняться во времени, то динамические уравнения следует интегрировать совместно с условием сохранения объема или в плоском случае площади под пленкой. При этом разность давлений не может быть задана, а должна определяться совместно из этого условия и динамических уравнений. Это приводит к уменьшению этой разности давлений[40] и соответственно к уменьшению скоростей разлета.

Отметим еще, что что трехмерная пленка в окрестности вершины пузыря не во всех случаях является асимптотически осесимметричной. Действительно, локальная кривизна поверхности задается двумя радиусами кривизны. Пусть R_1 и R_2 задают эти радиусы в вершине пузыря. В случае, если возмущения поверхности пленки образуют симметричные решетки (треугольные, квадратные или гексагональные), то $R_1 = R_2$. При этом вблизи вершины форма купола близка к осесимметричной. Но в остальных случаях (не симметричные решетки и случайные поверхности) $R_1 \neq R_2$. Здесь это обстоятельство упоминается в связи с вопросом об асимптотике уменьшения σ в трехмерном случае. Интересно было бы ответить на вопрос о том, на какую асимптотику (плоскую или осесимметричную) выйдет решение при $R_1 \neq R_2$.

Экспериментальное исследование РТН жидкого слоя (влияние конечной толщины и прорыв слоя). Представим эксперименты по РТН на скачке плотности. Схема установки разработана Н. А. Иногамовым. Сборка установки и эксперименты на ней выполнены А. В. Шуруповым. Их краткое описание приводится здесь, поскольку (i) схема установки оригинальна (ее сравнительные достоинства и перспективы обсуждаются

[39] Здесь определяющую роль в случае жидкости играет поверхностное натяжение, а в случае газов — диффузия.

[40] Давление на дно под пленкой при этом с течением времени уменьшается. В соответствии с условием, объем, заключенный между дном и пленкой, сохраняется.

ниже), (ii) получены интересные результаты, которые (iii) остались неопубликованными.

Устройство представляло собой узкий стеклянный ящик (узкий или тонкий "аквариум") размером $40 \times 40 \times 2\,\text{см}^3$, изолированный от внешнего воздуха в процессе развития возмущения, см. рис. 15.12. Размер 2 см относится к внутреннему узкому зазору между плоскими стенками $40 \times 40\,\text{см}^2$.

В одной из боковых стенок прорезана гофрированная щель, в которую вставлялся гофрированный затвор, помеченный номером *1* на рис. 15.12. Он гофрирован так же, как и щель. При $t < 0$ он разделяет или рабочие

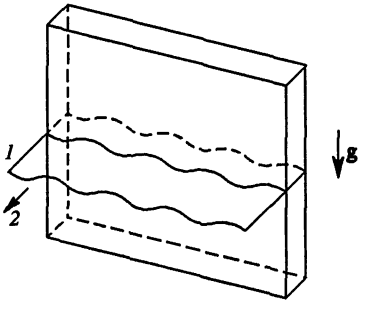


Рис. 15.12. Схема установки. Установка покоится, g — земное ускорение. Тяжелая жидкость находится над затвором. Затвор *1* гофрирован. Гофрировка задает начальное возмущение. Затвор извлекается в направлении стрелки *2*

жидкости, или жидкость и газ. Жидкость находится над затвором, а газ (или другая жидкость) — внизу. При $t < 0$ система заполняется жидкостью или жидкостями. Для исключения просачивания жидкости при заполнении устройства и исключения проникновения воздуха через затворную щель после извлечения затвора в процессе развития возмущения прорезь и разделяющий затвор замазывались густым вазелином. Щель прорезана в тонкой металлической пластине, закрывающей часть плоской стеклянной стенки. Эта пластина заменяется вместе с затвором при смене гофрировки. Параметры гофрировки задают начальное возмущение на КГ.

Принципиальных моментов два. Это (i) тонкость ящика и (ii) разделение с помощью затвора. Из-за (ii) для развития РТН используется земное ускорение свободного падения. Соответственно отпадает необходимость в ускоряемых вниз ампулах (которые не могут быть большими по размерам). Важно то, что из-за тонкости ящика затвор узкий. Его ширина l_b внутри ящика равна 2 см — зазору между стенками, а длина равна длине стенки (40 см). Возмущения, связанные с узким[41] затвором, малы.

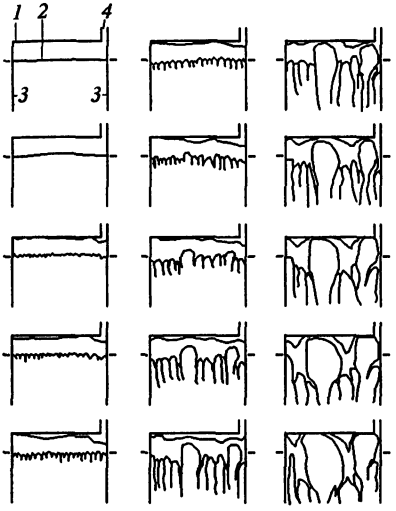
При $t = 0$ затвор "мгновенно" (по сравнению со временем, необходимым на свободный пролет 2 см) извлекается. Он вытягивается так, чтобы не оставить за собой следа в виде возмущений скорости в жидкости. После этого возникает ситуация с РТН на скачке плотности с заданными начальными возмущениями КГ. В случае одномодовых

[41] По сравнению с длиной волны возмущения и путем, проходимым пузырями и струями.

возмущений и гофрировки по косинусу задаются длина волны λ и начальная амплитуда a_0.

Жидкий слой над затвором ограничен сверху либо твердой, либо свободной границами. Случай твердой границы сверху показан на рис. 15.13. Здесь *1* — верхняя твердая граница, смоченная жидкостью, *2* — затвор, разделяющий жидкость и газ, *3* — боковые стенки, *4* — отверстие между боковой и верхней стенками. Случай жидкого слоя *1–2* со свободной границей *1* сверху и свободной границей *2* снизу показан на рис. 15.14. На рис. 15.13 и 15.14 начальное положение нижней КГ показано горизонтальными штрихами, прочерченными справа и слева от каждого кадра.

Экспериментальные кинограммы, иллюстрирующие эволюцию слоя, представлены на рис. 15.13 и 15.14. Кадры сняты через 1/36 с. Развитие



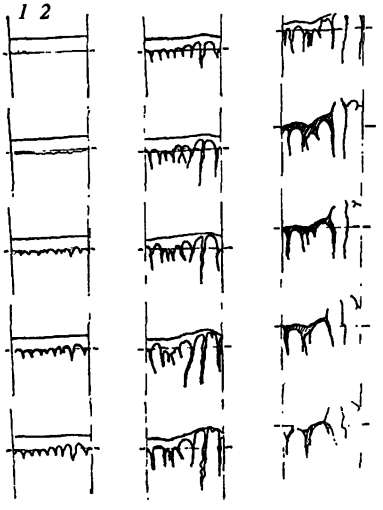


Рис. 15.13. Эксперимент на плоском стенде. *1* — жесткая граница, из-за отверстия *4* поверхность жидкости может отходить от нее. *2* — затвор. Его положение, совпадающее с начальным уровнем жидкости, показано на каждом кадре черточками сбоку

Рис. 15.14. Эксперимент со свободной верхней границей (*1* — свободная граница, *2* — затвор). Прорыв жидкого слоя

процесса идет сверху вниз и затем слева направо. Рабочие среды — вода/воздух. В обоих случаях начальными были одномодовые синусоидальные возмущения с амплитудой $a_0 = 1{,}5$ мм. Длина волны была разной: на рис. 15.13 $\lambda = 2$ см, а на рис. 15.14 $\lambda = 5$ см.

Описание наблюдаемых динамических эффектов: субгармоники, укрупнение пузырей, инверсный каскад. На первых двух кадрах возмущения видны плохо. По стенкам (они находятся в плоскости кинограмм, направление вдоль узкого зазора между ними перпендикулярно этой плоскости) начинают спускаться жидкие слои. Ширина их от затвора до

нижнего края этого жидкого слоя на первых кадрах порядка нескольких сантиметров. Начиная с 3–4-го кадров становится видна периодическая структура, "навязанная" течению начальной гофрировкой КГ. Классический инкремент $\gamma = \sqrt{gk}$ равен 56 1/с ($\lambda = 2$ см, рис. 15.13) и 35 1/с ($\lambda = 5$ см, рис. 15.14).

На 7–8-м кадре (рис. 15.13) и на на 5–6-м кадре (рис. 15.14) становится заметным влияние субгармонической неустойчивости (она будет обсуждаться ниже в главе, посвященной субгармоникам). Из-за роста амплитуд субгармоник, скрытых на первых кадрах, происходит укрупнение пузырей. Данные эксперименты довольно "грязные". Это относится к спектру начальных возмущений. По-видимому, довольно значительные субгармонические возмущения имелись уже в начальных данных. На это указывает неоднородность укрупнения пузырей. Кроме того, имеется влияние поверхностного натяжения, поскольку число Вебера не слишком велико по сравнению с единицей (капиллярный масштаб для границы вода/воздух равен 16 мм).

Рост среднего масштаба $\langle\lambda\rangle$ в основном идет через моду конкуренции пузырей и через моду их притяжения (см. главу субгармоники). Вклад моды притяжения, по-видимому, приводит к сближению первого и второго пузырей справа на рис. 15.14. Из кинограм видно, как происходят первые звенья инверсного каскада по волновым числам $\langle k\rangle = 2\pi/\langle\lambda\rangle$.

Нижняя КГ представляет собой хороший пример пузырьковой оболочки (bubble envelope). Она резкая, слабо "размазана" вторичными, мелкомасштабными по отношению к $\langle\lambda\rangle$ неустойчивостями (мелкомасштабными РТН и НКГ). Это вызвано малостью числа Вебера и малостью параметра μ. Влияние пузырей быстро затухает вглубь тяжелой жидкости. Длина затухания $\simeq 1/k$ в 2π раз меньше λ. Поэтому верхняя свободная КГ (см. рис. 15.14) долго остается слабо возмущенной.

Все же с течением времени из-за уменьшения толщины жидкого слоя (подъем пузырей) и роста $\langle\lambda\rangle$ приближающиеся пузыри начинают "пропечатываться" на верхней КГ. Интересно, что сблизившиеся 1-й и 2-й пузыри справа на рис. 15.14 вместе "приподнимают" эту КГ — не видно понижения границы, связанного со слабой струей между ними.

Понижение верхней КГ над струями хорошо видно на рис. 15.13. С течением времени оно принимает вид угла, со скругленной вершиной, указывающей на струю под ней. Образования кумулятивных струй, направленных вверх, в этих углах не заметно.

Взаимодействие пузырей с верхней КГ. Прорыв жидкого слоя. Судьба фрагментов. Верхняя КГ оказывает ограничивающее или "стесняющее" действие на свободную РТ турбулентность. Это сказывается в замедлении роста $\langle\lambda\rangle$. Более того, начинают расти масштабы, малые по отношению к $\langle\lambda\rangle$. На пленке толщиной Δh, окружающей большие пузыри размером λ_{L}, в несколько раз превосходящим Δh, появляются мелкие пузырьки размером $\lambda_{\mathrm{s}} \simeq \Delta h$, см. рис. 15.14, кадры 9 и 10.

Над большими пузырями жидкий слой превращается в пленку и становится совсем тонким, см. рис. 15.14, кадры 9-й и далее, первые два пузыря справа. Если разница в давлениях между нижней и верхней гра-

ницами сохранится такой, какой она была в начальный момент, то это приведет к быстро растущему ускорению пленки. Это механизм разгона малой массы за счет резкого, кратковременного и сильного ускорения. При этом происходит быстрое уменьшение толщины пленки и ее сильное раздувание, а затем и прорыв.

Это раздувание, заброс вещества пленки вверх и прорыв хорошо видны на последних кадрах рис. 15.14. В результате прорыва резко изменяется разница давлений между нижней и верхней границами остатков (фрагментов) жидкого слоя. Лишенные поддержки давлением фрагменты начинают оседать вниз (происходит это неравномерно, потому что скорости в разных точках жидкости в момент прорыва были разными), выдавливая воздух из-под себя через дыры вверх (в данной установке ящик изолирован от внешней атмосферы и сверху над жидким слоем, и снизу — под ним).

О преимуществах конструкции. Схема с затвором намного проще установок с ускорением вниз, для которых используются

(i) упругие амортизаторы (Ratafia, 1973);

(ii) вертикальные трубы ("пушки") с большой разницей давлений над и под камерой ("снарядом"), внутрь которого помещается ампула с парой рабочих жидкостей (установка Кучеренко) (Анучина, Кучеренко и др., 1978; Ардашева и др., 1988);

(iii) вертикальные ударные трубы (схема Зайцева и Чеботаревой) (Розанов и др., 1990; Zaytsev, Chebotareva, Titov, 1993)

или (iv) реактивные ускорители (Read, 1984) и различные схемы с электровзрывным ускорением (электромагнитные пушки).

Размеры конструкций (i)–(iv) ограничены (S_{ff} — несколько метров). Другим ограничением является ширина канала или трубы. Соответственно $h_+ \approx \alpha_+ A g t^2 \approx 2\alpha_+ A S_{\text{ff}} \approx 20\,\text{см}$ при $\alpha_+ \approx 5\%$, $A = 1$ и $S_{\text{ff}} = 2\,\text{м}$.

Важным параметром является отношение $h_+/l_\sigma \simeq \sqrt{\text{We}/2}$, где $\text{We} = 2\rho g (h_+)^2/\sigma$ — число Вебера, l_σ — капиллярный масштаб. Оно растет $\propto \sqrt{g}$ с ростом g. Для его увеличения в системах с ускорением вниз необходимы большие ускорения или рабочие пары с малым поверхностным натяжением.

Недостатки перечисленных конструкций следующие:

- малость h_+, h_+ составляет небольшую долю размера системы;
- малость параметра h_+/l_σ;
- сложность установок;
- проблемы при формировании начальных возмущений (требуются генераторы стоячих волн, связанные с ампулой);
- скоротечность процессов, особенно в установках (ii)–(iv), необходимость специальной съемочной техники;
- переменность ускорения.

Преимущество описанного выше устройства из плоского ящика и гофрированного затвора заключаются в

- большие h_+, они порядка размера всей системы, для системы сопоставимых размеров h_+ в $1/2\alpha_+ \approx 10$ раз больше;
- соответственно большие значения параметра h_+/l_σ;
- простота установки;
- простота формирования произвольных начальных данных;
- медленность процессов, для съемок пригодны бытовые кино- и видеокамеры; кроме того, нет быстрого движения съемочной аппаратуры вместе с ампулой, нет быстрого движения ампулы мимо аппаратуры;
- постоянство ускорения.

Конструкция с плоским ящиком предлагалась (Popil & Curzon, 1980), но в системе с ускорением вниз и без блока формирования начальных возмущений. Конструкции с извлекаемым затвором использовались (Duff et al., 1962; Розанов и др., 1990; Linden & Redonodo, 1991; Zaytsev, Chebotareva, Titov, 1993), но не в плоском ящике, у которого поперечное к вектору $\mathbf{g}$ сечение — прямоугольник с большим отношением сторон, а в ящике с квадратным поперечным сечением. В этом случае при извлечении затвор проходит большой путь в ящике и оставляет заметный след в виде возмущений скорости на КГ. Кроме того, не использовалась гофрировка. Между тем она позволяет создавать произвольные одномодовые, многомодовые и случайные возмущения.

Заключение по п. 15.6. Подведем итоги раздела п. 15.6. При его составлении старались придерживаться объявленной в его заголовке темы. Следование за изобарической темой в нескольких местах привело к выходу за рамки *линейных* задач. Дело в том, что в интересах последовательности и общности разработки линейных изобарических возмущений пришлось рассмотреть и тесно связанные с ними изобарические нелинейные трохоидальные волны[42]. В то же время, эти волны тесно связаны с трохоидальными решениями в теории пленок. Поэтому здесь было уместно дать краткий обзор положения, сложившегося в этой теории. Наконец, в цилиндрическом случае, когда возмущения раскладываются по азимутальным гармоникам, задаваемым номером m, особое положение занимает случай эллипса с $m = 2$ и связанный с ним случай эллипсоидов. Здесь, чтобы не выделять эти вопросы в отдельный раздел, по ходу дана соответствующая библиографическая справка. Кратко описаны яркие эффекты — прорыв пленок и образование особенностей на поверхности пленки (каспов, при $t = t_{\text{sing}}$) и самопересечений поверхности (при $t > t_{\text{sing}}$).

15.7. Изоспектральные деформации распределений плотности

Разбираемые проблемы имеют как прикладное, так и общетеоретическое содержание. В прикладном плане требуются осмысление и прогнозирование конкретных природных явлений. Теории, проникающие все глубже

[42] Любопытно, что в лагранжевых переменных уравнения нелинейных трохоидальных волн и пленок оказываются линейными.

в скрытую суть этих явлений, сами образуют сложную, развивающуюся во времени иерархию. Рассмотрим здесь только линейные случаи и соответствующие им спектральные задачи. В современном состоянии наиболее тонкими и продвинутыми в этой иерархии являются два раздела. Одним из них является классификация распределений плотности и связанных с ними спектров[43]. Другим — раздел, связанный с обратными задачами, скрытой симметрией, изоспектральными деформациями и теорией солитонов[44]. Как видно из заголовка данного подраздела, здесь будет рассмотрен именно этот последний раздел.

Рассмотрим прямое и обратное соответствия между распределениями плотности $\rho(y)$ и спектрами $\{E\}$ уравнения Рэлея (15.1). В приложениях анализ этих соответствий необходим в задачах дешифровки и оптимизации. Первая из этих задач появляется при изучении колебаний стратифицированных звезд, планет, атмосферы и океана. Она заключается в восстановлении распределения плотности или энтропии по измеренным спектральным данным.

В рассматриваемых здесь вопросах по неустойчивости довольно естественно возникает другая задача — задача оптимизации. Например, пусть имеется слой толщиной L с распределением плотности $\rho(y)$. Пусть вне слоя плотность равна ρ_{d} в нижней полуплоскости и ρ_{u} — в верхней. Рассмотрим класс всех возможных распределений $\rho(y)$, ограниченных условиями: толщина L и поверхностная плотность

$$\sigma = \int_{y_d}^{y_u} \rho(y)dy, \quad y_{\mathrm{u}} - y_{\mathrm{d}} = L$$

у всех распределений одинаковы. Спрашивается, как *оптимально* распределить плотность $\rho(y)$, чтобы мажорирующий инкремент был бы минимальным? Такая задача довольно естественно возникает в задачах инерционного синтеза при проектировании долго живущих оболочек. Понятно, что оптимальное распределение должно быть плавным. В частности, оно не должно содержать больших скачков плотности.

Таким образом, приходим к некоторому функционалу

$$\frac{\gamma_0^2}{|g|k} = F\left[kL, \frac{k\sigma}{\rho_{\mathrm{d}}}, \mu, \frac{\rho(ky)}{\rho_{\mathrm{d}}}\right] \tag{15.10}$$

и задаче о поиске его экстремума (здесь, как обычно, γ_0 относится к основному состоянию, не имеющему нулей).

Задача о влиянии сглаживания профиля плотности на инкремент (Mikaelian, 1982; Иногамов, 1985c, 1990b, 1996, 1997; Kull, 1991) и перемешивание (Ардашева и др., 1988; Анучина и др., 1988) рассматривалась. Обратная задача и поиск оптимума (15.10) привели к обнаружению

[43] Согласно этой классификации распределения и спектры делятся на три основных класса с соответственно дискретными, полосатыми и случайными спектрами, см. п. 15.1.

[44] Для характеристики темпа развития науки в этой области отметим, что в 50-е годы обоих этих разделов еще не существовало, а наиболее продвинутыми считались разделы, посвященные теории Штурма–Лиувилля и использованию специальных функций.

преобразования инверсии распределения плотности

$$\rho(y) \to 1/\rho(-y) \tag{15.11}$$

и к гипотезе (Mikaelian, 1982) об инвариантности спектра собственных чисел $\{E\}$ при инверсии (15.11). Отметим, что эта инверсия является нетривиальной.

Эта гипотеза была строго доказана Иногамовым (1990b)[45]. Другое доказательство было представлено Kull (1991)[46]. Очень простой вариант строгого доказательства найден в работах (Иногамов, 1996, 1997). В них доказано, что при инверсии (15.11) собственные функции вертикальной компоненты скорости v переходят в собственные функции давления p_L в лагранжевых частицах.

Таким образом, в уравнении (15.1) имеется скрытая симметрия — его спектр инвариантен при инверсии (15.11), которая представляет собой пример изоспектральной деформации распределения плотности в уравнении Рэлея.

§ 16. Динамика сжимаемых сред

Гравитация и плавучесть в сжимаемой среде. Рассмотрим гравитационные моды при наличии сжимаемости. Обсудим сначала вкратце содержательные термины и связанные с ними полезные, емкие понятия, вводящие в суть дела. Термины гравитация, гравитационные означают, что речь идет о силе Архимеда, плавучести и соответственно о тяжелых жидкостях или газах. Понятия тяжесть и плавучесть не совпадают. Первое из них является более широким по отношению ко второму. Для проявления силы Архимеда необходимы следующие условия. Во-первых, разумеется, должно иметься поле тяжести. Во-вторых, необходимо наличие неоднородности. И в-третьих, необходимо нарушение послойной симметрии гидростатического равновесия. Поясним это. Последнее условие означает, что должно иметься возмущение послойного распределения. Такие возмущения имеют вид некоторых глобул, пятен или выпячиваний. То есть на одной горизонтали должны находиться элементы с разной плавучестью. Иначе плавучесть не может проявиться.

Что касается неоднородности, то отметим следующее. В несжимаемом случае жидкость может быть тяжелой только при наличии неоднородности плотности[47]. Иначе гравитационный потенциал не влияет на движение и может быть вычтен из динамических уравнений. В сжимаемом случае при адиабатических движениях, которые только тут и рассматриваются, роль плотности играет энтропия. В сжимаемом случае

[45] Был использован алгебраический метод. Доказана эквивалентность прямой и инверсированной характеристических трехдиагональных матриц, возникающих в матричном представлении уравнения Рэлея (15.1).

[46] Уравнение второго порядка (15.1) заменой сведено к системе из двух уравнений первого порядка.

[47] В частности, в качестве такой неоднородности может выступать граница с областью нулевой плотности.

газ является тяжелым (т. е. поле тяжести проявляет себя) и в отсутствие нарушений послойной симметрии. Это обстоятельство иллюстрирует рис. 16.1[48]. А вот плавучесть и обусловленные ею всплывание и

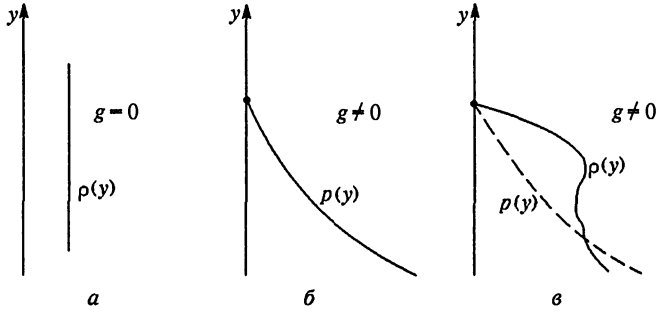


Рис. 16.1. Иллюстрация проявления тяжести в газе: сдавливающее действие веса верхних слоев и сжатие нижних слоев в результате этого. Случай $g = 0$ (*а*). Тогда $p \equiv \text{const}$. Случай $g = 1$ (*б* и *в*). Давление растет с глубиной. Если энтропия ограничена, то давление обращается в нуль при конечном значении y. При этом вместе с давлением обращаются в нуль и плотность и температура. Вид распределений $\rho(y)$ (а значит и $p(y)$) и $T(y)$ определяется распределением $s(y)$. Пример $\rho(y)$ приведен на рис. *в*

оседание и в случае газа, также как и в случае несжимаемой жидкости, проявляются только при нарушениях послойной симметрии. В случае газа этими нарушениями являются пятна или выпячивания элементов с разными значениями энтропии, поскольку при равном давлении эти элементы имеют разную плотность.

В гидростатическом равновесии горизонтально-послойное распределение $s(y)$ может быть любым. Равновесие является устойчивым или неустойчивым в зависимости от знака ds/dy. Этот критерий принадлежит (Schwarzschild, 1905). Если энтропия убывает с высотой, то равновесие является неустойчивым. В обратном случае равновесие — устойчиво. При этом в этих двух случаях линейными являются гравитационные рэлей-тейлоровские поверхностные и внутренние моды и гравитационные поверхностные и внутренние волны соответственно. Устойчивость или неустойчивость равновесия определяется проигрышем или выигрышем гравитационной энергии при обмене элементов газа из слоев с разными s, см. (Ландау и Лифшиц, 1986, стр. 22, § 4).

Адиабатическая атмосфера. Если же $ds/dy = 0$ при всех значениях y, то перед нами случай нейтрального равновесия и соответственно нейтральной плавучести. Величина градиента $|ds/dy|$ или градиента $|d\ln s/dy|$ является мерой устойчивости или неустойчивости. Распределения термодинамических переменных p, ρ и T по y при $s \equiv \text{const}$

[48] На этом рисунке показано сравнение гидростатических распределений термодинамических величин по высоте в случаях $g = 1$ и $g = 0$. При $g = 0$ в гидростатическом равновесии $p \equiv \text{const}$. Из этого условия, уравнения состояния и условия адиабатичности распределения термодинамических переменных находятся по распределению энтропии $s(y)$ алгебраически. При $g = 1$ силовое равновесие требует $dp/dy = -\rho|g|$, и эти распределения находятся по $s(y)$ путем однократного интегрирования.

называют адиабатическими или изэнтропическими. В случае уравнения состояния идеального газа они оказываются степенными, причем T и скорость звука c^2 линейно зависят от координаты y. Они имеют вид:

$$\rho = \left[\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{|g|}{s}(-y)\right]^{1/(\varkappa-1)}, \quad p = s\rho^{\varkappa},$$

$$T = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{m|g|}{k_{\mathrm{B}}}(-y), \quad c^2 = (\varkappa-1)|g|(-y)$$

здесь $\varkappa$ — показатель адиабаты, m — средняя масса молекул, атомов или ионов, k_{B} — постоянная Больцмана, c — адиабатическая скорость звука, $c^2 = \varkappa p/\rho = \varkappa k_{\mathrm{B}}T/m$. Соответствующие распределения располагаются при $y < 0$. Изэнтропический слой может находиться между плоскостями y_{d} и y_{u}, где $y_{\mathrm{u}} < 0, y_{\mathrm{d}} < y_{\mathrm{u}}$. Естественной абсолютной границей такого слоя является граница с вакуумом при $y_{\mathrm{u}} = 0$.

Определим шкалу высот или так называемую высоту однородной атмосферы. Фиксируем некоторую глубину y_{obs}. Выразим значение $d\ln p/dy$ на этой глубине через скорость звука c_{obs}. С помощью уравнения гидростатики находим

$$(d\ln p/dy)_{\mathrm{obs}} = -\frac{1}{H_{\mathrm{obs}}}, \quad H_{\mathrm{obs}} = (H_{\mathrm{obs}})_T = \frac{c^2_{\mathrm{obs}}}{\varkappa|g|} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m|g|}.$$

Высотой однородной *изотермической* атмосферы называют масштаб H_{obs}, на котором давление упало бы в e раз, если бы правая часть выражения для $d\ln p/dy$ была постоянной, т.е., если бы скорость звука, а значит, и температура были бы постоянными. Разумеется, в случае, например, изэнтропического распределения разница высот, на которой давление упадет в e раз, будет другой.
А именно, имеем

$$-y_{\mathrm{obs}} = c^2_{\mathrm{obs}}/[(\varkappa-1)|g|], \quad p(y) = A(-y)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}},$$

где A — постоянная. Найдем $p(y_{\mathrm{obs}})$ и $p(y_1) = p(y_{\mathrm{obs}})/e$. Получим $y_1 = \exp\left(-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right) y_{\mathrm{obs}}$. Отсюда разница высот $(y_1 - y_{\mathrm{obs}})$, на которой давление упадет в e раз, будет равна

$$(H_{\mathrm{obs}})_{\mathrm{s}} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(1 - \exp\left(-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right)\right)(H_{\mathrm{obs}})_T < (H_{\mathrm{obs}})_T,$$

В случае газа постоянной плотности $\rho \equiv \rho_{\mathrm{fix}}$ давление равно $p = \rho_{\mathrm{fix}} g(-y)$. На краю этого газа при $y = 0$ давление p и энтропия $p/\rho^{\varkappa}$ обращаются в нуль. Высота, на которой давление упадет в e раз, равна $(H_{\mathrm{obs}})_V = (1 - 1/e)(H_{\mathrm{obs}})_T < (H_{\mathrm{obs}})_T$.

Квазиадиабатическая атмосфера — приближение Буссинеска. При небольших отклонениях[49] гидростатических распределений от изэнтропического часто предпочитают оперировать не с градиентом s, а с градиентом T. При этом мерой величины сил Архимеда и плавучести является

[49] В этих условиях характерные скорости малы по сравнению со скоростью звука, а при конвекции характерные потоки малы по сравнению с предельными.

отклонение ∇T от изэнтропического значения. Последнее, как и выше, будем выделять индексом S. В относительных величинах это отклонение равно $(\ln T)' - (\ln T)'_s$, где штрих означает дифференцирование по y. Производная T'_s легко находится из условия $s' = 0$. Действительно, подставим сюда[50] $s = p_s/\rho_s^\varkappa$. Заменим p'_s с помощью уравнения гидростатики. Заменим также $\rho_s^\varkappa$ через T_s по формуле

$$\rho_s^\varkappa = \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{ms}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}.$$

Отсюда

$$\frac{ds}{dy} = \text{const}\ p_s T_s^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \left[(\ln p)'_s - \frac{\varkappa}{\varkappa-1}(\ln T)'_s\right] = 0,$$

и для изэнтропического градиента получим

$$(\ln T)'_s = -\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{m|g|}{k_\mathrm{B}T} = -\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{1}{H_T}.$$

В приближении, аналогичном приближению Буссинеска в несжимаемой жидкости, функция $s(y)$ является почти постоянной. В случае дифференцируемых распределений $|(\ln s)'| \ll 1$, $|(\ln T)' - (\ln T)'_s| \ll 1$, а в случае распределений со скачками относительные величины их должны быть малы. Характерные частоты и инкременты при этом малы по сравнению с акустическими, а характерные скорости малы по сравнению со скоростью звука во всем диапазоне применимости этого приближения. В случае конвекции тепловой поток далек от предельного. Это приближение часто бывает пригодным в астро- и геофизических приложениях. Вне этого приближения $|(\ln s)'| \simeq 1$ в дифференцируемых случаях и $2|s_\mathrm{d} - s_\mathrm{u}|/(s_\mathrm{d} + s_\mathrm{u}) \simeq 1$ на скачках.

Естественным масштабом является высота однородной атмосферы H_T. Ниже будем опускать индекс T и писать просто H. По отношению к этому масштабу имеются короткомасштабный $kH \gg 1$, среднемасштабный $kH \simeq 1$ и крупномасштабный (экзотический) $kH \ll 1$ диапазоны. Нетрудно видеть, что короткомасштабные возмущения всегда являются дозвуковыми. Забегая вперед, следует отметить интересное обстоятельство. Оказывается, что хотя короткомасштабные возмущения являются дозвуковыми, тем не менее это не означает автоматически, что они могут рассматриваться в приближении несжимаемой жидкости! Действительно, дифференцируемом случае инкремент или частота Брента–Вяйсяля определяются масштабом H_s, а не масштабом H_R, как в несжимаемом случае. Здесь и далее $1/H_\mathrm{s} = d\ln s/dy$, $1/H_R = d\ln\rho/dy$. Величины γ^2, вычисленные по $d\ln s/dy$ и $d\ln\rho/dy$, могут иметь качественные отличия, например, отличаться знаком.

[50] Здесь энтропией для краткости будем называть эту величину. На самом деле энтропия идеального газа, определенная с точностью до константы, равна $c_V \ln(p/\rho^\varkappa)$, где $c_V = k_\mathrm{B}/(\varkappa - 1)$ — теплоемкость при постоянном объеме.

В то же время инкременты γ мод, связанных со скачками энтропии, при $kH \to \infty$ выходят на выражения, следующие из несжимаемой жидкости. Асимптотика этого перехода имеет вид (Анисимов и Зельдович, 1977) $\gamma^2 = \gamma^2_{\text{incomp}} + \delta$, где $\gamma^2_{\text{incomp}} = (1-\mu)/(1+\mu)gk$ относится к несжимаемой жидкости, а поправка $\delta \to \text{const}$ при больших kH.

Спектральная задача при произвольной сжимаемости. Прямая задача в несжимаемом случае формулируется следующим образом. Пусть дано распределение плотности $\rho(y)$. Требуется отыскать соответствующий этому распределению спектр собственных мод $\{E, v_E(y)\}$. В сжимаемом случае место распределения плотности (так сказать "потенциала") занимает распределение энтропии $s(y)$. Прямая задача при этом состоит в отыскании спектра $\{E, v_E(y)\}$ по "потенциалу" $s(y)$. Составим соответствующее уравнение.

Исходная система имеет вид

$$\rho_t + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \rho[\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}] = -\nabla p + \mathbf{g}\rho, \quad s_t + (\mathbf{v}\nabla)s = 0, \quad p = s\rho^{\varkappa}.$$

Линеаризуя ее около гидростатического равновесия обычным образом, получим

$$\gamma\tilde{\rho} + iku + v' + v/H_R = 0, \tag{16.1}$$

$$\gamma u + ik\tilde{p} = 0, \tag{16.2}$$

$$\gamma v + \tilde{p}' + \tilde{p}/H_R + g\tilde{\rho} = 0, \tag{16.3}$$

$$\gamma\tilde{s} + v/H_s = 0, \tag{16.4}$$

$$\tilde{p} = c^2\tilde{s}/\varkappa + c^2\tilde{\rho}, \tag{16.5}$$

где малые возмущения представлены в виде

$$\rho \propto \exp(\gamma t + ikx), \quad u \propto \exp(\gamma t + ikx), \quad v \propto \exp(\gamma t + ikx),$$

$$p \propto \exp(\gamma t + ikx) \quad \text{и} \quad s \propto \exp(\gamma t + ikx).$$

Кроме того, сделана замена $\tilde{\rho} = \rho/R$, $\tilde{p} = p/R$ и $\tilde{s} = s/S$, где $R(y)$ и $S(y)$ дают невозмущенные распределения плотности и энтропии соответственно. Введены масштабы $1/H_R = d\ln R/dy$ и $1/H_s = d\ln S/dy$. Адиабатическая скорость звука равна $c^2 = (\partial p/\partial\rho)_s$. Обозначено $g = |\mathbf{g}|$. Штрих означает дифференцирование по y. Чтобы отличить инкремент γ от показателя адиабаты, последний обозначен буквой $\varkappa$.

Исключим $\tilde{s}$ из последних уравнений (16.4) и (16.5). Затем исключим $\tilde{\rho}$. Затем исключим $\tilde{p}$. В результате вместо уравнений (16.1)–(16.5) возникает система, неизвестными в которой являются возмущения скорости. Она имеет вид

$$u = \frac{ik}{\gamma^2 + c^2k^2}(c^2v' - gv),$$

$$u' - \frac{1}{\varkappa H_s}u - \frac{ikg}{\varkappa\gamma^2 H_s}v - ikv = 0.$$

Для того чтобы, как и в несжимаемом случае, получить уравнение на вертикальную компоненту скорости и чтобы избежать появления вторых производных R'' и S'', исключим u из этой пары уравнений. После довольно громоздких вычислений получим уравнение второго порядка на v. Оно имеет вид

$$v'' + Av' + Bv = 0; \tag{16.6}$$

$$A = -\frac{1}{H} - \frac{\varkappa k H'}{D} = \frac{\Gamma^2}{D}\left(\frac{1}{H_s} + \frac{\varkappa - 1}{H_R}\right) + \frac{1}{H_R}, \quad D = \Gamma^2 + \varkappa k H,$$

$$B = \frac{k}{D}\left(\frac{1}{H_s} + \frac{\varkappa - 1}{H_R}\right) - \frac{k}{\varkappa \Gamma^2 H_s} + k\Gamma^2\left(\frac{1}{\varkappa H_s} + \frac{1}{H_R}\right) - k^2,$$

где $\Gamma^2 = \gamma^2/(gk)$ — обезразмеренный инкремент. При $g = 0$ уравнение (16.6) принимает вид $u'' - (\gamma^2/c^2 + k^2)u = 0$ в однородном случае ($S \equiv \text{const}$) и вид

$$u'' + u'/H_R - (\gamma^2/c^2 + k^2 + H_R'/H_R^2)u = 0$$

в неоднородном случае. Эти уравнения описывают акустические волны в соответственно однородных и неоднородных средах.

При выводе (16.6) были использованы следующие связи между масштабами:

$$H = \frac{c^2}{\varkappa g}, \quad -\frac{1}{H} = \frac{1}{H_s} + \frac{\varkappa}{H_R}, \quad \frac{H'}{H} = \frac{(c^2)'}{c^2} = \frac{1}{H_s} + \frac{\varkappa - 1}{H_R}.$$

Таким образом, функции A и B, входящие (16.6), выражаются через H_R и H_s.

Функция H_R выражается через распределение энтропии $S(y)$. Действительно, из уравнений гидростатики и адиабатичности имеем

$$P(y) = \left\{ P(y_d) - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} g \int\limits_{y_d}^{y} \frac{dy_1}{[S(y_1)]^{1/\varkappa}} \right\}^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}},$$

где $P(y)$ — невозмущенное распределение давления. Отсюда $R(y) = (P(y)/S(y))^{1/\varkappa}$. Таким образом, как уже было сказано выше, прямая задача ставится так: задай $S(y)$; вычисли H_s и H_R; найди спектр уравнения (16.6), дополненного граничными условиями.

Квазиклассика в сжимаемом случае. Пусть распределение $S(y)$ дифференцируемое. Найдем короткомасштабную асимптотику уравнения (16.6). Речь идет об аналоге инкремента или частоты Брента–Вяйсяля в сжимаемом случае. Функции H_s и H_R изменяются медленно. Быстрое изменение неизвестной функции v может быть приближенно представлено в виде $v \approx v_1 \exp(iqy)$, где $v_1(y)$ — медленно меняющаяся функция. Величины kH и qH велики. Оценим остальные величины.

Имеем

$$\Gamma^2 \simeq \frac{1}{kH}, \quad D \approx \varkappa k H, \quad A \approx \frac{1}{H_R}, \quad \frac{k}{HD} \simeq \frac{1}{H^2}, \quad k\Gamma^2 \frac{1}{H} \simeq \frac{1}{H^2}.$$

Отсюда следует, что в этой асимптотике уравнение (16.6) принимает вид

$$v'' + \left(-\frac{k}{\varkappa \Gamma^2 H_s} - k^2 \right) v = 0$$

или

$$q^2 = -k^2 + \frac{k}{\varkappa \Gamma^2 (-H_s)}. \tag{16.7}$$

Величина q^2 должна быть положительной. Тогда в правой части уравнения (16.7) второе слагаемое должно превосходить первое. Из условия $0 < q^2 < \infty$ находим, что

$$0 < \gamma^2 < \frac{g}{\varkappa(-H_s)} = \frac{g}{H_R} + \frac{g^2}{c^2}. \tag{16.8}$$

Верхний предел в (16.8) дает искомое обобщение инкремента Брента–Вяйсяля γ_{BV} на случай газа. Как и в обсуждавшемся выше случае несжимаемой жидкости (см. § 15, п. 15.3), короткомасштабная асимптотика не зависит от того, вычисляется ли она в рамках точного уравнения линеаризованной задачи или же в рамках уравнения, полученного в результате линеаризации системы уравнений газовой динамики в приближении Буссинеска.

При $c^2 \to \infty$ имеем из (16.8) $\gamma_{BV}^2 \to g/H_R$, как и должно быть в несжимаемой жидкости.

Сравним инкременты в несжимаемом и сжимаемом случаях. Пусть распределения плотности $R(y)$ одинаковы. Пусть $R' > 0$. Тогда $H_R > 0$. Если $R' > 0$, то обязательно $S' < 0$. Тогда неустойчивость в сжимаемом случае "жестче", чем в несжимаемом, поскольку ее инкремент $(\gamma_{BV}^2)_{comp}$ больше, чем инкремент в несжимаемом случае $(\gamma_{BV}^2)_{incomp}$. Действительно,

$$(\gamma_{BV}^2)_{comp} - (\gamma_{BV}^2)_{incomp} = \frac{g^2}{c^2} > 0.$$

Причем добавка не является малой.

Отсюда следует удивительное на первый взгляд заключение о том, что хотя скорости движений и малы по сравнению со скоростью звука, тем не менее моды Брента–Вяйсяля в газе не могут быть описаны в приближении несжимаемой жидкости!

Инкремент Брента–Вяйсяля γ_{BV} содержит большой масштаб — высоту атмосферы и поэтому его величина невелика. Обратный инкремент $\gamma_{BV}^{-1} \simeq \simeq H/c \simeq c/g \simeq \sqrt{H/g}$ — порядка времени пролета атмосферы в режиме свободного падения[51].

[51] Или порядка прохождения звуком атмосферы, поскольку скорость звука порядка скорости свободного падения.

Несжимаемая асимптотика. Скажем еще несколько слов о переходе к пределу несжимаемой жидкости. Речь идет о том, как трансформировать уравнение (16.6) к классическому уравнению Рэлея для несжимаемой жидкости (15.1). Это оказывается возможным, если взять $kH \gg 1$ и $\Gamma^2 \simeq 1$, а не $\Gamma^2 \simeq 1/(kH) \ll 1$, как было в рассмотренном выше случае Брента–Вяйсяля в сжимаемой среде. Случай $\Gamma^2 \simeq 1$ относится к резким градиентам энтропии и плотности, когда их изменение происходит на малом масштабе $h \ll H_s$, $h \ll H_R$ и рассматриваются возмущения с $\lambda \simeq h$. При этом $\Gamma^2 \simeq \Delta s/s$, где $\Delta s/s$ дает величину относительного изменения энтропии на границах слоя толщиной h с резким градиентом. Тогда асимптотические[52] выражения для коэффициентов A и B, входящих в уравнение (16.6), принимают вид

$$A \to \frac{1}{H_R} + O\left(\frac{1}{kH^2}\right) \to \frac{1}{H_R},$$

$$B \to -k^2 - \frac{k}{\varkappa\Gamma^2 H_s} + k\Gamma^2\left(\frac{1}{\varkappa H_s} + \frac{1}{H_R}\right) + O(1).$$

При наличии резких градиентов ($\lambda \simeq h \ll H$) давление примерно постоянно $p \approx \text{const}$ на масштабах $\simeq h$. Это обусловлено тем, что изменение термодинамических функций в гидростатическом равновесии вызывается не переменным сжатием под действием изменяющегося с высотой веса лежащих выше слоев газа, а резким изменением теплового состояния или состава газа. Следовательно, имеем

$$p = s\rho^{\varkappa} \approx \text{const}\,.$$

Отсюда, дифференцируя это соотношение, получаем

$$s'_y\rho^{\varkappa} + \varkappa s\rho^{\varkappa-1}\rho'_y \approx 0.$$

Если поделить последнее приближенное равенство на $p = s\rho^{\varkappa}$, то, очевидно, получим

$$\frac{1}{H_s} + \frac{\varkappa}{H_R} \approx 0.$$

Преобразуем приведенные выше асимптотические выражения для B с помощью этого асимптотически точного равенства. Выражение в скобках в формуле для B сокращается. Заменим еще $1/H_s \to 1/H_R$ с помощью асимптотически точного равенства. В результате получим

$$B = -k^2 + \frac{k^2}{\Gamma^2 H_R}.$$

Если подставить полученные асимптотические выражения для A и B в уравнение (16.6), то это уравнение преобразуется к уравнению (15 1), что и требовалось.

[52] В пределе малой сжимаемости.

Двухслойные распределения. Рассмотрим случай скачка энтропии, приводящего к скачку плотности, более тщательно. Короткомасштабная поправка, связанная со сжимаемостью, была вычислена в работе (Анисимов и Зельдович, 1977). Выражение для инкремента в случае скачка энтропии в одном газе имеет вид

$$\gamma^2 = \frac{1-\mu}{1+\mu} gk + \frac{\mu(1-\mu)^2}{(1+\mu)^3} \frac{g^2}{c_u^2},$$

где μ — отношение плотностей, в случае неустойчивости $\mu < 1$ и c_u — скорость звука на верхнем берегу скачка энтропии и плотности. В случае одного газа и сверху, и снизу из условия непрерывности давления на скачке, дополненного условием $\mu < 1$, следует, что температура в верхнем газе в окрестности скачка ниже, чем в нижнем. Отсюда $c_u < c_d$, где c_d — скорость звука на нижнем берегу.

Сравним сжимаемый и несжимаемый случаи с одинаковыми распределениями ρ. В случае скачка это означает, что у них будут одинаковые значения μ. Видим, что добавка, обусловленная сжимаемостью, оказывается положительной

$$\gamma^2_{\text{comp}} - \gamma^2_{\text{incomp}} = \frac{\mu(1-\mu)^2}{(1+\mu)^3} \frac{g^2}{c_u^2} > 0.$$

Это приводит к усилению неустойчивости. Задача об РТН на скачке энтропии в случае двухслойного ее распределения рассматривалась в работе (Lezzi & Prosperetti, 1989).

Гравитационно-акустические моды. Настоящий раздел посвящен исследованию влияния сжимаемости на динамику линейных мод. Выше рассматривались общие принципы (например, энтропия и плавучесть) и короткомасштабные асимптотики (поверхностные моды, то есть моды, локализованные около поверхностей скачков s, и моды Брента–Вяйсяля). Теперь обратимся к средне- и крупномасштабным диапазонам (т.е. к промежуточным и макромасштабам). Рассмотрим также вопросы, относящиеся к гравитационно-акустическим колебаниям. Сначала рассмотрим пример изэнтропического распределения, а затем перейдем к более общему случаю.

Пусть имеется изэнтропическое распределение. Рассмотрим его равновесие в поле тяжести. Давление монотонно убывает с высотой y. Можно показать, что это распределение не может быть продолжено в $y = +\infty$. Поэтому оно должно быть ограничено сверху какой-то границей. Рассмотрим случай, когда распределение граничит сверху с вакуумом.

Изэнтропические, потенциальные движения газа в поле тяжести подчиняются уравнениям Бернулли и неразрывности, которые в переменных энтальпия—потенциал имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} + H + |g|y = \Pi(t); \qquad \text{(III.9)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + c^2 \Delta\Phi + (\nabla H \nabla\Phi) = 0, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s, \qquad \text{(III.10)}$$

где Φ — потенциал, $H = \int dp/\rho$ — энтальпия, $\Pi(t)$ — произвольная функция времени, которую в дальнейшем будем опускать. В случае идеального газа имеем

$$H = Nc^2/2, \quad N = 2/(\varkappa - 1),$$

где N — число степеней свободы молекулы газа. На границе с областью постоянного давления должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия. Последнее означает, что энтальпия на границе должна быть постоянной.

Линеаризуем систему (16.9), (16.10) около состояния гидростатического равновесия. Малые возмущения соответственно потенциала и энтальпии $\varphi \exp(\gamma t + ikx)$ и $h \exp(\gamma t + ikx)$ удовлетворяют следующим линеаризованным уравнениям:

$$\gamma\varphi + h = 0, \quad \gamma h + c_0^2(\varphi_{yy} - k^2\varphi) - |g|\varphi_y = 0,$$

где $c_0(y)$ — дает невозмущенное распределение скорости звука. Исключая h из этой системы, получим

$$y\varphi_{yy} + (N/2)\varphi_y + (N\gamma^2/(2|g|) - k^2 y)\varphi = 0.$$

После замены $y = z/(2k)$, $\varphi = \exp(-z/2)f(z)$ это уравнение приводится к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции (уравнению Куммера)[53]

$$zf_{zz} + (N/2 - z)f_z - \alpha f = 0, \quad \alpha = N(|g|k - \gamma^2)/(4|g|k). \qquad (16.11)$$

Граница с вакуумом располагается при $z = 0$. Газ заполняет область $z < 0$. Можно показать, что общее решение уравнения (16.11) может быть представлено в виде комбинации регулярного в нуле и особого в нуле линейно независимых решений

$$e^{ky}\varphi = aF(\alpha, N/2, 2ky) +$$

$$+ by^{(2-N)/N} F[\alpha + (2 - N)/N,\ (4 - N)/N,\ 2ky], \qquad (16.12)$$

где a и b — произвольные постоянные, а F — вырожденная гипергеометрическая функция

$$F(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

При $\varkappa = N = 2$ второе фундаментальное решение имеет вместо степенной логарифмическую особенность в нуле.

Анализ граничных условий в $y = z = 0$ показывает, что из двух независимых фундаментальных решений (16.12) должно быть оставлено решение, регулярное в нуле, см. (Иногамов, 1977с, § 2.3, с. 45, 1984а).

[53] Уравнения линейной изэнтропической динамики приводятся к уравнению Шредингера в поле с кулоновским потенциалом.

Итак, $\varphi \propto e^{-ky} F(\alpha, N/2, 2ky)$. Теперь рассмотрим условия на бесконечности. А именно, рассмотрим асимптотику функции $F(\alpha, N/2, 2ky)$ при $y \to -\infty$. Как обычно, сочетание граничных условий при $y = 0$ и $y = -\infty$ позволит отыскать спектр.

Формально эта процедура совпадает с проведенной в случае степенного распределения в несжимаемой жидкости, см. выше подраздел 2.5. Отобранная с помощью условия в нуле регулярная функция $F(\alpha, \beta, 2ky)$, $\beta = N/2$ разлагается в асимптотический ряд по $1/y$ (сравни с (15.3) и (15.4)). Из этого ряда выделяются два слагаемых. Одно из них экспоненциально нарастает, а другое экспоненциально затухает при $y \to -\infty$. Спектральный параметр α, зависящий от частоты или инкремента, подбирается таким образом, чтобы растущее слагаемое обратилось бы в нуль. В нашем случае обнуление происходит при $\beta - \alpha = -m$, см. п. 15.5.

Отличие между сжимаемым и несжимаемым случаями заключается в том, что формулы, выражающие α через γ и k, здесь разные. Кроме того, смысл постоянной β отличается. Выделим обозначения α и β, отно-

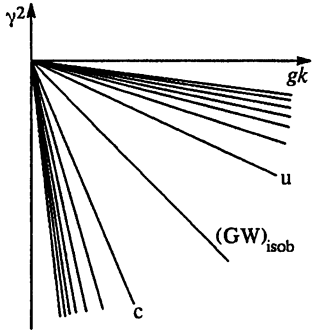


Рис. 16.2. Спектры в сжимаемом и несжимаемом устойчивых случаях. Эти случаи разделяет изобарическая гравитационная волна $(GW)_{isob}$. Она принадлежит как к вееру сжимаемых (c — compressible), так и к вееру несжимаемых мод (u — uncompressible). Веер c состоит из гравитационно-акустических внутренних волн, а веер u — из гравитационных внутренних волн

сящиеся к сжимаемому случаю, с помощью специальной подписи. Пусть $\alpha_{\rm comp}$ и $\beta_{\rm comp}$ относятся к сжимаемому случаю, а α и β — к несжимаемому. Имеем $\beta_{\rm comp} = N/2 = 1/(\varkappa - 1)$. Отметим, что распределения плотности в сжимаемом и несжимаемом случаях даются выражениями $\rho \propto (-y)^{\beta_{\rm comp}}$ и $\rho \propto (-y)^{\beta}$ соответственно.

Напомним, что выражения для $\alpha_{\rm comp}$ и α имеют вид

$$\alpha_{\rm comp} = \frac{\beta_{\rm comp}}{2}\left(1 - \frac{\gamma^2}{|g|k}\right), \quad \alpha = \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{|g|k}{\gamma^2}\right).$$

Отсюда и из спектральных условий (15.5) и $\beta_{\rm comp} - \alpha_{\rm comp} = -m$ получим

$$(\gamma^2_{\rm comp})_n = -|g|k(1 + 2n/\beta_{\rm comp}), \quad (\gamma^2)_n = \mp\frac{|g|k}{1 + 2n/\beta} \tag{16.13}$$

в сжимаемом и несжимаемом случаях соответственно. Здесь n нумерует число нулей. В случае газа собственные функции равны

$$\varphi_n = \exp(-ky) F(\beta_{\rm comp} + n,\ \beta_{\rm comp},\ 2ky).$$

В случае газа возможен только устойчивый вариант ($\gamma^2 < 0$), когда газ находится при $y < 0$. В случае же несжимаемой жидкости возможны оба (и устойчивый, и неустойчивый) варианта. В первом из них жидкость находится при $y < 0$, а во-втором — при $y > 0$. К этим двум случаям относятся верхний и нижний знаки в формуле (16.13) для γ_n. Спектры в сжимаемом и несжимаемом устойчивых случаях представлены на рис. 16.2. В отсутствие обрезающих факторов эти спектры покрывают весь диапазон масштабов от коротких до длинных волн. Сжимаемый и несжимаемый спектры разделяет изобарическая гравитационная волна[54] $(\mathrm{GW})_{\mathrm{isob}}$.

Общее устройство дисперсионных зависимостей. Выше рассмотрен случай, когда изэнтропический газ заполняет все нижнее полупространство $s(y) \equiv \mathrm{const}$ при $y < 0$. Перейдем теперь к анализу скачка энтропии. Соответствующие распределения $s(y)$ и $\rho(y)$ показаны на рис. 16.3*а*, *б*[55]. Нас будет интересовать то, как обстоят дела при достаточно общем рас-

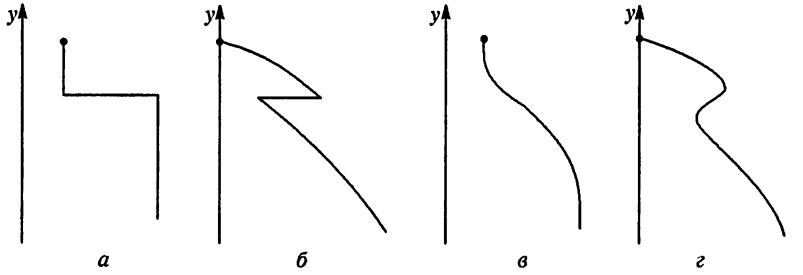


Рис. 16.3. Распределения энтропии $s(y)$ (*а*, *в*) и плотности $\rho(y)$ (*б*, *г*) в случае резкого (*а*, *б*) и размытого (*в*, *г*) скачков

пределении энтропии. Случай скачка разобран ниже именно как пример, подводящий к этому общему случаю.

Задача ставится так: пусть имеется некоторое общего вида распределение энтропии $s(y)$. Спрашивается, каковы качественные характеристики спектра, относящегося к этому распределению? Классы распределений $S(y)$, приводящие к периодическим и стохастическим функциям $H_{\mathrm{s}}(y)$ и $H_R(y)$, с полосатыми и случайными спектрами здесь не рассматриваются. Дело в том, что в приложениях, связанных с неустойчивостью, такие распределения обычно не возникают. Хотя, видимо, эти распределения могут представлять интерес с точки зрения теории устойчивых колебаний. Под общим здесь понимается размытое распределение, типа представленного на рис. 16.3*в*, *г*, или же распределение,

[54] Отметим, что, как было показано выше, эта волна может быть обобщена на случай нелинейных амплитуд и на случай с разными произвольными уравнениями состояния в разных изобарических слоях.

[55] При резком снижении энтропии с высотой и вызванном этим снижении температуры требование непрерывности давления приводит к тому, что низкие температуры приходится компенсировать за счет повышения плотности молекул. Это приводит к появлению высоколежащих плотных и потому тяжелых слоев и гравитационной неустойчивости.

сочетающее плавные участки изменения s с дискретным набором скачков s. Отметим, что в отличие от несжимаемой жидкости, которая может простираться в $y = +\infty$, газ должен быть ограничен сверху. В частности, это может быть твердая стенка или граница с областью постоянного давления p_b. Давление p_b может быть равным нулю. Этот случай соответствует границе с вакуумом. Он показан на рис. 16.3.

Действительно, если в случае газа устремить координату y_b верхней границы в бесконечность, то давление в области переменности s будет возрастать и тоже стремиться к бесконечному. Соответственно будут расти и температура и скорость звука. В результате газ станет плохо сжимаемым и описание его динамики можно будет вести в приближении несжимаемой жидкости.

Приступим к исследованию резкого скачка. Пусть μ дает отношение плотностей на скачке энтропии. При неустойчивости имеем $\mu < 1$. Рассмотрим сначала ситуацию с $\mu = 0$, затем обсудим поправку к ней, возникающую при $\mu \ll 1$, и, наконец, рассмотрим случай с $\mu \simeq 1$, $\mu < 1$.

Итак, пусть $\mu = 0$. Получаем задачу о слое, парящем под действием поддерживающего давления подстилающего газа в поле тяжести. Задача решена в работах (Иногамов, 1977с, § 2.3, 1984а). Здесь приведем только наиболее интересные результаты.

Пусть горизонтальные плоскости $y = 0$ и $y = -L$ относятся к верхней и нижней границам парящего газового слоя соответственно. Из граничного условия на вакуумной границе $y = 0$ следует[56], что решение внутри слоя дается формулой $\varphi(y) = a \exp(-ky)\, F(\alpha_\text{comp}, \beta_\text{comp}, 2ky)$, где a — произвольная постоянная. В случае газа, заполнявшего полупространство, $L = \infty$. При этом в качестве нижнего граничного условия выбиралось условие затухания на нижней бесконечности. В случае $L < \infty$ требуется условие в точке $y = -L$. На границе $y = -L$ давление должно быть постоянно. Из этого условия следует, что

$$\gamma^2 \varphi(-L) = \frac{d\varphi(-L)}{dy}.$$

Подставляя сюда решение $\varphi(y) = a \exp(-ky) F$, получим следующее "дисперсионное" соотношение:

$$\frac{\alpha_\text{comp}}{\beta_\text{comp}} F(\alpha_\text{comp}, \beta_\text{comp}, 2kL) = \left[\frac{d}{dz} F(\alpha_\text{comp}, \beta_\text{comp}, z)\right]\Bigg|_{z=2k}.$$

С помощью формулы

$$\frac{\alpha}{\beta} F - \frac{dF}{dz} = \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\alpha - \beta}{\beta + 1} z\Phi, \quad F = F(\alpha, \beta, z), \quad \Phi = F(\alpha + 1, \beta + 2, z)$$

данное "дисперсионное" соотношение можно преобразовать к следующему виду

$$\alpha_\text{comp}(\alpha_\text{comp} - \beta_\text{comp}) F(\alpha_\text{comp} + 1,\ \beta_\text{comp} + 2,\ 2kL). \qquad (16.14)$$

[56] Анализ регулярных и нерегулярных фундаментальных решений, см. выше.

Из (16.14) следует, что первые две моды даются выражениями $(\alpha_{\rm comp})_{+0} = \beta_{\rm comp}$ и $(\alpha_{\rm comp})_{-0} = 0$. Здесь индекс указывает число нулей n. Устойчивый и неустойчивый спектры нумеруются числом n

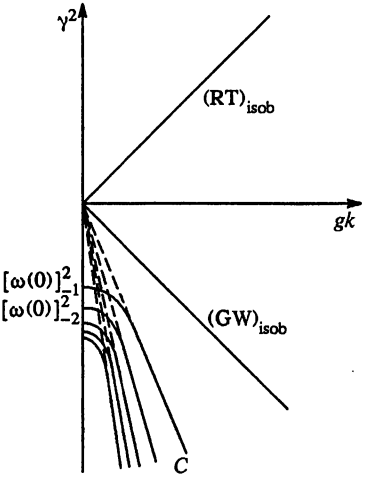


Рис. 16.4. Изменение спектра в случае слоя. Сравните этот спектр и спектр $[(\mathrm{GW})_{\rm isob}, c]$, соответствующий газовому полупространству, представленный на рис. 16.2. Видим, что, во-первых, появляется изобарическая РТ мода — прямая $(\mathrm{RT})_{\rm isob}$ и, во-вторых, гравитационно-акустические волны с числом нулей ≥ 1 оканчиваются не в центре $\gamma^2 = k = 0$, а на конечных частотах. Отметим также, что дисперсионная кривая изобарической гравитационной волны $(\mathrm{GW})_{\rm isob}$ остается без изменений

независимо. Поэтому здесь введено два нумератора числа нулей: $(+n)$ (или n_+) и $(-n)$ (или n_-). Первый из них для неустойчивых и второй для устойчивых мод. Отсюда

$$(\gamma^2)_{+0} = |g|k, \quad (\gamma^2)_{-0} = -|g|k.$$

То есть приходим, как и должно быть при наличии двух изобарических границ, к изобарическим РТ моде и гравитационной волне. Остальные моды соответствуют устойчивым гравитационно-акустическим внутренним волнам

$$(\gamma^2)_{-n} = |g|k[\,(2\alpha_{\rm comp})_{-n}(kL)/\beta_{\rm comp} - 1\,] < 0$$

Функция $\alpha_{\rm comp}(kL)$ подбирается так, чтобы обнулить третий сомножитель (16.14).

Таким образом, по сравнению со случаем $L = \infty$ при конечных L появляются следующие два изменения:

(i) Спектр обогащается за счет появления при $\gamma^2 > 0$ одной неустойчивой моды. Если $\mu = 0$, то эта мода является изобарической РТ модой.

(ii) Появление ограничивающего масштаба L нарушает инвариантность веера гравитационно-акустических волн (см. рис. 16.2) по k. Характер волн изменяется в среднемасштабном и длинноволновом диапазонах. При $kL \to 0$ приходим к задаче об акустических колебаниях в столбе газа, находящегося между двумя границами. При этом частоты $(\omega^2)_{-n} = -(\gamma^2)_{-n}$ перестают зависеть от волнового числа k и выходят на некоторые фиксированные значения $[\omega(0)^2]_{-n}$, см. рис. 16.4.

В среднемасштабном диапазоне происходит переход от одной асимптотики к другой. При $kL \to 0$ с помощью подстановки $\varphi = y^{\beta_{\rm comp}/2}\psi$, устраняющей член с первой производной, вместо уравнения (16.11) получаем уравнение

$$y\psi_{yy} + \beta_{\rm comp}\{-[\omega(0)]^2 + 1/2 - \beta_{\rm comp}/4\}\psi = 0,$$

определяющее спектр значений $\omega(0)$. Решая это уравнение, удовлетворяя граничные условия сверху и снизу, приходим (Иногамов, 1977с, 1984а) к следующему алгебраическому уравнению

$$\frac{1}{\Gamma(\beta_{\rm comp}+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-\beta_{\rm comp}\omega^2(0)]^n}{n!\Gamma(\beta_{\rm comp}+n+1)} = 0, \qquad (16.15)$$

для спектра $\omega(0)$. Значения $1/\omega(0)$ в размерных переменных порядка времени пролета атмосферы при свободном падении c/g или порядка прохождения звуком атмосферы H/c.

Влияние граничных условий. Как уже было отмечено выше, назначением данного раздела является исследование качественного устройства спектров[57] в зависимости от достаточно общего вида распределений $s(y)$ и при вариации граничных условий. Посмотрим, как повлияет изменение граничных условий. Выше были рассмотрены случай (i), когда вверху ставится изобарическое граничное условие, давление равно нулю $y_{\rm u} = 0$ и слой толстый $L = \infty$, и случай (ii), когда граничные условия сверху остаются без изменений, но рассматривается случай конечного слоя $L < \infty$, ограниченного снизу изобарой (выше L — толщина газового слоя). Рассмотрим теперь случаи, которые получаются комбинированием изобарических и жестких граничных условий сверху и снизу, комбинированием давления сверху ($p_{\rm u} = y_{\rm u} = 0$ и $p_{\rm u} \neq 0, y_{\rm u} \neq 0$) и разнесением граничных условий (комбинирование толщины слоя: $L = \infty$ или $L < \infty$). Кроме того, сравним поведение газа и несжимаемой жидкости. А затем сравним спектры в случае скачка с конечным значением μ, см. рис. 16.3*а*, *б*, и в случае размытого скачка (рис. 16.3*в*, *г*).

Перечислим эти случаи по порядку. Пусть газовое полупространство ограничивает сверху изобара, причем давление на ней конечное $p_{\rm u} > 0, y_{\rm u} < 0$. Вместе с $y_{\rm u} \neq 0$, появляется обрезание степенных зависимостей c, p и ρ и скачки этих функций, см. рис. 16.5*а*. Спектр представлен на рис. 16.5*б*. Неустойчивой моды нет. Крупно- и коротко-масштабные асимптотики разделяет переходная область $k \simeq 1/y_{\rm u}$, помеченная номером *2*, см. рис. 16.5*б*, *г*. При $k \ll 1/y_{\rm u}$ давление $p_{\rm u}$ несущественно и спектр представляет собой веер прямолинейных ветвей гравитационно-акустических волн, асимптотически совпадающий со спектром на рис. 16.2. При $k \gg 1/y_{\rm u}$ все эти гравитационно-акустиче-

[57] Количественные расчеты для любого конкретного распределения s, с дискретным спектром вообще говоря, не представляют особых затруднений. Можно, например, свести задачу к уравнению Риккати и далее находить спектр методом стрельбы.

ские моды, кроме основной, выходят на чисто акустическую зависимость

$$(\gamma^2)_{-n} = -c_u^2(k^2 + c_1 n^2/y_u^2)$$

где c_1 — постоянная порядка единицы.

В крупномасштабной асимптотике моды экспоненциально затухают на глубине $\sim 1/k$. В коротком масштабной асимптотике волны становятся акустическими и заполняют полоску шириной порядка приграничного масштаба однородности y_u. Затухание гравитационно-акустических и

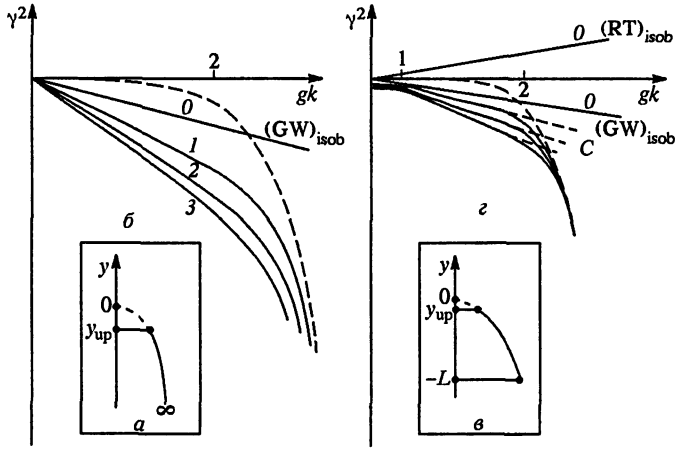


Рис. 16.5. Спектры при конечном давлении на верхней изобарической границе. Толстый слой (*а* и *б*) и конечный слой (*в* и *г*). "Срезка" нуля и появление масштаба y_{up}. "Перехват" гравитационно-акустических мод акустической параболой $\gamma^2 = c_{up}^2 k^2$ в коротком масштабной асимптотике. Эта парабола показана штриховой кривой. Коротком масштабную асимптотику отделяет точка, выделенная цифрой *2* на оси gk. Область по $k \simeq 1/L$ появляется в случае конечного слоя (*в*). Она помечена цифрой *1* на рис. *г*. Если $|y_{up}| \ll L$, то устройство инкрементов и частот в этой области такое же, как на рис. 16.4. При $|y_{up}| \simeq L$ устройство спектра в $k = 0$ в качественном плане продолжает совпадать с тем, которое показано на рис. 16.4, хотя появляются количественные изменения порядка единицы

акустических мод в глубине обусловлено тем, что скорость звука растет с глубиной. Поэтому из-за явления полного внутреннего отражения около верхней границы газа образуется волноводный канал[58], вне которого амплитуда волн стремится к нулю.

Сказанное не распространяется на основную[59] моду. Она соответствует изобарической волне $(GW)_{isob}$, см. рис. 16.5*б*. Соответствующая ветвь остается прямолинейной при всех значениях k. Она помечена номером *0*, указывающим число нулей, на рис. 16.5*б*, *г*.

[58] Ограничивающая газ сверху область постоянного давления эквивалентна области с бесконечно высокой скоростью звука. Она образует верхнюю стенку волновода.

[59] Эта мода не имеет нулей.

Случай спектра, ограниченного двумя изобарами, при $|y_u| > 0$ и $L < \infty$ показан на рис. 16.5*г*. Пусть сначала $|y_u| \ll L$. Тогда области *1* и *2* по k, см. рис. 16.5*г*, разнесены далеко. При этом между k_1 и k_2 имеется широкий переходной интервал, в котором ветви с числом нулей $n_- = 1, 2, \ldots$ примерно прямолинейны. Переход к короткомасштабной асимптотике происходит так же, как на рис. 16.5*б*. В крупномасштабной асимптотике гравитационно-акустические моды выходят на акустические колебания, распространяющиеся по вертикали в газовом столбе. Частоты этих колебаний $[\omega(0)]_{-n}$ в случае $|y_u| \ll L$ мало отличаются от даваемых (16.15). Таким образом, гравитационно-акустические моды ограничены акустическими колебаниями и при $k = 0$, и при $k = \infty$. Только в промежуточном диапазоне между k_1 и k_2 гравитационные или эквивалентно энтропийно-вихревые частоты или инкременты оказываются порядка акустических[60]. Вне этого диапазона акустические частоты велики по сравнению с энтропийно-вихревыми.

Если $|y_u| < L$, $|y_u| \simeq L$, то области $k \simeq k_1$ и $k \simeq k_2$ сливаются. При этом поправки к $[\omega(0)]_{-n}$ по сравнению со случаем $y_u = 0$ становятся порядка единицы. Но качественно поведение при $k = 0$ остается таким же. Прямолинейные участки на ветвях с $n_- = 1, 2, \ldots$ исчезают.

Итоговое заключение по случаю, представленному на рис. 16.5*в*, *г*, гласит:

- Изобарические $(\mathrm{RT})_{\mathrm{isob}}$ и $(\mathrm{GW})_{\mathrm{isob}}$ моды инвариантны по отношению ко всем характерным масштабам.
- Гравитационно-акустические волны выходят на акустические при $k = 0$ и $k = \infty$.

Несжимаемый случай. Посмотрим, как изменятся указанные выше результаты, относящиеся к распределениям, приведенным на рис. 16.5*а*, *в*, и тем же граничным условиям, в случае несжимаемой жидкости. Рассмотрим сначала распределение представленное на рис. 16.5*а*.

Опять, как и при наличии сжимаемости, если $k \ll 1/y_u$ возмущения затухают на расстоянии $\simeq 1/k$, а в обратном пределе внутренние волны заполняют полоску шириной $\simeq y_u$. Прямолинейные при малых $k \ll 1/y_u$ ветви из веера внутренних волн[61] u, см. рис. 16.2, при $k \to \infty$ монотонно стремятся к ограничивающей их снизу асимптоте. Этой асимптотой является частота Брента–Вяйсяля ω_{BV}, вычисленная на краю жидкости по масштабу y_u. Основное состояние соответствует изобарической волне и его ветвь остается прямолинейной. Эта картина представлена на рис. 16.6*а*.

Рассмотрим теперь случай распределения, показанного на рис. 16.5*в*, при $y_u \ll L$. Отвлечемся от того, что происходит при $k \simeq 1/y_u$. Пусть $y_u = 0$. Проанализируем переход при $k \simeq 1/L$. При $k \ll 1/L$ динамика узловатых возмущений[62] может быть описана в длинноволновом

[60] Именно поэтому соответствующие энтропийно-вихревые возмущения и называются гравитационно-акустическими.

[61] Кроме основной.

[62] К этим возмущениям не относится основная мода (изобарическая волна), которая является чисто изгибным возмущением.

приближении, которым в данном случае является приближение мелкой воды. Как известно, мелкая вода эквивалентна газодинамической среде с показателем адиабаты $\varkappa = 2$ и скоростью звука $c = \sqrt{gL}$. Акустические возмущения, которые распространяются в такой среде, имеют закон дисперсии $\omega^2 = c^2k^2$. Веер прямолинейных веток переходит при

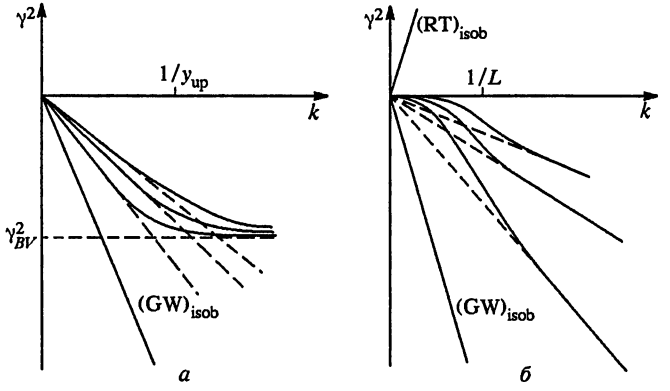


Рис. 16.6. Для иллюстрации влияния сжимаемости приведены спектры, соответствующие распределениям *а* и *в* на рис. 16.5, в несжимаемом случае. Переход от среднемасштабной к короткомасштабной асимптотике при $k \simeq 1/y_{\mathrm{up}}$ (*а*). Переход от среднемасштабной к длинноволновой асимптотике при $k \simeq 1/L$ (*б*)

$k \ll 1/L$ на параболы $(\gamma^2)_{-n} = \alpha_{-n} g L k^2$, коэффициенты α_{-n} монотонно убывают с n, $\alpha_{-n} \to 0$ при $n \to \infty$, см. рис. 16.6*б*.

Случай, когда в поле зрения требуется удержать и короткомасштабный $k \simeq 1/y_{\mathrm{u}}$, и крупномасштабный $k \simeq 1/L$ переходы, получается при объединении графиков. Это делается так же, как было сделано выше, в случае газа (рис. 16.5*г*).

Жесткие границы. Обсудим теперь влияние твердых[63] границ. Выше были рассмотрены случаи $\{I/F, L = \infty\}$ и $\{0, I/L = F\}$ в сжимаемой и несжимаемой средах. Здесь первое обозначение в фигурных скобках относится к верхнему граничному условию, а второе — к нижнему, I означает изобарический, F означает конечный, величина L задает положение нижней границы $y_{\mathrm{d}} = -L$, при $|y_{\mathrm{u}}| \ll 1$ эта величина приближенно равна толщине слоя, которая в свою очередь равна расстоянию между границами, 0 — во второй фигурной скобке означает, что $y_{\mathrm{u}} = 0$. Первый случай дал нам описание перехода при $k \simeq 1/y_{\mathrm{u}}$, а второй — при $k \simeq 1/L$.

[63] Будем называть их также жесткими границами. Соответствующие граничные условия имеют вид $v = 0$ или $\varphi_y = 0$. Рассматриваются горизонтальные твердые границы. Здесь v — вертикальная компонента скорости. В случае несжимаемой жидкости обычно в уравнения входит v, а в случае изэнтропического газа — потенциал φ.

Действуя аналогично с твердыми границами, рассмотрим случаи $\{R/F, L=\infty\}$ и $\{0, R/L=F\}$, где R означает, что ставится жесткое граничное условие.

Начнем со *сжимаемого* случая. Общее решение равно

$$\varphi(y) = a_{\text{reg}} R(\alpha_{\text{comp}}, \beta_{\text{comp}}, y) + a_{\text{sing}} S(\alpha_{\text{comp}}, \beta_{\text{comp}}, y),$$
$$S = (-y)^{1-N/2} R_1, \tag{16.16}$$

где a_{reg}, a_{sing} — произвольные постоянные. При четных значениях N сингулярная в нуле функция S равна $S = (-y)^{1-N/2} R_2 + [\ln(-y)] R_3$, где R, R_1, R_2 и R_3 — регулярные в нуле функции, разложение которых начинается с единицы.

Сначала требуется рассмотреть задачу $\{R/F, L=\infty\}$ и обсудить процедуру отбора решения с помощью верхнего граничного условия[64]. В случае изобарической границы[65] граничное условие на потенциал следует из кинематического ($\gamma\eta = \varphi_y(y_{\text{u}})$) и динамического ($g\eta = \gamma\varphi(y_{\text{u}})$) условий, где η — амплитуда возмущений свободной изобарической поверхности. Оно получается после исключения η и имеет вид

$$\gamma^2 \varphi(y_{\text{u}}) - g\varphi_y(y_{\text{u}}) = 0. \tag{16.17}$$

Граничное условие на жесткой границе имеет вид

$$\varphi_y(y_{\text{u}}) = 0. \tag{16.18}$$

Граничные условия (16.17) или (16.18) позволяют сократить число произвольных постоянных a_{reg}, a_{sing} на единицу. Выпишем выражение a_{sing} через a_{reg}. Подставим решение (16.16) в граничные условия (16.17) и (16.18). После простых вычислений получим

$$\frac{a_{\text{sing}}}{a_{\text{reg}}} = C(-ky_{\text{u}})^{N/2}. \tag{16.19}$$

Если N четное, то

$$\frac{a_{\text{sing}}}{a_{\text{reg}}} = C(-ky_{\text{u}}). \tag{16.19'}$$

Величины постоянных C зависят от того, какое выбрано граничное условие — (16.17) или (16.18). Эти постоянные представляют собой дроби, числитель которых зависит от значений $R(0)$ и $R'_y(0)$ в нуле, а знаменатель от значений $R_1(0)$ и $[R_1(0)]'_y$ или в случае четных N от значений $R_2(0)$, $[R_2(0)]'_y$ и $R_3(0)$, $[R_3(0)]'_y$.

Из (16.19) или (16.19') следует, что диапазон значений k разбивается на два поддиапазона: $k \ll 1/y_{\text{u}}$ и $k \gg 1/y_{\text{u}}$. В первом из них вне узкой

[64] Отобранное таким образом решение будет использовано затем в задаче $\{0, R/L = F\}$.

[65] Свободная граница становится изобарической свободной границей при отношении плотностей $\mu = 0$.

полоски, прилегающей к границе y_u, можно пренебречь вкладом сингулярного решения в сумме (16.16)[66]. Тогда решение вне этой полоски равно

$$\varphi(y) \propto R(\alpha_{comp}, \beta_{comp}, y) \propto \exp(-ky) F(\alpha_{comp}, -\beta_{comp}, 2ky). \quad (16.20)$$

Разлагая, как это было сделано выше в разделе п. 15.5 (15.4), вырожденную гипергеометрическую функцию, входящую в (16.20), на сумму из двух асимптотических разложений и требуя затухания $\varphi(y)$ при $y \to -\infty$, находим спектр собственных чисел. Этот веерный спектр дается первой из двух формул (16.13). Новый момент заключается в том, что если в работах (Иногамов, 1977с, 1984а) этот спектр был получен для

[66]Таким образом, сингулярное решение сосредоточено около границы y_u. На этой границе оно подправляет регулярное решение так, чтобы их сумма удовлетворяла бы заданное граничное условие.

С помощью разработанного приема обрезания мы избегаем случая, когда p, ρ и c обращаются в нуль на границе газа. В случае изобарического граничного условия сверху мы вместо границы газа с вакуумом на самом деле рассматриваем случай, когда газ граничит не с вакуумом, а с областью малого, но конечного давления p_u. Для того чтобы, это обрезание моделировало ситуацию с вакуумной границей, давление p_u должно быть мало по сравнению с характерными значениями давления. Это означает, что должно выполняться $|y_u| \ll 1/k$. С другой стороны должно выполняться линейное приближение. Хуже всего условие линейности выполняется около границы, поскольку относительная амплитуда возмущения растет при приближении к границе y_u. Требование линейности означает, в частности, что скорость движений на границе должна быть мала по сравнению со скоростью звука c_u на границе. Скорость возмущений на границе порядка их скорости на глубине $\simeq 1/k$. Сказанное означает, что $c_u \simeq \sqrt{g|y_u|} \gg ka_{reg}$. Отсюда получаем, что для формальной справедливости процедуры амплитуды возмущений должны быть очень малы $k^2 a_{reg}^2/g \ll |y_u| \ll 1/k$.

Что будет, если граница находится высоко $y_u \ll 1/k$ и выполняется обычное (а не усиленное) требование линейности $ka_{reg} \ll \sqrt{g/k}$, а усиленное требование нарушается? Нарушение усиленного требования означает, что число Маха на границе велико $M_u = ka_{reg}/c_u \simeq 1$ или > 1. Тогда вблизи границы образуются ударные волны, и происходит нагрев верхних слоев газа. Ударные волны могут распространяться только вверх. Гипотеза состоит в том, что несмотря на образование ударных волн, динамика малых возмущений на больших глубинах меняется мало, поскольку интегральный вес верхних слоев мал и не меняется со временем.

Сделаем еще несколько замечаний, имеющих определенное отношение к рассматриваемому вопросу. На вакуумной границе газа с конечной энтропией скорость звука c обращается в нуль. Поэтому возле этой границы происходит замедление и задержка звуковых возмущений и уплотнение акустических характеристик (интеграл $\int dy/c(y) \propto \int dy\sqrt{|y|}$, дающий время задержки, сходится.) Вакуумная граница является огибающей семейств, приближающихся к границе и отраженных от нее характеристик. Усиление амплитуды возмущений из-за уплотнения характеристик приводит к образованию ударных волн (в нестационарном случае). Эти волны "скатываются" по градиенту плотности. При этом происходит усиление этих волн (растет число Маха). Образование сильных ударных волн и возникновение акустической турбулентности играет важную роль в нагреве верхних слоев атмосферы.

Отметим еще задачу о схлопывании вакуумной полости в газе. Любопытно, что здесь имеются как решения с бесконечным ускорением границы полости около момента коллапса t_c, так и решения, в которых скорость этой границы постоянна и конечна вплоть до момента t_c. Об этих последних решениях см работу (Баутин, Казаков, 1995). У решений с бесконечным ускорением граница полости является огибающей характеристик, а у решений с постоянной скоростью граница совпадает с передней "вакуумной" характеристикой, отделенной от следующих характеристик так, как это имеет место в волне разрежения, распространяющейся в вакуум.

случая газа, ограниченного сверху свободной изобарической границей, то здесь эта процедура выполнена для случая газа, ограниченного твердой границей сверху.

Получается, что в случае газа динамика на больших глубинах пропорциональна $1/k \gg |y_u|$ и "не чувствует" того, что происходит в малосущественной для больших глубин области малых давлений около границы y_u. Веерный спектр, даваемый первой из формул (16.13), содержит даже изобарическую моду, которая, казалось бы, относится только к свободному изобарическому граничному условию и должна пропадать в случае жесткого граничного условия[67].

В короткомасштабном диапазоне $k \simeq 1/y_u$ или $k \gg 1/y_u$ в слое толщиной $\simeq y_u$ образуется волновод, верхней крышкой которого является твердая граница. Акустическая парабола, показанная штриховой кривой на рис. 16.5*б*, опять, как и в случае с изобарической границей, перехватывает ветви веера гравитационно-акустических волн. Но в отличие от случая с изобарической границей ветвь, соответствовавшая изобарической гравитационной волне $(GW)_{\text{isob}}$, теперь таковой, вообще говоря[68], не является. Она перехватывается вместе с другими ветвями и при $k \to \infty$ стремится к акустической параболе.

Случай жесткой границы снизу. Рассмотрим задачу $\{0, R/L = F\}$. В этой задаче речь идет о длинноволновой асимптотике. Значение k, разделяющее асимптотики, равно $1/L$. Соответствующая область помечена номером *1* на рис. 16.5*г*. Напомним, что рассматривается сжимаемый случай. Рис. 16.5*г* относится к газовому слою, ограниченному снизу свободной изобарической границей. В качественном плане структура спектра колебаний слоя, ограниченного снизу жесткой границей, оказывается аналогичной. Различия касаются изобарических мод. При $k \gg 1/L$ влияние нижней границы мало, и образуется семейство прямолинейных ветвей. При $kL \to 0$ семейство выходит на конечные частоты

$$[\omega(0)]_{-n}^{(R)}$$

колебаний газового столба, зажатого между свободной и жесткой границами. Индекс R сверху здесь поставлен для того, чтобы отличить эти частоты от аналогичных частот в случае газового столба, находящегося между двумя свободными границами. Различия, относящиеся к изобарическим модам, заключаются в следующем. Неустойчивая $(RT)_{\text{isob}}$ мода пропадает. Мода с $n_- = 0$ только асимптотически при $kL \to \infty$ становится изобарической. При $kL \to 0$ эта мода не остается прямолинейным лучом, проходящим через начало координат $\gamma^2 = k = 0$, как в случае с изобарической границей снизу, а загибается так же, как и старшие моды на рис. 16.5*г*, и выходит на частоту $[\omega(0)]_{-n=0}^{(R)}$.

[67] Чуть ниже будет видно, что при $k \simeq 1/y_u$, когда граничное условие в y_u становится существенным, движение с "вмороженными" изобарами действительно пропадает в случае жесткого граничного условия.

[68] В случае с твердой границей при движении, соответствующем этой ветви, давление в жидких частицах сохраняется только асимптотически при $ky_u \to 0$.

Оценим влияние сжимаемости. Рассмотрим задачи $\{R/F, L=\infty\}$ и $\{0, R/L=F\}$ в несжимаемом случае. Возьмем сначала случай $1<\beta<\infty$. Случай $0<\beta<1$ будет рассмотрен ниже отдельно. Посмотрим, к каким изменениям на графиках, представленных на рис. 16.6*а*, *б*[69], приведет вариация граничных условий. После анализа задач приходим к заключению о том, что в качественном плане графики малочувствительны к граничным условиям. Качественные изменения относятся только к изобарическим модам. Так, в задаче $\{R/F, L=\infty\}$ крайняя, наиболее жесткая мода теперь не является прямой, как в задаче $\{I/F, L=\infty\}$, а вместе со старшими модами изгибается при $k\simeq 1/y_u$ и выходит асимптотически на инкремент γ_{BV}. В задаче $\{0, R/L=F\}$ исчезает неустойчивая мода $(RT)_{isob}$, а мода с $n=0$ при $kL\to 0$ выходит вместе с остальными модами, см. рис. 16.6*б*, на "акустическую" параболу мелкой воды: $(\gamma^2)_{-n=0}\to\alpha^{(R)}_{-n=0}gk^2L$.

Отметим разницу между R (жестким) и I (изобарическим) граничными условиями, поставленными сверху в несжимаемом случае. Решение классического уравнения Рэлея (15.1) для скорости v при степенном распределении ρ дается формулой (15.2). Регулярная и сингулярная части этой формулы выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию. В случае граничного условия I значение v'_y входит в это условие. В сжимаемом случае не v, а φ входит в формулу, формально совпадающую[70] с формулой (15.2). Поэтому φ'_y входит в граничное условие и в I, и в R случаях. Важно то, что во всех этих трех случаях в условие на границе входит производная от искомой функции. Этим эти случаи отличаются от случая R в несжимаемой жидкости. В последнем же случае граничное условие гласит: $v=0$ на границе. То есть в этом случае не требуется вычисление производной от решения (15.2).

Это приводит к следующему. Рассмотрим отношение амплитуд a_{reg} и a_{sing}. Оно равно

$$\frac{a_{sing}}{a_{reg}}=\text{const}\ |y_u|^{\beta-1}. \tag{16.21}$$

Здесь рассматриваются распределения плотности, у которых $\beta>0$. Согласно (16.21) возможны два случая. В первом $0<\beta<1$ и сингулярное решение доминирует при $|y|\gg|y_u|$. Распределения плотности с $0<\beta<1$ примыкают к распределению с постоянной плотностью $\rho\equiv\text{const}$, $\beta=0$. В этих распределениях плотность быстро нарастает при отклонении от y от нуля. И, по-видимому, из-за этого влияние граничного условия, поставленного на далеком и, казалось бы, несущественном краю жидкости, определяет решение на всех глубинах.

В случае, когда $1<\beta<\infty$, плотность мала возле края. При этом сингулярное решение выпадает, см. (16.21), и получается, что жидкость не чувствует разницы между I и R граничными условиями. Спектр колебаний при этом следует из асимптотического разложения (15.4)

[69] Рис. 16.6*а* и *б* относятся к задачам $\{I/F, L=\infty\}$ и $\{0, I/L=F\}$ соответственно.

[70] Отличие заключается в выражениях, с помощью которых α связано с γ и k и в смысле параметра β, см. выше.

гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, 2ky)$. Требование затухания дает $\beta - \alpha = -m$, $m = 0,1,2,\ldots$, откуда следует спектр $\gamma^2 = -gk/(1+2m/\beta)$.

При $0 < \beta < 1$ требуется исследовать другое асимптотическое разложение. А именно, требуется выписать асимптотическое разложение гипергеометрической функции

$$F(\alpha - \beta + 1,\ 2 - \beta,\ 2ky).$$

Выписывая это разложение и требуя затухания на бесконечности, получим спектральное соотношение

$$(\gamma^2)_{-n} = -\frac{gk}{1 - 2\frac{n+1}{\beta}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

где n_- по-прежнему дает число нулей устойчивых мод[71]. Как видим, этот спектр не содержит изобарической $(GW)_{\text{isob}}$ моды. Таким образом, случай $0 < \beta < 1$ отличается устройством веера собственных чисел и видом собственных функций от случая $1 < \beta < \infty$.

Политропический случай. Вместо уравнения (16.6) можно работать с более коротким уравнением для возмущений лагранжева давления p_{L} (Иногамов 1996, 1996а, 1997). Оно имеет вид

$$\begin{gathered}(p_{\text{L}})''_{yy} - \frac{\rho'_{0y}}{\rho_0}(p_{\text{L}})'_y - k^2 W p_{\text{L}} = 0,\\ W = 1 - \frac{\rho'_0}{\rho_{0y}}\frac{g}{\sigma^2} + \left(\frac{\sigma^2}{gk} - \frac{gk}{\sigma^2}\right)\frac{g}{kc_0^2}, \quad p_{\text{L}} = p - \frac{g}{i\omega}\rho_0 v,\end{gathered} \tag{16.22}$$

справедливый в случае произвольного уравнения состояния (УРС). Если выполняется уравнение $s = p/\rho^\gamma$, то функцию W, входящую в (16.22), можно записать в виде

$$k^2 W = k^2 + \left(\frac{\sigma}{c_0}\right)^2 + \frac{k^2}{\gamma}\frac{g}{\sigma^2}\frac{s'_{0y}}{s_0}. \tag{16.22$'$}$$

В политропическом случае гидростатические распределения являются степенными. Они равны

$$\begin{gathered}\rho_0 \propto (-y)^N, \quad p_0 \propto (-y)^{N+1}, \quad c_0 = \sqrt{\gamma g(-y)/(N+1)},\\ s_0 \propto (-y)^\theta, \quad \theta = 1 - N(\gamma - 1),\end{gathered} \tag{16.23}$$

где N — показатель политропы.

Рассмотрим возмущения политропы. Подставим невозмущенные распределения (16.23) в уравнение (16.22), (16.22$'$). После преобразований это уравнение примет вид

$$\begin{gathered}\eta(p_{\text{L}})''_{\eta\eta} - N(p_{\text{L}})'_\eta - (\eta - 2a - N)p_{\text{L}} = 0,\\ a = -\frac{1}{2}\left(N - \frac{N+1}{\gamma}\Sigma^2 + \frac{\theta}{\gamma\Sigma^2}\right), \quad \eta = ky, \quad \Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{gk}.\end{gathered} \tag{16.24}$$

[71] Чтобы отличить устойчивые моды от неустойчивых (они отличаются знаком γ^2), используются нумераторы n_- для первых и n_+ — для вторых.

Замена $p_L = e^{\eta} u$, $\eta = -z/2$ преобразует его к уравнению Куммера $zu_{zz} + (-N - z)u_z - au = 0$ (Slater, 1964, с. 504), а замена $p_L = \eta^{N/2}\psi$, $\eta = z/(2a + N)$ приводит (16.24) к стационарному уравнению Шредингера $\psi_{zz} - (-E + U)\psi = 0$ для частицы в кулоновском поле с полным моментом l равным $N/2$, энергией $E = -(2a + N)^{-2}$ и потенциалом $U = -1/z + l(l + 1)/z^2$. То, что задача о возмущениях политропы приводится к уравнению Куммера для вырожденной гипергеометрической функции, известно давно (Lamb, 1945; Pekeris, 1948). Хорошо известно (Pekeris, 1948) также решение в изотермическом случае, когда гидростатические распределения ρ_0, p_0 и s_0 являются экспоненциальными.

В случае толстой изэнтропической $N = 1/(\varkappa - 1)$ атмосферы, ограниченной сверху границей с вакуумом, спектр акустических мод найден в работе (Иногамов, 1977с, § 2.3). Как раз такой спектр возникает на вакуумной границе *почти изэнтропической солнечной конвективной зоны*. Для произвольного N спектр вычислен в работе (Christensen–Dalsgaard, 1980).

Для инерционного синтеза интерес представляет исследование неустойчивости P_{inst} в случае многослойных оболочек с высокоплотными внутренними подоболочками, показанных на рис. 7.3*г*. Он описан в работах (Иногамов, 1996, 1997) с помощью инверсной политропы, у которой показатель политропы N отрицателен[72]. При этом плотность растет при приближении к вакуумной границе. В обычных политропах, используемых в астрофизике, показатель N положителен и плотность убывает у вакуумной границы. В этих же работах выписано уравнение для возмущений p_L, проанализированы изоспектральные свойства, рассмотрена турбулентность в неустойчивых, степенным образом стратифицированных средах (Иногамов, 1997) и найдена фундаментальная волна акустического типа (Иногамов, 1997). Показано, что возможно частичное подавление неустойчивости при варьировании показателя N.

[72] Похожая ситуация с растущей при уменьшении радиуса r плотностью и частичная стабилизация неустойчивости из-за этого рассмотрена в работе (Velikovich et al , 1996b), посвященной исследованию коллапса пинчей

Глава IV
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

§ 17. Численное исследование РТН в сжимаемых средах

17.1. Постановка задачи

Основные соотношения. Рассмотрим задачу о РТН в $2D_p$ (p — plane) геометрии. Без учета эффектов вязкости, теплопроводности и поверхностного натяжения рассматриваемое нестационарное течение будет описываться системой уравнений Эйлера. Запишем систему в виде, удобном (Белоцерковский, Давыдов, 1982; Давыдов, Демьянов, Цветков, 1987) для численного интегрирования

$$\begin{gathered} \partial\rho/\partial t + \partial\rho u/\partial\rho x + \partial\rho v/\partial\rho y = 0, \\ d\rho u/dt + \partial p/\partial x = 0, \\ d\rho v/dt + \partial p/\partial y + \rho g = 0, \\ d\rho E/dt + \partial\rho u/\partial x + \partial\rho v/\partial y + \rho g v = 0, \end{gathered} \tag{17.1}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$, $E = J + (u^2 + v^2)/2$, p — давление, ρ — плотность, J — внутренняя энергия на единицу массы среды, u, v — компоненты вектора скорости по осям x и y соответственно, $g = |\mathrm{g}|$. Для замыкания системы (17.1) используем уравнение состояния совершенного газа в виде

$$p = \rho J(\gamma - 1), \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \tag{17.2}$$

где γ — показатель адиабаты газа. Здесь и ниже индекс "1" относится к легкой компоненте, а индекс "2" — к тяжелой.

Начальные и граничные условия. На боковых границах ставились условия симметрии. Они имеют вид

$$\partial\rho/\partial x = \partial v/\partial x = \partial E/\partial x = u = 0. \tag{17.3}$$

Условия на верхней и нижней границах описаны ниже.

Начальные условия общего вида составляются из "смеси" возмущений границы η и скорости $\mathbf{v}$, взятых с произвольными весами. В случае их линейности[1] последующая нелинейная эволюция инвариантна к относительным весам возмущений η и $\mathbf{v}$. Задать возмущения $\mathbf{v}$ несколько проще технически. Поэтому они обычно (но не всегда) и выбирались в

[1] То есть в случае малости амплитуды начальных возмущений.

качестве начальных. Возмущения границы и скорости равны соответственно

$$y = b_0 \cos(kx), \tag{17.4}$$

$$u = \pm A \sin(kx) \exp(-k|y|), \tag{17.5}$$

$$v = A \cos(kx) \exp(-k|y|), \tag{17.5'}$$

где постоянная b_0 задает амплитуду гофрировки (17.4) КГ, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Знаки плюс и минус в (17.5) относятся соответственно к верхней и нижней полуплоскостям.

Гидростатическая стратификация. В равновесии невозмущенные функции связаны уравнениями гидростатики

$$p/dy + \rho g = 0 \tag{17.6}$$

и термодинамического состояния (17.2). Рассмотрим (i) изохорические, (ii) изотермические и (iii) изэнтропические двухслойные распределения. Распределение (iii) показано на рис. 16.3*а, б*. На границе между слоями термодинамические функции ρ, s, J, T и скорость звука испытывают скачок, а давление в соответствии с (17.6) при конечных функциях $\rho(y)$ остается непрерывным на КГ $p_1 = p_2$. Внутри слоев *1* (нижний) и *2* (верхний) эти функции задаются следующим образом.

(i) Два изохорических слоя — кусочно-постоянное распределение плотности. Оно равно

$$\rho(y) = \rho_1, \ y < 0, \qquad \rho(y) = \rho_2, \ y > 0. \tag{17.7}$$

Это частный случай политропы (16.23) с политропическим показателем $N = -1$. Поэтому остальные функции являются степенными.

(ii) Два изотермических слоя — кусочно-постоянное распределение температуры. Оно равно

$$p(y)/\rho(y) = p_1/\rho_1, \ y < 0, \qquad p(y)/\rho(y) = p_2/\rho_2, \ y > 0. \tag{17.8}$$

Имеется скачок температуры на КГ. В (17.7), (17.8) и ниже ρ_1 и ρ_2 — значения плотности на КГ по разные стороны от нее. Зависимости остальных[2] функций от y являются экспоненциальными.

(iii) Два изэнтропических слоя — кусочно-постоянное распределение энтропии. Оно равно

$$p(y)/[\rho(y)]^\gamma = p_1/\rho_1^\gamma, \ y < 0, \qquad p(y)/[\rho(y)]^\gamma = p_2/\rho_2^\gamma, \ y > 0. \tag{17.9}$$

Имеется скачок энтропии на КГ. Адиабатический случай (17.9) является частным случаем политропы с политропическим показателем $N = 1/(\gamma - 1)$. В этом случае распределения термодинамических функций являются степенными (см. § 16, (16.23)).

[2]То есть отличных от температуры.

Метод решения. Для решения задачи о РТН воспользуемся схемой первого порядка метода крупных частиц (Белоцерковский, Давыдов, 1982). Подробное изложение численной схемы изучаемой задачи содержится в работе Давыдова, Демьянова и Цветкова (1987). Отметим, что в данной схеме на лагранжевом этапе вычисляются потоки массы только по величинам, определенным на эйлеревом этапе (схема с "расщеплением" (Давыдов, 1981)).

Данная схема метода крупных частиц является явной, поэтому она не требует специальных приемов для ее разрешения. Исследуемое течение рассматривается в прямоугольной области, расчетные ячейки имеют прямоугольную или квадратную форму.

Граничные условия (17.3) для боковых границ области имеют простой вид

$$\rho_- = \rho_+,$$
$$\widetilde{u}_- = -\widetilde{u}_+,$$
$$\widetilde{v}_- = \widetilde{v}_+,$$
$$\widetilde{E}_- = \widetilde{E}_+,$$
$$u_- = -u_+,$$
$$v_- = v_+,$$
$$E_- = E_+,$$

где индекс "+" относится к расчетным ячейкам внутри поля течения около боковых границ, а индекс "–" — к двум вспомогательным (левому и правому) лучам. Волной " $\sim$ " помечены величины, полученные после эйлерого этапа.

Граничные условия на верхней и нижней границах более сложные. Для скоростей используется обычное условие вытекания

$$u_- = u_+,$$
$$v_- = v_+,$$
$$\widetilde{u}_- = \widetilde{u}_+,$$
$$\widetilde{v}_- = \widetilde{v}_+.$$

Для промежуточной величины полной энергии $\widetilde{E}$ после эйлерова этапа ставится аналогичное условие

$$\widetilde{E}_- = \widetilde{E}_+.$$

Здесь индексы "–" и "+" имеют такой же смысл (только для верхнего и нижнего вспомогательных лучей), как и для описанной выше постановки условий на боковых границах. Следует подчеркнуть, что "переброс" значений скорости с последнего расчетного луча на нерасчетный для случая задания при $t = 0$ возмущений по формуле (17.5) оправдан, когда член $k|y| \gg 1$. Это означает, что поперечный размер области численного интегрирования много больше длины волны λ.

Процедура нахождения ρ_- и E_- следующая: по формуле

$$P_+ = (\gamma - 1)\rho_+ \left[E_+ - \frac{1}{2}(u_+^2 + v_+^2)\right]$$

находится значение давления в последней ячейке около верхней (или нижней) границы. Затем по формулам для гидростатического давления, следующим в зависимости от рассматриваемой стратификации из формул (17.7), (17.8) или (17.9), определяется величина P_-. После этого аналогично с привлечением распределений (17.7), (17.8) или (17.9) вычисляются искомые значения ρ на этих границах. Наконец, граничные значения E находятся из формулы

$$E_- = P_-/\rho_-(\gamma - 1) + \frac{1}{2}(u_-^2 + v_-^2).$$

Таким образом, граничные условия задачи поставлены для всех величин, которые входят в расчет методом крупных частиц.

Нелинейный анализ полученных разностных схем с помощью дифференциальных приближений (Давыдов, 1981) показал устойчивость применяемых алгоритмов в достаточно широком диапазоне определяющих параметров, в том числе, устойчивость на границе расчетной области и в ее окрестности (Белоцерковский, Давыдов, 1982).

17.2. Решения для одной гармоники

Проверки метода. Описанный выше алгоритм метода крупных частиц был апробирован путем сравнения с численными расчетами задачи о РТН, проведенными другими авторами. Кроме того, были сделаны сравнения с линейным решением и с экспериментальными данными.

На рис. 17.1 приведено положение контактной поверхности в момент времени $t = 2$ в случае, когда начальное возмущение задается в виде возмущения границы по формуле (17.4). Параметры, определяющие конкретный режим, были следующими: $b_0 = 0,1$, $\rho_2 = 1$, $\rho_1 = 0,5$, ($\rho_{21} = \rho_2/\rho_1 = 2$), $g = 1$, $\gamma = 1,4$ (двухатомные молекулы), изохорическая стратификация (i). Здесь обезразмеривание выполнено по параметрам λ, g и ρ_2.

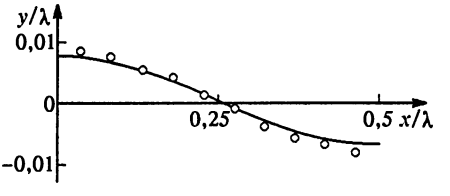


Рис. 17.1

Видно, что момент времени $t = 2$ соответствует нелинейной стадии. Положение контактной поверхности здесь и далее строится по среднему значению плотности $\rho_0 = 0,5(\rho_1 + \rho_2)$. Такой способ выбора ρ_0 прост и, как показано в работах Давыдова и Пантелеева (1981), Белоцерковского и Давыдова (1982), Давыдова, Демьянова и Цветкова (1987) правильно улавливает изменение формы контактной поверхности. На рис. 17.1 точками нанесено решение задачи, полученное Бабенко и Петровичем (1980) для аналогичных начальных данных. Видно удовле-

творительное совпадение результатов. В районе пузыря максимальное расхождение нашего численного решения (по положению контактной поверхности) с цитируемым не превосходит 7%. В районе струи расхождение составляет $\simeq$ 12%. При $x/\lambda \approx 0,25$ результаты практически совпадают.

В последующих расчетах при $t = 0$ задаются возмущения скоростей по формулам (17.5), (17.5′) (Давыдов, Пантелеев, 1981; Белоцерковский, Давыдов, 1982; Давыдов, Демьянов, Цветкова, 1987; Daly, 1967). Такое задание начальных возмущений позволяет выбирать амплитуду A в (17.5) достаточно большой. Это приводит к более быстрому развитию процесса неустойчивости, что существенно для сокращения времени счета на подробных сетках. Поле скоростей $\mathbf{v}$ (17.5), (17.5′) бездивергентно

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

На рис. 17.2 представлены последовательные положения контактного разрыва при $\lambda = 4$, $A = 0,78$, $g = 1$, $\gamma = 1,4$, $\rho_2 = 1$, $\rho_{21} = 10$ при изохорической стратификации (моменты t указаны на рисунке). Отметим, что при этих значениях A и λ конвективные члены в уравнениях количества движения оказываются порядка архимедовских. Их оценка равна

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \sim A^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \approx 0,96 \approx g.$$

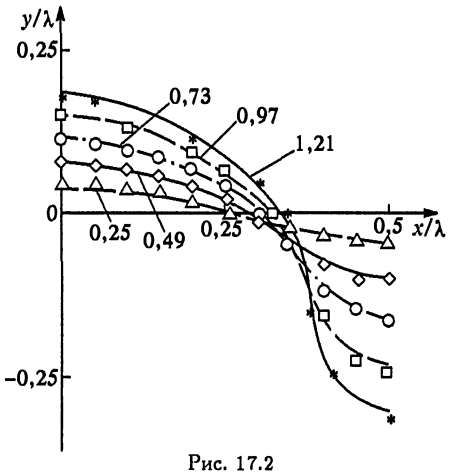


Рис. 17.2

На этом же рисунке соответствующими значками указаны положения контактного разрыва, взятые из работы (Daly, 1967), для тех же времен и определяющих параметров. Видно хорошее совпадение расчетов во всем диапазоне изменения t $(0 < t \leq 1,21)$. Максимальное расхождение не превышает 7%.

Следует отметить, что в работе (Daly, 1967) численный расчет проводится методом MAC (маркеров в ячейках) (см. книгу Белоцерковский и Давыдов, 1982)) и рассматривается течение несжимаемой жидкости. Исходя из этого, можно заключить, что для стратификации (i) при $\rho_{21} \approx 10$ и выбранном значении давления на нижней границе сжимаемость газа не оказывает заметного влияния на развитие РТН в указанном выше диапазоне изменения времени. На рис. 17.3 приведены зависимости роста амплитуды пузыря (кривая a) и струи (кривая b) для рассматриваемого варианта. Знаками здесь же представлено поведение

соответствующих величин из работы (Daly, 1967). Видно хорошее совпадение результатов. Из рис. 17.3 следует, что линейная стадия развития неустойчивости заканчивается при $t \simeq 0,25$.

На рис. 17.4, 17.5 приведены соответственно положения контактной поверхности в различные моменты времени и рост амплитуды пузыря (нижняя кривая) и струи (верхняя кривая) для $\rho_{21} = 2$ (все остальные

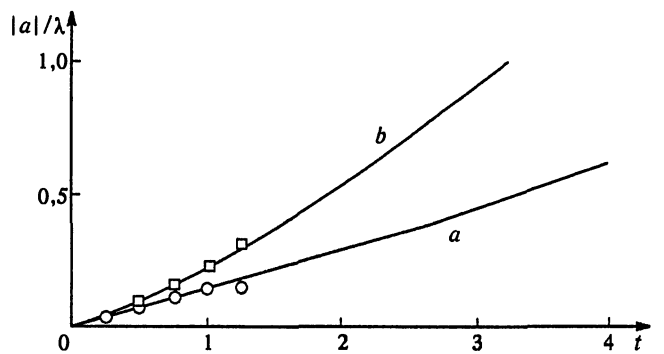


Рис. 17.3

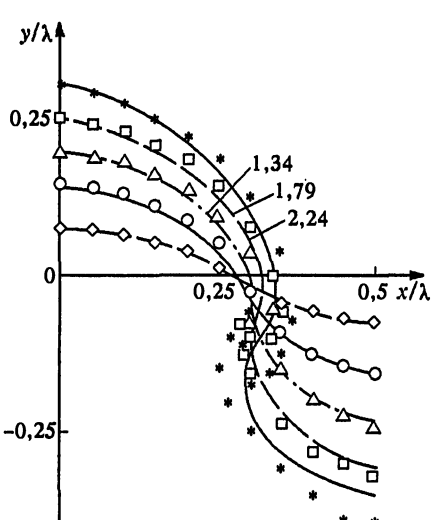


Рис. 17.4

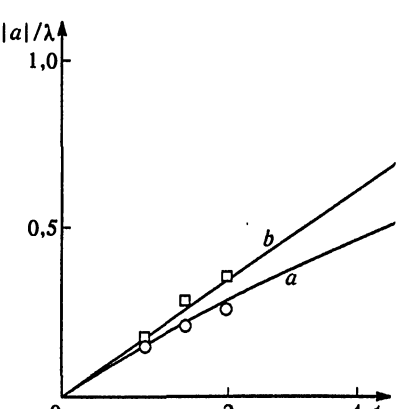


Рис. 17.5

параметры аналогичны варианту, представленному на рис. 17.2). На рис. 17.4 знаками нанесены соответствующие данные из работы (Daly, 1967). Видно, что при малых и умеренных временах развития процесса результаты расчетов методом крупных частиц и методом MAC совпадают.

Начиная с $t \approx 1,34$, численные результаты хорошо соответствуют данным (Daly, 1967) в районе пузыря (расхождение результатов здесь не превосходит 6%) и расходятся с этими расчетами в районе струи и в области, где зарождается гриб. На рис. 17.5 знаками нанесены соответствующие значения роста амплитуд пузыря и струи из работы (Daly, 1967). Некоторые расхождения численного расчета с данными (Daly, 1967) возможно вызваны разницей систем дифференциальных уравнений (в работе (Daly, 1967) рассматриваются уравнения для несжимаемой жидкости). Следует отметить, что режимы с $\rho_{21} = 10$ и $\rho_{21} = 2$ рассчитывались в работе (Давыдов и Пантелеев, 1981) по аналогичной программе методом крупных частиц. Результаты настоящей работы и результаты (Давыдов и Пантелеев, 1981), полученные по различным программам одного и того же алгоритма, полностью совпадают.

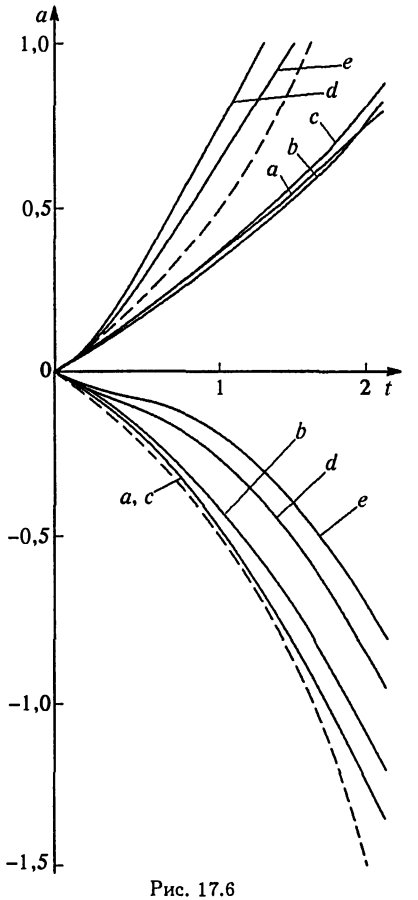


Рис. 17.6

Асимптотические характеристики пузыря. Так из рис. 17.2–17.5 для $\rho_{21} = 2$ и $\rho_{21} = 10$ можно оценить радиус кривизны пузыря R в вершине и скорость его всплытия U_B. Для $\rho_{21} = 2$ $R \approx 1,3$ (в использованных единицах), $kR \approx 2$ и $U_B \approx \approx 0,47$ (тоже в использованных единицах), $U_B/\sqrt{(1-1/\rho_{21})g\lambda} \approx 0,33$; для $\rho_{21} = 10$ $R \approx 1,6$, $kR \approx 2,5$ и $U_B \approx 0,55$, $U_B/\sqrt{(1-1/\rho_{21})g\lambda} \approx \approx 0,29$.

Был проведен расчет изохорической стратификации при меньшей амплитуде начального возмущения скорости. Его параметры равны $\rho_{21} = 10$, $g = 1$, $\gamma = 1,4$, $\widetilde{P} = = 10$, P — давление на КГ, $\rho_2 = 1$, $A = 0,4$, $\lambda = 4$. Для этих значений оценка конвективного члена в начальный момент равна $u\frac{\partial u}{\partial x} \approx \approx 0,252$. Рост амплитуд пузыря и струи для указанных данных приведен на рис. 17.6 в виде кривой $\langle a \rangle$ ($y > 0$ — пузырь, $y < 0$ — струя). При этом из расчета получено значение $U_B \approx 0,4$. Тогда число Фруда равно $\mathrm{Fr} = U_B/\sqrt{g\lambda} \approx 0,2$. Это значение удовлетворительно согласуется с вычисленным по формуле $\mathrm{Fr}(\rho_1/\rho_2) = \mathrm{Fr}(0)(1-\rho_1/\rho_2)^{1/2} \approx 0,22$, $Fr(0) \approx 0,23$, выведенной в работе (Anisimov, Zeldovich, Inogamov & Ivanov, 1983), см. также гл. VI,

посвященную аналитике одномодовых решений. В приведенном расчете выбирались квадратные ячейки с шагами $\Delta x = \Delta y = 0,1$, $\lambda/\Delta x = 40$.

Сравнение с расчетом в два раза более мелким шагом приведено на рис. 17.6. Ему соответствует кривая b. Максимальное расхождение (при $t = 2$) между кривыми a и b для пузыря не превышает 5%, а для струи — 12%.

Кривая c на рис. 17.6 соответствует случаю $\widetilde{P} = 5$ ($\Delta x = \Delta y = 0,1$). Ее поведение указывает на слабое влияние данного параметра при изохорической стратификации на РТН. Пунктирная кривая на рис. 17.6 представляет собой линейное решение данной задачи. Оно хорошо описывает процесс развития неустойчивости до амплитуд возмущений $A \simeq 0,1\lambda$. При этом инкремент нарастания возмущений оказался немного больше классического. Он равен

$$\delta = \sqrt{\frac{gk(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 + \rho_1)}} \approx 1,13.$$

О значении 2D расчетов. Остановимся на вопросе о роли размерности пространства в рассматриваемой задаче о РТН. Рассчитать данную задачу в трехмерном случае до поздних стадий развития процесса трудно из-за ограниченности оперативной памяти ЭВМ. Проведенные расчеты этой задачи (см., например, работы (Давыдов и Пантелеев, 1981; (Белоцерковский и Давыдов, 1982; (Белоцерковский, Давыдов и Демьянов, 1986; (Давыдов, Демьянов и Цветков, 1987; Давыдов, 1978), эксперименты (Lewis, 1950) и аналитический анализ (Inogamov & Abarzhi, 1995c; Абаржи, Иногамов, 1995d; Иногамов, 1995e; Inogamov, 1997b) показывают, что 2D и 3D случаи отличаются в основном количественными характеристиками (см. также гл. VI, п. 30.2). Однако как пространственный (3D), так и плоский (2D) случаи имеют качественно схожие механизмы развития возмущений. Это обстоятельство позволяет считать исследование плоской задачи актуальным и интересным.

Таким образом, комплексное сравнение с линейным решением (Taylor, 1950; Chandrasekhar, 1961), с численными данными (Daly, 1967), с аналитическими решениями (см. гл. VI) и экспериментальными данными показывает, что на применяемых разностных сетках точность численного расчета составляет $\simeq 10\%$. Следует отметить также, что в настоящем методе расчет производим "сквозным" образом, а положение контактной поверхности находим самым простым способом. Все это говорит о высокой эффективности и надежности метода крупных частиц при решении данного класса нестационарных задач механики жидкости и газа.

Формирование гриба. При малых значениях ρ_{21} формирование гриба начинается на довольно поздней стадии развития неустойчивости. На рис. 17.7 показано решение задачи для $\rho_{21} = 10$ (остальные параметры такие же, как в расчете, приведенном на рис. 17.2). В районе окончания струи видно характерное утолщение, которое растет со временем. Такой характер формирования струи при больших значениях ρ_{21} соответствует

экспериментам (Ratafia, 1973). Анализу грибов посвящены п. 30.4 и п. 30.5. Зависимость от ρ_{21} ($\equiv \mu$) рассматривается в §29, см. рис. 29.1,

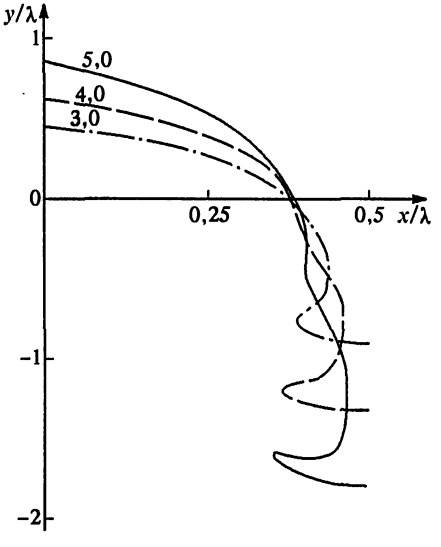


Рис. 17.7

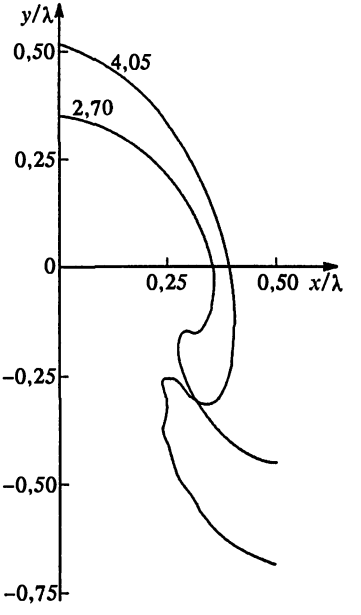


Рис. 17.8

29.2 и 29.3. На рис. 17.8 показано решение задачи при $\rho_{21} = 2$ (остальные параметры такие же, как в варианте, представленном на рис. 17.4).

Роль стратификации. Рассмотрим влияние стратификации на РТН. Сравним двухслойные распределения (i — изохоры), (ii — изотермы) и (iii — изэнтропы).

На рис. 17.6 кривые e и d соответствуют распределениям(ii) и (iii). Параметры равны $\widetilde{P} = 10$, $\Delta x = \Delta y = 0,1$. Остальные параметры такие же, как в варианте, представленном кривой $\langle a \rangle$ на данном рисунке. Наблюдается более быстрый подъем пузыря по сравнению с изохорическим случаем (i). И наоборот, струя опускается медленнее. Причем эти эффекты оказываются сильнее при изотермической (экспоненциальной) стратификации (ii), чем при изэнтропической (степенной) (iii). По-видимому, это обусловлено выталкиванием вверх всей системы пузырь–струя при использовании условий вытекания на горизонтальных границах расчетной области. Видимо, это выталкивание зависит от того, как спадает плотность в тяжелом газе с высотой y, и оказывается сильнее при экспоненциальной стратификации, когда вверху находится меньше вещества. Эта особенность схемы и сравнение моделирования при жестких и свободных (вытекание) горизонтальных граничных условиях будут детально проанализированы в гл. VI.

Конфигурации контактной поверхности для различных стратификаций носят похожий характер, что отражено на рис. 17.9. Здесь для одного и того же момента времени $t = 2$ приведены положения контактной поверхности для указанных на рис. 17.8 вариантов (кривые c, d, e). Кривая a на рис. 17.9 соответствует изохорам (i), кривая $\langle b\rangle$ — изотермам (ii), а кривая $\langle c\rangle$ — адиабатам (iii). Это означает, что горизонтальные верхняя и нижняя границы находятся далеко от КГ и эффект от относительно небольшого выталкивания невелик. Действительно, при изотермической стратификации (ii) в приведенных расчетах высота атмосферы равна $h_2 = \widetilde{P}/\rho_2 g = 10$ в тяжелом газе и $h_1 = \widetilde{P}/\rho_1 g = 100$ в легком. Отсюда можно заключить, что рассматриваемый слой газа достаточно глубок, т. к. $h_2/\lambda = 2{,}5$, а $h_1/\lambda = 25$. Вертикальный размер прямоугольной расчетной области превосходил ее горизонтальный размер в 2–4 раза. Использовались сетки как с квадратными, так и с прямоугольными, вытянутыми по вертикали, ячейками. Одновременно из этого следует, что число Маха $\mathrm{M} = v/c$, вычисленное у КГ в тяжелом газе по скорости подъема пузырей, небольшое и соответственно влияние сжимаемости невелико. Это число равно

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{Fr}(0)\sqrt{(1-\rho_1/\rho_2)g\lambda}}{c_2} = \mathrm{Fr}(0)\sqrt{\frac{(1-\rho_1/\rho_2)}{\gamma}\frac{\lambda}{h_2}} \approx 0{,}12,$$

$$\mathrm{Fr}(0) \approx 0{,}23.$$

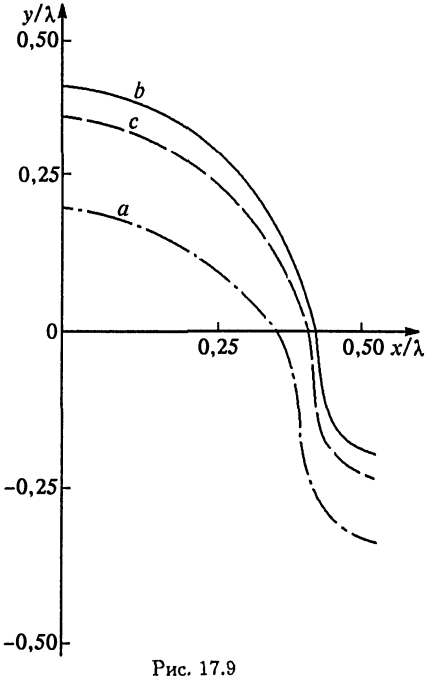


Рис. 17.9

Шаг по времени определялся скоростью звука в нижнем газе. Эта скорость растет $\propto \sqrt{\rho_2/\rho_1}$ при уменьшении относительной плотности нижнего газа и соответственно при повышении его относительной температуры[3]. Для уменьшения роли сжимаемости требуется уменьшение числа Маха, а это согласно критерию Куранта требует расчетов с мелким шагом по времени.

17.3. Нелинейное взаимодействие гармоник

Двухмодовые возмущения. Рассмотрим вопрос о взаимодействии двух (и более) волн на эволюцию контактной поверхности при РТН (Белоцерковский, Давыдов, Демьянов, 1986; Давыдов, Демьянов, Цветков, 1987;

[3] Давление непрерывно на КГ.

Иногамов, 1978; Anisimov, Zeldovich, Inogamov, Ivanov, 1983; Inogamov, Chekhlov, Dem'yanov, Anisimov, Belotsirkovskii, 1991b). На длинноволновую моду (с длиной волны λ и амплитудой A) накладывается более коротковолновая мода (с длиной волны λ_1 и амплитудой A_1). Начальное поле скоростей равно

$$u = \pm[A\sin(kx)\exp(-k|y|) + A_1\sin(k_1x)\exp(-k_1|y|],$$

$$v = A\cos(kx)\exp(-k|y|) + A_1\cos(k_1x)\exp(-k_1|y|),$$

где, как и в выражении (17.5), знаки плюс и минус относятся к областям $y > 0$ и $y < 0$ соответственно, $k_1 = 2\pi/\lambda_1$.

Если рассматривать данную задачу в линейном приближении, то общеизвестно, что возмущение с более короткой длиной волны "подавляет" возмущение с бóльшей длиной волны. На нелинейной же стадии

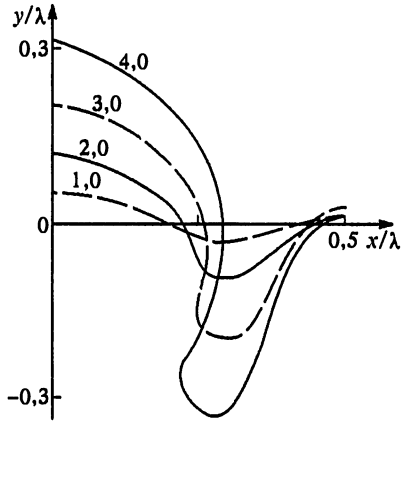


Рис. 17.10

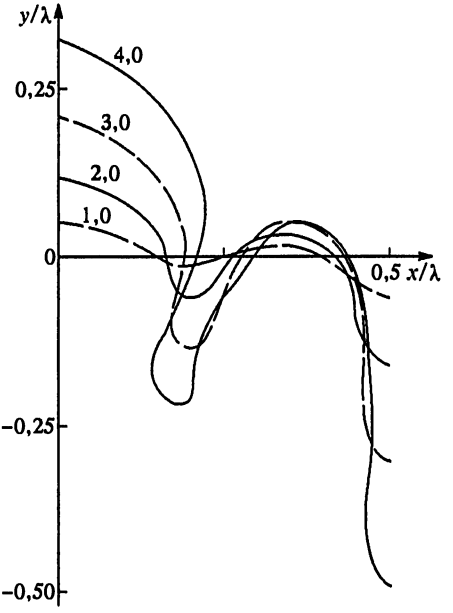


Рис. 17.11

развития возмущений оказывается, что нестационарный процесс "помнит" длинноволновое возмущение, которое с течением времени начинает играть определяющую роль (этот вопрос рассматривается в гл. VII и VIII).

На рис. 17.10—17.13 приведена серия расчетов по взаимодействию двух мод. Определяющие параметры равны $A = A_1 = 0,3$, $\rho_{21} = 10$, $g = 1$, $\gamma = 1,4$, $\rho_2 = 1$, $\widetilde{P} = 15$, $\lambda = 10$, стратификация (i). На рис. 17.10 ($\lambda/\lambda_1 = 2$) показаны последовательные положения контактной поверхности в различные моменты времени. Видно, что струя тяжелой

компоненты "проваливается" в легкую и имеет горизонтальную составляющую скорости по оси Ox. Происходит сближение пузырей из-за их притяжения. В окрестности $x = \lambda/2$ видно, что с увеличением t возмущение с длиной волны λ начинает играть преобладающую роль. Из

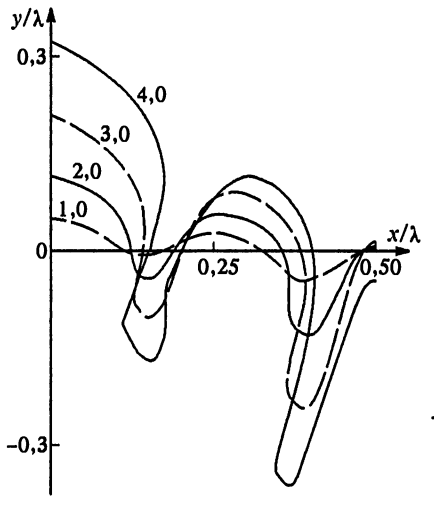


Рис. 17.12

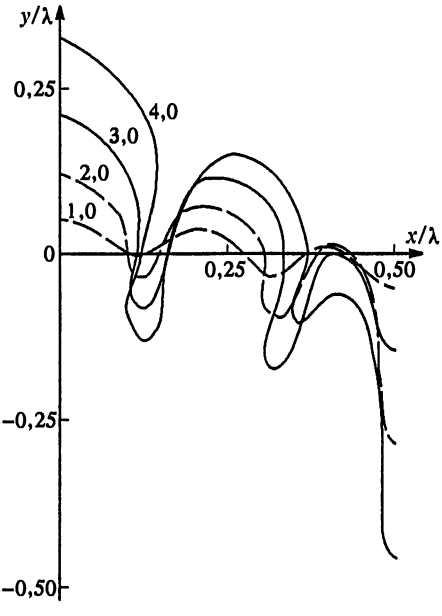


Рис. 17.13

рис. 17.11 ($\lambda/\lambda_1 = 3$) видно, что наряду со струей в районе $x = \lambda/2$, формируется еще одна внутренняя струя в районе $x = \lambda/4$, которая (как и на рис. 17.10) имеет тенденцию отклониться по горизонтали. Видно также образование двух пузырей, которые имеют тенденцию к объединению из-за развивающегося процесса утончения и схлопывания струи. На рис. 17.12 ($\lambda/\lambda_1 = 4$) наблюдаются две наклонные струи, одна из которых (ближе к оси $x = 0$) начинает утоньшаться. При $x = \lambda/2$ доминирует волна λ по сравнению со случаем, представленным на рис. 17.10. На рис. 17.13 ($\lambda/\lambda_1 = 5$) при $t = 4$ виден процесс исчезновения ранее достаточно развитой струи в окрестности луча $x = 0,3\lambda - 0,4\lambda$.

Видно, что случай с $\lambda/\lambda_1 = 5$ в рассматриваемой серии расчетов (рис. 17.10–17.13) является самым характерным для динамики притяжения пузырей, исчезновения и схлопывания струй. Однако на более далеких стадиях развития процесса неустойчивости для случаев $\lambda/\lambda_1 = 2$ и $\lambda/\lambda_1 = 3$ наблюдаются похожие эффекты.

Многомодовые возмущения. Рассмотрим процесс развития РТН в случае, когда начальное возмущение равно комбинации из нескольких мод.

Многомодовые начальные возмущения скоростей равны

$$u = \pm \left[A \sin(kx) \exp(-k|y|) + \sum_{i=1}^{4} A_i \sin(k_i x) \exp(-k_i|y|) \right],$$

$$v = A \cos(kx) \exp(-k|y|) + \sum_{i=1}^{4} A \cos(k_i x) \exp(-k_i|y|).$$

Здесь рассматривается случай пяти мод, $k_i = 2\pi/\lambda_i$, знаки плюс и минус относятся к областям $y > 0$ и $y < 0$. При этом на лучах $x = 0$ и $x = \lambda/2$ задаются, как обычно, условия симметрии.

На рис. 17.14 представлены последовательные положения КГ при $\rho_{21} = 10$, $\rho_2 = 1$, $g = 2$, $\gamma = 1,4$, $\widetilde{P} = 15$, $A = 0.2$, $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0,1$, $\lambda = 10$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10/3$, $\lambda_3 = 2,5$, $\lambda_4 = 2$, изохорическая

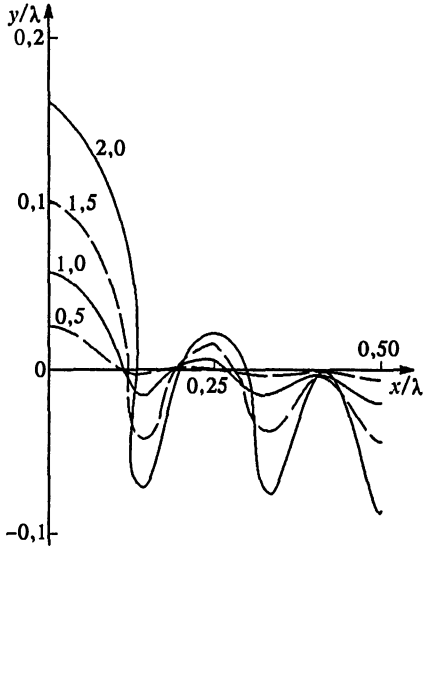


Рис. 17.14

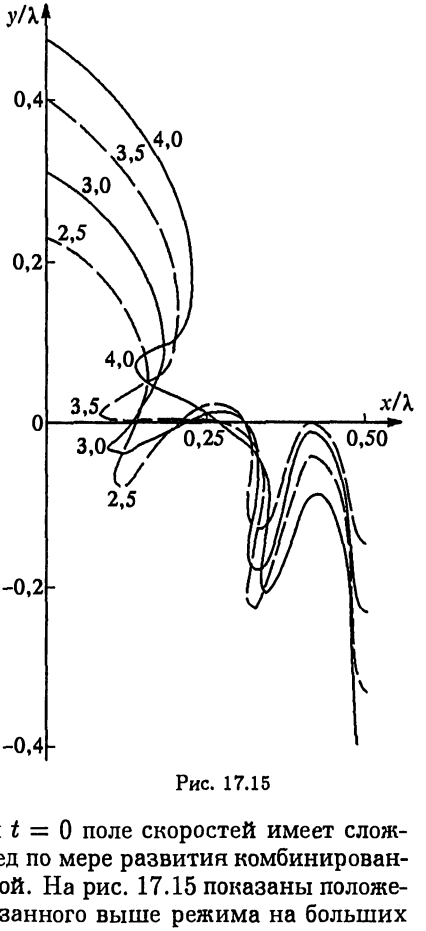


Рис. 17.15

стратификация. Видно, что хотя при $t = 0$ поле скоростей имеет сложный характер, линия раздела двух сред по мере развития комбинированного возмущения остается непрерывной. На рис. 17.15 показаны положения контактной поверхности для указанного выше режима на больших

временах. Как видим, здесь также отслеживаются процессы объединения и конкуренции пузырей.

§ 18. Численное моделирование в несжимаемой жидкости

18.1. Некоторые общие замечания

Здесь будет рассмотрено обобщение метода искусственной сжимаемости, позволяющего моделировать несжимаемую жидкость, на случай нестационарных и неоднородных по плотности потоков. Общепризнано, что при изучении таких сложных явлений, как РТН, нельзя ограничиться только физическим экспериментом и/или аналитическими подходами. Построение численных моделей дает возможность "очистить" процесс от побочных при данном рассмотрении факторов, чего бывает нелегко достичь в физическом эксперименте. В некоторых ситуациях данные численного эксперимента гораздо "дешевле" данных, получение которых связано с натурным экспериментом. Кроме того, численная модель дает более полную информацию о явлении по сравнению с экспериментом. Эти факторы делают применение численного моделирования в данном случае весьма желательным. Подтверждением сказанного служит большое количество "вычислительных" публикаций на эту тему.

Работы по численному моделированию РТН и близких к ней явлений ведутся с 50-х годов. Не имея возможности рассмотреть все работы по данной теме, ограничимся лишь обзором некоторых первых работ. Это даст представление об основных подходах и проблемах, актуальных и сейчас. По-видимому, одними из первых удачных работ следует считать работы, выполненные в Лос-Аламосской лаборатории (США) во второй половине 1960-х годов. Эти расчеты проводились на основе разработанных там таких методов моделирования нестационарных течений несжимаемой жидкости, как MAC (Markers-And-Cells), LINC (Lagrangian IN-Compressible). Эти и другие, появившиеся с тех пор методы, можно отнести либо к эйлеровому, либо к лагранжевому подходам к движению жидкости (существуют также методы со смешанным лагранжево-эйлеровым подходом). Проанализируем некоторые работы, использующие каждый из подходов.

В работе (Harlow & Welch, 1966) для расчета падения несжимаемой жидкости в "вакуум" (изобарическое граничное условие на КГ, см. гл. III) под действием постоянного гравитационного ускорения использовано расширение метода MAC для течений со свободной поверхностью (Harlow & Welch, 1965; Welch, Harlow, Shannon & Daly, 1966). Двумерная область течения покрывалась фиксированной (эйлеровой) разнесенной сеткой прямоугольных ячеек. Уравнения движения в естественных переменных (скорость, давление) аппроксимировались с первым порядком по времени. Течение жидкости отслеживали невесомые частицы-маркеры, скорости которых определялись на каждом временном шаге с первым порядком точности по пространству. Это позволяло определять в любой момент времени положение свободной поверхности.

[3] Этот параграф подготовлен А. В. Чехловым.

Кроме этого маркеры никак не участвовали в вычислениях (пассивные маркеры). Уравнение Пуассона для давления решалось итерационным методом.

На основе построенного алгоритма исследованы линейная и нелинейная стадии развития неустойчивости. Для нескольких значений числа Рейнольдса изучено влияние вязкости на РТН. Движение свободной поверхности начиналось под действием начального одномодового импульса давления, приложенного к свободной поверхности. Проведено сравнение полученных результатов с линейным решением. На достаточно больших временах скорость пузыря хорошо согласовывалась с аналитическими результатами работ (Birkhoff & Carter, 1957) и (Garabedian, 1957), а струя падала с постоянным ускорением, равным гравитационному. По-видимому, это было первым численным подтверждением существования стационарного движения пузырей (см. гл. VI).

Все вычисления проводились с ненулевой вязкостью, но несмотря на это, наблюдались характерные искажения свободной поверхности, которые, вероятно, связаны с развитием спонтанных короткомасштабных возмущений. Одним из недостатков данного алгоритма является то, что он моделирует довольно узкий класс течений (лишь для одной жидкости, падающей в "вакуум").

Другим примером использования эйлеровой методики, но уже для расчета двухжидкостной РТН, является работа (Daly, 1967). Отличия использованного в этой работе метода от метода работы (Harlow & Welch, 1966) следующие: рассматривались две несжимаемые жидкости вместо одной; вместо свободной поверхности рассматривалась контактная; маркеры участвовали в вычислительном алгоритме. Такая постановка привела к двойной итерационной схеме для расчета давления и плотности. Контактная поверхность в начальный момент считалась плоской (возмущение вносилось в скорости жидкостей), причем, как и в работе (Harlow & Welch, 1966), начальные возмущения были одномодовыми.

Представленные в данной работе результаты расчетов иллюстрируют влияние отношения плотностей и вязкости на РТН. Для конечных значений этого отношения (они должны быть не слишком малы для того, чтобы происходило насыщение скорости гриба, см. гл. VI) показано, что и струя, и пузырь при больших временах двигаются с постоянной скоростью. Для вязких течений получено хорошее соответствие с теоретическими результатами (Chandrasekhar, 1961). Также показано, что при конечном отношении плотностей происходит образование грибов[4].

Тем не менее данный метод имеет существенный недостаток — использование маркеров требует большого объема машинной памяти, и при недостаточном количестве расчеты течений с сильной деформацией контактной поверхности будут невозможны из-за потери точности.

Для расчета нестационарных течений несжимаемой жидкости со свободной поверхностью был создан метод LINC (Батлер, 1973), расчетные

[4]Об образовании грибов так же, как и во многих следующих работах, говорится в терминах неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (НКГ) — говорится, что НКГ сопровождает развитие РТН.

ячейки в котором перемещаются вместе с жидкостью. Аппроксимация уравнений движения в естественных переменных производилась на четырехугольных ячейках разнесенной сетки. Так же, как и в рассмотренных выше работах, давление можно найти, как решение уравнения Пуассона. В работе (Батлер, 1973) представлены расчеты развития одномодовых возмущений вплоть до нелинейной стадии РТН. Главным достоинством такого подхода является возможность "точно" следить за положением свободной поверхности. В частности, может быть исследовано влияние поверхностного натяжения. К недостаткам следует отнести отмеченную в работе (Батлер, 1973) необходимость регуляризации сетки и потерю точности при сильной деформации контактной поверхности. Это делает практически невозможным применение этого подхода при моделировании сильно развитой неустойчивости.

Возможно применение комбинированного лагранжево-эйлерового подхода, например, как в методе ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian), для моделирования такого рода задач (Херт, 1973; Anisimov, Zel'dovich, Inogamov & Ivanov, 1983).

Из проведенного обзора численных работ можно сделать вывод о том, что для исследования развитой неустойчивости наиболее эффективны методы, основанные на эйлеровом подходе. В данном параграфе будет построен эйлеров численный алгоритм для моделирования внутренних сильно развитых течений несжимаемой неоднородной жидкости в поле массовых сил. Будут представлены результаты расчетов двухжидкостной РТН при одномодовых начальных возмущениях вплоть до асимптотической стадии (п. 18.5 и гл. VI), при двухмодовых возмущениях (п. 18.6 и гл. VII) и при задании многомодовых начальных возмущений (п. 18.6 и гл. VIII) с последующим сильным перемешиванием жидкостей.

18.2. Постановка нелинейной задачи

В этом разделе опишем физическую и математическую постановки задачи о РТН в несжимаемой вязкой жидкости.

В двумерном случае рассмотрим два слоя несжимаемых жидкостей, имеющих общую прямую линию контакта в перпендикулярном этой линии поле силы тяжести. Причем нас будет интересовать неустойчивая ситуация, когда тяжелая жидкость находится над легкой. Будем обзначать величины, относящиеся к тяжелой жидкости индексом "1", а величины, относящиеся к легкой жидкости, — индексом "2". Тогда пусть d_1 и d_2 — соответствующие толщины слоев, ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкостей ($\rho_1 > \rho_2$), а μ_1 и μ_2 — коэффициенты динамической вязкости жидкостей, причем в данной работе будем рассматривать случай $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Пусть $\mathbf{g} = \{0, -g\}$ — постоянное ускорение силы тяжести.

Рассмотрим нестационарное движение единой неоднородной жидкости при следующих предположениях:

отсутствуют поверхностное натяжение и теплопроводность;

жидкость несжимаема.

При этих предположениях справедливы интегральные законы сохранения обьема, массы и импульса. Эти законы в областях, где скорость,

давление и плотность непрерывны вместе с их первыми производными, эквивалентны следующей системе дифференциальных уравнений (Овсянников и др., 1985):

$$\begin{aligned} &(\nabla \mathbf{u}) = 0, \\ &\rho_t + (\mathbf{u}\nabla)\rho = 0, \\ &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla\rho - \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{g}, \end{aligned} \tag{18.1}$$

где $\mathbf{u} = \{u, v\}$, P, ρ — скорость, давление и плотность жидкости.

В данном случае это условие не выполнено: плотность, а если $\mu = 0$, и касательная к линии контакта скорость разрывны в любой момент времени. Тем не менее, мы будем считать систему (18.1) верной во всей области $\Omega = \{-\infty < x < +\infty, -d_2 < y < d_1\}$, понимая ее в некотором обобщенном смысле. Опуская здесь подробности исследования обобщенной постановки данной задачи, поясним, что ее решение можно искать в некотором классе допускающих разрывы обобщенных функций. Тогда, обозначая через D класс бесконечно непрерывных финитных функций с носителем, содержащимся в нашей области Ω, каждое уравнение системы (18.1) следует понимать следующим образом: для любой функции $\varphi(t, x, y)$ из множества D должно быть выполнено некоторое интегральное уравнение, связывающее функции $\mathbf{u}$, P, ρ, φ (интегрирование ведется по области Ω). Это интегральное уравнение при достаточно гладких подынтегральных функциях $\mathbf{u}$, P, ρ с помощью формулы интегрирования по частям переходит в соответствующее дифференциальное уравнение классической системы (18.1).

В случае же разрывных подынтегральных функций $\mathbf{u}$, P, ρ данное интегральное уравнение является обобщением соответствующего дифференциального, хотя уже не эквивалентно ему (подробнее см., например, в работе (Chorin, 1967)). Такого рода обобщенная постановка обладает следующим свойством: ее разностная аппроксимация эквивалентна аппроксимации системы (18.1), что можно проверить, применив формулы разностного суммирования по частям. Таким образом, на разностном уровне (при соответствующей аппроксимации) безразлично, какую задачу решать: классическую или обобщенную. Этот факт и является основанием для того, что для описания РТН мы будем рассматривать систему (18.1), итак нас будут интересовать лишь ее разностные решения.

При отсутствии возмущений в начальный момент времени имеем абсолютно неустойчивое положение равновесия:

$$\nu\,|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{u}\,|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \rho\,|_{t=0} = \rho_0 = \begin{cases} \rho_1 & \text{при} \quad y < 0 \\ \rho_2 & \text{при} \quad y > 0. \end{cases} \tag{18.2}$$

Злесь и далее функция $y = \nu(t, x)$ задает границу раздела. В качестве возмущения, выводящего жидкости из этого положения, в различных численных работах брались: возмущение плотности (формы контактной

поверхности), импульс давления на контактной поверхности, возмущение скорости. Как показал опыт этих работ, наиболее "удобным" с вычислительной точки зрения оказалось вносить начальные возмущения в поле скорости. Поэтому мы рассматриваем случай, когда в момент времени $t = +0$ возникают возмущения лишь в поле скорости[5]

$$\mathbf{u}\big|_{t=+0} = \mathbf{u}_0.$$

Для получения конкретного вида начальных возмущений скорости нам потребуются решения линеаризованной вблизи гидростатического равновесия системы (18.1) с двумя типами наиболее "интересных", с нашей точки зрения, граничных условий на верхней и нижней границах области Ω.

18.3. Решения трех линеаризованных задач

В данном параграфе получены формулы одномодовых потенциальных линейных решений задачи о двухжидкостной РТН при отсутствии физической вязкости для полубесконечных жидкостей и для жидкостей конечной глубины с двумя типами граничных условий на верхней и нижней границах. Показано, как влияют рассматриваемые типы граничных условий на линейное решение задачи о РТН.

Уравнение линии контакта: $F(t, x, y) = 0$ при достаточно малом времени может представляется в виде: $y = \nu(t, x)$.

Допустим, что при $t > 0$ возникли малые вместе со всеми необходимыми производными отклонения от положения равновесия (18.2) в скорости, давлении и плотности. В таком случае система (18.1) (при $\mu = 0$) может быть линеаризована по данным малым возмущениям

$$\begin{aligned} &(\nabla \mathbf{u}^i) = 0, \\ &\mathbf{u}^i_t + \frac{1}{\rho_i}\nabla p^i = \mathbf{g}, \\ &i = \{1, 2\}. \end{aligned} \tag{18.3}$$

Линеаризованные и снесенные на $y = 0$ краевые условия на контактной линии примут следующий вид:

$$\nu_t = v, \quad p^1 = p^2, \quad v^1 = v^2.$$

Будем искать потенциальные одномодовые решения системы (18.3) с потенциалом $\Phi(t, x, y)$ следующего вида:

$$\Phi(t, x, y) = \Phi_1(t)\Phi_2(y)\cos(kx), \quad \text{где} \quad \Phi_x = u, \quad \Phi_y = v. \tag{18.4}$$

Заметим, что для полной постановки начально-краевой задачи для системы (18.3) необходимы либо условия на бесконечности по y, либо граничные условия.

[5] В §17 рассматривались и возмущения КГ.

Под задачей a) будем понимать задачу для полубесконечных жидкостей ($-\infty < y < +\infty$) с условиями затухания:

$$\Phi_2 \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \pm\infty.$$

Под задачами b) и c) будем понимать задачи в конечной по оси y области ($-d_2 < y < d_1, \quad -\infty < x < +\infty$). В задаче b) рассмотрим условия

$$v_y\Big|_{y=d} = v_y\Big|_{y=-d}, \quad u\Big|_{y=d} = u\Big|_{y=-d}. \tag{18.5}$$

Данные граничные условия позволяют жидкости вытекать из области, поэтому будем называть их "открытыми".

В задаче c) рассмотрим граничные условия

$$v\Big|_{y=d} = v\Big|_{y=-d} = 0; \quad u_y\Big|_{y=d} = u_y\Big|_{y=-d}. \tag{18.6}$$

Это обычные условия непротекания или условия "твердой стенки".

Опуская громоздкие подробности нахождения функций Φ_1 и Φ_2, приведем лишь окончательный вид решений задач a), b), c):

a)

$$\begin{aligned}
\nu &= A\omega_a^{-1}\cos(kx)\,\mathrm{sh}(\omega_a t),\\
u^1 &= A\exp(-ky)\sin(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_a t), \quad k = 2\pi/\lambda,\\
u^2 &= -A\exp(ky)\sin(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_a t),\\
v^1 &= A\exp(-ky)\cos(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_a t),\\
\omega_a &= \left\{\frac{kg(\rho_1-\rho_2)}{(\rho_1+\rho_2)}\right\}^{1/2};
\end{aligned} \tag{18.7}$$

b)

$$\begin{aligned}
\nu &= A\omega_{\mathrm{B}}^{-1}(1+\exp(-2kd_2))\cos(kx)\,\mathrm{sh}(\omega_{\mathrm{B}} t),\\
u^1 &= A(1+\exp(-2kd_2))(1+\exp(-2kd_1))^{-1}\times\\
&\quad\times\exp(-ky)(1-\exp(2k(y-d_1)))\sin(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_{\mathrm{B}} t),\\
u^2 &= -A\exp(ky)(1-\exp(-2k(y+d_2)))\sin(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_{\mathrm{B}} t),\\
v^1 &= A(1+\exp(-2kd_2))(1+\exp(-2kd_1))^{-1}\times\\
&\quad\times\exp(-ky)(1+\exp(2k(y-d_1)))\cos(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_{\mathrm{B}} t),\\
v^2 &= A\exp(ky)(1+\exp(-2k(y+d_2)))\cos(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_{\mathrm{B}} t),\\
\omega_{\mathrm{B}} &= \left\{\frac{kg(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1\,\mathrm{th}(kd_1)+\rho_2\,\mathrm{th}(kd_2)}\right\}^{1/2};
\end{aligned} \tag{18.8}$$

c)

$$\nu = A\omega_c(1-\exp(-2kd_2))\cos(kx)\,\mathrm{sh}(\omega_c t),$$

$$u^1 = A(1-\exp(-2kd_2))(1-\exp(-2kd_1))^{-1}\times$$
$$\times\exp(-ky)(1+\exp(2k(y-d_1)))\sin(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_c t),$$

$$u^2 = -A\exp(ky)(1+\exp(-2k(y+d_2)))\sin(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_c t),$$

$$v^1 = A(1-\exp(-2kd_2))(1-\exp(-2kd_1))^{-1}\times \qquad (18.9)$$
$$\times\exp(-ky)(1-\exp(2k(y-d_1)))\cos(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_c t),$$

$$v^2 = A\exp(ky)(1-\exp(-2k(y+d_2)))\cos(kx)\,\mathrm{ch}(\omega_c t),$$

$$\omega_c = \left\{\frac{kg(\rho_1-\rho_2)\,\mathrm{th}(kd_1)\,\mathrm{th}(kd_2)}{\rho_1\,\mathrm{th}(kd_2)+\rho_2\,\mathrm{th}(kd_1)}\right\}^{1/2};$$

Не приведенные здесь для сокращения объема текста функции P^1 и P^2 нетрудно с точностью до произвольной функции $\varphi(t)$ получить по выписанным функциям (18.7), (18.8) или (18.9) с помощью системы (18.3).

Линейная теория применима до времен порядка обратного инкремента

$$t \sim \left|\frac{1}{\omega}\ln\left(|\nu_0|\,k+\frac{|v_0|\,k}{|\omega|}\right)\right|. \qquad (18.10)$$

В (18.10) ν_0 и v_0 — начальные амплитуды возмущений КГ и скорости.

Отметим следующие свойства полученных линейных решений (18.7), (18.8), (18.9):

1) При конечных d_1 и d_2 выполнено $\omega_B < \omega_a < \omega_c$;

2) Решения (18.8), (18.9) стремятся к решению (18.7) при d_1 и d_2, стремящихся к бесконечности.

Обратим внимание на следующее важное свойство решений (18.7)–(18.9): у этих решений отсутствует непрерывная зависимость от начальных данных (например, от амплитуды A). Это очевидно из следующего равенства:

$$\|\,\nu\,\|_c = \max_{\substack{0<t<T\\ 0<x<\lambda/2}} |\,\nu(t,x)\,| = \delta(d_2)\frac{A}{\omega}\,\mathrm{sh}(\omega T), \qquad (18.11)$$

вид функции δ и инкремента ω определяются тем, о какой задаче идет речь: a), b) или c). Равенство (18.11) означает, что линеаризованные задачи a), b), c) в норме C при $t \in [0,+\infty)$ поставлены некорректно.

Решения b) и c) позволят нам точнее ставить начальные условия при численном моделировании. Обычно исследователи ограничиваются решением вида a) (18.7), пренебрегая, таким образом, влиянием верхней и нижней границ, которое при конкретных расчетах в ограниченных расчетных прямоугольниках может быть заметным.

18.4. Метод решения нелинейной задачи

В данной работе будем изучать развитие во времени в общем случае N-модовых начальных возмущений при условии, что в начальном спектре $\{A_i, \lambda_i\}$ есть лишь моды с длинами волн из следующего набора:

$$\lambda_i = \lambda/i, \quad \text{где} \quad \lambda = \max_{i=\overline{1,N}}(\lambda_i), \quad i = \{1, 2 \ldots, N\}. \tag{18.12}$$

Фазы в такой постановке могут иметь следующий вид: $\varphi_i = \pi k_i$, где k_i — целые числа, поэтому они учитываются знаком амплитуды A_i. Эта постановка соответствует разложению в ряд Фурье функции, заданной в "ящике" — на отрезке горизонтальной оси длиной λ. Допустим также, что если функции u, P, ρ удовлетворяли в начальный момент времени на некоторой вертикальной прямой $x = x_0$ условиям симметрии

$$u = 0, \quad v_x = 0, \quad P_x = 0, \quad \rho_x = 0, \tag{18.13}$$

то это их свойство сохранится и в последующие моменты времени.

Разностная схема численного решения нелинейной начально-краевой задачи о РТН в данной работе строилась на основе метода искусственной сжимаемости (параболической ε-регуляризации условия несжимаемости). Приоритет в такого рода подходе принадлежит, по-видимому, (Chorin, 1967). Для этого систему (18.1) будем рассматривать как предел при $\varepsilon \to +0$ следующей ε-возмущенной системы:

$$\begin{aligned} &\varepsilon P_t + (\nabla \mathbf{u}) = 0, \\ &\rho_t + (\mathbf{u}\nabla)\rho = 0, \\ &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{\mu}{\rho}\Delta \mathbf{u} = \mathbf{g}. \end{aligned} \tag{18.14}$$

Начальные данные для этой системы будем задавать в виде

$$\mathbf{u}\,|_{t=0} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{u}_0(A_i, \lambda_i). \tag{18.15}$$

Здесь $u(A, \lambda)$ — линейное решение, взятое в момент времени $t = 0$ из формул (18.8) при граничных условиях (18.5) или из формул (18.9) при граничных условиях (18.6); давление в начальный момент времени, также в соответствии с линейным решением бралось гидростатическим.

Наложенные ограничения позволяют нам выбрать следующую расчетную область: $W = 0 < x < \lambda/2$, $-d < y < d$. Определив решение в этой области, а затем симметрично "отражая" функции u, P, ρ влево и вправо, можно определить решение во всей области Ω.

Сформулируем теперь полностью нелинейную начально-краевую задачу для системы (18.14). В области W в любой момент времени $t > 0$ будем искать функции $u = u(t, x, y), v(t, x, y), P(t, x, y), \rho(t, x, y)$, удовлетворяющие системе (18.14), начальным условиям (18.15), граничным условиям (18.5) или (18.6) при $y = -d$ и $y = d$ и условиям (18.13) при $x = 0$ и $x = \lambda/2$.

Как отмечалось в книге Темама (1981), первое уравнение системы (18.14) можно рассматривать как линеаризованное уравнение изменения энергии для сжимаемого идеального газа. Тогда между параметром ε и характеристиками газа есть следующая связь:

$$c_s = (\rho\varepsilon)^{-1/2},$$

где c_s — скорость звука.

Метод искусственной сжимаемости успешно применялся в работах (Темам, 1981; Chang & Kwak, 1984; Квак и др., 1987) для расчетов внутренних и внешних стационарных течений однородной несжимаемой жидкости в различных постановках. Было показано, что по сравнению с методиками, "точно держащими" дивергенцию скорости равной нулю, данный подход обладает гораздо более быстрой сходимостью к стационарному решению. Отмечалось также такое качество данного подхода, как *отсутствие* граничных условий для давления. Таких условий зачастую нет в физической постановке задачи, а корректное их введение не всегда возможно. В книге (Темам, 1981) для однородной несжимаемой жидкости доказана теорема о сходимости решения ε-возмущенной системы к решению невозмущенной при $\varepsilon \to +0$.

В излагаемой работе, по-видимому, впервые метод искусственной сжимаемости применяется для расчета нестационарных внутренних течений неоднородной несжимаемой жидкости. Вопрос о математической корректности данного подхода в этой работе рассматриваться не будет. Мы ограничимся лишь сравнением получаемых численных решений с другими известными результатами.

Будем использовать следующие обозначения:

$$f = f(t,x,y), \qquad \widehat{f} = f(t+\tau,x,y), \qquad f_t = (\widehat{f} - f)/\tau,$$

где $f = \{u, v, P, \rho\}$. В этих обозначениях аппроксимация по времени, используемая для численного решения системы (18.14), имеет вид

$$\begin{aligned} \beta\tau P_t + (\nabla\widehat{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \rho_t + (\,(\nabla\rho)\,\widehat{\mathbf{u}}\,) &= 0, \\ \mathbf{u}_t + N(\mathbf{u},\mathbf{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla\widehat{P} - \frac{\mu}{\rho}\,\Delta\,\widehat{\mathbf{u}} &= \mathbf{g}, \end{aligned} \tag{18.16}$$

где через $N(\mathbf{u},\mathbf{u})$ обозначены конвективные члены $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$, записанные в консервативной форме, а τ — шаг по времени. Выбор параметра в виде $\varepsilon = \beta\tau$, где $\beta = \text{const} > 0$, отличает данный подход от работ (Темам, 1981; Квака и др., 1987; Chang & Kwak, 1984) и обеспечивает первый порядок аппроксимации по времени. В схеме (18.16) для нахождения скорости на следующем временном шаге требуется решение операторного уравнения:

$$(D + \tau\, B)\,\widehat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \tag{18.17}$$

где

$$B\mathbf{u} = -\frac{\nabla(\nabla\mathbf{u})}{\beta} - \mu\Delta\mathbf{u}$$

или в операторном виде

$$B = -\frac{1}{\beta}\,\nabla(\nabla_-) - \mu\Delta_-,$$

$D = \rho E$ (E — единичный оператор),

$$F = \tau\rho\left[\mathbf{g} - N(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \frac{1}{\rho}\,\nabla P\right].$$

Аппроксимация по пространству осуществлялась на разнесенной разностной сетке следующим образом. Конвективные члены в схеме (18.16) аппроксимировались с помощью гибридной монотонной разностной схемы второго порядка, построенной в работе (Белоцерковский и др., 1987). Как отмечалось в этой работе, свойство монотонности оказывается весьма существенным при моделировании такого рода задач и в данном случае позволяет однозначно находить положение контактной поверхности (КГ) в любой момент времени, как линию уровня $(\rho_1 + \rho_2)/2$ функции $\rho(t,x,y)$. Остальные пространственные дифференциальные операторы аппроксимировались с помощью центральных разностей так, чтобы общий порядок аппроксимации по пространству в схеме (18.16) был вторым. Имея в виду данную пространственную аппроксимацию схемы (18.16), под операторами в (18.17) следует понимать квадратные матрицы, а под векторами — столбцы значений в узлах сетки. Размер системы линейных алгебраических уравнений (18.17) равен $2\,Nx\,Ny$, где Nx — число ячеек вдоль оси OX, Ny — вдоль оси OY. Матрица этой системы, в чем нетрудно убедиться, является 13-диагональной, симметрической и положительно определенной при условиях: $0 < \mu < +\infty$, $0 < \rho < +\infty$. Тогда, если ввести треугольные матрицы B_1 и B_2 по следующим формулам: $B_1 + B_2 = B$, $B_1 = B_2^*$, то труднообратимая матрица уравнения (18.17) может быть приближенно факторизована. Для этого нужно в (18.17) добавить член $\tau^3\,B_1\,D^{-1}\,B_2\,\mathbf{u}_t$, что не нарушает первый порядок аппроксимации схемы по времени. В этом случае уравнение для скорости на следующем временном шаге (18.17) примет вид:

$$(D + \tau\,B_1)\,D^{-1}\,(D + \tau\,B_2)\,\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F} + \tau^2\,B_1\,D^{-1}\,B_2\,\mathbf{u}. \qquad (18.18)$$

Из этого уравнения скорость жидкости на следующем временном шаге может быть найдена с помощью попеременного обращения двух треугольных матриц за $O(NxNy)$ действий. Решение первых двух уравнений в схеме (18.16) не представляет труда и также может быть выполнено за $O(NxNy)$ действий. Схемы, которые тратят на расчет одного временного слоя число арифметических действий, пропорциональное числу узлов сетки, являются оптимальными в данном смысле, и их называют экономичными разностными схемами.

Можно показать корректность (18.17), а именно, при условии:

$$\forall t \quad 0 < t < T, \quad \forall x \quad 0 < x < \lambda/2, \quad \forall y \quad -d_2 < y < d_1:$$

$$0 < \rho_2 < \rho(t,x,y) < \rho_1 < +\infty,$$

которое выполнено в силу монотонности схемы, решение (18.18) существует, единственно и непрерывно зависит от правой части:

$$\| u \| < \frac{\rho_2}{\rho_1^2} \| \mathbf{F} + \tau^2 B_1 D^{-1} B_2 \mathbf{u} \| .$$

Заметим, что приближенная факторизация (18.18) верна лишь в том случае, когда член $\tau^3 B_1 D^{-1} B_2 \mathbf{u}_t$ много меньше остальных членов уравнения (18.17). Это условие может приводить к росту процессорного времени при расчетах вариантов с относительно большой вязкостью или с достаточно близкой к нулю плотностью ρ_2. В остальных случаях данная безытерационная схема (18.16),(18.18) оказывается достаточно эффективной.

Одним из важных вопросов в данном подходе является вопрос о выборе параметра псевдосжимаемости β и шага по времени τ.

Использованная нами ε-возмущенная система (18.14) допускает распространение псевдоакустических возмущений. Если амплитуда этих возмущений не превосходит погрешности численного решения, то такой расчет будем считать качественным. Это условие определяет верхнюю границу параметра псевдосжимаемости β. С другой стороны, выбор конкретного значения β определяет собой выбор максимального значения шага по времени τ, при котором еще идет устойчивый счет, и, тем самым, определяет время расчета данного варианта. Условие приемлемости времени счета дает нижнюю границу параметра псевдосжимаемости β. В работе (Квак и др., 1987) для случая однородной жидкости приведены оценки для верхней и нижней границ параметра β, но в любом случае конкретное значение параметра β приходится подбирать в процессе расчетов.

Шаг по времени τ выбирается так, чтобы, во-первых, расчет варианта занимал минимальное количество процессорного времени и, во-вторых, выполнялось условие устойчивости используемой разностной схемы. Самым простым способом, очевидно, является постоянный шаг $\tau = \text{const}$. Но в таком случае, ввиду роста скорости решения со временем, рано или поздно расчет выйдет за пределы численной устойчивости разностной схемы. Для избежания этого предлагается использовать переменный шаг по времени, подстраивающийся к решению, исходя из некоторого упрощенного условия устойчивости. Например, в качестве условия на выбор τ можно использовать критерий

$$C_x^2 + C_y^2 < C^2,$$

где $C_x = \tau|u|/\Delta x$, $C_y = \tau|v|/\Delta y$, $C = \text{const} > 0$, Δx, Δy — шаги по пространству, или более сложное условие устойчивости гибридной схемы из работы (Белоцерковский, Гущин и Коньшин, 1987).

По-видимому, требуется еще замечание по поводу монотонности предлагаемой схемы. Дело в том, что понятие монотонной разностной схемы строго определено лишь для одномерного случая. Действительно, в работе (Белоцерковский, Гущин и Коньшин, 1987) предложена гибридная

монотонная разностная схема для одномерного линейного уравнения переноса. В нашем двумерном случае аппроксимация квазилинейных конвективных членов в (18.16) осуществлялась при помощи одномерных операторов гибридной схемы из работы (Белоцерковский, Гущин и Коньшин, 1987), и монотонность получающейся разностной схемы следует понимать в смысле монотонности вдоль направлений Ox и Oy. В работе (Квак и др., 1987) немонотонная аппроксимация второго порядка приводила к необходимости введения дополнительных сглаживающих членов, что уменьшало порядок аппроксимации и увеличивало время счета.

Таким образом, построенная нами разностная схема обладает свойствами экономичности и монотонности и имеет первый порядок по времени и второй по пространству.

18.5. Развитие одномодовых возмущений

Обсудим некоторые результаты численного решения поставленной выше нелинейной начально-краевой задачи. Хотя исследование развития многомодовых начальных возмущений представляет наибольший интерес, в данном разделе обсуждается случай $N = 1$ — начальное возмущение в виде одной гармоники (18.15) в невязком случае $\mu = 0$. Расчеты проводились на ЭВМ средней производительности (порядка одного миллиона операций с плавающей запятой в секунду) с помощью описанной выше неявной разностной схемы метода искусственной сжимаемости (18.18), (18.16). Рассматривались оба типа граничных условий ("открытые" условия и условия "твердая стенка") на верхней и нижней границах расчетной области. Подробный анализ влияния этих условий дан в п. 29.2.

Как уже отмечалось ранее, если амплитуда начального возмущения достаточно мала, то возникающее движение жидкости достаточно точно описывается формулами линейного решения (18.8) или (18.9) до времен порядка одного обратного инкремента, см. (18.10). Известно, что при временах, больших нескольких обратных инкрементов, течение приобретает существенно нелинейный характер, из-за чего возникают сильные расхождения с линейной теорией (см. гл. VI, работы (Harlow & Welch, 1966) и (Daly, 1967)). В дальнейшем течение становится асимптотическим (см. §§ 26, 27, 29 и 30).

Форма контактной границы зависит от отношения плотностей (см. §§ 29 и 30). Она меняется от близкого к симметричному относительно инверсии $y \to -y$ течения (толстые грибы при малых значениях числа Атвуда $A \ll 1$), до несимметричного течения в виде тонких проваливающихся струй тяжелой жидкости и широких всплывающих пузырей легкой жидкости (тонкие грибы при $A \approx 1$). В работе (Anisimov et al., 1983) была приведена, по-видимому, первая аналитическая формула

$$\dot{y}_B = \mathrm{Fr}(\rho_2/\rho_1)(g\lambda)^{1/2} = \mathrm{Fr}(0)(1-\rho_2/\rho_1)^{1/2}(g\lambda)^{1/2}, \qquad (18.19)$$

где $\dot{y}_B$ — скорость пузыря, $\mathrm{Fr}(0) = 0,23$, для предельной скорости всплытия пузыря с *учетом* зависимости от A. Сравнению теорий пузырей и

струй с численным моделированием посвящены § 29 и 30. Здесь отметим только, что данные по одномодовым расчетам, полученные с помощью метода искусственной сжимаемости, хорошо согласуются с аналитическими результатами и данными моделирования другими методами. Исходя из этого, можно заключить, что построенная разностная схема оказалась эффективной.

18.6. Развитие двух- и многомодовых возмущений

Субгармоники и укрупнение. Одномодовое стационарное периодическое течение является довольно абстрактным, поскольку в любом, сколь угодно точно поставленном эксперименте время жизни этого течения будет ограничено (Иногамов, 1978; Anisimov, Zel'dovich', Inogamov & Ivanov, 1983; Иногамов, 1990d; Inogamov, Chekhlov, Dem'yanov, Anisimov & Belotserkovskii, 1991b), см. гл. VII и VIII. Через некоторое время, определяемое уровнем "шума" в эксперименте, оно разрушится, и возникнет сложное нестационарное течение, сопровождающееся бурным перемешиванием жидкостей, причем от эксперимента к эксперименту трудно будет обнаружить повторяющиеся черты в возникающих течениях: образующиеся вихри, струи, пузыри будут иметь различную форму, будут расположены в разных местах и т. д. В численном эксперименте тоже приходится сталкиваться с неповторимостью: незначительно меняя начальные данные, на достаточно больших временах мы получим сильно отличающиеся друг от друга течения. Безусловно, в этой неповторимости возникающих течений большую роль играет "шум" дополнительных (кроме основных) мод в начальном спектре с масштабом порядка размера расчетной ячейки, порожденных численным счетом. Тем не менее это влияние оказывается достаточно малым в среднем: средние характеристики зоны перемешивания и крупные структуры течения, как мы покажем, передаются верно. И, поскольку нелинейный характер явления приводит к сложному взаимодействию отдельных мод возмущений между собой, к рождению новых мод, наибольший интерес представляет именно изучение развития многомодовых возмущений при РТН.

Исследование нелинейного развития нескольких (даже двух) мод в начальном возмущении с помощью аналитических подходов сталкивается с большими трудностями, и в настоящее время достаточно хорошо исследованы линейная и ассимптотическая стадии развития лишь одномодовых возмущений. Поэтому РТН с многомодовыми начальными возмущениями теоретически изучают в основном численно.

Будем называть сложное течение, возникающее при РТН на достаточно больших временах и сопровождающееся сильным перемешиванием жидкостей, стадией турбулентного перемешивания.

В данном разделе обсуждается подход к описанию турбулентного перемешивания жидкостей при РТН, продолжающий идеи работ (Иногамов, 1978; Anisimov et al., 1983; Иногамов, 1990d) и (Inogamov, Chekhlov, Dem'yanov, Anisimov & Belotserkovskii, 1991b). Речь идет о динамическом описании турбулентного перемешивания. Данный подход основывается на гипотезе о переходе к турбулентной стадии РТН через после-

довательное укрупнение характерного масштаба возникающего течения с ростом времени. Доказано (Иногамов, 1978), что причиной данного укрупнения масштаба является субгармоническая неустойчивость (см. гл. VII) одномодового стационарного периодического течения.

В работе (Иногамов, 1978) приведена аналогия с двумерным поперечным обтеканием бесконечной прямолинейной цепочки цилиндров потоком невязкой жидкости. Если все цилиндры расположены на равном расстоянии друг от друга, то результирующая сила, действующая на каждый цилиндр, равна нулю. Если же каждый второй цилиндр в цепочке сдвинуть на некоторое расстояние в одном и том же направлении, то в парах сближенных цилиндров возникает сила притяжения, пропорциональная смещению.

Указанное укрупнение со временем масштаба течения следует понимать следующим образом. В любой момент времени в спектре возмущений $A(\lambda)$, где A — действительная амплитуда фурье-моды с длиной волны λ, будет существовать выделенный максимум амплитуды, соответствующий преобладающей в данный момент моде. Здесь спектром называется разложение в ряд Фурье функций от переменной x, например, ρ, u, v или P при фиксированных y, t. С ростом времени этот максимум будет смещаться в сторону бóльших λ, стартуя от некоторой наименьшей длины волны $\lambda_{\min}$, определяемой стабилизирующими эффектами (вязкостью, поверхностным натяжением и т. д.), вплоть до некоторой наибольшей длины волны $\lambda_{\max}$, определяемой максимальным размером, имеющимся в данной задаче. В этом, по мнению авторов, и заключается основная закономерность эволюции зоны турбулентного перемешивания.

Существование этого укрупнения наряду с экспериментальными наблюдениями было подтверждено численно в работах (Белоцерковский, Давыдов и Демьянов, 1986; Давыдов, Демьянов и Цветков, 1987) для случая РТН в сжимаемом идеальном газе. В данном разделе приводятся аналогичные расчеты для случая несжимаемой жидкости. Изучается разрушение стационарного одномодового течения при наложении на него дополнительного более длинноволнового возмущения (длинноволновая вторичная, модуляционная или субгармоническая неустойчивость) (Inogamov & Chekhlov, 1990).

Бигармонические возмущения: конкуренция и притяжение. Рассмотрим сначала случай $N = 2$, когда в начальном спектре (18.15) присутствуют две гармоники. Причем, для того чтобы ожидаемое укрупнение масштаба было более очевидным, рассматривались специально подобранные моды в начальном возмущении. Для моделирования однократного удвоения масштаба были проведены расчеты двух вариантов, имеющих следующие общие параметры: $\mu = 0$ (только схемная вязкость), $\beta = 1$, $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0,1$, $g = 2$, $d_1 = d_2 = 15$ (рис. 18.1 и 18.2), $d_1 = 15$, $d_2 = 45$ (рис. 18.3), $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$ и $A_1 = 0,3$.

Отличие вариантов друг от друга было в следующем: в первом выбиралось $A_2 = A_1$ (этот выбор приводит к тому, что возникает течение, в котором каждый второй пузырь больше каждого первого — это мода

конкуренции пузырей); во втором варианте бралось $A_2 = -A_1$ (в таком случае возникает течение, в котором каждая вторая струя толще каждой первой — это мода притяжения пузырей). Ширина расчетной области бралась равной половине общего периода λ_1 возникающего течения. На верхней и нижней границах области ставились как "открытые" (рис. 18.1 и 18.2), так и "жесткие" (рис. 18.3) условия.

Положения линии контакта (КГ) в последовательные моменты времени для первого и второго вариантов представлены на рис. 18.1 (первый) и 18.2, 18.3 (второй). Из рис. 18.1 видно, что к концу расчетной

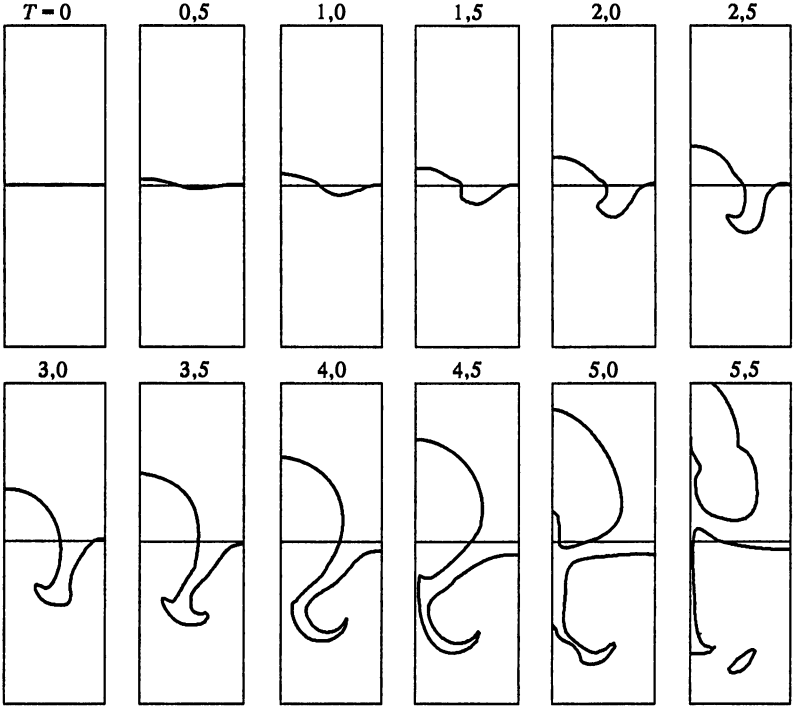


Рис. 18.1. Конкуренция пузырей. Эволюция формы КГ при $N = 2$, $\lambda_1/\lambda_2 = 2$, $A_1/A_2 = 1$ и "открытых" граничных условиях. Сетка 40 × 120, отношение пространственных шагов равно $\Delta y/\Delta x = 1,072$. Число Куранта равно 0,001

эволюции произошло ожидаемое удвоение периода: более крупный пузырь подавил более мелкий второй пузырь.

Интересной динамической особенностью конкуренции больших пузырей, раздувающихся за счет малых пузырей, является втягивание в раздувающийся большой пузырь струй, разделявших большой и малый пузыри. Обратим внимание в этой связи на последние кадры эволюции, представленной на рис. 18.1. Втягивание приводит к образованию перемычек и изолированных пузырей. Этот вопрос обсуждается ниже, см. п. 30.4, п. 30.5 и рис. 30.19.

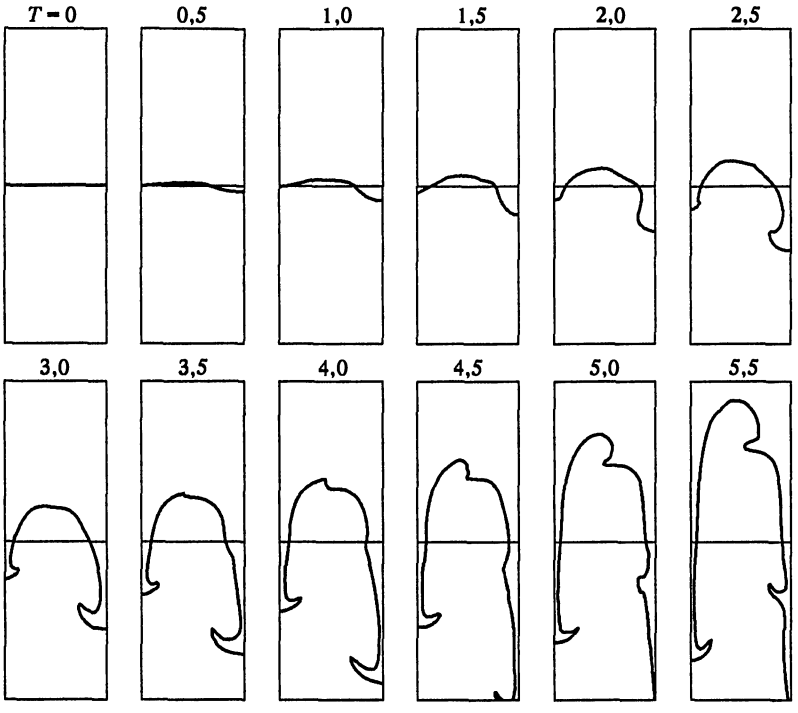


Рис. 18.2. Притяжение пузырей. Параметры равны: $A_1/A_2 = -1$, сетка 40 × 120, отношение шагов $\Delta y/\Delta x = 1,072$, "открытые" гранусловия. Число Куранта равно 0,001

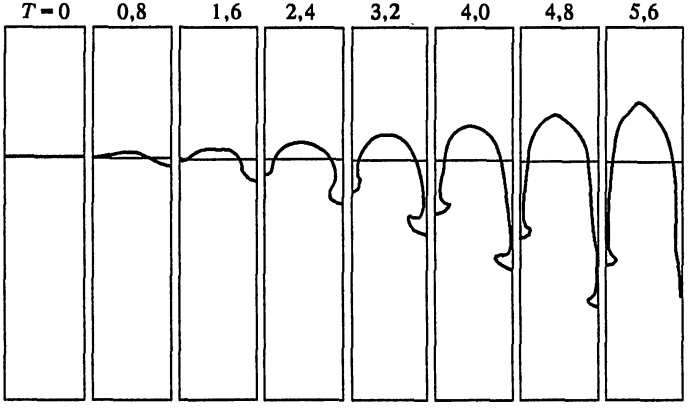


Рис. 18.3. Притяжение пузырей: $A_1/A_2 = -1$, сетка 20 × 240, отношение шагов $\Delta y/\Delta x = 1$ (квадратные ячейки), "жесткие" гранусловия — очень вытянутая расчетная область. Число Куранта равно 0,01

Динамика перемычек оказывается сложной. Происходят столкновения струй, в результате которых образуются новые струи, вылетающие под другими углами. Говорят о разделении и повороте исходных струй. В варианте, показанном на рис. 18.1, сталкивающиеся струи симметричны — струя ударяет в левую боковую границу ("стенку"). При этом она разделяется на две J_u и J_d, см. последние два кадра эволюции. Одна струя (J_u) по инерции поднимается вверх против силы тяжести, а другая (J_d) поворачивает вертикально вниз. Особенно сложным в этом отношении является 3D случай. Обсуждению периодического 3D течения посвящен раздел п. 30.2.

Во втором варианте, на рис. 18.2 и 18.3, всплывающий пузырь несколько смещается со временем к левой границе расчетной области, а более развитая и толстая струя (на рис. правая) обгоняет менее развитую.

О линейной стадии субгармонической неустойчивости. Выше на примере субгармоник $A(k/2)$ с удвоенной длиной волны $\lambda = 2\pi/(k/2)$ и фазами ± 1 продемонстрировано существование "вторичной"[6] длинноволновой или субгармонической неустойчивости. Для того, чтобы представить, к каким топологическим или грубым (например, удвоение периода) последствиям приведет сильно нелинейное развитие субгармоник, и для сокращения времени счета, начальная амплитуда субгармоник была выбрана большой. Для исследования *линейной* стадии развития субгармонической неустойчивости такая грубая постановка не годится — требуется, чтобы начальные амплитуды $A(k/2)$ были очень малы, см. работы (Inogamov et al., 1991b) и (Anisimov et al., 1993) и гл. VII. Поскольку изложение субгармоник следует начать с систематической теории, то целесообразно отложить описание бигармонических случаев, полученное методами, изложенными в § 17 и 18, при малых амплитудах до гл. VII.

Здесь сделаем только несколько замечаний.

1) Субгармоническая неустойчивость — это неустойчивость периодических стационарных течений (периодических стационаров, см. гл. VI). В силу этого глава об этой неустойчивости располагается после главы о периодических стационарах.

2) Принцип численного моделирования этой проблемы выглядит следующим образом. На периодический стационар, существующий при $t < 0$, "накладывается" в момент $t = 0$ малое субгармоническое возмущение. Невозмущенное течение стационарно. Поэтому временная (t) и пространственные (в 2D x, y) переменные разделяются. На линейной стадии зависимость амплитуды возмущения от t отделяется в виде множителя $\exp(\gamma_s t)$ (s — субгармоника). Назначение численного моделирования заключается в определении этого числа γ_s. Спрашивается, будет ли оно действительным и положительным? Если да, то имеется неустойчивость. В этом случае возникает вопрос следующего порядка. Каково по величине это число? Из размерного анализа следует, что отношение

[6]При этом "первичной" называется неустойчивость гидростатического равновесия, в котором границы горизонтальны и жидкость покоится.

$\gamma_s/\sqrt{gk}$ (строгие стационары существуют при A = 1) масштабно инвариантно. Оно должно быть порядка единицы. Но будет ли оно $\simeq 1$ или окажется значительно меньше единицы? [7]Величина $\gamma_s/\sqrt{gk}$ существенно сказывается на механике укрупнений. Если она оказалась бы мала, то укрупнения происходили бы медленно и соответственно еще медленнее продвигался бы фронт перемешивания в сторону тяжелой жидкости.

3) Технически моделирование осуществляется так. При $t = 0$ берется бигармоническое начальное возмущение с амплитудами $A_1/\sqrt{g/k} \sim 1$ (или $A(k)$) и $A_2/\sqrt{g/k} \ll 1$ (или $A(k/2)$). Тогда за время $t_1 \simeq 1/\sqrt{gk}$ устанавливается стационар с длиной волны $2\pi/k$, а уже затем в течение промежутка времени $t_2 \simeq (1/\gamma_s)$, $\ln(2/A_2k)$ происходит развитие субгармонического возмущения на удвоенной длине волны. За небольшое по сравнению с t_2 время t_1 амплитуда субгармоники не успевает заметно измениться. За амплитуду субгармонического возмущения при $t > t_1$ принимается в случае моды конкуренции разность вертикальных координат большого и малого пузырей.

Субгармоники и высокие обертоны. В теории РТН важное место занимают периодические решения (о причинах этого см. ниже § 23). Они разлагаются в ряды Фурье с амплитудами A_n и волновыми числами k_n. В периодическом случае $k_n = nk$, где $n = 1, 2, \ldots$ — целые числа, $\lambda = 2\pi/k$ — период. В периодическом решении функции $A_n(t)$ согласованы между собой. При $t \to \infty$ система асимптотически выходит на стационар ("остановка" движения). Амплитуды принимают значения $A_n(t = \infty)$, соответствующие этому стационару.

Выше анализировался вопрос об окрестности стационара в классе субгармонических возмущений. Рассматривался частный случай субгармоники с $k_s = k/2$. Не будем касаться собственных функций задачи, линеаризованной около стационара. Наложим просто на стационарный ряд гармоник A_n, nk гармоническое возмущение $A(k/2)$, $k/2$ ($A(k/2) \ll A_n$). Тогда на нелинейной стадии для описания течения потребуются все целые гармоники уже от $k/2$ с согласованными амплитудами порядка единицы. Волновые числа этих гармоник равны $nk/2$, где $n = 1, 2, \ldots$ — целые. Как сказано выше, происходит удвоение периода. Таким образом, развитие субгармоник ведет к глобальным или топологическим изменениям.

Рассмотрим теперь другой класс возмущений (Inogamov & Chekhlov, 1990; Иногамов, Чехлов, 1991c; Inogamov et al., 1991b). В нем *нет выхода за набор* (спектр) волновых чисел nk, $n = 1, 2, \ldots$ Задача ставится так. Имеется стационар (амплитуды, волновые числа) $A_n(\infty)$, nk, $n = 1, 2, \ldots$ Наложим на него при $t = 0$ возмущение (амплитуда, волновое число) ε, mk, где m — фиксированное целое число. Это возмущение является обертоном или старшей гармоникой периода стационара. Спрашивается, какой будет судьба течения?

[7]Например, коэффициент α_+ турбулентного перемешивания, см. гл. VII, также масштабно инвариантен и из общих соображений должен быть $\simeq 1$. Но по причинам динамического характера он оказывается малым ($\approx 5\%$) по сравнению с 1.

В случае короткомасштабных возмущений с $m \gg 1$ этот вопрос тесно примыкает к вопросам о некорректности задачи Коши, к экспоненциальному сглаживанию в малых масштабах и коротковолновому турбулентному перемешиванию, распространяющемуся в пространстве волновых чисел из малых масштабов mk, $m \gg 1$ в большие, порядка k.

Короткомасштабная "шуба" периодического решения. Для численного моделирования этой задачи брались бигармонические начальные данные с далеко разнесенными масштабами гармоник. Оказалось, что хотя КГ сильно изрезана из-за быстрорастущего короткомасштабного возмущения, но *в среднем* течение контролируется длинноволновыми модами. Причем развитие последних идет примерно так же, как при отсутствии короткомасштабных возмущений. Получается, что динамика мелких мод второстепенна. Они создают стохастически осциллирующую, неисчезающую "шубу", в которую "укутана" КГ. Таким образом, численно подтверждается утверждение из работы (Иногамов, 1978) о том, что характерный масштаб определяется именно длинноволновыми модами. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работах (Иногамов и Чехлов, 1991c) и (Inogamov et al., 1991b).

Для того чтобы численно исследовать эту задачу, рассматривалась эволюция одномодового течения с наложенным на него коротковолновым возмущением ("рябью"). Был проведен ряд таких расчетов с различным отношением длин волн основного и дополнительного возмущений: от 2 : 1 до 20 : 1. Наибольшая изрезанность появляется в случае самого мелкомасштабного (из рассмотренных) возмущения 20 : 1 (при фиксированной начальной амплитуде короткомасштабного возмущения во всех случаях от 2 : 1 до 20 : 1).

Результаты расчетов вариантов 1 и 2 с максимальным отношением $\lambda_1/\lambda_2 = 20$ приведены на рис. 18.4–18.6 (вариант 1) и 18.7 (вариант 2). Варианты отличались значениями

1) параметров сеток: 120×120, ячейки прямоугольные $\Delta y/\Delta x = 3$ — вариант 1 и 120×480, ячейки квадратные — вариант 2;

2) относительной высотой расчетного прямоугольника $(d_1+d_2)/(\lambda_1/2)$ (3 : 1 и 4 : 1 в вариантах 1 и 2);

3) отношением d_2/d_1, характеризующим относительную удаленность нижней и верхней границ от начального положения плоской КГ (1 : 1 и 5 : 3 в вариантах 1 и 2);

4) величиной параметра β (50 и 1 в вариантах 1 и 2);

5) амплитудой начальных возмущений: $A_1 = 0,2$, $A_2 = 0,04$, $A_1/A_2 = 5$ — вариант 1 и $A_1 = 0,3$, $A_2 = 0,5$, $A_1/A_2 = 3 : 5$ — вариант 2; (vi) условиями на горизонтальных границах: "открытые" — вариант 1 и "жесткие" — вариант 2.

Остальные параметры были одинаковыми. Они равны: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 0,5$, $N = 2$, $\mu = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0,1$, число Куранта равно $0,01$, горизонтальная ширина расчетной области равна $\lambda_1/2$. Число ячеек по горизонтальной оси в обоих вариантах равно 120. Поэтому на период коротковолновой гармоники приходится 12 точек сетки.

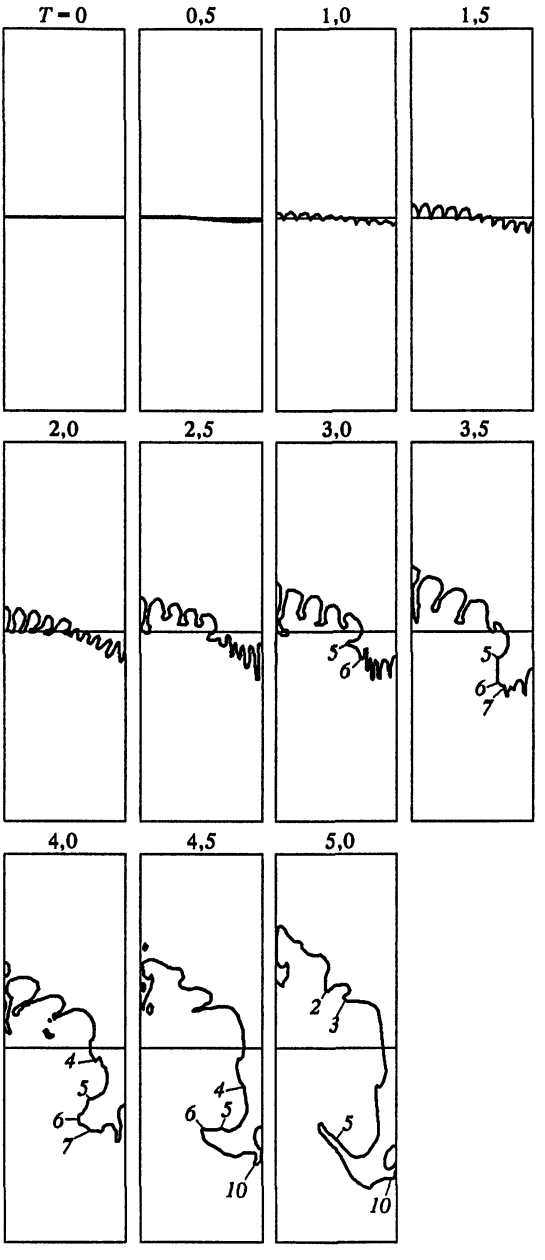
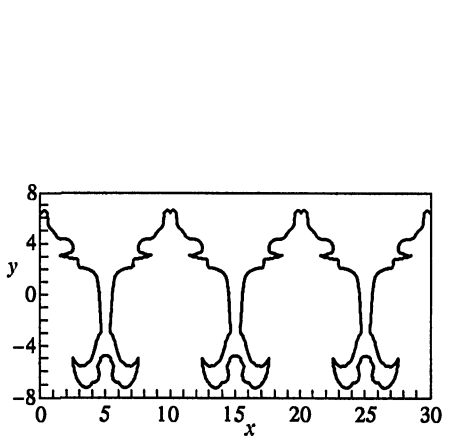


Рис. 18.4. Эволюция короткомасштабных возмущений на фоне длинноволнового течения (вариант 1). Мелкие струйки перенумерованы слева направо. Их десять. Цифры указывают позиции деталей ("потомков" этих струек) на КГ

Забегая вперед, отметим, что, несмотря на различия в параметрах, течения в вариантах 1 и 2 оказываются очень похожими.

Эволюция КГ показана на рис. 18.4 (вариант 1) и 18.7 (вариант 2). За КГ, как всегда, принималась средняя изохора. Представление о



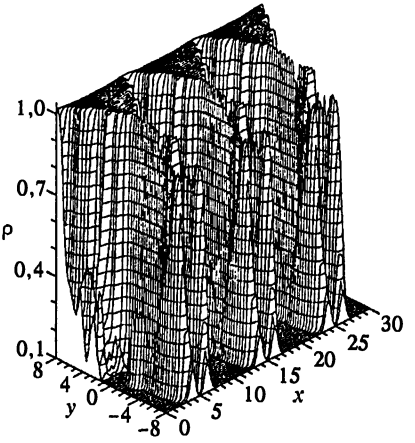


Рис. 18.5. Форма КГ в варианте 1 с короткомасштабным возмущением $A_2 \neq 0$ в момент $t = 5,5$. Тот же вариант *без* короткомасштабного возмущения ($A_2 = 0$) показан на рис. 30.3

Рис. 18.6. Распределение плотности в момент $t = 5,5$ в варианте 1. Форма КГ (средней изохоры) см. предыдущий рисунок. Крупные пузырь, струя и гриб при наличии мелкомасштабной турбулентности — "шубы". Крупные пузыри — провалы на горизонтальной поверхности $\rho_H = 1$, крупные струи — стенки между пузырями. Говорится о крупных пузырях и струях, поскольку мелкомасштабной турбулентностью связаны мелкие пузырьки и струйки. Здесь было $A_2 \neq 0$. Этот же расчет при $A_2 = 0$ представлен ниже на рис. 30.2

численной диффузии, которая "размазывает" КГ, дает рис. 18.6. Другой механизм эффективного "размазывания" связан с мелкомасштабными модами.

Примерно двух-, трехкратное растяжение КГ за время расчета, вызванное ростом крупных мод, приводит к сильному растягиванию мелких деталей, сравните 5–7-й и 11, 12-й кадры. На 5 и 6-м кадрах видно, что происходит растягивание мелких пузырьков и струй вдоль поверхности большого пузыря и их сжатие в концевой области струи. Имеется определенное очищение КГ в районе пузыря из-за сноса или смыва возмущений крупномасштабным течением в сторону струи. Но полной очистки нет. По-видимому, это вызвано мелкомасштабной РТ неустойчивостью в самой вершине (Иногамов, Чехлов, 1991c; Inogamov et al., 1991b). Осцилляции в вершине создают новые возмущения, которые затем уносятся из вершины течением.

Следы мелких мод сохраняются довольно долго. Они постепенно деформируются крупномасштабным течением. С течением времени деформации становятся сильными, на КГ появляются новые детали и следы

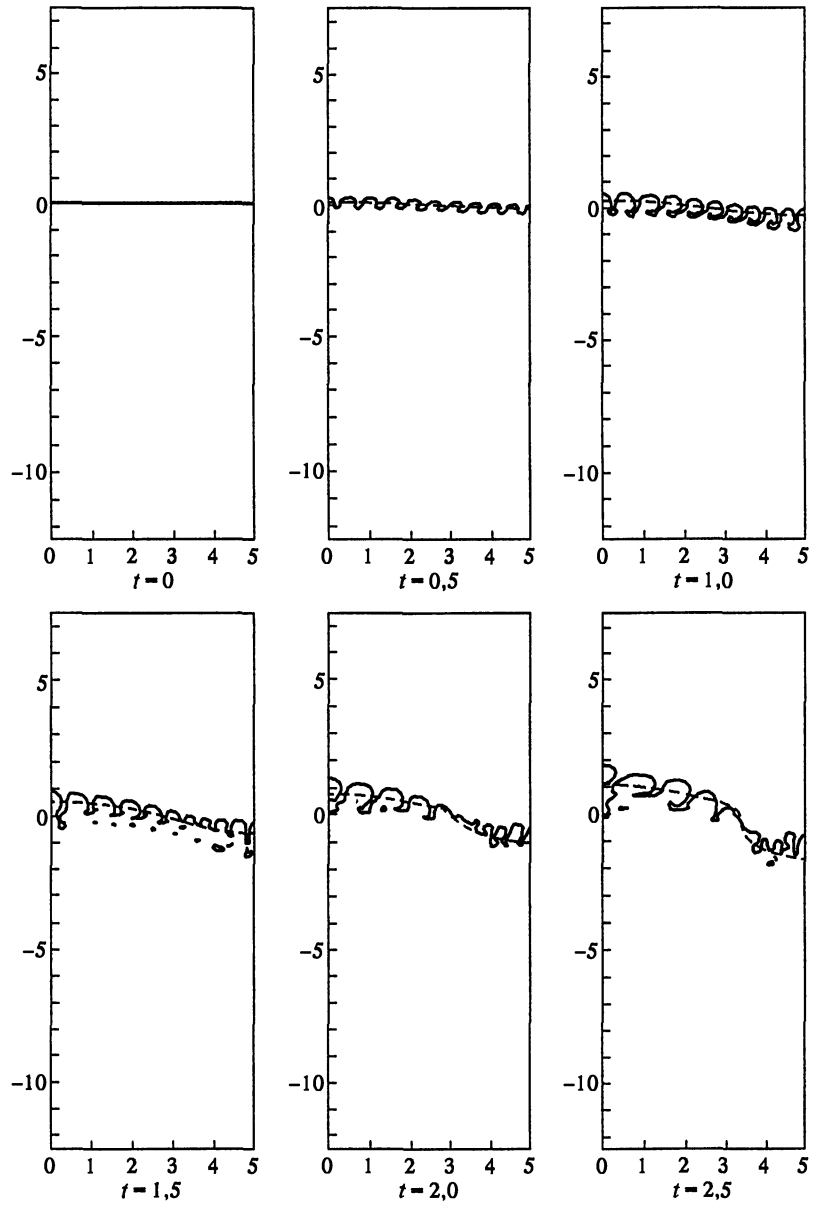


Рис. 18.7. Длинноволновое течение (вариант 2) с ($A_2 \neq 0$, сплошные кривые) и без ($A_2 = 0$, штриховые кривые) короткомасштабных возмущений

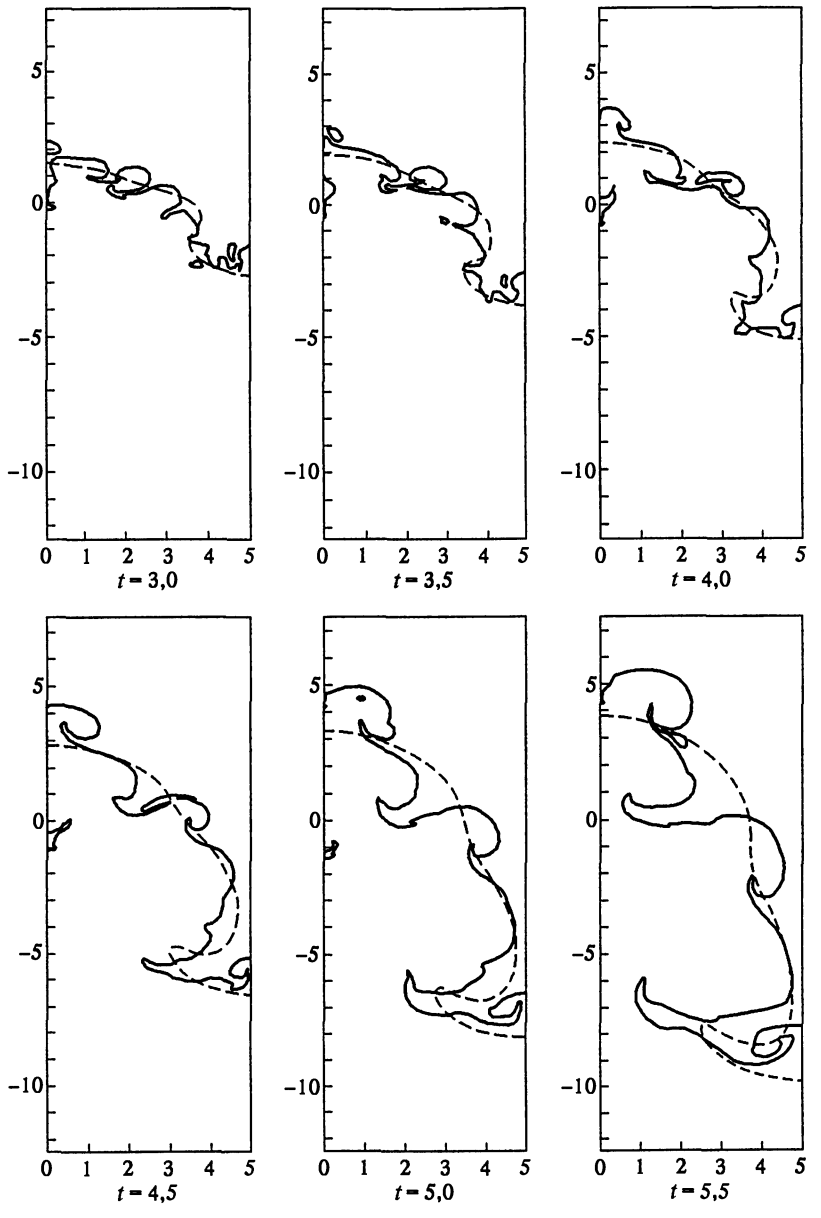


Рис. 18.7 (продолжение). Длинноволновое течение (вариант 2) с ($A_2 \neq 0$, сплошные кривые) и без ($A_2 = 0$, штриховые кривые) короткомасштабных возмущений

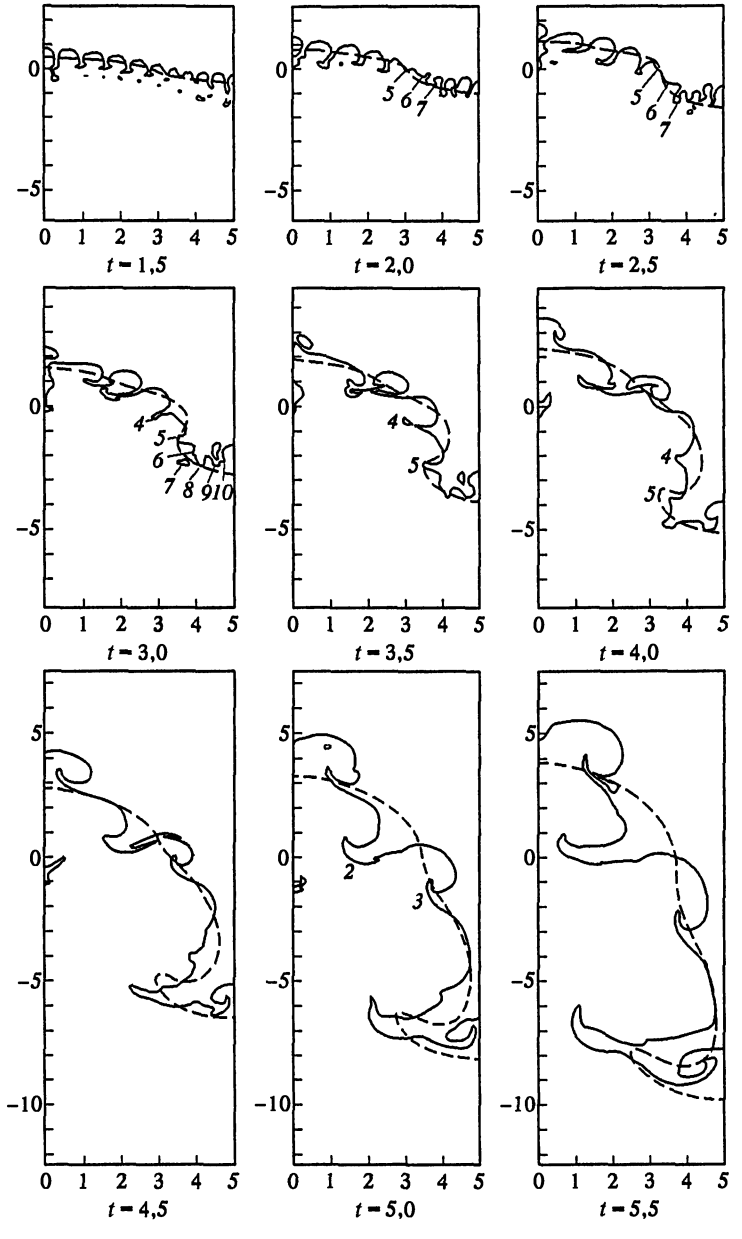


Рис. 18.7 (окончание). Длинноволновое течение (вариант 2) с ($A_2 \neq 0$, сплошные кривые) и без ($A_2 = 0$, штриховые кривые) короткомасштабных возмущений

исходных мод теряются среди них. При выбранных начальных данных в расчетной области на КГ имеются 10 мелких струек, 9 пузырьков между ними и по 1/2 пузырька на левой и правой стенках, см. рис. 18.4 и 18.7, моменты $t = 0, 5, \ldots, 2$. Пронумеруем струйки слева направо от 1 до 10. Проследим их судьбу. Дольше всего сохраняются (i) центральное образование в вершине, которое является то пузырьком, то струйкой, (ii) струйки 2-я и 3-я в области большого пузыря и (iii) 1/2 пузырька в большой струе. Сначала этот пузырек "сидит" в концевой области струи, а затем в вершине гриба. Какое-то время он даже продвигается и расширяется внутри гриба — см. кадры $t = 3, 5 - -5$ на рис. 18.4, обратите внимание на втягивание струйки, у входа в этот пузырек, внутрь пузырька на кадрах $t = 4$, $t = 4, 5$ и $t = 5$ на рис. 18.4 и $t = 3$, $t = 3, 5$, $t = 4$ и $t = 4, 5$ на рис. 18.7. Вещество в грибе находится "на весу", в том смысле, что его ускорение мало́ или существенно снижено по сравнению с $(1 - \mu)g$. Пузырек, разумеется, не может продвигаться в струе J, в которой вещество находится в свободном падении с ускорением $\approx (1 - \mu)g$. Вопрос о делении рэлей–тейлоровского "выроста" или "пальца" на струю J и гриб M, см. рис. 30.18, обсуждается ниже в п. 30.4 и п. 30.5.

Раньше других сильной деформации подвергаются детали (струйка/пузырек) 5 и 6. Возможно, это обусловлено формированием гриба, образованием его шляпки и началом скручивания конца этой шляпки (см. ниже § 30).

Отметим также, что эти детали находятся в районе максимума тангенциального скачка скорости и максимума завихренности, связанных с длинноволновым течением.

Струйки 2-я и 3-я существуют в течение всего расчета. Они смыкаются и образуют перемычку, изолирующую пузырь между ними, см. рис. 18.7, кадры $t = 3$, $t = 3, 5$ и $t = 4$. Затем эта перемычка разрывается и струйки опять существуют раздельно, см. рис. 18.7, кадры $t = 4, 5$ и далее.

Сравнение "одетого" и "голого" длинноволновых течений. Для ответа на вопрос о влиянии мелких мод на крупные были повторены расчеты вариантов 1 и 2 без мелких мод. Для этого амплитуда коротковолновых возмущений A_2 полагалась равной нулю: $A_2 = 0$. Положение КГ в варианте 1 с $A_2 \neq 0$ и с $A_2 = 0$ показано на рисунках 18.5 и 30.3 соответственно. Форма КГ в варианте 2 при $A_2 = 0$ показана на рис. 18.7 штриховой кривой. Сравнение полей плотности при $A_2 \neq 0$ и $A_2 = 0$ представлено на рисунках 18.6 и 30.2. Из сопоставления течений при $A_2 \neq 0$ (течение "одетое" в мелкомасштабную "шубу") и $A_2 = 0$ (течение без "шубы" — "голое") следует, что средние характеристики длинноволнового течения оказываются малочувствительными к мелким модам и остаются примерно одинаковыми при разных значениях A_2.

Возвращение от обертонов к субгармоникам. Выше рассмотрено взаимодействие крупных и мелких мод так сказать с позиций крупных мод. Посмотрим на это с позиций мелких мод. Они имеют в $\sqrt{20}$ раз больший инкремент и сопоставимую начальную амплитуду. В результате быстро

(см. рис. 18.4, 18.7, $t = 0,5,\ 1,\ 1,5$) формируется примерно асимптотическое периодическое (одномодовое) течение с периодом λ_2 и волновым числом $k_2 = 2\pi/\lambda_2$. Сетка достаточно подробна, так что это одномодовое течение отслеживается хорошо — видны даже грибы на концах струй. Длинноволновая гармоника на начальной стадии проявляется слабо.

Будем считать это одномодовое течение основным или исходным периодическим течением. По отношению к нему длинноволновая гармоника является субгармоникой с волновым числом $k_S = k_2/20$. Как будет показано в главах VII и VIII, развитие субгармоники k_S, кратной исходному периоду $k_S = k/m$, ведет к образованию течения с масштабом бо́льшим исходного в m раз (выше в этом разделе рассмотрен случай $m = 2$). Таким образом, в данном случае масштаб увеличивается в 20 раз.

Исходное течение представлялось рядом Фурье с параметрами (амплитуды и волновые числа) $A_n^{(\mathrm{init})}$, nk_2. Под действием субгармоники k_S формируется течение, ряд Фурье которого задается параметрами A'_n, $nk_2/20$. Если A'_n — это амплитуды скорости, то при изменении масштаба в α раз в эквивалентном течении эти амплитуды изменяются в $\sqrt{\alpha}$ раз. Поэтому после нормировки $A'_n/\sqrt{20}$ должно быть

$$A'_n/\sqrt{20} = A_n^{(\mathrm{init})}.$$

На самом деле из-за короткомасштабной неустойчивости (неустойчивость к довольно высоким обертонам) периодического асимптотического (стационарного, см. ниже § 27) течения и сказанного выше относительно уровня, на котором насыщается эта коротковолновая неустойчивость ("шуба"), это равенство выполняется, так сказать, "в основном". Это означает, что $A'_n/\sqrt{20} \approx A_n^{(\mathrm{init})}$ для первых гармоник $n = 1, 2$ или 3. Амплитуды старших обертонов с $n \gtrsim 4 - 5$ отличаются. Они не являются стационарными ("дышат"). Поскольку в спектре течения остаются неисчезающие коротковолновые гармоники ("богатый" коротковолновой хвост), то можно говорить о том, что полного "очищения" течения от "ряби" нет.

О самопроизвольном или спонтанном появлении коротковолновой "шубы". Рассмотрим развитие длинноволновой гармоники с волновым числом k_1. Оно показано штриховой кривой на рис. 18.7. Сплошной кривой представлено развитие той же гармоники k_1, осложненное отрастанием короткомасштабной "шубы". Здесь эта "шуба" инициирована коротковолновой гармоникой k_2. При расчетах на достаточно мелких сетках короткомасштабные возмущения образуются спонтанно. Это обусловлено неустранимой коротковолновой неустойчивостью — отмеченным выше отсутствием у решения непрерывной зависимости от начальных данных, см. (18.11). Затравкой спонтанной "шубы" служат шумы, связанные с сеточной аппроксимацией. Такого рода возмущения хорошо видны на рис. 30.4, приведенном ниже. Этот расчет выполнен на сетке с шагом $\Delta x = \lambda/200$. В расчете, приведенном штриховой кривой на рис. 18.7, шаг был равен $\Delta x = \lambda/40$.

Коротковолновая неустойчивость и ее квазиклассическое (ВКБ) описание. В связи со сказанным уместно напомнить об аналитическом исследовании короткомасштабных возмущений, выполненном в работах (Иногамов и Чехлов, 1991c; Inogamov et al., 1991b).

Рассматривалась эволюция волнового пакета с большим текущим волновым числом $k_2(t) \gg k_1$, сносимого длинноволновым течением с периодом $2\pi/k_1$ вдоль КГ. При малой плотности нижней жидкости можно пренебречь влиянием неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (впрочем, учет НКГ в данном подходе не составляет труда). Для ВКБ–расчета требуется аналитика длинноволнового течения. Это может быть либо описание в модели $N = 1$, см. ниже § 26 (нестационарный случай), либо стационарное описание (см. § 27). В указанных выше работах расчеты выполнены для стационарного случая.

Амплитуда возмущений КГ растет по закону

$$\nu(t) = \nu(t_0)\frac{v_2(t_0)}{v_2(t)}\ \exp\Big[\int_{t_0}^{t}\gamma(\tau)\,d\tau\Big],$$

где $\gamma(t) = \sqrt{g_{\text{eff}}\,k_2(t)}$, $g_{\text{eff}} = \frac{g_{\text{ff}}}{\sqrt{1+(Y'_x)^2}} - \frac{v_2^2}{R}$ — эффективное ускорение, равное разности проекции ускорения свободного падения g_{ff} на нормаль к невозмущенной границе и центробежного ускорения v_2^2/R. Предэкспоненциальный множитель появляется из-за уменьшения амплитуды возмущения при растяжении течением КГ. Он имеет такой вид в стационарном случае, поскольку считается, что площадь инфинитезимального прямоугольника, равная произведению длины дуги вдоль КГ на амплитуду, сохраняется.

В стационарном случае КГ задается функцией $y = Y(x)$. Локальная скорость, с которой сносится волновой пакет, равна $v_2 = \frac{1}{2}(v_{\text{h}} + v_{\text{l}})$, где v_{h} и v_{l} — тангенциальные к КГ скорости тяжелого и легкого веществ у КГ. В стационарном случае легкое вещество в пузыре покоится, см. ниже §§ 29, 30. Поэтому следует положить $v_2 = v_{\text{h}}/2$. Причем это соотношение должно сохраниться и в пределе $\rho_{\text{l}}/\rho_{\text{h}} \to 0$. Отметим неточность, допущенную в указанных работах. В них полагалось, что при $\rho_{\text{l}} = 0$ будет $v_2 = v_{\text{h}}$. Это приводит к некоторому увеличению рассчитанного в этих работах коэффициента усиления короткомасштабных возмущений. Со скоростью v_2 сносятся также вдоль КГ вихри, "сидящие" на КГ.

Локальный радиус кривизны КГ обозначен буквой R. Он требуется при вычислении центробежного ускорения v_2^2/R.

Учитывается уменьшение волнового числа $k_2(t) = 2\pi/\lambda_2(t)$ с течением времени t при движении вдоль КГ из-за увеличения $\lambda_2(t)$. Локальный период равен

$$\lambda_2(t) = \lambda_2(t_0)\,\frac{v_2(t)}{v_2(t_0)}.$$

Он растет вследствие того, что из-за ускорения потока происходит растяжение элемента дуги КГ. Отметим, что в предшествовавшей работе

(Dagan, 1975), посвященной ВКБ–анализу, изменение λ_2 не учитывалось. Между тем, это изменение влияет на γ (через k_2) и, следовательно, экспоненциальным образом сказывается на ответе.

Положение волнового пакета дается уравнением $ds/dt = v_2$, где $s = s(t)$ — длина дуги вдоль КГ. Она отсчитывается от вершины пузыря. Это соотношение позволяет вместо времени использовать длину дуги. Важным является то, что, как оказывается, эффективное ускорение g_{eff} направлено от тяжелой жидкости к легкой только на конечном(!) отрезке дуги КГ возле вершины. Только на этом отрезке имеется рост возмущений. За его пределами g_{eff} меняет знак, и мелкомасштабная РТН на фоне длинноволнового течения отсутствует. Поэтому усиление возмущений G (gain) при их сносе от вершины к точке $s_\star$ на дуге, в которой g_{eff} проходит через нуль, является конечным. Величина G растет при уменьшении $k_1/k_2(t_0)$.

Обращение g_{eff} в нуль обусловлено тем, что, во-первых, вместе с монотонным поворотом КГ от горизонтального направления в вершине к вертикальному в струях нормальная к КГ составляющая g_{eff} также монотонно уменьшается и, во-вторых, центробежная составляющая v_2^2/R при движении вдоль КГ пузыря растет. Ее рост вызван тем, что радиус кривизны R вдоль КГ пузыря примерно постоянен, а скорость v_2 монотонно растет.

Из результатов, полученных в ВКБ–приближении, следует, что значительное усиление G получают именно коротковолновые возмущения. Поскольку развитие этих возмущений насыщается из-за нелинейности на масштабе порядка длины волны, то они не могут радикально исказить длинноволновое течение. Что и наблюдается в описанных выше численных расчетах.

О рэлей-тейлоровской (РТ) турбулентности. В бесконечной области отсутствуют характерные масштабы размерности длины. Поэтому толщина турбулентного перемешанного слоя должна быть пропорциональна gt^2 (Беленький и Фрадкин, 1965; Анучина, Кучеренко и др., 1978; Anisimov et al., 1983; Youngs, 1984; Sharp, 1984; Read, 1984; Inogamov et al., 1991b). В работах Иногамов, 1978; Anisimov et al., 1983; Inogamov et al., 1991b) показано, как закон gt^2 роста толщины слоя перемешивания получается из предположения о совокупности последовательных переходов от стационарных течений с меньшим масштабом к стационарным течениям с бóльшим масштабом.

В реальных задачах некоторый характерный размер в начальный момент времени всегда присутствует. Это приводит к тому, что данный автомодельный закон оказывается верным лишь на достаточно больших временах, когда короткомасштабные начальные данные "забудутся" (Anisimov et al., 1983; Youngs, 1984; Sharp, 1984; Read, 1984; Inogamov et al., 1991b). Данный закон хорошо выполняется в натурных и численных экспериментах (как двумерных, так и трехмерных), см., например, работы (Анучина, Кучеренко и др., 1978; Youngs, 1984; Read, 1984).

Часто при численном моделировании задается отрезок короткомасштабного спектра, состоящий из многих гармоник. На самом деле, как

показано в работе (Inogamov et al., 1991b), см. также гл. VII, для инициирования спонтанной РТ турбулентности достаточно *уже двух несоизмеримых* коротковолновых гармоник (к систематическому анализу вопроса о турбулентности мы вернемся в гл. VIII).

Приведем результаты расчета развития трехмодового начального возмущения в квадратном "ящике" со стороной $\lambda/2$ со следующими взаимно простыми длинами волн $\lambda_1 = \lambda/17$. Остальные параметры таковы: $\lambda = 4$, $g = 2$, $d_1 = 0,92$, $d_2 = 1,08$, $\lambda_2 = \lambda/23$ и $\lambda_3 = \lambda/31$, $\rho_1 = 1$,

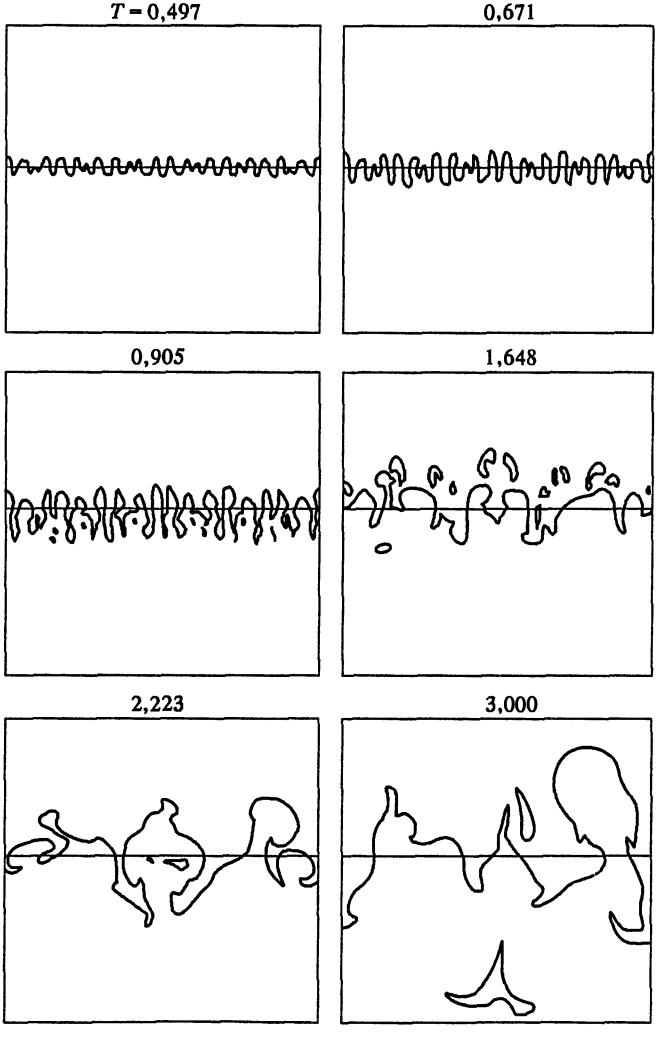


Рис. 18.8. Эволюция линии контакта при трехмодовом расчете. Качественная картина укрупнения характерного масштаба

$\rho_2 = 0,1$. Расчетная сетка 120×120 выбрана так, чтобы на период самой коротковолновой моды приходилось по 4 расчетные ячейки. Граничные условия — "жесткие". Начальные относительные амплитуды этих мод,

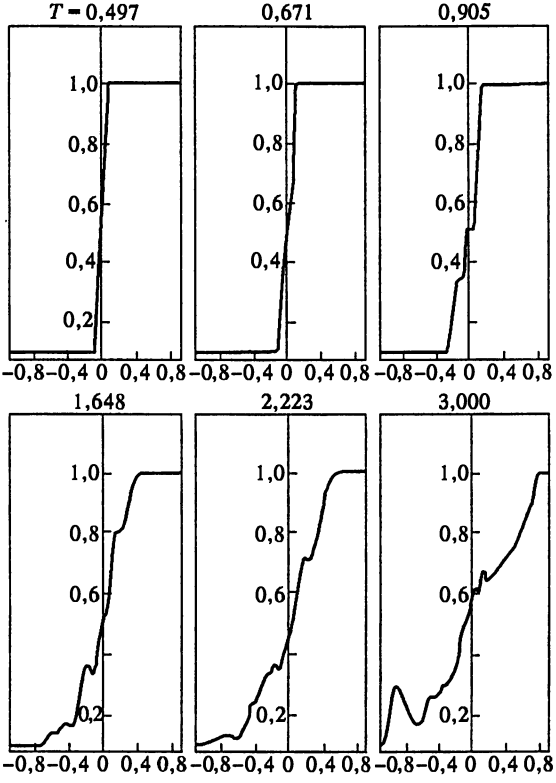


Рис. 18.9. Эволюция среднего профиля плотности при трехмодовом расчете

нормированные на скорость всплытия пузыря с соответствующей длиной волны, были одинаковыми. Результаты представлены на рис. 18.8–18.10. На рис. 18.8 дана эволюция КГ, на рис. 18.9 — усредненные профили плотности и на рис. 18.10 — эволюция спектра. Усредненный профиль плотности равен

$$\bar{\rho}(y,t) = (2/\lambda) \int_0^{\lambda/2} \rho(x,y,t)\, dx.$$

На рис. 18.10 приведены амплитуды Фурье $A_n(t)$ в зависимости от номера моды n функции $\rho(x, y = 0, t)$. Разложение Фурье равно

$$\rho(x, y = 0, t) = \sum A_i \cos(2\pi i x/\lambda),$$

где

$$A_n = (4/\lambda) \int_0^{\lambda/2} \rho(x, 0, t) \cos(2\pi n x/\lambda) dx.$$

Из анализа рис. 18.8 и 18.10 видно, что с течением времени происходит последовательное укрупнение масштаба от мод с $n \simeq 25$ до моды с $n = 3$. Был проведен анализ вертикального расширения слоя пере-

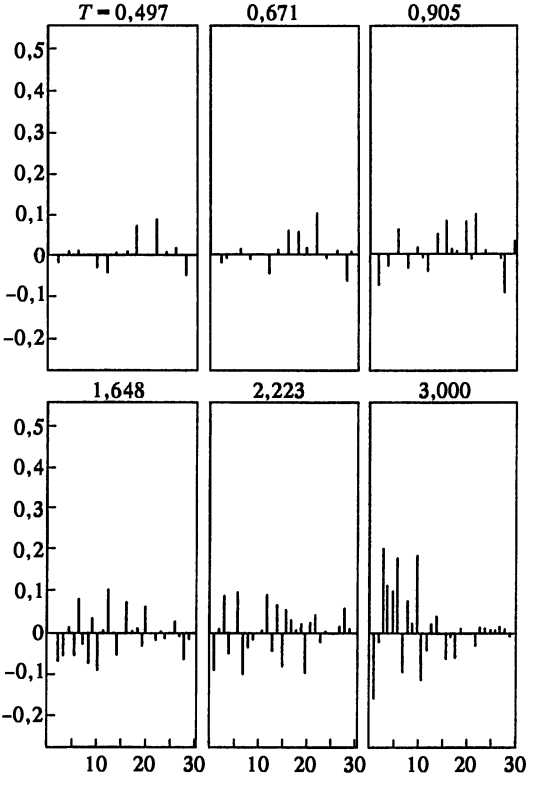


Рис. 18.10. Эволюция спектра Фурье при трехмодовом расчете. Укрупнение масштаба от $n = 23$ до $n = 3$

мешивания. За верхнюю и нижнюю границы этого слоя принимались горизонтали $y = y_u(t)$ и $y = y_d(t)$, на которых усредненная плотность $\bar{\rho}$ на 5% (от разности $\rho_h - \rho_l$) меньше и больше соответственно ρ_h и ρ_l. Коэффициент турбулентного перемешивания α_+ ($h_+ = \alpha_+(A)gt^2$) оказался равен $\approx 5\%$, а асимметрия слоя $\alpha_-/\alpha_+ \approx 2$. Эти значения согласуются с приводимыми в литературе (Анучина, Кучеренко и др., 1978; Anisimov et al., 1983; Youngs, 1984; Read, 1984; Smeeton & Youngs, 1987).

Глава V
ПРИБЛИЖЕНИЕ "МЕЛКОЙ ВОДЫ"

§ 19. Метод обобщенных координат

В слое жидкости, находящемся над твердой поверхностью, в поле тяжести, могут возникать гравитационные волны. Если длина волны возмущений существенно превышает глубину слоя, последний называется тонким, а соответствующее приближение в гидродинамике — приближением "мелкой воды". Уравнения "мелкой воды" могут быть получены предельным переходом из обычных уравнений трехмерной нестационарной гидродинамики, а также непосредственно, феноменологически (Ландау и Лифшиц, 1986). Введем систему координат с осью x вдоль поверхности, а z — вертикально вверх (поле тяжести направлено вниз, $z = 0$ соответствует твердой поверхности), в которой u — горизонтальная скорость вдоль оси x. Уравнение движения жидкости вдоль поверхности является обычным гидродинамическим уравнением Эйлера, в котором учитывается гидростатическое давление, а уравнение непрерывности — следует из рассмотрения количества жидкости, протекающей через две вертикальные контрольные поверхности. В результате получаем систему уравнений (Ландау и Лифшиц, 1986)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{19.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \tag{19.2}$$

где h — глубина слоя.

Система уравнений (19.1)–(19.2) совпадает по форме с уравнениями одномерной нестационарной газовой динамики для сжимаемого газа с заменой плотности среды на высоту слоя жидкости. На этой аналогии построены частные решения для некоторых задач теории "мелкой воды". Строгое математическое обоснование модели "мелкой воды", а также подробный вывод соответствующих уравнений можно найти в работе (Овсянников и др., 1985).

Для случая, когда слой жидкости находится под твердой поверхностью и равновесие в невозмущенном состоянии обеспечивается давлением газа, находящегося снизу, уравнения, описывающие возмущенное движение отличаются от (19.1), (19.2) только знаком в правой части

(19.1). Этот случай далее будет называться "опрокинутой мелкой водой" (ОМВ). Как будет видно из последующего, изменение знака в (19.1) принципиально меняет ситуацию с точки зрения математического решения задачи.

Уравнения, аналогичные уравнениям ОМВ, встречаются во многих других задачах (Овсянников и др.,1985). Фактически они возникают во всех неустойчивостях распределенных систем, когда можно совершить предельный переход от трех- к двумерной задаче, причем одна из координат играет роль плотности. Так, для примера, в системах инерциального термоядерного синтеза существенное значение имеет устойчивость сжатия мишеней. Сжатие возникает вследствие ускорения плотного слоя плазмы под действием давления испарения. При этом реализуются типичные условия для проявления тейлоровской неутойчивости, когда в неинерциальной системе координат сила инерции уменьшается в направлении ее действия. Для трехмерных систем в настоящее время возможны, по видимому, только численные расчеты нелинейной стадии, но во многих случаях необходимо рассмотрение движения тонких оболочек, например, для слоистых мишеней. В этом случае можно перейти к гидродинамическому описанию системы уравнениями ОМВ с дисперсией (Трубников и Жданов, 1984; Трубников и Жданов, 1986; Trubnikov & Zhdanov, 1987).

Далее будут рассматриваться обобщенные уравнения ОМВ в виде (Трубников и Жданов, 1984)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}; \tag{19 3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{p^N}\frac{\partial p}{\partial x} = \left(3 - \frac{N}{2}\right)\varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial t\, \partial x^3}. \tag{19.4}$$

Здесь величина ε является параметром дисперсии, для недиспергирующей среды $\varepsilon = 0$. Параметр N связан с "эффективным показателем адиабаты" $\chi = \partial \ln p / \partial \ln \rho$ соотношением $N = 2 - \chi$. Абсолютная неустойчивость среды является следствием отрицательной величины "показателя адиабаты" ($\chi < 0$) и знаком последнего члена в левой части выражения (19.4). К системе уравнений (19.3), (19.4) приводят следующие задачи физики плазмы и гидродинамики (Трубников и Жданов, 1984): "газ Чаплыгина" ($N = 3$), неустойчивость Рэлея–Тейлора "опрокинутой мелкой воды" — слоя жидкости в вертикальном гравитационном поле под твердой стенкой ($N = 0$); длинноволновые перетяжки на несжимаемом сканированном пинче с продольным током ($N = 2$); для осесимметричных цилиндрических струй, находящихся под действием сил поверхностного натяжения и подверженных рэлеевской неустойчивости ($N = 3/2$), для сжимаемых перетяжек на пинче ($N = 2$); к аналогичной системе уравнений сводится задача о неустойчивости электронного пучка в плазме, задача о самофокусировке волн и т. д.

Математические трудности решения системы (19.3), (19.4) определяются тем, что по классификации дифференциальных уравнений в частных производных эта система является эллиптической относительно

переменных (t, x). Строгая постановка задачи Коши для нее некорректна (Бабенко, 1986), поэтому необходимы специальные методы решений.

Аналитическое решение системы уравнений (19.3), (19.4) рассматривалось в работах (Трубников и Жданов, 1984; Трубников и Жданов, 1986; Trubnikov & Zhdanov, 1987) методом годографа с использованием предложенного авторами "эволюционного принципа". Недостатки полученных авторами решений будут обсуждены ниже.

В настоящей работе решение системы уравнений (19.3), (19.4) выполняется двумя способами: аналитическим, основанным на идее Э. Ферми (Ферми, 1972; Ферми и Нейман, 1972) о введении обобщенных координат в динамических задачах распределенных систем и обоснованным в общем случае (Dienes, 1978), и численным, с учетом построения схем решения, пригодных для численного решения эллиптических задач (Бабенко, 1986).

Далее рассматривается задача Коши для системы (19.1)–(19.4). Если провести линеаризацию рассматриваемой задачи, то получится система уравнений, описанная в гл. III, решение которой может быть получено аналитически. Оно описывает абсолютно неустойчивую ситуацию, когда в силу линейности задачи общее решение является суперпозицией развития гармонических возмущений, поэтому достаточно рассмотреть одно синусоидальное возмущение с некоторой длиной волны. Амплитуда этого возмущения растет со временем экспоненциально с характерным временем, равным обратному значению инкремента неустойчивости. С течением времени амплитуда нарастает до таких значений, когда необходимо учитывать нелинейные члены в системе уравнений (19.3), (19.4), которые квадратичны по амплитуде возмущений. На этой стадии необходимо решение нелинейной задачи. При этом возникает вопрос, при каком значении амплитуды линейная задача переходит в нелинейную. Результаты экспериментальных и теоретических работ показывают, что этот переход в задачах РТН происходит при значениях от долей до единиц процентов отношения амплитуды возмущений к глубине слоя $A/h \ll 1$. При нелинейном развитии неустойчивости решение системы уравнений (19.3), (19.4) можно рассматривать до значений $A \sim h$, т. к. при больших значениях амплитуды может быть нарушено приближение "мелкой воды" $h \ll l$.

Поскольку при малых значениях амплитуды решения линейной и нелинейной задач должны совпадать, естественно в качестве начальных условий выбрать решение линейной задачи и вначале рассмотреть развитие одной из гармоник, используя периодические граничные условия. Основанием для такого выбора граничных условий является то, что из решения линейной задачи можно выбрать длину волны с максимальным инкрементом и рассмотреть ее эволюцию. Кроме периодических граничных условий, можно рассматривать и уединенные возмущения, затухающие на бесконечности. Взаимодействие гармоник рассмотрено в следующей главе.

Рассматриваемый ниже метод обобщенных координат (МОК) основан на идее Э. Ферми (Ферми, 1972; Ферми и Нейман, 1972) о сведении

гидродинамической задачи математически к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что жидкость и газ являются непрерывными распределенными системами и описываются уравнениями в частных производных. Если некоторым образом выбрать обобщенные координаты, описывающие распределенную систему и составить уравнения Лагранжа второго рода, то получится система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая непрерывную систему. Этот метод в некоторой степени аналогичен методу конечных элементов и крупных частиц. В общем случае, когда число обобщенных координат неограниченно увеличивается, описание методом обобщенных координат полностью идентично уравнениям гидродинамики. Однако если удачно выбрать обобщенные координаты, то даже их небольшое число может дать хорошее приближение, что может быть обосновано либо увеличением числа обобщенных координат, либо путем численного или экспериментального моделирования явлений.

В качестве примера применения обобщенных координат, приведем решение Э. Ферми задачи о РТН несжимаемой жидкости. Рассматривается полупространство в поле тяжести, направленном вниз, верхнюю часть которого заполняет жидкость. Пусть в начальный момент существует синусоидальное возмущение малой амплитуды с длиной волны l.

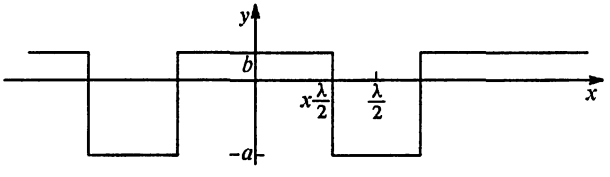


Рис. 19.1

На линейной стадии возмущение остается синусоидальным, а его амплитуда растет экспоненциально по закону $\exp(t\sqrt{2\pi g/\lambda})$. На нелинейной стадии форму волны можно схематизировать, как указано на рис. 19.1

Здесь введены параметры a, b, x, которые связаны между собой уравнением неразрывности или сохранением объема жидкости $b = ax/(1-x)$. Оставшиеся параметры a и x можно выбрать в качестве обобщенных координат. Кинетическую и потенциальную энергии возмущенного слоя жидкости можно выразить через эти параметры $T = T(a, x, \dot{a}, \dot{x})$, $U = U(a, x)$:

$$T = \frac{a^3\dot{x}^2}{6x(1-x)} + \frac{a\dot{x}x}{6(1-x)} + \frac{\pi a^2\dot{x}^2}{4(1-x)^2} + \frac{\pi a\dot{a}\dot{x}}{2(1-x)} + \frac{\pi}{4}x^2\dot{a}^2,$$

$$U = -\frac{a^2x}{2(1-x)}.$$

Составляя уравнения Лагранжа и решая полученную систему уравнений, Э. Ферми нашел следующее асимптотическое поведение обобщенных

координат:

$$a \to (4/3)g(t-1,04\sqrt{\lambda/2g})^2,$$
$$b \to 0,12g(t-1,04\sqrt{\lambda/2g})^2,$$
$$x \to 0,21(t-1,04\sqrt{\lambda/2g})^2,$$

которое хорошо подтвердилось дальнейшими исследованиями.

Решение Э. Ферми и последующие исследования показали, что нижняя часть волны падает, двигаясь с равномерным ускорением, близким к ускорению свободного падения (у Э. Ферми $8g/7$), а верхняя полуволна растет гораздо более медленно и ее скорость медленно уменьшается со временем.

Далее примем во внимание еще одно обстоятельство, связанное с эффективностью перехода в формулировке задачи от эйлеровых к лагранжевым координатам. В аналитической теории нелинейных рэлей-тейлоровских неустойчивостей наиболее существенные результаты, на наш взгляд, были получены в работе (Ott, 1972), где исследовалась неустойчивость бесконечно тонкой массивной пленки в поле тяжести. Нелинейная в эйлеровых координатах задача при переходе к лагранжевым координатам оказалась линейной, что позволило получить аналитическое решение нелинейной задачи.

В данном случае можно преобразовать систему уравнений (19.3), (19.4) к лагранжевым координатам, т. е. считать эйлеровы координаты $x = x(a,T)$, $t = t(a,T)$, где (x,t) — эйлеровы, а (a,t) — лагранжевы координаты

Получаем

$$x(a,T),= a+\eta(a,T), \quad t(a,T),= T \tag{19.5}$$

где $\eta(a,T)$, — смещение за время T частицы, имеющей в начальном положении координату a.

§ 20. Основа метода обобщенных координат

Метод обобщенных координат был развит в работе (Dienes, 1978) для общего случая. Пусть функции $u(x,t)$ определяют поле скоростей в жидкости (x — пространственный радиус-вектор, t — время). Это поле может быть разложено по некоторому полному набору базисных функций $\{f(x)\}$ с коэффициентами, являющимися скоростями изменения обобщенных координат $q^\alpha(t)$:

$$u(x,t) = \Sigma_{\alpha=1}^{\infty} q^\alpha f^\alpha(x). \tag{20.1}$$

В этом разложении координаты $q^\alpha(t)$ определяют изменение трех компонент. Если они не связаны между собой, можно выбрать две из них равными нулю. Для гидродинамических течений, описываемых потенциалом скоростей $f^\alpha(x) = \nabla\psi^\alpha$, компоненты не являются независимыми, и следует использовать разложение (20.1).

Пусть ξ — начальные, а x — декартовы координаты некоторой точки, тогда

$$x(t) = \mathbf{G}(q^\alpha(t),\xi). \tag{20.2}$$

Удобно выбрать, хотя и не обязательно,

$$\mathbf{G}(0,\xi)=\xi, \quad q^\alpha(0)=0. \tag{20.3}$$

Дифференцируя соотношение (20.2), получаем

$$x(t)=\Sigma_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q^\alpha}q^\alpha(t).$$

Сравнивая это соотношение с (20.1), получаем $f^\alpha = \partial\mathbf{G}/\partial q^\alpha$ или $f^\alpha = \partial\xi/\partial q^\alpha$.

В классической механике (формализме уравнений Лагранжа) предполагается существование материальных точек, или масс, с начальными координатами ξ. Положения этих масс при движении определяются функциями их координат аналогично (20.2). В настоящем формализме используется эйлерово описание поля скоростей в пространстве. Эти два представления, конечно, эквивалентны, т. к. можно представить, что лагранжевы координаты ξ можно исключить, используя соотношения

$$x(t)=\Sigma_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial q^\alpha}q^\alpha(t)=\Sigma_{\alpha=1}^{\infty}F(\xi,\{q^\alpha\})q^\alpha$$

и приводя поле скоростей к виду (20.2).

Разобъем пространство, занимаемое сплошной средой, на элементарные объемы с массами m_n и векторами скорости u_n. Сплошная среда при этом получает дискретное описание, и для нее можно использовать уравнения механики, например, в виде принципа виртуальных перемещений

$$\Sigma_n(F_n-m_nu_n)\delta x_n=0, \tag{20.4}$$

где δx_n — смещение элементарной массы. В уравнениях Лагранжа скорость выражается через начальные координаты $u_n(\xi,q^\alpha)$, а ускорение получается частным дифференцированием скорости по времени. В данном представлении скорость выражается в виде функции пространственных координат, которые изменяются вместе с изменением координат частиц, поэтому ускорение элементарной массы получается дифференцированием (20.1) кроме обобщенных координат $q^\alpha(t)$ еще дифференцированием по координатам частиц

$$\dot u_n(x,t)=\Sigma_{\alpha=1}^{\infty}\left(\ddot q^\alpha(t)f_n^\alpha(x)+\dot q^\alpha\Sigma_{\beta=1}^{\infty}(f^\beta\nabla)f_n^\alpha\dot q^\beta\right). \tag{20.5}$$

Виртуальное смещение элементарной частицы и обобщенная сила для координат $\{q\}$ имеют вид

$$\delta x_n=\Sigma_{\gamma=1}^{\infty}\frac{\partial x_n}{\partial q^\gamma}\delta q^\gamma, \quad Q^\gamma=\Sigma_nF_n\frac{\partial x_n}{\partial q^\gamma}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (20.4), получаем

$$\Sigma_{n,\gamma,\beta}\left[m_n\left(\ddot q^\alpha f_n^\alpha+\dot q^\alpha(f_n^\beta\nabla)f_n^\alpha\dot q^\beta\right)f_n^\gamma-Q^\gamma\right]\delta q^\gamma=0.$$

Определяя матрицу масс

$$M^{\alpha\gamma} = \Sigma_n m_n f_n^\alpha f_n^\gamma \tag{20.6}$$

и обобщенную конвекцию

$$r^{\gamma\alpha\beta} = \Sigma_n m_n (f_n^\gamma \nabla) f_n^\alpha f_n^\beta, \tag{20.7}$$

получаем систему динамических уравнений для обобщенных координат

$$\Sigma_\alpha M^{\alpha\gamma} \ddot{q}^\alpha + \Sigma_{\alpha,\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta r^{\gamma\alpha\beta} = Q^\gamma. \tag{20.8}$$

Для непрерывной сплошной среды сила, действующая на элементарный объем, является суммой или интегралом по поверхности от вязких напряжений

$$F_n = \int \underline{\sigma}\, dS_n,$$

где $\underline{\sigma}$ — тензор вязких напряжений, интегрирование производится по поверхности, ограничивающей выделенный элементарный объем. Применяя теорему Гаусса, получаем

$$F_n = \int \nabla \underline{\sigma}\, dV_n. \tag{20.9}$$

Предполагая, что элементарный объем является малым, можно применить теорему о среднем к уравнению (20.9), при этом

$$F_n = \delta V_n \overline{\nabla \underline{\sigma}}.$$

Для вычисления обобщенной силы совершаем предельный переход к сплошной среде

$$Q^\alpha = \lim_{N\to\infty} \Sigma_{n=1}^N \delta V_n \overline{\nabla \underline{\sigma}} f_n^\alpha = \int f^\alpha (\nabla \underline{\sigma}) dV.$$

Это выражение может быть преобразовано к виду

$$Q^\alpha = \int f^\alpha \underline{\sigma}\, dS - \int \underline{\sigma} \nabla f^\alpha\, dV. \tag{20.10}$$

Обобщенная матрица масс в приближении сплошной среды переходит в следующее выражение:

$$M^{\alpha\beta} = \int f^\alpha f^\beta p_0\, dV_0, \tag{20.11}$$

а обобщенная конвекция имеет вид

$$r^{\alpha\beta\gamma} = \int f^\alpha (\nabla f^\beta) f^\gamma p_0\, dV_0. \tag{20.12}$$

Здесь p_0 — начальное распределение плотности ($dm = p_0\,dV_0 = p_0 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$). Другая возможность состоит в учете уравнения непрерывности в лагранжевых координатах $p\,dV = p_0\,dV_0$ с соответствующей заменой в уравнениях (20.11), (20.12). При этом необходимо определить зависимость $p(x)$ и изменить пределы интегрирования для вариаций поверхности и объема.

Уравнение баланса кинетической энергии получается, как обычно, из общего уравнения динамики (20.4) и далее может быть обобщено на уравнение полной энергии (Dienes, 1978).

§ 21. Аналитическое решение задачи неустойчивости ОМВ методом обобщенных координат

Выбор числа обобщенных координат определяет степень точности аналитического решения. Отметим, что в задачах гидродинамики абсолютно неустойчивых сред уже малое число обобщенных координат дает решение, близкое к численному решению, в данном случае эталонному. Так, в задаче о нелинейной стадии рэлей-тейлоровской неустойчивости глубокой жидкости (Ott, 1972) одномодовое приближение дало результат, согласующийся с численным при росте амплитуды примерно в 100 раз по сравнению с начальным. В настоящей работе применяется одномодовое приближение МОК для решения системы уравнений (19.1), (19.2), а для проверки корректности полученного аналитического решения используется численное решение этой же задачи при совпадающих начальных условиях.

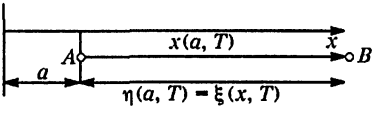


Рис. 21.1

Рассмотрим систему уравнений (19.3), (19.4) и перейдем в ней к лагранжевым координатам (см. рис. 21.1).

В лагранжевых координатах скорость частицы, находившейся в точке с координатой a в начальный момент времени, равна

$$u = \left(\frac{\partial \nu}{\partial T}\right)_a = \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_a . \tag{21.1}$$

В одномодовом приближении МОК решение для поля скоростей ищем в виде

$$u(a,t) = q(T)\sin kx(a,T). \tag{21.2}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число возмущений с длиной волны λ. В начальный момент будем считать заданной скорость возмущения при $T = 0$, $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = u_0$, $x(a,0) = a$.

Подставляя (21.1) в (21.2) при фиксированном начальном условии ($a = \text{const}$), получаем дифференциальное уравнение, интегрируя которое, находим

$$kq = \int \frac{k\,dx}{\sin kx} = -\ln\left(c\frac{1-\cos kx}{1+\cos kx}\right).$$

Постоянная интегрирования определяется из начального условия. В результате находим связь эйлеровых и лагранжевых координат:

$$\cos X = \frac{\cos A - \operatorname{th} Q}{1 - \cos A \operatorname{th} Q}. \tag{21.3}$$

где $X = kx, A = ka, Q = kq$. Эта связь может быть представлена в параметрическом виде:

$$\cos X = \operatorname{th}(B - Q), \quad \cos A = \operatorname{th} B. \tag{21.4}$$

Перейдем в уравнении (19.3) от эйлеровых к лагранжевым координатам, используя формулы перехода:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_a - \frac{u}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_T, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_T = kq\cos kx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 q \sin kx, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -k^3 q \cos kx,$$

где якобиан преобразования J с учетом (21.4) имеет вид

$$J = \frac{\partial(x,t)}{\partial(a,T)} = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_T = \frac{\sin kx}{\sin ka}.$$

В результате уравнение (19.3) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_a + \rho Q \cos X = -\varepsilon k Q \cos X. \tag{21.5}$$

В системе (19.3), (19.4) ρ — безмерная плотность, отнесенная к плотности невозмущенной системы, поэтому, используя начальные условия для плотности в виде $\rho(a,0) = 1$ при $T = 0$, т. е. при $Q(0) = 0$, интегрируем уравнение (21.5):

$$\rho + \varepsilon k = \frac{1 + \varepsilon k^2}{\operatorname{ch} Q + \operatorname{sh} Q \cos X}. \tag{21.6}$$

Легко проверить, что это уравнение удовлетворяет условию сохранения массы и определяет кинематику поверхности в задаче ОМВ, т. е. вид поверхности в зависимости от обобщенной координаты или ее аналог $\rho(x)$ в других задачах. Зависимость обобщенной координаты $Q(t)$ находится интегрированием уравнения (21.5).

Преобразование к лагранжевым координатам уравнения (19.4) производится по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_a - \frac{u}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_T, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_T,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{u}{J}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -k^2 \ddot{Q} \sin X.$$

С учетом (21.2) и (21.6) уравнение (19.4) преобразуется к виду

$$\ddot{Q}\sin X + \dot{Q}^2 \sin X \cos X = -(3 - N/2)\varepsilon k^2 \ddot{Q} \sin X.$$

Умножая это уравнение на $\sin X(A,T)$ и интегрируя по лагранжевой координате на длине полуволны начального возмущения, получаем динамическое уравнение вида (20.8) для обобщенной координаты:

$$M_N(Q)\ddot{Q} + R(Q)\dot{Q}^2 = k^2 \operatorname{sh} Q F_N(Q), \tag{21.7}$$

где обобщенные масса, инерция и сила имеют вид

$$M_N(Q) = \frac{1}{\pi}\left(1 + \varepsilon k^2(3 - N/2)\right) \int_0^\pi \sin^2 X dA, \tag{21.8}$$

$$R(Q) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 X dA, \tag{21.9}$$

$$F_N(Q) = \frac{1}{\pi}(1 + \varepsilon k^2) \int_0^\pi \frac{\sin^2 X dA}{p^N (\operatorname{ch} Q + \operatorname{sh} Q \cos X)^2}. \tag{21.10}$$

Учитывая связь эйлеровых и лагранжевых координат (21.3), интегралы в (21.8), (21.9) преобразуются к виду

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - z^2} dz}{z + c}, \quad I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{z\sqrt{1 - z^2} dz}{z + c},$$

где $c = c \operatorname{th} Q$. Эти интегралы вычисляются в комплексной плоскости z по контуру, содержащему разрез вдоль действительной оси от $z_1 = -1$ до $z_2 = 1$. В результате при $|c| > 1$ получаем

$$I_1 = c - \sqrt{c^2 - 1}; \quad I_2 = c\sqrt{c^2 - 1} - c^2 - 1/2.$$

Обобщенная масса и конвективный коэффициент оказываются равными

$$M_N(Q) = \frac{1 + \varepsilon k^2(3 - N/2)}{2 \operatorname{ch}^2(Q/2)},$$

$$R(Q) = \frac{\operatorname{sh}(Q/2)}{4 \operatorname{ch}^3(Q/2)}.$$

Из найденной связи эйлеровских и лагранжевых координат следует, что обобщенная сила может быть представлена в виде

$$F_N(Q) = \frac{1}{\pi}(1 + \varepsilon k^2) \int_0^\pi \frac{\sin^A dA}{p^N}$$

Для различных случаев имеем: при $N = 0$, $F_0(Q) = 1/2$, при $N = 1, 2, 3$ выражения для $F_N(Q)$ получаются дифференцированием $I_1(c)$ по параметру c:

$$F_2(Q) = \left(2\,\mathrm{ch}^2(Q/2)\right)^{-1}, \quad F_3(Q) = 1/2.$$

Рассмотрим частные случаи. Для "опрокинутой мелкой воды" ($N = 0$) и "чаплыгинского газа" ($N = 3$) динамические уравнения совпадают. В отсутствие дисперсии получаем уравнение для обобщенной координаты:

$$\ddot{Q} = \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{Q}{2}\right)\dot{Q}^2 + k^2\,\mathrm{ch}\left(\frac{Q}{2}\right)\mathrm{sh}\,Q. \tag{21.11}$$

Это уравнение описывает движение материальной точки в потенциальном поле:

$$U = \frac{4}{3}k^2\,\mathrm{ch}\left(\frac{Q}{2}\right) + \mathrm{const}.$$

В начальный момент времени точка находится в положении равновесия ($Q = 0$), но имеет начальную скорость $\dot{Q}(0) = P_0 = U_0/k$. Нелинейный член в (21.11) увеличивает скорость выхода точки из положения абсолютно неустойчивого равновесия $Q = 0$. После замены переменных $Q = P$ и однократного интегрирования с учетом начальных условий $Q(0) = 0, \dot{Q}(0) = P_0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)^2 = \left[P_0\,\mathrm{ch}\left(\frac{Q}{2}\right)\right]^2 + k^2\,\mathrm{sh}\,Q.$$

первый интеграл которого имеет вид

$$P_0\,\mathrm{ch}^2(Q/2)\exp\sqrt{k^2 - P_0^2/4} =$$
$$= \mathrm{sh}\,Q\sqrt{k^2 - P_0^2/4} + \sqrt{k^2\,\mathrm{sh}^2\,Q + P_0\,\mathrm{ch}^2(Q/2)}.$$

При больших значениях времени решение этого уравнения имеет асимптотику

$$Q = ln\frac{1 + (P_0/4k)\exp(kT)}{1 - (P_0/4k)\exp(kT)}, \tag{21.12}$$

что характеризует взрывной рост неустойчивости за время

$$T_{\text{ну}} \sim k^{-1}\ln(4k/P_0).$$

Для другого частного случая — длинноволновых перетяжек на несжимаемом скинированном пинче с током ($N = 2$) в отсутствие дисперсии получаем динамическое уравнение в виде

$$\ddot{Q} = \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{Q}{2}\right)\dot{Q}^2 + k^2\,\mathrm{sh}\,Q,$$

которое также описывает движение частицы в абсолютно неустойчивом положении равновесия $Q = 0$ при начальных условиях $Q(0) = 0$, $\dot{Q}(0) = P_0$. Однократное интегрирование приводит к уравнению

$$\dot{Q}^2 = \operatorname{ch}^2(Q/2)\left(P_0^2 + 8k^2 \ln \operatorname{ch}(Q/2)\right). \tag{21.13}$$

Проинтегрировать точно это уравнение не удается. Однако если заменить его приближенным, опустив второй член в скобках (21.11), то скорость роста возмущений на нелинейной стадии только уменьшится. В результате интегрирования этого приближенного уравнения, получим

$$Q = 2 \ln \left[\operatorname{th}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{P_0 T}{4}\right)\right], \tag{21.14}$$

что также приводит к взрывному росту неустойчивости за время $T \sim \pi/P_0$. Учет второго члена в (21.13) только ускорит развитие неустойчивости.

Проанализируем влияние дисперсии. В методе обобщенных координат дисперсионные члены малы, если $\varepsilon k^2 \ll 1$. Причина такого малого влияния дисперсии на нелинейное развитие абсолютно неустойчивой среды заключается в следующем: система (19.1), (19.2) является гиперболической, что приводит к возможности распространения волн. Нелинейность приводит к более крутым фронтам, на которых становится существенной дисперсия. Если дисперсия уравновешивает нелинейность, как это происходит в уравнении Кортвега де Вриза, то возникают солитоны. В абсолютно неустойчивой среде в отсутствие дисперсии и нелинейности движение частицы, описывающей систему, является инфинитным.

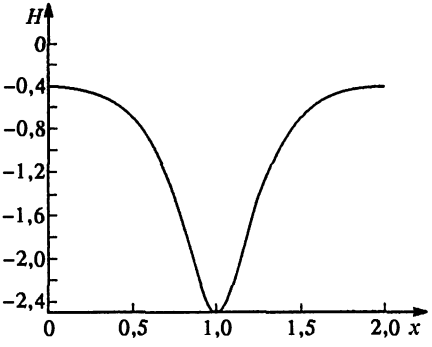


Рис. 21.2

Нелинейность ускоряет неустойчивое движение, при этом амплитуды всех гармоник, определяющих движение системы, стремятся к бесконечности, а дисперсия, вызывая перераспределение возмущений по гармоникам, не может стабилизировать движение, т. е. создать принципиально новый класс движений, как в гиперболических системах.

Формулы (21.6) вместе с (21.12) или (21.14) определяют решение задачи методом обобщенных координат.

В частном случае, в отсутствие дисперсии из (21.6), полагая $\rho = H$, где H — координата возмущенной поверхности, получаем

$$H = \frac{1}{\operatorname{ch} Q(T) + \operatorname{sh} Q(T) \cos X},$$

где зависимость Q(T) определяется из уравнения (21.12). Результаты решения приведены на рис. 21.2.

Причина такого малого влияния дисперсии на нелинейное Полученные аналитические решения согласуются с численными (Book & Ott, 1974) и приведенными в следующих главах, но находятся в противоречии с теоретическими результатами, полученными в (Трубников и Жда-

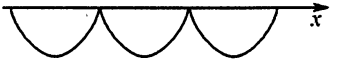


Рис. 21.3

нов, 1984; Трубников и Жданов, 1986; Trubnikov & Zhdanov, 1987), где предельная форма возмущения имеет обратную структуру с пузырями, направленными вниз и пиками, движущимися вверх (рис. 21.3).

Противоречия в полученных результатах можно понять, исследуя вопросы корректности математической постановки задачи.

§ 22. Корректность постановки задачи Коши для абсолютно неустойчивых сред

Классификация уравнений в частных производных производится следующим образом. Запишем систему уравнений в виде

$$\Sigma_{j=1}^{m}\Sigma_{k=1}^{n}a_{ij}^{(k)}\frac{\partial u}{\partial x_k}=0, \quad i=1,\ldots,m. \tag{22.1}$$

Определим матрицу

$$\omega_{ij}=\Sigma_{k=1}^{n}a_{ij}^{(k)}\frac{\partial \omega}{\partial x_k}, \tag{22.2}$$

где $\omega(x_1,x_2,\ldots)$ — характеристическая поверхность данной системы уравнений. Тип уравнения определяется уравнением

$$\det \| \omega_{ij} \| = 0.$$

Для ОМВ из (19.1), (19.2) получаем

$$\begin{vmatrix} \rho\frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial t} \\ \rho\frac{\partial \omega}{\partial t} & a^2\frac{\partial \omega}{\partial x} \end{vmatrix} = 0.$$

где $a^2 = gH_0$, H_0 — невозмущенная глубина жидкости. В результате получаем уравнение, определяющее эллиптическую систему

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + gH_0\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

В общем случае системы (19.3), (19.4) характеристическое уравнение также имеет эллиптический вид с заменой gH_0 на ρ^{-N}.

Глава VI
НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИЛИ ОДНОМОДОВЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 23. Классификация нарушений горизонтальной сдвиговой симметрии. Место периодических возмущений в этой классификации

Все три неустойчивости (РТН, НРМ и НКГ) — это неустойчивости, при которых возмущения равновесия находятся в функциональной окрестности слоисто-симметричных состояний или потоков. Такие функции обязательно имеют вид отклонений от симметрии слоистости или стратификации. Поле скоростей при РТН и НРМ таково, что происходят обмены или перестановки лагранжевых частиц между слоями. Это приводит к искривлению границ и, в случае развития неустойчивости, к росту нарушений симметрии слоистости. Рост отклонений от симметрии слоев происходит также при НКГ. При этом искривляется вихревая поверхность или поверхности.

В плоской, цилиндрической и сферической геометриях слои разделяют соответственно плоские, цилиндрические и сферические границы. РТН связана с гидростатическим равновесием. При этом в плоском случае невозмущенное состояние имеет горизонтальную сдвиговую симметрию. При РТН обмен энергетически выгоден, а при НРМ он происходит по инерции.

Возмущениями являются вмятины и выпучивания поверхностей или поля скоростей, приводящие к таким нарушениям. Относительная амплитуда возмущений границы характеризуется тангенциальным углом α, равным углу отклонения границы от симметричного (невозмущенного) положения. На симметричной плоскости он равен нулю. В линейном случае угол мал: $|\alpha| \ll 1$.

Обычно при рассматриваемых неустойчивостях поле скоростей возмущений сосредоточено в слое, параллельном поверхностям симметрии.

Здесь ограничимся плоским случаем. Будем называть плоскости, связанные с симметричными поверхностями, горизонтальными.

Возмущающие функции классифицируются по своей горизонтальной структуре. Имеются следующие возмущения:

(i) уединенные,
(ii) периодические,
(iii) случайно-периодические и
(iv) лакунарные или фрактальные.

С первыми тремя связан характерный горизонтальный масштаб. Возмущения, указанные последними, являются широкодиапазонными и содержат все масштабы от малого до большого.

Рассмотрим эти функции. Уединенное возмущение сильно нарушает горизонтальную симметрию. При этом на сдвигово-инвариантной плоскости появляется выделенная точка — место локализации этого возмущения. В связи с обсуждением здесь возмущений (i), видимо, полезно будет отметить, что, во-первых, на асимптотической стадии в случаях РТН и НКГ они становятся автомодельными.[1] В этом случае рост амплитуды пропорционален $\propto gt^2$ при РТН и $\propto (\Delta v)\,t$ при НКГ, здесь Δv — характерная относительная скорость. При НРМ асимптотическая зависимость не ясна. Во-вторых, возможно, что уединенные возмущения, амплитуда которых превышает некоторый малый конечный порог, не "затираются" асимптотически при наличии автомодельного турбулентного слоя перемешивания, а остаются выделенными и на асимптотической стадии.[2] У системы имеется, так сказать, "долгая память" по отношению к надпороговым возмущениям.[3] Этот вопрос имеет отношение к спонтанной и стимулированной турбулентностям и рассматривается ниже в гл. VIII.

Уединенные пузыри на стенках хорошо видны в экспериментах (Read, 1984, с. 48). Видимо, они стартуют от мениска жидкости. Они растут $\propto gt^2$ с коэффициентом пропорциональности, превышающим коэффициент спонтанной турбулентности, см. гл. VIII.

В связи с обсуждением возмущений (i) также отметим имеющие определенное отношение к уединенному случаю исследования по изучению эволюции клиновидной или конусообразной выемки или контактной границы. Это задача об эволюции КГ с сингулярностью на ней. Сингулярность здесь задается в начальных данных. Движение связано либо с импульсным воздействием, либо с постоянно действующим полем массовых сил. Можно рассматривать как случай, когда импульс распирает выемку, так и случай ее сжатия. При сжатии клина или конуса на оси может образовываться кумулятивная струя.

---

[1] Асимптотическая стадия наступает при $t \gg t_{sol}\ln(l_{sol}/|a_{sol}|)$. Здесь t_{sol} — характерный временной масштаб, связанный с уединенным возмущением. Он равен $t_{sol} = \sqrt{l_{sol}/g}$ в случае РТН и $t_{sol} = l_{sol}/\Delta v$ в случае НКГ, где a_{sol} и l_{sol} — начальные амплитуда и размер уединенного возмущения.

[2] Доводом в пользу этого является то, что стимулированная турбулентность (стимулированная широкодиапазонным спектром начальных возмущений, относительная амплитуда $a(\lambda)/\lambda$ которых превосходит некоторый конечный порог) может доминировать над спонтанной турбулентностью, см. гл. VIII.

[3] Вопрос о взаимодействии (i) длинноволнового движения и (ii) расширяющегося слоя спонтанного турбулентного перемешивания тесно связан с вопросами о (iii) корректности задачи Коши и о (iv) экспоненциальном сглаживании коротковолновых хвостов длинноволнового движения. (i) Длинноволновое движение имеет пространственно-временные масштабы L_L и T_L. (ii) Слой турбулентного перемешивания стартует с "микро" масштабов l_S и t_S, $l_S \ll L_L$, $t_S \ll T_L$. Главным обстоятельством является то, что этот слой "приходит" в "макро" область масштаба L_L за времена "порядка единицы" (при нормировке на длинноволновые единицы), т.е. за времена $\sim T_L$! На промежуточных временах при $t_S \ll t \ll T_L$ турбулентность в расширяющемся слое перемешивания короткомасштабна и автомодельна. (iii) Говорят, что задача Коши некорректно поставлена при наличии абсолютной неустойчивости с неограниченным в мелких масштабах инкрементом ($\gamma \to \infty$ при $k \to \infty$).

Несколько слов о литературе. В работе (Гаранин, 1992) аналитически методами теории потенциала (разложение по мультиполям) рассматривается динамика клина в поле тяжести. Анализ проведен и в случае, когда угол раствора клина α равен 180°. Этот случай соответствует уединенному возмущению на горизонтальной КГ. В работе (Rogatchov, Zhidov, Klopov, Meshkov & Tolshmyakov, 1991) экспериментально изучен процесс раздувания пузыря в вершине клина при его распирании внутренним давлением. Численное моделирование этого процесса (в том числе и в случае $\alpha = 180°$) выполнено (Youngs, Hankin & Cowperthwaite, 1993). Подъем пузыря в постепенно расширяющейся трубе (это может быть клин или конус) рассматривал (Kull, 1991). Начальные стадии процессов раздувания пузыря или выдавливания кумулятивной струи в вершине клина являются автомодельными. Нестационарные (с автомодельной нестационарностью) струи в близких постановках рассматриваются давно (Седов, 1972; Биркгоф и Сарантонелло, 1964, гл. XI, § 9) (удар клиньев и конусов, например, задача о посадке гидросамолета).

Итак, уединенное возмущение является сильным или грубым.[4] В отличие от него периодические 2D и 3D возмущения "слабо" нарушают симметрию. Горизонтальная плоскость разбивается на ячейки. При этом выделенных позиций на плоскости, взятой в целом, нет, и сдвиговая симметрия сохраняется (внутри ячеек симметрия, разумеется, отсутствует). Поэтому периодический случай, рассматриваемый в данной главе, так важен. В частности, он важен для эксперимента, в котором обычно возмущения довольно однородны относительно горизонтальных сдвигов. В математическом отношении периодические функции образуют отдельный хорошо изученный класс. Важным обстоятельством, выделяющим периодические решения по сравнению с уединенными, является то, что они образуют основу, на которой строится теория многомодовых и турбулентных движений.

Возмущающие функции из классов (iii) и (iv) понадобятся при анализе турбулентности. Функции (iii) позволяют рассмотреть одно звено инверсного каскада. Качественно они представляют собой уединенные блоки, однородно и стохастически заполняющие горизонтальную плоскость. В этом смысле в них имеется определенный "след" и от уединенных, и от периодических функций. Об этом пойдет речь в гл. VIII. Функции (iv), естественно, возникают при анализе стимулированной турбулентности.

Выше указано положение периодических возмущений среди других. Теперь вкратце о содержании главы, посвященной им. Рассматриваются неустойчивости РТ и РМ.[5] В случае однородной несжимаемой жидкости, ограниченной изобарической границей, и малой начальной амплитуды возмущение проходит последовательно L (linear) линейную и T (transition) переходную стадии и попадает на S (steady-state) заключитель-

[4] В том смысле, что оно грубо нарушает сдвиговую симметрию.

[5] В случае периодической НКГ на тонкой вихревой поверхности происходит, как известно, скручивание этой поверхности. В результате этого процесса асимптотически образуется структура, представляющая собой периодическую цепочку "кошачьих глаз".

ную (асимптотическую) стадию. На ней устанавливается стационарная форма пузыря. В случае больших начальных амплитуд имеются только две последние стадии. Обе они являются нелинейными. При упрощенном описании переходный участок стягивают в нуль. Считают, что процесс состоит из линейного и асимптотического участков, а переход между ними происходит мгновенно. Для амплитуды перехода берется значение $ka \simeq 0,7$ или $a \simeq 0,1\lambda$, здесь a — путь, пройденный пузырем. Наиболее важными являются вопросы о переходной и асимптотической стадиях. В случае РТН первый из них требует решения нестационарной, а второй — стационарной задач.

Периодические решения связаны с течениями в вертикальных полосах (2D) или трубах (3D). Не каждому течению в трубе соответствует непрерывное периодическое решение в неограниченном пространстве. Сечение трубы должно быть таким, чтобы им можно было замостить плоскость. Это очевидно. Более тонкое требование заключается в том, чтобы скорость на границах соседних труб была непрерывна при переходе из одной в другую. Например, трубы с сечением в виде ромба с произвольным углом этому требованию не удовлетворяют! Это существенная особенность 3D случая.

После анализа L (линейной) и S (стационарной) стадий в случае $\mu = 0$ исследуется вопрос о влиянии μ. Отмечается, что решение, описывающее S стадию при $\mu = 0$, может быть использовано и в $\mu \neq 0$ случае. Рассматривается вопрос об образовании гриба при торможении струи.

§ 24. Спектр фурье-потенциала, ССК[6] и сходимость рядов: предпосылки описания с помощью одной гармоники

Как было сказано, периодические решения[7] играют важную роль в теориях РТН, НРМ и НКГ. Это обусловлено тем, что обычно начальные данные в среднем однородны по x, y. Часто говорят также об одномодовых решениях, подразумевая при этом периодические решения. В линейной теории общее решение представляет собой линейную суперпозицию гармоник. Отдельное линейное решение (например, собственная функция), входящее в эту суперпозицию, представляет собой одну гармонику с амплитудой $f(z,t)\exp(ik_x x + ik_y y))$, зависящей от времени и вертикальной координаты или только от времени.[8] В цилиндрическом и сферическом случаях разложение ведется по цилиндрическим и сферическим гармоникам. С решением связаны период $\lambda = 2\pi/k$ и волновое число $k = 2\pi/\lambda$. В нелинейном случае периодическое решение раскладывается в ряд Фурье по первой и старшим гармоникам nk, $n = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим развитие возмущения в случае скачка плотности в несжимаемой неограниченной жидкости. Пусть отношение плотностей на

[6] Связанная с вершиной пузыря система координат (ССК).

[7] Рассматривается периодичность в пространстве по горизонтальным переменным — координатам x в 2D и x, y в 3D геометриях.

[8] Амплитуда возмущения горизонтального лагранжева слоя $\eta = f(t)\exp(ik_x x + ik_y y)$ зависит только от времени.

скачке $\mu = 0$ (соответственно число Атвуда $A = 1$). Периодическое возмущение приводит к появлению растущей по амплитуде с течением времени периодической структуры из пузырей и струй. Если предположить, что граница раздела остается бесконечно дифференцируемой везде в области пузыря, то сходимость ряда Фурье для потенциала скорости будет экспоненциально быстрой. В этом случае для описания продвижения пузыря будет достаточно нескольких первых гармоник. Предварительное обсуждение сходимости необходимо здесь для того, чтобы оценить применимость модели с $N = 1$, в которой в ряду Фурье оставляется только одна гармоника.

Здесь необходимо подчеркнуть два обстоятельства, которые вызывают определенные затруднения при первом знакомстве с вопросом.[9] Во-первых, следует различать ряд Фурье для границы раздела:

$$\eta(x,t) = \sum \beta_n C_{nx}, \quad C_{nx} = \cos nx \tag{24.1}$$

и ряд Фурье для потенциала скорости:

$$\varphi(x,Y,t) = \sum \frac{A_n}{n} C_{nx} E_{nY}, \quad E_{nY} = \exp(-nY). \tag{24.2}$$

Разложение потенциала производится в окрестности вершины пузыря. Жидкость находится в области $\eta < Y < +\infty$. Это условие опреде-

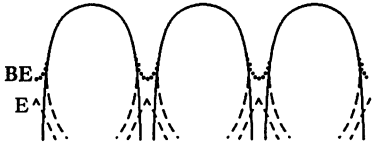


Рис. 24.1. Несущественность удаленных участков струй для динамики пузырей в PTH и HPM случаях. Например, струя может набегать на препятствие, которое полностью изменяет ее траекторию, а пузыри этого "не чувствуют". На рисунке изображено клиновидное препятствие E, рассекающее и поворачивающее струю. Граница в случае с препятствием показана штриховой кривой, а без препятствия — сплошной кривой. Кроме того, на рисунке показано, как определить пузырьковую оболочку. Для этого необходимо произвести "срезку" тех частей струй, в которых движение вещества близко к свободному падению (считаем, что $\mu \ll 1$). Структура, помеченная буквами BE (bubble envelope), со "срезанными" (или сглаженными) струями называется оболочкой из пузырей. На рисунке "срезанные" кусочки границы показаны точками

ляет знак в аргументе экспоненты в (24.2). Вертикальная координата Y связана с вершиной. Система координат x, Y называется связанной системой координат. Она неинерциальна при ускоренном движении вершины.

При рассмотрении пузыря (иногда неявно) предполагается, что удаленная струя оказывает малое влияние на динамику жидкости в области пузыря. В этой связи говорят об оболочке из пузырей (bubble envelope).

[9] Например, недоумевают, как можно использовать разложение Фурье при описании асимптотической стадии? Ведь на этой стадии амплитуда струй бесконечна и, следовательно, бесконечны амплитуды Фурье. Объяснение заключается в том, что амплитуды фурье-разложения КГ и не используются в вычислениях (в отличие от конечных амплитуд фурье-разложения потенциала).

Она может быть периодической или турбулентной. В турбулентном случае такое представление справедливо в случае больших значений чисел Атвуда A и соответственно малых значений отношения μ. Периодическая оболочка показана на рис. 24.1. Это структура из пузырей и сглаженных струй.

Поскольку уравнение $\Delta\varphi = 0$ эллиптическое, то "судьба" струи экспоненциально слабо влияет на продвижение пузыря, см. обсуждение этого вопроса в работе (Anisimov, Chekhlov, Dem'yanov & Inogamov, 1993), разд. 2, с. 9. Струи могут попадать в область с изменяющимся полем гравитации и соответственно изменяющимся ускорением g, но даже сильные изменения g вдоль струи мало сказываются на динамике пузыря. Этот вопрос рассматривал (Kull, 1991). Поэтому струю можно "подрезать" там, где модуль градиента давления $|\nabla p|$, убывающий вдоль струи при удалении от пузыря, становится мал по сравнению с гидростатическим $\rho_d|g|$ в тяжелой жидкости. Считаем, что $\rho_l \ll \rho_d$. Здесь ρ_l и ρ_d — плотности легкой и тяжелой жидкостей. Граница с "подрезанными" струями и является оболочкой из пузырей.

Ряды (24.1) и (24.2) отличаются качественно. Они имеют разные асимптотики на больших временах. Амплитуды возмущений поверхности неограничено растут $\beta \to \pm\infty$ при $t \to \infty$. Такой рост вызван удалением концов струй ("не срезанных") на бесконечность. Это относится как к ЛСК (лабораторной системе координат), так и к ССК. Выделенной является только нулевая амплитуда β_0, которая при старте от плоской границы равна нулю в ЛСК из-за сохранения объема несжимаемой жидкости и неограничено растет в ССК.

Амплитуды потенциала (обычно рассматривается старт с малых возмущений) тоже растут, но этот рост ограничен. Здесь имеются фаза

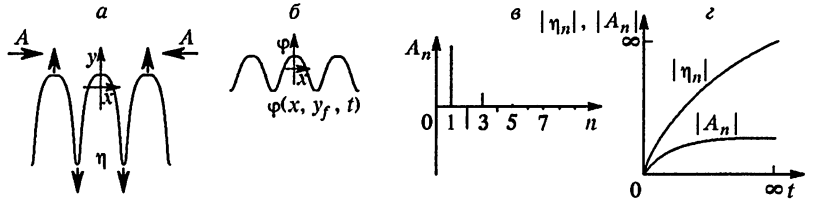


Рис. 24.2. Противопоставление рядов Фурье для границы и потенциала. Потенциал берется в области пузырей Вид периодических функций (*а*, *б*). Стрелки указывают направления роста возмущений η. Потенциал, показаный на рис. *б*, взят на уровне *A*–*A*, проведенном на рис. *а*. Спектр амплитуд φ в пространстве волновых чисел (*в*). Эволюция спектров во времени (*г*)

роста и фаза насыщения. Последняя связана с асимптотическим приближением к стационару. Это противопоставление рядов Фурье для η и φ показано на рис. 24.2.

При этом обычно предполагается, что на больших временах пузырь "забывает" начальные данные и что стационар единственный и простой с одним пузырем и струей на период. Стационар характеризуется установившейся формой пузыря (при РТН и НРМ) и его постоянной скоростью

подъема (при РТН). Основой таких предположений обычно являются результаты численного моделирования. В фазе насыщения амплитуды A_n ограничены. При возрастании t они остаются постоянными ~ 1 при РТН или стремятся к нулю при НРМ. При НРМ они стремятся к нулю, как $1/t$, если $\mu = 0$.

Итак, во-первых, ряды Фурье η и φ различны, а во-вторых, бесконечная дифференцируемость функции $\eta(x,t)$, задающей положение границы, означает, что особенности комплексного потенциала f, $\varphi = \Re f$ остаются на конечном расстоянии от границы.[10] Отсюда же следует экспоненциальная сходимость амплитуд A в (24.2) с ростом номера гармоники n, см. обсуждение этого вопроса в работе (Иногамов, 1995b). При слабо искривленной границе особенности находятся далеко от нее $l \gg \lambda$, где l — минимальное расстояние между ближайшей особенностью и границей. С ростом возмущений они приближаются к границе (иногда оценивают l, как радиус кривизны границы). При приближении нестационарного решения к стационару с гладкой (без особенностей) установившейся формой границы особенности "застывают" в своих асимптотических стационарных позициях (Иногамов, 1994). Чем больше расстояние l, тем быстрее сходимость амплитуд A_n.

Итак, амплитуды Фурье $|A_n|$ в случае РТН или $|A_n|t$ в случае НРМ растут с t. В случае пузыря с гладкой границей они быстро убывают с номером n. Их наибольшие значения связаны со стационарным состоянием. Расчет стационаров, проведенный в работах (Иногамов, 1992b; Иногамов и Чехлов, 1992a, 1993a, 1993b) для случая РТН, показывает, что амплитуда второй гармоники в несколько раз меньше амплитуды первой, а амплитуды третьей и следующих гармоник пренебрежимо малы. Отсюда следует, что имеются основания ожидать, что ряд Фурье, оборванный уже на первой гармонике, будет довольно хорошо описывать динамику гладких пузырей.

§ 25. Наиболее существенные моменты процедуры вывода уравнений

При хорошей сходимости модель с $N = 1$ естественна. Впрочем, в любом случае анализ следует начинать с нее. Что касается вывода динамической системы, то его целесообразно провести при произвольных N, а уже затем рассмотреть частную ситуацию с $N = 1$.

Мы будем следовать работам (Иногамов, 1994, 1995a, 1995b) в нестационарном случае и работам (Иногамов, 1992b; Иногамов и Чехлов, 1992a, 1993a, 1993b) в стационарном. Недостатком этих работ является их краткость, затрудняющая быстрое ознакомление и понимание. Поэтому здесь, как это видно из названия, упор сделан на принципиальные обстоятельства, наиболее существенные при первом знакомстве. За техническими деталями следует обратиться к упомянутым работам

[10] Рассматриваются гладкие или бесконечно дифференцируемые пузыри. Пузыри, у которых может образовываться особенность на КГ, обсуждаются в § 28.

Рассмотрим ЛСК. Возьмем некоторые функции $\eta(x,t)$ и $\varphi(x,y,t)$. Составим из них кинематическую

$$k(x,t) = \eta_t + \eta_x\,\varphi_x\,|_\Gamma - \varphi_y\,|_\Gamma, \quad f|_\Gamma \equiv f(x,y,t)|_{(y=\eta)} \equiv f(x,\eta,t) \tag{25.1}$$

и динамическую

$$d(x,t) = \varphi_t + \frac{1}{2}v^2\,|_\Gamma + \frac{p|_\Gamma}{\rho} - g\eta \tag{25.2}$$

функции. Разложим функции (25.1) и (25.2) в ряды Тейлора по x. Положим, что точка разложения — это точка $x = 0$. Запишем разложения в виде

$$k(x,t) = \sum k_n(t)x^{2n}, \quad d(x,t) = \sum d_n(t)x^{2n}. \tag{25.3}$$

Точку $x = 0$ мы связали с вершиной пузыря и рассмотрели четные относительно вершины возмущения. Поэтому разложения (25.3) идут по четным степеням x.

Сравним выражения (25.1) и (25.2) с нестационарными граничными условиями:

$$\eta_t + \eta_x\,\varphi_x\,|_\Gamma - \varphi_y\,|_\Gamma = 0,$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}v^2\,|_\Gamma + \frac{p|_\Gamma}{\rho} - g\eta = 0.$$

Видим, что если η и φ дают решение задачи о динамике свободной поверхности, то функции $k(x,t)$ и $d(x,t)$ тождественно равны нулю при любых x и во все моменты времени. Тогда все тейлоровские коэффициенты $k_n(t)$ и $d_n(t)$ (25.3) разложений этих функций тождественно равны нулю во все моменты времени.

Запишем

$$\eta(x,t) = \sum \eta_n x^{2n}, \tag{25.4}$$

$$\varphi(x,y,t) = \sum \frac{\alpha_n}{n} C_{nx}E_{ny}, \quad E_{ny} = \exp(-ny). \tag{25.5}$$

Потенциал (25.5) записан в ЛСК. Вычислим коэффициенты k_n и d_n через коэффициенты η_n и амплитуды α_n (конкретные расчеты будут проводиться через амплитуды A_n). Тогда условия $k_n(\eta_n, A_n) = 0$ и $d_n(\eta_n, A_n) = 0$ дадут нам искомые уравнения на неизвестные η_n и A_n.

Эти уравнения вычисляются путем прямой подстановки разложений (25.4) и (25.5) в выражения (25.1) и (25.2). Покажем, как это делается. Производные η_t, η_x равны

$$\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0} \dot\eta_n(t)x^{2n}, \quad \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=1} 2n\eta_n(t)x^{2n-1}.$$

Трудными являются вычисления производных от потенциалов. Рассмотрим процедуру преобразование ряда $\varphi_y = -\sum \alpha_m C_{mx}E_{my}$. Запишем

$$\varphi_y = -\sum_{m=1} A_m \sum_{p=0} (-1)^p \frac{(mx)^{2p}}{(2p)!} \sum_{s=0} (-1)^s \frac{[m(\eta-\eta_0)]^s}{s!}. \tag{25.6}$$

Видим, что функции $C_{mx} = \cos mx$, $E_{my} = \exp(-my)$ разложены в (25.6) в степенные ряды. Нам требуется φ_y на границе $y = \eta$ в ЛСК. Имеем

$$\alpha_m \exp(-my)|_\eta = \alpha_m \exp(-m\eta) =$$

$$\alpha_m \exp\left(-m(\eta_0 + \sum_{n=1} \eta_n x^{2n})\right) = A_m \exp\left(-m \sum_{n=1} \eta_n x^{2n}\right),$$

поскольку

$$A_m(t) = \alpha_m(t) \exp\left(-m\eta_0(t)\right). \tag{25.7}$$

Координаты y в ЛСК и Y в ССК связаны соотношением $y - \eta_0 = Y$. Поэтому на границе $y|_\Gamma = \sum\limits_{n=0} \eta_n x^{2n} = \eta_0 + \sum\limits_{n=1} \eta_n x^{2n}$ и $Y|_\Gamma = \sum\limits_{n=1} \eta_n x^{2n}$. Из-за сдвига $\eta_0(t)$, существующего между ЛСК и ССК, и перехода при изменении точки отсчета от амплитуд α (ЛСК) к A (ССК) по формуле (25.7) выражение (25.6) принимает вид

$$\varphi_y = -\sum_{m=1} A_m \sum_{p=0} (-1)^p \frac{(mx)^{2p}}{(2p)!} \sum_{s=0} (-1)^s \frac{\left(m \sum_{j=1} \eta_j x^{2j}\right)^s}{s!}$$

или

$$\varphi_y = -\sum_{m=1} \sum_{p=0} \sum_{s=0} (-1)^{p+s} A_m \frac{(mx)^{2p} \left(m \sum_{j=1} \eta_j x^{2j}\right)^s}{(2p)!s!}.$$

Наиболее громоздким является вычисление v^2. Нам нет необходимости приводить его здесь, поскольку в качественном отношении оно аналогично приведенному выше. Главным здесь было обратить внимание на принципиальный момент, связанный с системами ЛСК и ССК.

Приведем два первых кинематических уравнения $k_0 = 0$ и $k_1 = 0$. Они равны

$$\dot{\eta}_0 = -M_0, \tag{25.8}$$

$$\dot{\eta}_1 = \frac{M_2}{2} + 3M_1\eta_1. \tag{25.9}$$

Первые два динамических уравнения $d_0 = 0$ и $d_1 = 0$ равны

$$\dot{M}_{-1} = \frac{M_0^2}{2} + g\eta_0, \tag{25.10}$$

$$\frac{\dot{M}_1}{2} + \eta_1 \dot{M}_0 = \frac{M_1^2}{2} - g\eta_1. \tag{25.11}$$

Очень важным обстоятельством является появление моментов M_j от амплитуд A вместо самих амплитуд. Это связано с тейлоровскими раз-

ложениями функций C_{nx}, S_{nx}, E_{ny}. Они равны

$$M_j = \sum_{m=1}^{N} m^j A_m, \tag{25.12}$$

$$M_0 = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = \sum_{m=1} m^0 A_m,$$

$$M_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 + \ldots = \sum_{m=1} m^1 A_m,$$

$$M_1 = A_1 + 2^2 A_2 + 3^2 A_3 + \ldots = A_1 + 4A_2 + 9A_3 + \ldots = \sum_{m=1} m^2 A_m.$$

Дело в том, что благодаря этому уравнения приобретают универсальный вид, который не зависит от числа N удержанных в рядах (25.4), (25.5) слагаемых. Кроме того, это упрощает процедуру точного решения алгебраических стационарных уравнений, которые получаются из нестационарной системы при $\dot{A}_n = 0$, $\dot{\eta}_n = 0$.

Последним принципиальным обстоятельством, которое необходимо отметить, является то, что уравнения нулевого порядка $k_0 = 0$ (25.8) и $d_0 = 0$ (25.10) могут быть опущены. Уравнение (25.10) не имеет физического смысла, поскольку сам нестационарный интеграл Бернулли или интеграл Коши–Лагранжа определен с точностью до произвольной однородной функции от времени. Уравнение (25.8) содержательное, но оно отпадает от системы в силу того, что в нее входят только коэффициенты $\eta_1, \eta_2, \ldots$ и амплитуды A_n, не зависящие от положения вершины $\eta_0(t)$ в ЛСК. Положение самой вершины при этом становится несущественным. Уравнение (25.8) определяет $\eta_0(t)$. Оно интегрируется после того, как решена задача в ССК.

Конкретный вид остальных уравнений до шестого порядка включительно в переменных η, M приведен в работах (Иногамов, 1994, 1995b). Они очень громоздки и не могут быть представлены в данном изложении.

§ 26. Описание перехода и насыщения в модели с $N = 1$

Согласно сказанному выше, в общем случае система уравнений, описывающих эволюцию изобарической свободной поверхности, имеет вид

$$\mathbf{k}\,(\eta,\ \frac{d\eta}{dt},\ \mathbf{A},\ \frac{d\mathbf{A}}{dt}) = 0, \qquad \mathbf{d}\,(\eta,\ \frac{d\eta}{dt},\ \mathbf{A},\ \frac{d\mathbf{A}}{dt}) = 0; \tag{26.1}$$

$$\mathbf{k} = k_1, k_2, k_3, \ldots, \quad \mathbf{d} = d_1, \ldots,$$

$$\eta = \eta_1, \ldots, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta_1}{dt}, \ldots, \quad \mathbf{A} = A_1, \ldots, \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}, \ldots,$$

$$\dot{A}_i = \sum_{j=1}^{N} \left(G^{-1})_{ij}\,(g\,\eta_j + \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} M_{jkm}\,A_k A_m \right),$$

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij}\,A_j, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{26.1'}$$

Массивы $G(\eta_1,\ldots,\eta_j), M(\eta_1,\ldots,\eta_j)$ и $D(\eta_1,\ldots,\eta_j)$ выписаны в работах (Иногамов, 1995a, 1995b). Как обычно, граница и потенциал аппроксимируются конечными отрезками рядов (25.4) и (25.5), содержащими по N слагаемых. Амплитуды α (ЛСК) выражаются через амплитуды A (ССК) по формулам (25.7). В системе (26.1) удерживаются по N первых k_j и d_j уравнений. Системы $k_j = 0$, $d_j = 0$, $j = 1,2,\ldots,N$ интегрируются, и исследуется сходимость их решений при увеличении N.

Ограничимся в данном разделе случаем $N = 1$. Тогда система состоит из уравнений $k_1 = 0$ (25.9) и $d_1 = 0$ (25.11). Представим ее анализ. Система автономна. Это позволяет исключить время и понизить ее порядок. Тогда она становится динамической системой на плоскости и легко исследуется. Момент M_0 (25.12), взятый с минусом, равен скорости подъема пузыря в ЛСК, см. (25.8). Обозначим эту скорость буквой W. При $N = 1$ моменты, входящие в систему (25.9), (25.11), равны $M_0 = M_1 = M_2 = A_1 = -W$. Кроме того, будем использовать еще обозначение $U = A_1^2$. В систему (25.9), (25.11) при $N = 1$ входят переменные η_1 и W. Выразим коэффициент η_1 через кривизну $K = 1/R$ в вершине пузыря $\eta_1 = -K/2$, здесь R — радиус кривизны. В этих переменных исследуемая система сводится к простому уравнению

$$\frac{dU}{dK} = \frac{2(U + gK)}{(1-K)(3K-1)}. \tag{26.2}$$

Это уравнение позволяет получить исчерпывающее описание исходной системы путем анализа фазовой плоскости (K, U). Рассмотрим отдельно случаи с $g = -1$, $g = 0$ и $g = 1$. Начнем с гравитационных волн.

26.1. Гравитационные стоячие волны

Ось y направлена в сторону жидкости. Поэтому в случае волн вертикальная компонента $\mathbf{g}$ равна $g = +1$. Поскольку потенциал разложен в ряд (25.5) по косинусам C_{nx}, то можно описать только стоячие волны. Схема колебаний приведена на рис. 26.1*a*. Жидкость находится при $y > \eta$. Ширина вертикальной полосы на рисунке равна $\lambda/2$. При $N = 1$ траектории системы (26.1) замыкаются через один оборот.[11] Позиции волны *1–2–3–4–5* охватывают половину колебания во времени. Сплошной кривой показана парабола $\eta(x,t) = \eta_0(t) + \eta_1(t)\,x^2$, представляющая отрезок ряда (25.4). Штриховой кривой дан соответствующий ей отрезок разложения (24.1), равный $\eta = \beta_1 C_x + \beta_2 C_{2x}$ в ЛСК. Парабола аппроксимирует изобарическую границу в окрестности одного из двух экстремумов, приходящихся на период. На рис. 26.1*a* это экстремум, находящийся на левой вертикали.

Для нахождения амплитуд β_n (24.1) по известным коэффициентам η_n разложим (24.1) в ряд Тейлора в точке $x = 0$. Приравняем коэффициенты этого тейлоровского разложения и разложения (25.4). В результате

[11] При $N > 1$ фазовое пространство многомерно. При этом общая нелинейная траектория не является замкнутой.

получим линейную систему

$$\eta_p = \frac{(-1)^p}{(2p)!} \sum_{m=1} m^{2p} \beta_m, \tag{26.3}$$

связывающую η_n и β_n. В случае $N = 1$ система (26.3) и ее решение равны соответственно

$$\eta_0 = \beta_1 + \beta_2, \quad 2\eta_1 = -\beta_1 - 4\beta_2; \quad \beta_1 = \frac{4}{3}\eta_0 + \frac{2}{3}\eta_1, \quad \beta_2 = -\frac{1}{3}\eta_0 - \frac{2}{3}\eta_1.$$

Штриховая кривая $\eta = \beta_1 C_x + \beta_2 C_{2x}$ на рис. 26.1*а* занимает такую же позицию в экстремуме и имеет такую же кривизну в этом экстремуме,

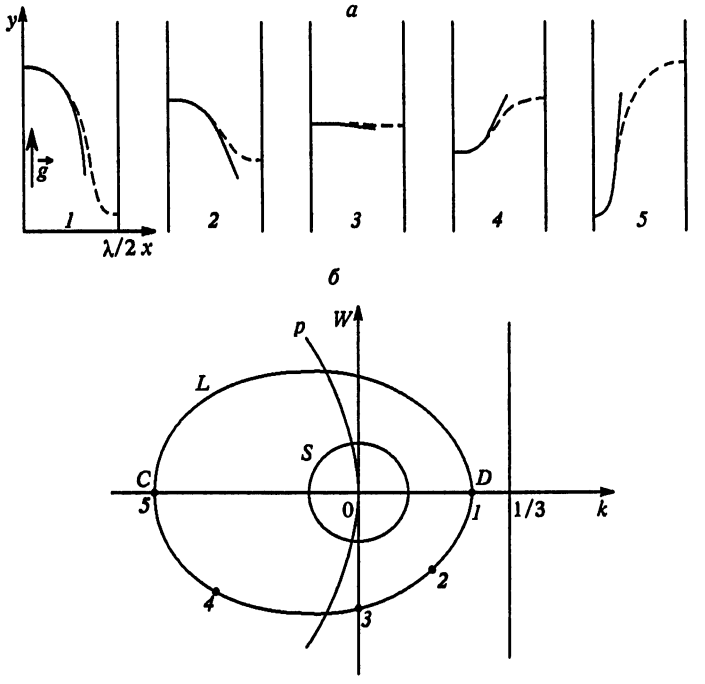


Рис. 26.1. Гравитационные стоячие волны. Жидкость находится в верхней части полоски, изображающей полупериод волны, ускорение направлено в ее сторону (*а*). Траектории $W(K)$ на фазовой плоскости W, K (*б*). Цифрами *1*, *2*, *3*, *4* и *5* отмечены точки, относящиеся к позициям волны на рис. *а*

что и парабола. Эта штриховая кривая представляет собой другую аппроксимацию изобарической границы.

Фазовая плоскость уравнения (26.2) представлена на рис. 26.1*б*. Используются переменные W, K вместо U, K. Имеется единственная особая точка с координатами $W = 0$, $K = 0$. Она соответствует гидростатическому равновесию. Эта особая точка — фокус. Она образуется как

следствие пересечения изоклин $W = 0$ (ось K, на ней $dW/dK = \infty$) и $K = -W^2$ (парабола p, на ней $dW/dK = 0$). Гребням волн соответствуют отрицательные значения кривизны K а впадинам — положительные. В течение полупериода, показанного на рис. 26.1, скорость W левого экстремума отрицательна. Поэтому точки *1*, *2*, *3*, *4* и *5*, относящиеся к позициям волны, показанным на рис. 26.1*а*, попадают на нижнюю половину периода на плоскости W, K.

При малых амплитудах траектории близки к круговым, поскольку здесь $|W| \approx |K| \ll 1$ и уравнение (26.2) приближенно равно $dW/dK = -K/W$. При этом впадины и гребни стоячих волн примерно симметричны (траектория S на рис. 26.1*б*). Отклонение от окружности является эффектом второго порядка по амплитуде. При больших амплитудах становится заметной асимметрия траектории. Гребни и впадины уже не симметричны — гребни у́же, и их абсолютная кривизна больше, чем у впадин. Поэтому траектории проходят дальше в сторону отрицательных K, чем в сторону положительных (траектория L на рис. 26.1*б*). Справа эти замкнутые кривые ограничены изоклиной $K = 1/3$, поэтому в данном приближении кривизна впадины не может превысить значение $1/3$. В точках C и D происходят остановки гребня и впадины соответственно.

26.2. Эволюция границы при движении по инерции

О сжимаемой и несжимаемой неустойчивостях Рихтмайера–Мешкова, а также о стадии (i) генерации завихренности и стадии (ii) эволюции, которая может быть названа движением по инерции, см. гл. I, §§ 4, 5. Ниже рассматривается стадия линейной и нелинейной эволюции в случае несжимаемой RPM. Полезная модель такой неустойчивости, допускающая детальное аналитическое исследование, следует при $g = 0$ из уравнения (26.2). При $g = 0$ оно принимает вид

$$\frac{dW}{dK} = \frac{W}{(1-K)(3K-1)}. \tag{26.4}$$

Фазовый анализ системы представлен на рис. 26.2*а*. В отличие от случая гравитационных волн п. 26.1 здесь, во-первых, имеются две особые точки, во-вторых, характер этих точек другой. Одна из них — узел ($W = 0$, $K = 1/3$), тогда как другая ($W = 0$, $K = 1$) является седлом. Они появляются из-за пересечения изоклин $K = 1/3$ и $K = 1$, на которых $dW/dK = \infty$, с изоклиной $W = 0$, на которой $dW/dK = 0$.

Уравнение (26.4) легко интегрируется. Его общий интеграл имеет вид

$$W = W_0\sqrt{\frac{1-3K}{1-K}}, \qquad W_0 = W(K=0). \tag{26.5}$$

Отсюда следует, что на плоскости W, K движение описывается единственной траекторией. Остальные траектории получаются из нее простым изменением масштаба по оси W.

Зависимость от времени можно найти из исходных уравнений (25.9) и (25.11), которые в этом случае принимают вид

$$\frac{dK}{dt} = -W(3K-1), \tag{26.6}$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{W^2}{1-K}. \tag{26.7}$$

Исключая с помощью интеграла (26.5) скорость W в уравнении (26.6), находим после его интегрирования эволюцию кривизны. Эта эволюция описывается функцией $K(t)$, подчиняющейся уравнению

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{1-K}{1-3K}}-1\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3(1-K)}+\sqrt{1-3K}}{\sqrt{3}+1} = W_0 t. \tag{26.8}$$

Для определенности постоянная интегрирования в (26.8) выбрана так, чтобы при $t = 0$ граница проходила бы плоскую поверхность, т. е. $K(0) = 0$.

Проинтегрируем уравнение (26.7) и определим зависимость $W(t)$. Для этого выразим K через W/W_0 с помощью интеграла (26.5). Подставим получившееся выражение в уравнение (26.7) и проинтегрируем его. В результате получаем искомую зависимость в неявном виде. Она имеет вид

$$\frac{2}{3}\left(\frac{W_0}{W}-1\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\,\frac{\sqrt{3}W_0 - W}{\sqrt{3}W_0 + W}\right) = W_0 t. \tag{26.9}$$

Постоянная в (26.9) выбрана так, чтобы выполнялось: $W(t=0) = W_0$.

Обсудим физический смысл функций $W(t)$ и $K(t)$. Они приближенно описывают поле скоростей и форму границы. Потенциал и вертикальная скорость равны

$$\varphi = -We^{\eta_0}C_x e^{-y}, \quad v(x,y,t) = W(t)e^{\eta_0(t)}C_x e^{-y}, \quad C_x \equiv \cos x.$$

Граница равна

$$y = \eta(x,t) = \eta_0(t) - K(t)\frac{x^2}{2} = \beta_1(t)C_x + \beta_2(t)C_{2x}.$$

Разложение по x справедливо в окрестности $x = 0$. Знак K выбран так, что пузырю при $x = 0$ соответствует положительная кривизна, а струе — отрицательная. Согласно (25.8), $\eta_0(t) = \int\limits_0^t W(\tau)\,d\tau$. Следовательно, положительным W соответствует движение границы при $x = 0$ в сторону положительных значений y. Область малых кривизн $|K| \ll 1$ относится к линейной теории.

Случай с $K > 0$ (при $x = 0$ есть вмятина), $K \ll 1$ (граница мало отличается от плоской) и $W > 0$ (при $x = 0$ граница движется вверх на рисунке) изображен на рис. 26.2*б*. Эволюция пузыря показана на

рис. 26.3*а*. К этому случаю относится точка *a* на рис. 26.2*а*. В заштрихованных областях на рис. 26.2*б* вертикальная компонента скорости v положительна и превышает 1% от величины $W(t)\exp(\eta_0(t))$. Направле-

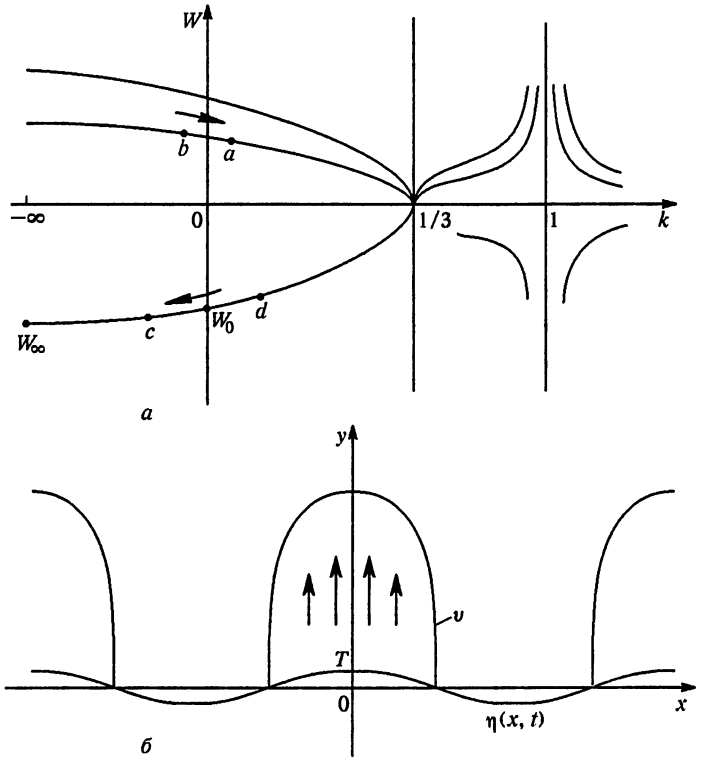


Рис. 26.2. Неустойчивость Рихтмайера–Мешкова: одномодовая эволюция. В модели $N = 1$ система уравнений интегрируется аналитически. Траектории на фазовой плоскости W, K (*а*). Стрелки указывают направление движения при возрастании времени. Узел $W = 0$, $K = 1/3$ соответствует пузырю с установившейся формой. Скорости v и граница η в физическом пространстве (*б*). Заштрихованы области положительных значений вертикальной скорости v. Вверху на фазовой плоскости (W, K) представлены значения переменных W и K, которые они имеют в точке T ($x = 0, y = \eta_0(t)$). Данная конфигурация границы η и поля v относится к точке *a* на фазовой плоскости

ние компоненты скорости v в этих областях показано стрелками. При НРМ $g = 0$, поэтому направления вверх и вниз условны. Они относятся к рисунку и направлению оси y на нем.

Сверху на рис. 26.2*б* — тяжелая жидкость. При малой амплитуде возмущений КГ гофрирована по косинусу. Начало отсчета может быть выбрано произвольно. Выберем его так, чтобы в $x = 0$ до прихода УВ находилась вершина пузыря (вмятины в тяжелом веществе). До прохода УВ вещество покоится. Если УВ идет снизу вверх из легкого в

тяжелое (см. § 4 и § 5), то пузырь приобретает положительную скорость. Поскольку он находится при $x = 0$ и его скорость $\dot{\eta}_0$ положительна, то получим, что и $W > 0$.

Если УВ идет сверху вниз из тяжелого в легкое, то положительную скорость приобретают струи — выпуклости со стороны тяжелого вещества. Следовательно, если $W > 0$ в $x = 0$, то в этой точке должно быть $K < 0$. К этим начальным данным относится точка b на рис. 26.2*а* и эволюция, показанная на рис. 26.3*б*. Чтобы получить соответствующие ей η и v, нужно на рис. 26.2*б* сместить η на половину периода. Тогда под

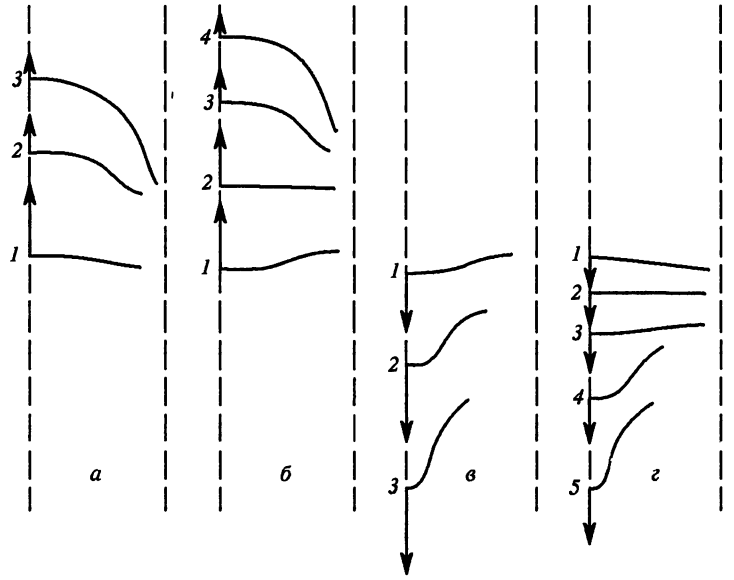


Рис. 26.3. Движения пузыря (*а*, *б*) и струи (*в*, *г*) в случае стартов из следующих начальных точек: точка *а* (см. рис. 26.2*а*) — эволюция *а*, точка *b* — эволюция *б*, точка *c*— эволюция *в* и точка *d* — эволюция *г*. Точки *a*, *b*, *c* и *d* показаны на рис. 26.2*а*. Жидкость находится сверху. Цифры *1*, *2*, ... относятся к моментам времени $t_1 < t_2 < \ldots$ Для разборчивости рисунка позиции КГ в моменты t_j разнесены на расстояния, превышающие реальные

заштрихованной областью будет находиться выпуклость. Как видим, в случаях точек *а* и *b*, показанных на рис. 26.2*а*, начальные функции η и v находятся в фазе и противофазе соответственно.

На плоскости W, K на рис. 26.2*а* физические решения находятся при $K < 1/3$. Траектории в верхней полуплоскости $W > 0$ этого рисунка описывают эволюцию в направлении установившегося пузыря. Оно показано верхней стрелкой.

Посмотрим, в каком направлении эволюционирует система в нижней полуплоскости $W < 0$. Поскольку $W < 0$, то здесь стрелки в заштрихованных областях, охватывающих точку тейлоровских разложений $x = 0$, имеют обратное направление. Этим случаям соответствуют

эволюции струй, показанных на рис. 26.3*в, г*. При этом в $x = 0$ сразу (если $K(t = 0) < 0$, УВ снизу вверх, рис. 26.3*в*) или через некоторый промежуток времени (если $K(0) > 0$, УВ сверху вниз, рис. 26.3*г*) образуется струя.

Модуль кривизны на кончике этой струи растет $K \to -\infty$ при $t \to$ $\to +\infty$. Движение на плоскости W, K на рис. 26.2*а* происходит в направлении нижней стрелки. При $t \to \infty$ скорость струи выходит на предел, равный $W_\infty = W(t = +\infty)$. Из (26.9) следует, что

$$W_\infty = \sqrt{3} W_0, \tag{26.10}$$

где W_0 — это та скорость, которую имела граница в точке $x = 0$ в тот момент, когда в окрестности $x = 0$ эта граница была плоской, $W_0 = W(K = 0)$, см. (26.5). Точки W_0 и W_∞ приведены на рис. 26.2*а*.

Выше было показано, что аналитические формулы (26.8) и (26.9) описывают эволюции как пузыря, так и струи. При этом пузырь описывается с хорошей точностью, а струя — с удовлетворительной. Сравнение с численным моделированием несжимаемой НРМ показано на рис. 26.4. Сплошные кривые *1* и *3* соответствуют интегралу (26.9), а штриховые — моделированию, результаты которого взяты из работы (Alon et al., 1995), см. рис. 1 этой работы, при $A = 1$ ($\mu = 0$) — кривая *2* и при $A = 0,9$ ($\mu = 1/19$) — кривая *4*.

На рис. 26.4 по вертикальной оси отложено W/W_0. При эволюции в направлении $t \to +\infty$ как пузыря, так и струи, значения W_0 для пузыря

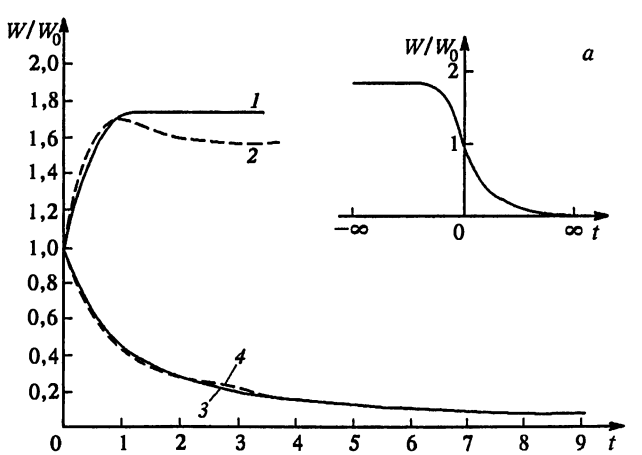


Рис. 26.4. Сопоставление точного интеграла модели $N = 1$ (кривые *1* и *3*) с численным моделированием (кривые *2* и *4*), *1*, *2* — струи, *3*, *4* — пузыри Единицы $|W_0| = k = 1$

и струи — разные. Верхний ($1 < W/W_0 < 2$) и нижний ($0 < W/W_0 < 1$) интервалы относятся к струе и пузырю соответственно При этом $W_0 =$ $= +1$ и $W > 0$ в случае пузыря и $W_0 = -1$, $W < 0$ для струи.

Можно рассмотреть струю и пузырь сквозным образом. Это показано на врезке рис. 26.4. В этом случае W_0 одно и для пузыря, и для струи. Этой врезке соответствуют траектории на рис. 26.2*а*, лежащие в верхней полуплоскости $W > 0$ и стартующие при $t = -\infty$ с вертикали $K = -\infty$. Чтобы получить траектории из полуплоскости $W < 0$, необходимо произвести инверсию $t \to -t$.

Некоторое снижение скорости струи W на кривой *2* после момента $t \approx 1$, видимо, связано с какими-то вычислительными обстоятельствами. Поскольку физически ясно, что при $\mu = 0$ эта зависимость должна быть монотонной.

Рост скорости струи обусловлен действием лобовых частей пузырей. Они давят на жидкость и этим ускоряют струи. Поэтому для струй $W_\infty/W_0 > 1$. Из-за напора пузырей давление на бесконечности больше давления на КГ, которая при $\mu = 0$ является изобарой. Разность давлений равна

$$\Delta p(t) = p(y = \infty, t) - p_{\text{СВ}}, \quad \lim_{y\to\infty} p(x, y, t) = p(y = \infty, t) = p_\infty(t).$$

С течением времени она обнуляется

$$\Delta p(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Градиент ∇p, соответствующий такому полю p, направлен в сторону КГ. Он тормозит пузыри и ускоряет струи. Поэтому при $t \to \infty$ вся кинетическая энергия переходит в струи.

Отметим, что отношение W_∞/W_0 не является универсальным, оно *зависит*(!) от начальных данных. Рассмотрим периодический случай. Пусть при $t = 0$ граница плоская. В модели $N = 1$ исходят из потенциала $\varphi(x, y, t = 0) = \cos x \exp(-y)$. Такой же потенциал обычно используется при численном моделировании. Периодические потенциалы могут быть и другими. Например, пусть $\varphi(x, y, t = 0)$ создается цепочкой стоков, параллельных КГ, с периодом $2\pi/k$, находящихся на расстоянии d от КГ. Тогда в направлении каждого стока из границы вытягивается струя, скорость которой при $t \to \infty$ насыщается. При этом отношение W_∞/W_0 будет функцией геометрического параметра kd.

Ускорение струй ($W_\infty/W_0 > 1$) тесно связано с кумулятивным эффектом, подробно рассмотренным в книге (Лаврентьев и Шабат, 1970) (см. также книгу (Биркгоф и Сарантонелло, 1964)). Асимптотические уравнения, описывающие инерционный полет струй, выведены и проанализированы в работах (Dyachenko, Kuznetsov, Spector & Zakharov, 1996; Dyachenko & Zakharov (1996a) и Zakharov & Dyachenko, 1997). То, что при $\mu = 0$ скорость струи в случае НРМ стремится к постоянной, хорошо известно (Неуважаев, Паршуков, 1991, 1993; Hecht, Alon & Shvarts, 1994). Отметим, что струи неустойчивы и в процессе полета распадаются на фрагменты. Устойчивость струи, вытекающей под давлением из отверстия, *возле*[12] этого выходного отверстия изучалась в работе

[12] А не в полете.

(Curle, 1956). Возмущения сносятся, и струя (у отверстия) устойчива (за исключением случая насадки Борда).

После этих общих замечаний относительно струй вернемся к математическому описанию движения. Преобразуем интеграл (26.9) к явному виду. Вблизи $t = 0$ его разложение равно

$$W = 1 - t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{23t^4}{24} + \frac{23t^5}{30} + O(t^6). \qquad (26.11)$$

Оно описывает интегральную кривую, показанную на врезке *а* рис. 26.4, в окрестности точки $t = 0$ как при $t > 0$ (эволюция пузыря), так и при $t < 0$ (эволюция струи). При больших $t \gg 1$ разложение (26.9) преобразуется в выражение следующего вида

$$W = \frac{2}{3t} - \frac{2,755 \cdot 10^{-1}}{t^2} + \frac{1,507 \cdot 10^{-2}}{t^3} + \\ + \frac{7,54 \cdot 10^{-2}}{t^4} - \frac{5,736 \cdot 10^{-2}}{t^5} + O\left(\frac{1}{t^6}\right). \qquad (26.12)$$

Первый член этого разложения был выведен в работах (Kull, 1986; Hecht, Alon & Shvarts, 1994). Если ограничиться первыми двумя членами разложения, то (26.12) можно представить в виде

$$W = \frac{2}{3(t + 0,41)}, \quad W_p = \frac{2}{3(kt_p + 0,41/W_{0p})}, \qquad (26.13)$$

где первое выражение записано в единицах $W_0 = k = 1$, а второе в обычном физическом виде.

Интересно отметить, что из асимптотики

$$W = 2/3t \qquad (26.14)$$

выпадает начальная скорость! Таким образом эта скорость определяет только момент перехода t_T к (26.14), а не саму эту асимптотику, которая оказывается универсальной для пузырей с любой начальной скоростью. Согласно (26.13) имеем $(t_T)_p \simeq 0,41/kW_{0p}$. В размерных переменных формула (26.14) имеет вид

$$W_p = \frac{2}{3kt_p} = \frac{\lambda}{3\pi t_p}.$$

Как видим, возмущения, имеющие больший масштаб, имеют и бóльшую асимптотическую скорость. Это напоминает ситуацию с РТН, когда в периодическом случае асимптотическая скорость пузырей $\alpha\sqrt{(1-\mu)g\lambda}$, ($\alpha \approx 0,23$ в 2D геометрии) является универсальной (это означает, что, кроме периода, других начальных параметров нет) и растет с λ. В РТН именно эти обстоятельства являются причиной субгармонической неустойчивости и обусловленного ею инверсного каскада. К этим вопросам мы вернемся в следующих двух главах.

Разложения (26.11) и (26.12) почти перекрываются при $t \approx 0,6$. Функция, аппроксимирующая (26.9) сквозным образом при $0 < t < \infty$, равна

$$W(t) = \left(\frac{1}{W_8(0)^{5,2}} + \frac{1}{(W_6(\infty) + 10^{-3}/t^7)^{5,2}} \right)^{1/5,2},$$

где $W_8(0)$ — разложение (26.11) в нуле, к которому добавлено еще три следующих члена $+ a_6 t^6 + a_7 t^7 + a_8 t^8$ с коэффициентами

$$a_6 = -0,5652777, \quad a_7 = 0,2253968, \quad a_8 = 5,7098462,$$

а $W_6(\infty)$ — разложение (26.12) на бесконечности с дополнительным членом $+b_6/t^6$, $b_6 = 0,01889027$.

Вычислим траекторию пузыря $y_B = \eta_B(t)$. Она равна

$$y_B(t) = \int_0^t W(\tau)\, d\tau.$$

Запишем (26.11) и (26.12) в виде $W = 1 + \sum_{n=1} a_n t^n$ и $W = 2/3t + \sum_{n=2} b_n/t^n$. Тогда разложения $y_B(t)$ при $t = 0$ и $t = \infty$ равны $y_B = t + \sum_{n=1} a_n t^{n+1}/(n+1)$ и $y_B = c + (2/3)\ln t - \sum_{n=2} b_n/(n-1)\, t^{(n-1)}$, где c — постоянная интегрирования. При интегрировании разложения (26.11) считаем, что $y_B(0) = 0$. Если взять $c = 0,422$, то эти разложения гладко склеиваются при $t \approx 0,60$ и $y_B(0,60) \approx 0,464$.

Оценим амплитуду возмущения КГ в момент $t_S \approx 1$, когда происходит насыщение роста скорости струи, см. рис. 26.4, кривая *1*. Численная оценка интеграла $\int_0^1 W\, dt$ дает $|y_J(t_S = 1)| \approx 1,5$, где y_J — координата струи. К этой оценке приходится прибегать потому, что разложение (26.11) функции $W(t)$ в точке $t = 0$ "не дотягивает" до стадии насыщения $t_S \approx -1$ (при отрицательных t функция $W(t)$ описывает струю). Оно пригодно при $t > t_D$, $t_D \approx -0,5$. Определим амплитуду пузыря в момент t_S. Из полученных выше формул для пузыря следует, что $y_B(t = 1) \approx 0,7$, а из формулы (26.8), что радиус кривизны пузыря в этот момент на 16% больше предельного, равного 3 в модели с $N = 1$.

Из этих оценок видно, что насыщение пузыря и струи происходит примерно одновременно. Насыщением пузыря называется выход его на режим движения с установившейся формой. Отметим в этой связи, что пузырь и струя насыщаются примерно одновременно и при РТН. Там насыщением струи называется переход ее в режим свободного падения. Момент t_S при РТН не является фиксированным, поскольку он логарифмически зависит от начальной амплитуды. А вот геометрические параметры y_B и y_J в этот момент фиксированы и оказываются примерно такими же, как при НРМ. Интересно, что и формы установившихся пузырей при РТН и НРМ примерно одинаковы, см. ниже. Асимптотики же струй — различны.

26.3. Описание РТН в модели $N = 1$

При РТН при выбранной ориентации оси y относительно положения жидкости ускорение должно быть равно $g = -1$. Поэтому система (25.9), (25.11) и следующее из нее уравнение (26.2) принимают вид

$$\dot{K} = (1 - 3K)W,$$

$$\dot{W} = -\frac{U - K}{1 - K},$$

$$U = W^2, \qquad (26.15)$$

$$\frac{dU}{dK} = \frac{2(U - K)}{(1 - K)(3K - 1)}. \qquad (26.16)$$

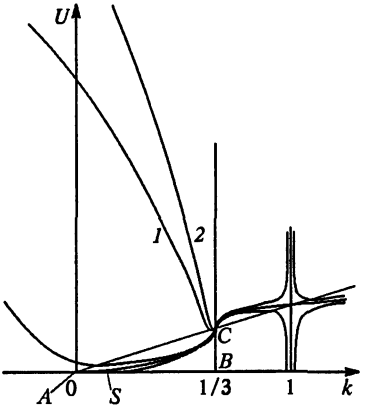


Рис. 26.5. Фазовая плоскость уравнения (26.16), описывающего нестационарную периодическую РТН в модели $N = 1$

Дадим краткое описание фазовой плоскости уравнения (26.16), см. рис. 26.5. Имеются три изоклинические линии — прямые $U = K$ (биссектриса) и вертикали $K = 1/3$ и $K = 1$. Согласно (26.15), на биссектрисе материальная точка $x = 0$, $y = \eta_0(t)$ движется без ускорения. Следовательно, на ней (как при гидростатике) градиент ∇p и ускорение свободного падения компенсируются. Траектория $\eta_0(t)$ проходит точку перегиба в момент пересечения биссектрисы.

На изоклинах $K = 1/3$ и $U = K$ имеем $\dot{K} = 0$ и $\dot{W} = 0$ соответственно, см. систему (26.15). Поэтому точка их пересечения является стационарной точкой этой системы. На прямой $K = 1$ вырождается матрица G_{ij}, входящая в систему (26.1′). При $N = 1$ это означает, что обращается в нуль коэффициент при $\dot{A}_1$ в этой системе. Уравнение (26.16) имеет две особые точки $U = K = 1/3$ и $U = K = 1$, лежащие на биссектрисе. Первая из них является узловой (точка C, см. рис. 26.5), а вторая — седловой особыми точками. Сепаратрисы седла имеют наклоны dU/dK, равные ∞ и $1/2$. Пучок траекторий $U(K)$ или $K(U)$ уравнения (26.16), входящих в стационарную точку C ($U = K = 1/3$), касаясь вертикали $K = 1/3$, имеет вблизи нее асимптотику

$$K = 1/3 - \frac{U - 1/3}{\ln(c\,|U - 1/3|)}.$$

Здесь параметр c пробегает входящие траектории.

Центр $U = K = 0$ является точкой гидростатического равновесия (точка A). В нем жидкость находится в покое ($U = 0$), а граница является плоской ($K = 0$). Точки в окрестности центра A представляют отклонения от равновесия, причем их K-координата соответствует возмущениям границы, а координата по U — возмущениям скорости.

Физический смысл имеет только полуплоскость $U > 0$. На ней скорости W ($U = W^2$) являются действительными. Траекториям при $K > 1/3$ не удается найти подходящей физической интерпретации. Ось K, на которой $W = 0$, представляет покоящиеся в некоторый данный момент возмущения границы. В точке пересечения траектории с осью K происходит остановка и поворот движения. По траекториям, находящимся на плоскости (U, K), движение может происходить в обоих направлениях. Они являются, так сказать, "двойными". В этом заключается ее отличие от плоскости (W, K).

Например, выберем в качестве начальной произвольную точку I, из треугольника ABC, ограниченного биссектрисой, вертикалью $K = 1/3$ и осью K, см. рис. 26.5. Если скорость W, соответствующая точке I, положительна ($W = +\sqrt{U}$), то движение сразу пойдет в направлении узла C ($U = K = 1/3$). Если же $W < 0$ ($W = -\sqrt{U}$), то имеются две возможности. Чтобы описать их, необходимо представить сепаратрису S, исходящую из центра $U = K = 0$ и разделяющую траектории $U(K)$ на два потока. Один из них пересекает ось K, а другой — ось U. Отрицательность W означает, что возмущение, соответствующее начальной точке I, устроено так, что начальная скорость направлена в сторону уменьшения начальной амплитуды возмущения.

Итак, первая возможность заключается в том, что точка I принадлежит потоку, связанному с осью K. Это означает, что упомянутой начальной скорости недостаточно, чтобы превратить пузырь (значения $K > 0$ соответствуют пузырю в $x = 0$) в струю. Правда, сначала кривизна пузыря уменьшается (из-за действия этой скорости), но потом происходит остановка (прикосновение к оси K), а уже затем начинается рост и кривизны, и скорости, соответствующих движению к узлу C.

В случае второй возможности начальной скорости достаточно, чтобы превратить пузырь (при $x = 0$) в струю (при $x = 0$), которая асимптотически переходит в режим свободного падения. Интересно, что ускорение струи начинается не на оси U, а раньше. А именно, оно начинается на биссектрисе $U = K$, когда еще имеется вмятина (пузырь) $K > 0$ в тяжелом веществе.

РТН становится похожа на НРМ при больших начальных скоростях $U \gg 1$. Это означает, что число Фруда велико или что $W_p \gg \sqrt{g/k}$, где W_p — размерная скорость. При $U \to \infty$ биссектриса прижимается к оси K и фазовый портрет уравнения (26.16) стремится к портрету уравнения (26.4). На траекториях *1*, *2* рис. 26.5 происходит торможение пузырей, как при НРМ. Только вблизи узла C устанавливается РТ асимптотика. Отметим, что такие "смешанные" решения возникали в работах (Daly, 1967; Zufiria, 1988).

Точки, находящиеся в области $K < 0$ и двигающиеся в сторону увеличения модуля $|K|$ отрицательных K, соответствуют струе в $x = 0$. Модель $N = 1$ дает удовлетворительное описание зарождающихся струй. К ним относятся участки траекторий вблизи оси U. Асимптотика же струй системой (26.15) описывается неправильно. В модели получается экспоненциальное нарастание гравитационного потенциала на больших

глубинах. Из-за этого скорость струй растет быстрее, чем это должно быть. Для небольших струй и особенно для пузыря связанная с этим погрешность невелика. То, что пузыри описываются хорошо, хотя в то же время асимптотика струй оказывается неправильной, возможно потому, что судьба струи вообще очень слабо влияет на пузырь, см. рис. 24.1 и § 24. Отметим, что вопрос об экспоненциальном потенциале рассматривался в работах Kull, см. обзор (Kull, 1991). Там же найдено точное нестационарное решение, относящееся к этому потенциалу.

Траектории, стартующие с малого возмущения гидростатического равновесия, то есть из малой окрестности центра A, состоят из линейного, переходного и асимптотического участков. На линейном участке имеется экспоненциальный рост амплитуды, на переходном происходит насыщение этого роста и на последнем, асимптотическом участке, пузырь принимает стационарную форму и движется с постоянной скоростью. Любопытно, что асимптотическая кривизна пузыря, достигаемая при $t = \infty$, в таких разных случаях, как РТН и НРМ, оказывается одинаковой (в модели $N = 1$).

Описание нестационарной динамики РТН с помощью ряда Фурье (24.2), оборванного на первом слагаемом, было впервые предложено в работе (Layzer, 1955) (модель Лэйцера). Оно оказалось плодотворным. Стационарный пузырь в цилиндрической трубе рассматривался в работе (Davies & Taylor, 1950). Для математического описания такого пузыря был использован аналогичный прием, в котором разложение по гармоникам было оборвано на первом слагаемом.[13] Движению в такой трубе посвящена и работа (Dumitrescu, 1943). Эта модель рассматривалась также в работе (Kull, 1983). В работах (Kull, 1986), (Иногамов, 1994, 1995a, 1995b; Hecht, Alon & Shvarts, 1994) она была распространена на случай НРМ. Там же найден асимптотический закон (26.14). В работе (Hecht, Alon & Shvarts, 1994) модель Лэйцера была обобщена на случай двух РТ или РМ пузырей. Это позволило проанализировать моду конкуренции пузырей. Модели, похожие на модель Лэйцера, с одним источником (вернее с цепочкой одинаковых источников) вместо одного слагаемого в ряду Фурье и тем же разложением граничных условий в вершине рассматривались в работах (Kull, 1991; Zufiria, 1988). В работах (Иногамов, 1994, 1995a, 1995b) были найдены существенные упрощения. В них разбираемая модель РТН и НРМ была сведена к плоской системе, дан ее общий анализ и точные нестационарные интегралы в РМ случае.

26.4. Периодическая НРМ в однородной жидкости

Выше в § 26 рассмотрены одномодовые (периодические) решения в случае контакта с вакуумом ($\mu = 0$). Из значений $g = \pm 1$ и 0 среднее ($g = 0$) относится к НРМ (п. 26.2). Для одномодовой НРМ при $\mu = 0$ удается получить следующие значительные результаты:

[13] В отличие от работы (Davies & Taylor, 1950) в работе (Layzer, 1955) рассматривался нестационарный случай.

(i) асимптотическая скорость пузырей равна $v_B = C/kt$, где коэффициент $C = 2/3$;

(ii) уравнения движения пузыря интегрируются точно в модели с $N = 1$, интегралы сквозным образом описывают линейную, нелинейную переходную и асимптотическую стадии;

(iii) асимптотический радиус кривизны КГ в вершине пузыря $R_B = 3$ (пузыри с затупленной головной частью, они похожи на РТ пузыри, ср. п. 26.2 и п. 26.3).

Значение результатов (i)–(iii) связано с тем, что они позволяют аналитически представить одномодовую динамику.

Оказывается, выводы, аналогичные (i) и (iii), можно получить и в случае однородной жидкости[14] ($\mu = 1$), который является обратным к случаю обмена с вакуумом ($\mu = 0$). Динамике однородной жидкости посвящен данный раздел.

НРМ в буссинесковском пределе. Этот предел означает, что $\mu = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$. В случае РТН он проанализирован ниже (см. п. 29.3). При НРМ начальное поле скоростей или вернее начальную завихренность, сосредоточенную в случае скачка ρ на этом скачке, создает короткий импульс ускорения $g(t)$ (см. §§ 4 и 5). Сильный импульс $g(t) = (\Delta v/\varepsilon)\delta(t)$ компенсирует малость разности плотностей $\varepsilon\rho$. Он преобразует исходное периодической возмущение КГ $\eta(t = -0)$ (при $t < 0$ жидкость покоится) в начальное возмущение скорости $\dot{\eta}(t = +0)$.

После импульса на КГ появляется периодическое знакопеременное (полная завихренность равна нулю) распределение завихренности ω. Основная задача заключается в изучении последующей эволюции КГ с нанесенной на нее ω.

Для этого анализа то, что $\varepsilon \neq 0$, не существенно, если $\varepsilon \ll 1$. Поэтому можно рассмотреть эволюцию линии ω в однородной жидкости.

Движение вихревой линии. Рассмотрим общую структуру течения. Малыми возмущениями КГ $\eta(t = +0) \ll 1/k$ можно пренебречь. В результате приходим к задаче о движении первоначально прямолинейной КГ с периодической завихренностью. В 2D геометрии линия КГ плоская. Она располагается в плоскости x, y. Завихренность направлена вдоль третьей оси: $\operatorname{rot} \mathbf{v} = (\operatorname{rot} \mathbf{v})_3 \mathbf{e}_3$.

Пусть для определенности при $t = 0$ КГ параллельна оси x и

$$\omega = (\operatorname{rot} \mathbf{v})_3 \propto \sin kx. \tag{26.17}$$

Наибольшая завихренность $|\omega|$ находится в точках V (vorticity) с координатами $kx = \pi/2 + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В точках $kx = \pi n$ завихренность меняет знак. В этих точках, чередуясь, появляются пузыри и струи. При распределении (26.17) течение симметрично[15] относительно инверсии $y \to -y$. Поэтому форма струй совпадает с формой пузырей

[14] Забегая вперед, скажем, что асимптотика скорости опять имеет вид $v_B = C/t$ (коэффициент C другой), а форма пузыря меняется мало $R_B = 3$.

[15] Распределение ω может быть периодическим, но не симметричным относительно пузырей и струй.

(иллюстрацией этого могут служить рисунки 29.3, 29.13*(в)* и 29.14*(в)*, приведенные ниже). Пусть знак в распределении (26.17) таков, что вершины пузырей находятся в точках B (bubble) $kx = 2\pi n$ (пузыри движутся в положительном направлении оси y), а струй — в точках J (jet) $kx = (2n+1)\pi$.

Рассмотрим развитие по t. При $t = +0$ в случае (26.17) распределение нормальной к КГ компоненты скорости вдоль КГ равно

$$\dot{\eta}(x, t = +0) = v \cos kx. \tag{26.18}$$

Наряду с размерными будем использовать безразмерные переменные, выраженные через v и k, аналогично тому, как это сделано в п. 26.2. При $t \ll 1/kv$ имеем $\eta(x,t) \approx vt \cos kx$. При $t \sim 1/kv$ начинается скручивание КГ возле точек V[16] При этом угол $\alpha(t) = \operatorname{arctg}(y_в/x_в)$ в точке V с $kx = \pi/2$ вращается по часовой стрелке и проходит значение $-\pi/2$, $\alpha(0) = 0$, здесь КГ задана параметрически $(x(s,t), y(s,t))$, s— длина дуги.

Дальнейшая эволюция состоит в продолжении скручивания и удалении пузырей и струй от области скручивания.

Таким образом, имеются:

- начальная стадия ($\eta \propto \cos kx$);
- средняя стадия (начало скручивания);
- переходная стадия (развитие скручивания, отход пузыря, переход к асимптотическому режиму)
- асимптотическая стадия (пузырь далеко от вихря, "размазанного" по области скручивания V).

Цепочка локализованных знакопеременных вихрей и адвекция пассивной жидкой линии. На стадиях (iii) и (iv) имеются области многовиткового скручивания вокруг точек V, в которые собирается почти вся завихренность с прилегающего к точке полупериода (ω сохраняется в лагранжевых частицах). Участки КГ около вершин B и J сильно растягиваются. Это приводит к "очищению" КГ в лобовых частях B и J от ω. В результате эти участки превращаются в пассивные жидкие линии, транспортируемые полем скоростей, создаваемым вихрями, локализованными в областях около точек V.

Рассмотрим период $-\pi < x < \pi$. В области вокруг точки V ($x = \pi/2$, $y = 0$) находится вихревое пятно [17], в котором локализованы вихри одного знака. Они вращают жидкость вокруг себя по часовой стрелке.

[16] Возможно, что в конечный момент времени t_{crit}, $t_{\text{crit}} \sim 1/kv$, в точках V образуется особенность, см. обзор (Saffman, 1992). Даже если это так, то, кажется, что образование особенности не препятствует дальнейшему скручиванию КГ в спираль.

[17] При НКГ на асимптотической стадии возникает цепочка стационарных вихревых пятен одного знака. За свою удлиненную форму они называются "кошачьими глазами". Пятна отделены сепаратрисными линиями тока от верхнего и нижнего потоков. Внутри них течение (i) вихревое и (ii) финитное — жидкость вращается в пятне. Вне сепаратрис движение (i) потенциально и (ii) инфинитно. Моделью пятен являются островки захваченной жидкости вокруг стационарных точечных вихрей, построенных в цепочку. В случае точечных вихрей течение внутри сепаратрис потенциально.

В другом вихревом пятне возле другой точки V ($x = -\pi/2$, $y = 0$) собирается завихренность противоположного знака. Составляющие это пятно вихри при $t = +0$ размещались на отрезке оси x, занимающем полупериод $-\pi < x < 0$.

Видим, что образуется цепочка вихревых пятен, в которой знаки ω чередуются.

Естественно допустить, что при $t \to \infty$ цепочка становится стационарной. В стационарной или равновесной цепочке пара, составленная из плюс и минус вихрей, неподвижна. Пара из пятен с центрами в точках $x = -\pi/2$ и $x = \pi/2$ создает струю по оси y с $v > 0$. Следующая пара $x = \pi/2$ и $x = 3\pi/2$ создают струю с $v < 0$. Таким образом, имеется периодическая структура чередующих знак потоков (это пузыри и струи), обменивающих жидкости из полупространств $y < 0$ и $y > 0$, см. §§ 2 и 3. Цепочки вихревых пятен видны на экспериментальных фотографиях (Зайцев и др., 1985; Алешин и др., 1992), правда при $\mu \neq 1$[18].

Простейшей моделью этой структуры является цепочка равноотстоящих знакопеременных точечных (дискретных) вихрей. Эта цепочка равновесна. Она создает двухпотоковое (обменное) течение.

Как и в однознаковой цепочке дискретных вихрей, в знакопеременной дискретной цепочке вокруг вихрей имеются островки захваченной жидкости. Она находится в режиме финитного движения. Если в однознаковой цепочке жидкость во всех островках вращается в одну сторону, то в знакопеременном случае знак вращения чередуется. Эти островки являются моделью вихревых пятен.

Рассмотрим адвекцию жидкой линии, проходящей через дискретные вихри. Пусть при $t = 0$ она прямолинейна. При $t > 0$ вокруг вихрей образуются спирали (Жданов, Прудкой, 1993), в промежутках между вихрями располагаются пузыри и струи.

Расчет асимптотической стадии. На больши́х временах ($t \gg 1/kv$) точки B и V расходятся на больши́е по сравнению с $1/k$ расстояния. Периодическая установившаяся цепочка вихревых пятен создает периодическое стационарное поле скорости $\mathbf{v}(x, y)$. При этом ряд Фурье, например, вертикальной компоненты скорости $v(x, y)$ состоит из гармоник $\cos nkx$, $n = 1, 2, \ldots$

Интерес представляет исследование продвижения одной жидкости в другую. В связи с этим нас интересует адвекция КГ на участке около точки B. Завихренностью в этой области можно пренебречь. Безвихревое поле $\mathbf{v}$ здесь представим с помощью потенциала. С учетом потенциальности, периодичности и затухания скорости при удалении по оси y от цепочки получим

$$u = \sum_{n=1} a_n \sin nkx\, e^{-nk|y|}, \quad v = \sum_{n=1} a_n \cos nkx\, e^{-nk|y|}. \qquad (26.19)$$

[18] При $\mu \neq 1$, $\mu \neq 0$ также возникает цепочка знакопеременных вихревых пятен. Пузырь и струя не симметричны относительно пятна — вершина струи ближе к пятну (струю образует более плотная жидкость).

Пренебрежем быстро затухающими с ростом $|y|$ слагаемыми в рядах (26.19). Медленнее всего затухают слагаемые с $n = 1$. Они и определяют асимптотическое поведение.

Дальнейшие шаги следующие. Запишем и проинтегрируем уравнения движения жидких частиц. Пусть функции $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ описывают движение частицы, которая при $t = t_0$ ($t_0 \gg 1/kv$) находилась в точке x_0, y_0. Зависимостью $y(t, x_0 = 0, y_0)$ представляется закон движения пузыря.

Посмотрим, как перемещается жидкая линия. Пусть при $t = t_0$ ее положение задавалось формулами $x = x_0$, $y = y_0(x)$. Параметризуем эту движущуюся линию с помощью x_0. Функции $x = x[t, x_0, y_0(x_0)] = x(t, x_0)$, $y = y[t, x_0, y_0(x_0)] = y(t, x_0)$ описывают ее эволюцию. Исключая отсюда параметр x_0, получим $y = \eta(x, t)$– другое представление этой эволюции. Отсюда находится искомая кривизна КГ.

Выполним данный план. Согласно сказанному, уравнения движения жидкой частицы при $y > 0$ равны

$$\frac{dx}{dt} = \alpha v \sin kx\, e^{-ky}, \quad \frac{dy}{dt} = \alpha v \cos kx\, e^{-ky}, \tag{26.20}$$

где $\alpha \sim 1$ — безразмерный коэффициент, v — начальная скорость (26.18). Система (26.20) автономна. Исключая время, получим $dy/dx = \operatorname{cth} kx$. Отсюда трек частицы равен

$$y = y_0 + \frac{1}{k} \ln \frac{\sin kx}{\sin kx_0}. \tag{26.21}$$

Вблизи оси y ($x = 0$) это пучок расходящихся с ростом y треков.

Найдем зависимости от t. Подставим (26.21) в первое из уравнений системы (26.20). Интегрируя его, находим

$$x = x_0 + \alpha v \exp(-ky_0) \sin kx_0\, (t - t_0). \tag{26.22}$$

Чтобы определить зависимость y от t, подставим интеграл (26.22) во второе из уравнений системы (26.20). Проинтегрируем его. Интеграл, удовлетворяющий начальным условиям, равен

$$y = y_0 + \frac{1}{k} \ln \frac{\sin[kx_0 + \alpha k v \exp(-ky_0) \sin kx_0\, (t - t_0)]}{\sin kx_0}. \tag{26.23}$$

Уравнения (26.22), (26.23), в частности, описывают перенос жидких линий. Отыщем с их помощью радиус кривизны $R_{\text{В}}$ в вершине.

Рассмотрим малый отрезок, перпендикулярный оси y, пересекающий ее в точке $y = y_0$. Он аппроксимирует КГ возле вершины В при $t = t_0$. Изучим его перенос.

Необходимо решить уравнение (26.22) относительно x_0. Его корень $x_0(x, t, y_0)$ равен

$$kx_0 = \frac{kx}{1+b} + \frac{bk^3x^3}{6(1+b)^2} + O(k^5x^5), \quad b = \alpha kv(t - t_0)\exp(-ky_0). \tag{26.24}$$

Он вычислен путем разложения по малому kx_0.

Подставим корень (26.24) в интеграл (26.23). Перед этим разложим интеграл по kx_0. Вычисление дает

$$k(y-y_0)=\ln(1+b)+\frac{1-(1+b)^3}{6(1+b)}(kx_0)^2+O(k^4x_0^4), \tag{26.25}$$

где b определено в (26.24). Исключая x_0 из (26.24) и (26.25), находим

$$k(y-y_0)=\ln(b+1)-\frac{(b+1)^3-1}{6(b+1)}(kx)^2+O(k^4x^4). \tag{26.26}$$

Выражение (26.26), имеющее вид $y=\eta(x,t)$, определяет искомые асимптотические скорость и кривизну пузыря.

Позиция вершины B равна

$$y_{\mathrm{B}}=\eta(x=0,t)=y_0+\frac{1}{k}\ln[\alpha kv\exp(-ky_0)(t-t_0)+1].$$

Отсюда следует выражение для асимптотической скорости

$$v_{\mathrm{B}}=\frac{dy_{\mathrm{B}}}{dt}\to\frac{C}{kt},\quad t\to\infty,\quad C=1. \tag{26.27}$$

Радиус R_{B} равен

$$kR_{\mathrm{B}}=\frac{3(b+1)^3}{(b+1)^3-1}\to 3,\quad t\to\infty. \tag{26.28}$$

Видим, что затухание v_{B} при $\mu=1$ происходит аналогично случаю с $\mu=0$, ср. (26.14) с (26.27). Формы пузырей при РТН и НРМ с $\mu=0$ в модели с $N=1$ совпадают в окрестности вершины с формой пузыря при НРМ с $\mu=1$, ср. п. 26.3, (26.5), (26.8) с (26.28).

Одномодовая 3D НРМ. Выше из простых основополагающих принципов (периодичность, потенциальность и т. п.) получены содержательные результаты. Построим их 3D обобщение (3D решениям посвящены также разделы п. 27.4, п. 30.2, см. (27.22′)–(27.25)).

Простейшее возмущение имеет симметрию квадратной решетки. Как и в 2D случае возмущение в процессе развития проходит начальную $z=\eta(x,y,t)\approx vt(\cos kx+\cos ky)$ (ср. с (30.1), (30.1′) ниже), среднюю, переходную и асимптотическую стадии. Из соображений (i) сохранения периодичности, (ii) потенциальности, (iii) убывания $|\mathbf{v}|$ по y, (iv) отбора гармоник, медленнее других убывающих по y, и (v) стационарности поля $\mathbf{v}$ следует, что на последней стадии асимптотика потенциала скорости равна

$$\varphi=-\frac{\alpha v}{k}(\cos kx+\cos ky)\exp(-kz),\quad \alpha\sim 1. \tag{26.29}$$

Поднимающиеся и опускающиеся струи, генерируемые сложной вихревой системой, располагаются в шахматном порядке. При описании асимптотики вихри можно заменить на источники и стоки. При этом

источники находятся на белых клетках "доски", а стоки — на черных, см. также §§ 2 и 3.

Линейная замена

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \tag{26.30}$$

преобразует (26.29) к виду

$$\varphi = -\frac{2\alpha v}{k} \cos\frac{kX}{\sqrt{2}} \cos\frac{kY}{\sqrt{2}} \exp(-kz). \tag{26.31}$$

Замена (26.30) оставляет инвариантным лапласиан

$$\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 = \partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Y^2 + \partial^2/\partial z^2.$$

Нашей целью является вывод формул типа (26.27), (26.28), описывающих движение КГ возле вершины. В 3D КГ — поверхность. Речь идет об описании ее сноса восходящей струей. Вместо адвекции жидкой поверхности рассмотрим адвекцию составляющих ее линий. Из очевидной симметрии следует, что линии в плоскостях $y = 0$ и $Y = 0$ остаются плоскими.

Вблизи вершины B поверхность представляет собой перевернутую чашку параболоида. В силу симметрии $x \leftrightarrow y$ чашка круглая. Это означает, что ее два радиуса кривизны одинаковы. Поэтому любая из плоских кривых в плоскостях $y = 0$ и $Y = 0$ может быть привлечена для нахождения R_B. Интегрирование проще в потенциале (26.31). Поэтому используем его и плоскость $Y = 0$.

Адвекция материальной точки в этой плоскости подчиняется уравнениям

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\frac{X}{\sqrt{2}}\, e^{-z}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \cos\frac{X}{\sqrt{2}}\, e^{-z}. \tag{26.32}$$

Использована система единиц $k = v = 1$. Несущественные множители опущены. Система (26.32) ближе к системе (26.20), чем система, которая получается при использовании потенциала в форме (26 29).

Заменим $\xi = e^z$. В силу автономности (26.32) имеем

$$\frac{d\xi}{2\xi} = \frac{d\sin(X/\sqrt{2})}{\sin(X/\sqrt{2})}.$$

Интеграл этого уравнения равен

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \left(\frac{\sin(X/\sqrt{2})}{\sin(X_0/\sqrt{2})}\right)^2. \tag{26.33}$$

Исключим ξ посредством (26.33) в первом уравнении в (26 32). Интегрируя то, что получилось, находим

$$\cos\frac{X}{\sqrt{2}} - \cos\frac{X_0}{\sqrt{2}} = -\frac{[\sin(X_0/\sqrt{2})]^2}{2\xi_0}\, t \tag{26.34}$$

В (26.34) и ниже положено $t_0 = 0$.

Подставим $\cos(X/\sqrt{2})$ из (26.34) во второе из уравнений (26.32). Интегрируя, получаем

$$\xi = \xi_0 + C_0 t - \frac{1 - C_0^2}{4y_0} t^2, \quad C_0 = \cos\frac{X_0}{\sqrt{2}}. \tag{26.35}$$

Исключим X_0 из уравнений (26.34), (26.35). Для этого решим квадратное относительно C_0 уравнение (26.34). Нужный корень имеет знак плюс перед радикалом. Он равен

$$C_0 = -\frac{\xi_0}{t} + \sqrt{\frac{\xi_0^2}{t^2} + 2\frac{\xi_0}{t}C + 1}, \quad C = \cos\frac{X}{\sqrt{2}}. \tag{26.36}$$

Подставим (26.36) в (26.35). В результате получаем искомое уравнение адвекции кривой $\xi = \eta(X, t; \xi_0)$ или $z = \eta(X, t; z_0)$. Оно равно

$$\xi = K - \frac{t^2 - (K - \xi_0)^2}{4\xi_0}, \quad K = \sqrt{\xi_0^2 + 2\xi_0 C t + t^2}. \tag{26.37}$$

Разлагая (26.37) по малым $1/t$ (асимптотика по t) и X (кривизна в вершине $X = 0$), находим

$$\xi = t + \frac{tX^2}{8}, \quad z = \ln t + \frac{X^2}{8}. \tag{26.38}$$

Из (26.38) следует, что асимптотические скорость и радиус кривизны равны

$$v_B = \frac{1}{kt}, \quad R_B = 4/k. \tag{26.39}$$

Таким образом, в 2D и 3D периодических структурах с *равными периодами* [19] (i) скорости v_B (26.27) и (26.39) одинаковы и (ii) 3D пузырь получается более тупым, сравни (26.28) с (26.39) и (27.22) с (27.22′).

§ 27. О стационарных РТ пузырях

Стационарные решения (или просто стационары) являются пределом эволюции линейных периодических возмущений. Они образуют ту основу, на которой строится (i) теория перехода к турбулентности (через субгармоническую неустойчивость периодических стационаров) и (ii) теория структуры самой турбулентности (они являются периодической составляющей случайно-периодических функций).

Чрезвычайно важная функциональная особенность задачи заключается в *существовании однопараметрического (1d) семейства* стационаров. Серьезное исследование стационарных решений невозможно без анализа однопараметричности.

[19] В 2D $\lambda = 2\pi/k$ — это период валов, а в 3D $\lambda = 2\pi/k$ — это период минимальной ячейки. Она имеет квадратную форму. Ее можно выбрать так, что она будет представлять собой трубу квадратного сечения $\lambda \times \lambda$, в которой поднимается пузырь.

27.1. Однопараметричность гравитационных волн

Рассмотрим сначала близкий к поставленному хорошо изученный (см., например, работу (Schwind & Reid, 1972), обзор (Schwartz & Fenton, 1982)) вопрос о стационарных периодических гравитационных волнах в 2D геометрии. Они представляют собой периодическую цепочку возвышений, с постоянной скоростью u перемещающихся по поверхности жидкости. У стационарных волн форма возвышений постоянна. В системе координат, связанной с волной, получаем стационарную поверхность $y = \eta(x)$, обтекаемую жидкостью, см. рис. 27.1*а*. На свободной

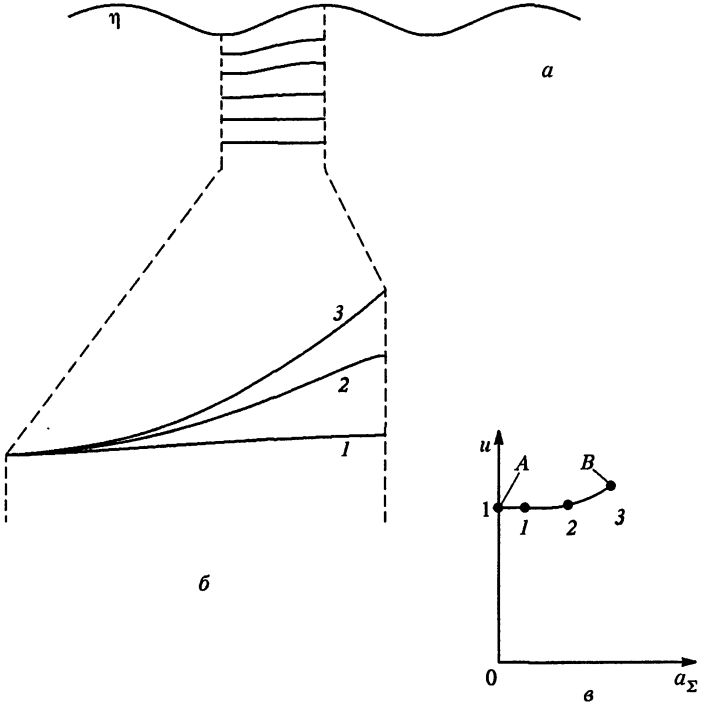


Рис. 27.1. Стационарная волна (*а*). Однопараметрическое семейство таких волн *б*: *1* — линейная волна, *2* — промежуточная между линейной и предельной волнами нелинейная волна, *3* — предельная волна Стокса с углом 120° в вершине. Зависимость скорости волн от амплитуды (*в*). Точки *1*, *2* и *3* относятся к волнам *1*, *2* и *3* на рисунке *(б)*

поверхности η удовлетворяются кинематическое (η — линия тока) и динамическое (η — изобара) граничные условия. На половине периода симметричной волны изображена система линий тока $\psi(x, y) = \text{const}$. Штриховые вертикали — линии симметрии.

Стационарных волн много. Ограничимся простыми волнами с одной вершиной (гребнем) на период. Они образуют однопараметрическое (1d)

семейство[20]. Это означает, что хотя таких простых волн много, но если фиксировать ($p = p_f$) любой один (обозначим его буквой p) из бесконечного числа разных параметров волны, то из всего разнообразия волн только одна будет такой, что этот параметр будет иметь это фиксированное значение.

Обычно в качестве параметра выбирают скорость волны u или половину ее суммарной (от гребня до впадины) амплитуды a_Σ. Хотя, разумеется, годится и любая другая нетривиальная характеристика. Например, кривизна КГ η во впадине $1/R_{\min}$ или в вершине $1/R_{\max}$, или вертикальная компонента v скорости на глубине $1/k$ под вершиной[21], или угол наклона α КГ в точке $x = \lambda/4$ и т. п. Тривиальные характеристики (типа угол α в вершине) не годятся.

На рис. 27.1*б* изображены функции $\eta(x)$ 1d семейства волн, отложенные от минимума во впадине. Пусть для определенности a_Σ является параметром p, пробегающим семейство. Тогда КГ равны $\eta(x, a_\Sigma)$. Зависимости $u(a_\Sigma)$ приведены на рис. 27.1*в*. Как сказано выше, все характеристики волны являются функциями от p ($R_{\min}(a_\Sigma)$, $R_{max}(a_\Sigma)$, $\alpha(a_\Sigma)$ и т. д.).

На плоскости (u, a_Σ), см. рис. 27.1*в*, семейство стационаров (точки) заполняет отрезок AB (точки на отрезке). Концами отрезка являются линейная волна бесконечно малой амплитуды (точка A) и предельная волна Стокса (точка B) с гребнем в виде клина с углом 120°, см рис. 27.1*б*, кривая *3*. Вблизи точки A располагаются почти линейные решения (кривая *1* на рис. 27.1*б*) с границей η, которая хорошо аппроксимируется косинусом. Для них $\eta(x, a_\Sigma) \approx (1/2)a_\Sigma \cos x$. А вблизи точки B — решения с крутым гребнем, который скругляется только у самой вершины. На рисунке скорость приведена в единицах $|g| = k = 1$. В размерных единицах частота и фазовая скорость линейной волны равны $\omega = \sqrt{gk}$ и $u = \omega/k = \sqrt{g/k}$.

Чтобы перебросить мостик от волн к РТН, рассмотрим потенциальное (безотрывное) обтекание жесткой гофрированной границы η в аэродинамической трубе большого диаметра $d \gg \lambda$. Граница η образует стенку трубы, см. рис. 27.2*а*. Пусть на входе в трубу скорость вдува u неизменна: $u = 1$. Это эквивалентно тому, что далеко от гофрированной стенки скорость равна $u = 1$. В стационарной волне в системе координат, связанной с волной (ССК), волна покоится, а жидкость на бесконечности принимает ту скорость, которую имеет волна в лабораторной системе координат (ЛСК). Наоборот, в ЛСК покоится жидкость на бесконечности.

---

[20] Сложной является проблема об ответвлении от 1d семейства простых волн 1d семейств волн с двумя, тремя и так далее вершинами на период. Она исследована мощными математическими средствами (до этого вопрос о бифуркациях изучался численно) в работах (Плотников, 1983, 1991) для случая уединенной гравитационной волны. В качественном отношении уединенные и периодические волны похожи. В обоих случаях имеются 1d семейства, оканчивающиеся 120°-ной волной. Об уединенных нелинейных волнах см. работы (Овсянников, 1991; Карабута, 1994).

[21] То есть $v(x = 0, y = 1/k)$; ось y направлена в глубь жидкости; $x = y = 0$ — координаты вершины.

Измерим давления вдоль стенки η. Отложим измеренное давление p_η, как функцию координаты y (перпендикулярной потоку на бесконечности). Функция $p_\eta(y)$ приведена на рис. 27.2*б*.

При разных гофрировках $\eta(x)$ будут получаться разные функции $p_\eta(y)$. Пусть гофрировка $\eta(x)$ такова, что функция $p_\eta(y)$ линейна по y (начало отсчета p произвольно в несжимаемой жидкости; на рис. 27.2

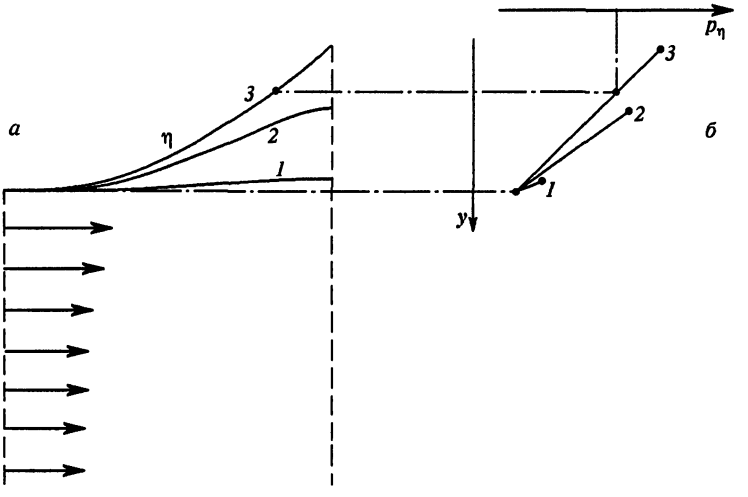


Рис. 27.2. Трубы *1*, *2* и *3* с гофрированными стенками η (как и на рис. 27.1*а*, показана половина периода симметричной гофры) (*а*). Зависимости *1*, *2* и *3* давления $p_\eta(y)$ вдоль этих стенок (*б*)

отсчет p ведется от впадины волны; обозначим коэффициент при линейной зависимости так: $p = -\rho g y$, где ρ — плотность жидкости). Это означает, что эта гофрировка и созданный ею потенциал $\varphi(x, y)$ соответствуют гравитационной волне.

Рассмотрим опять 1d семейство волн (гофрировок) *1*, *2* и *3* см. 27.2*а*. Ему соответствует 1d семейство линейных распределений давления

$$p_\eta(y) = -\rho g y, \tag{27.1}$$

показанное на рис. 27.2*б*. Чем больше амплитуда волны, тем больше положительная разность давлений между гребнем и впадиной.

Спрашивается, а почему наклоны g разные у распределений $p_\eta(y)$? Дело обстоит так. Если скорость u на бесконечности неизменна ($u = 1$), то она не может быть нетривиальным параметром, пробегающим семейство. Тогда ускорение g в коэффициенте (27.1) будет разным $g = g(a_\Sigma)$ для разных членов семейства.

Действительно, то, что скорость на бесконечности $u = u_\infty = u(y = \infty) = u(x, y = \infty)$ неизменна, означает, что в этом случае единицы измерения равны $u_\infty = 1$ и $k = 1$. Из зависимости $u = u(a_\Sigma)$

(см. рис. 27.1*в*), записанной в размерном виде $u_p/\sqrt{g/k} = u(k\,a_\Sigma)$, следует, что при неизменной размерной скорости $u_{p\infty}$ ускорение равно

$$g(ka_\Sigma) = \frac{ku_{p\infty}^2}{u^2(ka_\Sigma)}$$

или в безразмерных единицах (здесь они равны $u_\infty = k = 1$) имеем

$$g = g(a_\Sigma) = \frac{1}{u^2(a_\Sigma)}.$$

Поскольку $u(a_\Sigma = 0) = 1$, то $g(0) = 1$. С увеличением a_Σ коэффициент в линейной зависимости (27.1) уменьшается, как это и показано на рис. 27.2*б*.

Параметры 1d семейства волн изменяются внутри отрезков. Они имеют два конца, которые могут быть конечными или бесконечными у разных параметров. Изменение параметров может быть монотонным или немонотонным. У монотонных параметров одной точке отрезка соответствует одна волна. Параметры u, g, a_Σ, $R_{\min}$, $R_{\max}$ и α изменяются монотонно.

Значения g в 1d семействе принадлежат отрезку $g_c \le g < 1$. Концы $g = 1$ и $g = g_c$ относятся к линейной и предельной волнам соответственно.

27.2. Семейство однопараметрических РТ пузырей

Распространим качественные рассуждения об обдувании в аэродинамической трубе и измерении давления вдоль профиля, приведенные выше, на РТ случай. Половина периода пузыря показана на рис. 27.3*а*. Линии симметрии образуют стенки трубы. Пузырь эквивалентен твердому телу или профилю $y = \eta(x)$, обдуваемому в трубе. Его еще называют длинным пузырем, обтекаемым в снарядном режиме.

Опять измерим давление $p_\eta(y)$ вдоль профиля η при неизменной скорости вдува на удаленном от профиля входе в трубу $v = v_\infty = -1$, см. рис. 27.3*б*. Разным профилям соответствуют разные зависимости $p_\eta(y)$. Если эта зависимость линейна, то профиль $\eta(x)$, создающий ее, и связанный с ним потенциал $\varphi(x, y)$ являются решением краевой задачи о стационарном пузыре, имеющим вид

$$\psi(x, y = \eta(x)) \equiv 0, \quad (v(x, , y = \eta(x)))^2 - 2g\eta(x) \equiv 0,$$

где ψ — функция тока.

В обычной постановке задачи об обтекании с неизменным v_∞ задают форму профиля $\eta(x)$ и находят потенциал $\varphi(x, y)$, удовлетворяющий условиям обтекания. Вместе с ним находим и функцию $p_\eta(y)$. Каждому профилю соответствует свой потенциал Имеется взаимно однозначное соответствие между профилями и потенциалами и между профилями η и зависимостями p_η.

Можно поставить задачу об обтекании и по-другому. Пусть теперь зависимость $p_\eta(y)$ задана. Требуется отыскать потенциал $\varphi(x,y)$ и форму профиля $\eta(x)$. Опять кажется очевидным, что должно иметься взаимно однозначное соответствие между функцией $p_\eta(y)$ и связанным с ней решением $\varphi(x,y)$, $\eta(x)$. В каком-то смысле функция $p_\eta(y)$ задает форму профиля на плоскости годографа.

Рассмотрим затупленный монотонный профиль. Будем отсчитывать p_η от точки торможения. Двинемся по профилю вниз по потоку. По мере удаления от точки торможения профиль все больше перекрывает струю жидкости. Скорость в ней и на профиле растет (поскольку расход массы неизменен), а давление по интегралу Бернулли падает. Там, где профиль резче перекрывает струю ($|d\eta/dx|$ больше), и падение давления происходит более резко (dp_η/dy больше). Соответственно и по зависимости $p_\eta(y)$ восстанавливается профиль. Безусловно, функция $p_\eta(y)$ определяется формой всего профиля в целом. Любая сколь угодно малая и удаленная деталь профиля влияет на потенциал во всей области, занятой жидкостью. Но в силу эллиптичности уравнения для φ это влияние экспоненциально быстро затухает при удалении от этой детали, поэтому эффективно — сказанное относительно связи производных — является верным в случае плавных профилей.

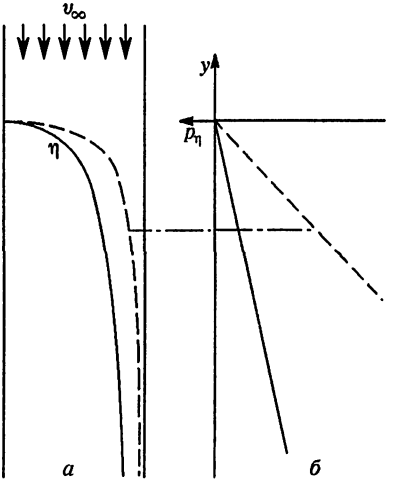


Рис. 27.3. Профили η (сплошная и штриховая кривые) в аэродинамической трубе ($а$). Падение давления вдоль профиля при одной и той же скорости вдува ($б$)

Из изложенного ясно, что на профиле, изображенном штриховой кривой на рис. 27.3$а$, давление должно убывать быстрее, чем на профиле, изображенном сплошной кривой. Это показано на рис. 27.3$б$. Если $|g| \to \infty$, то пузырь становится бесконечно затупленным (кривизна КГ в его вершине стремится к нулю, а сама КГ становится плоской), а струя — бесконечно узкой. В этом пределе получаем решение со стационарной уединенной струей. О том, что концом 1d отрезка является решение с бесконечно затупленным пузырем, говорилось в работе (Garabedian, 1957). В работе (Inogamov et al., 1991a) отмечается, что решение с "плоским" пузырем одновременно является решением с *уединенной* струей. Вопросы математического описания уединенного решения рассматривались в работах (Иногамов и Чехлов, 1993a); Inogamov & Chekhlov, 1993b) в 2D и в работе (Абаржи и Иногамов, 1995) в 3D случаях

Нас интересуют линейные по y зависимости $p_\eta(y)$ При этом только один параметр (коэффициент при y) является варьируемым. Соответственно мы получаем семейство пузырей, зависящее только от одного

параметра — этого коэффициента g. Отрезок его изменения равен $g_c \le |g| \le \infty$, где $g_c \approx 2,8$ (в единицах $|v_\infty| = k = 1$). В размерных единицах имеем $g_c \approx 2,8 v_\infty^2 k$. Если зафиксировать $g = -1$ и в качестве параметра использовать v_∞, то на краю интервала получим $(v_\infty)_c \approx 0,6\sqrt{g/k}$.

Аналогичным является положение в случае 3D пузырей, поднимающихся по вертикальной цилиндрической трубе *произвольного* поперечного сечения. На него полностью распространяются качественные соображения, приведенные выше. Здесь также имеется 1d семейство стационаров $g_c \le |g| \le \infty$, $g_c \sim 1$, на бесконечном конце которого находится решение с узкой струей, прижимающейся к стенке цилиндра.

27.3. Суть математического описания 1d семейства

Займемся изучением стационарных решений. Для этого возьмем нестационарную систему (25.9), (25.11) уравнений, полученных в первом нетривиальном приближении разложением граничных условий в вершине. Положим $\dot\eta_1 = 0$, $\dot M_0 = 0$, $\dot M_1 = 0$ в силу стационарности. Приходим к алгебраической системе

$$M_2 - 6\eta_1 M_1 = 0, \quad M_1^2 - 2g\eta_1 = 0. \tag{27.2}$$

Исключая η_1 из этой системы, получим

$$3M_1^3 - M_2 = 0, \tag{27.3}$$

где моменты M_j даются формулами (25.12).

Рассмотрим стационарное решение в виде точки (будем называть эти решения 0D решениями). Тогда необходимо оборвать ряд Фурье (24.2) после первого слагаемого. В этом случае у нас одна неизвестная — амплитуда A_1. Моменты равны $M_1 = A_1$, $M_2 = A_1$. Поэтому уравнение (27.3) принимает вид

$$3A_1^2 - 1 = 0.$$

Его решение со знаком, соответствующим втеканию жидкости в трубку[22] на бесконечности, равно

$$A_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad v = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad v_p = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{|g|}{k}} \approx 0.23\sqrt{|g|\lambda}. \tag{27.4}$$

Это знаменитая стационарная точка Лэйцера (Layzer, 1955). Она аналогична решению (Davies & Taylor, 1950) для круглой цилиндрической трубы.

[22] Скорость (25.8) пузыря $\dot\eta_0 = -M_0 = -A_1$ в ЛСК положительна (пузыри поднимаются, ось y всегда направлена в сторону жидкости, при РТН это направление вверх, против ускорения свободного падения). Поэтому $A_1 < 0$. В ССК пузыри покоятся, а жидкость втекает в трубку сверху, двигаясь против оси y. Скорость втекания $v_\infty = -\dot\eta_0 = M_0 = A_1 < 0$. Если обратить время $t \to -t$, то получим стационарный поток, создаваемый фонтанирующими источниками снизу. Их султаны смыкаются и за точкой смыкания дают однородный поднимающийся поток.

Рассмотрим теперь 1d семейство. Важнейший прием его построения заключается в следующем. Удержим в ряду Фурье (24.2) два слагаемых с амплитудами A_1 и A_2. В первом порядке разложения граничных условий у нас имеется одно уравнение (27.3). Подставим в него вместо моментов M_1 и M_2 их выражения (25.12) через амплитуды A_1 и A_2. Разрешая получившееся уравнение относительно A_1, получаем

$$A_1 = A_1(A_2). \tag{27.5}$$

Это и будет первое приближение к 1d семейству. Здесь в качестве параметра выбрана амплитуда A_2.

Любая функция $R = R(A_1, A_2)$ от амплитуд может быть использована как параметр, пробегающий семейство. Если R параметризует семейство, то вместо (27.5) получим

$$A_1 = A_1(R), \quad A_2 = A_2(R). \tag{27.6}$$

Это будет другое эквивалентное представление семейства. Если исключить R из выражений (27.6), то мы вернемся к (27.5).

Выражения (27.5) или (27.6) полностью описывают решение. Поэтому все его характеристики F выражаются через них. Вместе с ними они становятся функциями параметра $F = F(R)$. Допустим, скорость $v_\infty = A_1 + A_2$. Следовательно, $v_\infty = v_\infty(R) = A_1(R) + A_2(R)$.

Характеристики ранжируются по степени "грубости" или "тонкости". Эта степень должна соответствовать порядку аппроксимации, то есть порядку разложения граничных условий. Поясним это на примере тейлоровских коэффициентов η_j. С ростом номера m характеристика η_m становится все более тонкой. Поэтому решение с $N = 1$ аппроксимирует только 1d функцию $\eta_1(R)$. Старшие коэффициенты $\eta_m(R)$, $m \geq 2$ не аппроксимируются. Для их аппроксимации необходимо увеличить порядок N.

Отметим, что точка (27.4) лежит на кривой (27.5) или (27.6). В ней обращается в нуль амплитуда A_2.

В N-м порядке разложения граничных условий имеем N уравнений $w_j = 0$ и $N + 1$ амплитуду A_m, к которым добавляется уравнение для параметра R. Система имеет вид

$$\begin{gathered} w_1(A_1, A_2, \ldots, A_N, A_{N+1}) = 0, \\ w_2(A_1, A_2, \ldots, A_N, A_{N+1}) = 0, \\ \ldots \\ w_N(A_1, A_2, \ldots, A_N, A_{N+1}) = 0, \\ R = R(A_1, A_2, \ldots, A_N, A_{N+1}). \end{gathered} \tag{27.7}$$

Разрешая систему (27.7) относительно амплитуд, находим

$$\begin{gathered} A_1 = A_1(R), \quad A_2 = A_2(R), \quad \ldots, A_N = A_N(R), \\ A_{N+1} = A_{N+1}(R) \end{gathered} \tag{27.8}$$

однопараметрическое (1d) семейство в N-м порядке аппроксимации.

Если просто обнулить правые части нестационарных уравнений и оставить в системе N уравнений w_j и N амплитуд A_m, то получим стационарные точки — стационарные решения нестационарной системы уравнений. Они имеют вид точек, лежащих на кривой (27.8). В этих точках последняя из амплитуд A_{N+1}, удержанных в системе (27.7), обращается в нуль.

Чтобы продемонстрировать, как работает метод, вычислим функции $A_1(R), A_2(R), v(R)$ и $\eta_1(R)$ в простейшем случае $N = 1$ (будем опускать индекс у скорости v_∞ и писать просто v).

Перед вычислением нужно выбрать какую-то нетривиальную характеристику F в качестве параметра. Для упрощения вычислений, успех которых часто зависит от удачной замены, желательно, чтобы она была достаточно простой и удобной. Из опыта, приобретенного в § 26, следует, что подходящими "кандидатами" являются скорость v (она обозначалась там $-\dot{\eta}_0$ и $-W$) и кривизна K.

Пусть параметром является обратная кривизна $1/K$ или радиус кривизны R.

Он равен

$$R = -\frac{1}{2\eta_1}, \tag{27.9}$$

см. (25.4).

Из системы (27.2) следует выражение для коэффициента η_1 через моменты. Вместе с (27.9) оно дает

$$R = \frac{1}{M_1^2} \tag{27.10}$$

или

$$R = \frac{1}{(A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 + \ldots)^2}.$$

Поэтому при $N = 1$ имеем

$$R = \frac{1}{(A_1 + 2A_2)^2}. \tag{27.11}$$

Составим систему из определения (27.11) и уравнения (27.3). Неизвестными в ней являются A_1 и A_2. Система зависит от параметра R. Решая эту систему, найдем искомые функции $A_1(R)$ и $A_2(R)$.

Займемся решением. Несколько удобней вместо амплитуд A_1, A_2 использовать скорость v. Имеем

$$v = A_1 + A_2, \quad \frac{1}{\sqrt{R}} = -A_1 - 2A_2.$$

Вторая формула следует из (27.11). Отсюда

$$A_1 = 2v + \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad A_2 = -v - \frac{1}{\sqrt{R}}$$

Поэтому

$$M_1 = A_1 + 2A_2 = -\frac{1}{\sqrt{R}}, \quad M_2 = A_1 + 4A_2 = -2v - \frac{3}{\sqrt{R}}.$$

Подставляя последние выражения в уравнение (27.3), без затруднений находим

$$v = v(R) = -\frac{3}{2}\,\frac{R-1}{R\sqrt{R}}. \tag{27.12}$$

Вместе с $v(R)$ находим и все другие искомые однопараметрические функции. Они равны

$$A_1(R) = 2v(R) + \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad A_2(R) = -v(R) - \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad \eta_1(R) = -\frac{1}{2R}.$$

Последняя формула следует прямо из уравнения (27.9).

27.4. О сходимости аппроксимаций 1d семейства

Рассмотрим сходимость аппроксимирующих 1d кривых к истинной 1d кривой с ростом N. Важно то, что последовательность этих кривых оказывается быстро сходящейся. Тонким является вопрос о зависимости темпа сходимости от параметра. Параметр ограничен отрезком. Спрашивается, что будет происходить со сходимостью вблизи точки окончания этого отрезка?

Выше вычислена простейшая 1d кривая с $N = 1$. В следующем порядке аппроксимации $N = 2$ добавляется еще одно уравнение. Тогда вместо системы (27.3), состоящей из одного уравнения, получим систему

$$3M_1^3 - M_2 = 0, \qquad 95M_2^3 - 90M_1 M_2 M_3 + 9M_1^2 M_4 = 0 \tag{27.13}$$

из двух уравнений. В этом случае требуются три амплитуды A_1, A_2 и A_3. Как и при $N = 1$, рассматриваем систему (27.13) совместно с определением выбранного параметра (27.9). Таким образом, приходим к системе из трех уравнений на амплитуды A_1, A_2, A_3, зависящей от одного параметра R.

Несмотря на довольно высокий порядок системы по амплитудам, она точно решается, и для функций $A_1(R)$, $A_2(R)$, $A_3(R)$ можно найти явные выражения (Иногамов, 1992b). В частности, выражение для $v(R)$ равно

$$v(R) = -5\,\frac{4R^3 - 27R^2 + 36R - 19}{12\,(R-5)\,R^{5/2}}. \tag{27.14}$$

Можно явно выписать и все коэффициенты $\eta_m(R)$.

Системы (27.7) вычислены явно до высоких степеней. Системы с $N \leq 4$ представлены в работе (Иногамов, 1992b). Подробное изложение и сравнение с численным моделированием проведено в работе (Иногамов и Чехлов, 1992a) см. также работы (Иногамов, 1990a; Inogamov et al., 1991a, b; Иногамов и Чехлов, 1993a). Пятый порядок приведен в докладе

(Inogamov & Chekhlov, 1993b). А системы с $N \leq 8$ выписаны в работах (Иногамов, 1995e; Anisimov & Inogamov, 1993a; Inogamov & Abarzhi, 1995c). В старших порядках уравнения очень громоздки. Для общего представления приведем их здесь в сокращенном виде

$$w_1 = 3X^3 - Y$$
$$w_2 = 95Y^3 - 90XYZ + 9X^2M_4$$
$$w_3 = 2345Y^5 - 2394X^2Y^2M_4 + 189X^3ZM_4 + 567X^3YM_5 - 27X^4M_6$$
$$w_4 = 434000Y^7 - 259350XY^5Z + 157500X^2Y^3Z^2 - 37800X^3YZ^3 - \dots$$
$$w_5 = 38971625Y^9 - 12843600XY^7Z - 4088700X^2Y^5Z^2 + 6237000X^3Y^3Z^3 - \dots$$
$$w_6 = -165540375Y^{11} + 1350599250XY^9Z - 3913409500X^2Y^7Z^2 + \dots$$
$$w_7 = -260134875Y^{13} + 2438436000XY^{11}Z - 8618610000X^2Y^9Z^2 + \dots$$
$$w_8 = -862347110625Y^{15} + 9170227316250XY^{13}Z - 38342619315000X^2Y^{11}Z^2 + \dots$$

Таблица 1

$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$
w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8
5	14	28	54	98	173

Выше для упрощения записи уравнений $w_j = 0$ введены обозначения $X = M_1$, $Y = M_2$, $Z = M_3$ для первых трех наиболее часто встречающихся моментов. Чтобы можно было оценить громоздкость уравнений, в таблице указывается число мономов в полиномиальных уравнениях $w_j = 0$. Погрешность аппроксимации граничных условий равна x^{2N+2}.

Самым поразительным обстоятельством является то, что эти системы высокой степени нелинейности удается решить точно!

Решения до $N \leq 4$ выписаны в работе (Иногамов, 1992b) и до $N \leq 7$ в работах (Иногамов, 1995e; Anisimov & Inogamov, 1993a; Inogamov & Abarzhi, 1995c). Решением называется сведение системы к уравнению

$$a_m v^m + a_{m-1} v^{m-1} + \dots + a_0 = 0, \qquad a_j = a_j(R), \tag{27.15}$$

где коэффициентами a_j являются полиномы высоких степеней по R. Это сведение осуществляется путем иерархической последовательности алгебраических преобразований, описанных в указанных работах. Порядок уравнения m растет вместе с N. Из уравнения при любом значении параметра R можно найти все ветви 1d зависимости $v(R)$, а значит, и все остальные характеристики $A_j(R)$, $\eta_j(R)$. Уравнения (27.12) и (27.14) являются первыми примерами уравнения (27.15).

Решения $v(R)$ (27.15) представляют собой аналоги волн Стокса высокого порядка $u = u(a_\Sigma)$ (см. о них в обзоре (Schwartz & Fenton, 1982)) в случае РТН.

На плоскости (v, R) уравнение (27.15) задает сложную петляющую кривую. Будем называть ее контуром. Она является проекцией 1d решения системы (27.7) на плоскость (v, R). Поэтому она имеет самопересечения.

Система (27.7) решалась также численно. Эффективным оказался подход (НИ + СОДУ), основанный на комбинации метода ньютоновских итераций (НИ) с методом интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ).

При этом подходе (i) любая из амплитуд A_1, A_2,...,A_N, A_{N+1} в системе (27.7) исключается с помощью последнего уравнения — для параметра R. Пусть это будет A_{N+1}. Тогда в силу того, что последнее уравнение в системе (27.7) при выбранном параметре равно уравнению (27.10), имеем

$$M_1 = -\frac{1}{\sqrt{R}},$$

поэтому

$$A_{N+1} = -\frac{m_1 + 1/\sqrt{R}}{N+1}, \tag{27.16}$$

где

$$M_j = \sum_{n=1}^{N+1} n^j A_n, \quad m_j = \sum_{n=1}^{N} n^j A_n$$

— соответственно обычный M и укороченный m моменты.

Далее (ii) подставляем выражение (27.16)

$$A_{N+1} = A_{N+1}(A_1, A_2, \ldots, A_N, R)$$

в первые N уравнений системы (27.7). Получаем

$$W_m(A_1, A_2, \ldots, A_N, R) = \\ = w_m[A_1, A_2, \ldots, A_N, A_{N+1}(A_1, A_2, \ldots, A_N, R)].$$

Затем (iii) дифференцируем эти уравнения по R. Получаем

$$\sum_{m=1}^{N} B_{jm} \frac{dA_m(R)}{dR} = f_j, \quad B_{jm} = \frac{\partial W_j}{\partial A_m}, \quad f_j = -\frac{\partial W_j}{\partial R} \tag{27.17}$$

систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) на неизвестные функции $A_m(R)$.

Существенным является этап (iv). Он заключается в выборе положения и расчете начальной точки

$$R_0, A_1(R_0), A_2(R_0), \ldots, A_N(R_0),$$

от которой следует вести интегрирование СОДУ (27.17). Забегая вперед, скажем, что на оси R имеется область быстрой сходимости кривых $A_m(R)$, $m \leq N$ с ростом N. Начальное значение R_0 помещалось в эту

область. Из вычислений предыдущего порядка бралась точка $A_m(R_0)$, $m \leq N-1$ Она служила исходным приближением для ньютоновских итераций в системе N-го порядка. Путем итераций с высокой точностью находилась начальная точка $A_m(R_0)$, $m \leq N$. Из этой точки СОДУ интегрировалась численно в обе стороны по R. По мере необходимости в связи с накоплением погрешности производилось уточнение траектории $A_j(R)$ с помощью метода Ньютона (НИ). Поэтому эта программа называется НИ + СОДУ.

Преимуществом сложного алгебраического подхода, приводящего к (27.15), является то, что таким образом удается охватить все петли контура, а не только его сходящийся участок. Хотя и при численном интегрировании НИ + СОДУ можно еще довольно долго двигаться по контуру уже за пределами области сходимости, проходя точки возврата с помощью параболической экстраполяции. Преимуществом численного метода является его простота. Кроме того, он может быть использован в случае $N = 8$, для которого выписать алгебраическое решение (27.15) не удалось.

Перейдем к обсуждению результатов. Из качественных аргументов, приведенных в начале § 27, следует, что краевая задача

$$\psi|_\eta = 0, \quad v^2|_\eta + 2\eta = 0 \tag{27.18}$$

($g = -1$ для РТН) имеет однопараметрическое (1d) семейство решений. Система (27.7) получена разложением условий (27.18). Таким образом

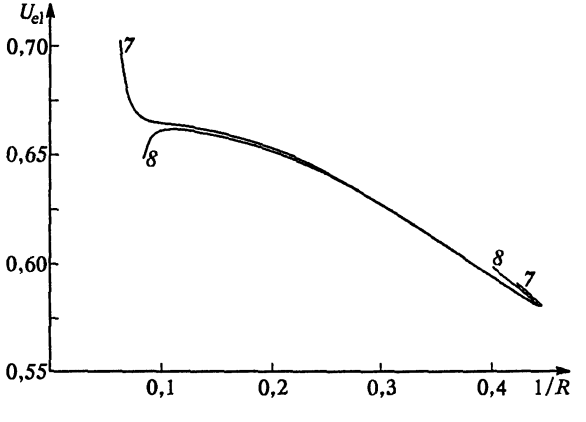


Рис. 27.4. Аппроксимации порядка $N = 7$ (кривая 7) и $N = 8$ (кривая 8) истинной 1d кривой $v(R)$. По вертикальной оси отложена скорость v, а по горизонтальной — кривизна $K = 1/R$, измеренные в единицах $|g| = k = 1$

решения (27.15) представляют собой последовательные аппроксимации истинного 1d семейства. Если это так, то должна иметься сходимость кривых (27.15) с ростом N.

Тщательное сравнение кривых $v(R; N)$ разного порядка показывает, что сходимость действительно имеется. Она оказывается экспоненци-

ально быстрой по N. Пример кривых $v(R)$ двух последовательных порядков $N = 7$ (кривая *7*) и $N = 8$ (кривая *8*) приведен на рис. 27.4. Они получены численно методом НИ + СОДУ. Чтобы охватить область больших значений R, график построен в переменных v, K ($K = 1/R$). Видим, что на оси R имеется область, в которой эти кривые практически сливаются.

Рассмотрим вопрос об области сходимости. Однопараметрическое (1d) семейство существует на отрезке, см. аргументацию в начале § 27. В случае гравитационных волн, если взять амплитуду a_Σ параметром, этот отрезок равен

$$0 < a_\Sigma < (a_\Sigma)_c. \qquad (27.19)$$

Концы $a_\Sigma = 0$ и $(a_\Sigma)_c$ относятся к линейной и предельной волнам соответственно, см. рис. 27.1*в*. В случае РТН, руководствуясь качественными соображениями, можно показать, что этот отрезок имеет вид $g_c < |g| < \infty$, если параметр равен g, или

$$R_c < R < \infty, \qquad R_c \simeq 1, \qquad (27.20)$$

если параметр — R.

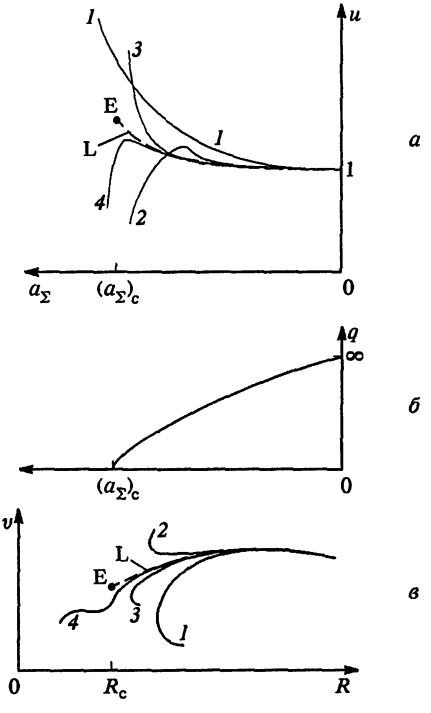


Рис. 27.5. Истинные (или точные) 1d кривые L (их две — одна для волн, другая для РТН) с концевой точкой E и их аппроксимации *1*, *2*, *3*, ..., относящиеся к последовательным порядкам аппроксимации $N_1 < N_2 < N_3 < \ldots$: *а* — случай гравитационной волны; *в* — РТН. На рис. *б* представлена функция $q(R)$ (27.21) для случая волн. Вблизи концевой точки E она устроена аналогично и в случае РТН

Неравенства (27.19) и (27.20) опираются на точные концы отрезков. Спрашивается, как проявят себя эти концевые точки при *конечномерной аппроксимации* истинных кривых $A_j(R)$, $v(R)$? Внутри отрезка все

ясно. Имеется сходимость по N. Это является сильным количественным доводом в пользу существования истинных кривых.

В случае волн один конец, относящийся к линейным решениям, известен точно. В случае РТН также нет проблем с концом $R \to \infty$, соответствующим уединенной стационарной[23] струе. Эта точка фиксирована и приближения возле нее сходятся хорошо. Кривые $v(R)$, также как и в случае волн, выходят из этой точки.

А вот с другой, не зафиксированной концевой точкой дело обстоит сложнее. В случае гравитационных волн аппроксимации расходятся вблизи $(a_\Sigma)_c$. Чем выше порядок аппроксимации, тем ближе аппроксимирующая кривая подходит к концевой точке, см. рис. 27.5*а*. Экспоненциальная сходимость характеризуется положительной функцией

$$q(p) = \lim_{N\to\infty} \frac{|v_N(p) - v_{N-1}(p)|}{|v_{N+1}(p) - v_N(p)|} - 1, \qquad (27.21)$$

где p — параметр, параметризующий семейство. Она указывает скорость сходимости. Чем больше q, тем быстрее сходимость. Функция $q(R)$ (27.21) от параметра R показана на рис. 27.5*б*. При приближении к концевой точке эта функция обращается в нуль и сходимость прекращается.

Аналогично обстоит дело и при РТН. Полиномиальные кривые (27.15) не имеют точек окончания или обрыва. Поэтому вблизи концевой точки E до этого шедшие плотным пучком аппроксимирующие кривые начинают разбегаться в разные стороны, см. рис. 27.5*в*. Именно так и ведут себя вычисленные аппроксимирующие кривые $v(R; N)$, см. рис. 27.4.

Итак, анализ сходимости указывает на существование ограничения области изменения параметра.

Как будет показано ниже (п. 27.5), на практике может реализоваться *только одно* решение из всего 1d семейства затупленных пузырей. Оно располагается вблизи точки, в которой начинают расходиться аппроксимирующие 1d кривые. В силу такой его выделенности оно является важнейшим или особым стационарным решением.

Полученные результаты удается обобщить и на трехмерный случай (Inogamov & Abarzhi, 1995c; Абаржи и Иногамов, 1995d). В этих работах исследована квадратная решетка стационарных пузырей.

Приведем характеристики особого пузыря в 2D и 3D геометриях. В размерных единицах значения скорости подъема v_c и радиуса R_c равны

$$(v_c)_{2D} \approx 0,59\sqrt{g/k}, \qquad (R_c)_{2D} = (2,5 - 2,7)/k, \qquad (27.22)$$

$$(v_c)_{3D} \approx 1,02\sqrt{g/k}, \qquad (R_c)_{3D} = (3,3 - 3,6)/k, \qquad (27.22')$$

где $2\pi/k$ — период валов и стороны квадратов, образованных вершинами пузырей в 2D и 3D случаях, см. п. 26.4, (26.29), п. 30.2. Как видим,

[23] Мы отмечаем стационарность, поскольку бывают еще автомодельные (т. е. нестационарные) уединенные струи.

в 2D диаметр цилиндра, касающегося вершины валообразного пузыря, меньше периода валов, а в 3D аналогично вписанная сфера выступает за стенки соответствующей квадратной трубы.

Важным отличием высших аппроксимаций с $N > 1$ от модели $N = 1$, § 26, является то, что они дополнительно к характеристикам (27.22) позволяют определить спектр Фурье стационарных или насыщенных амплитуд. Они равны

$$\begin{aligned}(A_1)_c &= (-0,79 \pm 0,11)(v_c)_{2D},\\ (A_2)_c &= (-0,19 \pm 0,05)(v_c)_{2D},\\ (A_3)_c &= (-0,02 \pm 0,01)(v_c)_{2D}.\end{aligned} \tag{27.23}$$

Это 2D величины, входящие в ряд Фурье $\varphi = \sum\limits_{n=1} \frac{A_n}{n} \cos nx e^{-ny} - |v_c|y$. Они являются Фурье амплитудами скоростей $u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$. Значения (27.23) быстро убывают. Первые три амплитуды имеют одинаковый знак (Иногамов, 1992b; Иногамов и Чехлов, 1992a; Inogamov & Chekhlov, 1993b; Иногамов, 1995e). Кроме амплитуд можно вычислить старшие коэффициенты тейлоровского разложения КГ.

В 3D согласно работам (Inogamov & Abarzhi, 1995c; Абаржи и Иногамов, 1995d) имеем

$$\begin{aligned}(A_{10})_c &\approx -0,5\ (v_c)_{3D},\\ (A_{20})_c &\approx 0,04\ (v_c)_{3D},\\ (A_{11})_c &\approx 0,05\ (v_c)_{3D}.\end{aligned} \tag{27.24}$$

Потенциал был записан в виде

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{n=0}\sum_{m=0} \cos nx \cos my \exp(-q_{nm}z), \tag{27.25}$$

$q_{nm} = \sqrt{n^2+m^2}$. Поэтому значения (27.24) дают амплитуды вертикальной компоненты скорости φ_z. Видим, что и в 3D разложении (27.25) доминирует первая гармоника, а потенциал приближенно представляет собой сумму двух перпендикулярных первых гармоник ($A_{01} = A_{10}$ в силу симметрии). Причем отношение $|A_{10}/A_{20}|$, характеризующее степень этого доминирования, даже больше, чем аналогичное отношение A_1/A_2 в 2D случае. Это и есть та причина, по которой модель $N = 1$ довольно хорошо описывает процесс перехода и насыщения между линейным и нелинейным режимами.

27.5. Противоречие Тейлора–Гарабедяна и формальность 1d РТН семейства

Вид простого (один пузырь на период) стационарного периодического течения представлен на рис. 27.3*a*. Условия на КГ равны $\psi|_\eta = 0$, $v^2|_\eta + 2\eta = 0$. Из условий периодичности, симметрии и затухания на бесконечности следует, что $\varphi(x,y) = \sum A_n C_{nx} e_{ny}/n + v_\infty y$, где A_n —

действительные числа. Потенциал записан в ССК, v_∞ — скорость на бесконечности. В п. 27.1, п. 27.2 значение v_∞ было фиксировано ($v_\infty = -1$). Разным решениям из 1d семейства соответствовали разные значения g. Зафиксируем теперь g ($g = -1$). Тогда разным решениям из 1d семейства будут соответствовать разные значения v_∞.

Используем v_∞ в качестве параметра, пробегающего семейство. Функция тока равна $\psi(x,y) = \sum A_n S_{nx} e_{ny}/n - v_\infty x$. Разложим функцию тока $\psi = \psi(x,y) = \sum\sum \psi_{nm} x^{2n} y^m$ и давление $p = p(x,y) = \sum\sum p_{nm} x^{2n} y^m$ в 2D ряды Тейлора в вершине. Подставим разложения функций ψ и p в граничные условия $\psi \equiv \psi(x, y_\psi) \equiv 0$ и $p \equiv p(x, y_p) \equiv 0$. Переразложим эти граничные условия так, чтобы получить явную зависимость y от x. В результате получим $y_\psi = y_\psi(x) = \sum \psi_n x^{2n}$, $y_p = y_p(x) = \sum p_n x^{2n}$.

Граничные условия будут удовлетворены, если будет выполнено $y_\psi(x) \equiv y_p(x)$ (тождественная склейка нулевой изобары и нулевой линии тока). Отсюда следует, что $\psi_n = p_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Обозначим $w_n = \psi_n - p_n$. Система уравнений, определяющая стационарные РТ пузыри, имеет вид

$$\begin{aligned} &w_1(A_1, A_2, \ldots, A_N; v_\infty) = 0, \\ &w_2(A_1, A_2, \ldots, A_N; v_\infty) = 0, \\ &\ldots \\ &w_N(A_1, A_2, \ldots, A_N; v_\infty) = 0. \end{aligned} \tag{27.25}$$

Ее решение равно

$$A_1 = A_1(v_\infty), \quad A_2 = A_2(v_\infty), \quad \ldots, \quad A_N = A_N(v_\infty). \tag{27.26}$$

Если использовать одно из уравнений системы (27.25) для исключения v_∞ ($v_\infty = f_1(A_1, A_2, \ldots, A_N)$), то вместо (27.25) получим систему

$$\begin{aligned} &w_2(A_1, A_2, \ldots, A_N, f_1(A_1, A_2, \ldots, A_N)) = W_2(A_1, A_2, \ldots, A_N) = 0, \\ &w_3(A_1, A_2, \ldots, A_N, f_1(A_1, A_2, \ldots, A_N)) = W_3(A_1, A_2, \ldots, A_N) = 0, \\ &\ldots \\ &w_N(A_1, A_2, \ldots, A_N, f_1(A_1, A_2, \ldots, A_N)) = W_N(A_1, A_2, \ldots, A_N) = 0, \end{aligned} \tag{27.27}$$

в которой амплитуд на одну больше, чем уравнений. Любая из амплитуд или их невырожденная комбинация могут быть использованы в качестве параметра, пробегающего семейство, см. (27.7).

Нестационарная система имеет вид (26.1). Рассмотрим ее стационарные точки. Будем называть эти решения Θd решениями в силу их точечного характера и для противопоставления их однопараметрическим 1d решениям. Положим $dA_1/dt = 0$, $dA_2/dt = 0, \ldots$ $d\eta_1/dt = 0$, $d\eta_2/dt = 0$, $\ldots$ Исключим в получившейся алгебраической системе неизвестные η_1, $\eta_2, \ldots$ В результате, как можно показать, получаем систему, эквивалентную (27.27), если в системе (27.27) положить

$$A_N = 0. \tag{27.28}$$

Из сказанного следует, что, во-первых, Θd решения (точки) располагаются на 1d кривой (однопараметрическое семейство) соответствующего порядка, во-вторых, эти точки согласно (27.26) и (27.28) являются нулями функции $A_N(v_\infty)$ и, в-третьих, в этих точках пересекаются 1d кривые последовательных порядков аппроксимации

$$A_1^{N-1}[(v_\infty)_z] = A_1^N[(v_\infty)_z],$$
$$A_2^{N-1}[(v_\infty)_z] = A_2^N[(v_\infty)_z],$$
$$\dots$$
$$A_{N-1}^{N-1}[(v_\infty)_z] = A_{N-1}^N[(v_\infty)_z],$$
$$A_N^N[(v_\infty)_z] = 0,$$

здесь верхний индекс указывает порядок, а нижний — номер амплитуды, значение параметра $(v_\infty)_z$ соответствует нулю (27.28).

Анализу Θd и 1d решений посвящены работы (Иногамов и Чехлов, 1992a, 1993a; Inogamov & Chekhlov, 1993b; Иногамов, 1995e; Абаржи и Иногамов, 1995; Inogamov, 1997b). Анализ показывает, что нельзя(!) отыскать Θd решения в последовательных порядках, используя Θd точку N-го порядка в качестве начальной при отыскании Θd точки $N+1$-го порядка итеративным методом Ньютона[24]. Это обусловлено тем, что радиус сходимости R_{N+1} оказывается меньше, чем расстояния между последовательными точками

$$R_{N+1} < |\mathbf{A}_{N+1} - \mathbf{A}_N| + |\eta_{N+1} - \eta_N|. \qquad (27.29)$$

В работах (Иногамов и Чехлов, 1992a, 1993a; Inogamov & Chekhlov, 1993b; Иногамов, 1995e; Абаржи и Иногамов, 1995) Θd точки отыскиваются либо с помощью точного (а не итеративного) алгебраического решения системы, либо с помощью 1d решений. В этом смысле при нахождении Θd точек 1d кривые играют вспомогательную роль. При этом сначала посредством хорошо сходящейся итеративной процедуры НИ + СОДУ п. 27.4 находятся 1d кривые последовательных порядков. А затем привлекается правило (27.26), (27.28) и находятся Θd точки на этих кривых. Таким образом 1d кривые позволяют обойти трудность с малым радиусом сходимости (27.29).

Было проведено исследование Θd точек при $N \le 8$. В $N = 1$, 3, 6 и 8 случаях Θd точка лежит на соответствующей 1d кривой. Их R-координаты равны

$$R(N=1) = 3,$$
$$R(N=3) = 2,57,$$
$$R(N=6) = 2,556,$$

И при $N = 8$

$$R(N=8) = 2,4445,$$

где R — радиус кривизны КГ в вершине пузыря.

[24] Такая процедура предлагалась в работе (Davies & Taylor, 1950), с. 387; последний абзац раздела 6.

Таким образом, (i) Θd точек не более одной на сходящихся отрезках 1d кривых в интересующей нас конечной области ($R \simeq 7$) около конца 1d кривых. (ii) Они находятся вблизи конца 1d кривых.

Только в Θd точку приходят нестационарные траектории. Отсюда следует, что остальные точки на 1d кривой являются формальными стационарами. Эта ситуация изображена на схеме, приведенной на рис. 27.6.

Отметим, что в случае гравитационных волн все точки на 1d кривой являются стационарами. В РТ случае Θd точки являются узлами, а в случае волн — фокусами.

Полученные результаты позволяют разрешить противоречие Тейлора–Гарабедяна. Оно заключается в следующем. Тейлор и Дэвис (Davies & Taylor, 1950) рассматривали стационарное решение периодической,

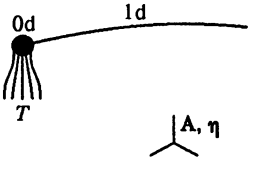


Рис. 27.6. Кривая 1d, 0d точка и нестационарные траектории T, входящие в нее. Точка 0d одна и совпадает с концевой точкой 1d кривой. В концевой точке E прекращается сходимость по N кривых 1d, вычисленных с помощью коллокаций и разложения (24.2), см. рис. 27.5*в*

симметричной краевой задачи со стационарными кинематическим и динамическим краевыми условиями и условием затухания на верхней бесконечности (см. также работы (Layzer, 1955; Kull, 1983)). В цилиндрическом случае они приводили задачу к системе, аналогичной системе (27.27) с условием (27.28). Они полагали, что в области, представляющей физический интерес, имеется решение в виде *единственной точки* и что эту точку — корень системы (27.27), (27.28) — можно найти, последовательно поднимаясь по порядкам аппроксимации N (Davies & Taylor, 1950, с. 387)[25].

С другой стороны, Гарабедян (Garabedian, 1957)[26], опираясь на простой анализ размерности, аналогичный проведенному в п. 27.1 и п. 27.2, полагал, что, как и в случае гравитационных волн, имеется 1d семейство стационарных точечных решений, заполняющих непрерывную 1d кривую. То, что на практике осуществляется одно решение из этого семейства, он объяснял так. Точки-стационары, заполняющие 1d кривую, имеют разные скорости подъема пузыря. На практике осуществляется стационар с наибольшей скоростью подъема (Garabedian, 1957), поскольку он является более устойчивым, чем стационары с меньшими скоростями подъема.

Из полученных выше результатов следует компромиссное решение этого противоречия, хотя, на первый взгляд, кажется, что первая и вторая точки зрения исключают друг друга. Оказывается, что 1d кривая действительно имеется. Но в отличие от случая гравитационных волн

[25] Попытка подняться по порядкам аппроксимации к Θd точке была предпринята в работе (Kull, 1983).

[26] См. также работы (Birkhoff & Carter, 1957; Vanden-Broeck, 1984a, 1984b), в которых считается само собой разумеющимся существование 1d семейства.

только одна точка на этой кривой является истинным стационаром, принимающим пучок (узел) траекторий. Остальные точки на 1d кривой оказываются формальными стационарными решениями.

§ 28. Самообразование сингулярных пузырей

В § 25 представлен метод расчета нестационарного течения путем разложения граничных условий в вершине пузыря. Этот метод приводит к динамической системе (28.1), (28.1′). В работах (Иногамов, 1994, 1995a, 1995b; Иногамов и Демьянов, 1996) исследована одномодовая (периодическая) эволюция в РТ и РМ случаях. В работе (Иногамов, 1994) показано, что решение системы (26.1), (26.1′), стартующее из окрестности гидростатического равновесия, существует только в течение конечного промежутка времени

$$0 < t < (t_S)_A. \tag{28.1}$$

В работе (Иногамов, 1995a) сравниваются решения системы (26.1), (26.1′) и результаты численного моделирования методом искусственной сжимаемости в РТ случае. Оказывается, имеется корреляция между моментом $(t_S)_A$ (28.1), следующим из аналитической теории, и моментом

$$(t_S)_C, \tag{28.2}$$

в который в численном расчете в вершине основного пузыря появляется маленький пузырек. В работе (Иногамов, 1995b) выведена система уравнений обычных коллокаций, описывающая эволюцию свободной границы при $\mu = 0$. Показано, что она эквивалентна системе (26.1), (26.1′). Система (26.1), (26.1′) получается из системы уравнений обычных коллокаций асимптотически при сближении точек коллокации. Поэтому метод разложения граничных условий § 25 может быть назван также методом асимптотических коллокаций.

В работе (Иногамов и Демьянов, 1996) сравниваются решения системы (26.1), (26.1′) и результаты численного моделирования методом крупных частиц. Обнаружено, что в РТ случае при широкой вариации начальных условий в вершине основного пузыря появляется маленький пузырек. Причем в вершине этого сначала маленького пузырька свободная граница (КГ) имеет излом, примерно равный 120°. С течением времени маленький пузырек расширяется и становится основным пузырем с углом 120° в вершине.

Согласно общим представлениям при $\mu = 0$ одномодовая эволюция должна заканчиваться асимптотической стадией. Поэтому должны иметься линейная, переходная и асимптотическая стадии развития возмущения. Границы между ними равны $ka \approx 0,2$ и $ka \approx 0,6$, где a — амплитуда РТ или РМ пузыря. Эти оценки следуют из $N = 1$ модели, см. § 26.

Из сопоставления численных и аналитического § 25 методов следует, что аналитика хорошо описывает РТ и РМ течения на отрезке (28.1). Определяется спектр амплитуд Фурье потенциала. Имеется сходимость с ростом числа гармоник N. Отрезок (28.1) покрывает линейную и бóльшую часть нелинейной переходной стадий. Критическое значение,

при котором происходит обрыв решения системы (26.1), (26.1′), удобнее определять не по t (особенно в РТ случае), а по амплитуде пузыря a в этот момент. В РТ и РМ случаях критическая амплитуда, следующая из аналитики, равна

$$ka_S \approx 0,5 \tag{28.3}$$

(она немного меньше в РМ случае). Вблизи ka_S производные $\dot{A}_n$ (именно производные от амплитуды, а не от η) начинают быстро возрастать, и счет останавливается. Их рост вызван приближением траектории к гиперповерхности S, на которой детерминант матрицы G является вырожденным $\det G = 0$, см. (26.1′). Значения ka_S слабо зависят от N (были исследованы значения $N \leq 6$ и $N \leq 18$ методами асимптотических и обычных коллокаций соответственно).

28.1. Гипотеза об образовании особенности

В работах (Иногамов, 1994, 1995a, 1995b; Иногамов и Демьянов, 1996) выведена и проинтегрирована система уравнений асимптотических и обычных коллокаций. Обнаружено ограничение (28.1), (28.3). На основании этого высказана гипотеза о том, что это ограничение указывает на самообразование сингулярности на КГ.

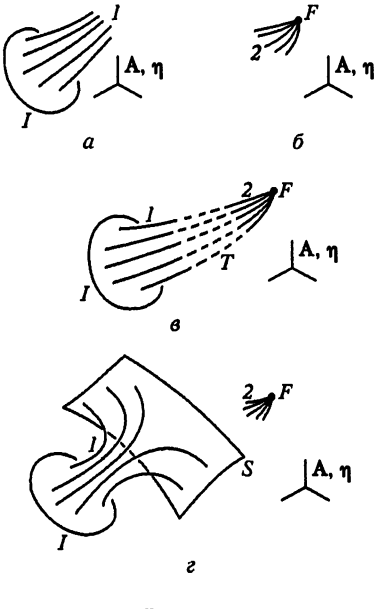


Рис. 28.1

Основанием гипотезы являются аналитический и численный доводы. Аналитический довод заключается в следующем. Методы асимптотических и обычных коллокаций описывают нестационарное течение (§§ 25, 26), стационарные точки Θd нестационарного течения (п. 27.5) и стационарные Θd и 1d решения (§ 27). Развитие возмущений из окологидростатической окрестности I вдоль участков *1* траекторий показано на рис. 28.1*а*. Коллокационный метод хорошо описывает участки *1* (сходимость по N). Этот же метод *одновременно* ухватывает стационарную точку F, см. рис. 28.1*б*, и ее нестационарную окрестность (участки *2* траекторий системы). Окрестности точки F соответствуют периодические структуры с длинными струями.

В этом заключается принципиальное отличие развиваемых здесь коллокационных методов от слабонелинейных. В последних разложения ведутся около физической плоской поверхности, т. е. около положения гидростатического равновесия. При этом в уравнения входят амплитуды Фурье β (24.1) КГ η, абсолютные величины которых неограничено

возрастают при $t \to \infty$ из-за неограниченного удлинения струй, см. рис. 24.2*а, г*. Это не позволяет использовать слабонелинейные методы для описания стационара.

При коллокационном подходе неизвестными функциями являются амплитуды A_n потенциала в ССК, связанной с вершиной пузыря, и коэффициенты тейлоровского разложения КГ в вершине (при асимптотических коллокациях) или форма КГ в окрестности вершины (при обычных коллокациях (Иногамов, 1995b)), см. §§ 24–27. Эти функции остаются конечными при $t \to \infty$,что и позволяет описывать окрестности и гидростатики I, и стационара F. Слабонелинейным разложениям посвящены работы (Ingraham, 1954; Chang, 1959; Emmons et al., 1960) (слабонелинейная теория РТН и эксперимент — учет поверхностного натяжения), (Rajappa, 1970) (кубическое по нелинейности сингулярное разложение, учет поверхностного натяжения), (Jacobs & Catton, 1988) (развитие одномодового 3D возмущения в цилиндрической трубе), (Haan, 1989, 1991) (обобщение на многомодовый случай), (Shvarts et al., 1995; Galmiche & Macé, 1995; Cherfils–Clérouin & Galmiche, 1995; Ofer et al., 1996) (обобщение на многомодовый случай), (Zhang & Sohn, 1996; Velikovich & Dimonte, 1996) (случай несжимаемой НРМ с $\mu \neq 0$).

Итак, во-первых, коллокации пригодны в окрестностях I и F и, во-вторых, одномодовая эволюция при $\mu = 0$ должна заканчиваться стационаром (при экспоненциально сглаженных в сторону $k = \infty$ начальных данных). Поэтому естественно ожидать, что коллокационные траектории будут иметь вид $I \to\!1\!\to T \to\!2\!\to F$, см. рис. 28.1*в*, то есть они будут описывать гладкую эволюцию от гидростатики до стационара, поскольку участки *1* и *2* на рис. 28.1*а, б* относятся к гладким пузырям без особенностей на КГ. Но оказывается, что так обстоит дело только в случае $N = 1$, см. п. 26.2 и п. 26.3. При $N = 1$ "гиперповерхность" S (прямая $K = 1$, см. рис. 26.2 и 26.5), на которой $\det G = 0$, геометрически отделена от физических траекторий. В общем случае участки *1* траекторий оканчиваются на притягивающей их гиперповерхности S ($\det G = 0$), как это показано на схеме на рис. 28.1*г*.

Аналитический довод в пользу гипотезы основывается на факте отсутствия траекторий $I \to\!1\!\to T \to\!2\!\to F$. Этот факт интерпретируется в пользу образования особенности на КГ при приближении к гиперповерхности S при (28.1), (28.3). Значения (28.1), (28.3), которые определяют, когда это приближение происходит, слабо зависят от N. Численный довод в пользу гипотезы следует из результатов численного моделирования (Иногамов, Демьянов, 1996). В работе (Иногамов, Демьянов, 1996) обнаружено, что в РТ случае при значениях t (28.2) и ka, примерно согласующихся с (28.1), (28.3), на КГ в районе вершины пузыря образуется особенность — пузырек с изломом. В дальнейшем на асимптотической стадии формируется стационарный пузырь с изломом 120° в вершине.

28.2. Критический анализ гипотезы

Вопрос о самообразовании особенности на КГ пузыря остается в разряде гипотез. Дело в том, что имеются и контрдоводы. Приведем сначала

критический анализ коллокационных методов, а затем — численного моделирования. Рассмотрим эволюцию от слабо возмущенной КГ. С течением времени происходит приближение особенностей потенциала к КГ одновременно с ростом длины струй. При t и ka, по порядку величины равных (28.1)–(28.3), на КГ появляется "закрытый" для коллокаций участок, находящийся вне радиуса сходимости разложения Фурье (24.2) для потенциала. В случае (24.2) на физической плоскости (x, y) круг сходимости имеет вид полуплоскости $y > y_S$, где y_S — координата самой верхней особенности. Точки коллокаций выбираются вне этого участка (Иногамов, 1995b). С течением времени длина участка струи за радиусом сходимости возрастает.

С одной стороны, из наличия "закрытого" участка автоматически не следует непригодность метода для описания эволюции. Дело в том, что, во-первых, "открытого" участка достаточно для написания сколь угодно большого числа уравнений для сколь угодно большого числа амплитуд N и, во-вторых, удаленные участки струй мало влияют, как это показано на рис. 24.1, на динамику пузырьковой оболочки. Тщательный анализ результатов показывает, что коллокационный метод, опирающийся на разложение (24.2), действительно описывает асимптотическую стадию развития гладких пузырей.

С другой стороны, такая специфика разложения (24.2) означает, что оно, по-видимому, не будет работать или будет работать плохо в случаях, когда между "открытыми" и "закрытыми" участками имеется существенная динамическая связь. В частности, не удается проследить начальную эволюцию течения при довольно больших ($ka \sim 0,3$) начальных возмущениях КГ. В этом случае особенности уже при $t = 0$ находятся близко к сильно возмущенной КГ между ее выпучиваниями и с самого начала появляются "закрытые" участки.

Возможно, что этим обстоятельством обусловлена малость радиуса сходимости (27.29), п. 27.5, не позволяющая последовательно итеративно определять Θd точки. Отметим также, что при определении Θd точек плохим является случай $N = 2$. При этом в РТ случае точка $\mathrm{F}(N = 2)$ далеко отклоняется ($R = 9,148$, см. (Иногамов, Чехлов, 1993a)) от той точки ($R \approx 2,7$), к которой при $N \to \infty$ должна сходиться последовательность $\mathrm{F}(N)$ точек, а в РМ случае точка $\mathrm{F}(N = 2)$ отсутствует (Иногамов, 1995b), здесь аргумент N указывает число амплитуд в разложении (24.2).

Приведем анализ численного моделирования. Сделаем ряд критических замечаний. Во-первых, моделирование не обнаруживает ничего особенного — вроде зарождения малого пузырька в вершине — в случае НРМ. Согласно же аналитике (коллокации и разложение (24.2)) притягивание к гиперповерхности S происходит и в РТ, и в РМ случаях. Отметим, что при одинаковых сетках численное моделирование НРМ оказывается более трудным, чем РТН. Это вызвано замедлением движения пузыря при НРМ. Во-вторых, из детального анализа КГ следует, что образование малого пузырька в вершине основного при t (28.2) не происходит в виде бифуркации или скачка, при котором при $t < (t_S)_C$ граница гладкая, а при $t > (t_S)_C$ имеется пузырек. На самом деле оказывается, что в

методе крупных частиц возмущения КГ с шагом порядка шага сетки и очень малой амплитудой появляются уже на ранних стадиях развития основного возмущения. Они незаметны на общем графике КГ, вычерченном на периоде. Напомним, что КГ называется средняя изохора. В дальнейшем эти мелкомасштабные возмущения растут и растягиваются из-за растяжения КГ при развитии основного возмущения. Центральный пузырек становится заметным на общем графике КГ при $t \simeq (t_S)_C$ (28.2). Обычно этот центральный пузырек в расчетах методом крупных частиц имеет излом в вершине. Хотя надо отметить, что иногда в расчетах методом крупных частиц и во всех расчетах методом искусственной сжимаемости малый пузырек имеет гладкую вершину.

Образование и рост мелкомасштабных возмущений кажутся естественными при одномодовых расчетах РТН на очень подробных сетках. Дело в том, что КГ пузыря является неустойчивой по отношению к мелкомасштабной РТН (Иногамов, Чехлов, 1991c; Inogamov et al., 1991b, с. 419). Это относится к вопросу об экспоненциально сглаженных начальных данных, см. работу (Иногамов, 1995b, с. 1622, п. 8). Но с другой стороны удивительным является самообразование пузырька с изломом 120° в вершине. Отметим, что образование с течением времени 120° пузырей происходило и в расчетах с начальными данными с двумя гармониками, в которых на основную гармонику накладывалась субгармоника, соответствующая моде притяжения пузырей.[27] При этом 120° пузыри становились стационарными и сохраняли небольшую асимметрию. Пузырь с изломом 120° имеет разрез и точку ветвления в вершине. На больших глубинах ниже района локализации нетривиальных особенностей внутри стационарного РТ пузыря проходит разрез. Он является *линией источников*, которые необходимы для роста расхода $\dot{M}$ с глубиной $|y|$ внутри пузыря.

Вопрос об особенности на КГ важен. Здесь требуются дополнительные исследования. Интересно было бы изучить в рамках коллокационной модели влияние поверхностного натяжения σ и абляционного уноса v_a на притягивание к гиперповерхности S. Кроме того, было бы интересно рассмотреть старт от начальных данных, соответствующих параллельной КГ цепочке источников, находящихся на небольшом по сравнению с единицей относительном расстоянии d/λ от КГ. Спрашивается, нельзя ли обойти ("обогнуть") гиперповерхность S и получить траектории $\mathrm{I} \to 1 \to \mathrm{T} \to 2 \to \mathrm{F}$, см. рис. 28.1*в*, при конечных σ и v_a или при небольших d/λ?

§ 29. Периодические решения при конечном отношении плотностей μ

Задача о динамике свободной поверхности сложна. Для ее упрощения выше рассматривался случай, когда отношение $\mu = \rho_L/\rho_H$ плотностей ρ_L и ρ_H на КГ было мало $\mu = +0$ (перемешивание с "вакуумом"). Тогда

[27] Об этой моде см. работы (Иногамов, 1978a; Inogamov et al., 1991b; Anisimov et al., 1993).

движение описывается одним потенциалом. Посмотрим, как изменится течение при $\mu \neq 0$.

29.1. Роль отношения плотностей

Отношение $\mu = \frac{1-A}{1+A}$ и число Атвуда $A = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ меняются на отрезках $0 \leq \mu \leq 1$, $1 \geq A \geq 0$. На отрезке μ имеются три характерных участка: больших значений $1/\mu$

$$\mu \ll 1, \quad A \approx 1, \tag{29.1}$$

промежуточный

$$\mu < 1, \quad \mu \sim 1, \quad A < 1, \quad A \sim 1 \tag{29.2}$$

и участок

$$1 - \mu \ll 1, \quad A \ll 1, \tag{29.3}$$

на котором становится применимым приближение Буссинеска (разность плотностей учитывается только в архимедовой силе).

Численное моделирование динамики КГ в этих трех характерных случаях представлено на рисунках 29.1, 29.2 и 29.3. Сетка квадратная, 40 ячеек на λ, число Куранта равно 0,001. Время приводится сверху над каждым кадром. Расчеты выполнены методом искусственной сжимаемости, см. § 18, А. В. Чехловым. Во всех трех случаях начальным было возмущение скорости с потенциалом $\varphi(x, y, 0) = v_0 \cos x e^{-|y|}$ и большой амплитудой $v_0 = 12,53$ (в единицах $g = k = 1$; асимптотическая скорость при $\mu = 0$ дается выражением (27.22)). Поэтому начальный участок движения соответствует НРМ, а конечный — РТН. Отметим, что асимптотические формы затупленных РТ и РМ пузырей примерно одинаковы.

Рис. 29.1 соответствует случаю (29.1). Здесь $\mu = 1/10 = 0,1$, $A = 0,82$. Начиная с $t \approx 1,6$, радиус кривизны пузыря R_B становится равным $2,1 - -2,4$ ($k = 1$) и перестает изменяться. Это значение немного меньше теоретического (27.22).

В расчетном поле с отношением сторон $3 : 1$ находилась половина волны возмущения. На рис. 29.1, 29.2 и 29.3 приведено все поле. На боковых границах ставились условия симметрии, а на верхних и нижних (в данных трех расчетах) условие свободного протекания (§§ 17, 18). Это условие (в отличие от жестких граничных условий) мало возмущает форму КГ, приближающейся к верхней или нижней границам расчетного поля. Это позволяет продолжать расчет в условиях, когда параметр $k\Delta$ (Δ — расстояние от КГ до верхней или нижней границ) становится довольно малым, и, таким образом, более эффективно использовать расчетное поле. Недостатком условия свободного протекания является то, что из-за начального толчка вся система приобретает дополнительную вертикальную скорость и как целое смещается вверх. Поэтому нельзя аккуратно определить скорость в расчетах с таким условием. Сравнение расчетов с жесткими и свободными условиями показывает, что на форму КГ вариация граничных условий практически не влияет, что и будет представлено чуть ниже.

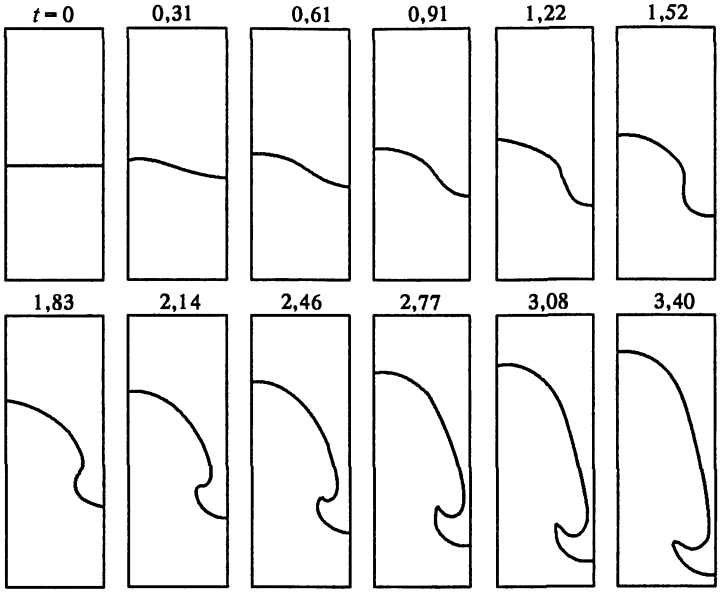


Рис. 29.1

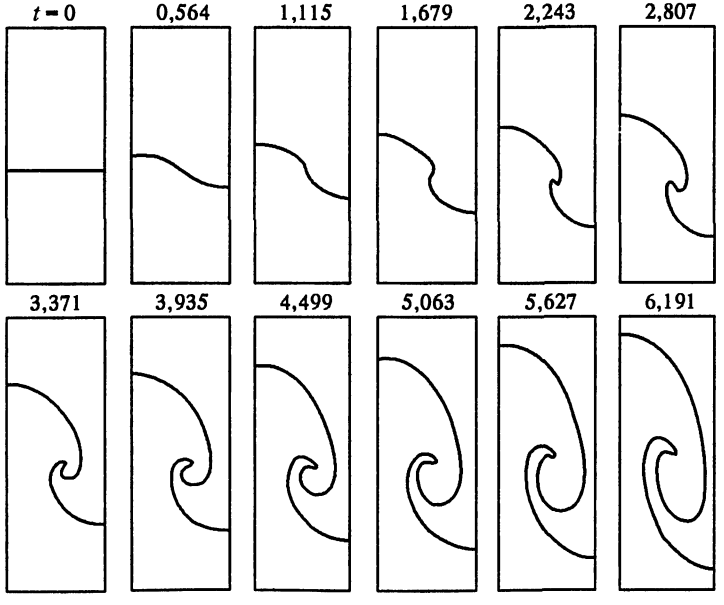


Рис 29 2

На рис. 29.2 приведена картина эволюции КГ при $\mu = 1/2 = 0,5$ ($A = 0,33$). Эти значения относятся к промежуточному случаю (29.2). С $t \approx 1,7$ радиус R_B принимает асимптотическое значение (27.22).

На рис. 29.3 представлен случай (29.3). Здесь $\mu = 1/1,1 = 0,91$, ($A = 0,048$). Асимптотический радиус (27.22) достигается при $t \approx 3,4$.

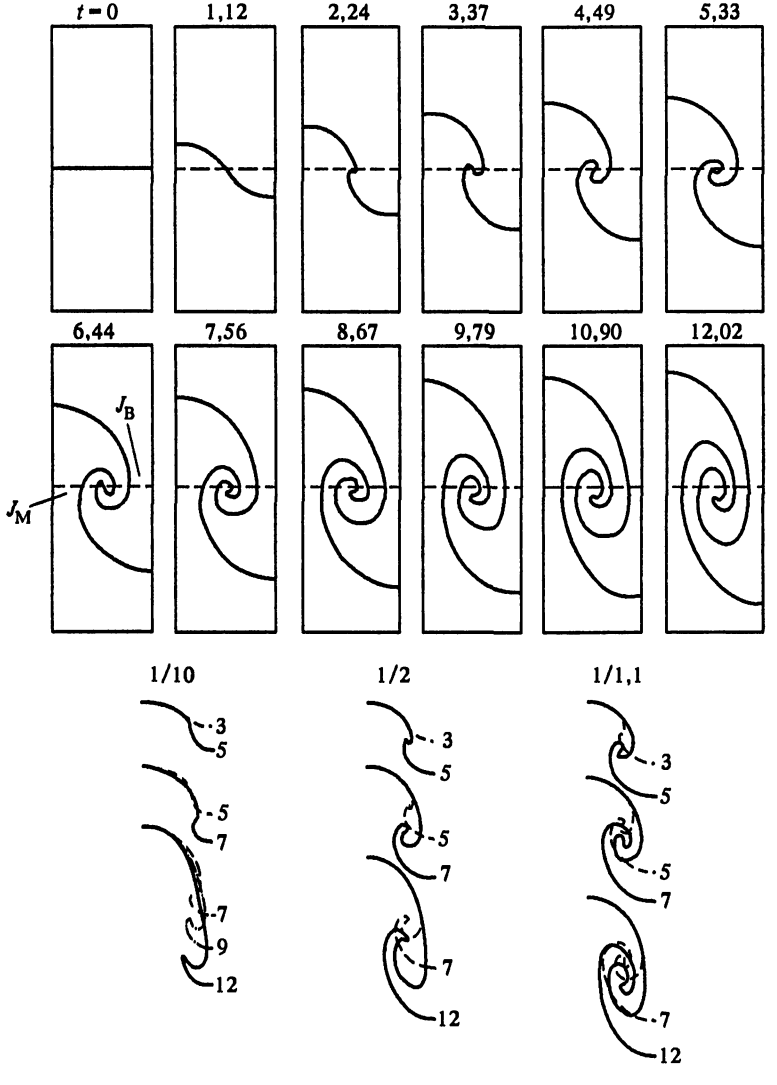


Рис. 29.3. Процесс формирования стационарного пузыря (a). Сверху указано значение μ. Цифрами обозначены номера кадров, взятых с кинограмм, представленных на рис. 29.1 ($\mu = 1/10$), 29.2 ($\mu = 1/2$) и 29.3 ($\mu = 1/1,1$). Кадры нумеруются из левого верхнего угла и слева направо

Процесс постепенного установления стационарного пузыря хорошо виден на рис. 29.3. Графики КГ построены в подвижной системе координат (ССК), связанной с вершиной пузыря. Сравнивая эти графики, видим, как с течением времени расширяется область вблизи вершины пузыря, в которой КГ совпадают друг с другом.

29.2. Детальный анализ поля скоростей

Расчеты, приведенные выше, иллюстрируют влияние параметра μ. Спрашивается, насколько сильно отличаются результаты от аналитических, полученных при $\mu = 0$? Разобъем этот вопрос на два. Посмотрим сначала, в чем заключаются изменения динамики пузыря, а затем рассмотрим струю.

Пузырю с $\mu = 0$ ближе всего соответствует расчет с малым значением $\mu = 0,1$, приведенный на рис. 29.1. Сравнение R_B обсуждалось выше. Прежде, чем произвести более подробное сравнение формы, скорости и спектров Фурье от полей скорости теоретического и численного пузырей, сделаем отступление и рассмотрим численное моделирование более подробно.

Эволюция КГ при жестких граничных условиях сверху и снизу показана на рис. 29.4. Жестким называется условие непротекания, при

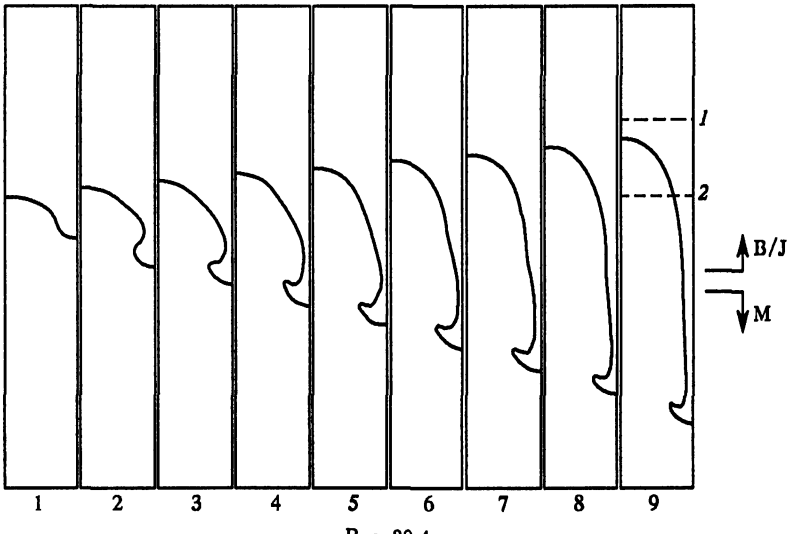


Рис. 29.4

котором компонента скорости, направленная по нормали к стенке, равна нулю на границе.

Оно соответствует жесткой или твердой стенке. Расчетное поле сильно вытянуто по вертикали. Отношение сторон равно 7 : 1. Это сделано для того, чтобы исключить влияние верхней и нижней границ. На боковых границах во всех расчетах ставились условия симметрии. Значения параметров равны: 30 ячеек на λ, $\mu = 0,1$. Начальная амплитуда скорости

$v_0 = 0,11\sqrt{g/k}$ составляла 20% от предельной или асимптотической скорости пузырей, равной $0,59\sqrt{(1-\mu)g/k} = 0,56\sqrt{g/k}$ (27.22). Моменты времени $t_n = t_1, t_2, \ldots, t_9$ для кадров *1–9* равны

$$\sqrt{gk}t_n = \{1 - 3,363,\ 2 - 4,484,\ 3 - 5,044,\ 4 - 5,605,\ 5 - 6,165,$$
$$6 - 6,726,\ 7 - 7,286,\ 8 - 7,847,\ 9 - 8,407\}.$$

Для сокращения кинограммы несколько начальных кадров опущено. Расчет выполнен на квадратной сетке 105 : 15, А. В. Чехловым с помощью его программы в § 18. По сеточным значениям ρ_{ij}, где индексы i и j пробегают сетку, строились изохоры $\rho(x, y, t) = \text{const}$. На этих и предыдущих рисунках показана эволюция средней изохоры $\rho(x, y, t) = (1/2)(\rho_L + \rho_H)$, где ρ_L и ρ_H — плотности легкой и тяжелой жидкостей.

Сравним поля скоростей в расчетах с жесткими и свободными граничными условиями сверху и снизу.

При РТН (Anisimov, Zel'dovich', Inogamov & Ivanov, 1983) и НРМ возникает двухпотоковое движение (см. гл. I), при котором в области перемешивания осуществляются встречные перетоки тяжелой и легкой жидкостей. Они производят перестановки или обмены жидкостей. В пе-

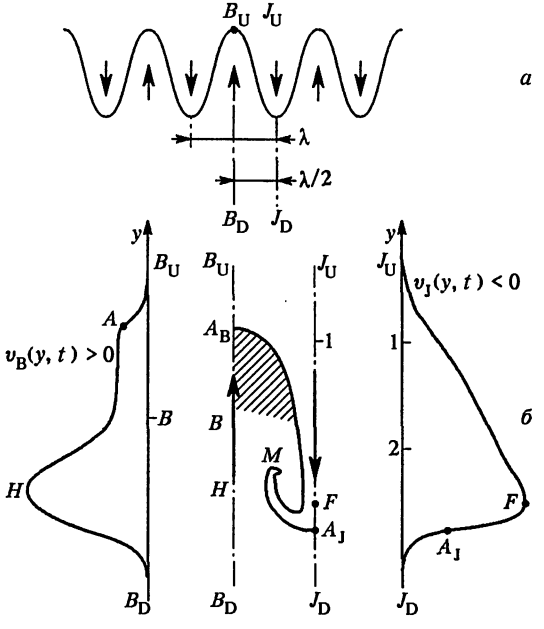


Рис. 29.5

риодическом случае двухпотоковая структура периодична. Восходящие струи легкой жидкости называются пузырями, а нисходящие — струями тяжелой жидкости. Схема встречных потоков показана на рис. 29 5

Здесь *а* — периодическая картина на плоскости (x, y), *б* — половина симметричного периода, детали течения. Выделены период λ, половина симметричного периода $\lambda/2$ и линии симметрии, проходящие через пузыри $B_D - B_U$ (B — bubble, D — down, U — up) и через струи $J_D - J_U$ (J — jet). Стрелки указывают направления скоростей в ЛСК. В ЛСК жидкость при $y = \pm\infty$ покоится.

На рис. 29.5*б* показаны пузырь и струя с грибом, A_B и A_J — вершины пузыря и гриба (A — apex). На левом и правом графиках приведены распределения вертикальной скорости v вдоль линий симметрии $B_D - B_U$ и $J_D - J_U$ соответственно. Опишем рисунок, двигаясь сверху вниз. Имеется область экспоненциального роста модуля скорости $B_U - A_B$ и J_U — точка *1*. При этом на левой стороне скорости v положительные, а на правой — отрицательные. Заштрихована область застоя $A_B - B$ внутри пузыря. На графике $v_B(y)$ ей соответствует "полка" $A_B - B$. Она появляется вследствие стационарности КГ в окрестности вершины A_B в ССК (т. е. КГ представляет собой как бы перевернутую чашку неизменной формы, в которой покоится легкая жидкость). Именно благодаря этому застою оказывается возможным прямой перенос теоретических результатов для пузыря $\mu = 0$ на случай $\mu \neq 0$ после тривиальной замены $g \to (1 - \mu)g$.

В ЛСК пузырь поднимается. Рассмотрим два момента времени t_1 и $t_2 > t_1$. Из-за подъема пузырей то место, которое занимала тяжелая жидкость над КГ пузыря при $t = t_1$, освобождается. Оно должно быть занято легкой жидкостью. Поэтому возникает восходящий поток легкой жидкости, который начинается в окрестности вершины гриба A_J. Сужение канала, по которому поднимается легкая жидкость, повернувшей струей $A_J - M$ тяжелой жидкости (это шляпка гриба) (M — mushroom), приводит к тому, что скорость легкой жидкости в этом узком месте сильно возрастает. Это сужение помечено буквой H (high). На распределении скорости $v_B(y)$ ему соответствует максимум скорости H.

На КГ струи в области от вершины A_B и до области гриба (участок A_B — точка *2*) давление примерно равно гидростатическому в легкой жидкости, движущейся с постоянной скоростью. Поэтому на том участке, где горизонтальная составляющая u скорости тяжелой жидкости становится мала по сравнению с вертикальной $|v| \gg u$, движение тяжелой жидкости в струе происходит примерно по закону свободного падения в гравитационном поле $(1 - \mu)g$. При вычислении распределения скорости $v_J(y)$ по этому закону следует учитывать стационарную скорость подъема пузыря. В области гриба модуль скорости струи $|v_J(y)|$ достигает максимума. Он помечен буквой F на рисунках в плоскости (x, y) и на распределении $v_J(y)$ (free, free fall).

В области под грибом скорости $v_B(y) \equiv v_B(x = 0, y, t)$ и $v_J(y) \equiv v_J(x = \pi, y, t)$ экспоненциально затухают и на расстояниях порядка радиуса кривизны R_J КГ в вершине A_J обращаются в нуль.

Сравнение описанных выше распределений $v_B(y)$ и $v_J(y)$ в расчетах с жесткими и свободными условиями показано на рис. 29.6. Здесь $t = 8,407/\sqrt{gk}$. Это кадр *9* на рис. 29.4. Точками U и D на оси ky

выделены верхняя и нижняя границы расчетного поля. Сплошные и штриховые кривые относятся к жестким и свободным условиям соответственно. Точками A_B и A_J помечены положения вершин пузыря и гриба в этот момент в расчете с жесткими условиями. Распределения

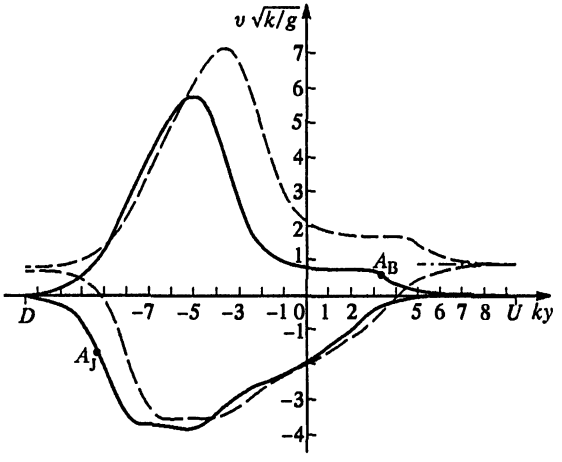


Рис. 29.6

$v_B(y)$ и $v_J(y)$ образуют "пары". В расчете с жесткими условиями имеем $v_B(y_U) = v_B(y_D) = v_J(y_U) = v_J(y_D) = 0$. Видно, что верхняя граница далеко. Действительно, асимптотики $v_B(y)$ и $v_J(y)$ в расчете со свободными условиями совпадают при $y \to y_U$. В тоже время появляется небольшое влияние нижней границы — асимптотики $v_B(y)$ и $v_J(y)$ немного отличаются при $y \to y_D$.

Основной вывод, который вытекает из проведенного сравнения граничных условий, заключается в том, что течения при свободных и жест-

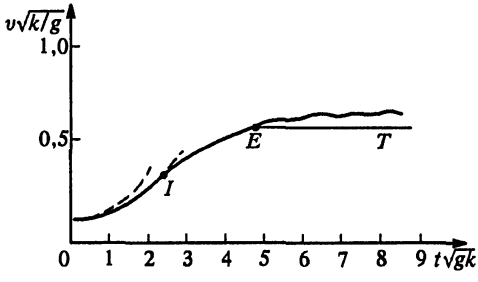


Рис. 29.7. Зависимость скорости подъема пузыря (по средней изохоре) от времени. Линейный участок 0–I, переходный I–E (initial–end) и асимптотический E — ∞. Теоретическая предельная скорость показана прямой T

ких условиях практически совпадают. Распределения скорости отличаются на скорость однородного сноса вверх. Это означает, что и формы КГ будут примерно одинаковыми.

Распределения скорости содержат существенную информацию. Они однозначно связаны с формой КГ. На рис. 29.7 приведена зависимость

от времени скорости пузыря в ЛСК, соответствующая эволюции КГ, показанной на рис. 29.4. За эту скорость принимается скорость смещения средней изохоры $\rho(x = 0, y, t) = (1/2)(\rho_L + \rho_H)$. Как сказано выше, начальным было возмущение скорости. Линейная зависимость скорости равна $v_0 \operatorname{ch}(\sqrt{Agk}\,t)$. Из-за численной вязкости и диффузии в численном расчете с шагом $\lambda/30$ инкремент уменьшается на 18% по сравнению с точным (см., кстати, обсуждение влияния сетки на численный гидростатический инкремент в работе (Ofer et al, 1996, с. 3076). Штрих-пунктиром приведена зависимость $v_0 \operatorname{ch}(0,82\sqrt{Agk}\,t)$.

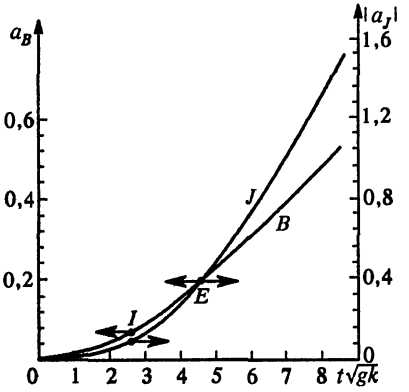


Рис. 29.8

На участке $2,5 < t < 5$, отмеченном точками I и E на рис. 29.7, происходит нелинейный переход от экспоненциальной зависимости к насыщению (I — initial, E — end, начало и конец перехода). Этот участок соответствует кадрам *1*, *2* и *3* на рис. 29.4. Для того, чтобы можно было бы легко оценить позиции вершин пузыря и струи, эти же точки I и E нанесены на зависимости амплитуд пузыря $a_B(t)$ и струи $a_J(t)$ от времени, см. рис. 29.8. Отметим, что шкалы a_B и a_J — разные.

Сравнение теоретической (сплошные кривые) и численной (штриховые кривые) зависимостей $v_B(y)$ и $v_J(y)$ от y в фиксированный момент времени в верхней части пузыря показано на рис. 29.9. Пузырю соответствуют положительные скорости, а струе — отрицательные. Теоретические зависимости рассчитывались по формуле $\varphi_y = -\sum_n (\pm 1)^n A_n e^{-ny}$, следующей из разложения (24.2) при $x = 0$ (верхний знак) и $x = \pi$ (нижний). Подставлялись значения амплитуд (27.23). Имеется удовлетворительное согласие, хотя необходимо отметить, что численные зависимости спадают несколько круче с ростом y.

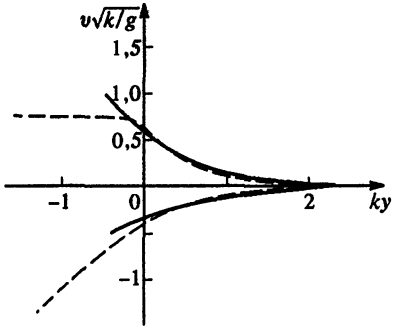


Рис. 29.9. Распределения скорости по линиям симметрии $B_U - B_D$ и $J_U - J_D$, см. рис. 29.5, в верхней части пузыря. Начало отсчета y на этом рисунке совпадает со средней изохорой, которая выбрана за КГ. Положительные скорости — пузырь, отрицательные — струя. Сплошные кривые — теория, штриховые — моделирование

Заметной особенностью численного моделирования является то, что скорость в зоне застоя внутри пузыря, заполненной легкой жидкостью, несколько больше (на 17%) скорости подъема средней изохоры. Это означает, что имеется небольшой подток легкой жидкости к КГ[28]. Это хорошо видно на рис. 29.7 и на рис. 29.9. На рис. 29.7 теоретическому значению предельной скорости $0,59\sqrt{(1-\mu)gk}$ (27.22) соответствует прямая T (theory). На рис. 29.9 значение скорости v при $y = 0$ соответствует скорости средней изохоры. Как видим, скорость на "полке" выше скорости при $y = 0$.

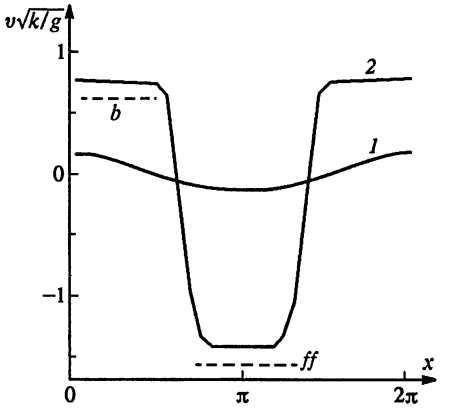


Рис. 29.10

Это также видно на рис. 29.10. На этом рисунке представлены горизонтальные распределения скорости $v(x, y = y_f, t)$ по x. Они взяты в сечении *1* при $y_f = 0,128\lambda$, см. рис. 29.4 кадр *9*, и в сечении *2* при $y_f = -0,405\lambda$. Здесь y_f отсчитывается от вершины пузыря. Сечениям *1* и *2* соответствуют распределения *1* и *2* на рис. 29.10. Сечение *1* проведено над пузырем, а сечение *2* пересекает пузырь и струю. В области пузыря скорости положительные, а в зоне струи отрицательные. Штриховая прямая b (bubble) соответствует теоретической формуле $0,59\sqrt{(1-\mu)g/k}$ (27.22). Как отмечалось выше, распределение скорости в пузыре в зоне застоя однородно. Это хорошо видно на рисунке. К этим зонам относятся "плечи" кривой *2*. Теоретическая скорость оказывается на 17% меньше однородной скорости подъема легкой жидкости в пузыре Отметим также заметное размытие КГ из-за численной диффузии (шаг сетки $\lambda/30$) Отрезки прямых на зависимости *2* соединяют значения скорости в соседних расчетных узлах.

По распределению скорости $v(x)$ в сечении *1* были вычислены амплитуды Фурье скорости

$$v_n = (1/\pi)\int_0^{2\pi} v(x)\cos nx dx.$$

Первые две с точностью $\sim 5\%$ совпали с теоретическими (27.23). Третья гармоника очень мала и совпадает с теоретической с точностью $\pm 30\%$ (в формуле для скорости использовалось $(1-\mu)g$ вместо g).

Прямая ff на рис. 29.10 получена из закона свободного падения (ff — free fall), записанного в системе координат, связанной с вершиной

[28] Видимо затем эта жидкость из-за численной диффузии смешивается с тяжелой жидкостью и сносится током последней вдоль КГ.

пузыря A_B (ССК). В ЛСК имеем следующее простое выражение для вертикальной компоненты скорости струи

$$-v(x=0,\,y,\,t)=\sqrt{2g\,(1-\mu)y}-v_B,\quad v_B=0,59\sqrt{g\,(1-\mu)/k}. \quad (29.4)$$

Оно следует из интеграла Бернулли, записанного для тяжелой жидкости, в котором y отсчитывается от точки торможения, то есть от вершины A_B.

Сравнение зависимости (29.4) (сплошная кривая) с численным распределением v от y (штриховые кривые) показано на рис. 29.11. Как

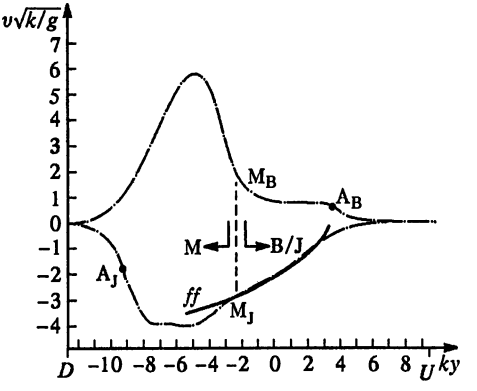


Рис. 29.11. Разбиение течения на две области: верхнюю область пузырь–струя B/J, в которой влияние μ сводится к замене $g \to (1-\mu)g$, и нижнюю область гриба M, появляющегося из-за динамического напора легкой жидкости. На границе между двумя этими областями заканчиваются "полка" $A_B - M_B$ для пузыря и закон свободного падения (29.4) (сплошная кривая ff) для струи. Точками A_B, A_J, D, U и $y = 0$ отмечены вершины пузыря, гриба, границы расчетного поля и начальное положение КГ соответственно

видим, начиная с глубины $ky \approx -1$, отсчитанной от точки A_B, и до области, в которой становится существенным влияние вихрей, "сидящих" на грибе, распределение скорости хорошо описывается законом (29.4). Отклонения от "полки" на верхней зависимости $v_B(y) \equiv v(x=0,\,y,\,t)$ и от закона (29.4) на нижней зависимости $v_J(y) \equiv v(x=\pi,\,y,\,t)$ появляются примерно на одной глубине и обусловлены влиянием гриба.

29.3. Аналитическое описание пузыря при произвольном значении параметра μ

В предыдущем разделе рассмотрен случай $\mu = 0, 1$. Показано, что теоретические формулы (27.22), (27.23) довольно точно описывают течение в

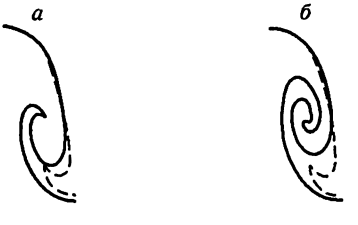


Рис. 29.12. Сравнение пузырей при разных отношениях плотностей μ. Штриховые кривые — $\mu = 1/10$, сплошные кривые: *а* — $\mu = 1/2$; *б* — $\mu = 1/1,1$

области пузыря (область B/J на рис. 29.4, кадр *9*, и 29 11). Посмотрим, можно ли сказать то же самое при других значениях параметра μ

Сравним установившиеся формы пузырей, показанных на рис. 29.1, 29.2 и 29.3. Процесс установления стационарного пузыря представлен на рис. 29.3*а*. Совместим последние кадры кинограм, приведенных на рис. 29.1, 29.2 и 29.3. Поскольку речь идет о пузыре, то совмещать их необходимо по вершине пузыря. Совмещенные графики КГ изображены на рис. 29.12. Здесь штриховые кривые относятся к случаю $\mu = 1/10$, а сплошные — к случаю $\mu = 1/2$ на левом рисунке и $\mu = 1/1,1$ на правом.

Как видим, формы пузырей довольно точно совпадают. Это означает, что пузыри и в промежуточном (29.2), и в буссинесковском (29.3) диапазонах описываются теоретическими формулами (27.22), (27.23) после замены $g \to (1-\mu)g$. Следовательно, теория описывает установившиеся пузыри при любых значениях параметра μ.

Известна качественная модель[29], из которой следует, что зависимость асимптотической скорости пузыря v от μ дается формулой $v \sim \sqrt{g(1-\mu)\lambda}$.[30] Эта простая зависимость следует из второго закона Ньютона. Запишем его для твердого тела, движущегося в жидкости. Имеем

$$(\rho_{\text{L}} V_{\text{L}} + \rho_{\text{H}} V_{\text{H}})\ddot{y} = (\rho_{\text{H}} - \rho_{\text{L}}) V_{\text{L}} |g| - \beta \rho_{\text{H}} (\dot{y}^2/2) S_{\text{L}}. \qquad (29.5)$$

Здесь ρ_{L}, V_{L} и S_{L} — соответственно плотность, объем и площадь сечения твердого тела, ρ_{H} — плотность обтекающей тело жидкости, $\rho_{\text{H}} V_{\text{H}}$ — присоединенная к телу масса обтекающей жидкости, $\dot{y}$ и $\ddot{y}$ — соответственно скорость (на бесконечности обтекающая жидкость покоится) и ускорение тела.

В установившемся случае скорость $\dot{y}$ постоянна: $\ddot{y} = 0$. В этом случае уравнение (29.5) превращается в уравнение силового баланса, в котором скорость должна быть такой, чтобы сила плавучести или архимедова сила и сила, обусловленная динамическим напором обтекающей жидкости, были бы равны. Отсюда и следует, что скорость равна

$$\dot{y} = \sqrt{2 \frac{1}{\beta} \frac{V_{\text{L}}}{S_{\text{L}}} (1-\mu)|g|}. \qquad (29.6)$$

Оценка (29.6) пригодна в 2D и 3D геометриях. В 2D геометрии в случае пузырей в виде валов между параллельными плоскостями имеем $V_{\text{L}}/S_{\text{L}} = \beta_{2\text{D}}\lambda$. Аналогично $V_{\text{L}}/S_{\text{L}} = \beta_{3\text{D}}\lambda$ в 3D случае. Здесь β, $\beta_{2\text{D}}$ и $\beta_{3\text{D}}$ — динамический и геометрические постоянные коэффициенты. В 3D случае β и $\beta_{3\text{D}}$ зависят от формы сечения вертикальной трубы, по которой всплывает пузырь.

В 3D случае течение возле пузыря в квадратной трубе при любых μ дается формулами (27.22′), (27.24) после замены $g \to (1-\mu)g$.

---

[29] См. работы (Daly, 1967; Anisimov et al., 1983; Kull, 1991; Alon et al., 1995; Ofer et al., 1996).

[30] Разумеется, из этой модели нельзя определить ни безразмерного коэффициента в этой формуле, ни формы пузыря, ни амплитуд Фурье — она носит сугубо качественный характер.

29.4. Отношение μ и асимметрия пузырь–струя

В буссинесковском случае (29.3) плотности $\rho_{\text{Л}}$ и $\rho_{\text{Н}}$ легкой и тяжелой жидкостей приблизительно одинаковы. Тогда течение является инвариантным (симметричным) относительно инверсии $y \to -y$[31]. Симметрия означает, что пузыри и струи с грибами очень похожи, а при $\mu \to 1-0$ точно совпадают при $y \to -y$. Это хорошо видно на рис. 29.3. Экспериментально примерно симметричные пузыри и грибы наблюдались в работе (Ratafia, 1973).

Чтобы выявить все элементы симметрии и асимметрии на рис. 29.13 построены прямые (это правые половины рисунков *а–в*) и инверсированные (левые половины) КГ. Случаи *а–в* относятся к диапазонам (29.1) ($\mu = 1/10$), (29.2) ($\mu = 1/2$) и (29.3) ($\mu = 1/1.1$) соответственно. Взяты последние кадры киногрм, приведенных на рисунках 29.1, 29.2 и 29.3.

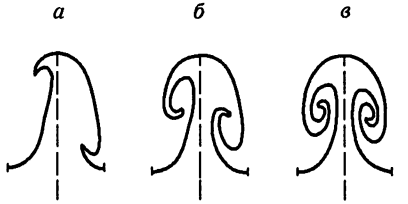


Рис. 29.13

Как видим, окрестности вершин пузыря и гриба похожи в *б* и *в* случаях. Случай *в* очень близок к симметричному, хотя завиток гриба отличается. Таким образом, при убывании μ от значения $1-0$ до значения $+0$ течение постепенно перестраивается от симметричного к асимметричному. Асимметрия максимальна при $\mu = +0$, когда разными являются асимптотические законы продвижения пузыря $a_{\text{В}} \sim t$ и падения струи $|a_{\text{Ж}}| \sim t^2$. Таким же является положение и при НРМ. Здесь при $\mu = +0$ асимптотические законы равны $a_{\text{В}} \sim \ln t$, $|a_{\text{Ж}}| \sim t$. Отметим, что при РТ и РМ турбулентностях при тех же значениях μ асимметрия существенно меньше.

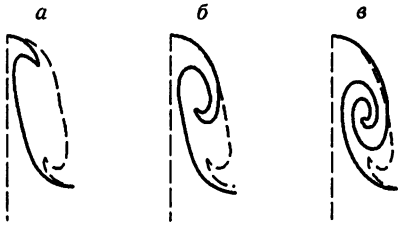


Рис. 29.14. Анализ вопроса о применимости теории пузыря для описания движения гриба. Штриховые кривые — пузырь с $\mu = 1/10$, сплошные — гриб с $\mu = 1/10$ (*а*), $\mu = 1/2$ (*б*) и $\mu = 1/1,1$ (*в*). Вершины пузыря и грибов совмещены. Все КГ взяты с последних кадров рис. 29.1, 29.2 и 29.3

[31] Разумеется, течение будет симметричным при инверсионно инвариантных начальных данных. Начальные данные, при которых возмущение КГ пропорционально $\cos x$, а возмущения скорости находятся из потенциала $\sim \cos x e^{-|y|}$, являются инвариантными. Начальные данные общего вида (они могут быть как линейными, так и нелинейными), например уединенные возмущения, не являются таковыми. Действительно, сравним два разных течения, стартующих от уединенных начальных данных (а) и от начальных данных (Iа), полученных инверсией данных (а). Видим, что при $\mu \to 1-0$ пузыри (возмущение в сторону верхней жидкости) в течении (а) будут равны струям (возмущениям в сторону нижней жидкости) в течении (Iа).

Поскольку теория пузырей описывает пузыри при любых μ, а значит, и в случае Буссинеска (29.3), и поскольку в этом случае пузыри и грибы примерно одинаковы, то теория пузырей должна описывать и грибы в случае Буссинеска. На рис. 29.14 показано сравнение пузыря $\mu = 1/10$ с грибами $\mu = 1/10$ (*а*), $\mu = 1/2$ (*б*) и $\mu = 1/1,1$ (*в*). Пузырь вычерчен штриховой, а грибы сплошными кривыми. Отсюда следует, что теоретические формулы (27.22), (27.23) для формы КГ, скорости подъема и спектра Фурье пузыря приближенно описывают также гриб ("толстые" грибы, см. ниже) в буссинесковском (29.3) и промежуточном (29.2) диапазонах. При этом только необходимо произвести замену ускорения

$$g \to \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) g \tag{29.7}$$

в теоретических выражениях. В частности, скорость опускания грибов равна

$$v_{\text{M}} = 0,59\sqrt{\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\frac{g}{k}}. \tag{29.8}$$

При этом радиус кривизны 2D "толстых" грибов дается формулой

$$R_{2\text{D}} = (2,5 - 2,7)/k, \tag{29.9}$$

следующей из формулы (27.22) для пузырей.

Происхождение замены (29.7) легко понять на модели (29.5), (29.6) с всплывающим легким телом. Очевидно, что при перемене индексов $\text{L} \to \text{H}$ и $\text{H} \to \text{L}$ вместо всплывающего легкого тела получаем тонущее тяжелое тело. Таким образом получается, что тонущий гриб приближенно эквивалентен всплывающему пузырю.

Важным является то, что происходит выход скорости гриба на насыщение[32]. Посмотрим, можно ли применить теорию пузыря для хотя бы качественного описания динамики гриба при больших значениях $1/\mu$ (29.1). Из рис. 29.14*а* следует, что формы пузыря и гриба в этом диапазоне различны. В частности, их радиусы кривизны не совпадают.

Модуль скорости гриба продолжает расти, см. рис. 29.15. Здесь горизонтальная прямая соответствует скорости насыщения (29.8). Следовательно, не происходит ни насыщения скорости струи, ни установления формы гриба, похожей на форму пузыря при $\mu = 0$, см. ниже конец раздела п. 30.5.

[32] В случае РТ начальных данных (возмущение v мало по сравнению с характерной гравитационной скоростью, при НРМ, наоборот, скорость v велика по сравнению с характерной гравитационной скоростью) $v_0 \ll \sqrt{g/k}$ струя проходит линейную стадию экспоненциального роста, стадию перехода и выходит на стадию насыщения скорости аналогично тому, как это показано на рис. 29.7 для пузыря. В случае начальных данных типа НРМ $v_0 \gg \sqrt{g/k}$ сначала происходит снижение модуля скорости струи (мы рассматриваем случаи с μ, находящимися в диапазонах (29.2) и (29.3), а не случай $\mu = 0$), а затем насыщение скорости. Это похоже на динамику РМ пузыря при $\mu = 0$, см. траектории *1* и *2* на рис. 26.5.

Идеология, из которой следует, что грибы в диапазонах (29.2) и (29.3) приближенно описываются теорией пузыря при $\mu = 0$, основывается на уравнении силового баланса, которое следует из уравнения (29.5). При этом аэродинамическая (со стороны обтекающей гриб легкой жидкости) и архимедова силы уравновешиваются и получаются формулы (29.7) и (29.8). Диапазон (29.1) не укладывается в эту идеологию и связанную с ней качественную картину. Принципиальным здесь является даже не

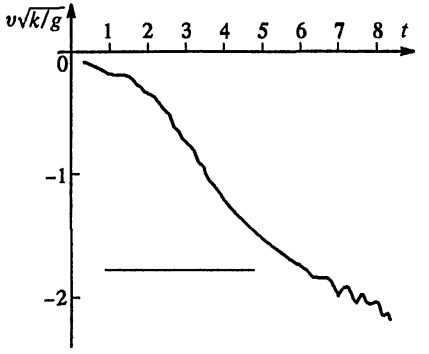


Рис. 29.15. Зависимость скорости вершины гриба от t. Положение вершины определяется по средней изохоре. Горизонтальной чертой показано предельное значение скорости (29.8)

отличие форм пузыря и гриба, см. рис. 29.14a, а то, что механизм динамического равновесия гриба оказывается качественно другим. Хотя, если говорить о форме, то различие бросается в глаза. А именно, грибы при небольших A являются "толстыми", а при небольших μ — "тонкими", см. рис. 29.3, 29.2 — примеры "толстых" и рис. 29.1, 29.4 — "тонких" грибов.

В этом диапазоне μ становится важной не плавучесть тяжелой жидкости в окрестности вершины гриба, а динамический напор струи, разогнанной на длинном участке свободного падения (см. рис. 29.11, кривая ff). Гравитационное изменение скорости Δv на размерах порядка области торможения и поворота струи тяжелой жидкости мало по сравнению со скоростью v_{ff} (29.4). Это обусловлено тем, что размеры этой области малы по сравнению с длиной струи. Соответственно сила плавучести мала по сравнению с двумя аэродинамическими силами: одной — со стороны набегающей тяжелой и другой — со стороны набегающей легкой жидкостей.

Поэтому теорию гриба при (29.1) необходимо основывать на балансе аэродинамических сил. К этой теории мы перейдем в следующем разделе.

Таким образом, существуют два крайних случая. В одном из них имеется застойная область в вершине гриба, а в другом, наоборот, именно динамический напор, обусловленный движением тяжелой жидкости в вершине, уравновешивает напор легкой жидкости, обтекающей гриб.

В промежуточном случае следует учитывать циркуляцию тяжелой жидкости в окрестности вершины вместе с плавучестью этой жидкости (учет всех трех сил). Анализ этого случая имеется в работе (Иногамов и Чехлов, 1992а).

§ 30. Грибовидные образования

С $\mu \neq 0$ связаны два эффекта: гидростатический $g \to (1-\mu)g$ или $g \to (1/\mu - 1)g$ и динамический — появление второго аэродинамического сопротивления $\sim \rho_L v_L^2/2$ из-за инерции легкой жидкости (первое такое сопротивление вызвано напором тяжелой жидкости $\rho_H v_H^2/2$ и существует при $\mu = 0$). При малой амплитуде возмущения КГ движение смежных жидкостей согласовано. Рост возмущений от симметричных относительно $y \to -y$ начальных данных на этой стадии является симметричным. Инерция легкой жидкости приводит к появлению знаменателя $D = 1 + \mu$ в формулах для инкремента РТН $\gamma = \sqrt{(N/D)gk}$ и для начальной линейной скорости НРМ $v_0 \sim N/D$, где $N = 1 - \mu$, а $N/D = \mathrm{A}$ — число Атвуда. Эта же инерция на развитой стадии по достижении определенных условий (они определены ниже) обуславливает образование грибов. Это наиболее впечатляющее явление, вызванное тем, что $\mu \neq 0$.

30.1. Грибы, скручивание и молекулярное перемешивание

С грибами связаны важные механизмы обмена массой (в смысле перемешивания) и импульсом между тяжелой и легкой жидкостями. Обмен импульсом или силовое зацепление жидкостей определяет положение и форму гриба. На этом вопросе мы остановимся в следующих разделах. Сейчас во вводных замечаниях, предназначенных для оценки существенности гриба, мы хотим отметить вопрос о перемешивании.

В периодическом случае скручивание шляпок представляет, пожалуй, наиболее важный механизм тонкого смешивания тяжелой и легкой жидкостей. В связи с этим грибы являются основным регулятором доли между тонко (в случае газов молекулярно) и блочно (или грубо) перемешанными фазами. Другие механизмы связаны с РТ и сдвиговой (при $\mu \neq 0$) неустойчивостью и турбулентностью вдоль КГ, см. работы (Dagan, 1975; Baker & Moore, 1989; Inogamov et al.,1991b; Иногамов и Чехлов, 1991c). В турбулентном случае вклад в тонкое смешение дают также предыдущие по отношению к текущему звенья инверсного каскада и распад струй (при $\mu \ll 1$). Минимальный размер фрагментов определяется вязкостью, поверхностным натяжением и (в случае газов и смешивающихся жидкостей) молекулярной диффузией.

При $\mu \ll 1$ оболочка пузырей — это в основном (особенно в периодическом случае) поставщик блочной фазы, т. е. крупномасштабных фрагментов. "Размалывание" этих блоков происходит ниже, там где они набирают большую скорость и становится существенным аэродинамический напор легкой жидкости. При $\mu = 0$ блоки проваливаются далеко (в периодическом случае бесконечно далеко). Их распад в периодическом случае обусловлен неустойчивостью струй, а в турбулентном — этой неустойчивостью плюс дисперсией струй из-за действия предыдущих звеньев каскада.

В промежуточном (29.2) и буссинесковском (29.3) диапазонах в турбулентном случае тонкое перемешивание происходит равномерно по всему

слою блочного перемешивания, а в периодическом случае, как сказано выше, в основном в районе скручивания.

Указанием на важность грибов для тонкого перемешивания служит сильная численная диффузия в районе скручивания. Она существенно превышает диффузию вдоль остальной гладкой КГ пузыря и струи. Это хорошо видно на рис. 30.1. Здесь показано все расчетное поле. Хорошо видна окрестность гриба. Этот рисунок соответствует последнему кадру t_9 на рис. 29.4. На рис. 29.4 выведены формы средней изохоры $\rho(x,y,t) = C$, $C = \rho_L + \alpha(\rho_H - \rho_L)$, $\alpha = 1/2$. На рис. 30.1 представлено семейство из девяти изохор по четыре изохоры выше и ниже средней. Значения α для этих изохор равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Видим, что вдоль КГ пузыря и струи изохоры идут плотно. Это соответствует большому градиенту ρ и малой диффузии.

Толщина размазки ρ из-за диффузии в области, где изохоры идут плотно, составляет три ячейки сетки. Это легко оценить по размазке в окрестности вершины пузыря. Черточки на сторонах прямоугольника соответствуют ячейкам квадратной сетки 15×105. Карта изохор изображается в прямоугольнике, который на $1/2$ шага сетки h меньше прямоугольника $15h \times 105h$. Это особенность численного метода искусственной сжимаемости, разработанного А. В. Чехловым, см. § 18. Поэтому здесь изображена сетка 14×104.

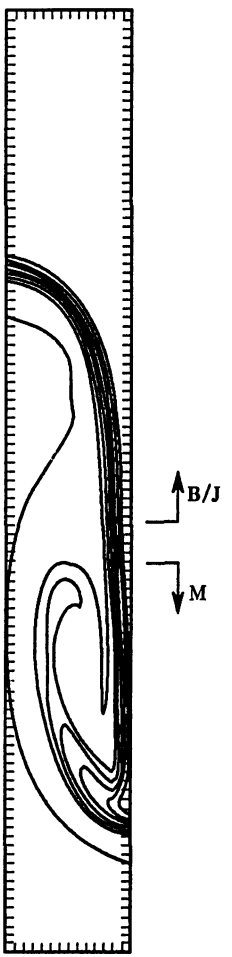


Рис. 30.1. Пузырь, струя и гриб. Семейство изохор. Показано полное расчетное поле. Стрелками B/J и M отмечено разделение течения на две области, см. рис. 29.4 и 29.11

Чтобы сделать диффузию более наглядной, построен рис. 30.2. Моделирование проведено А. В. Чехловым. В этих расчетах $\mu = 0,1$. На рис. 30.2 плотность отсчитывается от ρ_L ($\rho_L = 0,1$). "Полка" сверху соответствует плотности ρ_H ($\rho_H = 1$). Округлые провалы в "полке" представляют пузыри. Соответствующая форма средней изохоры показана на рис. 30.3. Она взята из работы (Иногамов и Чехлов, 1991c). Стенки между провалами являются струями. Они начинаются в виде заостряющихся мысков на "полке" $\rho_H = 1$. Эти мыски разделяют соседние

пузыри. Высота стенок немного снижается (до $\rho \approx 0,7$). Это вызвано численной диффузией. Струи заканчиваются грибами. Им соответствуют

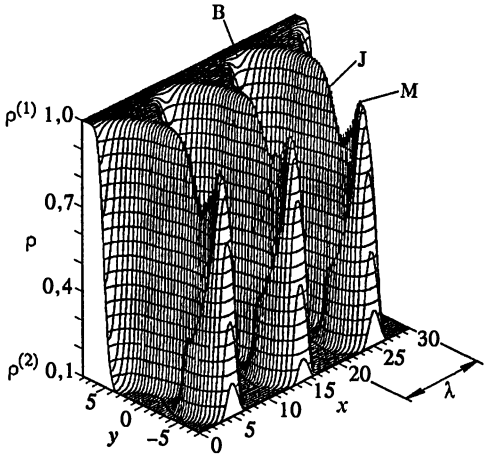


Рис. 30.2. Пузырь, струя и гриб. Распределение плотности. Пузыри — округлые провалы на горизонтальной поверхности $\rho_H = 1$, струи — стенки между пузырями. Грибам соответствуют заостренные конусообразные "горки", которыми заканчиваются стенки

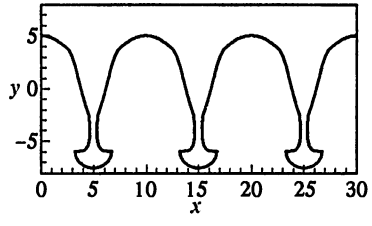


Рис. 30.3. Положение средней изохоры на плоскости (x, y) в случае, показанном на предыдущем рисунке

конусообразные горки в конце стенок. Из-за быстрого диффузионного размывания повернувших струй, образующих шляпку гриба, они плохо видны на рис. 30.2.

До поворота струи изохоры идут плотно, четко окаймляя КГ. В повернувшей струе семейство изохор становится весьма разреженным, см. рис. 30.1. Это и свидетельствует об интенсификации диффузии в районе скручивания.

Перенесем стрелку B/J и M, разделяющую течение на две характерные области, с рис. 29.11 на рис. 30.1. Ее расположение на рис. 29.11 было определено по особенностям распределений скорости (окончанием "полки" в распределении $v_B(y)$ и окончанием ff-режима в распределении $v_J(y)$). Видим, что положение этой стрелки хорошо согласуется с положением дальней части повернувшей струи на рис. 30 1 Отметим, что на рис. 29.4 этого не видно, потому что там вычерчена средняя изохора и гриб выглядит небольшим.

Необходимо подчеркнуть, что форма скручивания существенно зависит от шага сетки h/λ и от использованного метода

На рис. 30.4 представлен расчет методом искусственной сжимаемости, взятый из работы (Inogamov & Chekhlov, 1993b). В расчетном поле $\pi \times 4\pi$ находилась половина симметричной волны. На рисунке для ясно-

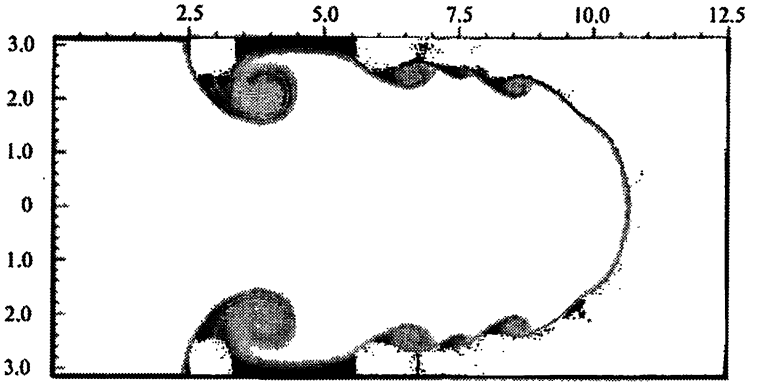
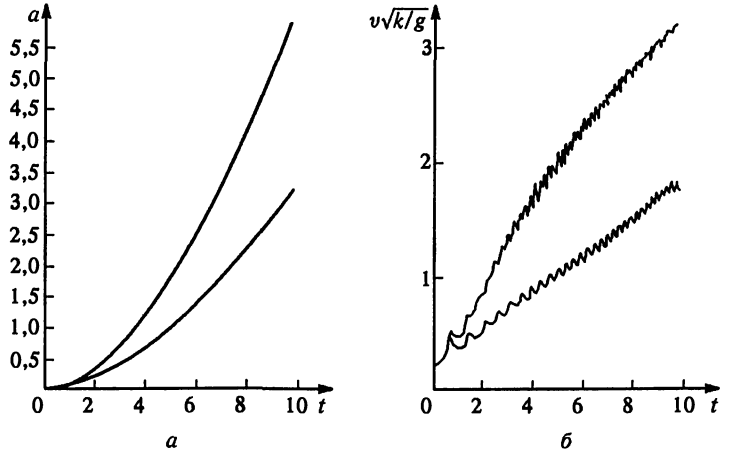


Рис. 30.4. Расчет РТН на очень плотной сетке — 200 ячеек на λ

сти показана полная волна с периодом $\lambda = 2\pi$. Поэтому размер рисунка равен $2\pi \times 4\pi$. Ячейки сетки квадратные, в расчетном поле $\pi \times 4\pi$ было 100×400 ячеек. Сетка очень плотная — 200(!) ячеек на λ. Эта плотность намного больше той, которая используется в расчете, приведенном на рис. 30.1 (30 ячеек на λ). Момент времени равен $t = 5,1/\sqrt{gk}$.



а *б*

Рис. 30.5. Расчет РТН методом крупных частиц на редкой сетке (20 ячеек на λ). Зависимость амплитуды пузыря $y_B(t)$ (нижняя кривая) и струи $|y_J(t)|$ (верхняя кривая) от t (*а*). Функции $v_B(t)$ (нижняя кривая) и $|v_J(t)|$ (верхняя) (*б*). Из-за выбранных условий свободного протекания сверху и снизу и заметного градиента ρ в верхней жидкости вся система пузырь–струя как целое ускоренно смещается вверх

Отношение плотностей $\mu = 1/20$ меньше, чем на рис. 29.4. Начальное возмущение КГ равно нулю. Начальная скорость возмущения равна $v_0 = 0,2\sqrt{g/k}$, что составляет 29% от предельной скорости (27.22). Чер-

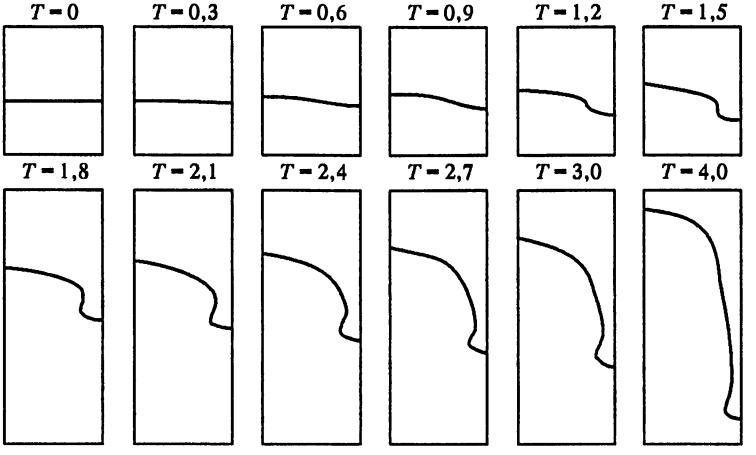


Рис. 30.6. Развитие РТН. Моменты времени t_n равны $\sqrt{gk}t_n = 0$, 0,752, и далее с шагом 0,752 до кадра 11. Кадр 12 выведен на момент времени 10,027. Рисунок сжат по вертикальной оси (расчетное поле 12 : 1)

ный цвет соответствует плотности ρ_H ($\alpha = 1$), а белый — ρ_L ($\alpha = 0$), где α: $\rho(x, y, t) = C$, $C = \rho_L + \alpha(\rho_H - \rho_L)$, $0 \le \alpha \le 1$. Степень серости пропорциональна α. По размерам серых областей вдоль КГ и в районе скручивания определяем, что диффузия интенсифицируется при скручивании. Кроме того, сравнивая рисунки 30.4 и 30.1, видим, что на рис. 30.4 дальний конец повернувшей струи больше скручен, чем на рис. 30.1. Пример расчета другим методом приведен на рис. 30.5, 30.6 и 30.7. Это известный метод крупных частиц, см. гл. IV, § 17. Расчет $\lambda/2$ в прямоугольнике 12 : 1, $\mu = 0,1$, сетка 10 × 120 из квадратных ячеек,

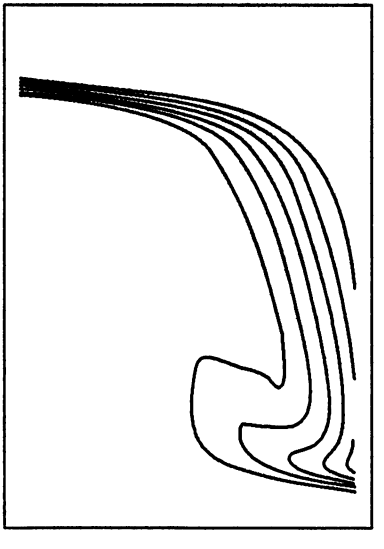


Рис. 30.7. Семейство изохор. Расчет методом крупных частиц (§17). Этот рисунок соответствует 12-му кадру из кинограммы рис. 30.6. Видим, что в грибах диффузия больше

20 ячеек на λ. Граничные условия: по бокам — симметрия, сверху и снизу — свободное протекание. Начальным является возмущение скорости. Из-за выбранных граничных условий на верхней и нижней границах вся картинка как целое смещается вверх. Причем скорость этого смещения растет при приближении пузыря к верхней границе. Кроме того, имеется градиент плотности в верхней жидкости из-за сжимаемости среды. Это тоже приводит к увеличению скорости пузыря. Поэтому скорости пузыря больше, а струи меньше тех, которые получились бы в расчете с жесткими граничными условиями. Из-за ускорения пузыря не видно насыщения на зависимости $v_{\text{В}}(t)$, см. рис. 30.5*б*.

Эволюция КГ (по средней изохоре) приведена на рис. 30.6. Смещение картины вверх как целого относительно мало влияет на форму КГ. Семейство изохор представлено на рис. 30.7. Рисунок сжат по вертикали (расчет в прямоугольнике 12 : 1). Этот пример приведен здесь с целью продемонстрировать относительную численную диффузию в грибах и на КГ при расчетах разными методами.

30.2. Топология пузырей и грибов в 3D геометрии

Дадим сравнительный анализ периодических решений в 2D и 3D случаях, см. также п. 26.4, (26.29), п. 27.4, (27.25).

Структура 2D пузырей и струй при РТН и НРМ показана на рис. 30.8. При $t = 0$ возмущение КГ $\eta \propto \cos kx$. На линейной стадии пузыри и струи симметричны. На рис. 30.8*б* заштрихованы сечения струй горизонтальной плоскостью $z = 0$ (ЛСК). Оси x и y находятся в горизонтальной плоскости. Пузыри имеют вид валов вдоль оси y. Пусть $\mu = 0$. С течением времени решение становится асимметричным, пузыри расширяются, а струи сужаются, см. рис. 30.8*в*. Поэтому сечения (они заштрихованы, см. рис. 30.8*г*) струй плоскостью $z = 0$ (ЛСК), имеющие вид полос на плоскости (x, y), становятся уже. На линейной стадии их площадь составляет половину общей площади. При $t \to \infty$ их ширина стремится к нулю.

Эволюция 3D пузырей и струй при РТН или НРМ показана на рис. 30.9. Пусть начальное возмущение равно сумме двух перпендикулярных волн

$$\eta(x, y, t = 0) = \frac{1}{2}(\cos kx + \cos ky) \tag{30.1}$$

и/или

$$\varphi(x, y, z, t = 0) \propto (\cos kx + \cos ky)e^{-|z|}. \tag{30.1'}$$

На верхних двух рисунках показана линейная стадия. Она симметрична относительно инверсии $z \to -z$. На рис. 30.9*а* светлыми кружками показаны вершины пузырей, а заштрихованными — струй. Вершины пузырей и струй находятся в узлах квадратных решеток. На рис. 30.9*б* заштрихована площадь сечения струй горизонтальной плоскостью $z = 0$. На заштрихованных участках $z = \eta(x, y, t) < 0$. Аналогично в 2D геометрии $z = \eta(x, y, t) < 0$ на заштрихованных участках на рисунках 30.8*б, г*.

С течением времени происходит расширение пузырей и заужение струй. Стационарная стадия развития 3D PTH рассматривалась ана-

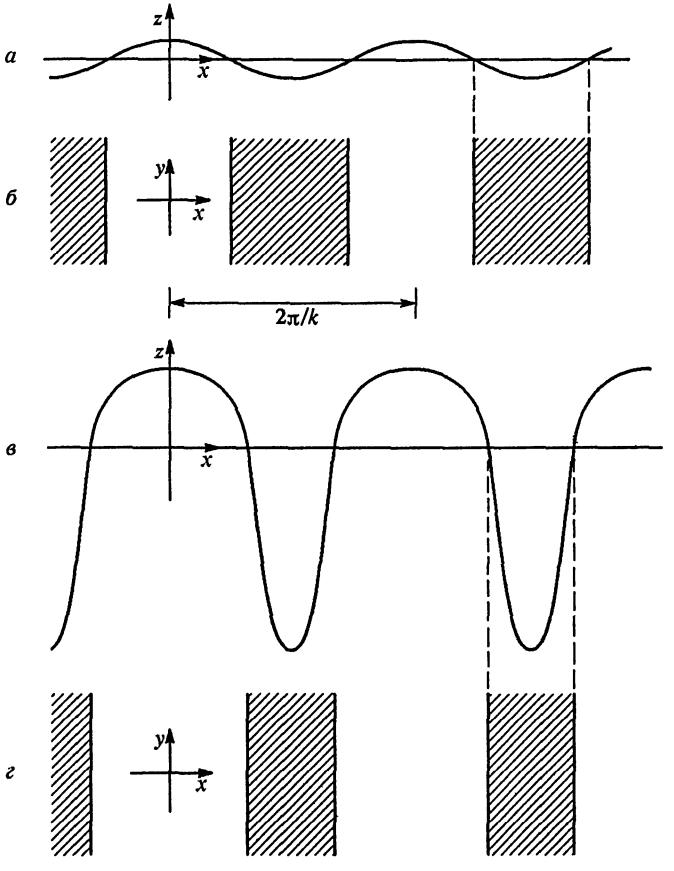


Рис. 30.8. Развитие 2D PTH или HPM. Линейная стадия. Она симметрична относительно инверсии $z \to -z$ (*а*, *б*). Асимметричная (нелинейная) стадия ($\mu = 0$). С течением времени происходит заужение струй (*в*, *г*). Соответственно заужаются заштрихованные полоски, на которых $\eta(x, y, t) < 0$

литически в работах (Inogamov & Abarzhi, 1995c; Абаржи и Иногамов, 1995), см. также заключительную часть п. 27.4.

Сравним 2D и 3D случаи, а затем вернемся к рассмотрению заужения. Пусть в 2D начальное возмущение равно $\eta(x, t = 0) = \varepsilon_\eta \cos kx$ и/или $\varphi(x, z, t = 0)\varepsilon_v \cos kx e^{-|z|}$, ср. с (30.1), (30.1′). Движение происходит в плоскости x, z.

Выбор 3D возмущения в виде (30.1), (30.1′) является естественным. Минимальной периодической ячейкой при таком выборе является квадрат с размерами $\lambda \times \lambda$, $\lambda = 2\pi/k$. На линейной стадии это очевидным образом следует из формул (30.1), (30.1′).

Период решения не может измениться в процессе эволюции. Поэтому на асимптотической стадии минимальной ячейкой остается тот же квадрат. Из формул это проще всего уяснить, заметив, что в двойной сумме (27.25) определяющими являются две нижние гармоники A_{10} и A_{01}, см. конец п. 27.4. Следовательно, потенциал (27.25) похож в этом отношении на потенциал (30.1′).

Сравнивать необходимо решения с одинаковыми периодами В 2D случае это валы с периодом $\lambda_{2D} = 2\pi/k$, а в 3D — квадрат с перио-

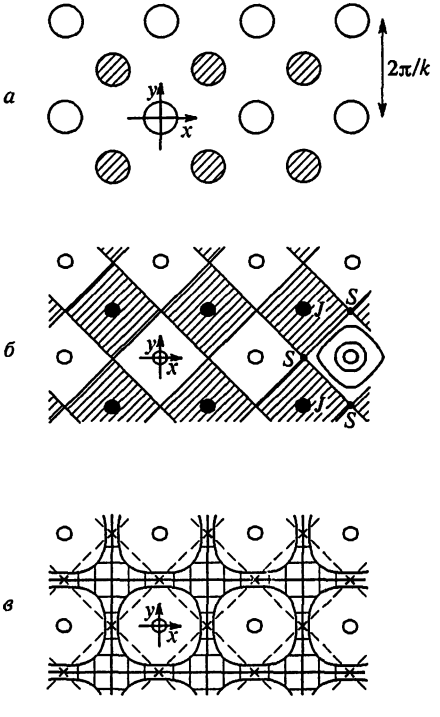


Рис. 30.9. Рельеф функции $z = \eta(x, y, t)$ на симметричной ($а$, $б$) и асимметричной стадиях ($в$). Начальным было возмущение (30.1). Светлые кружки — пузыри, в их вершинах находятся максимумы функции $\eta(x, y, t)$ на плоскости (x, y), заштрихованные кружки — струи (миниумы η) ($а$). Система линий уровня $\eta > 0$ вокруг вершины пузыря ($б$). Такой же является система уровней с $\eta < 0$ вокруг вершины струи. На заштрихованных квадратах $\eta < 0$, на белых $\eta > 0$. Сечение потока плоскостью $z = 0$ (ЛСК) ($в$). Сечение заштриховано. Это система струй в виде стенок. Стенки пересекаются под прямыми углами

дом (это сторона квадрата) равным $\lambda_{3D} = 2\pi/k$. На горизонтальной плоскости x, y этот квадрат с помощью сдвигов может быть выбран так, что он образует как бы вертикальную квадратную трубу, в центре которой асимптотически формируется единственный пузырь, изолированный струями от других пузырей, а по стенкам бегут плоские (говорится плоский, потому что стенки трубы — плоскости) жидкие струи.

Амплитуды возмущений по x и y направлениям в (30.1), (30.1′) могут отличаться друг от друга. Устройство асимптотической стадии не зависит от этого.

Отметим, что в случае 2D и 3D решений с равными периодами инкременты РТН *одинаковы*. Это следует из независимости возмущений по x и y направлениям в (30.1), (30.1′) (линейная декомпозиция).

Сравнение нелинейных стадий было приведено в конце п. 27.4.

Вернемся к рассмотрению заужения струй. В результате процесса заужения квадратные заштрихованные участки (рис. 30.9*б*) деформируются и образуют структуру со струями в виде вертикальных стенок, отделяющих пузыри друг от друга. Сечение этих струй горизонтальной плоскостью $z = 0$ (ЛСК) показано на рис. 30.9*в* квадратной штриховкой. В области этой штриховки $z = \eta(x, y, t) < 0$. Область $z = \eta(x, y, t) < 0$ на симметричной стадии перенесена на рис. 30.9*в* с рис. 30.9*б* тонкими штриховыми прямыми. Это сделано для того, чтобы было видно, в каких направлениях происходит деформация сечения струй.

Прямолинейные стенки струй пересекаются под прямыми углами на плоскости (x, y). Координаты центров этих пересечений совпадают с x,y-координатами вершин струй на симметричной стадии.

На симметричной стадии и пузыри, и струи были округлыми и изолированными. На асимметричной стадии пузыри остаются такими же, а пространственная структура струй меняется качественным образом. Обозначим буквами S перевальные или седловые точки на рельефе $z = \eta(x, y, t)$, см. рис. 30.9*б*. На симметричной стадии из них под прямыми углами исходят сепаратрисы S–S, которые образуют стороны заштрихованных квадратов на рис. 30.9*б*. На симметричной стадии на них $\eta(x, y, t) = 0$, то есть они являются линиями нулевого уровня. Система положительных линий уровня показана вокруг одного из пузырей на рис. 30.9*б*. Вблизи вершины пузыря — это кружки. По мере приближения к сепаратрисам форма линий уровня изменяется и постепенно переходит в квадратную.

С ростом асимметрии перевальные точки S опускаются под нулевой уровень — их z-координаты η_S становятся отрицательными $\eta_S < 0$. Сепаратрисы всегда находятся на одном уровне с перевальной точкой. Одновременно появление и затем рост асимметрии ведут к уменьшению угла пересечения сепаратрис — из прямого (на всей симметричной стадии) он становится острым.

Форма сепаратрис на асимметричной стадии показана на рис. 30.10. Точкой J помечена вершина струи. Она находится ниже уровня сепаратрис. Пусть η_J — z-координата этой вершины. На симметричной стадии

$$\eta_J < 0, \quad \eta_S = 0.$$

На асимметричной стадии

$$\eta_J < \eta_S < 0.$$

Уровень $\eta = 0$ показан на рис. 30.10 штриховой кривой. Этот уровень окаймляет квадратную штриховку на рис. 30.9*в*.

Течение от начальных данных в виде двух перпендикулярных друг другу волн с одинаковой длиной волны (30.1) эквивалентно течению в трубе.

Посмотрим, что представляет собой сечение этой трубы на плоскости (x, y). Стенки трубы являются плоскостями, параллельными оси z. Любая плоскость симметрии течения может быть выбрана в качестве

стенки. Рассмотрим прямые, по которым плоскости симметрии пересекаются с плоскостью $z = 0$. Их четыре вида. Одни параллельны оси x и проходят либо через вершины пузырей, либо через вершины струй. Минимальное расстояние между ними равно $\lambda/2$. Вторые параллельны оси y и также проходят по вершинам. Третьи и четвертые проходят по диагоналям прямых углов, образованных осями x и y. На них находятся чередующиеся через одну вершины пузырей (B) и струй (J) ...–B–J–B–J–....

Таким образом, наименьшая труба имеет сечение в виде прямоугольного равнобедренного треугольника JBS, см. рис. 30.10. Далее из этих

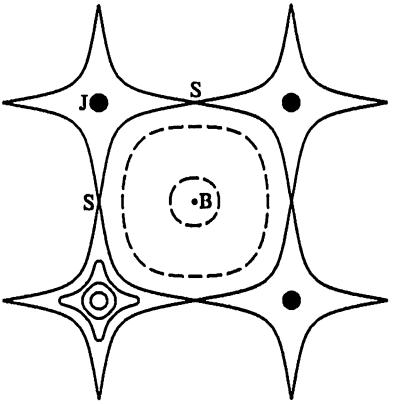


Рис. 30.10. Пузыри B, струи J и седла S на асимметричной (то есть нелинейной) стадии. Сепаратрисы S–S образуют заостренные крестовидные звезды. Штриховыми кривыми показаны линии уровня $\eta \geq 0$. Вблизи точки B они являются кружками. Сплошными кривыми показаны линии уровня $\eta \leq \eta_S$, где η_S — z-координата седла. Вблизи вершины J это кружки, при удалении от точки J они принимают сначала вид квадратов со скругленными углами, а затем вид крестовидных кривых

треугольников можно скомбинировать бесконечное число труб разного сечения. Если выбрать квадратную трубу $\lambda \times \lambda$, в углах которой находятся пузыри BBBB, то в центре ее будет крестовидная струя. Если же в углах квадрата $\lambda \times \lambda$ находятся струи JJJJ, то в центре будет двигаться один пузырь, изолированный от стенок жидкими слоями, бегущими по ним.

Аналогично 2D трубы представляют собой полосы на плоскости (x, z), составленные из линий симметрии, проходящих по середине пузырей и струй. В наименьшей трубе содержатся половина пузыря и половина струи. В 3D случае в наименьшей трубе — по (1/8)-й пузыря B и струи J и (1/4)-я седла S.

Развитие РТН или НРМ показано на рис. 30.11 ($\mu = 0$). Графики вычерчены в ССК вершины пузыря B. Полосы между параллельными штриховыми прямыми представляют стенки наименьшей треугольной трубы JBS. Цифры соответствуют моментам времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, $t_4 = \infty$. К симметричной стадии относится момент t_1. Асимптотический пузырь 4 ($t = t_4$) в случае РТН описывается формулами (27.22′), (27.24). Ширины полос J–B, B–S и S–J равны $\lambda/\sqrt{2}$, $\lambda/2$ и $\lambda/2$ соответственно, см. рис. 30.10.

На рисунках 30.11*а, б* показаны положения КГ в моменты *1* и *2* на плоских вертикальных полосах шириной λ, проходящих через соседние

вершины пузырей и седло B–S–B ($а$) и через соседние вершины струй и седло J–S–J ($б$). Вблизи седла КГ равна

$$\Delta\eta = -\frac{(\Delta x)^2}{2R_x} - \frac{(\Delta y)^2}{2R_y},$$

где $R_x > 0$ и $R_y < 0$ — радиусы кривизны, отклонения $\Delta\eta$, Δx и Δy отсчитываются от текущей позиции точки S. На асимптотической стадии $R_x > |R_y|$. На симметричной стадии эти радиусы равны $R_x = |R_y| \propto 1/|\delta\eta|$, где $|\delta\eta|$ — амплитуда возмущения КГ.

Вблизи вершин пузыря и струи разложения КГ равны

$$\Delta\eta = -\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{2R_{\mathrm{B}}}, \quad R_{\mathrm{B}} > 0$$

и

$$\Delta\eta = -\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{2R_{\mathrm{J}}}, \quad R_{\mathrm{J}} < 0$$

соответственно.

Кривые на рис. 30.11 получаются при пересечении поверхности $z = \eta(x, y, t)$ плоскостями симметрии. При $z > \eta(x, y, t)$ находится тя-

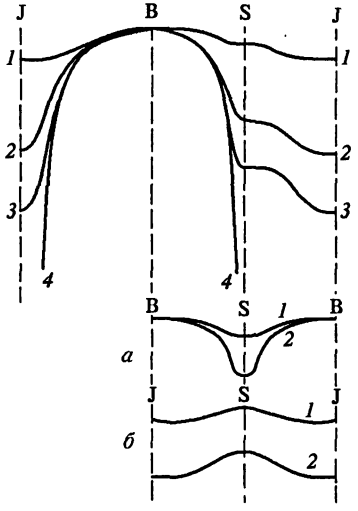


Рис. 30.11. Эволюция при $\mu = 0$ КГ, ограничивающей снизу смоченную область на стенках треугольной трубы JBS, см. предыдущий рисунок. Полосы J–B, B–S и S–J соответствуют сторонам этой трубы. Струя в виде стенки опускается по полосе S–J. Устройство седла вдоль прямой, соединяющей вершины двух пузырей ($а$), и вдоль прямой, соединяющей струи ($б$)

желая жидкость. Поэтому выше этих кривых на стенках J–B, B–S и S–J на этом рисунке располагается область, смоченная тяжелой жидкостью.

Выше рассмотрена эволюция в случае $\mu = +0$. При $\mu \neq 0$ и в 2D, и в 3D геометриях образуются грибы. Эволюция КГ в этом случае представлена на рис. 30.12 (диапазон (29.1)).

В 2D геометрии грибы имеют вид желобов с образующей, параллельной оси y (определение осей дано на рис. 30.8). В 3D случае появляются два важных отличия. Во-первых, желобы оказываются волнообразно искривленными по высоте. Центральная образующая показана

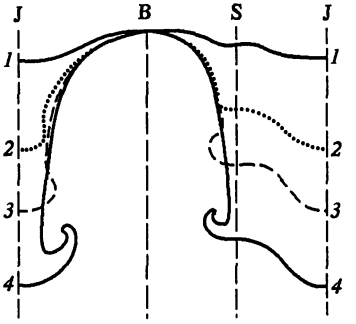


Рис. 30.12. Образование грибов в 3D геометрии. Движение КГ по стенкам трубы. Цифры *1*, *2*, *3* и *4* относятся к последовательным моментам времени

на рис. 30.12 на стенке S–J. Это половина периода такой волнообразной образующей. Центральная или симметричная образующая проходит через вершины J и седла S.

Седла S сохраняются при $\mu \neq 0$. Они находятся в тех же позициях на плоскости (x, y).

Во-вторых, появляются пересечения желобообразных грибов в точках J. В 2D геометрии вихревые нити параллельны оси y. В 3D они искривляются так же, как и желобы, на участках между точками J и поворачивают примерно на 90° возле этих точек.

Толстые и тонкие 3D грибы. Выше рассмотрены 3D пузыри и струи при $\mu = 0$ и 3D грибы (качественно) при μ из диапазона тонких грибов (29.1). Количественному аналитическому анализу 2D тонких грибов посвящен п. 30.5. В случае диапазонов (29.3) и (29.2) грибы получаются толстыми. В 2D случае они проанализированы в п. 29.4, см. формулы (29.7), (29.8) и (29.9).

Спрашивается, как устроена 3D периодическая структура пузырей и толстых грибов?

В буссинесковском пределе 3D пузыри и грибы должны быть похожими. Видимо, это будут изолированные образования с округлой вершиной. На стадии насыщения скорости и пузырей, и толстых грибов становятся постоянными. Геометрически пузыри похожи на пузыри при $\mu = 0$. Точки их вершин образуют решетку точек на плоскости. Радиусы кривизны велики. Грибы устроены таким же образом.

В 2D случае полное описание пузырей (форма, спектр) дается формулами (27.22), (27.23), в которых необходимо заменить только $g \to g(1-\mu)$. Аналогично в 3D случае пузыри (форма, спектр) описываются формулами (27.22′), (27.24) после замены $g \to g(1-\mu)$, см. конец п. 29.3. Буссинесковские (толстые) 3D грибы на стадии насыщения также даются формулами (27.22′), (27.24), но после замены $g \to g(1/\mu - 1)$, сравни с разделом п. 29.4, формулы (29.7), (29.8) и (29.9).

Сложно устроены края шляпок 3D толстых грибов и струй.

В 2D случае струи J_B, наполняющие грибы тяжелой жидкостью (B — bubble), и струи J_M, наполняющие пузыри легкой жидкостью (M — mushroom), сдвинуты по горизонтальной оси x на половину периода $\lambda/2$, см. рис. 29.3. Струи J_B входят в структуру J/B (см., например, рис. 29.4). В ней пузырь и струя дополняют друг друга. Струя J_B тяжелой жидкости обтекает пузырь B, см. ниже рис. 30.18. Аналогично струя (но уже легкой жидкости) обтекает толстый гриб M. Это струя J_M, см. рис. 29.3. Здесь можно говорить о структуре пар гриб/струя J_M/M.

Края шляпок скручиваются в вихревую (см. ниже п. 30.3) спираль. Она находится между узкими струями J_B и J_M, см. рис. 29.3. В спиралях тяжелая и легкая жидкости образуют тонкие перемежающиеся слои. Это ведет к интенсификации перемешивания, см. п. 30.1.

В 3D случае тоже имеются узкие струи J_B и J_M. Они образуют стенки, см. рисунки 30.9*в* и 30.10. Решетки (рассматривается случай квадратной решетки) стенок J_B и J_M сдвинуты в горизонтальной плоскости x, y относительно друг друга на половину периода $\lambda/2$ по оси x и на половину периода $\lambda/2$ по оси y. Между этими сдвинутыми решетками располагаются топологически сложно устроенные 3D вихревые спирали, образующие края шляпок грибов и пузырей.

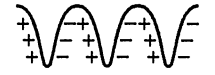
30.3. Вихревая структура струй и грибов

Одним из способов описания динамики несжимаемой жидкости является вихревой. Вихревые нити по закону Био–Савара создают распределение скорости, которое перемещает жидкость, а вместе с ней и сами вихри. Завихренность $\vec{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ ($\omega_i = e_{ikl}\partial_k v_l$, $\partial_k \equiv \partial/\partial x_k$) связана с локальной циркуляцией $(-\oint\limits_\Gamma (\mathbf{v}\,d\mathbf{l})) = \int\limits_S \int (\operatorname{rot}\mathbf{v}\,d\mathbf{S})$, см., например, книгу (Saffman, 1992). Такой подход очень удобен и широко применяется в 2D однородной по ρ жидкости. В этом случае ω сохраняется в лагранжевых частицах. В 2D неоднородной по ρ жидкости возникает осложнение, связанное с необходимостью учета изменения ω в лагранжевых частицах из-за бароклинического усиления или ослабления завихренности. Поэтому здесь этот способ распространен менее широко. Выполнен ряд работ по численному моделированию развития неустойчивости для случая стратификации в виде скачка плотности. Это работы (Биркгоф, 1964) (теория вихревого метода при наличии бароклинической генерации), (Baker, Meiron & Orszag, 1980, 1982) (моделирование РТН), (Verdon et al., 1982, приложение B, с. 1671) (моделирование РТН), (Kerr, 1988) (размазка вихрей) и (Неуважаев и Паршуков, 1991, 1993) (моделирование НРМ и РТН). В 3D геометрии трудности обусловлены сближением и запутыванием вихревых нитей.

В случаях РТН и НРМ со скачком ρ на КГ (и при отсутствии вихрей внутри однородных по ρ областей жидкости) вихри локализованы на КГ. Самым простым является случай несжимаемой НРМ в однородной по ρ во всем пространстве жидкости $\mu = 1$, $A = 0$. Здесь КГ является поверхность, на которую при $t = 0$ нанесена завихренность, см. §§ 4, 5.

При НРМ эволюция КГ определяется той завихренностью, которая была нанесена на КГ в начальный момент. Хотя, разумеется, при $\mu \neq 1$, $A \neq 0$ необходимо учитывать последующие бароклинические изменения ω. При РТН происходит постоянное бароклинические усиление ω.

Знаки ω чередуются на левых и правых сторонах 2D РТН и НРМ струй, см. рис. 30.13*а* для $\mu = 0$, $A = 1$. На обеих сторонах $|\omega|$ монотонно возрастает вдоль струи. На рис. 30.13 этому соответствует



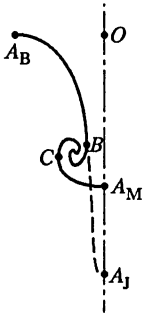


Рис. 30.13. Знакопеременность циркуляции при РТН и НРМ (*а*). "Съедание" части ff струи $\mu = 0$ (струя $A_B - B - A_J$, штриховая кривая) вследствие аэродинамического торможения при $\mu \neq 0$ (*б*). При $\mu \neq 0$ струя с грибом равна $A_B - B - C - A_M$. Она изображена сплошной кривой

увеличение размера знака. Знак на этом рисунке равен знаку циркуляции $\oint_\Gamma (\mathbf{v}\, d\mathbf{l})$ (знак ω противоположен). Положительной является циркуляция по часовой стрелке.

При $\mu \neq 1$, $A \neq 0$ образуются грибы. Из-за аэродинамического торможения, вызванного аэродинамическим сопротивлением легкой жидкости, нижняя часть струи $\mu = 0$ тормозится или можно сказать "съедается". Эта часть образует повернувшую струю и попадает в начальный и скрученный участки шляпки гриба. Это показано на схеме на рис. 30.13*б*. Здесь штрихпунктирная прямая — линия симметрии, проходящая посередине струи, струя $A_B - B - A_J$ соответствует случаю $\mu = 0$, а струя с грибом $A_B - B - C - A_M$ — случаю $\mu \neq 0$ с μ из диапазона (29.1).

Даже при небольших μ на стадии с развитым грибом тормозится значительная часть струи $\mu = 0$. Например, в расчете с $\mu = 0, 1$, показанном на рис. 29.4, скорость свободного падения $v_{\text{ff}}(A_M)$ в точке нахождения вершины гриба A_M (см. рис. 29.11) больше скорости этой вершины $|\dot{y}_M|$ (см. рис. 29.15), определенной по средней изохоре. Отношение скоростей $v_{\text{ff}}(A_M) : |\dot{y}_M|$, взятое из этих графиков, на момент t_9, соответствующий последнему кадру на рис. 29.4, равно 17 : 10. Отношение длин отрезков OA_J и OA_M, см. рис. 30.13*б*, по порядку величины такое же. Часть струи, отмеченная буквами $A_B - B$, см. рис. 30.13*б*, примерно одинакова в $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ случаях. Происходит снос гриба вдоль струи.

Величина $|\omega|$ при РТН и НРМ растет вдоль струи $\mu = 0$, см. рис. 30.13*а*. Таким образом, в район скручивания вихря в спираль попадает та часть КГ, которая несет наибольшую завихренность.

На рисунках 30.14*а, б* проиллюстрировано сказанное. Они относятся к кадру t_9 на рис. 29.4, см. также рис. 30.1. Видим, как из вершины

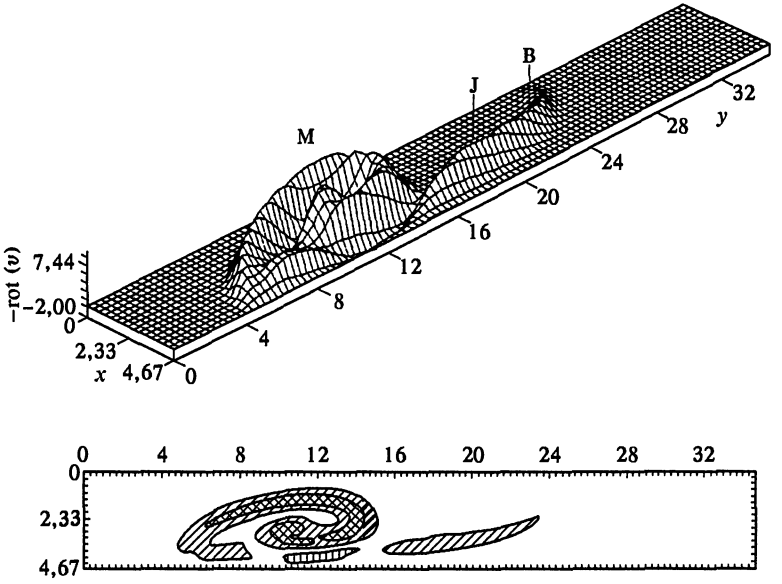


Рис. 30.14. Распределение завихренности в случае струи с грибом (*а*). Величина $(-\omega)$ равна "высоте" поверхности $\omega(x, y, t)$ над плоскостью (x, y). Распределение завихренности в случае струи с грибом (*а*). Изоконтуры ω на плоскости (x, y)

пузыря появляется растущая по высоте "стенка" завихренности, совпадающая с КГ и повторяющая ее плавный поворот в области B/J, см. рис. 29.4. Обширный "холм" соответствует району скручивания гриба. На рис. 30.14*а* нанесены ячейки расчетной сетки. На рис. 30.14*б* эти ячейки показаны черточками на границах прямоугольного расчетного поля. Если принять величину $(-\omega)$ в областях с горизонтальной штриховкой на рис. 30.14*б* за 100%, то внутри охваченной контуром изолинии завихренности в незаштрихованной области $(-\omega) \sim 40\%$. Отметим, что в узкой полоске, выделенной двойной диагональной штриховкой, завихренность имеет знак, обратный (!) тому, который она имеет во всей полосе полупериода $\lambda/2$, показанной на рисунке. Эта полоска соответствует КГ струи, проходящей область гриба. Здесь $(-\omega) \sim -15\%$.

Чтобы получить $(-\omega)$ в единицах $|\mathrm{g}| = k = 1$, значения $\mathrm{rot}\, v$, приведенные на рис. 30.14*а*, следует помножить на 0,89. Размеры прямоугольника равны 5×35. Вне КГ и области гриба течение потенциально. Потенциальным областям соответствуют плоские участки на рис. 30.14*а*.

Величина завихренности в этих областях составляет $\sim 10^{-3} - -10^{-4}$ от максимальной. Размазка области локализации $(-\omega)$ в узкие полосы вдоль КГ обусловлена численной вязкостью.

Завихренность ω периодически меняет знак, см. рис. 30.13*а*. Знак ω разный на разных сторонах струи и гриба. Поэтому поле ω, связанное с грибом, соответствует вихревому диполю.

Уединенный диполь изображен на рис. 30.15*а*. В ССК диполя имеются набегающий и отходящий потоки, обтекающие диполь, и две точки торможения A (седла). В ЛСК диполь движется с постоянной скоростью.

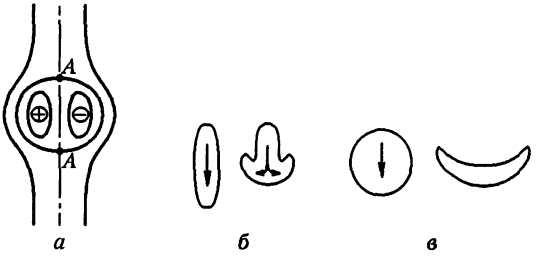


Рис. 30.15. Движение диполя (*а*). Аэродинамическое торможение и образование гриба в случае длинной (*б*) и короткой (*в*) струй

Сепаратрисами седел A течение делится на две области. Они относятся к обтекающей и захваченной жидкостям. Система линий тока изображена на рис. 30.15*а*. Обтекание диполя эквивалентно обтеканию твердого тела, задаваемого формой сепаратрис.

Образование диполей не является спецификой РТН или НРМ. Они "венчают" любую стационарную или нестационарную струю. При $\mu \neq 0$ на любой струе формируется гриб. В осесимметричном случае диполь

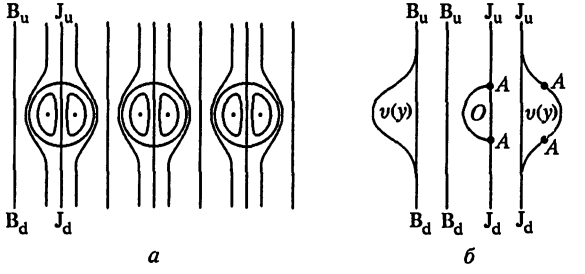


Рис. 30.16. Цепочка вихревых диполей. Система линий тока в ССК диполя (*а*). Ход скорости в ЛСК (на бесконечности жидкость покоится) вдоль линий симметрии $B_U - B_D$ и $J_U - J_D$ (*б*). Скорость имеет разный знак на этих линиях. Буквами *A* выделены точки торможения. Показана полоса шириной $\lambda/2$

и гриб имеют тороидальную форму. Преобразование длинной (*б*) и короткой (*в*) струй, движущихся в "вакууме" ($\mu = 0$), в гриб при $\mu \neq 0$ показано на рис. 30.15*б*, *в*.

Периодическая цепочка диполей изображена на рис. 30.16*а*. Соответствующее ей распределение скорости в ЛСК показано на рис. 30.16*б*. При удалении от цепочки скорость затухает $\propto \exp(-k|y|)$, $k = 2\pi/\lambda$, где λ — период цепочки. Равновесие цепочки неустойчиво.

Дипольная цепочка моделирует РТ и РМ течения в лобовой области грибов, то есть в окрестности горизонтали, проходящей через точки С на рис. 30.13*б*, и ниже этой горизонтали.

Вихревые модели полезны как в качественном, так и в количественном отношениях. Ниже в п. 30.5 представлена альтернативная ей модель, опирающаяся на теорию столкновения струй, метод годографа и конформные преобразования. Она позволяет количественно описать грибы, в частности, форму КГ и поле скоростей. Эта модель описывает развитые грибы. Прежде, чем перейти к ней, необходимо обсудить вопрос о зарождении гриба.

30.4. Начальная стадия формирования гриба

Рассмотрим развитие малого гармонического возмущения. На линейной стадии неустойчивость развивается экспоненциально с инкрементом $\gamma = \sqrt{Agk}$, см. главу III. На нелинейной стадии появляется асимметрия между пузырями и струями. Когда амплитуда пузыря y_b (см. рис. 30.17*б*) достигает значения $(0,07 - 0,1)\lambda$, устанавливаются стационарные условия подъема пузыря. Пузырь прекращает расширяться, и его форма, в частности радиус кривизны, далее не изменяется.

Амплитуда струи y_j достигает при этом $(0,2 - 0,3)\lambda$, а ее ускорение $\ddot{y}_\mathrm{j}$ приближается к g (считаем, что $\mu \ll 1$; индексы b, j означают bubble, jet). Ширина струи составляет в этот момент около четверти λ. Ускорение струи $\ddot{y}_\mathrm{j}$, как функция от суммарной амплитуды

$$y_\Sigma = y_\mathrm{b} + |\, y_\mathrm{j} \,|,$$

представлено на рис. 30.17*а*[33].

Амплитуды y_b, y_j и y_Σ определены на рис. 30.17*б*. Система координат (ЛСК) x, y связана с начальным положением КГ. Форма *установившейся* КГ в случае, когда $\mu = 0$, показана штриховой кривой G_s (s — steady-state) на этом рисунке. Эта кривая продолжает установившийся участок КГ. Мгновенное положение КГ показано сплошной кривой.

В системе, связанной с вершиной струи $\mathrm{A_j}$, точка $\mathrm{A_j}$ является точкой торможения. Ширину струи $2\Delta_\mathrm{j}$ около нее будем определять, как ширину установившейся струи G_s на глубине y_j, равной координате вершины.

Рассмотрим влияние плотности легкой среды ρ_l (l — light) на движение тяжелой жидкости. Пока скорости невелики, плотность ρ_l уменьшает

[33] Зависимость от y_Σ является универсальной. Это означает, что при фиксированном μ зарождение гриба (см. ниже) происходит при определенном значении y_Σ (в качестве универсальной переменной можно выбрать также y_b или y_j), которое не зависит(!) от начальной амплитуды возмущения a_0. Этим зависимости от y_Σ и отличаются. Значение t в момент зарождения зависит от a_0. Это связано с задержкой $\simeq \gamma^{-1} \ln(\lambda/|a_0|)$), в течении которой происходит развитие возмущения на начальной стадии.

ускорение от g до $(1-\mu)g$. Скорость струи $|u_j| = |\dot{y}_j|$ увеличивается со временем, а ее радиус кривизны R_j уменьшается ($1/R_j$ — кривизна в вершине A_j). Это ведет к тому, что отношение аэродинамической силы, вызванной динамическим напором $\rho_l v_l^2/2$ легкой жидкости, к силе тяжести увеличивается. С течением времени это отношение приближается к единице.[34] Обозначим через

$$y_{cr} = |y_j(t_{cr})|$$

путь, пройденный струей, (амплитуду струи)х в момент t_{cr}, когда это отношение равно единице (cr — critical).

Момент времени t_{cr} очень важен. Около критической амплитуды струи $|y_j| \approx y_{cr}$, во-первых, ускорение $|\ddot{y}_j|$ начинает уменьшаться. Начало этого уменьшения отмечено стрелкой на рис. 30.17*а*. Во-вторых,

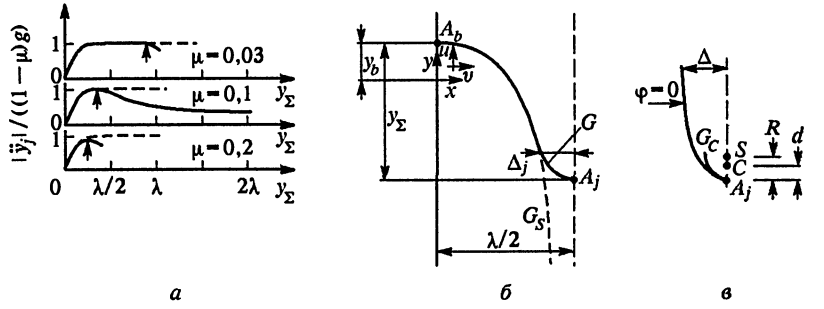


Рис. 30.17. Характерные стадии эволюции (экспоненциальный рост ускорения $\ddot{y}_j$; насыщение роста $\ddot{y}_j$; зарождение гриба) и соответствующие величины y_Σ. Амплитуда y_Σ, помеченная стрелкой, соответствует зарождению гриба (*а*). Нестационарная G и стационарная G_s границы. Они отличаются в окрестности вершины A_j (*б*). Описание концевой части струи (*в*). Граница дается линией $\psi = 0$, в точке S находится источник, C — центр окружности G_c, касающейся КГ в точке $z = 0$. Точка $z = 0$ находится в вершине A_j

функция $R_j(t)$ или $R_j(y_\Sigma)$ достигает минимума в этот момент. Все эти изменения связаны с зарождением гриба при $t \approx t_{cr}$.

Рис. 30.17*а* поясняет зависимость $\ddot{y}_j(y_\Sigma)$. Штриховые кривые относятся к случаю $\mu = 0$. Они насыщаются при $\ddot{y}_j/(1-\mu)g$, равном единице, и в дальнейшем не изменяются. На линейной стадии ускорение растет по закону

$$\ddot{y}_b = -\ddot{y}_j = [A_v \gamma \operatorname{sh}(\gamma t) + A_\eta \gamma^2 \operatorname{ch}(\gamma t)] \cos(kx), \qquad (30.2)$$

где A_v и A_η — начальные амплитуды возмущений скорости и границы соответственно.

Вычислим y_{cr}. При $\mu \ll 1$ имеем $y_\Sigma(t_{cr}) \gg R_j(t_{cr})$. Изменения скорости $\dot{y}_j$ порядка единицы при $t \simeq t_{cr}$ происходят при продвижении струи на расстояния порядка y_{cr} за времена $\simeq |y_{cr}/\dot{y}_{cr}|$. Эти пространственные и временные масштабы намного больше, чем масштабы Δ_j и $\Delta_j/|\dot{y}_{cr}|$,

[34] При $\mu \ll 1$ это отношение проходит при $t = t_{cr}$ единицу и *продолжает* расти.

связанные с окрестностью вершины струи. Поэтому квазистационарное приближение применимо при описании течения в этой области. Кроме того, при оценках будем пренебрегать относительным движением тяжелой жидкости.[35] Это возможно до момента зарождения гриба. На этой стадии инерция тяжелой жидкости не очень существенна. В соответствии с этим примем, что в окрестности вершины A_j тяжелая жидкость покоится в системе координат, связанной с этой вершиной.

Опишем течение легкой жидкости. Рассмотрим систему координат $z = x + iy$, связанную с вершиной A_j. Потенциал течения равен

$$f = -iUz + \frac{\dot{M}}{2\pi\rho_1} \ln\left(1 + \frac{iz}{d}\right). \tag{30.3}$$

Это потенциал уединенного источника $\dot{M}$, расположенного в точке S с координатой $z = id$, см. рис. 30.17*в*. Он помещен в однородный поток, движущийся вертикально вверх со скоростью U. Скорость U определяется скоростью опускания струи в ЛСК. Она равна

$$U = -\dot{y}_j. \tag{30.4}$$

Такой подход возможен, так как $R_j \ll \lambda$. Поэтому в окрестности вершины можно пренебречь периодической структурой (т. е. пренебречь влиянием соседних струй).

Требуем, чтобы вершина $z = 0$ была точкой торможения. В этом случае линейный член разложения f в ряд по z должен выпадать. Из этого условия получаем

$$\dot{M} = 2\pi\rho_1 U d. \tag{30.5}$$

Разложим (30.3) в ряд по z до третьей степени включительно. Положим, что нулевая линия уровня функции ψ является КГ. Выпишем соответствующее разложение нулевой линии тока $\psi = 0$, проходящей через вершину A_j. Это разложение равно

$$y = \frac{x^2}{3d} + O(x^4).$$

Следовательно, радиус кривизны в точке $z = 0$ равен

$$R = \frac{3d}{2}. \tag{30.6}$$

Отрезок окружности G_c (c — circle) с центром в точке C и радиусом (30.6), касающийся линии $\psi = 0$ в вершине A_j, показан на рис. 30.17*в*.

Приравнивая расход массы источника потоку массы, движущемуся со скоростью U в вертикальной полосе шириной 2Δ, находим

$$\Delta = \pi d. \tag{30.7}$$

[35] Это движение станет определяющим на стадии развитого гриба, см. ниже п. 30.5.

Таким образом, согласно формулам (30.3)–(30.7) потенциал (30.3) определяется скоростью U и любым одним из трех геометрических параметров d, R или Δ.

Формулы (30.3)–(30.7) описывают течение легкой жидкости вокруг струи вблизи ее вершины. Теперь рассмотрим струю тяжелой жидкости. При $y_\Sigma > (0,3 - -0,4)\lambda$ эта струя может быть приближенно описана следующими асимптотическими формулами:

$$|\dot{y}_j| = \sqrt{(1-\mu)g}\,(\sqrt{2y_\Sigma} - 0.23\sqrt{\lambda}) = F_1(y_\Sigma), \tag{30.8}$$

$$\Delta_j = \frac{0,23}{2\sqrt{2}}\,\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{y_\Sigma}} = F_2(y_\Sigma). \tag{30.9}$$

Первый член в (30.8) обусловлен свободным падением. Второй — связан со скоростью подъема пузыря (27.22). Формула (30.9) для толщины струи следует из закона сохранения массы в стационарной струе.

Найдем скорость и геометрические параметры с помощью выражений (30.3), (30.8) и (30.9). Скорость U (30.3), (30.4) определяется по формуле (30.8). Свяжем размеры, относящиеся к струе (30.9) и к потенциалу (30.3). Естественно предположить, что

$$R = c\Delta_j. \tag{30.10}$$

где c — постоянная. Нетрудно видеть, что $R = \Delta_j$ при $c = 1$ и $\Delta = \Delta_j$ при $c = 3/2\pi$. Следовательно, c находится в диапазоне, примерно от $1/2$ до 1. Оставляя эту постоянную неопределенной, решим задачу, а затем проанализируем влияние ее вариации на ответ.

Процедура состоит в следующем:

(i) возьмем y_Σ;

(ii) посредством формул (30.8)–(30.10) выразим u_j и R через него, таким образом определяется комплексный потенциал $f(z)$ (30.3).

(iii) затем по нему вычислим нулевую линию тока $\psi(x,y) = 0$;

(iv) далее отыщем распределение давления $p^{(l)}_{dyn}$, обусловленное динамическим напором легкой жидкости, в окрестности точки A_j; вычислим распределение $p^{(l)}_{dyn}|_\eta$ вдоль КГ $\psi = 0$;

(v) заключает процедуру сшивка давлений $p^{(l)}_{dyn}$ в легкой и $p^{(h)}_{stat}$ тяжелой жидкостях на КГ; считаем, что $p^{(h)}_{stat}$ равно гидростатическому давлению

$$p^{(h)}_{stat} = -\rho_h(g - |\ddot{y}_j|)y,$$

где $g = |g|$. Выше учтена неинерциальность системы отсчета, связанной с ускоренно движущейся вершиной A_j. Считаем, что линейная стадия экспоненциального роста ускорения струи закончилась и произошло насыщение этого ускорения. Условие сшивки и определит искомую критическую амплитуду $(y_\Sigma)_{cr}$, при которой зарождается гриб.

Вычислим градиент распределения $p^{(1)}_{\text{dyn}}|_\eta$ вдоль КГ. Параметризуем КГ $\psi(x,y)=0$ с помощью y. Имеем $y \approx x^2/3d$. Отсюда

$$x = x_\eta(y) \approx \sqrt{3dy}. \tag{30.11}$$

Разлагая (30.3) вблизи $z=0$, находим закон роста скорости вдоль КГ. Он имеет вид

$$(|\mathbf{v}|)|_\eta \approx \frac{\dot{M}}{2\pi\rho_1 d^2}\, x. \tag{30.11'}$$

Функция $p^{(1)}_{\text{dyn}}$ зависит от аргументов x и y. Вдоль КГ она зависит от одного параметра, пробегающего границу. Поэтому

$$p^{(1)}_\eta(y) \equiv p^{(1)}_{\text{dyn}}|_\eta = p^{(1)}_{\text{dyn}}[x_\eta(y),\, y].$$

Определяя давление через интеграл Бернулли, нетрудно, используя соотношения (30.11) и (30.11'), получить градиент функции $p^{(1)}_{\text{dyn}}|_\eta$ вдоль КГ. Он равен

$$\frac{dp^{(1)}_\eta(y)}{dy} \approx -\frac{3}{2}\frac{\rho_1 U^2}{d}. \tag{30.11''}$$

Тяжелая жидкость находится в покое около точки A_j. Следовательно, градиент давления в ней равен гидростатическому градиенту

$$\frac{dp}{dy} = -\rho_h(g - |\ddot{y}_j|). \tag{30.12}$$

Из сшивки p на КГ следует, что градиенты (30.11'') и (30.12) должны быть равны. Учтем удельный вес легкой жидкости. Из сшивки получаем, что при

$$|\ddot{y}_j| \ll \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{\mu}-1\right)gR} \tag{30.13}$$

будет

$$\left|\frac{dp^{(1)}_\eta(y)}{dy}\right| \ll \rho_h g$$

или[36]

$$|\ddot{y}_j| \approx g.$$

Видим, что при условии (30.13) динамический напор со стороны легкой жидкости мал и не влияет на падение струи. Это значит, что до зарождения гриба еще далеко.

Гриб зарождается тогда, когда динамический напор легкой жидкости становится велик. При этом неравенство (30.13) нарушается. Для

[36] Мы рассматриваем стадию насыщения, на которой рост ускорения струи прекратился.

оценки амплитуды $(y_\Sigma)_{cr}$ на стадии зарождения гриба заменим неравенство (30.13) на равенство. Скорость $(\dot{y}_j)_{cr}$ в нем выразим через $(y_\Sigma)_{cr}$ по формуле (30.8), а затем выразим $(y_\Sigma)_{cr}$ через $(\Delta_j)_{cr}$ по формуле (30.9). В свою очередь $(\Delta_j)_{cr}$ выражается через R_{cr} согласно (30.10). Результатом этой последовательности замен является кубическое уравнение на критический радиус кривизны R_{cr}. Оно равно

$$\frac{2,05}{\sqrt{\mu}}\,\xi^3+\xi^2-c=0, \qquad \xi^2=\frac{2R_{cr}}{\lambda}. \tag{30.14}$$

По корню уравнения (30.14) находятся $(\Delta_j)_{cr}$ по формуле (30.10) и $(y_\Sigma)_{cr}$ по формуле (30.9).

При очень малых значениях μ гриб зарождается поздно. В этом случае амплитуда $(y_\Sigma)_{cr}$ велика. Соответственно скорость струи (первое слагаемое в круглых скобках в уравнении (30.8)) в момент зарождения велика по сравнению со скоростью подъема пузырей[37] (второе слагаемое в скобках в (30.8)). Тогда можно пренебречь вторым слагаемым в круглых скобках в (30.8). Вместе с этим слагаемым пропадает и квадратичный член в кубическом уравнении (30.14). Уравнение (30.14) без этого члена легко решается. Таким образом, асимптотическое решение (30.14) при $\mu\to 0$ равно

$$\frac{R_{cr}}{\lambda/2}\approx 0,62c^{2/3}\mu^{1/3}, \quad \frac{(y_\Sigma)_{cr}}{\lambda/2}\approx\frac{0,14c^{2/3}}{\mu^{2/3}}. \tag{30.15}$$

Учет скорости подъема пузыря приводит к уменьшению скорости опускания струи. Следствием этого становится уменьшение аэродинамической силы со стороны легкой жидкости, набегающей на концевую часть струи. При этом гриб зарождается позднее. Поэтому точное решение уравнения (30.14), учитывающее скорость пузырей, дает немного бóльшие значения $(y_\Sigma)_{cr}$, чем асимптотика (30.15).

Точные решения (30.14) даны в табл. 2 для $c=1$ в (30.10) и (30.14). При $c=0,5$ величина $(y_\Sigma)_{cr}$ приблизительно на 40% меньше.

Таблица 2. Параметры струи при зарождении гриба

μ	0,001	0,01	0,03	0,1	0,2
$\frac{R_{cr}}{\lambda/2}$	0,06	0,12	0,17	0,25	0,29
$\frac{(y_\Sigma)_{cr}}{\lambda/2}$	15	3,7	1,8	0,9	0,6

Сравним эти оценки с данными численного моделирования. Будем считать, что зарождение происходит в момент начала спада ускорения $|\ddot{y}_j|$. Расчет, проведенный методом § 18 при $\mu=0,1$, дает $(y_\Sigma)_{cr}\approx$ $\approx 0,75\,(\lambda/2)$. Сравнивая эту величину с приведенной в таблице, видим,

[37] Скорость $|\dot{y}_j|$ растет с ростом y_Σ, а скорость $\dot{y}_b$ постоянна после насыщения.

что они удовлетворительно согласуются. Несколько понизив коэффициент c, входящий в (30.10), (30.14), $0,5 \neq c \neq 1$, до значения $c \approx 0,9$, можно добиться их точного совпадения.

Завершим описание зарождения гриба. Момент t_{cr} его возникновения делит процесс развития возмущения на две стадии. На первой из них плотность легкой жидкости ρ_l малосущественна. На второй стадии течение разбивается на две области B/J и M см. рис. 30.18, 29.4 и 29.11. На первой стадии течение состоит из одной области B/J. На второй дополнительно к B/J появляется область M. В области B/J плотность ρ_l остается малосущественной и на второй стадии. В то время как в области M она очень важна — само возникновение этой области обусловлено тем, что $\rho_l \neq 0$.

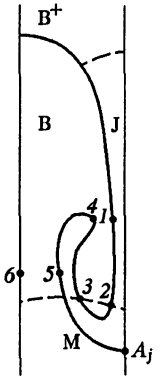


Рис. 30.18. Устройство характерных зон

Течение в области B/J состоит из течения тяжелой жидкости B^+ над головной частью пузыря B, струи J и собственно пузыря B, наполненного легкой жидкостью. Течение B^+ помечено знаком плюс, поскольку оно находится над пузырем B. Течения B^+ и J переходят друг в друга — разделение между ними довольно условно[38]. Оно показано на рис. 30.18 штриховым отрезком. Асимптотически в струе устанавливается режим, близкий к свободному падению с ускорением, равным $(1 - \mu)g$, см. § 29 и рисунки 29.10 и 29.11.

Грибовидная структура. Область гриба M устроена сложно, см. рис. 30.18. Она состоит из следующих характерных частей:

(i) шейка *1–2* струи J. Здесь имеется определенное взаимодействие струи с областью вихревого скручивания; далее в окрестности точки *2* шейка заканчивается и вещество струи поступает в область торможения;

(ii) точка торможения A_j встречных потоков тяжелой и легкой жидкостей; в окрестности вершины A_j происходит торможение и поворот струи J;

(iii) повернувшая струя A_j–*5*, см. рис. 30.18, 30.1 и 30.4; она стесняет восходящий поток легкой жидкости, стремящейся заполнить объем, освобождаемый течением B^+ тяжелой жидкости;

(iv) зона скручивания 4–3 (см. рис. 30.4) и "карман" *1–2–3–4* (см. рис. 30.1);

(v) струя легкой жидкости, которая огибает зону торможения A_j–*5* и проходит узкую горловину *5–6*.

Механика взаимопроникновения. Выше мы коснулись соударения жидкостей и стеснения струи в горловине. Узловые моменты инерционно-силового взаимодействия жидкостей поясняет рис. 30.19. В зоне *1* происходит отступление тяжелой жидкости. Освобождённый объем заполняется легкой жидкостью. Имеется разница давлений. В пузыре *1* давле-

[38] Дальние участки струи слабо влияют на пузырь, см. § 24, рис. 24.1.

ние низкое, а в области *5* — высокое. Это приводит к перекачке легкой жидкости. В случае моды конкуренции, которой посвящена гл. VII, происходит раздувание пузыря *1*, см. рис. 30.19*б*.

В зоне *2* имеет место разгон тяжелой жидкости до высоких скоростей. Здесь жидкость находится в состоянии свободного падения. Ее вес не участвует (!) в создании разницы давлений

$$p(y = -\infty) - p(y = \infty).$$

Поэтому, вычитая из полного начального веса эту разницу, можно найти сколько жидкости находится в свободном падении.

В зоне *3–5* происходит столкновение потоков. Образуется перемычка *4*, см. рис *а, б*, затрудняющая доступ легкой жидкости в пузырь *1*. В перемычке может иметься отверстие (горловина) *6*, через которую с

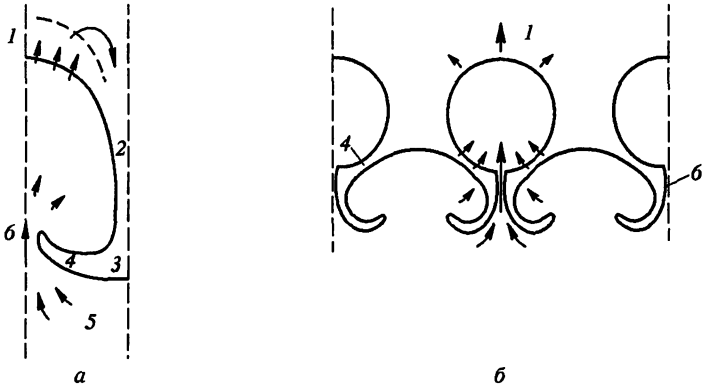


Рис. 30.19. Схема масса–импульс взаимопроникновения жидкостей: раздувание пузырей *1*, ускорение струй *2*, удар струи *2* в жидкость *5* и образование перемычек *4*, затрудняющих подсос легкой жидкости в пузырь

очень большой скоростью протекает легкая жидкость, см. стрелки на рис. 13.19*а, б*, см. также § 29, рис. 29.5, 29.11.

Эти отверстия могут перекрываться перемычками *4*. При этом образуются изолированные или захваченные пузыри. Так обстоит дело при развитии моды конкуренции пузырей, см. гл. VII (о субгармониках) и гл. IV, п. 18.6, рис. 18.1 (о нелинейной стадии развития моды конкуренции). Далее перемычки могут растягиваться, утоньшаться и разрушаться — изолированные пузыри опять соединяются с остальной легкой жидкостью. В других случаях пузыри остаются захваченными.

В зоне перемычек, горловины и захваченных пузырей мелкомасштабное перемешивание жидкостей интенсифицируется, см. п. 30.1. Происходит постепенное "растворение" зон спирального скручивания шляпок грибов, перемычек, оторвавшихся шляпок и захваченных пузырей в окружающей "матрице" — веществе. Возникают слои и области, состоящие из тонких смесей легких и тяжелых жидкостей или газов.

Итак, вкратце инерционно-силовая схема состоит из зоны раздувания *1* (отток тяжелой и подсос легкой жидкостей), высокоскоростных узких струй *2*, зоны удара *3–5* и перемыкания потока легкой жидкости перемычками *4*, образующимися вследствие удара, см рис. 30.19.

Перейдем к анализу грибовидной структуры в зоне удара, находящейся в районе нижней штриховой кривой на рис. 30.18.

30.5. Структура потока, связанного с грибом

Два напора и вес. Зарождение гриба при $t = t_{cr}$ рассмотрено выше. Оно начинается тогда, когда аэродинамическое сопротивление A_L легкой жидкости движению струи и вес W тяжелой жидкости станут сопоставимыми. Сила A_L продолжает возрастать и при $t > t_{cr}$, тогда как вес W фиксирован. Это вызвано тем, что скорость струи J на выходе из шейки *1–2*, см. рис. 30.18, продолжает увеличиваться в ЛСК.

Кроме аэродинамического напора A_L легкой жидкости, имеется и аэродинамический напор A_H тяжелой жидкости, обусловленный ее циркуляцией в зоне торможения. На стадии развитого тонкого гриба[39] из трех сил A_L, A_H и W (сила A_L направлена вверх, а силы A_H и W — вниз) две A_L и A_H становятся главными. Градиент аэродинамического напора A_H становится больше гидростатического градиента, связанного с весом W.

Отношение напора A_H к весу (квадрат числа Фруда) характеризует роль гравитации. Оно равно

$$\frac{u_j^2}{(1-\mu)g\Delta_j} = \frac{2y_\Sigma}{\Delta_j}. \tag{30.16}$$

Здесь в качестве характерного масштаба в зоне удара выбрана толщина струи Δ_j. Она по порядку величины равна также разности высот в повернувшей струе. При $\mu < 0.2$ и $y_\Sigma > (y_\Sigma)_{cr}$ отношение (30.16) велико по сравнению с единицей. Это вызвано тем, что гравитационное ускорение существенно на длинных разгонных промежутках $\sim y_\Sigma$. На малых дистанциях $\sim \Delta_j \ll y_\Sigma$ оно не успевает сработать, а аэродинамическое — успевает!

Вариацией давления на отрезке *2–3* в "кармане" *1–2–3–4* можно пренебречь (см. рис. 30.18). Это связано с тем, что, во-первых, здесь циркулирует малоплотная жидкость и, во-вторых, эта циркуляция не имеет точек торможения.

Теория струй. Таким образом мы приходим к задаче из теории струй. Необходимо рассмотреть взаимодействие периодической цепочки струй и "толстой мишени", см. рис. 30.20. "Мишенью" является среда, заполненная малоплотной жидкостью. Струи приходят из "бесконечности", поскольку пузыри находятся далеко $y_\Sigma \gg \Delta_j$. В системе координат, связанной со средой, струи проникают в среду. В системе координат,

[39] О делении грибов на тонкие ((29.1), рис. 29.1 и 29.4) и толстые ((29.2), (29.3), рис. 29.2 и 29.3) см. п. 29.1, п. 29.4.

связанной с точкой A_j, имеем два сталкивающихся потока — периодические струи и бесконечно толстую струю, приходящую снизу. Задача о проникании уединенной струи в мишень является классической (Биркгоф и Сарантонелло, 1964; Лаврентьев и Шабат, 1970). Ниже описан

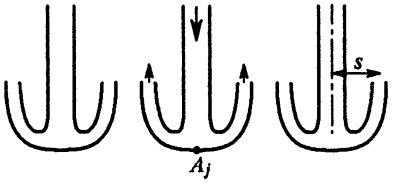


Рис. 30.20. Проникание периодической цепочки струй в "толстую мишень"

периодический случай. Соответствующее решение позволяет детально проанализировать тонкие грибы как в случае РТН, так и в случае НРМ.

Годограф и конформные отображения. Вид течения на физической плоскости z и в плоскости годографа ξ показан на рис. 30.21. Переменная ξ связана с физической скоростью $\dot{z}$ соотношением

$$\xi = \dot{z}^* = df/dz,$$

где $f(z)$ — комплексный потенциал, описывающий течение.

Физическая область конформно отображается на внутреннюю часть круга с разрезом. Берега разреза $a \to b$ и $a \to d$ в плоскости ξ на рис. 30.21*б* относятся к соответствующим прямым линиям симметрии в плоскости z на рис. 30.21*а*. Стрелки указывают направления движения.

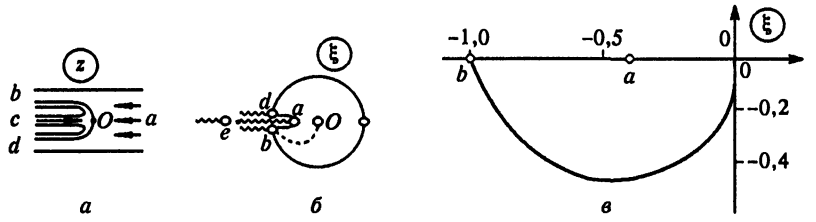


Рис. 30.21. Физическая плоскость (*а*). Годограф (*б*). Форма "нулевой" линии тока, проходящей через вершину A_j, на плоскости годографа (*в*). Дуга O–b соответствует внешней КГ гриба

Верхняя и нижняя полуокружности на плоскости ξ относятся к нижней $c \to d$ и верхней (на рис. 30.21*а*) $c \to b$ внутренним КГ (отрезок *2–3* в "кармане") соответственно. На них по условию давление постоянно и, следовательно, согласно интегралу Бернулли абсолютная величина скорости фиксирована. Центры $\xi = 0$ и $z = 0$ должны отображаться друг в друга. Это точка торможения струи. Она обозначена буквой O на рисунке. Скорости даны в системе координат, связанной с этой точкой.

Имеются особенности. Ими являются источники (a, c) и стоки (b, d, e) в точках a, b, c, d и e. Возникновение особенности в точке e связано с необходимостью отразить источник a относительно окружности, которая должна быть линией тока. Источник остается источником после отражения.

Можно показать, что производная от потенциала этой системы особенностей равна

$$\frac{df}{d\xi} = F(\xi) = -\frac{2h}{\xi+1} + \frac{2h_b}{\xi-1} - \frac{a}{\xi-a} - \frac{a}{\xi-1/a}. \tag{30.17}$$

В (30.17) принята нормировка $|\xi| = 1$ на окружности b–c–d. Здесь $|\xi_a| = a$ равно модулю скорости при $\Re(z) \to \infty$, а параметры πh_b, $2\pi h$ и 2π равны ширинам струй b, c и a соответственно (см. рис. 30.21).

С другой стороны, $\xi = df/dz$. Следовательно, мы имеем

$$dz = \frac{df}{\xi} = \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{\xi} = \frac{F(\xi)\,d\xi}{\xi}.$$

Расщепляя дроби $1/\xi(\xi + \text{const})$ на простые и интегрируя, получаем

$$z = (1-a^2)\ln a + \frac{i\pi(1-a)^2}{2} + \\ + 2h\ln(\xi+1) + 2h_b\ln(\xi-1) - \ln(\xi-a) - a^2\ln(\xi-1/a),$$

$$\Re(z) = (1-a^2)\ln a + 2h\ln R + 2h_b\ln R_b - \ln R_a - a^2\ln R_e,$$

$$R = |\xi+1|, \quad R_b = |\xi-1|, \quad R_a = |\xi-a|, \quad R_e = |\xi-1/a|,$$

$$\Im(z) = \frac{\pi(1-a)^2}{2} + 2h\ \operatorname{arctg}\left(\frac{-\Im(\xi)}{1-\Re(\xi)}\right) + 2h_b\left[\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{-\Im(\xi)}{1+\Re(\xi)}\right)\right] - \\ - \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{arctg}\left(\frac{\Im(\xi)}{\Re(\xi)+a}\right), & -\Re(\xi) > a \\ \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{-\Im(\xi)}{a+\Re(\xi)}\right), & -\Re(\xi) < a \end{array}\right\} - a^2\left[\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{-\Im(\xi)}{1/a+\Re(\xi)}\right)\right]. \tag{30.18}$$

Отметим, что член $\ln\xi$, появляющийся в результате интегрирования, исчезает. Множитель, на который домножается член $\ln\xi$, пропорционален увеличению $\Re(z)$ компоненты импульса в области потока. Этот множитель равен нулю из-за закона сохранения импульса и стационарности течения.

Нахождение контактных границ (КГ). Из законов сохранения массы, импульса и интеграла Бернулли получаем

$$a = 1 - 2\sqrt{h}, \quad h_b = \frac{(1+a)^2}{4}. \tag{30.19}$$

Следовательно, все геометрические характеристики потока определяются одним параметром. Выберем в качестве такого параметра ширину ударяющей струи тяжелой жидкости h. Это ширина струи J в шейке, см. рис. 30.18, точка *2*. В п. 30.4 она обозначалась $h = 2\Delta_j$.

Постоянная интегрирования в (30.18) определена из условия, что точка $z = 0$ соответствует точке $\xi = 0$. Разрезы точек ветвления на комплексной плоскости ξ показаны на рис. 30.21*б* волнистыми линиями.

С помощью интеграла (30.18) можно вычислить внутреннюю КГ, т. е. найти форму границы на участке *1–2–3*, см. рис. 30.18. Для этого параметризуем полуокружность на плоскости ξ, используя угол $\alpha = \arg\xi$ в качестве параметра. Получаем $\xi = \xi_f(\alpha)$, $\Re(\xi_f) = \cos\alpha$ и $\Im(\xi_f) = \sin\alpha$, где индексом f отмечена принадлежность к свободной (контактной, КГ) границе (f — free). При варьировании параметра α от 0 до π функция $\xi_f(\alpha)$ пробегает верхнюю полуокружность. Одновременно функция

$$z = z_f(\alpha) = z\,[\xi_f(\alpha)],$$

где $z(\xi)$ дается формулой (30.18), пробегает нижнюю ветвь внутренней КГ $c \to d$, см. рис. 30.21*а*.

Чтобы определить внешнюю КГ[40], необходимы более сложные вычисления. Приведем их краткое описание. Представим ξ как "физическую" координату. Тогда на этой "координатной" плоскости источники и стоки a, b, c, d и e задают поле "скоростей" $d\xi/d\tau$. По аналогии с обычными переменными и формулами для z и $dz/dt = (f'_z)^*$ свяжем "скорость" и производную от потенциала

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \left(\frac{df}{d\xi}\right)^*.$$

Перепишем эту формулу в компонентах. Она примет вид

$$\frac{dX}{d\tau} = \Re\left(\frac{df}{d\xi}\right), \qquad \frac{dY}{d\tau} = -\Im\left(\frac{df}{d\xi}\right), \tag{30.20}$$

где $X = \Re(\xi)$, $Y = \Im(\xi)$. Величины $\Re(f'_\xi)$ и $\Im(f'_\xi)$ являются функциями от аргументов X и Y. Они даются формулой (30.17). Таким образом, мы приходим к системе из двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений (30.20).

Теперь все готово для отыскания внешней КГ. Исключим τ из системы (30.20). Запишем

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\Im(f'_\xi)}{\Re(f'_\xi)}. \tag{30.21}$$

[40] Это внутренняя линия тока b–O–d, см. рис. 30.21*а*. На ней (в отличие от свободных линий тока $c \to d$ и $c \to b$) модуль скорости меняется. Поэтому она не является дугой окружности на плоскости ξ — сравни окружность на рис. 30.21*б*, вычерченную сплошной линией, и годограф O–b, вычерченный штриховой линией. *Линия тока b–O–d соответствует* КГ A_j — точка *5* на рис. 30.18.

Проинтегрируем (30.21) численно, например методом Рунге–Кутты. Пусть начальная точка лежит в центре O. Таким способом определяется линия тока, исходящая из точки торможения O. Это образ искомой внешней КГ на плоскости годографа. Пусть он задается функциями $Y_0(X)$ или $X_0(\tau)$, $Y_0(\tau)$, индекс нуль означает, что эта линия тока относится к точке торможения. Вследствие конформности годограф КГ преобразуется посредством формулы (30.18) в физическую КГ на плоскости z. Искомая внешняя КГ дается формулами

$$z = z\,[\xi_0(\tau)], \qquad \xi_0(\tau) = X_0(\tau) + iY_0(\tau),$$

где функция $z(\xi)$ равна (30.18).

Переменные τ и t. Отметим, что переменная τ в (30.20) не является физическим временем t. Для того, чтобы найти закон движения во времени t лагранжевой частицы вдоль линии тока, нужно проинтегрировать другую систему дифференциальных уравнений. Она выводится следующим способом. Возьмем отображение $z = z(\xi)$. Продифференцируем его по времени t. Получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dt},$$

$$\dot z = \frac{(df/d\xi)\;dot\xi}{df/dz}.$$

Так как $\dot z = \xi^*$ и $df/dz = \xi$, то получаем

$$\dot\xi = \frac{\xi\,\xi^*}{F(\xi)}.$$

Это и есть уравнение, определяюшее закон движения частицы в физическом времени.

Выход из особых точек при определении КГ. Вернемся к интегрированию уравнения $d\xi/d\tau = (df/\xi)^*$ (30.20). Требуется отыскать внешнюю КГ A_j — точка *5* или *O–b*, см. рис. 30.18 и 30.21*а*. Ее годограф *O–b* изображен штриховой и жирной сплошной линиями на рисунках 30.21*б*,*в* соответственно. Анализа требует вопрос о начальной точке для уравнения (30.20). Дело в том, что центр O является особой (сингулярной) точкой. Это точка торможения. Поэтому производные потенциала f'_z, f'_ξ обращаются в ней в нуль. В силу этого формально в ней правая часть уравнения (30.21) равна 0/0 и неопределена.

Точка O является седлом. Сепаратрисы пересекаются в ней под прямыми углами. Разложим правую часть уравнения (30.20) в окрестности этой точки до квадратичных членов включительно. Это даст возможность найти кривизну внешней КГ в точке A_j. Из вычислений следует, что

$$Y = \pm\sqrt{\frac{3A}{B}}\,\sqrt{-X}, \tag{30.22}$$

$$A = 2h - 2h_b + 1/a + a^3, \tag{30.23}$$

$$B = -2h - 2h_b + 1/a^2 + a^4. \tag{30.24}$$

Эти формулы определяют ветви параболы, исходящие из точки O, в малой окрестности точки O на плоскости годографа ξ.

Кривизна шляпки гриба. Разложим теперь отображение (30.18) в окрестности $z = 0$. Подставим в это разложение формулы (30.22)–(30.24). После преобразований находим радиус кривизны R физической КГ в вершине гриба A_j. Он равен

$$R = \frac{3}{4}\frac{A^2}{B}. \tag{30.25}$$

Рассмотрим асимптотику формулы (30.25) в случае очень тонких грибов[41]. Им соответствует предел $h \to 0$, где h — толщина струи. В этом пределе формула (30.25) принимает вид

$$R \to 6h. \tag{30.26}$$

Сравним радиус R и смещение повернувшей струи. Смещение S (см. рис. 30.20) равно расстоянию между осью симметрии струи J и точкой *5* на рис. 30.18. Оно определяет ширину зазора (горловины) *6*, через который легкая жидкость поступает в пузырь, а следовательно, и ее скорость и падение давления в горловине, см. рис. 30.18 и 30.19. Оно равно $S = \sqrt{h}$. В размерных величинах имеем $S = \sqrt{h/k}$.

Горизонтальный размер шляпки гриба равен $2S$, см. рис. 30.20. Видим, что при $h \to 0$ диаметр вписанного круга $2R$, вычисленный согласно формуле (30.26), мал по сравнению со шляпкой $2R \approx 12h \ll 2S \approx 2\sqrt{h}$. Это означает, что у очень тонких грибов шляпка не является округленной. В случае округлой шляпки внешняя КГ на больших расстояниях[42] приближенно представляется вписанной окружностью. Так обстоит дело в случае пузырей (27.22) и толстых грибов (29.2), (29.3), рис. 29.2, 29.3, 29.4.

Приведенный анализ касается асимптотики внешней КГ (A_j — точка *5*, см. рис. 30.18, "нулевая" линия тока) вблизи точки торможения O или A_j. Определим теперь асимптотику этой КГ вблизи стока b, см. рис. 30.21*б*. Она также может быть использована при нахождении внешней КГ O–b путем интегрирования уравнения (30.21) при старте не из центра O, а из особой точки b, являющейся другим концом отрезка O–b. Эта КГ, изображенная штриховой и сплошной кривыми на рис. 30.21*б*, *б*, подходит под углом α_b к действительной оси $X = \Re(\xi)$. Определим этот угол. Его легко найти из баланса потоков массы. Он равен

$$\alpha_b = \frac{a\,\pi}{2\,(a+h)}. \tag{30.27}$$

Любая из двух асимптотик (30.22) или (30.27) может быть использована для выхода из особых точек O и b при интегрировании (30.21). Для

[41] Такая асимптотика особенно важна при НРМ. Это вызвано тем, что при НРМ толщина h струи быстро убывает с ростом ее длины y_Σ. При РТН $h \propto 1/\sqrt{y_\Sigma}$, а при НРМ $h \propto 1/y_\Sigma$.

[42] То есть при изменениях тангенциального угла α на величины ~ 1.

устойчивости интегрирования предпочтительнее выйти из точки O вдоль сепаратрисы. При таком старте точность интегрирования определяется вблизи точки b по формуле (30.27).

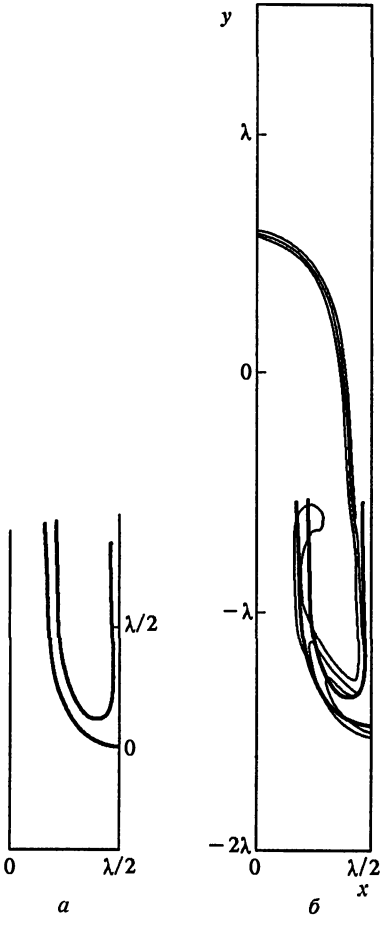


Рис. 30.22. Форма тонкого гриба, полученного аналитически (внешняя и внутренняя КГ) (*а*). Сравнение аналитического (А) и численного грибов (*б*)

Годограф O–b, полученный численным интегрированием уравнения (30.21) описанным способом при $h = 0,0914$, представлен на рис. 30.21*в*. Форма внешней КГ ("нулевой" линии тока) на физической плоскости находится путем конформного отображения $z(\xi)$ этого годографа по формуле (30.18). Формы внешней и внутренней КГ показаны на рис. 30.22*а*. Отображение $z(\xi)$ позволяет определить все характеристики течения. В частности, можно рассчитать распределения скоростей и давлений. Они показаны на рис. 30.23 и 30.24. Расчетная процедура представлена ниже.

Сравнение аналитического описания грибов и численного моделирования. Характеристики тонких грибов. Сопоставим результаты конформных отображений и численного моделирования методом искусственной сжимаемости § 18. Сравнение изохор дано на рис. 30.22*б*. Тонкими линиями проведены три численные изохоры по одной выше и ниже средней. Этот рисунок соответствует рис. 29.4 (9-й кадр) и 30.1. На рис. 30.1 показаны девять изохор. Толстыми линиями A даны перенесенные с рис. 30.22*а* аналитические контактные границы (КГ). Единственным параметром, который был взят из моделирования при построении аналитических КГ, была ширина струи J (см. рис. 30.18) в точке *2* в шейке. Для данного момента времени она равна $h = 0,0914\,(\lambda/2)$. Как видим, численные и аналитические данные хорошо согласуются. Ширина горловины *б*, см. рис. 30.18, согласно формуле (30.19) равна

$$\lambda\left[1-2\sqrt{\frac{2h}{\lambda}}\right]=0,40\,\lambda.$$

Это полная ширина горловины, равная удвоенному расстоянию между точками *5* и *6* на рис. 30.18.

Радиус кривизны R гриба в вершине A_j, вычисленный по формулам (30.25), (30.23) и (30.24), равен

$$R = 0,46\,(\lambda/2), \quad kR = 1,44.$$

Он почти в два раза меньше радиуса толстых грибов (29.9), п. 29.4. Это подчеркивает разницу, которая имеется между толстыми и тонкими грибами. Скорость первых насыщается на значении (29.8), скорость

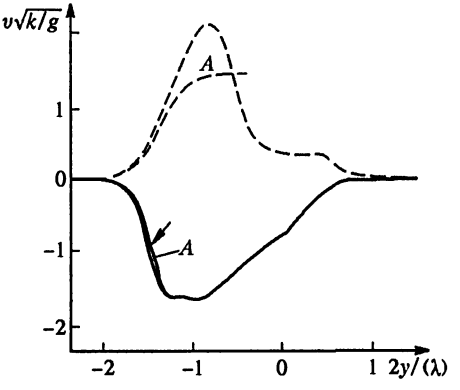


Рис. 30.23. Распределения вертикальной скорости по высоте y в пузыре (штриховые кривые) и в струе с грибом (сплошные кривые)

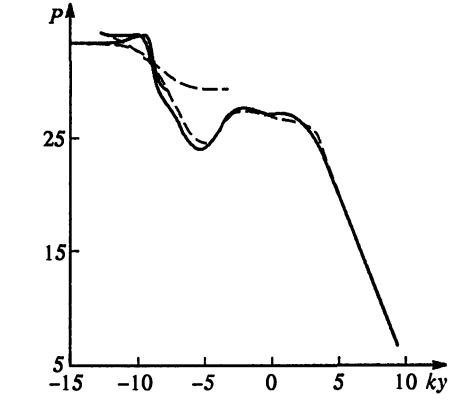


Рис. 30.24. Распределения давления $p/\rho_h g\lambda$ по y в пузыре (штриховые кривые) и в струе с грибом (сплошные кривые). Аналитические зависимости, полученные конформным отображением, выделены буквами A_B и A_J

вторых продолжает расти, см. рис. 29.15, на котором горизонтальной прямой отмечена скорость насыщения (29.8) толстых грибов. Ускорение $|\ddot{y}_j|$ первых обращается в нуль, а у вторых остается *конечным*, см. рис. 30.17*а*, средний график. В варианте, приведенном на рис. 29.4, это ускорение в момент t_9 составляло $\simeq 0,25g$.

На рис. 30.23 показаны оба распределения вертикальной компоненты скорости v в момент $t = t_9$, соответствующий рис. 29.4 (9-й кадр), 30.1 и 30.22*б*. Они построены по линиям симметрии $B_D - A_B - B_U$, $v(x = 0, y, t_9)$ и $J_D - A_J - J_U$, $v(x = \lambda/2, y, t_9)$, см. рис. 29.5. Эти

линии являются вертикальными прямыми. На них отлична от нуля только вертикальная компонента скорости $\mathbf{v} = \{u, v\}$. На стенке $B_D - A_B - B_U$ имеем $v > 0$ — подъем жидкости, а по стенке $J_D - A_J - J_U$ жидкость опускается $v < 0$. Скорости поднимающейся жидкости $v > 0$ показаны на рис. 30.23 штриховыми, а опускающейся $v < 0$ — сплошными кривыми. Полученные численно поля скорости рассмотрены в п. 29.2, см. рис. 29.6 и 29.11.

На рис. 30.23 вместе с численными помещены аналитические распределения. Они выделены буквами A (analytical) и относятся к области гриба. Поэтому они занимают меньший участок на оси y, чем данные сквозного численного расчета.

Положение вершины гриба A_j, см. рис. 30.20, отмечено стрелкой на рис. 30.23. Она совмещена со средней изохорой. В этой точке имеется скачок производной функции $v(y)$. Он виден на аналитической кривой. На распределении, полученном численно, он не заметен. Для нормировки аналитики (см. единичный круг на рис. 30.21*б*) скорость в шейке *2* струи J, см. рис. 30.18, была принята за единицу скорости.

Конформный способ расчета скорости и давлений. Аналитические распределения *A* вычислялись посредством следующей процедуры. Прямая стенка (*линия симметрии*) *a–b* на физической плоскости z, см. рис. 30.21*а*, соответствует прямолинейному отрезку *a–b* на плоскости годографа ξ, см. рис. 30.21*б*. На отрезке *a–b* на плоскости ξ выбиралось 1000 равноотстоящих точек. С помощью отображения (30.18) вычислялись их образы на прямой *a–b* в плоскости z. В результате получалась функция $z(\xi)$. Искомое распределение v является функцией $\xi(z)$, обратной к этой функции. Оно показано штриховой кривой на рис. 30.23.

Аналогично строилось распределение v вдоль оси $J_D - A_J - J_U$. Брались на плоскости z прямая *a–O–c*, часть *O–c* которой проходит по середине ударяющей струи тяжелой жидкости, и ее годограф — прямолинейный отрезок *a–O–c* на плоскости ξ.

При расчете необходимо учитывать разницу в плотностях тяжелой и легкой жидкостей. Они занимают части *O–c* и *O–a* распределения *a–O–c* соответственно. Эти жидкости находятся на частях оси y, лежащих соответственно правее и левее точки A_j, отмеченной стрелкой на рис. 30.23. Их скорости должны быть нормированы так, чтобы давление оставалось непрерывным на КГ между ними. Из этой нормировки следует, что в системе координат, связанной с точкой A_j, скорость тяжелой жидкости в $1/\sqrt{\mu}$ раз меньше, чем скорость легкой жидкости, $\mu = \rho_l/\rho_h$. После этой нормировки следует вернуться в ЛСК. Рассчитанное таким образом распределение показано на рис. 30.23 сплошной кривой *A*.

В горловине *б* (рис. 30.18) достигается максимум распределения скорости, показанного штриховой кривой на рис. 30.23. Аналитическая скорость оказывается примерно на 30% меньше максимальной. Возможно, это обусловлено тем, что полученная численным моделированием горловина эффективно получается несколько уже аналитической. Это сужение может быть вызвано численной диффузией тяжелого вещества (см. п. 30.1) — сравните в этой связи изохоры и КГ на рис. 30.1 и 30.22.

Давления. На рис. 30.24 представлены распределения давления $p/\rho_h g\lambda$. Как и на рис. 30.23 штриховые кривые относятся к линии симметрии $B_D - A_B - B_U$, $p(x = 0,\ y,\ t_9)$, проходящей через пузырь, а сплошные — к линии $J_D - A_J - J_U$, $p(x = \lambda/2,\ y,\ t_9)$, проходящей через струю. Буквами А выделены аналитические распределения (A_B — в горловине, A_J — в грибе).

Аналитические распределения p доведены до области, в которой давление становится однородным, см. рис. 30.24. При этом функции $p(x = 0, y, t)$ и $p(x = \lambda/2, y, t)$ от y совпадают. Влияние гриба экспоненциально затухает. Область однородности p, в которой влиянием гриба можно пренебречь, находится на достаточном удалении от гриба.

Численные распределения p доведены до "дна" расчетного прямоугольника. Использовались жесткие граничные условия на верхней и нижней границах (непроницаемая стенка, см. §§ 17, 18 и п. 29.2). На момент t_9 (кадр *9* на рис. 29.4) появляется небольшое влияние "дна" расчетной области. Это проявляется в том, что давления на "дне" под грибом $p(x = \lambda/2, y = y_D, t_9)$ и под горловиной $p(x = 0, y = y_D, t_9)$ немного отличаются, здесь y_D — нижняя граница ("дно").

Кроме гриба, примечательны еще следующие особенности распределений давления. Излом справа на штриховой кривой происходит в вершине пузыря A_B, см. рис. 29.5*б*. На рис. 30.23 ему соответствует переход от экспоненциального хвоста к "полочке", см. об этом также п. 29.2 и рис. 29.9. Глубокая яма с локальным минимумом давления связана с мощной вихревой дипольной структурой гриба, см. п. 30.3.

Аналитически давления вычислялись по скорости через интеграл Бернулли с учетом плотности той или иной жидкости. Аналитические распределения помечены буквами A_B и A_J на рис. 30.24. Максимум давления достигается на распределении p вдоль оси струи J и гриба M ($J_D - A_J - J_U$, $p(x = \lambda/2, y, t)$), см. рис. 29.5) в точке A_j, в которой происходит столкновение тяжелой и легкой струй. Вдоль оси горловины и пузыря ($B_D - A_B - B_U$, $p(x = 0, y, t)$) зависимость p от y монотонна в районе горловины. Как видим, в окрестности вершины гриба имеется удовлетворительное согласие между аналитическими и численными распределениями v и p.

Глава VII
СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И УСИЛЕНИЕ СУБГАРМОНИК

В главе рассматриваются симметрия и динамика субгармонических возмущений периодического стационарного течения — стационара (о нем см. § 27). Перечислим основные положения.

(i) Пусть $\lambda = 2\pi/k$ — период стационара. Пусть $k_S = 2\pi/\lambda_S$ — квазиимпульс малоамплитудного (линейного) субгармонического возмущения. Значения k_S ограничены интервалом (зоной Бриллюэна или ячейкой обратной решетки), равным

$$0 < k_S \le k/2.$$

Поэтому наименьшая допустимая длина субгармоники $\lambda_{S,\min}$ или наименьшая длина длинноволновой модуляции периодического стационара равна удвоенному периоду стационара $\infty > \lambda_S \ge \lambda_{S,\min} = 2\lambda$.

(ii) Пусть $\gamma_S(k_S)$ — инкремент субгармонической неустойчивости. При $k_S/k \to 0$ имеем $\gamma_S(k_S) \to \sqrt{gk_S}$ (стационар существует при отношении плотностей на КГ $\mu = 0$, поэтому число Атвуда равно $\mathrm{At} = 1$). По-видимому, ветка $\gamma_S(k_S)$ с наименьшими инкрементами и с наиболее длинноволновыми собственными функциями

$$\varphi_S = \exp(ik_S x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(inkx - nky),$$

у которых доминирует первая гармоника a_1, будет вещественной монотонной функцией от k_S, достигающей максимума на краю зоны Бриллюэна в точке $k_S = k/2$.

(iii) При $k_S = k/2$ два линейно независимых решения спектральной задачи о субгармонической неустойчивости соответствуют моде попарного притяжения пузырей (пусть φ_a ее потенциал) и моде парной конкуренции пузырей (обозначим ее потенциал φ_c).

(iv) Из анализа симметрии краевых собственных мод следует, что потенциалы и возмущения КГ представляют собой ряды по полуцелым гармоникам. Разложения φ_a и φ_c равны

$$\varphi_a = a_1 e_{1/2} S_{1/2} + a_2 e_{3/2} S_{3/2} + a_3 e_{5/2} S_{5/2} + \dots,$$

$$\varphi_c = c_1 e_{1/2} C_{1/2} + c_2 e_{3/2} C_{3/2} + c_3 e_{5/2} C_{5/2} + \dots,$$

$$e_{m/2} = \exp\left(-\tfrac{kmy}{2}\right), \quad S_{m/2} = \sin\tfrac{kmx}{2}, \quad C_{m/2} = \cos\tfrac{kmx}{2}.$$

Вследствие этого, например, потенциал моды конкуренции является четной функцией от x. Это означает, что смещение одного пузыря противоположно и равно смещению другого пузыря в паре.

(v) Из численного моделирования линейной стадии развития субгармонической неустойчивости в случае $k_S = k/2$ следует, что амплитуды собственных мод φ_a и φ_c монотонно растут по экспоненциальному закону. Оценки, основанные на результатах моделирования, показывают, что инкременты $\gamma_S(k/2)$ этих мод составляют $50 - -70\%$ от классического инкремента $\gamma_{\text{class}}(k/2)$, где $\gamma_{\text{class}}(k) = \sqrt{gk}$ — инкремент РТН на плоской поверхности. Сравнивая стационар (периодическая гофрировка КГ и течение) с гидростатикой (плоская поверхность), приходим к заключению о том, что гофрировка и течение не приводят к существенному уменьшению инкремента неустойчивости.

(vi) Асимптотически на поздних стадиях роста мод с $k_S = k/2$ при $\gamma_S(k/2)\ t/\ln(a_{0S}\, k/2) \gg 1$ течение становится снова стационарным; здесь a_{0S} — начальная амплитуда субгармонического возмущения. Период этого нового стационара равен 2λ. Таким образом следствием инфинитезимального субгармонического ($k_S = k/2$) возмущения стационара, имевшего период λ, является образование нового стационара с удвоенным периодом. Если начальное возмущение было бигармоническим с гармониками k и k_S, а отношение длин волн равно рациональному числу ($\lambda_S/\lambda = M/N$, M и N — целые), тогда асимптотически течение становится стационарным. Его период равен $M\lambda$ ($M\lambda = N\lambda_S$ или $k_{\text{fin}} = k/M$; отметим, что $k_S = Nk/M > k_{\text{fin}}$). Можно сказать, что в случае рациональности отношения k/k_S динамическая система имеет траекторию, соединяющую два разных стационара. В случае несоизмеримости отношения k/k_S (когда k/k_S есть иррациональное число) имеем $M\lambda = \infty$. Поэтому в данном случае возникает спонтанная РТ турбулентность, см. следующую главу. Отметим, что новый стационар не обязательно простой с одним пузырем и одной струей на период. Например, развитие моды φ_c на фоне простого стационара приводит к формированию нового простого стационара, изоморфного исходному, а следствием развития моды φ_a на фоне простого стационара является новый стационар с двумя пузырями и двумя струями на период. Этот новый стационар не изоморфен исходному. Отметим еще, что определенное значение имеет коротко-масштабная неустойчивость самих стационаров (см. п. 18.6, рис. 18.4 и 18.7). В результате субгармонического воздействия новый период действительно образуется, но течение с этим новым периодом (впрочем, как и исходное) только приближенно является стационарным, поскольку на его фоне "живут" незатухающие нелинейные коротко-масштабные возмущения. Обозначим это формально так:

$$F_{SS} + \delta F_{SW},$$

где F_{SS} — стационарное (SS — steady-state) решение (потенциал и форма КГ), а δF_{SW} — коротко-масштабный (SW — short waves) хвост (тоже потенциал и форма КГ), существующий на фоне (поэтому прибавлено δ) стационара F_{SS}.

(vii) В случае неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (НКГ) периодическим стационаром является цепочка "кошачьих глаз"[1]. Внутри "глаз" циркулирует захваченная жидкость. Она отделена от основного потока сепаратрисами, исходящими из седловых точек, разделяющих "глаза". Возле седел и внутри "глаз" располагаются области повышенного и пониженного давлений ("бугры" и "ямы" давления). Сказанное выше относительно субгармонической неустойчивости в случае РТН переносится на случай НКГ. А именно, пункты (i), (ii), (iv), а также утверждение о неустойчивости стационара по отношению к субгармоникам и пункт (vi) о связи между "степенью" несоизмеримости (величиной числа M; точная несоизмеримость наступает при $M = \infty$) и продолжительностью спонтанного каскада полностью переносятся на случай НКГ и сдвиговой турбулентности. Пункт (iv) при НКГ означает, что на краю зоны Бриллюэна при $k_S = k/2$ фурье-разложение возмущения состоит только из полуцелых (по отношению к периоду невозмущенного стационара) гармоник.

§ 31. Периодичность и симметрия субгармонических возмущений

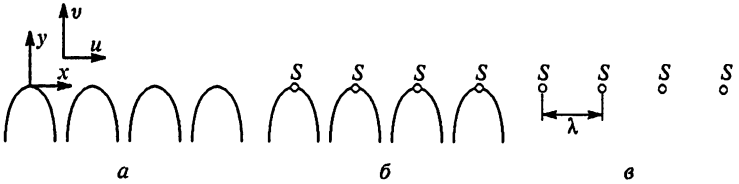
РТН гидростатики. Рассмотрим гидростатическое равновесие между двумя жидкостями, одна занимает верхнее полупространство и другая — нижнее. В равновесии жидкости находятся в покое и граница раздела между ними плоская. Если более легкая жидкость находится внизу, равновесие является неустойчивым. Это неустойчивость Рэлея–Тейлора (РТН). Предположим, что жидкости однородные и несжимаемые и что отношение плотностей нижней (легкой) к верхней (тяжелой) жидкости $\mu = \rho_l/\rho_h = 0$.

Пусть в момент времени $t = 0$ возмущение поверхности раздела (КГ) и/или скорости описывается простой гармоникой с периодом λ. В течение линейной стадии возмущения возрастают экспоненциально с инкрементом $\gamma = \sqrt{gk}$, где k — волновое число, см. гл. III. Затем экспоненциальный рост возмущений замедляется, и начинается переходный этап, результатом которого является установление стационара, см. гл. VI.

Стационар. При стационарном решении возникает периодическая цепочка пузырей и струй, см. рис. 31.1*а*. Верхняя часть пузыря до глубин $\approx 0,3\lambda$, отсчитанных от вершины пузыря S (точка стагнации), см. рис. 31.1*б*, довольно точно аппроксимируется дугой окружности с радиусом R, который приблизительно равен $(2,5 - 2,7)/k$, см. (27.22). В лабораторной системе координат (ЛСК), в которой жидкость находится в покое при $y \to +\infty$, стационарный пузырь поднимается вверх со скоро-

[1] Здесь имеется определенная трудность. Дело в том, что при сворачивании периодического возмущения в спираль за конечное время порядка единицы (в единицах $k = \Delta v = 1$) на КГ образуется особенность (Moore, 1979; Caflish et al., 1990; Baker et al., 1992; Shelly 1992; Saffman, 1992). Все-таки, видимо, и после образования особенности сворачивание (возможно, "интегрально") будет продолжаться (Saffman, 1992) и асимптотически образуется цепочка "кошачьих глаз" с захваченной жидкостью.

стью (27.22) $v_+ \approx 0,59\sqrt{g/k}$. В стационарной системе координат (ССК), связанной с движущимся пузырем, имеется точка разветвления потока S, в которой скорость $\mathbf{v}$ обращается в нуль. Схематично решение может



а *б* *в*

Рис. 31.1. Структура стационара (*а*). Точки торможения S (*б*). Периодическая цепочка точек S (*в*)

быть представлено в виде цепочки точек S, находящихся на расстоянии λ друг от друга (рис. 31.1*в*).

Субгармоническое возмущение стационара. Перейдем к условиям периодичности и симметрии. Рассмотрим возмущения стационара. Пусть возмущенное решение имеет период $m\lambda$, где $m > 1$ — целое (оно является субгармоникой с волновым числом $k_S = k/m$), и удовлетворяет условиям симметрии на вертикалях S_1 и S_2. Пусть они связаны с периодом $m\lambda$ и фазой невозмущенного стационара так, как показано на рис. 31.2*а*). Возмущенный потенциал и смещения КГ подчиняются при этом условиям четности. При двумерном численном моделировании с прямоугольной расчетной областью удобно рассматривать именно такие возмущения. В этом случае вертикали S_1 и S_2 служат границами области, что дает возможность исследовать возмущения с длиной волны $m\lambda$ на вдвое меньшей этой длины расчетной области. В качестве граничных условий при этом выбираются условия симметрии на S_1 и S_2. Начальные условия выбираются в соответствии с боковыми граничными условиями. Влияние граничных условий на верхней и нижней границах расчетной области подробно изучено выше в §§ 18 и 29.

Основные структурные черты субгармонических возмущений ясны из рис. 31.2. Рис. 31.2*а*, *а*1 и *а*2 связаны. Поэтому они обозначены одной буквой. Прямая $y = 0$ (ось, по которой откладываются потенциалы Φ, Φ_0) на рис. 31.2*а*1 специально изображена так, что она является как бы продолжением прямой $y = 0$ или оси x (с рис. *а*), проходящей через вершины S.

Сплошная кривая B (bubble) на рис. 31.2*а*1 дает зависимость невозмущенного потенциала Φ_0 от высоты y: $\Phi_0(x = n\lambda, y)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Вертикали $x = n\lambda$ проходят через точки S. Кривая B заканчивается в точке окончания. Такой точкой для нее является точка S. Так как S есть точка торможения, то наклон $\partial\Phi_0/\partial y$ обращается в нуль в точке окончания.

Сплошная кривая J, представленная на рис. 31.2*а*1, соответствует зависимости $\Phi_0(x = \lambda/2 + n\lambda, y)$. Вертикальные прямые $x = \lambda/2 + n\lambda$ проходят через оси симметрии невозмущенных струй. При $y \to -\infty$ потенциал Φ_0 выходит на асимптоту, соответствующую свободному

падению. Невозмущенный потенциал Φ_0 относится к стационарному решению. Потенциалы приведены в ССК, связанной с точкой S. Асимптотически при $y \to +\infty$ потенциалы Φ и Φ_0 стремятся к линейной

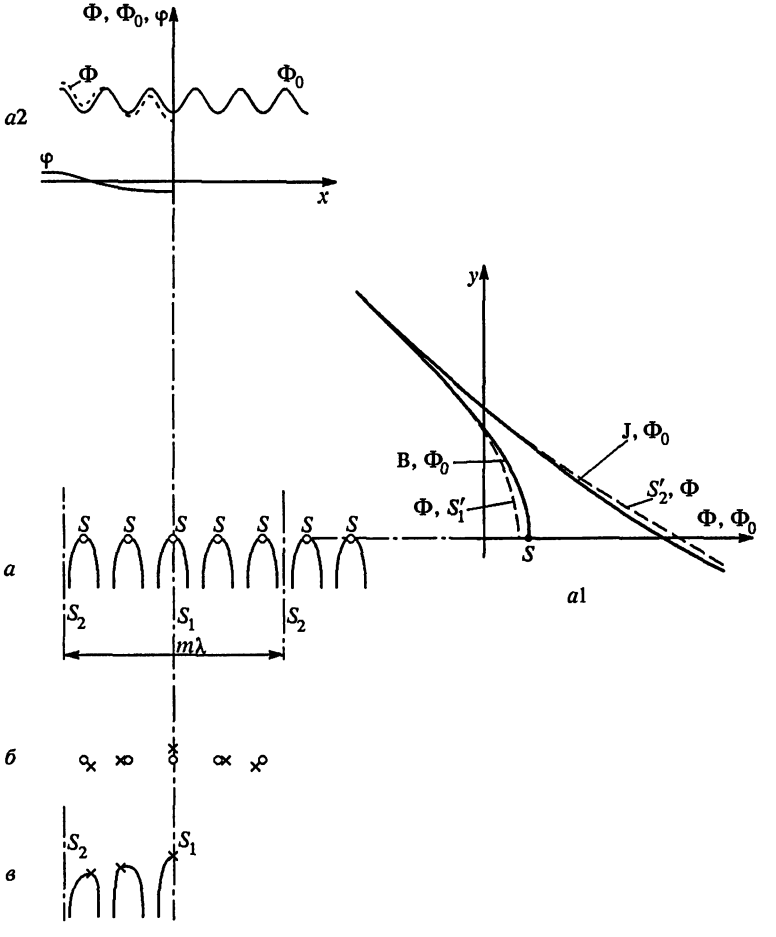


Рис. 31.2. Периодичность и симметрия данного субгармонического возмущения (a). Зависимости потенциалов от y и от x ($a1$ и $a2$ соответственно), Φ_0 — невозмущенный потенциал — потенциал стационара (сплошные кривые), Φ — потенциал при наличии субгармонического возмущения (штриховые кривые), $\varphi = \Phi - \Phi_0$ — потенциал собственно субгармонического возмущения, он показан сплошной кривой на рис. a 2. На линейной стадии он мал по сравнению с потенциалами Φ и Φ_0. Поэтому он находится ближе к оси x. Невозмущенные (кружки) и возмущенные (крестики) вершины пузырей ($б$). Невозмущенная цепочка такая же, как на рис. 31.1$в$. Вершины пузырей при наличии субгармонического возмущения взяты с рис. $в$. Форма возмущенной КГ при $m = 5$ ($в$). Крестиками помечены вершины. Их положение на плоскости x, y показано также на рис. $б$

зависимости от y. Это соответствует однородному потоку, двигающемуся со скоростью $\nabla\Phi_0$.

Полный потенциал Φ при линеаризации представляется в виде суммы стационарного потенциала Φ_0 и потенциала возмущения φ. Графики потенциала Φ, как функции y на вертикалях S_1 и S_2, приведены на рис. 31.2*а1* в виде штриховых кривых S_1' и S_2' соответственно.

На рис. 31.2*а1, а2, б, в* представлен случай, когда возмущение таково, что скорость, с которой поток набегает на пузырь S_1, меньше, чем невозмущенная скорость, с которой движется стационарный пузырь. Так как $v = \nabla\Phi$, то это означает, что этот пузырь в ССК (связанной с невозмущенным пузырем) движется вверх против набегающего потока, (см. рис. 31.2*б, в*. Вследствие этого, кривая S_1' на рис. 31.2*а1* проходит ниже кривой B (при меньших потенциалах).

По аналогичной причине кривая S_2' на рис. 31.2*а1* проходит выше кривой J. Из этого также следует, что при возмущении данного вида пузыри, находящиеся около вертикалей S_2, отстают от невозмущенных пузырей, см. рис. 31.2*б, в*.

Рис. 31.2*а2* специально поднят над рис. *а*. Он дает зависимости потенциалов от x (момент t фиксирован) на некотором уровне $y = y_1 > 0$ ($y = 0$ — уровень вершин S невозмущенных пузырей): $\Phi(x,\ y = y_1,\ t)$, $\Phi_0(x,\ y = y_1)$ и $\varphi(x,\ y = y_1,\ t)$. Минимумы потенциала $\Phi_0(x,\ y_1)$ располагаются *над* вершинами пузырей. Оси x на рис 31.2*а* и *а2* одинаковы (в том смысле, что они параллельны, нули $x = 0$ находятся один над другим на штрихпунктирной прямой, и длина периода одна и та же). Высота зубцов потенциала

$$\left[\Phi_0\left(x = \frac{\lambda}{2} + n\lambda,\ y_1\right) - \Phi_0(x = n\lambda,\ y_1)\right](g\lambda^3)^{-1/2}$$

стремится к нулю при удалении от цепочки вершин $y_1/\lambda \to +\infty$.

Продолжим обсуждение x-зависимости потенциалов. Потенциал Φ_0 описан. Рассмотрим потенциалы φ и Φ. Повышения и понижения потенциала Φ_0 потенциалом φ ($\Phi = \Phi_0 + \varphi$) описаны выше, см. рис. 31.2*а1*. Сравните пары невозмущенных и возмущенных кривых B, S_1' и J, S_2'. Период потенциала φ субгармоники (а следовательно, и полного потенциала Φ) в m раз больше периода исходного потенциала Φ_0. Минимумы потенциала φ находятся при $x = n(m\lambda)$ (точки S_1 на оси x), а его максимумы — при $x = m\lambda/2 + n(m\lambda)$ (точки S_2 на оси x, $n = 0, \pm1, \ldots$, значение m фиксировано. На рис. 31.2*а2* показана половина периода субгармоники. Видим, что потенциалы φ и Φ симметричны относительно точек S_1 и S_2.

При больших m ($m \gg 1$) период субгармоники велик по сравнению с исходным. В этом случае можно сказать, что граница и потенциал стационара *модулированы* длинноволновым возмущением.

Пузыри и струи, расположенные на полупериоде субгармоники (т. е. между точками S_1 и S_2 с этими точками связаны оси S_1 и S_2), при выбранных для рис. 31.2 значениях m и фаз сдвигаются следующим образом. Центральный пузырь смещается вертикально вверх (из равновесной конфигурации, соответствующей стационару); средние пузыри имеют и вертикальное, и горизонтальное смещения; при этом боковой пузырь,

располагающийся около вертикальной оси S_2, замедляется, а струя, проходящая через ось S_2, усиливается, см. рисунки 31.2*б*, *в*. Усиление струи S_2 приводит к сдвигу соседнего с ней пузыря вниз по вертикали и вправо по горизонтали, см. рис. 31.2*б*, *в*.

Закончим на этом описание типичных структурных черт субгармонических возмущений.

Обрезание сингулярностей, связанных со струями. Выше в § 31 рассмотрены субгармонические возмущения стационара. Формально стационар имеет струи бесконечной длины и устанавливается за бесконечное время, см. гл. VI. Обсудим вопрос о численном моделировании субгармонической неустойчивости такого стационара.

Численно интегрировались уравнения Навье–Стокса в переменных x, y, t на прямоугольной сетке с малой вязкостью $\nu \ll \sqrt{g\lambda^3}$, см. §§ 17 и 18. Это позволяет исследовать эволюцию границы $y = N(x,t)$ и потенциала $\Phi(x,y,t)$.

Если строго следовать сказанному относительно бесконечности струй в стационаре, то необходимо действовать по следующей программе. (i) При $t = 0$ нужно взять гидростатическое равновесие и наложить на него возмущение в виде одной гармоники $k = 2\pi/\lambda$. (ii) Затем отследить эволюцию этого течения до $t = +\infty$. При этом N и Φ станут стационарными N_0 и Φ_0. За это время сформируются бесконечные струи. (iii) Теперь все готово для внесения субгармонического возмущения. Выбираем некоторый момент времени t_0 за новый начальный момент. При $t = t_0$ накладываем на стационар субгармоническое возмущение в виде одной гармоники $k_S = 2\pi/\lambda_S$. (iv) Следим за эволюцией возмущенного течения. Если γ_S — инкремент субгармонической неустойчивости при $k = k_S$, то за времена $\simeq 1/\gamma_S$ (в эту оценку начальная амплитуда субгармоники не входит! Речь идет о преобразовании на линейной стадии) гармоника k_S "оденется". Это означает, что она перейдет в сумму гармоник $nk \pm k_S$, $n = 1, 2, \ldots$[2] и станет собственной функцией линеаризованной задачи. Квазиимпульс этой функции равен k_S. Ее амплитуда растет экспоненциально. Продолжительность линейной стадии развития этой собственной функции оценивается по формуле (18.10), в которую необходимо подставить амплитуду субгармоники[3] при $t = t_0$ и заменить инкремент на γ_S.

Разумеется, эта формальная процедура не может быть выполнена, поскольку как время расчета, так и размер расчетной области являются ограниченными. Принципиальный момент состоит в том, что это и не нужно. Дело в том, что, во-первых, выход на стационар происходит неоднородно в пространстве — пузыри выходят на него быстро за времена порядка (18.10), а струи медленно, и, во-вторых, для субгармонической неустойчивости существенны именно пузыри, а не струи.

Разъяснению этого посвящен рис. 31.3. На нем показано, *как* происходит установление стационара. Имеется некоторая "волна устано-

[2] Блоховскую функцию $\exp(\gamma_S t)\exp(ik_S x)\, f(x,y)$, где функция f является периодичной: $f(x+\lambda, y) = f(x,y)$.

[3] Подчеркнем, что в эту оценку *входит* начальная амплитуда.

вления", распространяющаяся вниз от пузырей к струям. Ее "фронт" разделяет области установившегося и неустановившегося течений.

К моменту времени t_1 граница раздела (КГ) и потенциал Φ выше линии a_1b_1 ("фронта" "волны установления"), показанной точками на рис. 31.3*а*, *б*, близки к стационарному решению. Со временем ($t_1 \to$ $\to t_2 \to \ldots \to \infty$) линия a_1b_1 смещается вниз приблизительно со скоростью потока.

Влияние нестационарной области на стационарную экспоненциально затухает при удалении от нестационарной области, см. по этому поводу также § 24. Это вызвано эллиптичностью уравнения на потенциал. Длина, на которой происходит затухание, определяется размером неста-

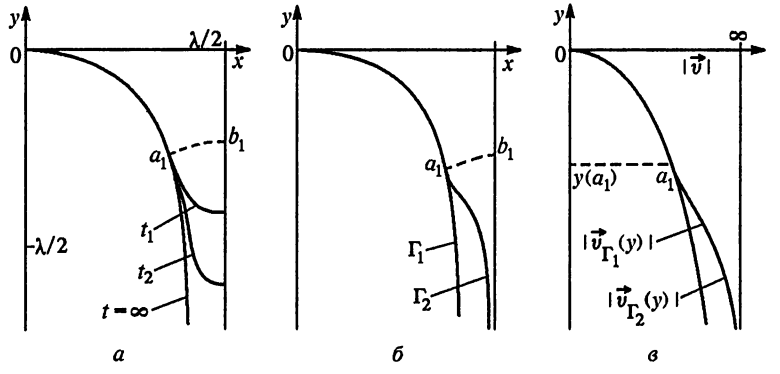


Рис. 31.3. Процесс установления стационарного пузыря (*а*). Формы КГ для последовательности времен $t_1 < t_2 < \ldots < \infty$. При $t = t_1$ нестационарная область находится ниже линии a_1b_1. Выше этой линии КГ $N(x,t)$ и потенциал $\Phi(x,y,t)$ примерно стационарны $N \approx N_0$, $\Phi \approx \Phi_0$. Обтекание профилей Γ_1 и Γ_2 (*б*). Они совпадают выше линии a_1b_1 и сильно отличаются ниже ее. Зависимости скоростей на профилях Γ_1 и Γ_2 от y (*в*). Скорости при $y = +\infty$ считаются одинаковыми. Скорости на профилях примерно одинаковы при $y > y(a_1)$ и сильно отличаются при $y < y(a_1)$

ционарной области. Она уменьшается из-за сужения струи. Аналогично выше a_1b_1 примерно одинаковы потенциалы $(\Phi_0)_1$ и $(\Phi_0)_2$, возникающие в полосе между вертикальными прямыми (линиями симметрии, см. рис. 27.3) при обтекании стационарных профилей (стационарных КГ) Γ_1 и Γ_2. Эти профили совпадают выше линии a_1b_1 (см. рис. 31.3*б*) и сильно отличаются ниже этой линии, сравни с рис. 24.1. При этом ниже a_1b_1 потенциалы $(\Phi_0)_1$ и $(\Phi_0)_2$ и соответствующие им поля скорости также отличаются сильно. Это показано на рис. 31.3*в*. Скорости $\mathbf{v}_{G1}(y)$ и $\mathbf{v}_{G2}(y)$ относятся к профилям Γ_1 и Γ_2.

Таким образом, трудность, связанная с длиной струи, разрешается. Это обусловлено тем, что, во-первых, нестационарный участок локализован и, во-вторых, он мал (вследствие узости струи). Поэтому динамика развития пузырей может рассматриваться независимо от струй. Соответственно параметры стационарных и возмущенных пузырей (скорости подъема, формы КГ) слабо зависят от динамики дальних участков

струй. Количественный анализ приводит к выводу о том, что участок струи, находящийся ниже глубины $\approx 0,5\lambda$, отсчитанной от вершины пузыря, мало влияет на судьбу пузыря. В этой области струи происходит переход к режиму свободного падения.

Организация моделирования. Из изложенного вытекает вывод о том, что численное моделирование субгармонической неустойчивости на конечных временах и в конечных расчетных областях является возможным. Точность численного определения субгармонического инкремента γ_S должна быть примерно такой же, как и точности численных же определений гидростатического инкремента, скорости подъема пузырей и кривизны их границы.

Для численного моделирования субгармонической неустойчивости на гидростатическое равновесие накладывалось бигармоническое (см. §§ 17, 18) возмущение следующего вида:

$$N(x, t = 0) \equiv 0,$$

$$\Phi(x, y, t = 0) = \\ = [\Theta(y) - \Theta(-y)] \left(-\frac{A_1}{k} \cos kx \, e^{-k|y|} - \frac{mA_2}{k} \cos \frac{kx}{m} \, e^{-k|y|/m} \right),$$

где A_1 и A_2 — амплитуды скорости гармоники и субгармоники.

Пусть $A_1 = (0,4 - 0,7)\ 0,23\sqrt{g\lambda}$. В этом случае за промежуток времени $t_1 = (1 - 2)/\gamma$, $\gamma = \sqrt{gk}$ суммарная амплитуда (пузырь + струя), см. п. 26.3, п. 30.4, п. 30.5, станет порядка $0,5\,\lambda$ и при $A_2 = 0$ произойдет образование стационарного пузыря.

Для изучения линейной стадии неустойчивости необходимы малые субгармонические возмущения $A_2 \ll A_1$. Обычно в конкретных расчетах A_2 составляло 10 – 20% от A_1. За время t_1 образуется стационар. За время $t_2 \simeq 1/\gamma_S$ формируется субгармоническая собственная функция. Амплитуда A_2 мала, поэтому по истечении времени $\max\{t_1, t_2\}$ возмущение остается *линейным* и его рост происходит по экспоненциальному закону. Перед тем, как перейти к изложению результатов моделирования, целесообразно представить формальную теорию субгармоник.

§ 32. Аналитическая теория субгармоник

Пространственная структура рассматриваемых возмущений описана выше. Показано, что удаленные участки струй, на которых вещество находится в состоянии свободного падения, не влияют на динамику как стационарных, так и возмущенных ансамблей пузырей (при $\mu = 0$). Поэтому не нужно ждать, когда струи при численном моделировании станут очень длинными. Другое важное обстоятельство относится к классификации возмущений. Оказывается, можно строго доказать, что возможны только две линейно независимые моды. При $m = 2$ они описывают притяжение и соревнование (конкуренцию) пузырей. Этой классификации и посвящен настоящий раздел.

Вид течения в случае мод с $m = 2$. Начнем анализ этих проблем при помощи разложений функций в ряды Фурье. Пусть система координат x, y выбрана так, как показано на рис. 31.1*а*. В этом случае невозмущенные граница $N_0(x)$ и потенциал $\Phi_0(x, y)$ разлагаются в ряды Фурье по косинусам

$$N_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n C_n, \qquad \Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e_n C_n, \tag{32.1}$$

где $C_n = \cos knx$, $e_n = \exp(-kny)$. Теперь рассмотрим субгармоническое возмущение. Поскольку с ростом m требуется бóльшая расчетная сетка, то понятно, что при этом увеличивается и время расчета. Ограничимся первым нетривиальным случаем, когда $m = 2$.

Из периодичности и симметрии следует, что для произвольного целого m есть только две возможности постановки боковых граничных условий на вертикальных прямых. В одном случае прямые S_2 проходят вдоль осей симметрии невозмущенных струй (см. рис. 31.2*а*). В другом случае эти линии проходят по осям симметрии пузырей[4]. При $m = 2$ прямые S_2 проходят через точки $kx = \pi + 4\pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ в первом случае и через точки $kx = 4\pi n$ во втором ($\lambda = 2\pi/k$ — период невозмущенного течения).

Проведем разделение переменных. Возмущения границы и потенциала представимы в виде $\exp(\gamma t)\,\eta(x)$ и $\exp(\gamma t)\,\varphi(x, y)$ соответственно.

Прямые S_2 эквивалентны жестким стенкам, на которых нормальная к ним компонента скорости обращается в нуль. Из условий периодичности и симметрии следует, что ряды Фурье для возмущений потенциала в первом и во втором случаях имеют вид

$$\varphi_a(x, y) = \alpha_1 e_{1/2} S_{1/2} + \alpha_2 e_1 C_1 + \alpha_3 e_{3/2} S_{3/2} + \alpha_4 e_2 C_2 + \ldots, \tag{32.2}$$

$$\varphi_c(x, y) = \beta_1 e_{1/2} C_{1/2} + \beta_2 e_1 C_1 + \beta_3 e_{3/2} C_{3/2} + \beta_4 e_2 C_2 + \ldots, \tag{32.3}$$

где

$$e_{m/2} = \exp\left(-\frac{kmy}{2}\right), \quad S_{m/2} = \sin\frac{kmx}{2}, \quad C_{m/2} = \cos\frac{kmx}{2}.$$

На рис. 32.1*а*, *б* показаны невозмущенная граница $N_0(x)$ и направления возмущений скорости на симметричных вертикальных линиях тока. На рис. 32.1*а*1, *б*1 представлены формы возмущенных границ. Рис. 32.1*а*, *а*1 соответствуют формуле (32.2). Это мода притяжения пузырей. Здесь струи a, c, ... ослабляются, а струи b, d, ... усиливаются. Это вызвано тем, что поле скоростей возмущения (см. стрелки) ослабляет струи a и c и усиливает струи b и d. Вершины пузырей a_1 и a_2, c_1 и c_2, ... при этом попарно приближаются друг к другу. Они показаны в виде цепочки крестиков, см. также рис. 32.1*а*1.

[4] Считается, что имеется еще вертикальная ось симметрии S_1, проходящая по середине между парами соседних прямых S_2.

Рис. 32.1*б*, *б1* соответствуют формуле (32.3). Это мода конкуренции (соревнования) пузырей. В этом случае пузыри a, c, ... уменьшаются,

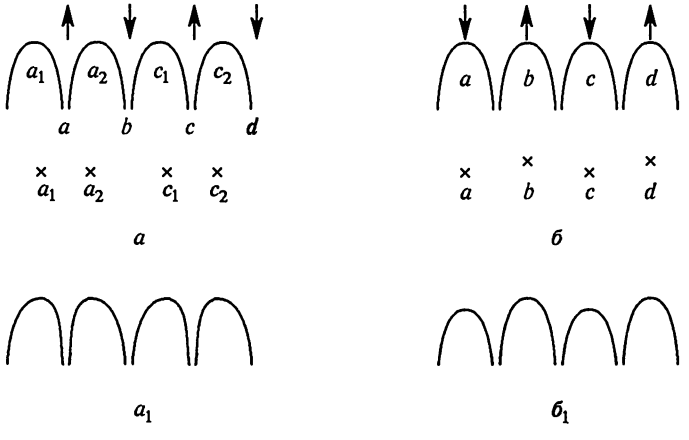


Рис. 32.1. Схемы смещений при развитии субгармонических мод с $m = 2$. *а*, *а*1. Мода притяжения пузырей (32.2′). Мода конкуренции пузырей (32.3′) *б*, *б*1

а пузыри b, d, ... увеличиваются (раздуваются). Видно, что пузыри b, d, ... уходят вперед, а то время как пузыри a, c, ... отстают, см. рис. 32.1*б*1 и стрелки на рис. 32.1*б*.

Линеаризация произвольного возмущения около 2D неоднородного стационарного течения. Нестационарные, стационарные, и линеаризованные около стационарного двумерного решения кинематические и динамические граничные условия имеют следующий вид:

$$N_t = \Phi_y - N_x \Phi_x,$$

$$\Phi_t = -\frac{(\nabla\Phi)^2}{2} - |g|N,$$

$$\Phi_{0y} - N_{0x}\, \Phi_{0x} = 0,$$

$$(\nabla\Phi_0)^2 + 2|g|N_0 = 0,$$

$$\gamma\,\eta = \varphi_y + \Phi_{0yy}\eta - N_{0x}\varphi_x - \Phi_{0x}\eta_x - N_{0x}\, \Phi_{0xy}\eta, \qquad (32.4)$$

$$\gamma\,\varphi = -\Phi_{0x}\varphi_x - \Phi_{0y}\varphi_y - \Phi_{0x}\Phi_{0xy}\eta - \Phi_{0y}\Phi_{0yy}\eta - |g|\eta. \qquad (32.5)$$

В граничных условиях (32.4), (32.5) и четырех предыдущих все потенциалы берутся на границе

$$\Phi(x, y, t)|_{y=N(x,t)}, \quad \Phi_0(x, y)|_{y=N_0(x)}, \quad \varphi(x, y)|_{y=N_0(x)}.$$

Добавочные линейные по η члены возникают вследствие разложения около границы, например,

$$\Phi_x^2|_{y=N} = (\Phi_{0x} + \varphi_x)^2|_{y=N_0+\eta} = (\Phi_{0x}^2 + 2\,\Phi_{0x}\Phi_{0xy}\eta + 2\,\Phi_{0x}\varphi_x)|_{y=N_0}.$$

Потенциалы Φ, Φ_0 и φ являются гармоническими функциями

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_0 = \Delta\varphi = 0.$$

Исключим функцию $\eta(x)$ из граничных условий (32.4) и (32.5). Для этого выразим η через φ с помощью условия (32.5). Получим

$$\eta = G|_{N_0}(\gamma\,\varphi + \Phi_{0x}\,\varphi_x + \Phi_{0y}\,\varphi_y)|_{N_0},$$

где для упрощения записи введено обозначение

$$-\frac{1}{G} = |g| + \Phi_{0x}\Phi_{0xy} + \Phi_{0y}\Phi_{0yy}.$$

Подставим это выражение в (32.4). После громоздких преобразований получим

$$\begin{aligned}\gamma(\Phi_x G_x + \Phi_x G_y N_x - AG)\varphi + [\Phi_x\Phi_y(G_x + G_y N_x) + \gamma\Phi_x N_x G + \\ + \Phi_x\Phi_{xy}G + \Phi_x\Phi_{yy}N_x G - A\,G\Phi_y - 1]\varphi_y + \Phi_x\Phi_y N_x G\varphi_{yy} + \\ + [\Phi_x^2(G_x + G_y N_x) + \gamma\Phi_x G + (\Phi_x\Phi_{xx} + \Phi_x\Phi_{xy}N_x)G + N_x - \\ - AG\Phi_x]\varphi_x + (\Phi_x^2 N_x G + \Phi_x\Phi_y G)\varphi_{xy} + \Phi_x^2 G\varphi_{xx} = 0, \quad (32.6)\end{aligned}$$

где $A = -\gamma + \Phi_{yy} - N_x\Phi_{xy}$ и функции Φ, G, A взяты на невозмущенной границе. Для упрощения записи в (32.6) функции N и Φ записаны без индекса 0.

Блоховские функции. Потенциал возмущения φ должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и условию на границе (32.6). Поделив (32.6) на $\Phi_x^2 G$, подставив разложения (32.1) в (32.6), разложив экспоненты $\exp(-nN_0)$ по $\cos klx$ и превратив члены с произведениями синусов и косинусов в их суммы, окончательно получаем

$$\begin{aligned}[\varphi_{xx} + S^1\varphi_{xy} + (\gamma S^2 + S^3)\varphi_x + C^4\varphi_{yy} + \\ + (\gamma C^5 + C^6)\varphi_y + \gamma(\gamma C^7 + C^8)\varphi]|_{y=N_0(x)} = 0. \quad (32.7)\end{aligned}$$

В (32.7) цифры сверху у S и C являются индексами, а не степенями. Функции $S^j(x)$ и $C^j(x)$, входящие в (32.7), равны

$$S^j = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^j\, S_n, \qquad C^j = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j\, C_n, \qquad (32.8)$$

где, как обычно, обозначено $S_n = \sin knx$, $C_n = \cos knx$. Коэффициенты S_n^j и C_n^j в (32.8) сложным образом выражаются через коэффициенты A_n и B_n разложений (32.1). Запишем условно эту зависимость так:

$$S_n^j = S_n^j(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \qquad C_n^j = C_n^j(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Подставляя ряды (32.2) и (32.3) в граничное условие (32.7) и преобразуя произведения синусов и косинусов в суммы синусов и косинусов,

мы можем строго доказать, что четные (целые гармоники α_2, α_4, ...) и нечетные (полуцелые гармоники α_1, α_3, ...) коэффициенты в тригонометрических рядах (32.2) и (32.3) *не связаны*. Это означает, что все целые гармоники выпадают из (32.2) и (32.3). Поэтому моды притяжения и конкуренции представляют собой ряды по *полуцелым* синусам и косинусам соответственно.

В этом смысле они аналогичны блоховским функциям

$$b(x,y) = \exp(ik_S x) f(x,y), \qquad f(x+\lambda, y) = f(x,y).$$

Периодическая функция f разлагается в ряд по целым гармоникам nk, $k = 2\pi/\lambda$, n — целые. Поэтому при $k_S = k/2$ функции $b(x,y)$ являются разложениями по полуцелым гармоникам.

В силу сказанного ряды (32.2) и (32.3) равны

$$\varphi_a(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left[-\left(n-\frac{1}{2}\right)ky\right] \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)kx\right] \qquad (32.2')$$

в случае моды притяжения (см. рис. 32.1*а*, *а*1; a — attraction) и

$$\varphi_c(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left[-\left(n-\frac{1}{2}\right)ky\right] \cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)kx\right] \qquad (32.3')$$

в случае моды конкуренции (см. рис. 32.1*б*, *б*1; c — competition).

Из формулы (32.3'), справедливой на линейной стадии развития субгармонической неустойчивости, вытекает, что смещение вверх ускоряющихся (раздувающихся) пузырей (см. рис. 32.1*б*, *б*1) относительно невозмущенного состояния в точности равно смещению вниз замедляющихся (уменьшающихся в размерах) пузырей относительно этого состояния. Действительно,

$$(\varphi_c)_y(0,y) = -(\varphi_c)_y(\lambda,y) = (-1)^n (\varphi_c)_y(\lambda n, y), \qquad (32.9)$$

где n — целые пузыри, а начало координат находится в вершине невозмущенного пузыря.

В случае моды притяжения (32.2') видим, что поле возмущений скорости является нечетным относительно точки $x = 0$.

§ 33. Численное моделирование субгармонической неустойчивости

Основное назначение численных расчетов состояло в исследовании динамики субгармонической неустойчивости. Было необходимо проанализировать эволюцию амплитуды субгармонических собственных функций. Нашей целью являлась оценка темпа роста этой амплитуды (инкремента неустойчивости). Следует отметить, что этот инкремент можно определить прямым численным моделированием в двумерном случае. Например, с помощью моделирования можно определить инкремент РТН гидростатического равновесия с неплохой точностью.

Эволюция КГ в присутствии субгармоники. То, как происходит развитие моды конкуренции, иллюстрирует рис. 33.1*а*. Расчет выполнен

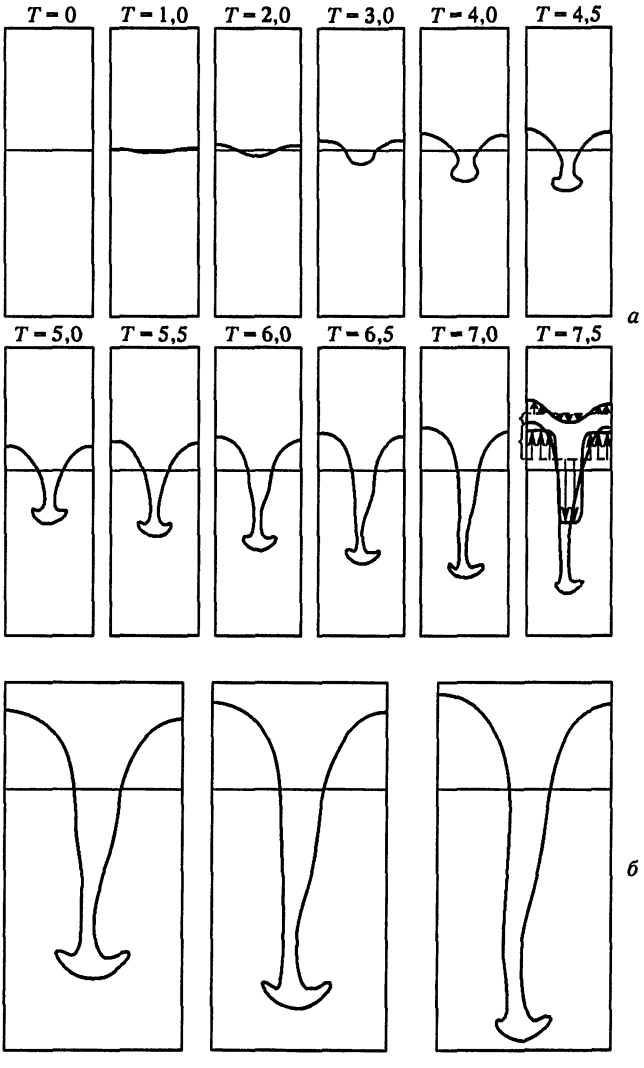


Рис. 33.1. Эволюция КГ при развитии субгармонической моды конкуренции — линейная стадия. Стрелками нанесены эпюры скоростей на срезах выше и ниже невозмущенной вершины пузыря

методом § 18 А. В. Чехловым. Последние три кадра кинограммы 33.1*а* представлены в увеличенном масштабе на рис. 33.1*б*. Основным эффектом является раздувание и смещение вверх 1/2 пузыря на левой стенке

и уменьшение и смещение вниз 1/2 пузыря на правой стенке, см. также схему 32.1*б*, *б*1. Это самая начальная стадия отставания правого пузыря. На нелинейной стадии этот пузырь смывается потоком вниз.

Другим примечательным эффектом является втягивание струи между растущим и убывающим пузырями в растущий пузырь. См. по этому поводу рисунки 18.1 к п. 18.6 и 30.19*б* к п. 30.4. На рис. 33.1*б* видно начало этого процесса, когда эффект проявляется в виде небольшого отклонения струи влево (в сторону растущего пузыря) от вертикальной средней линии расчетной области.

Поле возмущенных скоростей. На последнем кадре кинограммы 33.1*а* нанесены стрелками эпюры вертикальной компоненты скорости v на двух горизонтальных срезах $y = \text{const}$ выше и ниже вершины *невозмущенного* (субгармоническим возмущением) пузыря. Скорости восходящего и нисходящего потоков растут по модулю с увеличением глубины y. Поэтому скорости на срезе над вершиной меньше, чем скорости на срезе под нею, см. рис. 29.10, соответствующий невозмущенному случаю, кривые *1* и *2*. Из-за субгармонического возмущения распределения $v(x,\ y = \text{const},\ t = t_{\text{fix}})$ имеют небольшой перекос — они не симметричны относительно средней вертикальной оси расчетной области. Эта ось проходит по середине невозмущенной струи.

Возмущенные и невозмущенные распределения v по x показаны на рис. 33.2*а* сплошными и штриховыми кривыми соответственно. Невозмущенные распределения взяты с рис. 29.10. Номера *1* и *2*, как и на

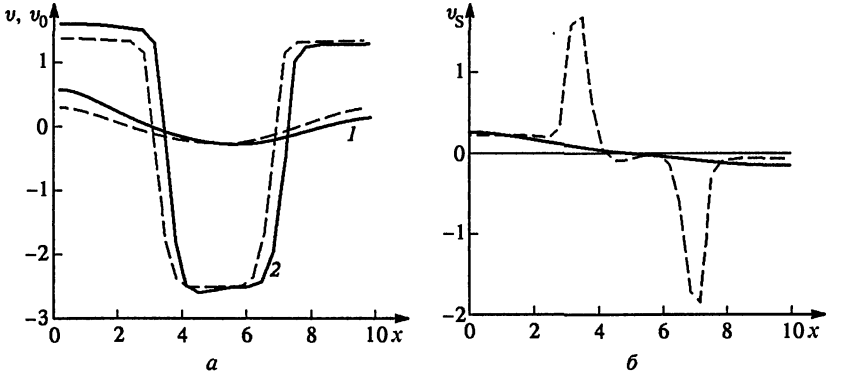


Рис. 33.2. Зависимости полной v (сплошные линии) и невозмущенной v_0 (штриховые линии) скоростей от x в сечениях выше (кривые *1*) и ниже (кривые *2*) вершины невозмущенного пузыря (*а*). Собственно субгармоническое возмущение (его поле скоростей v_S) (*б*). Разность полной и невозмущенной скоростей $v_S = v - v_0$ в сечениях выше (сплошная линия) и ниже (штриховая линия) невозмущенной вершины

рис. 29.10, относятся к срезам над и под невозмущенной вершиной. Хорошо виден перекос, вызванный субгармоническим возмущением.

На рис. 33.2*б* показана разность $v - v_0$ распределений v и v_0, взятых с рис. 33.2*а*. Представлена зависимость $v - v_0$ от x при фиксированных y и

t. Здесь v — это полная вертикальная скорость (невозмущенное течение плюс возмущение), а v_0 — скорость невозмущенного течения. Таким образом, на линейной стадии эта разность дает поправку к невозмущенной скорости, связанную с возмущением $v_S = v - v_0$. Распределение $v_S(x,\ y = \text{const},\ t = t_{fix})$ соответствует собственной субгармонической моде конкуренции. Ее установление к моменту выдачи этого рисунка уже произошло. Сплошная кривая относится к срезу над вершиной невозмущенного пузыря, а штриховая — к срезу под вершиной. Всплески на штриховой кривой вызваны смещением КГ струи. Срезы проведены на глубинах *1* и *2*, показанных на последнем кадре рис. 29.4. Видим, что срез *2* пересекает струю. В точках пересечений и возникают всплески.

Теория собственной моды конкуренции развита в § 32, см. формулу (32.3′) в конце § 32. Коэффициенты ряда (32.3′) быстро убывают. Первая гармоника доминирует. Как видим, распределение v_S от x в тяжелой жидкости (сплошная кривая на рис. 33.2*б*) действительно напоминает функцию $C_{1/2} = \cos\frac{kx}{2}$.

Вершины растущего и уменьшающегося пузырей находятся при $x = 0$ на левой и при $x = \lambda$ на правой границах расчетной области на рис. 33.2*б*, где λ, как всегда, период невозмущенного течения. Поправки к скоростям вершин согласно формуле (32.9) должны иметь противоположный знак и на линейной стадии быть одинаковыми по модулю. Рис. 33.2 относится к последнему кадру на кинограммах 29.4 и 33.1. К этому моменту амплитуда субгармонического возмущения становится уже довольно значительной. Поэтому оно только приближенно может считаться линейным. Отклонение

$$\frac{v_S(x=0,\ y=\text{const},\ t_{fix}) - v_S(x=\lambda,\ldots)}{v_S(x=0,\ldots) + v_S(\lambda,\ldots)}$$

от формулы (32.9) в этот момент равно 20%.

Инкременты собственных мод неустойчивости. Зависимости амплитуд субгармонических возмущений от времени представлены на рис. 33.3. Анализ законов их изменения показывает, что они растут примерно по экспоненциальному закону. Это доказывает существование субгармонической неустойчивости стационарных периодических решений.

Кривая *1* на рис. 33.3*а* иллюстрирует смещение поверхности

$$\delta\eta_S(x,t) = \eta(x,t) - \eta_0(x,t) = \exp(\gamma_S\, t)\ \delta\eta_S(x)$$

относительно положения[5], соответствующего стационарному периодическому решению, при развитии моды притяжения (32.2′) (обозначено $\Delta \equiv \delta\eta_S$). Здесь и далее функция $y = \eta(x,t)$ — задает границу (КГ) при наличии возмущения, $y = \eta_0(x,t)$ — невозмущенная КГ и $\delta\eta_S(x,t)$ — отклонение КГ от стационара — невозмущенного периодического стационарного решения. График *1*, проходящий через кружочки, взятые из

[5]Использование одинаковых обозначений для возмущенных амплитуд как до, так и после разделения времени и пространственной переменной, не должно привести к недоразумениям, так как они содержат различные наборы аргументов.

результатов численного моделирования (позиция/время), дает функцию $\delta\eta_S(x = x_* = -0,2\lambda,\ t)$. В точке $x = 0$ находится вершина невозмущенного пузыря.

В случае моды притяжения расчет проводился при $-\lambda/2 \le x \le \lambda/2$. В данном случае имеются две боковые струи на стенках $x = \pm\lambda/2$ и центральный пузырь. В случае моды конкуренции соответствующая область

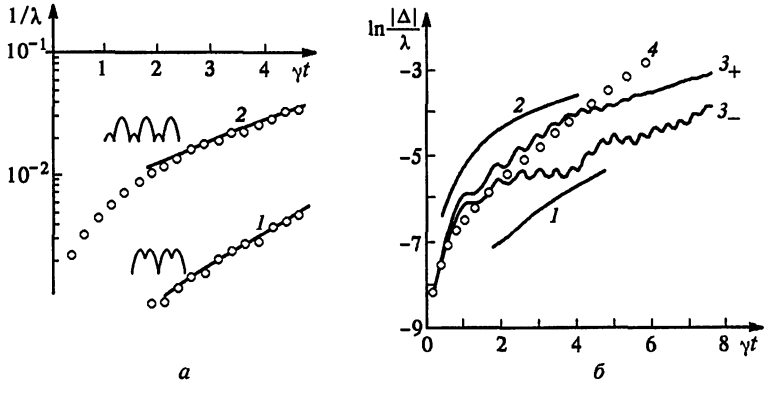


Рис. 33.3. Нарастание субгармонических возмущений. *(а)* Кривые *1* и *2* относятся к модам притяжения (32.2′) ($\Delta = \delta\eta_S(0,2,t)$) и конкуренции (32.3′) ($\Delta = \delta\eta_S(0,t)$) пузырей. Расчет методом §17 (*а*). Кривые *3*$_+$ и *3*$_-$ относятся к вершинам $x = 0$ ($\Delta = \delta\eta_S(0,t)$) и $x = \lambda$ ($\Delta = \delta\eta_S(\lambda,t)$) соответственно, расчет методом §18 (*б*). Кривые *1* и *2* перенесены с рис. *а*. Точки *4* относятся к РТН гидростатического равновесия

была $0 \le x \le \lambda$ и имелась одна центральная струя при $x = \lambda/2$, см. рис. 33.1. Скажем несколько слов о выборе точки x_*, в которой определялась возмущенная амплитуда $\delta\eta_S(x = x_*,\ t)$ в случае моды притяжения (32.2′). С одной стороны эта точка должна находится вне малой окрестности точки $x = 0$, т. к. возмущение представляется рядом по синусам (см. (32.2′)), и поэтому $\delta\eta_S(0) = 0$, $\delta\eta_S(-x) = \delta\eta_S(x)$. Отсюда следует, что вблизи начала координат амплитуда возмущения будет мала и ее трудно будет определить. С другой стороны точка x_* должна находится на некотором расстоянии от струй. Исходя из этого, можно выбрать точку $x_* = -0,2\lambda$.

В случае моды конкуренции зависимость $\Delta \equiv \delta\eta_S(0,t)$ показана кружками *2* на рис. 33.3*а*. Рис. 33.3*а*, *б* получены методами, описанными в § 17 и § 18 соответственно. На рис. 33.3*б* приведены кривые *3*$_+$ и *3*$_-$. Они обе относятся к моде конкуренции (32.3′). Одна построена для $\delta\eta_S(x = 0,t)$ (кривая *3*$_+$, а другая — для $\delta\eta_S(x = \lambda,\ t)$ (кривая *3*$_-$). Эти смещения имеют разные знаки (см. рис. 32.1*б*, *б*1, 33.2 и формулу (32.9)), поэтому здесь взяты их абсолютные значения. Отклонения $\delta\eta_S$ обозначены буквой Δ.

На рис. 33.3*б* кривые *3*$_+$ и *3*$_-$ получены методом § 18, а кривые *1* и *2* перенесены с рис. 33.3*а* для сравнения с ними.

Очень интересной является кривая *4*, помеченная кружками на рис. 33.3*б*. Для численного моделирования линейной стадии субгармонической неустойчивости используется бигармоническое возмущение с амплитудами A_1 и A_2, см. конец § 31 об организации расчетов. Гармоника A_1 развивается в стационар с периодом λ, а гармоника A_2 с длиной волны 2λ представляет возмущение. В случае кривых $3_\pm$ было $|A_1/A_2| = 10$. Кривая *4* получена при $A_1 = 0$ и том же значении A_2, какое было использовано в случае кривых $3_\pm$. Она вычислена по формуле аналитической теории линейного возмущения гидростатики. У кривой *4* величина $|\Delta|$, отложенная по вертикальной оси, дает отклонение не вершин возмущенных пузырей от стационарных, а отклонение вершины пузыря или струи от невозмущенной плоской границы.

Начальные участки кривых *1*, *2* и $3_\pm$ до времен $t \approx \frac{1{,}5}{\sqrt{gk}}$ необходимо отбросить. Дело в том, что в течение этого промежутка происходит (i) установление невозмущенного стационарного течения (стационарного режима подъема невозмущенных пузырей) и (ii) установление собственной субгармонической функции, см. обсуждение в конце § 31, времена t_1, t_2 и $\max\{t_1, t_2\}$. На окончание переходного процесса и образование экспоненциально растущей "чистой" собственной моды (из смеси мод) на фоне стационарных пузырей указывает выход на линейный участок зависимости от t на графиках, приведенных на рис. 33.3*а*, *б*.

Аналогично устроена и кривая *4*. На ней также происходит переход к "чистой" собственной моде от функции $\mathrm{sh}[\gamma_{\mathrm{class}}(2\lambda)\,t]$ (смесь) к $\exp[\gamma_{\mathrm{class}}(2\lambda)\,t]$ ("чистая" мода).

Наиболее важными являются линейные участки зависимостей $\lg|\delta\eta_S|$ (рис. 33.3*а*) или $\ln|\delta\eta_S|$ (рис. 33.3*б*) от t. Из линейности следует экспоненциальный характер роста субгармонических возмущений, а значит и доказательство существования субгармонической неустойчивости. Линейный участок должен быть достаточно продолжительным в единицах времени $1/\gamma_S$. Это необходимо как для доказательства существования, так и для определения инкрементов. В случаях, показанных на рис. 33.3, продолжительность этих участков составляет $(2 - -2,5)/\sqrt{gk}$. В течение линейной стадии имеет место существенное (в разы) увеличение амплитуд возмущений[6]. Оно приблизительно равно $3,5$.

Из наклона графиков на линейных участках определяются инкременты мод субгармонической неустойчивости. Оценки инкрементов, полученные таким образом, имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_S' &= (0,59 \pm 0,07)\sqrt{gk}, \\ \gamma_S'' &= (0,45 \pm 0,05)\sqrt{gk}, \\ \gamma_S''' &= (0,32 \pm 0,05)\sqrt{gk}. \end{aligned} \tag{33.1}$$

[6]Отметим, что зубцы на графиках 3_+ и 3_- возникают в моменты пересечения КГ (за нее принималась средняя изохора, плотность находилась линейной интерполяцией между узлами) границ ячеек сетки.

В (33.1) γ_S' и γ_S'' относятся к методу крупных частиц § 17 для моды притяжения и конкуренции соответственно, а γ_S''' — к методу искусственной сжимаемости § 18 и к моде конкуренции, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны невозмущенного решения[7].

Сравним значения (33.1) с классическим инкрементом на удвоенной длине волны. Инкременты γ_{class} и γ_S относятся к далеким друг от друга случаям равновесия. В первом случае — КГ плоская, и жидкость покоится (гидростатика), во втором — КГ сильно гофрирована стационарными (в ССК) пузырями и имеется существенное течение. Классический инкремент равен $\gamma_{\text{class}}(\lambda) = \sqrt{Agk}$. Отсюда $\gamma_{\text{class}}(2\lambda) = (1/\sqrt{2})\,\gamma_{\text{class}}(\lambda)$ или $\gamma_{\text{class}}(2\lambda) \approx 0,7\,\gamma_{\text{class}}(\lambda)$. Таким образом, инкременты (33.1) составляют $(0,45 \pm 0,12)\sqrt{2/A} \approx 70\%$ от $\gamma_{\text{class}}(2\lambda)$. Отметим отдельно, что инкремент γ_S''' составляет $\approx 50\%$ от $\gamma_{\text{class}}(2\lambda)$, сравните кривые *3*± и *4* на рис. 33.3*б*.

Как видим, гофрировка КГ и течение не приводят к существенному уменьшению инкремента неустойчивости по сравнению с гидростатикой.

Об улучшении численного моделирования линеаризованных решений. Обсудим важный вопрос о том, как можно было бы повысить точность численного моделирования линейной стадии развития субгармонической неустойчивости стационарной цепочки пузырей. Для увеличения точности необходимо:

(i) увеличение точности вычислений;

(ii) увеличение продолжительности линейной стадии.

В приведенных выше вычислениях эта продолжительность составляла $\approx 1,2/\gamma_S''$. Для выполнения условия (i) необходимо использовать более мелкую сетку. Для выполнения условия (ii) требуется уменьшение амплитуды начального субгармонического возмущения. Это в свою очередь приводит к увеличению времени расчета и увеличению вертикального размера расчетной области.

Проверка линейности возмущений. Проверим, удалось ли промоделировать именно линейную стадию развития субгармонической неустойчивости. Свидетельствами линейности являются малость амплитуды, симметричность и экспоненциальность роста возмущений. Перечислим и оценим факторы, по которым можно судить об этом.

(i) Относительные амплитуды $|\delta\eta_S|/\lambda$ субгармонических возмущений малы. По окончании счета они составляют несколько процентов, см. последние кадры кинограмм 33.1*б*.

(ii) Зависимости $\ln|\delta\eta_S|$ приближенно линейны по времени.

(iii) Инкремент гидростатической РТН может быть определен из численных экспериментов, см. рис. 29.7.

---

[7]Замечание о точности моделирования. В идеале результаты, полученные различными методами, должны совпадать. Соответственно должно быть $\gamma_S'' = \gamma_S'''$. На самом деле видим, что $\gamma_S''' = (1/2)(\gamma_S'' + \gamma_S''')(1 - 0,15)$, $\gamma_S'' = (1/2)(\gamma_S'' + \gamma_S''')(1 + 0,15)$. Видимо, это расхождение вызвано погрешностью численных расчетов.

(iv) Из формул (32.2′) и (32.3′) следует, что смещения в окрестности вершины пузыря в моде притяжения гораздо меньше, чем смещения в моде конкуренции при равных начальных амплитудах субгармоник. Моделирование подтверждает, что это действительно так.

(v) Условие симметрии (32.9), которое должно выполняться в линейном режиме развития моды конкуренции, действительно приближенно выполняется.

Другие субгармоники. Заметим, что эти вычисления проводились только для случая $m = 2$. При этом $k_S = k/m$ равно $k/2$. Проблема для $m > 2$ еще не исследована. Однако результаты, полученные для $m = 2$, не оставляют сомнений в неустойчивости стационарного периодического решения при $m > 2$.

Общая оценка. Полученные величины γ_S (33.1) правдоподобны. Из общих соображений следует, что (i) нормированный инкремент $\gamma_S/\sqrt{gk}$ должен быть порядка $\simeq 1$ и (ii) инкременты мод притяжения и конкуренции должны быть вещественны. Оба этих предположения выполняются[8].

§ 34. Зонно-лакунарная структура субгармонического спектра

34.1. Моды, в которых субгармоника доминирует

Ячейка Бриллюэна в пространстве обратных векторов. Субгармонические собственные моды пробегаются непрерывным (квазиимпульс k_S) и дискретным (N) параметрами. В 2D случае квазиимпульсы k_S субгармонических возмущений периодического стационара с периодом $\lambda = 2\pi/k$ находятся в зоне Бриллюэна (ее можно назвать также обратной ячейкой невозмущенной периодической цепочки пузырей). Эта зона равна

$$0 < k_S \leq k/2. \tag{34.1}$$

Если положить $k = 1$, то можно записать (34.1) в виде $k_S \in (0, 1/2]$. В 3D случае ячейка Бриллюэна занимает область на плоскости k_x, k_y (где k_x, k_y — волновые числа по осям x и y), форма которой зависит от симметрии решетки пузырей.

[8] Замечание по литературе. Описанные в §§ 31–33 представления о линейной субгармонической спектральной задаче восходят к работам (Иногамов, 1978; Anisimov et al., 1983; Inogamov et al., 1991b; Anisimov et al., 1993). Парная конкуренция пузырей рассматривалась в работе (Hecht et al., 1994). Окрестности вершин пузырей этой пары аппроксимировались двумя параболами с переменными коэффициентами, а потенциал — суммой косинусов C_1 и $C_{1/2}$. Уравнения гидродинамики были сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по t на коэффициенты парабол и амплитуды при C_1 и $C_{1/2}$. Был исследован переход от течения, близкого к стационару с периодом λ, к течению, близкому к стационару с периодом 2λ. Другой работой, в которой рассматривалась конкуренция и турбулентность, вызванная повторяющимися процессами конкуренции, была работа (Zufiria, 1988). Линейная стадия субгармонической неустойчивости в этих работах не выделялась.

Собственные функции и расщепление на ветви. Рассмотрим зонную структуру $\gamma_S(k_S; N)$ собственных чисел (инкрементов) спектральной задачи. Ее схема представлена на рис. 34.1. Целочисленный параметр N нумерует ветви γ_S. Имеются нижняя ветвь $N = 1$, следующая за ней ветвь $N = 2$, ветвь $N = 3$ и т. д. Собственные моды равны

$$\varphi_S(x, y; k_S; N) = \Re[\exp(ik_S x) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(k_S; N) \exp(inkx - nky)], \quad (34.2)$$

$$\delta\eta_S(x; k_S; N) = \Re[\exp(ik_S x) \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(k_S; N) \exp(inkx)]. \quad (34.2')$$

Самыми важными являются нижние ветви $N = 1$ и $N = 2$. Дело в том, что именно на них первая субгармоника k_S доминирует.

Разрешенные и запрещенные зоны в спектре инкрементов. Ячейка (34.1) является полосой на плоскости γ_S, k_S, "отгороженной" вертикалями $k_S = 0$ и $k_S = k/2$ (точки), см. рис. 34.1. В §§ 32 и 33 проанализирован край 2D зоны Бриллюэна с $k_S = k/2$ и $\gamma_S(k/2)$. Точка h (h — hydrostatic) относится к классическому инкременту РТН $\gamma_{class}(k/2)$, см. рис. 34.1, а точки a и c — к модам попарного притяжения (a — attraction) и конкуренции (c — competition) пузырей. В § 33 показано, что точки a и c лежат ниже точки h (их инкременты меньше). По-видимому, мода притяжения (32.2') с потенциалом φ_a, соответствующая точке a на рисунке, имеет несколько больший инкремент, чем мода конкуренции (32.3') (φ_c, точка c). Лакунами называются запрещенные участки в спектре γ_S. Нижняя лакуна располагается между точками a и c $[(\gamma_S)_c < \gamma_S < (\gamma_S)_a]$. Первой разрешенной является зона $0 < \gamma_S < (\gamma_S)_c$. Вторая разрешенная зона занимает отрезок от точки a до следующей лакуны.

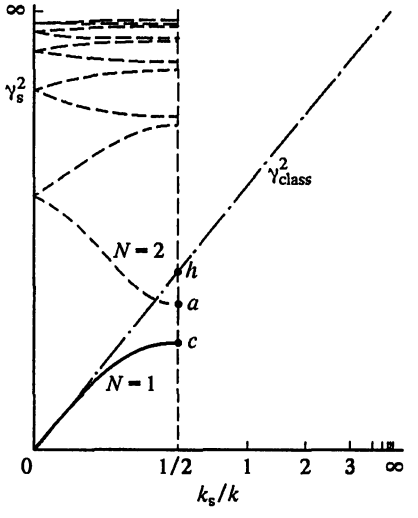


Рис. 34.1. Схема зон и лакун субгармонического спектра. Зона Бриллюэна (34.1) ограничена справа вертикалью, нанесенной точками. Штрихпунктир — классический инкремент РТН $\gamma_{class} = \sqrt{gk}$

Ветвь $N = 1$ монотонно переходит в классическую асимптотику $\gamma_S(k_S; N = 1) \to \gamma_{class}(k_S)$ при $k_S \to 0$ (рис. 34.1). Это связано с тем, что для длинноволновых субгармоник с $k_S \ll k/2$ не существенна мелкомасштабная по сравнению с $1/k_S$ гофрировка на исходном периоде — они

развиваются, как на плоской границе. К точке a на краю $k/2$, образовавшейся после скачка (разрыва, лакуны) дисперсионной кривой вверх из точки c, должен непрерывно примыкать следующий кусок дисперсионной кривой (ветвь $N = 2$). Это показано на рис. 34.1. Сплошными линиями на нем даны участки дисперсионной кривой, для приведенного расположения которых имеются достаточно солидные основания. Структура старших (жестких) ветвей с бо́льшими N является гипотетической. Их возможное расположение намечено штриховыми линиями.

Крупные/мелкие детали — мягкие/жесткие ветви. Наиболее существенны участки, показанные сплошными линиями. Они находятся на нижних (мягких) ветвях. Здесь преобладает первая субгармоника. Это означает, что первые коэффициенты $\varphi_1(k_S; N)$, $\eta_1(k_S; N)$ в рядах (34.2), (34.2′) являются определяющими — следующие за ними коэффициенты быстро убывают.

Субгармонике k_S соответствует масштаб $\lambda_S = 2\pi/k_S$, больший, чем исходный период λ. На линейной и средней стадиях развития $t \lesssim t_{NL}$ нижние или мягкие субгармонические моды осуществляют плавный переход от исходной цепочки пузырей с периодом λ к пространственной структуре пузырей, имеющей масштаб, больший чем λ. Здесь характерное время t_{NL} равно

$$t_{NL} = \frac{1}{\gamma_S(k_S; N = 1)} \ln \frac{1}{|\delta\eta_{0S}|\, k_S + |\delta v_{0S}|\, k_S/\gamma_S},$$

где $\delta\eta_{0S}$ и δv_{0S} — начальные амплитуды возмущений в виде субгармоник. Плавность перехода заключается в том, что мягкие или нижние моды сами по себе не приводят к появлению мелкомасштабной структуры ("шубы") с малыми по сравнению с λ нелинейными деталями внутри пузыря[9].

Физическая важность нижних или мягких мод вызвана следующим. Основой РТ турбулентности является процесс укрупнения масштаба (инверсный каскад, см. ниже гл. VIII). Это укрупнение осуществляется за счет "работы" собственно субгармоник. Субгармоники же в "чистом"[10] виде присутствуют именно в нижних или мягких модах.

34.2. Моды (ветви), в которых доминируют старшие обертоны

Обсудим устройство и характер эволюции при развитии старших или жестких мод. Они относятся к ветвям с большими значениями нумератора N. Собственные функции даются выражениями (34.2), (34.2′). В них присутствуют субгармоники. Но теперь они не преобладают. В этом состоит отличие от мягкого случая. Теперь важнее оказываются старшие обертоны $nk \pm k_S$, $n \gg 1$. Таким образом, в этом случае собственные

[9] Для инициации нижних или мягких мод достаточно бигармонического возмущения из гармоник k (быстрое формирование периодической стационарной цепочки пузырей) и k_S — без старших обертонов (т. е. без мелкомасштабных гармоник).

[10] В "чистом" виде означает, что КГ не "размазана" коротковолновыми деталями, как это имеет место на рис. 18.4 и 18.7.

функции представляют собой "смесь" из суб- и мелкомасштабных гармоник.

Инкременты старших или жестких мод велики. Поэтому за малые времена

$$t \simeq t_{\mathrm{SW}} = [1/\gamma_{\mathrm{S}}(k_{\mathrm{S}}; N \gg 1)]\,|\ln(a_0 k)| \ll \ll (1/\sqrt{gk})\,|\ln(a_0 k)| \sim 1/\sqrt{gk} \qquad (34.3)$$

отрастает "шуба", состоящая из мелкомасштабных гармоник (SW — short waves), рост амплитуды которых насытился (см. п. 18.6). Происходит это так. При $t = 0$ течение было равно

$$F_{SS}(\lambda) + a_0\, f_{\mathrm{S}}(k_{\mathrm{S}};\, N \gg 1), \qquad (34.4)$$

где под $F_{\mathrm{SS}}(\lambda)$ и $f_{\mathrm{S}}(k_{\mathrm{S}}; N)$ подразумеваются потенциал и КГ стационара (SS — steady-state) с периодом λ и субгармонического возмущения соответственно, a_0 — начальная амплитуда этого возмущения. При $t \simeq t_{\mathrm{SW}}$ (34.3) из начальных данных (34.4) возникает течение

$$F_{\mathrm{SS}}(\lambda) + \delta F_{\mathrm{SW}}(\lambda), \qquad (34.5)$$

состоящее из суммы исходного стационара и короткомасштабной "шубы" $\delta F_{\mathrm{SW}}(\lambda)$, изрезывающей поверхность пузырей с периодом λ, см. рис. 18.4 и 18.7. Осцилляции, связанные с "шубой", не затухают. При втором слагаемом в (34.5) пишется приставка δ, чтобы подчеркнуть то, что хотя, вообще говоря, эти слагаемые сопоставимы[11], но доминирующим является первое из них.

Процесс формирования "шубы" из обертонов $nk \pm k_{\mathrm{S}}$, $n \gg 1$ не чувствителен к наличию малоамплитудных субгармоник. Он идет примерно одинаково и при $k_{\mathrm{S}} \neq 0$, и при $k_{\mathrm{S}} = 0$.

Однако, хотя субгармоника не доминирует на малых временах (34.3), она присутствует и остается в спектре по волновым числам и после насыщения мелкомасштабных гармоник. Ее последующее развитие приводит к укрупнению масштаба. Это продолжается в течение промежутка времени порядка обратного инкремента мягких или нижних субгармонических мод, помноженного на фактор $|\ln(a_0 k_{\mathrm{S}})|$. Но теперь это не плавное укрупнение

$$F_{\mathrm{SS}}(\lambda) \to F_{\mathrm{SS}}(\lambda_{\mathrm{L}}), \qquad \lambda_L > \lambda,$$

в котором мелкомасштабные детали подавлены за счет экспоненциального сглаживания[12], а укрупнение структур (34.5), "одетых" мелкомасштабными "шубами". Оно имеет вид

$$F_{\mathrm{SS}}(\lambda) + \delta F_{\mathrm{SW}}(\lambda) \to F_{\mathrm{SS}}(\lambda_{\mathrm{L}}) + \delta F_{\mathrm{SW}}(\lambda_L).$$

[11] Здесь нет малого параметра.

[12] Это означает, что амплитуды старших гармоник убывают экспоненциально с ростом номера гармоники.

§ 35. Рациональные и иррациональные квазиимпульсы в ячейке Бриллюэна

Между линейными субгармониками и инверсным каскадом. Если в § 34 рассматривалась линеаризованная задача (спектр, собственные функции), то настоящий раздел посвящен описанию нелинейной судьбы индивидуальных субгармонических мод. Эти моды задаются точками k_S/k в ячейке (34.1)[13]. Оказывается, их судьба определяется числовыми свойствами (степенью рациональности) этих точек!

В линеаризованной задаче точки внутри ячейки (34.1) равноправны между собой — инкременты и блоховские функции являются бесконечно дифференцируемыми функциями от k_S[14]. Расслоение ячейки на совокупность отдельных точек вызвано нелинейностью — резонированием и интерференцией волновых чисел в старших нелинейных порядках между основной гармоникой k и субгармоникой k_S.

Субгармоники играют определяющую роль в процессе укрупнения масштаба. В свою очередь укрупнение является основным механизмом развития РТ турбулентности, поскольку она представляет собой каскад укрупнений (см. следующую главу). Поэтому данный раздел занимает промежуточное положение между теориями субгармонической неустойчивости и РТ турбулентности.

Классы несоизмеримости. Рассмотрим отношение k_S/k. Оно может быть рациональным или иррациональным числом. В первом случае $k_S/k = 1/2$, или $k_S/k = 1/m$ $(m > 2)$, или $k_S/k = n/m < 1/2$, где n, m — целые, взаимнопростые или несократимые числа. Во втором случае $k_S/k = \xi$, где ξ — иррациональное число. Если $k_S/k = \xi$, то гармоники k_S и k называются несоизмеримыми[15].

35.1. Точка k_S/k, ее рациональное представление n_N/m_D и соответствующая ей эволюция

Переход, связывающий стационары с разными периодами. Простейший случай. Рассмотрим моды[16] $k_S = k/m_D$, m_D — целое, $m_D \geq 2$. Их развитие на фоне стационара с периодом $\lambda = 2\pi/k$ приводит к формированию нового стационара с периодом, равным $m_D\lambda$. Переход занимает

[13] Ограничимся участками дисперсионной кривой с $N = 1$ и $N = 2$, показанными сплошными линиями на рис. 34.1. Обсуждению специфики динамики, связанной со старшими ветвями, посвящен п. 34.2.

[14] Исключение составляет только крайняя точка $k/2$, в которой располагаются лакуны.

[15] Субгармоническая неустойчивость рассматривалась в работах (Иногамов, 1978; Anisimov et al., 1983; Inogamov et al., 1991b; Anisimov et al., 1993). В работе (Inogamov et al., 1991b) теоретически проанализирована роль несоизмеримости, рассмотрены рациональные аппроксимации несоизмеримых отношений и другие связанные с этой проблемой вопросы. Там же представлены результаты численного моделирования течения, стартующего от несоизмеримых гармоник. Показано, что несоизмеримости достаточно для генерации спонтанной РТ турбулентности. Позже аналогичное численное моделирование было повторено в работе (Ofer et al., 1996, с. 3084).

[16] Ниже будет рассмотрен более общий случай, когда $k_S/k = n_N/m_D$, где индексы N и D означают числитель и знаменатель соответственно.

промежуток времени $\simeq (1/\sqrt{gk_S})\ |\ln(a_{0S}k_S)|$. Траектория, соединяющая стационары, стартует из инфинитезимальной окрестности стационара $F_{SS}(\lambda)$ и заканчивается (асимптотически) в стационаре $F_{SS}(m_D\lambda)$. В частности, при $m_D = 2$ происходит удвоение периода. В этом и заключается укрупнение масштаба.

При $m_D \sim 1$ происходит изменение масштаба в разы, а при $m_D \gg 1$ масштаб увеличивается во много раз. Во втором случае на линейной стадии возмущение представляет собой длинноволновую (по сравнению с периодом цепочки) модуляцию[17] цепочки стационарных пузырей.

Разветвление путей, связывающих пары одинаковых периодов λ_S (малый) и λ_L (большой). Рассмотрим точки

$$k_S/k = n_N/m_D \tag{35.1}$$

(N — numerator, D — denominator). Период невозмущенного исходного стационара λ обозначим λ_S. Период стационарного периодического течения, устанавливающегося вследствие развития возмущения (35.1), равен

$$\lambda_L = m_D\lambda_S. \tag{35.2}$$

Как видим, он зависит *только* от величины знаменателя в (35.1). Поэтому все субгармонические моды (35.1) с равными m_D и разными числителями n_N порождают траектории, связывающие стационары с одинаковыми периодами λ_S и λ_L (35.2)[18].

Но сами траектории, по которым происходит переход $\lambda_S \to \lambda_L$, различны.

Числа n_N должны быть взаимно простыми со знаменателем m_D. В ячейке Бриллюэна (34.1) квазимпульс (35.1) подчиняется неравенству $n_N/m_D \leq 1/2$. Для каждого m_D имеется ограниченный набор таких взаимно простых числителей

$$1 < (n_N)_1 < (n_N)_2 < (n_N)_3 < \ldots < (n_N)_{max}. \tag{35.3}$$

35.2. Устройство траекторий. Степень узловатости

Займемся описанием различий траекторий, связывающих одинаковые пары периодов. Первому значению ($n_N = 1$) в наборе (35.3) соответствует простейшая траектория с монотонно растущей амплитудой модуляции, рассмотренная выше в п. 35.1. Динамика течения, связанного с квазиимпульсом (35.3) $(n_N)_i$, $i > 1$, оказывается более сложной. Чтобы разобраться в его устройстве, введем понятия об "узле" или промежуточном стационаре на пути $\lambda_S \to \lambda_L$ и "замирании" движения на этих стационарах. Сравним число "узлов" (степень узловатости) на траекториях с $n_N = 1$ и с $(n_N)_i$, $i > 1$.

Анализ узловатости и статистики "замираний" откроют смысл иррациональных квазиимпульсов и спонтанной РТ турбулентности.

[17] См. начальные кадры кинограмм 18.4 и 18.7.

[18] Возможно, что стационары эти являются разными, хотя они и имеют одинаковый период (35.2). О простых и сложных стационарах см. ниже.

Модуляционные ($k_S \ll k$) и общие ($k_S \sim k$) траектории. Приближение к иррациональности и турбулентности требует $m_D \to \infty$. Фиксируем числитель $m_D \gg 1$. Рассмотрим набор (35.3), связанный с данным числителем. Число "узлов" на траекториях в этом наборе растет вместе с ростом числителя n_N от 1 до $(n_N)_{max}$. Траектории с i, близкими к левому краю (35.3), похожи на траекторию с $n_N = 1$ в том смысле, что "узлов" немного и они находятся в области больших масштабов $> (m_D/n_N)\lambda_S$. Эти масштабы велики, поскольку при $m_D \gg 1$ на левом краю имеем $n_N/m_D \ll 1$. В диапазоне масштабов от λ_S до $(m_D/n_N)\lambda_S$ происходит рост амплитуды модуляции цепочки с периодом λ_S. Период модуляции равен $(m_D/n_N)\lambda_S$.

Рост времени и рост масштаба $\langle\lambda\rangle$. Траектории описывают развитие движения во времени. Как будет видно в гл. VIII, при определенных условиях движение оказывается автомодельным. Будем называть соответствующие траектории автомодельными. Траектории или их отрезки, на которых происходит усиление длинноволновой модуляции, не являются автомодельными. Таковы начальные отрезки траекторий, порожденных квазиимпульсами с левого края набора (35.3).

С точки зрения анализа турбулентности наибольший интерес представляют автомодельные траектории. Они находятся на правом краю набора (35.3) при $n_N/m_D \sim 1$ ($n_N/m_D \leq 1/2$, см. (34.1) и (35.1)).

В связи с этим рассмотрим квазиимпульс $n_N/m_D \sim 1$. С ростом t растет характерный масштаб $\langle\lambda\rangle$ крупномасштабных структур в слое перемешивания[19]. Запишем $\langle\lambda\rangle = m\lambda_S$. Отношение m растет с t от 1 до m_D. Рассмотрим целые значения m. Обозначим их m_A.

Будем держать в поле зрения рост целых m_A с ростом t и одновременно будем аппроксимировать рациональное число n_N/m_D числом n_A/m_A (A — approximation). Такая аппроксимация требуется для нахождения промежуточных стационаров ("узлов"). Рассмотрим точность аппроксимации. Запишем

$$\frac{\delta(m_A)}{m_A} = \frac{n_N}{m_D} - \frac{n_A}{m_A}. \tag{35.4}$$

В (35.4) значения m_A берутся по порядку. Они равны $m_A = 1, 2, 3, \ldots, m_D$. При данном m_A числитель n_A выбирается таким образом, чтобы погрешность $|\delta|$ была наименьшей. Нетрудно видеть, что δ изменяется на интервале

$$-1/2 \leq \delta \leq 1/2. \tag{35.5}$$

При $m_A < m_D$ погрешность δ не может обратиться в нуль, поскольку числитель n_N и знаменатель m_D несократимы.

Сказанное относительно множественности траекторий $\lambda_S \to \lambda_L$ пояснено на рис. 35.1*а*. На нем левая траектория относится к $n_N = 1$, а правая — к $(n_N)_{max}$. Кроме них имеются еще другие траектории из набора (35.3), не показанные на рисунке.

[19] Определение и подробное обсуждение характерного горизонтального масштаба $\langle\lambda\rangle$ дано в следующей главе.

Статистика "замираний". Рассмотрим функцию $1/|\delta(m_A)|$. Согласно (35.5) имеем $1/|\delta(m_A)| \geq 2$. Ее график представлен на рис. 35.1*б*. В це-

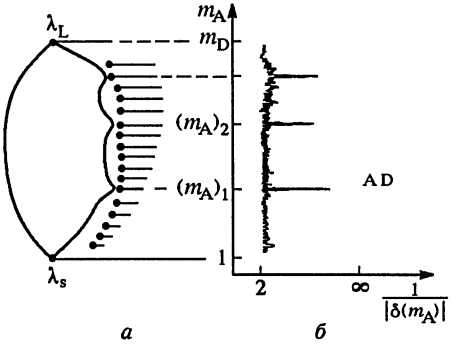


Рис. 35.1. Крайние траектории из набора (35.3). Левая траектория относится к левому краю этого набора ($n_N = 1$). Она является модуляционной (*а*). Правая траектория является траекторией общего положения. Она относится к квазиимпульсам $n_N/m_D \sim 1$, лежащим около правого края набора. Значения случайной функции $1/|\delta(m_A)|$ в целочисленных точках m_A (*б*). Ее максимумы соответствуют точкам $(m_A)_i$, в которых дробь n_A/m_A хорошо аппроксимирует квазиимпульс k_S/k, см. (35.4). Это означает, что траектория проходит близко от стационаров с периодами $(m_A)_i\lambda_S$. Эти значения m_A связаны штриховыми прямыми с точками, символизирующими стационары, с периодами $(m_A)_i\lambda_S$ на рис. *а*

лочисленных точках m_A она в основном принимает случайные значения порядка единицы. Изредка встречаются удачные значения m_A, обозначенные $(m_A)_1$, $(m_A)_2$, ..., хорошо аппроксимирующие квазиимпульс n_N/m_D (см. (35.4)). В точках $m_A = (m_A)_i$ значения $|\delta[(m_A)_i]|$ малы.

На рис. 35.1*а* точки означают стационары F_{SS}. Черточка при точке символизирует период этого стационара. Ее удлинение означает рост периода. Правая траектория проходит близко от промежуточных стационаров ("узлов") $F_{SS}[(m_A)_i\lambda]$, на которых мала погрешность $|\delta|$. Вблизи "узлов" происходит уменьшение ускорения $a_+ = \ddot{h}_+$, с которым фронт перемешивания продвигается по тяжелому веществу[20]. Это и называется "замиранием" движения.

Спектры модуляционных и общих траекторий. Итак, на траекториях с усилением длинноволновой модуляции изменение $\langle\lambda\rangle$ и перестройка спектра Фурье происходят "рывком" от малого к большому периоду (см. левый переход на рис. 35.1*а*), а на траекториях общего положения изменение $\langle\lambda\rangle$ и соответственно эволюция фурье-спектра происходят плавно[21] (см. правый переход на рис. 35.1*а*). На модуляционных траекториях ($k_S \ll k$) спектр Фурье состоит из смеси далеко разнесенных гармоник. На общих ($k_S \sim k$) траекториях спектр имеет плавно смещающийся с ростом t максимум при $k_{max} \simeq 2\pi/\langle\lambda\rangle$ и ширину $\Delta\lambda$ "бугра" около него. В этом состоит его отличие от модуляционного спектра, не имеющего ни максимума, ни ширины.

Обычно $\Delta\lambda \simeq \langle\lambda\rangle$. На редких промежуточных станциях ("узлах") имеем $\Delta\lambda \ll \langle\lambda\rangle$ — это минимумы отношения $\Delta\lambda/\langle\lambda\rangle$, как функции от

[20] Подробнее о слое перемешивания будет сказано в следующей главе.

[21] Усредненная эволюция вне краев инерционного интервала, связанных с пределами λ_S и λ_L, является автомодельной. Редкие "замирания" в этом отношении не существенны.

m_A. Они достигаются при $m_A = (m_A)_i$. Кроме того, $\Delta\lambda = 0$ на старте движения и при прибытии системы в крайний стационар с периодом λ_L.

Сравнивая модуляционные и общие траектории, необходимо отметить, что первые проходят на большом "расстоянии" от всех стационаров[22] с промежуточными периодами $\lambda_S < \lambda < \lambda_M$, где λ_M — период модуляции. Напротив, вторые идут в основном на расстоянии "порядка единицы", а изредко и очень близко[23], от стационаров с периодом $\lambda = \langle\lambda\rangle$, где $\langle\lambda\rangle$ — текущее значение масштаба на общей траектории.

Будем говорить, что на общих траекториях осуществляется инверсный каскад — последовательная смена состояний, находящихся недалеко от стационаров, со все возрастающим периодом.

Иррациональный предел. Иррациональный квазиимпульс ξ получается при $m_D = \infty$. При этом $\lambda_L = \infty$. В этом случае дроби n_A/m_A (35.4) являются рациональными аппроксимациями ξ. Квазиимпульс ξk порождает инверсный каскад вдоль общего вида траектории, при котором масштаб меняется от $\sim 1/\xi k$ до ∞. При $\xi \sim 1$ масштаб первых звеньев каскада порядка исходного периода. Каскад состоит из простых[24] звеньев, в течение которых за время $\sim \sqrt{g/\langle\lambda\rangle}$ происходит изменение масштаба $\langle\lambda\rangle$ в разы.

35.3. Механизм генерации бóльших масштабов из текущих

Важность субгармонической неустойчивости. Рассмотрим гармонику с волновым числом k. На нелинейной стадии появляются обертоны nk — происходит развитие спектра в коротkомасштабную сторону. В случае двух гармоник или гармоники k и субгармоники k_S при нелинейном взаимодействии спектр расширяется как в коротковолновую (комбинации $k + k_S$), так и в длинноволновую стороны (биения $k - k_S$). Длинноволновые гармоники при нелинейном взаимодействии образуются всегда. Но само по себе взаимодействие не приводит к усилению длинноволновых составляющих. Таким образом, главным здесь является не просто нелинейность, а именно сочетание нелинейности с субгармонической неустойчивостью.

Рациональность отношения k_S/k, единица и предельный период. Рассмотрим гармоники k_S и k. Пусть отношение k_S/k рационально ($k_S/k = n_N/m_D$). Важно то, что вместе с целыми числами n_N и m_D появляется единица. Она такова, что, например, число m_D в целое число раз больше

[22] Для измерения "расстояния" или разницы между функциями в функциональном пространстве требуется некоторая относительная норма $2\,||F_1 - F_2||/||F_1 + F_2||$. В этом смысле здесь говорится о расстояниях порядка единицы и далеких расстояниях.

[23] Тесное сближение системы, двигающейся по траектории, со стационарной точкой происходит при $m_A = (m_A)_i$.

[24] Простые или короткие звенья "порядка единицы" противопоставляются длинным участкам длиной во много единиц, на которых происходит усиление длинноволновой модуляции. Если цепочка простых звеньев является общей или устойчивой, в том смысле, что возникает в широком классе начальных данных, то модуляционные траектории являются исключительными — для их осуществления требуется специальный выбор исходных данных.

ее. С появлением единицы легко решается вопрос о предельном периоде λ_L (L — large). Единица относится к нему, а число m_D — к исходному периоду λ или λ_S (S — small). Поэтому выполняется (35.2).

Единице соответствует волновое число k_*, такое, что гармоники k_S и k находятся среди его обертонов nk_* ($k_S = n_N k_*$, $k = m_D k_*$). Число k_* является максимальным из возможных. Оно определяет минимальный размер ящика $\lambda_L = 2\pi/k_*$, собственными модами которого являются гармоники k_S и k. В иррациональном случае ящик получается бесконечно большим.

Таким образом, приходим к ряду Фурье, внутри которого оказываются гармоники k_S и k.

В конечном ящике (трубе) λ_L при $t \to \infty$ должен устанавливаться стационар[25] вида $F_{SS}(\lambda_L) + \delta F_{SW}(\lambda_L)$. Напомним, что рассматривается случай с $\mu = 0$ или A = 1. (ii) Стационаров может быть много, см. ниже п. 35.4 Он является сильным аттрактором, притягивающим *все* траектории, стартующие из любых начальных данных, в которых заложен размер ящика (трубы).

Лестница биений, алгоритм Евклида и субгармоническая неустойчивость. Как показано выше, имеются соответствия $1 \leftrightarrow k_*$, $n_N \leftrightarrow k_S$ и $m_D \leftrightarrow k$. Посмотрим, из чего складывается инверсный каскад — пробирание от больших волновых чисел k_S и k к малому (предельному) волновому числу k_* или — эквивалентно — пробирание от чисел n_N и m_D к 1. Тут имеются две составные части. Во-первых, важна "лестница" биений. Ее "ступеньками" являются дискретные волновые числа

$$k_{IJ} = I\,k_S - Jk \tag{35.6}$$

или целые числа $j_{IJ} = I\,n_N - Jm_D$. Волновые числа k_{IJ} и целые числа j_{IJ} заполняют промежуток между k_* и k_S и между 1 и n_N соответственно. Они являются инфрагармониками по отношению к гармоникам k_S и k.

Имеются такие "намотки" I_{EU} и J_{EU} (EU — Euclid), что "лестница" (35.6) упирается в последнюю "ступеньку" — в единицу. При этом (35.6) принимает вид

$$k_* = I_{EU}\,k_S - J_{EU}\,k, \qquad 1 = I_{EU}\,n_N - J_{EU}\,m_D. \tag{35.7}$$

Способ нахождения I_{EU} и J_{EU}, входящих в (35.7), путем цепочки делений с остатком, называется алгоритмом Евклида (Математическая энциклопедия, т. 2, с. 397).

Во-вторых, важно усиление субгармоник. Вследствие этого длинноволновый хвост (35.6) не затухает быстро с удалением по лестнице от первой "ступеньки" k_S из-за роста порядка нелинейности, а с течением времени усиливается.

Итак, "лестница" биений генерирует последовательность увеличивающихся масштабов или уменьшающихся волновых чисел, а субгармоническая неустойчивость усиливает амплитуды этих инфрагармоник.

[25] (i) Возможно, это стационар с незатухающим короткомасштабным шумом (см. п. 34.2).

35.4. Сложность и множественность стационаров

Глава VI посвящена исследованию цепочек простых пузырей в нестационарных и стационарных режимах. В простом стационаре (или нестационаре) на период приходятся один пузырь и одна струя, см. § 27. Представляются возможными стационарные цепочки, в которых на периоде располагаются n пузырей и n струй. Будем называть их сложными стационарами. Очевидно, что существуют нестационарные цепочки такого вида. Гипотеза, в пользу которой имеются определенные доводы, состоит в предположении о возможности существования таких сложных стационаров.

Стационары представляют асимптотики нестационарной эволюции системы — они притягивают траектории, см., например, рис. 26.5. Они дискретны — образуют стационарные точки системы (см. обсуждение вопроса о Θd и 1d решениях в п. 27.5). Посмотрим, пределом каких траекторий могли бы быть сложные стационары.

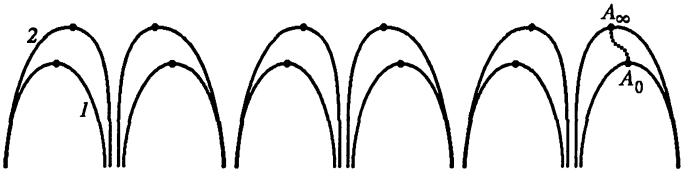


Рис. 35.2. Притяжение и насыщение притяжения пузырей

Моды удвоения периода. Рассмотрим субгармоническую неустойчивость с $m_D = 2$ (§§ 32, 33). Имеются моды притяжения (32.2′) и конкуренции (32.3′). Их нелинейное развитие показано на рисунках 18.2 и 18.1 соответственно. Схема процесса при отношении плотностей $\mu = 0$ представлена на рис. 35.2 и 35.3. Расчеты, показанные на рисунках 18.2 и 18.1, выполнены при $\mu \ll 1$ ($\mu = 0,1$)[26].

Мода конкуренции. Схема конкуренции дана на рис. 35.3. Номера *1*, *2* и *3* относятся к последовательным моментам времени $t_1 < t_2 < t_3$. В начальный момент t_1 субгармоническое возмущение очень мало. Это означает, что цепочка

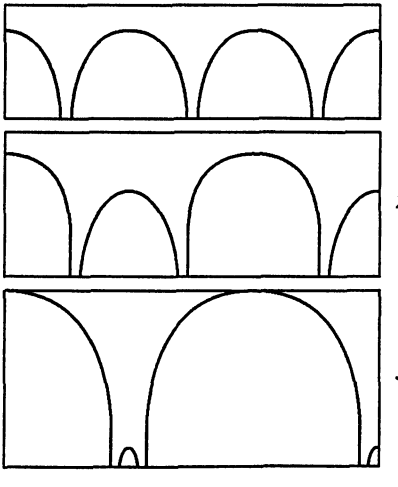


Рис. 35.3. Конкуренция пузырей

[26]Из-за того, что $\mu \neq 0$, происходит втягивание перемычек в раздувающиеся пузыри. Перемычки образуются слабыми струйками, разделяющими раздувающиеся и сокращающиеся пузыри. При $\mu = 0$ этого явления нет.

пузырей близка к простому стационару $F_{SS}(\lambda; 1)$, где n индекс в скобках $F_{SS}(\lambda; n)$ указывает число пузырей и струй на период. С течением времени в парах пузырей происходит раздувание одного и сжатие другого пузырей. На промежуточной стадии имеется цепочка из двух струй и двух пузырей на период течения. Но асимптотически мелкий пузырь смывается струей вниз (см. момент t_3 на рис. 35.3) и опять образуется простой стационар с $n = 1$. Переход имеет вид $F_{SS}(\lambda; 1) \to F_{SS}(2\lambda; 1)$.

Мода притяжения. Рассмотрим моду притяжения, развитие которой представлено на рис. 35.2. Номера *1* и *2* относятся к последовательным моментам времени $t_1 < t_2$. При t_1 амплитуда моды мала. Поэтому цепочка пузырей близка к простому стационару $F_{SS}(\lambda; 1)$. Вершины пузырей, показанные точками на кривых *1*, находятся на расстояниях $\approx \lambda$.

С течением времени амплитуда возмущения экспоненциально нарастает. Соответственно экспоненциально нарастает отклонение от вертикальной прямой, по которой поднималась бы вершина A_0 невозмущенного пузыря, см. рис. 35.2. Экспоненциальное нарастание продолжается, пока отклонение от невозмущенного состояния мало. Мода притяжения исследована численно, см. § 33. Смещения здесь малы, поэтому определить ее инкремент трудно. При достижении определенного конечного отклонения экспоненциальный рост прекращается — происходит насыщение моды притяжения.

Пусть Δ/λ — относительное отклонение вершин A_0 и A_∞ друг от друга по горизонтали, см. рис. 35.2. Считаем, что кривая *1* относится к невозмущенной цепочке простых пузырей, а кривая *2* — к асимптотическому стационару. Как видим, происходит переход

$$F_{SS}(\lambda; 1) \to F_{SS}(2\lambda; 2).$$

Обсуждение стационара $F_{SS}(2\lambda; 2)$ с двумя пузырями на период. В пользу такого сценария говорят существование собственной моды притяжения (32.2′), экспоненциальность роста линейной моды (довод 1) и то, что в вершине пузыря имеется коротковолновая РТН, которая не позволяет стянуть уменьшающуюся струю в "нуль"[27] (довод 2). Из довода 2 следует, что процесс ослабления струи будет где-то остановлен. Кроме того, в численных расчетах не видно стягивания струи в "нуль", и в то же время заметна асимметрия пузыря, ограниченного с одной стороны более сильной, а с другой стороны более слабой струями. В виде поясняющей схемы это показано на рис. 35.2. Возьмем, например, крайний правый пузырь. Он имеет слева (справа) струю более слабую (сильную), чем невозмущенная струя исходного течения $F_{SS}(\lambda; 1)$.

Стационар $F_{SS}(2\lambda; 2)$, показанный кривой *2* на рис. 35.2, состоит из цепочки пар асимметричных (скошенных) пузырей. В самой верхней точке КГ располагается вершина A_∞. Она является точкой торможения, в которую крестообразно по вертикальным и горизонтальным прямым входят и выходят линии тока. Вершины A_∞ образуют сближенные пары.

[27] Ранее в работах (Иногамов, 1978; Inogamov et al., 1991b) предполагалось, что асимптотически происходит исчезновение слабеющей струи.

Величина смещения по горизонтали $\Delta/(\lambda/2)$ стационарных вершин A_0 и A_∞ небольшая — вообще говоря, она порядка единицы, но по динамическим причинам она оказывается численно невелика.

Возможно, что скорость стационара $F_{SS}(2\lambda;\,2)$ (кривая *2* на рис. 35.2; речь идет о скорости подъема пузырей, см. гл. VI) немного больше, чем скорость стационара $F_{SS}(\lambda;\,1)$ (кривая *1*).

Гипотеза о "фрактальных" стационарах $F_{SS}(\lambda;\,\infty)$. Приведенные выше доводы 1 и 2 и численные наблюдения указывают на существование стационара $F_{SS}(\lambda;\,2)$. Рассмотрим стационары $F_{SS}(\lambda;\,1)$ и $F_{SS}(\lambda;\,2)$. Стационар $F_{SS}(\lambda;\,1)$ состоит из симметричных пузырей и равных струй J_S (S — strong). Преобразуем $F_{SS}(\lambda;\,1)$ в $F_{SS}(\lambda;\,2)$. Согласно сказанному, в вершине пузыря $F_{SS}(\lambda;\,1)$ следует отрастить слабую струйку J_W (W — weak). Она делит исходный пузырь на два асимметричных пузыря. Струйку J_W нельзя "залечить". Струи J_S и J_W не выравниваются с течением времени — асимметрия пузырей сохраняется. Пара асимметричных пузырей образует период.

Итак, важнейшее значение имеет посадка струйки J_W в вершину — точку торможения с вертикально/горизонтальным крестом линий тока в ее окрестности.

Если это так, то в вершины асимметричных пузырей A_∞, см. рис. 35.2, можно снова посадить струйки J'_W. В результате, видимо, возникнет стационар $F_{SS}(\lambda;\,4)$ следующего поколения с четырьмя пузырями/струями на период. Продолжая этот процесс дробления пузырей, приходим к "фрактальному" стационару $F_{SS}(\lambda;\,\infty)$.

Один период стационара $F_{SS}(\lambda;\,4)$ состоит из 1/2 струи J_S, пузыря *1*, струи J'_W, пузыря *2*, струи J_W, пузыря *2*, струи J'_W, пузыря *1* и 1/2 струи J_S, см. рис. 35.4. Пузыри *1*, *2* и струи J_S, J_W, J'_W все разные.

Рассмотрим сечения струй горизонталью $y = -\alpha/k$, где $\alpha > 0$, $\alpha \sim 1$, $k = 2\pi/\lambda$. Горизонталь $y = 0$ проходит через вершины пузырей. Согласно интегралу Бернулли, при равных давлениях внутри пузырей все вершины находятся на одной горизонтали. Сечения струй образуют отрезки на прямой $y = -\alpha/k$. Имеется иерархия больших и малых отрезков. По-видимому, их ширины по порядку величины распределены по геометрической прогрессии от размера $\sim \lambda$ и до нуля, а множество точек границ этих отрезков похоже на Канторово. В этом и заключается "фрактальность" стационара $F_{SS}(\lambda;\,\infty)$. Скорости v_n стационаров $F_{SS}(\lambda;\,n)$ отличаются немного.

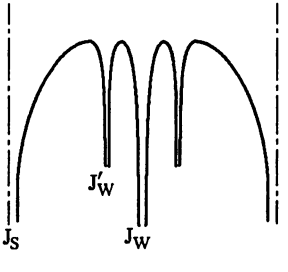


Рис. 35.4. Стационар $F_{SS}(\lambda;\,4)$ — прообраз "фрактального" стационара. Один период находится между штрихпунктирными вертикалями

Спектр многопузырных стационаров. Рассмотрим спектр Фурье многопузырных стационаров $F_{SS}(\lambda;\,n)$. Спектр простого стационара $n = 1$ дается (27.23). В этом случае доминирует первая гармоника k. В слу-

чае $n = 2$ доминируют уже две первые гармоники k и $2k$. Причем, по-видимому, амплитуда второй гармоники больше первой. Амплитуды гармоник, следующих за ними, быстро убывают. В случае произвольного n имеется некоторое количество первых доминирующих обертонов. Главное следствие из сказанного заключается в том, что в периодическом решении с периодом $\lambda = 2\pi/k$ максимум фурье-образа может находиться не на гармонике k, а на гармонике k_{max}, которая в разы больше, чем k. Соответственно, период λ в разы больше, чем $\lambda_{\max} = 2\pi/k_{\max}$.

Об одно- и двухпузырных моделях крупномасштабных структур и отношении $\langle\lambda\rangle/h_+$. Данный раздел является подготовительным по отношению к следующей главе, посвященной турбулентности. Рассмотрим один вопрос, относящийся к ней, касающийся фурье-образа многопузырных стационаров и отношения $k_{\max}/k$ или $\lambda/\lambda_{\max}$.

В слое перемешивания существует крупномасштабная структура. Она характеризуется средним масштабом $\langle\lambda\rangle$. Имеются процедуры его оценки по мгновенной картинке КГ и/или ρ, $\mathbf{v}$, p полей. Они состоят в оценке размера среднего пузыря или в отыскании максимума Фурье-образа какой-то из гидродинамических функций.

Важным является геометрическое отношение $\langle\lambda\rangle/h_+$, где h_+ — толщина перемешанного слоя в сторону тяжелой среды. Займемся его оценкой. Имеем $h_+ = \alpha_+ g t^2$, здесь положено, что $\mu \ll 1$ и $A \approx 1$. Тогда скорость расширения равна $\dot{h}_+ = 2\alpha_+ g t$ или

$$\dot{h}_+ = \sqrt{4\alpha_+ g h_+}\,. \tag{35.8}$$

Положим, что

$$\dot{h}_+ = \mathrm{Fr}\sqrt{g\,\langle\lambda\rangle}\,. \tag{35.9}$$

Исключая $\dot{h}_+$ из уравнений (35.8) и (35.9), получаем

$$G = \frac{\langle\lambda\rangle}{h_+} = \frac{4\,\alpha_+}{(\mathrm{Fr})^2}. \tag{35.10}$$

Если взять $\alpha_+ = 0,05 - 0,1$ и $\mathrm{Fr} = 0,20 - 0,27$, то из (35.10) получим

$$G = \frac{\langle\lambda\rangle}{h_+} = 2,7 - 10. \tag{35.11}$$

В этом заключается одна из трудностей теории, поскольку значение (35.11) получается в несколько раз большим, чем наблюдаемое.

Эта трудность снимается, если в качестве модели крупномасштабной структуры принять не одно-, а многопузырный стационар.

Рассмотрим периодическую модель крупномасштабной структуры. В ней случайными флуктуациями пренебрегают[28] и описывают структуру

[28] Крупномасштабная структура описывается случайно-периодической функцией со средним масштабом $\langle\lambda\rangle$ и флуктуациями около него $\Delta\lambda \sim \langle\lambda\rangle$ (подробнее об этом пойдет речь в следующей главе). Флуктуации являются начальными возмущениями для субгармонической неустойчивости. Их усиление приводит к укрупнению $\langle\lambda\rangle$. В периодической модели периодическую составляющую усиливают, полагая $\Delta\lambda \ll \langle\lambda\rangle$.

стационаром с периодом Λ. Не будем отождествлять Λ и $\langle\lambda\rangle$. Равенства $\Lambda = \langle\lambda\rangle = \lambda_{\max}$ справедливы только для однопузырной модели. Скорости v_n стационаров $F_{SS}(\Lambda; n)$ равны $v_n = (\mathrm{Fr})_n\sqrt{g\Lambda}$. По-видимому, числа Fr довольно устойчивы. Их значения при всех n остаются примерно одинаковыми $(\mathrm{Fr})_n = 0,2 - 0,27$. Тогда трудность (35.11) снимается за счет того, что в многопузырном стационаре период Λ и максимум спектра $\lambda_{\max}$ различны. При этом средний масштаб определяется максимумом $\langle\lambda\rangle = \lambda_{\max}$, а период Λ, от которого зависит скорость расширения, в несколько раз больше $\lambda_{\max}$, а значит, и $\langle\lambda\rangle$.

Повторим это заключение. Согласно сказанному, (35.9) необходимо записать в другом виде. А именно, должно быть $\dot{h}_+ = \mathrm{Fr}\sqrt{g\Lambda}$. Тогда (35.11) примет вид $\Lambda/h_+ = 2,7 - 10$. При этом $\langle\lambda\rangle$ связано с Λ соотношением $\langle\lambda\rangle = \Lambda/(k_{\max}/k)$, которое сильно уменьшает наблюдаемый масштаб $\langle\lambda\rangle$ по сравнению с периодом Λ.

35.5. О дискретном и непрерывном спектрах

Бигармоники и субгармоники. Выше зачастую рассматривалась ситуация с малоамплитудной субгармоникой k_S (квазиимпульсом) на фоне гармоники k. На самом деле многое из изложенного распространяется на бигармонический случай с двумя гармониками q и k $(q < k)$ сопоставимой амплитуды, когда нет подчиненности одной из гармоник другой. Квазиимпульс находится в ячейке Бриллюэна (34.1). Гармоника q может располагаться вне ячейки (при $1/2 < q/k < 1$). Это не существенно, поскольку переход к блоховским функциям и к квазиимпульсу вместо импульса состоит в замене q на $k - q$, приводящей $k - q$ в ячейку.

"Грязный" и "чистый" случаи. Выше рассматривалась идеализированная постановка со строго дискретными линиями в спектре волновых чисел. Это было необходимо для анализа механизма генерации масштабов. Идеальная (чистая) система детерминирована — она бесконечно долго держит (помнит) заложенные в нее в начальный момент размеры и только из них комбинирует новые масштабы.

В реальной (грязной) системе линии размыты. Это связано с несколькими обстоятельствами. (i) При бесконечных размерах наряду с дискретными возможны непрерывные спектры. (ii) В эксперименте краевые условия не являются "отражающими всегда точно". Это приводит к расплыванию линий. (iii) При численном моделировании из-за погрешностей появляются гармоники, пропущенные в комбинациях типа (35.6). Все это, так сказать, ситуации с "малой грязью", для которых характерно расплывание линий. Имеются и случаи с "сильной грязью". В них спектры непрерывные или состоят из очень густого набора линий. Эти случаи наиболее существенны для анализа турбулентности (случайно-периодические функции и их фурье-образы). Они разбираются в следующей главе.

В связи с этим отметим следующее. Выше рассматривалось иррациональное отношение бигармоник q/k. Пара несоизмеримых гармоник

порождает инверсный каскад по ступенькам (35.6), который асимптотически (при $h_+ \gg 1/q$) становится автомодельным $h_+ = \alpha_+ (\mathrm{A})\, gt^2$, где α_+ или $\alpha^+_{\mathrm{SPONT}}$ автомодельный коэффициент. Если рассмотреть n несоизмеримых гармоник q_1, q_2, ..., q_n, то автомодельность устанавливается на масштабах бóльших $\max\{1/q_1, 1/q_2, \ldots, 1/q_n\}$. При этом из-за обогащения лестницы (35.6) с ростом числа составляющих выход на автомодельность (в единицах $\max\{1/q_1, 1/q_2, \ldots\}$) происходит немного быстрее. В случае начальных возмущений, заполняющих непрерывно короткомасштабную область $q > q_{\min}$, спонтанная автомодельность устанавливается на масштабах, бóльших $1/q_{\min}$.

Глава VIII
ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

Турбулентность, обусловленная РТН (т. е. рэлей-тейлоровская турбулентность), представляет собой сложное многоплановое явление. Обычно ее связывают с приграничной гидродинамической активностью, резким ростом/запутыванием контактной поверхности и распадом/перемешиванием первоначально гладких компактных образований, хотя она существует и в случае непрерывной стратификации в отсутствие контактных поверхностей. Важнейшую роль в теории РТ турбулентности играет рассматриваемый в данной главе случай скачка плотности ρ в несжимаемой жидкости, разделяющего две однородные по ρ области. По существу исследование турбулентной динамики в случае скачка образует основу всех дальнейших построений, в которых турбулентность осложняется дополнительными физическими эффектами, например абляционным уносом вещества, учет которого необходим в лазерных приложениях.

Важность случая скачка обусловлена тем, что при этом турбулентность в широком классе начальных условий является автомодельной, а следовательно, универсальной и относительно простой.

Единственной постоянной, содержащей размерности $[L]$ и $[T]$, является ускорение g. Малые масштабы (вязкий, капиллярный и т. п.) стянуты в нуль, большие (внешние) — бесконечны. Тогда толщина перемешанного слоя растет по автомодельному закону $h = \alpha(\mu, \epsilon) g t^2$, где $\mu = \rho_D/\rho_U$, $\mu = (1 - A)/(1 + A)$, $A = (1 - \mu)/(1 + \mu)$ — число Атвуда, а ϵ — относительная амплитуда однородных (автомодельных) длинноволновых начальных возмущений.[1] При несущественности этих возмущений коэффициент пропорциональности α зависит от единственного безразмерного параметра задачи μ или A [$\alpha(\mu)$ или $\alpha(A)$].

Опишем некоторые давно принятые обозначения. В перемешанном слое выделяют два фронта перемешивания — верхний и нижний. Они окаймляют сверху и снизу слой перемешивания. Пусть текущие позиции этих фронтов, отсчитанные от текущего положения КГ в одномерном расчете (т. е. в отсутствие неустойчивости и турбулентности), равны h_+ и h_-. Соответственно и коэффициент пропорциональности α представляется в виде суммы

$$\alpha = \alpha_+ + \alpha_-,$$

[1] Она равна $2\pi\delta\eta_0(\lambda)/\lambda$ или $\delta\eta_0(k)\,k$ в случае возмущений КГ. В случае возмущений скорости используется значение $\delta v_0(k)/\mathrm{Fr}\sqrt{(1-\mu)g/k}$. Число Fr берется из формул (27.22) или (27.22′).

поскольку полная толщина h равна

$$h = h_+ + h_-.$$

При несущественности однородных (автомодельных) длинноволновых начальных возмущений значения a_+ и a_- являются функциями от единственного безразмерного параметра задачи $a_+(\mathrm{A})$ и $a_-(\mathrm{A})$. Записывают

$$a_+ = \alpha_+ \mathrm{A}.$$

Оказывается, что α_+ слабо зависит от A. Обычно этой зависимостью пренебрегают. В общем случае, т.е. при наличии однородных начальных шумов достаточной амплитуды, имеем $a_+(\mathrm{A}, \epsilon) = \alpha^+(\epsilon)\mathrm{A}$.

§ 36. Общий план

Для случая скачка выполняются перечисленные ниже свойства турбулентности. Имеет смысл привести их вкратце в виде общего плана, перед тем, как перейти к более детальному изложению.

(i, ii) Крупные или доминирующие структуры (i). Двухпотоковость и характерный масштаб (ii). Доминирование двухпотоковости в крупных структурах. Существование выраженного горизонтального масштаба $\langle\lambda\rangle$ этих структур.

(iii, iv) Субгармоническая неустойчивость (iii) и рост масштаба (iv). Важная роль субгармонической или длинноволновой (см. гл. VII) неустойчивости периодического течения. Она приводит к экспоненциальному росту амплитуд субгармоник λ/n, $n = 2, 3, \ldots$ периодического течения, здесь λ — период периодического течения. Именно эта вторичная (по отношению к неустойчивости симметричного гидростатического равновесия) неустойчивость ответственна за рост среднего масштаба $\langle\lambda\rangle$ со временем. Рост $\langle\lambda\rangle$ в свою очередь приводит к ускорению темпа турбулентного перемешивания.

(v, vi) Каскад укрупнений во времени или инверсный каскад (v). Термин инверсный означает, что масштаб доминирующих в слое турбулентного перемешивания вихрей растет с течением времени. В этом смысле инверсный каскад обратен прямому, например, колмогоровскому каскаду, в котором основным является процесс дробления вихрей, приводящий к уменьшению их масштаба. Автомодельность каскада (vi).

(vii) О двух источниках субгармонических возмущений. (vii.a) Случай спонтанной турбулентности. Забывание начальных данных через одно звено каскада. Источник субгармоник — апериодичность случайно-периодических функций. Важная роль длинноволнового (в пространстве волновых чисел k) крыла этих функций. (vii.b) Случай стимулированной турбулентности. Источник субгармоник — длинноволновые начальные возмущения. Частичное сохранение фазовой "памяти" о начальных данных. Лакунарные функции. Однородные (автомодельные)[2] начальные возмущения. Автомодельность стимулированной турбулентности.

[2]Пространственная однородность (масштабная инвариантность) начальных возмущений влечет за собой автомодельность последующей динамики.

(viii) Числовая малость коэффициента турбулентного перемешивания $\alpha^+_{\rm SPONT}$ в спонтанном случае[3], ($\alpha^+_{\rm SPONT} = h^+_{\rm SPONT}/{\rm A}\ gt^2$). То, что для стимулированной турбулентности вообще находится место, вызвано именно малостью этого коэффициента. Зависимость коэффициента $\alpha^+_{\rm STIM}(\epsilon)$ стимулированной автомодельной турбулентности от относительной амплитуды ϵ однородных (автомодельных) начальных возмущений. Отсутствие стимулированной турбулентности при отсутствии однородных начальных возмущений $\alpha^+_{\rm STIM}(0) = 0$. Монотонность функции $\alpha^+_{\rm STIM}(\epsilon)$. При $\epsilon \simeq 1$ имеем $\alpha^+_{\rm STIM} \simeq 1$. Существование пороговой относительной амплитуды $\epsilon_{\rm THR}$, при которой

$$\alpha^+_{\rm STIM}(\epsilon_{\rm THR}) = \alpha^+_{\rm SPONT},$$

$$\alpha^+_{\rm STIM}(\epsilon) < \alpha^+_{\rm SPONT}, \quad \epsilon < \epsilon_{\rm THR},$$

$$\alpha^+_{\rm STIM}(\epsilon) > \alpha^+_{\rm SPONT}, \quad \epsilon > \epsilon_{\rm THR}.$$

Предельная чистка (полировка) мишени. В случае автомодельной турбулентности, когда микро $l_{\rm S}$ и макро $L_{\rm L}$ масштабы далеко разнесены (S — small, L — large) ($\ln L_{\rm L}/l_{\rm S} \gg 1$) и нас интересует инерционный интервал, нет смысла тратить усилия на понижение амплитуды начальных возмущений ниже пороговой амплитуды $\epsilon_{\rm THR}$ путем технологической чистки мишени. Из-за числовой малости коэффициента $\alpha^+_{\rm SPONT}$ в спонтанном случае и пороговая амплитуда оказывается небольшой $\epsilon_{\rm THR} \sim 0,007$. Это значение как раз лежит в области тех средних или промежуточных значений относительной амплитуды возмущений, которые представляют существенный технологический интерес.

(ix) Возможность использования статистических гидро- и газодинамических подходов. Применимость теории пути перемешивания. Аппроксимация с помощью одного яруса вихревых ячеек.

§ 37. Горизонтальное устройство слоя перемешивания — двухпотоковость и крупные структуры

37.1. Качественные свойства блочного перемешивания

Поле скоростей. Рассмотрим пространственную структуру турбулентной области (слоя). В момент t ее толщина равна $h \sim gt^2$. Модуль вертикальной компоненты скорости $|v(x,y,z,t)|$, усредненный по горизонтальным переменным x и y, обозначенный $\langle |v(x,y,z,t)| \rangle_{x,y}$, не зависит от x и y и равен $|v(z,t)|$. Скорость $|v(z,t)|$, как функция от z, сосредоточена в турбулентном слое и экспоненциально затухает при смещении по z вниз и вверх из этого слоя на расстояниях порядка $\sim 2\pi/\langle\lambda\rangle$. Это гладкая аналитическая функция, имеющая максимум по z внутри перемешанного слоя. При автомодельной турбулентности в ее переменных эта функция равна

$$(1/gt)|v(\xi)|, \quad \xi = z/gt^2.$$

[3]Здесь и ниже за автомодельный коэффициент $\alpha^+_{\rm SPONT}$ будем принимать предельное значение этого коэффициента, см. конец § 35.

Координата максимума $z_{\max} = \xi_{\max} g t^2$, где $\xi_{\max}$ — фиксированное число. Оценка опускающегося вниз под действием гравитации потока массы равна $\dot{M} \sim \rho\sqrt{gh}$. Соответственно мощность гравитационного источника энергии $\dot{E} \sim \rho(gh)^{3/2}$.

Размер вихревых ячеек или выделенный масштаб. В турбулентном слое существует большая (либо крупная, либо доминирующая) структура. Она имеет характерный горизонтальный масштаб $\langle\lambda\rangle$, который меняется с течением времени. Этот текущий масштаб определяет мгновенную скорость расширения перемешанного слоя. Пусть t_{obs} — произвольный момент времени. Соответствующие значения h и $\langle\lambda\rangle$ равны h_{obs} и $\langle\lambda\rangle_{\text{obs}}$. Структура $\langle\lambda\rangle_{\text{obs}}$ доминирует. Это означает, что в данный момент именно от нее зависят значения $\dot{M}$ и $\dot{E}$. Действительно, нелинейные скорости или скорости насыщения короткомасштабных по отношению к $\langle\lambda\rangle_{\text{obs}}$ мод малы по сравнению со скоростями, связанными с доминирующей структурой, поскольку они пропорциональны корню из масштаба $\sim \sqrt{g\lambda}$. Коротокомасштабные структуры имеют большой гидростатический инкремент $\gamma = \sqrt{Agk}$ и доминируют на ранних временах. Длинноволновые по отношению к $\langle\lambda\rangle_{\text{obs}}$ моды к моменту t_{obs} не успевают развиться, поскольку их гидростатические инкременты малы.

Доминирование означает также, что амплитуда гармоник с $k \sim \langle k\rangle_{\text{obs}} = 2\pi/\langle\lambda\rangle_{\text{obs}}$ максимальна в данный момент времени в спектре Фурье. Таким образом, имеется характерный масштаб $\langle\lambda\rangle$. В силу автомодельности для характерных масштабов должно выполняться условие $\langle\lambda\rangle \sim gt^2$. Отсюда следует, что масштабы h и $\langle\lambda\rangle$ одного порядка $h \sim \langle\lambda\rangle$.

Горизонтальная структура. Рассмотрим устройство полей скорости и плотности. Доминирующая структура представляет собой горизонтальный ряд вихревых ячеек, который собственно и образует слой перемешивания. Флуктуации плотности скоррелированы с флуктуациями вер-

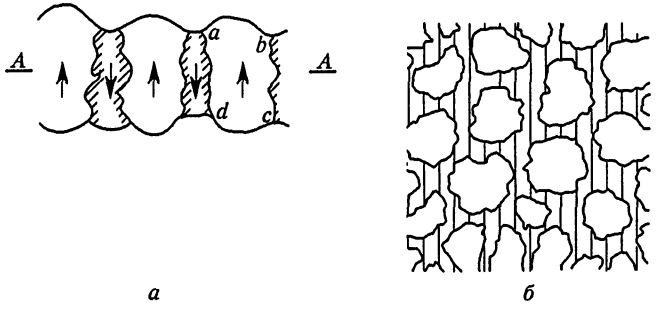


Рис. 37.1. Доминирующие структуры в турбулентном слое, 2D случай *а*; 3D случай *а* — вид сбоку, то есть в сечении, проходящем через вектор **g**, *б* — вид сверху в сечении А–А, показанном на рис. *а*. Это сечение перпендикулярно вектору **g**

тикальной скорости. В уплотнениях скорость направлена вниз, а на малоплотных участках — вверх, см. рис. 37.1. Возникает двухпотоковая доминирующая структура, состоящая из тонущих (седиментирующих

или оседающих) уплотнений, они заштрихованы, и всплывающих (флотирующих) разряжений, см. также рис. 2.2*д*, 3.1*в*, 3.2*в* и 7.2*а*. Она ответственна за крупномасштабное перемешивание или перемешивание большими блоками (chunk или chump mixing). Мелкомасштабное перемешивание до малых масштабов, обусловленных диффузией, поверхностным натяжением или вязкостью, осуществляется (i) на ранних стадиях перемешивания и (ii) на текущей стадии в окрестности границ ad и bc, см. рис. 37.1*а*, особенно в области окончаний шляпок грибов, см. п. 30.1 из-за комбинированной неустойчивости Рэлея–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца, а также (в 3D случае) отчасти, из-за флуктуаций скорости, обусловленных колмогоровским каскадом.

Направление вертикальной скорости в крупных "блоках" показано стрелками на рис. 37.1*а*. На участках ad и bc вертикальная скорость $v(x,y,t)$ (2D случай) или $v(x,y,z,t)$ (3D случай) равна нулю. Сверху и снизу вихревые ячейки ограничивают кривые ab и dc, на которых скорость $|\mathbf{v}|$ становится меньше 1% от максимальной скорости. Завихренность сосредоточена возле границ ad и bc уплотнений и разряжений, на которых вертикальная скорость меняет знак. Завихренность имеет разный знак на границах ad и bc, см. п. 30.3. Возникают вихревые пары (диполи), стремящиеся покинуть турбулентный слой и таким образом расширяющие его, см. рис. 5.2.

В 2D случае доминирующая структура имеет вид валов, перпендикулярных плоскости рисунка, см. рис. 37.1*а*. В 3D случае картина в вертикальной плоскости, проходящей через вектор $\mathbf{g}$, остается в качественном отношении такой же, как на рис. 37.1*а*. Однако в сечении, перпендикулярном вектору $\mathbf{g}$, крупная 3D структура совершенно другая, см. сечение A–A на рис. 37.1*а*. Вместо системы параллельных полос–валов образуется ячеистая структура, показанная на рис. 37.1*б*, см. также рис. 30.2. Здесь заштрихованы участки повышенной плотности. Малоплотное вещество всплывает в изолированных друг от друга относительно округлых пузырях (считается, что μ невелико). Струи опускающегося тяжелого вещества образуют заштрихованную сетку, стенки которой изолируют пузыри друг от друга. Наиболее мощные опускающиеся потоки образуются в местах пересечения стенок. Сетка имеет характерный масштаб $\langle\lambda\rangle \sim h \sim gt^2$. Она аналогична сетке струй опускающейся радиационно охлажденной плазмы в грануляционном конвективном слое на Солнце. О конвекции на Солнце см. книги (Thomas & Athey, 1961; Zirin, 1966; Gibson, 1973; Phillips, 1992). Но в отличие от Солнца, где характерный масштаб постоянен, здесь он растет со временем.

Постоянным является средний масштаб грануляции. Положения самих пузырей и струй случайным образом меняются во времени. На рис. 37.1*б* представлены мгновенные позиции областей подъема и опускания жидкости. Это же (относительно постоянства среднего масштаба и переменности фазовой информации) переносится на автомодельную стадию РТ турбулентности. При этом вместо горизонтальных переменных x на рис. 37.1*а* (2D случай) и x, y на рис. 37.1*б* (3D случай) речь идет об автомодельных переменных x/gt^2 и x/gt^2, y/gt^2 соответственно.

Отметим, что на ранних стадиях изучения РТ неустойчивости в 3D геометрии полагалось, что и опускающиеся струи, и поднимающиеся пузыри образуют сопряженные решетки изолированных точек. На самом деле в отношении тяжелых струй это справедливо только на линейной и слабо нелинейной стадиях развития неустойчивости, п. 30.2. Отметим также асимметрию между опускающимся и поднимающимся потоками. А именно, вне области применимости приближения Буссинеска плотные струи уже и их средняя скорость больше, чем у малоплотных пузырей.

37.2. Преобразование Фурье и статистика блочного перемешивания

Случайно-периодические функции. Рассмотрим фурье-спектры и статистические свойства функций, описывающих крупномасштабное турбулентное перемешивание. Типичная функция $f(x)$ представлена на рис. 37.2*а*. Она флуктуирует около среднего значения, проведенного штриховой прямой. Это может быть распределение плотности или вертикальной скорости, например, $f(x) = v(x, y_{\rm obs}, t_{\rm obs})$ в 2D случае, здесь считается, что горизонтальная плоскость $y_{\rm obs}$ находится в турбулентном слое, значение $t_{\rm obs}$ — произвольно.

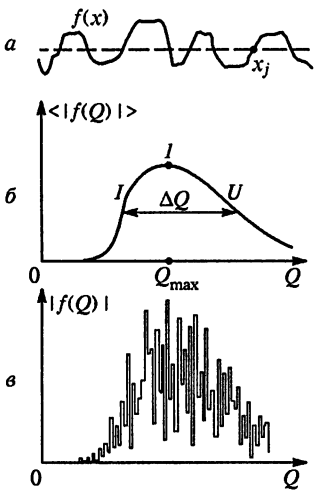


Рис. 37.2. Доминирующие структуры являются случайно-периодическими функциями (*а*). Усредненный по промежуткам $\Delta_1 Q$ ($\delta Q \ll \Delta_1 Q \ll \Delta Q$, где δQ — расстояние между иглами) или сглаженный фурье-образ случайно-периодической функции (*б*). Фурье-образ СП функции до сглаживания (*в*). Он имеет иглообразный вид

Эти функции имеют следующие два важнейших свойства. Во-первых, существует характерный или средний масштаб, который мы условились обозначать $\langle\lambda\rangle$. Во-вторых, они не являются строго периодическими. Это означает, что соседние "ямы" и "холмы" на рельефе $f(x)$ являются неровными и неодинаковыми. Причем обычно эти неровности и несовпадения "порядка единицы". А именно, масштаб неровностей $\Delta\lambda$ и характерный масштаб $\langle\lambda\rangle$ одного порядка $\Delta\lambda \sim \langle\lambda\rangle$. Чтобы подчеркнуть, с одной стороны, существование характерного масштаба (периодичность), а с другой стороны, важность флуктуаций около него (случайность), будем называть эти функции случайно-периодическими функциями.

Они могут иметь мелкомасштабную, например, фрактальную, подструктуру с малой амплитудой $\Delta f \ll f$, а могут быть бесконечно дифференцируемыми. Эти функции повсеместно встречаются при описании турбулентности. В частности, в этом классе оказываются траектории

$f(t)$ задачи о странном аттракторе (в этом случае функция бесконечно дифференцируема), а также функции, описывающие нерегулярные колебания давления на корме, возникающие в результате стохастического виляния следа за обтекаемым телом при больших значениях числа Рейнольдса.

Координатное представление случайно-периодических функций. Представим модель этих функций. Расположим последовательность точек x_j, $-\infty < j < \infty$ на оси x по правилу

$$x_{j+1} = x_j + \langle\lambda\rangle + \Delta\lambda\ \xi, \tag{37.1}$$

где $\xi = \xi_j$ — случайная функция, среднее значение которой $\langle\xi\rangle$ равно нулю, а ширина распределения около среднего $\sqrt{\langle(\xi - \langle\xi\rangle)^2\rangle}$ равна $1/2$. Тогда моделью функции $f(x)$ с вычтенным средним $f(x) - \langle f\rangle$ будет полином

$$\prod_{j=-\infty}^{\infty} (x - x_j), \tag{37.2}$$

проходящий через нули (37.1) функции $f(x) - \langle f\rangle$, см. рис. 37.2*а*.

Импульсное представление случайно-периодических функций. Рассмотрим фурье-образ $f(Q)$ случайно-периодической функции $f(x)$. По определению он равен

$$f(Q) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iQx}\, dx, \quad f(Q) = a(Q) + ib(Q). \tag{37.3}$$

Соответственно непрерывное разложение функции $f(x)$ по гармоникам равно

$$f(x) = \Re \int_{-\infty}^{\infty} f(Q)\, e^{-iQx}\, dQ = \int_{-\infty}^{\infty} [a(Q)\cos Qx + b(Q)\sin Qx]\, dQ. \tag{37.4}$$

Усредненная функция $\langle R(Q)\rangle$, $R(Q) \equiv |f(Q)|$ имеет максимум при

$$Q_{\max} \simeq 2\pi/\langle\lambda\rangle,$$

см. рис. 37.2*б*, точка *1*. Характерная ширина пакета волн равна $\Delta Q \sim$ $\sim Q_{\max}$ при $\Delta\lambda \sim \langle\lambda\rangle$, поскольку $\delta Q = 2\pi\,\delta\lambda/\lambda^2$ и $\delta Q/Q = \delta\lambda/\lambda$. В случае узкого пакета $\Delta Q \ll Q_{\max}$ имеем $Q_{\max} \approx 2\pi/\langle\lambda\rangle$ и $\Delta\lambda \ll \langle\lambda\rangle$. Формы левого ("инфракрасного" I) и правого ("ультрафиолетового" U) крыльев спектра определяются разными физическими механизмами. Поэтому спектр, вообще говоря, несимметричен относительно максимума. В случае бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ спектр $\langle R(Q)\rangle$ экспоненциально убывает при $Q \to \infty$,

$$\langle R(Q)\rangle \sim \exp\left(-Q/\alpha\, Q_{\max}\right), \quad \alpha \sim 1.$$

В случае мелкомасштабной фрактальной изрезанности функции $f(x)$ убывание $R(Q)$ степенное. Характер убывания функции $R(Q)$ при $Q \to 0$ (форма "инфракрасного" крыла) имеет особо важное значение. Этот вопрос обсуждается в следующих разделах.

Дельта-коррелированность фурье-образа случайно-периодических функций. Примечательной особенностью фурье-образа случайно-периодических функций является его игольчатость, см. рис. 37.2*в*. Покроем отрезок $\sim \Delta Q$ счетным множеством точек Q_j. В каждой точке и модуль R_j, и фаза ψ_j:

$$f(Q) = R(Q) \exp[i\psi(Q)]$$

принимают свои — отдельные от соседних точек — значения

$$|R_{j+1} - R_j| \sim R_j, \quad R_j = |f(Q_j)|,$$

$$|\psi_{j+1} - \psi_j| \sim \psi_j, \quad \psi_j = \psi(Q_j).$$

Значения фазы равномерно случайно рассеяны по отрезку $[0, 2\pi]$. Значения как модуля, так и фазы в соседних точках статистически независимы. Значения a_j и b_j (37.3) разложения $f(x)$ по cos и sin (37.4) случайно распределены в положительной и отрицательной окрестности нуля $a = 0$, $b = 0$ по некоторому вероятностному распределению

$$|a_{j+1} - a_j| \sim |a_j|, \quad |b_{j+1} - b_j| \sim |b_j|,$$

$$a(Q) = \Re f(Q), \quad b(Q) = \Im f(Q), \quad a_j = a(Q_j), \quad b_j = b(Q_j). \qquad (37.5)$$

Плотность вероятности нахождения a_j на отрезке $[a_j, a_j + da_j]$ убывает с ростом $|a_j|$:

$$w(a_j; Q) = \frac{dp(a_j; Q)}{da_j}. \qquad (37.6)$$

Поскольку значения a_j в соседних точках статистически независимы, то в каждой точке Q_j соответствующие значения a_j и b_j (37.5) располагаются по вероятностному распределению $w(a_j; Q)$ (37.6) или $w(b_j; Q)$ независимо. Плотность вероятности $w(a_j; Q)$ (37.6) непрерывно зависит от волнового числа Q. Поэтому, в частности, среднеквадратичное значение a_j является непрерывной функцией от Q

$$\langle a^2 \rangle(Q) = 2 \int_0^\infty a_j^2 \, w(a_j; Q) \, da_j,$$

$\int_{-\infty}^{\infty} w(a_j; Q) \, da_j = 1$. Рис. 37.2*в*, выполненный в виде гистограммы, подчеркивает то, что функции $R(Q)$, $\psi(Q)$, $a(Q)$ и $b(Q)$ нельзя сгладить, рассмотрев отрезки между точками Q_j и Q_{j+1}. Их надо представлять либо в виде ступенчатых функций, либо в виде суммы по j дельта-функций $\delta(Q - Q_j)$.

Происхождение игольчатости. Причиной такого устройства является то, что случайно-периодическая функция и ее фурье-образ должны быть информационно эквивалентны. В полиномиальной модели (37.2) случайно-периодическая функция $\Pi(x - x_j)$ содержит записи о нулях $\ldots$, x_j, x_{j+1}, $\ldots$ Этих нулей в среднем по два на масштаб $\langle \lambda \rangle$. Фурье-образ

содержит столько же пар записей (a_j, b_j) на отрезке $\sim \Delta Q$. Каждая запись о нуле при фиксированном j содержит непрерывно меняющееся число x_j. Поэтому и значения a_j и b_j при фиксированном j должны меняться непрерывно внутри конечного отрезка, см. рис. 37.3.

На рис. 37.3*а* ось x разбита на отрезки $\langle\lambda\rangle$. На каждом отрезке находится пара нулей $(x_l, x_r)_j$, помеченных точками. Они располагаются

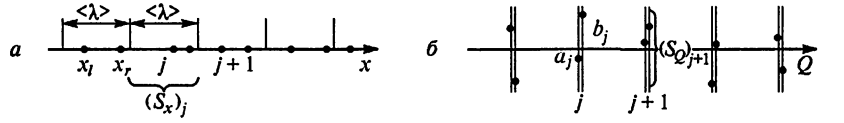


Рис. 37.3. Точками выделены нули случайно-периодической функции (*а*). Амплитуды Фурье a_j и b_j отдельных игл, занумерованных индексом j (*б*)

внутри отрезка $\langle\lambda\rangle$ по некоторому случайному закону. Совокупности отрезков на оси x, пронумерованных индексом j, соответствует совокупность точек Q_j на оси Q, см. рис. 37.3*б*. В каждой точке располагается пара амплитуд $(a, b)_j$. Множества нулей и амплитуд эквивалентны в информационном отношении, поскольку они связаны преобразованием Фурье. Поэтому и амплитуды, и нули меняются на непрерывных отрезках $(S_Q)_j$ и $(S_x)_j$ соответственно. Это означает, что, например, амплитуда a_j не только меняет знак от точки к точке, но и модуль. Следовательно, функция $|a(Q)|$ не является непрерывной.

Покажем то, что множества нулей и амплитуд равномощны. Рассмотрим отрезок L случайно-периодической функции. Пусть $L/\langle\lambda\rangle = N \gg 1$. Внутри отрезка функция разлагается в ряд Фурье. Шаг по волновому числу в этом ряду равен $\delta Q = 2\pi/L$. Поэтому на отрезке ΔQ располагается $\Delta Q/\delta Q \simeq QL/2\pi \simeq L/\langle\lambda\rangle = N$ точек этого ряда. Отсюда и следует требуемое.

Разумеется, сказанное не означает, что имеется попарное соответствие между элементами x_j (37.2) и $(a, b)_j$ (37.3). Действительно, изменение любого одного из элементов x_j вызывает изменения всех элементов множества $\{(a, b)_j\}$. В то же время, для наглядности, видимо, полезно будет отметить то, что функции $a(Q)$ и $b(Q)$ представляют собой как бы функцию $f(x)$ с ее случайно-периодическими колебаниями около бесконечной оси x в сжатом на конечный отрезок виде. Поэтому, так сказать, "периоды" этих "сжатых" колебаний (толщина игл) так малы.

Длины корреляции. Стохастическое перемешивание "игл" связано со стохастическим перемешиванием скоррелированных конечных цепочек из нескольких соседних масштабов $\langle\lambda\rangle$ между собой. Чтобы показать это, рассмотрим парный коррелятор

$$K(\Delta) = \langle f(x)\, f(x+\Delta)\rangle_x, \quad K(\Delta) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, f(x+\Delta)\, dx. \tag{37.7}$$

Можно показать, что он равен

$$K(\Delta) = \int_0^\infty |f(Q)|^2 \cos(Q\,\Delta)\,dQ. \tag{37.8}$$

То есть фурье-образом функции $2K(x)$ является функция $|f(Q)|^2$. Функция $|f(Q)|^2$ положительная. При вычислении интегралов типа (37.8), содержащих произведения этих и непрерывных функций, можно заменить игольчатую функцию $|f(Q)|^2$ сглаженной непрерывной функцией $\langle|f(Q)|^2\rangle(Q)$, которая получается сглаживанием игл и равна локальной по Q среднеквадратичной функции.

Из (37.8) следует, что коррелятор $K(x)$ (37.7) представляет собой уединенную функцию, затухающую на расстояниях порядка нескольких $\langle\lambda\rangle$. Собственно это очевидно уже из самого определения случайно-периодической функции. Таким образом, ральная информация о случайно-периодической функции содержится в сглаженной (или в сглаживаемой) части ее фурье-образа. Случайная же часть воспроизводит стохастическое перемешивание скоррелированных конечных цепочек соседних масштабов (соседних бугров) между собой и является несущественной.

Длина когерентности. Отметим, кстати, в этой связи, что термины большие или доминирующие структуры, тесно связанные со случайно-периодическими функциями, представляются довольно удачными (хотя термин "случайно-периодические большие структуры" является более точным), чего нельзя сказать об используемом иногда термине "когерентные структуры". Дело в том, что одинаковость среднего масштаба $\langle\lambda\rangle$ вдоль всей бесконечной оси x обусловлена не когерентностью, которая как раз ограничена, а однородностью начальных данных вдоль этой оси.

37.3. Об интегрировании фурье-образов случайно-периодических функций

Посмотрим, какую физическую размерность и какие характерные значения имеют амплитуды гармоник (37.3), составляющих фурье-образ случайно-периодической функции. Исследуем предельный переход от рядов Фурье с дискретным спектром (система в ящике) к интегралам Фурье с непрерывным спектром (неограниченная система), а главное изучим смысл интегралов от образов Фурье случайно-периодических функций и способ их вычисления, поскольку и смысл, и этот способ оказываются отличными от стандартных.

В случае ящика, когда случайно-периодическая функция определена на отрезке длиной $2L$, вместо (37.4) получаем

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{\pi n}{L}x + b_n \sin\frac{\pi n}{L}x\right], \tag{37.9}$$

а вместо (37.3) получаем

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} dx\, f(x), \quad a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} dx\, f(x)\cos\frac{\pi n}{L}x, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} dx\, f(x)\sin\frac{\pi n}{L}x. \tag{37.10}$$

Физические размерности a_n, b_n и f равны $[a_n] = [f]$. Мы обращаем внимание на размерности, поскольку в непрерывном случае $L = \infty$ размерность фурье-образа случайно-периодической функции оказывается нетривиальной.

Если функция $f(x)$ четная, то коэффициенты (37.10) $b_n = 0$ и (37.9) принимают вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n C_{nx}, \qquad C_{nx} = \cos\frac{\pi n x}{L}. \tag{37.11}$$

Для четной функции интегралы (37.10) можно записать на половине $(0 < x < L)$ отрезка $[-L, L]$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x), \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x)\cos\frac{\pi n}{L}x. \tag{37.12}$$

Отметим, что если случайно-периодическая функция с самого начала берется на отрезке $[0, L]$, а не $[-L, L]$, то шаг дискретного спектра волновых чисел будет не π/L, как в формулах (37.9)–(37.12), а в два раза больший. Если $\langle f\rangle_x = 0$, то $a_0 = 0$ в (37.9), (37.11). При $L \gg \langle\lambda\rangle$ условие четности мало ограничивает свободу выбора случайно-периодической функции.

Оценим амплитуды. Для этого вычислим среднее $\langle(\rho_f(x))^2\rangle_x$, где $\rho_f(x) = \rho(x) - \langle\rho(x)\rangle_x$ — флуктуационная часть плотности. В случае (37.11) оно равно

$$\langle\rho_f^2\rangle = \frac{1}{L}\int\limits_0^L dx \sum_{n=0}\sum_{m=0} a_n a_m C_{nx} C_{mx} = \frac{1}{2}\sum_n a_n^2. \tag{37.13}$$

Амплитуды a_n берутся в точках $Q_n = \pi n/L$ дискретного спектра ящика на оси Q, см. рис. 37.2*б, в*. Они имеют максимум при $Q_n \simeq Q_{\max}$, см. рис. 37.2*б*. Номер n, соответствующий максимуму, равен $n_{\max} \simeq$ $\simeq L/\langle\lambda\rangle$. Слагаемые в сумме (37.13) положительны. Поэтому ясно, что с удлинением ящика, при котором отношение $L/\langle\lambda\rangle$ растет, поскольку масштаб $\langle\lambda\rangle$ фиксирован, индивидуальные амплитуды a_n уменьшаются по абсолютной величине.

Чтобы перейти к непрерывному пределу $L = \infty$, необходимо избавиться от этой зависимости. Обозначим $E_n \equiv a_n^2$. Введем спектральную плотность

$$\widetilde{E} = E_n/\delta\mathrm{L}, \tag{37.14}$$

где $\delta \mathrm{L} = \pi/L$ — шаг по дискретному спектру собственных мод ящика $[-L, L]$. Размерность этой плотности равна $[\widetilde{E}] = [\rho^2]/[Q]$. Разумеется, вместо ρ можно рассмотреть спектральную плотность любой другой величины, например v, u, p или η.

Плотность $\widetilde{E}$ (37.14) имеет конечный предел при $L \to \infty$. При этом суммы типа (37.13) переходят в интегралы

$$\sum \widetilde{E}_n \to \int_0^\infty dQ\, \widetilde{E}(Q).$$

Значения функции $\widetilde{E}(Q)$ в каждой фиксированной точке Q флуктуируют. При вычислении интегралов

$$\int dQ\, \widetilde{E}(Q) g(Q), \tag{37.15}$$

где $g(Q)$ — непрерывная функция, эти флуктуации несущественны. А именно, в интегралах (37.15) флуктуирующую функцию $\widetilde{E}(Q)$ можно заменить ее средним

$$\widetilde{E}(Q) \to \langle \widetilde{E} \rangle (Q).$$

Это очевидное свойство обусловлено тем, что флуктуации функции $\widetilde{E}(Q)$ происходят на чрезвычайно малых масштабах (при переходе от точки к точке, т. е. на масштабах, равных нулю), гораздо меньших тех, на которых изменяется среднее $\langle \widetilde{E} \rangle (Q)$, которое является непрерывной функцией от Q.

Конкретное вычисление интеграла $\int_A^B dQ\, \widetilde{E}(Q)$ осуществляется обычным образом по правилу

$$\int_A^B dQ\, \widetilde{E}(Q) = (\Delta Q)_{\mathrm{step}} \sum \widetilde{E}_j, \qquad E_j = \widetilde{E}(Q_j). \tag{37.16}$$

При этом отрезок интегрирования $[A, B]$ разбивается на шаги интегрирования $(\Delta Q)_{\mathrm{step}}$. Значения E_j берутся внутри этих шагов. Сумма (37.16) приближается к интегралу (37.16) при

$$(\Delta Q)_{\mathrm{step}} \ll \Delta Q, \tag{37.17}$$

где ΔQ — большой интервал, на котором происходит изменение функции $\langle \widetilde{E} \rangle (Q)$ порядка единицы.

В сумму (37.16) можно подставлять как средние $\langle \widetilde{E} \rangle_j$, так и флуктуирующие значения $\widetilde{E}_j$. При условии (37.17) ответ не будет зависеть от этого. Формула (37.16) соответствует стандартному способу вычисления интегралов. В случае, когда в (37.16) подставляется гладкая функция

$\langle\widetilde{E}\rangle(Q)$, можно вычислять интеграл (37.16) с помощью методов более высокого порядка, чем просто суммирование ступенчатой функции. При использовании флуктуирующей функции $\widetilde{E}(Q)$ необходимо ограничиться суммированием ступенчатой функции.

Из формул, определяющих a, $\langle\rho_f^2\rangle$ (37.13), E и $\widetilde{E}$ (37.14), следует ($\langle\rho_f^2\rangle = \sum a_n^2/2 = \sum E_n/2 \simeq \widetilde{E}\delta\mathrm{L}(\Delta Q/\delta\mathrm{L})$) оценка спектральной плотности

$$\langle\widetilde{E}\rangle \sim \langle\rho_f^2\rangle/\Delta Q. \tag{37.18}$$

Как видим, интегралы типа (37.15), содержащие не меняющие знака флуктуирующие функции $\widetilde{E}(Q)$ или их произвольные степени, вычисляются стандартно. Поэтому будем называть их усредняемыми и интегрируемыми стандартно.

Перейдем теперь к трудному вопросу. Он составляет основное содержание данного раздела. Рассмотрим функцию $\widetilde{a}(Q)$ и интегралы от нее

$$\int dQ\,\widetilde{a}(Q)g(Q), \tag{37.19}$$

где $g(Q)$ — непрерывная функция. Эта функция является фурье-образом от случайно-периодической функции, см. (37.3)–(37.5). Функция $\widetilde{b}(Q)$ устроена аналогично.

Функция $\widetilde{a}(Q)$ не является усредняемой, поскольку ее среднее $\langle\widetilde{a}\rangle(Q)$ в любой точке Q равно нулю. Интегралы (37.19) нельзя вычислить по стандартному правилу (37.16).

Покажем это. Рассмотрим случайно-периодическую функцию $\rho_f(\boldsymbol{x})$ и ее ряд Фурье (37.9) в ящике $[-L, L]$. Ограничимся для краткости случаем (37.11). Рассмотрим для простоты значение $\rho_f(0)$. Его выражение через амплитуды равно $\rho_f(0) = \sum a_n$. Амплитуды a_n зависят от отношения $L/\langle\lambda\rangle$ и, следовательно, при фиксированном масштабе $\langle\lambda\rangle$ от размера ящика L.

Спрашивается, чему равна предельная функция $\widetilde{a}(Q)$ и соответствующий интеграл

$$\int_0^\infty dQ\ \widetilde{a}(Q),$$

который должен быть пределом суммы $\sum a_n$, при $L \to \infty$? Запишем формально

$$\lim_{L\to\infty} \sum a_n = \left(\int \mathrm{S}\right)_0^\infty dQ\ \widetilde{a}(Q). \tag{37.20}$$

Спрашивается, каково правило вычисления интеграла ($\int \mathrm{S}$)? На него не распространяется стандартное правило (37.16). Действительно, при вычислении по стандарту имеем

$$\left(\int \mathrm{S}\right)_A^B dQ\ \widetilde{a}(Q) = \int_A^B dQ\ \langle\widetilde{a}\rangle(Q) = 0.$$

У интеграла (37.20) поставлена пометка S, чтобы подчеркнуть его статистический характер и то, что на него не распространяется стандартное правило.

Оказывается, правило вычисления интегралов типа (37.20) равно

$$I = \left(\int \mathrm{S}\right)_A^B dQ\ \widetilde{a}(Q) = \sqrt{(\Delta Q)_{\mathrm{step}}}\ \sum \widetilde{a}_j. \qquad (37.21)$$

Оно заменяет (37.16). Будем называть его статистическим.

В (37.21) $(\Delta Q)_{\mathrm{step}}$ — шаг интегрирования. Он должен быть мал $(\Delta Q)_{\mathrm{step}} \ll \Delta Q$ по сравнению с характерным интервалом, чтобы сумма в (37.21) аппроксимировала точное значение. Шаг $(\Delta Q)_{\mathrm{step}}$ следует выбирать так, чтобы изменение среднего квадрата $\langle \widetilde{a}_j^2 \rangle$ на шаге $j \to j+1$ было мало.

Как видим, шаг интегрирования входит в (37.21) необычным (корневым) образом, сравни с (37.16).

В формуле (37.21) амплитуды $\widetilde{a}_j$ должны быть флуктуирующими. Берется по одной игле (по одной амплитуде) на один шаг $(\Delta Q)_{\mathrm{step}}$. Амплитуды $\widetilde{a}_j$ нельзя заменить средними амплитудами $\langle \widetilde{a} \rangle_j$. Поэтому они (в отличие от $\widetilde{E}$) неусредняемы.

Величина $\widetilde{a}_j$ флуктуирует около нуля так, что

$$\sqrt{\langle \widetilde{a}_j^2 \rangle} = \sqrt{\langle \widetilde{E} \rangle_j}. \qquad (37.22)$$

Значения $\widetilde{a}_j$ являются предельными. Формулы $\langle \widetilde{a} \rangle_j = 0$ и (37.22) определяют их. Они не зависят от размера ящика и шага интегрирования. В этом заключается их преимущество перед дискретными ящичными амплитудами a_n.

Значения $\widetilde{a}_j$ естественно связаны с функцией $\widetilde{a}(Q)$. Формула (37.21) придает этой функции и интегралам от нее простой количественный смысл.

Вопрос об амплитудах a_n и суммах $\sum a_n$ рассматривался в работах (Haan, 1989, 1991; Ofer et al., 1996). Предполагалось, что значения a_n строго *постоянны* в рассматриваемом диапазоне волновых чисел ΔQ порядка единицы. То, что диапазон порядка единицы, означает, что $\Delta Q / Q_{\max} \sim 1$, здесь $Q_{\max}$ — соответствует середине рассматриваемого диапазона. Пусть N — число амплитуд в этом диапазоне. Отмечалось, что если число N увеличится от N_1 до N_2, то все (одинаковые) амплитуды a_n должны быть уменьшены в $\sqrt{N_2/N_1}$ раз. Это делается для того, чтобы сумма $\sum a_n$ осталась неизменной.

При этом оставался невыясненным следующий принципиальный вопрос. Как быть, если в диапазоне ΔQ амплитуды a_n сильно меняются? Например, на каком-то участке они равны нулю. Между тем в реальности дело обстоит так, что значения a_n варьируют в широких пределах. Формула (37.21) является общей. Она свободна от этого существенного недостатка. Зависимость средних значений $\sqrt{\langle \widetilde{E} \rangle_j}$ от j произвольна. В частности, она может быть немонотонна или иметь нулевые участки.

Другим ограничением указанных выше работ было то, что рассматривался только случай ящика. Формула (37.21) дает предел $\widetilde{a}(Q)$ амплитуд a_n, не зависящий от выбора ящика. Важно подчеркнуть, что в сумме (37.21) суммирование идет не по собственным модам ящика, а по *любому* подходящему набору точек Q_j на непрерывной оси Q.

Отметим, что (37.21) может быть обобщена на случай широкодиапазонных спектров $\ln Q\mathrm{L}/Q\mathrm{S} \gg 1$, здесь $Q\mathrm{L}$ и $Q\mathrm{S}$ — соответственно длинно- и коротковолновая границы спектра.

Физическая размерность $\widetilde{a}_j$ и $\widetilde{a}(Q)$ нетривиальна. Она равна

$$[\rho]/\sqrt{[Q]},$$

сравни с (37.18). Поэтому размерность интеграла $\left(\int_{\mathrm{S}}\right) dQ\ \widetilde{a}(Q)$ согласно (37.21) равна $[\rho]$, как и должно быть.

Формула (37.21) содержит пределы A и B. Она обобщается на случай переменных шагов интегрирования на подотрезках $[A, B_1], [B_1, B_2], \ldots$. Интеграл I (37.21) в пределе $(\Delta Q)_{\mathrm{step}}/\Delta Q \to 0$ не зависит от шага $(\Delta Q)_{\mathrm{step}}$.

Для конкретного подсчета в сумму (37.21) необходимо подставить набор случайных значений $\{\widetilde{a}_j\}$. Из-за этого, разумеется, при подсчете I не применимы формулы интегрирования повышенного порядка аппроксимации.

Сам интеграл I (37.21) является флуктуирующим. Его среднее равно $\langle I\rangle = 0$. Среднее от квадрата равно $\sqrt{\langle I^2\rangle} = \sqrt{\int\limits_A^B dQ\ \widetilde{E}(Q)}$.

Вычисление интегралов типа (37.21) требуется не при нахождении квадратов их средних, которые сводятся к тривиальным интегралам от усредняемых функций $\widetilde{E}(Q)$, а именно для вычисления конкретных флуктуирующих случайно-периодических функций (скажем $\rho_f(\boldsymbol{x})$) по формулам обратного преобразования Фурье (37.4), (37.9). Следует отметить, что конкретный вид случайно-периодической функции $\rho_f(\boldsymbol{x})$, например, ее значение в фиксированной точке, будет зависеть от выбора шага $(\Delta Q)_{\mathrm{step}}$ и выбора набора случайных значений $\{\widetilde{a}_j\}$. Разные функции $\rho_f(\boldsymbol{x})$, полученные при разных шагах $(\Delta Q)_{\mathrm{step}}$ и разных наборах $\{\widetilde{a}_j\}$, при $(\Delta Q)_{\mathrm{step}}/\Delta Q \to 0$ статистически эквивалентны.

§ 38. Специфика нестационарности при РТ турбулентности: рост масштаба, эстафетность или каскадность этого роста, его иерархичность и автомодельность

Сказанное выше относительно случайно-периодических функций и их спектров относится к мгновенной картине. Рассмотрим развитие процесса во времени.

38.1. Первая особенность турбулентной эволюции — рост $\langle\lambda\rangle$ с изменением t

Насыщение гармоник и усиление субгармоник определяют процесс эволюции слоя турбулентного перемешивания.

Линейная теория. "Чистый" случай — редкий спектр. Спектральная теория субгармонической неустойчивости рассмотрена в предыдущей главе. Линейная, нелинейная и асимптотическая стадии развития возмущения в этом случае являются, так сказать, "чистыми" по сравнению со случаем случайно-периодической функции. В "чистом" случае имеется редкий спектр гармоник. На линейной стадии он состоит из волновых чисел $nk \pm k_S$, где $2\pi/k$ — период исходного невозмущенного периодического ("чистого") течения, на фоне которого усиливается ("чистая") субгармоника, $n = 1, 2, \ldots$ — целые числа, k_S — квазиимпульс. На переходной нелинейной стадии возникает лестница волновых чисел $k_{IJ} = Ik_S - Jk$ (35.6), где I, J — целые. Собственная субгармоническая мода представляет собой блоховскую функцию вида $\exp(ik_S x)\ P(x)$, где $P(x)$ — периодическая функция $P(x+\lambda) = P(x)$, $\lambda = 2\pi/k$. Классификация возможных значений квазиимпульса приводит к ячейке Бриллюэна $0 < k_S \le k/2$ (34.1).

Случайно-периодической функции соответствует "сильно грязная" ситуация со сплошным или густым спектром.

Сопоставимость гармоники и субгармоники. Задача с гармониками nk и квазиимпульсом k_S является некоторым математическим сужением бигармонического случая k_2 ($k_2 < k_1$) и k_1. Отношение k_1/k_2 может быть произвольным числом от 1 до ∞. Случай, когда $k_1/k_2 \approx 1$, не представляет интереса, поскольку масштаб, связанный с волновым числом $k_1 - k_2$, слишком велик и его развитие идет медленно. По тем же причинам не является существенным случай $k_2 \ll k_1$. Наибольшее значение для развития текущего звена каскада имеют гармоники сопоставимых масштабов.

Нелинейная стадия "чистого" случая. В ячейке Бриллюэна (34.1) лежат точки двух типов. Это соизмеримые и несоизмеримые точки, см. § 35. В соизмеримых или рациональных точках относительные значения квазиимпульса k_S/k равны рациональным числам $k_S/k = n_N/m_D$, где n_N и m_D — взаимно простые целые числа. В несоизмеримых или иррациональных точках относительные квазиимпульсы не могут быть представлены рациональным числом.

Развитие субгармоники приводит на асимптотической стадии к формированию стационара $F_{SS}(\lambda_{AS})$ с периодом

$$\lambda_{AS} = n_N\, m_D\, \lambda_\star, \qquad \lambda_\star = \frac{\lambda}{n_N} = \frac{\lambda S}{m_D} \tag{38.1}$$

в соизмеримом случае и к турбулентному перемешиванию в несоизмеримом, см. гл. VII. Здесь AS — asymptotic, $\lambda S = 2\pi/k_S$, $2\lambda \le \lambda S < \infty$.

Продолжительность одного звена каскада. Формирование стационара (38.1) в соизмеримом и автомодельного перемешивания в несоизмеримом случаях вследствие усиления субгармонического возмущения происходит за характерное время

$$t_{\rm TR} \simeq \frac{1}{\gamma {\rm S}} \ln \frac{\lambda}{|a{\rm S}|}, \tag{38.2}$$

где $\gamma{\rm S}(k_{\rm S})$ и $a{\rm S}$ — инкремент субгармонической неустойчивости и амплитуда субгармоники, TR — transition. Оценка (38.2) дает продолжительность перехода при малом возмущении точного стационара. Отсюда обратный инкремент и логарифмический фактор.

Переход (38.2) моделирует одно звено инверсного каскада при, во-первых, сопоставимых значениях $k_{\rm S}$ и k и, во-вторых, при больших ("порядка единицы") относительных амплитудах субгармонических возмущений.

Даже при сопоставимых[4] значениях $k_{\rm S}$ и k, когда определяющим является влияние гофрировки КГ стационарным течением, инкремент субгармонической неустойчивости оказывается порядка гидростатического инкремента, см. § 33.

Одно звено каскада в "сильно грязном" случае. Случайно-периодические функции, изученные в § 37, имеют два важных свойства. Во-первых, имеется характерный масштаб или "период" этих функций $\langle\lambda\rangle$. Ему соответствует максимум $k_{\max} \simeq 2\pi/\langle\lambda\rangle$ фурье-разложения. Во-вторых, имеются случайные вариации, из-за которых этот масштаб изменяется от точки к точке. Величина вариаций – при каждом сдвиге на "период" по горизонтальному направлению — равна $\Delta\lambda$, $\Delta\lambda \simeq \langle\lambda\rangle$. Они приводят к появлению ширины $\Delta Q \simeq 2\pi/\langle\lambda\rangle$ у фурье-распределения.

Именно поэтому в случае случайно-периодических функций спектр субгармонических возмущений является (i) густым или плотным и эти возмущения имеют (ii) относительную амплитуду порядка единицы $|a{\rm S}|k \simeq 1$. То есть случайно-периодическую функцию можно представлять как периодическую функцию с периодом $\langle\lambda\rangle$ плюс плотный спектр субгармоник большой амплитуды[5].

Отсюда следует, что в этом случае относительное время перехода $\sqrt{gk}\, t_{\rm TR}$, согласно (38.2), будет порядка единицы

$$(t_{\rm TR})_{\rm RP} \sim 1/\sqrt{gk}, \tag{38.3}$$

[4] При малых $k_{\rm S}$, $k_{\rm S} \ll k$ очевидно, что функция $\gamma{\rm S}(k_{\rm S})$ выходит на гидростатику, см. §§ 32–34.

[5] Термины субгармоническая неустойчивость или усиление субгармоник являются более адекватными разбираемой ситуации, чем используемый в этой связи термин взаимодействие мод (mode coupling). Последний является неполным. Действительно, когда речь идет о субгармонической неустойчивости, то это означает, что (i) имеется взаимодействие мод (гармоники и субгармоники) и (ii) имеется усиление субгармоники, что адекватно ситуации. Если же сказано просто взаимодействие мод, то это само по себе еще не означает усиления субгармоник и соответственно появления инверсного каскада (о нем см. ниже). Например, взаимодействие мод имеется в случае гравитационных волн, но усиления субгармоник, такого, как при РТН, здесь не происходит.

где $(t_{\rm TR})_{\rm RP}$ — время изменения масштаба случайно-периодической функции (RP — random-periodic) на величину порядка единицы, т. е. в разы.

Устойчивость случайно-периодических функций при переходах по звеньям. Важнейшим обстоятельством является то, что в результате перехода (38.3) вместо случайно-периодической функции с масштабом $\langle\lambda\rangle_1$ (i) образуется опять случайно-периодическая функция и (ii) эта новая функция имеет масштаб $\langle\lambda\rangle_2$, который больше исходного $\langle\lambda\rangle_2 > \langle\lambda\rangle_1$, $\langle\lambda\rangle_2 \simeq \langle\lambda\rangle_1$.

Переход (38.3) образует одно звено цикла действия субгармонического усиления или одно звено (или ярус) эстафеты или каскада, переводящее F_1 в F_2, $F = F_{\rm RP}(\langle\lambda\rangle)$. Здесь F_1 и F_2 — случайно-периодические функции (§ 37) с масштабами $\langle\lambda\rangle_1$ и $\langle\lambda\rangle_2$ соответственно. В случае *автомодельного* каскада функции F_1 и F_2 статистически *эквивалентны*. Это означает, что если сжать пространственные переменные $\mathbf{r}$ функции F_2 в $\langle\lambda\rangle_2/\langle\lambda\rangle_1$ раз, то сжатая функция F_2 будет равна функции F_1. Равенство случайно-периодических функций означает равенство их усредняемых (а не случайных) характеристик.

Одно звено среди других. Говорится о последовательных циклах или звеньях, поскольку имеется повторная субгармоническая неустойчивость уже случайно-периодической функции F_2. Последовательные переходы (38.3) между статистически эквивалентными случайно-периодическими функциями $F_1 \to F_2 \to F_3 \to \ldots$ образуют цепочку звеньев каскада. Этот каскад иерархичен, поскольку реализация каждого звена приводит к увеличению текущего масштаба $\langle\lambda\rangle_1 < \langle\lambda\rangle_2 < \langle\lambda\rangle_3 < \ldots$ Каскад называют обратным или инверсным. Это обусловлено тем, что в его процессе масштаб монотонно возрастает. Инверсность каскада обусловлена субгармонической неустойчивостью.

Вертикальные и горизонтальные структуры. Толщина слоя перемешивания h растет с t одновременно с ростом $\langle\lambda\rangle$ и убыванием $Q_{\max}$. Рост h отмечался уже в первых полуфеноменологических работах по РТ турбулентности (Беленький, Фрадкин, 1965; Андронов и др., 1976; Неуважаев, 1976; Неуважаев, Яковлев, 1976a, 1976b; Анучина, Кучеренко и др., 1978). В них используется приближение, основанное на пути перемешивания. Понятие о горизонтальной структуре появилось позже. Оно тесно связано с делением h на части h_+ и h_-, а также с зависимостью dh_+/dt от $\langle\lambda\rangle$ и представлениями о несущественности струй при $\mu \ll 1$ и пузырьковой оболочке. Исследованию горизонтальной структуры посвящены работы (Иногамов, 1978; Anisimov et al., 1983; Inogamov et al., 1991b).

В работе (Иногамов, 1978) вершины пузырей в пузырьковой оболочке заменены на цепочку точек (частиц) по оси x, вводится также понятие о парном взаимодействии этих частиц. Взаимодействие заключается в их притяжении между собой. Зависимость притяжения от расстояния между ними такова, что нарушения периодичности экспоненциально растут с t. Это соответствует субгармонической неустойчивости. Слияние точек приводит к уменьшению их числа и соответственно их плотности,

рассчитанной на единицу длины по оси x. Поэтому среднее расстояние $\langle\lambda\rangle$ между точками в цепочке растет с t. Этот вопрос будет разобран ниже в п. 44.2.

В работе (Anisimov et al., 1983) оценен коэффициент $\alpha^{+}_{\mathrm{SPONT}}$ спонтанного автомодельного перемешивания тяжелого вещества. Оценка основана на экспериментальных данных, взятых из работы (Анучина, Кучеренко и др., 1978). Они относятся к полной толщине h и к суммарному коэффициенту α. Оценка следует из закона сохранения массы. С работ (Иногамов, 1978; Anisimov et al., 1983) начинается развитие теории горизонтальной структуры. Вместе с ней появляется масштаб $\langle\lambda\rangle$. В работе (Anisimov et al., 1983) впервые привлечено условие $dh_{+}/dt \approx \approx (\mathrm{Fr})\sqrt{(1-\mu)g\langle\lambda\rangle}$ для оценки значения $\langle\lambda\rangle$, см. приложение 1 этой работы, значение числа Фруда (Fr) предлагается брать из стационарного периодического решения, см. уточнение этой картины в п. 35.4. Подробному экспериментальному и численному исследованию горизонтальной структуры посвящены работы (Read, 1984; Youngs, 1984, 1994; Smeeton & Youngs, 1987). Пузырьковая модель с цепочкой взаимодействующих точек, появившаяся в работе (Иногамов, 1978), была детально развита в целом ряде работ Глимма, Шарпа и др. (Glimm et al., 1987, 1990; Glimm & Li, 1987; Gardner et al., 1988; Glimm & Sharp, 1990), а затем в работе (Ofer et al., 1996). Интересная пузырьковая модель построена в работе (Zufiria, 1988). Статистическая инвариантность (устойчивость, неподвижность) случайно-периодических функций F_{RP} к переходам (38.3) в инверсном каскаде называется в работе (Glimm & Sharp, 1990) неподвижной точкой ренормгруппы[6].

38.2. Вторая особенность эволюции — автомодельность каскадной асимптотики

В п. 38.1 основное внимание уделяется однозвенному процессу

$$F_{\mathrm{RP}}(\langle\lambda\rangle_1) \to F_{\mathrm{RP}}(\langle\lambda\rangle_2). \tag{38.4}$$

Рассмотрим теперь многозвенную цепочку $\langle\lambda\rangle_1 \to \langle\lambda\rangle_2 \to \langle\lambda\rangle_3 \to \ldots$, состоящую из последовательности переходов (38.4).

Анализ размерности. Инерционный интервал. Автомодельность перемешивания (в частности, степенной характер зависимостей длин h, h_{+}, h_{-} и $\langle\lambda\rangle$, $\Delta\lambda$ от t) следует из размерного анализа. В задаче в отсутствие микро- и макромасштабов имеется единственная размерная постоянная g. Отсюда все переменные длины, характеризующие перемешивание, должны быть пропорциональны gt^2. Степенное поведение $\langle\lambda\rangle$, $\Delta\lambda$ вытекает из автомодельности фурье-образа. Микро-, l_{S}, $k_{\mathrm{S}} = 2\pi/l_{\mathrm{S}}$, и макро-, L_{L}, $k_{\mathrm{L}} = 2\pi/L_{\mathrm{L}}$, масштабы определяют инерционный интервал или диапазон $L_{\mathrm{L}} \gg \langle\lambda\rangle \gg l_{\mathrm{S}}$. О степенном поведении имеет смысл говорить,

[6] Неподвижной точкой ренормгруппы является пространственно-инвариантное или автомодельное решение. Если отсеять случайные флуктуации и оставить только усредняемую часть, то это решение стационарно (неподвижно) в автомодельных переменных.

если этот диапазон экспоненциально широк

$$\ln(L_{\rm L}/l_{\rm S}) = \ln(k_{\rm S}/k_{\rm L}) \gg 1. \qquad (38.5)$$

Большая протяженность инерционного интервала — это необходимое условие автомодельной динамики. Автомодельность может начаться с микромасштаба (при соответствующих начальных данных). Ее ограничение сверху обусловлено вертикальным или горизонтальным макромасштабами.

Классификация начальных данных. Другое условие автомодельности связано с видом начальных данных. А именно, и при выполнении (38.5) начальные данные могут быть таковы, что автомодельности не будет.

Возможны (i) уединенные, (ii) периодические (одна гармоника), (iii) квазипериодические (n гармоник k_1, k_2, ...), (iv) случайно-периодические и (v) лакунарные начальные возмущения, см. начало гл. VI. Возмущения (ii)–(v) обладают определенной[7] горизонтальной сдвиговой инвариантностью. Вследствие их сдвиговых свойств удобно импульсное представление или описание с помощью фурье-образов. Функции (ii) и (iv) имеют масштабы λ и $\langle\lambda\rangle_0$ соответственно. Функция (v) содержит экспоненциально широкий набор масштабов от малого $\lambda_{\min}$ до большого $\lambda_{\max}$, $\ln(\lambda_{\max}/\lambda_{\min}) \gg 1$.

Короткомасштабные начальные возмущения. Пусть $k_{\rm SW}$ — край фурье-образов функций (ii)–(v) со стороны точки $k = 0$, SW — short wave. В случае (ii) автомодельности нет. Рассмотрим функции (iii)–(v), причем (iii) в том подслучае, когда среди n гармоник имеется хотя бы пара несоизмеримых. Имеем $k_{\rm SW} = \min\{k_1, k_2, \dots\}$ в случае (iii); $k_{\rm SW} = \langle k\rangle_0 = 2\pi/\langle\lambda\rangle_0$ в случае (iv); $k_{\rm SW} = 2\pi/\lambda_{\max}$ в случае (v).

Пусть выполняется (38.5) и пусть $k_{\rm L} \ll k_{\rm SW} \le k_{\rm S}$. Тогда в диапазоне

$$k_{\rm L} \ll \langle k\rangle \ll k_{\rm SW} \qquad (38.6)$$

многозвенный каскад является автомодельным. Причем автомодельность будет спонтанной — "забывание" начальных данных. В (38.6) $\langle k\rangle$ — это текущий средний масштаб каскадной эволюции $\langle k\rangle = 2\pi/\langle\lambda\rangle$. Как видим, правый край диапазона (38.6) определяется начальными данными.

Инвариантность звеньев — автомодельность многозвенной цепочки. Посмотрим, как из отдельных звеньев складывается каскад и почему он является автомодельным. Необходимыми и достаточными условиями спонтанной автомодельности являются, во-первых, резкий короткомасштабный край $k_{\rm SW}$ начального распределения и, во-вторых, большая величина диапазона $\ln(k_{\rm SW}/k_{\rm L}) \gg 1$ (38.6).

Рассмотрим переходное звено (38.4). Его продолжительность равна (38.3). Пространственно-временная инвариантность или "единичность" звена заключается в том, что если положить $g = 1$ и, кроме того, взять

[7] Имеется в виду не точная, а усредненная по размерам характерных ячеек или масштабов сдвиговая инвариантность, см. начало гл. VI.

за единицу длины текущий масштаб $\langle k\rangle = 2\pi/\langle\lambda\rangle$, характеризующий случайно-периодическое распределение F_{RP} в слое перемешивания в этот момент, то и продолжительность перехода (38.3) будет порядка единицы (вместо k в (38.3) подставлено $\langle k\rangle$). В этом отношении все звенья внутри инерционного интервала (38.5), представляющие собой переходы между случайно-периодическими распределениями, являются $\mathbf{r}$, t-инвариантными. Тогда и процесс, идущий вдоль этих переходов, см. рис. 35.1a, будет $\mathbf{r}$, t-инвариантным.

Накопление переходов. Эстафета вдоль геометрической прогрессии. Мультипликация масштабов. Рассмотрим, следуя работе Иногамова (1978), последовательность звеньев $0 \to 1 \to 2 \to \ldots$ Продолжительность звена $0 \to 1$ равна $\Delta t_1 = \zeta\sqrt{\lambda_0/g}$. Исходный характерный масштаб горизонтальной случайно-периодической структуры равен $\langle\lambda\rangle_0 = \lambda_0$. Смещение фронта перемешивания в сторону тяжелой жидкости за время перехода $0 \to 1$ равно $\Delta y_1 = \xi\lambda_0$, где ζ и ξ — постоянные.

Рассмотрим следующее звено $1 \to 2$. Масштаб $\langle\lambda\rangle$ за время перехода $n \to (n+1)$ изменяется в разы. Обозначим через a коэффициент мультипликации масштаба $\langle\lambda\rangle_{n+1}/\langle\lambda\rangle_n = a > 1, a \simeq 1$. Продолжительность перехода $1 \to 2$ равна $\Delta t_2 = \zeta\sqrt{\lambda_1/g} = \zeta\sqrt{a}\sqrt{\lambda_0/g}$; характерный масштаб равен $\langle\lambda\rangle_1 = \lambda_1 = a\lambda_0$; а смещение равно $\Delta y_2 = \xi\lambda_1 = \xi a\lambda_0$. Коэффициенты ζ и ξ не изменяются ввиду $\mathbf{r}$, t-инвариантности звеньев.

На $(n+1)$-м шагу $n \to (n+1)$ получим

$$\Delta t_{n+1} = \zeta\,(\sqrt{a})^n\,\sqrt{\lambda_0/g}; \quad \langle\lambda\rangle_n = \lambda_n = a^n\lambda_0; \quad \Delta y_{n+1} = \xi a^n\,\lambda_0.$$

Как видим, каскадная эволюция заключается в геометрической мультипликации $\mathbf{r}$ и t масштабов.

Отсуммируем (Иногамов, 1978; Anisimov et al., 1983; Inogamov et al., 1991b) приращения времени Δt_n и смещений Δy_n. Получаем

$$t = \sum_{n=1}^{N+1}\Delta t_n = \zeta\sqrt{\frac{\lambda_0}{g}} + \zeta\sqrt{a}\sqrt{\frac{\lambda_0}{g}} + \ldots + \zeta(\sqrt{a})^N\sqrt{\frac{\lambda_0}{g}} + \\ = \zeta\sqrt{\frac{\lambda_0}{g}}\,\frac{(\sqrt{a})^{N+1}-1}{\sqrt{a}-1} \approx \zeta\sqrt{\frac{\lambda_0}{g}}\,\frac{(\sqrt{a})^{N+1}}{\sqrt{a}-1}, \quad (38.7)$$

где t — текущее время,

$$h_+ = \sum_{n=1}^{N+1}\Delta y_n = \\ = \xi\lambda_0 + \xi a\lambda_0 + \ldots + \xi a^N\lambda_0 = \xi\lambda_0\frac{a^{N+1}-1}{a-1} \approx \xi\lambda_0\frac{a^{N+1}}{a-1}. \quad (38.8)$$

Кроме того, имеем

$$\langle\lambda\rangle = \langle\lambda\rangle_{\mathrm{N}} = a^N\lambda_0, \quad (38.9)$$

где h_+ и $\langle\lambda\rangle$ относятся к текущим значениям величин.

Выражая "затравочный" масштаб λ_0 из (38.7) через текущее время t, получим

$$\lambda_0 = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\zeta^2}\frac{gt^2}{a^{N+1}}. \tag{38.10}$$

Подставив (38.10) в (38.8), имеем

$$h_+ = \frac{\xi}{\zeta^2}\,\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a-1}\,gt^2 = \alpha_+ \mathrm{A}\, gt^2, \tag{38.11}$$

подставив (38.10) в (38.9), имеем

$$\langle\lambda\rangle = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\zeta^2\, a}gt^2 = \frac{a-1}{\xi\, a}h_+ = \alpha_{\mathrm{H}}\,\mathrm{A}\, gt^2. \tag{38.12}$$

Главным при выводе (38.11) и (38.12) является сокращение больших факторов a^N. Вертикальный и горизонтальный (H — horizontal) постоянные множители в (38.11) и (38.12) порядка единицы.

Основной результат заключается в том, что при инвариантных мультипликациях внутри звена на постоянные факторы[8] цепочка звеньев, во-первых, теряет зависимость от начальных данных[9] (это и называется спонтанностью) и, во-вторых, она оказывается gt^2-автомодельной.

§ 39. Спонтанная РТТ[10] и ее взаимодействие с длинноволновым течением

39.1. Спонтанная или случайная РТТ

Пространственное устройство. В § 37 описана координатная и импульсная (фурье-образ) специфика случайно-периодических структур, см. рис. 37.2*а*, *в* соответственно. Их грубыми характеристиками являются длины $\langle\lambda\rangle$ и $\Delta\lambda$. Тонкая информация о конкретной структуре содержится в усредняемой или сглаживаемой части фурье-образа, см. рис. 37.2*б*. Структура в целом состоит из дельта-коррелированной случайной и сглаживаемой частей.

Характер зависимости от t. Аттракторность случайной РТТ. Эволюции этих структур посвящен § 38. Показано, что движение представляет собой каскад отдельных звеньев. В п. 38.1 рассмотрено одно звено, а в п. 38.2 — многозвенная конструкция.

Спонтанная РТТ п. 38.2 порождается короткомасштабным начальным возмущением, обрезанным при $k = k_{\mathrm{SW}}$. Вдали от краев k_{L} и k_{SW} на оси k она является степенной (автомодельной). Степенное решение п. 38.2 устойчиво. Оно притягивает к себе все траектории, стартующие от короткомасштабных начальных данных. Поэтому это решение важно.

[8] Но со случайной фазой. Дело в том, что при переходах $1 \to 2 \to \ldots$ происходит "перемешивание" случайно-периодических функций.

[9] Выпадение затравочного масштаба.

[10] Рэлей-тейлоровская турбулентность.

В импульсном пространстве (пространство волновых чисел, ось k) оно имеет вид бугра, показанного на рисунках 37.2*б*, *в*. С течением времени он смещается в сторону $k = 0$. В этом и заключается инверсность каскада.

Имеется как бы *"волна"* в k-пространстве, распространяющаяся от больших к малым k.

В степенном случае "волна" (фурье-образ) стационарна в автомодельных переменных.

При этом по оси абсцисс вместо k необходимо отложить kgt^2. Ось ординат нормируется в зависимости от того, фурье-образ какой физической величины строится. Если это координата КГ (контактной границы), то амплитуды нормируются на gt^2. В случае скорости нормированная переменная равна $v(k)/gt$. Амплитуды плотности не нормируются, а давление нормируется на t^2.

"Волной" она является в переменных $q = \ln k$ и $\tau = \ln t$. В автомодельном случае она движется с постоянной "скоростью" $dq/d\tau = -2$ справа налево от $q = \infty$ к $q = -\infty$ по оси q. При указанной нормировке ординат ее форма не меняется в процессе движения.

Разумеется, в автомодельных переменных стационарна сглаживаемая часть "волны", показанная на рис. 37.2*б*. Флуктуирующая часть, состоящая из "игл", изображенных на рис. 37.2*в*, меняется и в автомодельных переменных.

39.2. Взаимодействие "волны" с длинноволновым возмущением

Покажем, что существенное возмущение может быть только длинноволновым. Разделим спектр на короткомасштабную и длинноволновую части. "Волна" спонтанной РТТ п. 38.2 идет по оси k со стороны коротких масштабов. Пусть $k(t)$ дает ее положение на оси. Короткомасштабные моды с $k > k(t)$ образуют короткомасштабную "шубу" на "волне", типа показанной на рис. 18.4 и 18.7. Они мало влияют на "волну".

Другое дело длинноволновые возмущения. Пусть спектр состоит из короткомасштабного k_{SW} и длинноволнового k_{LW}, $k_{\mathrm{LW}} \ll k_{\mathrm{SW}}$ (LW — long wave) возмущений. При $t \ll t_{\mathrm{LW}} = 1/\sqrt{gk_{\mathrm{LW}}}$ ($t \gg t_{\mathrm{SW}}$, $k_{\mathrm{LW}} \ll k(t)$) имеется "почти чистая" "волна" п. 38.2. Важно то, что коэффициенты α_+, α_{H} в (38.11) и (38.12) таковы, что при $t \sim t_{\mathrm{LW}}$ "волна" достигает области на оси k с $k \sim k_{\mathrm{LW}}$ — области локализации длинноволнового возмущения. Это обусловлено тем, что эти коэффициенты сравнимы с единицей.

Важнейшим обстоятельством является существование пороговой амплитуды ϵ_{THR} (THR — threshold). Длинноволновое возмущение имеет начальные амплитуды $\delta\eta_{\mathrm{LW}}(0)$ и $\delta v_{\mathrm{LW}}(0)$ и соответственно безразмерную относительную амплитуду

$$\epsilon_{\mathrm{LW}}(0) = |\,\delta\eta_{\mathrm{LW}}(0)\,|\,k_{\mathrm{LW}} + |\,\delta v_{\mathrm{LW}}(0)/\,\mathrm{Fr}\,\sqrt{g}\,|\,k_{\mathrm{LW}}^{1/2}, \qquad (39.1)$$

где число Fr дается формулой (27.22). При $\epsilon_{\mathrm{LW}}(0) < \epsilon_{\mathrm{THR}}$ на временах $\sim t_{\mathrm{LW}}$ длинноволновое возмущение развито еще слабо. Скажем, скорости, связанные с ним, малы по сравнению с $\sqrt{g/k_{\mathrm{LW}}}$. У "волны" же

скорости $\sim \sqrt{g/k_{\rm LW}}$ при $t \sim t_{\rm LW}$. Поэтому возмущение с $\epsilon_{\rm LW}(0) < \epsilon_{\rm THR}$ не существенно — "волна" проходит через него в область $k \ll k_{\rm LW}$, "не замечая" длинноволнового возмущения.

Если в (39.1) $\epsilon_{\rm LW}(0) > \epsilon_{\rm THR}$, то длинноволновое возмущение успевает развиться до нелинейной стадии за времена $\sim t_{\rm LW}$. На нелинейной или насыщенной стадии относительная амплитуда

$$\epsilon_{\rm LW}(t) = |\,\delta\eta_{\rm LW}(t)\,|\,k_{\rm LW} + |\,\delta v_{\rm LW}(t)/\sqrt{g}\,|\,k_{\rm LW}^{1/2} \sim 1.$$

На линейной стадии $\epsilon_{\rm LW}(t) \ll 1$. Из-за того, что коэффициенты α_+, $\alpha_{\rm H}$ конечны, и порог $\epsilon_{\rm THR}$ является конечным. С другой стороны, вследствие числовой малости этих коэффициентов по сравнению с единицей порог $\epsilon_{\rm THR}$ также оказывается малым по сравнению с единицей. Именно благодаря этому у немного надпорогового длинноволнового возмущения сохраняется различимая линейная стадия, несмотря на наличие приближающейся (по оси k) "волны".

Отметим, что взаимодействие длинноволнового возмущения и спонтанной РТТ рассматривалось в работах (Youngs, 1984; Read, 1984). Было получено, что возмущение с $\epsilon = ak = 0,12$ видно на фоне спонтанной РТТ, а возмущение с $\epsilon = ak = 0,012$ уже незаметно на этом фоне (Youngs, 1984, с. 38). Это заключение близко по духу к сказанному выше.

Подавление "волны" с помощью начальных данных и микромасштабов. Выше рассмотрен случай, когда микромасштабы $2\pi/k_{\rm S}$ стянуты в нуль. При конечных $k_{\rm S}$ возможна задержка "волны" спонтанной РТТ п. 38.2 за счет экспоненциального сглаживания начальных данных при больших k. На линейной стадии имеем $\epsilon(k,t) = \epsilon(k,0)\exp(\sqrt{gk}\,t)$. Поэтому при $t = t_{\rm LW} = 1/\sqrt{gk_{\rm LW}}$ будет $\epsilon(k,t_{\rm LW}) = \epsilon(k,0) \times \times \exp(\sqrt{gk}\,t_{\rm LW}) = \epsilon(k,0)\exp(\sqrt{k/k_{\rm LW}})$. Для задержки "волны" начальная амплитуда $\epsilon(k,0)$ при $k > k_{\rm LW}$ должна убывать быстрее, чем функция $\exp(-\sqrt{k/k_{\rm LW}})$. В этом и состоит экспоненциальное сглаживание.

Начальная амплитуда ограничена снизу тепловым шумом. Он конечен при конечных температурах (при нулевой температуре остается квантовый шум из-за нулевых колебаний). Поскольку функция $\exp(-\sqrt{k/k_{\rm LW}})$ становится меньше любой конечной величины при $k/k_{\rm LW} \to \infty$, то необходимо коротkомасштабное обрезание $k_{\rm S}$. Оно должно быть таким, чтобы убывающая амплитуда $\exp(-\sqrt{k_{\rm S}/k_{\rm LW}})$ превышала бы или равнялась тепловому шуму. Если при этом $k_{\rm LW} \ll k_{\rm S}$, то длинноволновое возмущение $k_{\rm LW}$ развивается "чисто", т.е. без влияния спонтанной РТТ ("волны") (причем порог $\epsilon_{\rm THR}$ пропадает) и в то же время при пренебрежимом влиянии микромасштабов (поверхностного натяжения, вязкости и абляции).

Вопрос о подавлении спонтанной РТТ (РТ турбулентности) за счет коротkомасштабного шума относится к вопросам о переходной стадии и установлении между неавтомодельными начальными данными и степенной (автомодельной) асимптотикой.

§ 40. Однородные начальные шумы и стимулированная турбулентность

40.1. Длинноволновость, широкодиапазонность и степень однородности

Широкодиапазонные исходные данные. Место однородных шумов. В § 37 рассмотрена мгновенная структура спонтанной или хаотической РТТ ("волны"), в § 38 — ее развитие, а в § 39 — течение или движение, которое получается при "смешении" "волны" с уединенным[11] в пространстве k длинноволновым возмущением. В настоящем разделе рассматривается не отдельное уединенное возмущение, а ансамбль, совокупность или цепочка таких начальных возмущений с относительной амплитудой

$$\epsilon(k, t=0) = |\,\delta\eta(k, t=0)\,|\,k + |\,\delta v(k, t=0)\,/\,\mathrm{Fr}\,\sqrt{g}\,|\,k^{1/2}, \qquad (40.1)$$

заполняющая экспоненциально широкий $\ln(k_S/k_L) \gg 1$ диапазон $k_L < k < k_S$. Ставится вопрос о том, каким является движение при "смешении" этой совокупности со спонтанной "волной" п. 38.2.

Полученный ниже ответ напоминает тот, который представлен в § 39. А именно, имеется порог. Подпороговые цепочки возмущений не существенны — их "захлестывает" случайная или спонтанная "волна", пробегающая ось k от микро- $k = \infty$ до макромасштабов $k = 0$. Наоборот, в случае надпороговых цепочек не существенна случайная "волна". Она "не поспевает" за перемешиванием, вызванным развитием широкодиапазонной цепочки. В результате ее "не видно" на фоне перемешивания, связанного с цепочкой. Такое индуцированное цепочкой перемешивание называется стимулированным перемешиванием или стимулированной РТТ (РТ турбулентностью).

На первый взгляд кажется, что с каждым начальным распределением $\epsilon(k, 0)$ связано свое развитие во времени — своя конкретная функция $\epsilon(k, t)$. И это в общем-то так с оговорками относительно

(i) короткомасштабного обрезания по k (k_{SW}) и одинаковости спонтанных или хаотических "волн";

(ii) выделенности однородных шумов;

(iii) существования порога по относительной амплитуде однородных шумов.

Оговорка (iii) означает, что $\epsilon(k, 0)$ (40.1) с амплитудой ниже порога может быть любой функцией от k — все равно случайная "волна" п. 38.2 доминирует. Оговорка (ii), касающаяся однородных шумов, возникает из-за того, что индуцированное этими шумами движение оказывается автомодельным. В этом отношении оно напоминает спонтанную РТТ (случайную "волну").

Но при этом имеются и важные отличия от спонтанной РТТ (РТ турбулентности), величина которых зависит от величины превышения амплитуды над порогом. Отличия состоят в усилении перемешивания,

[11] Таким является возмущение, состоящее из гармоник, локализованных около k_{LW} в ограниченной области ширины $\Delta k \simeq k_{LW}$ или $\Delta k \ll k_{LW}$.

уменьшении случайности/увеличении детерминированности и изменении сглаживаемой части. Причинно-следственные связи при стимулированной РТТ короче, чем при спонтанной РТТ. Перемешивание заключается в том, что система совершает некоторые повороты или вращения. При спонтанной или хаотической РТТ система "накручивает" много оборотов после старта. Число их $N \sim \ln[\langle k\rangle(t)/k_{\mathrm{SW}}]$, где $\langle k\rangle(t)$ — текущий масштаб, характеризующий положение "волны".

Из-за разбегания траекторий системы информация об исходном состоянии ($\langle k\rangle(t \sim t_{\mathrm{SW}}) \sim k_{\mathrm{SW}}$) быстро теряется. Показатели Ляпунова, характеризующие темп разбегания траекторий, таковы, что потеря информации происходит за время порядка оборота системы. При стимулированной РТТ перемешивание стимулируется каждый раз новым звеном широкодиапазонной цепочки. При этом система успевает совершить порядка одного оборота от момента стимулирования этим звеном до начала стимуляции следующим звеном. Поэтому информация о фазе звена не успевает "забыться". Вследствие этого можно сказать не о стимулированной турбулентности, а о стимулированном перемешивании.

В силу автомодельности однородные ансамбли (цепочки) занимают особое положение среди широкодиапазонных исходных данных (40.1).

Вид однородных или автомодельных возмущений. О широкодиапазонности имеет смысл говорить, пока процесс развития находится внутри диапазона $k_{\mathrm{L}} < \langle k\rangle(t) < k_{\mathrm{S}}$. Для $\langle k\rangle(t)$, находящихся справа или слева от k_{S} или k_{L}, соответственно, возмущения из диапазона не существенны.

Рассматривается задача об устойчивости симметричного равновесия. Поэтому в начальный момент амплитуда (40.1) возмущений симметрии мала $\epsilon(k,0) \ll 1$. Относительная амплитуда дает степень нелинейности. Коэффициенты в определении ϵ выбраны так, что нелинейная стадия начинается при $\epsilon(k,t) \simeq 1$, где

$$\epsilon(k,t) = |\,\delta\eta(k,t)\,|\,k + |\,\delta v(k,t)\,/\,\mathrm{Fr}\,\sqrt{g}\,|\,k^{1/2}. \qquad (40.2)$$

Выбор коэффициентов осуществлен на основе результатов п. 26.3 о выходе периодических решений на стадию насыщения. Рост амплитуды (40.2) приводит к тому, что $\epsilon(k,t)$ достигает значений порядка единицы. Функция $\langle k\rangle(t)$ задает примерное положение длинноволнового края диапазона значений k, в котором на момент t относительная амплитуда (40.2) доросла до значений порядка единицы.

Имеются функции (40.1) от k, вносящие масштаб, и пространственно-инвариантные (безмасштабные, самоподобные или однородные) функции. Большой физический интерес представляют последние. Однородными или самоподобными функциями являются степенные функции вида

$$\epsilon(k,0) = \epsilon_0\, k^{\delta}. \qquad (40.3)$$

Если $\delta \neq 0$, то нарушается условие малости — условие того, что начальное состояние представляет собой сумму невозмущенного симметричного равновесия и малого несимметричного возмущения.

Действительно, пусть $\delta > 0$. Тогда имеется $k_{\rm SW}$ такое, что при $k > k_{\rm SW}$ выполняется $\epsilon(k,0) > 1$. Ясно, что спектр (40.3) в этом случае ограничен областью $k < k_{\rm SW}$. Посмотрим, как выглядит развитие во времени такого спектра. Коротkомасштабные гармоники наибольшей амплитуды с $k \sim k_{\rm SW}$ "запускают" стохастическую "волну" (спонтанную РТТ), распространяющуюся по оси k от $k \sim k_{\rm SW}$ в сторону меньших k. Таким образом, эволюция от спектра (40.3) с $\delta > 0$ оказывается такой же, как в случае коротkомасштабного возмущения, обрезанного при $k_{\rm SW}$.

Теперь пусть $\delta < 0$. Тогда имеется длинноволновое обрезание $k_{\rm LW}$. При $k < k_{\rm LW}$ амплитуда (40.3) больше единицы. Поэтому спектр (40.3) с $\delta < 0$, показанный на рис. 40.1, ограничен областью $k > k_{\rm LW}$.

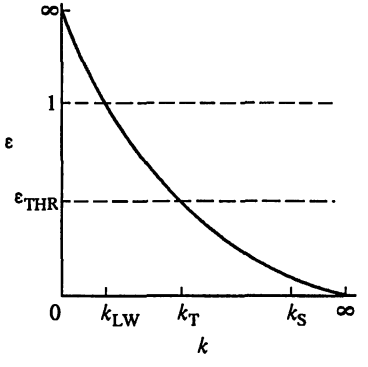


Рис. 40.1. Степенное начальное возмущение с $\delta < 0$. Здесь $k_{\rm S}$ — стабилизирующий микромасштаб, $\epsilon_{\rm THR} \ll 1$. Штриховыми прямыми $\epsilon \equiv 1$ и $\epsilon \equiv \epsilon_{THR}$ отмечены граница линейность/нелинейность и порог по конкуренции между спонтанной и стимулированной РТТ

При больши́х k возмущение затухает медленнее, чем по экспоненте $\exp\left(-\sqrt{k/k_{\rm LW}}\right)$. Поэтому от микромасштаба $k_{\rm S}$ пойдет стохастическая "волна" п. 38.2 в сторону ма́лых k. Эта "волна" доминирует в диапазоне $k_{\rm T} < \langle k\rangle(t) < k_{\rm S}$ (T — transition). Величины $k_{\rm LW}$ и $k_{\rm T}$ таковы, что $\epsilon(k_{\rm T},0) = \epsilon_{\rm THR} \ll 1$, а $\epsilon(k_{\rm LW},0) = 1$.

В диапазоне $k_{\rm LW} < \langle k\rangle(t) < k_{\rm T}$ доминирует перемешивание из-за длинноволновых (по отношению к "накатывающей" "справа" — т.е. со стороны коротких масштабов — стохастической "волне") начальных возмущений, сосредоточенных при $t = 0$ при $k_{\rm LW} < k < k_{\rm T}$. Но этот диапазон не является экспоненциально широким, поскольку величина

$$\ln \frac{k_{\rm T}}{k_{\rm LW}} = \frac{1}{|\delta|} \ln \frac{1}{\epsilon_{\rm THR}} \tag{40.4}$$

при конечных δ ограничена.

Из формулы (40.4) следует, что этот диапазон будет широким, только если $\delta = 0$. Таким образом, единственный (i) однородный широкодиапазонный спектр, который одновременно является (ii) возмущением[12], есть спектр (40.3), получающийся при $\delta = 0$.

Условие $\delta = 0$ означает, что

$$\epsilon(k,0) \equiv \epsilon_0. \tag{40.5}$$

[12]То есть его относительная амплитуда (40.1) остается малой по сравнению с единицей во всем диапазоне.

При этом возмущения КГ и скорости имеют вид

$$\delta\eta(k,0) \propto k^{-1} \tag{40.6}$$

и

$$\delta v(k,0) \propto k^{-1/2} \tag{40.7}$$

соответственно. Ниже под пространственно-инвариантными или самоподобными будем понимать спектры возмущений вида (40.5)–(40.7).

40.2. Рост однородных возмущений

Лакуны в однородных распределениях. Как сказано, начальные данные (40.5)–(40.7) (i) безмасштабны и (ii) при $\epsilon_0 \ll 1$ линейны в экспоненциально широком диапазоне по k. Рассмотрим вопрос об координатном представлении однородных начальных шумов. Конечно, записи (40.5)–(40.7) условны. Если воспринять их буквально как фурье-образ и восстановить координатную функцию (обратный фурье-образ) по этому фурье-образу, то получим уединенную по x (2D) или x, y (3D) функцию. Между тем, однородные шумы, разумеется, являются "в среднем" сдвигово-инвариантными по горизонтальным переменным x или x, y.

На самом деле формулы (40.5)–(40.7) описывают только сглаживаемую часть функций, задающих однородные шумы. В отношении сглаживания эта часть подобна той, которая представлена на рис. 37.2*б*. Этот рисунок получается после усреднения по "иглам" истинного дельта-коррелированного фурье-образа, показанного на рис. 37.2*в*. К тому же, как будет видно ниже (см. § 42), формулы (40.5)–(40.7) описывают эти шумы в среднем по крупным масштабам. Однородных шумов, отличающихся в определенных качественных отношениях, оказывается несколько[13]. Эти вопросы разобраны в § 42. Здесь же возьмем один из возможных спектров однородных шумов и сосредоточимся на динамике процесса.

Рассмотрим однородный шум в виде лакунарного тригонометрического ряда

$$k_J = a^J\, k_{\mathrm{LW}}, \qquad a > 1, \quad a \simeq 1, \tag{40.8}$$

$$\epsilon(x, t=0) = \sum_{J=0}^{\infty} e_J \exp(ik_J x), \tag{40.9}$$

для $\delta\eta(x, t=0)$ и $\delta v(x, t=0)$

$$\delta\eta(x, t=0) = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{\eta_J}{k_J} \exp(ik_J x), \tag{40.10}$$

$$\delta v(x, t=0) = \mathrm{Fr}\sqrt{g} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{v_J}{\sqrt{k_J}} \exp(ik_J x), \tag{40.11}$$

[13]Имеются шумы с (i) редкими и (ii) густыми спектрами по числу линий на экспоненциальный ярус по k, а среди шумов (ii) с густыми спектрами имеются шумы (ii a), спектры которых сильно и средне флуктуируют по экспоненциальным ярусам, и шумы (ii b), мало флуктуирующие по этим ярусам.

здесь $|e_J|$, $|\eta_J|$ и $|v_J|$ — малые безразмерные постоянные; k_{LW} — некоторый затравочный масштаб. Ряды (40.10) и (40.11), дающие физические величины (смещения и скорости), экспоненциально быстро сходятся, поскольку их амплитуды пропорциональны $1/a^J$ и $1/a^{J/2}$, $a > 1$, соответственно.

Формулы (40.8)–(40.11) дают x-представление однородных шумов. Их фурье-образы равны

$$\epsilon(k, t = 0) = (2\pi)^{-1} \sum_{J=0}^{\infty} e_J \, \delta(k - k_J), \tag{40.12}$$

$$\delta\eta(k, t = 0) = (2\pi)^{-1} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{\eta_J}{k_J} \, \delta(k - k_J), \tag{40.13}$$

$$\delta v(k, t = 0) = \frac{\mathrm{Fr}\sqrt{g}}{2\pi} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{v_J}{\sqrt{k_J}} \, \delta(k - k_J). \tag{40.14}$$

Лакунами называются промежутки между гармониками k_J (40.8). Они образуют геометрическую прогрессию. На оси $q = \ln k$ гармоники (40.8) образуют последовательность q_J равноотстоящих точек с шагом, равным $\Delta q = \ln a > 0$. Функция (40.12) при $e_J \equiv \mathrm{const}$, рассмотренная на оси q, является периодической по q. Будем называть экспоненциальным ярусом или просто ярусом шаг Δq или $\ln a$. На оси k ярус занимает промежуток от k до k/a, концы которого отличаются в разы.

Внутри этой последовательности (диапазона) q_J далеко от ее коротко-масштабного и длинноволнового концов имеется однородность относительно растяжений по $\mathbf{r}$, которым соответствуют сдвиги по оси $q = \ln k$. Это пространственная инвариантность в среднем при усреднении по q по "расстояниям" порядка шага $\ln a$. Обзору математических свойств таких рядов посвящена книга (Kahane, 1970), см. также Математическая энциклопедия, т. 3, с. 185.

С рядами (40.8)–(40.14) связана ясная модель, реализующая согласно работам (Иногамов, 1978; Anisimov et al., 1983; Inogamov et al., 1991b) однородные начальные возмущения.

Одно звено процесса развития. Пусть начальные данные даются формулами (40.8), (40.10) и (40.11) или (40.8), (40.13) и (40.14). Рассмотрим динамику развития. Начальные данные линейны — амплитуды $|\epsilon_J|$ малы. Пусть $\epsilon_J \equiv \epsilon_0 \ll 1$. В отсутствие экспоненциального сглаживания короткомасштабного хвоста короткомасштабные возмущения имеют преимущество в темпе роста (инкременте). Поэтому развитие перемешивания "идет" со стороны коротких масштабов.

Обозначим через $\langle k \rangle(t)$ наименьшее на момент t волновое число развитой до нелинейной стадии или насыщенной гармоники. Функция $\epsilon(k, t)$ описывает эволюцию фурье-образа. Масштаб $\langle k \rangle(t)$ таков, что $\epsilon[\langle k \rangle(t), t] = 1$. Функция $\epsilon(k, t)$ показана на рис. 40.2 сплошной кривой. В случае неограниченной оси x $(-\infty, \infty)$ она определена в каждой

точке k. Штриховыми вертикальными отрезками изображена лакунарная "гребенка" (40.8), (40.12). Эти отрезки условны, поскольку они изображают дельта-функции (40.12). О высоте отрезков относительно ϵ_{THR} разговор пойдет в § 41, посвященном сравнению спонтанной и стимулированной динамик.

В момент t "фронт" перемешивания на оси k или на оси $\ln k$ находится в точке $\langle k\rangle(t)$. Предвестник "фронта" располагается в области $k < \langle k\rangle(t)$. Он складывается из начальных дельта-функций, амплитуда которых растет по законам линеаризованной теории. Функция $\epsilon(k,t)$

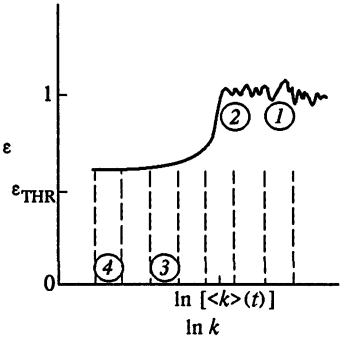


Рис. 40.2. Начальный лакунарный спектр и развитие возмущения. Начальный спектр дан штриховыми вертикальными отрезками. Функция $\epsilon(k,t)$ показана сплошной кривой

при $k > \langle k\rangle(t)$ является "игольчатой" (дельта-коррелированной), как и функция, показанная на рис. 37.2*в*. На рис. 40.2 изображено ее среднее по точечным "иглам".

Номерами *1*, *2*, *3* и *4* на рис. 40.2 отмечены характерные участки. Это короткомасштабный (*1*), переходный (*2–3*) и длинноволновый предвестниковый (*4*) участки. Наиболее существенным является движение на участке (*2–3*).

Во времени процесс развития складывается из звеньев, соответствующих "прохождению" "волны" перемешивания по ярусам $q_J = \ln k_J$, где k_J определено в (40.8). На рис. 40.2 показано прохождение одного из таких звеньев. Начальным для этого звена эволюции является момент t_2, в который $\langle k\rangle(t_2) = k_2$, а концом этого звена — момент t_3 такой, что $\langle k\rangle(t_3) = k_3$. Точки k_2 и k_3 отмечены номерами *2* и *3*. Концы звена k_2 и k_3 отличаются в разы.

Будем считать, что развитие процесса на участке $t_2 < t < t_3$ вызвано развитием возмущений на гармониках k_2 и k_3, а не спонтанной РТТ. Тогда продолжительность Δt_{23} звена *2* → *3* определяется амплитудой возмущений на этих гармониках. Она равна

$$\Delta t_{23} = \frac{\xi_1}{\gamma}\,|\ln \xi_2 \epsilon_0|, \qquad \gamma = \sqrt{gk}, \tag{40.15}$$

где постоянные ξ_1, ξ_2 порядка единицы.

Рассмотрим историю отдельной гармоники $k_\star$. В своей эволюции она проходит стадии *4* ($t \ll t_\star$) → *3* ($t \sim t_\star$) → *2* ($t \sim t_\star$) → *1* ($t \gg t_\star$), помеченные цифрами *1–4* на рис. 40.2. Здесь $t_\star$ таково, что $\langle k\rangle(t_\star) = k_\star$. На

короткой стадии *4* амплитуда $\epsilon(k_*, t)$ этой гармоники растет экспоненциально с гидростатическим инкрементом $\gamma = \sqrt{gk}$, $\mu = 0$, см. рис. 40.3.

Существенно то, что в течение продолжительного промежутка времени длительностью $\sim t_*$ при $t < t_*$ развитие происходит с инкрементом порядка гидростатического, см. рис. 40.3. Именно на этом

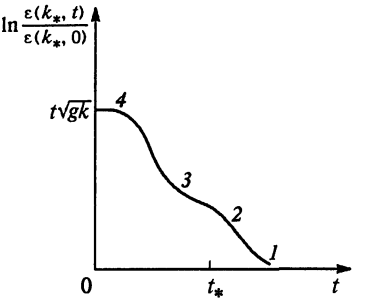


Рис. 40.3. Любая гармоника в своем развитии последовательно проходит стадии *4*, *3*, *2* и *1*

промежутке происходит основное усиление гармоники k_* от величины $\approx \epsilon(k_*, 0) = \epsilon_0 \ll 1$ до насыщения $\epsilon(k_*, t_*) = 1$. На этой стадии гармоника k_* является малоамплитудной субгармоникой по отношению к гармоникам $\langle k \rangle(t)$. То, что инкремент субгармонической неустойчивости порядка гидростатического, показано в гл. VII, см. §§ 33–35. Оценка (40.15) как раз и следует из того, что субгармонический и гидростатический инкременты оказываются одного порядка. Стадии 2 и 1 относятся к стадиям насыщения.

Прохождение последовательных звеньев процесса развития. Стимулированный каскад. Рассмотрим последовательность звеньев, подобных по **r** и t описанному выше звену $3 \to 2$. Процесс (стимулированная "волна") распространяется от коротких масштабов. Поэтому рассмотрим "гребенку" (40.8), (40.12)–(40.14) от ее короткомасштабного края k_S. Она равна $k_J = k_S/a^J$, $J = 0, 1, 2, \ldots$, где $a > 1, a \simeq 1$. Последовательность или каскад складывается из отдельных звеньев. Текущее положение "волны" получается суммированием их, см. работы (Иногамов, 1978, Anisimov et al., 1983; Inogamov et al., 1991b).

Представим этот каскад по порядку. Согласно (40.15) продолжительность звена $0 \to 1$

$$\Delta t_{01} = \frac{\xi_1 |\ln(\xi_2 \epsilon_0)|}{\sqrt{g k_{01}}}, \tag{40.16}$$

где за k_{01} принято среднее значение $k_{01} = (1/2)(k_0 + k_1) = (k_S/2) \times \times (1 + 1/a)$. Подъем по вертикали пузыря за это время

$$\Delta y_{01} = \mathrm{Fr} \sqrt{g/k_{01}}\, \Delta t_{01} = (\mathrm{Fr}\, \xi_1 |\ln(\xi_2 \epsilon_0)|)/k_{01}. \tag{40.17}$$

Характерный масштаб

$$\langle k \rangle_{01} = k_{01}. \tag{40.18}$$

В следующем звене имеем $k_{12} = (1/2)(k_1 + k_2) = (k_S/2)(1 + 1/a)/a$. Величины Δt_{12}, Δy_{12} и $\langle k\rangle_{12}$ получаются из формул (40.16)–(40.18) после замены в них k_{01} на k_{12}. Аналогично выписываются выражения для следующих звеньев. В $(N+1)$-м звене имеем $k_{N,N+1} = (k_S/2) \times \times(1 + 1/a)/a^N$,

$$\Delta t_{N,N+1} = \frac{\xi_1 |\ln(\xi_2\epsilon_0)|}{\sqrt{g k_{N,N+1}}},$$

$$\Delta y_{N,N+1} = \frac{\mathrm{Fr}\,\xi_1\,|\ln(\xi_2\epsilon_0)|}{k_{N,N+1}},$$

$$\langle k\rangle_{N,N+1} = k_{N,N+1}.$$

Суммируем эти звенья. Полное время равно

$$t = \sum_{n=0}^{N} \Delta t_{n,n+1} \approx \frac{\sqrt{2}\,\xi_1}{\sqrt{a+1}\,(\sqrt{a}-1)}\,\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{1}{\sqrt{k_S}}\,(\sqrt{a})^{N+2}\,|\ln(\xi_2\epsilon_0)|. \tag{40.19}$$

Полное смещение равно

$$h_+ = \sum_{n=0}^{N} \Delta y_{n,n+1} \approx \frac{2\,\xi_1\,\mathrm{Fr}}{a^2-1}\,\frac{1}{k_S}\,|\ln(\xi_2\epsilon_0)|\,a^{N+2}. \tag{40.20}$$

Средний масштаб на момент t равен

$$\langle k\rangle = \frac{k_S}{2}\,\frac{a+1}{a^{N+1}}. \tag{40.21}$$

Исключим большой фактор a^N из соотношений (40.19)–(40.21). Получим

$$h_+ = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{(a-1)\,\xi_1}\;\mathrm{Fr}\;\frac{1}{|\ln(\xi_2\epsilon_0)|}\,gt^2, \tag{40.22}$$

$$\langle k\rangle\, g\, t^2 = \frac{a}{(\sqrt{a}-1)^2}\,\xi_1^2\,[\ln(\xi_2\epsilon_0)]^2, \tag{40.23}$$

где постоянные a, ξ_1, ξ_2, Fr все порядка единицы.

Следствием подобия (безмасштабности, однородности) звеньев является однородность (автомодельность) их суммы (40.19), (40.20). Автомодельные вертикальный (40.22) и горизонтальный (40.23) масштабы перемешивания пропорциональны gt^2, см. (40.22) и (40.23), как и должно быть. Видим, что показатель автомодельности при наличии однородных шумов оказывается таким же, как и в случае спонтанной РТТ, сравните (40.22), (40.23) и формулы (38.11), (38.12) из п. 38.2.

§ 41. Сравнение спонтанной и стимулированной РТТ, порог и предельная чистка

41.1. Сопоставление причин, приводящих к спонтанному и стимулированному перемешиванию

Спонтанная и стимулированная "волны". Сравним спонтанное (п. 38.2) и стимулированное (п. 40.2) перемешивания. В обоих случаях движение разбивается на цепочку или каскад звеньев. Каскад этот инверсный — движение распространяется от коротких масштабов. В обоих случаях внутри звена происходит увеличение масштаба в несколько раз. Имеются как бы "волны", движущиеся по оси k. В автомодельном случае в логарифмических переменных $q = \ln k$, $\tau = \ln t$ эти "волны" распространяются с постоянной скоростью. При соответствующей нормировке амплитуды (см. п. 39.1) — это стационарные, не меняющие своей формы "волны". Итак, имеются спонтанная и стимулированная "волны".

Причины движения в рассматриваемых двух случаях различны. Спонтанная "волна" имеет резко убывающий[14] с уменьшением $k/\langle k\rangle$ длинноволновой хвост I, показанный на рис. 37.2*б*. К появлению этого хвоста приводит взаимодействие мод внутри "бугра" фурье-образа случайно-периодической функции, см. рис. 37.2*б*, *в*. Сам "бугор" образуется из-за периодической части случайно-периодической функции. Хвост I состоит из субгармоник по отношению к $\langle k\rangle$.

Субгармоническая неустойчивость, рассмотренная в гл. VII, усиливает эти субгармоники. В то время как гармоники с $k \sim \langle k\rangle$ уже насыщены и их рост остановлен. Это приводит к продвижению "волны" $d\langle k\rangle/dt < 0$ по оси k.

В стимулированной "волне" длинноволновый хвост убывает при уменьшении $k/\langle k\rangle$ медленнее. Он состоит из участка убывания функции $\epsilon(k,t)$ при $k < \langle k\rangle$ и "предвестника", в котором $\epsilon(k,t)$ не меняется, см. рис. 40.2. Асимптотика функции $\epsilon(k,t)$ при $k \to 0$ равна $\epsilon(k,t) \to \epsilon_0$. Ширина участка убывания порядка $\langle k\rangle$.

Хвост стимулированной "волны" так же, как в спонтанном случае, состоит из субгармоник по отношению к $\langle k\rangle$. Субгармоническая неустойчивость приводит к усилению субгармоник и продвижению стимулированной "волны" $d\langle k\rangle/dt < 0$.

Итак, в спонтанном случае взаимодействие мод "забрасывает" ("засевает") в длинноволновый хвост субгармоники, а субгармоническая неустойчивость усиливает их, тогда как в стимулированном случае субгармоники, усиливаемые этой неустойчивостью, имеются с самого начала.

---

[14] Длинноволновый хвост I и порог ϵ_{THR}. Речь идет о спаде хвоста I в промежутке амплитуд $\epsilon_{\mathrm{THR}} < \epsilon_0 < \epsilon_{\mathrm{NL}}$ и сравнении спонтанного и стимулированного хвостов, здесь ϵ_{NL} — наибольшая амплитуда, которая еще может считаться линейной, $\epsilon_{\mathrm{NL}} < 1$. См. по этому поводу рис. 40.1 и 40.2, см. также п. 41.2 ниже. Подпороговое поведение $\epsilon(k,0)$ не существенно.

О взаимодействии гармоник в стимулированном случае. Подчеркнем, что в стимулированном спектре развитие гармоник идет не независимо друг от друга. Насыщенные гармоники, из которых складывается центральная и короткомасштабная части "бугра", сильно влияют на динамику гармоник, субгармонических по отношению к ним, см. гл. VII. Это приводит к изменению темпа роста субгармоник, см. рис. 40.3.

О конкуренции спонтанного и стимулированного перемешивания. Ясно, что существует конкуренция между спонтанной и стимулированной "волнами". Первая, как сказано выше, "засевается" из "бугра" "волны", а вторая развивается из широкодиапазонного начального "засева". Какая из волн находится впереди на оси $q = \ln k$ зависит от амплитуды начального "засева", см. ниже о пороге.

Концепция порога и разделения спонтанного и стимулированного перемешивания является ответом на вопрос о некорректности в задачах о неустойчивостях Рэлея–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца. Некорректность вызвана расходимостью инкрементов $\gamma(k)$ этих неустойчивостей при $k \to \infty$.

О причинности в спонтанной и стимулированной "волнах". Передача информации ("сигнала") по оси k в этих "волнах" отличается качественно. В спонтанной "волне" информация передается по цепочке. Возникает как бы "волна горения" (ВГ), в которой одно звено инициирует следующее. Возможна ситуация (см. § 39) с локальным (в пространстве k) "очагом" "возгорания", инициированным при $t = 0$, независимым от спонтанной "волны горения", бегущей от "запала" при $k = \infty$.

При широкодиапазонной стимуляции имеется ансамбль отдельных "очагов". Они инициируются одновременно при $t = 0$, но "выгорают" за время, зависящее от их размера. "Выгорание" бóльшего "очага" требует больше времени. В автомодельном случае "очаги" расположены тесно. Соседние "очаги" сильно взаимодействуют — взаимодействие субгармоники и $\langle k \rangle$. Стимулированная "волна", отчасти, напоминает фазовую волну — "волну самовыгораний" (ВСВ) отдельных "очагов". В ней передается скорее фаза, чем информация. Этой фазой, бегущей по оси $\ln k$, является фронт "выгорания". Здесь меньше информации передается от звена к звену, более важной является локальная начальная информация.

41.2. Порог, разделяющий спонтанный и стимулированный режимы

Конкуренция и порог. Отмеченная выше конкуренция тесно связана с порогом, разделяющим режимы. Выше порога доминирует один режим, а ниже — другой. Это положение проиллюстрированно на рис. 41.1. При $t = 0$ имеются однородные шумы с амплитудой ϵ_0. При $k \to 0$ выполняется $\epsilon(k,t) \to \epsilon_0$. Если $\epsilon_0 < \epsilon_{\text{THR}}$ (кривая *1б*) или $\epsilon_0 = 0$ (кривая *1а*), то доминирует спонтанная "волна". Отсюда следует, что нелинейная эволюция любых подпороговых возмущений описывается спонтанной "волной" (хаотической РТТ).

Если же $\epsilon_0 > \epsilon_{\text{THR}}$, то доминирует стимулированная "волна". Доминирование стимулированной "волны" над спонтанной означает, что она находится впереди. Волны распространяются справа налево на рис. 41.1.

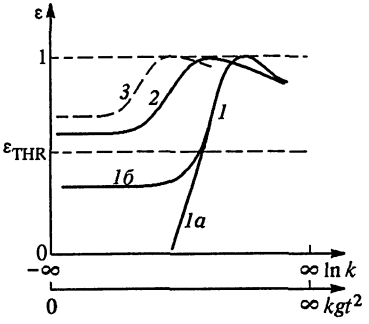


Рис. 41.1. Фурье-образы "волн" перемешивания в спонтанном (кривая *1*) и стимулированном (кривые *2* и *3*) случаях

Если сравнить разные стимулированные "волны" с начальными амплитудами $\epsilon_3 > \epsilon_2 > \epsilon_{\text{THR}}$, то стимулированная "волна" с ϵ_3 (кривая *3*) находится впереди (доминирует) всех волн с меньшей начальной амплитудой $\epsilon_0 < \epsilon_3$.

Таким образом, если все подпороговые "волны" сливаются в одну, то надпороговые "волны" индивидуальны — они образуют семейство стимулированных "волн", которое пробегает параметр $\epsilon_0 - \epsilon_{\text{THR}} > 0$, характеризующий надпороговость.

Влияние однородных шумов: перестройка стимулированных "волн" (стимулированного РТ перемешивания) в зависимости от их амплитуды. Тезис о значении превышения над порогом $\epsilon_0 - \epsilon_{\text{THR}}$ проиллюстрирован на рис. 41.1, сравните "волны" *2* и *3*. Обозначим максимумы "волн", приведенных на рис. 41.1, через $\langle k \rangle$. Обозначая комбинации постоянных одной буквой, перепишем формулы (38.12) из п. 38.2 и (40.23) из п. 40.2 в следующем виде:

$$\langle k \rangle_{\text{SPONT}} = 2\pi/\alpha^{\text{H}}_{\text{SPONT}} \text{A} g t^2 \tag{41.1}$$

и

$$\langle k \rangle_{\text{STIM}} = 2\pi/\alpha^{\text{H}}_{\text{STIM}} \text{A} g t^2 \tag{41.2}$$

соответственно. Если горизонтальный (верхний индекс H означает horizontal) структурный коэффициент $\alpha^{\text{H}}_{\text{SPONT}}$ фиксирован, то коэффициент $\alpha^{\text{H}}_{\text{STIM}}$ меняется вместе с ϵ_0, $\alpha^{\text{H}}_{\text{STIM}} \propto |\ln(\xi_2\, \epsilon_0)|^{-2}$.

Согласно сказанному о конкуренции семейства стимулированных "волн" и одной спонтанной "волны" имеем

$$\langle k \rangle = \min\{\langle k \rangle_{\text{SPONT}};\ \langle k \rangle_{\text{STIM}}\}. \tag{41.3}$$

В (41.3) величины $\langle k \rangle_{\text{SPONT}}$ и $\langle k \rangle_{\text{STIM}}$ даются формулами (41.1) и (41.2).

Из определения порога получаем

$$\alpha^{\text{H}}_{\text{STIM}} = \alpha^{\text{H}}_{\text{SPONT}} \left| \frac{\ln(\xi_2 \epsilon_{\text{THR}})}{\ln(\xi_2 \epsilon_0)} \right|^2. \tag{41.4}$$

Объединяя формулы (41.3) и (41.4), можно записать

$$\langle k\rangle = \frac{2\pi}{\alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{SPONT}}\,\mathrm{A}\,g\,t^2}\left[\theta(-\Delta)+\theta(\Delta)\left|\frac{\ln(\xi_2\,\epsilon_0)}{\ln(\xi_2\,\epsilon_{\mathrm{THR}})}\right|^2\right], \qquad (41.5)$$
$$\Delta = \epsilon_0 - \epsilon_{\mathrm{THR}},$$

где $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Требование линейности надпороговых однородных возмущений. Значение ϵ_{THR} мало $\epsilon_{\mathrm{THR}} \ll 1$. Поэтому надпороговые (стимулированные) "волны" могут быть еще довольно малой по сравнению с единицей амплитуды. Разумеется, при $\epsilon_0 \simeq 1$ нарушается требование малости начального возмущения. Согласно этому требованию исходные данные должны представлять собой сумму из гидростатического симметричного состояния и малых несимметричных возмущений.

О позиции "волны" на оси $\ln k$ и сдвиге позиции. Доминирующая из пары "волн" определяется их позициями $\langle k\rangle$ на оси $\ln k$. Фронт $\langle k\rangle$ сдвигается в зависимости от амплитуды ϵ_0. Сдвиг дается формулами (41.3) и (41.4). Он изображен на рис. 41.1. О фиксированной позиции можно говорить в случае установившихся (автомодельных) "волн". Автомодельные или степенные решения являются общими или универсальными. С участками неоднородности начальных данных связаны переходные или неустановившиеся движения. Законы (41.1), (41.2) вблизи такого участка выполняются с задержками Δk, Δt по k и t, которые определяются масштабом этого участка и амплитудой возмущения на нем. Асимптотически при $t \gg \Delta t$ задержки становятся незаметными на фоне крупномасштабного движения. Устанавливается универсальный режим движения. В закон движения "волны" входят:

(i) задержки (они описывают стадию перехода);

(ii) коэффициент пропорциональности α (он может быть спонтанным или стимулированным);

(iii) показатель автомодельности (степень 2 в законе gt^2).

Скорости всех автомодельных "волн" в переменных $q = \ln k$, $\tau = \ln t$ не зависят от ϵ_0 и равны показателю автомодельности, взятому с обратным знаком. Позиция же "волны" определяется величиной коэффициента (ii).

41.3. Предельная чистка

Технологический аспект. В инерционном синтезе быстрыми темпами развиваются программы, нацеленные на достижение порога зажигания. Это программа NIF (National Ignition Facility) в США (Lindl, McCrory & Campbell, 1992; Haan, Pollaine, Lindl et al., 1995), лазерные системы Омега в США, Искра-5 и 6 в России (Кочемасов, 1997; Гаранин, 1997), Фебус во Франции и Гекко в Японии. В связи с этим происходит переход на большие по размерам реакторные мишени, весьма чувствительные к неустойчивости. Исследования по физике перемешивания являются ключевыми в этих программах.

В технологическом плане много внимания уделяется фабрикации мишеней. Большие усилия тратятся на изготовление высококачественных оболочечных мишеней с малыми отклонениями от симметрии (McEachern et al., 1993; Letts et al., 1994; Aleksandrova et al., 1994; Logan, 1995; Paisner et al., 1995; Меркульев, 1997).

Важно то, что типичным является широкодиапазонный спектр возмущений оболочек (McEachern et al., 1993; Letts et al., 1994; Logan, 1995; Paisner et al., 1995).

О переходных и автомодельных решениях и о предельной чистке. Реакторные оболочки велики по размерам. Их сжимают продолжительным лазерным импульсом. В больших мишенях диапазон между микро- и макромасштабами широк. При лазерном инерционном синтезе микромасштаб определяется абляцией, см. п. 7.3, § 9. В малых мишенях и при коротких импульсах автомодельное решение не успевает установиться. При этом имеет место переходный режим перемешивания. В больших (реакторных) оболочках характерны режимы, близкие к автомодельным. Из-за широкого по k диапазона возмущений это может быть как спонтанный автомодельный режим, так и стимулированные автомодельные режимы.

Из сказанного в п. 41.2 о пороге, см. формулы (41.3)–(41.5), вытекает чрезвычайно важное заключение по технологии фабрикации оболочки. Получается, что *нет смысла понижать уровень начальных возмущений ниже конечного порога* ϵ_{THR} (Inogamov et al., 1991b)! Это и называется пределом сглаживания или предельной чисткой.

Вопрос об уровне выглаживания важен, поскольку трудность изготовления мишени резко возрастает с ее качеством.

Простая (надпороговая) и сложная (подпороговая) очистки. Сделаем замечание, поясняющее приведенное заключение, которое относится к автомодельным (общим) режимам стимулированного перемешивания. Это надпороговая широкодиапазонная чистка. Будем называть ее простой.

Допустима чистка следующего, более высокого ранга. Она является *подпороговой*. Назовем ее сложной. Здесь существенна селективность по k, поскольку под порогом более опасны возмущения с большими k. Сложная чистка возможна в том случае, когда инерционный интервал $\ln k_{\mathrm{L}}/k_{\mathrm{S}}$ не слишком велик по сравнению с единицей. Она представляет собой экспоненциальное сглаживание возмущений в коротких масштабах, см. п. 39.2.

Принципиальная возможность сложной чистки связана с конечностью микромасштаба k_{S} и с существованием переходных режимов перемешивания. Если в широком диапазоне начальные возмущения сглажены до амплитуды ниже порога ϵ_{THR}, то после перехода устанавливается спонтанный режим перемешивания.

Продолжительность перехода зависит от начальных данных. При их экспоненциальном сглаживании переход затягивается на несколько экспоненциальных ярусов. Максимальная ширина $\ln k_{\mathrm{S}}/k_{\mathrm{SPONT}}$ определяется уровнем минимального шума на микромасштабе, здесь k_{SPONT} — волновое число, на котором после перехода устанавливается спонтанная

РТТ. Минимальная амплитуда не может быть нулевой. Она определяется температурными или квантовыми флуктуациями системы, см. п. 39.2.

Поскольку переход зависит от распределения по k неоднородных (т. е. не степенных) начальных амплитуд, то нет универсального закона, не зависящего от начальных данных, который бы описывал переход (хотя в одной работе предполагается обратное). Переходная стадия до установления спонтанного перемешивания описывается тривиальной линейной теорией $\epsilon(k,t) = \epsilon(k,0)\exp(\sqrt{gk}\,t)$.

41.4. О числовой величине ϵ_{THR}

Порог и физические явления, связанные с ним. Принципиальная важность понятия о пороге. Порог ограничивает область существования спонтанного перемешивания $0 \le \epsilon_0 \le \epsilon_{\mathrm{THR}}$. Вместе с ним появляются представления о широкодиапазонном стимулировании перемешивания. Поэтому он является важным. Понятие о пороге позволяет глубже осознать концепцию турбулентного перемешивания.

Числовая малость ϵ_{THR}. Значение ϵ_{THR} мало по сравнению с единицей. Это очень важное обстоятельство. В силу этого имеется надпороговая область около ϵ_{THR}, в которой перемешивание стартует от линейных начальных возмущений. Из численного моделирования (см. работу (Inogamov et al., 1991b) и § 43) следует оценка порога. Это число порядка нескольких тысячных $\epsilon_{\mathrm{THR}} = (3-9)\times 10^{-3}$.

О причине малости ϵ_{THR}. Малость пороговой амплитуды вызвана медленностью спонтанного перемешивания. Поясним, что под этим подразумевается. Фронт перемешивания продвигается в плотное тяжелое вещество. Оно находится сверху. Величина $\alpha^+ = h^+/\mathrm{A}gt^2$ является безразмерной автомодельной толщиной перемешанного слоя плотного вещества. Размерная толщина равна h^+. Автомодельный фронт движется равноускоренно. Медленность спонтанного перемешивания состоит в малости ускорения фронта $2\alpha^+_{\mathrm{SPONT}}\mathrm{A}gt^2$ по сравнению с предельным ускорением $(1-\mu)g = 2\mathrm{A}g/(1+\mathrm{A})$. Согласно натурным и численным экспериментам $\alpha^+_{\mathrm{SPONT}} \simeq 0,05 \ll 1$. См. об этом работы (Анучина, Кучеренко и др., 1978; Anisimov et al., 1983; Youngs, 1984; Read, 1984; Inogamov et al., 1991b), см. также п. 18.6. Таким образом, малость ϵ_{THR} следует из малости $\alpha^+_{\mathrm{SPONT}}$.

Гидромеханические причины малости $\alpha^+_{\mathrm{SPONT}}$. Малость $\alpha^+_{\mathrm{SPONT}}$ вызвана

(i) медленностью подъема пузырей;

(ii) их большой шириной

(iii) относительной медленностью роста их размеров.

Медленность подъема связана с большим аэродинамическим сопротивлением движению пузыря, обусловленным набегающей на него тяжелой жидкостью, см. гл. VI. Большая ширина пузырей приводит к тому,

что падающим ($A \approx 1$) струям остается мало места. Доля площади горизонтального сечения, занятая струями, в сечении, в котором вещество в струях достигает ускорения свободного падения, мала.

Обсудим вопрос о возможностях аналитической оценки коэффициента α^+_{SPONT}. Сведение каскадного процесса к простому суммированию звеньев в п. 38.2 открывает некоторые надежды в этом направлении. Аналитическая оценка α^+_{SPONT} через скорость подъема пузыря, его размер (см. конец § 27) и инкремент субгармонической неустойчивости (см. §§ 33–35) является грубой. Уже расчет дисперсионных кривых субгармонической неустойчивости очень сложен. Неясно, какую амплитуду субгармоник заложить в оценку. Интересная полуаналитическая модель, находящаяся вне рамок прямого численного моделирования, изучена в работе (Zufiria, 1988).

Смежным к этому является вопрос об аналитической оценке величины ϵ_{THR} с помощью суммирования п. 40.2. Эта оценка несколько проще, поскольку снимается трудность с амплитудой субгармоник ϵ_0. Считается, что они малы. Тогда задержка обусловлена развитием этих возмущений. Это приводит к появлению фактора $|\ln \epsilon_0|$. Идея состоит в том, чтобы посредством суммирования п. 40.2 отыскать функцию $\alpha^+_{\text{STIM}}(\epsilon_0)$, а затем определить порог ϵ_{THR} из равенства $\alpha^+_{\text{STIM}}(\epsilon_{\text{THR}}) = \alpha^+_{\text{SPONT}}$. Трудности при расчете функции $\alpha^+_{\text{STIM}}(\epsilon_0)$ вызваны оценкой факторов a и ξ_1. Другой трудностью является то, что однородные шумы могут быть разными (см. ниже § 42). В связи с этим требует обсуждения вопрос об их количественном сопоставлении ("взвешивании").

О максимальной амплитуде однородных шумов. Выше рассмотрен вопрос о минимальной амплитуде $(\epsilon_0)_{\min} = \epsilon_{\text{THR}}$ однородных шумов, при которой стимулированный ими каскад начинает опережать спонтанный каскад. Спрашивается, какова максимальная амплитуда стимуляции ϵ_{NL}? Ясно, что она ограничена нелинейными (NL) эффектами.

Области SPONT ($0 < \epsilon_0 < \epsilon_{\text{THR}}$) и STIM ($\epsilon_{\text{THR}} < \epsilon_0 < \epsilon_{\text{NL}}$) показаны на рис. 41.2. Коэффициент α^+

$$\alpha^+ = \max\{\alpha^+_{\text{SPONT}}; \alpha^+_{\text{STIM}}\}. \tag{41.6}$$

Входящий в (41.6) стимулированный коэффициент

$$\alpha^+_{\text{STIM}} = \alpha^+_{\text{SPONT}} \left| \frac{\ln(\xi_2 \epsilon_{\text{THR}})}{\ln(\xi_2 \epsilon_0)} \right|. \tag{41.7}$$

Естественно то, что стимулированное перемешивание становится более интенсивным с ростом амплитуды возмущений. Очевидно, что при $\epsilon_0 = 0$ стимулированное перемешивание отсутствует. Формула $\alpha^+_{\text{STIM}} \propto \propto 1/|\ln(\xi_2 \epsilon_0)|$ "работает" в области больших значений $|\ln(\xi_2 \epsilon_0)|$, когда начальное возмущение является малым. В области $\epsilon_0 \simeq 1$ она не пригодна. Порог ϵ_{THR} появляется из-за того, что;

(i) $\alpha^+_{\text{STIM}}(\epsilon_0 = 0) = 0$ и, следовательно, $\alpha^+_{\text{STIM}}(0) < \alpha^+_{\text{SPONT}}$;

(ii) функция $\alpha^+_{\text{STIM}}(\epsilon_0)$ монотонно растет вместе с ϵ_0;

(iii) значение $\alpha^+_{\text{STIM}}(\epsilon_0 \simeq 1) \simeq 1$ больше, чем $\alpha^+_{\text{SPONT}} \ll 1$.

С учетом (41.7) формула (41.6) принимает вид

$$\alpha^+ = \alpha^+_{\rm SPONT}\left[\theta(-\Delta) + \theta(\Delta)\left|\frac{\ln(\xi_2\epsilon_{\rm THR})}{\ln(\xi_2\epsilon_0)}\right|\right], \quad \Delta = \epsilon_0 - \epsilon_{\rm THR}.$$

График этой функции вычерчен на рис. 41.2.

Качественный аргумент в пользу того, что $\epsilon_{\rm THR} \ll 1$ и соответственно имеется конечный промежуток $\epsilon_{\rm THR} < \epsilon_0 < \epsilon_{\rm NL}$, следует из анализа совместного развития уединенного длинноволнового возмущения и спон-

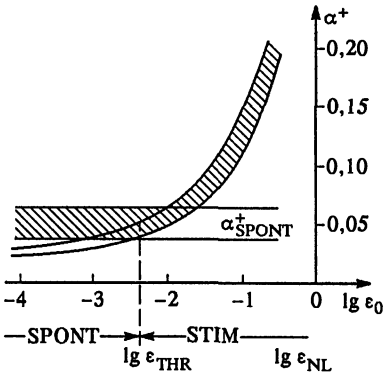


Рис. 41.2. Коэффициент α^+, как функция амплитуды однородных шумов ϵ_0. Имеется переходная область около порога $\epsilon_{\rm THR}$, левее которой перемешивание спонтанное, а правее — стимулированное. Вычерчены две стимулированные кривые (гиперболы $\alpha_+ \propto \propto 1/\lg\epsilon_0$) и две спонтанные прямые, ограничивающие имеющуюся неопределенность спонтанных и стимулированных коэффициентов

танного перемешивания, см. § 39 и рис. 18.4, 18.7. В расчетах, показанных на этих рисунках, было $\epsilon_0 = \epsilon_{\rm LW} = 0,2 - 0,3$. Как видим, амплитуда $\epsilon_{\rm LW}$ невелика по сравнению с единицей. Тем не менее, спонтанный каскад не успевает "затопить" длинноволновое возмущение.

О длинноволновом или "инфракрасном" обрезании однородных шумов. В разделе п. 40.1 рассмотрены степенные спектры с показателями $\delta \neq 0$. Области линейности степенных возмущений при $\delta \neq 0$ ограничены либо сверху (предел $k_{\rm SW}$), либо снизу (предел $k_{\rm LW}$) по k в зависимости от знака δ. Если $\delta = 0$ (однородный спектр), то $k_{\rm LW} = 0$ и $k_{\rm SW} = \infty$.

Со спектром $\delta = 0$ связана другая особенность. Лакунарные суммы $\delta\eta(x,0)$ (40.10) и $\delta v(x,0)$ (40.11) сходятся при $k \to \infty$. Вопрос возникает в длинноволновом или "инфракрасном" пределе. Покажем, как он разрешается.

Пусть лакунарный ряд по волновым числам k_J (40.8) ограничен отрезком $k_{\rm LW} < k < k_{\rm SW}$. Тогда индекс J в (40.8) пробегает значения $J = 0, 1, 2, \ldots, J_{\max}$, $J_{\max} = \ln(k_{\rm SW}/k_{\rm LW})/\ln a$. Пусть $J_{\max} \gg 1$. Рассмотрим значения $J_* \gg 1$. При этом $k_{\rm LW} \ll k_*$, где k_* соответствует J_*.

Сравним слагаемое s_* с $J = J_*$ со слагаемыми s_J с $J < J_*$ в рядах (40.10) и (40.11). Отношение s_J/s_* монотонно растет при убывании J. Оно становится очень большим при $J \to 0$. В этом и заключается рассматриваемый вопрос.

Хотя $\epsilon_0 \ll 1$, но оно ограничено $\epsilon_{\rm THR} \leq \epsilon_0$. Поэтому слагаемые $\propto \epsilon_0/2k$ в ряду (40.10) при $\eta_J \equiv \epsilon_0/2$ и слагаемые $\propto \epsilon_0/2\sqrt{k}$ в ряду (40.11) при $\eta_J \equiv \epsilon_0/2$ расходятся при $k \to 0$.

Реальная система всегда ограничена. Пусть ее размер L. Из-за роста амплитуд гармоник в рядах (40.10) и (40.11) при убывании k наибольшим является возмущение с минимальным волновым числом, равным $2\pi/L$. Поскольку $\epsilon_0 \ll 1$, то, например, наибольшее возмущение КГ $\delta\eta$ мало по сравнению с L. Поэтому с физической точки зрения проблемы нет.

С формальной стороны указанная "инфракрасная особенность" устраняется легко. При усреднении по горизонтальной оси требуется использовать не всю ось x, а ее часть. Эта часть должна составлять несколько характерных масштабов $2\pi/\langle k\rangle(t)$. Речь идет о влиянии предвестника, см. рис. 41.1, на усреднение. Покажем, что из-за малости ϵ_0 на усреднение влияет только дальняя "инфракрасная" часть предвестника. Рассмотрим для примера возмущения КГ. Амплитуда однородных шумов в предвестнике растет как $\delta\eta = \epsilon_0/k$. Сравним ее с толщиной перемешанного тяжелого вещества h_+. Получим, что отрезок, на котором должно производится усреднение, должен быть $\simeq 2\pi h_+/\epsilon_0 \gg h_+$. Этот отрезок будет также велик по сравнению с характерным масштабом $2\pi/\langle k\rangle$. Его достаточно для усреднения.

41.5. Структурные отличия решений из семейства стимулированных решений

Выше обсуждались качественные (причинность) и некоторые количественные отличия спонтанного и стимулированного режимов. Последний перестраивается в зависимости от амплитуды однородных шумов ϵ_0, определенной формулами (40.1) и (40.5)–(40.7). Имеются ненаблюдаемые (подпороговые) стимулированные режимы, "закрытые" спонтанным перемешиванием, см. рис. 41.2. Формулы (41.6), (41.5) дают зависимости h_+ и $\langle k\rangle$ от ϵ_0.

Спонтанная РТТ не зависит от ϵ_0. Поэтому сглаженные формы фурьеобразов (см. § 37 и рис. 37.2*б*, 41.1), соответствующие этому перемешиванию, коэффициенты α^+_{SPONT} и $\alpha^{\text{H}}_{\text{SPONT}}$ и геометрическое отношение $\langle\lambda\rangle/h_+$ фиксированы. Вариация стимулированных коэффициентов α^+_{STIM}, $\alpha^{\text{H}}_{\text{STIM}}$ рассмотрена. С ростом ϵ_0 происходит ускорение (интенсификация) перемешивания. Поэтому это явление и называется стимуляцией. Здесь отметим то, что при стимуляции сглаженные формы фурьеобразов ("бугры", см. рис. 41.1) и геометрическое отношение также варьируют в зависимости от амплитуды стимуляции. Происходит сдвиг максимума "бугра", изменение его формы, появляется предвестник. Согласно формулам (41.5)–(41.7) геометрическое отношение равно

$$\left(\frac{\langle\lambda\rangle}{h_+}\right)_{\text{STIM}} = \left(\frac{\langle\lambda\rangle}{h_+}\right)_{\text{SPONT}} \left|\frac{\ln(\xi_2\epsilon_{\text{THR}})}{\ln(\xi_2\epsilon_0)}\right|,$$

$$\left(\frac{\langle\lambda\rangle}{h_+}\right)_{\text{SPONT}} = \frac{\alpha^{\text{H}}_{\text{SPONT}}}{\alpha^+_{\text{SPONT}}}.$$

Как видим, оно увеличивается с ростом стимуляции.

§ 42. Разнообразие лакунарных форм

Рассмотрим вопрос о разнообразии однородных шумов и их сравнении ("взвешивании"). Если в § 41 описано, как изменяется динамика при изменении амплитуды однородных шумов ϵ_0, то здесь изучается внутренняя структура этих шумов, так сказать, их структура "внутри" фиксированного ϵ_0.

Решения задачи о динамике КГ делятся на переходные и общие (степенные). Степенные решения представляют особый интерес. К ним относятся и стимулированные решения. Они описывают эволюцию от однородных или пространственно-инвариантных начальных данных. Поэтому необходимо рассмотреть однородные функции более подробно.

42.1. Классификация однородных (самоподобных) функций

Условно спектры (фурье-образы) самоподобных функций даются степенными выражениями (40.3) с $\delta = 0$ и (40.6), (40.7). Условность здесь заключается в том, что, например, эти формулы *не могут быть* использованы для задания начальных данных в натурном или численном эксперименте.

"Редкие" спектры. Простейший пример спектра, который годится для задания начальных данных, приведен в п. 40.2, формулы (40.8)–(40.14). Значение a в (40.8), определяющее шаг спектра, не может быть велико. Должно выполняться $1 + \varepsilon < a < a_\star$, $\varepsilon \ll 1$, $a_\star \simeq 1$. При $a \simeq 1$ получаются "редкие" спектры, а при $a = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ — "густые".

При $k_{\mathrm{LW}} \to 0$ в (40.8) и $e_J = \mathrm{const}$, $\eta_J = \mathrm{const}$, $v_J = \mathrm{const}$ функция (40.8)–(40.14), рассматриваемая на оси $\ln k$, является периодической.

Растяжения k эквивалентны сдвигам по оси $\ln k$. Пространственная инвариантность выполняется в среднем при сдвигах порядка $\ln a$.

Периодичность по $\ln k$ не существенна. Нетрудно ввести случайный редкий лакунарный ряд, в котором период $\ln a$ и/или модули амплитуд e_J, η_J, v_J флуктуируют около средних значений $\langle \ln a \rangle$, $\langle e_J \rangle$, ... (Inogamov et al., 1991b). Положение случайных точек k_J при этом похоже на положения нулей случайно-периодической функции, показанной на рис. 37.3*а*. Пространственная инвариантность опять выполняется в среднем при сдвигах порядка $\langle \ln a \rangle$.

"Густые" спектры. Однородные функции с "редким" спектром составлены из тригонометрических функций, поскольку каждой такой функции соответствуют несколько гармоник. Индекс J в (40.8) пробегает экспоненциальные ярусы. В "редком" случае в каждом ярусе находится ~ 1 линий (точек) спектра.

Проще всего получить "густой" однородный спектр, располагая в каждом ярусе по случайно-периодической функции по x. Эти функции подробно рассмотрены в § 37. Их можно записать в виде $F_{\mathrm{RP}}(x, \langle\lambda\rangle)$, $F_{\mathrm{RP}}(x, \langle k \rangle)$ или $F_{\mathrm{RP}}(x, k)$, здесь второй аргумент определяет характерный шаг ("период") по x.

Однородная функция равна

$$\epsilon_{\rm D}(x, t=0) = \epsilon_0 \sum_{J=0}^{\infty} e_J\, F_{\rm RP}(x,\, k_J) = \epsilon_0 \sum_{J=0}^{\infty} e_J\, F_{\rm RP}(x,\, a^J k_{\rm LW}), \quad (42.1)$$

где $k_{\rm LW}$ — некоторый затравочный масштаб, $a \simeq 1$, D — dense. Считается, что функция $F_{\rm RP}$ "нормирована на единицу". Из-за этого появляется множитель ϵ_0, задающий среднюю амплитуду однородного шума. "Нормировка на единицу" означает, что фурье-образ функции $F_{\rm RP}$ таков, что интеграл от него, взятый по правилам п. 37.3, совпадает с интегралом от одной дельта-функции. Функция (42.1) имеет густой спектр, составленный из плотно натыканных "игл" (дельта-коррелированная функция). Она занимает широкодиапазонную область $k_{\rm LW} < k < \infty$. В этом ее отличие от одноярусной или уединенной случайно-периодической фун кции, показанной на рис. 37.2*в*.

Варианты функций $\epsilon_{\rm D}$ с "густым" спектром. Фурье-образ однородного шума можно представить в виде сглаженной и дельта-коррелированной частей аналогично тому, как это сделано на рисунках 37.2*б*, *в*. В случае (42.1) допустимы флуктуации по k

(i) сглаженной части на масштабах порядка яруса;

(ii) дельта-коррелированные флуктуации амплитуды;

(iii) фазы "игл".

Соответственно имеются три варианта $\epsilon_{\rm D1}$, $\epsilon_{\rm D2}$, $\epsilon_{\rm D3}$ однородных функций с "густым" спектром. В первом из них флуктуируют (i), (ii) и (iii). Во втором — (i) постоянно, а флуктуируют только (ii) и (iii). Наконец, в третьем постоянны (i) и (ii), а флуктуируют только (iii).

Наиболее представительный (широкий) класс образуют функции $\epsilon_{\rm D1}$. "Объемы" классов функций $\epsilon_{\rm D2}$ и $\epsilon_{\rm D3}$ меньше из-за ограничения флуктуаций. Поэтому в эксперименте с наибольшей вероятностью должны встречаться функции $\epsilon_{\rm D1}$.

Наличие и отсутствие плотного спектра "игл". В случае "редкого" спектра плотно натыканных "игл" нет при $t = 0$. По-видимому, "иглы", размещенные на расстояниях, равных нулю, не появятся и при $t > 0$. В случае "густого" спектра дельта-коррелированность имеется и при $t = 0$, и при $t > 0$.

42.2. Автомодельность и флуктуации по $\ln t$

В спонтанном случае сглаживаемая форма фурье-образа, по-видимому, стационарна. В случае "редких" и "густых" однородных функций $\epsilon_{\rm D1}$, показанных на рисунках 40.2 и 41.1, фурье-образ не является стационарным. Он флуктуирует ("дышит") с некоторым средним шагом по $\ln t$ порядка $\langle \ln a \rangle \sim 1$. Это вызвано крупномасштабными флуктуациями в ярусах (флуктуации вида (i), см. выше). Интересно отметить, что и функции $\epsilon_{\rm D2}$ и $\epsilon_{\rm D3}$, как будто бы не имеющие крупномасштабных флуктуаций (i), тоже "дышат" с шагом по оси $\ln t$ порядка единицы. Это связано с тем, что сумма вкладов от точечных "игл" на одном ярусе по k флуктуирует по знаку и по порядку величины при переходе с яруса на ярус.

Скажем несколько слов об этом. Основой является задача о случайных блужданиях. Пусть это блуждания на плоскости $z = x + iy$. Точка, вышедшая из центра $z = 0$, сделавшая n шагов, случайных по направлению и по длине шага $|\Delta z|$ ($\langle|\Delta z|\rangle = a$), удаляется (диффундирует) от центра на расстояние, средняя величина которого $|\langle z_n\rangle|$ порядка $\sqrt{na}$. Плотность распределения вероятности нахождения точки имеет колоколообразный вид с максимумом в $z = 0$ и шириной $\sqrt{na}$.

Разговор идет о сравнении определенных выше функций ϵ_{D2} и ϵ_{D3} с "густым" спектром ("густых" функций) и функций с "редким" спектром ("редких" функций). Разобъем ось k на ярусы по правилу (40.8). Представим "густую" функцию в виде суммы по спектру. Представим эту сумму в виде суммы подсумм по ярусам. Фиксируем значение x. Вычислим (просуммируем) подсуммы. Вычисление сводится к задаче о случайных блужданиях. В результате приходим к "редкой" сумме (сумме по ярусам). Видим, что "густая" функция по порядку величины эквивалентна "редкой", с амплитудой e_J в ярусах (см. (40.9)), случайно изменяющейся около фиксированного среднего.

Отсюда также следует, что не так много разницы между функциями ϵ_{D1} с одной стороны и функциями ϵ_{D2}, ϵ_{D3} с другой.

42.3. Однородный шум в "ящике"

Выше рассматривался случай системы на неограниченной оси x. С такой осью связаны дельта-коррелированные образы Фурье. Рассмотрим теперь случай "ящика" размером L с периодическими граничными условиями. Его собственные гармоники равны $k_j = 2\pi j/L$. Они образуют последовательность равноотстоящих точек на оси k с $\Delta k = k_{j+1} - k_j$.

Посмотрим, как аппроксимировать однородную функцию в "ящике". Требуется, чтобы разные экспоненциальные ярусы фурье-образа однородной функции были эквивалентны. При дискретной аппроксимации дельта-коррелированной функции можно располагать дискретные точки произвольно. Хорошая аппроксимация получается, если этих точек много в каждом ярусе. Разбору этого посвящен раздел п. 37.3. В случае "ящика" дискретные точки задаются спектром "ящика" $k_j = 2\pi j/L$ и являются фиксированными.

Важно то, что их число N в ярусе переменно. Оно равно

$$N = \frac{k_{J+1} - k_J}{\Delta k} = \frac{a-1}{2\pi} L k_J, \tag{42.2}$$

где $a \simeq 1$ — шаг прогрессии (40.8), определяющий размер яруса, индексы J и j нумеруют ярусы и спектр "ящика" соответственно.

В "ящике" начальные данные равны

$$\begin{aligned} \delta\eta(x, t=0) &= \sum_j \frac{\epsilon_j^*}{k_j} \exp(ik_j x), \\ \delta v(x, 0) &= \mathrm{Fr}\sqrt{g} \sum_j \frac{\epsilon_j^*}{\sqrt{k_j}} \exp(ik_j x). \end{aligned} \tag{42.3}$$

Однородная функция с "редким" спектром равна

$$\delta\eta(x,0) = \sum_J \frac{\epsilon_0}{k_J} \exp(ik_J x),$$
$$\delta v(x,0) = \mathrm{Fr}\sqrt{g} \sum_J \frac{\epsilon_0}{\sqrt{k_J}} \exp(ik_J x). \tag{42.4}$$

Амплитуды $\epsilon_j^\star$ должны быть такими, чтобы отрезок суммы (42.3), взятый внутри яруса, был эквивалентен слагаемому в (42.4), соответствующему этому ярусу. Поскольку фазы $\epsilon_j^\star$ случайны, то оценка величины этого отрезка в суммах для КГ (контактной границы) и скорости (42.3) равна $\sqrt{N}\,\epsilon_j^\star/k_j$ и $\sqrt{N}\,\epsilon_j^\star/\sqrt{k_j}$, где N дается (42.2).

В силу эквивалентности должно быть

$$\sqrt{N}\,\epsilon_j^\star/k_j \simeq \epsilon_0/k_J$$

и

$$\sqrt{N}\,\epsilon_j^\star/\sqrt{k_j} \simeq \epsilon_0/\sqrt{k_J}.$$

Заменим в этих оценках k_J на k_j. Получим $\epsilon_j^\star \simeq \epsilon_0/\sqrt{N}$. Поэтому суммы (42.3), аппроксимирующие однородные функции в "ящике", равны

$$\delta\eta(x,0) = \sqrt{\frac{2\pi}{a-1}}\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_j \frac{(\epsilon_0)_j}{k_j^{3/2}} e^{ik_j x},$$
$$\delta v(x,0) = \mathrm{Fr}\sqrt{\frac{2\pi}{a-1}}\sqrt{\frac{g}{L}} \sum_j \frac{(\epsilon_0)_j}{k_j} e^{ik_j x}, \tag{42.5}$$

где $(\epsilon_0)_j$ таковы, что $\langle(\epsilon_0)_j\rangle = \epsilon_0$, а фаза $(\epsilon_0)_j$ случайна.

Таким образом, можно сказать, что спектры однородных шумов КГ и скорости в "ящике" имеют вид $\delta\eta(k,0) \propto k^{-3/2}$ и $\delta v(k,0) \propto 1/k$ соответственно.

42.4. Сравнение разных однородных шумов

Чтобы пробежать семейство стимулированных режимов по степени стимуляции необходимо варьировать параметр ϵ_0, см. рис. 41.2. В качестве начальных данных можно взять любую из сумм (42.1), (42.4), (42.5), зафиксировать ее, а затем варьировать параметр ϵ_0, входящий в виде множителя. Зафиксировать — означает, что необходимо зафиксировать все амплитуды и фазы гармоник.

При численном моделировании необходимо брать суммы (42.5).

Спрашивается, как сравнить разные однородные шумы? Разные шумы имеют разные случайные амплитуды и фазы гармоник. Они эквивалентны по амплитуде шума ϵ_0, если суммы гармоник по ярусам совпадают в среднем. В этом и заключается процедура "взвешивания" или сравнения разных шумов.

§ 43. Численное моделирование РТТ

Формулировка того, что требуется изучить численно. Важным средством количественного исследования перемешивания является прямое численное моделирование. Исследуются как переходные, так и общие (степенные) решения. Первые занимают один — два экспоненциальных яруса, а вторые много ярусов. Если процесс запущен в момент $t = 0$ и время счета t_c, то в первом случае интересуются данными при $t \sim t_c$, а во втором — в промежутке от $t_S \ll t_c$ до t_c. Борьба за расширение инерционного интервала требует уплотнения сеток и удлинения расчетов.

Выше представлена теория перемешивания. В § 38 описана спонтанная турбулентность, в § 39 — "наезжание" спонтанного каскада на уединенное по k возмущение, в § 40 — стимулированное перемешивание и в § 41 — примыкание этих двух режимов. В § 42 подытожено, какой математический смысл имеют условные записи вида $\delta\eta(k) = \epsilon_0/k$ однородных шумов. Это позволяет количественно записывать такой шум, без чего невозможна, в частности, его численная реализация[15].

Пусть начальное возмущение сосредоточено при $k \sim k_S$ на оси k. Переходный расчет охватывает промежуток $\sim 1/\sqrt{gk}$. За это время область сосредоточения измениться не успевает, а возмущение отрастает до стадии насыщения. После этого начинается обратный или инверсный каскад по оси k — движение справа налево "волны" РТ перемешивания на рис. 41.1. При автомодельном обезразмеривании "волна" останавливается (сравните оси $\ln k$ и kgt^2).

Поскольку в данной главе изучаются общие (степенные) решения, то необходимо рассмотреть широкодиапазонные начальные возмущения. Важнейшим теоретическим положением является положение о пороге ϵ_{THR}. Для расчета в широком диапазоне интерес представляют задачи о (i) каскаде от возмущения $k \sim k_S$, (ii) соревновании возмущения $k \sim k_{LW} \ll k_S$ с каскадом от k_S, (iii) соревновании широкодиапазонного надпорогового возмущения с каскадом от k_S. В (iii) требуется "нащупать" порог или вернее переходную область, за которой стимуляция становится динамически существенной. Задача (ii) рассмотрена теоретически и численно в § 18 и § 39. Здесь рассмотрим задачи (i) и (iii).

43.1. Эволюция изохор, пузырьковые ансамбли

Параметры расчетов. Примеры эволюции КГ в случае (i) приведены на рисунках 18.8 (расчет 1) и 43.1–43.2 (расчет 2) и в случае (iii) — на рис. 43.3 (расчет 3), 43.4*а* (расчет 4) и 43.4*б* (расчет 5). За КГ принята средняя изохора, см. §§ 17, 18. На всех рисунках, показывающих КГ, горизонтальный и вертикальный масштабы одинаковы. Значение отношения плотностей невелико $\mu = 0,1$. Поэтому можно говорить о

[15] Отметим, что представления о спонтанном и стимулированном перемешивании, пороге, однородных шумах и их лакунарных формах полностью переносятся на случай неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

КГ и пузырях. Расчеты выполнены А. В. Чехловым по методу, описанному в § 18. Они опубликованы в работе (Inogamov, Anisimov, Chekhlov, Dem'anov, Belotserkovskii, 1991b). Сетки равны 120 × 120 (квадрат) в расчетах 1, 4 и 5 и 60 × 360 (длинная полоса) — в расчетах 2 и 3. Ячейки квадратные. Начальное положение КГ в расчетах 1, 2, 3, 4 и 5 было равно 55/65, 120/240, 120/240, 60/60 и 60/60. Первой указана толщина верхнего слоя жидкости. Толщины приведены в ячейках сетки. На верхней и нижней границах поставлены жесткие граничные условия. Начальными были возмущения скорости. В спонтанном случае возмущения находятся в короткомасштабной части спектра. Они одинаковы в расчетах 1 и 2. Их описание дано в п. 18.6.

В стимулированном случае начальное возмущение "растянуто" по всему инерционному диапазону. Использованные однородные шумы имели "редкий" спектр, см. § 42. В расчете 3 однородный шум представлял собой отрезок периодического по оси $\ln k$ лакунарного ряда (40.8)–(40.14). Шаг прогрессии был равен $a = 2$, а амплитуды равны $\eta_J \equiv 0$, $v_J \equiv \epsilon_0 = 0, 1$.

В расчетах 4 и 5 использован отрезок случайного по $\ln k$ лакунарного ряда. Он дается формулами (40.9)–(40.14), в которых волновые числа k_J и амплитуды η_J, v_J выбрасываются генератором случайных чисел. Они равны

$$k_{J+1} = 2a\xi k_J, \quad \eta_J \equiv 0, \quad v_J = 2\xi\epsilon_0 \exp\left(-i\pi\{2\xi\}\right), \tag{43.1}$$

где ξ — генератор случайных чисел на отрезке $[0, 1]$, скобки $\{\}$ означают выделение целой части. Средние, очевидно, равны

$$\langle\xi\rangle = 1/2, \quad \langle k_{J+1}/k_J\rangle = a, \quad \langle|v_J|\rangle = \epsilon_0. \tag{43.2}$$

Согласно (43.1), фаза v_J принимает случайные значения ± 1. Прогрессия (40.8) с шагом a заменяется случайной прогрессией (43.1) с тем же шагом. Начальный спектральный состав в стимулированных случаях приведен в п. 43.3.

Механика проникновения и раздувания пузырьков. Продвижение пузырькового фронта или оболочки в спонтанном случае показано на рис. 18.8 и 43.1–43.2. Тонкой горизонтальной прямой дана начальная КГ. Как видим, с течением времени вершины пузырей все глубже проникают в тяжелую жидкость (рост h_+). Одновременно происходит их укрупнение (рост $\langle\lambda\rangle$). Из кадров кинограммы вырезаны полоски, вмещающие турбулизованные контактные границы (КГ). Они подклеены друг над другом на рис. 43.1. Это сделано для того, чтобы лучше было видно, как происходит трансформация индивидуальных пузырей. КГ *1*, *2*, ..., *7* относятся к моментам времени $\sqrt{2\pi g/L}\,t = 0,25,\ 0,76,\ 1,59,\ 2,29,\ 3,32,\ 4,79,\ 6,94$, где L — ширина расчетной области по горизонтали. На КГ *7* (жирная кривая) наложена КГ с предыдущего кадра. Она повторена точками. Сравнивая их, видим, в чем заключается раздувание пузырей.

На врезке *а* к рис. 43.1 показаны траектории вершин пузырей. Точками отмечены позиции вершин, взятые с полосок, составляющих

рис. 43.1. Они поднимаются примерно вертикально. Видно, как останавливаются и смываются вниз пузыри, проигравшие конкуренцию. Итак,

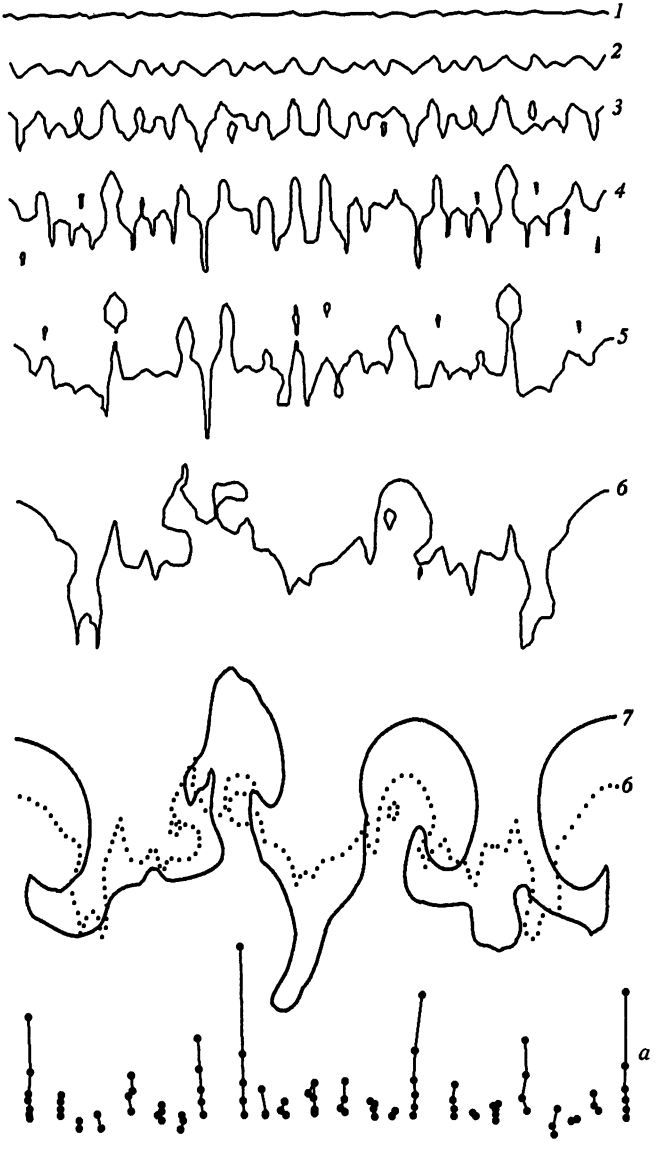


Рис. 43.1. Подъем и раздувание "спонтанных" пузырей. На врезке *а* внизу приведены траектории вершин пузырей

динамика пузырьковой оболочки заключается в раздувании пузырей, уменьшении их числа и ускорении крупных пузырей.

При этом из-за втягивания вместе с потоком легкой жидкости в раздувающиеся пузыри струй и формирования из них перемычек время от

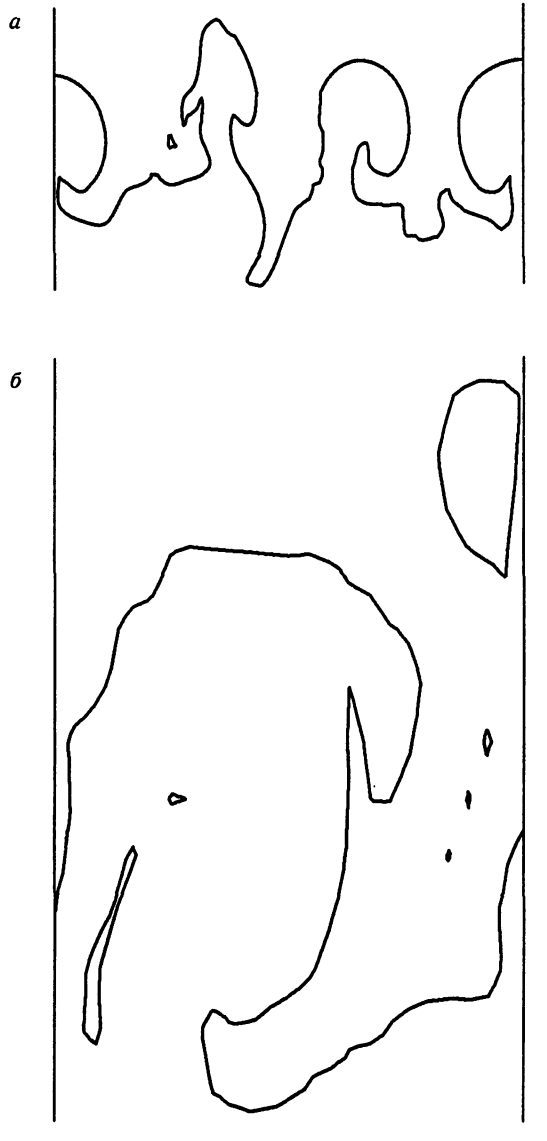


Рис. 43.2. Предельная стадия сокращения числа пузырей — образование 1/2 пузыря. *а* — $\sqrt{2\pi g/L}\, t = 6,94$, *б* — $\sqrt{2\pi g/L}\, t = 18,8$

времени образуются изолированные или захваченные пузыри. Например, такой оказывается судьба 5-го справа пузырька на КГ *3* на рис. 43.1. В момент t_5 горловина закрывается — образуется изолированный пузырек. В дальнейшем он исчезает из-за численной диффузии.

Отметим, что в расчетах 1 (рис. 18.8) и 2 (рис. 43.1) исходные данные совпадают. Поэтому на начальных этапах пузырьковые конфигурации похожи. Численная диффузия в расчете 2 больше, поскольку сетка вдвое реже. Из-за этого в расчете 2 захваченные пузыри быстрее "растворяются". Турбулентные "вращения" неустойчивы. Траектории соответствующей динамической системы "разбегаются". Показатели Ляпунова "порядка единицы". Вследствие этого на поздних стадиях исходная

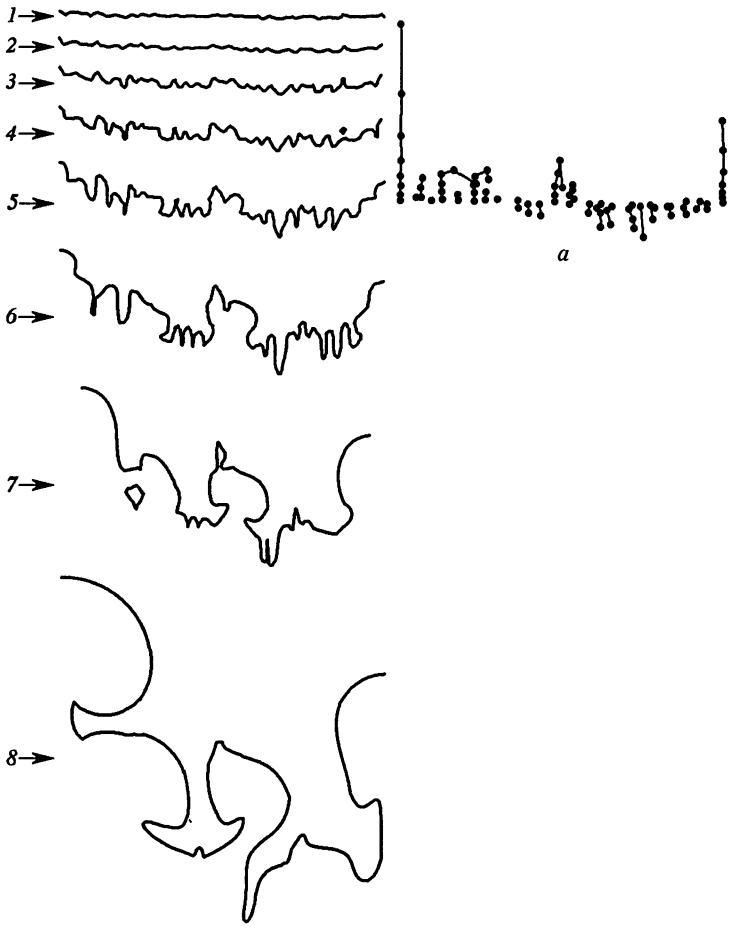


Рис. 43.3. Подъем и раздувание "стимулированных" пузырей. На врезке *а* справа приведены траектории их вершин

фазовая информация теряется, а пузырьковые конфигурации различаются. Усредненные характеристики примерно одинаковы в расчетах 1

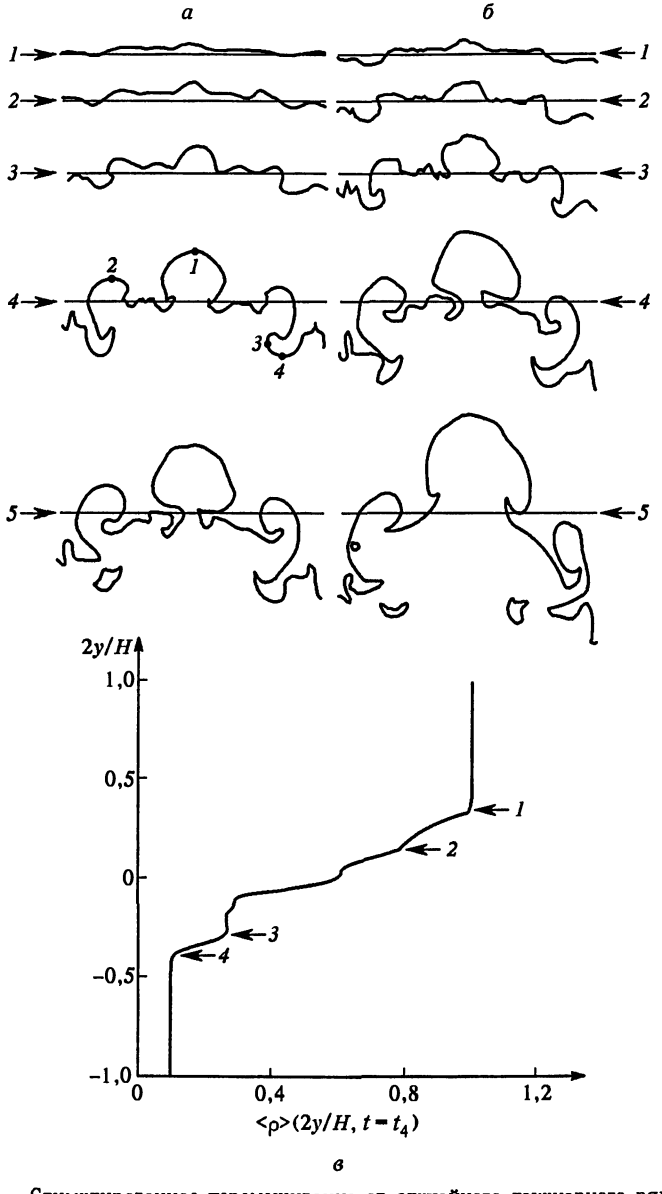


Рис. 43.4. Стимулированное перемешивание от случайного лакунарного ряда (43.1) с $\epsilon_0 = 0{,}05$ (*а*) и с $\epsilon_0 = 0{,}10$ (*б*) *в* — Профиль средней плотности $\langle\rho\rangle$, соответствующий моменту t_4 на кинограмме *а*.

и 2. Процесс отбора крупных и сокращения числа пузырей приводит к тому, что в расчетной полосе остается 1/2 пузыря. Это хорошо видно на рис. 43.2. Здесь кривая *а* это кадр *7* с рис. 43.1, а кривая *б* представляет КГ на поздней стадии ее эволюции ($\sqrt{2\pi g/L}\,t = 18,8$).

Механика "стимулированных" пузырьков. Проникание, раздувание и сокращение числа пузырьков в стимулированном случае показаны на рис. 43.3 и 43.4*а, б*. Это расчеты 3, 4 и 5. Также, как и на рис. 43.1, вырезаны и подклеены одна над другой полоски, иллюстрирующие эволюцию пузырьков. На рис. 43.3 видно, например, как раздуваются, объединяются и начинают гибнуть два соседних пузырька в середине ансамбля, см. также врезку *а* к этому рисунку. Стрелкой и горизонтальной прямой на рисунках 43.3 и 43.4*а, б* указано начальное положение КГ. Как и в спонтанном случае образуются перемычки, см. левый и правый крайние пузыри на кадрах *7* и *8* на рис. 43.3. Последовательные моменты времени $t_1 - t_8$ равны 0,25; 0,36; 0,76; 1,09; 1,59; 2,29; 3,32 и 4,79 на рис. 43.3 и $\{t_1 - t_5\} = 1,25;\ 1,80;\ 2,57;\ 3,67$ и 4,41. на рис. 43.4*а, б*.

Из-за широкого спектра возмущений с самого начала присутствуют длинноволновые гармоники. Они являются субгармониками по отношению к ведущему в данный момент масштабу $\langle k\rangle(t)$. Они заметны на фоне ведущего масштаба, см., например, КГ *3* на рис. 43.3.

Сравним формы КГ в одинаковые моменты времени в кинограммах 43.1 и 43.3. Видим, что пенетрация пузырей h_+ и их размер $\langle\lambda\rangle$ в стимулированном случае больше. Видим также, что ансамбль пузырьков однороднее по размерам в спонтанном случае. Отсюда следует, что спектр стимулированной случайно-периодической функции шире, чем спектр спонтанной случайно-периодической функции, см. рис. 41.1.

43.2. Количественная характеристика пенетрации

Расчеты и методика обработки. Посмотрим, как разрушается слой тяжелого вещества. На рис. 18.9 приведены осредненные по горизонтали профили плотности $\langle\rho\rangle(y,t) = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \rho(x,y,t)dx$, где L — ширина области. Показано расширение слоя перемешивания во времени. Аналогично устроены эти профили в расчетах 2–5 спонтанных и стимулированных случаев. См. пример на рис. 43.4*в*.

При усреднении по большому числу пузырей $\langle\lambda\rangle/L \to 0$ профиль $\langle\rho\rangle(y,t)$ превращается в плавную функцию, производная от которой колоколообразна. Среднеквадратичные флуктуации

$$[\Delta(y,t)]^2 = \frac{1}{L}\int\limits_0^L [\rho(x,y,t) - \langle\rho\rangle(y,t)]^2\,dx$$

максимальны в области средней плотности $(1/2)(\rho_l + \rho_h)$ и затухают на верхнем и нижнем фронтах перемешивания. Нетрудно видеть, что при $\mu = \rho_l/\rho_h = 0$ имеем $\Delta(y,t) = \sqrt{\langle\rho\rangle(y,t)[\rho_h - \langle\rho\rangle(y,t)]}$.

При небольшом числе усредняемых пузырей профиль $\langle\rho\rangle(y,t)$ имеет выраженные флуктуации. Образец профиля с флуктуациями, отмеченными цифрами *1*, *2*, *3* и *4*, дан на рис. 43.4*в*. Они связаны с вершинами пузырей (*1*, *2*) и грибами (*3*, *4*), помеченными теми же цифрами, сравните рис. 43.4*а*, кадр 4, и 43.4*в*.

Слой перемешивания ограничен верхним и нижним "фронтами" или границами. Пусть $h_\pm$ их координаты, отсчитанные от невозмущенного положения КГ. Они определяются по усредненному профилю $\langle\rho\rangle(y,t)$ по правилам $\langle\rho\rangle[y = h_+(t), t] = \rho_h - 0,10\Delta\rho$, и $\langle\rho\rangle[y = h_-(t), t] = \rho_l + 0,10\Delta\rho$, где $\Delta\rho = \rho_h - \rho_l$. Иногда вместо $\xi = 0,10$ берут $0,05$ или $0,01$ (перемешивание на 5 или 1 процент).

В степенных (автомодельных) режимах профили самоподобны $\langle\rho\rangle(y,t) = \langle\rho\rangle(y/gt^2)$. При этом $h_\pm = a_\pm gt^2$, где $a_+ = \alpha_+ A$. Динамика роста h_+ представлена в табл. 43.1–43.5. Они получены из расчетов 1–5. Коэффициент α_+ вычислялся по формуле $\alpha_+ = h_+/Agt^2$. Постепенно течения выходят на автомодельные зависимости.

Таблица 43.1. Расчет 1 (спонтанный), рис. 18.8, 18.9

$\sqrt{\frac{2\pi g}{L}}\,t$	1,25	1,68	3,06	4,13	5,57	7,52
h_+/L	0,034	0,046	0,114	0,171	0,225	0,366
α_+	0,17	0,12	0,093	0,077	0,056	0,050

Таблица 43.2. Расчет 2 (спонтанный), рис. 43.1

$\sqrt{\frac{2\pi g}{L}}\,t$	1,10	1,59	2,29	3,32	4,79	6,93
h_+/L	0,045	0,066	0,089	0,156	0,221	0,331
α_+	0,28	0,20	0,13	0,11	0,072	0,053

Таблица 43.3. Расчет 3 (стимулированный), рис. 43.3

$\sqrt{\frac{2\pi g}{L}}\,t$	1,10	1,59	2,29	3,32	4,79
h_+/L	0,066	0,098	0,147	0,342	0,582
α_+	0,42	0,30	0,21	0,24	0,19

Таблица 43.4. Расчет 4 (стимулированный), рис. 43.4*а*

$\sqrt{\frac{2\pi g}{L}}\,t$	1,50	2,15	3,07	3,67	4,41	5,26
h_+/L	0,017	0,033	0,090	0,145	0,222	0,316
α_+	0,057	0,054	0,074	0,083	0,089	0,088
$\alpha_+^{(10)}/\alpha_+^{(5)}$	2,26	2,22	1,76	1,49	1,35	1,31

Таблица 43.5. Расчет 5 (стимулированный), рис. 43.4*б*

$\sqrt{\frac{2\pi g}{L}}\,t$	1,50	2,15	3,07	3,67	4,41	5,26
h_+/L	0,038	0,072	0,159	0,217	0,302	0,415
α_+	0,129	0,12	0,13	0,124	0,12	0,115
$\alpha_+^{(5)}/\alpha_+^{(10)}$	1,37	1,23	1,09	1,08	1,05	1,03

В последней строке табл. 43.5 показано, как изменяется коэффициент α_+ при изменении ξ (определяющего положение фронта) с 10% на 5%. Величины $\alpha_+^{(10)}$ и $\alpha_+^{(5)}$ соответствуют $\xi = 10\%$ и $\xi = 5\%$. Отношение стимулированных коэффициентов $\alpha_{\text{STIM}}^+(\epsilon_0)$ при $\epsilon_0 = 0,1$ и $\epsilon_0 = 0,05$ приведено в последней строке табл. 43.4.

Зависимость от отношения плотностей. Коэффициент асимметрии $A(\mu) = h_-/h_+ = \alpha_-/\alpha_+$ составляет $1,5 \pm 0,2$, $1,4 \pm 0,2$, $1,2 \pm 0,2$, $1,3 \pm 0,2$ и $1,3 \pm 0,2$ в расчетах 1 – 5 соответственно. Отношение плотностей в этих расчетах равно $\mu = 1/10$. Эта асимметрия меньше, чем полученные в работе (Youngs, 1984) значения $A(1/3) \approx 1,5$ и $A(1/20) \approx \approx 2,5$. Анализу зависимости от числа Атвуда $\mathrm{A} = (1-\mu)/(1+\mu)$, $\mu = (1-\mathrm{A})/(1+\mathrm{A})$ посвящена работа (Alon et al., 1995). При $0,3 < \mu < 1$ в периодическом течении установление скоростей пузыря v_{B} и гриба v_{M} связано с выравниванием аэродинамического напора с силой Архимеда. Напор производит набегающая на пузырь или гриб жидкость. При этом $v_{\mathrm{B}} \propto \sqrt{(1-\mu)\lambda_{\mathrm{B}}}$, $v_{\mathrm{M}} \propto \sqrt{(1/\mu - 1)\lambda_{\mathrm{M}}}$, см. формулы (29.4), (29.6) и (29.8). Если (i) подставить вместо периода средний масштаб турбулентности $\langle\lambda\rangle$, (ii) принять, что средние масштабы для верхнего и нижнего фронтов перемешивания одинаковы и (iii) положить, что $A(\mu) = (h_-)_{\mathrm{T}}/(h_+)_{\mathrm{T}} \approx (v_{\mathrm{M}})_{\mathrm{P}}/(v_{\mathrm{B}})_{\mathrm{P}}$, то нетрудно получить оценку

$$A(\mu) = 1/\sqrt{\mu},$$

справедливую в указанном диапазоне μ, здесь индексы T и P означают турбулентный и периодический.

Если $\mu < 0,3$, то эта оценка завышает асимметрию $A(\mu)$. При $\mu \to 0$ имеем $h_- \to 0,5gt^2$. Зависимость $h_+ = \alpha_+ \mathrm{A} g t^2$ удовлетворительно работает при всех μ. Поэтому $A(\mu) \to 1/2\alpha_+$ при $\mu \to 0$. Если взять $\alpha_+ = 0,07$, то $A(0) \approx 7$. Отметим, что асимметрия течения в трубе бесконечна при $\mu = 0$ (она растет $\propto t$). Положение фронта h_-, ограничивающего распространение тяжелой жидкости снизу, очень чувствительно к малым изменениям μ при $\mu \ll 0,3$.

Может ли превалировать однородный шум? Основной вывод следует из сравнения таблиц 43.2 и 43.3. Они относятся к расчетам с идентичными параметрами, за исключением того, что в расчете 3 добавлен еще и широкодиапазонный шум. Если отвлечься от темпа расширения, то морфологически и статистически структура КГ в расчете 3 во многом напоминает структуру КГ в расчете 2. Хотя имеется и отмеченное выше

отличие (см. концовку п. 43.1) — более протяженный (по k) субгармонический хвост. В обоих случаях поверхность (КГ) сложна (турбулентна). Ее движение определяется нелинейным взаимодействием многих мод.

Что касается развития во времени, то оно по порядку величины описывается автомодельностью gt^2 в обоих случаях. Для увеличения автомодельного участка с постоянным α требуется более протяженный инерционный интервал.

Из сопоставления таблиц следует вывод о том, что стимуляция действительно может приводить к интенсификации перемешивания.

Качественное разделение нелинейных $\delta\eta$ и δv стимуляций. Широкодиапазонные возмущения КГ $\delta\eta$ и скорости δv эквивалентны при малых амплитудах. Смешанная по $\delta\eta$ и δv формула (40.1) дает амплитуду, определяющую время развития малых возмущений. Имеется проблема определения краев ϵ_{THR} и ϵ_{NL} отрезка $\epsilon_{\mathrm{THR}} \le \epsilon_0 \le \epsilon_{\mathrm{NL}}$, на котором доминирует стимулированное перемешивание. Твердым является заключение о том, что однородные шумы приводят к gt^2 автомодельной эволюции. Оценка ϵ_{THR} приведена ниже. Нелинейные однородные функции $\delta\eta(k, t=0)$, т. е. начальные значения $\delta\eta(k,0) \simeq 1/k$, заметно "изрезывают" исходное гидростатическое равновесие. См. конец п. 41.4. Нелинейные же однородные возмущения $\delta v(k, t=0) \simeq \mathrm{Fr}\sqrt{g/k}$ приемлемы. В этом и состоит качественное отличие $\delta\eta$ и δv возмущений.

Об аппроксимации зависимости темпа перемешивания от амплитуды ϵ_0. Однородный шум задается амплитудой ϵ_0 и спектральным составом $\{|e'_J|, \beta_J\}$, см. формулу (40.9), $e_J = \epsilon_0 e'_J$, $e'_J = |e'_J| \exp(i\beta_J)$. Зависимости $h_\pm(t)$, порожденные разными однородными шумами, статистически примерно одинаковы при одинаковых значениях ϵ_0 (и одинаковых средних шагах $\langle a \rangle$, см. (43.1), (43.2)) на длинных ($\ln k_{\mathrm{S}}/k_{\mathrm{L}} \gg 1$) инерционных интервалах независимо от спектрального состава. Для выяснения зависимости α^+_{STIM} от ϵ_0 путем сравнения расчетов, выполненных на не слишком длинных инерционных интервалах, лучше сравнивать эволюции, стартующие от начальных спектров одинакового спектрального состава. Это значит фиксировать $\{|e'_J|, \beta_J\}$ и варьировать ϵ_0. На недлинных интервалах и соответственно коротких отрезках геометрических прогрессий (43.1), (43.2) влияние состава $\{e'_J\}$ может быть довольно значительным. Например, при одинаковых ϵ_0 пенетрации в расчетах 3 (табл. 43.3) и 5 (табл. 43.5) с разным составом $\{e'_J\}$ отличаются значительно. Описание составов приведено ниже в разделе п. 43.3, посвященном спектральным характеристикам. Поэтому для построения аппроксимации функции $\alpha^+_{\mathrm{STIM}}(\epsilon_0)$ используем расчеты 4 ($\epsilon_0 = 0,05$, табл. 43.4) и 5 ($\epsilon_0 = 0,10$, табл. 43.5) с одинаковыми $\{e'_J\}$ и разными ϵ_0.

Аппроксимируем эту функцию посредством формулы (41.7). Запишем (41.7) в виде

$$\alpha^+_{\mathrm{STIM}}(\epsilon_0) = \frac{C}{-\ln \epsilon_0 - C_1}. \tag{43.3}$$

Двух точек со стимулированным перемешиванием с разными ϵ_0 достаточно для определения постоянных C и C_1 в (43.3). Из данных, приве-

денных в таблицах 43.4 и 43.5, следует, что

$$C = 0,18–0,34, \quad C_1 = 0,35–0,95. \tag{43.4}$$

Графики функций (43.3) с этими значениями C и C_1 проходят в заштрихованном интервале между гиперболами на рис. 41.2.

О переходном (околопороговом) интервале между спонтанным и стимулированными режимами. Гиперболы (на плоскости $\ln\epsilon_0, \alpha_+$) (43.3), (43.4) круто меняются около $\epsilon_0 \simeq \epsilon_{\rm NL}$ и полого меняются в области малых $\epsilon_0 \ll 1$, см. рис. 41.2. Вследствие этого зона пересечения зависимостей (43.3), (43.4) с прямой $\alpha^+_{\rm SPONT} \equiv \text{const}$, параллельной оси абсцисс, "размазывается" в некоторую переходную область. В ней спонтанное и стимулированные перемешивания примерно одинаковы. Соответственно значения $\epsilon_{\rm THR}$ получаются порядка нескольких тысячных

$$\epsilon_{\rm THR} = 0,001–0,010. \tag{43.5}$$

Значения $\alpha^+_{\rm SPONT}$, необходимые для определения порога (43.5), брались из литературы и расчетов 1, 2. В работе (Анучина, Кучеренко и др., 1978) приведено $\alpha^+_{\rm SPONT} + \alpha^-_{\rm SPONT} \approx 0,11$. Пересчет этого суммарного коэффициента в парциальный коэффициент $\alpha^+_{\rm SPONT}$ выполнен в работе (Anisimov, Zel'dovich', Inogamov & Ivanov, 1983, с. 225). Это сделано путем интегрирования средних профилей плотности $\langle\rho\rangle(y,t)$, приведенных в работе (Анучина, Кучеренко и др., 1978). Таким образом, была выделена начальная позиция КГ и вычислен коэффициент $\alpha^+_{\rm SPONT} \approx 0,05$. В работе (Read, 1984) получено $\alpha^+_{\rm SPONT} = 0,06–0,07$ в 2D геометрии и $\alpha^+_{\rm SPONT} = 0,06–0,08$ в 3D случае. Очевидно, что в 3D случае коэффициент $\alpha^+_{\rm SPONT}$ должен быть больше. Если в работе (Анучина, Кучеренко и др., 1978) замеры $h_\pm$ проводились по усредненному профилю плотности, то в работе (Read, 1984) измерялись позиции вершин пузырей и струй. В работе (Youngs, 1984) получено $\alpha^+_{\rm SPONT} = 0,04–0,05$ (2D случай). Примерно такие же значения следуют и из расчетов 1 и 2, приведенных выше. Для уточнения $\alpha^+_{\rm SPONT}$ необходимо расширение инерционного интервала. При $\langle\lambda\rangle$ или h_+, сравнимых с шириной расчетной области или экспериментального сосуда L, начинает действовать стесняющее действие боковых стенок, что приводит к уменьшению $\alpha^+_{\rm SPONT}$, определяемого по формуле $\alpha^+_{\rm SPONT} = h_+/Agt^2$. В случае короткой по высоте расчетной области 120×120 тормозящее действие оказывают также верхняя и нижняя жесткие границы. На начальных стадиях коэффициент $\alpha^+_{\rm SPONT}$ оказывается значительно больше асимптотического, см. табл. 43.1 и 43.2.

43.3. Эволюция спектра

Горизонтальные структуры. Характерная ячейка. В предыдущем разделе описана вертикальная "размазка" (турбулентная диффузия, взаимопроникновение) тяжелой и легкой фаз. Диффузионный слой называется слоем перемешивания. Причиной "диффузии" являются перестановки или обмены фаз (см. гл. I), которые возможны только в горизонтально

структурированных течениях. Эти течения имеют двухпотоковый вид, см. § 37. Они составлены из вихревых ячеек размером $\simeq \langle\lambda\rangle$ (§ 37). Основная задача спектрального анализа состоит в определении этого размера.

Решения даются функциями ρ, u, v и p от аргументов x, y, t. Их фурье-образы зависят от k, y, t. Рассматривают также функцию $\eta(x,t) = \int \rho(x,y,t)dy/(\rho_h - \rho_l)$ и ее фурье-образ $\eta(k,t)$. Здесь интегрирование ведется от нижней до верхней границы расчетной области. В случае скачка плотности на КГ эта функция дает реальную форму КГ до того момента, когда на реальной КГ образуются неоднозначности (например, грибы). Двухпотоковая структура наиболее подчеркнуто выражается через функции ρ и v (вертикальная скорость). Вообще говоря, величина $\langle\lambda\rangle = 2\pi/\langle k\rangle$, определяемая по максимуму фурье-образа, зависит от того, какая функция и на каком горизонтальном срезе $y = \text{const}$ выбрана. При построении автомодельного фурье-образа необходимо полагать $y = \xi g t^2$ и фиксировать ξ (автомодельный срез).

Ниже будем определять $\langle\lambda\rangle$ по максимумам спектров ρ или v при $y = 0$. Сравнений позиций максимумов спектров разных величин и при разных y в одном расчете здесь не приводится. Система координат $y = 0$ связана с начальным положением КГ. Срез $y = 0$ автоматически является автомодельным ($\xi = 0$).

Спонтанный рост $\langle\lambda\rangle$ по спектральным данным. Спектры $\rho(k, y = 0, t)$ функции $\rho(x, y = 0, t)$ для нескольких моментов времени приведены на рис. 18.10. Это расчет 1, относящийся к спонтанной РТТ. На первом кадре кинограммы 18.10 доминирует начальный спектр. По этим спектрам построена табл. 43.6. В ней t_D — это время в единицах, использованных в расчете. Оно подписано над спектрами на рис. 18.10. Значение n_{max} дает номер гармоники с максимальной по модулю на этот момент амплитудой. Номера гармоник n отложены по осям абсцисс на рис. 18.10. Далее вычислялись $\langle k\rangle = \pi n_{max}/L$ и $\langle\lambda\rangle = 2L/n_{max}$, где L — ширина расчетной области. На боковых границах ставились условия симметрии. Поэтому, например, в разложениях ρ и v синусы вылетают и ряд состоит из $\cos(\pi n/L)$. Коэффициент α_H находится по формуле (41.1). Он равен $\alpha_H = \langle\lambda\rangle/\mathrm{A}gt^2$.

Таблица 43.6. Эволюция спектра в расчете 1

t_D	0,497	0,671	0,905	1,648	2,223	3,000
$\sqrt{\frac{2\pi g}{L}}\,t_D$	1,25	1,68	2,27	4,13	5,57	7,52
n_{max}	22 ± 5	22 ± 0	22 ± 6	12^{+0}_{-6}	6^{+14}_{-5}	3^{+7}_{-2}
α_H	0,44	0,24	0,14	0,08	0,08	0,08
$(\alpha_H)_1$	0,36	0,24	0,10	0,08	0,02	0,02
$(\alpha_H)_2$	0,56	0,24	0,18	0,14	0,48	0,14

При $\sqrt{\frac{2\pi g}{L}}\,t \simeq 3$ устанавливается примерно постоянное значение $\alpha_{\rm H}$. Рост масштаба соответствует инверсному каскаду. "Бугор" вокруг максимума $n_{\max}$ оказывается широким, асимметричным и флуктирующим во времени Ширины коротковолнового $\Delta n_{\rm SW}$ и длинноволнового $\Delta n_{\rm LW}$ крыльев $n_{\max}+\Delta n_{\rm SW}$ и $n_{\max}-\Delta n_{\rm LW}$ приведены в строке $n_{\max}$ табл. 43.6 со знаками плюс и минус соответственно. В асимметричных случаях они взяты в скобки. Они определены на уровне 80% от максимальной амплитуды. По этим крыльям найдены минимальное значение $(\alpha_{\rm H})_1$ и максимальное — $(\alpha_{\rm H})_2$ значения коэффициента. Они представлены в последних строках таблицы. Если взять $\alpha_{\rm H} \approx \approx 0,08$, то для геометрического отношения получим

$$\frac{\langle\lambda\rangle}{h_+} = \frac{\alpha_{\rm H}}{\alpha_+} \approx 1. \qquad (43.6)$$

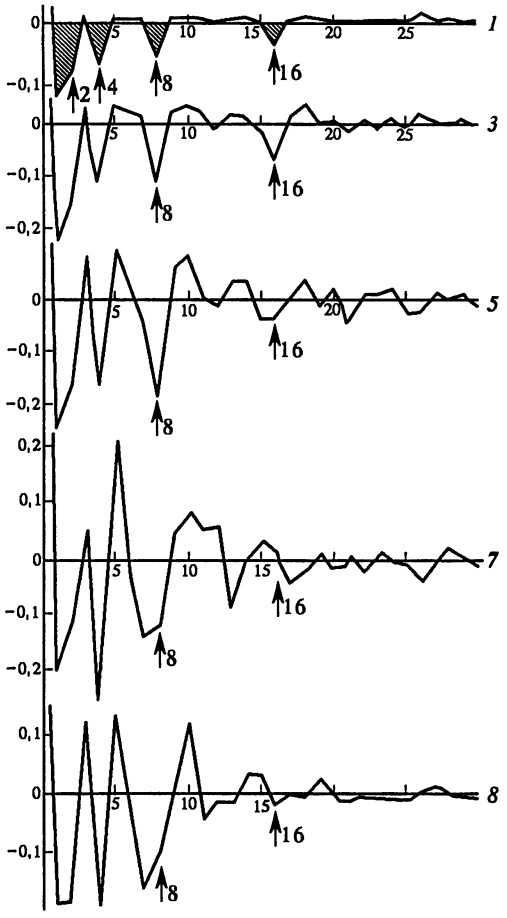


Рис. 43.5. Эволюция спектра плотности $\rho(n, y = 0, t)$ в расчете 3. Эволюция КГ показана на рис. 43.3

Стимулированный рост $\langle\lambda\rangle$. Спектр плотности. Эволюция фурье-образа в расчете 3 со стимуляцией показана на рис. 43.5. Широкодиапазонное лакунарное возмущение (40.8)–(40.14) имело фиксированный шаг (40.8) $a = 2$ и одинаковые фазы. Начальный состав доминирует на верхнем спектре, который относится к начальной стадии движения. Соответствующие пички зачернены. Спектры *1*, *3*, *5*, *7* и *8* относятся к моментам эволюции КГ 1, 3, 5, 7 и 8 на рис. 43.3. Моменты времени равны $\sqrt{\frac{2\pi g}{L}}\,t = 0,25$ (*1*), 0,76 (*3*), 1.59 (*5*), 3.32 (*7*), 4.79 (*8*), здесь в скобках указан номер спектра. На рис. 43.5 по оси абсцисс отложен номер гармоники n. Стрелками *2*, *4*, *8* и *16* помечены начальные гармоники $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$ и $n = 16$. С течением времени короткомасштабная гармоника $n = 16$ затухает, растет амплитуда гармоники $n = 7$ и

других длинноволновых гармоник. Спектр становится симметричным относительно знака амплитуд $\rho(k, y = 0, t)$ или $\rho(n, y = 0, t)$, где k и n — волновое число и номер гармоники.

На спектрах $\rho(k, y = 0, t)$ передний (длинноволновый) фронт инверсного каскада виден плохо. Лучше представлено короткомасштабное затухание за фронтом стимулированной "волны". Область этого затухания смещается вместе с "волной" влево по оси n на рис. 43.5. Это и является свидетельством каскада.

То, что не видны предвестник и фронт "волны", вызвано тем, что, во-первых, на срезе $y = 0$ сразу появляется (при $t > 0$ при возмущениях δv) или сразу имеется (при $t \geq 0$ при возмущениях $\delta\eta$) весь лакунарный спектр и, во-вторых, амплитуды гармоник плотности меняются мало. Они порядка $\rho_h - \rho_l$ и для гармоник k во фронте $k \simeq \langle k \rangle$, и для еще линейных длинноволновых гармоник в предвестнике $k \ll \langle k \rangle$. Этот вопрос имеет отношение к длинноволновому обрезанию однородных шумов, см. конец п. 41.4.

Стимулированный рост $\langle\lambda\rangle$. Спектр скорости. На рис. 43.6 в левой колонке представлена эволюция спектров вертикальной компоненты скорости $v(k, y = 0, t)$. На них лучше, чем на спектрах ρ, виден передний фронт "волны" инверсного каскада. Из-за симметрии на боковых границах волновое число равно $k = \pi n/L$, где n — номер гармоники, отложенный по оси абсцисс. Размеченные оси n помещены над и под серией спектров. Это сделано для того, чтобы не путать черточки разметки с линиями спектра.

Рис. 43.6 и 43.4*а* получены в расчете 4. Номера *1–5* на них относятся к одинаковым моментам времени. Спектров приведено больше, чем контактных границ (КГ). Поэтому на рис. 43.6 между этих номеров использованы буквы *а*, *b* и *с*. Моменты $\sqrt{2\pi g/L}\,t$ равны 0 (*0*), 1,25 (*1*), 1,80 (*2*), 2,15 (*а*), 2,57 (*3*), 3,07 (*b*), 3,67 (*4*), 4,41 (*5*), 5,26 (*с*), где в скобках даны обозначения, использованные на рис. 43.6 и 43.4*а*. Видно, как из-за нелинейного взаимодействия мод происходит обогащение спектра. Исходный спектральный случайный лакунарный состав был сгенерирован по правилам (43.1), (43.2). Средний шаг был выбран равным $a = \langle k_{J+1}/k_J \rangle = 2$. Гармоники k_J должны "сидеть" на собственных модах "ящика", см. п. 42.3. "Ящиком" с симметричными боковыми границами является расчетный отрезок L на оси x. Поэтому случайные k_J подправлялись до ближайшей гармоники "ящика". Начальный состав дает верхний спектр с $t = 0$ в левой колонке на рис. 43.6.

Автомодельные спектры. В степенном режиме перемешивания спектры Фурье должны быть автомодельны. По-видимому, впервые это было отмечено в работе Иногамова (1978). В правой колонке на рис. 43.6 приведены спектры *3*, *4* и *с* из левой колонки. Спектры в правой колонке вычерчены в автомодельных переменных. В этих переменных усредненные по "иглам" спектры автомодельного течения должны быть стационарны. В правой колонке построены абсолютные значения $|v_n|$ амплитуд. Автомодельная нормировка состоит в следующем. Амплитуды v_n заменяются на нормированные амплитуды $v_n\sqrt{n} \propto v_n/\sqrt{g\lambda_n}$, а номера гармоник n

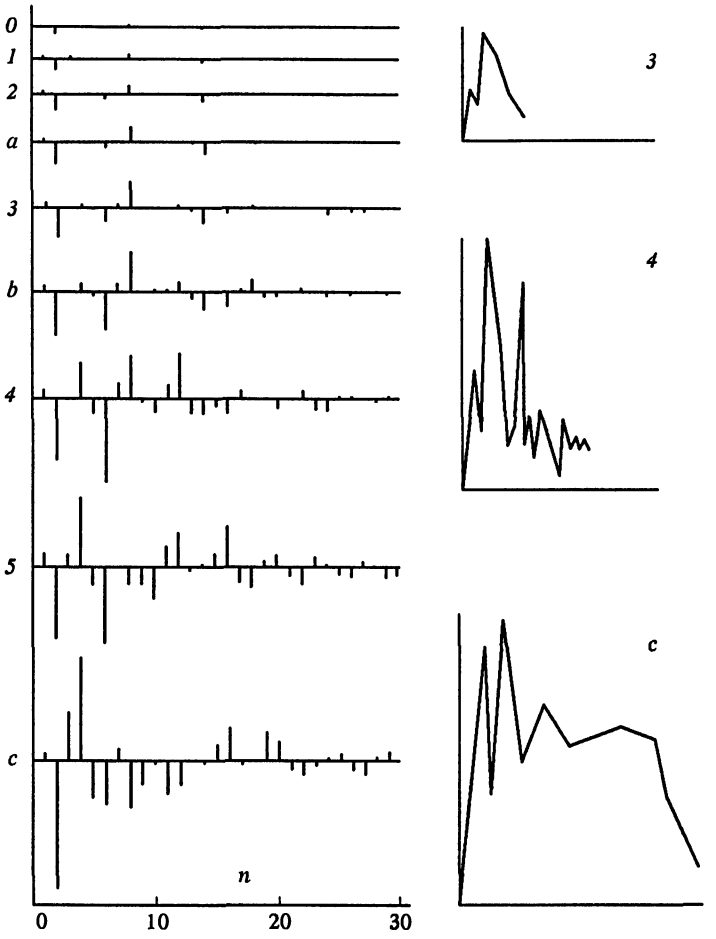


Рис. 43.6. Изменение спектрального состава $v(n, y = 0, t)$ с течением времени в расчете 4 (см. рис. 43.4*a*). Спектры *1–5* соответствуют позициям КГ *1–5* на рис. 43.4*a*. В левой колонке спектров использованы переменные $v_n = v(n, 0, t)$ и n, а в правой — автомодельные переменные $v_n\sqrt{n}$ и $K \propto nt^2$

на $n \to K = 0,05\,\mathrm{A}gt^2n/L$. Коэффициент при автомодельном волновом числе nt^2 выбран так, чтобы максимум находился при $K \sim 1$.

Определим $\langle k\rangle$ как позицию максимума функции $\sqrt{n}\,v_n(t)$ от n. Это означает, что $\langle k\rangle\pi n_{\max}/L$. Характерный масштаб равен $\langle\lambda\rangle = 2\pi/\langle k\rangle$. Пусть $K_{\max}$ дает позицию максимума. Тогда $\langle\lambda\rangle = (0,1/K_{\max})\mathrm{A}gt^2$. Соответственно $\alpha_{\mathrm{H}} = 0,1/K_{\max}$. Оценим величину $K_{\max}$. Положим для оценки, что течение автомодельно. Из графиков в правой колонке рис. 43.6 следует $K_{\max} = 0,6 \pm 0,1$. Отсюда $\alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{STIM}} = 0,1/K_{\max} = 0,17 \pm \pm\ 0,03$. Напомним, что здесь рассматривается горизонтальная струк-

тура стимулированного перемешивания. Коэффициент $\alpha^{+}_{\mathrm{STIM}}$ в расчете 4 согласно таблице 43.4 равен $\alpha^{+}_{\mathrm{STIM}} = 0,08–0,09$. Поэтому геометрическое отношение равно $\langle\lambda\rangle/h_{+} = \alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{STIM}}/\alpha^{+}_{\mathrm{STIM}} = 1,95 \pm 0.4$. Оно больше, чем значение (43.6), относящееся к спонтанному случаю. Действительно, так и должно быть согласно теории, развитой в разделе п. 41.5.

Посмотрим, как влияет амплитуда однородных шумов ϵ_0 на горизонтальную структуру. Спектры, приведенные на рис. 43.6, относятся к расчету 4 с $\epsilon_0 = 0,05$. Анализ спектров v из расчета 5 с $\epsilon_0 = 0,1$ и тем же исходным относительным спектральным составом $\{e'_j\}$ дает для горизонтального коэффициента величину $\alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{STIM}}(\epsilon_0 = 0,1)$ на 30–40% большую, чем приведенная выше величина $\alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{STIM}}(\epsilon_0 = 0,05) = 0,17 \pm 0,03$. Если теперь для коэффициента $\alpha^{+}_{\mathrm{STIM}}(\epsilon_0 = 0,1)$ взять значение из табл. 43.5, равное $\approx 12\%$, то получим, что геометрическое отношение остается примерно таким же, как и в случае с $\epsilon_0 = 0,05$.

43.4. Эволюция индивидуальных гармоник

Выше спектр рассматривался в целом. А именно, моменты t фиксировались ($t = t_\star$) и изучалась зависимость амплитуды a от волнового числа k. Спектр составлен из интеграла или суммы по набору индивидуальных гармоник. Рассмотрим судьбу отдельной гармоники $k = k_\star$.

Как отмечалось, имеются амплитуды различных функций ρ, u, v, p, поверхностной плотности $\sigma = \int \rho\, dy$ и других. В случае зависимости от вертикальной координаты y для описания автомодельности срез y тоже необходимо брать автомодельным.

Три стадии эволюции. Интерес представляет разрушение равновесной системы. В этом случае исходно амплитуды a всех гармоник малы. Распад или разрушение вызваны неустойчивостью. Из-за нее растет $|a|$. Нелинейность ограничивает рост $|a|$ — наступает насыщение. В дальнейшем $|a|$ уменьшается (затухает). Статистически все гармоники равноправны. Поэтому любая гармоника минует стадии или этапы роста (I), насыщения (S) и затухания (U).

Приведем несколько примеров. Пример 1. Возьмем рис. 18.10. Пометим произвольную гармонику $n = n_\star$. Пусть $a_\star(t)$ ее амплитуда. Проследим за зависимостью $a_\star(t)$ по кадрам рис. 18.10. Видим, как сменяются стадии I, S и U. В примере 1 фигурируют амплитуды плотности в спонтанном случае. В примере 2 (рис. 43.5, срез $y = 0$) приведены эти же амплитуды в стимулированном случае. На срезе $y = 0$ различить этапы I и S трудно. Затухание U является более выраженным.

Рост, насыщение и медленное затухание (в короткомасштабном хвосте) гармоник $k_\star$ видны в примере 3 со стимуляцией на рис. 43.6. Необходимо брать номер n и следить за длиной линии. Инерционный интервал не достаточно велик для четкого разделения стадий.

Пусть $k_\star$ — волновое число наблюдаемой гармоники. Границы этапов следующие:

(I) насыщение далеко $t \ll t_\star$, "волна" находится в коротких масштабах $k_\star \ll \langle k\rangle$;

(S) $k_\star \sim \langle k \rangle(t_\star)$, $t \sim t_\star$ — времени, в которое "волна" проходит гармонику $k_\star$;

(U) финальное состояние $t \gg t_\star$ — наблюдаемая гармоника превращается в короткомасштабную деталь перемешивания $k_\star \gg \langle k \rangle(t)$.

В связи с обсуждаемым скажем несколько слов о спектральных моделях. Имеется точное спектральное описание динамики периодической КГ (Dyachenko et al., 1996). Строятся также полуфеноменологические спектральные модели турбулентного перемешивания, в которых используется одно интегродифференциальное уравнение на неизвестную функцию $a(k,t)$ (Haan, 1991; Galmiche & Macé, 1995; Ofer et al., 1996).

Соответствие между стадиями по времени и характерными областями спектра. Однородность начальных данных по k вызывает универсальность поведения по времени. Имеется очевидное соответствие между зависимостями решения $a(k,t)$ от k и t. Этапы I, S и U связаны с "инфракрасным" (I) крылом, максимумом (1) и "ультрафиолетовым" (U) крылом однородных спонтанных и стимулированных "волн", см. рисунки 37.2*б*, *в*, 40.2 и 41.1.

Это особенно ясно в автомодельном случае. Автомодельный спектр стационарен, если в качестве спектрального параметра использовать не k, а автомодельное волновое число $\xi = kgt^2$, см. нижнюю ось на рис. 41.1. При этом, если рассматривать ξ, как спектральный параметр (t фиксировано), то рисунки 37.2*б*, *в* и 41.1 дают спектральный состав, а если, наоборот, фиксировать k ($k = k_\star$), то эти же рисунки дают эволюцию гармоники $k_\star$ во времени!

"Игольчатость" по k и плавность по t функций $a(k,t)$. Обсудим функциональную специфику аргументов k и t решения $a(k,t)$. Зависимость от k особенная. Ее нельзя "начертить карандашом". В этом заключается "игольчатость" или дельта-коррелированность, см. § 37. Выше отмечена эквивалентность аргументов k и t в однородных задачах. Спрашивается, относится ли это к дельта-коррелированному поведению?

Дельта-коррелированность $a(k,t)$ по k в случае бесконечной оси x вызвана затуханием корреляций между пузырями. Система инерционна и изменение случайно-периодической функции $a(x,\,t)$ во времени происходит плавно за времена ~ 1 (при обезразмеривании на текущие масштабы). Поэтому и изменение амплитуд индивидуальных гармоник с t идет плавно в таком же темпе.

С "игольчатостью" связаны сильные флуктуации $a(k,t)$ от гармоники к гармонике. Функции $a_1(t) \equiv a(k_1,t)$ и $a_2(t) \equiv a(k_2,t)$ соседних гармоник $k_1 \approx k_2$ отличаются друг от друга по знаку и в несколько раз по величине модуля. В то же время зависимости $a_1(t)$, $a_2(t)$ от t плавные.

Представим спектр по автомодельному параметру $\xi = kgt^2$ вместе с "игольчатой" структурой, см. рис. 37.2*в* и рис. 41.1. Пусть это представление относится к моменту t_1. Посмотрим, как изменится спектр далее. В среднем спектр стационарен. Но "иглы", относящиеся к индивидуальным гармоникам, "плывут" по оси ξ с течением времени слева направо. При этом их длина меняется медленно. Они постепенно превращаются

из длинноволновых по отношению к максимуму гармоник (в крыле I) в коротковолновые (в крыле U).

§ 44. Модели укрупнения

Зачем нужны упрощенные модели турбулентного перемешивания. Движение сжимаемой среды задается двумя термодинамическими функциями (например, ρ и p) и скоростью (u, v). В неоднородной несжимаемой жидкости тоже необходимы функции ρ, p, u и v, см. § 18. Обозначим их совокупность ρ, p, u и v одной буквой f. В 2D случае f зависит от аргументов x, y и t. Решения $f(x, y, t)$ задач об обмене и перемешивании сложны. Аналитические подходы, отправляющиеся от первых принципов, имеются в случае периодических по x функций $f(x, y, t)$, см. гл. VI. Эти подходы важны для понимания (качественный уровень) и описания (количественный уровень) движения. В смысле понимания они существенно дополняют прямое численное моделирование и эксперимент.

В случае турбулентных решений $f(x, y, t)$ аналитическое описание из первых принципов является трудным. Потребность в качественных представлениях здесь отчасти удовлетворяется с помощью полуфеноменологических моделей. Можно сказать, что в какой-то степени их место в теории турбулентности подобно месту аналитики в теории периодических течений.

Для перемешивания из-за РТН и НКГ важны (i) неустойчивость и (ii) обратный каскад. Каскад связан с однородностью задачи. Однородность, в частности, приводит к степенной зависимости инкрементов γ от k. Если бы функция $\gamma(k)$ была бы отлична от нуля только в окрестности некоторого масштаба k_* (неоднородная задача)[16], то на нелинейной стадии появлялась бы структура, навязанная этим масштабом. В разбираемых задачах (РТН, НКГ) процессу роста амплитуды из-за неустойчивости не за что "зацепиться". Это приводит к каскаду.

Существуют (i) спектральная, (ii) пузырьковая (модель случайных цепочек) и (iii) диффузионная (турбулентная "диффузия", теория длины перемешивания) модели. Ниже приведены модели (i) и (ii). В качественном отношении их назначение заключается в том, чтобы выпукло продемонстрировать, как развиваются неустойчивость и каскад. Имеются и некоторые количественные возможности. Модель (iii) обычно применяется при расчетах вертикального "расползания" перемешивания.

Кроме того, модель (ii) возвращает нас к статистическим свойствам случайно-периодических функций (см. § 37), приводящим к дельта-коррелированности ("игольчатости") их фурье-образов, а модель (i) покрывает разрыв между дискретными и сплошными спектрами. Она простейшим образом, ценным прежде всего для понимания, показывает, как происходит обогащение спектров и как устанавливается автомодельное состояние. В ней "сидят" и периодические решения, и "лестницы" (см. п. 35.3), и усредненные (сглаженные) фурье-образы, см. рис. 37.2*б*.

[16] Так обстоит дело при неустойчивости фронта фазового превращения при воздействии лазерного излучения на конденсированное вещество (Anisimov & Khokhlov, 1995).

Отметим, что процедура возвращения от сглаженных к истинным фурье-образам, пригодным для восстановления случайно-периодической функции по x, заключается в "одевании" сглаженной функции "иглами". Она описана в § 37.

44.1. Спектральная модель

Искомая функция — это спектр $h(k,t)$. Горизонтальная КГ[17] "расползается" в перемешанный слой. В нем функция $f(x,y,t)$ ($f=\{\rho,u,v,p\}$) от x является случайно-периодической (§ 37). Рассмотрим ее сглаженный фурье-образ $f(k,y,t)$. В нем содержится наиболее существенная информация. Вместо четверки функций ρ, u, v, p в модели будем рассматривать функцию $h(x,t)$ и ее фурье-образ $h(k,t)$, а вместо системы гидродинамических уравнений — модельное уравнение на неизвестную $h(k,t)$. При малом отношении плотностей $\mu \ll 1$ функция $y=h(x,t)$ задает КГ пузырьковой оболочки. Последняя, как это показано в § 24, получается удалением дальних ("несущественных") фрагментов струй. При произвольных μ определим $h(x,t) \propto \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y,t)dy$ как координату эффективной пенетрации легкой жидкости или пропорциональную ей поверхностную плотность с вычтенным средним и надлежащей нормировкой.

Модельное уравнение: "неподвижная" по k часть. Итак, искомая функция $h(k,t)$ представлена. Составим уравнение на $\dot{h} \equiv \partial h(k,t)/\partial t$. В линейном приближении имеем $\dot{h}(k,t)=\gamma(k)h(k,t)$. Разные линейные гармоники независимы. Запишем

$$\dot{h}=\gamma(1-kh)h. \tag{44.1}$$

Множитель $(1-kh)$ в (44.1) связан с учетом насыщения экспоненциального роста на нелинейной стадии.

В уравнении (44.1) гармоники не взаимодействуют. Поэтому возмущение, локализованное в некоторой области по k, не может распространиться за ее пределы. В этом и заключается "неподвижность" по k.

Модельное уравнение: учет генерации длинноволновых гармоник вследствие нелинейного взаимодействия мод. Займемся моделированием генерации длинноволновых гармоник из-за биений. Простейшей является квадратичная нелинейность. Запишем $\dot{h}=(1-kh)(\dot{h}_{\rm L}+\dot{h}_{\rm MC})$, где $\dot{h}_{\rm L}=\gamma h$, L — linear, MC — mode coupling. Положим, что

$$\dot{h}_{\rm MC}(k,t)=\int\limits_0^{\infty} dq\, a h(q,t)h(q+k,t), \tag{44.2}$$

где a — положительная размерная величина. Видим, что гармоники (спектральные линии) с волновыми числами $k_1=q$ и $k_2=(q+k)$

[17] С очевидными обобщениями на цилиндрический и сферический слои перемешивания.

стимулируют рост амплитуды гармоники $k = k_2 - k_1$, пропорциональный амплитудам h_q и h_{q+k}. Интеграл (44.2) "обегает" все пары (k_1, k_2), которые участвуют в росте гармоники k. Согласно сказанному выше в гл. VII и VIII о субгармониках, главное — это уловить уменьшение волнового числа в нелинейных процессах. Поэтому генерация $(k_1, k_2) \to$ $\to k_1 + k_2$ здесь опущена.

Рассмотрим величину a. В задаче имеется единственная размерная постоянная, содержащая время. Это ускорение g. Поэтому $a = \sqrt{g}\sqrt{p}$, где p имеет размерность волнового числа. Выберем множитель $\sqrt{p}$ в виде $\sqrt{\sqrt{q(q+k)}} = (k_1 k_2)^{1/4}$. Тогда, во-первых, волновые числа k_1 и k_2 входят в интеграл (44.2) симметрично и, во-вторых, как будет видно ниже, обрезается "инфракрасная" (то есть при $q \to 0$) расходимость интеграла (44.2) в случае однородных шумов (§§ 40–42) со спектрами $h(k) \propto 1/k$.

Основное уравнение спектральной модели. Собирая вместе "неподвижную" (по k) и "подвижную" (по k) части (44.1) и (44.2), получим основное уравнение на искомый спектр $h(k,t)$. Оно имеет вид

$$\dot{h}(k,t) = [1 - kh(k,t)]\,\{\gamma h(k,t) + \sqrt{g}\int_0^\infty dq\,[q(q+k)]^{1/4} h(q,t)h(q+k,t)\}. \tag{44.3}$$

Это уравнение определяет эволюцию спектра.

Уравнение (44.3) моделирует обратный каскад (см. ниже об автомодельных решениях).

Чтобы расширить возможности количественного описания, введем полуфеноменологические параметры α_S, α_I и α_{MC} (S — saturation, I — individual). В результате получим

$$\dot{h}_k = (\alpha_S - kh_k)\,\{\alpha_I \gamma h_k + \alpha_{MC}\sqrt{g}\int_0^\infty dq\,[q(q+k)]^{1/4} h_q h_{q+k}\}. \tag{44.4}$$

Эти параметры не меняют уравнения (44.4) математически по сравнению с уравнением (44.3). Параметр α_S определяет уровень, на котором наступает нелинейное насыщение. Параметр α_I при $\gamma = \sqrt{gk}$ эффективно учитывает снижение инкремента от гидростатического до субгармонического, см. § 34 и рис. 34.1.

Настройка параметров. Уравнение (44.4) имеет стационарные (автомодельные) решения. В автомодельных переменных они представляют собой стационарный "бугор", грубыми характеристиками которого являются положение максимума, полная ширина и ширины "инфракрасного" I и "ультрафиолетового" U крыльев, см. рис. 37.2*б*, *в* и 41.1. Параметры α в уравнении (44.4) должны быть подобраны так, чтобы ухватить положение и ширину истинного "бугра", найденного путем прямого численного моделирования, см. п. 43.3, рис. 43.6. Здесь ограничимся описанием математических свойств уравнений (44.3) и (44.4).

Автомодельный каскад. Автомодельный спектр имеет вид (Иногамов, 1978)

$$h(k,t) = \frac{\epsilon(k_{\rm SS})}{k}, \quad k_{\rm SS} = kgt^2, \tag{44.5}$$

SS — self-similar. Подставляя (44.5) в (44.3) и преобразуя, получим

$$\frac{d\epsilon}{dK} = (1-\epsilon)\left[\epsilon + 2K\int\limits_0^\infty dQ\,\frac{\epsilon(Q)\epsilon(Q+K)}{\sqrt{Q}(Q^2+K^2)^{3/4}}\right], \tag{44.6}$$

где $k_{\rm SS} = K^2$, $q_{\rm SS} = qgt^2 = Q^2$. Решения (44.5) уравнения (44.6) имеют вид "бугров", положение которых определяется масштабом $\langle k\rangle$. Их движение по оси k с ростом t в сторону центра $k=0$ соответствует обратному каскаду.

Проанализируем уравнения (44.3) и (44.6). Рассмотрим сначала "неподвижный", а затем "подвижный" случаи. В первом из них движение по оси k будет фазовым.

Периодическая и стимулированная динамики без взаимодействия мод. Рассмотрим уравнение (44.1). В нем гармоники развиваются отдельно друг от друга. Уравнение (44.1) легко интегрируется. Развитие малого периодического возмущения описывается формулой

$$h(t) = \frac{h(0)e^{\gamma t}}{1-kh(0)+kh(0)e^{\gamma t}} \approx \frac{h(0)e^{\gamma t}}{1+kh(0)e^{\gamma t}}. \tag{44.7}$$

Указание на период гармоники в аргументах функции опущено, поскольку гармоники независимы. Решение (44.7) описывает линейную ($h(0) \ll \ll 1$), переходную и насыщенную ($\gamma t \gg 1$) стадии.

В автомодельном стимулированном случае начальное возмущение однородно. При этом $h(k, t=0) = \epsilon(0)/k$, см. §§ 40–42. Комбинируя это начальное условие с решением (44.7), получим

$$h(k,t) = \frac{1}{k}\,\frac{\epsilon(0)\,\exp\left(\sqrt{gkt^2}\right)}{1+\epsilon(0)\exp\left(\sqrt{gkt^2}\right)}. \tag{44.8}$$

Решение (44.8) является автомодельным

$$\epsilon(K) = kh(k,t) = \frac{\epsilon(0)e^K}{1+\epsilon(0)e^K}.$$

Его легко получить из "неподвижного" варианта $d\epsilon/dK = (1+\epsilon)\epsilon$ уравнения (44.6). Это решение описывает автомодельную "волну", фаза которой бежит по оси k. У нее имеются длинноволновый, переходный и насыщенный участки, см. рис. 40.2 и 41.1. Положение переходного участка определяется амплитудой однородных шумов $\epsilon(0)$.

Периодическая, спонтанная и стимулированная динамики с учетом взаимодействия гармоник. Рассмотрим полные уравнения (44.3) и (44.6). В "усеченном" случае (44.1) спонтанный каскад невозможен, поскольку гармоники "приклеены" к точкам своей начальной локализации. В случае с взаимодействием (44.2) генерируются субгармоники. Поэтому появляется решение, соответствующее спонтанному каскаду.

В периодическом случае имеется узкая линия $h(k,t)$ в точке $k = 2\pi/\lambda$. Интеграл (44.2) при этом вылетает и уравнение (44.3) совпадает с уравнением (44.1). Следовательно, периодическое решение и в случае (44.3) дается формулой (44.7).

Для инициации в рамках уравнения (44.3) каскада, спускающегося в центр $k = 0$ при $t \to \infty$, необходимы как минимум две несоизмеримые гармоники в начальном спектре. Это обусловлено тем, что (44.3) генерирует "лестницу" (35.6) и при соизмеримости гармоник каскад останавливается, натыкаясь на периодическое решение с периодом (38.1).

Уравнение (44.3) описывает комбинационное обогащение спектра. Оно моделирует переходную стадию эволюции от редких к густым спектрам. Асимптотически при старте от несоизмеримого редкого спектра решение уравнения (44.3) выходит на спонтанный автомодельный режим.

Функции h и $\dot{h}$ в (44.3) положительны. Функция h при любом фиксированном k монотонно растет с t. Существенная область на оси k ограничена справа (то есть со стороны коротких масштабов) "бугром" насыщенных гармоник, см. рис. 40.2 и 41.1. Более коротковолновые масштабы, находящиеся за "бугром", не важны.

Автомодельные спектры $h(K)$ или $\epsilon(K)$ состоят из трех характерных областей. При $K \to \infty$ имеется насыщенный короткомасштабный хвост, в котором $\epsilon(K) < 1$, $1 - \epsilon(K) \to 0$ и $h(k_{SS})$ убывает $\propto 1/k_{SS}$. Он соответствует крылу U на рис. 37.2 *б*. При $K \to 0$ имеем $\epsilon(K) \to 0$ в спонтанном и $\epsilon(K) \to \epsilon_0 \neq 0$ в стимулированном случаях. В области $k_{SS} \sim 1$ происходит переход функции $\epsilon(k_{SS})$ от значения ϵ_0 к единице.

Короткомасштабная асимптотика. Рассмотрим уравнение (44.6) в короткомасштабной области $K \gg 1$. Функции $\epsilon(K)$ и $\epsilon(Q+K)$ приблизительно равны 1 при $K \gg 1$. Поэтому уравнение (44.6) принимает вид

$$\frac{d\epsilon}{dK} \approx (1-\epsilon)\left[1 + 2K\int_0^\infty dQ\,\frac{\epsilon(Q)}{\sqrt{Q}(Q^2+K^2)^{3/4}}\right]. \qquad (44.9)$$

Разложим интеграл в уравнении (44.9) на два

$$\int_0^\infty = \int_0^A + \int_A^\infty,$$

где $A \sim 1$. Имеем $A \ll K$, поскольку $K \gg 1$. Точку A выберем в конце переходной области. Тогда $\epsilon(A) \approx 1$. В первом интеграле пренебрежем

слагаемым Q^2 в сумме Q^2+K^2 в подынтегральном выражении в силу того, что $0<Q^2<A^2\ll K^2$. В результате уравнение (44.9) примет вид

$$\epsilon'(K)\approx[1-\epsilon(K)]\left[1+\frac{2}{\sqrt{K}}\int\limits_0^A dQ\,\frac{\epsilon(Q)}{\sqrt{Q}}+2K\int\limits_A^\infty\frac{dQ}{\sqrt{Q}(Q^2+K^2)^{3/4}}\right]. \tag{44.10}$$

Первый интеграл в (44.10) мал, а второй равен

$$2\int\limits_{A/K}^\infty\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi^2+1)^{3/4}}\approx 2\int\limits_0^\infty\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi^2+1)^{3/4}}=I.$$

Как видим, зависимость от K в этом слагаемом пропадает. Поэтому уравнение (44.10) эквивалентно

$$d\epsilon/dK\approx[1-\epsilon(K)](1+I). \tag{44.11}$$

Интегрируя (44.11), получаем $\epsilon=1-\Delta_0\exp[-(1+I)K]$, где Δ_0 — постоянная. Отсюда вытекает, что сделанное выше предположение о насыщении короткомасштабного хвоста выполняется.

Длинноволновый предел. Изучим решения уравнения (44.6) при $K\ll 1$. Нас интересуют малые возмущения. В этом случае можно пренебречь ограничивающим рост фактором $(1-\epsilon)$. Уравнение (44.6) эквивалентно

$$\frac{d\epsilon}{dK}\approx\epsilon+2K\int\limits_0^\infty dQ\,\frac{[\epsilon(Q)]^2}{\sqrt{Q}(Q^2+K^2)^{3/4}}. \tag{44.12}$$

Дело в том, что при $K\ll 1$ имеем $\epsilon(Q)\epsilon(Q+K)\approx[\epsilon(Q)]^2$. Это вызвано тем, что далеко при $Q\gg K$ сдвижка аргументов функций $\epsilon(Q)$ и $\epsilon(Q+K)$ на K не существенна, а при $Q\sim K\ll 1$ или $Q<K\ll 1$ аргументы функций $\epsilon(Q)$ и $\epsilon(Q+K)$ малы по сравнению с единицей. В области малых Q и K эти функции постоянны и не зависят от аргумента.

Разобъем интеграл в уравнении (44.12) на два $\int\limits_0^\infty=\int\limits_0^A+\int\limits_A^\infty$, где $A\sim 1$. В отличие от короткомасштабного случая возьмем A в начале переходной области, где еще выполняется $\epsilon(A)\approx\epsilon_0$. Запишем

$$2K\int\limits_0^\infty=2\epsilon_0^2\int\limits_0^{A/K}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi^2+1)^{3/4}}+2K\int\limits_A^\infty dQ\frac{\epsilon_Q^2}{Q^2}\approx\epsilon_0^2 I. \tag{44.13}$$

Эти преобразования справедливы при $K\ll 1$.

Подставим оценку интеграла (44.13) в уравнение (44.12). Интегрируя (44.12), находим, что $\epsilon(K)\approx\epsilon_0+(\epsilon_0+I\epsilon_0^2)K$ при малых K. Таким образом предположение о монотонном росте $\epsilon(K)$ от начального значения ϵ_0 выполняется.

Физическое доказательство выхода на автомодельность. Свяжем вместе асимптотики $k_{SS} \to 0$ и $k_{SS} \to \infty$. Из уравнения (44.3) следует, что функция h монотонно растет с t. Причем рост этот сильнее в коротко-масштабной области. Поэтому сначала достигается коротко-масштабное насыщение, а затем область насыщения начинает сдвигаться в длинноволновую сторону. Действительно, из асимптотик следует, что, во-первых, малые амплитуды при $k_{SS} \ll 1$ нельзя "поднять" от малых до больших амплитуд за конечное время и, во-вторых, при $k_{SS} \gg 1$ имеется быстро устанавливающееся насыщение.

С течением времени начальный масштаб становится мал по сравнению с текущим и решение выходит на автомодельную асимптотику. Однородный шум "не убивает" автомодельность, поскольку он не вносит масштаба размерности длины в задачу. Автомодельное решение уравнения (44.3) имеет вид "бугра" или "ступеньки", показанных на рис. 40.2 и 41.1. Автомодельное решение описывает как форму мгновенного спектра по k, так и рост амплитуды индивидуальной гармоники.

Заключение по спектральной модели. Модель (44.3) описывает периодические, соизмеримые и несоизмеримые случаи. Она применима при расчетах (i) переходов от редких к густым спектрам и (ii) автомодельных спектров. Она наглядно показывает суть "засева" длинноволнового хвоста субгармониками (п. 41.1). Спонтанный и стимулированные случаи отличаются. Они имеют различную асимптотику при

$$kgt^2 \to 0$$

и разные характерные масштабы $\langle k \rangle$ в один и тот же момент времени. При малой амплитуде однородных шумов ϵ_0 спонтанный и стимулированные масштабы отличаются мало. В переходной или пороговой области значений ϵ_0, то есть при $\epsilon_0 \sim \epsilon_{THR}$, раздвижка масштабов становится заметной. С принципиальной точки зрения спонтанный и стимулированные случаи разнятся механизмами "засева" субгармониками.

Спектральные модели рассматривались в литературе (Haan, 1991; Galmiche & Macé, 1995; Ofer et al., 1996). Уравнение (44.3) описывает все, что требуется (периодичность, несоизмеримость, переходы, каскад и автомодельность), и в тоже время является самым простым из возможных. Важным преимуществом является то, что модель (44.3) естественно включает насыщение и таким образом обрезает влияние коротко-масштабного хвоста на процесс развития. Спектральные модели в работах (Haan, 1991; Galmiche & Macé, 1995; Ofer et al., 1996) сложнее. Хотя они выведены разложением граничных условий до второго порядка, эти усложнения не являются оправданными. Дело в том, что вывод справедлив только в слабо нелинейном приближении вблизи *плоской* КГ, когда углы отклонений возмущенной КГ от горизонтали малы. При применении этого разложения к турбулентной КГ соответствующие уравнения становятся полуфеноменологическими. Кроме того, используется ограничение амплитуды некоторым предельным значением, аналогичное тому, которое связано с коэффициентом α_S в уравнении (44.4). Этот предел суть полуфеноменологический параметр, подбор которого основан на наилучшем соответствии эксперименту.

44.2. Пузырьковые модели

Ансамбли пузырьков. Выше исследована модель, оперирующая со спектральным разложением КГ. Это, так сказать, импульсное представление задачи. Рассмотрим ее координатное представление. В нем оперируют с самой КГ.

Обмен жидкостей происходит в двухпотоковой структуре (§ 37). Необходимо изучить разрушение или дезынтеграцию тяжелого слоя, теряющего свою сплошность вследствие проникновения в него колонок легкой жидкости. Пусть отношение плотностей $\mu \ll 1$. Тогда эти колонки являются пузырями. При $\mu \ll 1$ они образуют пузырьковый ансамбль или оболочку. Сильно выступающие струи, в которых вещество находится в состоянии свободного падения, при этом "срезаются". Они мало влияют на движение оболочки, см. § 24 и рис. 24.1.

В 2D геометрии оболочка составляется из совокупности дуг пузырей. Каждая из них по порядку величины равна половине дуги окружности. Точки перегиба КГ находятся около "срезок" струй. Поэтому пузырьковая оболочка почти целиком состоит из выпуклых по отношению к легкой жидкости участков. Размер пузырьков флуктуирует около среднего значения $\langle\lambda\rangle$. Таким образом, оболочки являются случайными кривыми положительной кривизны.

Точки вместо пузырей и цепочки вместо ансамблей. Приближенное описание пузырькового ансамбля или оболочки основано на замене пузырей на их вершины. Соответственно непрерывное описание заменяется на дискретное, а уравнения в частных производных на обыкновенные дифференциальные уравнения. Тогда вместо оболочки получаем цепочки вершинных точек. Будем называть эти точки также частицами. Примеры цепочек показаны на рис. 31.1*б*, *в*, 31.2*а*, *б*, *в*, 35.2, 43.1*а* и 43.3*а*. Они относятся к периодическим, периодическое течение плюс субгармоническое возмущение, спонтанному и стимулированному турбулентным случаям.

Пузырьки и субпузырьки: сглаживание фрактальной КГ и выделение ведущего масштаба. Важно то, что цепочка имеет характерный шаг $\langle\lambda\rangle$. Он определяет скорость продвижения точек вверх в тяжелую жидкость и, следовательно, темп ее дезынтеграции.

Поскольку микромасштабы равны нулю, то на пузырьках "живет" "шуба" из более мелких пузырьков. В свою очередь в пузырьках этой "шубы", являющейся так сказать "шубой" первого яруса, "живут" еще более мелкие пузырьки. Они образуют "шубу" второго яруса и т. д.

В силу сказанного КГ фрактальна. При переходе к цепочке необходимо "сгладить" эту фрактальность и выделить ярус основных пузырьков, определяющих ведущий масштаб $\langle\lambda\rangle$. Эта процедура не проста. Возникающая здесь трудность обсуждается в п. 35.4. По-видимому, имеется числовой разрыв между $\langle\lambda\rangle$, определяющим $\dot{h}_+$, и $\lambda_{\max}$, соответствующим максимуму фурье-образа.

Взаимодействие частиц. Система уравнений движения $\{\dot{h}_+, \dot{\lambda}\}$. Пронумеруем точки (частицы) цепочки индексом i, $-\infty < i < \infty$. В 2D случае текущее положение i-й точки на плоскости равно x_i, y_i. Имеются два одинаково важных уравнения или условия движения. Одно описывает подъем пузырей (уравнение $\dot{h}_+$), а другое — их укрупнение (уравнение $\dot{\lambda}$, $\dot{\lambda} \equiv (d/dt)\langle\lambda\rangle$). В спектральной модели система $\{\dot{h}_+, \dot{\lambda}\}$ как бы содержится внутри интегродифференциального уравнения (44.3) и связанного с ним обратного преобразования Фурье, восстанавливающего функцию $h(x,t)$ по спектру $h(k,t)$. Рассмотрим условие подъема. Считаем, что i-й пузырь характеризуется горизонтальным размером Δx_i. Он определяет скорость подъема

$$\dot{y}_i = \beta\sqrt{g\Delta x_i}, \tag{44.14}$$

где постоянная $\beta \sim 1$. Возможны разные модели, отличающиеся способом расчета Δx_i по набору $\{(x,y)_i\}$ и по способу моделирования укрупнения. Каждый пузырь в цепочке стеснен соседними пузырями. Размер Δx_i определяется ближайшими соседями. Например, за Δx_i можно принять полусумму расстояний до соседей слева и справа

$$\Delta x_i = (1/2)\,(x_{i+1} - x_i). \tag{44.14'}$$

По набору $\{y_i\}$ определяется глубина среднего внедрения

$$h_+ = \lim_{N\to\infty} (1/2N) \sum_{i=-N}^{N} y_i.$$

Теперь составим условие укрупнения. Для укрупнения требуется сокращать число пузырей. Будем делать это, отбрасывая отстающие пузыри. Вычислим углы $\alpha_i^{\pm}$ между соседними точками. Соединим точки $\{i\}$ прямолинейными отрезками. Углы α_i относятся к точке i. Запишем

$$\operatorname{tg}\alpha_i^- = \frac{y_{i-1} - y_i}{x_i - x_{i-1}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_i^+ = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

На каждом шаге численного интегрирования уравнения (44.14) с условием (44.14′) перебираем точки i и их углы $\alpha_i^{\pm}$. Если в точке i (i) хотя бы один из углов α_i^+ и α_i^- положительный и (ii) превышает некоторое критическое значение $\alpha_i > \alpha_{\text{crit}}$, то такая точка i выбрасывается из цепочки. Происходит сокращение цепочки. После этого цепочка перенумеровывается снова слева направо. Эта процедура и реализует условие укрупнения.

При другом способе сокращения числа пузырей вычисляются горизонтальные компоненты сил притяжения или отталкивания между ними. Запишем

$$\ddot{x}_i = \frac{b}{x_{i+1} - x_i} - \frac{b}{x_i - x_{i-1}}, \quad b = \alpha_1 g\langle\lambda\rangle, \quad \alpha_1 > 0, \tag{44.15}$$

где α_1 — безразмерное число, $\langle\lambda\rangle$ — среднее расстояние между точками (частицами) в цепочке. Уравнение (44.15) относится к случаю притяжения. При отталкивании имеем

$$\ddot{x}_i = b(x_{i+1} - x_i) - b(x_i - x_{i-1}), \quad b = \alpha_2 g/\langle\lambda\rangle, \quad \alpha_2 > 0. \qquad (44.16)$$

Разницы $x_{i+1} - x_i$ в уравнениях (44.15), (44.16) можно заменить на расстояния $r(i+1,i) = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. Можно использовать не силы $\propto \ddot{x}_i$, а скорости $\dot{x}_i$. В этом случае в уравнениях (44.15), (44.16) необходимо $\propto \ddot{x}_i$ заменить на $\propto \dot{x}_i$, а для коэффициентов написать новые выражения $b = \alpha_1\sqrt{g}\langle\lambda\rangle^{3/2}$ и $b = \alpha_2\sqrt{g/\langle\lambda\rangle}$.

Нетрудно видеть, что в системах (44.14), (44.15) или (44.14), (44.16) периодические цепочки неустойчивы (Иногамов, 1978). Малые возмущения, нарушающие периодичность, нарастают. Это вызвано тем, что, например, силы притяжения $\propto \ddot{x}_i$ или скорости сближения $\dot{x}_i$ растут при уменьшении расстояния между парой соседних частиц.

Дополним уравнение (44.15) или (44.16) условием выбрасывания. Отмеченная неустойчивость приводит к сокращению расстояния по оси x между близкими точками. В результате за конечное время происходит столкновение ($x_i = x_{i-1}$) их образов на оси x. В момент столкновения из цепочки исключается та из пары частиц i и $i-1$, у которой координата y меньше.

Уравнение (44.15) или (44.16), объединенное с процедурой сокращения числа частиц, условимся называть "уравнением $\dot{\lambda}$". Это название взято в кавычки, поскольку выбрасывание частиц является дискретной, а не дифференциальной операцией.

Пузырьковую модель можно еще снабдить той или иной процедурой построения КГ по точкам цепочки.

Цепочечная модель с притяжением (44.15) и слипанием частиц была развита в работе (Иногамов, 1978). Она использовалась для моделирования развития субгармонической неустойчивости, укрупнения масштаба и ускорения движения цепочки вверх. Модели с выбрасыванием отстающих частиц описаны в работах (Glimm et al., 1987, 1990; Glimm & Li, 1987; Gardner et al., 1988; Glimm & Sharp, 1990, Ofer et al., 1996). Они применялись как модель статистики спонтанного перемешивания.

Движение в рамках пузырьковых моделей: смещение в целом и изменение шага цепочки. Цепочка задается своей позицией h_+ на плоскости (x,y), шагом $\langle\lambda\rangle$ и фазовой информацией. Величины

$$h_+ = \lim_{N\to\infty}(1/2N)\sum_{i=-N}^{N} y_i, \quad \langle\lambda\rangle = \lim_{N\to\infty}(1/2N)(x_N - x_{-N}) \qquad (44.17)$$

это основные средние характеристики цепочки. Фазовая информация N частиц состоит из $2N$ чисел.

Система уравнений и условий $\{\dot{h}_+, \dot{\lambda}\}$ выписана выше. Обсудим ее решения.

Имеется периодическое решение. В нем $\langle\lambda\rangle$ (44.17) равно периоду. Правые части уравнений $\dot\lambda$ обращаются в нуль, а скорости $\dot y_i$ не зависят от i. Соответственно период не меняется, укрупнения нет и скорость подъема $\dot y_i$ не зависит от t. Так и должно быть в периодическом течении, см. гл. VI.

Пузырьковый подход позволяет исследовать неустойчивость периодичности. Возмущения могут быть лишь субгармониками периода. Поскольку оставлен только ведущий масштаб $\langle\lambda\rangle$ (сглаживание фрактальности), то нельзя рассмотреть обертоны, относящиеся к деталям более мелким, чем $\langle\lambda\rangle$. Примеры субгармонических возмущений на цепочке показаны на рис. 31.2*б* и 32.1. Субгармоники задаются относительным квазиимпульсом k_S/k, где $\lambda = 2\pi/k$ — период. В зависимости от рациональности/иррациональности k_S/k в дискретных цепочках, как и в непрерывной жидкости, возможны соизмеримые/несоизмеримые эволюции. Анализу этих вопросов в непрерывном случае посвящена гл. VII. Наиболее важным является максимальное значение k_S/k, развитие которого приводит к удвоению периода.

Рассмотрим моделирование турбулентности посредством цепочки. При турбулентном перемешивании непрерывные x-зависимости даются случайно-периодическими функциями (§ 37). Цепочечный аналог (случайно-периодические цепочки) случайно-периодических функций показан на рис. 37.3*а*. Необходимо только выбросить точки (частицы) через одну и сказать, что это вершинные точки пузырей, а не нули случайно-периодической функции. Такие цепочки можно получить с помощью формул

$$x_{i+1} = x_i + 2\xi\langle\lambda\rangle, \quad y_i = (\xi - 1/2)\beta\langle\lambda\rangle, \quad \langle\xi\rangle = 1/2, \quad \beta \sim 1. \quad (44.18)$$

Так генерируются начальные данные. Случайно-периодическая цепочка представляют собой периодическую цепочку плюс густой спектр субгармоник с относительными квазимпульсом k_S/k и амплитудой порядка единицы.

Из анализа размерности цепочечной системы $\{\dot h_+, \dot\lambda\}$ следует, что за время $\sim \sqrt{\langle\lambda\rangle/g}$ происходит изменение $\langle\lambda\rangle$ (44.17) в несколько раз. Это один ярус каскада укрупнений. Многоярусная эволюция автомодельна. При этом средние (44.17) растут как gt^2.

Цепочечная система устроена так, что решение не может выйти ни на периодическую цепочку $S \to 0$ ($S = \Delta\lambda/\langle\lambda\rangle$), ни на уединенный пузырь $S \to \infty$, а "болтается" где-то между ними: $S \sim 1$. Уравнения (44.14), (44.15) увеличивают относительную ширину "бугра" S (рис. 37.2) и таким образом растягивают спектральный диапазон, а условия выбрасывания частиц из цепочки уменьшают S и сужают диапазон. По-видимому, цепочки, стартующие от начальных данных (44.18), через несколько звеньев (ярусов) каскада выходят на "стационар". Это означает, что статистически случайно-периодические цепочки в разные моменты времени эквивалентны друг другу, см. по этому поводу также место в п. 38.1 о статистической эквивалентности в непрерывном случае. Этот "стационар" соответствует спонтанному перемешиванию.

При цепочечном подходе трудно моделировать стимулированный каскад. Требуется лакунарное возмущение (40.8) с большим шагом $a \gg 1$ прогрессии. Можно моделировать развитие длинноволнового возмущения с $\lambda \gg \langle\lambda\rangle$ ($t = 0$) и значительной начальной амплитудой $\Delta y > \langle\lambda\rangle$ ($t = 0$). Можно, видимо, рассмотреть переход от несоизмеримых начальных данных к спонтанному каскаду.

44.3. Гибридная модель

Преимущества и недостатки импульсной и координатных моделей. Импульсной модели посвящен п. 44.1. Основным является уравнение (44.3) на неизвестный спектр $h(k,t)$. Характеристики укрупнения $\langle\lambda\rangle$ и пенетрации h_+ определяются спектром. Функция $h(x,t)$ находится по $h(k,t)$ посредством обратного фурье-преобразования. Перед восстановлением $h(x,t)$ необходимо "одеть" сглаженную функцию $h(k,t)$ "иглами" по правилам § 37.

Координатные модели обсуждаются в п. 44.2.

Сравним импульсную и координатные (цепочечные) модели. Преимуществом первой является то, что в ней проще описать взаимодействие спонтанной "волны", распространяющейся по оси k, и "уединенного" (по k) возмущения (см. также § 39). В координатной модели трудно описать перемешивание, стимулированное однородным (§ 40, 41) шумом, см. п. 44.2. Кроме того, в импульсном подходе естественно ухватываются переходные стадии и особенно наглядным является движение спектра по k. Другим недостатком координатных моделей является то, что в них отсутствует описание окологидростатической стадии[18]. Зато при координатном подходе мы непосредственно сталкиваемся с цепочечным образом случайно-периодической функции (см. п. 44.2), тогда как в импульсной модели для получения такой функции, как сказано выше, необходимо "одеть" спектр "иглами" и сделать обратное преобразование Фурье. Это плюс координатной модели.

Смешанная координатно-импульсная или гибридная модель. В гибридной модели записывают уравнения

$$\dot{h}_+ = \mathrm{Fr}\sqrt{g\lambda}, \tag{44.19}$$

$$\dot{\lambda} = \beta\gamma\lambda, \tag{44.20}$$

где $\lambda \equiv \langle\lambda\rangle$, $\gamma = \sqrt{gk}$, $\beta \sim 1$. Уравнение (44.19), связывающее среднюю скорость внедрения с характерным масштабом доминирующей структуры, составлено давно (Anisimov et al., 1983), см. п. 35.4. Если закон $h_+(t)$ известен, то из (44.19) находятся λ и $G = \lambda/h_+$ (Anisimov et al., 1983; Glimm et al., 1987; 1990; Glimm & Li, 1987; Gardner et al., 1988; Glimm & Sharp, 1990). Добавить к уравнению (44.19) уравнение (44.20) и рассматривать их как систему уравнений на неизвестные h_+ и λ пред-

[18] Вблизи гидростатики малы углы α отклонения КГ от горизонтали. В цепочечных моделях пузырьки имеются сразу. Поэтому $\alpha \sim 1$ и эти модели соответствуют течениям, которые нелинейны с самого начала.

ложено в работе (Alon et al., 1995). Модель (44.19), (44.20) отличается от импульсных и координатных моделей. С одной стороны она содержит величину $k = 2\pi/\lambda$, пропорциональную импульсу, и является как бы импульсной, но с другой стороны вместе с ней в модель явно входит координатная характеристика h_+. Разница между моделью (44.19), (44.20) и координатными подходами п. 44.2 заключается в том, что в п. 44.2 рассматриваются индивидуальные частицы (пузыри). Уравнение для скорости (44.14) в п. 44.2 только внешне похоже на уравнение (44.19). В (44.14) $\dot{y}_i$ вычисляется по локальному окружению, а в (44.19) входит масштаб случайно-периодической структуры.

Гибридная модель слабее моделей п. 44.1 и п. 44.2. В ней нет ологидростатики, нет редких спектров (несоизмеримость, установление), нельзя описать взаимодействие спонтанной турбулентности с длинноволновым возмущением и нельзя описать широкодиапазонную стимуляцию турбулентности. По существу она представляет собой квазиклассический (ВКБ) вариант автомодельной спонтанной турбулентности, учитывающий медленное изменение g или в цилиндрическом и сферическом случаях медленное изменение R, $R \gg \langle\lambda\rangle$. Единственным достоинством является простота. Гибридная модель есть, так сказать, элемент гносеологической конструкции, еще раз оттеняющий то, что при РТ перемешивании происходит укрупнение.

Итак, модели служат отчасти целям выработки качественных представлений о механике перемешивания. В связи с этим имеет смысл привести описание специфических черт геометрической структуры слоя перемешивания.

44.4. О большой ширине пузырей и асимметрии пузырь/струя

Геометрический фактор G. В гибридной модели п. 44.3 главным является уравнение (44.19). Оно основано на двух посылках. Во-первых, есть доминирующая структура (а следовательно и $\langle\lambda\rangle$) и, во-вторых, эта структура аппроксимируется периодическим решением с периодом равным $\langle\lambda\rangle$. Из второй посылки следует, что число Fr в (44.19) может быть оценено по формуле (27.22) (с оговорками, сделанными в п. 35.4, относительно многопузырных стационаров). Оценки $\langle\lambda\rangle$, $G = \langle\lambda\rangle/h_+$ и $\alpha_H = \langle\lambda\rangle/\mathrm{A}gt^2$ вытекают из закона $h_+ = \alpha_+\mathrm{A}gt^2$ и уравнения (44.19). Уравнение (44.20) является подчиненным по отношению к этим оценкам. В (44.20) $\gamma = \sqrt{gk}$, $k = 2\pi/\langle\lambda\rangle$. Подчиненность заключается в том, что коэффициент β подбирается так, чтобы при подстановке в (44.20) выражения для $\langle\lambda\rangle$, следующего из $h_+ = \alpha_+\mathrm{A}gt^2$ и (44.19), уравнение (44.20) удовлетворялось. Отсюда при $\mu = 0, \mathrm{A} = 1$ имеем[19]

$$\beta = (\sqrt{8/\pi})(\alpha_+/\mathrm{Fr}).$$

[19] Если при $\mu \neq 0$ принять, что $\dot{h}_+ = \mathrm{Fr}\sqrt{(1-\mu)g\lambda}$, см. гл. VI, то $G = (1+\mu)^{-1} \times$ $\times\ 4\alpha_+/\mathrm{Fr}^2 = 2\alpha_+(1+\mathrm{A})/\mathrm{Fr}^2$, ср. с (35.10), а $\beta = \sqrt{8/\pi}\,\alpha_+/\sqrt{1+\mu}\,\mathrm{Fr}$. Примем $\alpha_+ \approx 0{,}05$ и $1/\mathrm{Fr}^2 \approx 19$, тогда $G \approx 4/(1+\mu) = 2(1+\mathrm{A})$, $\beta \approx 0{,}35/\sqrt{1+\mu} = 0{,}25\sqrt{1+\mathrm{A}}$.

Важнейшим обстоятельством является то, что величина $G = \langle\lambda\rangle/h_+$ (35.10) получается большой, см. (35.11). .Поэтому выше и говорится о большой ширине пузырей. Это вызвано медленностью пенетрации пузырей. Скорость пенетрации так мала, что даже для небольших смещений α_+ КГ требуются весьма широкие пузыри (α_+ — безразмерное смещение от начального положения в автомодельном случае, α_+ мало)[20].

Асимметрия h_+/h_-. В текущий момент фронт пузырьков находится на среднем расстоянии h_+ от начального положения КГ. При $\mu = 0$, $A = 1$ основным элементом динамической картинки являются пузырьки, дезынтегрирующие тяжелую жидкость. Струи этой жидкости в механическом отношении второстепенны. Расстояние h_- дает глубину опускания тяжелой жидкости в легкой.

Отношение h_-/h_+ характеризует асимметрию слоя перемешивания к инверсии вертикали $y \to -y$. Эта асимметрия обусловлена неодинаковостью разноплотных жидкостей.

Если "забыть" про каскад и считать, что "период" $\langle\lambda\rangle$ не меняется во времени, то по h_+ можно определить h_-. Некоторым основанием для такого "забывания" (или пренебрежения предыдущими ярусами каскада) служит то, что в расходящейся геометрической прогрессии, которою представляет собой каскад, превалирует последний ярус. При этом подходе h_+ суть смещение периодических пузырей. Оно равно $h_+ = G^{-1}\langle\lambda\rangle = 0,1 - 0,37\langle\lambda\rangle$, где $h_+ = 0,1\langle\lambda\rangle$ получается при большом значении G из (35.11), а $h_+ = 0,37\langle\lambda\rangle$ — при умеренном G.

Коэффициент $1/G$ определяет "зрелость" пузырей. При $1/G \approx 0,1$ в периодических решениях происходит переход на стадию насыщения. Периодические пузыри при $G < 0,1$ — "недозрелые", а при $G > 0,1$ — "перезрелые".

Возьмем положение концевой точки струи из периодического решения из п. 29.4 ($\mu = 0$). Имеем $h_-/h_+ = 2$ и 4 для $G = 0,1$ и $0,37$ соответственно.

Разумеется, такой "периодический" подход с "замороженным" укрупнением, отметающий предыдущие ярусы, не годится для увязывания h_+ и t (например, расширение происходит не по закону $h \propto t^2$).

Асимметрия, последний/предыдущие ярусы и зависимость от μ. Рассмотрим зависимость коэффициента асимметрии h_-/h_+ при спонтанной турбулентности от отношения плотностей μ, см. рис. 44.1. Особенно интересной является область малых значений μ ($\mu \sim 10^{-2}$ и меньше). Чтобы детально представить окрестность точки $\mu = 0$ ($A = 1$) и одновременно удерживать в поле зрения весь диапазон μ ($0 \le \mu < 1$), по оси абсцисс на рис. 44.1 отложена величина $\xi = \exp[-(\ln 2/\ln 10)\ln(1/\mu)]$.

[20] Разрыв между наблюдаемым по спектрам $\lambda_{\max}$ (см. § 43, это максимум "бугра") и $\langle\lambda\rangle$, вычисленным по формуле (35.10), покрывается главным образом за счет многопузырных стационаров, см. п. 35.4. Кроме этого, в связи с тем, что доминирующая структура не строго периодична (у нее $\Delta\lambda \sim \langle\lambda\rangle$, при периодичности $\Delta\lambda = 0$), в ней есть пузыри, которые больше средних. Они то и двигаются со скоростью *бо́льшей*, чем скорость даваемая (44.19). То есть происходит как бы эффективное увеличение числа Фруда.

По оси абсцисс в круглых скобках даны $\lg\mu$. Кривая *2–3* — периодическая (с фиксированным ярусом) модель (Alon et al., 1995), см. также 29.4. Она не пригодна в малой окрестности $\mu = 0$, в которой необходим

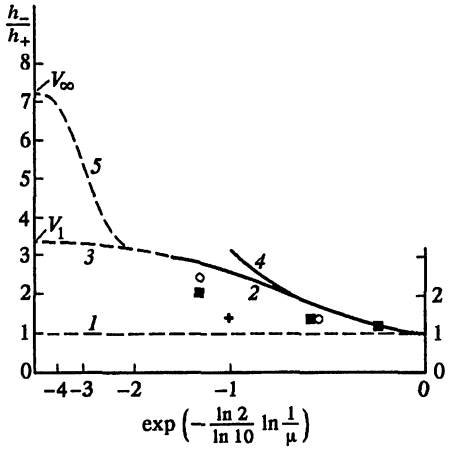


Рис. 44.1. Зависимость асимметрии турбулентного перемешивания h_-/h_+ от μ

учет фрагментов мелких струй, выброшенных на предыдущих к текущему ярусах Горизонталь *1* (редкие штрихи) и вертикаль $\xi = 0$ ($\mu = +0$, $\lg\mu = \infty$) относятся к равенству $h_- = h_+$ и перемешиванию "с вакуумом" соответственно. При $\mu = 1 - 0$ ($\lg\mu = 0$, $\xi = 1$) перемешивание симметрично относительно инверсии $y \to -y$. Это область применимости приближения Буссинеска.

Маркеры представляют результаты прямого численного моделирования. Они располагаются при $\mu = 2/3$, $1/3$, $1/10$ и $1/20$. Квадраты и кружки заимствованы из работы (Alon et al., 1995), кружки — расчеты (Youngs, 1984), крестик — данные из § 43. В стимулированном случае коэффициент h_-/h_+ получается меньше, см. п. 43.2. Кривая *2–3* взята из (Alon et al., 1995). Она получена в рамках модели, которую можно было бы назвать "периодическая модель с заданным G". Мы кратко коснулись ее выше. В ней фиксируются G и период $\lambda = \langle\lambda\rangle$. Тогда $h_+ = \langle\lambda\rangle/G$. Далее численно моделируется периодическое течение с этим периодом. Находится положение конца струи h_- в момент, к которому пузырь прошел путь h_+, см. п. 29.4. Зависимость $A(\mu) = h_-(\mu)/h_+(\mu)$, полученную таким образом, и дает кривая *2–3*. Точкой V_1 отмечено пересечение кривой *2–3* с осью $\mu = 0$. Положение точки V_1 меняется в диапазоне $A(0) = 2 - 4$, $A(\mu) = h_-(\mu)/h_+(\mu)$, при изменении $G(\mu = 0)$ в диапазоне (35.11).

Точкой V_∞ выделено значение $A(\mu = 0)$ в случае истинной кривой $A(\mu)$. При $\mu = 0$ глубина $h_- = (1/2)gt^2$, поэтому $A(\mu = 0) = h_-(0)/h_+(0) = 1/2\alpha_+ \approx 7 - 10$. Индексы 1 и ∞ у точек V_1 и V_∞ означают, что они относятся соответственно к периодической модели с одним текущим ярусом и к истинной ситуации с бесконечным (микромасштабы равны нулю) числом ярусов.

Цифрой *4* отмечена зависимость $A(\mu) = 1/\sqrt{\mu}$. Она получается, если положить, что скорости подъема пузырей и опускания грибов даются формулами (29.4), (29.3) и (29.8).

"Периодическая модель с заданным G" немного завышает функцию $A(\mu)$ в области умеренных μ и существенно занижает ее в области малых μ, $\mu < 10^{-2}$, ср. штриховые кривые *3* и *5* на рис. 44.1. Мелкие фрагменты струй и грибов из предыдущих к текущему ярусов каскада укрупнений затягиваются в раздувающиеся пузыри быстрыми восходящими потоками легкой жидкости, стремящейся заполнить области раздувания, см. п. 18.6 и п. 30.4. Это вызвано малостью отношения объем/поверхность $= V/S$ для этих фрагментов по сравнению с отношением V/S для струй, сгенерированных в текущем ярусе, и конечностью плотности ρ_{L} легкой жидкости.

Отношения V/S и $\mu = \rho_{\mathrm{L}}/\rho_{\mathrm{H}}$ определяют относительную роль весовых и аэродинамических сил. При умеренных μ аэродинамические силы не позволяют продвинуться вниз вглубь легкой жидкости мелким фрагментам. В силу этого при этих μ глубина опускания h_- определяется струями текущего яруса.

Аэродинамические силы или скоростной напор $\rho_{\mathrm{L}} v^2$ убывают вместе с μ. При достаточно малых μ они невелики. В этом случае мелкие фрагменты, потерявшие динамическую связь с односвязным массивом тяжелой жидкости раньше струй текущего яруса, находятся ниже этих струй. Тогда положение фронта h_- определяется этими фрагментами. При этом расстояние h_- больше чем то, которое дается периодической моделью. Из-за этого и возникает высокий "бугор" около точки $\mu = 0$, показанный штриховой кривой *5* на рис. 44.1.

44.5. 3D обобщения спектральных, пузырьковых и гибридных моделей

Трехмерный вариант спектральной модели (44.3) выглядит следующим образом

$$\dot{h}(\mathbf{k},t) = [1 - |\mathbf{k}|h(\mathbf{k},t)] \times \\ \times \left[\gamma(|\mathbf{k}|)h(\mathbf{k},t) + \sqrt{g}\int\int dq_1 dq_2 \, \frac{h(\mathbf{q},t)\, h(\mathbf{q}+\mathbf{k},t)}{(|\mathbf{q}||\mathbf{q}+\mathbf{k}|)^{1/4}}\right], \quad (44.21)$$

где $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$ — вектор на плоскости, интеграл обегает все пары точек на плоскости $\mathbf{q}$, разнящиеся на вектор $\mathbf{k}$, форма знаменателя в (44.21) выбрана из соображений симметрии и размерности. Интеграл (44.21) сходится в точке $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ даже при наличии однородного шума $h \propto 1/|\mathbf{q}|$. Уравнение (44.21) нагляднее и проще, чем модель (Shvarts et al., 1995), полученная разложением краевых условий возле плоской границы до второго порядка.

Концепция несоизмеримости в 3D геометрии. Начальные возмущения в виде (i) одной точки $\mathbf{k}_1$ или (ii) пары не лежащих на одной прямой точек $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ на плоскости $\mathbf{k}$ порождают соответственно (i) 2D периодические течения в виде валов с периодом $2\pi/|\mathbf{k}_1|$ или (ii) 3D периодические

течения в виде решетки, см. п. 30.2. Фурье-образ последнего течения состоит из решеточной суммы по векторам $\mathbf{k}_{nm} = n\mathbf{k}_1 + m\mathbf{k}_2$, где n, m — целые. Для генерации спонтанного 3D каскада необходима как минимум несоизмеримая тройка векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$. Неколлинеарная пара $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ порождает рациональную решетку

$$\mathbf{k}_{rp} = r\mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2, \quad r = n_1/m_1, \quad p = n_2/m_2, \tag{44.22}$$

где n_1, m_1, n_2, m_2 — целые, а r, p — рациональные числа. Если вектор $\mathbf{k}_3$ принадлежит любому узлу рациональной решетки (44.22), то финальное течение будет 3D периодическим. Положение тут вполне аналогично рассмотренному в п. 35.3. В несоизмеримой тройке коэффициенты r и p разложения (44.22) вектора $\mathbf{k}_3$ по $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ являются (оба!) иррациональными числами. Если иррационально только одно из них, то асимптотически возникает спонтанный 2D каскад.

Пространственно-однородные спектры и стимуляция в 3D случае. Пространственно-инвариантными (однородными) являются степенные распределения $h(\mathbf{k}, t = 0)$ по $\mathbf{k}$. Аргументы, приведенные в § 40, распространяются и на рассматриваемый случай. Из них следует, что единственным однородным и одновременно широкодиапазонным спектром является спектр вида $h(\mathbf{k}, 0) = f(\varphi)/|\mathbf{k}|$, где φ — полярный угол на плоскости $\mathbf{k}$, f — произвольная функция.

Уравнение (44.21) не имеет выделенных направлений. Поэтому довольно очевидно, что в спонтанном случае, когда старт производится от произвольных (например, анизотропных) короткомасштабных начальных данных, с течением времени происходит изотропизация спектра. Это вызвано тем, что любые короткомасштабные данные "забываются". Спонтанный спектр является изотропным и автомодельным $h(\mathbf{k}, t) = H(|\mathbf{k}|gt^2)/|\mathbf{k}|$. Прямому численному моделированию и модельному анализу изотропизации посвящена работа (Shvarts et al., 1995). В стимулированном случае при переменной функции $f(\varphi)$ автомодельность анизотропна $h(\mathbf{k}, t) = H(\mathbf{k}gt^2)/|\mathbf{k}|$.

Модель (44.21) позволяет моделировать в 3D геометрии те же явления, что и модель (44.3) в 2D геометрии, а именно, насыщение и установление периодичности, соизмеримость/несоизмеримость и другие вопросы, связанные с редкими спектрами, процесс обогащения спектра комбинационными линиями, переходы от редких спектров к густым, смещение "бугра" в спектре в длинноволновую сторону с течением времени, каскад, автомодельность и стимуляцию каскада длинноволновыми возмущениями.

Трехмерные пузырьковые оболочки. Координатные модели, рассмотренные в п. 44.2, допускают обобщение на 3D случай. При этом случайные цепочки заменяются на случайные решетки. В узлах решеток находятся точки с координатами x, y, z, где z — вертикальная координата. Уравнение всплывания точек (пузырьков) (44.14) в 3D случае принимает вид

$$\dot{z}_i = \beta\sqrt{g\,\Delta r_i}, \quad \beta \sim 1, \tag{44.23}$$

индекс i пробегает решетку, коэффициенты β в (44.14) и (44.23) разные, ср. 2D и 3D числа Фруда (27.22) и (27.22′).

Процедура вычисления эффективного размера пузырька Δr_i сложнее в 3D случае. Это вызвано тем, что в решетке труднее "поймать" соседей. Опишем ее. Она состоит из определений (i) среднего $\langle\lambda\rangle$-и (ii) локального Δr_i масштабов. (i) Спроецируем точки (частицы) на плоскость x, y. Определим средний размер $\langle\lambda\rangle$. Для этого очертим круг площадью S, в который попадает много частиц. Пусть N_p — число частиц в круге S. Тогда $\langle S\rangle = \lim\limits_{S\to\infty} S/N_p$, $\langle\lambda\rangle = \sqrt{\langle S\rangle}$. (ii) Переберем точки решетки. Вокруг проекции $(x,y)_i$ каждой из них очертим круг площадью $10\langle S\rangle$ на плоскости x, y. Подсчитаем число проекций $(x,y)_i$, попавших в этот круг. Пусть это число равно n_i ($n_i \geq 1$, поскольку учитывается и точка — центр круга). Чем больше n_i, тем меньше размер пузырька. Положим $s_i = 10\langle S\rangle/n_i$ и $\Delta r_i = \sqrt{s_i}$.

Уравнение $\dot{h}_+$ задается (44.23) и процедурой отыскания Δr_i. Представим процедуру отбрасывания отставших или мелких частиц. Эффективно она соответствует уравнению $(d/dt)\langle\lambda\rangle$. Рассмотрим вариант с притяжением пузырьков. Пусть

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_\perp)_i = \alpha\sqrt{g}\langle\lambda\rangle^{3/2}\sum_j \frac{(\mathbf{r}_\perp)_{ij}}{(\mathbf{r}_\perp)_{ij}^2}. \tag{44.24}$$

В (44.24) сумма берется по ближайшим соседям. Таковыми являются те, которые попадают в круг $10\langle S\rangle$ с центром в точке i. Если сумма (44.24) пуста, то правая часть (44.24) равна нулю. Коэффициент $\alpha > 0$, $\alpha \sim 1$ — безразмерный, $(\mathbf{r}_\perp)_i = \{x_i, y_i\}$, $(\mathbf{r}_\perp)_{ij} = \{x_j - x_i, y_j - y_i\}$.

Сближение пузырьков i и j согласно (44.24) приводит к уменьшению $|(\mathbf{r}_\perp)_{ij}|$. Положим, что если $|(\mathbf{r}_\perp)_{ij}| < \langle\lambda\rangle/100$, то из пары частиц (пузырьков) i и j выбрасывается та, у которой координата z меньше.

Модель (44.23), (44.24) имеет периодические и спонтанные турбулентные решения. На нее распространяется сказанное в п. 44.2, п. 44.3.

44.6. Моделирование перемешивания при неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

Неустойчивость тангенциального разрыва скорости (сдвигового течения) называется неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца. Она приводит к размытию КГ в слой турбулентного перемешивания. Пусть координата x направлена вдоль КГ параллельно вектору скачка скорости $\mathbf{u}_0$, а y — перпендикулярно КГ. Внутри слоя мгновенные распределения u, v, p и ρ (плотность ρ переменна при $\mu \neq 1$, где μ — отношение плотностей на КГ) суть случайно-периодические функции от x. Они характеризуются средним текущим масштабом $\langle\lambda\rangle$. С течением времени происходит укрупнение доминирующей структуры — масштаб $\langle\lambda\rangle$ растет.

В пространственно-инвариантных случаях это укрупнение автомодельно. При этом эволюция фурье-образов $f(k,y,t)$ самоподобна

$$f(k,y,t) = f(ku_0t, y/u_0t),$$

$f = \{u, v, p, \rho\}$, $u_0 \equiv \mathbf{u}_0$. Автомодельный слой расширяется по закону $h_\pm = \alpha_\pm u_0 t$. Коэффициенты $\alpha_\pm$ различны при $\mu \neq 1$.

Поскольку скачок скорости $\mathbf{u}_0$ это вектор, то в задаче о перемешивании при НКГ имеется выделенное направление. В этом ее отличие от РТ перемешивания. В силу этого в 3D геометрии сдвиговое перемешивание анизотропно. Преимущество имеют валообразные структуры, лежащие в плоскости КГ и перпендикулярные $\mathbf{u}_0$.

Спектральная модель НКГ перемешивания. В 2D геометрии в НКГ случае аналог основного уравнения спектральной модели (44.3) имеет вид

$$\dot{h}(k,t) = [1 - kh(k,t)][\gamma_{\text{КН}} h(k,t) + u_0 \int_0^\infty dq\, \sqrt{q(q+k)}\, h(q,t) h(q+k,t)], \tag{44.25}$$

где $\dot{h} \equiv (\partial/\partial t)h$, $\gamma_{\text{КН}} = [\sqrt{\mu}/(1+\mu)]ku_0$ — инкремент НКГ.

В автомодельном случае делаем подстановку

$$h(k,t) = \frac{\epsilon(k_{\text{SS}})}{k}, \quad k_{\text{SS}} = ku_0 t,$$

похожую на подстановку (44.5). При этом уравнение (44.25) принимает вид

$$\frac{d\epsilon(k_{\text{SS}})}{dk_{\text{SS}}} = [1 - \epsilon(k_{\text{SS}})] \left[\frac{\sqrt{\mu}}{1+\mu} \epsilon(k_{\text{SS}}) + \int_0^\infty dq_{\text{SS}}\, \frac{\epsilon(q_{\text{SS}})\epsilon(q_{\text{SS}} + k_{\text{SS}})}{\sqrt{q_{\text{SS}}(q_{\text{SS}} + k_{\text{SS}})}} \right]. \tag{44.26}$$

Анализ уравнений (44.25), (44.26) приводит к следующим выводам. Подобно РТ случаю имеются соизмеримые и несоизмеримые решения. Несоизмеримые начальные данные, как и любые другие короткомасштабные возмущения, приводят к спонтанному каскаду. Несоизмеримые возмущения — простейший инициатор спонтанного перемешивания. Однородные спектры вида $h(k,0) \propto 1/k$ стимулируют перемешивание без нарушения его самоподобных свойств[21]. Коэффициенты α_+ и α_- больше в стимулированных случаях. Они возрастают вместе с амплитудой однородных начальных шумов.

Координатная модель НКГ перемешивания. Рассмотрим цепочечную модель в случае НКГ. При РТН частицами или точками цепочки были пузырьки, см. п. 44.2. Здесь ими являются вихри. В периодическом случае доминирующая структура представляет собой цепочку вихрей в

[21] Неизвестной в спектральной модели вида (44.26) является функция $h(k,t)$. Поэтому начальные данные $h(k, t=0)$ задаются только на нее. В точной постановке задаются и возмущения КГ $h(k,0)$, и возмущения скорости $\dot{h}(k,0)$. В точной постановке в однородном стимулированном случае при НКГ имеем $h(k,0) \propto 1/k$ и/или $\dot{h}(k,0) \propto \text{const}$. То, что при НКГ $\dot{h}(k,0) \propto \text{const}$ (при однородной стимулированной РТН $\dot{h}(k,0) \propto 1/\sqrt{k}$), вызвано тем, что при НКГ размерная постоянная равна скорости сдвига (при РТН это g).

виде "кошачьих глаз". При турбулентном перемешивании доминирующая структура имеет вид случайно-периодической цепочки вихрей.

Вихри взаимодействуют друг с другом по закону Био–Савара. Это взаимодействие приводит к тому, что с течением времени вихри объединяются в более крупные, а общее число их сокращается. В этом и состоит инверсный каскад в случае НКГ. Простейшим уравнением, моделирующим такое поведение, является следующее:

$$\dot{x}_i = \frac{b}{x_{i+1} - x_i} - \frac{b}{x_i - x_{i-1}}, \quad b = \alpha u_0(\lambda), \quad \alpha > 0, \tag{44.27}$$

где $\alpha \sim 1$ — безразмерное число, $\langle\lambda\rangle = \lim\limits_{N\to\infty} (1/2N)(x_N - x_{-N})$ — среднее расстояние между точками (частицами) в цепочке. Оно аналогично уравнениям, рассмотренным в п. 44.2.

Уравнение (44.27) имеет решения в виде периодических цепочек. Согласно уравнению (44.27), частицы притягиваются друг к другу. Периодические цепочки неустойчивы к субгармоническим возмущениям. Развитие этих возмущений приводит к смещениям частиц из равновесных позиций на расстояния порядка межчастичных. В цепочечной модели уравнение (44.27) снабжается процедурой уменьшения числа частиц. Из-за притяжения какие-то из частиц сближаются. В момент, когда расстояние между ними $|x_i - x_{i-1}|$ станет меньше $\langle\lambda\rangle/100$, пара частиц заменяется на одну, находящуюся посередине между ними. Таким образом, число частиц постоянно сокращается, а масштаб $\langle\lambda\rangle$ растет.

Описанные уравнение и процедура сокращения числа частиц пространственно-инвариантны. Поэтому модель имеет автомодельные решения, соответствующие инверсному каскаду.

Подытоживая сказанное в п. 44.6, следует заключить, что в качественных отношениях (соизмеримость/несоизмеримость, большие или доминирующие структуры, инверсность, спонтанность/стимуляция) перемешивания при РТН и НКГ чрезвычайно похожи.

§ 45. Турбулентное перемешивание при неустойчивости Рихтмайера–Мешкова

45.1. О глубоких различиях между РТН и НКГ с одной стороны и НРМ с другой

Инерционность НРМ[22]. Как сказано, динамически РТН и НКГ чрезвычайно похожи. В тоже время, НРМ сильно отличается от них. Если РТН и НКГ — это классические неустойчивости с положительной обратной связью $\ddot{\eta} = \alpha\eta$ ($\alpha > 0$, η — амплитуда возмущения) или $\dot{\eta} = \alpha\eta$ (см. модели § 44), то в НРМ отсутствует усиление: $\ddot{\eta} = f(\eta)$, $f(0) = 0$, в разложении $f(\eta)$ по η выпадает линейный по η член. Движение здесь происходит по инерции, см. п. 5.1. При РТН динамическая система эквива-

[22] Ниже рассматривается несжимаемая НРМ. Вопросы сжимаемости были разобраны в § 4 и 5.

лентна шарику, скатывающемуся с вершины перевернутой чашки. При НРМ шарик катается по плоской поверхности.

На временах "порядка единицы" (то есть, так сказать, в одном ярусе) течения, связанные с РТН и НРМ, довольно похожи (см. § 26). Различия накапливаются во многих ярусах или асимптотически при $t \gg 1$.

Имеется ли спонтанный каскад при НРМ? При РТН и НКГ существует внешний "источник", "питающий" движение. При НРМ течение инерционно и такого источника нет. Из-за этого РМ турбулентное перемешивание, по-видимому, не может быть спонтанным в том смысле, который вкладывается в это понятие в случаях РТН (см. § 38, 39) и НКГ (см. п. 44.6). Вообще, если исследования перемешивания при РТН и НКГ в качественном отношении по существу исчерпаны, то случай РМ турбулентности оказывается сложнее и считать его исчерпанным рано.

Расслоение спонтанный/стимулированный вызвано расслоением спектров начальных возмущений на короткомасштабные и широкодиапазонные, см. § 38, 40. В случаях РТН и НКГ спонтанная динамика стартует от короткомасштабных спектров.

В случаях РТН и НКГ в каждом ярусе по времени имеется доминирующая структура. Она описывается случайно-периодическими функциями с $\langle\lambda\rangle$ и $\Delta\lambda$, см. § 37. Наиболее важной является не зависимость от времени (она, например, разная для РТН и НКГ), а именно наличие доминирующей структуры в ярусах, далеких от короткомасштабного. Соответственно фурье-образ структуры имеет максимум ("бугор") на волновых числах $\sim 1/\langle\lambda\rangle$. В каждом ярусе "источник" переформировывает эти структуры из длинноволнового крыла "бугра" и поддерживает таким образом укрупнение.

Не ясно, будут ли последовательно генерироваться доминирующие структуры с $\langle\lambda\rangle$, превышающими начальный масштаб, при $t \gg 1$ (единица времени задается начальным масштабом) в случае НРМ.

Термином "короткомасштабные" следует пользоваться при РТН и НКГ. В этих случаях из-за инверсного каскада система далеко уходит от начального масштаба, который таким образом становится короткомасштабным *по отношению к текущему*. При НРМ развитие процесса перемешивания быстро замедляется. Вследствие этого, в экспериментах и численных расчетах с ограниченным временем наблюдения текущий масштаб не успевает во много раз измениться по сравнению с начальным. Поэтому при НРМ целесообразнее опускать приписку "короткомасштабный" и говорить просто об ограниченном или "локализованном" (по k) начальном возмущении, спектр которого сосредоточен в спектральном диапазоне $\Delta k \sim k$, где k — центр диапазона.

Перемешивание при развитии таких локализованных возмущений рассматривалось в работе (Alon et al., 1995). В этой работе высказано мнение о том, что РМ турбулентное перемешивание напоминает РТ перемешивание. Напоминает в том смысле, что малое субгармоническое возмущение нарастает и с течением времени уменьшается число пузырей, движущихся вглубь жидкости, на единицу длины вдоль оси x в 2D

случае или на единицу площади плоскости x, y в 3D случае[23]. Это, по мнению этих авторов, указывает на то, что процесс РМ перемешивания напоминает инверсный каскад. Некоторое основание для таких предположений следует также из анализа РМ периодических решений, см. п. 26.2. Оказывается, что скорость периодических пузырей при $\mu = 0$ выходит на асимптотику (26.14), которая, во-первых, не зависит от начальной скорости $v(\lambda, t = 0)$ и, во-вторых, растет с λ.

Все же, следует заключить, что вопрос об инверсном каскаде при НРМ от локализованного по k возмущения остается открытым. При РТ и КГ каскадах имеется статистическая эквивалентность или статистическое самоподобие далеко разнесенных ярусов — масштаб $\langle\lambda\rangle$ возрастает во много раз. При НРМ возрастания масштаба в несколько раз не наблюдалось[24]. Возможно, это связано с недостаточной продолжительностью расчетов, но, возможно, что каскада от локализованного по k возмущения при НРМ нет.

Можно аппроксимировать рост области перемешивания от локализованного возмущения степенными зависимостями $h_\pm = \alpha_\pm \lambda_0 (v_0 t/\lambda_0)^{\beta_\pm}$, где λ_0 и v_0 — характеристики начального возмущения. Пометки $\pm$ относятся, как обычно, к плотной и малоплотной жидкостям. Коэффициенты $\alpha_\pm$ и степени $\beta_\pm$ зависят от μ. При $\beta_+ \neq \beta_-$ коэффициент асимметрии h_+/h_- теряет смысл. Согласно (Alon et al., 1995) $\beta_+ \approx 0,4$ и не зависит от μ во всем диапазоне $0 \leq \mu < 1$! Степень β_- равна 1 при $\mu = 0$ (полет струй в вакууме по инерции), функция $\beta_-(\mu)$ быстро падает от 1 до 0,6 при $0 \leq \mu < 0,2$ и $\beta_-(\mu)$ медленно падает от 0,6 до 0,4 при $0,2 < \mu < 1$. Наиболее удивительным из результатов (Alon et al., 1995), видимо, является то, что степень $\beta_+(\mu = 0,01) \approx 0,4$ довольно велика. Казалось бы, в отсутствие каскада от локализованного возмущения степень $\beta_+(0)$ должна быть близка к нулю, поскольку для периодического случая при $\mu = 0$ мы имеем $h_+ \propto \ln t$, см. п. 26.2.

Другое удивительное обстоятельство заключается в том, что в симметричном случае ($\beta_+ = \beta_-$, $h_+ = h_-$ при $\mu = 1 - 0$) степени $\beta_\pm(1) \approx 0,4$ и существенно отличаются от значения $\beta = 2/3$. Хотя, казалось бы, в 2D геометрии, когда колмогоровского каскада нет и, следовательно, при нулевых микромасштабах вязкая диссипация отсутствует, должен выполняться закон сохранения кинетической энергии. Плотность ки-

[23] Пузыри, которые перестают двигаться вглубь жидкости, как бы попадают в "струи" между пузырями, которые продолжают движение вглубь. Пусть ось y направлена в сторону жидкости. Напомним, что согласно п. 26.2 вдавливание пузырей в жидкость приводит к подъему давления $p(x, y = +\infty, t) = p(y = +\infty, t)$ над давлением на вакуумной КГ $p_{\text{СВ}}$ ($\mu = 0$). Выдавливание вещества в виде струй вызвано положительностью разницы $p(y = +\infty, t) - p_{\text{СВ}}$. Говорится "как бы" и слово "струи" между пузырями, которые продолжают движение в сторону $y > 0$, берется в кавычки, поскольку в расчетах (Alon et al., 1995) пузыри с $d\eta_{\text{В}}/dt < 0$ не успевают отстать от пузырей с $d\eta_{\text{В}}/dt > 0$ на существенные расстояния $\sim \lambda$.

[24] В расчетах (Alon et al., 1995) исходный спектральный диапазон составлял $k_{\text{L}} < k < 4k_{\text{L}}$, $\lambda_{\text{L}} = 2\pi/k_{\text{L}} = L/5$, где L — горизонтальный размер расчетной области ("ящика"). Эволюция была прослежена лишь до $\langle k\rangle \approx 1,2k_{\text{L}}$ (см. рис. 45.3*б* в работе (Alon et al., 1995)), а для установления асимптотической зависимости необходимо, чтобы было $\langle k\rangle \ll k_{\text{L}}$.

нетической энергии на единицу площади вдоль плоскости x, y (ось z направлена вглубь более плотной жидкости) равна

$$K = \int_{-h_-}^{h_+} \frac{\rho v^2}{2}\, dz. \tag{45.1}$$

Если положить, что (i) кинетическая энергия пульсаций примерно равномерно[25] распределена по перемешанному слою $-h_- < z < h_+$, (ii) скорость расширения слоя порядка скорости пульсаций $dh_+/dt \sim v$ и что (iii) закон расширения степенной $h_+ \propto t^\beta$, то из (45.1) получим $K = \alpha\rho h_+^3/t^2$. Отсюда $h_+ = \alpha_1 (K/\rho)^{1/3} t^{2/3}$, где $\alpha \sim 1$ и $\alpha_1 \sim 1$ — безразмерные постоянные[26]. Чтобы уменьшить степень $\beta = 2/3$, нужны энергетические потери[27].

45.2. Лакунарные возмущения в случае НРМ

В § 38, 40 и п. 44.6 выявлена принципиальная разница между локализованными по k и делокализованными по k (широкодиапазонными) начальными спектрами при РТН/НКГ. Не менее важна эта разница и в случае НРМ. Динамически режимы, стартующие от локализованных спектров, по-видимому, качественно отличаются в (i) РТН/НКГ и (ii) НРМ случаях, см. п. 45.1. Что касается сравнения (i) РТН/НКГ и (ii) НРМ в стимулированных случаях, то здесь, во-первых, класс стимулированных режимов шире (об этом ниже, см. п. 45.3) при НРМ, чем при РТН/НКГ, и, во-вторых, в том случае, когда широкодиапазонные спектры в РТН/НКГ и НРМ одинаковые, качественная динамика оказывается аналогичной (п. 45.2) — а именно, и при НРМ *имеются* доминирующие структуры и инверсный каскад.

Найти истинную асимптотику затухания кинетической энергии в локализованном случае при НРМ трудно. Она устанавливается при $h_\pm \gg \gg 1/k_0$, где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — область локализации. Трудности вызваны

[25] Скорость пульсаций максимальна в центре $z = 0$. При $h_+ \gg \lambda_0$ (где λ_0 — начальный размер локализованного по k возмущения) предполагается установление самоподобия распределений скорости $\langle v(z,t)\rangle = \dot{h}_+ V(z/h_+)$. Возможно, что пространственный масштаб осциллящий поля скорости $\langle\lambda\rangle$ мал по сравнению с h_+ (расширение слоя перемешивания в отсутствие инверсного каскада). В связи с обсуждением самоподобия и степенных решений отметим еще один неясный момент. Кажется, что на очень далеких стадиях $h_+ \gg \lambda_0$ должна достигаться степенная асимптотика. Тогда не может быть того, чтобы степени β_+ и β_- временных зависимостей были бы разными. Если это так, то снова при любых μ (за исключением быть может $\mu = 0$) содержательным становится коэффициент асимметрии h_+/h_-.

[26] Степень $\beta = 2/3$ такая же, как в задаче о сильном взрыве (Седов, 1972). Точное решение интересной задачи об асимметричном взрыве, когда к плоскости энерговыделения примыкают два полупространства с *разными*(!) плотностями $\mu \neq 1$, получено в работе (Нигматулин, 1965).

[27] В 3D геометрии имеется колмогоровский каскад и вызванные им энергопотери "порядка единицы". Поэтому степень β_{3D} должна быть меньше, чем степень β_{2D}, на конечную величину $\Delta\beta$. Кстати, неясно, будет ли сохраняться кинетическая энергия в задаче о перемешивании в 2D геометрии и нулевых микромасштабах (коэффициенты вязкости и диффузии бесконечно малы) при конечном скачке плотности $1 - \mu \sim 1$ ($\mu > 0, \mu \neq 1$)?

тем, что при НРМ (в отличие от РТН/НКГ) нет поддерживающего движение источника и из-за этого скорость движения быстро убывает. Поэтому достижение истинной асимптотики требует чрезвычайно продолжительных расчетов или экспериментов и создания технологии улавливания вялых движений с очень малой скоростью. Степенные асимптотики, обсуждавшиеся в п. 45.1, по-видимому, необходимо отнести к промежуточным степенным аппроксимациям (а не асимптотикам), справедливым при $h_\pm \sim 1/k_0$.

Широкодиапазонное начальное возмущение. Оставим обсуждение локализованного случая. Обратимся к анализу широкодиапазонных спектров. Представим такие спектры посредством регулярного или случайного лакунарного ряда. Эти ряды тесно связаны с регулярными ($\lambda_{i+1}/\lambda_i = a$) и случайными ($\lambda_{i+1}/\lambda_i = 2\xi a$, ξ — случайная величина, $\langle\xi\rangle = 1/2$) геометрическими прогрессиями. Примеры таких рядов рассматривались в § 42. При РТН/НКГ используются начальные возмущения КГ η и/или скорости $\dot\eta$. При НРМ дело обстоит по-другому. Здесь при $t < 0$ возмущена только КГ $\eta(t = -0)$, сама же жидкость покоится[28]. При $t = 0$ происходит импульсное ускорение жидкости, см. §§ 4, 5. Оно "перерабатывает" возмущения КГ $\eta(t = -0)$ в возмущения скорости $\dot\eta(t = +0)$, см. обсуждение формулы Рихтмайера в п. 4.2[29]. Специфика НРМ состоит в том, что только возмущения $\dot\eta(t = +0)$ существенны, поскольку они приводят к росту амплитуды возмущений η до нелинейных ($\sim 1/k$) и бóльших $1/k$ значений. Возмущения $\eta(t = +0)$ малы и не заметны на фоне нелинейных амплитуд η.

Широкодиапазонное лакунарное возмущение скорости имеет вид

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi,$$
$$\varphi = \Re\sum_J \frac{|v_J|}{k_J}\exp(i\varphi_J)\exp(ik_J x)\exp(-k_J y), \tag{45.2}$$

где φ_J — случайная фаза, $k_J/k_{J+1} = 2\xi a$, ξ — случайная величина, $\langle\xi\rangle = 1/2$. Если дисперсия $\Delta\xi$ величины ξ мала ($\Delta\xi \to 0$), то прогрессия $\{k_J\}$ становится регулярной.

[28] Вообще говоря, интересно было бы исследовать задачу об эволюции жидкой массы, занимающей при $t = 0$ полупространство и ограниченной, например, КГ с вакуумом ($\mu = 0$), при наличии однородного случайного распределения скорости $\mathbf{v}$ по толще жидкости. Дело в том, что связанное с импульсным ускорением приповерхностное поле кинетической энергии K "сбрасывается" (при $\mu = 0$) в виде струй (фрагментов компактной массы), уносящих энергию K и часть массы (§ 5, п. 26.2). Интересный новый подход к описанию этого явления на основе уравнения роста развит в работе (Zakharov, Dyachenko, 1996). Основная толща жидкости, лежащая вне этого приповерхностного слоя, остается компактной (не фрагментированной) в течение экспоненциально большого времени $t_{\rm des} \sim (\lambda_0/v_0)\exp(R/\lambda_0)$, где R — размер жидкой массы, λ_0 и v_0 — характеристики локализованного по k возмущения. По-видимому, в случае однородного распределения скорости $\mathbf{v}$ вся жидкость разбрызгивается быстро $t_{\rm des} \sim R/|\mathbf{v}|$.

[29] Малое возмущение представляется линейным разложением по гармоникам. Каждая гармоника индивидуально преобразуется по формуле Рихтмайера. В результате формируется начальная скорость.

При РТН/НКГ особое значение имеют однородные шумы

$$\eta \propto 1/k \tag{45.3}$$

и/или

$$\dot{\eta} \propto 1/\sqrt{k} \tag{45.4}$$

при РТН (§ 40, 42) и

$$\dot{\eta} \propto \text{const} \tag{45.5}$$

при НКГ (п. 44.6). Рассмотрим НРМ. Выясним, во что преобразуется однородное возмущение КГ $\eta(k, t = -0) \propto 1/k$ или

$$\eta(k, t = -0) = \epsilon/k \tag{45.6}$$

(где $\epsilon \ll 1$ — безразмерная величина) после импульсного воздействия. Для малых возмущений справедлива линейная декомпозиция. Отдельные гармоники трансформируются в соответствии с формулой Рихтмайера (4.2). В формулу (4.2) входит тангенс угла отклонения КГ от невозмущенного положения. Так и должно быть в формуле, линейно связывающей отклик по скорости на возмущение КГ. Этот тангенс одинаков для разных гармоник, если в (45.6) функция $\epsilon(k) \equiv \text{const}$. Гармоники возмущения скорости усиливаются в течение импульса до величины, составляющей определенную долю от скачка скорости КГ. В случае однородного возмущения (45.6) спектр послеимпульсных возмущений скорости будет равен

$$\dot{\eta}(k, t = +0) \propto \text{const}, \tag{45.7}$$

как и при однородно стимулированной НКГ (45.7)[30].

Эволюция спектра (45.7) должна приводить к зависимостям $h_+ \propto t$ и $h_- \propto t$ и при $\mu = 0$, и при $\mu \neq 0$. Проверим это утверждение.

Численное моделирование действия однородного шума при НРМ. Рассмотрим лакунарное возмущение (45.2) с однородным распределением амплитуд v_J (45.7). Приведем результаты расчета. Значения параметров были следующими. Отношение $\mu = 1/10$ (малоплотная жидкость находится в нижней части рисунков), сетка 120×120, шаг по t настраивался по эффективному числу Куранта, которое было равно $0,01$. Метод представлен в § 18. Расчет выполнен А. В. Чехловым. Расчетная область — квадрат с размерами $L \times L = 2 \times 2$. При $t = 0$ КГ плоская. КГ $\eta(t = 0)$ находится немного ближе к верхней стороне и делит высоту квадрата в отношении $11 : 13$. Граничные условия жесткие сверху и снизу, по бокам — условия симметрии.

В начальный момент накладывалось возмущение скорости. Оно давалось формулой (45.2) с регулярным шагом $a = 2$. Отрезок ряда (45.2) был составлен из слагаемых с $J = 0, 1, 2, \ldots, 7$. При $J = 0$ значение $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, $\lambda_0 = 2L$, где L — сторона квадрата. В соответствии с распределением (45.7) скорости были одинаковы во всех ярусах: $|v_J| \equiv 0,6$,

[30] Что также, как и в случае НКГ (см. п. 44.6), вызвано наличием характерной размерной величины — невозмущенного скачка скорости.

$J = 0, 1, \ldots, 7$. При заданном L скорость $|v_J|$ определяет масштаб времени. При симметричных боковых граничных условиях фазы φ_J могут случайно принимать только значения 0 или π, меняющие знак амплитуды скорости. В данном расчете с регулярным лакунарным рядом фазы были равны $\varphi_J \equiv 0$.

Расчет представлен на рис. 45.1–45.5. Эволюция КГ дана на рис. 45.1. За КГ, как обычно (см. §§ 17 и 18), принята средняя изохора. Вертикальные черточки на рис. 45.1 соответствуют боковым границам квадратной

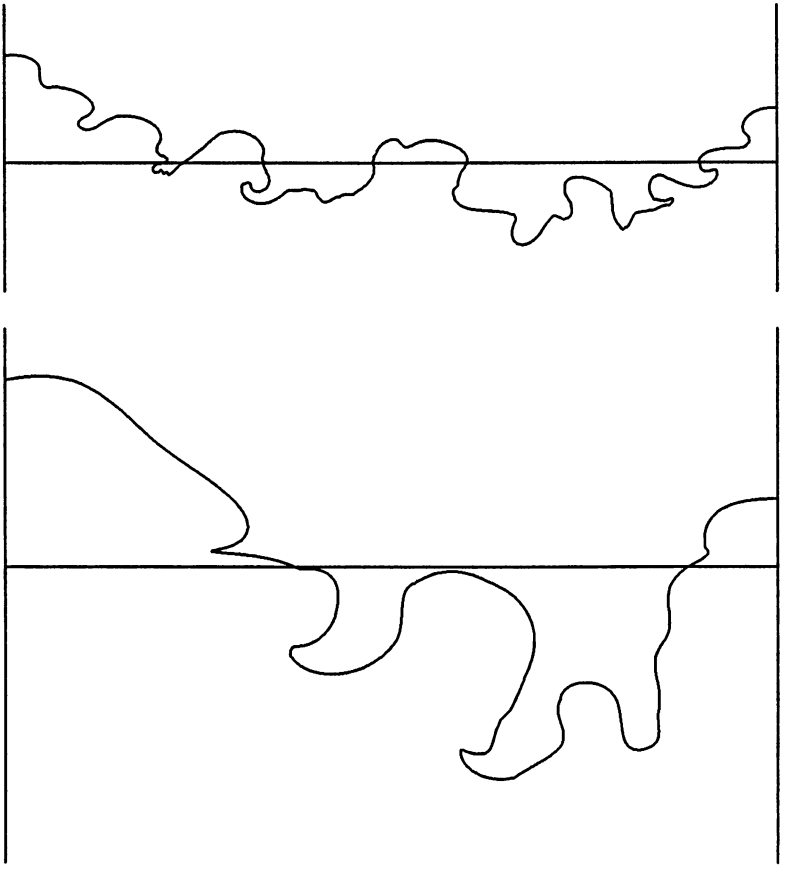


Рис. 45.1. Развитие однородного стимулированного возмущения при НРМ. Верхняя кривая относится к $t = 0,150$, а нижняя — к $t = 0,497$. Горизонтальная прямая соответствует положению КГ при $t = 0$. Плотная жидкость расположена над КГ, $\mu = 0,1$

расчетной области, горизонтальной прямой показано начальное положение КГ. Верхняя и нижняя кривые относятся к моментам времени $t = 0,150$ и $t = 0,497$. Масштабы по осям x и y одинаковы. В точке $x = 0$

(ей соответствует левая граница) гармоники вертикальной компоненты скорости находятся в фазе, а в точке $x = L = \lambda_0/2$ (правая граница) в противофазу к остальным попадает гармоника с $J = 0$. Проследим за КГ $t = 0,150$ от левой боковой границы. Первый зубец (остаток струи) на КГ, видимо, соответствует гармонике с $J = 5$ ($\lambda_J = \lambda_0/2^J, \lambda_5 = \lambda_0/32$). Следы мелкомасштабных гармоник с $J = 6$ и старше к моменту $t = 0,150$ заглаживаются. Аналогичный зубец на таком же расстоянии виден и у правой боковой границы.

На рис. 45.2 приведены усредненные по x распределения $\langle\rho\rangle$ по y в разные моменты времени (пунктирная, сплошная и штриховая кривые относятся к $v_J t/L = 0,045$, $0,111$ и $0,272$ соответственно). Отсчет $y = 0$ связан с начальным положением КГ (горизонтальные прямые на рис. 45.1). В слое перемешивания $0,1 < \langle\rho\rangle < 1$. Распределение $\langle\rho\rangle(y,t)$ довольно резко выходит на асимптотические значения $\rho_u = 1$ и $\rho_d = 0,1$, соответствующие чистым жидкостям. Точки выхода на асимптоту опре-

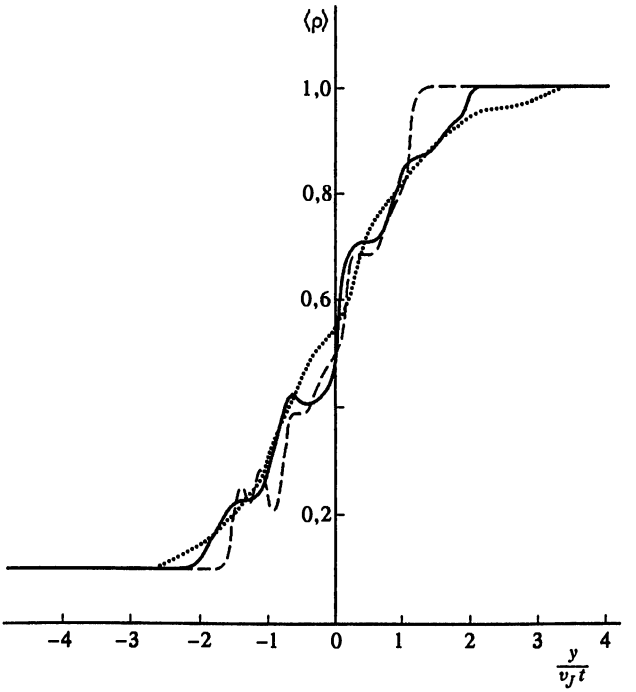


Рис. 45.2. Зависимости $\langle\rho\rangle$ от y, $-13/12 < y < 11/12, L = 11/12 + 13/12 = 2$. Плотности чистых жидкостей равны $\rho = 1$ и $\rho = 0,1$. Пунктирная кривая соответствует $\tau = v_J t/L = 0,045$, сплошная — $\tau = 0,111$ и сплошная — $\tau = 0,272$

деляются позициями наибыстрейших пузыря и струи. Резкость выхода обусловлена тем, что число пузырей N_B и струй N_J в расчетном "ящике" ограничено (сглаживание вблизи вершин пузыря и струи связано с

небольшой численной диффузией). При N_B, $N_J \to \infty$ выход должен быть плавным.

Для проверки утверждения о том, что в случае однородного спектра (45.7) показатель автомодельности $\beta = 1$ ($h_+ \propto t^\beta$), на рис. 45.2 по горизонтальной оси отложена переменная $\xi = y/v_J t$. Видим, что в средней части слоя перемешивания (вне зон примыкания зависимости $\langle\rho\rangle(y,t)$ к предельным значениям ρ, равным 1 и 0, 1) движение является примерно автомодельным.

На рис. 45.3 приведены зависимости $h_\pm(t)$ в автомодельных переменных $h_\pm/v_J t = (h_\pm/L)/\tau$ и $\tau = v_J t/L$. Кривая $h_-(t)$ отмечена буквой d. Чтобы выделить область, в которой появляется влияние верх-

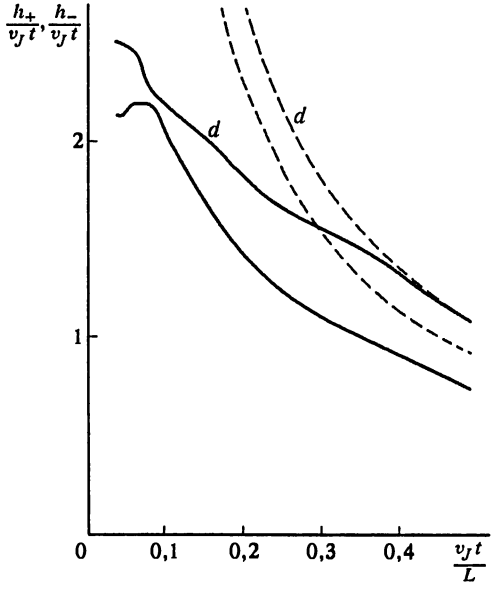


Рис. 45.3. Сплошные кривые — зависимости $h_+/v_J t$ и $h_-/v_J t$ (кривая d) от $\tau = v_J t/L$

ней или нижней границ "ящика", на этом рисунке построены гиперболы $y_d/v_J t$ (верхняя штриховая кривая, помечена буквой d) и $y_u/v_J t$ (нижняя штриховая кривая), где $y_u = 11L/24$ и $y_d = 13L/24$– дают расстояния от начальной КГ до верхней и нижней границ. Величины h_+ и h_- определялись здесь по правилу $\langle\rho\rangle[y = h_+(t), t] = 0,95\rho_u$, $\langle\rho\rangle[y = h_-(t), t] = 1,05\rho_d$.

На зависимостях $h_\pm(t)$ имеется начальный участок ($h_\pm \ll L$), на котором влияние границ сверху и снизу не существенно. На нем приближенно выполняется $\beta \approx 1$.

Далее толщина слоя перемешивания становится сравнима с высотой "ящика". На этой стадии верхняя и нижняя границы начинают тормозить[31] перемешивание — его скорость $\dot{h}_\pm$ уменьшается. Скорость расширения может превышать v_J из-за сложения скоростей, относящихся

[31] На них поставлены жесткие (непроницаемые) граусловия.

к разным ярусам. При $\tau = v_J t/L \approx 0,5$ струи достигают нижней границы — сплошная и штриховая кривые d сливаются.

При стимуляции РМ перемешивания с помощью спектра (45.7) автомодельные показатели зависимостей $h_\pm \propto^{\beta\pm}$ одинаковы ($\beta_+ = \beta_-$). В расчете, представленном выше, коэффициент асимметрии мало отличался от 1, хотя плотности отличались существенно ($\mu = 1/10$). Из-за приблизительной симметричности ($h_- \approx h_+$) величины $\langle\rho\rangle(y = 0, t)$ оказываются около значения средней плотности $(1/2)(\rho_u + \rho_d)$, см. рис. 45.2. При возмущении (45.7) сопоставимую абсолютную амплитуду η имеют и длинноволновые и средневолновые моды. Это приводит к определенной "недозрелости" развития возмущений и симметризации перемешивания.

Средневолновыми являются наиболее длинноволновые из всех развитых или насыщенных мод. Насыщенной или "зрелой" является мода с волновым числом k, у которой $\eta \sim 1/k$. Пусть $\langle k\rangle$ характеризует теку-

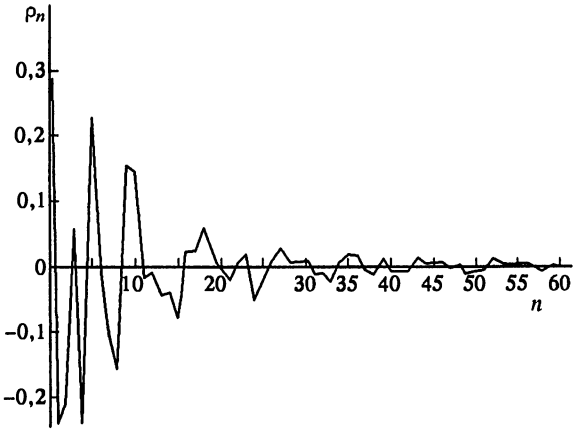


Рис. 45.4. Амплитуды Фурье $\rho_n(t)$ функции $\rho(x, y = 0, t)$ в момент $\tau = v_J t/L = 0,045$. Индекс n пробегает номера гармоник

щий средневолновый масштаб. Рассмотрим относительную амплитуду $\epsilon(k) = \eta k$. Имеем $\epsilon(k) \sim v_J t k$ при $k < \langle k\rangle$ и $\epsilon(k) \sim 1$ при $k > \langle k\rangle$.

При спектре (45.7) средневолновый масштаб изменяется по закону

$$\langle k\rangle \propto \frac{1}{t}$$

Укрупнение среднего горизонтального масштаба $\langle k\rangle$ хорошо видно на рис. 45.1.

На рис. 45.4 и 45.5 показаны фурье-образы от $\rho(x, y = 0, t)$. Течение находится на отрезке $0 < x < L$. Оно симметрично относительно точек $x = 0$ и $x = L$ в силу принятых граничных условий на боковых стенках. При этом функции $\rho(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $p(x, y, t)$ — четные, а $u(x, y, t)$ —

нечетные по x. Их период равен $2L$. Разложение в ряд Фурье

$$\rho(x, y = 0, t) = \rho_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(t) \cos \frac{\pi n x}{L},$$

где

$$\rho_0(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \rho(x, y = 0, t) dx, \quad \rho_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \rho(x, y = 0, t) \cos \frac{\pi n x}{L} dx.$$

Члены с синусами выпадают из-за четности функции.

При возмущении (45.7) длинноволновые гармоники в спектре функции $\rho(x, y = 0, t)$ появляются сразу. Это свойство фурье-разложения именно ρ в срезе $y = 0$. Со временем происходит затухание коротко-

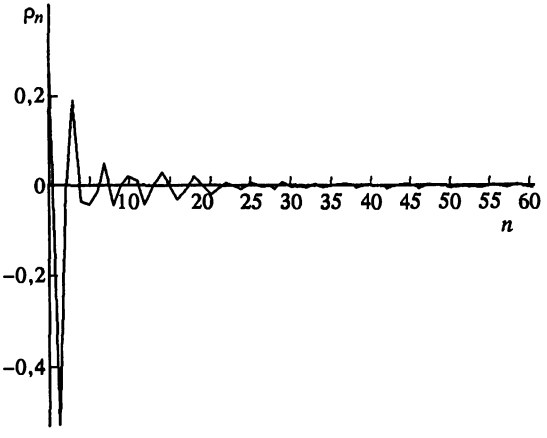


Рис. 45.5. Амплитуды Фурье $\rho_n(t)$ функции $\rho(x, y = 0, t)$ в момент $\tau = v_J t/L = 0,495$

масштабного хвоста. Это хорошо видно на рис. 45.4 и 45.5 (сравните, например, амплитуды при номерах гармоник $n = 5$ или $n = 10$) и на графиках КГ на рис. 45.1.

45.3. Теория стимулированной турбулентности при НРМ

Важную роль при РМ перемешивании играет стимуляция. Это так, поскольку при НРМ источника нет и развитие возмущения вызвано движением по инерции. В этом смысле и эволюция от локализованного по k возмущения тоже является стимулированной. Просто это специальный случай стимуляции — стимуляция, локализованная по k. При РТН/НКГ локализованное по k возмущение только инициирует движение. Далее движение "ведет" источник.

О степенных начальных спектрах. При РТН/НКГ (i) автомодельным и (ii) нетривиальным (то есть отличным от спонтанного случая) является только один спектр из семейства степенных спектров. Это спектры $\eta(k)$ (45.3) и/или $\dot\eta(k)$ (45.4) при РТН и спектры $\eta(k)$ (45.3) и/или $\dot\eta(k)$ (45.5), (45.7) при НКГ. Другие степени $\eta(k) \propto k^\delta/k$, $\dot\eta(k) \propto k^\delta/\sqrt{k}$ при РТН и $\eta(k) \propto k^\delta/k$, $\dot\eta(k) \propto k^\delta$ при НКГ, см. § 40, (40.3), из-за конкуренции спонтанный/стимулированный (§ 41) порождают спонтанный каскад и являются тривиальными. Действительно, спектр, растущий в коротковолновую сторону ($\delta > 0$), инициирует спонтанный каскад при $k < k_{\rm SW}$, где $k_{\rm SW}$ — масштаб, на котором начальное возмущение становится нелинейным (стабилизирующие микромасштабы стянуты в нуль). А при спектре с $\delta > 0$, растущем в длинноволновую сторону, этот каскад стартует от микромасштаба и продолжается до яруса $k_{\rm LW}$, в котором начальное возмущение является нелинейным.

При НРМ положение другое. Здесь возможны разные значения степени δ.

До прохода УВ (то есть до импульсного ускорения) при $t < 0$ имеются возмущения КГ

$$\eta(k, t = -0) \propto k^\delta/k, \quad \epsilon(k, t = -0) = \eta k \propto k^\delta. \tag{45.8}$$

Они обрезаются со стороны коротких масштабов $k < k_{\rm SW}$ при $\delta > 0$ и со стороны длинных $k_{\rm LW} < k$ при $\delta < 0$. Как сказано выше, $\dot\eta(k, t = +0)/\Delta v = {\rm A}k\eta(k, t = -0)$ (п. 4.2), где Δv — приращение скорости в результате импульсного ускорения. Поэтому исходные для НРМ возмущения скорости, связанные с (45.8), равны

$$\dot\eta(k, t = +0) \propto \epsilon(k, t = -0) \propto k^\delta \tag{45.9}$$

или $\dot\eta = v_{\rm SW}(k/k_{\rm SW})^\delta$, $\dot\eta = v_{\rm LW}(k_{\rm LW}/k)^{-\delta}$ в указанных выше случаях обрезки по k сверху или снизу соответственно.

Рассмотренный в п. 45.2 случай $\delta = 0$ является частным случаем. В других интересных случаях $\delta \neq 0$.

Одноярусные и многоярусные случайно-периодические функции. Исключительно важным является вопрос о способе или процедуре реализации степенных спектров типа (45.9). Они не могут быть непрерывными функциями от k. В этом отношении запись (45.9) условна. Без определения процедуры она *не имеет смысла*.

Функция, реализующая спектр (45.9), сильно изрезана. Она состоит из "игл". Ее нельзя "изобразить карандашом", поскольку высота "игл" зависит от их плотности (см. § 37).

Это могут быть функция $f_1(k)$ со случайной фазой "игл", функции $f_2(k)$ со случайными и фазами, и амплитудами и функции $f_3(k)$, у которых случайны фазы и амплитуды и, кроме того, средняя по "иглам" амплитуда "игл" флуктуирует от яруса к ярусу около среднего значения при пробегании k по ярусам. См. по этому поводу § 37 и обобщение результатов § 37 на многоярусный случай в § 42. Функции f_1 и f_2 эквивалентны. Класс функций f_2 шире, чем класс f_1. На длинных инерционных интервалах, покрывающих много ярусов, эквивалентны в среднем

и функции f_3 и f_2. Класс функций f_3 шире, чем класс f_2. Поэтому в экспериментах при наличии широкодиапазонных начальных возмущений, не имеющих выделенных масштабов, в основном должны встречаться спектры f_3 и f_2.

Спектры f_1, f_2 и f_3 тесно связаны со случайно-периодическими функциями и лакунарными рядами.

Пусть $F(\lambda, x)$ — случайно-периодическая функция с шагом λ. Представим положение функции $F(\lambda, x)$ в иерархии ярусов или лакун. Видим, что она является, так сказать, одноярусной случайно-периодической функцией.

Рассмотрим редкие и густые лакунарные ряды или спектры. Составим многоярусную случайно-периодическую функцию. Она представляет собой сумму

$$\sum_J F(\lambda_J, x), \quad \lambda_{J+1} = a\lambda_J, \quad a > 1, \quad a \sim 1,$$

по лакунам или ярусам. Лакуны или ярусы — это шаги геометрической прогрессии по пространству. Видим, что редкий лакунарный ряд это многоярусная периодическая функция, вернее сумма из периодических функций из разных ярусов, см., например, формулы (40.8)–(40.11), а густой — многоярусная случайно-периодическая функция.

Подчеркнем, что вопрос о спектральной структуре или зависимости от k этих функций отделен от вопроса об их амплитуде. В изучаемых приложениях эта амплитуда ограничена сверху нелинейным или насыщенным значением "порядка единицы"[32]. Она может быть сколь угодно мала по сравнению с этим насыщенным значением. Основной интерес представляют именно малоамплитудные спектры f_3 и f_2.

Динамика степенных возмущений. Изучим связь между степенью δ в (45.9) и показателем автомодельности β в зависимости $h \propto t^\beta$. Поле начальных скоростей может быть произвольным. Выберем его в виде (45.9). Пусть сначала $\delta = 0$.

Из-за лакунарности или разнесенности ярусов по k на масштабы "порядка единицы" (это означает, что масштабы отличаются в разы) соседние ярусы умеренно взаимодействуют друг с другом. Поэтому продолжительность развития возмущения из J-й лакуны или яруса при НРМ составляет

$$\Delta t_J = \frac{b_1}{k_J v},$$

где $b_1 \sim 1$ — безразмерная постоянная, v — постоянная из зависимости $\dot\eta = \text{const} = v$ (45.9) ($\delta = 0$), $k_{J+1}/k_J = 1/a$, $a > 1$, $a \sim 1$.

Развитие по времени связано с ростом J. Полное время равно

$$t = \sum_{J=0}^{N} \Delta t_J \approx \frac{b_1}{k_{\text{SW}} v} \frac{a^{N+1}}{a-1}, \tag{45.10}$$

[32] При развитии по t на нем происходит насыщение одномодового линейного роста, см. § 26. Амплитуды насыщения равны: $\eta_{\text{NL}} \sim 1/k$, $\dot\eta_{\text{NL}} \sim \sqrt{g/k}$ при РТН и $\eta_{\text{NL}} \sim 1/k$, $\dot\eta_{\text{NL}} \sim \Delta v$ при НКГ и НРМ.

Отсюда текущий наибольший насыщенный масштаб равен

$$k_N = \frac{k_{\mathrm{SW}}}{a^N} \approx \frac{ab_1}{a-1}\frac{1}{vt}. \tag{45.11}$$

Из (45.11) следует, что имеется каскад укрупнений масштаба. Оценка толщины слоя перемешивания h равна

$$h = \sum_{J=0}^{N} \frac{b_2}{k_J} \approx \frac{b_2}{k_{\mathrm{SW}}}\frac{a^{N+1}}{a-1}, \tag{45.12}$$

где $b_2 \sim 1$ — безразмерная постоянная. Исключая из (45.10) и (45.12) a^N, получим

$$h = (b_2/b_1)vt. \tag{45.13}$$

Как видим, как и предполагалось выше, в случае $\delta = 0$ толщина h (45.12), (45.13) и масштаб $1/k_N$ (45.11) линейно зависят от t.

Рассмотрим теперь случай $\delta \neq 0$. Запишем (45.9) в виде $\dot{\eta}(k) = Ak^{\delta}$. Тогда шаг по времени равен

$$\Delta t_J = \frac{b_1}{k_J v_J} = \frac{b_1}{Ak_J^{\delta+1}}.$$

Время прохождения N ярусов равно

$$t = \sum_{J=0}^{N} \Delta t_J \approx \frac{b_1}{Ak_{\mathrm{SW}}^{\delta+1}}\frac{a^{(\delta+1)(N+1)}}{a^{\delta+1}-1}. \tag{45.14}$$

Используем выражение (45.14) для определения a^N через t. Подставим a^N в формулы для текущего насыщенного масштаба k_N и толщины $h = \sum b_2/k_J$. В результате получим

$$k_N = \frac{k_{\mathrm{SW}}}{a^N} \approx a\left[\frac{b_1}{A(a^{\delta+1}-1)}\right]^{1/(\delta+1)} t^{-1/(\delta+1)}. \tag{45.15}$$

$$h = \frac{[b_2^{\delta+1}A(a^{\delta+1}-1)]^{1/(\delta+1)}}{b_1^{1/(\delta+1)}(a-1)}\, t^{1/(\delta+1)}. \tag{45.16}$$

Из формул (45.15), (45.16) следует, что при движении соблюдается подобие ($h/k_N = \mathrm{const}$). Соотношение между автомодельным показателем β в $h \propto t^{\beta}$ и степенью δ равно

$$\beta = \frac{1}{\delta+1}, \quad \delta = \frac{1-\beta}{\beta}. \tag{45.17}$$

Степени δ могут быть положительными и отрицательными. При $\delta < 0$ начальная относительная амплитуда возмущений скорости $\dot{\eta}/\Delta v$ монотонно растет в длинноволновую сторону. В конечный момент времени

относительная амплитуда возмущений КГ $\epsilon(k,t) = k\eta(k,t)$ монотонно возрастает ($\delta > -1$) до значения $\epsilon_{\rm NL}$ ($\epsilon_{\rm NL} \simeq 1$) вместе с ростом k в промежутке $k_{\rm LW} < k < k_N, k_N = \langle k\rangle, \langle k\rangle = \langle k\rangle(t)$, обрезка $k_{\rm LW}$ определена в комментарии к формулам (45.8) и (45.9). Абсолютная амплитуда $|\eta|$ возмущений КГ растет $\propto tk^{-|\delta|}$ в длинноволновую сторону. С этим связаны определенные проблемы усреднения по x. Они обсуждались в конце п. 41.4 ("инфракрасное" обрезание). Усреднение по бесконечному промежутку $-\infty < x < \infty$ при этом теряет смысл.

Должно быть $\delta > -1$. В этом случае "волна", связанная с масштабом $k_N = \langle k\rangle$, "распространяется" по оси k из области малых длин волн. При $\delta < -1$ каскада нет и эта область не существенна, поскольку с самого начала движение определяется наибольшим масштабом $k_{\rm LW}$.

При $\delta > 0$ абсолютные начальные возмущения скорости убывают в сторону длинных волн. Пусть $\beta = \beta_{\rm LOC}$ относится к показателю $h \propto t^\beta$ в случае локализованного по k возмущения, рассмотренного в п. 45.1. Тогда из формул (45.17) следует, что степень δ должна быть ограничена сверху условием $\delta < \beta_{\rm LOC}^{-1} - 1$. Таким образом, интервал допустимых значений δ равен

$$-1 < \delta < \beta_{\rm LOC}^{-1} - 1. \tag{45.18}$$

Комбинированный случай: HPM плюс PTH. Пусть ускорение равно $g(t) = \Delta v\delta(t) + g\theta(t)$. В локализованном и делокализованном по k случаях на малых временах доминирует HPM. В локализованном случае время перехода от PM к PT турбулентности равно

$$t_T \sim (k\delta\eta\,\Delta v + \delta v)^{\beta/(2-\beta)}/g^{1/(2-\beta)}k^{(1-\beta)/(2-\beta)},$$

где $\delta\eta$ — амплитуда возмущения КГ, а δv — доимпульсное возмущение скорости.

Рассмотрим стимулированный (делокализованный) случай. Пусть

$$h(k, t = -0) = \epsilon/k, \quad \dot h(k, t = -0) \equiv 0, \quad \epsilon \ll 1.$$

Тогда

$$h(k, t = +0) \simeq \epsilon/k, \quad \dot h(k, t = +0) \simeq \epsilon \mathrm{A} \Delta v.$$

При $t < t_T$ перемешивание происходит по механизму PM ($h \sim \epsilon \mathrm{A}\,\Delta v t$), а при $t > t_T$ — по PT механизму ($h = \alpha \mathrm{A} g t^2$). Оценка момента перехода имеет вид $t_T \sim (\epsilon/\alpha)\,(\Delta v/g)$.

Трехмерность и диссипация. В делокализованном по k стимулированном случае энергопотери из-за колмогоровского каскада не существенны. Поэтому нет качественной разницы между показателями перемешивания $\beta_{\rm 2D}$ и $\beta_{\rm 3D}$ в 2D и 3D геометриях, сравните с заключительным разделом в п. 45.1. В этом состоит отличие от случая с $\beta^{-1} - 1 < \delta$. В делокализованном по k спектре δ (45.9) принадлежит интервалу (45.18).

Список литературы

1. *Абрашкин А. А., Якубович Е. И.* О плоских вихревых течениях идеальной жидкости // ДАН. 1984. Т. 276. Вып. 1. С. 76–78.
2. *Алешин А. Н., Демченко В. В., Зайцев С. Г., Лазарева Е. В.* Взаимодействие ударного фронта с волнообразным контактным разрывом // МЖГ. 1992. Вып. 5. С. 168–174.
3. *Анисимов С. И., Лысиков Ю. И.* // ПММ. 1970. Т. 34. С. 926.
4. *Анисимов С. И., Прохоров А. М., Фортов В. Е.* Применение мощных лазеров для исследования вещества при сверхвысоких давлениях // УФН. 1984. Т. 142. С. 395–434.
5. *Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Леванов Е. И., Розанов В. Б., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. Вып. 2. С. 150.
6. *Бабенко К. И., Петрович В. Ю.* О неустойчивости Рэлея–Тейлора // Препринт. Институт прикладной математики им. Келдыша АН СССР. Москва. 1984. Т. 142. Вып. 68. 48 С.
7. *Бабенко К. И., Петрович В. Ю.* О неустойчивости Рэлея–Тейлора // ДАН. 1984. Т. 245. Вып. 3. С. 551–554.
8. *Басов Н. Г., Исаков А. И.* (ред.) Лазерные термоядерные мишени // Труды ФИАН. 1992. Т. 220.
9. *Башилов Ю. А., Покровский С. В.* Тейлоровская неустойчивость тонкой цилиндрической оболочки // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23. Вып. 8. С. 462–466.
10. *Белоцерковский О. М., Демченко В. В., Опарин А. М.* Последовательный переход к турбулентности в НРМ // ДАН. 1984. Т. 334. Вып. 5. С. 581–583.
11. *Борисов А. А., Гельфанд Б. Е., Натанзон М. С., Косов О. М.* О режимах дробления капель и критериях их существования // Инж.-физич. журн. 1981. Т. 40. Вып. 1.
12. *Васильков А. П., Мурзинов И. Н.* Подобие при истечении сильно недорасширенных струй в спутный сверхзвуковой поток // МЖГ. 1974. Вып. 5. С. 131–135.
13. *Великович А. Л., Либерман М. А., Шмальц Р. Ф.* О двумерных автомодельных течениях плазмы с азимутальным магнитным полем // Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41. Вып. 3. С. 97–100.
14. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Движение пузырей в жидкости // ВИНИТИ. МЖГ. 1976. Т. 10.
15. *Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М.* Разновидности дробления капель в ударных волнах и их характеристики // Инж.-физич. журн. 1974. Т. 27. Вып. 1.
16. *Гибсон Э.* Спокойное Солнце // Москва. Мир. Перевод: Gibson E. G. 1973. The quet Sun // NASA. Washington.
17. *Гонор А. Л., Ривкинд В. Я.* Динамика капли // ВИНИТИ. МЖГ. 1982. Т. 17.
18. *Гостинцев Ю. А.* и др. // МЖГ. 1969. Вып. 5. С. 158.
19. *Гостинцев Ю. А., Солодовник А. Ф., Лазарев В. В.* К теории аэродинамики самовоспламеняющихся и выгорающих турбулентных термиков, вихревых колец и струй в свободной атмосфере // Хим. физ. 1982. Вып. 9. С. 1279–1290.
20. *Гуськов С. Ю., Змитриенко Н. В., Розанов В. Б.* Термоядерная мишень "лазерный парник" с распределенным поглощением лазерной энергии // ЖЭТФ. 1995. Вып. 2(8). Т. 108. С. 548–566.
21. *Дибай Э.* // Астрономический Журн. 1958. Т. 35. С. 469.
22. *Зак Д. И.* // МЖГ. 1969. Вып. 5. С. 72.
23. *Зельдович Я. Б.* // Астрономический Журн. 1964. Т. 41. Вып. 5. С. 469.
24. *Зельдович Я. Б.* // Астрофизика. 1970. Т. 6. Вып. 2.
25. *Зимин Е. П., Эйсмонт О. А.* О неустойчивости Рэлея–Тейлора в магнитной гидродинамике в гальваническом приближении // ПМТФ. 1970. Вып. 5. С. 31–38.
26. *Иванов М. Я., Киреев В. И.* К исследованию сильно недорасширенных затопленных струй // МЖГ. 1976. Вып. 6. С. 151–154.
27. *Козлов В. Ф., Макаров В. Г.* Моделирование неустойчивости осесимметричных вихревых шнуров с помощью метода контурной динамики // МЖГ 1985 Вып. 1 С. 33–39.
28. *Корнилов В. Г., Черепащук А. М.* // ПАЖ. 1979. Т. 5. С. 396
29. *Коробейников В. П., Рязанов Э. В.* // ПММ. 1960. Т. 24. Вып 1.
30. *Куликовский А. Г.* // ДАН. 1957. Т. 114. Вып. 5.

31. *Куликовский А. Г.* // ДАН. 1958. Т. 120. Вып. 5.
32. *Кутателадзе С. С.* // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1951. Вып. 4. С. 529–536.
33. *Кутвитский В. А., Соловьев Л. С.* О равновесии и устойчивости эллипсоидальных плазмоидов // Письма ЖЭТФ. 1994. Т. 59. Вып. 8. С. 501–506.
34. *Ладиков Ю. П.* Некоторые точные решения уравнений неустановившихся движений в магнитной гидродинамике // ДАН. 1961. Т. 137. Вып. 2. С. 303–306.
35. *Левин В. А.* // ПМТФ. 1967. Вып. 2.
36. *Лидов М. Л.* // ДАН. 1954. Т. 97. Вып. 3.
37. *Лысиков Ю. И.* // ПМТФ. 1981. Вып. 1.
38. *Мальбахов В. М.* К теории термиков в неподвижной атмосфере // Изв. АН СССР. ФАО. 1972. Т. 8. Вып. 97.
39. *Манаков С. В., Щур Л. Н.* // Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 45.
40. *Мержиевский Л. А., Филимонов В. А.* // ПМТФ. 1977. Вып. 2. С. 43.
41. *Невзглядов В. Г.* // ДАН. 1961. Т. 141. Вып. 6.
42. *Немчинов И. В.* // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1.
43. *Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.* Турбулентное перемешивание границы раздела в численном газодинамическом расчете // ЖВМ и МФ. 1976b. Т. 16. Вып. 2.
44. *Николаев Ю. М.* // Геом. и Аэрономия. 1965. Т. V. Вып. 4. С. 658.
45. *Николаев Ю. М.* // Вестник Моск. Гос. Университета. Серия Физ., Астрономия. 1967. Вып. 5. С. 80.
46. *Овсянников Л. В.* // ДАН. 1957. Т. 111. С. 1.
47. *Полянин А. Д.* Развитие тейлоровской неустойчивости в сжимаемых проводящих средах, находящихся в магнитном поле // МЖГ. 1975. Вып. 5. С. 15–25.
48. *Рязанов Е. В.* // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 1.
49. *Феоктистов Л. П.* // Математ. моделирование. 1995. Т. 27. Вып. 3. С. 41.
50. *Чефранов С. Г.* Динамика точечных вихревых квадруполей и эллиптических вихрей на плоскости // ЖЭТФ. 1991. Т. 99. Вып. 4. С. 1149–1165.
51. *Щелкачев М. В.* Тейлоровская неустойчивость границы раздела двух жидкостей, находящихся в электромагнитном поле // МЖГ. 1976. Вып. 5. С. 24.
52. *Яворская И. М.* // ДАН. 1957. Т. 114. Вып. 5.
53. *Aref H.* // PF. 1982. V. 25. P. 2183.
54. *Arnett W. D.* // Ap. J. 1988. V. 331. P. 377.
55. *Arnett W. D., Fryxell B., Müller E.* // Ap. J. 1989. V. 341. P. L63.
56. *Arons J., Lea S. M.* // Ap. J. 1976. V. 207. P. 914.
57. *Balick B.* // Astron. J. 1987. V. 94. P. 671.
58. *Basko M. M.* // Phys. Plasmas. 1994. V. 1. P. 1270.

Список дополнительной литературы

1. *Абаржи С. И., Иногамов Н. А.* Стационарные решения в РТН для пространственно-периодического течения // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. Вып. 1. С. 245–265.
2. *Абрамович Г. Н.* Теория турбулентных струй // Москва. Физматгиз. 1960.
3. *Абрашкин А. А.* Нелинейные азимутальные волны в центрифуге // ПМТФ. 1984. Вып. 3. С. 86–89.
4. *Абрашкин А. А., Якубович Е. И.* ДАН. 1984. Т. 276. Вып. 1.
5. *Алешин А. Н., Демченко В. В., Зайцев С. Г., Лазарева Е. В.* Взаимодействие ударного фронта с волнообразным контактным разрывом // МЖГ. 1992. Вып. 5.
6. *Алешин А. Н., Зайцев С. Г., Лазарева Е. В.* Исследование эволюции турбулентного слоя под действием ударной волны // IV ЗНЧ. 1995. С. 438–444.
7. *Андронов В. А., Бахрах С. М., Мешков Е. Е., Мохов В. Н., Никифоров В. В., Певницкий А. В., Толшмяков А. И.* Турбулентное перемешивание на контактной поверхности, ускоряемой ударными волнами // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. Вып. 2(8). С. 806–811.
8. *Андронов В. А., Бахрах С. М., Мохов В. Н., Никифоров В. В., Певницкий А. В.* Влияние турбулентного перемешивания на сжатие лазерных мишеней // Письма ЖЭТФ. 1979. Т. 29. Вып. 1. С. 62–65.
9. *Андронов В. А., Бахрах С. М., Мешков Е. Е., Никифоров В. В., Певницкий А. В., Толшмяков А. И.* Экспериментальное исследование и численное моделирование турбулентного перемешивания в 1D потоках // ДАН. 1982. Т. 264. С. 76–82.

10. *Анисимов С. И., Лысиков Ю. И.* ПММ. 1970. Т. 34. С. 926.
11. *Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В.* Действие излучения большой мощности на металлы // Москва. Наука. 1970.
12. *Анисимов С. И., Иногамов Н. А.* Развитие неустойчивости и потеря симметрии при изэнтропическом сжатии сферической капли // Письма ЖЭТФ. 1974. Т. 20. Вып. 3. С. 144–176.
13. *Анисимов С. И., Иванов М. Ф., Иногамов Н. А.* Динамика лазерного сжатия и нагревания простых мишеней // Препринт. Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР. Черноголовка. 1977. 47 с.
14. *Анисимов С. И., Зельдович Я. Б.* РТН границы между продуктами детонации и газом при сферическом взрыве // Письма ЖТФ. 1977. Вып. 20. С. 1081–1084.
15. *Анисимов С. И., Прохоров А. М., Фортов В. Е.* УФН. 1984. Т. 142. С. 395.
16. *Анисимов С. И., Опарин А. М.* Моделирование горения и разлета мишеней в инерционном синтезе // Письма ЖЭТФ. 1993. Т. 57. Вып. 10. С. 634–638.
17. *Анучина Н. Н.* О методах расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1970. Т. 1. Вып. 4. С. 3–84.
18. *Анучина Н. Н., Кучеренко Ю. А.* и др. Турбулентное перемешивание на ускоряющейся границе разноплотных жидкостей // МЖГ. 1978. Вып. 6. С. 157–160.
19. *Анучина Н. Н., Бахрах С. М.* и др. Исследования по гидродинамической неустойчивости границы двух сред // В сб. научн. трудов: Исследования гидродинамической неустойчивости с помощью ЭВМ. АН СССР. Москва. 1991. С. 108–162.
20. *Анучина Н. Н., Полионов А. В., Огибина В. Н., Шибаршов Л. И.* Численное исследование влияния слоя переходной плотности на развитие турбулентного перемешивания // ВАНТ. Серия: теоретическая и прикладная физика. 1988. Вып. 1. С. 7–12.
21. *Ардашева Р. И., Балабин С. И., Волошин Н. П., Кучеренко Ю. А., Птицина Н. В., Читайкин В. И.* Экспериментальное исследование развития возмущений в гравитационно-неустойчивой системе с непрерывным распределением плотности // ВАНТ. Серия: теоретическая и прикладная физика. 1988. Вып. 1. С. 20–27.
22. *Асиновский Е. И., Давыдов А. Н., Кондратенко М. М., Кузнецов Ю. А., Лебедев Е. Ф., Максимов А. М., Осташев В. Е., Савров С. Д., Хамраев В. Р., Черных Е. В., Шурупов А. В.* Взрывные МГД-генераторы // Москва. Институт высоких температур (ИВТАН). 1991.
23. *Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Леванов Е. И., Розанов В. Б., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Письма ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 150.
24. *Бабенко К. И., Петрович В. Ю.* О РТН // Препринт. Институт прикладной математики им. Келдыша АН СССР. Москва. 1978. № 68. 48 с.
25. *Бабенко К. И., Петрович В. Ю.* О РТН // ДАН. 1979. Т. 245. Вып. 3. С. 551–554.
26. *Бабенко К. И., Петрович В. Ю.* Численное исследование задачи о РТН // ДАН. 1980. Т. 255. Вып. 2. С. 318–322.
27. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа // Москва. Наука. 1986. 744 с.
28. *Баско М. М., Имшенник В. С., Кошкарев Д. Г., Чуразов М. Д., Шерстнев К. Б.* Управляемый тяжелоионный синтез и дейтериевые мишени // ВАНТ. Сер. Матем. моделир. физич. процессов. Москва. 1989. Вып. 3. С. 84–97.
29. *Басов Н. Г., Мазур М. Ю., Максимчук А. М.* и др. Особенности динамики ударных волн, формируемых в разреженном газе при лазерном нагреве плазмы // Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 46. Вып. 8. С. 320–322.
30. *Басов Н. Г., Исаков А. И.* (*ред.*) Лазерные термоядерные мишени // Труды ФИАН РАН. 1992. Т. 220.
31. *Батлер Т.* Развитие метода LINC // В кн.: Численные методы в механике жидкостей. Москва. 1973. С. 146–155.
32. *Баутин С. П.* Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа // Екатеринбург. Изд-во Уральской гос. горно-геологич. академии (УГГГА). 1996. 168 с.
33. *Бахрах С. М., Гришина Г. А.* и др. Некоторые вопросы экспериментального и численного исследования тейлоровской неустойчивости // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1979. Т. 10. Вып. 1. С. 17–30.
34. *Башилов Ю. А., Покровский С. В.* Письма ЖЭТФ. 1976. Т. 23. С. 462.
35. *Беленький С. З., Фрадкин Е. С.* Теория турбулентного перемешивания // Труды ФИАН. 1965. Т. 29. С. 207–233.
36. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике // Москва. Наука. 1982. 392 с.
37. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Демьянов А. Ю.* Численное моделирование объединения гармоник при РТН // ДАН. 1986. Т. 288. Вып. 5. С. 1071–1074.

38. *Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Коньшин В. Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27. Вып. 4. С. 594–609.
39. *Белоцерковский О. М., Демченко В. В., Опарин А. М.* Последовательный переход к турбулентности в НРМ // ДАН. 1994. Т. 334. Вып. 5.
40. *Биркгоф Г.* Гидродинамика // Москва. ИЛ. 1963.
41. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны // Москва. Мир. 1964. 420 с.
42. *Биркгоф Г.* Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора // В книге: Гидродинамическая неустойчивость. Москва. Мир. 1964. С. 68–94. Перевод: *Birkhoff G.* Helmholtz and Taylor instabilities // In book: Hydrodynamic instability. G. Birkhoff, R. Bellman, C. C. Lin, eds. Proc. of XIIIrd symposia in appl. math. 1962. V. XIII. Amer. Math. Soc.
43. *Борисов А. А., Гельфанд Б. Е., Натанзон М. С., Косов О. М.* О режимах дробления капель и критериях их существования // Инж.-физич. журн. 1981. Т. 40. Вып. 1.
44. *Богоявленский О.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике // Москва. Наука. 1980.
45. *Будько А. Б., Великович А. Л., Либерман М. А., Фелбер Ф. С.* Рост РТ и объемных конвективных неустойчивостей в динамике плазменных лайнеров и пинчей // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. Вып. 6. С. 140–162.
46. *Бурико Ю. А., Кузнецов В. Р.* Влияние турбулентности на процесс окисления углеводородов при диффузионном горении // В сборн.: Процессы турбулентного переноса в реагирующих системах. Ред. Р. И. Солоухин и др. Материалы межд. школы-семинара. Минск. Инст. тепло- и массообмена им. Лыкова АН БССР. 1985. С. 112–116.
47. *Бычков В. В., Гольберг С. М., Либерман М. А.* Рост РТН в неоднородной абляционно ускоряемой плазме // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. Вып. 10. С. 1162–1185.
48. *Василькова А. П., Мурзинов И. Н.* МЖГ. 1974. Вып. 5. С. 131.
49. *Великович А. Л., Либерман М. А., Шмальц Р. Ф.* Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41. Вып. 3. С. 97.
50. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Движение пузырей в жидкости // ВИНИТИ. МЖГ. 1976. Т. 10.
51. *Волкова Р. А., Круглякова Л. В., Михайлова Н. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П.* О моделировании РТН в несжимаемой жидкости в трехмерной постановке // Препринт. Институт прикладной математики им. Келдыша АН СССР. Москва. 1985. № 86. 25 с.
52. *Волосевич П. П., Гамалий Е. Г.* и др. Двумерные эффекты при лазерном сжатии стеклянных оболочек // Письма ЖЭТФ. 1976. Т. 24. Вып. 5. С. 283–286.
53. *Волченков О. И., Жидов И. Г., Мешков Е. Е., Рогачев В. Г.* Развитие локализованных возмущений на неустойчивой границе ускоряемого жидкого слоя // Письма ЖТФ. 1989. Т. 15(1). С. 47–50.
54. *Гайсинский И. М., Калинин А. В., Степанов А. Е.* О влиянии величины магнитного поля на торможение альфа-частиц // ПМТФ. 1979. Вып. 6. С. 40–46.
55. *Гальбурт В. А.* Взрывные гидродинамические течения. Методика расчета // Препринт. Инст. высоких температур АН СССР (ИВТАН). Москва. 1983. № 2–098. 28 с.
56. *Гамалий Г. Г., Розанов В. Б.* и др. Гидродинамическая устойчивость сжатия сферических лазерных мишеней // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. Вып. 2(8). С. 259–471.
57. *Гаранин С. Г.* Концепция создания мощной неодимовой лазерной установки "Искра–6" // Звенигород XXIV. 1997. С. 17.
58. *Гаранин С. Ф.* Автомодельное развитие РТН в районе угловых точек // Ш–и Забабахинские научные чтения. Тезисы докладов. Дальняя дача, Челябинская обл. ВНИИТФ. 1992. С. 108.
59. *Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М.* Разновидности дробления капель в ударных волнах и их характеристики // Инж.-физич. журн. 1974. Т. 27. Вып. 1.
60. *Герценштейн С. Я., Чернявский В. М.* О нелинейном развитии двумерных и трехмерных возмущений при РТН // МЖГ. 1985. Вып. 2. С. 38–46.
61. *Герценштейн С. Я., Чернявский В. М., Штемлер Ю. М.* Об асимптотической стадии НРТ // ДАН. 1989. Т. 307. Вып. 4. С. 819–823.
62. *Гибсон Э.* Спокойное Солнце // Москва. Мир. 1977. Перевод: *Gibson E. G.* The quiet Sun // NASA. Washington. 1973.
63. *Гонор А. Л., Ривкинд В. Я.* Динамика капли // ВИНИТИ. МЖГ. 1982. Т. 17.
64. *Гостинцев Ю. А.* и др. МЖГ. 1969. Вып. 5. С. 158.

65. *Гостинцев Ю. А., Солодовник А. Ф., Лазарев В. В.* К теории аэродинамики самовоспламеняющихся и выгорающих турбулентных термиков, вихревых колец и струй в свободной атмосфере // Хим. физ. 1982. Вып. 9.
66. *Гребенев С. А., Сюняев Р. А.* Ожидаемое рентгеновское излучение от сверхновой 1987 А. Расчеты методом Монте-Карло // ПАЖ. 1987. Т. 13. Вып. 11. С. 945–963.
67. *Гуськов С. Ю., Змитренко Н. В., Розанов В. Б.* ЖЭТФ. 1995. Т. 108. С. 548.
68. *Гутман Л. Н.* Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов // Ленинград. Гидромет. 1969.
69. *Давыдов А. Н., Лебедев Е. Ф., Перков С. А.* Экспериментальное исследование неустойчивости плазменного потока за цилиндрическими УВ // Препринт. Инст. высоких температур АН СССР (ИВТАН). Москва. 1979. № 1–46. 26 с.
70. *Давыдов Ю. М.* Численное исследование тейлоровской неустойчивости в нелинейном приближении // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1978. Т. 9. Вып. 3. С. 67–69.
71. *Давыдов Ю. М.* Дифференциальные приближения и представления разностных схем // Москва. МФТИ. 1981. 131 с.
72. *Давыдов Ю. М., Пантелеев М. С.* Развитие трехмерных возмущений при РТН // ПМТФ. 1981. Вып. 1(125). С. 117–122.
73. *Давыдов Ю. М., Демьянов А. Ю., Цветков Г. А.* Численное моделирование стабилизации и объединения гармоник при РТН методом крупных частиц // Сообщения по прикладной математике. Сб. науч. тр. ВЦ АН СССР. Москва. 1987. 51 с.
74. *Демьянов А. Ю., Иногамов Н. А.* Неустойчивость, которая ведет к удвоению периода пространственно-периодической цепочки РТ пузырей // См. ссылку Иногамов (1990а). 1990. С. 107–114.
75. *Денисов А. А., Попов Ю. П., Чечеткин В. М.* Нуклеосинтез при несферическом взрыве сверхновой и наблюдаемые эффекты // Препринт. Институт прикладной математики им. Келдыша АН СССР. Москва. 1988. № 149.
76. *Дибай Э.* Астрономический Журн. 1958. Т. 35. С. 469.
77. *Дикий Л. А.* Теория колебаний земной атмосферы // Ленинград. Гидрометиздат. 1973.
78. *Добкин С. В., Сон Э. Е.* Стабилизация рэлеевской неустойчивости покоящейся полой жидкометаллической струи магнитным полем и потоком тепла // Тр. II Риж. совещ. по магнитной гидродинамике. Сб. науч. тр. Саласпилс. 1984. Т. 1. С. 143–146.
79. *Елисеев В. И.* Асимптотическое решение задачи об истечении тяжелых ламинарных струй несмешивающихся жидкостей. ПМТФ. 1977. Вып. 2. С. 78–84.
80. *Еникеев И. Х.* Дипломная работа, выполненная на кафедре гидромеханики механико-математического факультета Московского Гос. Университета (МГУ). 1975.
81. *Ентов В. М., Султанов Ф. М., Ярин А. Л.* Распад жидких пленок под действием перепада давления окружающего газа // МЖГ. 1986. Вып. 3. С. 47–54.
82. *Ержанов Ж. С., Мартынов Н. И.* О развитии РТН двухслойной жидкости при малых числах Рейнольдса // Уральский гос. университет. Деп. в ВИНИТИ. 1983. № 3150–83.
83. *Жданов С. К., Прудкой Ю. В.* Сингулярные течения в задачах неустойчивости границы раздела потоков плазмы или жидкости // Физика плазмы. 1993. Т. 19(3). С. 437–441.
84. *Жидов И. Г., Мешков Е. Е., Попов В. В., Рогачев В. Г., Толшмяков А. И.* Образование вихревого кольца при всплывании большого воздушного пузыря в воде // ПМТФ. 1977. Вып. 3. С. 75–78.
85. *Жуков В. Т., Забродин А. В., Имшенник В. С., Феодоритова О. Б.* Численное моделирование мишени тяжелоионного термоядерного синтеза в приближении теплопроводной газодинамики // Препринт. Институт прикладной математики им. Келдыша РАН. Москва. 1993а. № 41. 28 с.
86. *Жуков В. Т., Забродин А. В., Феодоритова О. Б.* Метод решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы // ЖВМ и МФ. 1993b. Т. 33. Вып. 8. С. 1240–1250.
87. *Жуковский Н. Е.* Полное собрание сочинений // ОНТИ. 1935–1937. ТТ. I–IX.
88. *Забабахин Е. И., Птицин А. Р.* Ограничение конвективной неустойчивости // ВАНТ. Серия: теоретическая и прикладная физика. 1988. Вып. 1. С. 4.
89. *Зайцев С. Г., Лазарева Е. В., Чернуха В. В., Беляев В. М.* Интенсификация перемешивания на границе разноплотных сред при прохождении через нее ударной волны // ДАН. 1985. Т. 283(1). С. 94–98.
90. *Зак Д. И.* МЖГ. 1969. Вып. 5. С. 72.
91. *Зейдель Р. М.* Прохождение ударных волн через искривленную границу раздела двух сред // МЖГ. 1973. Вып. 1. С. 111–121.
92. *Зельдович Я. Б.* Астрономический Журн. 1964. Т. 41. Вып. 5.

93. *Зельдович Я. Б.* Астрофизика. 1970. Т. 6. Вып. 2.
94. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений // Москва. Наука. 1966.
95. *Зельдович Я. Б.* Структура Вселенной // ВИНИТИ. Астрономия. 1983. Т. 22. С. 4–32.
96. *Зимин Е. П., Эйсмонт О. А.* ПМТФ. 1970. Вып. 5.
97. *Зирин Г.* Солнечная атмосфера, Москва. Мир. 1969. Перевод: *Zirin H.* The solar atmosphere // Waltham, Massachusetts, Toronto, London. Blaisdell Publ. Comp. 1966.
98. *Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И.* Газовая динамика многофазных сред. — Ударные и детонационные волны в газовзвесях // ВИНИТИ. МЖГ. 1981. Т. 16. С. 209–287.
99. *Иванов М. Я., Киреев В. И.* МЖГ. 1976. Вып. 6. С. 151.
100. *Игуменщев И. В.* РТН в планетарных туманностях. (не опубл.). 1989.
101. *Иевлев В. М., Сон Э. Е.* Стабилизация РТН проводящей жидкости магнитным полем и потоком тепла // Теплофиз. Высоких Темп. 1980. Т. 18. С. 769–774.
102. *Имшенник В. С., Надёжин Д. К.* Конечные стадии эволюции звезд и вспышки сверхновых // ВИНИТИ. Астрономия. 1982. Т. 21. С. 63–129.
103. *Иногамов Н. А.* Модельный анализ тейлоровской неустойчивости оболочек // Письма ЖТФ. 1977a. Т. 3(7). С. 314–318.
104. *Иногамов Н. А.* Гидродинамика и устойчивость процессов импульсного сжатия плазмы // Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР. Черноголовка, Моск. обл. 1977b.
105. *Иногамов Н. А.* Турбулентная стадия тейлоровской неустойчивости // Письма ЖТФ. 1978. Т. 4(12). С. 743–747.
106. *Иногамов Н. А.* О НРТ в сжимаемой среде // Препринт. Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР. Черноголовка. 1980. 5 с.
107. *Иногамов Н. А.* Неустойчивость фронта абляции при ускорении слоя абляционным давлением // Письма ЖТФ. 1983. Т. 9(18). С. 1136–1139.
108. *Иногамов Н. А.* Тейлоровская неустойчивость плоского изэнтропического слоя, ограниченного изобарическими границами // МЖГ. 1984a. Вып. 1. С. 158–161.
109. *Иногамов Н. А.* Движение с "вмороженными" изобарами: трохоидальные волны и изобарическая РТ мода // ДАН. 1984b. Т. 278. Вып. 1. С. 57–61.
110. *Иногамов Н. А.* Турбулентное перемешивание продуктов детонации с окружающим газом при взрыве // В сборн.: Процессы турбулентного переноса в реагирующих системах. Ред. Р. И. Солоухин и др. Материалы межд. школы-семинара. Минск. Инст. тепло- и массообмена им. Лыкова АН БССР. 1985a. С. 100–111.
111. *Иногамов Н. А.* Цилиндрический аналог трохоидальных волн Герстнера // МЖГ. 1985b. Вып. 5. С. 145–150.
112. *Иногамов Н. А.* Симметрия в задаче о внутренних волнах // МЖГ. 1985c. Вып. 6. С. 92–99.
113. *Иногамов Н. А.* О гидродинамической неустойчивости фронта абляции при абляционном ускорении слоя // ПМТФ. 1985d. Вып. 5. С. 110–116.
114. *Иногамов Н. А.* О стационарном течении, связанном с РТН // В кн.: Проблемы динамики и устойчивости плазмы. Моск. физ.-технич. институт (МФТИ). Москва. 1990a. С. 115–124.
115. *Иногамов Н. А.* Точечная симметрия в спектральной задаче об РТН и внутренних волнах в стратифицированной среде // Там же. 1990b. С. 100–106.
116. *Иногамов Н. А., Чехлов А. В.* Роль короткомасштабных возмущений в периодической структуре, связанной с РТН // Письма ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 13. С. 58–61.
117. *Иногамов Н. А., Константинов А. Б., Анисимов С. И., Житенев С. Б.* Эмиссия вещества при гиперскоростном ударе // ЖЭТФ. 1991. Т. 99(6). С. 1699–1710.
118. *Иногамов Н. А., Чехлов А. В.* Стационарные решения в теории РТН // Препринт. Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР. Черноголовка. 1992. 140 с.
119. *Иногамов Н. А.* Фурье аппроксимации высокого порядка и точные алгебраические решения в теории гидродинамической РТН // Письма ЖЭТФ. 1992. Т. 55. Вып. 9. С. 505–508.
120. *Иногамов Н. А., Чехлов А. В.* Множественность и единственность в теории РТН: возможные стационарные решения и выбор среди них // ДАН. 1993. Т. 328. Вып. 3. С. 311–315.
121. *Иногамов Н. А.* Сингулярное перемешивание в звездах // ПАЖ. 1994. Т. 20. Вып. 10. С. 754–761.
122. *Иногамов Н. А.* Об общем свойстве решений гидродинамических уравнений Эйлера, заключающемся в образовании разрывов на жидкой поверхности // Письма ЖЭТФ. 1995a. Т. 61. Вып. 1. С. 28–33.

123. *Иногамов Н. А.* Обострения и коллапс в гидро и газодинамике // ЖЭТФ. 1995b. Т. 107. Вып. 5. С. 1596–1625.
124. *Иногамов Н. А.* Многомерные периодичность и турбулентность при НРТ и НРМ // IV ЗНЧ. 1995c. С. 393–403.
125. *Иногамов Н. А.* Аналитическое представление пятиминутных солнечных осцилляций // ПАЖ. 1996a. Т. 22. Вып. 7. С. 1–6.
126. *Иногамов Н. А.* К теории неустойчивости и осцилляций в ускоряемых и гравитирующих слоистых структурах // ЖЭТФ. 1996b. Т. 110. Вып. 2(8). С. 559–583.
127. *Иногамов Н. А., Демьянов А. Ю.* Эволюция точек сингулярности и контактных поверхностей, отделяющих область пребывания этих точек от жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37. Вып. 5. С. 93–105.
128. *Иногамов Н. А.* О частичном подавлении гидродинамического перемешивания в профилированных оболочках // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. Вып. 4. С. 1347–1368.
129. *Йи Чиашун.* Волновые движения в слоистых жидкостях // В кн.: Нелинейные волны Москва. Мир. 1977. С. 271–296. Перевод: *Yih C.-S.* Waves in a stratified fluid // In book: Nonlinear waves. Ithaca, London. Cornell Univ. Press. 1974. P. 263–290.
130. *Камчибеков М. Д., Мешков Е. Е., Невмержицкий Н. В., Сотсков Е. А.* Турбулентное перемешивание на цилиндрической границе газ–жидкость // Препринт. РФЯЦ, ВНИИЭФ. г. Саров. 1996. № 46–96. 42 с.
131. *Карабут Е. А.* Численный анализ асимптотического представления уединенных волн // ПМТФ. 1994. Т. 35. Вып. 5(207). С. 44–54.
132. *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье // Москва. Мир. 1976. Перевод: *Kahane J.-P.* Series de Fourier absolument convergentes // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 50. Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag. 1970.
133. *Квак Д., Чэнг Дж. Л. К., Шэнкс С. П., Чакраварти С. Р.* Метод решения уравнений Навье-Стокса для трехмерных течений несжимаемой жидкости с использованием простейших переменных // Аэрокосмическая техника. 1987. Вып. 2. С. 144–153. Перевод: *Kwak D., Chang J. L. C., Shanks S. P., Chakravarthy S. R.* A three-dimensional incompressible Navier-Stokes flow solver using primipive variables // AIAA Journal. 1986. № 3. P. 390–396.
134. *Кедринский В. К.* О некоторых приближенных моделях одномерной пульсации цилиндрической полости в несжимаемой жидкости // Физика Горения и Взрыва. 1976. Вып. 5. С. 768–773.
135. *Кедринский В. К.* Поверхностные эффекты при подводном взрыве (обзор) // ПМТФ. 1978. Вып. 4. С. 66–87.
136. *Кнепп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.* Кавитация // Москва. Мир. 1974.
137. *Козлов В. Ф., Макаров В. Г.* МЖГ. 1985. Вып. 1. С. 33.
138. *Корнилов В. Г., Черепащук А. М.* ПАЖ. 1979. Т. 5. С. 396.
139. *Коробейников В. П., Рязанов Э. В.* ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 1.
140. *Коробейников В. П., Марков В. В., Путятин Б. В.* О распространении цилиндрических взрывных волн с учетом излучения и магнитного поля // МЖГ. 1977. Вып. 4. С. 133–138.
141. *Костякова Э. Б.* Физика планетарных туманностей // Москва. Наука. 1982.
142. *Коул Р.* Подводные взрывы // Москва. Иностранная литература. 1950. Перевод: *Cole R. H.* Underwater explosions // Princeton N.J. Princeton Univ. Press. 1948.
143. *Кочемасов Г. Г.* Краткий обзор работ по инерциальному синтезу на лазерных установках "Искра" // Звенигород XXIV. 1997. С. 16.
144. *Краусс В.* Внутренние волны // Ленинград. Гидрометиздат. 1968.
145. *Куликовский А. Г.* ДАН. 1957. Т. 114. Вып. 5.
146. *Куликовский А. Г.* ДАН. 1958. Т. 120. Вып. 5.
147. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика // Москва. Физматгиз. 1962.
148. *Кутателадзе С. С.* Изв АН СССР. Отд. техн. наук. 1951. Вып. 4. С. 529–536.
149. *Кутвитский В. А., Соловьев Л. С.* Письма ЖЭТФ. 1994. Т. 59. Вып. 8. С. 501.
150. *Кучеренко Ю. А., Неуважаев В. Е., Пылаев А. П.* Поведение области гравитационного турбулентного перемешивания в условиях, приводящих к сепарации // ДАН. 1994. Т. 334(4). С. 445–448.
151. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели // Москва. Наука. 1970.
152. *Ладиков Ю. П.* ДАН. 1961. Т. 137. Вып. 2.
153. *Ламб Г.* Гидродинамика // Москва–Ленинград. Гостехиздат. 1947.
154. *Ландау Л. Д.* К теории медленного горения // ЖЭТФ. 1944. Т. 14. Вып. 6. С. 240–244.

155. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика // Москва. Наука. 1974.
156. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика // Москва. Наука. 1986.
157. *Левин В. А.* ПМТФ. 1967. Вып. 2.
158. *Левитан Б. М., Саресян И. С.* Введение в спектральную теорию // Москва. Наука. 1970.
159. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика // Москва. Физматгиз. 1959.
160. *Лидов М. Л.* ДАН. 1954. Т. 97. Вып. 3.
161. *Лозинская Т. А.* Остатки вспышек сверхновых: наблюдательные данные. Эволюция в межзвездной среде // ВИНИТИ. Астрономия. 1983. Т. 22. С. 33–82.
162. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа // Москва. Наука. 1973.
163. *Лыков В. А., Мурашкина В. А., Неуважаев В. Е., Шибаршов Л. И., Яковлев В. Г.* Влияние турбулентного перемешивания на сжатие оболочечных мишеней // Письма ЖЭТФ. 1979. Т. 30. Вып. 6. С. 339–342.
164. *Лысиков Ю. И.* ПМТФ. 1981. Вып. 1.
165. *Любимов Г. А., Пославский С. А., Шикин И. С.* Взаимодействие потоков, обладающих различными физико-химическими свойствами, с электромагнитным полем и ограничивающими стенками. Исследование движений с однородной деформацией в магнитной гидродинамике // Москва. НТО НИИ Механики МГУ. 1981. № 2486.
166. *Мальбахов В. М.* К теории термиков в неподвижной атмосфере // Изв. АН СССР. ФАО. 1972. Т. 8. Вып. 97.
167. *Манаков С. В., Щур Л. Н.* Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 45.
168. *Мартынов Н. И.* О некоторых закономерностях развития РТН при малых числах Рейнольдса // Уральский гос. университет. Деп. в ВИНИТИ. 1983. № 3149–83.
169. Математическая энциклопедия, Гл. ред. И. М. Виноградов. Москва. Издат-во "Советская энциклопедия". Т.Т. I–IX.
170. *Мержиевский Л. А., Филимонов В. А.* ПМТФ. 1977. Вып. 2. С. 43.
171. *Меркульев Ю. А.* Разработка методов изготовления термоядерных мишеней в Физическом институте им. Лебедева // Звенигород XXIV. 1997. С. 15.
172. *Мешков Е. Е.* Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // МЖГ. 1969. Вып. 5. С. 151–158.
173. *Мешков Е. Е., Никифоров В. В., Толшмяков А. И.* Структура турбулентной зоны на границе между двумя газами, ускоряемой УВ // Физика Горения и Взрыва. 1990. Вып. 3. С. 71–77.
174. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика // Москва. Наука. 1965.
175. *Невзглядов В. Г.* ДАН. 1961. Т. 141. Вып. 6.
176. *Невзглядов В. Г.* Теория тела однородной деформации и ее применение к атомному ядру // Владивосток. 1970.
177. *Немчинов И. В.* ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1.
178. *Несис Е. И.* Кипение жидкостей // Москва. Наука. 1973.
179. *Неуважаев В. Е.* Автомодельные задачи о турбулентном перемешивании границы раздела сжимаемых газов // ПМТФ. 1976. Вып. 6. С. 82–90.
180. *Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.* К теории турбулентного перемешивания границы раздела жидкостей в поле тяжести // ПМТФ. 1976а. Вып. 4. С. 74–81.
181. *Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.* Турбулентное перемешивание границы раздела в численном газодинамическом расчете // ЖВМ и МФ. 1976b. Т. 16. Вып. 2.
182. *Неуважаев В. Е., Паршуков И. Э.* Изучение НРМ вихревым методом // Препринт. Челябинск–70, ВНИИТФ. 1991. Вып. 4. 29 с.
183. *Неуважаев В. Е., Паршуков И. Э.* Изучение устойчивости границ раздела жидкостей при совместном действии импульсного и постоянного ускорений // Математическое моделирование. 1993. Т. 5. Вып. 2. С. 16–24.
184. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред // Тома I и II. Москва. Наука. 1987.
185. *Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш., Вахитова Н. К., Лэхи Р. Т.* (*мл.*) Метод сверхсильного сжатия газового пузырька в жидкости непериодическим вибрационным воздействием давления умеренной амплитуды // ДАН. 1995. Т. 341. Вып. 1. С. 37–41.
186. *Нигматулин Р. И.* Плоский сильный взрыв на границе двух идеальных калорически совершенных газов // Вестник Московского Университета. Серия 1, Математика, Механика. 1965. Вып. 1. С. 83–87.
187. *Никифоров В.* Турбулентное перемешивание на контактной границе разноплотных сред // ВАНТ. Серия: теоретическая и прикладная физика. 1985. Вып. 1. С. 3.
188. *Николаев Ю. М.* Геом. и Аэрономия. 1965. Т. V. Вып. 4. С. 658.
189. *Николаев Ю. М.* Вестник Моск. Гос. Университета. Серия Физ., Астрономия. 1967. Вып. 5. С. 80.
190. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Стохастизация вихрей // Письма ЖЭТФ. 1979а. Т. 29(12). С. 737–740.

191. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Коллапс вихрей // ЖЭТФ. 1979b. Т. 77. С. 588–597.
192. *Овсянников Л. В.* ДАН. 1957. Т. 111. С. 1.
193. *Овсянников Л. В.* О всплывании пузыря // В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Ленинград. Наука. 1970.
194. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И.* и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн // Новосибирск. Наука. 1985. 318 с.
195. *Овсянников Л. В.* Об асимптотическом представлении уединенных волн // ДАН. 1991. Т. 318. Вып. 3. С. 556–559.
196. *Онуфриев А. Т.* Теория движения вихревого кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва // ПМТФ. 1967. Вып. 2. С. 3–15.
197. *Осин А. И.* Исследование движений с однородной деформацией в газовой динамике // Отчет № 2336 Моск. Гос. Университета. Научно-исследовательский институт механики при МГУ. 1980.
198. *Плотников П. И.* Обоснование гипотезы Стокса в теории поверхностных волн // ДАН. 1983. Т. 269. Вып. 1. С. 80–83.
199. *Плотников П. И.* Неединственность решения задачи об уединенных волнах и бифуркации критических точек гладких функционалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 339–366.
200. *Полянин А. Д.* МЖГ. 1975. Вып. 5.
201. *Потташ С. Р.* Планетарные туманности // Москва. Мир. 1987.
202. *Прохоров А. М., Анисимов С. И., Пашинин П. П.* Лазерный термоядерный синтез // УФН. 1976. Т. 119. Вып. 3. С. 401–424.
203. *Розанов В. Б., Лебо И. Г., Зайцев С. Г., Лазарева Е. В., Чеботарева Е. И., Алешин А. Н., Титов С. Н., Василенко А. М., Буряков О. В., Куропатенко О. В., Ольховская В. И., Ратников В. П., Яковлев В. Г., Жидов И. Г., Мешков Е. Е., Невмержицкий Н. В.* Экспериментальное исследование гравитационной неустойчивости и турбулентного перемешивания стратифицированных потоков в поле ускорения в связи с задачами инерциального термоядерного синтеза // Препринт. Физ. инст. им. Лебедева АН СССР (ФИАН). Москва. 1990. № 56. 63 с.
204. *Рязанов Е. В.* ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 1.
205. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике // Москва. Наука. 1972.
206. *Сентрелла Дж., Мелотт А.* Крупномасштабная структура Вселенной: трехмерные численные модели // В кн.: Численное моделирование в астрофизике. Под редакцией Дж. Сентрелла, Дж. Лебланка, Р. Бауэрса. Москва. Мир. 1988. С. 267–291. Перевод кн.: Numerical Astrophysics // Proc. Symp. in honor of J. R. Wilson held in 1982. J. M. Centrella, J. M. Leblanc and R. L. Bowers, eds. Boston. Jones and Bartlett Publ., Inc. 1985.
207. *Сибгатулин Н. Р.* Устойчивость нелинейных однородных пульсаций гравитирующего газового шара // МЖГ. 1976. Вып. 4. С. 14–29.
208. *Сибгатулин Н. Р.* Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях // Москва. Наука. 1984.
209. *Сон Э. Е.* Нелинейная теория РТН "опрокинутой мелкой воды" // Письма ЖТФ. 1978a. Т. 4. Вып. 17. С. 1023–1026.
210. *Сон Э. Е.* Устойчивость низкотемпературной плазмы // Долгопрудный. МФТИ. 1978b. 140 с.
211. *Сон Э. Е.* РТН проводящей вязкой жидкости в магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1979. Т. 2. С. 35–38.
212. *Старцев С. А.* К РТН очень тонкого слоя идеальной жидкости // Краткие сообщения по физике. 1984. Вып. 8. С. 11–15.
213. *Тарасов В. Ф.* В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск. 1957. Вып. 23. С. 210–219.
214. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ // Москва. Мир. 1981. 408 с.
215. *Ткаченко В. К.* Устойчивость вихревых решеток // ЖЭТФ. 1966. Т. 50(6). С. 1573–1585.
216. *Томас Р., Атей Р.* Физика солнечной хромосферы // Москва. Мир. 1965. Перевод: *Thomas R. N., Athey R. G.* Physics of the solar chromosphere // London. Interscience Publishers, Ltd. 1961.
217. *Трубников Б. А., Жданов С. К.* Об интегрируемости уравнений гидродинамики неустойчивых сред // Препринт. МИФИ. 1984. № 001-84. 25 с.
218. *Трубников Б. А., Жданов С. К.* Явление обрыва перетяжек на плазменных пинчах с током // Физика плазмы. 1986. Т. 12. Вып. 7. С. 851–859.
219. *Феоктистов Л. П.* Математ. моделирование. 1995. Т. 27. Вып. 3. С. 41.
220. *Ферми Э.* О тейлоровской неустойчивости // В кн.: Э. Ферми. Научные труды. Москва. Наука. 1972a. Т. 2. С. 490–492.

221. *Ферми Э.* Тейлоровская неустойчивость несжимаемой жидкости // Там же. 1972b. С. 493–497.
222. *Ферми Э., фон Нейман Дж.* Тейлоровская неустойчивость на границе двух несжимаемых жидкостей // Там же. 1972. С. 498–501.
223. *Фортнер Б., Ламб Ф., Зайлстра Г.* Магнитогидродинамика аккреции на нейтронные звезды // См. ссылку Сентрелла Дж., Мелотт А. 1988. С. 130–152.
224. *Фортов В. Е., Дремин А. Н.* Полуэмпирическое уравнение состояния тринитротолуола // ДАН. 1975. Т. 222. Вып. 1. С. 162–165.
225. *Хазин Л. Г.* Правильные многоугольники из точечных вихрей и резонансная неустойчивость стационарных состояний // ДАН. 1976. Т. 230(4). С. 799–802.
226. *Халиуллин Х. Ф., Черепащук А. М.* Звезды Вольфа–Райе // ВИНИТИ. Астрономия. 1982. Т. 21. С. 5–26.
227. *Херт С.* Произвольный лагранжево-эйлеров численный метод // В сб.: Численные методы в механике жидкостей. Москва. Мир. 1973. С. 156–164.
228. *Храмов Г. А., Чекмарев С. Ф.* Автомодельное представление структуры газодинамической области при истечении сильно недорасширенной струи газа в спутный гиперзвуковой поток // МЖГ. 1976. Вып. 6. С. 94–99.
229. *Хромов Г. С.* Планетарные туманности: физика, эволюция, космогония // Москва. Наука. 1985. 296 с.
230. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью // Москва. Физматгиз. 1959.
231. *Чефранов С. Г.* ЖЭТФ. 1991. Т. 99. С. 1149.
232. *Шварц Л., Фентон Дж.* Сильно нелинейные волны // В кн.: Механика. Новое в зарубежной науке. Редакторы серии: А. Ю. Ишлинский, Г. Г. Черный. Москва. Мир. 1987. Т. 42. С. 10–36. Перевод: *Schwartz L. W., Fenton J. D.* Strongly nonlinear waves // Ann. Rev. Fluid Mech. 1982. V. 14. P. 39–60.
233. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя // Москва. Наука. 1974.
234. *Шурупов А. В.* РТН границы раздела между продуктами детонации и ударнонагретым газом при цилиндрическом взрыве // В сб. научн. трудов: Элементарные процессы в химически реагирующих средах. Долгопрудный. МФТИ. 1983. С. 13–17.
235. *Шурупов А. В., Давыдов А. Н., Гальбурт В. А., Лебедев Е. Ф.* Цилиндрические взрывные течения // Препринт. Инст. высоких температур АН СССР (ИВТАН). Москва. 1985. № 2–157. 39 с.
236. *Щелкачев М. В.* МЖГ. 1976. Вып. 5. С. 24.
237. *Щелкачев М. В.* Тейлоровская неустойчивость в электромагнитном поле // МЖГ. 1979. Вып. 6. С. 24. С. 118-121.
238. *Эккард К.* Гидродинамика океана и атмосферы // Москва. ИЛ. 1963. 321 с.
239. *Яворская И. М.* ДАН. 1957. Т. 114. Вып. 5.
240. *Яненко Н. Н., Анучина Н. Н.* и др. О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1970. Т. 1. Вып. 1. С. 40–62.
241. *Aleksandrova I. V., Koreshova E. R., Osipov I. E.* ICF cryotargets: science and technology // J. Moscow Phys. Soc. 1994. V. 4. P. 81–128.
242. *Alon U., Hecht J., Ofer D., Shvarts D.* Power laws and similarity of RT and RM mixing fronts at all density ratios // PRL. 1995. V. 74. P. 534.
243. *Anisimov S. I., Zel'dovich Ya. B., Inogamov N. A., Ivanov M. F.* The Taylor instab. of contact boundary between expanding detonation products and a surrounding gas // (Presented at the 8th ICOGER, Minsk, USSR, 1981). In: Shock waves, explosions and detonation, J. R. Bowen, J.-C.Leyer and R. I. Soloukhin, eds. Progress in Astronautics and Aeronautics Series (M. Summerfield, editor-in-chief). 1983. V. 87. AIAA, Washington, DC. P. 218–227.
244. *Anisimov S. I., Chekhlov A. V., Dem'yanov A. Yu., Inogamov N. A.* The theory of RTI: modulatory perturbations and mushroom-flow dynamics // Russian J. of Computational Mechanics. 1993. V. 1. № 2. P. 5–31.
245. *Anisimov S. I., Inogamov N. A.* Studies in physics of high energy density // Preprint. L. D. Landau Inst. for Theoret. Phys. (ITF) of Russian Academy of Sciences. Chernogolovka. 1993. 62 p.
246. *Anisimov S. I., Baeuerle D., Luk'yanchuk B. S.* (1993). Gas dynamics and film profiles in pulsed-laser deposition of materials // PR. B. 1993. V. 48B. P. 12076.
247. *Anisimov S. I., Khokhlov V. A.* Instabilities in laser–matter interaction // Boca Raton, London, Tokyo. CRC Press. 1995. 147 p.
248. *Aref H.* Motion of three vortices // PF. 1979. V. 22 (3). P. 393–400.
249. *Aref H.* Point vortex motions with a center of symmetry // PF. 1982. V. 25. P. 2183–2187.
250. *Arnett W. D.* On the early behavior of supernova 1987A // Ap. J. 1988. V. 331. P. 377–387.

251. *Arnett W. D., Fryxell B., M'uller E.* Instabilities and nonradial motion in SN 1987A // Ap. J. 1989. V. 341. P. L63–L66.
252. *Arons J., Lea S.M.* Accretion onto magnetized neutron stars: structure and interchange instability of a model magnetosphere // Ap. J. 1976. V. 207. P. 914–936.
253. *Atzeni S.* Sensitivity of ICF reactor targets to long-wavelength drive nonuniformities // Europhys. Lett. 1990. V. 11(7). P. 639–644.
254. *Atzeni S.* Implosion symmetry and burn efficiency in ICF // LPB. 1991. V. 9. № 2. P. 233–245.
255. *Atzeni S., Guerrieri A.* Evolution of multimode RTI towards self-similar turbulent mixing // Europhys. Lett. 1993. V. 22(8). P. 603–609.
256. *Babchin A. J., Frenkel A. Z., Levich B. G., Sivashinsky G. I.* Nonlinear saturation of RTI in thin films // PF. 1983 V. 26. № 11. P. 3159–3161.
257. *Baker G. R.* Stability of ablation and combustion fronts // PF. 1978 V. 21. № 2. P. 295–297.
258. *Baker G. R., Meiron D. I., Orszag S. A.* Vortex simulations of the RTI // PF. 1980 V. 23. № 8. P. 1485–1490.
259. *Baker G. R., Meiron D. I., Orszag S. A.* Generalized vortex methods for free-surface flow problems // JFM. 1982. V. 123. P. 477–501.
260. *Baker L.* Compressible RTI // PF. 1983. V. 26. № 4. P. 950–952.
261. *Baker G. R., Moore D. W.* The rise and distortion of a two-dimensional gas bubble in an inviscid liquid // PF. A. 1989. V. 1(9)A. P. 1451–1459.
262. *Baker G., Caflish R., Siegel M.* Preprint UCLA. 1992.
263. *Balick B.* The evolution of planetary nebulae. I. Structures, ionizations, and morphological sequences // The Astronomical J. 1987. V. 94. P. 671–678.
264. *Basko M. M., Imshennik V. S., Churazov M. D.* Overview of directly driven HIF targets // Accelerators. 1992. V. 37–38. P. 505–512.
265. *Basko M. M.* RT eigenmodes of a thin layer in the nonlinear regime // Phys. Plasmas. 1994. V. 1. № 5. P. 1270–1278.
266. *Batchelor G. K.* An introduction to fluid dynamics // Cambridge. Cambridge Univ. Press. 1967.
267. *Bautin S. P., Kazakov A. L.* Reflection of shock waves having a finite velocity from the axis or center of symmetry // In: Lavrentyev readings, 4th International conference. Abstracts. Kazan. July 3–7, 1995. Printed in Novosibirsk. P. 91.
268. *Bellman R., Pennington R. H.* Effects of surface tension and viscosity on Taylor instability // Quart. J. Appl. Math. 1954. V. 12. № 2. P. 151–161.
269. *Benz W., Thielemann F.-K.* RT induced mixing in supernova SN 1987A // Bulletin of the American Astronomical Society. 1989. V. 20. P. 985–986.
270. *Bisnovatyi-Kogan G. S., Nadyozhin D. K.* The evolution of massive stars with mass loss // Astrophysics and Space Science. 1972. V. 15. P. 353–374.
271. *Birkhoff G., Carter D.* Rising plane bubbles // J. Math. Mech. 1957. V. 6(6). P. 769–779.
272. *Blinnikov S. I., Chugai N. N., Lozinskaya T. A.* Supernovae and supernova remnants // Sov. Sci. Rev. E. Astrophys. Space Phys. Edited by R. A. Sunyaev. Chur. Harwood Academic publishers. 1988. V. 6. P. 195–279.
273. *Bodner S. E.* RTI and laser-pellet fusion // PRL. 1974. V. 33. P. 761.
274. *Book D. Z., Ott E.* RTI in the "shallow-water" approximation // PF. 1974. V. 17. № 4. P. 676–678.
275. *Breidenthal R.* Structure in turbulent mixing layers and wakes using a chemical reaction // JFM. 1981. V. 109. P. 1–24.
276. *Brueckner K. A., Jorna S.* Laser-driven fusion // Reviews of Modern Phys. 1974. V. 46. № 2. P. 325–366.
277. *Brueckner K. A., Jorna S., Janda R.* Hydrodynamic stability of laser-driven plasma // PF. 1974. V. 17(8). P. 1554–1559.
278. *Brunt D.* Q.J.R. Meteorol. Soc. 1927. V. 53. P. 30.
279. *Buchler J.R., Livio M., Colgate S. A.* Supernova explosions — the role of a RTI // Space Science Reviews. 1980. V. 27. P. 571–577.
280. *Bychkov V. V., Golberg S. M., Liberman M. A.* On the stability of combustion and laser-produced ablation fronts // PF. B. 1993. V. 5B. P. 3822–3824.
281. *Caflish R. E., Orellana O. F., Siegel M.* SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50. P. 1517.
282. *Carrier G. F., Chang C. T.* J. Appl. Math. 1959. V. 16. P. 436.
283. *Cattaneo F., Hurlburt N. E., Toomre J.* Supersonic convection // Ap. J. 1990. V. 349. P. L63–L66.
284. *Chan K. L., Chau W. Y., Henriksen R. N.* Anisotropic explosion of rotating, self-gravitating uniform spheroids // Ap. J. 1978. V. 225. № 2. Part 1. P. 625–632.
285. *Chan K. L., Chau W. Y., Henriksen R. N.* Anisotropic explosion of magnetized spheroids // Ap. J. 1980. V. 236. № 3. Part 1. P. 889–894.

286. *Chandrasekhar S.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. V. 42. № 1.
287. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability // Oxford. Oxford Univ. Press. 1961.
288. *Chang C. T.* Dynamic instability in accelerated fluid // PF. 1959. V. 2. № 6. P. 656–663.
289. *Chang J. L. C., Kwak D.* On the method of pseudo compressibility for numerically solving incompressible flows // AIAA Papier 84. 1984. № 1. P. 252–260.
290. *Chang Y. P.* Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. 1957. V. 79. P. 1501–1513.
291. *Chevalier R. A., Klein R. I.* On the RTI in stellar explosions // Ap. J. 1978. V. 219. P. 994–1007.
292. *Cherfils C., Mikaelian K. O.* Simple model for the turbulent mixing width at an ablating surface // PF. 1996. V. 8. № 2. P. 522–535.
293. *Cherfils–Clérouin C., Galmiche D.* 1997. Perturbation growth at the internal interface of a plane target under indirect laser drive // In book: Compressible turbulent mixing. Proc. of 5th international workshop. R. Young, J. Glimm and B. Boston, eds. SUNY, New York, USA. 18–21 July 1995.
294. *Chikhliwala E. D., Huang A. B., Yortsos Y. C.* Numerical study of the linear stability of immiscible displacement in porous media // Transport in Porous Media. 1988. V. 3. P. 257–276.
295. *Chorin A. J.* A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys. 1967. V. 2. № 1.
296. *Christensen–Dalsgaard J.* On adiabatic non-radial oscillations with moderate or large l // Monthly Notes of the Royal Astron. Soc. 1980. V. 190. P. 765–791.
297. *Chuoke R. L., van Meurs P., van der Poel L. B.* The instability of slow, immisicible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media // Petroleum Transactions, AIME. 1959. V. 216. P. 188–194.
298. *Chvistie M. A.* High-resolution simulation of unstable flows in porous media // SPE Reservoir Engineering. 1989. V. 4(3). P. 297–303.
299. A simple model of the plane gas bubble in a finite liquid // Collins R. JFM. 1965. V. 22. P. 763–771.
300. *Collins R.* Chem. Engng. Sci. 1967. V. 22. P. 89.
301. *Colombant D., Manheimer W., Ott E.* Three-dimensional nonlinear evolution of the RTI of a thin layer // PRL. 1984. V. 53. № 5. P. 446–449.
302. *Cox J. P.* Theory of stellar pulsation // Princeton, New Jersey. Princeton University Press. 1980. 380 p.
303. *Crum L. A.* Sonoluminescence // Physics Today. 1994. September, 1994. P. 22–29.
304. *Curle N.* Unsteady two-dimensional flows with free boundaries // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1956. V. 235. № 1202–1203. P. 375–381 and P. 382–395.
305. *Dagan G.* Taylor instability of a non-uniform free-surface flow // JFM. 1975. V. 67. P. 113.
306. *Dahlburg J. P., Gardner J. H., Doolen G. D., Haan S. W.* The effect of shape in the three-dimensional ablative RTI. I: Single-mode perturbations // PF. B. 1993. V. 5B(2). P. 571–584.
307. *Daly B. J.* Numerical study of two-fluid RTI // PF. 1967. V. 10. № 2. P. 297–307.
308. *Davies R. M., Taylor G. I.* The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1950. V. 200. P. 375–390.
309. *Demchenko V. V.* Numerical simulation of RMI // Russian J. of Computational Mechanics. 1993. V. 1. № 2.
310. *Demtchenko B.* Compte Rendus Acad. Sci. Paris. 1927. V. 184. P. 1314.
311. *Den M., Yoshida T., Yamada Y.* Two dimensional simulation of RTI in supernova explosion // KEK Progress Report. 1990. V. 89. P. 173–184.
312. *Detweiler S. L., Lindblom L.* On the evolution of the homogeneous ellipsoidal figures // Ap. J. 1977. V. 213. P. 193–199.
313. *Dienes J. K.* Method of generalized coordinates and applications to RTI // PF. 1978. V. 21. P. 736.
314. *Ding Z., Gracewski S. M.* The behavior of a gas cavity impacted by a weak or strong shock wave // JFM. 1995. V. 309. P. 183–209.
315. *Duff R. E., Harlow F. H., Hirt C. W.* Effects of diffusion on interface instability between gases // PF. 1962. V. 5. № 4. P. 417–425.
316. *Dumitrescu D. T.* Strömung an einer luftblase im senkrechten rohr // Z. Angew. Math. Mech. 1943. Bd. 23. № 3. S. 139–148.
317. *Dyachenko A. I., Kuznetsov E. A., Spector M. D., Zakharov V. E.* Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) // Phys. Lett. A. 1996. V. 221A. P. 73–79.

318. *Dyachenko A. I., Zakharov V. E.* Toward an integrable model of deep water // Phys. Lett. A. 1996. V. 221A. P. 80–84.
319. *Dyson J. F.* Journ. Math. Mech. 1968. V. 18. P. 81.
320. *Ebisuzaki T., Shigeyama T., Nomoto K.* RTI and mixing in SN 1987A // Ap. J. 1989. V. 344. P. L65–L68.
321. *Elsner R. F.* Ph. D. Thesis. Univ. of Illinois at Urbana-Champaign. 1976.
322. *Emery M. H., Gardner J. H., Boris J. P.* Nonlinear aspects of hydrodynamic instabilities in laser ablation // Appl. Phys. Lett. 1982. V. 41(9). P. 808–810.
323. *Emery M. H., Gardner J. H., Bodner S. E.* Strongly inhibited RT growth with 0.25–μm lasers // PRL. 1986. V. 57. P. 703.
324. *Emmons H. W., Chang C. T., Watson B. C.* Taylor instability of finite surface waves // JFM. 1960. V. 7. P. 177–193.
325. *Fraley G.* RT stability for a normal shock wave — density discontinuity interaction // PF. 1986. V. 29. P. 376.
326. *Fryxell B., M'uller E., Arnett D.* Instabilities and clumping in SN 1987A. I. Early evolution in two dimensions // Ap. J. 1991. V. 367. P. 619–634.
327. *Fujimoto M.* Motion of gas and spiral structure // Ap. J. 1968. V. 152. № 2. Part 1. P. 391–404.
328. *Gamaly E. G., Favorsky A. P., Fedyanin A. O., Lebo I. G., Myshetskaya E. E., Rozanov V. B., Tishkin V. F.* Nonlinear stage in the development of hydrodynamic instability in laser targets // LPB. 1990. V. 8. № 3. P. 399–407.
329. *Galmiche D., Macé M.* Simulation d'une experience d'instabilite par laser // Chocs. 1995. № 14, P. 27.
330. *Garabedian P. R.* On steady state bubles generated by Taylor instability // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1957. V. 241. № 1226. P. 423–431.
331. *Garabedian P. R.* Modern mathematics for the engineer // New York. McGraw–Hill. 1961. 2nd Ser. P. 365.
332. *Gardner C. L., Glimm J., McBryan O., Menikoff R., Sharp D. H., Zhang Q.* The dynamics of bubble growth for RT unstable interfaces // PF. 1988. V. 31. № 3. P. 447–465.
333. *Gardner J. H., Bodner S. E., Dahlburg J. P.* Numerical simulation of ablative RTI // PF. B. 1991. V. 3B(4). P. 1070–1074.
334. *Gilbarg D.* Handbuch der Physik // Springer. Berlin. 1960. V. 9.
335. *Giuliani J. L. Jr.* The role of ionization fronts in the colliding wind model of planetary nebulae // Ap. J. 1981. V. 245. P. 903–911.
336. *Glendinning S. G., Dixit S. N., Hammel B. A., Kalantar D. H., Key M. H.* et al. Measurement of a dispersion curve for linear–regime RT growth rates in laser–driven planar targets // PRL. 1997. V. 78. № 17. P. 3318–3321.
337. *Glimm J., McBryan O., Menikoff R., Sharp D. H.* Stable and runaway bubble merger in a model for RT unstable interfaces // Phys. Lett. A. 1987. V. 123A. № 6. P. 289–291.
338. *Glimm J., Li X. L.* Validation of the Sharp–Wheeler bubble merger model from experimental and computational data // PF. 1988. V. 31. № 8. P. 2077–2085.
339. *Glimm J., Li X. L., Menikoff R., Sharp D. H., Zhang Q.* A numerical study of bubble interactions in RTI for compressible fluids // PF. A. 1990. V. 2A. № 11. P. 2046–2054.
340. *Glimm J., Sharp D. H.* Chaotic mixing as a renormalization-group fixed point // PRL. 1990. V. 64. № 18. P. 2137–2139.
341. *De Greve J.-P., De Loore C.* Period changes in binary systems during Wolf–Rayet stage // Astron. and Astrophys. 1975. V. 42. P. 91–94.
342. *Gull S. F.* The X-ray, optical and radio properties of young supernova remnants // Monthly Notes of the Royal Astron. Soc. 1975. V. 171. P. 263–278.
343. *Haas J. F., Sturtevant B.* Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities // JFM. 1987. V. 181. P. 41–76.
344. *Haas J. F., Galametz I., Houas L., Jourdan G., Rodriguez G.* Experiences en tube a chocs // Chocs. 1995. № 14. P. 15–26.
345. *Haan S. W.* Onset of nonlinear saturation for RT growth in the presence of full spectrum of modes // PR. A. 1989. V. 39A. № 11. P. 5812–5825.
346. *Haan S. W.* Weakly nonlinear hydrodynamic instabilities in inertial fusion // PF. B. 1991. V. 3B. № 8. P. 2349–2355.
347. *Haan S. W., Pollaine S. M., Lindl J. D., Suter L. J., Berger R. L.* et al. Design and modeling of ignition targets for the NIF // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 2480.
348. *Hachisu I., Matsuda T., Nomoto K., Shigeyama T.* Numerical simulations of nonlinear growth of RTI and mixing in SN 1987 A // KEK Progress Report. 1990. V. 89. P. 185–196.

349. *Harlow F. H., Welch J. E.* Numerical simulation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // PF. 1965. V. 8. № 12. P. 2182–2189.
350. *Harlow F. H., Welch J. E.* Numerical study of large-amplitude free-surface motion // PF. 1966. V. 9. № 5. P. 842–851.
351. *Harris E. G.* RTI of a collapsing cylindrical shell in a magnetic field // PF. 1962. V. 5. № 9. P. 1057–1062.
352. *Hecht J., Alon U. and Shvarts D.* Potential flow models of RT and RM bubble fronts // PF. 1994. V. 6. P. 4019–4030.
353. *Henderson D. B., McCrory R. L., Morse R. L.* Ablation stability of laser-driven implosion // PRL. 1974. V. 33(4). P. 205–208.
354. *Hoffman N. M., Beck J. B., Hsing W. W.* Calculations of instability growth in cylindrical implosions // Proc. 4th IWPCTM. 1993. P. 545.
355. *Holmes R. L., Grove J. W., Sharp D. H.* Numerical investigation of RMI using front tracking // JFM. 1995. V. 301. P. 51–64.
356. *Hsieh D. V.* Interfacial instability with mass and heat transfer // PF. 1978. V. 21. № 5. P. 745–748.
357. *Hsieh D. V., Ho S. P.* RT stability with mass and heat transfer // PF. 1981. V. 24. № 2. P. 202–208.
358. *Ingraham R. L.* Proc. Phys. Soc. London. Ser. B. 1954. V. B67. P. 748–752.
359. *Inogamov N. A., Chehlov A. V.* RTI: theory and computer simulation // Abstracts of the international workshop "Anisotropy of fluid flows in external forces fields and geophysical, technological, ecological applications". Jurmala, Latvian SSR. Sept. 10-13, 1990. P. 29.
360. *Inogamov N. A., Chekhlov A. V., Dem'yanov A. Yu.* Steady-state flow produced by Rayleigh-Taylor Instability // Proc. 3rd IWPCTM. 1991a. P. 423–426.
361. *Inogamov N. A., Anisimov S. I., Chekhlov A. V., Dem'yanov A. Yu., Belotserkovskii O. M.* Analytical and numerical studies of the RTI // Ibid. 1991b. P. 409–422.
362. *Inogamov N. A., Chekhlov A. V.* Existence, uniqueness and physical selection of asymptotically steady-states solutions in the theory of the RTI // Proc. 4th IWPCTM. 1993. P. 50–56.
363. *Inogamov N. A., Abarzhi S. I.* Dynamics of fluid surface in multidimension // Physica D. 1995. V. 87. № 1–4. P. 339–341.
364. *Inogamov N. A.* Many-dimensional periodicity and turbulence of RT and RM instabilities // LPB. 1997a. V. 15. № 1. P. 53–64.
365. *Inogamov N. A.* Ablative acceleration of foils, their pulsations, and interchange instability // LPB. 1997b. V. 15. № 4. P. 1–12.
366. *Jacobs J. W., Bunster A., Catto I., Plesset M. S.* Experimental RTI in a circular tube // Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. (ASME). 1985. V. 107. P. 460–466.
367. *Jacobs J. W., Catton I.* Three-dimensional RTI. Part 1. Theory and Part 2. Experiment // JFM. 1988. V. 187. P. 329–352 and P. 353–371.
368. *Jacobs J. W., Sheeley J. M.* Experimental study of incompressible Richtmyer–Meshkov instability // PF. 1996. V. 8(2). P. 405–415.
369. *Kahn F. D.* In: Symp. 34. 1968. P. 236.
370. *Kahn F. D.* In: MemL. 1973. V. 6. P. 427.
371. *Kahn F. D.* In: Planetary Nebulae. IAU Symp. № 103. 1982. D.Reidel Publ. Comp. P. 305.
372. *Kerr R. M.* Simulation of RT flows using vortex blobs // J. Comp. Phys. 1988. V. 76. № 1. P. 48–84.
373. *Kidder R. E.* Nucl. Fusion. 1974. V. 14. P. 53.
374. *Kilkenny J. D.* Experimental results on hydrodynamic instabilities in laser-accelerated planar packages // PF. B. 1990. V. 2B(6). P. 1400–1404.
375. *Kilkenny J. D., Glendinning S. G., Haan S. W.* et al. Phys. Plasmas. 1994. V. 1. P. 1379.
376. *Kivity Y., Hanin M.* Stability of interface and shock wave driven by initial pressure discontinuity // PF. 1981. V. 24. № 5. P. 1010–1016.
377. *Klein R. I., McKee C. F., Colella P.* On the hydrodynamic interaction of shock waves with interstellar clouds. I. Nonradiative shocks in small clouds // Ap. J. 1994. V. 420. P. 213–236.
378. *Kruskal M., Schwarzshild M.* Proc. Roy. Soc. London A. 1954. V. 223. P. 348.
379. *Kuhl A. L.* Spherical mixing layers in explosions // In: Dynamics of Exothermicity. Edited by J.R.Bowen. Longhorn, Pennsylvania. Gordon and Breach Publishers. 1994.
380. *Kull H. J.* Bubble motion in the nonlinear RTI // PRL. 1983. V. 51. № 16. P. 1434–1437.
381. *Kull H. J.* RTI in nonuniform acceleration fields // PR. A. 1985. V. 31A. № 1. P. 31–33.
382. *Kull H. J.* Nonlinear free-surface RTI // PR. A. 1986. V. 33A. № 3. P. 1957–1967.

383. *Kull H. J., Anisimov S. I.* Ablative stabilization in the incompressible RTI // PF. 1986. V. 29(7). P. 2067–2075.
384. *Kull H. J.* Theory of the RTI // Physics Reports. 1991. V. 206. P. 197.
385. *Lamb H.* Hydrodynamics // New York. Dover publications. 1945.
386. *Layzer D.* On the instability of superposed fluids in a gravitational field // Ap. J. 1955. V. 122. P. 1.
387. *Lebo I. G., Rozanov V. B., Tishkin V. F.* Hydrodynamic instability and target design // LPB. 1994. V. 12. P. 361–369.
388. *Lengyel L., Salvat M.* Z. Naturforsch. 1975. Bd. 30a. S. 1577.
389. *Letts S. A., Collins G. W., Fearon E. M.* et. al. ICF. 1994. V. 4. № 2. P. 54.
390. *Lewis D. J.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. II // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1950. V. 202. P. 81–96.
391. *Lezzi A. M., Prosperetti A.* RTI of adiabatically stratified fluids // PF. A. 1989. V. 1A. № 11. P. 1784–1795.
392. *Liberman M. A., Bychkov V. V., Golberg S. M., Book D. L.* Stability of a planar flame front in the slow-combustion regime // PR. E. 1994. V. E49. № 1. P. 445–453.
393. *Linden P. F., Redondo J. M.* Molecular mixing in RTI. Part I. Global mixing // PF. A. 1991. V. 5A. P. 1267–1274.
394. *Lindl J. D., McCrory R. L., Campbell E. M.* Progress toward ignition and burn propagation in ICF // Phys. Today. 1992. V. 45(9). P. 32.
395. *Logan B. G.* The role of the NIF in the development of ICF // ICF. 1995. V. 5. № 2. P. 87–96.
396. *Malkus J., Witt J.* The evolution of a convective thermics. A numerical calc. of atm. and sea in motion // New York. Rock. Inst. Press. 1956.
397. *Manheimer W., Colombant D., Ott E.* Three-dimensional nonlinear evolution of the RTI // PF. 1984. V. 27. № 8. P. 2164–2175.
398. *Marinak M. M., Haan S. W., Tipton R. E., Weber S. V., Remington B. A.* 3D simulation of ablative hydrodynamic instabilities in indirectly driven targets // ICF. 1995. V. 5. № 3. P. 168–178.
399. *McEachern R., Moore C., Overturf G. E. III, Buckley S. R., Cook R.* Precision targets for precision Nova // ICF. 1993. V. 4. № 1. P. 25–30.
400. *McKee C. F.* X-ray emission from an inward-propagating shock in young supernova remnants // Ap. J. 1974. V. 188. P. 335–339.
401. *Meiburg E., Homsy G. M.* Nonlinear unstable viscous fingers in Hele–Shaw. Part II. Numerical simulation // PF. 1988. V. 31(3). P. 429–439.
402. *Melander M. V., Styczek A. S., Zabusky N. J.* Elliptically desingularized vortex model for the two-dimensional Euler equations // PRL. 1984. V. 53. № 13. P. 1222–1225.
403. *Meyer K. A., Blewett P. J.* Numerical investigation of the stability of a shock-accelerated interface between two fluids // PF. 1972. V. 15. P. 753–759.
404. *Menikoff R., Mjolsness R. C., Sharp D. H., Zemach C.* Unstable normal mode for RTI in viscous fluids // PF. 1977. V. 20(12). P. 2000–2004.
405. *Menikoff R., Mjolsness R. C., Sharp D. H., Zemach C., Doyle B. J.* Initial value problem for RTI of viscous fluids // PF. 1978. V. 21(10). P. 1674–1687.
406. *Mikaelian K. O.* PRL. V. 48. P. 1365. RTI in stratified fluids // PR. A. 1982. V. 26A. № 4. P. 2140–2158.
407. *Mikaelian K. O.* RTI and RMI and mixing in stratified spherical shells // PR. A. 1990. V. 42A. № 6. P. 3400–3420.
408. *Mikaelian K. O.* Effect of viscosity on RT and RM instabilities // PR. E. 1993. V. 47(1)E. P. 375–383.
409. *Mikaelian K. O.* Oblique shocks and the combined RT, KH and RM instabilities // PF. 1994a. V. 6(6). P. 1943–1945.
410. *Mikaelian K. O.* Freeze-out and the effect of compressibility in the RMI // PF. 1994b. V. 6(1). P. 356–368.
411. *Mikaelian K. O.* RTI and RMI in finite-thickness fluid layers // PF. 1995. V. 7(4). P. 888–890.
412. *Mikaelian K. O.* Connection between the Rayleigh and the Schrödinger equations // PR. E. 1996. V. 53E. № 4. P. 3551–3558.
413. *Michel F. C.* Accretion magnetosphere stability. II. Polar cap "drip" // Ap. J. 1977. V. 216. P. 838–841.
414. *Moore D. W.* The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet // Proc. Roy. Soc. London. A. 1979. V. 365A. P. 105–119.
415. *Morton B. R.* Buoyant plumes in a moist atm. // JFM. 1956. V. 2. P. 127.

416. *Morton B. R.*, *Taylor G. I.*, *Turner J. S.* Turbulent gravity convection from maint. and inst. sources // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1956. V. 234A. P. 1196.
417. *Nicolas J. A.*, *Sanmartin J. R.* Inverse bremsstrahlung absorption in spherical laser targets // Plasma Phys. Controlled Fusion. 1985. V. 27. № 3. P. 279–297.
418. *Nikolaev Yu. M.* J. Appl. Math. Mech. 1965. V. 29. P. 785.
419. *Nomoto K.*, *Shigeyama T.*, *Hashimoto M.* In: SN 1987 A. Edited by I. J. Danziger (Garching: ESO). 1987. P. 325.
420. *Nuckolls J. H.*, *Wood L.*, *Thiessen X.*, *Zimmerman G. B.* Laser compression of matter to super-high densities: thermonuclear (CTR) applications // Nature. 1972. V. 239. P. 139.
421. *Ofer D.*, *Shvarts D.*, *Zinamon Z.*, *Orszag S.* Mode coupling in nonlinear RTI // PF. B. 1992. V. 4B(11). P. 3549–3561.
422. *Ofer D.*, *Alon U.*, *Shvarts D.*, *McCrory R. L.*, *Verdon C. P.* Modal model for the nonlinear multimode RTI // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. № 8. P. 3073–3090.
423. *Ogura Y.* Convection of isolated masses of buoyant fluids: a numerical calculation // J. Atm. Sci. 1962. V. 19. P. 492.
424. *Ott E.* Nonlinear evolution of the RTI of a thin layer // PRL. 1972. V. 29. № 21. P. 1429–1432.
425. *Paisner J. A.*, *Boyes J. D.*, *Kumpan S. A.*, *Sorem M.* The NIF project // ICF. 1995. V. 5. № 2. P. 110–118.
426. *Panzarella C. H.*, *Bankoff S. G.*, *Davies S. H.* Bull. Amer. Phys. Soc. 1995. V. 40. P. 1964.
427. *Paterson L.* Radial fingering in a Hele-Shaw cell // JFM. 1981. V. 113. P. 513–529.
428. *Pekeris C. L.* The propagation of a pulse in the atmosphere. Part II // PR. 1948. V. 73. № 2. P. 145–154.
429. *Pham T.*, *Meiron D. I.* A numerical study of RMI in continuously stratified fluids // PF. A. 1993. V. 5A. № 2. P. 344–368.
430. *Phillips K. J. H.* Guide to the Sun // Cambridge. Cambridge University Press. 1992.
431. *Philpott M.*, *Smith A. V.*, *Cowperthwaite N. W.*, *Youngs D. L.* Late-time turbulent mixing of a high density gas bubble in a shocked air flow // Proc. 4th IWPCTM. 1993. P. 366–371.
432. *Pickelner S. B.* Ap. J. 1973a. V. 15. P. 91.
433. *Pickelner S. B.* Comm. Astrophys. and Space Phys. 1973b. V. 5. P. 151.
434. *Plesset M. S.*, *Hsieh D. Y.* General analysis of the stability of superposed fluids // PF. 1964. V. 7. № 8. P. 1099–1108.
435. *Plesset M. S.*, *Prosperitty A.* Bubble dynamics and cavitation // Ann. Rev. Fluid Mech. 1977. V. 9. P. 145–185.
436. *Popil R.*, *Curzon F. L.* Climbing water films in experiments on RTI // PF. 1980. V. 23. № 8. P. 1718–1719.
437. *Prendergast K. H.* The equilibrium of a self-gravitating incompressible fluid sphere with magnetic field. I // Ap. J. 1956. V. 123(3). P. 498–507.
438. *Rajappa N. R.* On the instability of fluid surfaces when accelerated perpendicular to their planes // Acta Mechanica. 1970a. V. 10. P. 193.
439. *Rajappa N. R.* Non-linear theory of Taylor instability of superposed fluids // J. Phys. Soc. Japan. 1970b. V. 28. № 1. P. 219–224.
440. *Ratafia M.* Experimental investigation of RTI // PF. 1973. V. 16. № 8. P. 1207–1210.
441. *Lord Rayleigh* Proc. London Math. Soc. 1883. V. 14. P. 170.
442. *Lord Rayleigh* Theory of sound // N.Y. Dover Publications Inc. 1894. V. 2. Русск. перевод. Стретт Дж. (Лорд Рэлей). Теория звука // Москва. Гостехиздат. 1955. Т. 2.
443. *Lord Rayleigh* Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Scientific Papers. Cambridge, England. 1900. P. 200–207.
444. *Read K. I.* Experimental investigation of turbulent mixing by RTI // Physica D. 1984. V. 12D. № 1–3. P. 45–58.
445. *Remington B. A.*, *Weber S. V.*, *Haan S. W.*, *Kilkenny J. D.*, *Glendinning S. G.*, *Wallace R. J.*, *Goldstein W. H.*, *Wilson B. G.*, *Nash J. K.* Laser-driven hydrodynamic instability experiments // PF. B. 1993. V. 5B(7). P. 2589–2595.
446. *Riabouchinsky D.* Compte Rendus Acad. Sci. 1927. V. 184. P. 583.
447. *Richtmyer R. D.* Taylor instability in acceleration of compressible fluids // Comm. on Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. № 2. P. 297–319.
448. *Rogatchov V.*, *Zhidov I.*, *Klopov B.*, *Meshkov E.*, *Tolshmyakov A.* Nonstationary flows in the proximity of angular points of gas accelerated liquid layer // Proc. 3rd IWPCTM. 1991. P. 1–8.
449. *Rowe P. N.*, *Partridge B. A.* A note on the initial motion and break-up of a two-dimensional air bubble in water // Chem. Engng Sci. 1964. V. 19. P. 81.

450. *Rudinger G., Sommers L. M.* Behavior of small regions of gases carried in accelerated gas flows // JFM. 1960. V. 7. P. 161–176.
451. *Rupert V.* Shock-interface interaction: current research on the RM problem // In: Shock waves. Proc. of the 18th international symposium on shock waves. Edited by K. Takayama. Springer–Verlag. 1992.
452. *Sanmartin J. R., Montanes J. L., Sanz J., Ramis R.* The hydrodynamic efficiency of laser target acceleration // Plasma Phys. Controlled Fusion. 1985. V. 27. № 9. P. 983–993.
453. *Saffman P. G.* Vortex dynamics // Cambridge Univ. Press. 1992. 311 p.
454. *Saffman P. G., Taylor G. I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A 1958. V. 245. P. 312–329.
455. *Samtaney R., Zabusky N. J.* Circulation and growth rate in RMI using shock polar analysis // Bull. Am. Phys. Soc. 1992. V. 37(8). P. 1732.
456. *Samtaney R., Zabusky N. J.* On shock polar analysis and analytical expressions for vorticity deposition in shock-accelerated density-stratified interfaces // PF. A. 1993. V. 5A. P. 1285–1287.
457. *Sanz J.* Self-consistent analytical model of the RTI in inertial confinement fusion // PRL. 1994. V. 73. № 20. P. 2700–2703.
458. *Schneps M. H., Ho P. T. P., Barrett A. H.* The formation of elephant-trunk globules in the Rosette nebula: *CO* observations // Ap. J. 1980. V. 240. P. 84–98.
459. *Schwartz L. W.* Stability and fingering in a rotating Hele-Shaw cell or porous medium // PF. A. 1989a. V. 1A(2). P. 167–169.
460. *Schwartz L. W.* Viscous flows down an inclined plane: instability and finger formation // PF. A. 1989b. V. 1A(3). P. 443–445.
461. *Schwarzschild K.* Göttinger Nachr. 1905. V. 1906. P. 41.
462. *Schwind J. J., Reid R. O.* Characteristics of gravity waves of permanent form // J. Geophys. Research. 1972. V. 77. № 3. P. 420–433.
463. *Scott K., Huntley J. M., Phillips W. A., Clarke J., Field J. E.* Influence of oxygen pressure on laser ablation of $Y\,Ba_2\,Cu_3\,O_{7-x}$. // Appl. Phys. Lett. 1990. V. 57. P. 922.
464. *Sharp D. H.* An overview of RTI // Physica D. 1984. V. 12D, № 1–3. P. 3–18.
465. *Shelly J.* A study of singularity formation in vortex-sheet motion by a spectrally accurate vortex method // JFM. 1992. V. 244. P. 493–526.
466. *Shigeyama T., Nomoto K., Hashimoto M.* Hydrodynamical models and the light curve of supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud // Astron. and Astrophys. 1988. V. 196. P. 141–151.
467. *Shvarts D., Alon U., Ofer D., McCrory R. L., Verdon C. P.* Nonlinear evolution of multimode RTI in two and three dimensions // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. № 6. P. 2465–2472.
468. *Slater L. J.* In: Handbook of Mathematical Functions. 1964. NBS Appl. Math. Ser., № 55, edited by M.Abramowitz & I. A. Stegun. Washington, DC. GPO.
469. *Smarr L. L., Wilson J. R., Barton R. T., Bowers R. L.* RT overturn in supernova core collapse // Ap. J. 1981. V. 246. P. 515–525.
470. *Smarr L. L., Norman M. L., Winkler K.-H. A.* Shocks, interfaces and patterns in supersonic jets // Physica D. 1984. V. 12D. № 1–3. P. 83–106.
471. *Smeeton V. S., Youngs D. L.* Experimental investigation of turbulent mixing by RTI. Part 3 // A.W.E. Report № 35/87. 1987.
472. *Smith C. E.* The starting process in a hypersonic nozzle // JFM. 1966. V. 24. Part 4. P. 625–640.
473. *Spanos T. J. T.* The equations of immiscible viscous displacement in a porous medium // Can. J. Phys. 1981. V. 59. P. 45–56.
474. *Spitzer L.* Behavior of matter in space // Ap. J. 1954. V. 120. P. 1–17. See also: Frieman E. A. On "elephant-trunk" structures in the region of *O* associations // Ibid. 1954. V. 120. P. 18–21.
475. *Stangl E., Luk'yanchuk B. S., Schieche H., Piglmayer K., Baeuerle D., Anisimov S.* Dynamics of the vapor plume in laser materials ablation // NATO Advanced Study Institute. Excimer Lasers. Crete, Greece. September, 1993.
476. *Takabe H., Mima K., Montierth L., Morse R. L.* Self-consistent growth rate of the RTI in an ablatively accelerating plasma // PF. 1985. V. 28. № 12. P. 3676–3682.
477. *Takabe H., Yamamoto A.* Reduction of turbulent mixing at the ablation front of fusion targets // PR. A. 1991. V. 44A. P. 5142.
478. *Talwar S. P.* Zeits. Astrophys. 1959. Bd. 47. S. 161.
479. *Tanveer S.* Singularities in the classical RT flow: formation and subsequent motion // Proc. Roy. Soc. London. A. 1993. V. 441. P. 501–525.

480. *Taylor G. I.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1950. V. 201. P. 192–196.
481. *Thome H., Rabaud M., Hakim V., Couder Y.* The Saffman–Taylor instability: from the linear to the circular geometry // PF. A. 1989. V. 1A(2). P. 224–240.
482. *Trubnikov B. A., Zhdanov S. K.* Unstable quasi-gaseous media // Physics Reports. 1987. V. 155. № 3. P. 137–230.
483. *Turner J. S.* The dynamics of spherical masses of buoyant fluid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1957. V. 239A. P. 6179.
484. *Unno W., Osaki Y., Ando H., Shibahashi H.* Nonradial oscillations of stars // Tokio. University of Tokio Press. 1979. 323 p.
485. *Väisälä V.* Comment. Phys. Math. II. 1925. V. 19. P. 37.
486. *Vanden-Broeck J.-M.* Bubbles rising in a tube and jets falling from a nozzle // PF. 1984a. V. 27. № 5. P. 1090–1093.
487. *Vanden-Broeck J.-M.* Rising bubbles in a two-dimensional tube with surface tension // PF. 1984b. V. 27. P. 2604–2607.
488. *Velikovich A. L.* Analitic theory of RMI for the case of reflected rarefaction wave // PF. 1996. V. 8(6). P. 1666–1679.
489. *Velikovich A. L., Dimonte G.* Nonlinear perturbation theory of the incompressible RMI // PRL. 1996. V. 76. № 17. P. 3112–3115.
490. *Velikovich A. L., Cochran F. L., Davis J.* Suppression of RTI in Z-pinch loads with tailored density profiles // PRL. 1996. V. 77. № 5. P. 853–856.
491. *Verdon C. P., McCrory R. L., Morse R. L., Baker G. R., Meiron D. I., Orszag S. A.* Nonlinear effects of multifrequency hydrodynamic instabilities on ablatively accelerated thin shells // PF. 1982. V. 25(9). P. 1653–1674.
492. *Vorontsov S. V., Zharkov V. N.* Helioseismology // Sov. Sci. Rev. E. Astrophys. Space Phys. Edited by R.A.Sunyaev. Chur. Harwood Academic publishers. 1989. V. 7. Part 1. P. 1–103.
493. *Walters J. K., Davidson J. F.* The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid Part 1. The two-dimensional bubble // JFM. 1962. V. 12(3). P. 408–416.
494. *Walters J. K., Davidson J. F.* The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid Part 2. The three-dimensional bubble and the toroidal bubble // JFM. 1963. V. 17(3). P. 321–336.
495. *Welch J. E., Harlow F. H., Shannon J. P., Daly B. J.* The MAC method: a computing technique for solving viscous incompressible transient fluid flow problems involving free surfaces // Los Alamos Scientific Laboratory Report. LA-3425. 1966.
496. *Wendker H. J., Smith L. F., Israel F. P.* et al. High resolution radio and optical observations of *NGC* 6888 // Astron. and Astrophys. 1975. V. 42. P. 173–182.
497. *Winkler K.-H., Chalmers J. W., Hodson S. W., Woodward P. R., Zabusky N. J.* Numerical laboratory // Physics Today. 1987. V. 40(10). P. 28–37.
498. *Wolf M., Rayet G.* Compte Rendus Acad. Sci. 1867. V. 65. P. 292.
499. *Woosley S. E., Pinto P. A., Ensman L.* Supernova 1987A: six weeks later // Ap. J. 1988. V. 324. P. 466–489.
500. *Wouchuk J. G., Nishihara K.* Linear perturbation growth at a shocked interface // Phys. Plasmas. 1996. V. 3(10). P. 3761–3776.
501. *Yang Y., Zhang Q., Sharp D. H.* Small amplitude theory of RMI // PF. 1994. V. 6. P. 1856–1873.
502. *Yiantsios S. G., Higgins B. G.* RTI in thin viscous films // PF. A. 1989. V. 1A(9). P. 1484–1501.
503. *Youngs D. L.* Numerical simulation of turbulent mixing by RTI // Physica D. 1984. V. 12D. № 1–3. P. 32–44.
504. *Youngs D. L., Hankin B. C., Cowperthwaite N. W.* Application of two–dimensional turbulence model // Proc. 4th IWPCTM. 1993. P. 500–507.
505. *Youngs D. L.* Numerical simulation of mixing by RT and RM instabilities // LPB. 1994. V. 12. P. 725.
506. *Zabusky N. J., Samtaney R.* Vortex deposition and evolution of perturbed 3D RM environments // Proc. 4th IWPCTM. 1993. P. 276.
507. *Zakharov V. E., Dyachenko A. I.* High-Jacobian approximation in the free surface dynamics of an ideal fluid // Physica D. 1996. V. 98D. P. 652–664.
508. *Zaytsev S. G., Chebotareva E. I., Titov S. N.* The study of RTI in continuous interface // Proc. 4th IWPCTM. 1993a. P. 178.
509. *Zaytsev S. G., Chebotareva E. I., Titov S. N.* The initiation and the development of RMI in continuous interface // Ibid. 1993b. P. 297.
510. *Zhang Q., Sohn S.-I.* An analytical nonlinear theory of RMI // Phys. Lett. A. 1996. V. 212A. P. 149.
511. *Zhang Q., Sohn S.-I.* Nonlinear solutions of unstable fluid mixing driven by impulsive force // PF. 1997.
512. *Zuber N.* Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. (ASME). 1958. V. 80. P. 711–720.
513. *Zufiria J. A.* Bubble competition in RTI // PF. 1988. V. 31. № 3. P. 440–446.