А. Н. Иванов

ГИДРОДИНАМИКА развитых кавитационных течений



ЛЕНИНГРАД
«СУДОСТРОЕНИЕ»
1980

УДК 532.528
И20

Ivanov A. N. Hydrodynamics of Developed Cavitating Flows.— L.: Sudostroenie, 1980.— 240 p., ill.— ISBN.

The book deals with cavitation effect and simulated cavitating flow features. It presents theoretical fundamentals of calculation of developed cavitating flows in linear and non-linear problems.

Contents. Main types of cavitation and its analysis and calculation practical aspects. Body jet cavitating flow calculations (non-linear theory). Linearized problems of cavitating flows and ponderable liquids; simulated cavitation utilization for lowering of ship hydrodynamical drag.

Иванов А. Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений.— Л.: Судостроение, 1980.— 240 с., ил.— ИСБН.

Рассмотрены особенности явления кавитации и искусственных кавитационных течений. Изложены теоретические основы расчета развитых кавитационных течений в нелинейной и линейной постановках задач. Особенное внимание уделено численным методам расчета плоских и осесимметричных развитых кавитационных течений невесомой и весомой жидкостей, а также применению искусственной кавитации для снижения гидродинамического сопротивления судов. Проанализированы основные практические задачи в области изучения кавитации.

Книга предназначена для специалистов отраслевых научно-исследовательских и проектных организаций, занятых проблемами кавитации, может быть полезна студентам кораблестроительных вузов.
Ил. 177. Табл. 4. Лит. 86 назв.

Рецензент докт. техн. наук Я. И. ВОЙТКУНСКИЙ

И $\frac{31805-040}{048(01)-80}$ 58—80 3605030000 © Издательство «Судостроение», 1980 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследования в области кавитации в течение последних десятилетий проводятся с неослабевающей интенсивностью. Это обусловлено двумя основными причинами — большой практической значимостью в первую очередь в таких отраслях техники, как судостроение и гидротурбостроение, и чрезвычайной сложностью явления кавитации.

К настоящему времени кроме большого числа публикаций в периодических изданиях вышло в свет несколько фундаментальных монографий, освещающих различные аспекты кавитации. Среди наиболее близких по тематике к настоящей могут быть названы монографии Г. Биркгофа, Э. Сарантонелло [12], М. И. Гуревича [23], А. Д. Перника [47], а также учебное пособие В. В. Рождественского [49].

Автор стремился создать у читателя по возможности цельное представление о физической сущности кавитации, о ее возникновении и развитии на телах различной формы, практической значимости и месте развитой формы кавитации среди других ее форм, а также о том влиянии, которое оказывают на развитую кавитацию реальные свойства жидкости (вязкость и капиллярность) и свойства материала поверхности тел, не учитываемые в идеализированной модели, на основании которой построено подавляющее большинство современных расчетных методов. Основной предмет данной монографии — вопросы гидродинамики развитых кавитационных течений. В настоящее время они наиболее полно разработаны в теории плоских кавитационных течений, чему в немалой степени способствовало наличие хорошо развитого математического аппарата теории функций комплексной переменной. Вопросы гидродинамики пространственных течений, в частности осесимметричных, разработаны менее подробно вследствие неприменимости для этого случая названного выше математического аппарата.

Эффективные методы расчета кавитационного обтекания тел, близких по обводам к реальным конструкциям, вследствие больших математических трудностей в полной мере не разработаны. С помощью методов классической теории струй к настоящему времени удалось произвести лишь расчеты обтекания контуров простейшей формы — клина, плоской и слабоизогнутой пластинки, круга и т. п. Опубликованы немногие расчеты осесимметричных кавитационных течений (обтекание шара, диска и конуса).

В последние годы, рассматривая развитые установившиеся кавитационные течения, все чаще стали обращаться к так называемому методу интегральных уравнений, впервые примененному Треффтцем [82] для расчета истечения струи идеальной жидкости из кругового отверстия в плоскости.

Метод интегральных уравнений, например, успешно использован в работе [20] для расчета кавитационного обтекания конуса. Этот универсальный метод в перспективе может быть применен при расчетах кавитационного обтекания реальных конструкций, часто имеющих довольно сложную форму.

Автор настоящей монографии и его коллеги по работе в течение ряда лет использовали метод интегральных уравнений для численного решения нелинейных задач плоского и осесимметричного установившегося кавитационного обтекания тел произвольной формы. Результаты работы в этом направлении, главное внимание в которой обращалось на разработку таких приемов решения задач, которые могли бы быть использованы широким кругом специалистов-гидромехаников в их практической работе, приведены в настоящей книге.

В монографии также нашли отражение задачи о кавитационном течении на нижней поверхности погруженной в жидкость и глиссирующей пластинок с учетом силы тяжести; об обтекании стойки, пересекающей свободную поверхность жидкости, при наличии прососа к ее поверхности воздуха; об установившихся волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости. Несмотря на кажущуюся разнородность, эти задачи объединены общностью постановки и решения, характерными для задач о развитых кавитационных течениях.

Особое место в книге уделено до сих пор не рассматривавшемуся вопросу об определении условий существования различных форм кавитации, отличных от развитой, которые часто наблюдаются в опытах. Определенный прогресс в этом направлении оказался возможным на основе анализа характера решений задачи о развитой форме кавитации с учетом вязкости и капиллярных свойств жидкости.

Книга содержит значительное количество новых расчетных данных, которые можно использовать при решении конкретных инженерных задач.

Подробные библиографические сведения, охватывающие практически все работы по развитым установившимся кавитационным течениям, опубликованные к моменту написания настоящей монографии, содержатся в упомянутых выше книгах, а также в обзорах [22, 24]. В предлагаемом читателям издании приведены преимущественно ссылки на работы, в которых основное внимание уделено методу интегральных уравнений.

К. В. Александровым написаны § 25, 26, § 43—45, автором монографии совместно с Э. Л. Амроминым — гл. V и VI. Автор выражает благодарность К. В. Александрову и Э. Л. Амромину, внесшим существенный вклад в разработку решения кавитационных задач с использованием метода интегральных уравнений, считает долгом выразить благодарность также С. А. Леняшину и А. О. Эллеру, выполнившим экспериментальные исследования и ряд расчетов, глубоко признателен Я. И. Войткунскому, просмотревшему монографию в рукописи и внесшему ряд ценных замечаний.

Замечания и отзывы о книге направлять по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8, издательство «Судостроение».

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ФОРМЫ КАВИТАЦИИ

Возникновение кавитации связано с появлением разрывов сплошности жидкости. В местах нарушения сплошности появляются полости (каверны), заполненные парами жидкости и газами. Каверны возникают при понижении давления в жидкости до некоторого предела или при ее нагревании. Они также могут возникнуть вследствие выделения газов в пространство, заполненное жидкостью при подводных взрывах и т. п.

Ввиду сложности явления до настоящего времени в публикациях сохраняется терминологическая пестрота и условность в определении форм кавитации, наблюдаемой в экспериментах. Вместе с тем в теории давно уже сложилось четкое деление кавитации на так называемую пузырьковую и развитую. Другие более сложные формы кавитации трудно характеризовать какими-либо устойчивыми признаками, поэтому им здесь дано общее условное наименование смешанной кавитации. Этот термин введен формально, он не отражает глубоких физических признаков указанной формы кавитации. Смешанная форма кавитации всего ближе к так называемой перемещающейся кавитации [38].

Приведенная простая классификация охватывает практически все важные случаи кавитации, возникающей при обтекании жидкостью различных тел.

§ 1. Ядра кавитации

В чистых жидкостях связь между молекулами является настолько прочной, что для ее разрыва согласно теоретическим данным необходимо было бы прикладывать растягивающие напряжения порядка нескольких тысяч килограммов на квадратный сантиметр.

В реальных условиях для разрыва сплошности жидкости не нужно создавать больших растягивающих напряжений. В большинстве практически важных случаев разрыв часто возникает даже при положительных значениях давления в жидкости,

близких к значениям ее насыщенных паров. Например, для воды при комнатной температуре указанное давление составляет 1000—2000 Н/м^2.

Основная причина большого снижения прочности — наличие в жидкости нерастворенных газов. Газовые включения при рассмотрении кавитационных процессов называют ядрами кавитации. Если условно предположить, что ядра имеют форму сферических газовых пузырьков, то их радиус оценивается величиной порядка 10^{-6}—10^{-4} м [17, 75].

Ядра в потоке кавитационных и гидродинамических труб могут быть значительно больших размеров вследствие роста мелких пузырьков за счет диффузии газа из окружающей жидкости. Хотя диффузия происходит медленно, пузырьки могут достигать значительных размеров, так как многократно проходят по замкнутому циклу через зону пониженного давления рабочих участков экспериментальных установок. За счет диффузии могут вырасти до больших размеров также пузырьки, продолжительное время находящиеся в зоне пониженного давления вблизи корпуса судна.

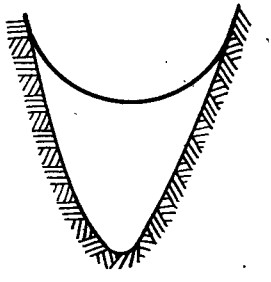


Рис. 1. Сечение микропоры

Для объяснения существования устойчивых ядер в виде свободных пузырьков газа, находящихся в жидкости, вводят гипотезы. Известно, что достаточно крупные пузырьки должны всплывать, а мелкие, участвующие в броуновском движении, вследствие больших сил поверхностного натяжения — растворяться. Чтобы выйти из этого затруднения, допускают существование оболочек из органических веществ, ослабляющих поверхностное натяжение на границе пузырька и препятствующих диффузии газа из пузырька в окружающую жидкость.

Наиболее аргументированной представляется гипотеза, высказанная Е. Н. Гарвеем и др. [68], согласно которой включения нерастворенного газа концентрируются вблизи гидрофобных (несмачиваемых) поверхностей микротрещин твердых тел, а также микроскопического размера частиц, находящихся в жидкости во взвешенном состоянии. На рис. 1 схематически показано сечение микропоры и поверхности раздела между газом и жидкостью. Вследствие того, что граница раздела выпуклостью обращена в сторону газовой полости, силы поверхностного натяжения направлены внутрь жидкости. Это приводит к снижению давления газа внутри полости по сравнению с давлением в жидкости и препятствует диффузии газа из полости внутрь жидкости, способствуя стабилизации ядра кавитации.

§ 2. Возникновение кавитации при обтекании твердых тел

Ядра кавитации, попав в зоны пониженного давления, начинают увеличиваться в размерах. Если понижение давления происходит сравнительно медленно, то объем газового пузырька (ядра) растет также медленно (квазистационарно) за счет расширения под действием пониженного давления и диффузии газа внутрь пузырька из окружающей жидкости. Такое явление принято называть газовой кавитацией [47].

Процесс диффузии может оказывать существенное влияние на рост пузырьков и тогда, когда давление понижается быстро, но на небольшую величину. При этом под действием внешнего давления пузырек быстро расширяется. Объемная концентрация газа в нем и парциальное давление в начальный момент резко уменьшаются, а затем постепенно увеличиваются за счет диффузии газа внутрь пузырька из окружающей жидкости, если время действия пониженного давления достаточно продолжительно. Диффузия сопровождается дальнейшим медленным ростом пузырька. Условия, при которых существенное влияние на развитие пузырька оказывает диффузия газа, определяются не только величиной и характером изменения давления в жидкости во времени, но и величиной начального объема ядра кавитации.

При быстром и большом по величине понижении давления устойчивое равновесие пузырька может нарушиться, и тогда он будет расширяться очень быстро, взрывоподобно, достигая максимальной величины за время порядка 10^{-3} с. Так как диффузия происходит медленно, лишь небольшое количество газа из окружающей жидкости попадает внутрь пузырька, поэтому каверна, достигшая максимального размера, заполнена в основном паром жидкости. В процессе развития кавитации в потоке, обтекающем твердые тела, возможны оба отмеченные выше варианта роста пузырьков из ядер.

Характер развития кавитации существенным образом зависит не только от наличия ядер кавитации, но и от картины распределения давлений и скоростей в потоке, обтекающем тело. Первые вспышки кавитации, под которыми подразумевается рост ядер до видимых невооруженным глазом размеров, наблюдаются, как правило, в тех областях потока, где давление минимально. Эти области находятся на поверхности тела или внутри потока в ядрах вихрей. Последние появляются при отрыве пограничного слоя от острых кромок и в местах больших положительных градиентов давления на теле. Одним из наиболее характерных примеров таких вихрей являются вихри так называемой дорожки Кармана, которые отчетливо наблюдаются при обтекании цилиндра в направлении, перпендикулярном его оси. Вихри формируются за миделем цилиндра и относятся вниз по потоку.

В некоторых случаях положение вихрей относительно тела может быть сравнительно стабильным, как например при обтекании передней острой кромки крыла при малых значениях угла атаки, внутренних углов, образованных твердыми стенками, и т. п.

Вихри возникают также вблизи свободных концов крыла конечного размаха и вытягиваются на большое расстояние вниз по потоку в виде вихревых шнуров (свободные вихри), приблизительно перпендикулярных размаху крыла.

Процесс возникновения и смены различных форм кавитации — пузырьковой, смешанной и развитой — будет подробно прослежен при рассмотрении типичных вариантов кавитационного обтекания твердых тел, которыми исчерпываются, по существу, все основные случаи кавитационных течений, встречающихся в реальных условиях.

§ 3. Основные безразмерные критерии, используемые при изучении кавитации

Число кавитации является главным безразмерным параметром, характеризующим степень развития кавитации,

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_k}{\rho v_\infty^2/2}, \tag{1.1}$$

где σ — число кавитации; p_∞, v_∞ — давление и скорость в невозмущенном набегающем потоке; p_k — некоторое характерное давление; ρ — плотность жидкости.

Если под p_k подразумевать напряжение, характеризующее кавитационную прочность жидкости, то число кавитации будет отражать условия в невозмущенном потоке (статическое давление и скорость), при которых возникает кавитация.

Кавитационная прочность движущейся жидкости зависит от многих факторов, в том числе от величины и количества ядер кавитации, величины пониженного давления и времени его воздействия на ядро кавитации, состояния поверхности тела и т. п. Указанные факторы трудно контролируемы и весьма изменчивы, поэтому кавитационная прочность жидкости в реальных условиях варьируется в очень широких пределах. Это одна из основных причин большого разброса в значениях так называемого критического числа кавитации, соответствующего моменту возникновения кавитации, при определении его путем экспериментов в кавитационных и гидродинамических трубах.

На величину разброса критического числа кавитации в лабораторных условиях существенно влияют пониженные по срав-

нению со значениями атмосферного давления значения p_∞. Величина p_k может составлять заметную долю от p_∞, поэтому изменение p_k вызовет сильное колебание разности $p_\infty - p_k$, стоящей в числителе формулы (1.1).

Во многих случаях при движении тел в жидкости и работе гидравлических механизмов, например судовых гребных винтов, величина p_∞ имеет порядок атмосферного давления, т. е. 100 000 Н/м^2.

Если считать, как это часто делают, что напряжение, при котором нарушается кавитационная прочность воды, имеет порядок давления насыщенных паров жидкости, то p_k будет составлять примерно 1 % от p_∞. В этих условиях даже существенные изменения кавитационной прочности (в несколько раз) сравнительно мало повлияют на величину критического числа кавитации.

Как показывают опыты, в частности, описанные в работе [32], величина p_k может колебаться в пределах от значения давления насыщенных паров жидкости до величины, превосходящей его более чем в два раза. При проведении опытов величину p_k часто также считают равной давлению насыщенных паров, так как измерение давления в каверне связано с существенными техническими трудностями.

При рассмотрении развитых кавитационных течений в качестве p_k принимают величину давления в каверне. В этом случае число кавитации однозначно определяет (теоретически) форму каверны, образующейся около тела, и кавитационное течение в целом. Чем меньше число кавитации, тем длиннее и толще будет каверна.

В случае развитых кавитационных течений и возникновения каверн большой толщины при сравнительно малых скоростях потока может оказаться заметным влияние силы тяжести жидкости, приводящее к всплытию каверны. При этом наблюдаются также значительные деформации поперечных сечений каверны по сравнению со случаем кавитации при малом влиянии силы тяжести.

Для возможно более полной характеристики таких течений необходимо ввести дополнительный безразмерный параметр — число Фруда

$$\mathrm{Fr} = \frac{v_\infty}{\sqrt{gl}}, \qquad (1.2)$$

где g — ускорение свободного падения; l — характерный поперечный размер тела, например его наибольшая ширина.

При обтекании препятствий малого размера образуются каверны, кривизна границ которых может оказаться весьма большой. При моделировании таких течений нельзя пренебрегать

капиллярными силами, поэтому необходимо учитывать безразмерный параметр — число Вебера

$$\mathrm{We}=\frac{\gamma_1}{l\rho v_\infty^2}, \qquad (1.3)$$

где γ_1 — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Капиллярность имеет существенное значение и в случае (см. гл. VI) обтекания жидкостью тел с плавными обводами в режиме развитой кавитации, когда положение точек отрыва каверны при тех же прочих условиях существенным образом зависит от краевого угла. Краевым углом β в точке раздела трех фаз (твердой, жидкой и газообразной) называется угол между внешней нормалью к смоченной поверхности тела и нормалью к поверхности раздела газ—жидкость, направленной в сторону газа. От величины краевого угла зависят и другие важные параметры кавитации — размеры каверны и величина числа кавитации, при котором возникает ее развитая форма. Таким образом, краевой угол сам по себе должен быть включен в число безразмерных параметров при изучении кавитационных течений.

Менее ясна роль в вопросах моделирования кавитации числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re}=\frac{v_\infty l}{\nu}, \qquad (1.4)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости. Влияние на кавитационные течения пограничного слоя, основным безразмерным параметром при моделировании которого является число Рейнольдса, может сказаться двояко — привести к изменению давлений вблизи поверхности тела или к возникновению пульсаций скоростей и давлений в пограничном слое.

При обтекании жидкостью тел с плавными обводами без отрыва пограничного слоя при реально имеющих место скоростях потока и размерах тел, влияние числа Рейнольдса, по-видимому, несущественно. Однако несомненно его существенное влияние на величину и характер давлений, возникающих в зонах местного (локального) и развитого отрыва пограничного слоя.

Влияние пульсаций в пограничном слое, по-видимому, может иметь существенное значение при рассмотрении вопроса возникновения кавитации в зоне перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Многочисленными экспериментами установлена большая роль ядер кавитации не только при возникновении кавитации, но и, в определенной степени, при ее развитии. Однако вопросы моделирования и составления безразмерного критерия с учетом сказанного пока неясны. Тем не менее при анализе экспериментальных данных эти факторы всегда необходимо иметь в виду.

§ 4. Кавитационное обтекание тел в отсутствие отрыва пограничного слоя

Если распределение давления по контуру продольного сечения тела достаточно плавное, без участков с большими положительными градиентами давления, то отрыва пограничного слоя не будет. На рис. 2 изображены схематически контур продольного сечения тела и соответствующая ему эпюра распределения коэффициента давления $\bar{p}(x)\left(\bar{p}=\frac{p-p_\infty}{\rho v_\infty^2/2}\right)$, где p — статическое давление в точке тела, определяемой абсциссой x.

При обычных скоростях обтекания, размерах моделей, испытываемых в кавитационных и гидродинамических трубах, и соответствующих натурных конструкциях диффузионный рост ядер, находящихся в набегающем потоке и попадающих вблизи поверхности тела на непродолжительное время в зону пониженного давления, мало вероятен.

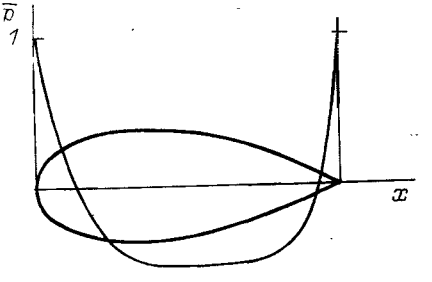


Рис. 2. Эпюра распределения давления на теле

Если же ядра находятся в микропорах поверхности тела, время их пребывания в зоне пониженного давления может быть достаточно большим, и тогда появится возможность диффузионного роста. В этом случае в зависимости от величины давления вблизи его минимума, скорости потока, количества растворенного в жидкости газа и других факторов эволюция пузырьков, выросших из ядер, будет проходить двумя различными путями.

В одном случае пузырьки за счет диффузии могут вырасти до значительных размеров, сопоставимых с толщиной пограничного слоя. При этом статическое давление в зоне расположения пузырьков может быть не настолько низким, чтобы вызвать их взрывоподобный рост. Такие большие пузырьки под действием архимедовых сил и потока оторвутся от поверхности тела и покинут его пределы.

В другом случае, когда давление достаточно низко, могут потерять устойчивость пузырьки, выросшие вследствие диффузии до сравнительно малых размеров. Они не успеют оторваться от поверхности тела и после потери устойчивости за очень короткое время вырастут до заметных размеров. На этапе быстрого роста пузырек заполняется преимущественно паром за счет испарения окружающей жидкости, поэтому такую кавитацию называют паровой.

В дальнейшем будет рассмотрен только наиболее интересный случай кавитации, возникающей вследствие роста ядер, содержащихся в набегающем потоке.

Итак, пока величина давления в зоне минимума не понизится настолько, чтобы самые крупные ядра потеряли устойчивость, паровая кавитация не возникнет. Здесь следует заметить, что термины «начало кавитации», «возникновение кавитации» или, как иногда говорят, «порог кавитации» условны, поскольку обнаружение начальных стадий кавитации существенным образом зависит от способа ее регистрации (визуальный, инструментальный). В принципе мыслимы условия, при которых ядро может потерять устойчивость, вырасти за очень короткое время до максимального размера и не быть обнаруженным визуально. Это возможно тогда, когда указанный максимальный размер выросшего пузырька окажется достаточно малым. Вместе с тем, процесс роста ядра вследствие потери устойчивости может квалифицироваться как паровая кавитация, которая может быть обнаружена инструментальными методами, например, с помощью акустических измерений звука, излучаемого пузырьком при быстрых изменениях его объема.

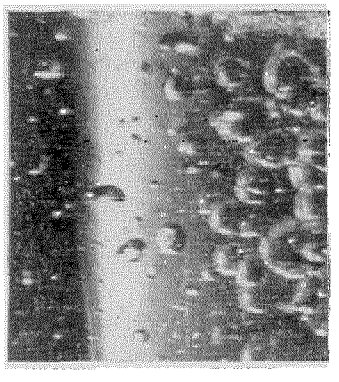


Рис. 3. Расположение пузырьков вблизи поверхности крыла

В дальнейшем, как это было обусловлено выше, речь будет идти только о кавитации, регистрируемой визуальным способом без применения оптических, акустических или других инструментов.

При понижении давления в зоне минимума до некоторой критической величины самые крупные ядра, попадающие в эту зону, теряют устойчивость, вырастают до больших размеров и легко регистрируются визуально. Каверны, выросшие из ядер, сносятся потоком в хвостовую часть тела, где давление повышается. В зоне повышенного давления каверны схлопываются, производя характерный сильный треск.

В стадии расширения каверны имеют форму, близкую к сферической. Крупные каверны при схлопывании могут терять сферическую форму и дробиться на мелкие части. На рис. 3 показаны пузырьки в стадии роста, образовавшиеся вблизи поверхности крыла, находящегося в рабочем участке кавитационной трубы. На этом рисунке, а также на рис. 4, 5 набегающий поток направлен слева направо, а передняя кромка крыла затемнена и находится непосредственно слева от хорошо ви-

димой вертикальной светлой полосы, простирающейся вдоль размаха крыла.

Если насыщение потока ядрами кавитации невелико, то первые единичные каверны вблизи поверхности тела образуются редко — через значительные промежутки времени. По мере понижения давления начинают вырастать каверны из все более мелких ядер, и на поверхности тела может существовать одновременно уже значительное количество каверн в разных стадиях развития и схлопывания. На рис. 4, *а* представлена более глубокая стадия развития кавитации по сравнению с кавитацией, показанной на рис. 3.

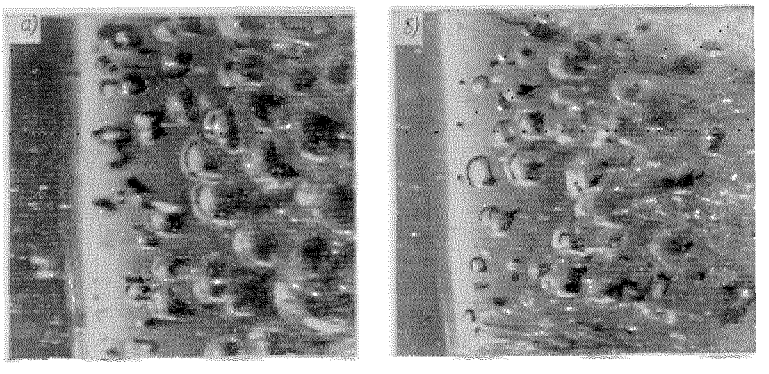


Рис. 4. Кавитация на крыле

При дальнейшем понижении давления каверны заполняют значительную область вблизи тела, средняя их плотность в которой становится значительно меньше плотности жидкости. Отдельные каверны (пузырьки) уже трудно различимы (рис. 4, *б*).

Последний этап развития кавитации связан с образованием так называемой присоединенной каверны [38]. В своей выраженной форме течение с присоединенной каверной существенно отличается от течений, характерных для описанных выше стадий кавитации. На теле образуется единый кавитационный пузырь, границы которого при достаточно глубокой стадии кавитации на большей своей протяженности стабильны во времени, прозрачны и напоминают стенки стеклянного сосуда, наполненного воздухом и опущенного в воду. Основной отличительной чертой присоединенной каверны является примыкание передней ее границы к телу в фиксированных точках, положение которых со временем практически не меняется. В хвостовой части каверны могут наблюдаться сильные нестационарные движения. Пузырь, как и каверна, образованная путем роста отдельного ядра кавитации, заполнен газом и паром жидкости.

Внутрь каверны через обратную струйку, образующуюся в хвостовой части, пульсациями поступают порции жидкости из внешнего потока. Эта струйка направлена навстречу основному потоку, внутри каверны она дробится, визуально напоминая

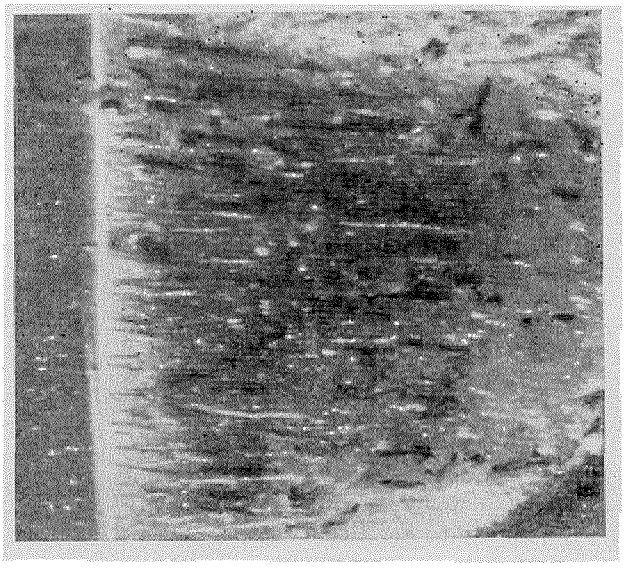


Рис. 5. Присоединенная каверна

пенно-брызговую массу, попадает на границы каверны и вновь поступает в поток, обтекающий каверну. На рис. 5 показана присоединенная каверна, а на рис. 6 схематически изображены

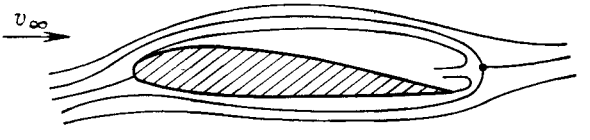


Рис. 6. Схема течения, соответствующего присоединенной каверне

граница каверны, линии тока и обратная струйка в некоторый момент времени.

Течение с присоединенной каверной очень близко к теоретической модели развитого кавитационного течения, поэтому может быть названо развитым или отрывным кавитационным течением, как его часто называют в отечественной литературе [23] (в дальнейшем будет употребляться термин «развитое кавитационное течение»).

На приведенном примере кавитационного обтекания тела с плавным распределением давления вдоль контура продольного сечения прослежена смена трех форм кавитации — пузырьковой, смешанной и развитой, определение которых дано ниже.

Кавитацию, когда в кавитационной области различимы (визуально или, например, в результате скоростной киносъемки) отдельные каверны в виде пузырьков, условимся называть пузырьковой.

Кавитацию, когда на теле образуется единый кавитационный пузырь с фиксированными точками присоединения его передней границы к телу, положение которых не меняется с течением времени, условимся называть развитой.

Смешанная форма кавитации — термин сугубо условный. Эта форма пока слабо изучена и не представляется возможным выделить определенные ее признаки. Смешанной формой, а может быть, точнее, смешанными формами кавитации, можно считать все ее формы, не подходящие под определение пузырьковой и развитой кавитации. Последние более точно будут охарактеризованы в § 9 и 10. Часто кавитационные пузырьки наблюдают в потоке вблизи зоны развитой и смешанной кавитации. В этом случае пузырьковая кавитация существует совместно с двумя последними.

Визуально кавитация смешанной формы воспринимается, как пузырящаяся белесого цвета область вблизи поверхности тела. В отличие от пузырьковой формы в кавитационной области, занятой кавитацией смешанной формы, отдельные пузырьки невозможно обнаружить даже с помощью скоростной киносъемки. На кинокадрах эта область предстает в виде неправильной формы больших пузырчатых образований, находящихся в сильных нестационарных движениях.

Кавитационная область, занимаемая кавитацией смешанной формы, при фотосъемке с большой экспозицией напоминает каверну развитой кавитации (рис. 7). Однако в отличие от развитой формы с помощью скоростной киносъемки, а иногда и визуально обнаруживается нестабильность во времени точек присоединения передней границы этой области к телу и сильные колебания границ кавитационной области.

Процессы перехода одной формы кавитации в другую представляют принципиальный и практический интерес, поэтому целесообразно на них остановиться подробнее.

Если на поверхности обтекаемого тела нет зон отрыва пограничного слоя, то при наличии в потоке достаточного количества ядер кавитации переход пузырьковой формы в смешанную наблюдается как непрерывный процесс. Первоначально вблизи поверхности тела в зоне пониженного давления возникает пузырьковая кавитация. По мере понижения давления область, заполненная пузырьками, расширяется, а в ее

хвостовой части появляется зона кавитации смешанной формы. При дальнейшем понижении давления эта зона расширяется вверх и вниз по потоку. Таким образом, возможны режимы совместного существования пузырьковой и смешанной форм кавитации. Последняя в дальнейшем может совсем вытеснить пузырьковую кавитацию.

Возникновение же развитой формы кавитации следует, по-видимому, рассматривать как процесс скачкообразный, не связанный с постепенным накоплением пузырьковых масс в кавитационной области по мере понижения давления. Моментом перехода смешанной формы кавитации к развитой считается появление в головной части белесой области, занятой смешанной формой в виде узкой прозрачной ленточки (рис. 8).

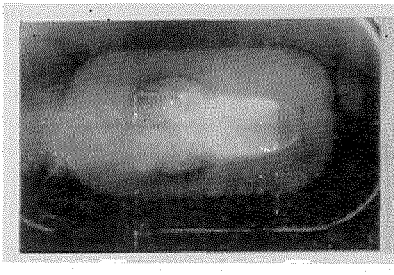


Рис. 7. Смешанная форма кавитации



Рис. 8. Развитая форма кавитации

Линия примыкания к телу прозрачной части каверны с течением времени практически не изменяется, что является одним из главных характерных признаков развитой кавитации. При дальнейшем углублении кавитации каверна не претерпевает существенных качественных изменений, а лишь расширяется доля прозрачной части ее границы.

При малом количестве ядер кавитации в набегающем потоке развитой кавитации может непосредственно предшествовать пузырьковая.

В принципе возможно возникновение кавитации развитой формы, которой не предшествовали режимы пузырьковой и смешанной кавитации. Такая ситуация имеет место тогда, когда из потока удалены все сравнительно крупные ядра, которые могли бы вызвать появление парогазовых пузырьков. В этом случае для инициирования кавитационного пузыря, соответствующего развитой кавитации, достаточно ввести извне в зону пониженного давления на теле лишь один газовый пузырек, чтобы нарушить прочность жидкости первоначально в одной небольшой области. Под действием растягивающих напряжений в потоке, возникающих при обтекании не охваченных кавитацией участков поверхности тела, пузырек быстро

увеличится в объеме, заполняя в первую очередь места пониженного давления, пока не образуется единый устойчивый кавитационный пузырь, соответствующий режиму развитой кавитации. Явление внезапного возникновения развитой формы кавитации, минуя пузырьковую и смешанную, можно часто наблюдать при испытании тел в гидродинамических трубах с ресорбером, благодаря которому крупные ядра кавитации отсутствуют. При фиксированной скорости потока и постепенном, но сравнительно быстром понижении давления в некоторый момент на теле сразу возникает большая каверна со стационарной передней границей присоединения к телу. Если в дальнейшем давление повышать, то каверна может исчезнуть внезапно.

Переход кавитации развитой формы в смешанную и пузырьковую аналогичен описанному выше, но происходит в обратном порядке. Однако здесь нельзя ожидать полного совпадения условий (статическое давление и скорость набегающего потока), при которых происходит разграничение между различными формами кавитации, так как возможны явления гистерезисного характера.

При анализе кавитационного обтекания тел важно отметить, что в возникновении и развитии пузырьковой формы кавитации большое значение имеет количество и размеры ядер кавитации в набегающем на тело потоке. При эволюции смешанной формы влияние ядер уже гораздо меньше, а при возникновении кавитации развитой формы и ее дальнейшей эволюции роль ядер кавитации практически ничтожна. Существование развитой формы кавитации определяется главным образом условиями, при которых линия присоединения передней границы каверны к телу будет устойчивой при воздействии возмущений, главными из которых являются турбулентность в потоке, воздействие обратной струйки на границы каверны, вибрация тела и т. п.

§ 5. Кавитационное обтекание тел при наличии локальных зон отрыва пограничного слоя

Если кривизна контура продольного сечения тела или касательная к нему меняется резко или скачком, то возможно появление отрывов пограничного слоя, локализованных в небольшой по протяженности зоне. В качестве типичного примера может быть названо обтекание крыла с тонким профилем и острой передней кромкой. При малых углах атаки вдоль передней кромки крыла возникает отрыв пограничного слоя, локализованный в зоне, составляющей сотые доли хорды. За зоной отрыва пограничный слой присоединяется к поверхности крыла, а в самой зоне образуется вихрь с осью, параллельной передней кромке крыла.

Попавшие в вихревую зону ядра кавитации могут там находиться длительное время в условиях пониженного давления и расти за счет диффузии газа из окружающей жидкости. При некоторой величине внешнего статического давления в набегающем потоке ядра достигают видимых размеров, область в районе ядра вихря становится тоже видимой и представляет собой цилиндр с образующей, параллельной кромке крыла. С дальнейшим понижением давления сечение этого цилиндра растет, он сплющивается и вытягивается по потоку. Далее стенки кавитационной зоны (каверны) становятся прозрачными, а передняя часть ее границы присоединяется к передней кромке крыла. Этот момент можно назвать моментом наступления развитого кавитационного течения. По мере дальнейшего понижения давления каверна утолщается и удлиняется. После достижения хвостом каверны приблизительно середины хорды крыла дальнейший рост каверны сопровождается сильными ее колебаниями. Об этом более детально будет сказано в следующем параграфе. Кавитация в вихре, предшествующая кавитации развитой формы, локализована в очень малой зоне вблизи передней кромки и не оказывает заметного влияния на гидродинамические силы, приложенные к крылу.

Совершенно аналогичный характер носит возникновение и развитие кавитации и в том случае, когда у крыла передняя кромка скруглена, но появляется узкий пик пониженных давлений, обусловленный резким изменением радиуса кривизны профиля вблизи передней кромки.

Точно такую же картину возникновения и развития кавитации можно наблюдать в другом типичном случае при продольном обтекании круглого цилиндра с носовой частью в форме полусферы одинакового диаметра с цилиндром.

При анализе возможности отрыва пограничного слоя в этом случае не должна вводить в заблуждение экспериментально полученная картина распределения давлений в меридиональном сечении тела, так как предсказать по ней отрыв не представляется возможным. Однако расчет показывает наличие в месте сопряжения полусферы и цилиндра, где радиус кривизны меридионального сечения изменяется скачком от конечной величины до нуля, большого положительного градиента давлений, локализованного в очень узкой зоне. Теоретически при приближении по полусфере к месту сопряжения градиент растет до бесконечности по логарифмическому закону. Зона образовавшегося там отрыва была изучена с помощью тонких опытов Виджеем Х. Аракери [63].

В зоне отрыва вблизи сочленения полусферы с цилиндром так же, как и вблизи передней острой кромки крыла, образуется вихрь, как кольцом охватывающий поперечное сечение тела. Поскольку вихрь занимает сравнительно стационарное положение относительно поверхности тела, в его центре могут

скапливаться ядра кавитации, подверженные диффузионному росту. Образование кольцевых кавитационных зон многократно регистрировалось многими исследователями (рис. 9) [38]. Дальнейший рост каверны происходит так же, как на крыле. Сначала по мере понижения статического давления в набегающем потоке поперечное сечение кольца растет, затем сплющивается, а граница его становится прозрачной, далее передняя часть границы присоединяется к поверхности тела. Последующее удлинение кольцевой каверны происходит в основном за счет продвижения ее хвоста вниз по потоку, тогда как передняя часть границы очень медленно движется вверх по потоку. На рис. 10 показана каверна в развитой стадии после присо-

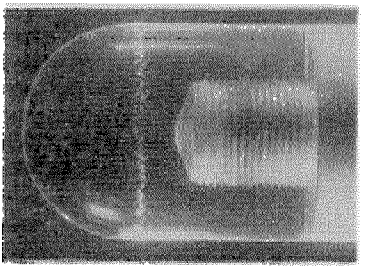


Рис. 9. Кольцевая каверна

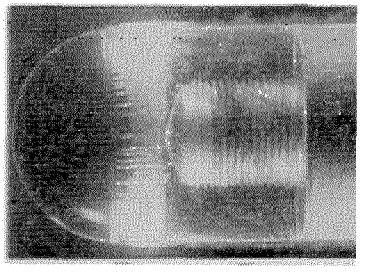


Рис. 10. Кольцевая каверна в развитой стадии

единения передней части ее границы к телу. Темп увеличения толщины каверны значительно ниже, чем рост длины. По мере роста каверны так же, как на крыле, появляется обратная струйка в ее хвостовой части. Толщина струйки растет с ростом каверны. При этом, если интенсивность обратной струйки невелика, границы каверны сравнительно стационарны.

При мощной обратной струйке картина в кавитационной зоне приобретает существенно нестационарный характер. Этот случай подробно изучен Р. Кнэппом [38] на примере плоского кавитационного обтекания тела, контур продольного сечения которого представляет собою две параллельные прямые, замкнутые в носовой части полукругом.

Согласно Р. Кнэппу, поведение каверны имеет циклический характер, а каждый цикл ее существования состоит из трех фаз.

В первой фазе происходит рост каверны. При этом передняя линия присоединения каверны к телу находится в носовой части тела вблизи минимума давления, соответствующего бескавитационному обтеканию, и с течением времени практически не изменяет своего положения. Каверна же в целом растет в длину за счет перемещения хвостовой части вниз по потоку.

Через какое-то время она достигает некоторой максимальной длины и толщины, и начинается следующая фаза. На рис. 11, *а* схематически изображено состояние каверны в некоторый момент, характерный для первой фазы.

В начале второй фазы внутренность каверны начинает заполняться через обратную струйку жидкостью. При этом длина каверны с течением времени изменяется мало, а передний фронт обратной струйки продвигается к головной части каверны. К концу второй фазы значительная часть объема каверны заполняется жидкостью, обратная струйка касается передним фронтом границы каверны, образуя замкнутый кавитационный пузырь (рис. 11, *б*).

В третьей фазе указанный пузырь сносится вниз по течению. Одновременно в головной части тела растет новая каверна,

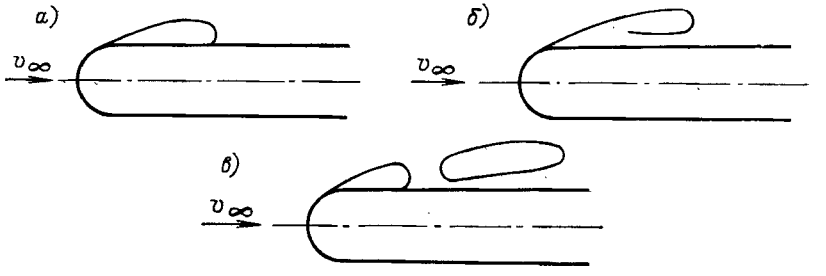


Рис. 11. Схема каверны: *а* — в первой фазе; *б* — во второй фазе; *в* — в третьей фазе

и начинается первая фаза следующего цикла. Циклы могут повторяться через приблизительно равные промежутки времени, а картина течения будет периодической. Однако вследствие возмущений во внешнем потоке правильная периодичность может нарушаться. При этом передний фронт обратной струйки может не доходить до головной части каверны, касаясь ее границы ближе к хвостовой части. Образующийся вследствие этого кавитационный пузырь будет меньшего размера, и время его образования соответственно уменьшится (рис. 11, *в*).

Как видно из приведенной выше картины возникновения и развития кавитации, на первом этапе образования каверны оказывается очень существенным влияние вязкости жидкости, обусловливающей образование зон отрыва пограничного слоя, локализованных в небольшой области. При дальнейшем развитии кавитации начинают преобладать инерционные силы, а влияние сил вязкости постепенно уменьшается. В тех случаях, когда радиусы кривизны границ каверн невелики, могут оказать существенное влияние также силы поверхностного натяжения.

§ 6. Некоторые особенности кавитационного обтекания профилей крыльев

В отличие от процессов развития кавитации на ненесущих телах при развитии кавитации на крыльевых профилях может иметь существенное значение обратное влияние каверны на подъемную силу крыла. Это влияние становится особенно ощутимым на тех стадиях развития кавитации, на которых длина каверны соизмерима с хордой крыла.

До тех пор пока хвостовая часть каверны не достигнет приблизительно середины хорды, развитие каверны происходит плавно. При постепенном понижении статического давления в набегающем потоке или увеличении его скорости каверна также постепенно удлиняется и утолщается. После достижения каверной некоторой критической длины наблюдаются очень сильные ее колебания. Хвостовая часть каверны при неизменных параметрах набегающего потока перемещается вдоль профиля крыла от середины хорды до задней кромки и обратно, совершая колебания со сравнительно стабильным периодом. При этом даже в условиях очень большой стабильности давления и скорости потока практически невозможно получить каверну стабильной длины. Колебания хвоста каверны сопровождаются значительными колебаниями подъемной силы. Когда длина каверны станет большей приблизительно 1,2 хорды крыла, дальнейший ее рост вновь будет плавным, а колебания хвоста уменьшатся.

Для профилей с острой передней кромкой сегментного типа при углах атаки, близких к углам безударного обтекания, можно наблюдать одновременное развитие кавитации на выпуклой и плоской сторонах крыла. При указанных углах атаки минимум давления находится на выпуклой стороне в точках, расположенных в районе середины профиля, поэтому кавитация возникает первоначально именно в этих точках. У тонких профилей кривая распределения давления на выпуклой стороне достаточно плавная, поэтому не происходит отрыва пограничного слоя, и кавитация развивается таким образом, как это было описано в § 4.

Как только хвостовая часть кавитационной области выйдет за заднюю кромку, немедленно возникнет кавитация вблизи передней кромки крыла на его плоской стороне. На рис. 12 схематически изображены кавитационные области и линии тока вблизи сегментного профиля. Возникновение кавитации на плоской стороне крыла объясняется сильным влиянием каверны, расположенной на выпуклой его стороне, на подъемную силу крыла. Когда хвостовая часть кавитационной области выходит за пределы задней кромки профиля, начинается заметное уменьшение величины подъемной силы и циркуляции. Вследствие этого передняя критическая точка, до этого

совпадавшая с носиком профиля, перемещается на выпуклую сторону крыла (см. рис. 12), на плоской его стороне образуется пик пониженных давлений, в котором и возникает кавитация. Картина дальнейшего развития кавитации в этом случае иден-

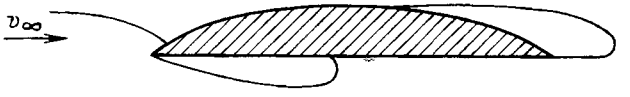


Рис. 12. Схема кавитации вблизи сегментного профиля

тична рассмотренной выше для случая отрыва пограничного слоя в локализованной зоне. При углублении кавитации хвостовая часть каверны на плоской стороне крыла выйдет за пределы его задней кромки; каверны, расположенные на обеих сторонах крыла, сольются в одну, и обтекание профиля будет эквивалентно обтеканию дужки (рис. 13).

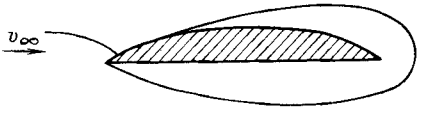


Рис. 13. Схема кавитации, соответствующей обтеканию дужки

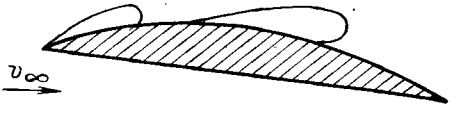


Рис. 15. Схема кавитационных зон на профиле

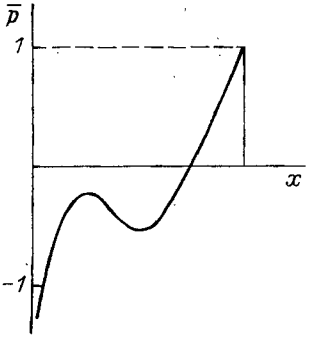


Рис. 14. Распределение давления на выпуклой стороне сегментного профиля

Если профиль достаточно толстый, то возможно появление двух кавитационных зон на выпуклой стороне крыла. На рис. 14 изображена кривая распределения давления по выпуклой стороне толстого профиля при положительном угле атаки, а на рис. 15 — схема кавитационных зон.

Кривая, приведенная на рис. 14, характеризуется пиком пониженных давлений вблизи передней кромки и минимумом вблизи середины хорды. Между ними заключен «барьер» повышенного давления, который и разделяет две зоны кавитации, изображенные на рис. 15.

§ 7. Кавитационное обтекание тел с сильно развитой зоной отрыва пограничного слоя

При обтекании диска или пластины потоком, направленным перпендикулярно их плоскостям, обтекании крыла при закритических углах атаки, шара и других аналогичных тел вследствие отрыва пограничного слоя образуются обширные зоны, заполненные вихревыми образованиями. Наиболее благоприятные условия для возникновения первых вспышек кавитации в этом случае создаются именно в вихревых зонах, так как ядра кавитации, попавшие в центры вихрей, могут там удерживаться достаточно длительное время в условиях пониженного давления. Развившиеся каверны в виде пузырьков вместе

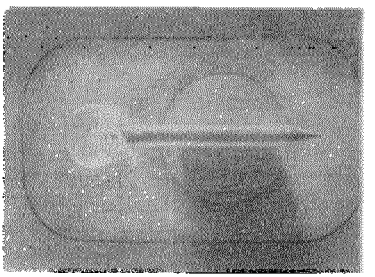


Рис. 16. Вихревые кольца

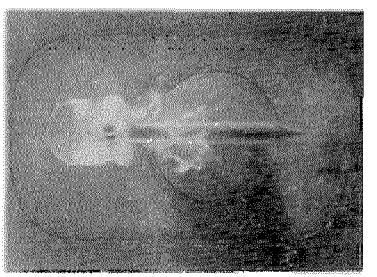


Рис. 17. Смешанная форма кавитации

с вихрями сносятся вниз по потоку. На рис. 16 представлены вихри в виде колец неправильной формы, которые хорошо видны благодаря наличию в них кавитационных пузырьков.

По мере углубления кавитации объем пузырьков в пространстве, заполненном вихрями, постепенно увеличивается, а кавитационная зона визуально и на снимке, сделанном с большой экспозицией, представляется в виде молочно-белой области с правильными очертаниями головной части (рис. 17). Начиная с некоторого режима, определяемого скоростью и статическим давлением в невозмущенном набегающем потоке, отдельные пузырьки в кавитационной зоне становятся неразличимыми, поэтому кавитационное течение может быть отнесено к смешанной форме. Возникновение смешанной формы кавитации зависит, по-видимому, также от количества и величины ядер кавитации в набегающем потоке.

Переход кавитации смешанной формы к развитой характеризуется тем, что в головной части кавитационной зоны появляется узкая полоска границы каверны в виде прозрачной ленточки, примыкающей к поверхности тела. Течение на этой части границы каверны стабилизируется. Параметры набегающего

потока (скорость и статическое давление), при которых возникает развитая форма кавитации, от содержания в потоке ядер кавитации практически не зависят.

§ 8. Кавитация в свободных вихрях крыла конечного размаха

При отличной по величине от нуля подъемной силе давление на одной стороне крыла становится выше, чем на противоположной. Вследствие этого появляются дополнительные потоки, переносящие частички жидкости со стороны повышенного давления в сторону пониженного, огибающие концы крыла в плоскости, перпендикулярной вектору скорости невозмущенного набегающего потока. Сложение дополнительного потока с основным, перпендикулярным размаху крыла, обусловливает вин-

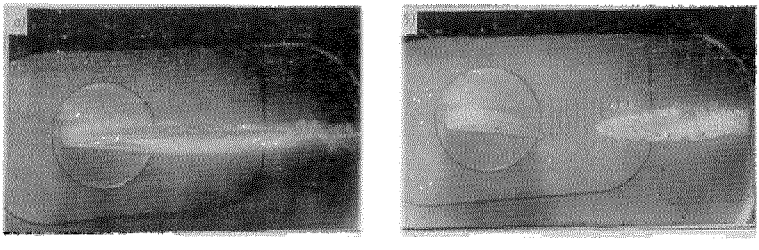


Рис. 18. Кавитация в свободном вихре

товое движение частичек жидкости, покидающих пределы крыла. Таким образом, от свободных концов крыла по потоку будут распространяться так называемые свободные вихри.

Давление внутри вихрей будет понижаться в направлении от периферии к центру. Теоретически в центре вихря должны были бы существовать отрицательные давления бесконечно большой величины. Однако вследствие вовлечения в вихревые движения подторможенных частичек жидкости из пограничного слоя крыла, концентрирующихся в центре вихря, там будут пониженные давления конечной величины.

Вследствие влияния вязкости жидкости, а также обтекания конца крыла давление вдоль свободного вихря будет переменным. Часто давление достигает своего минимального значения непосредственно на боковой кромке крыла в месте зарождения свободного вихря, что обусловливает возникновение кавитации на этой кромке. По мере углубления кавитации область ее распространения увеличивается вдоль размаха крыла к его центру и вдоль хорды по свободному вихрю. В этих условиях области кавитации собственно крыла и свободного вихря сливаются в единую область (рис. 18, *а*).

Кавитация может также возникнуть в центре свободного вихря на некотором расстоянии от боковой кромки крыла вниз по потоку (рис. 18, *б*). И только при дальнейшем углублении кавитации кавитационная зона будет постепенно продвигаться вперед к боковой кромке.

Условия зарождения кавитации и ее начальной стадии развития в свободных вихрях и вихрях, образующихся при локальном отрыве пограничного слоя от поверхности тела, сходны.

§ 9. Пузырьковая кавитация

На основе изучения процесса зарождения и развития кавитации (см. § 4—8) можно заключить, что в наиболее ярко выраженной форме пузырьковая кавитация проявляется при обтекании жидкостью гладких тел в условиях отсутствия отрыва пограничного слоя. Однако хорошо различимые пузырьки малых и больших размеров можно наблюдать также при смешанной и развитой формах кавитации. Они могут возникать в результате нестационарных выбросов газожидкостной смеси в хвостовых частях кавитационных зон и уноситься потоком за пределы каверны. Пузырьки могут вырастать также из ядер кавитации в районе головной части каверны и двигаться вместе с потоком вдоль границы кавитационной зоны.

В качестве первоначального приближения при изучении пузырьковой кавитации может служить модель радиально-симметричной эволюции пузырька в безграничной жидкости при действии переменного во времени внешнего давления, одинакового для всех точек жидкости. В этих условиях течение жидкости будет зависеть только от одной радиальной координаты, что позволяет существенно упростить задачу и свести ее к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. При рассмотрении общего случая течения, вызываемого нерадиально-симметричной деформацией пузырька, естественно, пришлось бы решать общие уравнения гидромеханики Навье—Стокса в частных производных.

Уравнение для определения изменения радиуса пузырька с течением времени в случае его радиально-симметричной деформации в несжимаемой жидкости имеет вид

$$\ddot{R}+\frac{3}{2R}\dot{R}^2=\frac{1}{\rho R}\left[p_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3n}+\right.$$
$$\left.+p_v-\frac{2\gamma_1}{R}-\frac{4\mu}{R}\dot{R}+p(t)\right], \qquad (1.5)$$

где R, R_0 — текущее значение радиуса пузырька и его начальный радиус; $\ddot{R}$, $\dot{R}$ — вторая и первая производные по времени; p_0, p_v — начальное давление в пузырьке и давление насыщенных паров жидкости; n — показатель политропы для

парогазовой смеси, содержащейся внутри пузырька; γ_1 — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; μ — коэффициент вязкости жидкости; $p(t)$ — величина давления в жидкости, переменная во времени.

Уравнение (1.5) составлено на основе условия равновесия сил, приложенных к поверхности пузырька. Левая часть уравнения характеризует силы инерции, первый член правой части — силы давления, развиваемые содержимым пузырька при политропическом процессе изменения его объема, третий и четвертый члены — силы давления, обусловленные поверхностным натяжением и вязкостью жидкости.

Выражение (1.5) удовлетворительно отображает реальное положение, когда радиус пузырька сравнительно мал, мала несимметрия внешних давлений, при которых происходит деформация пузырька, а также достаточно мала скорость движения границ пузырька по сравнению со скоростью распространения звука в жидкости. При несоблюдении последнего условия необходимо учитывать сжимаемость окружающей пузырек жидкости.

Реальный процесс деформации пузырька может существенно отличаться от радиально-симметричного вследствие близости твердой поверхности и других пузырьков, наличия пограничного слоя и т. п. Учет всех этих факторов весьма затруднителен. Однако сравнительно простая модель деформации пузырька вблизи твердой стенки достаточно подробно исследована.

Интересно, что при такой деформации в стадии сжатия на противоположной от стенки стороне пузырька появляется «вмятина», которая в процессе сжатия увеличивается (рис. 19). На последних этапах сжатия «вмятина» превращается в струйку, направленную в сторону стенки. Скорость жидкости в струйке оказывается большой, более 100 м/с. В связи с этим высказывается мнение, что возникновение струйки — одна из основных причин кавитационной эрозии.

Первые наиболее подробные расчеты деформации первоначально-сферического пузырька вблизи твердой стенки выполнены М. С. Плессетом и Р. Б. Чепменом [76]. Результаты расчетов подтверждены опытами С. Л. Клинга и Ф. Г. Хеммита [73], а также В. Лаутерборна и Х. Болле [74].

Интересные данные получены О. В. Воиновым и В. В. Воиновым [16], выполнившими численный расчет деформации кавитационного пузырька вблизи плоской твердой стенки. Оказалось, что если первоначально пузырек имел не сферическую форму, а форму эллипсоида вращения с малой осью, перпендикулярной стенке, то скорости жидкости в струйке во много раз возрастают по сравнению со скоростями в случае деформации первоначально-сферического пузырька даже при незначительном отличии формы эллипсоида от сферы. При этом появляется качественное различие в характере деформации, за-

ключающееся в появлении пережатия, делящего пузырек на два расположенных друг над другом пузырька (рис. 20). Образуются две кумулятивные струйки (рис. 21), одна из которых направлена в сторону верхнего пузырька, а другая — к стенке. Величина скорости жидкости в струйках теоретически стремится к бесконечности. Указанное обстоятельство является веским аргументом в пользу объяснения причины кавитационной эрозии, основанного на изучении воздействия кумулятивной струйки.

Теоретическое исследование пузырьковой кавитации в реальных условиях обтекания тел в кавитационных и гидродинамических трубах и на натурных объектах не только наталкивается на исключительные математические трудности, но и затрудняется отсутствием достаточно достоверных сведений

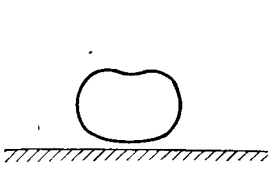


Рис. 19. Первая фаза сжатия пузырька



Рис. 20. Первая фаза сжатия первоначально несимметричного пузырька

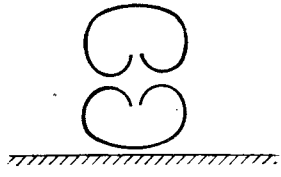


Рис. 21. Схема образования кумулятивных струек

о распределении ядер кавитации в набегающем потоке, особенно для натурных условий. В связи с этим представляется наиболее вероятным, что дальнейший прогресс в изучении пузырьковой кавитации достижим, в основном, при использовании упрощенных моделей, таких, например, как рассмотренная в работе [16].

§ 10. Развитое кавитационное течение

Рассматривая процесс развитой кавитации, в качестве главной предпосылки примем анализ допущений теории развитых установившихся кавитационных течений, поскольку эти допущения положены в основу методов расчета кавитационного обтекания тел, изложению которых посвящены все последующие главы.

В теории развитых установившихся кавитационных течений приняты следующие основные допущения: давление внутри каверны, включая ее границы, постоянно; границы каверны непроницаемы; жидкость несжимаема; жидкость невязкая; течение вне каверны и тела потенциальное.

Кроме этого вводят дополнительные допущения, связанные с описанием характера течения в хвосте каверны и в точках

отрыва каверны от тела, что будет рассмотрено особо в гл. IV, VI.

При изучении реальных течений речь, естественно, может идти лишь о приближенном выполнении перечисленных допущений и о том, насколько модель идеальной кавитации соответствует этим реальным кавитационным течениям.

Первые два допущения в теории развитых кавитационных течений являются основными, принципиальными. Они позволяют при рассмотрении кавитационного течения в целом (форма каверны и поле скоростей и давлений в потоке вне каверны) пренебречь влиянием движения содержимого каверны и рассматривать только течение жидкости вне границ каверны и тела. Таким образом, кавитационное обтекание твердого тела уподобляется бескавитационному обтеканию некоторого составного твердого тела, ограниченного частью поверхности тела, свободной от кавитации, границами каверны и фиктивной поверхностью, вводимой в некоторых моделях кавитационных течений для замены реального течения в хвосте каверны. При этом на части поверхности составного тела, соответствующей границам каверны, давление должно быть постоянным, равным давлению внутри каверны.

Постоянное давление внутри каверны может быть обеспечено в случае большой разницы в величине плотности содержимого каверны и жидкости основного потока. Скорости же движения содержимого каверны при этом должны по порядку величины быть не больше скорости основного потока.

При явно выраженной развитой форме кавитации зона нестационарных движений жидкости, обусловленных обратной струйкой, распространяется на сравнительно небольшую область хвостовой части каверны, форма же ее основной части сравнительно стабильна во времени, а ее границы прозрачны. В этом случае интуитивно ясно, что каверна наполнена парами жидкости и газов.

Используя для оценки давлений формулу Бернулли и учитывая, что плотность парогазовой смеси меньше плотности воды приблизительно на три порядка, легко показать, что для достижения внутри каверны тех же по величине изменений давления, что и во внешнем потоке, необходимо было бы иметь величины скоростей движения парогазовой смеси, превосходящие скорости основного потока в отношении, равном корню квадратному из отношения плотности жидкости к плотности парогазовой смеси, т. е. более чем на порядок. В принципе, можно мыслить создание таких больших скоростей парогазовой смеси в каверне каким-либо искусственным путем. Тогда при решении кавитационной задачи необходимо было бы учитывать динамику этой смеси.

На рис. 22 приведены результаты опытов [32] по измерению давления в каверне, которая создавалась за диском диа-

метром 40 мм, помещенным в рабочий участок гидродинамической трубы. Поскольку приходилось иметь дело с малыми значениями давлений, принимались специальные меры для исключения ошибок в измерениях, обусловленных выделением газов в жидкостном U-образном манометре и влиянием капиллярности при попадании воды в дренажную трубку. На рис. 22 по оси абсцисс отложены значения скоростей в рабочем участке гидродинамической трубы впереди диска, а по оси ординат — отношение давления в каверне к давлению насыщенных паров воды $p_к/p_v$. Кривые *1* и *2* соответствуют значению воздухосодержания, равному 0,4 %, а кривые *1′* и *2′* — воздухосодержанию, равному 3 %.

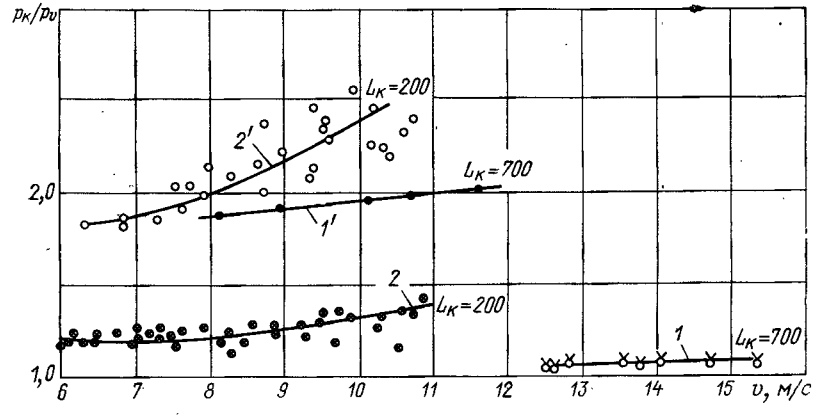


Рис. 22. Зависимость давления в каверне от скорости потока

Кривые *1* и *1′* соответствуют длине каверны 700 мм, когда протяженность зоны нестационарных движений в ее хвосте много меньше общей длины. При малом воздухосодержании отношение $p_к/p_v$ близко к единице, что свидетельствует о заполнении каверны в основном водяным паром. При большем воздухосодержании это отношение близко к 2, что свидетельствует о приблизительно равном парциальном давлении пара и газов в каверне. Отношение $p_к/p_v$ для обоих значений воздухосодержания слабо изменяется с изменением скорости.

Представляют собой особый интерес кривые *2* и *2′*, соответствующие длине каверны 200 мм. При этой длине каверны во всем диапазоне скоростей набегающего потока обратная струйка простиралась на всю длину каверны и ударялась о диск с тыльной стороны. В головной части каверны в месте ее примыкания к краям диска прозрачных участков на границе каверны не наблюдалось, не были различимы в основной части кавитационной области также отдельные пузырьки, поэтому по принятой выше терминологии рассматриваемые режимы соответствовали смешанной форме кавитации.

При малом воздухосодержании в потоке (кривая 2) давление в каверне оказалось всего лишь на 20—40 % выше давления насыщенных паров воды, а при большем воздухосодержании — в 1,8—2,5 раза. Эти величины давления на один-два порядка меньше величины статического давления в набегающем потоке в трубе. Приведенные данные позволяют полагать, что не только при развитой, но и при смешанной кавитации давление в кавитационной зоне определяется величиной газосодержания в потоке, давления паров жидкости или суммарного давления паров и газов. Таким образом, есть основание распространить допущение о постоянстве давления в кавитационной области не только на развитую, но и на смешанную форму кавитации.

Повышение давления в кавитационной зоне при увеличении скорости потока, зарегистрированное в опытах (см. рис. 22), на допущения о постоянстве давления существенно не влияет и связано, по-видимому, с тем, что поступление газа в каверну и унос его определяется, главным образом, течением в обратной струйке, интенсивность которой с изменением скорости потока меняется. Из второго важного допущения теории развитых кавитационных течений о непроницаемости границ каверны следует, что можно пренебречь влиянием массообмена между содержимым каверны и жидкостью внешнего потока на кавитационное течение в целом.

Если зона нестационарных движений в хвосте каверны мала, то на основной части границ каверны массообмен может осуществляться за счет испарения слоя жидкости, находящегося на границе каверны, и конденсации паров, содержащихся внутри нее. Поскольку суммарное давление пара и газа внутри каверны на практике всегда выше давления насыщенных паров жидкости, эти процессы происходят сравнительно медленно и не должны привести к заметному массообмену, могущему в какой-то степени повлиять на течение вне каверны.

Процессом массообмена вследствие диффузии газа в каверну из основного потока и из каверны в поток тоже можно пренебречь ввиду его медленности.

На границе каверны может происходить также кипение в прилегающих слоях жидкости, сопровождающееся появлением парогазовых пузырей. Вполне возможно, что это является одной из причин образования неровностей на границе каверны, обнаруживаемых при фотографировании с малой экспозицией. Однако на общую динамику внешнего потока, обтекающего каверну и тело, процесс кипения не должен существенно сказаться, поскольку рассматриваемое явление сугубо поверхностное и распространяется только на слои жидкости, прилегающие непосредственно к границе каверны.

Менее изучено влияние массообмена на кавитационное течение для тех режимов развитой кавитации, в которых обрат-

ная струйка распространяется на большую часть длины каверны. Прямыми методами оценить это влияние затруднительно. В качестве косвенного способа может быть использовано, например, сравнение измеренных значений координат точек границ каверны с расчетными, полученными в результате предположения отсутствия массообмена. Форма каверны наиболее полно характеризует кавитационное течение в целом, и вместе с тем, она наиболее чувствительна к изменениям внешних условий обтекания по сравнению с другими характеристиками, например гидродинамическими силами. Указанное обстоятельство позволяет полагать, что наиболее объективное

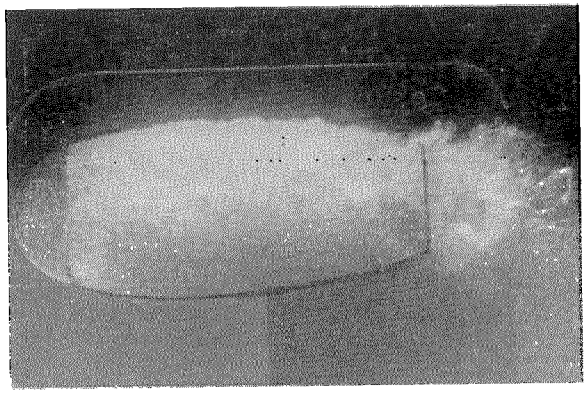


Рис. 23. Каверна за шаром

суждение о приемлемости допущений теории развитой кавитации можно получить путем сравнения расчетных и опытных значений именно размеров каверны.

На рис. 23 приведена каверна, образованная за шаром, помещенным в гидродинамической трубе, а также расчетные значения (обозначены сплошной линией) координат меридионального сечения каверны. Расчеты выполнены с учетом влияния на кавитационное течение стенок трубы реальной конструкции.

Обратная струйка приведенной на рисунке каверны доходит до тыльной стороны шара, а продукты ее распада покрывают всю границу каверны. Удовлетворительное согласие измеренных и расчетных значений свидетельствует в пользу допущения о малом влиянии массообмена, обусловленного попаданием частиц жидкости из обратной струйки на границу каверны.

Распространение приведенного частного результата на все случаи развитых кавитационных течений с мощными обратными струйками связано с определенным риском, однако приведенные в дальнейшем дополнительные данные сравнений

результатов опытов и расчетов позволяют полагать, что допущение о малом влиянии массообмена при оценках основных характеристик развитых кавитационных течений приемлемо.

Во избежание недоразумений при сравнении результатов опытов и расчетов следует уточнить те характеристики кавитационных зон, которые могут быть достаточно корректно сопоставлены. Можно сопоставить какую-либо из распространенных кавитационных схем, пригодных для описания формы каверны, и фотографическое изображение каверны. Предпочтение можно отдать схеме Эфроса—Гильбарга и обобщенной схеме Рябушинского (подробно кавитационные схемы рассмотрены в гл. II, IV, V).

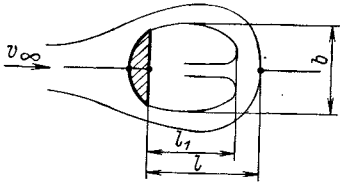


Рис. 24. Схема Эфроса—Гильбарга

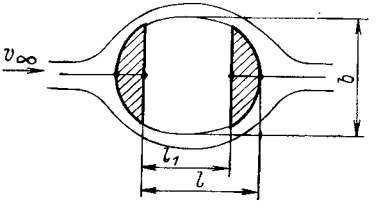


Рис. 25. Обобщенная схема Рябушинского

На рис. 24 и 25 изображены плоские кавитационные течения, соответствующие указанным выше схемам. Основные размеры каверны характеризуются максимальной ее шириной и длиной.

Ширину каверны b в обеих схемах определяют аналогичным образом. За длину каверны в схеме Эфроса—Гильбарга можно принять расстояние l_1 от точки отрыва кавёрны от тела до вертикальной прямой, касающейся в хвостовой части линий тока обратной струйки. Однако в реальных условиях ввиду нестационарности движения в хвосте каверны и обилия пузырьков эту величину измерить практически невозможно.

Более объективной характеристикой для определения длины каверны является расстояние l от точки отрыва каверны до задней критической точки, находящейся при наличии обратной струйки внутри жидкости. Тем более, что согласно расчетам величины l и l_1 не сильно отличаются друг от друга. Измерение же координат критической точки принципиальных трудностей не вызывает. Оно, например, было осуществлено [32] путем помещения в поток зонда, указывающего перемену направления скорости. Несмотря на сильные колебания хвоста каверны, а следовательно, и критической точки в направлении, параллельном вектору скорости невозмущенного потока, ее среднее во времени положение фиксировалось достаточно уверенно.

На рис. 26, *а, б* представлены кавитационные течения за диском. Вследствие обилия пузырьков воздуха хвостовые части каверны сильно размыты и имеют неправильную форму, а зна-

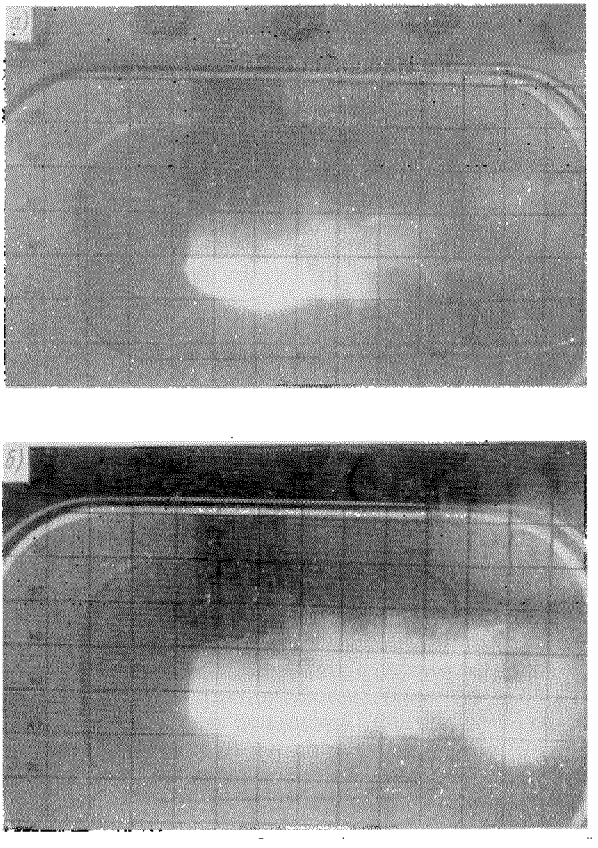


Рис. 26. Кавитационная зона за диском

чительная часть головных областей имеет правильную форму. Поскольку сопутствующий пузырьковый след оказывает второстепенное влияние на течение в целом, об эффективной длине каверны в данном случае следует судить по величине l, а не по фотографическому изображению каверны. Из рассмотренного примера видно, что нужно с большой осторожностью относиться к сопоставлению результатов расчетов с опытными данными в том случае, когда воздухосодержание в потоке значительно.

При использовании обобщенной схемы Рябушинского сравнение результатов расчетов и опытов производят аналогичным образом. Результаты вычислений координат границ каверны по обеим схемам во многих случаях близки между собою и различаются лишь для хвостовой части каверны, что подтверждается данными расчетов обтекания пластины, приведенными в приложении работы [12]. Однако вследствие сильных колебаний хвостовой части каверны и насыщения хвостовой области течения большим количеством пузырьков газа, затрудняющих проведение визуальных наблюдений, трудно опытным путем определить ее форму и, следовательно, отдать предпочтение какой-либо из схем.

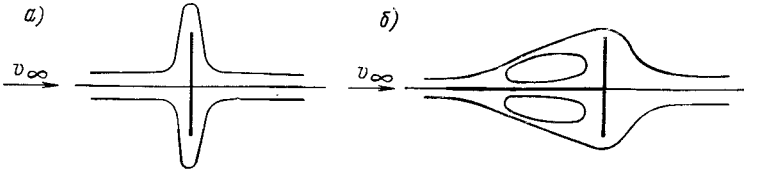


Рис. 27. Обтекание передней части пластинки идеальной и вязкой жидкостью

Допущение несжимаемости жидкости приемлемо в большинстве случаев развитых кавитационных течений, поскольку в них скорости жидкости значительно меньше скорости распространения звука в воде. Этого нельзя сказать лишь о тех кавитационных течениях, которые возникают в потоке, насыщенном газовыми пузырьками. В этом, по существу, двухфазном набегающем потоке скорость распространения малых возмущений может быть сравнительно малой, порядка 20 м/с.

Во многих случаях при расчетах развитых кавитационных течений можно пренебречь влиянием вязкости.

Поскольку форма каверны определяется, главным образом, формой части твердого тела свободной от кавитации и распределением по ней гидродинамических давлений, влиянием вязкости можно пренебречь тогда, когда пограничный слой на теле достаточно тонок и нет его отрывов от поверхности тела.

Гораздо сложнее обстоит дело тогда, когда на теле есть участки с большими положительными градиентами давления на внешней границе пограничного слоя. В этом случае могут образоваться впереди каверны значительные зоны отрыва пограничного слоя, могущие существенно исказить распределение давлений по поверхности тела, а следовательно, и картину кавитационного обтекания в целом.

Для иллюстрации сказанного на рис. 27 приведены две схемы обтекания плоской тонкой пластинки в направлении, перпендикулярном ее плоскости. Случаи, отображенные на

рис. 27, *а*, *б*, различаются тем, что во втором впереди одной из основных пластинок поставлена дополнительная, совпадающая с нулевой линией тока. При обтекании потоком жидкости, лишенной трения, картина обтекания в обоих случаях будет совершенно одинаковой. В вязкой же жидкости, вследствие существования большого положительного градиента давления на дополнительной пластинке, пограничный слой оторвется от тела, и образуются две застойные вихревые зоны, схематически изображенные на рис. 27, *б*. Ясно, что кавитационное обтекание обеих пластин в реальных условиях будет различным.

При наличии каверны пограничный слой впереди нее может отрываться даже от тел с плавными обводами. В этом случае, подробно исследованном Виджеем Х. Аракери [63], отрыв пограничного слоя влияет, главным образом, на положение точек присоединения передней части границы каверны к телу и, естественно, на форму каверны.

Пограничный слой, сошедший с поверхности тела на границу каверны, может в некоторой степени повлиять на ее микроструктуру, вызвав, например мелкие неровности границы, однако на кавитационном течении в целом (форма кавитационной зоны и поле скоростей и давлений вблизи каверны и тела) это практически не отразится.

Что касается допущения потенциальности течения, то оно является традиционным в задачах об определении скоростей и давлений в потоке вне пограничного слоя и в специальном комментарии не нуждается.

Допущение стационарности течения в значительной степени справедливо для каверн со слабо развитой обратной струйкой, так как существующие практически всегда пульсации границ каверны на всем протяжении в этом случае невелики и не влияют на течение в целом.

В течениях с сильно развитой обратной струйкой имеют место заметные нестационарные движения границ кавитационной зоны и сильные колебания ее хвоста. Вместе с тем, на фотографиях, сделанных с большой экспозицией, кавитационная зона имеет правильные очертания. Для оценки таких осредненных во времени течений могут быть использованы расчетные методы, основанные на допущениях теории развитой кавитации с учетом сделанных выше замечаний о корректности сравнения расчетных значений и фотографических изображений кавитационных зон.

§ 11. Смешанная форма кавитации

Как отмечалось в § 4, смешанная форма кавитации характеризуется отсутствием фиксированных точек присоединения передней границы кавитационной зоны к поверхности тела и сильными колебаниями границ кавитационной зоны. Колебания

кавитационной зоны сопровождаются колебаниями скоростей и давлений, что приводит к возникновению нестационарных гидродинамических сил, приложенных к телу. Нестационарное воздействие потока на тело пока еще недостаточно изучено. В отдельных случаях, например, зафиксированы колебания подъемной силы крыла, доходящие до величины, превышающей 10 % от ее среднего значения.

Постановка задачи об обтекании тела в режиме смешанной кавитации затруднительна вследствие нестационарности такого кавитационного течения. Однако оценка осредненных во времени гидродинамических сил и очертаний кавитационной

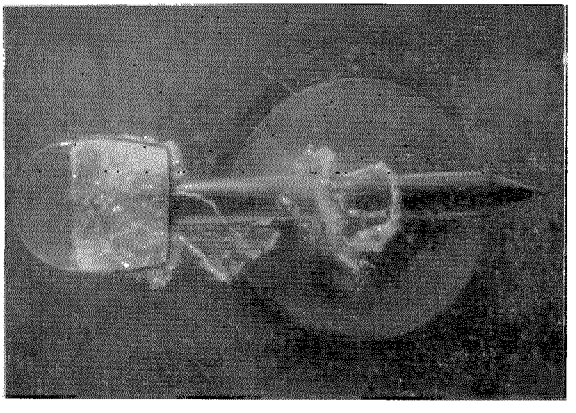


Рис. 28. Смешанная форма кавитации за шаром

области возможна с использованием допущений теории развитой кавитации.

Основная гипотеза о постоянстве давления в кавитационной зоне должна, по-видимому, с удовлетворительным приближением выполняться ввиду обилия в этой зоне парогазовых объемов, вследствие чего средняя во времени плотность содержимого кавитационной зоны будет значительно меньше плотности жидкости набегающего потока. Большая разность плотностей обусловливает приближенное выполнение гипотезы о постоянстве давления в кавитационной зоне. Об этом свидетельствуют и результаты опытов (см. рис. 22), проведенных с каверной длиною 200 мм, соответствующей смешанной форме кавитации.

Прямые свидетельства приемлемости допущения непроницаемости границ кавитационной зоны трудно получить. Однако косвенные суждения о его приемлемости могут быть сделаны на основе сравнения измеренных осредненных во времени значений координат границ кавитационной зоны с расчетными. На рис. 28 представлена смешанная форма кавитации за

шаром. Изображение, полученное при фотографировании с большой экспозицией, дает представление об осредненном во времени контуре меридионального сечения кавитационной зоны. На этом же рисунке линией показан контур меридионального сечения, полученный путем расчета. Как видно из рисунка, соответствие опытных и расчетных данных можно считать вполне удовлетворительным.

Приведенная на рис. 28 фотография свидетельствует также о большом внешнем сходстве развитых и осредненных во времени смешанных кавитационных течений, характеризующихся правильностью и плавностью границ кавитационных зон. При этом границы кавитационной зоны кавитации смешанной формы более размыты по сравнению с границами каверны, соответствующей развитой кавитации.

Другим признаком, объединяющим указанные формы кавитации, является наличие обратной струйки. Эта струйка для режима смешанной формы кавитации фиксировалась, например, в опытах, описанных в работе [32].

§ 12. Искусственная кавитация

Термин «искусственная кавитация», принятый некоторыми специалистами [27], характеризует кавитацию, при которой каверна создается и поддерживается за счет подачи газа извне в поток жидкости. Этому термину соответствует термин «вентиляция», широко распространенный в зарубежной литературе.

Для теоретического описания развитой формы искусственной кавитации остаются в силе рассмотренные в § 10 допущения. Вместе с тем могут быть отмечены некоторые специфические особенности искусственной кавитации, отличающие ее от первой и вызванные способом и условиями создания и поддержания каверны.

1. Поскольку искусственная каверна заполнена газом, который в воде слабо растворяется, от ее хвостовой части вниз по потоку всегда распространяется ярко выраженный след, состоящий из пузырьков газа, или же полых вихревых шнуров, по которым, как по трубам, уносится из каверны газ. Последняя форма выхода газа подробно изучалась Р. Н. Коксом и В. А. Клайденом [65], Л. А. Эпштейном [58] и др.

2. При искусственной кавитации появляются специфические неустойчивые режимы, не характерные для кавитации паровой, что обусловлено в ряде случаев большой чувствительностью давления в каверне, а следовательно, и зависимостью ее размеров от расхода газа, идущего на поддержание каверны.

На рис. 29, заимствованном из работы [60], представлена зависимость безразмерного коэффициента расхода газа от числа кавитации. Участок кривой, заключенный между точками *1* и *2*, соответствует диапазону изменения чисел кавитации,

при которых каверна неустойчива. Действительно, если рассмотреть состояние статического равновесия каверны при фиксированном значении расхода газа для режима кавитации, соответствующего какой-либо точке на указанном участке, то можно отметить следующее. Если каверна вследствие каких-либо возмущений укоротится, что соответствует увеличению числа кавитации, то для возвращения ее к прежней длине требуется увеличить количество газа, подаваемого в каверну. Однако в соответствии с зависимостью, изображенной на рис. 29,

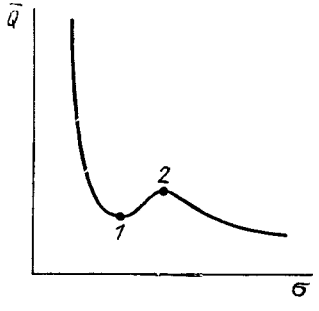


Рис. 29. Зависимость расхода газа, необходимого для поддержания каверны, от числа кавитации

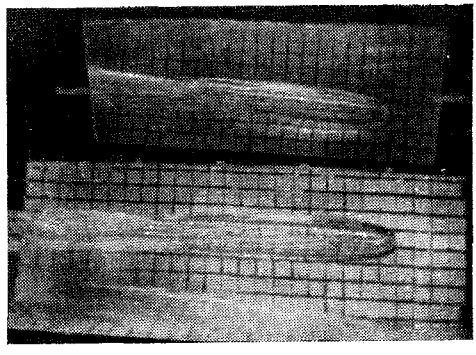


Рис. 30. Искусственная каверна (вид сбоку и сверху)

возмущенному режиму будет соответствовать бóльший расход газа, поэтому при фиксированном количестве поступающего в каверну газа давление в ней должно постепенно падать, что приводит к дальнейшему уменьшению ее длины. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока число кавитации не возрастет до величины, при которой режим кавитации будет соответствовать режиму, представленному ветвью кривой, расположенной справа от точки *2*.

Аналогично возмущение каверны в сторону уменьшения числа кавитации приводит к ее неустойчивости с переходом на режим, соответствующий другой устойчивой ветви кривой, лежащей слева от точки *1*.

3. Развитую искусственную кавитацию можно создавать при таких скоростях потока и размерах тел, при которых сильно проявляется эффект силы тяжести жидкости. Для трехмерных течений, образованных, например за диском, влияние силы тяжести приводит к деформации поперечных сечений каверны и ее всплытию, увеличивающемуся при движении от головной части каверны к хвосту. Кроме того хвостовая часть может заканчиваться двумя полыми вихревыми шнурами. Эти

шнуры хорошо видны на фотографии (рис. 30) каверны, изображающей ее сбоку и сверху.

В плоских искусственных кавитационных течениях, образованных на нижней стороне плоской пластины за препятствием, могут быть реализованы режимы с волновым шлейфом, кото-

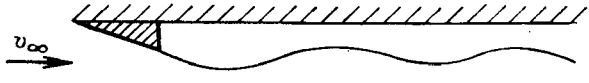


Рис. 31. Режим течения с волновым шлейфом

рый аналогичен гравитационным волнам на свободной поверхности жидкости (рис. 31).

ГЛАВА II

ПЛОСКИЕ КАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

В настоящее время теория плоских развитых кавитационных течений достаточно хорошо разработана. Большинство исследований в этой области опирается на результаты и методы классической теории струй, основы которой были заложены Гельмгольцем [69] и Кирхгоффом [72]. Эти методы использовались также при построении ряда эффективных методов решения задач, позволяющих производить численные расчеты кавитационного обтекания тел сравнительно простой формы.

Для численных расчетов кавитационного обтекания тел сложной формы, таких, например, как подводные крылья, лопасти гребных винтов и т. п. представляется целесообразным использование так называемого метода интегральных уравнений, в котором задача сводится к решению интегральных уравнений. Впервые метод интегральных уравнений для расчета струйного течения успешно применен Треффтцем [82].

§ 13. Некоторые сведения из кинематики плоских течений идеальной жидкости

Как известно, безвихревые течения идеальной несжимаемой жидкости обладают важной особенностью, заключающейся в наличии потенциала скоростей. Для установившихся течений потенциал является функцией только координат точек области течения. При этом вектор скорости в произвольной точке равен градиенту указанной функции. В декартовой системе координат

составляющие вектора скорости будут выражаться через потенциал $\varphi(x, y)$ следующим образом:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{2.1}$$

где v_x, v_y — проекции вектора скорости на соответствующие координатные оси. Таким образом, для определения кинематической картины установившегося течения достаточно найти лишь одну функцию φ координат точек области течения.

Используя уравнение неразрывности течения в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

а также равенства (2.1), можно составить уравнение для определения функции φ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{2.2}$$

называемое уравнением Лапласа.

Если в жидкости находятся твердые или другие поверхности и точки, вносящие возмущения в поток, то для полного определения функции φ к уравнению (2.2) необходимо добавить еще так называемые краевые условия. Они состоят в задании на указанных поверхностях и в особых точках значений φ или ее производных, или же их комбинаций. Кроме этого должен быть еще задан характер затухания возмущений при удалении в бесконечность от указанных особых точек или поверхностей.

При решении многих задач гидродинамики методом интегральных уравнений особое значение имеют следующие два фундаментальные решения уравнения (2.2)

$$\varphi_e = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \tag{2.3}$$

где Q — некоторая константа; $r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$; x, y и x_1, y_1 — текущие и фиксированные значения координат, соответственно.

$$\varphi_i = \frac{\Gamma}{2\pi} \Theta, \tag{2.4}$$

где Γ константа;

$$\Theta = \arcsin \frac{y - y_1}{r}.$$

В уравнении (2.4) функция φ_i неоднозначна, так как при обходе точки x_1, y_1 по замкнутой кривой она получает приращение, равное Γ.

Выражение (2.3) соответствует потенциалу источника или стока (в зависимости от знака Q), находящегося в точке x_1, y_1.

В дальнейшем будет говориться только об источниках. При этом подразумевается, что все сказанное, если это особо не оговорено, справедливо и для стоков, переход к которым осуществляется простой переменой знака перед Q с плюса на минус.

Вектор скорости течения жидкости, вызванного источником, направлен по прямолинейным лучам, исходящим из указанной точки, а ее величина равна производной по r в уравнении (2.3)

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}. \tag{2.5}$$

Источнику соответствует положительное значение Q, а стоку — отрицательное. В связи с этим вектор скорости течения, соответствующий источнику, направлен по лучам, исходящим из точки x_1, y_1, а соответствующий стоку — в обратном направлении.

Из формулы (2.5) видно, что по мере удаления от точки x_1, y_1 величина скорости течения, вызванного источником, убывает обратно пропорционально величине расстояния r. В самой же точке x_1, y_1 скорость становится бесконечно большой.

Выражение (2.4) соответствует потенциалу вихря, расположенного в точке x_1, y_1. Линии тока в этом случае представляют собою концентрические окружности с центром в точке x_1, y_1, а эквипотенциальные линии — лучи, исходящие из указанной точки. Вектор скорости направлен по касательной к упомянутым окружностям, а его величина равна производной по Θ, деленной на r [см. равенство (2.4)],

$$v_\Theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{2.6}$$

Константа Γ обозначает интенсивность вихря. Ее положительное значение соответствует вращению жидкости против часовой стрелки в плоскости x, y.

Течение жидкости, соответствующее потенциалам, приведенным в формулах (2.3) и (2.4), везде потенциально за исключением точки x_1, y_1, где расположен источник или вихрь. Указанная точка является особой, а источник и вихрь называются гидродинамическими особенностями.

Наряду с потенциалом скорости иногда удобно оперировать функцией тока $\psi(x, y)$, которая при потенциальном течении также удовлетворяет уравнению Лапласа и связана с потенциалом скоростей соотношениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Линии $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ ортогональны.

Выражение для функции тока источника имеет вид

$$\psi_e = \frac{Q}{2\pi}\Theta, \tag{2.7}$$

а для функции тока вихря

$$\psi_i = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r. \tag{2.8}$$

В методе интегральных уравнений рассматривают течения, вызываемые системами гидродинамических особенностей, распределенных непрерывным образом на некоторых поверхностях (пространственные течения) и линиях (плоские течения).

Указанные системы называются слоями особенностей. Ниже перечислены основные свойства слоев, соответствующих плоскому течению.

При переходе с одной стороны слоя источников на другой касательная к слою составляющая вызванных скоростей изменяется непрерывным образом, а нормальная составляющая испытывает скачок, равный по абсолютной величине погонной интенсивности источников.

При переходе с одной стороны вихревого слоя на другой нормальная к слою составляющая вызванных скоростей изменяется непрерывным образом, а касательная испытывает скачок, равный по абсолютной величине погонной интенсивности вихрей.

В точках слоя, где изменение интенсивности особенностей вдоль слоя терпит разрыв непрерывности, вызванные скорости обращаются в бесконечность логарифмического типа (в случае слоя источников касательная к слою компонента, а вихревого слоя — нормальная). Это имеет место, в частности, на концах линий, на которых размещены особенности, если они не замкнуты, а при приближении к их концам величина интенсивности не стремится к нулю.

§ 14. Постановка задачи о плоском кавитационном обтекании тел

Решение задачи о кавитационном обтекании тела заключается в определении формы каверны и поля скоростей в жидкости. Использование формулы Бернулли для определения давлений в жидкости позволяет также вычислить величину гидродинамических сил и моментов, приложенных к телу.

Математическая формулировка задачи определения обтекания тел, как при кавитации, так и в отсутствии ее, сводится, по существу, к постановке краевых условий и условий на «бесконечности», которые в совокупности с уравнением Лапласа (2.2) используются при решении задачи. При этом решение, как правило, получается неединственным. Для выбора нужного

решения ставятся дополнительные условия, основанные в большинстве случаев на различных физических допущениях.

В качестве типичного и достаточно общего примера можно указать на задачу о бескавитационном обтекании профиля крыла. Здесь краевым условием служит условие непроницаемости контура, ограничивающего профиль. Из этого условия следует, что нормальная составляющая скорости потока во всех точках контура должна быть равной нулю. Поскольку указанная составляющая равна в свою очередь производной от потенциала скорости, взятой по нормали к контуру, условие непроницаемости может быть выражено в следующем виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ (всюду на контуре профиля)}, \qquad (2.9)$$

где φ — потенциал обтекания контура; n — внешняя нормаль к контуру профиля.

Решение (2.2) при наличии условия (2.9) неединственно, так как оно будет содержать циклическую постоянную, изменяя величину которой, можно получить бесчисленное количество решений, удовлетворяющих условию непроницаемости (2.9).

Если профиль крыла имеет заостренную заднюю кромку, а его форма и положение по отношению к набегающему потоку таковы, что исключается появление значительных по величине зон отрыва пограничного слоя, то хорошо оправдывается с практической точки зрения допущение конечности скорости жидкости в окрестности задней кромки. При выполнении указанного условия, которое является ничем иным, как известным условием Жуковского—Чаплыгина для определения циркуляции вокруг крыла, решение становится единственным.

Задача о бескавитационном обтекании тела, вообще говоря, всегда разрешима, если не наложено каких-либо дополнительных жестких ограничений на характер решения.

В задаче об обтекании тела при наличии кавитации дело с краевыми условиями, единственностью решения, а также и с разрешимостью задачи обстоит гораздо сложнее.

Рассматривая допущения, принимаемые в модели развитого кавитационного течения (см. § 10), легко заметить, что все они совпадают с допущениями, принимаемыми в модели обтекания идеальной жидкостью тела с фиксированными границами. Исключение составляет только допущение постоянства давления в каверне, форма которой заранее неизвестна. Указанное обстоятельство и определяет специфические различия в постановке и решении задач о бескавитационном и кавитационном обтекании тел.

Как уже отмечалось в § 10, обтекание твердого тела в условиях развитой кавитации эквивалентно обтеканию некоторого составного тела, ограниченного частью поверхности твердого тела свободной от кавитации и границами каверны, поскольку последние считаются непроницаемыми для потока жидкости.

Суммируя сказанное выше, задачу о плоском кавитационном обтекании тела можно сформулировать следующим образом: определить обтекание плоского непроницаемого контура, часть которого, соответствующая твердому телу, задана, а другая часть, соответствующая границе каверны, определяется из условия постоянства давления в каверне. Последнее условие часто бывает удобно заменить эквивалентным условием постоянства скорости на границе каверны, что непосредственно следует из формулы Бернулли при использовании допущения о невесомости жидкости.

Таким образом, для решения кавитационной задачи необходимо по уравнению (2.2) определить потенциал скорости φ при следующих граничных условиях: на контуре составного тела, включающего твердое тело и каверну, и на части контура, соответствующей границе каверны

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}=0 \text{ (на контуре составного тела);} \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}=\text{const (на границе каверны),} \qquad (2.11)$$

где s — текущая дуговая координата контура. Кроме этого функция φ должна удовлетворять условию отсутствия возмущений на «бесконечности» впереди тела. Естественно, что в процессе решения задачи определяют и форму границы каверны, поскольку условие (2.11) задано на заранее неизвестной части контура, соответствующей этой границе.

В приведенной выше постановке задача в общем случае неразрешима без дополнительных предположений о характере течения в хвосте каверны. Это следует непосредственно из рассмотрения кинематической картины течения на границе каверны ограниченной длины.

В большинстве встречающихся на практике случаев давление в каверне меньше статического давления в невозмущенном потоке, вследствие чего границы ее почти на всем протяжении выпуклы. На рис. 32 схематически изображено продольное сечение тела и границы каверны (сечение тела заштриховано). Из картины обтекания ясно, что точка A должна быть критической точкой, в которой происходит полное торможение потока, что противоречит основному допущению теории развитых кавитационных течений, согласно которому скорость жидкости во всех точках границы каверны должна быть постоянной. Очевидно, что она при этом должна быть отлична от нуля. Опытные данные также свидетельствуют о невозможности существования стационарной замкнутой каверны. В действительности в ее хвостовой части образуется обратная струйка, через которую происходит втекание жидкости внутрь каверны, а затем выбрасывание ее вместе с потоком, обтекающим каверну. Процесс движения жидкости в хвосте каверны носит сугубо нестационарный характер.

Прежде чем перейти к поиску путей преодоления отмеченной трудности при постановке задачи о кавитационном обтекании тела, целесообразно указать на некоторые случаи кавитационных течений, где она не возникает.

Это, *во-первых*, течение, впервые исследованное С. А. Чаплыгиным, с давлением в каверне выше статического в невозмущенном потоке. Такое течение схематически изображено на рис. 33. Оно характерно тем, что граница каверны всюду вогнута, а ее хвостовая часть имеет точку возврата.

Во-вторых, это широкий класс течений, имеющих место в условиях, когда статическое давление в невозмущенном присутствием тела потоке изменяется вдоль направления этого потока. На практике такие изменения давления реализуются в трубах с переменным сечением вдоль направления потока,

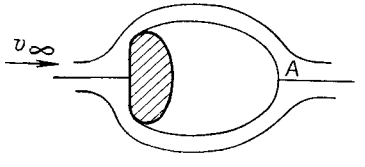


Рис. 32. Схема кавитационного течения

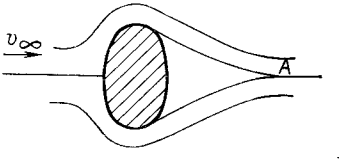


Рис. 33. Схема течения с точкой возврата

в вертикальных струях тяжелой жидкости и т. п. Если вниз по потоку статическое давление падает, то возможны кавитационные течения, подобные изображенному на рис. 33.

Течения, когда граница каверны имеет точку возврата, часто можно реализовать и в том случае, если статическое давление изменяется в направлении, перпендикулярном вектору скорости невозмущенного потока. Наконец, и в условиях, когда в невозмущенном потоке статические давления постоянны, можно выделить еще один случай кавитационного течения, не требующий для своего описания дополнительного допущения, связанного с характером течения в хвосте каверны. Схема такого течения приведена на рис. 34, где заштриховано продольное сечение тела. В этом случае передняя и задняя части границы каверны касаются тела. Изображенный на рис. 34 режим течения можно реализовать только при специальном подборе тела определенной формы.

Общей, характерной чертой почти всех перечисленных выше случаев кавитационных течений является то, что они могут быть и теоретически, и практически реализованы только при одном, строго определенном значении числа кавитации. Другая особенность указанных течений заключается в том, что в хвостовой части каверны течение оказывается близким к установившемуся, практически отсутствуют заметные нестационарные движения жидкости, характерные для течений, сопровождающихся образованием обратной струйки.

Модели кавитационных течений описывающей в хвосте каверны нестационарные движения жидкости к настоящему времени еще не созданы. Вместе с тем, так как невозможно реализовать выпуклую замкнутую стационарную каверну конечной длины, не может быть создана в принципе и вполне корректная с физической точки зрения модель (схема) стационарного течения в хвосте каверны. В связи с этим известные модели кавитационных течений целесообразно главным образом рассматривать с учетом степени приближения результатов расчета к опытным данным. Наиболее важными для практических приложений и для сравнения данных опытов и расчетов являются зависимости от числа кавитации сопротивления и подъемной силы, приложенной к телу, а также основных размеров каверны (длина и ширина). Важно также, чтобы схемы

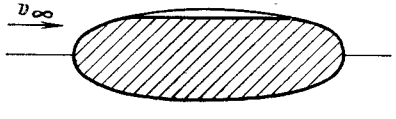


Рис. 34. Схема течения с замыканием каверны по касательной к телу

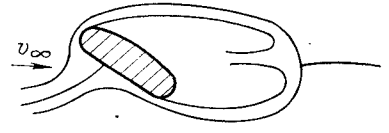


Рис. 35. Схема Эфроса—Гильбарга

течений в хвосте каверны, по возможности, не противоречили одной из основных теорем механики жидкости — теореме количества движения для системы тело—каверна. Поскольку в невесомой жидкости гидродинамические реакции приложены только к телу, то в корректной кавитационной схеме их можно равным образом определять как интегралы давлений по поверхности тела и с помощью теоремы изменения количества движения, примененной для течения внутри контура, в котором заключены тело и каверна. Ниже кратко рассмотрено несколько основных схем кавитационных течений, нашедших наибольшее распространение при решении задач о плоском кавитационном обтекании тел. При этом следует иметь в виду, что часто выбор схемы определяется не только необходимостью возможно полного описания реального явления, но и стремлением решить задачу наиболее простым способом, поскольку даже в простейших случаях решение сопряжено с преодолением больших математических трудностей.

По-видимому, наиболее удачные попытки описания течения в хвосте каверны предприняты Д. А. Эфросом [61], Гильбаргом и Рокком [23]. На рис. 35 приведена соответствующая схема обтекания тела, для которого характерно наличие в хвосте каверны обратной струйки. Ниже по потоку внутри жидкости находится критическая точка. И обратная струйка, и критическая точка наблюдаются в опытах. Однако положение струйки и критической точки фиксировано не строго, как это предлагается в схеме, а изменяется с течением времени, колеблясь

около некоторого среднего положения. Интенсивность и частота колебаний зависят, в частности, от размеров каверны и толщины обратной струйки. В математической модели, соответствующей рассматриваемой схеме, обратная струйка уходит на второй лист римановой поверхности. В схеме Эфроса—Гильбарга силы, вычисленные с помощью теоремы об изменении количества движения, совпадают с силами, вычисленными путем непосредственного интегрирования давлений по поверхности тела. Это свидетельствует о корректности схемы, удовлетворяющей теореме о количестве движения. Вопрос же о направлении струйки в «бесконечности» остается открытым.

Несмотря на стройность схемы Эфроса—Гильбарга, ей присущ принципиальный недостаток, заключающийся в привне-

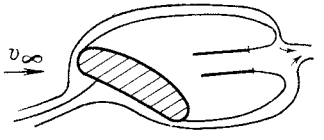


Рис. 36. Схема Кузнецова

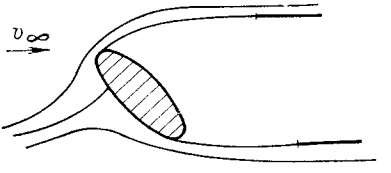


Рис. 37. Схема Жуковского—Рошко

сении в область течения стока, которого в действительности нет, поскольку жидкость при кавитационном течении никуда не исчезает. Интенсивность этого стока пропорциональна величине расхода жидкости через обратную струйку или же при фиксированной скорости невозмущенного потока величине кавитационного сопротивления тела. Ясно, что с уменьшением величины сопротивления, а также увеличением размеров каверны при неизменной интенсивности струйки влияние стока на картину кавитационного течения уменьшается.

Наиболее близка к схеме Эфроса—Гильбарга схема Кузнецова [40], в которой линия тока, соответствующая границе каверны, в хвостовой части поворачивает навстречу набегающему потоку и замыкается на две параллельные пластинки, уходящие в бесконечность (рис. 36). В этой схеме сток в хвосте каверны отсутствует. Однако подъемная сила, вычисленная с применением теоремы количества движения, в общем случае не будет равна подъемной силе, определенной путем интегрирования давлений по поверхности тела, поскольку теорема количества движения дает суммарную силу, приложенную к телу и параллельным пластинкам. При несимметричной картине течения, подобной той, которая изображена на рис. 36, величина подъемной силы, приложенной к пластинкам, в общем случае будет отлична от нуля.

На рис. 37 приведена схема кавитационного течения Жуковского—Рошко, согласно которой граница каверны также

замыкается на две параллельные пластинки, уходящие в бесконечность, но без поворота потока. При движении вдоль пластинок вниз по потоку, начиная от точек замыкания границы каверны на пластинки, скорость жидкости постепенно уменьшается от величины, равной скорости на границе каверны, до значения, равного скорости невозмущенного потока. В этой схеме, как и в схеме Кузнецова, для определения подъемной силы, приложенной к телу, теорема об изменении количества движения не может быть применена. Кроме того, схему нельзя использовать также для определения размеров каверны. Однако эту схему часто применяют в расчетной практике, поскольку она проще ряда других для математической обработки.

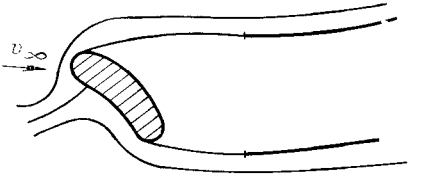


Рис. 38. Схема У Яо-цзу

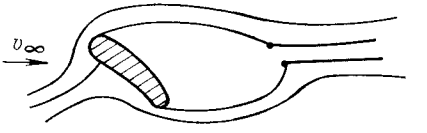


Рис. 39. Схема Тулина

С целью упрощения математических расчетов был предложен еще ряд схем кавитационного течения, в частности, схемы У Яо-цзу (Ву) [84] и М. П. Тулина [83].

На рис. 38 изображена картина течения согласно схеме У Яо-цзу. Здесь граница каверны замыкается, в отличие от границы каверны по схеме Жуковского—Рошко, не на прямые параллельные пластинки, а на некоторые криволинейные, служащие продолжением границ каверны. Их форму определяют в процессе решения задачи, а координаты точек смыкания с границей каверны находят из условия равенства в этих точках значений потенциала скорости. Так же как в схеме Жуковского—Рошко, при движении вдоль этих линий вниз по потоку скорость меняется постепенно от значения, соответствующего границе каверны, до величины скорости невозмущенного потока далеко впереди тела.

В одной из схем, предложенных М. П. Тулиным (рис. 39), при переходе с границы каверны на линии, на которые замыкается граница, скорость изменяется скачком от значения, соответствующего границе каверны, до величины скорости невозмущенного потока. При математической реализации этой схемы в точках замыкания границы каверны вводятся математические особенности логарифмического типа, в реальных условиях, естественно, не существующие. А. Г. Терентьевым предложена схема [54], близкая к схеме Тулина.

Одной из достаточно гибких схем, позволяющих вычислить не только гидродинамические силы, но и при определенных

условиях размеры каверны, является так называемая обобщенная схема Рябушинского [13]. Под нею в дальнейшем будет подразумеваться схема кавитационного течения с границами каверны, замыкающимися на контур произвольной формы, имеющий конечные размеры. Схема была впервые разработана Рябушинским для случая обтекания плоской пластинки, установленной перпендикулярно вектору скорости невозмущенного потока, с замыканием свободной границы на точно такую же пластинку (рис. 40).

Картина течения, соответствующего обобщенной схеме Рябушинского, изображена на рис. 41. Чтобы математическая задача, сформулированная с использованием обобщенной схемы Рябушинского, была разрешима, некоторые параметры замы-

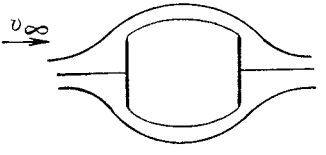


Рис. 40. Схема Рябушинского

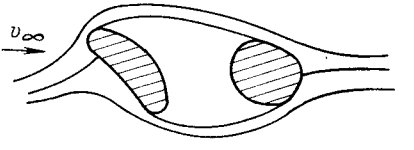


Рис. 41. Обобщенная схема Рябушинского

кающего контура (например, ограничиваемая им площадь и т. п.) заранее фиксировать, естественно, нельзя. Их необходимо определять в процессе решения задачи. Указанная особенность присуща не только обобщенной схеме Рябушинского, но и упомянутым выше схемам. Например, в схеме Эфроса—Гильбарга в процессе решения задачи определяется ширина обратной струйки, в схемах Кузнецова и Жуковского—Рошко — положение по вертикали верхней и нижней пластин и т. д. Иногда, используя какие-либо дополнительные условия, например условие симметрии течения, один из параметров замыкающего контура удается заранее зафиксировать. А в схеме, подобной приведенной на рис. 40, замыкающий контур можно заранее задать полностью.

Обобщенной схеме Рябушинского присущ недостаток, характерный для всех схем с замыканием границы каверны на твердые стенки (криволинейные стенки в схемах У Яо-цзу и М. П. Тулина можно также рассматривать как твердые), заключающийся в невозможности в общем случае вычисления гидродинамических реакций, приложенных непосредственно к телу, с помощью теоремы количества движения. Однако, благодаря выбору замыкающего контура специальной формы в обобщенной схеме Рябушинского, указанный недостаток можно преодолеть в части вычисления подъемной силы.

Кавитационное обтекание тела с использованием обобщенной схемы Рябушинского эквивалентно обтеканию идеальной жидкостью составного тела конечных размеров (см. рис. 41).

Поскольку при обтекании тела конечных размеров имеет место парадокс Д'Аламбера — равенство нулю гидродинамического сопротивления,— в основной и в обобщенной схемах Рябушинского приходится допускать некорректный прием при определении гидродинамического сопротивления: рассчитывать гидродинамическое сопротивление путем интегрирования давлений только по контуру кавитирующего тела, что равносильно допущению постоянства давления не только в каверне, но и на замыкающем контуре. Такой произвол можно оправдать удовлетворительным согласием во многих случаях расчетных данных с опытными, а также в известной степени обоснованным предположением о малом влиянии формы хвостовой части каверны на обтекание кавитирующего тела и головной части каверны.

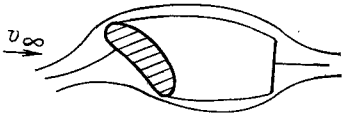


Рис. 42. Схема с замыканием границы каверны на пластинку

Что касается подъемной силы, то в обобщенной схеме Рябушинского можно подобрать замыкающий контур такой формы, что вертикальная составляющая гидродинамической реакции на нем окажется равной нулю. В этом случае для определения подъемной силы, приложенной к телу, может быть использована формула Н. Е. Жуковского. При этом величину циркуляции, входящей в формулу, следует вычислять по замкнутому контуру, охватывающему тело и каверну. Таким образом, подобная схема кавитационного течения частично не будет (в области подъемной силы) противоречить теореме об изменении количества движения.

Одним из наиболее простых контуров, удовлетворяющих условию равенства на нем нулю вертикальной компоненты гидродинамической силы, является отрезок прямой линии, перпендикулярной вектору скорости невозмущенного потока (рис. 42). Длину отрезка и его положение относительно тела по вертикали находят из условия разрешимости задачи.

Плоскую задачу об обтекании тела в режиме развитой кавитации с использованием обобщенной схемы Рябушинского можно сформулировать следующим образом: определить обтекание замкнутого контура, если:

часть контура, соответствующая поверхности тела свободной от кавитации, задана;

на части контура, соответствующей границе каверны, выполнено условие постоянства скоростей (2.11), служащее для определения формы этой границы;

часть контура, соответствующая некоторому фиктивному телу, на которое замыкается граница каверны в хвостовой ее части, задана с точностью до некоторых параметров, значения которых определяются из условия разрешимости кавитационной задачи. При этом на всем контуре должно быть выполнено условие непроницаемости (2.10).

Кроме того часто возникает вопрос об определении положения точек отрыва границы каверны от тела. Для этого формулируют дополнительные условия, которые будут рассмотрены в дальнейшем (см. § 16).

Задачу можно сформулировать аналогичным образом и для других схем кавитационных течений с непрерывным изменением скорости при переходе с границы каверны на замыкающий контур, если даже он уходит в бесконечность, как, например, в схеме Жуковского—Рошко.

§ 15. Метод интегральных уравнений

Среди методов решения плоских задач по определению обтекания тел идеальной жидкостью можно до некоторой степени условно выделить три наиболее широко применяющиеся — это метод, в котором используется плоскость годографа, метод интегральных уравнений (метод особенностей) и сеточные методы численного решения уравнения Лапласа (2.2). Подробные сведения об этих методах, используемых, как при определении бескавитационного, так и кавитационного обтекания тел, можно найти, например в известных монографиях [12, 23, 51], а обзор и указания на оригинальные статьи — в работах [22, 24]. Существуют и другие методы, как например метод, примененный П. Р. Гарабедяном для расчета каверн за диском [66]. В последнее время для решения кавитационных задач применяют метод конечных элементов.

Используемый в методе годографа математический аппарат теории функции комплексной переменной и конформных отображений оказался чрезвычайно полезным для исследования общих свойств кавитационных течений и при решении многих конкретных задач обтекания тел с простыми, преимущественно прямолинейными, или слабо искривленными границами.

Сеточные методы решения уравнения Лапласа с нелинейными граничными условиями все еще достаточно трудоемки и их применение требует большого вычислительного мастерства при решении каждой конкретной задачи.

Сравнительно удобным и универсальным для численных расчетов как плоских, так и пространственных кавитационных течений, является метод интегральных уравнений, под которым [11] понимается сведение задачи отыскания потенциала скоростей к решению некоторых интегральных соотношений. Эти соотношения легко получаются, если при рассмотрении задачи об обтекании тела использовать гидродинамические особенности.

Как известно [42], обтекание твердого тела эквивалентно обтеканию источников или диполей, или комбинации тех и других, размещаемых непрерывным образом на поверхности,

соответствующей поверхности тела. На этой поверхности можно размещать также и вихревые особенности.

Поскольку выражение для потенциала гидродинамической особенности является решением уравнения Лапласа, то и суммарная потенциальная функция, соответствующая особенностям, расположенным на упомянутой поверхности, и плоскопараллельному набегающему потоку, также будет удовлетворять этому уравнению вследствие его линейности. Суммарный потенциал скоростей должен при этом удовлетворять граничному условию (2.10), а условию на «бесконечности» он удовлетворяет автоматически. В случае кавитационного течения, как уже говорилось выше, на границе каверны должно выполняться еще дополнительно условие (2.11). Выполнение условия (2.10) приводит к зависимости между интенсивностью (плотностью) особенностей и координатами точек поверхности тела и границы каверны, представляющей собою интегральное уравнение.

В случае плоского течения удобно использовать вихри, особенно при рассмотрении течений с отличной от нуля циркуляцией по замкнутому контуру, охватывающему тело и каверну. В дальнейшем при выводе интегральных соотношений используется именно этот тип особенностей.

Пользуясь зависимостью (2.4), легко написать выражение для потенциала вихревого слоя, расположенного на контуре, соответствующем телу и каверне. Суммарный же потенциал скоростей вихревого слоя и плоскопараллельного набегающего потока будет иметь вид

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_l \gamma(s_1)\,\Theta(s_1,\ r)\,ds_1+v_\infty x+\text{const}, \qquad (2.12)$$

где интеграл вычисляется по контуру, общая длина которого l, а γ — погонная интенсивность вихрей слоя. За положительное направление при интегрировании принято движение вдоль контура против часовой стрелки. Второй член в уравнении (2.12) соответствует потенциалу невозмущенного потока, вектор скорости которого параллелен оси x. На рис. 43 изображена схема течения и координатные оси, где n — нормаль, а t — касательная к контуру. Утолщенными линиями обозначены участки составного контура, соответствующего части контура тела свободной от кавитации C_1 и замыкающему контуру C_2, а тонкими линиями — границе каверны C.

В соответствии с граничным условием (2.10) производная по нормали к контуру от правой части равенства (2.12) во всех его точках должна равняться нулю. Это равносильно обращению в нуль проекций на нормаль скоростей, вызванных вихревым слоем, и скорости невозмущенного потока

$$\frac{1}{2\pi}\int_l \frac{\cos\widehat{(r_1,\ t)}}{r_1(s,\ s_1)}\,\gamma(s_1)\,ds_1+v_\infty\sin\tau(s)=0. \qquad (2.13)$$

Основные обозначения, введенные в формулу (2.13), ясны из рис. 43, а $\widehat{r_1, t}$ — абсолютное значение наименьшего угла, заключенного между положительной частью оси t и отрезком r_1, соединяющим две точки контура с координатами s и s_1. Значение угла τ считается положительным в том случае, если для совмещения отрицательной части оси t с направлением вектора v_∞ необходимо первую вращать против часовой стрелки.

Соотношение (2.13) выражает связь между значением плотности вихревого слоя и координатами составного контура для

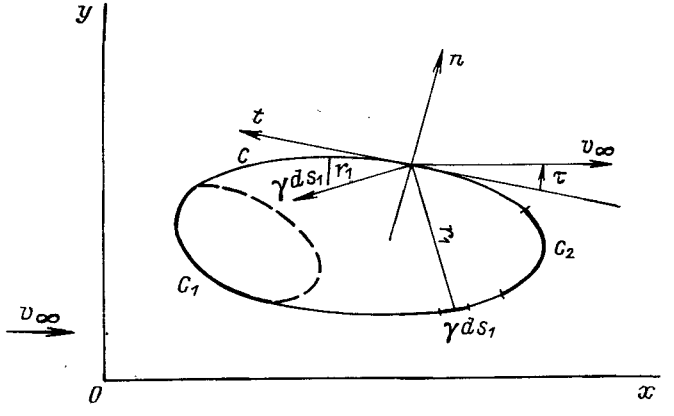


Рис. 43. Схема кавитационного течения

случая, когда удовлетворено граничное условие непроницаемости (2.10). Если контур замкнутый, то вихревая интенсивность в любой его точке будет равна скорости течения в этой точке, что показано, например в работе [44]. Следовательно, можно получить второе соотношение, дающее связь между плотностью вихревого слоя и координатами контура, для чего следует вычислить производную по касательной от правой части уравнения (2.12) и приравнять ее в точках, соответствующих контуру, значениям $\gamma(s)$. Для наглядности вывода указанного соотношения можно также воспользоваться простыми геометрическими соображениями, ясными из рис. 43, и вычислить непосредственно проекции на касательную к контуру вектора скорости невозмущенного потока и скорости, индуцированной вихревым слоем. При этом необходимо учесть скачок касательных скоростей на границе вихревого слоя (см. § 13). В результате вычислений получим соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_l \frac{\sin\left(\widehat{r_1, t}\right)}{r_1(s, s_1)}\gamma(s_1)\,ds_1 - v_\infty \cos\tau(s) = \frac{\gamma(s)}{2}. \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.14) может быть справедливо и для случая, когда контур, на который замыкается граница каверны, уходит в бесконечность. Еще одно соотношение можно получить, используя выражение для функции тока вихревого слоя.

Учитывая равенство (2.8), суммарную функцию тока вихревого слоя и плоскопараллельного потока можно записать в виде

$$\psi=\frac{1}{2\pi}\int_l \gamma(s_1)\ln r\,ds_1+v_\infty y+\text{const}. \qquad (2.15)$$

Постоянным значениям функции тока соответствуют некоторые линии, характерные тем, что вектор скорости по направлению совпадает с касательной к ним, т. е. эти линии являются

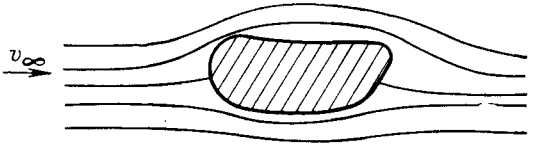


Рис. 44. Картина линий тока при обтекании тела

линиями тока. На рис. 44 изображена картина линий тока. Частью одной из них является контур сечения тела. Значение функции тока, соответствующее ей, можно принять равным нулю. Таким образом, приравнивая правую часть выражения (2.15) нулю, можно получить третье соотношение, связывающее плотность вихревого слоя с координатами контура

$$\frac{1}{2\pi}\int_l \gamma(s_1)\ln r_1(s,\ s_1)\,ds_1+v_\infty y_1=0, \qquad (2.16)$$

где r_1 и y_1 — соответствуют точкам контура.

Соотношения (2.13), (2.14) и (2.16) обычно используют при решении так называемой прямой задачи, заключающейся в определении скоростей на заданном контуре. В этом случае указанные соотношения рассматривают как интегральные уравнения для определения плотности вихревого слоя $\gamma(s)$, которая, как говорилось выше, для замкнутого контура равна значению скоростей на контуре. Ядра этих уравнений являются функциями координат точек контура. Для решения задачи может быть использовано любое из уравнений.

Если считать заданным распределение скоростей на контуре (функцию γ), то любое из указанных соотношений можно использовать для определения формы соответствующего контура. При этом формулы (2.13), (2.14) и (2.16) следует рассматривать уже как нелинейные интегральные уравнения для определения координат точек контура (обратная задача). В обратной задаче весьма важно получить решения, имеющие физиче-

ский смысл, так как не для любого распределения скоростей можно построить замкнутый не самопересекающийся контур.

Задача о кавитационном обтекании контура является смешанной, так как на его частях, соответствующих участку тела, свободному от кавитации, и замыкающему контуру, определению подлежит функция $\gamma(s)$. На части контура, соответствующей границе каверны, эта функция считается величиной постоянной, а определению подлежат координаты точек границы каверны. При этом из условия разрешимости кавитационной задачи должны быть определены еще параметры, характеризующие форму замыкающего контура, а также величину скорости на границе каверны.

Поскольку в уравнениях (2.13), (2.14) и (2.16) граничное условие (2.10) непроницаемости контура уже удовлетворено, а также удовлетворено условие на «бесконечности», решение их при рассмотрении кавитационной задачи следует подчинить только условию (2.11) постоянства скорости на участке контура, соответствующем границе каверны.

Решение указанных уравнений при рассмотрении прямой задачи производится, как правило, численным способом. Для этой цели интервал интегрирования разбивают на конечное число участков, на которых искомая функция $\gamma(s)$ аппроксимируется какой-либо простой функцией, чаще всего полиномом. При удовлетворении любому из уравнений в конечном числе точек получается система алгебраических уравнений для определения коэффициентов аппроксимирующих функций, решение которой и соответствует приближенному численному решению исходного интегрального уравнения.

Описанный подход может быть применен и при решении смешанной задачи кавитационного обтекания тела. В этом случае на участках разбивки заданной части контура аппроксимируется функция $\gamma(s)$, а на участках разбивки части контура, соответствующей границе каверны, вводится функция для аппроксимации формы границы каверны. При удовлетворении какому-либо из уравнений (2.13), (2.14) и (2.16) или же какой-то из их комбинаций в конечном числе заранее выбранных точек получается система нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений для определения коэффициентов аппроксимирующих функций. При численном решении этих систем появляются существенные трудности, связанные со сходимостью метода последовательных приближений, который приходится при этом применять.

Указанный выше подход к решению кавитационной задачи был реализован в работе [71] для плоского кавитационного течения и в работах [20, 21] при рассмотрении осесимметричного течения по схеме Рябушинского.

Излагаемый в дальнейшем метод численного решения задачи плоского кавитационного обтекания тела основан на

последовательном решении прямой и обратной задач. При этом используются некоторые элементы линеаризованной теории обтекания тел. Необходимые для применения этой теории вспомогательные материалы изложены в гл. III.

§ 16. Форма границы каверны вблизи точки ее отрыва от тела

При численном решении интегральных уравнений, описывающих кавитационное обтекание тел, представляет существенный интерес знание формы границы каверны вблизи точки

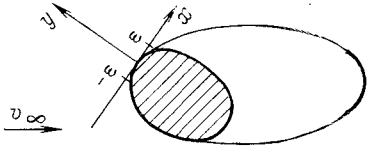


Рис. 45. Схема кавитационного обтекания сечения тела

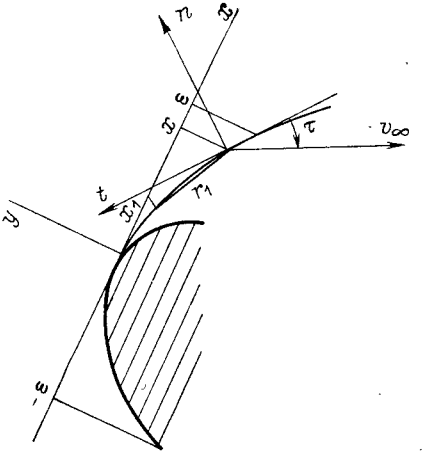


Рис. 46. Схема течения вблизи точки отрыва каверны от тела

отрыва. Определить ее с помощью интегрального уравнения (2.13) нетрудно (исследование кривизны границы каверны вблизи точки отрыва с помощью метода годографа приведено, например, в работе [23]). При этом выбор схемы течения в хвостовой части каверны не играет никакой роли. На рис. 45 изображена обобщенная схема Рябушинского, где показана также принятая при исследовании система декартовых координат, начало которой совмещено с точкой отрыва каверны, ось x совпадает с касательной к контуру тела и каверны (в точке отрыва контуры тела и каверны имеют общую касательную), а ось y совпадает с внешней нормалью.

В окрестности точки отрыва выделяется малый, но конечный элемент контура, концы которого имеют абсциссы, равные $\pm\varepsilon$ (рис. 46). Величина элемента выбирается такой, чтобы в его пределах углы между касательной к контуру и осью x были достаточно малыми. Это позволяет при вычислениях пренебречь их высшими степенями.

Интеграл в уравнении (2.13) можно разбить на две части

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\cos\left(\widehat{r_1,\ t}\right)}{r_1(s,\ s_1)}\gamma(s_1)\,ds_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{S}\frac{\cos\left(\widehat{r_1,\ t}\right)}{r_1(s,\ s_1)}\gamma(s_1)\,ds_1+v_\infty\sin\tau=0. \qquad (2.17)$$

Второй интеграл в соотношении (2.17) распространяется на весь контур за исключением выделенного элемента.

Интегральное уравнение (2.17) будем рассматривать только для значений s, находящихся в пределах выделенного элемента. Тогда второй интеграл выражает ни что иное, как величину проекции на нормаль к этому элементу скоростей, индуцированных частью вихревого слоя, находящегося вне элемента. Вычислять скорости точно нет надобности. Достаточно лишь знать вид функциональной зависимости скоростей от координат выделенного элемента контура. В пределах выделенного элемента касательная к части контура, соответствующей твердому телу, считается непрерывной. Очевидно, что при рассмотрении кавитационной задачи необходимо считать непрерывной и касательную к границе каверны, которая как сказано выше, в точке отрыва совпадает с касательной к поверхности тела.

Вспомнив свойства скоростей, индуцированных вихревым слоем вблизи его концов (см. § 13), а также принимая во внимание непрерывность касательной во всех точках контура, легко установить, что указанные скорости в пределах выделенного элемента будут выражаться непрерывной функцией, имеющей логарифмические особенности на концах элемента. Учитывая сказанное, уравнение (2.17) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\cos\left(\widehat{r_1,\ t}\right)}{r_1(s,\ s_1)}\gamma(s_1)\,ds_1=F(x,\ \varepsilon)-v_\infty\sin\tau, \qquad (2.18)$$

где через $F(x, \varepsilon)$ обозначена указанная выше функция, выраженная в декартовых координатах и взятая с обратным знаком.

Переходя в формуле (2.18) к переменным в декартовой системе координат, после несложных вычислений на основе геометрических соображений, ясных из рис. 46, можно сделать следующие оценки, справедливые при $x\to x_1$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{r_1,\ t}\right)&=1+y_1'y'+0\left(y_1'^2\right);\\
r_1&=(x-x_1)\left[1+y_1'^2/2+0\left(y_1'^4\right)\right];\\
\gamma(s_1)\,ds_1&=\gamma(x_1)\,dx_1\left[1+y_1'^2/2+0\left(y_1'^4\right)\right];\\
v_\infty\sin\tau&=\sin\left(\widehat{v_\infty,\ x}\right)-y'\cos\left(\widehat{v_\infty,\ x}\right)+0(y'^2),
\end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

где x, y, x_1, y_1 — значения декартовых координат фиксированных и переменных точек контура соответственно; y' — значение производной по x-функции, дающей зависимость от x-ординат точек рассматриваемого элемента контура на отрезке $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$; $0(y'^4)$ выражает порядок малости величины; $(\widehat{v_\infty, x})$ — значение угла наклона вектора скорости невозмущенного потока к оси x. После отбрасывания во втором и третьем выражениях системы (2.19) членов четвертого и выше порядка малости

$$\frac{\gamma(s_1)\,ds_1}{r_1} = \frac{\gamma(x_1)\,dx_1}{x - x_1}. \tag{2.20}$$

В правой части четвертого равенства (2.19) можно отбросить члены второго и выше порядка малости, а первого — только члены четвертого и выше порядка малости. Для части интеграла, зависящего от членов второго порядка малости, требуется специальная оценка, поскольку в подынтегральном выражении знаменатель при $x_1 \to x$ обращается в бесконечность. Эта часть имеет вид

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{y' y_1' \gamma\, dx_1}{x - x_1}. \tag{2.21}$$

Оценка интеграла (2.21) может быть выполнена следующим образом

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{y' y_1' \gamma(x_1)\,dx_1 - y'^2 \gamma(x)\,dx_1 + y'^2 \gamma(x)\,dx_1}{x - x_1} =$$

$$= y' F_1(x, \varepsilon) + y'^2 \gamma \ln \frac{\varepsilon + x}{\varepsilon - x}; \tag{2.22}$$

где $y'_1 = y'(x_1)$, а F_1 — ограниченная непрерывная функция при $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$, имеющая производную вблизи точки $x = 0$. Учитывая выражение (2.20), а также приведенные оценки, уравнение (2.18) можно представить следующим образом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\gamma(x_1)\,dx_1}{x - x_1} = F_2(x, \varepsilon) + y'(x) F_3(x, \varepsilon), \tag{2.23}$$

где $F_2 = F(x, \varepsilon) - v_\infty \sin(\widehat{v_\infty, x})$; $F_3 = v_\infty \cos(\widehat{v_\infty, x}) - F_1$.

Соотношение (2.23) можно рассматривать как линейное интегродифференциальное уравнение смешанного типа. А именно, при $-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0$ задана функция $y'(x)$, а определению подлежит $\gamma(x)$. При $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ подлежит определению $y'(x)$, а $\gamma = \text{const}$, которая определяется, как будет показано ниже, из дополнительного соотношения.

По условию кавитационной задачи функции $y'(x)$ и $\gamma(x)$ непрерывны во всех точках контура, а в точке отрыва каверны от тела в принятой системе координат $y'(x)=0$.

Если правую часть равенства (2.23) считать пока известной функцией при $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$, то можно применить формулу обращения сингулярного интегрального уравнения [18], отвечающую конечным значениям γ в точках $\pm\varepsilon$

$$\gamma(x)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\varepsilon^2-x^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{F_2(x_1,\varepsilon)+y'(x_1)F_3(x_1,\varepsilon)}{(x_1-x)\sqrt{\varepsilon^2-x_1^2}}dx_1. \qquad (2.24)$$

При этом сумма функций, стоящих в числителе формулы (2.24), должна быть такой, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{F_2+y'(x_1)F_3}{\sqrt{\varepsilon^2-x_1^2}}dx_1=0. \qquad (2.25)$$

После определения формы границы каверны и подстановки полученного результата в выражение (2.25) указанное дополнительное соотношение может быть использовано для нахождения величины постоянной скорости на границе каверны, равной γ, или же числа кавитации.

Вводя для известной части интеграла в формуле (2.24) обозначение $F_4(x,\varepsilon)$, уравнение (2.24) можно преобразовать к виду

$$-\int_0^{\varepsilon}\frac{y'(x_1)F_3(x_1,\varepsilon)\,dx_1}{(x-x_1)\sqrt{\varepsilon^2-x_1^2}}=\frac{\gamma_0-F_4(x,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2-x^2}}; \qquad (2.26)$$

$$F_4=\sqrt{\varepsilon^2-x^2}\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{F_2(x_1,\varepsilon)\,dx_1}{(x-x_1)\sqrt{\varepsilon^2-x_1^2}}+\right.$$

$$\left.+\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{F_3(x_1,\varepsilon)\,y'(x_1)\,dx_1}{(x-x_1)\sqrt{\varepsilon^2-x_1^2}}\right]. \qquad (2.27)$$

Здесь для точек границы каверны ввиду постоянства скорости принято $\gamma(x)=\gamma_0=\text{const}$.

Оценка интегралов в правой части выражения (2.27) с учетом характера функций $F_2(x,\varepsilon)$ и $y'(x)$ показывает, что функция $F_4(x,\varepsilon)$ в интервале $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$ конечна и непрерывна.

Соотношение (2.26) можно рассматривать как сингулярное интегральное уравнение для определения функции, стоящей множителем при ядре $1/(x-x_1)$. Вследствие того, что эта функция при $x_1\to\varepsilon$ обращается в бесконечность, а при $x\to 0$

конечна, для решения уравнения следует пользоваться той формой обращения, которая дает конечное значение этой функции в точке $x=0$ и бесконечное значение в точке $x=\varepsilon$. После несложных преобразований решение уравнения (2.26) может быть записано в следующем виде

$$y'(x)=\frac{\sqrt{x(\varepsilon+x)}}{F_3(x,\ \varepsilon)}\int_0^{\varepsilon}\frac{\gamma_0-F_4(x_1,\ \varepsilon)}{(x_1-x)\sqrt{x_1(\varepsilon+x_1)}}dx_1. \qquad (2.28)$$

Предположив, что в окрестности точки $x=0$ функцию F_4 можно представить в виде степенного ряда, бесконечного или конечного, интеграл в правой части формулы (2.28) можно вычислить в явном виде. Тогда для малых значений x, стремящихся к нулю со стороны каверны, результат интегрирования может быть представлен в виде следующего ряда

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ \ldots \qquad (2.29)$$

С учетом формулы (2.29) выражение для производной $y'(x)$ в окрестности точки отрыва каверны при стремлении к ней со стороны каверны можно представить в виде

$$y'(x)=\sqrt{x}\ \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots}{F_3(x,\ \varepsilon)}. \qquad (2.30)$$

Ряд, стоящий в числителе уравнения (2.30) является произведением ряда (2.29) и ряда, полученного при разложении выражения $\sqrt{\varepsilon+x}$ в формуле (2.28) по степеням x для $x<\varepsilon$.

В принятой системе координат кривизна границы каверны вблизи точки отрыва равна второй производной от $y(x)$. Дифференцирование уравнения (2.30) дает

$$y''=\frac{(a_0+3a_1x+a_2x^2+\ \ldots)F_3(x,\ \varepsilon)}{2\sqrt{x}F_3^2(x,\ \varepsilon)}-$$

$$-\frac{\sqrt{x}\,(a_0+a_1x+a_2x^2+\ \ldots)F_3'(x,\ \varepsilon)}{F_3^2(x,\ \varepsilon)}. \qquad (2.31)$$

Поскольку, как это следует из формул (2.22) и (2.23), производная $F_3'(x,\ \varepsilon)$ — величина, ограниченная при $x\to 0$, то соотношение (2.31) можно представить в виде ряда

$$y''=\frac{b_0}{\sqrt{x}}+b_1\sqrt{x}+b_2x\sqrt{x}+\ \ldots, \qquad (2.32)$$

где коэффициенты b_0, b_1, $b_2\ldots$ являются ограниченными функциями x.

В новой системе координат, повернутой на некоторый угол относительно системы, принятой при выводе формулы (2.32),

ряд будет содержать кроме членов с дробными степенями x также члены с целыми степенями.

Из уравнения (2.32) следует, что вблизи точки отрыва каверны кривизна ее границы в общем случае обращается в бесконечность. Она становится конечной только в том случае, когда коэффициент первого члена ряда (2.32) обращается в нуль, т. е. при $b_0=0$.

При рассмотрении кавитационного обтекания тел, касательная к продольному сечению которых в некоторых точках изменяется скачком, обычно считают, что точки отрыва каверны совпадают с точками разрыва непрерывности касательной. В этом случае форма границы каверны в окрестности точек отрыва определяется полным рядом (2.32).

При рассмотрении обтекания тел с конечной, непрерывно меняющейся кривизной возникает некоторая неясность в определении точек отрыва каверны. Если их назначать произвольно, то форма каверны будет определяться полным рядом (2.32). Если же в соответствии с условием Бриллюэна—Вилля кривизну каверны в точке отрыва считать конечной, то форма каверны определится рядом (2.32) без первого члена, т. е. полагается, что $b_0=0$. Поскольку коэффициент b_0 является функцией x, условие $b_0=0$ может быть в принципе использовано для определения координаты точки отрыва каверны от тела.

В реальных условиях картина течения вблизи точки отрыва каверны от тела существенно усложняется совокупным влиянием капиллярности жидкости и вязкости, что будет рассмотрено в гл. VI. Вместе с тем, во многих практически важных случаях этим влиянием можно пренебречь, поэтому методы расчета кавитационных течений, изложенные в дальнейшем, базируются на модели, не учитывающей вязкость и капиллярность жидкости.

ГЛАВА III

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕАРИЗАЦИИ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

При решении нелинейной кавитационной задачи в дальнейшем использованы некоторые элементы линеаризованной теории обтекания тел идеальной жидкостью. Изложение общих принципов этой теории можно найти, например в книгах [15, 28]. Здесь же рассмотрены некоторые вопросы теории в связи

с использованием их непосредственно при решении плоской задачи обтекания тел идеальной жидкостью. Приведено решение обратной линеаризованной задачи, которое, собственно, и используется в дальнейшем как составной элемент решения кавитационной задачи.

§ 17. Обтекание стенки при наличии местной деформации

Рассмотрим влияние местной деформации на обтекание плоской стенки бесконечной протяженности (рис. 47). Предполагается, что в отсутствии деформации над верхней половиной изображенной на рисунке стенки поток будет невозмущенным, параллельным стенке.

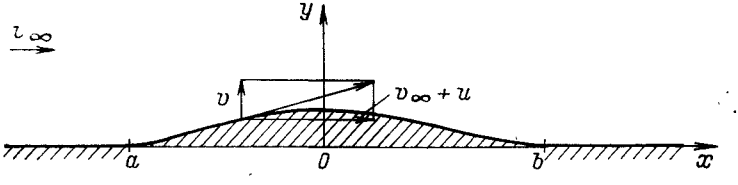


Рис. 47. Обтекание деформированной стенки

Деформация считается настолько малой, что скорости возмущения, вносимого ею, малы по сравнению со скоростью невозмущенного потока

$$\frac{u}{v_\infty} \ll 1, \quad \frac{v_1}{v_\infty} \ll 1, \tag{3.1}$$

где u, v_1 — проекции скорости возмущения на оси x и y соответственно.

Основное ограничение линеаризованной теории, накладываемое на форму контура поперечного сечения тела, непосредственно следует из условия (3.1). Так как вектор скорости в любой точке контура, соответствующего границе стенки, направлен по касательной к нему, то тангенс угла между касательной к контуру и осью x (рис. 47)

$$y'(x) = \frac{v_1}{v_\infty + u},$$

следовательно, в соответствии с выражением (3.1)

$$y'(x) \ll 1. \tag{3.2}$$

Если обтекание деформированной стенки заменить обтеканием слоя источников, то допущение линеаризованной теории

дает возможность установить простую связь между интенсивностью источников и производной $y'(x)$

$$q(x)=2v_{\infty}y'(x)+0(y'^{2}), \tag{3.3}$$

где q — погонная интенсивность источников.

При этом скорости на контуре с той же степенью точности могут быть определены по формуле

$$v(x)=1+\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b}\frac{q(\xi)\,d\xi}{x-\xi}, \tag{3.4}$$

где v — значение суммарной скорости потока в произвольной точке стенки; x, ξ — фиксированные и текущие значения коор-

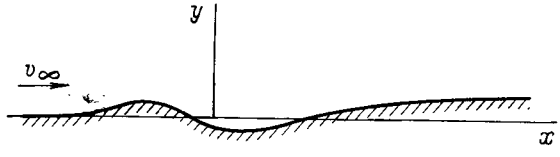


Рис. 48. Криволинейная стенка

динат точек, лежащих на оси, совпадающей с недеформированными границами стенки; a, b — координаты концов границы деформированного участка стенки; все величины, имеющие размерность скорости, отнесены к v_{∞}.

Таким образом, допущения линеаризованной теории позволяют свести задачу обтекания деформированной стенки к задаче обтекания слоя источников, расположенных на недеформированной стенке в пределах участка деформации. Интенсивность источников при этом связана с величиной деформации зависимостью (3.3).

Из выражения (3.3) и интеграла в правой части уравнения (3.4) ясно, что в тех точках, где касательная к контуру терпит разрыв, линеаризованная теория становится некорректной, поскольку скорость возмущения в их окрестности растет до бесконечности по логарифмическому закону. Применительно к задачам кавитации будут рассмотрены только такие деформации, при которых касательная во всех точках деформированной границы непрерывна, а в точках a и b совпадает с касательной к недеформированной стенке.

В линеаризованной постановке можно рассмотреть также обтекание стенки, которая до деформации была криволинейной, например такой, какая изображена на рис. 48. При этом протяженность участков деформации следует выбирать с учетом сразу обоих ограничений (3.1) и (3.2).

Возьмем, например, в качестве исходного недеформированного контура окружность, находящуюся в плоскопараллельном потоке (рис. 49). Если условно считать малыми величины $y' \leqslant \leqslant 0{,}2$, то в «местных» системах координат x_1, y_1 этому требованию будет удовлетворять любая дуга окружности с центральным углом $\alpha \leqslant 23°$.

При линеаризации в качестве скорости невозмущенного набегающего потока, обтекающего местную деформацию дуги окружности, может быть взята скорость потока на этой дуге

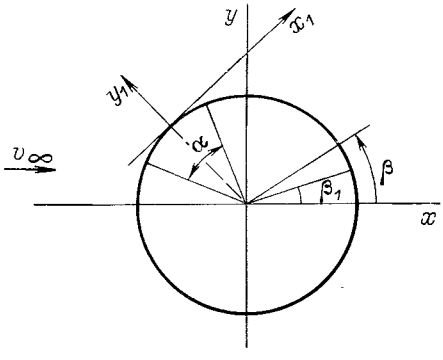


Рис. 49. Обтекание окружности

$$v = 2v_\infty \sin \beta. \qquad (3.5)$$

Поскольку (см. рис. 49) она переменна, то можно взять некоторое среднее ее значение на дуге. Тогда величину дуги, на которой возможна линеаризация, следует определять, исходя из оценок ограничения (3.1).

Если зафиксировать некоторую точку, определяемую углом β_1, в окрестности которой осуществляется линеаризация, то исходя из уравнения (3.5), оценку допустимой величины отклонения в скорости на дуге можно произвести, используя неравенство

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} \ll 0{,}2, \qquad (3.6)$$

где допустимым отклонением так же как и при оценке отклонения в значении y' принята величина 0,2.

Наиболее жесткие условия оказываются вблизи критической точки, где $\beta = 0$. Здесь равна нулю дуга окружности, удовлетворяющая зависимости (3.6). Для дуги, симметричной относительно точки $\beta_1 = \pi/2$, $\alpha \leqslant 23°$. В принципе, разделяя окружность на дуги, отвечающие условиям применения линеаризованной теории, можно произвести расчет ее обтекания жидкостью при малых деформациях значительных ее частей. Как видно из приведенной выше оценки, допустимая величина дуг определяется требованием к величине отклонения скорости на дуге от некоторого среднего значения, поскольку это требование в данном случае оказывается более жестким.

§ 18. Обратная задача

Рассмотрим специальный вид обратной задачи, заключающейся в нахождении такой деформации заданного (исходного) контура (стенки), при которой на деформированном участке

скорость будет постоянной. При этом на форму исходного контура особых ограничений не накладывается, однако участок его, подвергающийся деформации, а также характер деформации должны удовлетворять требованиям, сформулированным в § 17. В качестве исходных данных при решении поставленной задачи служат распределение скоростей на участке исходного контура, который предполагают деформировать, и координаты его концов. В результате решения задачи определяется величина деформаций и величина постоянной скорости на деформированном участке. Заранее задавать значение этой скорости нельзя, так как при этом задача окажется, в общем случае, неразрешимой.

При решении задачи могут быть использованы формулы типа (3.3) и (3.4), дающие связь между величиной деформации и вызванной скоростью, обусловленной деформацией.

В точках деформированного контура с принятой в линеаризованной теории точностью справедливо соотношение

$$\frac{q}{2v_0} = y', \tag{3.7}$$

где v_0 — значение постоянной по величине скорости в точках деформированного контура, отнесенное к v_∞; y' — тангенс угла между касательными к исходному и деформированному контурам.

Уравнение (3.4) применительно к обтеканию участка контура произвольной формы может быть записано в следующем виде

$$v(s) = v_1(s) + \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{q(s_1)\,ds_1}{s - s_1}, \tag{3.8}$$

где $v(s)$, $v_1(s)$ — скорости в точках деформированного и исходного контуров, отнесенные к v_∞; a, b — координаты концов участка контура, подлежащего деформации. В формуле (3.8) вновь введены дуговые координаты, так как это удобно при вычислениях.

Подставляя в выражение (3.8) значение функции q, полученное из уравнения (3.7), а также учитывая, что на деформированном контуре суммарная скорость $v(s)$ должна быть равной v_0, можно получить уравнение для решения обратной задачи

$$1 - v_1^*(s) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{y'(s_1)\,ds_1}{s - s_1}; \tag{3.9}$$

$$v_1^*(s) = \frac{v_1(s)}{v_0}. \tag{3.10}$$

В соотношении (3.9) кроме неизвестной функции y' содержится еще неизвестный параметр v_0, для определения которого необходимо дополнительное условие. Это условие в данном случае получают, рассматривая поведение функции y' вблизи одного из концов интервала интегрирования.

Так как функция $v_1(s)$ задана по условию задачи, а параметр v_0 можно пока считать известным, выражение (3.9) представляет собою хорошо изученное сингулярное интегральное уравнение первого рода. Различные формы его решений (обращений) содержатся, например в монографиях [18, 45].

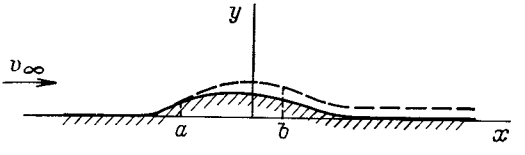


Рис. 50. Деформированный контур незамкнутой формы

В связи с требованиями, накладываемыми на характер деформаций, в точках, соответствующих концам промежутка интегрирования, функция $y'(s)$ должна равняться нулю, т. е. должны равняться нулю углы между касательными к исходному и деформированному контурам. Этому условию удовлетворяет следующая форма решения (3.9) [18]

$$y'(s)=\frac{\sqrt{(s-a)(b-s)}}{\pi}\int_a^b \frac{\left[1-v_1^*(s_1)\right]ds_1}{(s_1-s)\sqrt{(s_1-a)(b-s_1)}}, \qquad (3.11)$$

где $a \leqslant s \leqslant b$.

Решение в форме (3.11) возможно только при выполнении равенства

$$\int_a^b \frac{1-v_1^*(s_1)}{\sqrt{(s_1-a)(b-s_1)}}\,ds_1=0, \qquad (3.12)$$

из которого может быть найдена величина параметра v_0.

Решениям (3.11), (3.12) соответствуют, вообще говоря, деформированные контуры незамкнутой формы типа, изображенного на рис. 50 пунктиром (исходный контур изображен утолщенной сплошной линией). Исходный и деформированный контуры касаются друг друга в точке a, а в точке b они не совпадают. При этом в указанных точках касательные к исходному и деформированному контурам имеют одинаковый наклон к оси x. Пунктирная линия между точками a и b

с принятой в линеаризованной теории точностью соответствует линии тока. Она может быть продолжена справа от точки b в бесконечность таким образом, что расстояние по нормали между исходным контуром (стенкой) и деформированным сохраняется вниз по потоку неизменным, равным расстоянию в точке b.

Если требуется получить решение, соответствующее деформированным контурам замкнутой формы, то к условиям (3.11) и (3.12) следует присовокупить условие замкнутости, которое может быть записано в виде

$$\int_a^b y'(s)\,ds=0. \tag{3.13}$$

Равенство (3.13) автоматически выполняется только в одном очевидном случае, когда исходный контур, распределение скоростей на нем, а также точки a и b симметричны относительно оси y. Если симметрия не соблюдается, то одну из указанных точек заранее фиксировать нельзя, а следует определять в процессе решения задачи с учетом равенства (3.13).

Решение (3.11)—(3.13) обратной задачи является приближенным. Однако в процедуре вычислений, может быть заложена принципиальная возможность уточнения результата путем последовательных приближений. Для ее реализации необходимо применить метод точного решения прямой задачи, т. е. расчет распределения скоростей по контуру произвольной формы. При наличии современной вычислительной техники такие расчеты нетрудно сделать, например, на основе использования точных уравнений (2.13), (2.14) или (2.16).

На первом шаге численного решения обратной задачи используют функцию $v_1(s_1)$, соответствующую исходному контуру. Далее определяют $v_1(s)$ на деформированном контуре первого приближения путем численного решения прямой задачи, после чего находят форму деформированного контура следующего приближения и т. д. По мере приближения функции $v_1(s)$ к v_0, числитель в подынтегральном выражении (3.11) стремится к нулю, а вместе с ним стремятся к нулю и величины деформации соответствующих приближений, определяемые значением $y'(s)$. Таким образом, точность решения обратной задачи определяется точностью решения прямой задачи.

Очевидно, что сходимость описанного способа последовательных приближений будет существенным образом зависеть от формы исходного контура. Конкретные требования, которым должен удовлетворять исходный контур для обеспечения сходимости, а также надлежащей ей быстроты, в общем виде сформулировать затруднительно. Однако, как показывает опыт расчетов, достаточно хорошая сходимость достигается даже на

контурах, форма которых и распределение скоростей на которых, существенно отличаются от формальных требований линеаризованной теории (3.1) и (3.2).

ГЛАВА IV

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

§ 19. Общие замечания

Как уже говорилось в § 15, в методе интегральных уравнений плоскую задачу об определении кавитационного обтекания тела можно свести к решению одного из интегральных соотношений (2.13), (2.14), (2.16) или же их комбинаций. При этом указанные соотношения следует рассматривать как интегральные уравнения смешанного типа, поскольку на части интервала интегрирования, соответствующей контуру продольного сечения тела и замыкающему контуру, искомой величиной является вихревая интенсивность, а на остальной части — форма границы каверны. Кроме этого в общем случае из дополнительных условий следует определить еще несколько параметров. Среди них может быть величина скорости на границе каверны и некоторые геометрические характеристики замыкающего контура. Условия для определения указанных параметров будут ничем иным, как условиями разрешимости кавитационной задачи.

Непосредственное аналитическое решение интегральных нелинейных уравнений смешанного типа (2.13), (2.14) и (2.16) затруднительно. В дальнейшем для решения поставленной задачи используется метод последовательных приближений, на каждом шаге которого последовательно решаются прямая и обратная задачи. Сначала задают так называемую пробную границу каверны и начальную форму замыкающего контура (необходимые требования к форме пробной границы каверны и замыкающего контура будут сформулированы ниже при рассмотрении конкретных задач). Далее с помощью одного из упомянутых выше интегральных уравнений (прямая задача) находят функцию $\gamma(s)$, равную скорости $v_1(s)$, во всех точках составного контура, включающего границу пробной каверны и участки основного и замыкающего контура. Интегральные уравнения относительно функции $\gamma(s)$ являются линейными. После этого с помощью уравнений (3.11), (3.12) и (3.13) решают обратную задачу для точек контура пробной границы каверны и строят границу каверны первого приближения. При этом уравнения (3.12) и (3.13) используют для определения указанных выше

параметров. В случае несимметричного течения расчеты для верхней и нижней частей границы каверны производят независимо. Вследствие этого скорости v_0 в общем случае окажутся на этих частях различными. Их равенство можно обеспечить за счет введения еще одного параметра, который следует определять в процессе решения задачи. В качестве такого параметра можно взять, например, величину циркуляции вокруг составного контура или же какую-либо геометрическую характеристику замыкающего контура. Варьируя их величинами, можно добиться равенства v_0 на обеих границах каверны. В случае наличия симметрии течения относительно некоторой оси, параллельной вектору скорости набегающего потока, равенство v_0 обеспечивается автоматически.

Если кривизна контура продольного сечения тела изменяется непрерывно, для определения положения точек отрыва каверны необходимо использовать еще соотношения, полученные на основе условия Бриллюэна—Вилля о конечности кривизны границы каверны в точках ее отрыва (см. § 16).

Составной контур первого приближения служит исходным для второго шага описанного выше цикла вычислений, состоящего в последовательном решении прямой и обратной задачи. Приближения следует оборвать, когда функция $v_1^*(s)$ будет отличаться от единицы на величину, не большую наперед заданной. Для суждения о достаточности приближений может оказаться более удобным другой какой-либо критерий, например критерий, связанный с оценкой максимальной величины деформации границы каверны в двух последовательных приближениях. Несмотря на то, что используемое при решении обратной задачи уравнение (3.11) является приближенным, метод расчета в целом может рассматриваться как строгий, поскольку он на каждом шаге контролируется решением прямой задачи с использованием точного интегрального уравнения. Последнее обстоятельство, по-видимому, является также важным стабилизирующим фактором, обеспечивающим сходимость последовательных приближений даже в тех случаях, когда распределение скоростей на пробной границе каверны будет существенно отклоняться от требований, накладываемых линеаризованной теорией, на основании которой получено уравнение (3.11). Немаловажное значение для сходимости последовательных приближений имеет и то обстоятельство, что формула (3.11) дает тот же самый закон изменения формы границы каверны, что и «точная» теория, включая окрестность точки отрыва каверны. Это легко показать, подобрав пробную границу таким образом, чтобы вблизи точки отрыва было можно функцию, стоящую в числителе выражения (3.11), аппроксимировать полиномом, а на остальном участке интервала интегрирования — непрерывной дифференцируемой функцией. Для этого нужно только обеспечить соответствующую

гладкость пробной границы каверны и гладкость ее сопряжения с основным и замыкающим контуром.

Тогда, принимая для простоты $a = 0$ и разбивая интервал интегрирования на два отрезка, уравнение (3.11) можно представить в виде

$$y'(s) = \frac{\sqrt{s(b-s)}}{\pi}\left[\int_0^c \frac{(a_0 + a_1 s_1 + \ldots)\,ds_1}{(s_1 - s)\sqrt{s_1(b-s_1)}} + \right.$$

$$\left. + \int_c^b \frac{f(s_1)\,ds_1}{(s_1 - s)\sqrt{s_1(b-s_1)}}\right], \qquad (4.1)$$

где $0 < c < b$, а $f(s_1)$ — непрерывная дифференцируемая функция.

Путем прямых вычислений первого интеграла и оценки второго для малых значений s, легко показать, что функция y' может быть представлена в виде ряда, имеющего ту же структуру, что и ряд, стоящий в числителе формулы (2.30), а именно,

$$y' = b_0\sqrt{x} + b_1 x\sqrt{x} + \ldots \qquad (4.2)$$

Его дифференцирование дает такой же по структуре ряд, что и дифференцирование ряда (2.31). Приведенная оценка является косвенным подтверждением корректности формул (3.11), (3.12) и (3.13) при решении кавитационной задачи. Тем более, что вычисленные погрешности при решении могут быть эффективно уменьшены вследствие применения для решения прямой задачи точных интегральных уравнений, дающих на каждом шаге приближений точную величину невязки между фактическим распределением скоростей на границе каверны соответствующего приближения и постоянной v_0, обусловленную приближенностью решения обратной задачи. При $v_1^*(s) \to 1$ стремится к нулю отклонение координат границы каверны от их точных значений, что непосредственно следует из формулы (3.11). При $v^*_1 \equiv 1$, что соответствует совпадению искомого контура с точной границей каверны, уравнения (3.11), (3.12) и (3.13) удовлетворяются тождественно.

Пользуясь уравнениями (3.4) и (3.3) и аппроксимацией границы каверны вблизи точки отрыва от тела (4.2), можно определить закон изменения скоростей на контуре продольного сечения тела вблизи этой точки. При этом функция $v_1(s)$ в формуле (3.4) будет означать исходное распределение скорости при наличии пробной границы каверны.

Если обеспечить достаточно гладкое сопряжение пробной границы каверны с контуром продольного сечения тела, то в местной системе координат, связанной с точкой отрыва каверны от тела, в окрестности этой точки будут справедливы все допущения, принятые при выводе формул (3.4) и (3.3). К тому же здесь пробная граница каверны будет близка к истинной,

а функцию $v_1(s)$ можно будет аппроксимировать степенным рядом, конечным или бесконечным. Принимая во внимание сказанное, формулу (3.4) можно представить в виде

$$v(s)=v_1(s)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{2y'(s_1)\,ds_1}{s-s_1}+\int_{\varepsilon}^{b}\frac{f(s_1)\,ds_1}{s-s_1}, \qquad (4.3)$$

где $v_1(s)$ — функция, аппроксимируемая степенным рядом; ε — малая, но конечная величина; $y'(s_1)$ — функция, соответствующая аппроксимации (4.2); $s \leqslant 0$, $f(s_1)$ — конечная дифференцируемая функция. Соотношение (4.3) записано в системе координат, начало которой совмещено с точкой отрыва каверны.

Второй интеграл уравнения (4.3) может быть для $|s|<\varepsilon$ представлен в виде степенного ряда. После подстановки в первый интеграл ряда (4.2) и вычислений, соотношение (4.3) можно представить в виде

$$v(s)=\sqrt{-s}\,(b_0+b_1s+b_2s^2+\ldots)+\text{ряд по целым степеням } s. \qquad (4.4)$$

В случае фиксированных точек отрыва каверны ($b_0 \neq 0$) производная функции $v(s)$ при $s \to 0$ обращается в бесконечность, что соответствует обращению в бесконечность ускорения потока при приближении к точке отрыва каверны. Знак ускорения определяется знаком коэффициента b_0.

§ 20. Симметричное кавитационное обтекание тел безграничным потоком (схемы Жуковского—Рошко и Рябушинского)

Первый вопрос, который встает при решении кавитационной задачи указанным выше методом, заключается в выборе начального приближения координат границы каверны и замыкающего контура. Наиболее просто он решается в схемах Жуковского—Рошко и Рябушинского, которые и будут ниже рассмотрены.

Основное требование к начальному приближению состоит в обеспечении достаточно плавного распределения скоростей по пробной границе каверны, чтобы добиться наиболее быстрой сходимости процесса последовательных приближений. Однако, как показывают расчеты, даже при наличии существенных по величине отклонений скоростей на пробной границе каверны от некоторого среднего значения, применение формул (3.11), (3.12) и (3.13) уже после первого шага расчетов приводит к сильному уменьшению указанных отклонений (невязок).

На рис. 51 сплошной тонкой линией изображена пробная граница каверны, а утолщенными сплошными линиями — контур обтекаемого тела и пробный замыкающий контур в виде параллельных пластинок. При построении течений с выпуклыми

в сторону жидкости границами каверны расстояние между пластинками желательно (но не обязательно) брать несколько большим, чем максимальная толщина тела. Расстояние их передних кромок от тела выбирается, исходя из желаемой длины каверны. Длина же границы каверны считается величиной заданной, а искомыми параметрами — число кавитации и расстояние между замыкающими пластинками.

Если рассматривается обтекание с фиксированными точками отрыва каверны от тела, то эти точки и пластинки должны быть соединены линией, соответствующей пробной границе каверны. Основным требованием к форме этой линии является непрерывность касательной, которая на концах должна совпадать с касательными к основному и замыкающему контуру (пластинкам). Другое требование заключается в конечности кривизны, за исключением быть может, окрестности точек сопряжения с основным и замыкающим контурами.

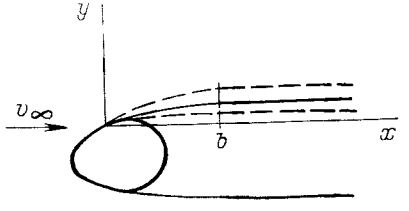


Рис. 51. Схема Жуковского—Рошко

Желательно, но не обязательно выполнение требования непрерывности кривизны пробной границы каверны. Поскольку для случая фиксированного отрыва каверны от тела кривизна в точках отрыва обращается в бесконечность [см. формулу (2.31)], в этих точках кривизну нужно взять большой, но необязательно бесконечной. Это же относится и к точкам замыкания каверны. Кривизну границы каверны можно брать также равной кривизне основного и замыкающего контуров в точках отрыва и замыкания границы каверны соответственно. При этом, как было показано выше, уже на первом же шаге вычислений по формуле (3.11) кривизна в этих точках станет бесконечно большой нужного порядка.

Форму пробной границы каверны в схеме Жуковского—Рошко можно задавать например, представив вторую производную в виде полинома третьей степени

$$y''=a+bx+cx^2+dx^3. \tag{4.5}$$

После двух интегрирований получают выражения для y' и y в виде

$$\left.\begin{aligned} y'&=ax+b/2x^2+c/3x^3+d/4x^4+c_1;\\ y&=c_1x+a/2x^2+b/6x^3+c/12x^4+d/20x^5+c_2. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Выражения (4.5) и (4.6) записаны в системе координат, представленной на рис. 51, где начало координат совмещено с точкой отрыва каверны от тела. Для определения шести параметров

в системе (4.6) могут быть использованы шесть уравнений, полученных из условий задания на концах пробной границы каверны ее ординат, первых и вторых производных.

Метод аппроксимации пробной границы каверны полиномами высокой степени не всегда хорош, так как аппроксимирующая функция может осциллировать внутри промежутка аппроксимации. В расчетной практике показала себя с хорошей стороны аппроксимация дугами эллипса

$$y = a_1 \sqrt{1 - [(x - a_2)/a_3]^2} + a_4. \qquad (4.6а)$$

В общем случае для лежащих с обеих сторон от миделя пробной границы каверны дуг эллипса берутся различные наборы коэффициентов a_1, a_2, a_3 и a_4, величину которых определяют из условия непрерывности пробной границы каверны и касательных в середине пробной границы и в точках сопряжения с контуром продольного сечения тела и замыкающим контуром.

Вообще же выбор способа задания пробной границы каверны и замыкающего контура строго не ограничен. Основным аргументом в пользу того или иного способа должно быть удобство производства расчетов.

Задав форму границы каверны, производят вычисления путем последовательных решений прямой и обратной задач.

Как уже говорилось, при решении прямой задачи может быть использовано любое из интегральных уравнений (2.13), (2.14) или (2.16). Предпочтение, по-видимому, следует отдать интегральному уравнению Фредгольма второго рода (2.14), так как оно удобно для решения итеративными методами. Численное решение этого уравнения принципиальных трудностей не представляет, и соответствующие методы решения хорошо разработаны. В связи с этим вопрос определения скоростей на границе каверны и на основном и замыкающем контурах в дальнейшем не рассматривается. Вместе с тем хотелось бы обратить внимание на то, что, по-видимому, наиболее универсальный и практичный способ численного решения уравнения (2.14) — аппроксимация его системой линейных алгебраических уравнений. Эту систему получают путем разбиения интервала интегрирования на конечное число отрезков, на которых принимается какой-либо простой вид аппроксимации функции $\gamma(s)$. Удовлетворение условию (2.14) в одной точке каждого из отрезков приводит к конечной системе алгебраических уравнений, решение которых выполняют на ЭЦВМ по стандартным программам.

В ходе решения симметричных кавитационных задач еще необходимо определить два параметра, к числу которых можно отнести значение скорости на границе каверны и какую-либо геометрическую характеристику замыкающего контура. В рассматриваемой схеме Жуковского—Рошко такой величиной является расстояние между пластинками.

Для решения обратной задачи следует использовать только соотношения (3.11) и (3.12). Сначала из второго соотношения определяют параметр v_0, поскольку функция $v_1^*(s_1)$ задана с точностью до множителя $1/v_0$. Далее с помощью формулы (3.11) определяют функцию $y'(s)$, путем интегрирования которой можно получить функцию $y(s)$, характеризующую расстояние по нормали к пробной границе каверны от точек границы каверны первого приближения. Значение этой функции в точке b будет соответствовать расстоянию по нормали, на которое следует сдвинуть замыкающие пластинки относительно исходного их положения. За счет сдвига пластинок автоматически удовлетворяется соотношение (3.13). Для дальнейшего шага в вы-

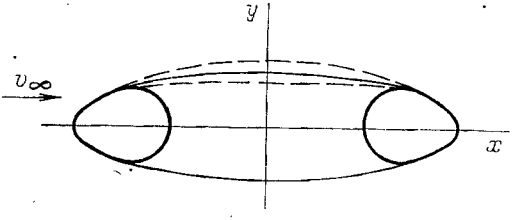


Рис. 52. Схема с «зеркалом»

числениях исходным служит составной контур первого приближения и т. д.

На рис. 51 пунктирными линиями показаны границы каверны и замыкающие пластинки первого приближения для двух возможных случаев. Верхние пунктиры отражают тот случай, когда расстояние между пластинками начального приближения оказывается меньше действительного. При этом и граница пробной каверны, по крайней мере вблизи точек замыкания, будет лежать ниже действительной.

Нижние пунктиры соответствуют завышенному расстоянию между пластинками начального приближения.

Границы каверны могут не всегда лежать строго выше или ниже пробной границы. Возможны случаи пересечения этих границ.

Для удобства в вычислениях формулы (3.11), (3.12) и (3.13) могут быть несколько упрощены и представлены в виде

$$y'(s)=\frac{\sqrt{(s-a)(b-s)}}{\pi v_0}\int_a^b \frac{[v_0-v_1(s_1)]\,ds_1}{(s_1-s)\sqrt{(s_1-a)(b-s_1)}}; \quad (4.7)$$

$$v_0=\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{v_1(s_1)\,ds_1}{\sqrt{(s_1-a)(b-s_1)}}; \quad (4.8)$$

$$\int_a^b \frac{(2s_1-a-b)\,v_1(s_1)\,ds_1}{\sqrt{(s_1-a)(b-s_1)}}=0. \quad (4.9)$$

Параметр v_0 в выражении (4.8) связан с числом кавитации зависимостью $\sigma = v_0^2 - 1$. Так же просто решается задача о кавитационном обтекании тела (рис. 52) по схеме Рябушинского (схема с «зеркалом» [23]). Здесь вследствие зеркальной симметрии течения относительно оси y при решении задачи определяют только один параметр, а именно, значение скорости на границе каверны v_0, используя соотношение (4.8). При этом условие (4.9) удовлетворяется автоматически. Принципы выбора формы пробной границы каверны, изображенной на рис. 52 тонкой сплошной линией, остаются теми же, что и при рассмотрении течения с использованием схемы Жуковского—Рошко.

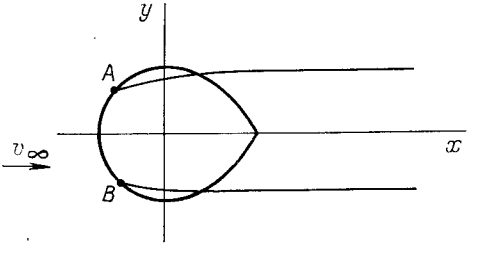


Рис. 53. Обтекание дужки

Если точки отрыва каверны от тела, в случае гладкого отрыва, фиксировать заранее, то возможно пересечение поверхности тела границей каверны (рис. 53). Такой случай автор монографии [23] предлагает считать обтеканием дужки, заключенной между точками A и B.

Для контуров с непрерывно изменяющейся кривизной, как уже отмечалось в § 16, положение точки отрыва может быть определено в соответствии с условием Бриллюэна—Вилля о равенстве кривизны контура и каверны в точке отрыва. При реализации этого принципа давление в каверне оказывается меньшим, чем в любой точке тела, что во многих практически важных случаях позволяет достаточно правдоподобно описать реальные явления кавитации.

Из уравнений (4.1), (4.2) и (4.7) нетрудно установить, что выполнение условия Бриллюэна—Вилля равносильно обращению в нуль интеграла в формуле (4.7) в точке $s = a$, что, в свою очередь, равносильно обращению в нуль коэффициента b_0 ряда (4.2).

При практических вычислениях может оказаться удобным в окрестности $s = a$ аппроксимировать $v_1(s_1)$ линейной функцией, и тогда соотношение для определения положения точки отрыва может быть после несложных преобразований представлено в виде

$$\pi v_1'(a) + \int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{\left[v_1(s_1) - v_1(a) - v_1'(a)(s_1 - a)\right] ds_1}{(s_1 - a)\sqrt{(s_1 - a)(b - s_1)}} = 0, \quad (4.10)$$

где $v_1'(a)$ — значение производной функции $v_1(s)$ в точке a; ε — малая по сравнению с $(b - a)$ величина.

При вычислениях с использованием схемы Жуковского—Рошко точка b фиксируется (задается длина границы каверны), и тогда левая часть уравнения (4.10) будет функцией a. Вблизи нуля знак этой функции изменяется, поэтому определение величины a, соответствующей точке отрыва каверны, не представляет больших трудностей. При некотором опыте можно ограничиться перебором двух-трех значений a и далее путем линейной интерполяции определить то значение a, при котором левая часть выражения (4.10) обращается в нуль.

Сама процедура вычислений интеграла в формуле (4.10) не представляет затруднений, поскольку подынтегральная функция достаточно гладкая, а в точке, соответствующей нижнему пределу интегрирования, мала, и имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$. Вблизи верхнего предела интегрирования подынтегральная функция имеет интегрируемую особенность.

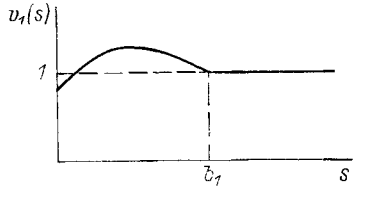


Рис. 54. Распределение скоростей на пробной границе каверны

Из изложенного выше ясно, что при задании пробной границы каверны ее левый конец не должен быть расположен выше по потоку, чем точка отрыва каверны, определяемая в соответствии с условием Бриллюэна—Вилля. При этом впереди пробной границы каверны или в точке ее схода всегда будет существовать местный максимум функции $v_1(s)$. Указанное обстоятельство позволяет достаточно уверенно выбирать первое и последующие значения координаты a при вычислениях по формуле (4.10), поскольку они будут лежать несколько левее максимума функции $v_1(s)$.

При рассмотрении течения с гладким отрывом каверны по схеме Рябушинского оба предела интегрирования в уравнениях (4.7)—(4.10) неизвестны, однако известна их разность, равная длине границы каверны. Отсюда вытекает для этого случая очевидное видоизменение пределов интегрирования в указанных формулах, а именно, в качестве верхнего предела необходимо взять величину $a+l$, где l — длина границы каверны соответствующего приближения.

С помощью формулы (4.7) легко установить асимптотическую форму границы каверны для больших значений s. Для этой цели в качестве пробной границы каверны удобно взять две параллельные прямые, как в схеме Жуковского—Рошко, уходящие в бесконечность, соединенные с контуром сечения тела плавной линией. Не уменьшая общности результатов, для упрощения вычислений форму этой линии можно подобрать таким образом, чтобы распределение скоростей [функция $v_1(s)$] на пробной границе имело вид, приведенного на рис. 54. Совмещая начало координат с точкой отрыва каверны, функцию $v_1(s)$ на отрезке

$0 \leqslant s \leqslant b_1$, можно, например, аппроксимировать полиномом второй степени вида $a_0+a_1s+a_2s^2$, а для $s \geqslant b_1$, положить ее постоянной, равной единице. После несложных вычислений интеграла в уравнении (4.7) и перехода к пределу для $s/b_1 \gg 1$ и $b \to \infty$ результат можно представить в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{A}{\sqrt{s}} + \frac{B}{s\sqrt{s}} + \ldots; \\ y &= 2A\sqrt{s} - \frac{2B}{\sqrt{s}} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

где постоянные коэффициенты A и B зависят от параметров a_0, a_1, a_2 и b_1. Первый член последней из формул (4.11) дает известный асимптотический закон расширения свободных поверхностей, уходящих в бесконечность, полученный при рассмотрении задачи о струйном обтекании тела. В заключение следует подчеркнуть, что при выводе формул (4.11) форма аппроксимации функции $v_1(s)$ и точность ее воспроизведения принципиального значения не имели.

§ 21. Симметричное кавитационное обтекание тел безграничным потоком (обобщенная схема Рябушинского)

Переходя к рассмотрению задачи о кавитационном обтекании тела с использованием обобщенной схемы Рябушинского, следует отметить, что принципиальные соображения о выборе формы пробной границы каверны остаются теми же, что и в случае применения схем Жуковского—Рошко и Рябушинского (см. § 20). Что касается задания параметров пробного замыкающего контура и процедуры уточнения его формы в процессе решения задачи, то здесь допустима достаточно большая свобода действий. Ниже рассмотрены три варианта задания замыкающего контура и процедуры его уточнения.

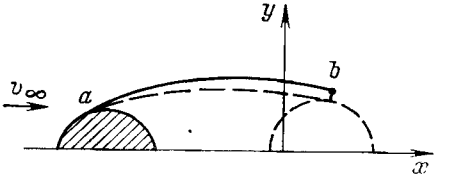


Рис. 55. Первый вариант задания замыкающего контура

Первый вариант. Процедура практически ничем не отличается от описанной в § 20 при рассмотрении порядка расчетов с использованием схемы Жуковского—Рошко. Сначала выбирают желаемую форму замыкающего контура (например, окружность, эллипс, парабола или вообще кривая произвольной формы, симметричная относительно оси симметрии течения) и пробную границу каверны. На рис. 55 они изображены пунктирными линиями только для верхней половины течения.

Для выбора формы пробной границы каверны остаются в силе рекомендации, приведенные в § 20. А при выборе параметра исходного замыкающего контура, подлежащего уточнению в процессе решения задачи (например, максимальной ширины), а также точки замыкания границы каверны следует руководствоваться парадоксом Д'Аламбера. Применительно к кавитационному течению с использованием обобщенной схемы Рябушинского в соответствии с указанным парадоксом равнодействующая давлений, приложенная к замыкающему контуру, должна равняться по величине и быть направленной противоположно равнодействующей, приложенной к контуру продольного сечения тела. Естественно, что заранее правильно угадать размеры замыкающего контура в общем случае невозможно, поэтому уточнение и производится в процессе решения задачи.

Далее решают прямую задачу, после чего по формулам (4.7), (4.8) и (4.10) рассчитывают форму границы каверны. При этом возможны два случая, один из которых графически изображен на рис. 55 тонкой сплошной линией. Здесь конец каверны первого приближения расположен над замыкающим контуром. Для того, чтобы удовлетворить условию замыкания границы каверны (4.9), площадь фигуры, ограниченной замыкающим контуром, следует увеличить в соответствии с величиной $y(s)$, вычисленной в точке b. Подобно тому, как это было при использовании схемы Жуковского—Рошко, расстояние по нормали точек уточненного замыкающего контура до исходного должно равняться величине $y(b)$.

Во втором случае конец каверны окажется внутри фигуры, ограниченной исходным замыкающим контуром. Тогда площадь, ограниченную замыкающим контуром, следует соответственно уменьшить.

Второй вариант. Замыкающий контур должен быть выбран таким, чтобы заведомо обеспечить возможность построения хотя бы одной границы каверны, отвечающей тому случаю, когда конец каверны находится внутри фигуры, ограниченной замыкающим контуром. Это удобно продемонстрировать на примере обтекания окружности. Если в качестве замыкающего контура взять другую окружность, заведомо большего радиуса, то возможность построения каверн, оканчивающихся внутри замыкающего круга, будет обеспечена. На рис. 56 сплошными утолщенными линиями изображена основная и замыкающая окружности, а тонкой — пробная граница каверны. Пунктирная линия соответствует границе каверны некоторого приближения.

Очевидно, что путем простого перебора положения точек замыкания b можно найти такую границу, которая бы замыкалась непосредственно на замыкающую окружность. Однако это проще сделать с помощью расчетов по формуле (4.9). Ниже приведено описание последовательности расчетов.

После задания пробной границы каверны производят вычисление функции $v_1(s_1)$ не только для точек этой границы, но и для точек замыкающего контура.

Далее задают правдоподобное значение координаты b и по формуле (4.10) вычисляют координату точки отрыва a. Следует отметить слабую зависимость величины b от a, что существенно облегчает дальнейшие расчеты.

После определения a по формуле (4.9) находят значение b_1, соответствующее замыканию границы каверны непосредственно

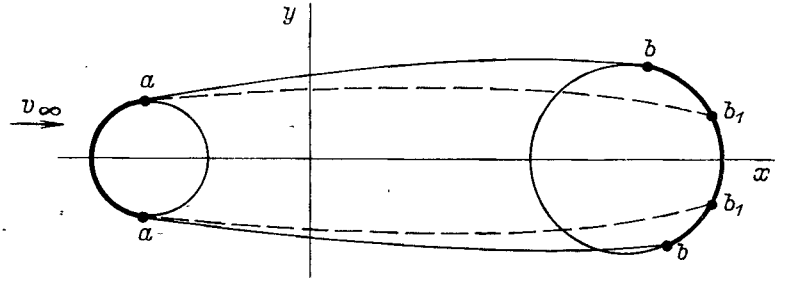


Рис. 56. Второй вариант задания замыкающего контура

на замыкающей окружности. Вследствие слабой зависимости b от a и наоборот определение этих величин можно производить и в обратной последовательности.

Дальнейшие расчеты производят по формулам (4.8) и (4.7), в результате чего определяют скорость на границе каверны v_0 и форму границы каверны первого приближения. Последующие приближения осуществляют по приведенной выше схеме расчетов.

Поскольку скорости на границах каверны различных приближений не строго постоянны, в принципе может оказаться, что точки замыкания границ различных приближений, определенные из уравнения (4.9), будут располагаться не строго на заранее выбранном замыкающем контуре, а несколько смещаться на границу каверны. Смещения, как правило, оказываются малыми, и ими можно вполне пренебречь, так как они не влияют сколько-нибудь заметным образом на общую картину течения.

Третий вариант. При подборе замыкающего контура и его уточнении в процессе вычислений используют систему особенностей (источников-стоков), размещаемых на замыкающем контуре и пробной границе каверны.

Поскольку указанной системе гидродинамически эквивалентна деформация контура, на котором особенности размещаются, то задача будет заключаться в подборе такого закона изменения интенсивности источников-стоков вдоль контура, чтобы граница каверны гладко сопрягалась с деформированным

замыкающим контуром, имея с ним в точке сопряжения (замыкания) общую касательную. При определении связи между интенсивностью особенностей и величиной деформации может быть использована формула (3.3) линеаризованной теории.

Закон изменения интенсивности особенностей, распределенных по замыкающему контуру, может быть достаточно произвольным, однако для удобства расчетов он должен быть простым.

Для иллюстрации на рис. 57 приведен линейный закон изменения интенсивности особенностей. Здесь координаты точек отрыва и замыкания каверны обозначены по-прежнему буквами a и b, координата c соответствует точке пересечения замыкающего контура с продольной осью симметрии тела, координата d — ле-

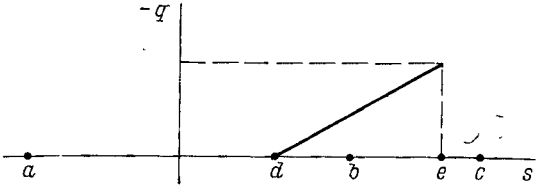


Рис. 57. Линейный закон изменения интенсивности особенностей

вому, а e — правому концу отрезка, на котором размещены особенности, используемые в третьем варианте задания замыкающего контура. В частном случае точка d может совпадать с b, а точка e с c.

При указанном способе задания особенностей функция $q(s)$ определяется тремя параметрами, а именно, координатами d и e, а также углом наклона прямой $q(s)$ к оси s. При решении задачи два из этих параметров задают заранее, а один определяют в ходе решения. Обычно оказывается удобным задавать координаты d и e.

В дальнейшем функцию q будем считать заданной с точностью до некоторого параметра α, т. е. $q = q(s, \alpha)$. Для закона изменения q (рис. 57) параметр α равен углу наклона прямой q к оси s. Ниже рассмотрена схема расчетов.

При расчетах заданными величинами являются координаты пробной границы каверны и пробного замыкающего контура, а также координаты b, d и e и вид функции $q(s, \alpha)$. Функция $v_1(s_1)$ в точках пробной границы каверны в данном случае будет равна сумме функции, соответствующей распределению скоростей на пробной границе каверны без учета системы особенностей, и функции, соответствующей распределению скоростей, обусловленных особенностями. Последнюю можно легко определить с помощью формулы линеаризованной теории

$$v_{10}(s, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_d^e \frac{q(s_1, \alpha)\, ds_1}{(s - s_1)}, \qquad (4.12)$$

где v_{10} — функция, характеризующая закон распределения скоростей в точках границы каверны, обусловленных системой особенностей.

Таким образом, функция $v_1(s_1)$ будет зависеть от параметра α. При этом некоторые из расчетных формул обратной задачи (4.7)—(4.10) претерпят изменения.

В том случае, когда точка d совпадает с b, все расчетные формулы, за исключением (4.9), останутся без изменения. Ниже формула (4.9) записана для общего случая, когда точки d и b не совпадают

$$\frac{1}{2}\int_a^b \frac{(b+a-2s_1)\,v_1(s_1,\ \alpha)\,ds_1}{\sqrt{(s_1-a)\,(b-s_1)}}+\int_d^e q(s_1,\ \alpha)\,ds_1=0. \quad (4.13)$$

Для случая совпадения точек d и b во втором интеграле нижний предел следует заменить на b.

Если точка d лежит левее b, то в правую часть уравнения (4.7) следует добавить слагаемое

$$\Delta y'(s,\ \alpha)=\frac{q(s,\ \alpha)}{v_0}, \quad (4.14)$$

где $d \leqslant s \leqslant e$.

При этом для $b \leqslant s \leqslant e$ равенство (4.14) соответствует деформации участка замыкающего контура, лежащего за точкой замыкания каверны вниз по потоку. В формуле же (4.7) диапазон изменения переменной s остается прежним, т. е. $a \leqslant s \leqslant b$.

Для случая линейного закона изменения функции q (см. рис. 57) формула (4.14) будет иметь вид

$$\Delta y'(s,\ \alpha)=\frac{\alpha}{v_0}(s-d), \quad (4.15)$$

а из уравнения (4.13) можно получить в явном виде формулу для определения параметра

$$\alpha=\frac{1}{A_1}\int_a^b \frac{(b+a-2s_1)\,v_{11}(s_1)\,ds_1}{\sqrt{(s_1-a)\,(b-s_1)}}, \quad (4.16)$$

где

$$A_1=\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{(b+2a-2s_1)\left[e-d-(d-s_1)\ln\dfrac{e-s_1}{d-s_1}\right]ds_1}{\sqrt{(s_1-a)\,(b-s_1)}},$$

а v_{11} соответствует распределению скоростей на пробной границе каверны без учета системы особенностей, т. е. $v_{11}=v_1-v_{10}$.

Интегрирование правой части уравнения (4.15) по переменной s показывает, что деформация исходного контура $\Delta y(s,\ \alpha)$ будет представлена кривой второго порядка

$$\Delta y=\frac{\alpha}{2v_0}(s-d)^2+C.$$

Схема расчета с использованием описанного выше способа замыкания границы каверны весьма проста. Сначала задают пробную границу каверны и исходную форму замыкающего контура. В отличие от второго варианта вычислений здесь специальных ограничений на размеры исходного замыкающего контура накладывать не требуется, так как деформация может иметь любой знак. Последнее обстоятельство автоматически учитывается в расчетных формулах, что позволяет в процессе расчетов прийти к такой форме замыкающего контура, которая не будет противоречить парадоксу Д'Аламбера. Сказанное иллюстрирует рис. 58, где пунктирными линиями обозначены окончательные («точные») границы каверны и замыкающий контур, а сплош-

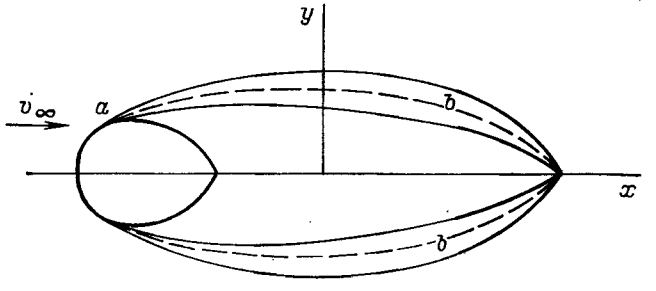


Рис. 58. Третий вариант задания замыкающего контура

ными — исходные. При этом исходные замыкающие контуры могут лежать как выше, так и ниже окончательных, полученных в результате последовательных приближений.

Далее задают координаты концов дуги, на которой размещается система особенностей и функция $q(s, \alpha)$, характеризующая закон изменения их интенсивности вдоль дуги. После этого решают прямую задачу, в результате чего определяют функцию $v_{11}(s)$, а с помощью формулы (4.12) — функцию $v_{10}(s, \alpha)$.

Сумма этих функций будет равна $v_1(s, \alpha)$. Если точка отрыва каверны фиксирована, то величина a является заданной. В этом случае по формуле (4.13) или (4.16) может быть вычислен параметр α, после чего по формуле (4.8) легко определить последний параметр v_0.

В случае обтекания тел с непрерывно изменяющейся кривизной прежде, чем вычислять параметр α, следует определить координату точки отрыва каверны a. Для этой цели может быть использовано уравнение (4.10), однако в нем следует функцию v_1 и ее производную заменить на $v_{11}(s)$ и ее производные, поскольку v_1 является функцией неизвестного параметра α. Такая замена не приводит к существенным неточностям в определении a, так как вклад в величину левой части уравнения (4.10) отброшенной функции v_{10} незначителен по сравнению с вкладом, даваемым функцией v_{11}.

Форма границы каверны определится суммой (4.7) и (4.14). При этом изменение значения s в формуле (4.7) следует взять в пределах $a \leqslant s \leqslant b$, а в равенстве (4.14) — $d \leqslant s \leqslant e$. Интегрирование суммы (4.7) и (4.14) позволит определить величину деформации пробной границы каверны и замыкающего контура по нормали к последним.

Новые формы границы каверны и замыкающего контура служат исходными для следующего шага вычислений. Критерием для прекращения приближений может служить величина отклонения скорости на границе каверны от постоянного значения. Можно, конечно, использовать и другие критерии, связанные, например, с оценкой величины $\gamma'(s)$ в двух последовательных приближениях и т. п.

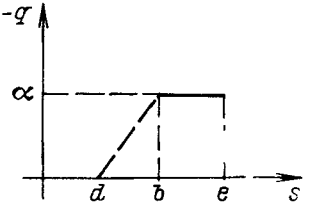


Рис. 59. Система источников постоянной интенсивности

Для расчетов удобно также использовать систему источников-стоков постоянной интенсивности (сплошная утолщенная линия на рис. 59), левый конец которой совпадает с концом каверны, а правый задается. Эта система соответствует деформации замыкающего контура, величина которой убывает по линейному закону от максимальной величины в точке b до нуля в точке e. Неизвестным же параметром является величина, характеризующая быстроту убывания деформации.

Для удобства расчетов, чтобы не иметь дело с бесконечно большими значениями скоростей, вызванных системой источников, целесообразно ее дополнить таким образом, как показано на рис. 59 утолщенной пунктирной линией. При этом параметр может быть выражен в явной форме точно так же, как и параметр α в формуле (4.16).

Для иллюстрации сходимости последовательных приближений на рис. 60, *а* и 61, *б* приведены результаты расчетов кавитационного обтекания окружности и клина при некотором значении длины границы каверны. При этом использовалась одна из разновидностей обобщенной схемы Рябушинского.

На рис. 60, *а* индексом *0* обозначена пробная граница каверны, соответствующая аппроксимации (4.6, *а*), а индексом *3* — граница каверны, полученная в результате трех приближений.

На рис. 60, *б* пунктирной линией изображена функция γ, соответствующая обтеканию окружностей, соединенных пробной границей каверны. Сплошной линией показано распределение скорости по окружности и каверне третьего приближения. Как показывают расчеты, результаты последующих приближений практически совпадают с результатами третьего приближения.

Из данных, приведенных на рис. 60, следует, что при расчете кавитационного обтекания даже при существенном отклонении распределения скоростей на исходном составном контуре от

постоянного значения процесс последовательных приближений сходится достаточно быстро.

При расчете кавитационного обтекания клина с углом при вершине 90° пробная граница каверны также представляла собою (рис. 61, *а*) кривую, соответствующую аппроксимации (4.6 а). Такая форма границы была выбрана специально с той целью, чтобы проверить сходимость приближений в том случае, когда вблизи концов пробной границы каверны имеют место большие по величине и малые по протяженности пики функции

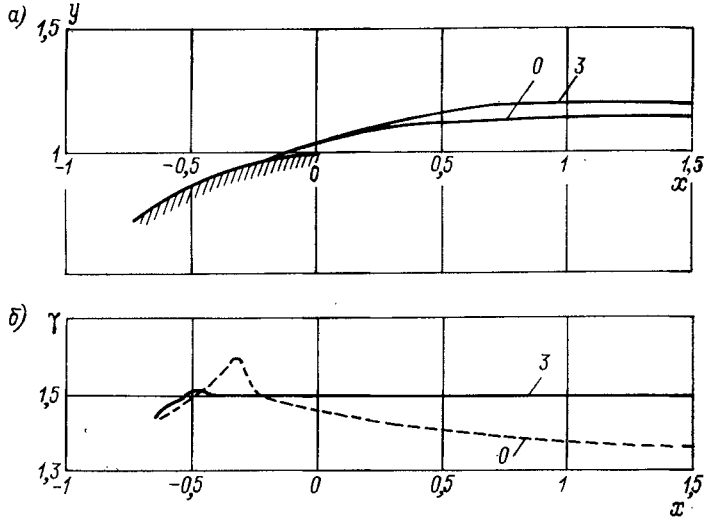


Рис. 60. Результаты расчетов обтекания окружности

$v_1(s_1) = \gamma$ (сплошная линия на рис. 61, *б*). Оказывается, что и здесь достаточно лишь трех приближений, чтобы граница каверны приобрела такую форму, при которой величина скорости отличается от постоянного значения на 2 % и то в очень узкой области вблизи точек отрыва каверны (штрихпунктир на рис. 61, *б*). Указанные отклонения оказывают влияние только на форму каверны вблизи точек отрыва. Влияние этих отклонений на распределение давлений по основному контуру и величину гидродинамического сопротивления практически можно исключить весьма простым приемом. Для этого после последнего шага приближений нужно вновь решить прямую задачу, приняв скорость потока на всей границе каверны постоянной, равной значению, полученному по формуле (4.8) на последнем шаге.

Обращаясь к практической стороне расчетов, можно дать рекомендацию по выбору формы пробной границы для тех случаев, когда угол между касательной к контуру в точке отрыва каверны и вектором скорости набегающего потока велик, что

имеет место, например, при обтекании клиньев с углом при вершине более 180°. На рис. 62 изображены окрестности контура (сплошная линия) и рекомендуемой пробной границы каверны вблизи точки отрыва (пунктир). В данном случае пробная граница каверны сопрягается с участком кривой малого радиуса,

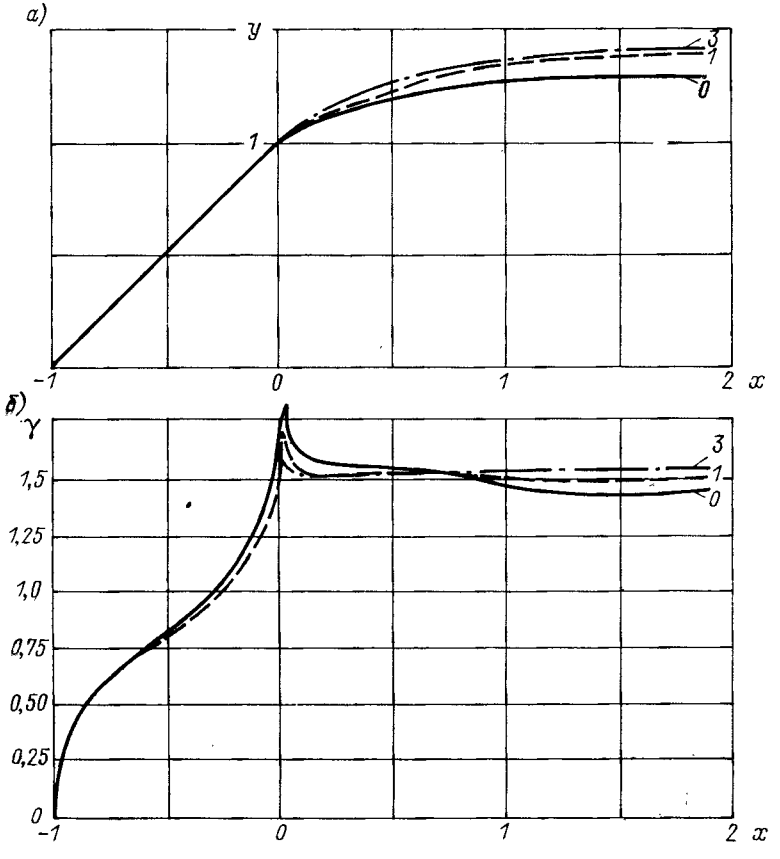


Рис. 61. Результаты расчетов обтекания клина

составляющего сотые или тысячные доли длины контура сечения тела. Кривая касается этого контура и пробной границы каверны в точках a и a' соответственно. В качестве кривой малого радиуса можно взять окружность (об общих принципах выбора пробной границы каверны говорилось выше). При выполнении расчетов точку отрыва границы каверны можно фиксировать в точке a'. Таким образом, обтекание контура с заострением заменяется обтеканием контура с закруглениями малого радиуса на концах. Зона влияния такого закругления имеет порядок радиуса закругления, и оно внесет только «местные»

искажения в форму границы каверны и распределение скоростей на контуре сечения тела. При достаточно малом радиусе закругления его влиянием на форму границы каверны в целом и суммарные гидродинамические реакции, приложенные к телу, можно пренебречь.

В заключение следует отметить, что порядок и объем расчетов с использованием обобщенной схемы Рябушинского принципиально одинаков как для режима суперкавитации (замыкание каверны за задней кромкой тела), так и для так называемого режима частичной кавитации. Последний характеризуется

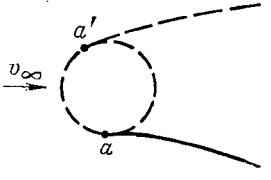


Рис. 62. Форма пробной границы каверны вблизи точки отрыва

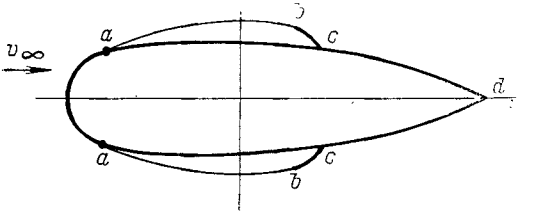


Рис. 63. Схема частичной кавитации

тем, что каверна замыкается непосредственно на поверхности тела (рис. 63). В этом случае часть контура сечения тела между точками c и d можно отнести к замыкающему контуру, а ее форму считать фиксированной. С участками для замыкающего контура между точками b и c следует поступать так, как это делалось выше при рассмотрении различных вариантов процедуры подбора замыкающего контура.

В обобщенной схеме Рябушинского как способы задания замыкающего контура, так и способы его уточнения можно разнообразить в очень широких пределах. Выбор того или иного способа должен диктоваться характером решаемой задачи.

§ 22. Симметричное кавитационное обтекание тел в канале со стенками произвольной формы

Схема расчета кавитационного обтекания тела в канале остается точно такой же, что и для рассмотренного в § 20 и 21 случая безграничного потока. Она сводится к применению метода последовательных приближений, на каждом шаге которого решают последовательно прямую и обратную задачи.

Для той части шага последовательных приближений, в которой решают обратную задачу, остаются прежними как формулы, так и рекомендации по выбору пробной границы каверны и замыкающего контура, поэтому повторно это здесь излагаться не будет.

Для получения уравнений прямой задачи могут быть использованы те же соображения, которые приводились при выводе формул (2.13), (2.14) и (2.16). При этом для получения формул типа (2.13) и (2.16) на стенках трубы и контуре продольного сечения тела можно размещать как вихревые слои, так и слои источников. Ниже для иллюстрации приведен вывод уравнения типа (2.14).

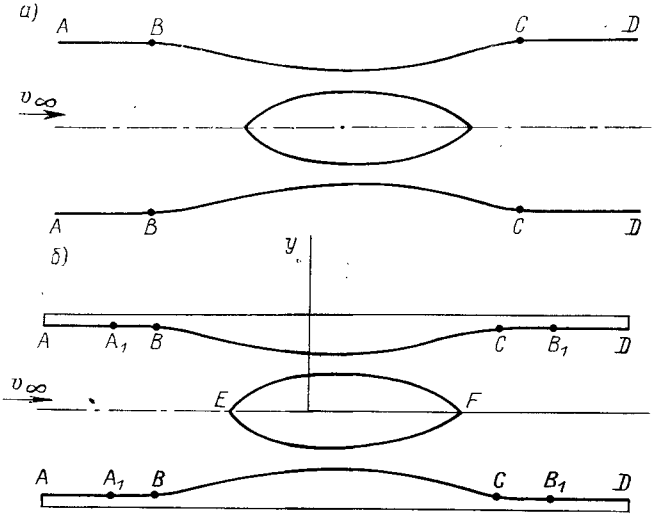


Рис. 64. Обтекание тела в трубе

При выводе уравнения (2.14) было существенным использование замкнутости контура интегрирования. Это можно применить и при рассмотрении течения в трубе.

Вместо рассмотрения обтекания тела, помещенного в канал, можно рассмотреть обтекание безграничным потоком плоской трубы и помещенного внутрь нее тела (рис. 64, *а*). Для того, чтобы во входном и выходном сечениях трубы было однородное распределение скоростей, такое же, как распределение скоростей в невозмущенном набегающем потоке, необходимо, чтобы участки трубы AB и CD были параллельны вектору скорости набегающего потока, а концы трубы A и D были бы удалены на большую по сравнению с ее шириной h длину от сечений BB и CC, между которыми стенки трубы криволинейны, а также от оконечностей тела. При этом необходимо, чтобы указанные участки лежали на одной прямой.

Для того, чтобы воспользоваться характерным для замкнутых контуров равенством интенсивности вихревого слоя, размещенного на контуре, и скорости потока, стенки трубы можно дополнить таким образом, как это показано на рис. 64, *б*.

Если продольные размеры трубы взять большими ($h/AD \to 0$), то на наружных стенках трубы, за исключением малых окрестностей вблизи точек A и D, скорость будет равна v_∞, следовательно, вихревая интенсивность, в соответствии с принятым правилом знаков, будет равна: на верхней наружной стенке — $\gamma = -v_\infty$, на нижней наружной стенке — $\gamma = v_\infty$.

Если расстояние точек A от точек B и E и, соответственно, точек B от C и F взять достаточно большим ($h/A_1B \ll 1$, $h/A_1F \ll 1$, $h/B_1C \ll 1$, $h/B_1F \ll 1$), а также принять $h_1/h \ll 1$, то и на внутренних участках стенок AA_1 и B_1D скорость можно принять постоянной, равной v_∞. Следовательно, здесь будет постоянной также и вихревая интенсивность, а именно, между точками AA_1 и B_1D верхней внутренней стенки $\gamma = v_\infty$ и этими точками нижней внутренней стенки $\gamma = -v_\infty$. После этого нетрудно составить интегральное уравнение для определения вихревой интенсивности в точках контура продольного сечения тела и трубы. Для этого нужно вычислить проекцию на касательную в произвольной точке контура тела и трубы вектора скорости невозмущенного потока и потока, индуцированного вихревым слоем, а результат приравнять значению интенсивности слоя в этой точке. Вычисления могут быть выполнены на основе простых геометрических соображений и использования уравнения (2.14), в котором контур интегрирования будет состоять из трех частей — контура тела и двух замкнутых контуров, соответствующих верхней и нижней частям трубы. Ниже уравнение типа (2.14) записано в декартовой системе координат. При этом концы канала удалены в бесконечность, так что $A = -\infty$, $D = +\infty$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\sqrt{1+y_1'^2}}\left\{\int_E^F\left[\frac{\sin(r_{11},\,t)}{r_{11}^2}+\frac{\sin(r_{12},\,t)}{r_{12}^2}\right]\times\right.\\
&\times\sqrt{1+\eta_1'^2}\,\gamma_1(\xi)\,d\xi-\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin(r_{23},\,t)}{r_{23}^2}+\frac{\sin(r_{24},\,t)}{r_{24}^2}\right]\times\\
&\left.\times\sqrt{1+\eta_2'^2}\,\gamma_2(\xi)\,d\xi\right\}=\frac{\gamma_1(x)}{2};\\
&\frac{1}{2\pi\sqrt{1+y_2'}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin(r_{21},\,t)}{r_{21}^2}+\frac{\sin(r_{22},\,t)}{r_{22}^2}\right]\times\right.\\
&\times\sqrt{1+\eta_2'^2}\,\gamma_2(\xi)\,d\xi+\int_E^F\left[\frac{\sin(r_{13},\,t)}{r_{13}^2}+\frac{\sin(r_{14},\,t)}{r_{14}^2}\right]\times\\
&\left.\times\sqrt{1+\eta_1'^2}\,\gamma_1(\xi)\,d\xi\right\}=\frac{\gamma_2(x)}{2},
\end{aligned}
\right\}\quad(4.17)
$$

где y_1, y_2, η_1, η_2 — фиксированные и текущие значения ординат точек верхней половины тела и верхней части канала, соответственно; γ_1, γ_2 — значения вихревой интенсивности в точках верхней половины тела и верхней части канала соответственно

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin(r_{11},\ t) &= \eta_1 - y_1 + y_1'(x-\xi);\\
r_{11}^2 &= (\eta_1 - y_1)^2 + (x-\xi)^2;\\
\sin(r_{12},\ t) &= \eta_1 + y_1 - y_1'(x-\xi);\\
r_{12}^2 &= (\eta_1 + y_1)^2 + (x-\xi)^2;\\
\sin(r_{23},\ t) &= \eta_2 - y_1 + y_1'(x-\xi);\\
r_{23}^2 &= (\eta_2 - y_1)^2 + (x-\xi)^2;\\
\sin(r_{24},\ t) &= \eta_2 + y_1 - y_1'(x-\xi);\\
r_{24}^2 &= (\eta_2 + y_1)^2 + (x-\xi)^2;\\
\sin(r_{21},\ t) &= \eta_2 - y_2 + y_2'(x-\xi);\\
r_{21}^2 &= (\eta_2 - y_2)^2 + (x-\xi)^2;\\
\sin(r_{22},\ t) &= \eta_2 + y_2 - y_2'(x-\xi);\\
r_{22}^2 &= (\eta_2 + y_2)^2 + (x-\xi)^2;\\
\sin(r_{13},\ t) &= \eta_1 - y_2 + y_2'(x-\xi);\\
r_{13}^2 &= (\eta_1 - y_2)^2 + (x-\xi)^2;\\
\sin(r_{14},\ t) &= \eta_1 + y_2 - y_2'(x-\xi);\\
r_{14}^2 &= (\eta_1 + y_2)^2 + (x-\xi)^2.
\end{aligned}
\right\} \qquad (4.18)
$$

Численное решение системы (4.17) затруднительно ввиду бесконечных пределов интегрирования в двух интегралах. Однако, если участки канала A_1B и CB_1, как говорилось выше, взять достаточно большими, то на частях канала $-\infty \leqslant x \leqslant A_1$ и $B_1 \leqslant x \leqslant \infty$ можно принять $\gamma = v_\infty$. На этих частях величина η_2 также постоянна и равна $h/2$, $\eta_2' = 0$. С учетом сказанного части интегралов по бесконечным участкам могут быть вычислены в виде аналитических выражений, которые следует добавить в левые части уравнений системы (4.17). При этом оставшиеся части интегралов будут иметь конечные пределы, а именно, нижние пределы будут равны A_1, а верхние B_1.

После несложных вычислений указанные аналитические выражения можно представить в следующем виде

$$f_1 = -\frac{v_\infty}{2\pi\sqrt{1+y_1'^2}}\left\{2\pi + \operatorname{arctg}\frac{A_1-x}{h/2-y_1} + \operatorname{arctg}\frac{A_1-x}{h/2+y_1} - \right.$$

$$- \operatorname{arctg}\frac{B_1-x}{h/2-y_1} - \operatorname{arctg}\frac{B_1-x}{h/2+y_1} +$$

$$\left. + \frac{y_1'}{2}\ln\frac{[(h/2-y_1)^2+(A_1-x)^2]\,[(h/2+y_1)^2+(B_1-x)^2]}{[(h/2+y_1)^2+(A_1-x)^2]\,[(h/2-y_1)^2+(B_1-x)^2]}\right\}; \quad (4.19)$$

$$f_2 = \frac{v_\infty}{2\pi\sqrt{1+y_2'^2}}\left\{2\pi + \operatorname{arctg}\frac{A_1-x}{h/2-y_2} + \operatorname{arctg}\frac{A_1-x}{h/2+y_2} - \right.$$

$$- \operatorname{arctg}\frac{B_1-x}{h/2-y_2} - \operatorname{arctg}\frac{B_1-x}{h/2+y_2} +$$

$$\left. + \frac{y_2'}{2}\ln\frac{[(h/2-y_2)^2+(A_1-x)^2]\,[(h/2+y_2)^2+(B_1-x)^2]}{[(h/2+y_2)^2+(A_1-x)^2]\,[(h/2-y_2)^2+(B_1-x)^2]}\right\}, \quad (4.20)$$

где $A_1 \leqslant x \leqslant B_1$.

Функцию $f_1(x)$ следует подставлять в левую часть первого уравнения (4.17), а $f_2(x)$ — второго уравнения.

При производстве расчетов целесообразно отрезки A_1B и CB_1 брать достаточно большими

$$\frac{h}{|A_1-B|} \ll 1; \quad \frac{h}{|B_1-C|} \ll 1; \quad \frac{h}{|A_1-F|} \ll 1;$$

$$\frac{h}{|B_1-F|} \ll 1.$$

В этом случае для $f_1(x)$ будет иметь место оценка

$$f_1(x) = -\frac{v_\infty h}{2\pi\sqrt{1+y_1'^2}}\left(\frac{1}{B_1-x} - \frac{1}{A_1-x} + \text{бесконечно малая величина второго порядка}\right). \quad (4.21)$$

Функция $f_2(x)$ для $B \leqslant x \leqslant C$ имеет такую же оценку

$$f_2(x) = \frac{v_\infty h}{2\pi\sqrt{1+y_2'^2}}\left(\frac{1}{B_1-x} - \frac{1}{A_1-x} + \text{бесконечно малая величина второго порядка}\right), \quad (4.22)$$

а для $A_1 \leqslant x \leqslant B$ и $C \leqslant x \leqslant B_1$

$$f_2(x) = -\frac{v_\infty}{2\pi}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{A_1-x}{h} - \operatorname{arctg}\frac{B_1-x}{h}\right). \quad (4.23)$$

Формулы (4.21) и (4.22) могут быть использованы при назначении величины пределов интегрирования.

Если абсолютные значения A_1 и B_2 брать такими, чтобы можно было пренебречь правыми частями условий (4.21) и (4.22), то в левую часть первого уравнения системы (4.17), записанной с конечными пределами интегрирования, добавлять ничего не нужно, а во второе уравнение следует добавить правую часть условия (4.23). При этом вблизи точек A_1 и B_1 функция $\gamma(x)$ будет изменяться очень медленно, а на остальной части трубы, где сечение остается постоянным,— весьма плавно. Вследствие этого при численном интегрировании отрезки аппроксимации функции γ в интервалах $A_1 \leqslant x \leqslant B$ и $C \leqslant x \leqslant B_1$ могут быть взяты большой величины, что приведет к сокращению числа алгебраических уравнений, аппроксимирующих систему (4.17).

Для расчета кавитационного обтекания тела в трубе в общем случае следует использовать обобщенную схему Рябушинского. Схемы же Жуковского—Рошко и схему Рябушинского с «зеркалом» по вполне очевидным соображениям можно применять только тогда, когда продольное сечение канала представляет собою две параллельные линии.

Выбор системы (4.17) для решения прямой задачи не следует рассматривать в качестве настоятельной рекомендации. Вполне может оказаться, что не менее удобной для численных расчетов будет другая система, основанная, например, на размещении на стенках трубы слоя источников и т. п.

§ 23. Кавитационное обтекание профилей крыльев (схема с центральной симметрией и схема Жуковского—Рошко)

Расчетная схема при определении кавитационного обтекания профилей крыльев в своей основе остается такой же, что и схема расчета в случае симметричного кавитационного течения. Некоторое отличие наблюдается только в связи с необходимостью обеспечения равенства скоростей на верхней и нижней частях границы каверны (в случае симметричного течения равенство обеспечивается автоматически). Для удовлетворения этому требованию в задачу вводят, в общем случае, дополнительный параметр, величина которого определяется из условия равенства скорости на обеих частях границы каверны.

На рис. 65 изображена одна из разновидностей обобщенной схемы Рябушинского (схема с центральной симметрией) [54], в которой форму и размеры замыкающего контура можно задать заранее. В этом случае замыкающий контур соответствует контуру сечения тела, повернутому на 180° вокруг некоторой оси, перпендикулярной плоскости рисунка. На рис. 65 пробная граница каверны изображена тонкой пунктирной линией, а истинная — тонкой сплошной.

Расчет производят так же, как в случае симметричного течения путем последовательных приближений, на каждом шаге

которых решают последовательно прямую и обратную задачи. Прямую задачу решают каждый раз с соблюдением условия отсутствия циркуляции вокруг составного контура. Из условия центральной симметрии очевидно, что обратную задачу следует решать только для одной из границ каверны — верхней или нижней.

В общем случае при решении обратной задачи в качестве расчетных могут быть использованы формулы (4.7), (4.8) и (4.10). Условие замкнутости (4.9) должно удовлетворяться автоматически. В случае гладкого отрыва каверны с верхней и нижней частей контура сечения тела (например, профиля в форме эллиптического цилиндра), для определения точки от-

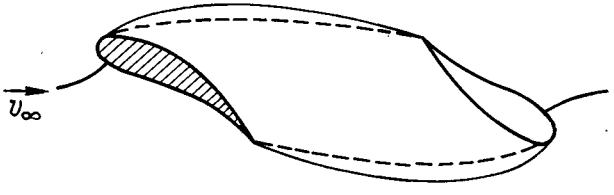


Рис. 65. Схема с центральной симметрией

рыва каверны от нижней стороны контура следует к формуле (4.10) присовокупить аналогичную, полученную из уравнения (4.10) путем перемены местами координат a и b.

Расчеты кавитационного обтекания с использованием схемы Жуковского—Рошко производят также аналогично расчетам в случае симметричного течения. При этом обратную задачу решают отдельно для верхней и нижней частей границы каверны. Сначала задают форму пробной границы каверны и положение замыкающих пластин в соответствии с рекомендациями, содержащимися в § 20, 21 (на рис. 66 пробные границы каверны изображены тонкой пунктирной линией, а истинные — сплошной). Далее решают прямую задачу, после чего задают абсциссу конца верхней или нижней части границы каверны, и для этой части границы решают обратную задачу. При решении обратной задачи для противоположной части границы каверны абсциссу ее конца произвольно назначать нельзя. Ее выбирают с таким расчетом, чтобы скорости на обеих границах каверны были одинаковыми. Этого легко добиться, используя формулу (4.8), путем изменения в ней верхнего предела, подбирая его величину таким образом, чтобы значение v_0 совпало с величиной скорости на противоположной границе каверны. Следующие шаги вычислений производят аналогично. Таким образом, процедура вычислений для каждой части границы каверны ничем не отличается от процедуры, описанной в § 20, поэтому здесь она приводиться не будет.

Единственно, на что следует обратить внимание, так это на решение прямой задачи. Здесь, так же, как и в случае замкнутых контуров конечных размеров, имеет место неединственность решения, связанная с возможностью изменения циркуляции. В данном случае ее легко изменять, например, путем изменения положения критической точки на профиле. Однако с практической точки зрения целесообразно вместо этого задавать положение точек на верхней и нижней замыкающих пластинах, в которых считать вихревую интенсивность одинаковой. Если эти точки задавать на достаточно большом расстоянии от a_1 и a_2 (рис. 66) на одной вертикали, то будет обеспечена однозначность решения прямой задачи, аналогично тому, как это происходит при при-

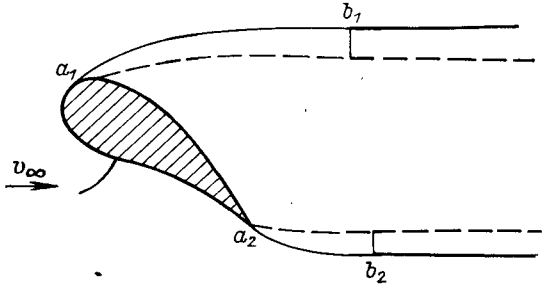


Рис. 66. Схема Жуковского—Рошко

менении постулата Чаплыгина—Жуковского для профилей с острой задней кромкой.

Расчеты, связанные с решением прямой задачи в схеме Жуковского—Рошко, не осложняются существенным образом вследствие того, что контур, на котором определяется функция $\gamma(s)$, уходит в бесконечность. В точках замыкающих пластин, находящихся на достаточном расстоянии от концов границы каверны, вихревая интенсивность может быть принята постоянной, равной v_∞.

В этом случае скорости, индуцированные бесконечными частями пластин, на которых скорость принята равной v_∞, могут быть вычислены в виде аналитических выражений. При этом остаются справедливыми оценки, приведенные при рассмотрении симметричного кавитационного течения в трубе (см. § 22), а также вид функции $f_2(x)$, которую следует добавить в уравнение прямой задачи, решаемой теперь уже для контура конечной протяженности.

Как было сказано выше, при использовании схемы Жуковского—Рошко равенства скоростей на обеих границах каверны можно добиться путем соответствующего подбора координат концов каверны b_1 и b_2. Однако это можно сделать и при заданных заранее значениях указанных координат за счет подбора

соответствующего значения циркуляции. Поскольку различным значениям циркуляции соответствуют различные положения критической точки на профиле, становится ясным практический путь подбора циркуляции.

Для заданного составного контура решают прямую задачу. Для ее определенности можно воспользоваться приведенной выше рекомендацией по выбору на замыкающих пластинах точек, в которых интенсивность вихревых слоев принимается одинаковой, или же задать, исходя из каких-либо соображений, положение критической точки на профиле. В результате решения прямой задачи определяется функция $v_1(s)$, а также положение критической точки, если она заранее не задана. Далее задают координаты b_1 и b_2 и по формуле (4.8) находят скорость v_0 для обеих границ каверны. В случае отличия в значениях скоростей на них вновь решают прямую задачу, но уже для другого положения критической точки на профиле. Смещение критической точки производят в сторону той границы каверны, на которой скорость окажется больше. Подставляя в формулу (4.8) новую функцию $v_1(s_1)$, можно вновь вычислить v_0. Практически оказывается достаточным трех расчетов, чтобы затем с помощью интерполяции определить нужное положение критической точки. Естественно, что при подборе положения критической точки координаты точек замыкания верхней и нижней границ каверны следует сохранять неизменными.

Процедура подбора положения критической точки должна производиться на каждом шаге процесса последовательных приближений при решении кавитационной задачи. Но практически оказывается достаточным это проделать один раз для заданного пробного составного контура.

Возможность при решении кавитационной задачи варьировать параметрами b_1 и b_2, что равносильно варьированию значением циркуляции, свидетельствует о неединственности решения. Такая неединственность характерна для всех кавитационных схем при рассмотрении несимметричного течения, за исключением схемы с центральной симметрией. Однако и здесь решение, вообще говоря, неединственно. Неединственность связана с возможностью перемещения замыкающего контура по вертикали параллельно самому себе.

§ 24. Кавитационное обтекание профилей крыльев (обобщенная схема Рябушинского)

Переходя к рассмотрению обобщенной схемы Рябушинского применительно к решению несимметричной кавитационной задачи, следует отметить, что принципиальная схема расчета и расчетные формулы остаются теми же, что и при решении задачи симметричной (см. § 20—21). Здесь также возможны различные варианты задания замыкающего контура и его уточне-

ния в процессе решения задачи. Ниже рассмотрены только три из них, аналогичные тем, которые описаны в § 21.

Первый вариант. Процедура решения кавитационной задачи начинается с выбора замыкающего контура и пробной границы каверны (пунктир на рис. 67). Далее выбирают положение критической точки на профиле или же замыкающем контуре, тем самым фиксируя значение циркуляции вокруг составного контура. Как показывает практика расчетов, критическую точку задавать удобнее на замыкающем контуре. После фиксации положения критической точки решают прямую задачу, в результате чего определяют функцию $v_1(s_1)$.

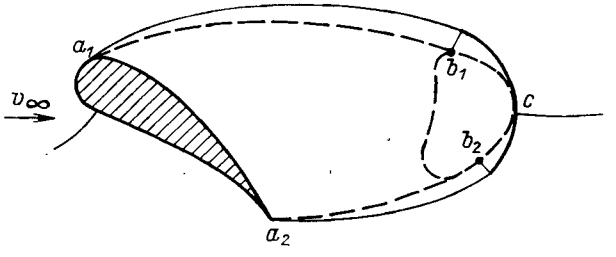


Рис. 67. Первый вариант задания замыкающего контура

Обратную задачу для обеих частей границы каверны решают раздельно. Сначала на одной из границ задают значение координаты конца каверны b_1 или b_2 (для определенности принимается, что задается значение b_1), и с помощью формул (4.7), (4.8) и (4.10) строят границу каверны первого приближения. При построении нижней границы координату b_2 подбирают таким образом, чтобы скорости на обеих границах были равны. Построенные таким образом каверны оказываются, как правило, незамкнутыми (сплошные тонкие линии на рис. 67). Замыкания достигают путем деформации замыкающего контура. В отличие от симметричного случая величина деформации нижней и верхней частей замыкающего контура в общем случае будет разной.

Закон деформации для удобства желательно брать наиболее простым. Например, точки b_1 и b_2 замыкающего контура можно совместить с концами границы каверны, а другие точки сдвинуть таким образом, чтобы между начальным и новым контуром образовался зазор, уменьшающийся до нуля в критической точке (новый замыкающий контур на рис. 67 изображен сплошной утолщенной линией). Одним из наиболее простых законов изменения зазора является линейный. В дальнейших приближениях приведенная выше расчетная схема повторяется.

При вычислениях уравнение (4.9) не использовалось. Оно удовлетворялось за счет деформации замыкающего контура точно так же, как это делалось в расчетах с использованием

схемы Жуковского—Рошко и обобщенной схемы Рябушинского в случае симметричного кавитационного течения.

Расчеты можно несколько упростить, если размеры замыкающего контура выбрать такими, чтобы можно было за счет соответствующего выбора координаты конца одной части границы каверны замкнуть ее непосредственно на замыкающий контур. Указанная координата может быть найдена с помощью уравнения (4.9). В этом случае деформации следует подвергать только одну сторону замыкающего контура, расположенную вблизи конца другой части границы каверны.

Второй вариант. Размеры замыкающего контура нужно брать такими, чтобы обеспечить за счет подбора значений b_1 и b_2 замыкание обеих частей каверны непосредственно на замыкающем контуре. При этом скорости на этих частях, как правило, будут разными. Их равенства можно добиться за счет изменения величины циркуляции вокруг составного контура, для чего нужно смещать в сторону границы каверны, на которой скорость окажется больше, критическую точку на замыкающем контуре.

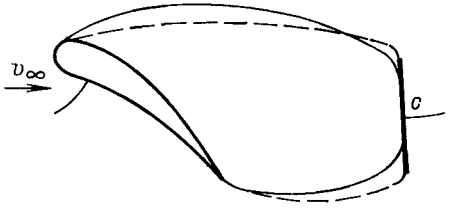


Рис. 68. Второй вариант задания замыкающего контура

Процедура расчетов будет следующей. Для заданного составного контура и заданного положения критической точки на замыкающем контуре решают прямую задачу и определяют функцию $v_1(s_1)$. Далее с помощью уравнений (4.8) и (4.9), а в случае гладкого отрыва каверны, также уравнения (4.10), раздельно находят скорости на обеих частях границы каверны и координаты точек их замыкания. В случае разницы в скоростях производят указанным выше образом смещение критической точки и все расчеты повторяют вновь, в том числе вновь определяют значение функции $v_1(s_1)$. После нескольких расчетов в результате интерполяции определяют искомое положение критической точки и производят построение обеих границ каверны путем расчетов по формуле (4.7). Описанная процедура расчетов повторяется на каждом шаге приближений.

На рис. 68 схематически изображена пробная граница каверны (пунктирная линия) и граница каверны некоторого приближения (тонкая сплошная линия) для случая замыкающего контура, представляющего собою отрезок прямой линии, перпендикулярной вектору скорости невозмущенного потока. Замыкающий контур характерен тем, что на нем не возникает подъемной силы, поэтому подъемная сила, приложенная к кавитационному профилю, может быть вычислена как по формуле Жуковского через значение циркуляции по замкнутому контуру,

охватывающему профиль и каверну, так и путем интегрирования давлений непосредственно по контуру профиля.

Третий вариант. Процедура расчетов по этому варианту одной из частей границы каверны полностью совпадает с процедурой расчетов при симметричном течении (см. § 21) по третьему варианту, поэтому повторно здесь излагаться не будет.

Другую часть каверны рассчитывают точно так же, но для нескольких значений координаты точки замыкания каверны b. После перебора ряда значений b путем интерполяции определяют то ее значение, при котором обеспечивается равенство скоростей на обеих частях границ каверны. При проведении указанных расчетов нет надобности каждый раз использовать уравнение (4.7), поскольку значение координаты b и скорости v_0 определяют из других уравнений (см. § 21).

Расчеты частичной кавитации на профиле ничем не отличаются от описанных выше расчетов по трем вариантам, если часть профиля вне каверны отнести к части замыкающего контура, имеющей фиксированные координаты.

Расчеты особенно упрощаются, если частичная кавитация имеет место только на одной из сторон профиля. Тогда отпадает необходимость в сравнении скоростей на различных частях границы каверны, и процедура расчетов обратной задачи полностью совпадает с процедурой, соответствующей симметричной задаче. Что касается прямой задачи, то как при наличии одной каверны, так и двух, расчеты следует выполнять с учетом постулата Чаплыгина—Жуковского о конечности скорости на задней кромке профиля.

Подход к решению задачи о несимметричном кавитационном течении в канале со стенками произвольной формы точно такой же, как и для случая течения симметричного, поэтому все подробности расчетной схемы можно найти в § 22. Основным звеном этой схемы является последовательное решение прямой и обратной задач на каждом шаге приближений, которые решаются точно так же, как решались в случае безграничного потока. При этом расчетные уравнения для решения обратной задачи остаются прежними, а для решения прямой задачи можно легко получить систему уравнений, аналогичную системе (4.17), или же другие уравнения, вывести которые можно, исходя из соображений, принятых при выводе уравнений (2.13) и (2.16). В отличие от системы (4.17), состоящей из двух уравнений, в случае несимметричного течения новая система будет содержать четыре уравнения для определения вихревой интенсивности на верхней и нижней стенках трубы и на верхней и нижней сторонах контура продольного сечения тела, границы каверны и замыкающего контура.

В заключение настоящего параграфа нелишне вернуться к некоторым качественным соображениям о сходимости

последовательных приближений при решении кавитационных задач изложенным выше способом.

Основная особенность метода — последовательное решение прямой и обратной задач на каждом шаге приближений. При этом роль прямой задачи заключается в определении невязок, характеризующихся величиной отклонения скорости в точках границы каверны от некоторого среднего значения. Поскольку для решения прямой задачи привлекаются точные уравнения, то величину невязок можно, в принципе, определять с любой степенью точности. Последнее обстоятельство позволяет ослабить требования к точности решения обратной задачи, заключающейся в определении по величине невязок деформации контура границы каверны. Последние служат для корректировки указанного контура на каждом шаге приближений и представляют величину зазора между границами каверны двух последующих приближений, который, как это следует из формулы (3.49), по мере уменьшения величины невязки стремится к нулю. В пределе при $v_1^* \equiv 1$ все уравнения обратной задачи удовлетворяются тождественно. Таким образом, точность решения кавитационной задачи будет определяться точностью решения задачи прямой.

Другая особенность задачи состоит в том, что искомая величина $y'(s)$, являющаяся разностью углов между касательными к границам каверны двух последующих приближений, будет всегда величиной малой. Это в некоторой степени оправдывает применение для решения обратной задачи уравнений линеаризованной теории даже в том случае, когда граничные условия сносятся на контур, сам по себе оценке (3.2) не удовлетворяющий. При этом удовлетворение условию (3.2) для функции $y'(s)$ не составляет никаких трудностей и при выборе пробной границы каверны, поскольку на ее концах всегда будет выполняться равенство $y' = 0$ в силу того, что пробная граница имеет общую касательную с основным и замыкающим контурами.

Ниже, в § 25, 26 приведены результаты численных расчетов плоских кавитационных течений для случаев безграничного потока, канала с параллельными стенками и решетки профилей. Приведены также результаты специальных исследований, которые позволяют судить о сходимости решения кавитационной задачи в зависимости от некоторых характеристик пробной границы каверны и замыкающего контура.

§ 25. Расчет кавитационного обтекания профилей крыльев

Результаты приведенных в настоящем параграфе расчетов, анализ которых позволяет выяснить некоторые аспекты сходимости метода последовательных приближений при решении кавитационных задач, а также результаты численных расчетов кавитационного обтекания различного типа профилей крыльев

в режимах частичной кавитации и суперкавитации, получены путем последовательного решения на каждом шаге приближений прямой и обратной задач.

При решении прямой задачи использовано интегральное уравнение Фредгольма второго рода, составленное, исходя из условия равенства скорости в произвольной точке замкнутого контура значению вихревой интенсивности в этой точке. При составлении уравнения было использовано выражение для потенциала вихревого слоя следующего вида

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_l \gamma(s_1)\,\omega(s,\ s_1)\,ds_1$$

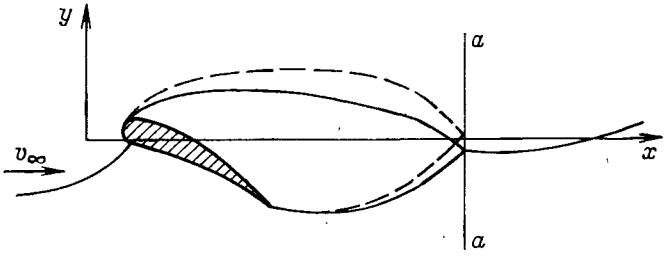


Рис. 69. Схема суперкавитационного обтекания профиля

и граничное условие

$$\frac{\gamma}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\cos\tau=\gamma,$$

где

$$\omega=\operatorname{arctg}\frac{y(s)-\eta(s_1)}{x(s)-\xi(s_1)};$$

τ — угол между касательной к контуру профиля в точке s и вектором скорости невозмущенного потока. Таким образом, уравнение для определения функции $\gamma(s)$ можно привести к следующему виду

$$\gamma(s)-\frac{1}{\pi}\int_l \gamma(s_1)\frac{\partial\omega}{\partial s}\,ds_1=2\left(\frac{dx}{ds}\cos\alpha+\frac{dy}{ds}\sin\alpha\right), \quad (4.24)$$

где x, y — декартовы координаты составного контура; α — угол атаки профиля. При частичной кавитации составным контуром является контур, состоящий из части контура профиля крыла, свободной от кавитации, замыкающего контура и границы каверны соответствующего приближения.

При рассмотрении суперкавитации замыкающий контур задавался в виде прямощекого клина, в вершине которого помещается критическая точка. На рис. 69 пробный замыкающий

контур и пробная граница каверны схематически изображены пунктиром, а окончательные — сплошными линиями. Расчеты обратной задачи производились раздельно для верхней и нижней частей границы каверны. В результате расчетов находилась форма границ каверны, углы установки каждой щеки клина, обеспечивающие замкнутость составного контура и значение скоростей на границах каверны. Для достижения равенства скоростей на обеих границах каверны производилось на каждом шаге приближений смещение клина вдоль линии aa, параллельной оси y, проходящей через его угловую точку.

Обратная задача решалась путем численного решения интегрального уравнения (3.8) совместно с соотношениями, выражающими условие замыкания границы каверны непосредственно на замыкающем контуре и условие непрерывности касательной при переходе с границы каверны на замыкающий контур. Указанное уравнение было приведено к следующему виду

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{q(s_1)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\left[(x-\xi)\frac{dx}{ds}+(y-\eta)\frac{dy}{ds}\right]ds_1+v_0=v_1, \tag{4.25}$$

где $q(s_1)$ — интенсивность слоя источников в i-том приближении; x, y — координаты границы каверны в $(i-1)$-м приближении; v_0 — постоянное значение скорости на границе каверны, отыскиваемое в i-том приближении из решения обратной задачи; v_1 — скорость на границе каверны, получаемая в $(i-1)$-м приближении из решения прямой задачи.

В случае отрыва каверны от гладкого контура для определения координат точки отрыва использовалось условие Бриллюэна—Вилля.

Решение обратной задачи в указанной выше форме эквивалентно решению (4.7—4.10).

При численном решении интегрального уравнения (4.24) оно было заменено конечной системой алгебраических уравнений относительно значений $\gamma(s)$ в контрольных точках

$$\left.\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\gamma_i-\pi\gamma_j+\sum_{i=j+1}^{n-1} a_{ij}\gamma_i=b_j;\\ \gamma_1+\gamma_n=0,\end{gathered}\right\} \tag{4.26}$$

где

$$a_{ij}=\left(\operatorname{arctg}\frac{y_i-\eta_j}{x_i-\xi_j}-\operatorname{arctg}\frac{y_i-\eta_{j-1}}{x_i-\xi_{j-1}}\right)\frac{\Delta s_i}{\Delta s_j},\quad i\neq j;$$

$$b_j=-2\pi\left(\frac{\xi_j-\xi_{j-1}}{\Delta s_j}\cos\alpha+\frac{\eta_j-\eta_{j-1}}{\Delta s_j}\sin\alpha\right);$$

$$\Delta s_p=\sqrt{(\xi_p-\xi_{p-1})^2+(\eta_p-\eta_{p-1})^2},\quad p=i,\ j;$$

$$x_j=0{,}5\,(\xi_{j-1}+\xi_j);\quad y_j=0{,}5\,(\eta_{j-1}+\eta_j).$$

Второе уравнение в системе (4.26) представляет собою запись условия Жуковского—Чаплыгина, которое можно трактовать как равенство скоростей на верхней и нижней сторонах профиля в контрольных точках, непосредственно прилегающих к задней кромке профиля. Подобная запись ранее использовалась в работе [46]. В данном случае ее корректность проверена путем анализа результатов расчетов обтекания профилей типа профилей Кармана—Треффтца с использованием формул метода конформных отображений, которые можно считать эталонными, и расчетов по формулам (4.26). Для симметричных профилей отстояние контрольных точек от задней кромки особого влияния на точность расчетов циркуляции (подъемной силы) не оказывает. Если же средняя линия профиля искривлена, то контрольные точки необходимо брать возможно ближе к задней кромке. Ввиду особых требований, предъявляемых к точности решения прямой задачи при решении задачи кавитационной, путем указанного анализа были определены требования к количеству контрольных точек и их рациональному расположению на профиле и границе каверны. Естественно, что эти требования оказываются наиболее жесткими в районах резкого изменения кривизны контура профиля, особенно вблизи острых кромок и угловых точек. Для профилей с относительной толщиной более 10 % достаточно пятидесяти контрольных точек, а для более тонких профилей необходимо до 128 контрольных точек, чтобы получить необходимую точность решения.

Уравнение (4.25) обратной задачи также аппроксимировалось системой линейных алгебраических уравнений, для чего пределы интегрирования разбивались на конечное число участков, в каждом из которых принималась линейная аппроксимация функции $q(s)$. Таким образом, граница каверны аппроксимировалась кусками параболы второй степени с гладким сопряжением их на границах участков. Здесь ввиду достаточно хорошей гладкости границы каверны вопрос о выборе числа контрольных точек и их положения на ней решается сравнительно просто.

При рассмотрении сходимости в процессе последовательных приближений первостепенный интерес представляет выяснение фактических требований, которым должна удовлетворять форма пробной границы каверны, поскольку при решении обратной задачи используются уравнения линеаризованной теории. Условие (3.2) и условие, аналогичное (3.1) этой теории

$$\frac{u}{v_0} \ll 1, \quad \frac{v}{v_0} \ll 1, \tag{4.27}$$

можно выполнить только при специальном подборе формы пробной границы каверны и для контуров, касательная к которым в точке отрыва каверны составляет малый угол с направлением вектора скорости невозмущенного потока. Как показывают приведенные ниже результаты расчетов, и при отступлении

от этих обременительных ограничений можно получить достаточно точные данные. Для иллюстрации были специально подобраны утрированные случаи кавитационных течений и формы пробной границы каверны, выходящие за пределы требований линеаризованной теории.

На рис. 70 изображена окрестность носика профиля сегментного типа с относительной максимальной толщиной $\delta_m = 0{,}1$

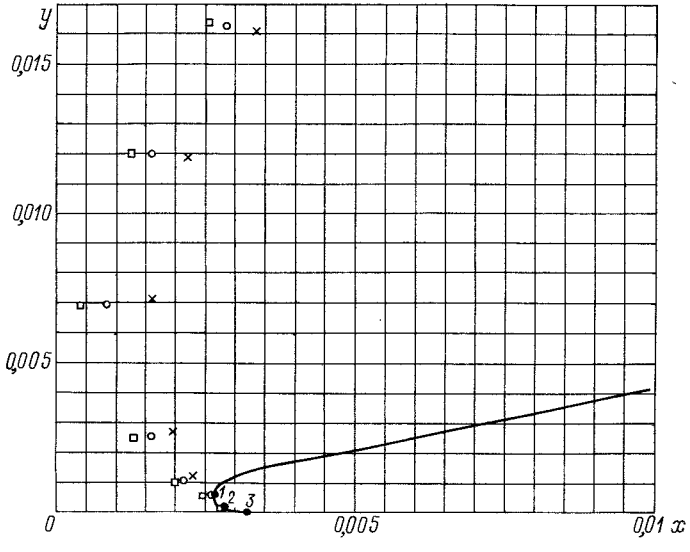


Рис. 70. Окрестность носика профиля и форма каверны

(отношение максимальной толщины профиля к хорде). Передняя часть профиля на расстоянии 0,0026 хорды от носика срезана и заменена окружностью, диаметр которой равен приблизительно 0,001 длины хорды.

Расчеты произведены для угла атаки 3° при фиксированной длине каверны, составляющей 0,376 длины хорды. Замыкающий контур имитирован системой источников (стоков) постоянной интенсивности, располагавшейся на отрезке протяженностью 0,064 хорды непосредственно за концом границы каверны.

Расчеты произведены для трех заданных положений точки отрыва каверны от профиля, обозначенных на рис. 70 цифрами *1*, *2*, *3*. Распределение скоростей вблизи носика показано на рис. 71, где точке *3* соответствует начало координат.

Из рис. 70 и 71 ясно, что вблизи носика профиля имеются существенные отклонения от оценок линеаризованной теории (3.1) и (3.2). Как показывают расчеты, границы каверн во всех вариантах задания точек отрыва практически совпадают сразу

же в непосредственной близости от носика профиля. Приведенные на рис. 71 границы соответствуют четырем приближениям. В начальном приближении при расчете каверны с положением отрыва в точке *1* принято распределение скоростей по некавитирующему профилю, а пробная граница каверны и замыкающий контур взяты совпадающими с контуром профиля. При расчете границы каверны с отрывом в точке *2* за исходные приняты участок контура профиля между точками *2* и *1* и граница каверны, определенная в предыдущем расчете. Полученная при этом граница каверны и участок контура профиля между точками *2* и *3*

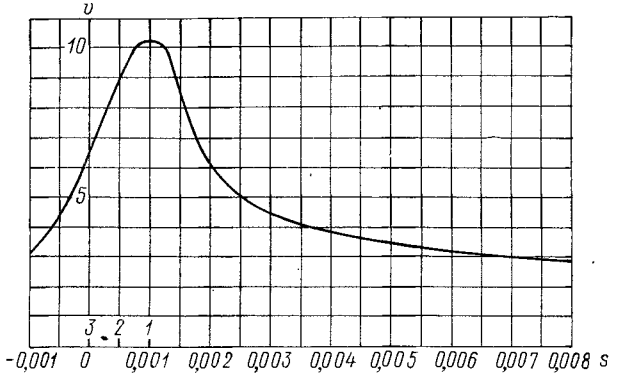


Рис. 71. Распределение скоростей вблизи носика профиля

являются исходными для расчета каверны с отрывом в точке *3*. Границы каверны на рис. 70, помеченные крестиками, кружками и квадратами, соответствуют положению точек отрыва каверны *1*, *2* и *3*.

На рис. 72 показаны границы каверны на всем ее протяжении. Обозначения точек сохранены такими же, что и на рис. 70. В масштабе рисунка все три границы каверны слились в одну.

Для оценки влияния величины скругления в реальных конструкциях можно рассмотреть, например, крыло с хордой размером в 1 м и модель этого крыла, предназначенную для кавитационных испытаний, с хордой 0,1 м. Если относительные размеры скругления принять такими же, что и в рассмотренном примере, то на натурном крыле его диаметр окажется равным 1 мм, а на модели — 0,1 мм. Таким образом, с учетом реальной технологии передние кромки крыла и модели можно рассматривать как острые.

На рис. 73 показан клин с углом при вершине 90° (ввиду выбора разных масштабов координат по осям x и y этот угол на рисунке оказался иным). Пунктирной линией показана пробная граница каверны, представляющая собою ломаную линию,

соединяющую края клина в схеме с зеркалом. На большем своем протяжении пробная граница представляет собою отрезок прямой, параллельной оси x, и лишь в непосредственной близости от края клина сочленяется с другим отрезком, являющимся про-

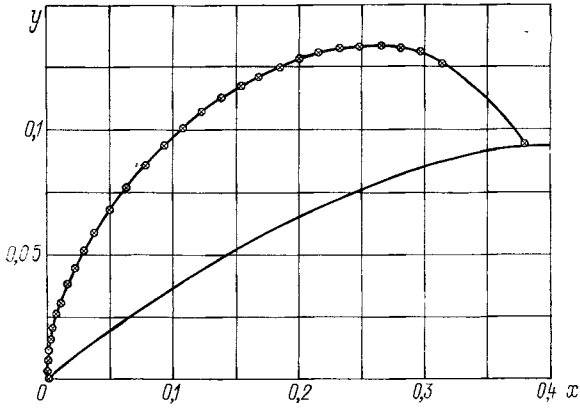


Рис. 72. Форма границы каверны

должением щеки клина. Длина последнего выбрана очень малой, так что в масштабе рисунка он незаметен. Здесь, так же, как в рассмотренном выше примере, вблизи точки отрыва каверны имеется явное отступление от оценок (3.1) и (3.2). Несмотря на это координаты границы каверны первого и после-

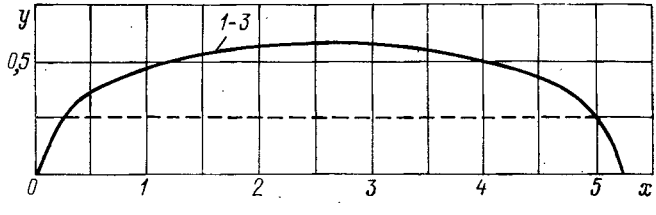


Рис. 73. Форма границы каверны на клине

дующих приближений практически совпали. В масштабе же рисунка границы каверны всех приближений неразличимы. Значения числа кавитации от первого до четвертого приближения изменялись следующим образом: 0,564; 0,466; 0,461; 0,461.

На рис. 74 представлена кривая распределения коэффициента давления на контуре клина и половине границы каверны. Сплошная линия соответствует третьему приближению, а пунктир — первому. Как следует из рисунка, после третьего приближения отклонения давления от постоянной величины наблюдаются только в узкой зоне в окрестности точки отрыва каверны.

В заключение следует отметить, что несмотря на разрыв касательной к пробной границе каверны в окрестности краев клина, при численном решении прямой задачи в указанной окрестности скорости оказываются конечными. Это обусловлено конечностью расстояний между контрольными точками. Таким образом, при численном расчете «автоматически» реализуется скругление в точке отрыва каверны.

На примере расчета кавитационного обтекания профиля сегментного типа при $\delta_m = 0{,}1$ и угле атаки 10° проиллюстрирована сходимость метода последовательных приближений в случае сильного влияния каверны на подъемную силу крыла. На рис. 75 изображен профиль и границы каверны от первого до четвертого приближений (в качестве пробной границы принят контур профиля). Как следует из рисунка, разница между ординатами каверн двух последовательных приближений неуклонно уменьшается с ростом числа приближений. В отличие от случая симметричного кавитационного течения (нулевое приближение) здесь в силу сильного влияния каверны на подъемную силу процесс сходимости медленнее, но все же практически достаточная точность достигается сравнительно быстро, после четырех-пяти шагов приближений.

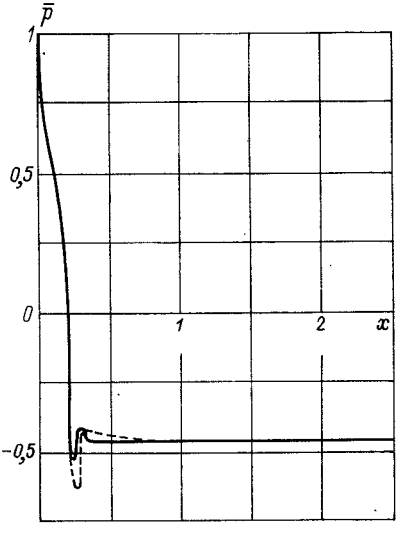


Рис. 74. Распределение давлений на клине и границе каверны

Интересно проследить за изменением коэффициента подъемной силы профиля и распределения скоростей на границе каверны от приближения к приближению. Величина коэффициента подъемной силы некавитирующего профиля составляет $C_y = 1{,}821$. Вследствие возникновения каверны эффективная «толщина» профиля возрастает и C_{y_1} в первом приближении становится равным 2,571. Каверна второго приближения оказывается более толстой, чем в первом приближении и $C_{y_2} = 2{,}840$. В третьем приближении $C_{y_3} = 2{,}972$. Разность в C_y между двумя последовательными приближениями убывает весьма быстро. Так, $C_{y_2} - C_{y_1} = 0{,}269$, а $C_{y_3} - C_{y_2} = 0{,}132$.

На рис. 76 приведены графики распределения скоростей по некавитирующему профилю и расчетные значения скоростей на

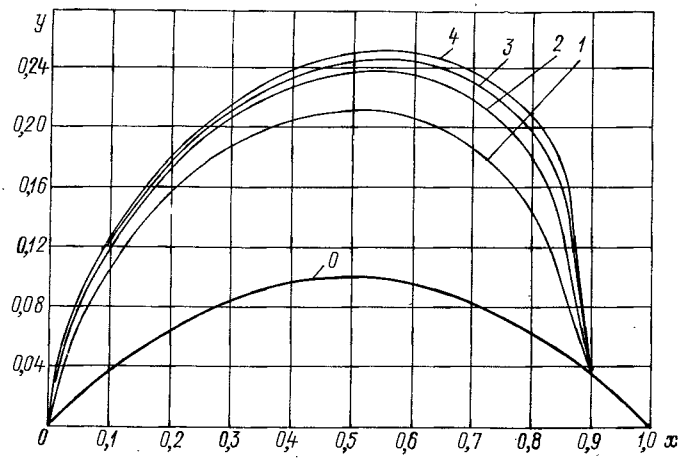


Рис. 75. Форма границы каверны различных приближений

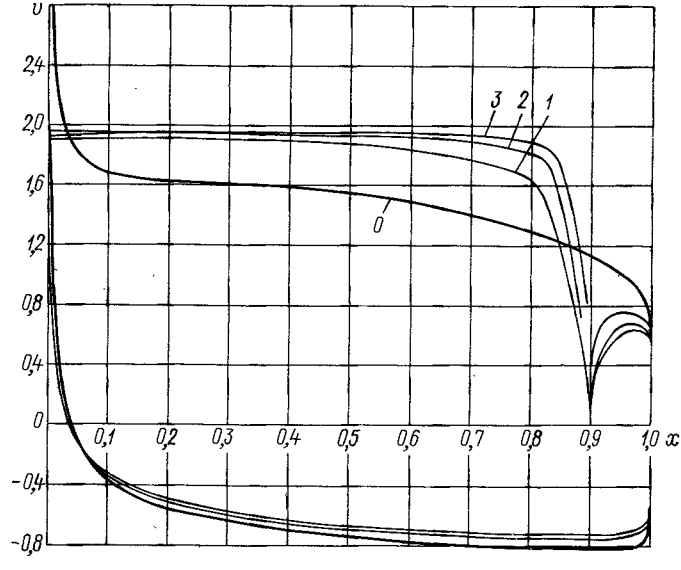


Рис. 76. Распределение скоростей на границе каверны различных приближений

границе каверны в различных приближениях от первого до третьего (нулевое приближение соответствует некавитирующему профилю).

На рис. 77 кривые показывают зависимость длины каверны, выраженной в долях хорды, от параметра, обратного числу кавитации ($1/\sigma$). Кривые построены для сегментного профиля $\delta_m = 0{,}1$ при нескольких значениях угла атаки. Очевидно, что в действительности реализуются только те ветви кривых, изображенных на этом и последующих аналогичных рисунках, на ко-

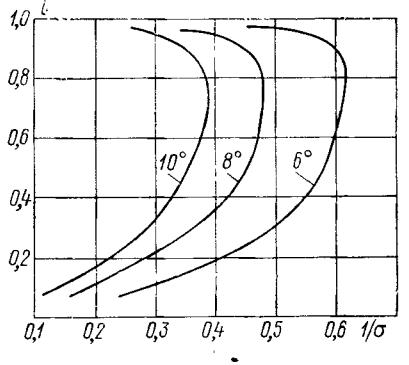


Рис. 77. Зависимость отиосительиой длиины каверины от числа кавитации

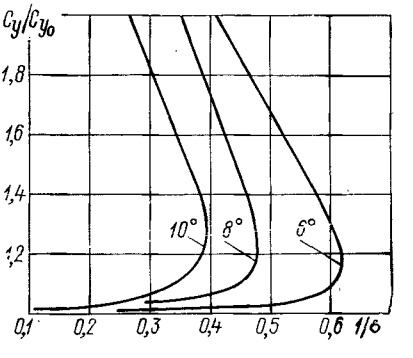


Рис. 78. Зависимость коэффициеита подъемной силы от числа кавитации

торых имеет место возрастание относительной длины каверны $\bar{l}$ с ростом параметра $1/\sigma$.

На рис. 78 построены кривые, показывающие зависимость коэффициента подъемной силы от указанного параметра. При этом значения коэффициентов кавитирующего профиля отнесены к коэффициенту профиля некавитирующего.

На рис. 79, *а*, *б* и 80, *а*, *б* можно проследить влияние положения максимальной толщины на кавитационные характеристики профиля и коэффициент его подъемной силы. Эти рисунки относятся к профилям с $\delta_m = 0{,}1$, имеющим плоскую нагнетающую сторону и выпуклую засасывающую, составленную из двух дуг окружностей, касающихся друг друга в точке, соответствующей максимальной толщине.

На рис. 81 и 82 приведены характеристики кавитационного обтекания профиля типа «Геттинген 411» с $\delta_m = 0{,}132$ и гладким отрывом каверны.

Интересно сравнить результаты расчетов по рассмотренной выше методике с результатами расчетов, основанных на использовании методов, характерных для классической теории струй. В числе последних известны расчеты обтекания пластинки,

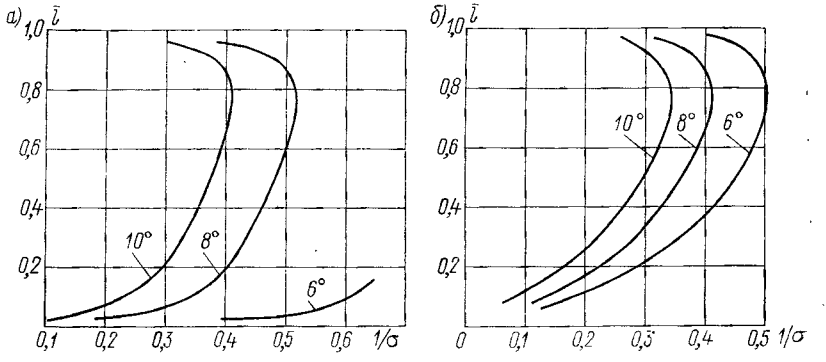


Рис. 79. Зависимость длиины каверны от числа кавитации для профиля с максимальной толщиной: *а* — расположенной на расстоянии 0,25 хорды от носика профиля; *б* — 0,75 хорды от носика профиля

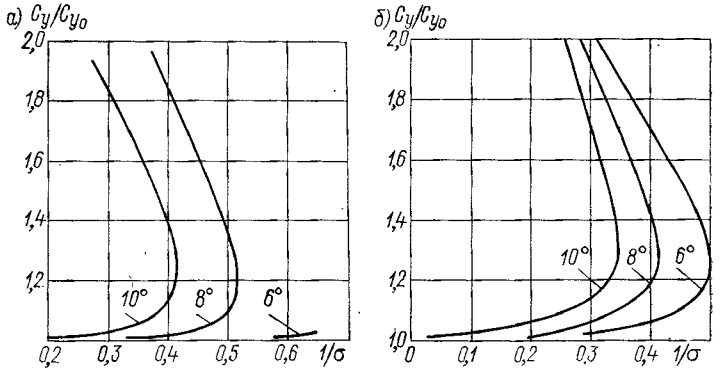


Рис. 80. Зависимость коэффициента подъемной силы от числа кавитации для профиля с максимальной толщиной: *а* — расположенной на расстоянии 0,25 хорды от носика профиля; *б* — 0,75 хорды от носика профиля

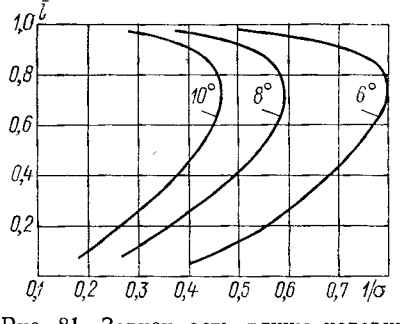


Рис. 81. Зависимость длиины каверны от числа кавитации для профиля „Геттингеи 411"

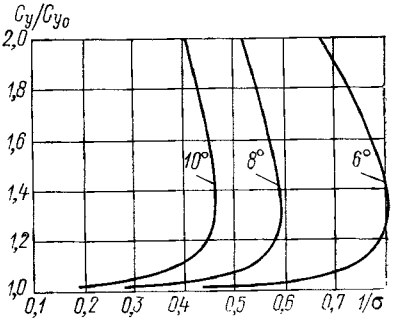


Рис. 82. Зависимость коэффициента подъемной силы от числа кавитации для профиля „Геттингеи 411"

выполненные А. Г. Терентьевым [54]. На рис. 83 и 84 результаты этих расчетов даны (сплошные линии) в виде зависимостей $\bar{l}(\sin\alpha/\sigma)$ и C_y/C_y $(\bar{l})$ для угла атаки α равного 10°. Точки соответствуют расчетам по приведенной выше методике для тонкого эллипса с относительной максимальной толщиной $\delta_m = 0{,}02$.

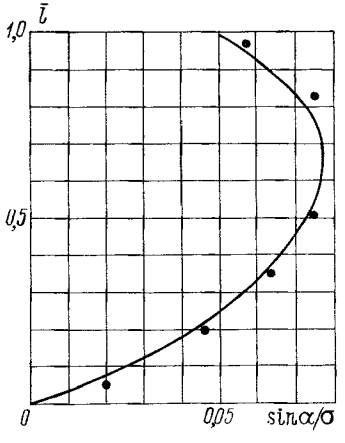


Рис. 83. Зависимость длины каверны от числа кавитации для пластинки

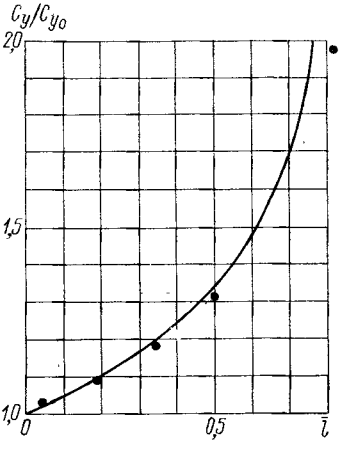


Рис. 84. Зависимость коэффициента подъемной силы от длины каверны для пластинки

При таком большом угле атаки эти данные можно считать соответствующими пластинке. Как свидетельствуют приведенные данные, согласование результатов расчетов по обеим методикам следует считать вполне удовлетворительным.

Представляется интересным проследить влияние скругления носика профиля на развитие кавитации. На рис. 85 приведены зависимости $\sigma(\bar{l})$ для сегментного профиля с максимальной относительной толщиной, равной 0,1 при угле атаки $\alpha = 2°$. Приведенные кривые относятся к скруглениям, выполненным в виде окружностей, касающихся верхней и нижней сторон профиля (рис. 86). Кривые *1*, *2* и *3* на рис. 85, 86 соответствуют радиусам скругления, равным 0,0012, 0,0045 и 0,009 хорды профиля. Из приведенных данных следует, что величина радиуса скругления существенно влияет на развитие кавитации на рассматриваемом профиле при $\alpha = 2°$. При $\alpha = 6°$, как показывают расчеты, указанные выше скругления уже практически не оказывают влияния на зависимость $\sigma(\bar{l})$ и все кривые сливаются в одну.

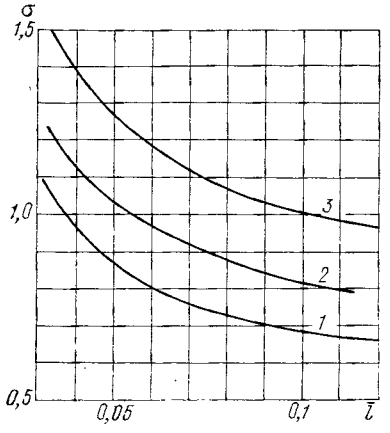


Рис. 85. Кривые $\sigma(\bar{l})$ для сегментного профиля с различной величиной скругления носика

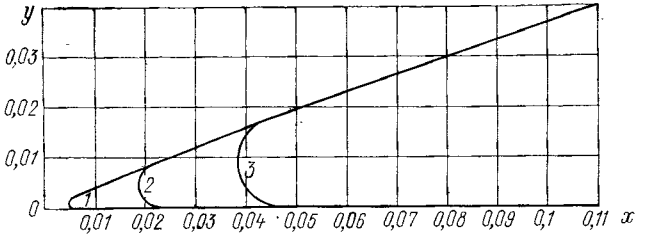


Рис. 86. Форма скруглений носика сегментного профиля

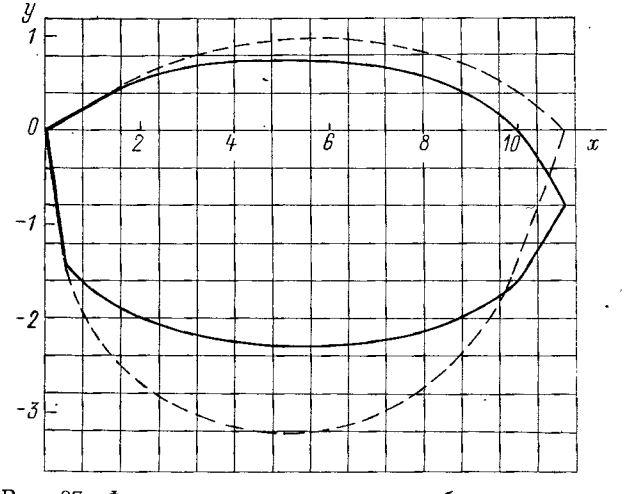


Рис. 87. Форма границ каверны при обтекании клина под углом атаки

Процесс сходимости решения задачи для суперкавитационного режима течения иллюстрирует рис. 87. На нем сплошными утолщенными линиями изображен равнощекий клин с углом при вершине 90°, угол атаки средней линии которого по отношению к невозмущенному потоку составляет $^1/_2$ радиана (28,65°). Тонкими пунктирными линиями даны пробная граница каверны и замыкающий контур, имеющий форму прямощекого клина, вершина которого лежит на оси x. Первоначальное положение вершины, вообще говоря, может быть выбрано произвольно.

В результате решения прямой и обратной задач при неизменном положении вершины замыкающего клина строились границы каверны с постоянными значениями скоростей на них. При этом углы между осью x и щеками замыкающего клина корректировались. Скорости же на обеих границах каверны оказывались различными.

Далее указанная процедура расчетов повторялась, но при смещенном положении вершины замыкающего клина по оси y в сторону границы течения, на которой скорость оказывалась большей. Таким образом, в результате нескольких расчетов и интерполяции находилось нужное положение вершины замыкающего клина, при котором скорости на обеих границах каверны становились равными. На рис. 87 сплошными тонкими линиями изображены окончательные контуры каверны и замыкающего клина.

Таблица 1

Результаты расчетов кавитационного обтекания пластинки

σ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
C_{y_1}	0,325	0,403	0,497	0,599	0,704
C_y	0,332	0,405	0,499	0,602	0,711
$\overline{l}_1$	3,828	2,360	1,756	1,442	1,275
$\overline{l}$	4,021	2,379	1,783	1,499	1,341
$\overline{h}_1$	0,347	0,308	0,284	0,275	0,274
$\overline{h}$	0,369	0,304	0,280	0,271	0,269

В табл. 1 приведены расчетные значения коэффициента подъемной силы C_{y_1}, а также длины и максимальной ширины каверны, отнесенных к длине пластинки ($\overline{l}_1$ и $\overline{h}_1$ соответственно). Для сравнения приведены расчетные значения указанных величин, полученные в работе [54] (C_y, $\overline{l}$, $\overline{h}$).

§ 26. Кавитационное обтекание решетки профилей и профиля в канале с прямолинейными стенками

Схема расчета кавитационного обтекания профиля крыла в составе решетки, а также в канале с параллельными стенками ничем не отличается от схемы расчета изолированного профиля. Для решения обратной задачи сохраняются прежние формулы, а для решения прямой задачи необходимо составить новые уравнения, учитывающие взаимное влияние профилей в решетке и стенок канала. При этом форма уравнений сохраняется преж-

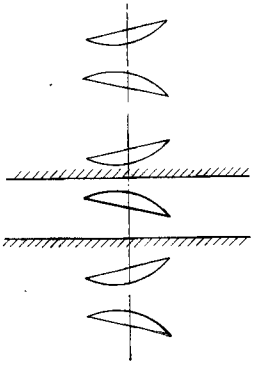


Рис. 88. Схема обтекания профиля в канале

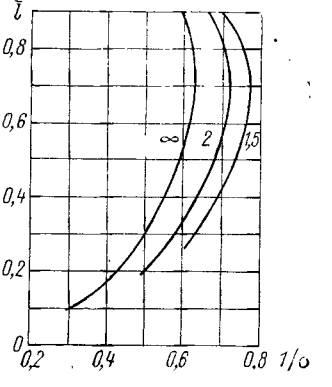


Рис. 89. Зависимость длины каверны от числа кавитации для решетки профилей

ней, т. е. такой же, как уравнений (4.24) и (4.26). В них изменяется только вид ядер, и, соответственно, коэффициентов a_{ij}.

Для решетки профилей с периодом t функция ω может быть представлена в виде

$$\omega = \sum_{k=-p}^{p} \operatorname{arctg} \frac{y(s) - \eta(s_1) + kt}{x(s) - \xi(s_1)}, \qquad (4.28)$$

а коэффициенты a_{ij} в виде

$$a_{ij} = \sum_{k=-p}^{p} \left(\operatorname{arctg} \frac{y_i - \eta_j + kt}{x_i - \xi_j} - \operatorname{arctg} \frac{y_i - \eta_{j-1} + kt}{x_i - \xi_{j-1}} \right) \frac{\Delta s_i}{\Delta s_j}. \qquad (4.29)$$

Кроме того задается угол установки профиля в решетке.

При составлении уравнения для расчета обтекания профиля в канале с шириной $\bar{D} = D/c$, где c — хорда профиля, можно воспользоваться принципом зеркальных отображений (рис. 88).

Для этого случая функцию ω можно представить в виде

$$\omega = \sum_{k=-p}^{p} \left[\operatorname{arctg} \frac{y(s) - \eta(s_1) + 2k\overline{D}}{x(s) - \xi(s_1)} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{2\overline{d} - y(s) - \eta(s_1) + 2k\overline{D}}{x(s) - \xi(s_1)} \right], \qquad (4.30)$$

где $\overline{d} = d/c$ — отстояние профиля от верхней стенки канала,

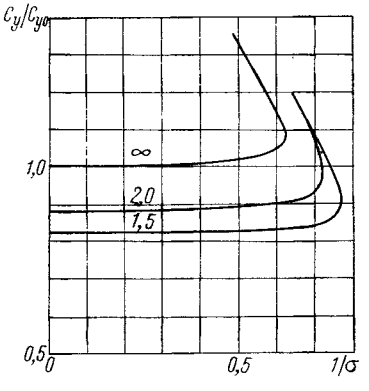


Рис. 90. Зависимость коэффициента подъемной силы от числа кавитации для решетки профилей

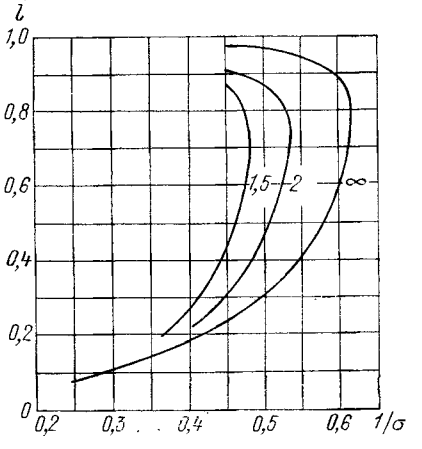


Рис. 91. Зависимость длины каверны от числа кавитации для профиля в канале

а коэффициенты a_{ij} и b_j с учетом направления обхода профиля и его отображений в виде

$$a_{ij} = \sum_{k=-p}^{p} \left(\operatorname{arctg} \frac{y_i - \eta_j + 2k\overline{D}}{x_i - \xi_j} - \operatorname{arctg} \frac{y_i - \eta_{j-1} + 2k\overline{D}}{x_i - \xi_{j-1}} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{2\overline{d} - y_i - \eta_j + 2k\overline{D}}{x_i - \xi_j} + \operatorname{arctg} \frac{2\overline{d} - y_i - \eta_{j-1} + 2k\overline{D}}{x_i - \xi_{j-1}} \right) \frac{\Delta s_i}{\Delta s_j};$$

$$b_j = -2\pi \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{\Delta s_j}.$$

Угол атаки задается установкой самого профиля.

На рис. 89 и 90 представлены результаты расчетов кавитационного обтекания профиля сегментного типа с $\delta_m = 0{,}1$ в составе решетки для двух значений относительного шага, равного

1,5 и 2, угла установки профиля в решетке 6°, и угла атаки 0°, а также изолированного профиля.

Как и на кривых, соответствующих обтеканию изолированного профиля, длина каверны отнесена к хорде профиля, а коэффициент подъемной силы к значению, соответствующему бескавитационному обтеканию.

На рис. 91 и 92 представлены результаты расчетов кавитационного обтекания указанного выше профиля в канале при двух

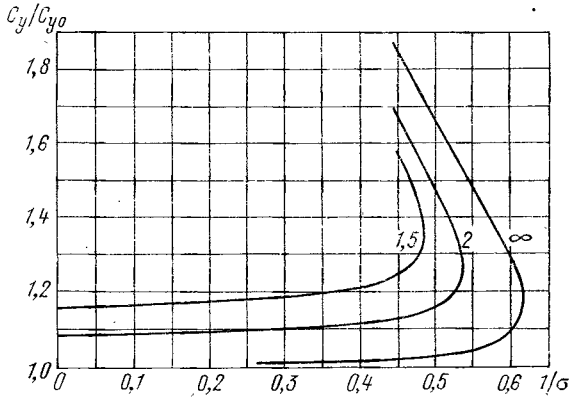


Рис. 92. Зависимость коэффициента подъемной силы от числа кавитации для профиля в канале

значениях отношения ширины канала к хорде профиля: $\bar{D} = 1{,}5$ и 2 и угле атаки 6°.

§ 27. Упрощенные приемы расчета плоского кавитационного обтекания тел

Если распределение давлений по поверхности некавитирующего тела в области пониженных давлений, где может возникнуть кавитация, имеет плавный характер, то для расчета параметров каверны можно ограничиться первым приближением. Более того, первое приближение дает хорошие результаты и при наличии больших по величине пиков разрежений, если их протяженность невелика. Это подтверждают результаты расчетов, выполненные К. В. Александровым. В первом приближении эти расчеты для плоской пластинки практически не отличаются от расчетов А. Г. Терентьева [54], которые следует рассматривать в данном случае как эталонные, вплоть до углов атаки порядка 2°. Таким углам атаки соответствуют коэффициенты подъемной силы порядка 0,2, характерные для обтекания элементов большинства судовых конструкций и гидравлических аппаратов (гребных винтов, подводных крыльев, гидравлических турбин

и т. п.) при их работе на основных режимах. Принимая во внимание сказанное, а также сравнительную простоту рассмотренных ниже приемов [31, 36], их можно рекомендовать, когда требуется оперативность при получении расчетных данных по кавитационному обтеканию профилей. Они могут оказаться также полезными и для сравнительных оценок кавитационных характеристик различных профилей и в тех случаях, когда распределение давлений не удовлетворяет требованиям линеаризованной теории. Ниже рассмотрены упрощенные приемы расчета кавитационного обтекания так называемых ненесущих тел (симметричное течение относительно оси, параллельной вектору скорости набегающего потока) и профилей крыльев.

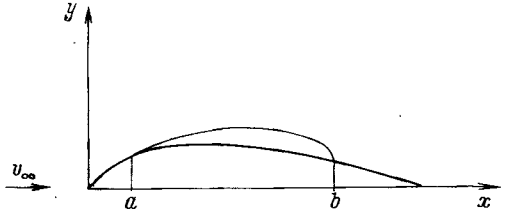


Рис. 93. Схема симметричного кавитационного обтекания тела

1. **Симметричное кавитационное течение.** На рис. 93 схематически изображена верхняя половина контура продольного сечения тела (утолщенная линия) и границы каверны (тонкая линия) в принятой системе координат. Представленная схема течения соответствует частичной кавитации, однако для дальнейших рассуждений это не имеет принципиального значения. Распределение скоростей $v_1(s)$ по контуру сечения некавитирующего тела считается заданным (определенным путем расчета или эксперимента). Если тело «тонкое», то $v_1(s)$ можно легко определить, пользуясь допущениями линейной теории, распределяя источники на оси x в пределах контура сечения тела. Можно также применить известные «точные» методы, в которых используются конформные отображения и т. п.

В принципе, используя обобщенную схему Рябушинского, расчеты кавитационного течения можно выполнить по формулам (4.7)—(4.10). Количество расчетных формул можно сократить, если ввести специальную форму замыкающего контура, которому будет соответствовать другая форма обращения интегрального уравнения (3.9) обратной задачи [18]

$$y'(s) = \frac{1}{\pi v_0} \sqrt{\frac{s-a}{b-s}} \int_a^b \sqrt{\frac{b-s_1}{s_1-a}} \cdot \frac{[v_0 - v_1(s_1)]\, ds_1}{s_1 - s}. \quad (4.31)$$

Решение (4.31) существует при любом значении параметра v_0, поэтому условие (4.8) выполнять не требуется. Величина же v_0 в этом случае может быть определена из условия замкнутости границ каверны (3.13). После подстановки уравнения (4.31) в формулу (3.13) и некоторых преобразований можно записать

$$v_0 = \frac{2}{\pi (b-a)} \int_a^b \sqrt{\frac{b-s_1}{s_1-a}}\, v_1(s_1)\, ds_1. \tag{4.32}$$

Условие Бриллюэна—Вилля для определения точки отрыва каверны при обтекании гладких тел может быть записано в следующем виде

$$\int_a^b \sqrt{\frac{b-s_1}{s_1-a}} \cdot \frac{v_1(s_1)\, ds_1}{s_1-s}, \quad s \to a. \tag{4.33}$$

Формулу (4.33) легко привести к виду, аналогичному (4.10), если вблизи $s_1 = a$ функцию $v_1(s_1)$ аппроксимировать линейной. Путем интегрирования правой части уравнения (4.31) могут быть определены местные значения толщины каверны (зазора между границей каверны и контуром сечения тела)

$$y(s) = \int_a^s y'(s_1)\, ds_1, \tag{4.34}$$

а также объем каверны

$$V = \int_a^b y(s)\, ds. \tag{4.35}$$

При выводе формул (4.31)—(4.33) из рассмотрения формально был исключен замыкающий контур. Анализ соотношения (4.31) показывает, что в точке замыкания граница каверны подходит к телу под прямым углом, а сама граница вблизи этой точки вырождается в кусок дуги эллипса, расположенный в окрестности точки пересечения эллипса с большой полуосью.

Естественно, что при таком характере замыкания границы каверны описание ее формы с помощью интегрального уравнения (3.9) становится некорректным. Этим, в частности, объясняется тот факт, что решение (4.31)—(4.33) формально соответствует границе каверны, скорость на которой везде постоянна, включая окрестность точки замыкания. В действительности же, если вычислить скорости на границе каверны, описанной формулами (4.31)—(4.33), точным методом, то точка замыкания границы каверны будет критической, в ее малой окрестности скорость будет быстро нарастать от нуля до постоянного значения v_0, имеющего место на остальной части границы. Таким образом, решение (4.31)—(4.33) можно трактовать как ре-

шение, соответствующее частному виду обобщенной схемы Рябушинского, когда замыкающий контур имеет форму, близкую к дуге эллипса. В этом случае при вычислении гидродинамической силы, приложенной к кавитирующему телу, надобность в точном определении давлений на границе каверны в окрестности ее замыкания на тело отпадает, так как и в точной теории, использующей обобщенную схему Рябушинского, при вычислении гидродинамической силы давление на замыкающем контуре фактически считают постоянным, равным давлению в каверне.

Отмеченная некорректность решения (4.31)—(4.33) вблизи хвостовой части каверны может ощутимо сказаться при вычислении скоростей, индуцируемых на теле системой источников, соответствующих каверне, в случае частичной кавитации. Однако и при этом для каверн, отношение толщины которых к длине мало, зона влияния хвостовой части на обтекание тела в целом будет также мала, и некорректность будет сказываться мало как на определении формы каверны, так и на величине гидродинамических реакций, приложенных к кавитирующему телу.

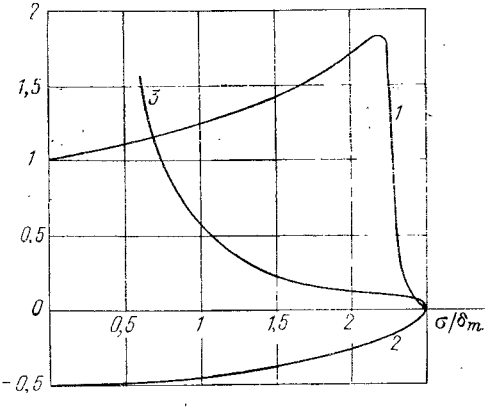


Рис. 94. Зависимость C_x/δ_m^2 и абсцисс точек схода и замыкания каверны, отнесенных к длине профиля, от параметра σ/δ_m

На рис. 94 приведены кривые зависимости от числа кавитации, отнесенного к δ_m, коэффициента кавитационного сопротивления C_x, отнесенного к δ_m^2 (кривая *1*), а также абсцисс точек схода и замыкания каверны (кривые *2* и *3*). Для определения абсцисс точек схода и замыкания каверны цена делений на вертикальной шкале графиков должна быть умножена на 0,5 и 5, соответственно. Расчеты параметров каверны выполнены по формулам (4.31)—(4.33) для контура, образованного пересечением дуг окружности. Величина C_x определена путем интегрирования безразмерных давлений по контуру сечения тела при наличии на его поверхности системы источников, соответствующих каверне. При этом величина давления между точками *a* и *b* считалась постоянной. Расчеты по приведенным формулам просты, не требуют привлечения сложной вычислительной техники и исключают длительный процесс отладки программы для ЭЦВМ.

При расчетах обтекания контуров, имеющих фиксированные точки отрыва каверны (например, точки, в которых имеет место разрыв касательной к контуру), чтобы избежать некоторых

сложностей, связанных с бесконечным ростом функции $v_1(s)$ в этих точках, можно рассматриваемый контур дополнить другим, таким образом, чтобы новый контур был плавным, а его длина не превышала длину каверны. При этом расчетная граница каверны может пересекать дополнительный контур. Те его части, которые будут лежать вне каверны, в этом случае следует просто отбросить при построении окончательной формы каверны.

Иногда при решении практических вопросов достаточно ограниченной информации о кавитационном течении, например знания зависимости длины каверны от числа кавитации. В этом случае расчеты по формулам (4.32) и (4.33) элементарны.

2. **Обтекание профилей крыльев в режиме частичной кавитации.** При кавитационном обтекании профилей крыльев может оказаться существенным влияние каверны на величину подъемной силы. Однако в тех режимах течения, когда это влияние невелико, для расчета параметров каверны могут быть полностью использованы приемы, изложенные в п. 1. Так, например, для плоской пластины этим влиянием можно пренебречь при режимах течения, когда длина каверны составляет менее 0,25 длины пластины [31]. Даже при длине каверны, составляющей половину длины пластины, наличие каверны приводит к изменению подъемной силы профиля всего на 15 % от значения, соответствующего бескавитационному обтеканию.

Для учета влияния каверны на подъемную силу профиля удобно воспользоваться конформным отображением контура некавитирующего профиля на круг. В настоящее время такие методы конформного отображения, строгие и приближенные, достаточно хорошо разработаны и позволяют обследовать обтекание весьма широких классов профилей.

На рис. 95, *а* приведена схема обтекания профиля при наличии каверны (физическая плоскость $z=x+iy$), а на рис. 95, *б* — течения на вспомогательной плоскости $\zeta=\xi+i\eta$, на которой контуру профиля соответствует окружность единичного радиуса, а границе каверны некоторая линия между точками a_1 и b_1. Из приведенного рисунка прослеживается также соответствие характерных точек обеих плоскостей.

В физической плоскости между точками a и b на контуре профиля располагается система источников, эквивалентная каверне. Ее интенсивность связана с формой каверны соотношением (3.7). Образ источников в плоскости ζ будет расположен на дуге окружности между точками a_1 и b_1. Пользуясь формулой (3.7), а также известной формулой связи между скоростями потока в точках физической и вспомогательной плоскостей, нетрудно установить соответствие между интенсивностью отображенных в плоскости ζ источников и координатами образа границы каверны в этой плоскости

$$q(\Theta)=2v_0\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|\frac{dr}{d\Theta}, \qquad (4.36)$$

где $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|$ — значение модуля производной функции, с помощью которой область вне круга единичного радиуса конформно отображается на физическую область вне контура профиля; $dr/d\Theta$ — тангенс угла наклона между касательными к границе образа каверны в плоскости ζ и окружностью; Θ — угловая координата точек в плоскости круга, отсчитываемая от отрицательного направления оси ξ по часовой стрелке.

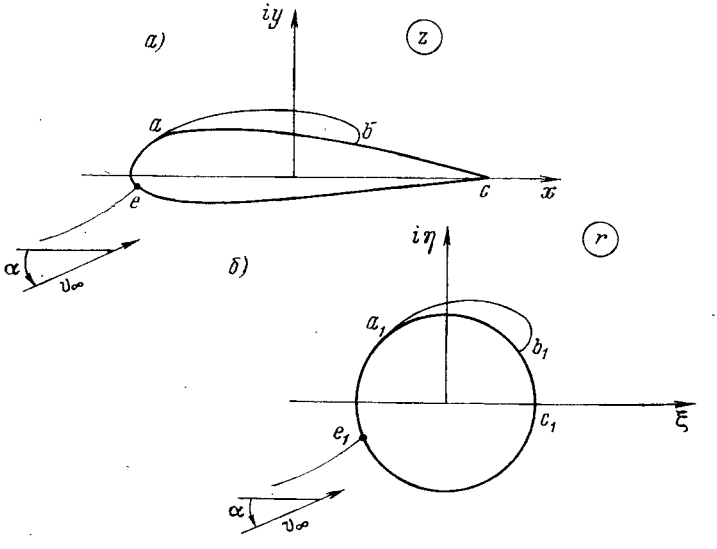


Рис. 95. Схема обтекания профиля в физической и вспомогательной плоскостях

В формуле (4.36) произведение $v_0\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|$ равно скорости на границе образа каверны в плоскости круга. Указанная скорость равна сумме скоростей обтекания окружности в отсутствие циркуляции по контуру, охватывающему профиль и каверну, скоростей, вызванных системой источников, соответствующих каверне, и скоростей, обусловленных циркуляцией Г, которую необходимо наложить для удовлетворения постулата Чаплыгина—Жуковского о конечности скоростей в окрестности угловой хвостовой точки профиля. Обозначая упомянутую сумму скоростей через v, можно получить интегральное уравнение, связывающее между собою интенсивность источников и распределение скоростей по некавитирующему профилю

$$v_0\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|=v, \qquad (4.37)$$

где

$$v=2v_\infty \sin(\Theta+\alpha)+\frac{1}{2\pi}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} q(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\Theta-\varphi}{2}d\varphi+\frac{\Gamma}{2\pi}; \quad (4.38)$$

α — угол атаки профиля, отсчитываемый от угла нулевой подъемной силы некавитирующего профиля (за положительное значение α принято то его значение, которое приводит к возникновению подъемной силы на профиле, направленной вверх параллельно оси y; Θ_1, Θ_2 — угловые координаты точек схода и замыкания каверны, соответственно. Первый член правой части уравнения (4.38) соответствует бесциркуляционному обтеканию круга невозмущенным потоком, составляющим угол α с осью ξ, второй член — значению скоростей в точках окружности, обусловленных наличием источников, третий член — течению в точках окружности, обусловленному наличием в ее центре вихря с циркуляцией Γ. Величину циркуляции Γ можно легко вычислить с помощью постулата Чаплыгина—Жуковского, согласно которому суммарная скорость v в точке $\Theta=\pi$, соответствующей задней угловой точке профиля C, должна равняться нулю. Полагая в формуле (4.38) $\Theta=\pi$ и приравнивая правую ее часть нулю, можно получить

$$\frac{\Gamma}{2\pi}=2v_\infty \sin\alpha-\frac{1}{2\pi}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} q(\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}d\varphi. \quad (4.39)$$

Если считать заданным положение точки замыкания каверны Θ_2, то в интегральном уравнении (4.37), в общем случае, будут неизвестны параметры v_0 и Θ_1. Для определения первого параметра можно использовать условие замкнутости каверны, согласно которому суммарная интенсивность источников должна равняться нулю

$$\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} q(\varphi)\,d\varphi=0. \quad (4.40)$$

В случае гладкого отрыва каверны параметр Θ_1 можно найти из условия Бриллюэна—Вилля, согласно которому

$$\frac{dq}{d\Theta}=0 \text{ при } \Theta=\Theta_1. \quad (4.41)$$

В диапазоне изменения $0<\frac{\Theta-\varphi}{2}<\pi$ функция $\operatorname{ctg}\frac{\Theta-\varphi}{2}$ может быть достаточно точно аппроксимирована двумя первыми членами степенного ряда

$$\operatorname{ctg}\frac{\Theta-\varphi}{2}=\frac{2}{\Theta-\varphi}-\frac{\Theta-\varphi}{6}+\ldots. \quad (4.42)$$

На рис. 96 точные значения котангенса изображены сплошной линией, а значения, соответствующие двум первым членам ряда (4.42),— пунктиром. Цифры на оси ординат рис. 96 соответствуют левой и правой частям уравнения (4.42).

Используя аппроксимацию (4.42), интегральное уравнение (4.37) можно представить в следующем виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\frac{q_1(\varphi)\,d\varphi}{\Theta-\varphi}=k(\Theta), \tag{4.43}$$

где

$$q_1=\frac{q}{v_\infty};$$

$$k(\Theta)=\frac{v_0}{v_\infty}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|-$$

$$-2\left[\sin(\Theta+\alpha)+\sin\alpha\right]+A;$$

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}q_1(\varphi)\times$$

$$\times\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi}{6}\right)d\varphi$$

— постоянная величина.

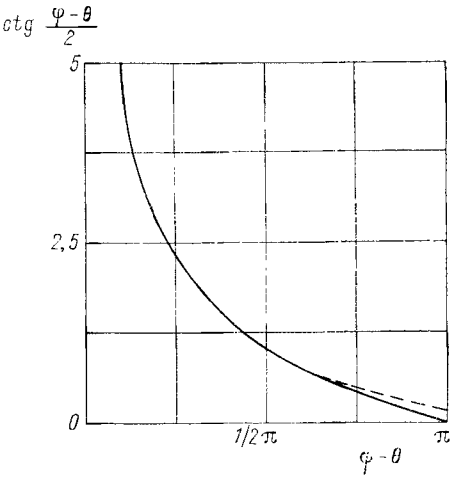


Рис. 96. Точные и приближенные значения функции $\operatorname{ctg}\frac{\Theta-\varphi}{2}$

Решение (4.43) может быть найдено в той же форме, что и решение (4.31),

$$q_1(\Theta)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\Theta-\Theta_1}{\Theta_2-\Theta}}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\sqrt{\frac{\Theta_2-\varphi}{\varphi-\Theta_1}}\cdot\frac{k(\varphi)\,d\varphi}{\varphi-\Theta}. \tag{4.44}$$

После несложных вычислений выражение для $q_1(\Theta)$ можно представить в виде

$$q_1(\Theta)=\sqrt{\frac{\Theta-\Theta_1}{\Theta_2-\Theta}}\left[2\sin\alpha-A+k_1(\Theta)+\right.$$

$$\left.+\frac{v_0}{\pi v_\infty}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\sqrt{\frac{\Theta_2-\varphi}{\varphi-\Theta_1}}\cdot\frac{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|d\varphi}{\varphi-\Theta}\right], \tag{4.45}$$

где

$$k_1(\Theta)=-\frac{2}{\pi}\int_{\Theta_1}^{\Theta_2}\sqrt{\frac{\Theta_2-\varphi}{\varphi-\Theta_1}}\cdot\frac{\sin(\Theta+\alpha)}{\varphi-\Theta}\,d\varphi.$$

При производстве численных расчетов удобно перейти к новым координатам, которые со старыми связаны следующими соотношениями

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\frac{\Theta_2-\Theta_1}{2}\varphi'+\frac{\Theta_2+\Theta_1}{2};\\ \Theta&=\frac{\Theta_2-\Theta_1}{2}\Theta'+\frac{\Theta_2+\Theta_1}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{4.46}$$

Тогда выражение (4.45) будет иметь вид

$$q_1(\Theta')=\sqrt{\frac{1+\Theta'}{1-\Theta'}}\left[2\sin\alpha-A+k_1(\Theta')+\right.$$

$$\left.+\frac{v_0}{\pi v_\infty}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\varphi'}{1+\varphi'}}\cdot\frac{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|d\varphi'}{\varphi'-\Theta'}\right], \tag{4.47}$$

где

$$A=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}q_1(\varphi')\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\Theta_2-\Theta_1}{4}\varphi'+\frac{\Theta_2+\Theta_1}{4}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Theta_2-\Theta_1}{12}\varphi'+\frac{\Theta_2+\Theta_1}{12}\right];$$

$$k_1(\Theta')=-\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\varphi'}{1+\varphi'}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Theta_2-\Theta_1}{2}\varphi'+\frac{\Theta_2+\Theta_1}{2}+\alpha\right)d\varphi'}{\varphi'-\Theta'}.$$

Пользуясь формулами (4.40) и (4.47), можно определить значение скорости на границе каверны

$$\frac{v_0}{v_\infty}=\frac{\pi(2\sin\alpha-A)+k_2}{k_3}, \tag{4.48}$$

где

$$k_2=2\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\varphi'}{1+\varphi'}}\sin\left(\frac{\Theta_2-\Theta_1}{2}\varphi'+\frac{\Theta_2+\Theta_1}{2}+\alpha\right)d\varphi';$$

$$k_3=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\varphi'}{1+\varphi'}}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|d\varphi'.$$

В случае гладкого отрыва каверны для определения координаты точки отрыва используется равенство (4.41), что равносильно

обращению в нуль выражения, заключенного в квадратные скобки и стоящего в правой части уравнения (4.47), для значения $\Theta' = -1$.

Зазор между границей каверны и контуром профиля можно определить по формуле

$$y = \frac{(\Theta_2 - \Theta_1)\, v_\infty}{2\pi v_0} \int_{-1}^{\Theta'} q_1(\varphi')\, d\varphi'. \qquad (4.49)$$

Пользуясь выражением (4.39) для циркуляции вокруг кавитирующего профиля, легко определить отношение коэффициента подъемной силы кавитирующего профиля к соответствующему коэффициенту в отсутствие кавитации

$$\frac{C_y}{C_{y_0}} = 1 - \frac{A_1}{2 \sin \alpha}, \qquad (4.50)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} q_1(\varphi') \operatorname{tg}\left(\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{4}\varphi' + \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{4}\right) d\varphi'.$$

Распределение скоростей на контуре профиля может быть вычислено с помощью формулы

$$v_1 = \frac{v}{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|}, \qquad (4.51)$$

где v вычисляется по формулам (4.38) и (4.39), в уравнении (4.38) угол Θ принимает все значения на окружности в интервале $\Theta \geqslant \Theta_2$, скорость же в точках границы каверны считается постоянной, равной v_0.

Определение постоянных A и A_1 в приведенных выше формулах, учитывающих обратное влияние каверны на подъемную силу, в принципе, требует последовательных приближений. Однако практически этого делать не нужно, так как подстановка в выражения для A и A_1 функции $q_1(\varphi')$, вычисленной без учета указанного влияния, дает вполне удовлетворительные результаты.

На рис. 97 дана зависимость относительной длины каверны $\bar{l}$ от параметра $\sin\alpha/\sigma$, пропорционального обратному значению числа кавитации, для трех значений угла атаки. Кривая, соответствующая $\alpha \to 0°$, совпадает с кривой линейной теории [67]. Для углов атаки 5 и 10° кривые существенно отличаются от упомянутой кривой. Нанесенные на рис. 97 крестиками результаты

расчетов по точной теории [54] для $\alpha = 10°$ свидетельствуют о том, что приведенные выше расчетные зависимости учитывают в существенной степени нелинейные эффекты в задаче о кавитационном обтекании профилей. Как уже говорилось выше, результаты расчетов по приведенным выше формулам и по точной теории для $\alpha = 2°$ практически совпадают.

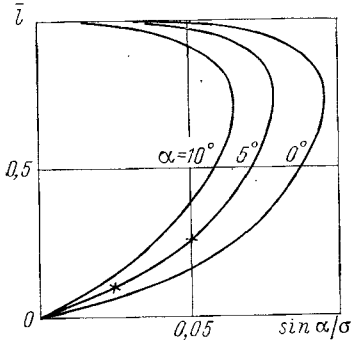


Рис. 97. Зависимость для плоской пластинки относительной длины каверны $\bar{l}$ от параметра $\sin \alpha/\sigma$

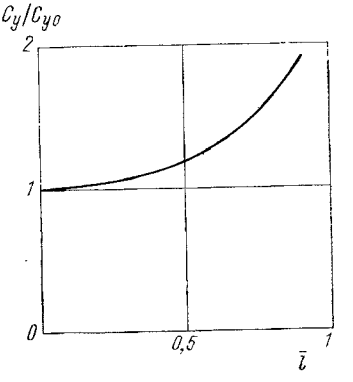


Рис. 98. Зависимость C_y/C_{y_0} для плоской пластинки от относительной длины каверны при $\alpha \to 0$

На рис. 98 приведена зависимость C_y/C_{y_0} от относительной длины каверны при $\alpha \to 0$.

ГЛАВА V

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

Применение метода интегральных уравнений при решении осесимметричных кавитационных задач позволяет, точно так же, как в плоских задачах, свести процедуру расчета к последовательным приближениям, на каждом шаге которых решаются прямая и обратная задачи.

Для численного решения прямой задачи можно использовать интегральные уравнения, аналогичные уравнениям (2.13), (2.14) и (2.16), или же другие, при выводе которых использованы не вихревые слои, а слои источников или диполей.

Для решения обратной задачи сохраняются все уравнения, использованные в плоской задаче (4.7)—(4.10) при некотором изменении смысла входящей в них функции $v_1(s)$. Схемы чис-

ленного решения прямой и обратной задач остаются точно такими же, как для случая плоского симметричного кавитационного течения. Ввиду почти полной аналогии между решением осесимметричной и плоской симметричной задач, изложение материала этой главы будет иметь конспективный характер, с необходимыми ссылками на результаты, полученные при решении плоской задачи, которые были рассмотрены ранее достаточно подробно.

§ 28. Некоторые сведения из кинематики осесимметричных течений идеальной жидкости

Так же как в плоском симметричном кавитационном течении в осесимметричном безвихревом течении идеальной жидкости существует потенциал скорости, который удовлетворяет уравнению Лапласа. Функция же тока удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{\partial\psi}{r\,\partial r}=0, \tag{5.1}$$

которое записано в цилиндрической системе координат [39]. Здесь координатная ось x параллельна вектору скорости набегающего потока, совпадающему по направлению с осью симметрии течения, r — расстояние по нормали к оси x произвольной точки поля течения.

Компоненты скорости связаны с ψ соотношениями

$$u=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad v=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{5.2}$$

а с потенциалом скорости соотношениями

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \tag{5.3}$$

где u — составляющая параллельная оси x; v — радиальная составляющая.

Аналогом прямолинейной вихревой нити (плоского вихря) в осесимметричном течении является круговое вихревое кольцо, а аналогом плоского источника — кольцо источников.

При использовании метода интегральных уравнений для решения осесимметричной кавитационной задачи играют существенную роль вихревые слои и слои источников, расположенные на поверхностях вращения. Они обладают теми же свойствами, что и плоские слои, рассмотренные в § 13. Так, например, при переходе через слои вихрей имеет место скачок касательной к слою скорости, равный γ, а при переходе через слой источников — нормальной, равный q.

Выражение для функции тока вихревого слоя может быть записано в виде

$$\psi(x,\ r)=-\frac{r}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\int\gamma(\omega)\,\frac{\cos(\theta-\theta_1)}{R}\,d\omega+\text{const}, \tag{5.4}$$

где интеграл вычисляется по поверхности вихревого слоя Ω, R — расстояние между произвольно выбранной точкой в области течения, определяемой цилиндрическими координатами x, r, Θ и точкой на поверхности вихревого слоя, определяемой координатами ξ, r_1, Θ_1 (рис. 99).

Выражение для потенциала слоя источников может быть записано в виде

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\int_{\Omega}\frac{Q(\omega)}{R}d\omega + \text{const}. \qquad (5.5)$$

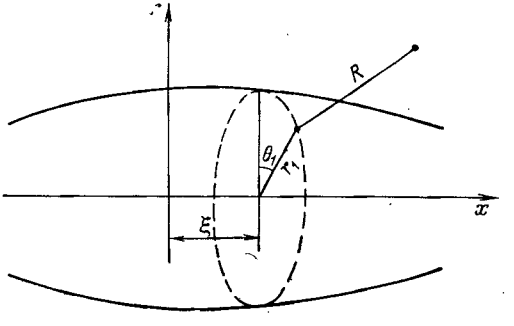


Рис. 99. Система координат для осесимметричного течения

Функция тока и потенциал пространственного плоскопараллельного потока, соответственно, будут иметь вид

$$\psi = r^2/2; \quad \varphi = x. \qquad (5.6)$$

В формулах (5.6) значение скорости на бесконечности принято равным единице.

§ 29. Интегральные уравнения осесимметричной задачи обтекания тел идеальной жидкостью

Так же как в плоском случае, располагая на поверхности тела вращения слои особенностей и удовлетворяя граничному условию непроницаемости поверхности, можно получить уравнения, связывающие между собою интенсивность (плотность) слоя и координаты точек меридионального сечения тела. При рассмотрении обтекания замкнутых поверхностей вращения здесь также имеет место равенство вихревой интенсивности скорости, касательной к меридиональному сечению тела.

Используя различные формы записи граничного условия непроницаемости и выражения (5.4), (5.5) и (5.6), можно получить четыре типа уравнений, связывающих форму тела с плотностью слоя особенностей. Пользуясь свойством функции тока,

согласно которому на поверхности тела оно сохраняет постоянное значение, можно написать

$$\psi(x,\ r_1)+r_1^2/2=0, \tag{5.7}$$

где в левой части стоит суммарная функция тока (5.4) и (5.6) вихревого слоя и невозмущенного потока; r_1 — отстояние по нормали к оси x точки контура меридионального сечения тела, определяемой абсциссой x.

Поскольку на поверхности тела нормальная компонента суммарной скорости, вызванной слоем особенностей и невозмущенным набегающим потоком, обращается в нуль, можно, пользуясь уравнениями (5.4), (5.5) и (5.6), составить еще два уравнения

$$\frac{\partial\psi}{r\,\partial\tau}+\cos\widehat{(n,\ x)}=0, \tag{5.8}$$

где τ — касательная к контуру в точке с координатами $(x,\ y)$; $\widehat{(n,\ x)}$ — угол между нормалью к контуру меридионального сечения тела и осью x

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{q}{2}+\cos\widehat{(n,\ x)}=0, \tag{5.9}$$

где q — погонная интенсивность источников.

При выводе формулы (5.9) учтено наличие скачка нормальной скорости при переходе через поверхность слоя источников.

При составлении четвертого уравнения учитывается равенство в точках поверхности тела вихревой интенсивности и величины суммарной касательной скорости, а также наличие скачка касательной скорости при переходе через поверхность вихревого слоя

$$\frac{\partial\psi}{r\,\partial n}-\frac{\gamma}{2}+\cos\widehat{(\tau,\ x)}=0, \tag{5.10}$$

где γ — погонная интенсивность вихрей вихревого слоя; $\widehat{(\tau,\ x)}$ — угол между касательной к контуру меридионального сечения тела и осью x.

Вследствие осевой симметрии функции $\gamma(\omega)$ и $Q(\omega)$ в уравнениях (5.4) и (5.5) не будут зависеть от угловой координаты. Если интегрирование по поверхности заменить последовательным интегрированием по углу и дуге меридионального сечения тела, то первый интеграл можно вычислить в конечном виде. Тогда выражение (5.7) можно записать в декартовой системе

координат (рис. 100), а интегрирование вести по верхней половине контура меридионального сечения тела и каверны

$$y^2(s)-\frac{1}{2\pi}\int_l \gamma(s_1)\,p_1(s,\,s_1)\,[(2-k)\,K(k)-2E(k)]\,ds_1=0, \quad (5.11)$$

где $p_1=t_1^2+t_2^2$; $t_1=(x-\xi)$; $t_2=y+\eta$; $k^2=4y\eta/p_1^2$; y, η — ординаты фиксированной и текущей точек контура меридионального сечения тела и каверны; $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы второго и первого рода, соответственно. Поскольку в левых частях уравнений (5.8), (5.9) и (5.10) стоят производные от функции тока и потенциала скоростей, равные нормальной и касательной компонентам скоростей, вызванных слоями особенностей, они могут быть легко выражены через составляющие скоростей по осям x и y, исходя из простых геометрических соображений. Ниже приведены выражения для указанных составляющих, записанные в декартовой системе координат:

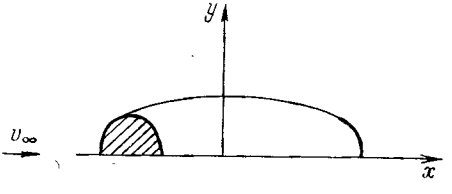


Рис. 100. Меридиональное сечение осесимметричного тела

$$u_q=\frac{1}{4\pi y}\int_l f_1E(k)\,q(s_1)\,ds_1; \quad (5.12)$$

$$v_q=\frac{1}{4\pi y}\int_l f_2\,[R_1E(k)+R_2K(k)]\,q(s_1)\,ds_1; \quad (5.13)$$

$$u_\gamma=\frac{1}{4\pi y}\int_l f_3\,[R_3E(k)+R_4K(k)]\,\gamma(s_1)\,ds_1; \quad (5.14)$$

$$v_\gamma=\frac{1}{4\pi y}\int_l f_4\,[R_5E(k)+R_6K(k)]\,\gamma(s_1)\,ds_1, \quad (5.15)$$

где

$$k^2=4y\eta/p_1^2;\quad k'^2=1-k^2;\quad p_1=t_1^2+t_2^2;$$

$$t_1=(x-\xi);\quad t_2=y+\eta;\quad f_1=(x-\xi)\,k^2/p_1k'^2;\quad f_2=k^2/p_1;$$

$$f_3=1/p_1;\quad f_4=(\xi-x)/p_1;\quad R_1=(y-\eta)/k'^2-R_2;$$

$$R_2=2\eta;\quad R_3=y\,(1/k'^2+1)-\eta\,(5/k'^2+1/k^2k'^2);\quad R_4=-2y;$$

$$R_5=1+1/k'^2;\quad R_6=2.$$

Таким образом, формулы (5.8), (5.9) и (5.10) являются интегральными уравнениями, ядра которых могут быть легко скомпонованы из равенств (5.12)—(5.15).

Соотношения (5.7)—(5.10) можно рассматривать как интегральные уравнения смешанного типа для определения кавитационного осесимметричного течения. Для этой цели их можно применять как по отдельности, так и в комбинации. Так, Л. Г. Гузевский [20] использовал комбинацию уравнений (5.7) и (5.8) для решения задачи о кавитационном течении по схеме Рябушинского (с зеркалом). Удовлетворяя уравнениям (5.7) и (5.8) в конечном числе контрольных точек, Л. Г. Гузевский аппроксимировал их системой трансцендентных уравнений, которые решал методом последовательных приближений, в результате чего определил значения вихревой интенсивности и координат границы каверны в контрольных точках.

Ниже в § 31 приведен метод последовательных приближений, основанный, как и в случае плоского кавитационного течения, на последовательном решении на каждом шаге приближений прямой и обратной задач. Предварительно в § 30 рассмотрен имеющий принципиальное значение вопрос о форме границы меридионального сечения каверны вблизи точки отрыва.

§ 30. Форма границы каверны вблизи точки ее отрыва от тела

При исследовании формы границы каверны вблизи точки отрыва от тела использован прием, аналогичный приведенному в работе [8].

Для этой цели удобно использовать уравнение (5.8), в котором нормальная компонента вызванной вихревым слоем скорости может быть представлена в виде

$$\frac{\partial\psi}{r\,\partial\tau}=u_\gamma\cos\left(\widehat{n,\ x}\right)+v_\gamma\cos\left(\widehat{n,\ y}\right)=u_\gamma n_x+v_\gamma n_y=$$

$$=\frac{n_y}{4\pi y}\int\limits_{(l)}\frac{\gamma(s_1)}{p_1}\left\{\frac{E(k)\,(1+k'^2)\,[(\xi-x)-y'(y-\eta)]}{k'^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{4E(k)\,\eta y'}{k^2}+K(k)\,[2(\xi-x)-2yy']\right\}ds_1. \qquad (5.16)$$

Если выбрать дугу контура меридионального сечения тела и каверны вблизи точки отрыва $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ такой, чтобы $\varepsilon/\eta\ll 1$, а также принять y' ограниченным по модулю, то можно сделать следующие оценки:

$$n_y\,ds=1+0(\varepsilon);\quad p_1=2y+0(\varepsilon);\quad 1+k'^2=1+0(\varepsilon^2);$$

$$E(k)=1+0(\varepsilon^2);\quad K(k)=\ln\varepsilon+0(\varepsilon^2).$$

Тогда для интеграла от третьего слагаемого подынтегральной функции (5.16) будет иметь место оценка

$$\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{\gamma(s_1)}{p_1}K(k)\,[2(\xi-x)-2yy']\,ds_1\simeq\varepsilon\ln\varepsilon,$$

для интеграла от второго слагаемого —

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{4\gamma(s_1)\,\eta y' E(k)\,ds_1}{p_1 k^2} \simeq 0(\varepsilon).$$

Интеграл от первого слагаемого можно оценить следующим образом, предварительно несколько преобразовав подынтегральную функцию

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\gamma(s_1)\,p_1^2\left(1+k'^2\right)E(k)\,[(\xi-x)-y'(y-\eta)]\,ds_1}{p_1\,[(\xi-x)^2+(y-\eta)^2]} \simeq$$

$$\simeq \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\gamma(s_1)\,[1+0(\varepsilon)]\,[1+y'^2+0(\varepsilon)]\,[1+0(\varepsilon^2)]\,d\xi}{(x-\xi)\,[1+y'^2+0(\varepsilon)]} \simeq$$

$$\simeq \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi}\,[1+0(\varepsilon)].$$

С учетом приведенных оценок, уравнение (5.8) в окрестности точки отрыва каверны можно представить в виде

$$\frac{1}{4\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi} = y' + F_1(x) + 0(\varepsilon) + 0(\varepsilon \ln \varepsilon), \qquad (5.17)$$

где $F_1(x)$ — непрерывная функция, имеющая на концах логарифмическую особенность порядка $\ln|\varepsilon|$ и обусловленная индукцией вихревого слоя, расположенного вне выделенного участка поверхности.

Уравнение (5.17) по форме совпадает с уравнением (2.23), следовательно, форма границы каверны осесимметричного кавитационного течения вблизи точки отрыва имеет все особенности, присущие границе каверны плоского течения (см. § 16).

§ 31. Кавитационное обтекание тел безграничным потоком

При построении границы осесимметричной каверны сначала задают пробную границу меридионального сечения каверны и замыкающего тела, и ищут распределение скоростей по составному контуру (прямая задача), включающему часть контура меридионального сечения тела, свободную от кавитации, границу сечения каверны и замыкающего тела. Информация, полученная в результате решения прямой задачи, служит исходной для решения обратной задачи, заключающейся в определении величины деформации пробной границы каверны, приводящей к выравниванию скоростей в ее пределах. Поскольку обратную задачу решают приближенно, вновь решают прямую задачу, позво-

ляющую найти распределение скоростей на «исправленной» границе каверны, в принципе, с любой степенью точности. После этого определяют деформацию границы следующего приближения и т. д.

Для решения прямой задачи на всех шагах приближений могут быть использованы уравнения (5.7)—(5.10), которые относительно искомых функций $\gamma(s)$ и $q(s)$ являются линейными интегральными уравнениями. Численное решение их принципиальных трудностей не представляет и здесь рассматриваться не будет.

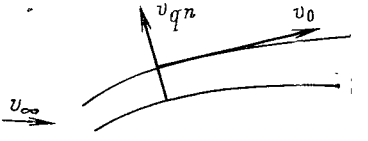


Рис. 101. Схема течения вблизи слоя источников

При решении обратной осесимметричной задачи можно поступать так же, как это делалось при рассмотрении задачи плоской, а именно, размещать на пробной границе каверны и границах каверны соответствующих приближений слой источников. Из кинематических соображений, ясных из рис. 101, можно написать

$$\Delta y' = \frac{v_{qn}}{v_0}, \tag{5.18}$$

где $\Delta y'$ — тангенс угла между касательными к контурам меридиональных сечений каверн двух последовательных приближений; v_{qn} — нормальная к контуру сечения каверны последующего приближения компонента скорости, вызванная слоем, расположенным на границе каверны предыдущего приближения. Для $\Delta y' \ll 1$ эта компонента будет отличаться на величину второго порядка малости $0(\Delta y'^2)$ по сравнению с единицей от компоненты, нормальной к слою, для которой справедливо выражение

$$v_{qn} = \frac{q}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \tag{5.19}$$

Если допустить также, что мал и угол между касательной к контуру меридионального сечения каверны любого приближения и вектором скорости невозмущенного потока, то легко показать, что для второго члена правой части уравнения (5.19) справедлива оценка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \simeq 0\left(y_1'^2\right),$$

где y_1' — тангенс угла между осью симметрии течения x и касательной к меридиональному сечению слоя источников.

Таким образом, принимая во внимание указанную оценку, а также формулы (15.18) и (15.19), связь между величиной

деформации и интенсивностью источников можно выразить следующим образом:

$$\Delta y'(s)=\frac{q(s)}{2v_0}. \tag{5.20}$$

Формула (5.20) совпадает с формулой (3.7) плоской задачи.

Скорость, касательная к меридиональному сечению границы каверны и вызванная слоем источников, может быть определена из соотношения

$$v_\tau(s)=-\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\frac{1}{4\pi y(s)}\int_a^b K_1(s,\ s_1)\,q(s_1)\,ds_1, \tag{5.21}$$

где a, b — дуговые координаты точек отрыва и замыкания каверны;

$$K_1=\frac{k^2}{p_1}\left\{2n_x\eta\,[E(k)-K(k)]+\frac{E(k)}{k'^2}\,[n_y(x-\xi)-n_x(y-\eta)]\right\};$$

$$n_x=\cos\widehat{(n,\ x)},\quad n_y=\cos\widehat{(n,\ y)}. \tag{5.22}$$

Ядро K_1 составлено из комбинации соотношений (5.12) и (5.13).

С принятой при выводе формулы (5.20) точностью сумма скорости $v_\tau(s)$ и касательной к меридиональному сечению каверны скорости в отсутствии слоя источников $v_1(s)$ должна равняться скорости на границе каверны

$$v_\tau(s)+v_1(s)=v_0. \tag{5.23}$$

Функция $K_1(s,\ s_1)$ при $s_1\to s$ имеет особенность порядка $(s-s_1)^{-1}$. После ее выделения уравнение (5.23) может быть приведено к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{q(s_1)\,ds_1}{s-s_1}=v_0-v_1(s)-v_2(s), \tag{5.24}$$

где

$$v_2(s)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\left[\frac{K_1(s,\ s_1)}{2y(s)}-\frac{1}{s-s_1}\right]q(s_1)\,ds_1. \tag{5.25}$$

Функция $v_2(s)$ является регулярной, поскольку ядро в формуле (5.25) имеет слабую особенность логарифмического типа.

Интегральное уравнение (5.24) с ядром Коши может быть приведено к виду (3.9), соответствующему плоскому течению

$$1-v_1^*(s)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\Delta y'(s_1)\,ds_1}{s-s_1}, \tag{5.26}$$

где под $v_1^*(s)$ следует понимать функцию

$$\frac{v_1(s)+v_2(s)}{v_0}. \tag{5.27}$$

Таким образом, для осесимметричного кавитационного течения будут иметь силу все качественные характеристики, свойственные плоскому течению. В частности, особенности формы границы каверны вблизи точки отрыва будут такие же, что и в плоском течении, что согласуется с результатами, приведенными в § 30. Остаются в силе также все соображения, связанные с выбором формы пробной границы каверны и контура меридионального сечения замыкающего тела, а также методы его уточнения в процессе решения задачи (см. § 20, 21).

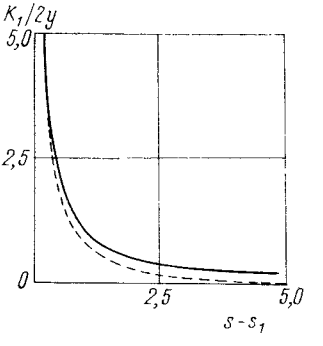


Рис. 102. Зависимости ядер интегральных уравнений плоской и осесимметричной задач от величины $(s—s_1)$

На рис. 102 сплошной линией изображена одна из ветвей равнобочной гиперболы, соответствующая ядру Коши интегрального уравнения плоской обратной задачи, а пунктиром — качественная зависимость ядра $K_1(s, s_1)/2y(s)$ задачи осесимметричной. При малых значениях $[s-s_1]$, не превышающих радиуса поперечного сечения каверны, эти ядра близки между собою по величине, а при $|s-s_1|\to 0$ асимптотически растут до бесконечности по одинаковому закону. При $|s-s_1|\to\infty$ оба ядра стремятся к нулю — ядро Коши по закону $|s-s_1|^{-1}$, а ядро интегрального уравнения осесимметричной задачи, как $|s-s_1|^{-2}$. В связи с таким характером поведения ядра при малых и больших значениях $|s-s_1|$ естественна мысль об использовании результатов решения плоской обратной задачи [формулы (4.7)—(4.10)] для расчета осесимметричного кавитационного течения. Как видно из рассмотрения подынтегральных функций в указанных формулах, основной вклад при вычислении интегралов определяется теми участками интегрирования, где $|s-s_1|$ является величиной малой, в особенности вблизи точек отрыва и замыкания каверны. Это дает основание рассчитывать на то, что плоская обратная задача даст достаточно хорошее приближение при расчете осесимметричного кавитационного течения. Пространственность же течения учитывается тем, что функция $v_1(s_1)$, входящая в формулы (4.7)—(4.10), берется из решения прямой осесимметричной задачи. При совпадении расчетной границы каверны с истинной уравнения (4.7)—(4.10) удовлетворяются тождественно.

Погрешность при таком подходе к решению обратной осесимметричной задачи может быть оценена. Она обусловлена пренебрежением в правой части уравнения (5.24) слагаемым $v_2(s)$. Из формул (5.25) и (5.20) следует, что величина $v_2(s)$ имеет порядок $\Delta y'$. Величина $v_1(s)$, также являющаяся слагаемым в правой части равенства (5.24), имеет порядок единицы. Следовательно, при вычислении величины скорости на границе каверны из уравнения (4.8) относительная погрешность имеет порядок $\Delta y'$. При $\Delta y' \to 0$ стремится к нулю и погрешность. С такой же точностью вычисляются и левые части уравнений (4.9) и (4.10), из которых определяются координаты точек отрыва и замыкания каверны.

Что касается оценки погрешности при вычислении $\Delta y'(s)$ по формуле, аналогичной (4.7), то здесь возникают затруднения, связанные с тем, что в числителе стоит разность двух величин v_0 и $v_1^*(s)$, имеющих один и тот же порядок. Однако при необходимости функция $v_2(s)$ может быть определена методом последовательных приближений по формуле (5.25), что приведет к уточнению величины v_1^*. В первом приближении при вычислении $v_2(s)$ в правую часть уравнения (5.25) подставляется функция $q(s_1)$, найденная с помощью соотношений (4.7)—(4.10). После этого уравнения (4.7)—(4.10) решаются уже с учетом $v_2(s_1)$ первого приближения и т. д. Такой способ решения обратной задачи успешно применялся не только для расчета осесимметричного кавитационного течения, но и для расчета течения при наличии слабой асимметрии [26].

Возможен и другой прием решения обратной задачи, использовавшийся в § 25 и 26 при решении плоских задач. В этом случае интервал интегрирования в формуле (5.21) разбивается на конечное число отрезков, на которых принимается какой-либо вид аппроксимации функции $q(s_1)$. При этом уравнение (5.23) удовлетворяется в конечном числе контрольных точек, тем самым оно аппроксимируется системой линейных уравнений относительно коэффициентов, определяющих функцию $q(s_1)$ на каждом отрезке аппроксимации. Параметр v_0 и параметр, служащий для уточнения замыкающего контура, определяется из условия замкнутости границы каверны и непрерывности касательной при переходе с границы каверны на замыкающий контур (см. § 25).

Для решения обратной задачи может быть использован также способ, примененный в работах [7, 8], где координаты точек контура меридионального сечения каверны определяются из нелинейного уравнения типа уравнения (5.8), которое ниже приведено в виде, удобном для вычислений:

$$y'(x) = \frac{1}{4\pi y(x)} \int_{-1}^{1} \frac{[K(k) S_1 + E(k) S_2] \gamma(\xi) d\xi}{p_1}; \qquad (5.28)$$

где

$$S_1 = y'y + (x - \xi); \quad S_2 = y'\left(\frac{y-\eta}{k'^2} - y - \eta\right) - (x-\xi)\left(1 + \frac{1}{k'^2}\right),$$

остальные обозначения те же, что и в формулах (5.12)—(5.15), а $x = \pm 1$ соответствует абсциссам точек пересечения составного контура с осью x.

Если в уравнении (5.28) считать известными значения $\gamma(\xi)$ в точках составного контура, включая границу сечения каверны, где $\gamma = \gamma_0 = v_0$, то выражение (5.28) можно рассматривать как нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для определения координат границы каверны. Его можно решать методом последовательных приближений, подставляя в правую часть известные значения $\gamma(\xi)$ и γ_0 и значения координат меридионального сечения пробной границы каверны или каверн последующих приближений. Сами последовательные приближения при решении уравнения (5.28) сходятся довольно быстро, но со сходимостью решения кавитационной задачи в целом дело обстоит сложнее.

Поскольку параметр γ_0 при решении уравнения (5.28) определить невозможно, его следует определять при решении задачи прямой. Так и сделано, по существу, при применении для решения плоской обратной задачи соотношений (4.7)—(4.10), поскольку при вычислении параметра $v_0 = \gamma_0$ по формуле (4.8) исходной служит функция $\gamma(s_1) = v_1(s_1)$, определенная из решения задачи прямой. Представляется естественным и при вычислениях координат точек границы каверны с использованием уравнения (5.28) параметры v_0, a и b определять из соотношений (4.8), (4.9) и (4.10), тем более, что по приведенной выше оценке относительная погрешность, обусловленная неучетом функции $v_2(s_1)$, известна и имеет порядок $\Delta y'$. Таким образом, в отличие от описанных выше приемов решения обратной задачи, здесь для определения координат границы каверны используется точное уравнение. Основные ошибки расчета в этом случае будут обусловлены неточностью определения указанных выше параметров и функции $\gamma(\xi)$ на контурах меридионального сечения основного и замыкающего тела, которые при решении уравнения (5.28) следует считать известными.

О погрешности в определении v_0, a и b уже было сказано. Для уменьшения погрешности в определении функции $\gamma(\xi)$ оказался эффективным следующий прием. После задания формы составного контура решается прямая задача. Полученные данные принимаются в качестве исходных для решения обратной задачи с использованием соотношений (4.7)—(4.10) плоской задачи. Такой прием позволяет откорректировать форму пробной границы каверны вблизи точек отрыва и замыкания таким образом, что как $y(x)$, так и функция $\gamma(x)$ в их окрестности будут иметь вид, соответствующий точному решению осесимметричной

кавитационной задачи. Это, как было показано выше, объясняется совпадением в «малом» уравнений плоской и осесимметричной задач. Далее на всех этапах приближений на участках, непосредственно примыкающих к точкам отрыва и замыкания каверны, для $y(x)$ и $\gamma(x)$ принимаются аппроксимации, соответствующие точному решению, а именно, формулам (4.2), (4.4).

Следующий этап в вычислениях заключается в решении прямой задачи для составного контура с откорректированной формой пробной границы каверны. При этом на всей части составного контура, соответствующей границе каверны, функция $\gamma(x)$ принимается постоянной, равной ее значению, вычисленному по формуле (4.8) с использованием значений $\gamma(\xi)$, соответствующих пробной границе каверны. Поскольку значение γ_0 и координаты границы каверны вблизи точек отрыва и замыкания вычисляются достаточно точно, следует ожидать также удовлетворительной точности в определении функции $\gamma(x)$ на частях составного контура, соответствующих основному и замыкающему телу. Найденные значения $\gamma(x)$ и γ_0 используют далее для решения уравнения (5.28).

В последующих шагах корректировок границ каверны различных приближений с помощью формулы (4.7) уже не требуется. На каждом шаге вычислений проделываются только операции по следующей схеме.

Составной контур, включающий границу каверны соответствующего приближения, используется для решения прямой задачи, в результате которого определяется функция $v_1(s_1)$. Далее по формулам (4.8)—(4.10) определяются параметры v_0, a и b, после чего вновь решается прямая задача, но только на свободных от кавитации частях тела и при условии равенства $\gamma = v_0$ на всей части составного контура, соответствующего границе каверны. Вычисления заканчиваются определением координаты границы каверны путем численного решения уравнения (5.28).

Как показывает практика расчетов, параметры v_0, a и b, как правило, определяются с достаточной точностью уже на этапе корректировки формы пробной границы каверны. Вследствие этого необходимость использования уравнений (4.8)—(4.10), а также решения прямой задачи для определения функции $v_1(s_1)$ на дальнейших шагах приближений отпадает.

§ 32. Кавитационное обтекание тел в круглой трубе с произвольной формой меридионального сечения

Рассмотрим продольное обтекание безграничным однородным потоком трубы конечной длины, внутри которой помещено тело. На форму меридионального сечения тела и трубы особых ограничений не накладывается, за исключением требования постоянства радиусов входного и выходного участков трубы на доста-

точно большом протяжении по ее длине, что гарантирует постоянство скорости во всех точках входного и выходного сечений.

На рис. 103 изображено меридиональное сечение трубы и тела. Входному и выходному участкам трубы соответствуют отрезки прямых AB и CD. Между точками B и C радиус трубы изменяется по произвольному закону. Дуга ca представляет собою часть контура меридионального сечения тела, свободную от кавитации, ab — контур границы каверны, bd — контур меридионального сечения фиктивного тела, на которое замыкается хвостовая часть каверны. Для замыкания каверны используется обобщенная схема Рябушинского.

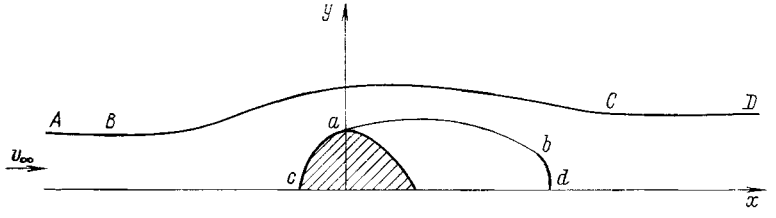


Рис. 103. Схема кавитационного обтекания тела в трубе

Обтекание трубы и кавитирующего тела можно заменить обтеканием концентрических относительно оси симметрии круговых вихревых колец, покрывающих стенки трубы, часть поверхности тела, свободную от кавитации, границу каверны и поверхность замыкающего (фиктивного) тела. При этом составное тело, ограниченное частью поверхности рассматриваемого тела, свободной от кавитации, границей каверны и поверхностью замыкающего тела, можно рассматривать как единое тело с замкнутой поверхностью.

Уравнение, определяющее расход жидкости через произвольное поперечное сечение трубы и составного тела можно написать в следующем виде

$$2\pi y(x) A + Q_1 = Q_0, \qquad (5.29)$$

где $y(x)$ — радиус трубы или составного тела в произвольном поперечном сечении; $A = \frac{1}{4\pi} \int\int_{\Omega} \gamma(\omega) \cos(\Theta - \Theta_1) \frac{d\omega}{R}$; $Q_1 = \pi y^2$ — расход жидкости через указанное сечение, обусловленный невозмущенным набегающим потоком; Q_0 — суммарный расход жидкости через произвольное сечение трубы или составного тела, обусловленный индукцией вихревых колец и невозмущенным набегающим потоком, выражаемым первым членом левой части уравнения (5.29); Ω — совокупность поверхностей трубы и составного тела; R — расстояние между фиксированными и текущими точками, лежащими на Ω.

Для точек, лежащих на стенках трубы, в силу уравнения сохранения массы

$$Q_0 = \pi y_0^2, \tag{5.30}$$

где y_0 — радиус входного сечения трубы.

Для точек, лежащих на поверхности составного тела, $Q_0 = 0$, поскольку поверхность замкнута. В силу этого на ней имеет место равенство абсолютной величины скорости и интенсивности вихрей.

Приравнивая левую часть уравнения (5.29) сначала правой части равенства (5.30), а затем — нулю, можно получить систему уравнений, связывающих интенсивность вихрей с формой трубы и составного тела. Ее можно рассматривать как систему интегральных уравнений смешанного типа, считая в точках границы каверны искомой величиной координаты этих точек, а на остальных поверхностях — значение вихревой интенсивности. Таким образом, решение кавитационной задачи можно свести к решению указанной системы интегральных уравнений. Интегральные уравнения для обтекания тела в трубе и безграничным потоком имеют одинаковые ядра и различаются лишь правыми частями.

При применении метода последовательных приближений, рассмотренного в § 31, на каждом шаге которого последовательно решаются прямая и обратная задачи, систему уравнений (5.29) целесообразно преобразовать следующим образом.

Разделив соотношение (5.29) почленно на πy и продифференцировав по нормали к Ω, можно получить систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода для определения функции $\gamma(x)$ или $\gamma(s)$

$$\gamma(s) + \frac{1}{2\pi}\int\int_{\Omega} \frac{\gamma(\omega)\cos\theta_1 \cos\left(\widehat{n, R}\right) d\omega}{R^2} = \left(1 - \frac{Q_0}{\pi y^2}\right)\cos\left(\widehat{\tau, x}\right), \tag{5.31}$$

где $(\widehat{n, R})$ — угол между нормалью и отрезком R в фиксированной точке меридионального сечения; $Q_0 = 0$ для точек составного контура и $Q_0 = \pi y_0^2$ — для точек поверхности трубы; $(\widehat{\tau, x})$ — угол между касательной к контуру меридионального сечения трубы или составного тела и осью x в фиксированной точке указанного сечения.

Сравнивая уравнения (5.4) и (5.29), легко видеть, что $A = (\psi - \text{const})/r$, а принимая во внимание соотношение (5.10), можно заключить, что ядро интегрального уравнения для случая течения в трубе компонуется точно так же, как в случае неограниченного потока, из выражений (5.14) и (5.15).

Если для решения обратной задачи использовать уравнения (4.7)—(4.10), то по формуле (5.31) можно определить функцию

$v_1(s)$, поскольку в силу замкнутости составного тела она равна $\gamma(s)$. Если же необходимо знать скорости на стенках трубы, то нужно суммировать касательные скорости, обусловленные невозмущенным набегающим потоком и индукцией вихревых колец, расположенных на стенках трубы и составном теле, учитывая при этом наличие скачка касательной скорости, равного γ.

Если для решения обратной задачи использовать какое-либо точное интегральное уравнение, то, как показывает практика расчетов, удобная форма уравнения может быть получена также из соотношения (5.29). Поделив его почленно на πy, приняв $Q_0 = 0$ и продифференцировав по касательной к Ω только в точках, лежащих на границе каверны, можно получить

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_{\Omega}\frac{\gamma(\omega)\cos\Theta_1\cos\widehat{(\tau, R)}\,d\omega}{R^2}+\cos\widehat{(n, x)}=0, \qquad (5.32)$$

где $\widehat{(\tau, R)}$ — угол между касательной и отрезком R в фиксированной точке меридионального сечения границы каверны; $\widehat{(n, x)}$ — угол между нормалью и осью x в этой точке. Так как интеграл (5.32) совпадает с интегралом (5.8), его ядро вычисляется так же, как и для случая неограниченного потока.

В заключение следует отметить, что как схемы решения кавитационной задачи, так и рекомендации по практическим расчетам здесь полностью совпадают с рассмотренными в § 31 применительно к условиям кавитационного обтекания тел безграничным потоком *.

ГЛАВА VI

МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОЙ КАВИТАЦИИ И РАЗВИТЫЕ КАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Результаты расчетов кавитационных течений с использованием модели идеальной кавитации [11] во многих случаях удовлетворительно согласуются с опытными данными для таких тел, как конус, диск, клин и т. п. Даже в тех случаях, когда наблюдается сильное влияние обратной струйки, образующейся в хвосте каверны, на саму каверну, что характерно для относительно коротких каверн, теория удовлетворительно описывает осредненное во времени кавитационное течение и может быть

* В приложении в конце книги приведены результаты расчетов кавитационного обтекания тел безграничным потоком и в трубах.

использована для определения формы каверны и гидродинамических сил, приложенных к телу.

Для тел с плавными обводами, распределение давлений на поверхности которых при бескавитационном обтекании изображается плавными кривыми, без резких пиков, могут иметь место существенные отклонения от данных расчетов, полученных с использованием модели идеальной кавитации. Наиболее отчетливо эти отклонения проявляются в двух случаях — при

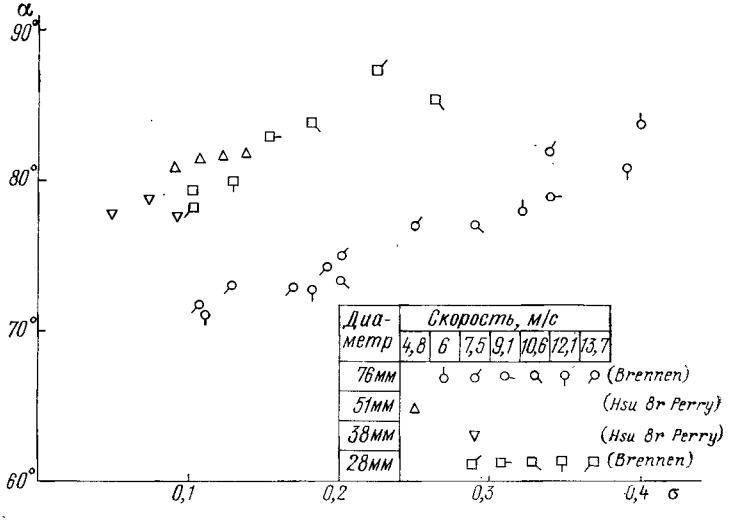


Рис. 104. Экспериментальные данные для шара

определении положения точек отрыва каверны от тела и предсказания значений чисел кавитации, при которых возникает развитое кавитационное течение.

Для иллюстрации сказанного, на рис. 104 приведены экспериментальные данные, собранные Бренненом [64]. Здесь даны зависимости от числа кавитации значений углов, отсчитываемых в меридиональном сечении шара от его передней критической точки, которыми определяются точки отрыва каверны. Размеры моделей шара и скорости, при которых производились испытания, приведены на этом же рисунке. Как видно, в каждой серии опытов наблюдается определенная закономерность в зависимости положения точки отрыва от числа кавитации. Однако все экспериментальные данные лежат значительно выше теоретических значений углов, определяемых исходя из условия Бриллюэна—Вилля. Согласно расчетам эти углы равны: для $\sigma = 0$, $\alpha = 55°$, для $\sigma = 0{,}3$, $\alpha = 60°$.

Что касается предсказания значений чисел кавитации, при которых возникает режим развитого кавитационного течения,

то здесь также известно большое количество экспериментальных фактов, свидетельствующих о существенной разнице между теорией и экспериментом. Если на поверхности тел в отсутствии кавитации нет отрыва пограничного слоя, то развитая форма кавитации и возникает, и исчезает при значениях чисел кавитации, существенно меньших теоретических. Часто в диапазоне чисел кавитации, при которых теоретически должна иметь место развитая форма кавитации (т. е. существует решение задачи идеальной кавитации), вместо нее возникает пузырьковая кавитация.

Другой, широко распространенный случай несоответствия между теорией и опытом, заключается в появлении сильных, ярко выраженных нестационарных движений кавитационной зоны в целом. Один из таких примеров приведен в § 6 при описании кавитации профилей крыльев, когда длина каверны становится соизмеримой с хордой. Очевидно, что в числе основных причин, указанных выше отклонений реальной картины кавитации от той, которая получена на основании использования модели идеальной кавитации, может быть названо пренебрежение реальными свойствами жидкости — вязкостью и капиллярностью. Естественно, что при сопоставлении расчетных данных с экспериментальными должны приниматься во внимание еще и степень устойчивости кавитационного течения по отношению к возмущениям в потоке, которые в действительности всегда имеют место, а также схематизация течения в хвосте каверны, вследствие которой реальное нестационарное течение заменяется стационарным. Анализ двух последних фактов позволяет выявить режимы, при которых имеют место сугубо нестационарные кавитационные течения в условиях, когда параметры набегающего потока неизменны во времени. В настоящей главе будет последовательно рассмотрено влияние перечисленных выше факторов на развитые кавитационные течения, что позволяет объяснить большинство отклонений реальной картины кавитационного течения от теоретической.

§ 33. Влияние вязкости на течение в окрестности точек отрыва каверны от тела

Влияние вязкости на развитое кавитационное течение в общих чертах рассмотрено в § 10. На первый взгляд представляется наиболее значительным ее воздействие на положение точек отрыва каверны от тела, и тем самым на кавитационное течение в целом.

Если отвлечься от рассмотрения влияния капиллярности и других факторов на течение вблизи точки отрыва каверны, а также принять во внимание свойство пограничного слоя передавать практически без искажения давление с его границы на границу течения (твердую или жидкую), то можно полагать,

что влияние вязкости проявляется, главным образом, в изменении давления в окрестности этой точки. Изменение давления может быть вызвано двумя причинами — эжекцией содержимого каверны струей жидкости, ограничивающей каверну, и наличием пограничного слоя на теле, который далее сносится на границу каверны.

Первая причина может вызвать заметное изменение давления в каверне вблизи точки отрыва в случаях искусственной кавитации, когда абсолютная величина давления в каверне может быть значительной вследствие подачи газа. Но ведь несовпадение между экспериментальными и теоретическими значениями координат точек отрыва наблюдается и тогда, когда каверна заполнена парами жидкости с абсолютным давлением порядка 1000 Н/м². Очевидно, что в этом случае уменьшение за счет эжекции давления в каверне даже до нуля не приведет к заметному изменению параметров кавитационного течения, так как изменение величины числа кавитации — основного параметра, определяющего кавитационное течение в целом и в деталях, будет при этом незначительным.

Вторая причина изменения давления в окрестности точки отрыва каверны — отклонение реальных линий тока от идеальных вследствие образования пограничного слоя на теле. Как показали расчеты, выполненные для шара при значениях диаметра и скорости потока, характерных для условий испытания в кавитационных и гидродинамических трубах, изменение давления в окрестности точки отрыва оказалось незначительным, порядка $1/\sqrt{\mathrm{Re}}$. Новые значения координат точек отрыва, вычисленные с использованием условия Бриллюэна—Вилля для исправленного на влияние вязкости распределения давлений, оказались близки к координатам, вычисленным для течения невязкой жидкости. Здесь следует отметить, что распределение давлений на внешней границе пограничного слоя определялось в присутствии каверны, кривизна которой в точке отрыва приравнивалась кривизне меридионального сечения шара, чтобы обеспечить течение без отрыва пограничного слоя.

Таким образом, приведенные выше соображения свидетельствуют в пользу того, что при отсутствии отрыва пограничного слоя вязкость сама по себе не может оказать существенного влияния на течение вблизи точек отрыва каверны от тела.

§ 34. Влияние капиллярности на течение в окрестности точек отрыва каверны от тела

Влияние капиллярности при кавитационном обтекании тел проявляется двояким образом. Во-первых, вследствие возникновения сил поверхностного натяжения на границе каверны, направленных в сторону вогнутости границы. Во-вторых, вслед-

ствие появления сил в точках отрыва каверны на границе раздела трех фаз — жидкости, поверхности тела и содержимого каверны, обусловленных краевым углом. Величина последнего зависит только от физических свойств жидкости, парогазовой смеси, заполняющей каверну, и материала поверхности тела и не зависит от параметров потока. Он равен углу между касательными к поверхности тела и границе жидкой среды в месте контакта поверхности и границы. В зависимости от указанных физических свойств его величина колеблется в пределах $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$.

Влияние капиллярности на течение вблизи точек отрыва каверны рассматривалось Л. А. Эпштейном [60] и О. М. Киселевым [37], а также Аккербергом [62].

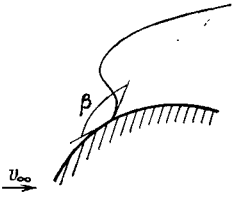


Рис. 105. Форма границы каверны вблизи точки отрыва от тела

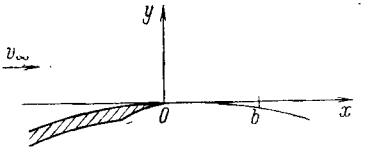


Рис. 106. Схема кавитационного обтекания острой кромки

О. М. Киселевым рассмотрены условия равновесия давлений, приложенных к границе каверны вблизи точки отрыва, с учетом краевого угла. Поскольку угол между касательными к границе каверны и поверхности тела в точках отрыва каверны равен краевому, то делается вывод, что для $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ в точках отрыва обращается в нуль скорость потока, т. е. в этих точках давление равно сумме статического давления и скоростного напора невозмущенного потока. Поэтому давление на границе каверны в точке отрыва должно определяться соотношением $p_к = \gamma_1 \varkappa + p_0$, где γ_1 — коэффициент поверхностного натяжения; $\varkappa$ — кривизна границы каверны в окрестности точки отрыва; p_0 — величина полного давления в точке отрыва каверны от тела. Поскольку $p_к$ мало по сравнению с p_0, делается дальнейший вывод о том, что в окрестности точек отрыва каверны от тела поверхность каверны должна быть выпуклой в сторону каверны (рис. 105). Оставляя в стороне вопрос о возможности построения такой границы каверны в рамках модели идеальной жидкости, но обладающей капиллярными свойствами, отметим, что вследствие большого положительного градиента давлений впереди головной части такого типа каверны неизбежен отрыв пограничного слоя. В упоминавшихся в гл. I опытах Аракери [63] отрыв пограничного слоя впереди головной части каверны был четко зарегистрирован. Из всего изложенного следует, что

в модели течения, близкой к реальной, должны быть учтены два фактора — разрыв касательной при переходе с поверхности тела на границу каверны и отрыв пограничного слоя в окрестности головной части каверны, обусловленные наличием краевого угла.

Интересно отметить, что если даже пренебречь влиянием краевого угла на течение в окрестности точки отрыва каверны, то и в этом случае при учете сил поверхностного натяжения жидкости невозможно построить каверну с непрерывной касательной при переходе с поверхности тела на границу каверны.

На рис. 106 приведена схема обтекания жидкостью острой кромки препятствия. Для упрощения исследования формы границы каверны вблизи точки отрыва угол между осью x и вектором скорости невозмущенного потока принят малым (ось x направлена по касательной к контуру продольного сечения тела в точке отрыва каверны), течение считается плоским. Справа от оси y изображен кусок пробной границы каверны, которая гладко сопрягается с контуром продольного сечения тела таким образом, что в точке сопряжения соблюдается равенство производных всех порядков пробной каверны и контура тела. Этим обеспечивается гладкость функции, соответствующей распределению скоростей на пробной границе каверны в окрестности ее сопряжения с контуром сечения тела, которая может быть аппроксимирована степенным рядом, конечным или бесконечным.

Построение истинной формы каверны вблизи точки отрыва можно выполнить путем малых деформаций пробной границы каверны на участке $0 \leqslant x \leqslant b$, где значение b выбирается таким, чтобы сохранить предпосылки линейной теории. При этом существенно, что вызванные деформацией остальной части пробной границы каверны скорости в окрестности точки сопряжения ее с контуром сечения тела, в силу оговоренных выше условий, которым она должна удовлетворять, будут соответствовать аппроксимации в виде степенного ряда, конечного или бесконечного. Предполагая вызванные скорости в окрестности точки сопряжения пробной границы каверны с контуром сечения тела малыми по сравнению с v_∞, можно записать

$$p_\infty - \rho v_\infty (u_1 + u_2 + u_3) + \gamma_1 y'' = p_k, \qquad (6.1)$$

где u_1, u_2, u_3 — скорости, вызванные в точках пробной границы каверны деформациями пробной границы на участке $0 \leqslant x \leqslant b$, скорости, вызванные деформациями остальной части пробной границы, и скорости, вызванные обтеканием составного контура невозмущенным плоскопараллельным потоком, соответственно; y'' в принятой системе координат равен кривизне границы каверны $\varkappa$.

Уравнение (6.1) составлено исходя из условия равенства давлений на границе каверны по обе ее стороны.

В силу линейности задачи гидродинамическое давление представлено в виде суммы трех составляющих, обусловленных названными выше составляющими скоростей. Влияние силы тяжести в равенстве (6.1) не учтено.

Вследствие малости деформаций пробной границы каверны для их определения на участке $0 \leqslant x \leqslant b$ можно использовать положения линейной теории (см. гл. III). Тогда после несложных преобразований уравнение (6.1) можно представить в следующем виде

$$\gamma_1 y'' = -\sigma + f(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{\eta'(\xi)\, d\xi}{x - \xi}, \qquad (6.2)$$

где $f(x)$ — функция, выражающая сумму $u_2 + u_3$, которая вблизи $x = 0$ может быть представлена в виде степенного ряда. Все величины, входящие в формулу (6.2), безразмерны, но за ними сохранены обозначения, ранее принимавшиеся для величин размерных.

При $\gamma_1 = 0$ уравнение (6.2) совпадает по форме с ранее рассматривавшимся уравнением обратной задачи (4.1) для определения деформации пробной границы каверны. Решение (4.1) дает для кривизны каверны вблизи точки отрыва значения, обращающиеся в бесконечность, поэтому оно для описания формы каверны вблизи точки отрыва непригодно.

Из рассмотрения правой части уравнения (6.2) видно, что вблизи $x = 0$ в состав функции $y''(x)$ должны входить по крайней мере члены степенного ряда. Определяя из этого ряда путем интегрирования функцию y' и подставляя ее в правую часть равенства (6.2), в результате прямых вычислений интеграла нетрудно убедиться, что здесь наряду с членами степенного ряда появляются члены, содержащие произведения целых степеней x на $\ln x$, которые не могут быть компенсированы соответствующим подбором вида функции $y''(x)$. Таким образом, напрашивается вывод о невозможности построения решения уравнения (6.2), соответствующего границе каверны, имеющей непрерывную касательную при переходе с границы на контур продольного сечения тела.

В связи с исследованием решения (6.2) следует отметить, что это уравнение принадлежит к иному классу, чем уравнение, основанное на модели, не учитывающей капиллярности, и отличается от последнего наличием члена со старшей производной. Последнее обстоятельство дает повод к сомнениям в законности поисков асимптотического решения задачи путем разложения по малому параметру γ_1, как это сделано в работе [62], являющемуся коэффициентом при указанной старшей производной.

Приведенный выше анализ течения вблизи точек отрыва каверны от гладкого контура и с острых кромок приводит к мысли

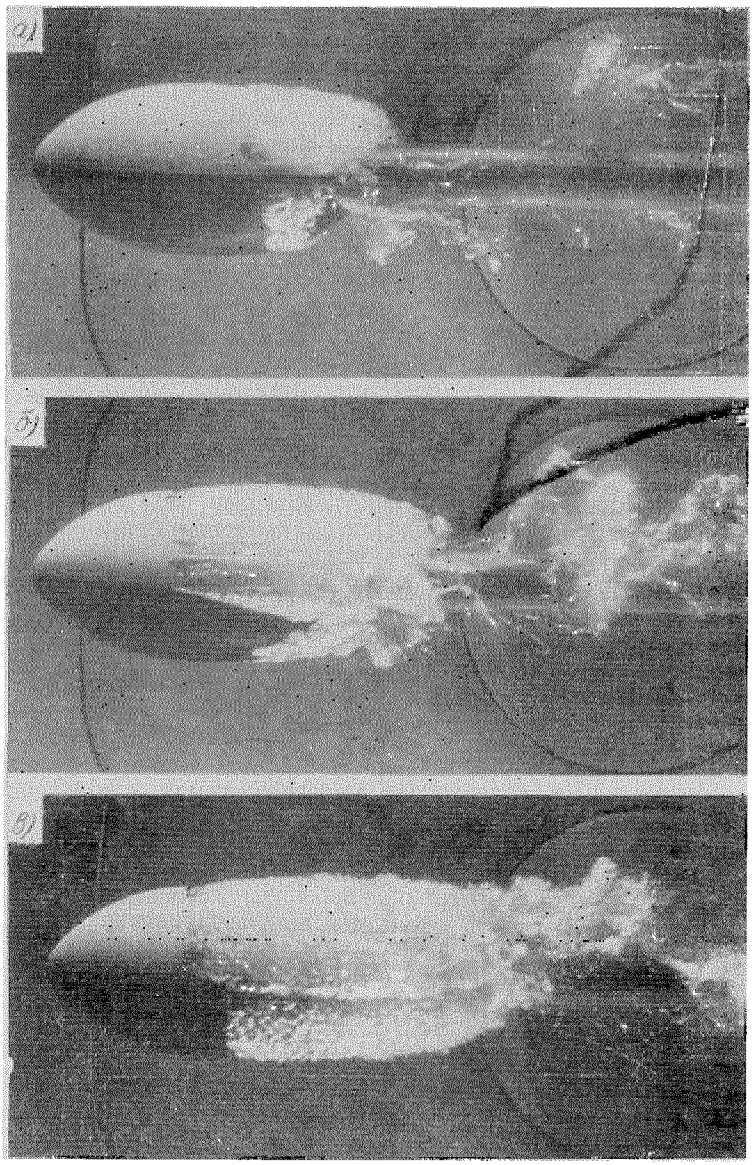


Рис. 107. Кавитационное обтекание эллипсоида вращения: *а* — v_∞ =10 м/с, σ=0,269; *б* — v_∞ =10 м/с, σ=0,245; *в* — v_∞ =10 м/с, σ=0,223

о том, что в реальных течениях гладкого отрыва не существует вообще вследствие влияния капиллярных свойств жидкости. Поскольку согласно опытам Аракери [63] зона совместного влияния вязкого отрыва и капиллярности мала, отмеченное обстоятельство на общей картине кавитационного обтекания таких тел, как конус, клин с большими значениями углов при вершине и т. п. практически не скажется. На телах же с гладкими обводами и на телах с неглубокими уступами и т. п. это влияние может проявиться в сильной степени и даже стать определяющим при анализе условий существования развитого кавитационного течения.

Существенное влияние капиллярности было подтверждено прямыми опытами в гидродинамической трубе (опыты выполнялись С. А. Леняшиным). На рис. 107, *а*, *б*, *в* приведены фотографии каверн, образующихся при обтекании эллипсоида вращения в режиме развитой кавитации для трех значений числа кавитации, равных 0,269, 0,245 и 0,223.

Эллипсоид состоял из двух половин — металлической и фторопластовой, соединенных между собою в диаметральной плоскости. На рисунке более светлая половина соответствует фторопласту. Специальными опытами было установлено, что металлическая часть была практически идеально смачиваемой (краевой угол $\beta \simeq 0°$), а на фторопластовой половине краевой угол равнялся $\beta \simeq \pi/2$. Это существенным образом повлияло на положение точек отрыва каверны с обеих половин эллипсоида, что ясно видно на рисунке, из которого можно сделать также вывод о том, что впереди каверны может существовать область на поверхности эллипсоида, где давление ниже, чем в каверне, поскольку точки ее отрыва находятся вниз по течению от миделя эллипсоида.

§ 35. О совместном влиянии капиллярности и вязкости на течение вблизи точек отрыва каверны от тела

Приведенные выше соображения о невозможности построения границы каверны с непрерывной касательной в точке ее отрыва от тела, а также опытные данные позволяют считать, что течение в окрестности упомянутой точки определяется при всех прочих равных условиях, совместным влиянием капиллярности и вязкости жидкости. Указанные соображения в одинаковой степени относятся к течениям при всех значениях краевого угла β, включая $\beta = \pi$. Однако в последнем случае следует допустить непрерывность касательной и скачкообразное изменение кривизны контура продольного сечения тела и каверны при переходе с поверхности тела на границу каверны. При этом кривизна должна скачкообразно уменьшаться, как, например, у тела, образованного сочленением полусферы с цилиндром, в окрестности линии сочленения. Здесь на сфере кривизна имеет

постоянное отрицательное значение и при переходе на цилиндрическую поверхность скачком изменяется до нуля. Это приводит к возникновению очень больших (теоретически бесконечно больших) положительных градиентов давления, обусловливающих отрыв пограничного слоя и образование кольцевого вихря в окрестности линии сочленения полусферы с цилиндром (см. § 5). Аналогичная картина вязкого отрыва может иметь место в окрестности точек отрыва каверны от тела при кавитационном обтекании абсолютно несмачиваемого тела ($\beta = \pi$).

Приведенные выше данные о совместном влиянии капиллярности и вязкости жидкости дают возможность построить приближенную модель течения в окрестности точек отрыва каверны

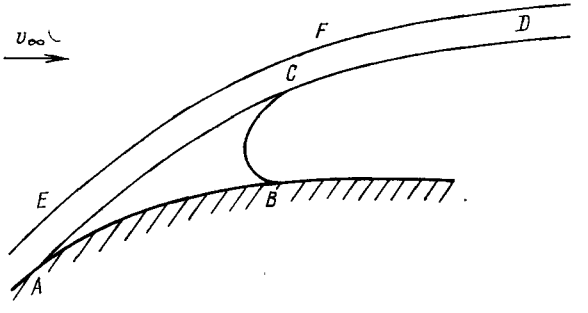


Рис. 108. Схема течения в окрестности точки отрыва каверны от тела

от тела с учетом реальных свойств жидкости и поверхности тела.

На рис. 108 схематически изображена указанная модель для случая $\beta < \pi/2$. Сечение поверхности твердого тела здесь изображено утолщенной линией со штриховкой. В точке B граница каверны примыкает к поверхности тела, образуя мениск BC, кривизна которого плавно уменьшается на линии CD вниз по потоку. Впереди головной части каверны имеется зона вязкого отрыва, сечение которой представляет собою криволинейный треугольник ABC. На некотором расстоянии от линии ACD течение можно считать потенциальным (линия EF). Очевидно, что форма и размеры зоны вязкого отрыва ABC зависят как от формы головной части каверны BCD, так и от параметров пограничного слоя вверх по течению от точки A.

Для использования указанной модели в расчетах необходимы дополнительные сведения о форме мениска BC, допущения об условиях равновесия давлений в точке B, характере распределения давлений в зоне вязкого отрыва и т. п. Однако и в такой незавершенной форме указанная модель позволяет сделать ряд качественных выводов о влиянии реальных условий на ка-

витационное обтекание тел, тем более, что эта модель согласуется с опытами Аракери [63].

Ниже рассмотрен один из предельных случаев обтекания абсолютно смачиваемого тела с краевым углом $\beta = 0$. Здесь вследствие возникновения бесконечно большой силы, обусловленной краевым углом и приложенной в точке B к жидкой границе, условия равновесия этой границы в точке B выполнены быть не могут. Остается допустить, что в окрестности точки B имеет место втекание жидкости по поверхности тела из зоны вязкого отрыва внутрь каверны. Этот процесс должен быть, по-видимому, очень медленным, наподобие растекания капли жидкости, помещенной на поверхность металлической пластинки. Поскольку скорость втекания будет пренебрежимо малой по сравнению со скоростью на границе пограничного слоя, то влиянием этого обстоятельства на форму мениска и зоны вязкого отрыва можно пренебречь.

Если далее принять допущение, что давление в зоне вязкого отрыва постоянное, часто используемое в расчетах зон вязкого отрыва жидкости, образующихся при обтекании плохообтекаемых препятствий, то можно определить форму мениска. Поскольку давление в каверне также постоянно, то сечение мениска BC, являющегося головной частью границы каверны, будет иметь постоянную кривизну, т. е. дуга BC будет дугой окружности. Радиус ее пропорционален величине разности давлений в каверне и зоне вязкого отрыва. Начиная от точки C вниз по потоку радиус кривизны границы каверны CD будет постепенно увеличиваться.

Поскольку силы, приложенные к границе каверны, обусловленные капиллярностью жидкости, направлены внутрь каверны (см. рис. 108), то давление в зоне вязкого отрыва должно быть ниже, чем давление внутри каверны. Следовательно, принцип Бриллюэна, согласно которому давление достигает минимума внутри каверны, используемый в идеализированной модели кавитации для определения положения точек отрыва каверны в случае обтекания тел с плавными обводами, в общем случае опытом не подтверждается. Как следует из сказанного выше, вследствие влияния капиллярности и вязкости в действительности минимум давления достигается в точках, расположенных на поверхности тела вверх по потоку от точки отрыва каверны. Следовательно, точка отрыва реальной каверны должна лежать всегда ниже по потоку от точки, определяемой исходя из идеализированной модели, что и наблюдается в опытах. Кстати, наличие впереди каверны пониженных давлений по сравнению с давлением в каверне неоднократно фиксировалось в опытах.

Согласно идеализированной модели развитое кавитационное течение при обтекании тел с плавными обводами будет существовать при всех значениях чисел кавитации, меньших

минимальной величины коэффициента давления на теле, взятого с обратным знаком

$$\sigma \leqslant -\bar{p}_{\min}; \quad \bar{p}_{\min} = \frac{p_{\min} - p_\infty}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}}.$$

При этом возникновению кавитации соответствует число кавитации, равное $-\bar{p}_{\min}$. В дайствительности же развитое кавитационное течение возникает при меньших значениях числа кавитации. Указанному экспериментальному факту можно найти качественное объяснение на основании рассмотрения приведенной выше модели кавитационного течения в головной части каверны.

Как было сказано выше, для равновесного существования мениска в головной части каверны абсолютно смачиваемого тела давление в окрестности мениска должно быть меньше давления в каверне. Разность этих давлений обратно пропорциональна радиусу кривизны мениска. Считая его величину при всех прочих одинаковых условиях пропорциональной максимальной толщине каверны, для оценки разности давлений в потоке в окрестности головной части каверны и непосредственно в каверне можно написать

$$\Delta p \sim -\frac{2\gamma_1}{h_{\max}}, \tag{6.3}$$

где $h_{\max}$ — максимальная толщина некоторой каверны предельно малой величины.

Поделив обе части выражения (6.3) на $\rho v_\infty^2/2$, можно найти оценку для поправки к «идеальному» пороговому числу кавитации, равному $-\bar{p}_{\min}$, которую следует вводить при определении числа кавитации, при котором возникает каверна в реальных условиях

$$\Delta\sigma \sim -\frac{4\gamma_1}{h_{\max}\rho v_\infty^2}. \tag{6.4}$$

Число кавитации, при котором возникает развитая форма кавитации, определяется суммой $-C_{p\,\min}+\Delta\sigma$. Оценка (6.4) дает только качественный характер зависимости $\Delta\sigma$ от числа кавитации и показывает лишь тенденции изменения $\Delta\sigma$ с изменением $h_{\max}$ и v_∞.

Из рассмотрения правой части формулы (6.4) можно сделать следующие выводы о возникновении развитой формы кавитации при обтекании тел, когда в бескавитационном режиме отсутствует отрыв пограничного слоя:

— развитая форма кавитации возникает всегда при меньших значениях числа кавитации, чем это предсказывают по модели идеальной кавитации;

— если считать, что для геометрически подобных тел толщина каверны пропорциональна линейному размеру тела, то с увеличением последнего поправка к значению «идеального» числа кавитации, соответствующего ее возникновению, уменьшается;

— указанная поправка уменьшается также с ростом скорости потока, обтекающего тело;

— в реальных условиях величины v_∞ и $\Delta\sigma$ конечны, следовательно, на теле с плавными обводами может возникнуть каверна только с конечной толщиной и длиной, и чем больше скорость набегающего потока и размеры тела, тем будут меньше относительные размеры возникшей каверны;

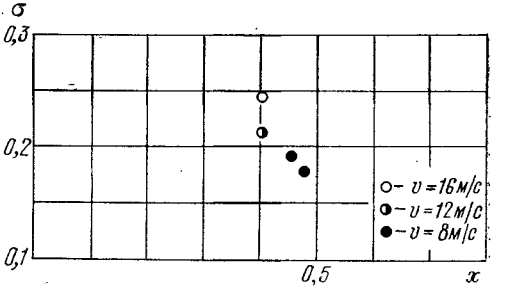


Рис. 109. Результаты опытов (профиль «Геттинген 411»)

— поскольку правая часть выражения (6.4) имеет отрицательный знак, то при режимах, предшествующих развитой кавитации, всегда имеются условия для возникновения пузырьковой формы кавитации, если в набегающем потоке находится достаточное количество крупных ядер кавитации.

Перечисленные выше выводы находятся в качественном согласии с наблюдениями развития кавитации при экспериментальных исследованиях.

На рис. 109 приведены результаты опытов, проведенных А. О. Эллером в гидродинамической трубе, снабженной ресорбером. Вследствие наличия ресорбера и сравнительно малого воздухосодержания в набегающем потоке были исключены условия для возникновения пузырьковой кавитации на испытуемом профиле «Геттинген 411». На нем при определенных числах кавитации возникала развитая форма кавитации. На рисунке по оси ординат нанесены значения чисел кавитации, соответствующих возникновению развитой формы кавитации, а по оси абсцисс — расстояния от носика профиля точек отрыва каверны, выраженные в долях хорды профиля. Профиль был установлен под нулевым углом атаки. Скорости потока в рабочем участке трубы имели значения 16, 12 и 8 м/с. Расчетное значение минимальной величины коэффициента разрежения составляло $C_{p\,\min} = -0{,}4$. Таким образом, согласно опытным данным, приведенным на рис. 109, поправка $\Delta\sigma$ к «идеальному» пороговому значению числа кавитации уменьшается с ростом скорости набегающего потока и составляет для $v_\infty = 8$, 12 и 16 м/с соответственно —0,21, —0,19 и —0,15. В этом случае при всех скоростях потока возникшая каверна, соответствующая пороговым

значениям числа кавитации, оказывалась сравнительно длинной (замыкалась в районе задней кромки профиля). Пороговые характеристики кавитации, полученные путем наблюдения процесса исчезновения кавитации при увеличении статического давления в рабочем участке гидродинамической трубы, не отличаются от приведенных выше в пределах точности опытов.

Следует отметить, что при производстве подобных опытов в обычных кавитационных трубах, не имеющих ресорберов, ввиду наличия значительного количества ядер кавитации достаточно больших размеров, развитой форме кавитации будет предшествовать пузырьковая. Пузырьки будут маскировать процесс возникновения развитой формы кавитации. При этом создается впечатление постепенного перехода пузырьковой формы в развитую путем увеличения количества пузырьков вблизи поверхности тела по мере понижения числа кавитации.

Оценки (6.3) и (6.4) получены для абсолютно смачиваемых тел с краевым углом $\beta = 0$. Очевидно, что при конечных значениях краевого угла в указанные оценки нужно внести соответствующие коррективы.

На рис. 110 приведены полученные С. А. Леняшиным фотографии развитых кавитационных течений, образующихся при обтекании двух эллипсоидов вращения при одном и том же числе кавитации $\sigma = 0{,}28$ и одинаковой скорости набегающего потока $v_\infty = 9{,}8$ м/с. На верхнем снимке изображен эллипсоид вращения, изготовленный из металла, на нижнем — из фторопласта. В первом случае краевой угол приблизительно равен нулю, а во втором близок $\pi/2$. Фотографии свидетельствуют о существенном влиянии степени смачиваемости поверхности тела не только на положение точек отрыва каверны, что уже отмечалось выше, но и на кавитационное течение в целом. В связи с этим возникает вопрос о том влиянии, которое оказывает отличие формы головной части реальной каверны от идеализированной на кавитационное течение в целом, а также о влиянии, которое оказывает на течение положение точек отрыва каверны само по себе.

С этой целью описанным в гл. V методом были произведены расчеты формы каверны с использованием модели течения, согласно которой в точке отрыва каверны касательные к контуру сечения тела и каверны совпадают. Однако при этом положение точек отрыва каверны считалось таким, каким оно было зафиксировано в опытах (см. рис. 110). Естественно, что в этих точках условие Бриллюэна—Вилля не выполнялось, и кривизна границы каверны оказывалась бесконечно большой. Результаты расчетов сведены в табл. 2, где приведены также данные расчетов, полученные с использованием условия Бриллюэна—Вилля. Расчеты выполнены применительно к условиям течения в трубе реальной конструкции, в которой производились испытания эллипсоидов. В первом столбце таблицы даны значения

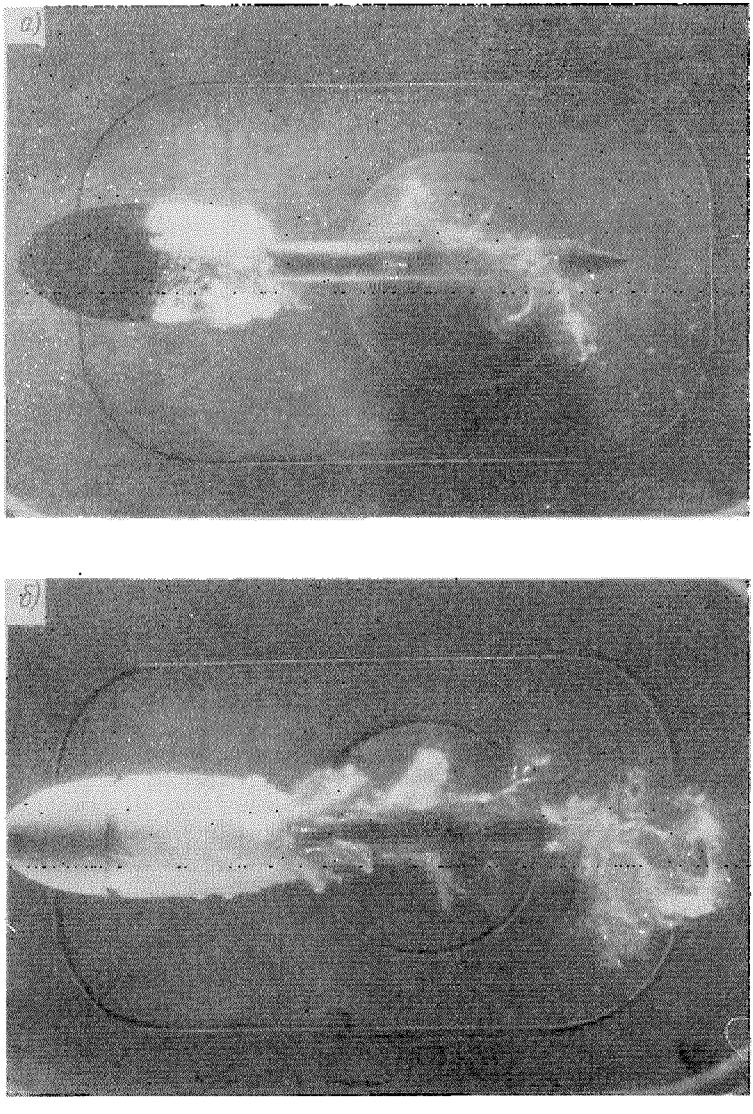


Рис. 110. Каверна при обтекании эллипсоидов вращения

Таблица 2

Экспериментальные и расчетные значения абсцисс точек отрыва и замыкания каверны

σ	Бриллюэн — Вилль		Металл			Фторопласт		
	$x_{от}$	$x_{зам}$	$x_{от}$	$x_{зам}$	$x_{зам}$	$x_{от}$	$x_{зам}$	$x_{зам}$
			эксперимент		расчет	эксперимент		расчет
0,2	—0,55	3,9	—0,1	2,2	2,2	—0,25	3,2	3,2
0,24	—0,52	2,5	0	1,7	1,8	—0,15	2,1	2,2
0.275	—0,5	1,90	0,1	1,35	1,45	—0,1	1,65	1,7
0,31	—0,48	1,6	0,16	1,05	1,25	—0,05	1,3	1,4

чисел кавитации, в двух последующих столбцах — значения абсцисс точек отрыва и замыкания каверны, вычисленные с использованием условия Бриллюэна—Вилля. Значение абсцисс указанных точек отсчитывается от плоскости симметрии эллипсоида вдоль оси его симметрии; длина большой полуоси эллипсоида принята равной единице. Отрицательные значения координат соответствуют точкам, расположенным вверх по потоку от его миделя, а положительные — вниз по потоку. В четвертом и пятом столбцах таблицы приведены соответственно значения измеренных в опытах абсцисс точек отрыва и замыкания каверны на металлическом эллипсоиде, а в шестом столбце — расчетные значения абсцисс точек замыкания каверны с использованием экспериментальных значений абсцисс точек отрыва. Аналогичные данные для эллипсоида, изготовленного из фторопласта, приведены в седьмом, восьмом и девятом столбцах. При расчетах использована схема замыкания каверны на диск.

Приведенные в таблице значения абсцисс точек отрыва и замыкания каверны характеризуют размеры каверны в продольном направлении (ее длину). Эта характеристика каверны более чувствительна к изменению величины числа кавитации, нежели, например ширина каверны, поэтому сопоставление данных расчета и эксперимента в этом случае дает более объективную информацию о соответствии теории и опыта, чем сравнение результатов теории и эксперимента по другим параметрам кавитационного течения.

Из рассмотрения данных, приведенных в таблице, можно сделать следующие выводы:

— абсциссы точек отрыва каверны от поверхности эллипсоида, определенные исходя из условия Бриллюэна—Вилля, лежат существенно выше вверх по потоку, чем определенные в опытах, с увеличением краевого угла β от нуля до $\pi/2$ различие между результатами расчета и опыта уменьшается;

— расчетные значения абсцисс точек замыкания каверны, вычисленные с использованием значений абсцисс точек отрыва, полученных в эксперименте, удовлетворительно согласуются с измеренными.

Последний вывод дает основание полагать, что использование в расчетной практике модели идеальной кавитации приемлемо, если только возможно каким-либо способом определить положение точек отрыва каверны с учетом реальных условий. При этом детали течения в головной части каверны, обусловленные влиянием капиллярности и вязкости, будут сказываться сравнительно мало на течении в целом. Что же касается их влияния на положение точек отрыва каверны, то они будут иметь решающее значение.

§ 36. Об условиях существования различных форм кавитации

Модель идеальной кавитации не оставляет места для возникновения других форм кавитации, кроме развитой. Действительно, принцип Бриллюэна о минимуме давления в каверне исключает возможность возникновения пузырьковой формы кавитации, а допущение о стационарности течения в хвосте каверны — возможность возникновения форм кавитации с ярко выраженной нестационарностью границ каверны.

В результате анализа влияния реальных свойств жидкости на положение точек отрыва каверны от тела, данного в § 35, а также анализа характера решения задачи о развитой кавитации с использованием модели идеальной кавитации представляется возможным дать качественное объяснение большинству явлений кавитации, наблюдаемых в лабораторных условиях и в натуре, не укладывающихся в рамки определения развитой формы кавитации. В ряде случаев удается дать также количественные оценки, связанные с определением условий перехода одной формы кавитации в другую.

При обтекании тел с плавным распределением давлений по поверхности в отсутствие отрывов пограничного слоя часто наблюдается пузырьковая кавитация, предшествующая развитой ее форме. Пузырьковая кавитация возникает, как правило, при обтекании тел в гидродинамических и кавитационных трубах, не имеющих ресорберов, с помощью которых растворяются наиболее крупные пузырьки газа, находящиеся в потоке. Вследствие этого в потоке могут присутствовать в значительном количестве ядра кавитации достаточно крупных размеров, которые, попадая в зоны пониженных давлений, приводят к возникновению пузырьковой кавитации. Основные предпосылки появления пузырьковой кавитации в этих условиях — отсутствие развитой формы кавитации, а также достаточная протяженность зоны пониженных давлений на теле, чтобы попавшие туда ядра

кавитации могли взрывоподобно вырасти до видимых глазом размеров.

Из оценок, приведенных в предыдущем параграфе, ясно, что вследствие влияния капиллярности и вязкости возникновение развитой формы кавитации затягивается. Она не возникнет до тех пор, пока число кавитации не понизится до величины $-C_{p\,\min}+\Delta\sigma$. Таким образом, величина диапазона изменения чисел кавитации, при которых существуют условия для возникно-

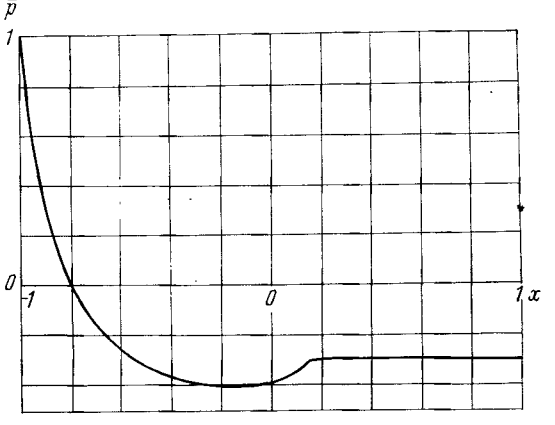


Рис. 111. Зависимость $\bar{p}(x)$ для эллипсоида вращения

вения пузырьковой формы кавитации, может быть оценена неравенством

$$-\bar{p}_{\min} > \sigma > (-\bar{p}_{\min}+\Delta\sigma). \qquad (6.5)$$

В этом диапазоне минимальная величина давления в точках поверхности тела будет, как правило, меньше давления насыщенных паров жидкости и даже принимать отрицательные значения.

Верхнее предельное (пороговое) значение числа кавитации во многих случаях отличается от $-\bar{p}_{\min}$. Оно в существенной степени зависит от размеров ядер кавитации, попадающих в зону пониженного давления, и от времени их пребывания там. Указанное значение может быть оценено расчетным путем, например по методике, изложенной в работе [43].

Что касается нижнего предельного значения числа кавитации, при котором пузырьковая форма кавитации подавляется вследствие появления развитой формы, то оно может быть гораздо ниже, чем это дает оценка (6.5). Здесь следует учитывать возможность совместного существования обеих форм кавитации.

На рис. 111 приведена расчетная зависимость изменения коэффициента давления вдоль образующей эллипсоида для числа

кавитации $\sigma = 0{,}3$. При расчете положение точек отрыва и замыкания каверны бралось из опыта. При этом расчетное значение числа кавитации оказалось близким к экспериментальному. Из приведенной зависимости $\bar{p}(x)$ видно, что впереди головной части каверны имеется значительная по протяженности и по величине зона пониженных давлений, которая может служить причиной появления пузырьковой кавитации впереди каверны, соответствующей развитой форме кавитации. По мере углубления кавитации при снижении числа кавитации точка отрыва каверны от тела смещается вверх по потоку, а протяженность зоны пониженных давлений уменьшается. При некотором значении числа кавитации она становится настолько узкой, что пузырьковая кавитация возникнуть не может, и тогда наблюдается исключительно развитая форма кавитации.

При наличии в набегающем потоке большого количества крупных ядер кавитации впереди головной части развитого кавитационного течения образуется большое количество кавитационных пузырьков, сносимых вниз по потоку, которые могут затруднить наблюдение развитой кавитации. В этих условиях обнаружение последней и определение формы каверны оказывается затруднительным.

Неравенство (6.5) и оценка (6.4) дают качественную зависимость диапазона изменения величины числа кавитации, в котором может существовать пузырьковая кавитация. Как следует из этих зависимостей, с ростом размеров тела и скорости набегающего потока указанный диапазон уменьшается. Этот факт свидетельствует о том, что данные лабораторных опытов, проводимых при меньших скоростях и меньших размерах моделей, чем это имеет место в натуре, приводит к преувеличению роли пузырьковой кавитации, если указанные данные перенесены непосредственно на натуру путем простого пересчета по числу кавитации. В связи с этим при моделировании явления кавитации для получения результатов, близких к натурным, представляется целесообразным изготовлять модели из материалов, обладающих меньшей смачиваемостью поверхности. У таких моделей развитая форма кавитации будет возникать раньше, а точки отрыва каверны будут смещены дальше вверх по потоку, чем у моделей, изготовленных из металла. Это в конечном счете приведет к сужению диапазона изменения чисел кавитации, при которых существуют условия возникновения пузырьковой формы кавитации.

Другой важный пример качественного несоответствия решения кавитационной задачи с использованием модели идеальной кавитации и результатов наблюдений связан с сильными колебаниями границы каверны, приводящими к их разрушению. Можно выделить три обстоятельства, обусловливающие разрушение границ каверны.

1. Сильное возмущающее действие обратной струйки, образующейся в хвостовой части каверны. Это характерно для таких тел, как цилиндр, шар, конус, крыло при большом угле атаки и т. п. при режимах обтекания, соответствующих сравнительно высоким значениям числа кавитации, когда образуется относительно короткая каверна, а обратная струйка оказывается весьма мощной. Она ударяется о тыльную сторону обтекаемого препятствия и границу каверны, и разрушает последнюю. Механизм указанного типа разрушения ясен, но методы определения границ его существования по числам кавитации и другим параметрам, определяющим кавитационное течение, пока не известны.

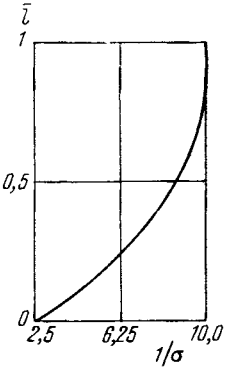


Рис. 112. Зависимость $\bar{l}(1/\sigma)$ для тела вращения

2. Малая устойчивость каверны в целом, обусловливающая ее разрушение даже при сравнительно слабом возмущающем воздействии обратной струйки и набегающего потока. Это может иметь место и при обтекании сравнительно тонких тел и крыльев при малых углах атаки.

Прямое исследование устойчивости кавитационного течения затруднительно. Однако косвенным способом путем анализа характера решения кавитационной задачи можно получить не только качественные выводы об устойчивости кавитационного течения, но и с достаточно удовлетворительным приближением указать условия, при которых можно ожидать разрушения каверны.

Для иллюстрации сказанного на рис. 112 приведена зависимость для тела вращения длины каверны $\bar{l}$, отнесенной к длине тела, от параметра, обратного величине числа кавитации. При сравнительно малых значениях этого параметра (больших значениях числа кавитации) длина каверны плавно нарастает с уменьшением числа кавитации, а, начиная с некоторого значения, стремительно растет таким образом, что производная функции $\bar{l}(1/\sigma)$ по переменной $1/\sigma$ становится очень большой. Для данного случая (см. рис. 112) при $1/\sigma = 10$ она обращается даже в бесконечность. В окрестности $1/\sigma = 10$ малым изменениям (возмущениям) числа кавитации соответствуют очень большие изменения длины каверны. В эксперименте создать каверну с длиной близкой $\bar{l} = 1$ оказывается практически невозможным. Вследствие возмущений в потоке, имеющихся всегда в реальных условиях, хвостовая часть каверны сильно колеблется, что приводит к периодическим разрушениям границ каверны на всем ее протяжении от хвоста до точек отрыва от

тела. Такое неустойчивое течение наблюдается не только строго при $1/\sigma = 10$, а в некотором диапазоне изменения чисел кавитации, где производная функции $\overline{l}(1/\sigma)$ велика.

Другой характерный случай разрушения каверны связан не только с большой величиной указанной производной, но и с появлением разрывов (неоднозначности) в решении задачи о развитом кавитационном течении. На это, по-видимому, одним из первых обратил внимание Гюрст [67]. На рис. 113 представлена для плоской пластинки расчетная зависимость изменения относительной длины каверны от параметра α/σ, где α — угол атаки пластинки. При значении α/σ близком к 0,095 производная функции $\overline{l}(\alpha/\sigma)$ обращается в бесконечность. При $\alpha/\sigma < 0{,}095$ решение неоднозначно, а при увеличении значения α/σ от 0,095 функция $\overline{l}(\alpha/\sigma)$ увеличивается скачком. Такая сложная зависимость $\overline{l}(\alpha/\sigma)$ обусловлена обратным влиянием каверны на подъемную силу, возникающую на пластинке. Верхние ветви кривой для $\alpha/\sigma < 0{,}095$ в эксперименте получить не удается, что, повидимому, обусловлено неустойчивостью кавитационного течения, соответствующего этим ветвям. При значениях же α/σ близких к 0,095 наблюдается также неустойчивое течение, с сильными колебаниями границ каверны и периодическими их разрушениями.

3. В ряде случаев в задаче об установившихся развитых кавитационных течениях появляются решения, которые не имеют физического смысла. Это обусловлено заменой реального нестационарного течения в хвосте каверны установившимся. При режимах (числах кавитации), соответствующих указанным решениям, в опытах наблюдаются сугубо нестационарные кавитационные течения.

Упомянутые особые решения были обнаружены К. В. Александровым при производстве расчетов кавитационного обтекания некоторых профилей крыльев в районе входящей кромки. На рис. 114 изображено несколько контуров сечений каверн, соответствующих нескольким значениям чисел кавитации. Контур носовой части профиля изображен утолщенной линией и отмечен штриховкой. Границы каверны обозначены цифрами *1*—*5*. Соответствующие им значения числа кавитации убывают по мере возрастания цифры.

Каверна *1* замыкается на профиле с образованием обратной струйки, интенсивность которой можно характеризовать высотой основания клина, принятого здесь в обобщенной схеме Рябушинского в качестве фиктивного тела, на которое замыкается граница каверны.

По мере снижения числа кавитации каверна удлиняется, а интенсивность обратной струйки снижается. Каверна *2* соответствует некоторой предельной каверне, замыкающейся без

образования обратной струйки, так как хвостовая часть каверны имеет общую касательную с контуром профиля в точке замыкания. Более длинные каверны, например каверна *3*, пересекают контур профиля. При некоторой длине (некотором значении числа кавитации) каверна вновь будет касаться профиля в точке замыкания. При дальнейшем снижении числа кавитации будут возникать более длинные каверны, вновь замыкающиеся на профиле с образованием обратной струйки.

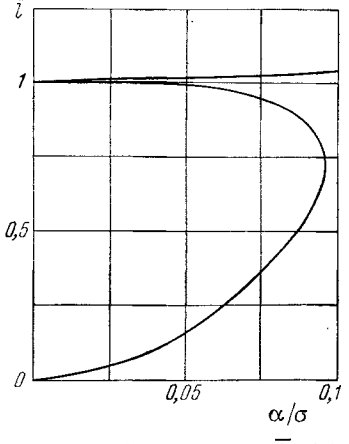


Рис. 113. Зависимость $\bar{l}(\alpha/\sigma)$ для плоской пластинки

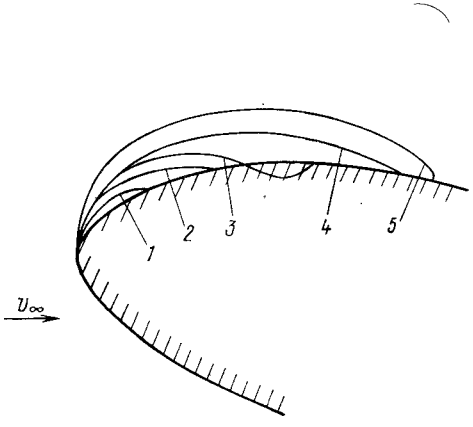


Рис. 114. Контуры сечения каверн в районе входящей кромки профиля

Таким образом, в некотором диапазоне изменения длины каверн или же чисел кавитации, существуют решения, которые отличаются от других решений тем, что границы каверн пересекают контур профиля. В принципе, такие установившиеся течения можно было бы получить и в опытах. Для этого следовало бы удалить часть профиля, которая отсекается рассчитанным контуром каверны. Естественно, что без такой операции подобные установившиеся кавитационные течения существовать не могут. Вместе с тем, при указанных значениях чисел кавитации на некавитирующем профиле имеют место пониженные давления, достаточные для появления разрывов сплошности в потоке жидкости и возникновения кавитации. Это и обусловливает возникновение каверн, отличающихся сильными нестационарными движениями их границ.

В дополнение любопытно отметить, что, как показывают опыты, при приближении к режимам, соответствующим касанию границей каверны поверхности профиля в точках ее замыкания, интенсивность обратной струйки в хвосте каверны уменьшается, а течение стабилизируется. Когда же длина каверны будет соответствовать каверне *2* (см. рис. 114), то течение на границе каверны становится настолько спокойным, а сама граница на-

столько прозрачной, что ее затруднительно наблюдать, так как через поверхность границы отчетливо без искажений видна поверхность профиля.

Кавитационные течения в двух последних случаях являются, по существу, нестационарными развитыми кавитационными течениями, которые по принятой здесь терминологии можно отнести к двум разновидностям кавитации смешанной формы. Еще к одной разновидности кавитации смешанной формы можно отнести кавитацию в потоке, в зонах сильных вязких отрывов потока от поверхности плохо обтекаемых тел.

Ввиду нестационарности течений в этих случаях, на обтекаемое тело действуют значительной величины нестационарные гидродинамические силы, могущие привести к сильным вибрациям соответствующих конструкций и другим нежелательным явлениям. Поэтому в практике проектирования кавитирующих конструкций судов следует по возможности избегать возникновения указанных выше режимов.

Суммируя все приведенное выше, можно отметить, что возникновение кавитации пузырьковой формы на телах с плавными обводами обусловлено влиянием на развитые кавитационные течения капиллярных и вязких свойств жидкости, а возникновение нестационарных кавитационных течений смешанной формы обусловлено сильным возмущающим действием обратной струйки, слабой устойчивостью в целом каверны развитой формы, наличием сильно развитых зон отрыва пограничного слоя. Смешанная форма кавитации возникает также тогда, когда при некоторых значениях числа кавитации на поверхности тела появляются пониженные давления достаточной величины, чтобы вызвать разрыв сплошности жидкости (кавитацию). Однако при этом установившееся развитое кавитационное течение существовать не может в принципе. Последнее можно установить теоретически по отсутствию имеющих физический смысл решений соответствующей задачи о развитой кавитации.

ГЛАВА VII

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Далее рассмотрен ряд задач о кавитационном течении жидкости, имеющих отношение к вопросам снижения гидродинамического сопротивления судов путем образования на их смоченных частях кавитационных каверн, а также определения обтекания вентилируемых стоек, пересекающих свободную поверхность жидкости.

При обтекании препятствия потоком воды с большими скоростями образуется каверна, наполненная водяным паром и газами, которые выделяются из воды. Если, например, на плоскую пластину поместить некоторое препятствие в виде клина, то за ним образуется каверна, абсолютное давление в которой составит несколько сотен миллиметров водяного столба, а плотность содержимого каверны будет очень мала. При переходе через границу каверны из жидкости внутрь каверны давление изменяется непрерывно, а плотность — скачком, достигая плотности паров воды. Таким образом, с помощью каверны, образующейся за клином, можно изолировать часть поверхности пластины от контакта с водой и тем самым на этой части во много раз снизить сопротивление трения.

При скоростях, характерных для судов, кавитация за препятствиями не возникает, однако ее можно вызвать искусственно, подавая к тыльной стороне препятствия газ, например воздух. Таким образом, на поверхности судна можно создать искусственную кавитацию (см. § 12). Для ее теоретического описания весьма существенен учет влияния силы тяжести жидкости. Приведенные ниже результаты базируются на публикациях А. А. Бутузова [13, 14, 29], а в части обтекания системы клиньев — А. О. Эллера [56, 57].

§ 37. Плоская задача об обтекании криволинейного препятствия, расположенного на нижней стороне плоской горизонтальной пластинки

На рис. 115 схематически изображена картина кавитационного обтекания препятствия с криволинейной образующей, расположенного на нижней стороне плоской бесконечной пластинки. Для моделирования течения в хвосте каверны используется обобщенная схема Рябушинского [14]. Основной и замыкающий контуры на рисунке изображены утолщенными линиями, а контур границы каверны — тонкой. Оси x, ξ направлены вдоль пластинки, а оси y, η — перпендикулярно ей. Начало координат совмещено с задней кромкой препятствия.

Жидкость считают идеальной, несжимаемой, а течение безвихревым, установившимся. Для этого случая давление в произвольной точке течения может быть определено по теореме Бернулли

$$p=\frac{\rho v_\infty^2}{2}+p_\infty-\frac{\rho v^2}{2}+\rho g y, \qquad (7.1)$$

где p — статическое давление в произвольной точке потока; p_∞ — давление в невозмущенном потоке на линии $y=0$; v — скорость потока в точке, в которой определяется давление; g — ускорение свободного падения; y — ордината точки, в которой определяется давление.

Давление в каверне, включая ее границу, принимается равным $p_к$. Приравнивая правую часть выражения (7.1) $p_к$, после очевидных преобразований с учетом формулы (1.1), можно получить соотношение, связывающее число кавитации со скоростью на границе каверны и ординатами точек границы каверны

$$\sigma = -\frac{2y_1}{\mathrm{Fr}^2 b} + \left(\frac{v_к}{v_\infty^2}\right)^2 - 1, \tag{7.2}$$

где y_1 — ордината произвольной точки границы каверны; $\mathrm{Fr} = v_\infty/\sqrt{gb}$; b — величина проекции основного контура на ось x; $v_к$ — скорость в точках границы каверны.

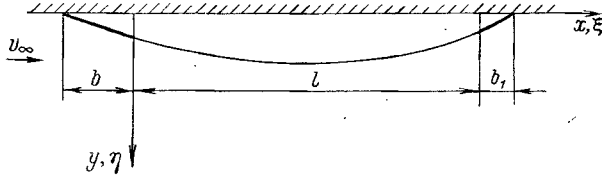


Рис. 115. Схема кавитационного обтекания препятствия, расположенного на нижней стороне плоской пластинки

Скорость $v_к$ однозначно связана с формой основного и замыкающего контуров и формой границы каверны. Если найти эту связь и соответствующее ей соотношение подставить в формулу (7.2), то можно получить другое соотношение, позволяющее при заданном значении σ определить ординаты границы каверны y_1.

В вопросах снижения гидродинамического сопротивления практический интерес представляют тонкие каверны, т. е. такие каверны, касательные к контуру продольного сечения которых имеют малый угол наклона к оси x. Полагая также тонкими обтекаемое препятствие и замыкающий контур, при рассмотрении течения можно использовать допущения линеаризованной теории (см. § 17), согласно которой обтекание препятствия и каверны приближенно заменяется обтеканием слоя источников, расположенного на стенке в интервале $-b \leqslant x \leqslant l + b_1$. При этом

$$q(x) = 2v_\infty y', \tag{7.3}$$

где y — ордината точек границы каверны, а также основного и замыкающего контуров; y' — производная по x от $y(x)$. Согласно линеаризованной теории скорости возмущения в точках границы течения могут быть выражены формулой

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{l+b_1} \frac{q(\xi)\,d\xi}{\xi - x}, \tag{7.4}$$

где u — значение скоростей возмущения в точках границы течения. Линеаризованное же соотношение (7.2) можно записать в виде

$$\frac{\sigma}{2} = -\frac{y_1}{\mathrm{Fr}^2 b} + \frac{u_к}{v_\infty}, \tag{7.5}$$

где $u_к$ — значение скоростей возмущения (7.4) в точках границы каверны.

Принимая во внимание уравнения (7.3) и (7.4), вместо (7.5) можно написать окончательное уравнение для определения формы границы каверны

$$\frac{y_1(x)}{\mathrm{Fr}^2 b} + \frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\eta_1'(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = -\frac{\sigma}{2} + F(x), \tag{7.6}$$

где

$$F(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{0} \frac{\eta_0'(\xi)\,d\xi}{\xi - x} - \frac{1}{\pi}\int_l^{l+b_1} \frac{\eta_2'(\xi)\,d\xi}{\xi - x};$$

η_0 — значения текущих ординат точек основного контура; η_2 — соответствующие ординаты замыкающего контура. Уравнение (7.6) содержит неизвестный параметр l. Кроме того для получения плавного сопряжения границы каверны с замыкающим контуром последний нельзя фиксировать заранее. Задавая его, необходимо предусмотреть возможность изменения одного какого-либо параметра, величину которого следует определять в ходе решения задачи. В качестве такого параметра может быть, например, взят угол наклона касательной к замыкающему контуру в точке сопряжения его с границей каверны. Вообще же говоря, допустим весьма свободный выбор указанного параметра, о чем свидетельствует значительное число схем кавитационных течений (см. гл. IV).

Таким образом, для решения задачи необходимо составить еще два соотношения для определения указанных выше параметров. Одно из них можно получить, используя условие замкнутости контура, составленного из границ каверны, основного и замыкающего контуров

$$\int_{-b}^{l+b_1} y'(x)\,dx = 0. \tag{7.7}$$

Второе соотношение можно составить, используя равенство наклона касательных к границе каверны и замыкающего контура в точке их сопряжения

$$\frac{dy}{dx} = \beta \quad \text{при } x = l, \tag{7.8}$$

где β — искомый параметр, равный углу наклона к оси x касательной к замыкающему контуру в точке его сопряжения с гра-

ницей каверны. После расчета формы границы каверны легко вычислить по формуле (7.4) скорости возмущения в точках контура препятствия, а также давления по линеаризованной формуле Бернулли

$$p - p_\infty = -\rho v_\infty u - \rho g y_0, \tag{7.9}$$

где y_0 — значения ординат точек основного контура.

Проекция равнодействующей давлений (7.9) на ось x, а также давлений, действующих со стороны каверны на насадок, будет равна силе гидродинамического сопротивления, приложенной к препятствию и обусловленной кавитацией.

Таким образом, задача построения каверны, расположенной на нижней стороне бесконечной пластинки, с учетом силы тяжести жидкости сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (7.6) совместно с соотношениями типа (7.7) и (7.8).

Уравнение (7.6) легко обобщить на тот случай, если вблизи каверны расположен дополнительный источник возмущений, которым может быть, например, какое-либо тело или же гидродинамическая особенность (источник, вихрь, диполь). В случае гидродинамической особенности необходимо лишь функцию $F(x)$ дополнить другой функцией, соответствующей закону изменения касательных скоростей, вызванных особенностью, в точках стенки $0 \leqslant x \leqslant l$. При наличии вблизи каверны тела, его обтекание удобно заменить обтеканием гидродинамических особенностей. Тогда вместо соотношения (7.6) легко составить систему интегро-дифференциальных уравнений, в которой будет учтено обратное влияние кавитационного течения на обтекание тела.

Полагая в равенстве (7.6) $\eta_0' = 0$, $\sigma = 0$ и добавляя в $F(x)$ функцию, характеризующую величину касательных скоростей в точках оси x, обусловленных особенностью, легко получить интегро-дифференциальное уравнение для случая, когда в отсутствие особенности свободная поверхность горизонтальна. Соответствующая схема течения изображена на рис. 116. При решении задачи для этой схемы течения параметр σ становится известным ($\sigma = 0$), поэтому для обеспечения разрешимости задачи следует ввести другой параметр, подлежащий определению. В качестве такового удобно ввести параметр h, приведенный на рис. 116.

Если начало координат в данной схеме течения поместить в середину интервала $0 \leqslant x \leqslant l$, а его концы удалить в бесконечность, то интегро-дифференциальное уравнение (7.6) можно привести к виду

$$\frac{g y_1}{v_\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_1'(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = F(x), \tag{7.10}$$

где $F(x)$ — значения касательных скоростей, вызванных особенностью в точках невозмущенной свободной поверхности, отнесенные к v_∞.

При $F(x) = 0$ уравнение (7.9) имеет два решения. Одно из них тривиальное $y_1 = 0$. Другое соответствует свободным волнам, что легко проверить путем подстановки в соотношение (7.9) выражения

$$y_1 = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

где λ — длина волны.

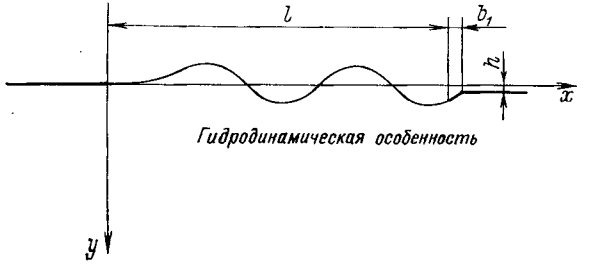


Рис. 116. Схема обтекания гидродинамической особенности, расположенной вблизи свободной поверхности жидкости

В этом случае условие (7.9) удовлетворяется только при соблюдении известного соотношения между длиной и скоростью распространения прогрессивных волн на свободной поверхности воды $v_\infty = \sqrt{g\lambda/2\pi}$.

§ 38. Результаты расчетов плоского кавитационного обтекания прямощекого клина, расположенного на нижней стороне бесконечной пластинки

Основные физические закономерности развития каверны за препятствием, помещенным на нижней стороне бесконечной горизонтальной пластинки, легко проследить на простейшем примере обтекания прямощекого клина, подробно обследованном в работе [13], в которой уравнение (7.6) решено численным методом. Используя в качестве замыкающего тела также прямощекий клин и относя все линейные размеры к длине каверны l, уравнение (7.6) можно представить в виде

$$\frac{y_1(x)}{\mathrm{Fr}_1^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\eta_1'(\xi)\, d\xi}{\xi - x} + \frac{\sigma}{2} + \frac{\beta}{\pi} \ln \frac{1-x}{1+\bar{b}_1 - x} = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\bar{b}+x}{x}, \qquad (7.11)$$

где $\mathrm{Fr}_1^2 = v_\infty^2/gl$; β, α — соответственно, углы наклона щеки замыкающего (фиктивного) и основного клина к оси x; $\bar{b} = b/l$; $\bar{b}_1 = b_1/l$. При этом в точке сопряжения границы каверны с основным клином должно быть

$$\eta_1'(0) = \alpha; \quad \eta_1(0) = \alpha\bar{b}, \tag{7.12}$$

а условия (7.7) и (7.8) приводят, соответственно, к равенствам

$$\eta_1(1) = \beta\bar{b}_1; \quad \eta_1'(1) = -\beta. \tag{7.13}$$

При численном решении уравнения (7.11) оказалось удобным задавать длину каверны, а число кавитации σ и угол β считать искомыми параметрами. В работе [13] показано, что удовлетворительная точность расчетов достигается в результате разбиения интервала интегрирования в формуле (7.11) на 20—40 участков, в которых функция $\eta_1(x)$ аппроксимируется кусками парабол второй степени, гладко сопрягаемыми друг с другом. Удовлетворение условию (7.11) в точках, соответствующих серединам участков, с учетом равенств (7.12) и (7.13) приводит к системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов аппроксимации и параметров σ и β. При этом параметр Fr_1 задается.

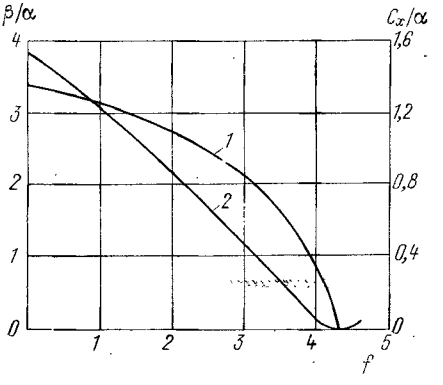


Рис. 117. Зависимости от параметра f величин β/α и C_x/α

На рис. 117 приведены расчетные зависимости от параметра $f = 1/\mathrm{Fr}_1^2$ величин β/α (кривая *1*) и C_x/α (кривая *2*). Величина β/α при фиксированном α пропорциональна углу фиктивного клина, а

$$C_x = \frac{2X}{\rho v_\infty^2 b\alpha},$$

где X — величина кавитационного сопротивления, приложенного к клину. Приведенные зависимости соответствуют $\bar{b} = 0{,}2$, $\bar{b}_1 = 0{,}1$. Для других значений $\bar{b}$ и $\bar{b}_1$ зависимости имеют аналогичный характер. Интересно, что при некотором значении f в нуль одновременно обращаются величины β/α и C_x/α. Это означает, что при данном значении f граница каверны касается в хвостовой части стенки. При этом кавитационное сопротивление

клина обращается в нуль. Значение f в работе [14] предложено назвать предельным. Ему соответствуют предельные значения других параметров, как например максимальной толщины каверны, числа кавитации и т. п.

Предельные значения Fr_{1*}, $\delta_* = y_{1\,max}$, σ_* параметров каверны для различных значений $\overline{b}$

$\overline{b}$	1,6	0,8	0,4	0,2
Fr_{1*}	0,590	0,556	0,515	0,480
δ_*/α	1,62	0,87	0,54	0,44
$-\sigma_*/\alpha$	3,7	2,15	1,54	1,46
$\overline{b}$	0,1	0,05	0,025	0,0125
Fr_{1*}	0,455	0,441	0,434	0,430
δ_*/α	0,50	0,67	0,95	1,39
$-\sigma_*/\alpha$	1,81	2,59	3,85	5,67

Следовательно, предельное число Фруда, построенное по длине каверны, слабо зависит от относительной длины клина. Для двух

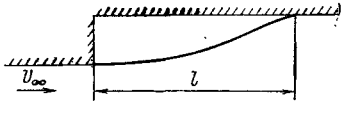


Рис. 118. Схема каверны за уступом

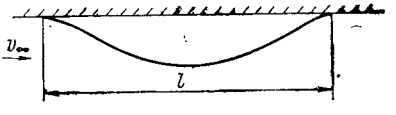


Рис. 119. Схема каверны за бесконечно малым клином

предельных случаев, уступа и клина исчезающе малой длины (рис. 118, 119), предельные значения чисел Фруда равны 0,657 и 0,425, соответственно. В последнем случае каверна оказывается симметричной относительно вертикальной оси, проходящей через ее середину, и касается стенки как в хвостовой, так и в передней точке.

Характерно, что предельным кавернам соответствуют отрицательные значения числа кавитации. Следовательно, давление внутри предельной каверны всегда выше статического давления в невозмущенном потоке на уровне стенки.

Для $f > f_*$ величина β/α становится отрицательной, граница каверны пересекает стенку, следовательно, такое течение физически нереально.

Результаты расчетов по приведенной выше методике находятся в удовлетворительном согласии с данными опытов, о чем свидетельствуют кривые, приведенные на рис. 120. Здесь изображены зависимости величин Fr_1 (кривая *1*) и $\delta/\alpha\overline{b}$ (кривая *2*)

от параметра $f_1 = gb/v_\infty^2$. Сплошные линии соответствуют расчетам, а пунктирные эксперименту. Светлые кружки, крестики и зачерненные кружки относятся к различным клиньям, имеющим длину и высоту соответственно 100 и 10, 50 и 6, 25 и 3 мм.

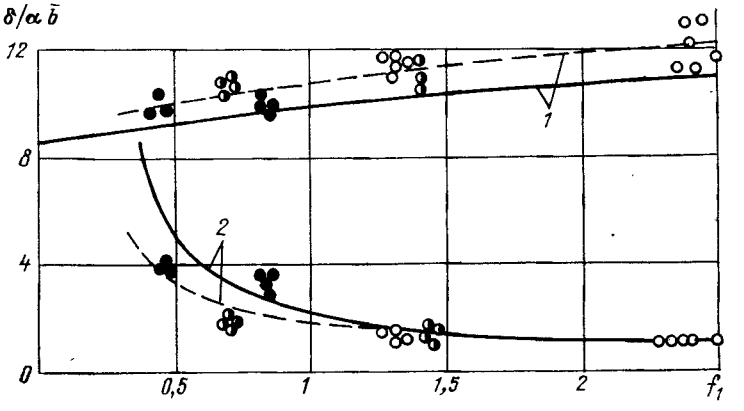


Рис. 120. Зависимости Fr_1 и $\delta/\alpha\bar{b}$ от параметра f_1

При некоторых значениях параметров Fr_1 и σ за клином образуется волновой шлейф (рис. 121). Расчеты в этом случае производятся по тем же формулам, что и выше. Однако здесь

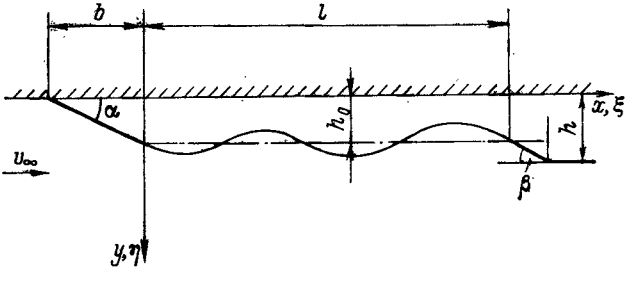


Рис. 121. Схема течения с образованием за препятствием волнового шлейфа

число кавитации можно задавать произвольно, что эквивалентно заданию давления в каверне. Для обеспечения разрешимости задачи вводится дополнительный параметр h (см. рис. 121), вследствие чего первое равенство в системе (7.13) заменяется на выражение $\eta_1(1) = \beta\bar{b}_1 + \bar{h}$, где $\bar{h} = h/l$.

Как показывают результаты расчетов [13], для воспроизведения с необходимой точностью волнового шлейфа бесконечной

протяженности достаточно параметр l выбрать равным двум длинам прогрессивных волн

$$\lambda = \frac{2\pi v_\infty^2}{g}.$$

При прочих равных условиях изменение параметра σ (давление в пространстве между стенкой и контуром волнового шлейфа) приводит к существенному изменению высоты волны a и параметра h_0, характеризующего отстояние от стенки среднего уровня поверхности жидкости. Если $a/h_0 < 0{,}5$, то волновая поверхность стенки не касается. В противном случае волновая поверхность пересекает стенку, что соответствует физически нереальным течениям. При этом для каждого значения числа Фруда, построенного по длине клина, физически реальные течения существуют только в определенном диапазоне изменения числа кавитации $\sigma_2 < \sigma < \sigma_1$.

Граничные значения чисел кавитации, при которых существуют физически реальные течения

f_1	∞	4,58	2,95	1,51	1,26
σ_1/σ_*	1,18	1,27	1,32	1,51	2,1
σ_2/σ_*	7,11	6,80	5,72	3,44	2,1

Здесь, как и прежде, σ_* соответствует предельным значениям числа кавитации, $f_1 = gb/v_\infty^2$, а $f_1 = \infty$ соответствует обтеканию уступа.

Из расчетов также следует, что каверна с волновым шлейфом может существовать только при достаточно больших значениях параметра f_1, наименьшее значение которого определяется последним столбцом в приведенной выше таблице ($f_1 > 1{,}26$), т. е. при достаточно малых скоростях набегающего потока

$$v_\infty < \sqrt{gb/1{,}26}.$$

§ 39. Расчеты и эксперимент

Интересно сделать качественную трактовку результатов расчетов в сопоставлении с экспериментально наблюдаемыми фактами по развитию каверны за клином при подаче воздуха.

Прежде всего следует отметить, что большинство интересных режимов течения, когда сильно проявляются эффекты весомости жидкости, при естественной кавитации воспроизвести невозможно, уже хотя бы потому, что они имеют место при отрицательных значениях чисел кавитации, т. е. тогда, когда давление в каверне будет больше статического в невозмущенном потоке на линии стенки. В этом смысле возможности искусственной кавитации гораздо шире естественной.

В первую очередь следует отметить роль обратной струйки, имеющей место при значениях f меньших предельных ($f<f_*$). Чем меньше длина каверны, тем выше кавитационное сопротивление и интенсивность обратной струйки. Это следует как непосредственно из опытов, так и из общих соображений, вытекающих из теоремы о количестве движения (см. например, работу [23]). В расчетах с использованием обобщенной схемы Рябушинского это выражается в том, что по мере уменьшения длины каверны увеличивается угол фиктивного клина, а тем самым и величина проекции фиктивного клина на ось y. Таким образом, величина угла β может служить относительной мерой интенсивности обратной струйки.

Величина угла β непосредственно связана с величиной кавитационного сопротивления, а последнее — с интенсивностью обратной струйки. Таким образом, нетрудно, пользуясь, например формулой связи между кавитационным сопротивлением и параметрами обратной струйки, приведенной в [23], перейти в каждом конкретном случае к связи между углом β и интенсивностью обратной струйки. Знание же закономерностей развития обратной струйки может служить для качественного суждения о количестве газа, необходимого для поддержания того или иного режима кавитации, поскольку при $f<f_*$ газ из каверны в основном выбрасывается в области обратной струйки. Чем больше ее интенсивность, тем быстрее выход воздуха из каверны, значит тем больше его нужно подавать в каверну для поддержания заданного режима кавитации.

Как следует из расчетов, для значений $f<f_*$ по мере уменьшения длины каверны при фиксированной скорости потока увеличивается угол β, а число кавитации σ растет. Следовательно, с ростом числа кавитации увеличивается интенсивность обратной струйки, повышается расход газа, необходимого для поддержания заданного режима кавитации, определяемого величиной σ и l. Возвращаясь (см. § 12) к трактовке устойчивых и неустойчивых режимов искусственной кавитации, можно констатировать, что при $f<f_*$ имеют место неустойчивые режимы, так как закон изменения расхода газа от числа кавитации будет соответствовать участку кривой (см. рис. 29), заключенному между точками *1* и *2*. В опытах действительно трудно, не прибегая к специальным мероприятиям, обеспечить режимы кавитационного течения, когда f значительно меньше f_*. При этом течение в хвосте каверны имеет сугубо нестационарный характер.

Для режимов течения, когда f близок к f_* (предельная каверна), течение в хвосте каверны приобретает спокойный характер. Расходы газа для поддержания каверны оказываются весьма малыми. Если принять меры по уменьшению внешних возмущений в потоке, то предельная каверна будет существовать длительное время вообще без поступления газа. При

наличии же несильных возмущений расходы газа оказываются так же небольшими, и требуются лишь для компенсации обусловленного этими возмущениями выхода газа вследствие нарушения упорядоченного течения в хвосте каверны.

Вообще же предельную каверну легко поддерживать, так как изменение расходов газа в весьма широких пределах (в несколько десятков раз) мало меняет картину течения. При значительных расходах лишний газ стравливается с боков каверны, где образуются две узкие дорожки, уходящие вниз по течению, В средней же части положение линии замыкания хвоста каверны и ее форма слабо зависят от величины расхода газа.

Сравнительно большие расходы газа требуются при выходе на режим предельной каверны при фиксированной скорости потока, так как приходится проходить режимы с сильно развитой обратной струйкой, обусловливающей большой вынос газа из каверны. Если же на заданный режим, соответствующий при всех прочих равных условиях некоторой определенной скорости набегающего потока, выходить постепенно, начиная от очень малых скоростей, то потребные для этого расходы газа можно многократно сократить.

Специальными опытами [13] была подтверждена теоретическая оценка значения параметра $f_1 = 1{,}26$, при дальнейшем уменьшении которого не могут существовать каверны с волновым шлейфом. Согласно опытам значение этого параметра заключено в пределах $0{,}8 < f_1 < 1{,}4$, что удовлетворительно согласуется с теорией.

§ 40. Задача о плоском обтекании бесконечной системы прямощеких клиньев, расположенных на нижней стороне плоской пластинки

Ниже рассмотрена плоская задача об обтекании бесконечной системы прямощеких клиньев, расположенных на нижней стороне плоской бесконечной пластины в тех же допущениях, что и задача об обтекании одиночного клина, рассмотренная в § 37. На рис. 122 дана схема обтекания трех клиньев из бесконечной системы и принятая система координат. Расстояния между всеми смежными клиньями приняты постоянными, равными L.

Интегральное уравнение для определения формы границы каверны, расположенной в системе каверн, может быть получено точно таким же путем, что и для одиночной каверны (см. § 37). При этом линеаризованное соотношение (7.5), связывающее скорость на границе каверны и ординаты точек границы каверны, остается без изменений. Формула для определения скоростей возмущения в точках границы каверны будет отличаться от уравнения (7.4) только множителем при $q(\xi)$ и мно-

жителем перед интегралом, что обусловлено взаимным влиянием каверн

$$u = -\frac{1}{2L}\int_{-b}^{l+b_1} q(\xi)\operatorname{ctg}\frac{\pi(\xi-x)}{L}\,d\xi. \qquad (7.14)$$

Из равенства (7.3) легко определить значения интенсивности

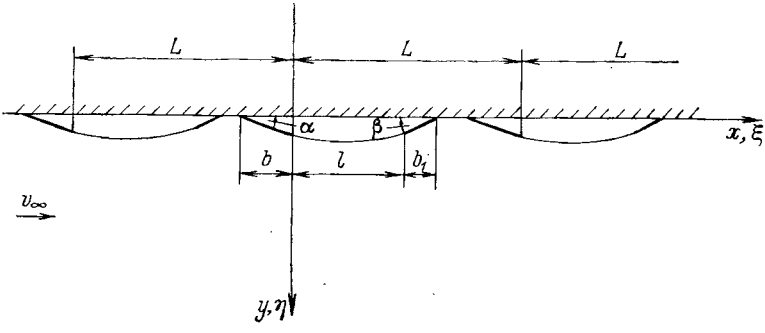


Рис. 122. Схема кавитационного обтекания системы клиньев

источников, заменяющих обтекание основного и фиктивного клиньев

$$q = 2v_\infty\alpha; \quad -b \leqslant x \leqslant 0; \qquad (7.15)$$

$$q = -2v_\infty\beta; \quad l \leqslant x \leqslant l+b_1. \qquad (7.16)$$

Пользуясь формулами (7.5), (7.14), (7.15) и (7.16), можно составить интегральное уравнение, аналогичное (7.11), для определения формы границы каверны

$$f y_1(x) + \frac{1}{\bar{L}}\int_0^1 \eta_1'(\xi)\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-\xi)}{\bar{L}}\,d\xi + \frac{\sigma}{2} + \frac{\beta}{\pi}\ln\frac{\sin\dfrac{\pi(1-x)}{\bar{L}}}{\sin\dfrac{\pi(1+\bar{b}_1-x)}{\bar{L}}} = \frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{\sin\dfrac{\pi(\bar{b}+x)}{\bar{L}}}{\sin\dfrac{\pi x}{\bar{L}}}, \qquad (7.17)$$

где сохранены обозначения уравнения (7.11), а $\bar{L} = L/l$. При этом, как и ранее (см. § 37), должны выполняться следующие равенства

$$\eta_1'(0) = \alpha; \quad \eta_1(0) = \alpha\bar{b}; \quad \eta_1(1) = \beta\bar{b}_1; \quad \eta_1'(1) = -\beta. \qquad (7.18)$$

Для численного решения (7.17) совместно с (7.18) может быть использована точно такая же схема расчетов, что и данная в § 37.

Ниже на рисунках приведены некоторые результаты расчетов по приведенным выше формулам [56], а также результаты опытов. Все результаты расчетов получены для постоянного значения отношения длины основного клина к длине каверны, равного 0,1, и для постоянной величины отношения длины фиктивного клина к длине основного, равной 0,1. В качестве параметра, характеризующего относительное расстояние между кавернами, взято отношение к шагу расстояния между точками примыкания основного и фиктивного клиньев к пластине l'/L, где $l' = b + l + b_1$.

На рис. 123 построены зависимости отношения углов фиктивного и основного клиньев β/α от параметра f, равного квадрату обратного значения числа Фруда, построенного по длине каверны l. С увеличением параметра f указанное отношение уменьшается и при некоторых значениях этого параметра становится равным нулю. Этим значениям соответствуют предельные каверны, характеризующиеся замыканием хвоста каверны по касательной к пластинке. Из приведенных данных видно, что при сближении каверн (увеличении l'/L) величина предельного значения параметра f несколько возрастает.

На рис. 124 приведены зависимости от параметра f отношения максимального зазора между границей каверны и стенкой η_{max} к произведению αl, для которых характерно наличие экстремумов.

На рис. 125 даны зависимости от f отношения σ/α, для которых также характерно наличие экстремумов.

На рис. 126 приведены зависимости от f отношения C_x/α, характеризующего величину кавитационного сопротивления клина. Как видно из рисунка, при значениях f, меньших предельных, при сближении каверн сопротивление существенно возрастает. Об этом косвенное суждение можно вынести и из результатов, приведенных на рис. 123, показывающих возрастание угла примыкания фиктивного клина к пластинке при сближении каверн.

На рис. 127 сплошной линией изображена расчетная зависимость отношения f_2/f_0 от относительной длины каверны $(b+l)/L$, f_2 соответствует параметру f, определенному для каверны, находящейся в бесконечной системе каверн, а f_0 — для одиночной каверны. Приведенная на рисунке зависимость характеризует изменение длины каверн вследствие влияния относительного расстояния между ними в системе каверн. Из рисунка видно, что влияние сближения каверн на их длину начинает ощущаться только при $(b+l)/L > 0{,}5$.

На рис. 127 кружками изображены также экспериментальные результаты, относящиеся к системе, состоящей из трех

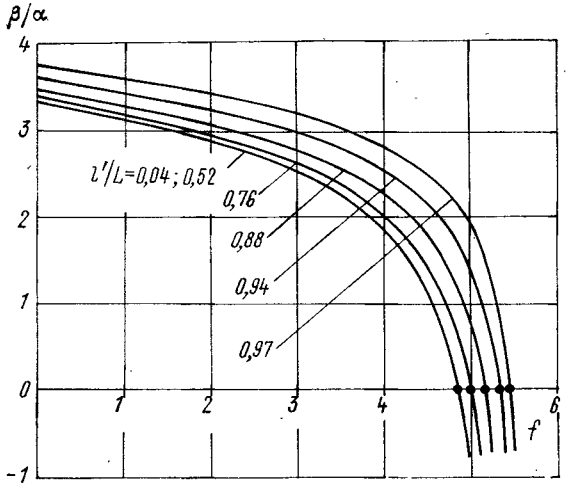


Рис. 123. Зависимость β/α от параметра f

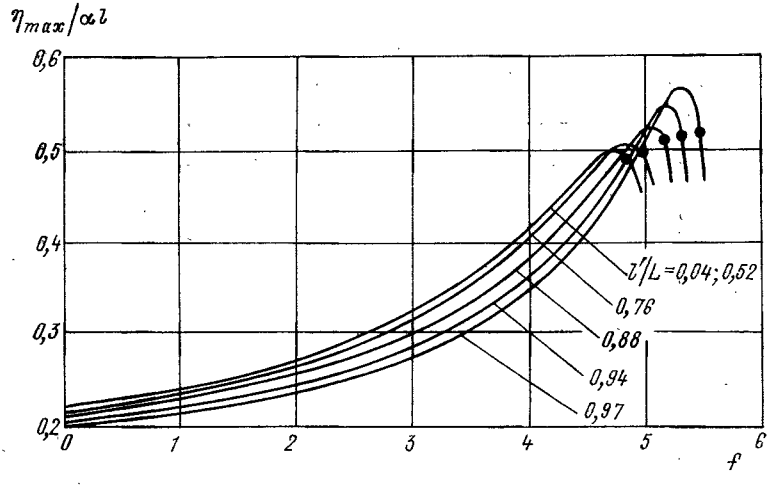


Рис. 124. Зависимость $\eta_{max}/\alpha l$ от параметра f

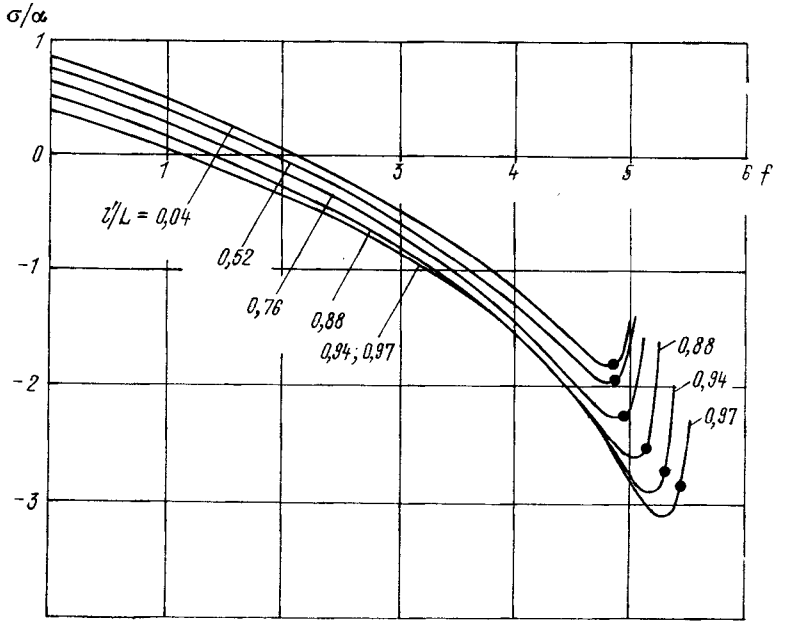


Рис. 125. Зависимость σ/α от параметра f

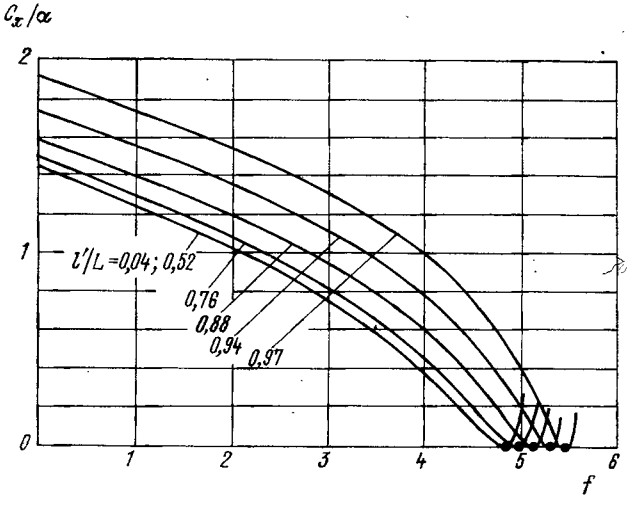


Рис. 126. Зависимость C_x/α от параметра f

расположенных друг за другом каверн. При этом f_2 определено для средней каверны в присутствии двух других, а f_0 — в их отсутствии.

На рис. 128 приведены расчетные и экспериментальные зависимости от $(b+l)/L$ отношения $\eta_{max}/\sigma(b+l)$, характеризующего величину максимального зазора между границей каверны и пла-

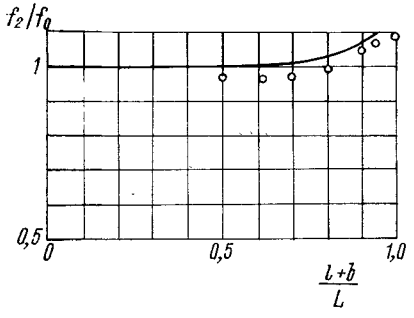


Рис. 127. Зависимость отношения f_2/f_0 от относительной длины каверны.

——— расчет; ○ эксперимент

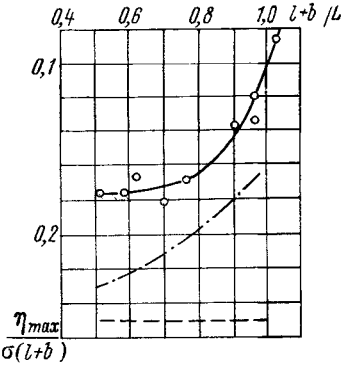


Рис. 128. Зависимости отношения $\eta_{max}/\sigma(b+l)$ от относительной длины каверны

—○ — эксперимент; —·—·— расчет для системы каверн; — — — расчет для одиночной каверны

стинкой. Экспериментальные результаты относятся к тем же условиям опытов, что и результаты, приведенные на рис. 127.

§ 41. Влияние неоднородности набегающего потока на одиночную каверну, расположенную на нижней стороне плоской пластинки

Рассматривается обтекание прямощекого клина, расположенного на нижней стороне плоской пластинки бесконечной протяженности. Для моделирования течения в хвосте каверны используется обобщенная схема Рябушинского, в качестве замыкающего (фиктивного) тела — прямощекий клин (рис. 129). Набегающий на клин поток принимается в продольном направлении неоднородным, по крайней мере в пределах, занимаемых клином и каверной. Неоднородность полагается малой. Она может быть выражена в виде суммы основной постоянной составляющей и некоторой переменной $[v_\infty + u_\infty(x)]$. Тогда интегральное уравнение (7.6) для определения формы каверны сохраняет прежний вид, только в правую часть следует добавить функцию

$u_\infty(x)/v_\infty$. Для частного случая обтекания прямощекого клина указанное интегральное уравнение можно привести к виду

$$fy_1(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\eta_1'(\xi)\,d\xi}{\xi-x}+\frac{\sigma}{2}+\frac{\beta}{\pi}\ln\frac{1-x}{1+\bar{b}_1-x}=$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{\bar{b}+x}{x}+\frac{u_\infty(x)}{v_\infty}. \qquad (7.19)$$

При этом должны быть выполнены условия (7.12) и (7.13). В уравнении (7.19), как и раньше, все линейные размеры отнесены к длине каверны. Для численного решения задачи можно без всяких изменений использовать метод, применявшийся ранее при расчетах кавитационного обтекания прямощекого клина однородным набегающим потоком.

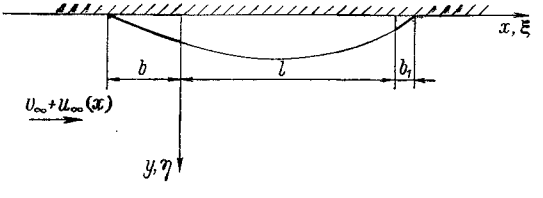


Рис. 129. Схема обтекания клина неоднородным потоком

Ниже приведены результаты численного расчета для частного случая неоднородности набегающего потока, соответствующего изменению $u_\infty(x)$ в пределах каверны по закону

$$\frac{u_\infty(x)}{\alpha v_\infty}=A\,|x-x_0|^B, \qquad (7.20)$$

где $x_0=1+\bar{b}_1$.

Расчеты производились при постоянных значениях относительной длины клина, равных $\bar{b}=0{,}1$, для значений B, равных единице и трем. Величина A варьировалась в пределах от $-0{,}2$ до 0,8. Положительным значениям параметра A соответствует замедление потока при движении вдоль каверны, а отрицательным — ускорение. Следовательно, при положительных значениях A в пределах каверны имеет место положительный градиент давлений (нарастание давления при движении от головной части каверны к хвостовой), а при отрицательных — отрицательный.

На рис. 130 приведено семейство кривых, изображающих границы каверн, соответствующих различным сочетаниям параметров A и B и фиксированному значению параметра $f=4$. Кривые, обозначенные цифрами *1—5* соответствуют сочетанию следующих пар указанных параметров: *1* — $A=-0{,}2$, $B=1$;

$2 - A = 0$ (однородный набегающий поток); $3 - A = 0{,}2$, $B = 1$; $4 - A = 0{,}8$, $B = 1$; $5 - A = 0{,}8$, $B = 3$. Из приведенных данных видно, что при положительных градиентах давления ка-

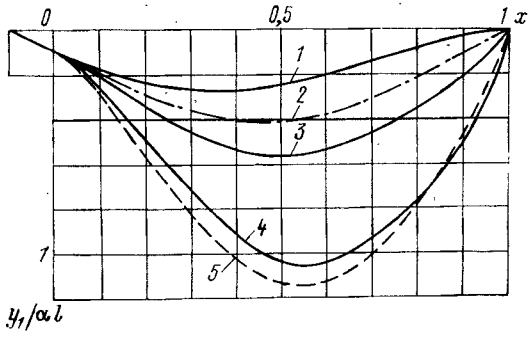


Рис. 130. Границы каверны для различных сочетаний параметров A и B

верна утолщается, угол β возрастает. Последнее косвенно свидетельствует об увеличении интенсивности обратной струйки, образующейся в хвосте каверны. Отрицательные же градиенты

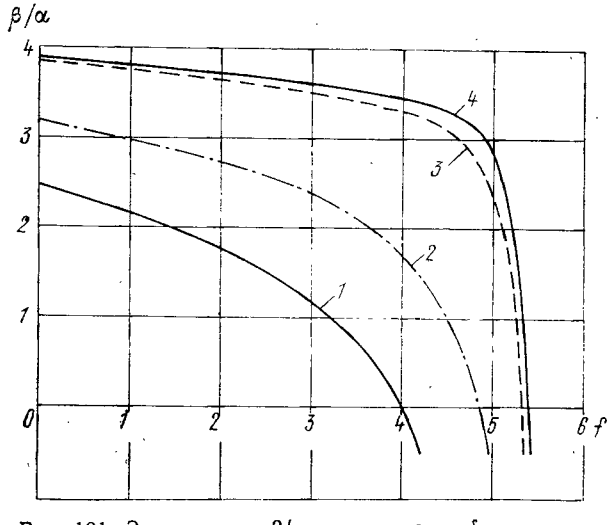


Рис. 131. Зависимости β/α от параметра f

давления приводят к утолщению каверны и более плавному ее замыканию на пластинку.

На рис. 131 приведены зависимости отношения β/α от параметра f, пропорционального при фиксированном значении v_∞ длине каверны. Точки пересечения кривых с осью f соответствуют

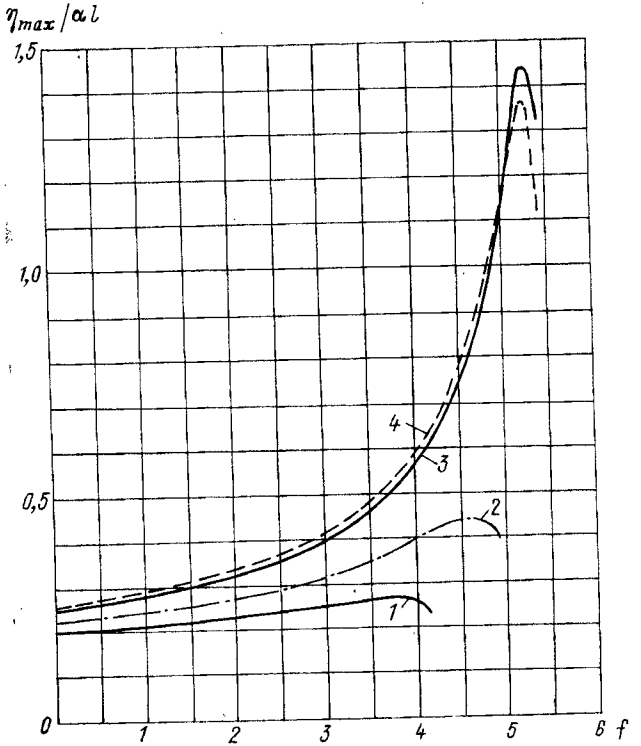


Рис. 132. Зависимости $\eta_{max}/\alpha l$ от параметра f

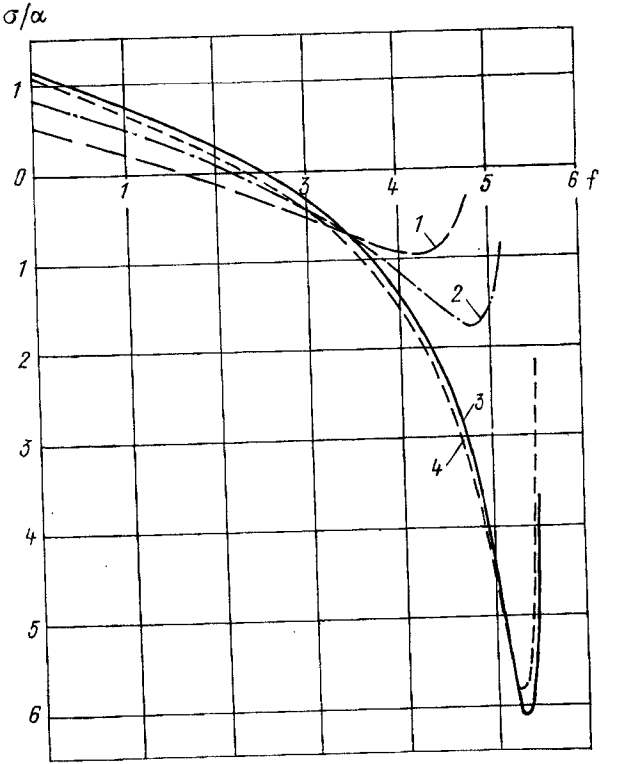


Рис. 133. Зависимости σ/α от параметра f

предельным значениям длины каверны, кривые *1*—*4* — сочетанию следующих пар параметров A и B: *1* — $A = -0{,}2$, $B = 1$; *2* — $A = 0$; *3* — $A = 0{,}2$, $B = 3$; *4* — $A = 0{,}2$, $B = 1$.

Из данных, приведенных на рис. 131 следует, что положительные градиенты давления вдоль каверны приводят к увеличению предельного значения параметра f, тем самым к увеличению предельной длины каверны.

На рис. 132 построены зависимости от параметра f отношения $\eta_{max}/\alpha l$, пропорционального максимальной величине зазора между границей каверны и пластинкой, а на рис. 133 — зависимости от параметра f отношения σ/α. Кривые, обозначенные цифрами *1*—*4* соответствуют следующим сочетаниям параметров A и B: *1* — $A = -0{,}2$, $B = 1$; *2* — $A = 0$; *3* — $A = 0{,}2$, $B = 1$; *4* — $A = 0{,}2$, $B = 3$.

§ 42. Обтекание глиссирующего профиля с каверной на нижней стороне

Схема течения приведена на рис. 134, из которого ясны также принятые основные обозначения. Граница каверны, а также участки свободной поверхности впереди и сзади глиссирующей пластины изображены тонкими линиями.

Задача об обтекании глиссирующей пластины в линеаризованной постановке может быть поставлена точно так же, как и задача, изложение которой приведено в § 37. Поскольку здесь определению подлежат не только параметры каверны, но и форма участков свободной поверхности впереди и сзади глиссирующей пластины, которые можно рассматривать как участки границы каверны при $\sigma = 0$, задача сводится к системе, состоящей из трех интегро-дифференциальных уравнений.

Для того, чтобы пределы интегрирования были конечными, введены дополнительные пластины бесконечной протяженности, параллельные оси x. Передняя пластина, продольное сечение которой лежит на оси x, начинается в точке c_1^0 и уходит в бесконечность вверх по потоку. Задняя пластинка, находящаяся на некотором расстоянии h_0 от оси x, начинается в точке $c_3 + b_3$ и также уходит в бесконечность, но вниз по потоку.

Рассмотрим упрощенный глиссирующий профиль, смоченные участки которого перед каверной и сзади нее являются отрезками прямых линий. Передний отрезок составляет угол α_1 с вектором скорости невозмущенного потока, а второй — α_2. Разность между ними равна углу ψ.

Для замыкания свободных границ и каверны использована обобщенная схема Рябушинского, для чего введены замыкающие отрезки длиною b_1, b_2 и b_3, наклоненные к оси x под углами β_1, β_2 и β_3, соответственно. Для обозначения ординат переднего участка свободной поверхности, границы каверны и заднего участка свободной поверхности введены символы $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y_3(x)$ соответственно.

Поскольку давление в каверне принято равным $p_к$, то линеаризованная формула Бернулли, вытекающая из равенства давления на границе каверны $p_к$, будет иметь вид

$$\frac{\sigma}{2} = -\frac{y_2}{\mathrm{Fr}_2^2} + \frac{u_2}{v_\infty}. \qquad (7.14а)$$

Соответствующие формулы для участков свободной поверхно-

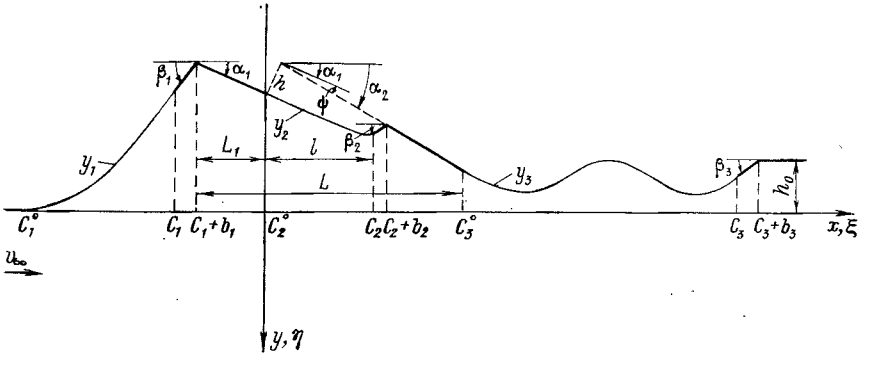


Рис. 134. Схема обтекания глиссирующего днища

сти, находящихся впереди и сзади глиссирующего профиля, будут иметь вид

$$0 = -\frac{y_1}{\mathrm{Fr}_2^2} + \frac{u_1}{v_\infty}; \qquad (7.15а)$$

$$0 = -\frac{y_3}{\mathrm{Fr}_2^2} + \frac{u_3}{v_\infty}. \qquad (7.16а)$$

В формулах (7.14, а)—(7.16, а) в качестве p_∞ при построении σ принято давление в невозмущенном потоке на оси x; ординаты y_2, y_1 и y_3 отнесены к L; $\mathrm{Fr}_2 = v_\infty/\sqrt{gL}$; u_2, u_1 и u_3 — скорости течения в точках границы каверны и переднего и заднего участков свободной поверхности, соответственно.

Выражая u_1, u_2 и u_3 по формуле, аналогичной (7.4) с использованием уравнения (7.3), можно составить систему интегро-дифференциальных уравнений для определения формы каверны и свободной поверхности жидкости

$$f_3 y_k(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{3}\left\{\int_{c_i^0}^{c_i}\frac{\eta_i'(\xi)\,d\xi}{\xi - x} + \beta_i \ln\left|\frac{c_i - x}{c_i + b_i - x}\right|\right\} +$$

$$+ \frac{1+(-1)^k}{4}\sigma = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i \ln\left|\frac{c_i + b_i - x}{c_{i+1}^0 - x}\right|;$$

$$(c_k^0 < x < c_k,\quad k = 1,\ 2,\ 3), \qquad (7.17)$$

Здесь и далее все линейные размеры отнесены к L а $f_3 = 1/\mathrm{Fr}_2^2$. Уравнение замкнутости каверны имеет вид

$$y_2(c_2) - y_2(c_2^0) - b_2\beta_2 = (l + b_2)\,\alpha_2 - h. \qquad (7.18a)$$

При численном решении (7.17а) совместно с формулой (7.18), удобно интервал интегрирования разбить на ряд участков, на каждом из которых принять аппроксимацию границы каверны и свободных поверхностей в виде парабол второй степени с гладким сопряжением на концах интервалов.

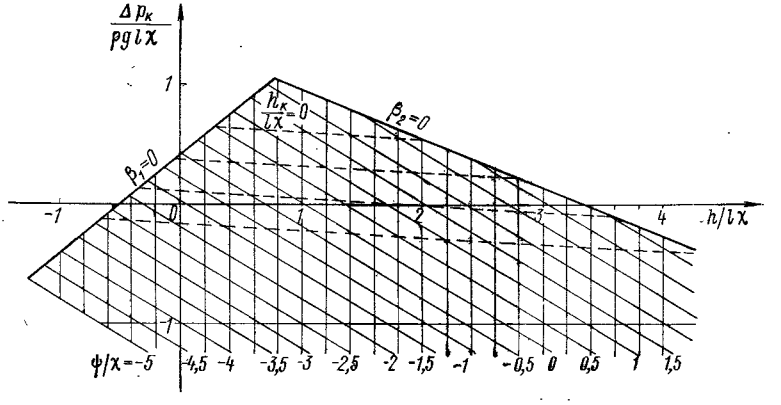


Рис. 135. Зависимость избыточного давления в каверне от параметров h, ψ и χ

В результате расчетов определяются ординаты границы каверны и число кавитации (при расчетах удобно задавать не σ, а l), а также подъемная сила, сопротивление и момент гидродинамических сил, приложенных к глиссирующему профилю. Дело в существенной степени упрощается тем, что правые части уравнения (7.17, а) являются линейной функцией параметров α, h и ψ вида $z = A\alpha + Bh + C\psi$, следовательно, в силу линейности системы (7.17, а), и величины σ, β_i, C_x, C_y и C_m будут также линейными функциями α, h и ψ такого же вида (C_x, C_y и C_m — коэффициенты сопротивления, подъемной силы и момента гидродинамических сил, приложенных к профилю).

Одной из важных характеристик является величина избыточного давления в каверне по сравнению с давлением на свободной поверхности жидкости. Очевидно, что чем оно выше, тем будет выше несущая способность части глиссирующего профиля, на которой образована каверна.

На рис. 135 приведены результаты расчетов, показывающие зависимость избыточного давления в каверне $\Delta p = p_k - p_\infty =$

$= -\rho v_\infty^2 \sigma/2$ от параметров h, ψ и $\chi = Y/\rho g L^2$, где Y — величина подъемной силы, действующей на глиссирующий профиль при наличии каверны. Параметр $h_к$ равен величине возвышения точки замыкания каверны над прямой линией, проходящей через линию, соответствующую носовому участку смоченной части глиссирующего профиля. Линии $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 0$ ограничивают область физически реальных течений жидкости, которой соответствуют значения $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$.

Приведенные на рис. 135 данные соответствуют $Fr_2 = 1$, $L_1 = 0{,}2$ и $l = 0{,}6$. При $Fr_2 > 1$ зависимости имеют аналогичный вид. Как видим, основным параметром, существенно влияющим на величину избыточного давления, является $h_к$. При некотором его отрицательном значении, соответствующем точке пересечения прямых $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 0$ давление достигает максимума. При этом как свободная поверхность, так и граница каверны замыкаются на соответствующие смоченные участки глиссирующего профиля по касательной, т. е. на переднем смоченном участке отсутствует направленная вперед брызговая, а в хвосте каверны — обратная струйка. При некоторых положительных значениях $h_к$ давление в каверне может стать меньше p_∞ и тогда на части глиссирующего профиля, находящегося в каверне, возникнет топящая сила.

§ 43. Обтекание клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность жидкости

При обтекании стойки, пересекающей свободную поверхность, в ее кормовой части образуется впадина, заполненная воздухом. Эту впадину можно рассматривать как кавитационную каверну, давление в которой постоянно и равно давлению на свободной поверхности жидкости. В отличие от течений, рассмотренных в § 37—41, здесь плоскость симметрии стойки и каверны вертикальна, а силы гравитации направлены не перпендикулярно к ней, а параллельно (рис. 136). Кроме того картина течения здесь трехмерна.

При рассмотрении течения использована обобщенная схема Рябушинского. В качестве замыкающего тела взят прямощекий клин, сечения которого плоскостями, перпендикулярными оси z, представляют собою равнобедренные треугольники (см. рис. 136). Стойка считается также клиновидной, но с произвольной формой щек, которая может меняться по высоте стойки.

Основной и фиктивный клин, а также каверна считается тонкими. В этом случае задачу можно линеаризовать. В линеаризованной постановке потенциал скоростей, вызванный основным и фиктивным клином, а также каверной, можно отыскивать как потенциал особенностей (источников—стоков), размещенных на плоскости $y = 0$, в области, соответствующей основному и

фиктивному клиньям и каверне. При этом потенциал скоростей должен удовлетворять следующим граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad (\text{вне } s=s_c+s_к+s_ф);\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial y}=v_\infty\frac{\partial y_1}{\partial x} \text{ на } s;\\ &v_\infty\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{p_к}{\rho}-gz=\frac{p_\infty}{\rho} \text{ на } s_к, \end{aligned}\right\} \qquad (7.19a)$$

где s_c, $s_к$, $s_ф$ — области плоскости $y=0$, соответствующие стойке, каверне и фиктивному клину; $y_1(x, z)$ — уравнение по-

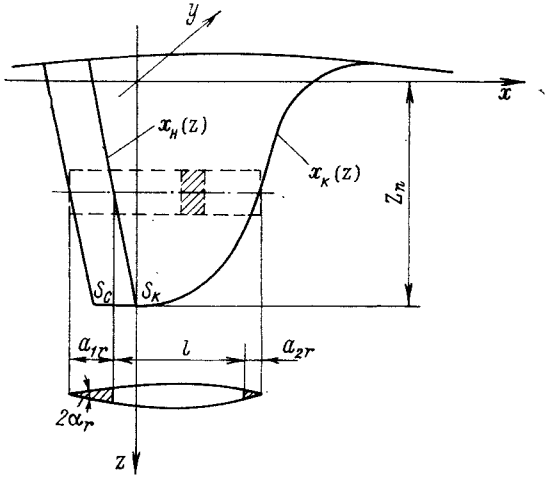


Рис. 136. Схема обтекания клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность жидкости

верхности стойки, каверны и фиктивного клина; $p_к$ — постоянное давление в каверне, величина которого пока считается произвольной.

Потенциал вызванных скоростей φ должен удовлетворять также условию постоянства скоростей на свободной поверхности. Для больших значений чисел Фруда, построенных по длине каверны в характерном сечении, его можно выразить в виде [4]

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_s q\,(\xi,\ \zeta)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)ds, \qquad (7.20a)$$

где q — интенсивность особенностей; $r^2=(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2$; $R^2=(x-\xi^2)+(z+\zeta)^2$.

При этом из условия непротекания границ течения можно определить связь между интенсивностью особенностей и формой границ течения

$$y_1(x,\ z)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\partial y_1}{\partial x}=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{q}{2v_\infty}\,dx. \tag{7.21}$$

Удовлетворяя условию постоянства давления [последнее уравнение системы (7.19, а)], а также принимая во внимание соотношение (7.20, а), можно составить уравнение для определения интенсивности особенностей, распределенных в области, соответствующей каверне

$$\int\limits_{s_к} q(\xi,\ \zeta)\left(\frac{x-\xi}{r^3}-\frac{x-\xi}{R^3}\right)ds+$$

$$+\int\limits_{s_с+s_ф} q(\xi,\ \zeta)\left(\frac{x-\xi}{r^3}-\frac{x-\xi}{R^3}\right)ds+\pi\sigma+2\pi fz=0, \tag{7.22}$$

где все линейные размеры отнесены к длине каверны l в характерном сечении, интенсивность особенностей отнесена к $2v_\infty$, а $f=gl/v_\infty^2$. Как и для случая плоского течения, к условию (7.22) следует присовокупить условие замкнутости границ течения, которое можно записать в виде

$$\int\limits_{s} q(\xi,\ \zeta)\,ds=0. \tag{7.23}$$

Интегральное уравнение (7.22) совместно с равенством (7.23) можно решить численным методом, путем сведения его к системе линейных алгебраических уравнений. Для этого область $s_к$ разбивается на ряд элементарных площадок, на каждой из которых функция $q(\xi,\ \zeta)$ полагается линейной по ξ и постоянной по ширине полосы $\zeta_r-\zeta_{r-1}$ (см. рис. 136). В этом случае двойной интеграл по элементарной площадке в уравнении (7.22) вычисляется в замкнутом виде. При такой аппроксимации функции $q(\xi,\ \zeta)$ ординаты поверхности каверны аппроксимируются участками парабол, гладко сопряженных друг с другом в пределах каждой полосы, и удовлетворяют условию плавного сопряжения со стойкой и фиктивным клином.

Интенсивность особенностей, соответствующих фиктивному клину, полагается постоянной и равной значению $q(x_к)$, а интенсивность особенностей, соответствующих стойке, считается известной.

В соответствии с этим функция $q(\xi,\ \zeta_k)$ на элементарной площадке задается в виде

$$q(\xi,\ \zeta_k)=q_{i-1,\ k}+\frac{q_{i,\ k}-q_{i-1,\ k}}{\xi_{i,\ k}-\xi_{i-1,\ k}}(\xi-\xi_{i-1}). \tag{7.24}$$

Интегральное уравнение (7.22) удовлетворяется в mn точках, выбранных в центрах элементарных площадок $x=0{,}5\,(\xi_{p-1,\,r}+\xi_{p,\,r})$; $z=0{,}5\,(\zeta_{r-1}+\zeta_r)$; $p=1,\ 2\ \ldots\ m$; $r=1,\ 2\ \ldots\ n$.

Кроме того, удовлетворяется условие замкнутости в среднем по высоте стойки сечения. В других сечениях это условие удовлетворяется путем последовательных приближений. Таким образом, можно получить систему из $mn+1$ уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m-1} q_{i,k}\,Q_{i,\,k}+q_{m,\,k}Q_{m,\,k}\right)-\pi\sigma=\\
&=\alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\alpha}\,Q_{0k}+2\pi f_i z;\\
&\sum_{i=1}^{m-1}(\xi_{i+1}-\xi_{i-1})\,q_i+(2\xi_{m+1}-\xi_m-\xi_{m-1})\,q_m=-\alpha\,(2a+\xi_1),
\end{aligned}\right\}\qquad (7.25)$$

где α — половина угла при вершине клина в характерном сечении стойки; a — ширина стойки в этом сечении;

$$Q_{i,\,k}=\frac{x-\xi_{i-1,\,k}}{\xi_{i,\,k}-\xi_{i-1,\,k}}\,M_{i,\,k}-\frac{1}{\xi_{i,\,k}-\xi_{i-1,\,k}}\,N_{i,\,k}-$$

$$-\frac{x-\xi_{i+1,\,k}}{\xi_{i+1,\,k}-\xi_{i,\,k}}\,M_{i+1,\,k}+\frac{1}{\xi_{i+1,\,k}-\xi_{i,\,k}}\,N_{i+1,\,k}$$

при $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$;

$$Q_{m,\,k}=M_{m+1,\,k}+\frac{x-\xi_{m-1}}{\xi_m-\xi_{m-1}}\,M_{m,\,k}-\frac{1}{\xi_m-\xi_{m-1}}\,N_{m,\,k};$$

$$Q_{0,\,k}=-M_{0,\,k}+\frac{x-\xi_1}{\xi_1-\xi_0}\,M_{1,\,k}-\frac{1}{\xi_1-\xi_0}\,N_{1,\,k};$$

$$M_{i,\,k}=\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}(x-\xi)\,d\xi\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)d\zeta;$$

$$N_{i,\,k}=\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}(x-\xi)^2\,d\xi\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)d\zeta.$$

Решая систему (7.25), находят число кавитации и интенсивность особенностей. Через корни системы уравнений определяют форму каверны в каждом сечении

$$y_r=a_r\alpha_r+0{,}5\xi_{1,\,r}\,(\alpha_r+q_{1,\,r})+0{,}5\sum_{i=2}^{m}(q_{i,\,r}+q_{i-1,\,r})\,(\xi_{i,\,r}-\xi_{i-1,\,r})+$$

$$+q_{m,\,r}\,(\xi_{m+1,\,r}-\xi_{m,\,r}).\qquad (7.26)$$

Коэффициент сопротивления стойки можно также определить через корни системы уравнений

$$C_x = \frac{X}{0{,}5\rho v_\infty^2 a Z_n} = \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_k (\zeta_k - \zeta_{k-1})}{a a Z_n} \left\{ \sigma - \frac{f(\zeta_k + \zeta_{k-1})}{a} - \right.$$

$$- \frac{1}{2\pi a_k} \int_{-a_k}^{0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[q_{i-1,\,j} M_{i,\,j} + \frac{q_{i,\,j} - q_{i-1,\,j}}{\xi_{i,\,j} - \xi_{i-1,\,j}} (x - \xi_{i-1,\,j}) M_{i,\,j} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{q_{i,\,j} - q_{i-1,\,j}}{\xi_{i,\,j} - \xi_{i-1,\,j}} N_{i,\,j} \right] dx \right\}, \qquad (7.27)$$

где

$$M_{i,\,j} = \ln \frac{z - \zeta_j + r_{i-1,\,j}}{z - \zeta_j + r_{i,\,j}} + \ln \frac{z - \zeta_{j-1} + r_{i,\,j-1}}{z - \zeta_{j-1} + r_{i-1,\,j-1}} +$$

$$+ \ln \frac{z + \zeta_{j-1} + R_{i,\,j-1}}{z + \zeta_{j-1} + R_{i-1,\,j-1}};$$

$$N_{i,\,j} = (z - \zeta_j) \ln \frac{x - \xi_{i,\,j} + r_{i,\,j}}{x - \xi_{i-1,\,j} + r_{i-1,\,j}} -$$

$$- (z - \zeta_{j-1}) \ln \frac{x - \xi_{i,\,j} + r_{i,\,j-1}}{x - \xi_{i-1,\,j} + r_{i-1,\,j}} + (z + \zeta_j) \ln \frac{x - \xi_{i,\,j} + R_{i,\,j}}{x - \xi_{i-1,\,j} + R_{i-1,\,j}} -$$

$$- (z + \zeta_{j-1}) \ln \frac{x - \xi_{i,\,j} + R_{i,\,j-1}}{x - \xi_{i,\,j} + R_{i-1,\,j-1}}.$$

Таким образом, приведенные зависимости позволяют для заданной клиновидной стойки определить размеры каверны и коэффициент сопротивления в зависимости от скорости ее движения. Для полностью вентилируемой стойки ($\sigma = 0$) давление в каверне $p_к = p_\infty$.

Для полностью вентилируемой стойки в уравнении (7.22) можно сразу принять число кавитации равным нулю, а определять параметр fZ_n.

Хорошие результаты для стоек большого удлинения и коротких каверн при решении рассматриваемой задачи можно получить на основе гипотезы о плоских сечениях. Для этого можно использовать известное решение [13] плоской задачи о кавитационном обтекании клина невесомой жидкостью. Чтобы давление в каверне по высоте стойки было постоянным, число кавитации для каждого сечения следует определять как $\sigma_z = fz/\alpha$. Для выполнения расчетов в принятых безразмерных величинах задаются параметры f/α, Z_n и ряд значений z/Z_n и определяются

по данным решения плоской задачи соответствующие значения l/a. При этом удлинение стойки определяется из выражения

$$\lambda=\frac{Z_n}{a} \quad \text{при} \quad \frac{z}{Z_n}=0{,}5.$$

Естественно, расчет можно выполнять непосредственно в размерных величинах для стойки заданных размеров и скорости ее движения.

§ 44. Результаты расчетов

Первоначально определим область изменения параметров, в которой возможен режим с полной вентиляцией клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность воды.

В силу того, что правые части уравнения (7.25) — линейные однородные функции параметров α и f, корни системы — линейные однородные функции α и f. Таким образом, величины $t=\sigma$, y_1 — функции вида $t=A\alpha+Bf$, где коэффициенты A и B зависят от параметров Z_n и a. Учитывая сказанное, достаточно решить систему (7.25) для двух значений α и f при $Z_n=\text{const}$ и $a=\text{const}$. Из решения получается два значения t, после чего составляют и решают систему двух уравнений относительно неизвестных A и B.

Расчеты были выполнены на ЦВМ для значений $Z_n=0{,}25\div 10$, $\lambda=Z_n/a=1\div 10$, $f=0$ и $0{,}0465$, $\alpha=0{,}01$ и $0{,}10$.

Результаты численного расчета, полученные в первом приближении (форма каверны в плане — прямоугольник), позволили для числа кавитации определить коэффициенты A_σ и B_σ. Коэффициент $A_\sigma=\sigma_0$, т. е. числу кавитации в невесомой жидкости.

Таблица 3

Значения коэффициентов B_6 для различных значений Z_n и λ

λ	Z_n					
	0,25	0,50	1,0	2,0	2,5	3,0
4	—0,17	—0,46	—0,95	—1,96	—2,46	—2,95
5	—0,18	—0,48	—0,90	—1,97	—2,48	—2,95
8	—0,19	—0,46	—0,96	—1,97	—2,48	—2,98
10	—0,19	—0,45	—0,97	—1,96	—2,48	—2,98

Значения коэффициента B_σ приведены в табл. 3, из которой следует, что для $Z_n>1$ можно приближенно принять $B_\sigma=Z_n$. Откуда

$$\sigma=\alpha\sigma_0(Z_n,\ \lambda)-fZ_n. \qquad (7.28)$$

Полученная зависимость для числа кавитации позволяет выделить те режимы движения, при которых давление в каверне равно атмосферному. Это условие запишется в виде

$$\sigma=0 \quad \text{или} \quad \frac{fZ_n}{\alpha}=\sigma_0(Z_n,\ \lambda). \tag{7.29}$$

Соотношение (7.29) устанавливает связь между размерами стойки, скоростью потока и длиной каверны, при которой удов-

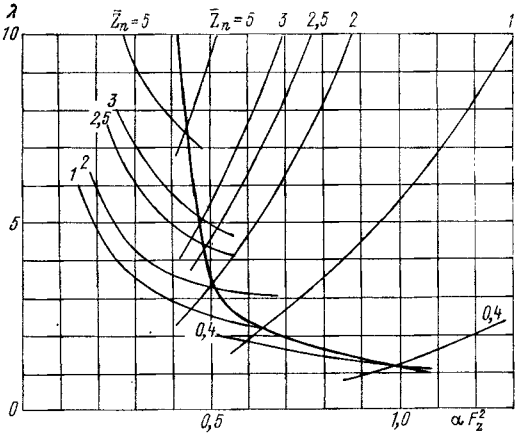


Рис. 137. Зависимость λ от αF_z^2 в первом приближении

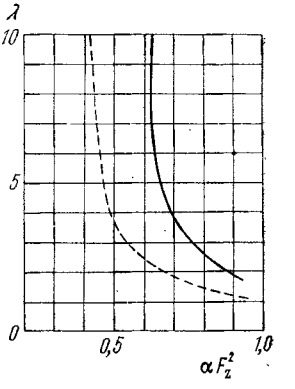


Рис. 138. Зависимость λ от αF_z^2 в первом (пунктир) и третьем (сплошная линия) приближениях

летворяется условие $p_к = p_а$, где $p_а$ — величина атмосферного давления.

Естественно, что при достаточно больших скоростях каверна будет образовываться на всей длине стойки. Чтобы определить минимальную скорость потока, при которой каверна образуется на всей длине стойки, необходимо ввести дополнительное условие. Оставаясь в рамках линейной теории, можно ввести лишь допущение о существовании минимальной длины каверны, при меньших значениях которой каверна разрушается. Было принято, что наименьшая длина каверны в нижнем расчетном сечении не может быть меньше ширины стойки, т. е. $l_n/a = 1$. Последнее условие можно записать в следующем виде

$$y_n=\alpha A_y+fB_y=0 \quad \text{при } x=a \tag{7.30}$$

или

$$\frac{fZ_n}{\alpha}=\frac{A_yZ_n}{B_y}.$$

Значения коэффициентов A_y и B_y определены на основании тех же расчетов, по которым вычислены аналогичные коэффициенты для числа кавитации. Зависимости, полученные на основании условий (7.29) и (7.30), приведены на рис. 137. Пересечение кривых при одинаковых значениях Z_n определяет границу области изменения параметров $\lambda = Z_n/a$ и $\alpha \bar{F}^2_{Z_n} = \alpha/fZ_n$, при которых каверна существует на всей длине насадка. Эти же зависимости определяют и наименьшую длину каверны в среднем сечении, которая оказывается близкой к единице (рис. 138). Значит граница каверны в ее нижней части приближается к вертикальной линии. Естественно ожидать, что такое течение неустойчиво и каверна будет разрушаться.

Это лишь качественный результат. Но уже из полученных данных ясно, что граница начала полной вентиляции клиновидной стойки во многом определяется формой каверны. В связи с этим, оставаясь в рамках принятых допущений, выполним расчет формы каверны так, чтобы охватить и область изменения параметров, соответствующих предполагаемой границе начала полной вентиляции стойки.

При выполнении этих расчетов удобнее в уравнении (7.22) принять число кавитации равным нулю, а из решения определять параметр f/α.

Одновременно с определением формы каверны можно вычислить и коэффициент сопротивления. Расчет, который заключался в подборе местной длины каверны в расчетных сечениях, выполнен последовательными приближениями. Изменение величин, получаемых из решения от приближения к приближению, можно проследить на примере расчета вертикальной стойки с постоянным углом α по высоте. Для такой стойки коэффициент сопротивления можно представить в виде

$$C_x = \alpha^2 C'_x(\lambda,\ fZ_n/\alpha) + \alpha f Z_n. \qquad (7.31)$$

В табл. 4 приведены результаты трех приближений для случая $Z_n = 4$, $a = 0{,}5$ $(\lambda = 8)$. Число расчетных сечений равно пяти.

Таблица 4

Результаты расчетов обтекания вертикальной стойки

Приближение	x_{n1}	y_{n1}	x_{n2}	y_{n2}	x_{n3}	y_{n3}	x_{n4}	y_{n4}	x_{n5}	y_{n5}	f/α	C'_x
1	1		1		1		1		1		0,48	0,026
		1,27		0,67		0		−0,65		1,79	0,48	0,026
2	3,7		1,7		1		0,65		0,40		0,44	0,145
		1,10		0,14		0		−0,05		0,01	0,44	0,145
3	4,5		1,65		1		0,63		0,38		—	—
		0,23		0,21		0		−0,02		0,05	0,44	0,152

Опыт расчетов показал, что точное удовлетворение условия замыкания в верхних сечениях не обязательно, поскольку оно слабо влияет на форму каверны в целом, а также на величину параметров f/α и C'_x. Результаты расчета графически изображены на рис. 139.

Приведенные данные показывают, что первое приближение очень грубо. Поэтому при выполнении серийных расчетов форма

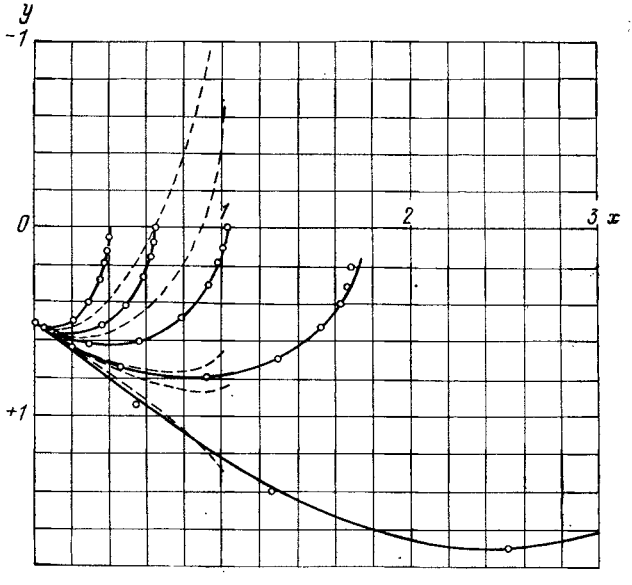


Рис. 139. Форма границы каверны в пяти расчетных сечениях по высоте стойки.

– – – – – первое приближение; ——— второе приближение; —○— третье приближение

каверны в плане предыдущего варианта принималась за первое приближение последующего варианта. В этом случае достаточно делать два-три приближения.

Типичные результаты расчета для вертикальной стойки с постоянным углом приведены на рис. 140, *а*, *б*. По этим данным на рис. 141 построена граница каверны в вертикальной плоскости. Как следует из этого рисунка при постоянном значении Z_n форма границы каверны в вертикальной плоскости слабо зависит от удлинения стойки. Эти же данные позволяют уточнить, с учетом постановки задачи, предполагаемую границу, соответствующую началу полной вентиляции клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность. Для этого на рис. 142 приведены зависимости длины каверны в нижнем расчетном сечении

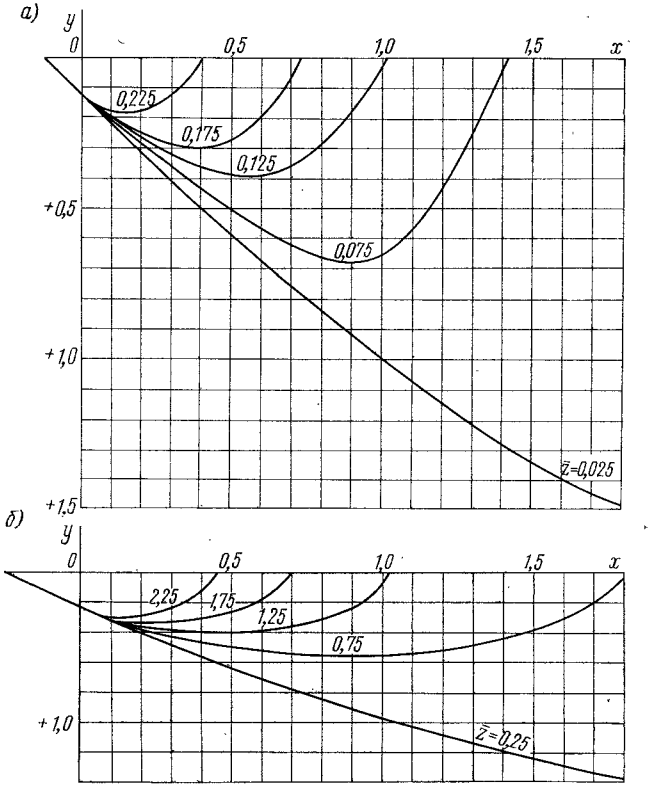


Рис. 140. Форма границы каверны в пяти расчетных сечениях: *а* — для $\lambda=2$ и $Z_n=0{,}25$; *б* — $\lambda=10$ и $Z_n=2{,}5$

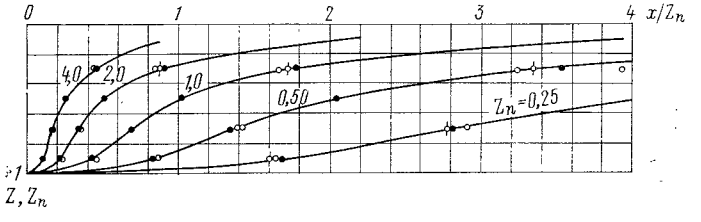


Рис. 141. Форма границ каверны в вертикальной плоскости для различных значений Z_n

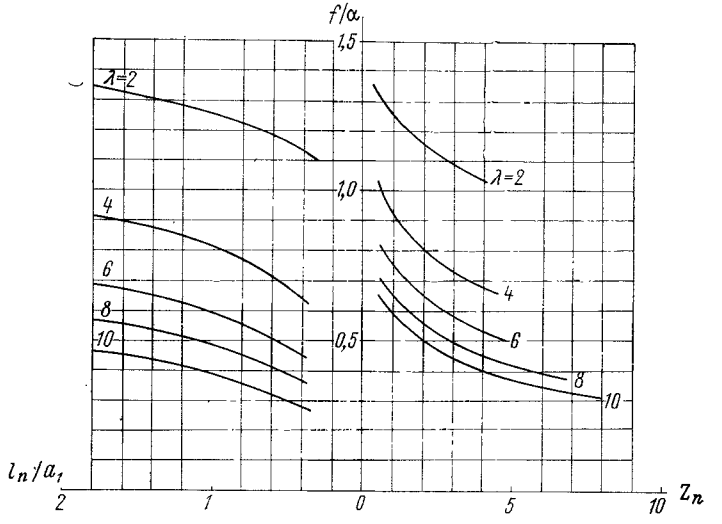


Рис. 142. График для определения границы существования устойчивой вентиляции

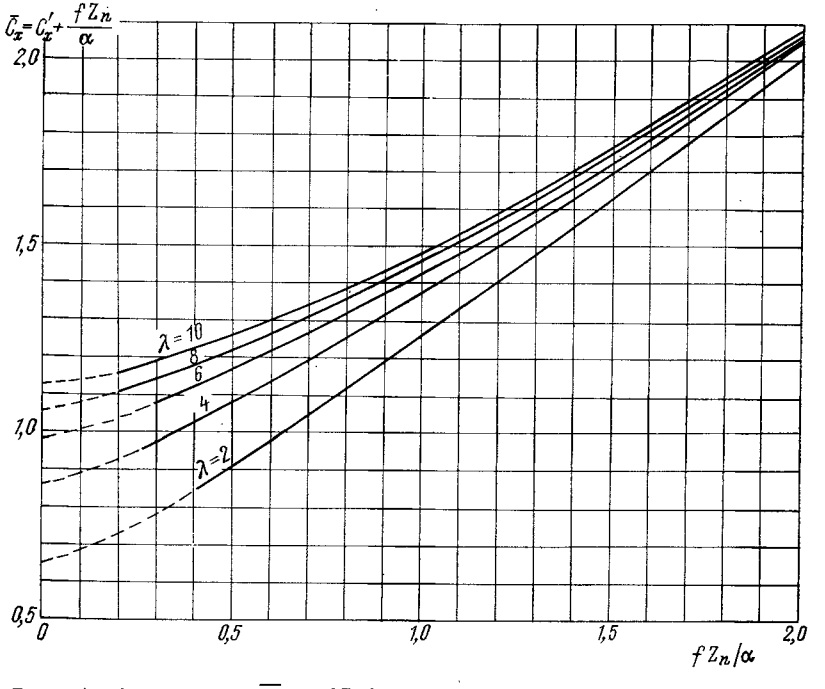


Рис. 143. Зависимость $\overline{C_x}$ от fZ_n/α

l_n и Z_n от f/α. Удовлетворяя условию (7.30), т. е. считая $l_n/a = 1$, по рис. 142 определяют соответствующие значения Z_n и f/α или $\alpha F^2_{Z_n} = 1/fZ_n$. Граница начала полной вентиляции, полученная в первом приближении, качественно соответствует вновь определенной, но смещена в сторону меньших значений $\alpha F^2_{Z_n}$ (см. рис. 138). Как указывалось выше, условие (7.30) дает только качественные соотношения. Оценим те изменения параметров, которые наблюдаются, если условие (7.30) заменено, скажем, на $l_n/a = 0{,}5$ или 1,5. Из рис. 142 следует, что при $\lambda = 4$ $\alpha F^2_{Z_n} = 0{,}41$ и 0,95. Это соответствует изменению наименьшей скорости движения, при которой еще наблюдается полная вентиляция стойки, на ± 20 %. Для других удлинений получим изменение наименьшей скорости того же порядка. Из этой оценки следует, что граница начала полной вентиляции стойки должна давать и количественно верные значения параметров, соответствующих этому режиму движения.

Зависимости коэффициента сопротивления $\overline{C}_x$ от параметра fZ_n/α при постоянных значениях удлинения стойки приведены на рис. 143. Такое представление коэффициента сопротивления удобно, поскольку $\overline{C}_x$ явно не зависит от угла α

$$\overline{C}_x = C_x/\alpha^2 = C'_x(\lambda,\ fZ_n/\alpha) + fZ_n/\alpha. \qquad (7.32)$$

§ 45. Расчеты и эксперимент

В предыдущем параграфе приведены результаты расчетов как формы каверны, так и коэффициента сопротивления полностью вентилируемой клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность. Для того, чтобы установить насколько расчетные данные соответствуют действительности, выполнен ряд экспериментальных измерений.

Определение границы начала полной вентиляции стойки произведено при постоянной скорости потока путем медленного изменения ее погружения. Момент полной вентиляции стойки определялся визуально. Эксперименты проведены при скоростях потока от 0,5 до 2,2 м/с (рис. 144, *а—г*).

Установлено, что начало полной вентиляции стойки, определенное при ее погружении, несколько отличается от данных, полученных при уменьшении погружения. На рис. 144 экспериментальные точки, определенные при погружении стойки, смещены в сторону меньших значений параметра $\alpha F^2_{Z_n}$. Кроме того наблюдается зависимость начала полной вентиляции стойки от угла α, т. е. от толщины каверны. Чем больше угол α, тем в сторону больших значений параметра $\alpha F^2_{Z_n}$ смещается

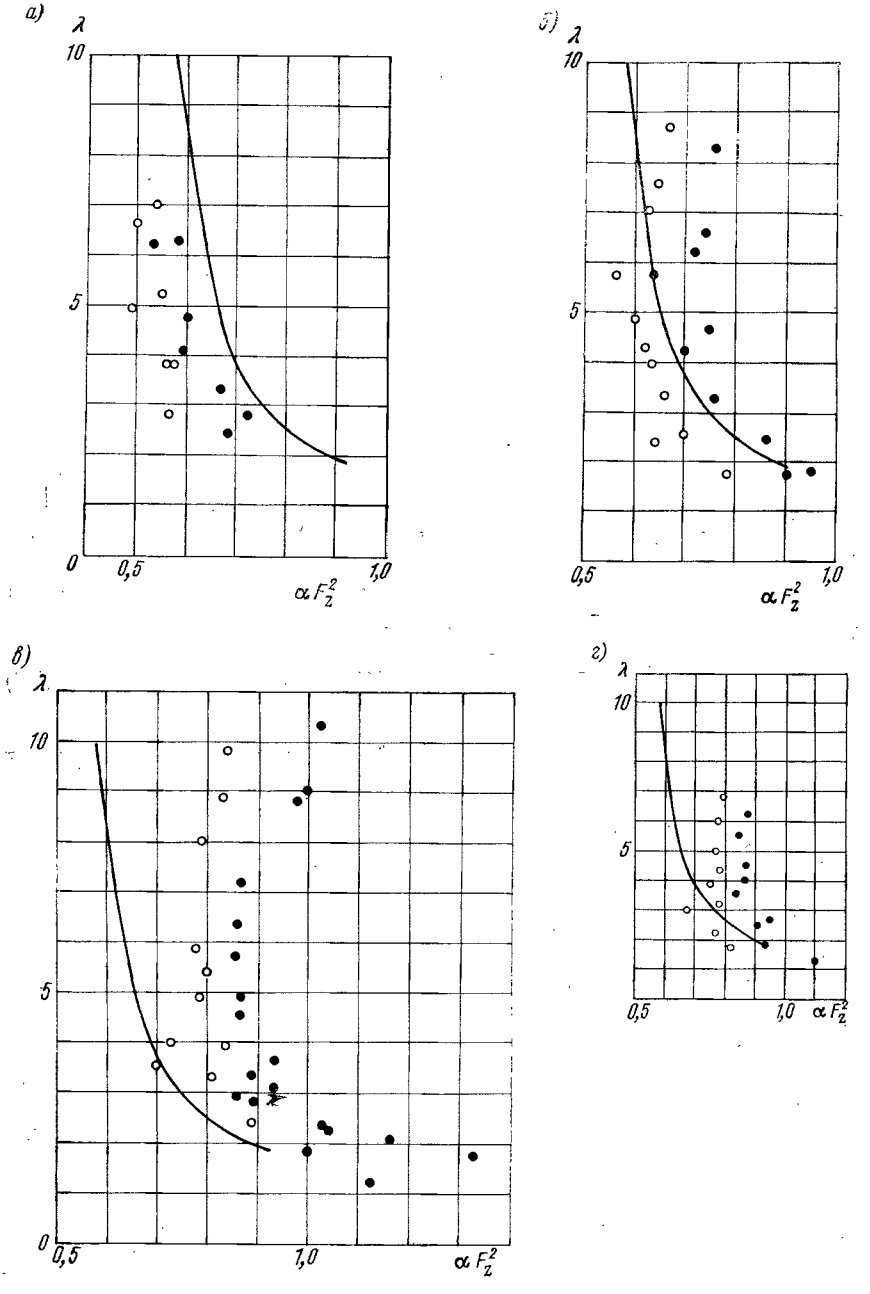


Рис. 144. Граница устойчивой вентиляции: *а* — для стойки 1 (a=12 мм, α=0,084); *б* — для стойки 2 (a=12 мм, α=0,142); *в* — для стойки 3 (a=12 мм, α=0,236); *г* — для стойки 4 (a=19 мм, α=0,244)

граница начала полной вентиляции стойки. Однако эта зависимость довольно слабая. Последнее показывает, что расчетные данные достаточно полно отражают влияние основных параметров на каверну, образующуюся за клиновидной стойкой.

Представляет интерес провести непосредственное сопоставление рассчитанной формы каверны и экспериментально определенной. Это наиболее доступно сделать для границы каверны в вертикальной плоскости. С этой целью было проведено фотографирование каверн, образующихся за клиновидными стойками

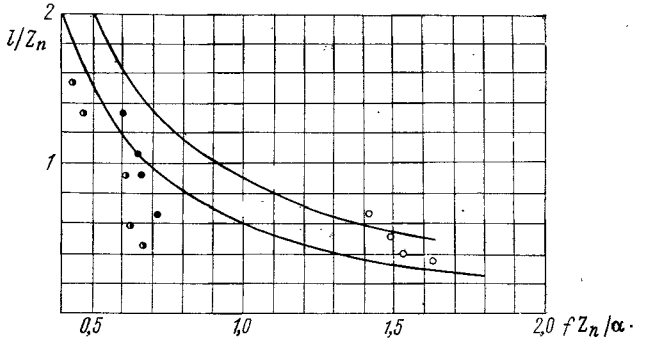


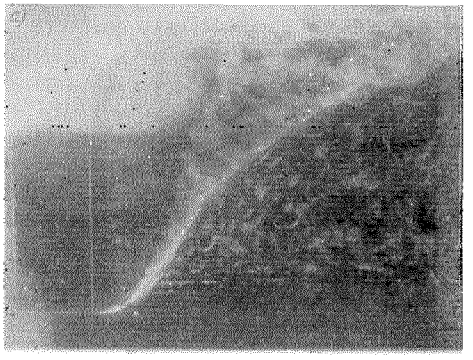
Рис. 145. Зависимости l/Z_n от fZ_n/α

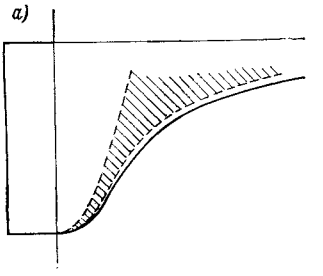
и имеющих следующие размеры: 1. $\lambda = 5$, $a = 60$ мм, $\alpha = 0{,}079$ (вертикальная стойка); 2. $\lambda = 8$, $a = 30$ мм, $\alpha = 0{,}183$ (вертикальная стойка); 3. $\lambda = 7{,}5$, $a = 22$ мм, $\alpha = 0{,}136$ (наклонная стойка с углом наклона в плоскости симметрии 24°).

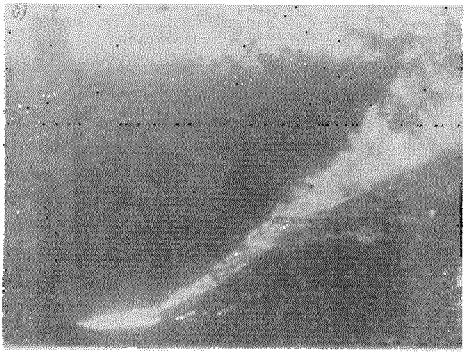
По фотографиям определена длина каверны в среднем сечении. На рис. 145 приведены как экспериментальные, так и расчетные данные для длины каверны в среднем сечении. Расчет, выполненный для наклонной стойки, показал, что относительная длина каверны такая же как и у вертикальной стойки.

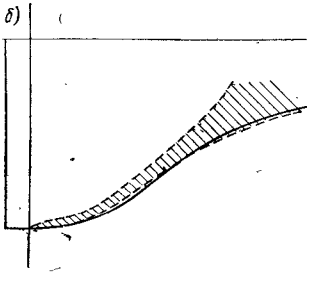
На рис. 146, *а*, *б*, *в* изображены границы каверны в вертикальной плоскости, схематические зарисовки, сделанные в масштабе фотографии, и расчетные данные. Штриховкой отмечены зоны пенного следа. Рассмотрев эти рисунки, убеждаемся, что расчетные данные хорошо описывают границу каверны в вертикальной плоскости.

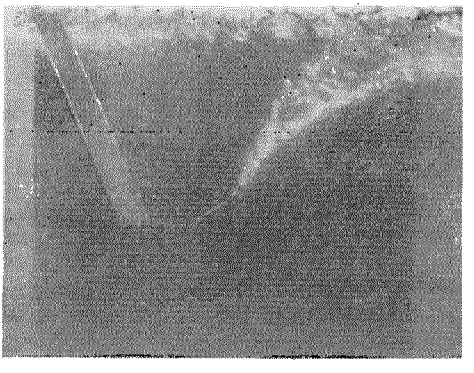
На рис. 147 сопоставлены расчетные и экспериментальные значения коэффициента сопротивления полностью вентилируемой стойки по опытам в бассейне и на гидростенде. Коэффициент остаточного сопротивления стойки определен путем вычитания коэффициента турбулентного трения технически гладкой пластины из полного коэффициента сопротивления. Числа Рейнольдса по ширине стойки находились в диапазоне $(1 \div 5) \times \times 10^5$. Из рассмотрения результатов экспериментального











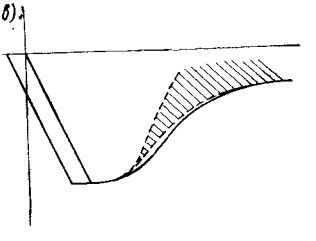


Рис. 146. Форма каверны в вертикальной плоскости: *а* — для значений параметров $\lambda=4$, $Z_n=2$, $f/\alpha=0{,}798$; *б* — для значений параметров $\lambda=8$, $Z_n=1$, $f/\alpha=0{,}662$; *в* — для значений параметров $\lambda=8$, $Z_n=1$, $f/\alpha=0{,}673$

определения коэффициента сопротивления обнаруживается несоответствие данных, полученных в бассейне и на гидростенде. Это несоответствие тем больше, чем меньше угол α, т. е. чем больше доля трения в полном сопротивлении. Можно считать, что имеющее место различие в результатах измерений в бассейне и на гидростенде связано с неустойчивостью течения жидкости в пограничном слое при малых значениях числа Рейнольдса.

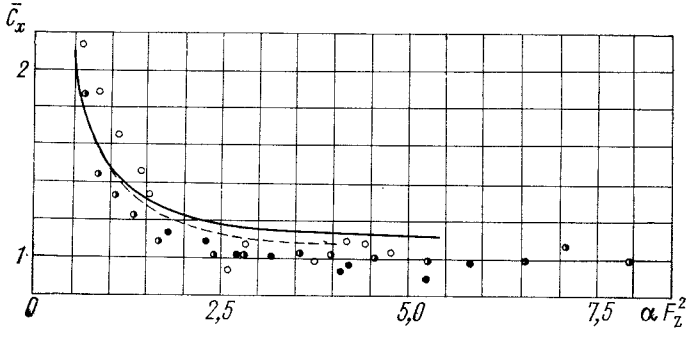


Рис. 147. Зависимость $\overline{C}_x$ от αF_z^2.
——— — расчет; – – –, ○, ◐, ● — опыт

В целом, экспериментальные данные подтверждают полученные расчетные зависимости для коэффициента сопротивления полностью вентилируемой клиновидной стойки.

ГЛАВА VIII

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИКИ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ И КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Задачи построения течения с образованием гравитационных и капиллярных волн на свободной поверхности (поверхности каверны) не имеют принципиальной разницы с рассмотренными ранее задачами для невесомой жидкости. В обоих случаях требуется построить течение, частью ограниченное поверхностями заданной геометрии, а частью — свободными поверхностями, давление на которых постоянно. Форма свободных поверхностей

(границ) заранее неизвестна, и определяется в ходе решения задачи из условия постоянства давления.

В задачах невесомой и весомой жидкости, а также жидкости, на поверхности которой действуют капиллярные силы, появляются различия при переходе от динамического условия на свободной поверхности (постоянство давления) к кинематическому. В первом случае из формулы Бернулли для невесомой жидкости непосредственно следует, что равенству давления соответствует равенство скорости на свободной границе.

Если учесть силы тяжести в формуле Бернулли, то окажется, что скорость на свободной границе не постоянна, а зависит от ординат свободной поверхности

$$v_0^2 = \frac{p_\infty - p_к}{\rho v_\infty^2/2} + 1 + \frac{2g\,(y_\infty - y)}{v_\infty^2}, \qquad (8.1)$$

где $p_к$ — давление в каверне; g — ускорение свободного падения; y_∞ — ордината горизонтальной линии, на которой определяется величина p_∞ в невозмущенном потоке. В формуле (8.1) скорость на границе каверны, как и ранее, выражена в безразмерном виде, т. е. отнесена к v_∞.

Если свободная граница искривлена, то на ней возникнут капиллярные силы, величина которых пропорциональна кривизне. Они направлены внутрь каверны, если ее граница обращена выпуклостью в сторону жидкости, и наоборот. Обусловленная капиллярностью величина давления

$$p = -\gamma_1 x, \qquad (8.2)$$

где x — кривизна поверхности каверны.

Условия (8.1) и (8.2) нетрудно учесть при составлении интегральных уравнений кавитационной задачи, которые, естественно, окажутся сложнее уравнений невесомой жидкости. Кроме того здесь возникнут дополнительные трудности в связи с отсутствием гладких решений в окрестности точек сопряжения свободных границ с твердыми поверхностями (см. § 34). Способом, примененным в § 34, нетрудно показать, что указанные трудности появляются и при учете только действия силы тяжести (без учета капиллярных свойств жидкости).

Далее рассмотрены течения жидкости со свободными границами, которые в невозмущенном состоянии представляют собою горизонтальные плоскости, и над ними давление сохраняет постоянное значение. Такие течения можно представить как частный случай кавитационных течений, соответствующих значению числа кавитации, равному нулю, если при определении последнего в качестве p_∞ брать давление над свободной поверхностью жидкости.

§ 46. Интегральные уравнения задачи об установившихся течениях с образованием гравитационных волн на свободной поверхности жидкости неограниченной глубины

Ниже получены два интегральных уравнения, записанные в декартовой системе координат. При их составлении произведена замена обтекания свободной поверхности и заданных ограничивающих течение поверхностей на обтекание вихревого слоя, расположенного на указанных поверхностях, а также использовано граничное условие непроницаемости этих поверхностей в двух формах. При составлении одного уравнения использовано условие равенства нулю в точках поверхностей суммы нормальных составляющих скорости, обусловленных невозмущен-

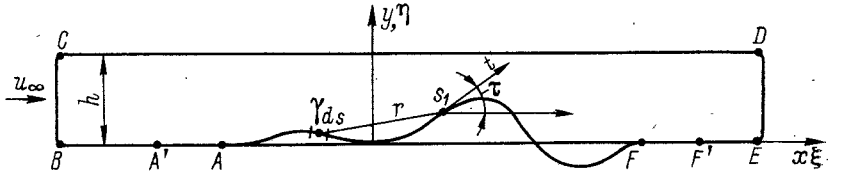


Рис. 148. Схема обтекания удлиненного контура

ным набегающим потоком, и индукцией вихревого слоя. Второе уравнение получено из условия равенства в этих точках вихревой интенсивности и касательной составляющей суммарной скорости, обусловленной невозмущенным потоком и индукцией вихревого слоя.

Рассмотрим плоское потенциальное установившееся обтекание поступательным потоком безграничной несжимаемой идеальной жидкости удлиненного контура, изображенного на рис. 148. Часть этого контура $ABCDEF$ соответствует сечению твердых стенок, а AF — сечению свободной поверхности, над которой внутри замкнутого объема, ограниченного твердыми стенками и этой поверхностью, заключен под определенным давлением газ. Такое течение представляет собою типичный пример так называемого искусственного кавитационного течения, когда каверна возникает за счет подачи газа в поток жидкости.

Стенка CD параллельна вектору скорости набегающего потока. Стенки AB и EF также параллельны вектору скорости невозмущенного потока за исключением примыкающего к точке F отрезка небольшой протяженности, который, в общем случае, может отклоняться от указанного направления. Форма этого отрезка, также как в обобщенной схеме Рябушинского, задается с точностью до некоторых параметров, величина которых находится в процессе решения задачи.

Свободная поверхность, вообще говоря, будет возмущена вследствие влияния на нее обтекания оконечностей CB и DE. При этом порядок скоростей возмущения на достаточном удалении от указанных оконечностей будет такими же, как от плоских источника и стока, расположенных вблизи CB и DE, интенсивность которых пропорциональна произведению ширины контура h на модуль скорости невозмущенного потока. Другой причиной возмущений может быть давление газа внутри упомянутого выше объема, заключенного между твердыми стенками и свободной поверхностью, если оно будет отличаться от статического давления в невозмущенном потоке на уровне оси x (см. рис. 148).

Очевидно, что если длина отрезка AB и FE достаточно большая ($h/AB \to 0$, $h/EF \to 0$), а давление воздуха над свободной поверхностью равно статическому в невозмущенном потоке на оси x, то в отсутствии других возмущающих факторов свободная поверхность будет горизонтальной и проходящей через ось x. Если же в поток вблизи свободной поверхности поместить дополнительный источник возмущений (например, твердое тело), то она будет деформироваться. В соответствии с этой деформацией и будут определены деформации отрезка твердой стенки в окрестности точки F'.

Обтекание рассматриваемого контура заменяется обтеканием вихрей, распределенных непрерывным образом на твердых стенках и свободной поверхности. Поскольку контур замкнут, величина вихревой интенсивности в его произвольной точке равна модулю скорости в этой точке. Используя условие непроницаемости твердых стенок и свободной поверхности, заключающееся во взаимной компенсации нормальных составляющих скоростей в любой точке контура, обусловленных индукцией вихрей, невозмущенным набегающим потоком и наличием в потоке каких-либо источников возмущений, можно написать интегральное уравнение, дающее связь между формой контура и интенсивностью вихревого слоя и аналогичное уравнению (2.13)

$$\frac{1}{2\pi}\int_l \frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\gamma(s_1)\,ds_1 = (1+v_x)\sin\tau(s) + v_y\cos\tau(s), \qquad (8.1\text{a})$$

где $\widehat{(r,\ t)}$ — угол между направлением указанной касательной к контуру и отрезком r (см. рис. 148); r — расстояние от точки s_1, в которой расположен вихрь γds_1, до произвольной точки s, лежащей на контуре; v_x, v_y — проекции на оси декартовых координат скоростей возмущения в точке s, вызванных каким-либо источником возмущения (например, вихрем, источником, телом, частично или полностью погруженным под свободную поверхность и т. п.); $\tau(s)$ — угол между вектором скорости набегающего потока и касательной к контуру в точке s. Интегрирование

производится по контуру сечения твердых стенок и свободной поверхности, а все величины, имеющие размерность скорости, отнесены к v_∞.

Пределы интегрирования разбиваются на промежутки AA', $A'B$, BC, CD, DE, EF', $F'F$ и FA и производится оценка отдельных интегралов по этим промежуткам для значений s, соответствующих точкам свободной поверхности и участкам твердых стенок $A'A$ и FF'. Сохраняя расстояние между твердыми стенками h неизменным, будем увеличивать протяженность контура в направлении вверх и вниз по потоку за счет увеличения длины отрезков $A'B$, $F'E$ и CD. При достаточно большом удлинении контура ($h/CD \to 0$), $h/BE \to 0$) и давлении в пространстве между твердыми стенками и свободной поверхностью, равным величине статического давления невозмущенного потока на оси x, контур будет обтекаться, как бесконечно тонкая плоская пластинка, параллельная вектору скорости набегающего потока, имеющая «неровности» только на нижней стороне между точками A и F', вызванные деформацией свободной поверхности вследствие действия упомянутых выше источников возмущения. Таким образом, при удалении стенок CB и DE в бесконечность, при упомянутых выше значениях s интегралы по CB и DE будут стремиться к нулю, как h/BA' и h/EF' ($BA' \to \infty$, $EF' \to \infty$).

При оценке интеграла по CD, на этом участке контура можно положить $\gamma = 1$, поскольку вихревая интенсивность равна модулю скорости, а скорость на верхней стороне плоской бесконечно тонкой пластинки равна v_∞, за исключением малых окрестностей вблизи точек C и D

$$\frac{1}{2\pi}\int_C^D \frac{\cos\left(\widehat{r,\ t}\right)}{r}\gamma(s_1)\,ds_1 = -\frac{1}{2}\sin\tau(s), \quad (C \to -\infty,\ D \to \infty). \tag{8.2a}$$

Если горизонтальные участки отрезков AA' и FF' взять достаточно большой длины, то на BA' и $F'E$ можно положить $\gamma = 1$ (эта длина, очевидно, должна быть такой, чтобы скорости в точках A' и F', вызванные источниками возмущений, были достаточно малыми по сравнению с v_∞ и затухали вверх и вниз по потоку). Полагая кроме того $y_m/AA' \ll 1$ и $y_m/FF' \ll 1$, где y_m — абсолютное значение наибольшей ординаты точки возмущенной свободной поверхности, можно написать

$$i_1 = \frac{1}{2\pi}\int_B^{x_1} \frac{\cos\left(\widehat{r,\ t}\right)}{r}\gamma(s_1)\,ds_1 = \frac{1}{2\pi}\cos\tau(s)\ln\left|\frac{x-B}{x-x_1}\right|; \tag{8.3}$$

$$i_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{x_2}^{E} \frac{\cos\left(\widehat{r,\ t}\right)}{r}\gamma(s_1)\,ds_1 = \frac{1}{2\pi}\cos\tau(s)\ln\left|\frac{x-x_2}{x-E}\right|, \tag{8.4}$$

где абсциссы точек A' и F' обозначены через x_1 и x_2, соответственно.

Объединяя уравнения (8.3) и (8.4), а также полагая $B \to -\infty$ и $E \to \infty$, получим

$$i_1 + i_2 = \frac{1}{2\pi} \cos\tau(s) \ln \left| \frac{x - x_2}{x - x_1} \right|. \tag{8.5}$$

С учетом приведенных оценок уравнение (8.1) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos(\widehat{r, t})}{r} \gamma(s_1)\, ds_1 = -\left(\frac{1}{2} + v_x\right) \sin\tau(s) + \left(v_y - \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right|\right) \cos\tau(s). \tag{8.6}$$

В декартовой системе координат формулу (8.6) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\left[1 + \frac{y_1'(y_1 - \eta_1)}{x - \xi}\right] \sqrt{1 + \eta_1'^2}\, \gamma(\xi)\, d\xi}{\left[1 + \left(\frac{y_1 - \eta_1}{x - \xi}\right)^2\right](x - \xi)} = \left(v_x + \frac{1}{2}\right) y_1' - v_y + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right|, \tag{8.7}$$

где $y_1(x)$, $\eta_1(\xi)$ — фиксированные и текущие значения ординат точек свободной поверхности и участков твердых стенок $A'A$ и FF'; η_1', y_1' — производные по ξ и x, соответственно. При $x_1 \to -\infty$, $x_2 \to \infty$ уравнение (8.7) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[1 + \frac{y_1'(y_1 - \eta_1)}{x - \xi}\right] \sqrt{1 + \eta_1'^2}\, \gamma(\xi)\, d\xi}{\left[1 + \left(\frac{y_1 - \eta_1}{x - \xi}\right)^2\right](x - \xi)} = \left(v_x + \frac{1}{2}\right) y_1' - v_y. \tag{8.8}$$

Используя теорему Бернулли и условие постоянства давления на свободной поверхности, вихревую интенсивность можно выразить через значения ординат свободной поверхности

$$\gamma = \sqrt{1 - 2gy_1/v_\infty^2}, \tag{8.9}$$

где g — ускорение свободного падения.

После подстановки соотношения (8.9) в равенство (8.8) получается интегро-дифференциальное уравнение для определения формы свободной поверхности воды. При отсутствии возмуще-

ний ($v_x = 0$, $v_y = 0$) одним из решений является $y_1 = 0$, которое соответствует горизонтальной невозмущенной поверхности.

Уравнения (8.7) и (8.8) получены, исходя из условия равенства нулю суммарной нормальной составляющей скорости в точках свободной поверхности и сечения твердых стенок. Аналогичным образом могут быть получены уравнения из условия равенства вихревой интенсивности в произвольной точке контура значению касательной составляющей скорости к контуру в этой точке. По аналогии с равенством (2.14)

$$\frac{\gamma(s)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin(\widehat{r,\ t})}{r}\gamma(s_1)\,ds_1 + \left(v_x + \frac{1}{2}\right)\cos\tau(s) + \left(v_y - \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\right)\sin\tau(s); \tag{8.10}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+y_1'^2}\,\gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\left(y_1' - \frac{y_1-\eta_1}{x-\xi}\right)\sqrt{1+\eta_1'^2}\,\gamma(\xi)\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{y_1-\eta_1}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)} + v_x + \frac{1}{2} + \left[v_y - \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\right]y_1'(x); \tag{8.11}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+y_1'^2}\,\gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(y_1' - \frac{y_1-\eta_1}{x-\xi}\right)\sqrt{1+\eta_1'^2}\,\gamma(\xi)\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{y_1-\eta_1}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)} + \frac{1}{2} + v_x + v_y y_1'. \tag{8.12}$$

Уравнения типа (8.8) обычно получают иным путем, не рассматривая обтекание замкнутого контура со свободной границей (каверной) на нижней стороне, например, так, как это сделано в работе [86]. Вихревой слой при этом располагают на линии, соответствующей свободной поверхности. Из условия непроницаемости свободной поверхности получают интегро-дифференциальное уравнение, отличающееся формально от соотношения (8.8) только величиной численного коэффициента, стоящего в правой его части при y_1' (единица вместо $^1/_2$). Однако поскольку линия свободной поверхности представляет собою контур незамкнутый, вихревая интенсивность уже не будет равна модулю скорости, а, следовательно, не имеет места такая простая связь между вихревой интенсивностью и формой свободной поверхности, какая дается формулой (8.9). В этом случае для определения $\gamma(x)$ необходимо дополнительное нелинейное интегральное соотношение, в которое входит интеграл такого же

типа, что и интеграл, стоящий в правой части уравнения (8.12). Таким образом, вместо простого алгебраического уравнения (8.9) получают нелинейное интегральное уравнение. В такой постановке задача существенно усложняется и сводится к решению системы, состоящей из упомянутого интегрального уравнения и интегро-дифференциального уравнения типа (8.8).

§ 47. Волны конечной амплитуды на свободной поверхности жидкости неограниченной глубины

Для численных расчетов удобнее пользоваться уравнением (8.7) или (8.11), или же их комбинацией, поскольку здесь пределы интегрирования конечны. Уравнения (8.8) и (8.12) удобны для аналитических решений. С помощью их, например, путем элементарных вычислений легко можно получить зависимости теории волн конечной амплитуды. Если положить в формуле (8.8) $v_x = 0$, $v_y = 0$, то получится уравнение, которое может быть использовано для исследования волн конечной амплитуды

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[1+\frac{y_1'(y_1-\eta_1)}{x-\xi}\right]\sqrt{1+\eta_1'^2}\sqrt{1-2m\eta_1}\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{y_1-\eta_1}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)}=\frac{y_1'}{2};$$

$$m=\frac{g}{v_\infty^2}. \tag{8.13}$$

Полагая $\eta_1'^2<1$, $|2m\eta_1|<1$, производя разложение подынтегрального выражения в ряд по степеням η_1', $2m\eta_1$ и $\frac{(y_1-\eta_1)}{(x-\xi)}$, подставляя затем в левую и правую части выражения для y_1 и η_1 в виде ряда

$$y_1=a_1\cos kx+a_2\cos 2kx+a_3\cos 3kx+\ldots \tag{8.14}$$

и производя элементарные вычисления с использованием формул

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos nk\xi}{x-\xi}\,d\xi=\pi\sin nkx; \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nk\xi}{x-\xi}\,d\xi=-\pi\cos nkx,$$

получим в левой и правой частях уравнения (8.13) ряды по синусам. Сравнение коэффициентов при синусах одинаковых углов позволяет составить систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_2, a_3 и т. д. (коэффициент a_1 — величина заданная). Ниже приведена система для вычисления коэф-

фициентов ряда (8.14), в котором сохранены только три первых члена

$$\left.\begin{aligned} k-m&=\frac{3}{8}mk^2a_1^2+\frac{3}{8}m^3a_1^2+\frac{1}{2}m^2a_2;\\ (2k-m)\,a_2&=\frac{1}{4}(m^2+k^2)\,a_1^2;\\ (3k-m)\,a_3&=\left(\frac{1}{2}m^2+k^2\right)a_1a_2+\frac{1}{8}(mk^2-m^3)\,a_1^3, \end{aligned}\right\} \qquad (8.15)$$

где $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ (λ — длина волны).

Из первого уравнения системы (8.15) следует, что разность между m и k выражается членами не ниже второго порядка малости отношения амплитуды первой гармоники к длине волны. Значит, с принятой точностью вычислений из второго уравнения следует, что $a_2=\dfrac{1}{2}ka_1^2$. Тогда из первого уравнения следует, что $k-m=k^2a_1^2$, откуда можно вычислить зависимость скорости распространения волны от ее длины и амплитуды

$$v_\infty^2=\frac{g\lambda}{2\pi}(1+k^2a_1^2). \qquad (8.16)$$

Из третьего уравнения следует, что $a_3=\dfrac{3}{8}k^2a_1^2$. Вычисленные данные находятся в согласии с результатами, приведенными в работах [52, 80]. Не представляет принципиальных затруднений и вычисление коэффициентов следующих членов ряда, имеющих более высокий порядок малости. Для волн исчезающе малой амплитуды в формуле (8.16) можно пренебречь величиной $k^2a_1^2$ по сравнению с единицей и получить известное выражение линейной теории волн, связывающее скорость распространения волны с ее длиной.

§ 48. Течение тяжелой жидкости над дном произвольной формы

Рассмотрим поток ограниченной глубины. Для имитации свободной поверхности жидкости и дна рассматривается обтекание безграничным потоком двух контуров, изображенных на рис. 149. Стенки $B_1'A_1$, F_1E_1, $B_1'C_1'$ и C_1D_1 параллельны вектору скорости набегающего потока, а стенка A_1F_1 имеет профиль произвольной формы.

Также, как это было сделано в § 46, обтекание этих контуров заменяют обтеканием вихревых слоев и записывают соотношение, аналогичное равенству (8.1), в котором интегрирование производят по обоим контурам.

Интеграл по верхнему контуру разбивают на промежутки AA', $A'B$, BB', $B'B''$, $B''C'$, $C'C$, CD, DE, EF', $F'F$ и FA. Интеграл по нижнему контуру также разбивают на соответствующие промежутки и для простоты в дальнейших выкладках принимают $BB' = B_1B_1' = B''C' = B_1''C_1' = p_2$.

Произведем оценку отдельных интегралов для значений s, лежащих на кусках контуров в промежутках $A'F'$ и $A_1'F_1'$. При

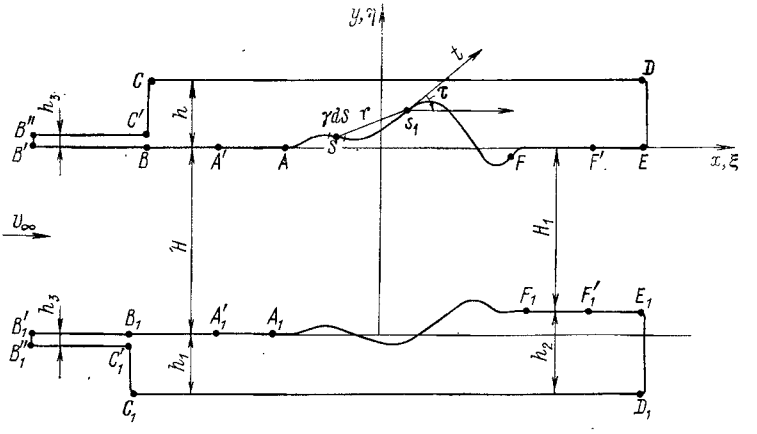


Рис. 149. Схема обтекания двух контуров

увеличении протяженности верхнего и нижнего контуров вдоль оси x, и сохранении конечными значений h, h_1, h_2 и h_3, интегралы по CC', C_1C_1', DE и D_1E_1 стремятся к нулю, как

$$\frac{h}{BA'};\quad \frac{h_1}{B_1A_1'};\quad \frac{h}{EF'};\quad \frac{h_2}{E_1F_1'}\left(BA' \to \infty,\ B_1A_1' \to \infty,\right.$$

$$\left. EF' \to \infty,\quad E_1F_1' \to \infty\right).$$

Для достаточно больших значений $p_2\left(\frac{h}{p_2} \to 0;\ \frac{h_3}{p_2} \to 0\right)$, а также при условии $h_3/H \ll 1$ (см. рис. 149), скорость на стенках BB', $B''C'$, B_1B_1', $B_1''C_1'$ будет постоянной и равной v_∞ за исключением малых окрестностей вблизи точек B', B'', C', B_1', B_1'', C_1', поэтому интегралы по кускам контуров $BB'B''C'$ и $B_1B_1'B_1''C_1'$ стремятся к нулю при $BA' \to \infty$, $B_1A_1' \to \infty$.

Остаются справедливыми приведенные в § 46 оценки для скоростей на CD, C_1D_1, BA' и B_1A_1' при тех же условиях, накладываемых на величину отрезков AA', A_1A_1' и на максимальные значения отклонений ординат точек свободной поверхности и дна от горизонтальных линий $y = 0$ и $y = -H$, соответственно. Кроме этого, должны быть достаточно большими сдвиги по оси

x точки A' по отношению к точке A_1 и точки A_1' по отношению к точке A. При выполнении этих условий в сечении между стенками $A'B'$ и $A_1'B_1'$ можно пренебречь возмущениями скорости набегающего потока и считать скорость постоянной, совпадающей по величине и направлению с v_∞.

При оценке скоростей на $F'E$ и $F_1'E_1$ можно наложить те же условия на длины отрезков FF', F_1F_1'; на максимальные отклонения ординат свободной поверхности и линии дна от осей $y = 0$ и $y = -H$, а также на сдвиги точек F' и F_1' по отношению к точкам F_1 и F, соответственно. Тогда эти скорости можно считать также постоянными, и можно определить их из условия постоянства расхода жидкости через входное и выходное сечения между верхним и нижним контурами

$$v = v_\infty \frac{H}{H_1}, \tag{8.17}$$

где H_1 — ширина выходного сечения (см. рис. 149).

Оценка интегралов по оставшимся промежуткам с учетом приведенной выше оценки для скоростей приведена ниже

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C^D \frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\,\gamma(s_1)\,ds_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_1}^{D_1} \frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\,\gamma(s_1)\,ds_1 = -\sin\tau(s)$$

$$\text{при } C \to -\infty,\quad C_1 \to -\infty,\quad D \to \infty,\quad D_1 \to \infty; \tag{8.18}$$

$$i_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_B^{x_1} \frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\,\gamma(s_1)\,ds_1 = \frac{1}{2\pi}\cos\tau(s)\ln\left|\frac{x-B}{x-x_1}\right|; \tag{8.19}$$

$$i_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_2}^{E} \frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\,\gamma(s_1)\,ds_1 = \frac{H}{2\pi H_1}\cos\tau(s)\ln\left|\frac{x-x_2}{x-E}\right|; \tag{8.20}$$

$$i_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_1}^{x_1'} \frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\,\gamma(s_1)\,ds_1 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\cos\tau(s)\ln\frac{H^2+(x-B_1)^2}{H^2+(x-x_1')^2} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sin\tau(s)\operatorname{arctg}\frac{H(x_1'-B_1)}{H^2+(x-B_1)(x-x_1')}; \tag{8.21}$$

$$i_4 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_2'}^{E_1} \frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\,\gamma(s_1)\,ds_1 =$$

$$= -\frac{H}{4\pi H_1}\cos\tau(s)\ln\frac{H_1^2+(x-x_2')^2}{H_1^2+(x-E_1)^2} +$$

$$+\frac{H}{2\pi H_1}\sin\tau(s)\operatorname{arctg}\frac{H_1(x_2'-E_1)}{H_1^2+(x-E_1)(x-x_2')}. \tag{8.22}$$

Выражения (8.20)—(8.22) записаны для точек свободной поверхности и участков стенок верхнего контура между точками A' и A, а также F и F'; через x'_1 и x'_2 обозначены абсциссы точек A'_1 и F'_1, соответственно.

$$i_5=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_1}^{x'_1}\frac{\cos(r,\ t)}{r}\gamma(s_1)\,ds_1=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\cos\tau(s)\ln\left|\frac{x-B_1}{x-x'_1}\right|; \qquad (8.23)$$

$$i_6=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x'_2}^{E_1}\frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\gamma(s_1)\,ds_1=$$

$$=-\frac{H}{2\pi H_1}\cos\tau(s)\ln\left|\frac{x-x'_2}{x-E_1}\right|; \qquad (8.24)$$

$$i_7=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B}^{x_1}\frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\gamma(s)\,ds_1=\frac{1}{4\pi}\cos\tau(s)\ln\frac{H^2+(x-B)^2}{H^2+(x-x_1)^2}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sin\tau(s)\operatorname{arctg}\frac{H(x_1-B)}{H^2+(x-B)(x-x_1)}; \qquad (8.25)$$

$$i_8=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_2}^{E}\frac{\cos\widehat{(r,\ t)}}{r}\gamma(s_1)\,ds_1=\frac{H}{4\pi H_1}\cos\tau(s)\ln\frac{H_1^2+(x-x_2)^2}{H_1^2+(x-E)^2}+$$

$$+\frac{H}{2\pi H_1}\sin\tau(s)\operatorname{arctg}\frac{H_1(x_2-E)}{H_1^2+(x-E)(x-x_2)}. \qquad (8.26)$$

Уравнения (8.23)—(8.26) написаны для точек линии дна, заключенных между A'_1 и F'_1.

Полагая $B\to-\infty$, $B_1\to-\infty$, $E\to\infty$, $E_1\to\infty$ и учитывая формулы

$$\cos\tau=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2_1}};\qquad \sin\tau=\frac{y'_1}{\sqrt{1+y'^2_1}}$$

(для точек свободной поверхности);

$$\cos\tau=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2_0}};\qquad \sin\tau=\frac{y'_0}{\sqrt{1+y'^2_0}}$$

(для точек дна),

где $y_0(x)$ — ординаты линии дна, отсчитываемые от горизонтальной прямой $y = -H$, сгруппируем приведенные выше выражения для $i - i_8$

$$i_1+i_3=\frac{1}{2\pi\sqrt{1+y_1'^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{H^2+(x-x_1')^2}{(x-x_1)^2}-\right.$$

$$\left.-y_1'\operatorname{arctg}\frac{H}{(x-x_1')}\right]; \qquad (8.27)$$

$$i_2+i_4=\frac{H}{2\pi H_1\sqrt{1+y_1'^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(x-x_2)^2}{H_1^2+(x-x_2')^2}+\right.$$

$$\left.+y_1'\operatorname{arctg}\frac{H_1}{x-x_2'}\right]; \qquad (8.28)$$

$$i_5+i_7=\frac{1}{2\pi\sqrt{1+y_0'^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(x-x_1')^2}{H^2+(x-x_1)^2}-\right.$$

$$\left.-y_0'\operatorname{arctg}\frac{H}{x-x_1}\right]; \qquad (8.29)$$

$$i_6+i_8=\frac{H}{2\pi H_1\sqrt{1+y_2'^2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{H_1^2+(x-x_2)^2}{(x-x_2')^2}+\right.$$

$$\left.+y_0'\operatorname{arctg}\frac{H_1}{x-x_2}\right]. \qquad (8.30)$$

С учетом формул (8.27)—(8.30) можно записать по аналогии с уравнением (8.7)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\left(1+y_1'\frac{y_1-\eta_1}{x-\xi}\right)\sqrt{1+\eta_1'^2}\,\gamma(\xi)\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{y_1-\eta_1}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{x_1'}^{x_2'}\frac{\left(1+y_1'\frac{H+y_1-\eta_0}{x-\xi}\right)\sqrt{1+\eta_0'^2}\,\gamma(\xi)\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{H+y_1-\eta_0}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)}=$$

$$=v_x y_1'-v_y-\sqrt{1-y_1'^2}\,[(i_1+i_3)+(i_2+i_4)] \qquad (8.31)$$

$$\text{для } x_1\leqslant x\leqslant x_2,$$

где v_x, v_y — проекции на оси координат скоростей возмущений, вызванных каким-либо источником в точках свободной поверхности

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x_1'}^{x_2'}\frac{\left(1+y_0'\frac{y_0-\eta_0}{x-\xi}\right)\sqrt{1+\eta_0'^2}\,\gamma(\xi)\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{y_0-\eta_0}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\left(1+y_0'\frac{H+\eta_1-y_0}{x-\xi}\right)\sqrt{1+\eta_1'^2}\,\gamma(\xi)\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{H+\eta_1-y_0}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)}=$$

$$=-y_0'v_x+v_y+\sqrt{1+y_0'^2}\,[(i_5+i_7)+(i_6+i_8)] \qquad (8.32)$$

$$\text{для } x_1'\leqslant x\leqslant x_2',$$

где v_x, v_y — проекции скоростей возмущений в точках линии дна.

В первом интеграле (8.31) и втором интеграле (8.32) вихревую интенсивность γ можно выразить по формуле (8.9), тогда получается система интегро-дифференциальных уравнений для определения формы свободной поверхности $y_1(x)$ и значений вихревой интенсивности (касательных скоростей) на дне.

По аналогии с уравнением (8.8) можно в формулах (8.31), (8.32) положить $x_1\to-\infty$, $x_1'\to-\infty$, $x_2\to\infty$, $x_2'\to\infty$, тогда $i_1+i_3=0$, $i_2=i_4=0$, $i_5+i_7=0$, $i_6+i_8=0$. Полученное выражение переходит в соотношение (8.8), если положить $y_0=0$, $H\to\infty$, соответствующим потоку бесконечной глубины.

Для горизонтального дна в приближении теории волн бесконечно малой амплитуды система уравнений существенно упрощается и становится линейной

$$\frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta_1\,d\xi}{x-\xi}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi+Hy_1')\,\gamma(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+H^2}=v_y; \qquad (8.33)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi}+\frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)\,\eta_1\,d\xi}{(x-\xi)^2+H^2}+$$

$$+\frac{H}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)\,\eta_1\,d\xi}{[(x-\xi)^2+H^2]^2}=v_y. \qquad (8.34)$$

При отсутствии возмущений $v_y=0$, уравнения (8.33) и (8.34) имеют два решения. Одно соответствует невозмущенному

потоку над плоским горизонтальным дном $y_1 = 0$, $\gamma = 1$; другое — свободным волнам в потоке ограниченной глубины.

Действительно, полагая $y_1 = a\cos kx$ (для точек свободной поверхности), $\gamma(x) = 1 + b\cos kx$ (для точек дна) и подставляя эти значения в формулы (8.33) и (8.34), после несложных вычислений получим систему двух уравнений для определения амплитудных значений волн на свободной поверхности и скоростей возмущений на дне

$$\left.\begin{aligned}(m-k)\,a + be^{-Hk} &= 0;\\ (m+k)\,e^{-Hk}a + b &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

Для того, чтобы уравнение (8.35) имело решение, отличное от нуля, необходимо, чтобы его определитель равнялся нулю

$$\begin{vmatrix}(m-k), & e^{-Hk}\\ (m+k)\,e^{-Hk}, & 1\end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и заменяя m его выражением, через скорость потока (8.13), равную скорости распространения малых волн в жидкости ограниченной глубины, получим известную зависимость, связывающую указанную скорость с длиной волны и глубиной жидкости

$$v_\infty^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\,\mathrm{th}\,\frac{2\pi H}{\lambda}. \tag{8.36}$$

§ 49. Волны конечной амплитуды над плоским горизонтальным дном

Рассмотрим задачу о волнах конечной амплитуды для случая плоского горизонтального дна. Полагая в уравнениях (8.31) и (8.32) $y_0 = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 0$ и переходя к бесконечным пределам интегрирования, получим систему уравнений для исследования поставленной задачи [70]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(1 + y_1'\,\frac{y_1-\eta_1}{x-\xi}\right)\sqrt{1+\eta_1'^2}\,\sqrt{1-2m\eta_1}\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{y_1-\eta_1}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(1 + y_1'\,\frac{H+y_1}{x-\xi}\right)\gamma(\xi)\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{H+y_1}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)} = 0; \tag{8.37}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\eta_1'^2}\,\sqrt{1-2m\eta_1}\,d\xi}{\left[1+\left(\frac{H+\eta_1}{x-\xi}\right)^2\right](x-\xi)} = 0. \tag{8.38}$$

Также, как в случае бесконечно глубокой жидкости, форму свободной поверхности можно представить в виде тригонометрического ряда. Сохраняя только три первых члена, можно записать

$$y_1 = a_1 \cos kx + a_2 \cos 2kx + a_3 \cos 3kx + \ldots \qquad (8.39)$$

Аналогичным образом можно представить и функцию γ

$$\gamma = 1 + b_1 \cos kx + b_2 \cos 2kx + b_3 \cos 3kx + \ldots \qquad (8.40)$$

Полагая $\eta_1'^2 < 1$, $2m\eta_1 < 1$, $\dfrac{2Hy_1 + y_1^2}{H^2} < 1$, подынтегральные выражения в формулах (8.37) и (8.38) можно представить в виде рядов, сохранив только члены до третьего порядка малости по a_1. После подстановки в полученные выражения значений искомых величин (8.39) и (8.40), вычисления соответствующих интегралов и сравнения коэффициентов при синусах одинаковых углов, получается система алгебраических уравнений относительно коэффициентов, содержащихся в уравнениях (8.39) и (8.40)

$$(k-m)a_1 - b_1 e^{-Hk} - \frac{1}{2}m^2 a_1 a_2 - \frac{3}{8}(m^3 + mk^2)a_1^3 -$$

$$-\left(\frac{3}{8}k^2 a_1^2 - \frac{1}{2}ka_2\right)b_1 e^{-Hk} + \frac{1}{2}kb_2 a_1 e^{-2Hk} = 0;$$

$$(2k-m)a_2 - \frac{1}{4}(m^2 + k^2)a_1^2 + kb_1 a_1 e^{-Hk} - b_2 e^{-2Hk} = 0;$$

$$(3k-m)a_3 - \left(\frac{1}{2}m^2 + k^2\right)a_1 a_2 - \frac{1}{8}(m^3 - mk^2)a_1^3 -$$

$$-\left(\frac{3}{8}k^2 a_1^2 - \frac{3}{2}ka_2\right)b_1 e^{-Hk} + \frac{3}{2}kb_2 a_1 e^{-2Hk} = 0;$$

$$b_1 e^{Hk} + (m+k)a_1 - \left(-\frac{1}{2}m^2 + mk + \frac{3}{2}k^2\right)a_1 a_2 -$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}m^3 + m^2 k - \frac{3}{4}mk^2 - \frac{1}{12}k^3\right)a_1^3 = 0;$$

$$b_2 e^{2Hk} + (m+2k)a_2 - \left(-\frac{1}{4}m^2 + mk + \frac{3}{4}k^2\right)a_1^2 = 0;$$

$$b_3 e^{3Hk} + (m+3k)a_3 - \left(-\frac{1}{2}m^2 + 3mk + \frac{7}{2}k^2\right)a_1 a_2 -$$

$$-\left(-\frac{1}{8}m^3 + \frac{3}{2}m^2 k - \frac{35}{8}mk^2 - \frac{33}{8}k^3\right)a_1^3 = 0.$$

Приведенная система легко решается методом исключения неизвестных. Ниже приведены результаты вычислений, справед-

ливые в силу принятых при решении задачи ограничений для $\frac{v_\infty}{\sqrt{gH}} < 1$ и конечных значений Hk

$$v_\infty^2 = \frac{g}{k}\,\mathrm{th}\,(Hk)(1+\delta k^2 a_1^2);$$

$$\delta = \frac{24 + 59e^{-2Hk} + 358e^{-4Hk} + 366e^{-6Hk} + 58e^{-8Hk} + 29e^{-10Hk}}{24\,(1-e^{-4Hk})\,(1-e^{-2Hk})^3};$$

$$a_2 = \frac{1 + 5e^{-2Hk} + 5e^{-4Hk} + e^{-6Hk}}{2\,(1-e^{-2Hk})^3}\,ka_1^2;$$

$$a_3 = \frac{3 + 18e^{-2Hk} + 45e^{-4Hk} + 48e^{-6Hk} - 51e^{-8Hk} - 18e^{-10Hk} + 3e^{-12Hk}}{8\,(1-2e^{-2Hk})\,(1-e^{-2Hk})^4}\,k^2 a_1^3;$$

$$b_1 = \frac{2e^{-Hk}}{1-e^{-2Hk}}\,ka_1 + \left[\delta\,\frac{1+e^{-2Hk}}{1-e^{-2Hk}} + \frac{17 + 83e^{-2Hk} - 88e^{-4Hk} - 256e^{-6Hk} - 73e^{-8Hk} + 29e^{-10Hk}}{24\,(1-e^{-2Hk})^5}\right] e^{-Hk} k^3 a_1^3;$$

$$b_2 = \frac{12e^{-4Hk}}{(1-e^{-2Hk})^4}\,k^2 a_1^2;$$

$$b_3 = \frac{-45 + 345e^{-2Hk} - 1296e^{-4Hk} + 97e^{-6Hk} - 81e^{-8Hk} + 117e^{-10Hk} - 18e^{-12Hk} + 6e^{-14Hk}}{8\,(1-2e^{-2Hk})\,(1-e^{-2Hk})^5}\,e^{-3Hk} k^3 a_1^3.$$

При $Hk \to \infty$ эти формулы переходят в соответствующие зависимости для волн в условиях потока бесконечно большой глубины.

§ 50. Влияние капиллярности

Влияние капиллярности на течение жидкости со свободной поверхностью может быть учтено точно таким же образом, что и влияние силы тяжести. При этом в интегральные уравнения нужно внести только небольшие коррективы вследствие того, что связь между интенсивностью вихрей и формой свободной поверхности несколько отличается от зависимости, даваемой формулой (8.9).

Используя условие равновесия давлений в точках свободной поверхности жидкости и учитывая соотношения (8.1) и (8.2), можно написать уравнение, аналогичное (8.9)

$$\gamma = \sqrt{1 - 2my_1 + 2n\varkappa}, \tag{8.41}$$

где y_1', y_2'' — первая и вторая производные от $y_1(x)$, соответственно; $n = \gamma_1/\rho v_\infty^2$; $\varkappa = y_1''/(1+y_1'^2)^{3/2}$.

Таким образом, остаются в силе все ранее приведенные интегральные уравнения движения жидкости с учетом действия силы тяжести, если в подынтегральных выражениях сомножитель $\sqrt{1-2m\eta_1}$ заменить на $\sqrt{1-2m\eta_1+2n\eta_1''/(1+\eta_1'^2)^{3/2}}$. При этом в интегральных уравнениях будет учтено совместное действие сил тяжести и капиллярности. Для их раздельного учета следует принять или $m=0$, или $n=0$.

Ниже приведены результаты решения задачи о капиллярных волнах конечной амплитуды. Решение ищется в виде ряда

$$y_1=a_1\cos kx+a_2\cos 2kx+a_3\cos 3kx+\ldots, \qquad (8.42)$$

в котором удерживается только три первых члена. Принимая в равенстве (8.41) $m=0$, подставляя это выражение в формулу (8.13) и разлагая подынтегральное выражение в ряд с сохранением членов до третьего порядка малости, после вычислений получаются в левой и правой частях равенства (8.13) ряды по синусам. Приравнивая коэффициенты при синусах кратных дуг между собою, можно получить систему уравнений для определения коэффициентов ряда (8.42) в следующем виде

$$\left.\begin{aligned}
&1-nk-\left(\frac{3}{8}n^3k^5+\frac{1}{2}nk^3\right)a_1^2+\left(2k-4n^2k^3\right)a_2=0;\\
&\left(\frac{5}{4}k+\frac{1}{2}n^2k^3\right)a_1^2-(2-4nk)\,a_2=0;\\
&\frac{1}{8}n^3k^5a_1^3+\left(4n^2k^3+5k\right)a_1a_2+(3-9nk)\,a_3=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.43)$$

Из первого уравнения системы (8.43) следует, что значение nk отличается от единицы слагаемыми второго порядка малости отношения амплитуды первой гармоники (8.42) к длине волны. Используя это легко вычислить

$$a_2=-\frac{7}{8}ka_1^2; \qquad a_3=-\frac{31}{24}k^2a_1^3;$$

$$v_\infty^2=\frac{2\pi\gamma_1}{\rho\lambda}\left(1-\frac{7}{8}k^2a_1^2\right), \qquad (8.44)$$

где $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$; v_∞ — скорость аспространения капиллярных волн; при $a_1\to 0$ получается выражение для скорости, соответствующее линейной теории.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Результаты расчетов осесимметричного кавитационного обтекания тел безграничным потоком и в трубах

В приведенных графиках даны результаты численного расчета осесимметричных кавитационных течений, которые могут быть использованы непосредственно при решении практических вопросов. Там, где оказалось возможным, проведено сравнение с данными опытов.

При расчетах для решения прямой задачи использовались уравнения (5.10), (5.31), а для решения обратной задачи — уравнения (5.8), (5.32). В качестве схемы течения в хвосте каверны была принята обобщенная схема Рябушинского с замыканием границы каверны на диск, плоскость которого перпендикулярна вектору скорости набегающего потока. Ниже приведены комментарии к результатам расчетов.

На рис. П.1 даны зависимости коэффициента кавитационного сопротивления C_x от числа кавитации для четырех эллипсоидов вращения, характеризующихся величиной λ отношения осей — перпендикулярной и параллельной вектору скорости набегающего потока ($\lambda=1$ соответствует шару). Здесь же (темные кружки) приведены экспериментальные данные Л. А. Эпштейна [58] и М. Ю. Цейтлина [55] (светлые кружки).

На рис. П.2 приведена зависимость коэффициента сопротивления конуса от величины угла при вершине для нулевого значения числа кавитации. Кружками обозначены экспериментальные данные Л. А. Эпштейна, а пунктирной линией — результаты приближенного расчета Плессета и Шеффера [77]. Последние получены в предположении о том, что распределение давления по образующей конуса такое же, как по щеке клина с углом при вершине равным β^0 в плоской задаче.

Из приведенных данных видно, что при малых значениях угла при вершине результаты приближенного расчета могут существенно отличаться от результатов расчета точного, а также от экспериментальных данных.

На рис. П.3 построены зависимости от числа кавитации коэффициента сопротивления трех конусов с углами при вершине 30, 60 и 90°. Пунктирными линиями обозначены результаты упомянутых расчетов [77], светлыми кружками — экспериментальные данные Л. А. Эпштейна [58], темными — экспериментальные данные Рейхардта [78].

На рис. П.4—П.5 приведены зависимости от числа кавитации отношений, соответственно, площади основания конусов к максимальной площади поперечного сечения каверны $\overline{S}$ и длины каверны к ее максимальной ширине для шара (сплошная кривая).

На рис. П.5 пунктирная кривая построена по данным расчетов, приведенных в работе [65]. Крестиками обозначены опытные данные, содержащиеся в работе [38]. Указанные данные получены в струе при весьма малом загромождении потока (отношение площади шара к площади струи) порядка 10^{-5}—10^{-6}, что обеспечивает корректность сопоставлений данных опытов и расчетов.

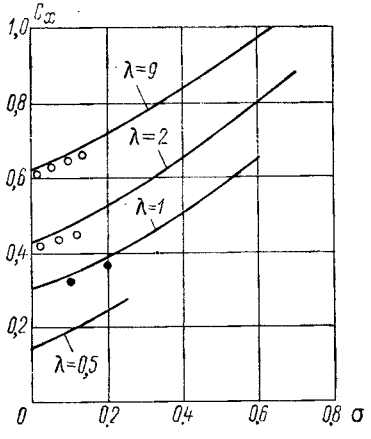


Рис. П.1. Зависимости коэффициента кавитационного сопротивления C_x эллипсоидов вращения от числа кавитации

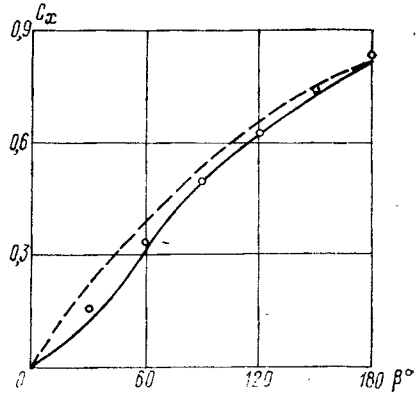


Рис. П.2. Зависимость коэффициента сопротивления конуса от величины угла при вершине для $\sigma=0$

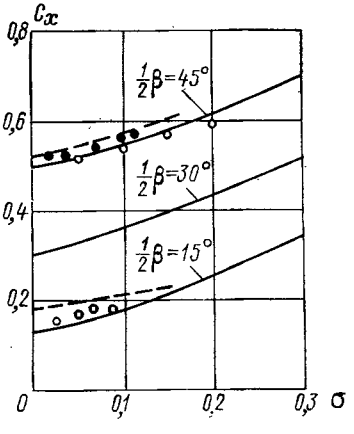


Рис. П.3. Зависимости от числа кавитации коэффициента сопротивления конусов

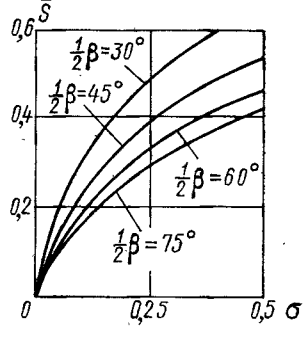


Рис. П.4. Зависимости от числа кавитации отношения площади основания конусов к максимальной площади поперечного сечения каверны $\bar{S}$

На рис. П.6 приведены зависимости от числа кавитации коэффициента сопротивления эллипсоидов малого удлинения и тела вращения, образующая которого соответствует профилю NACA—0030.

На рис. П.7 и П.8 построены зависимости от числа кавитации коэффициента сопротивления и приведены отношения максимальных площадей тела и каверны $\overline{S}$ для различных тел (сплошные кривые). Здесь же пунктиром обозначены полуэмпирические зависимости, полученные Л. А. Эпштейном [58]

$$C_x = C_{x_0}(1+\sigma);\quad \overline{S} = \frac{\overline{k}\sigma}{C_{x_0}(1+\sigma)},$$

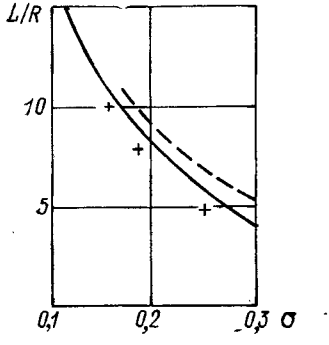


Рис. П.5. Зависимость от числа кавитации отношения длины каверны к максимальной ширине (для шара)

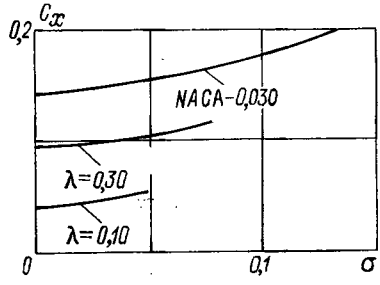


Рис. П.6. Зависимости от числа кавитации коэффициентов сопротивления эллипсоидов малого удлинения и тела вращения

где C_{x_0} — коэффициент сопротивления тела при нулевом значении числа кавитации; $\overline{k}$ — эмпирический коэффициент, значение которого изменяется в пределах 0,9—1,1.

Штрихпунктиром на рис. П.7 показана зависимость, данная формулой Бетца

$$C_x = C_{x_0} + \sigma.$$

На рис. П.7 светлыми кружками обозначены опытные данные Л. А. Эпштейна, а темными — Рейхардта.

В случае частичной кавитации зависимости коэффициента сопротивления и размеров каверны от числа кавитации для некоторых тел могут быть весьма сложными. На рис. П.9 изображена верхняя половина меридионального сечения тела вращения, имеющего образующую, соответствующую профилю NACA—0030. На нем изображен также ряд контуров сечений каверн, замыкающихся на кольцевые пластины. На рис. П.10 и П-11 цифрами *1* обозначены для этого тела зависимости коэффициента сопротивления и относительной длины каверны от числа кавитации (L — расстояние между передней критической точкой на теле и замыкающим каверну кольцом, L_1 — длина тела). Эти зависимости имеют сравнительно плавный характер. Цифрами *2* на указанных рисунках обозначены зависимости, соответствующие телу с большой цилиндрической вставкой, верхняя половина меридионального сечения которого изображена на рис. П.12.

На рис. П.12 показаны также границы каверн, соответствующие нескольким значениям числа кавитации. Как следует из рис. П.10 при числе кавитации равном приблизительно 0,2 на кривой $C_x(\sigma)$ имеется резкий минимум, после

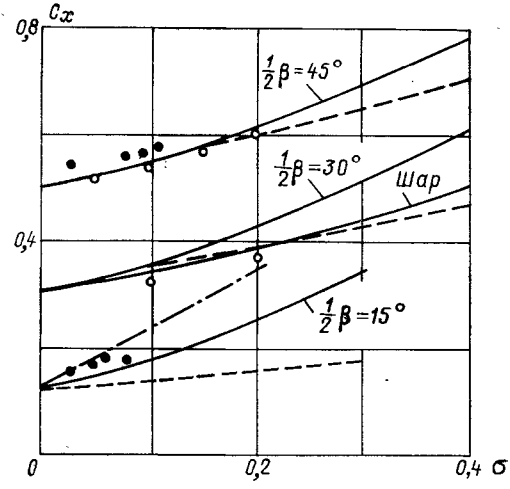


Рис. П.7. Зависимости $C_x(\sigma)$ для конусов и шара

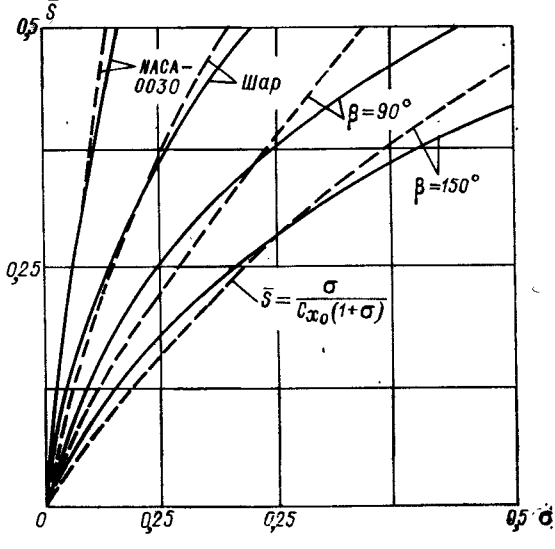


Рис. П.8. Зависимости $\bar{S}(\sigma)$ для конусов, шара и тела вращения с образующей, соответствующей профилю NACA-0030

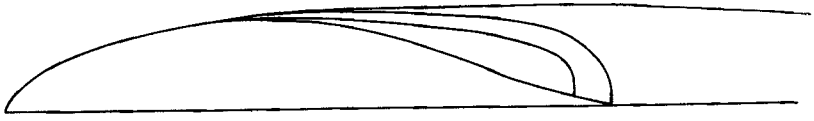


Рис. П.9. Меридиональное сечение тела вращения и границ каверн для различных значений σ

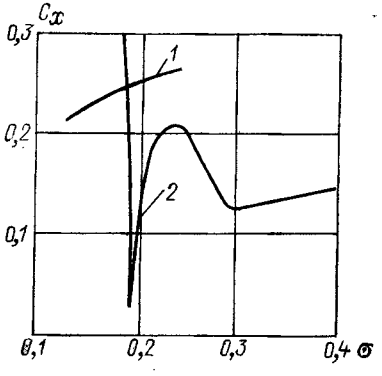


Рис. П.10. Зависимости $C_x(\sigma)$ для тела вращения с образующей, соответствующей профилю NACA-0030, и тела вращения с большой цилиндрической вставкой

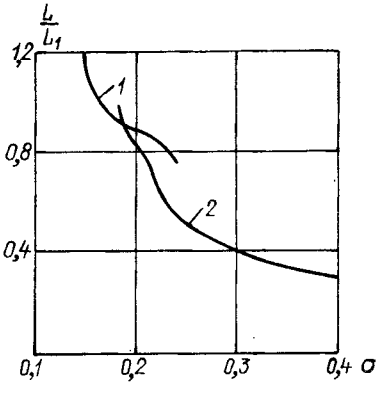


Рис. П.11. Зависимости L/L_1 от σ для тела вращения с образующей, соответствующей профилю NACA-0030, и тела вращения с большой цилиндрической вставкой

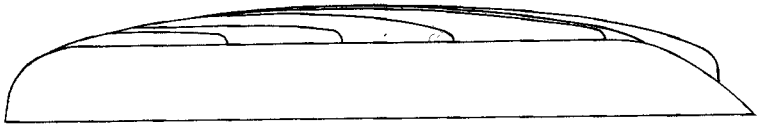


Рис. П.12. Меридиональное сечение тела с большой цилиндрической вставкой и границ каверн для различных значений σ

которого с увеличением длины каверны (понижением числа кавитации) C_x стремительно растет, достигая значения, соответствующего шару.

На рис. П.13—П.17 приведены данные расчетов кавитационного обтекания тел в трубе с постоянным радиусом сечения и трубе реальной конструкции с поджатием равным 11 и длиной рабочего участка равной 1,8 м с почти постоянной площадью поперечного сечения. В качестве одного из параметров, характеризующих течение в трубе, принята величина коэффициента загрузки k, равного отношению площади миделевого сечения тела к площади поперечного сечения трубы.

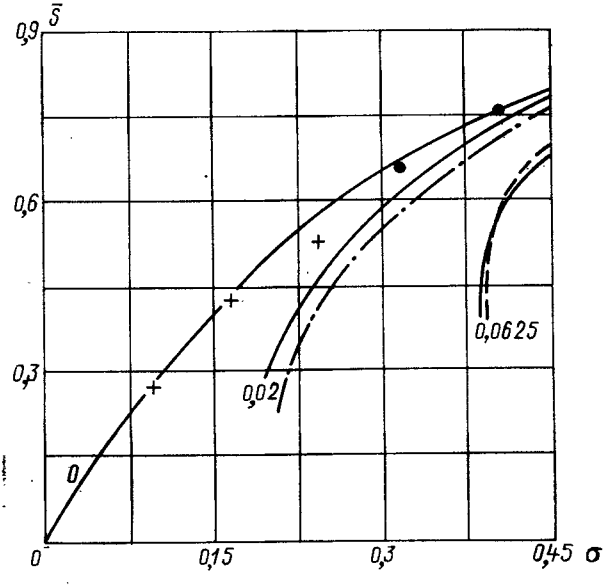


Рис. П.13. Зависимости $\overline{S}(\sigma)$ для шара

На рис. П.13 изображены зависимости от числа кавитации значения $\overline{S}$ для шара при различных загрузках сечения. Верхняя кривая соответствует безграничному потоку, кружки [64] и крестики [38] — эксперименту. Пунктирная кривая соответствует расчету [64] для коэффициента загрузки, равного 0,0625, а штрихпунктирная — расчету по предлагаемой методике для коэффициента загрузки 0,02 гидродинамической трубы реальной конструкции. Приведенные данные свидетельствуют об удовлетворительном согласии расчета и эксперимента. Сравнение сплошной и штрихпунктирной кривых для $k=0{,}02$ свидетельствует о сравнительно небольшом влиянии реальной профилировки трубы.

Небольшую разницу между результатами расчетов Бреннена [64] (пунктир) и по предлагаемой методике (сплошная кривая) можно отнести за счет различных схем замыкания каверны — на шар и на диск.

На рис. П.14 приведены кривые, показывающие зависимость от числа кавитации коэффициента сопротивления шара, помещенного в трубу, отнесенного к коэффициенту сопротивления в безграничном потоке. Кривые соответствуют трем значениям коэффициента загрузки сечения трубы — 0,01, 0,02 и 0,0625.

На рис. П.15 даны зависимости $\overline{S}(\sigma)$ для трех конусов с разной величиной угла при вершине и трех значений коэффициента загрузки k.

На рис. П.16 построены зависимости минимального числа кавитации σ_{min} от параметра $\sqrt{k}$ для конуса с углом при вершине $\beta=90°$, шара ($\lambda=1$) и эллипсоида вращения с $\lambda=0{,}3$. Здесь же пунктирными линиями даны зависимости [59]

$$\sigma_{min}=\left(1-\sqrt{kC_{x_0}}\right)^{-2}-1.$$

Приведенные данные свидетельствуют о сильном влиянии загрузки сечения трубы, приводящем к существенному снижению величины минимального зна-

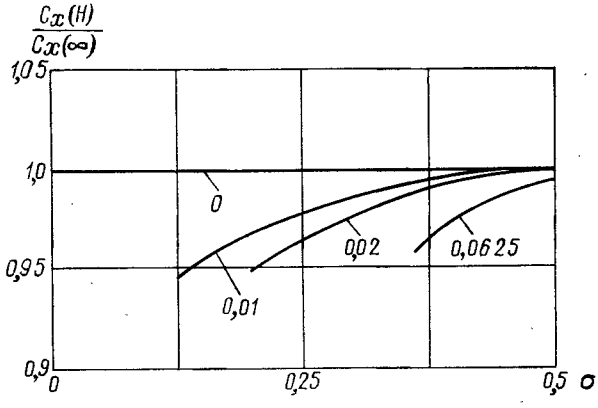


Рис. П.14. Зависимости $C_x(H)/C_{x_\infty}$ от σ

чения числа кавитации, которого можно достичь при кавитационных испытаниях различных тел. Достижение меньших значений невозможно вследствие «запирания» трубы.

На рис. П.17 приведены зависимости $\overline{S}(\sigma)$ для конуса с углом при вершине $\beta=90°$ в широком диапазоне изменения параметра k.

В связи с экспериментальными исследованиями в кавитационных и гидродинамических трубах представляет практический интерес оценка влияния перепада давления в рабочем участке трубы, обусловленного гидравлическими потерями, на параметры кавитационного обтекания тела (сопротивление и размеры каверны). Пользуясь предлагаемой методикой расчета, это нетрудно сделать, записав интеграл Бернулли для линии тока, совпадающей с каверной, с учетом указанного перепада давления. Это выразится в конечном итоге в том, что скорость на границе каверны уже не будет постоянной, как в случае безграничного потока, а будет зависеть от величины перепада давления.

Если рассматривать обтекание тела в круглой длинной трубе постоянного радиуса вдали от входного ее сечения, то величину перепада давления вдоль трубы можно определить с помощью обычных формул гидравлики. Как показывают расчеты, для круглой гладкой трубы при практически приемлемых коэффициентах загрузки влияние гидравлического перепада оказывается незначительным для режимов, когда длина каверны имеет порядок до пяти радиусов трубы. И только на режимах, близких к запиранию, т. е. при $\sigma\longrightarrow\sigma_{min}$, этот перепад оказывает заметное влияние на параметры течения.

В гидродинамических трубах реальной конструкции вследствие наличия конфузора для закона падения давления вдоль рабочего участка будет ближе

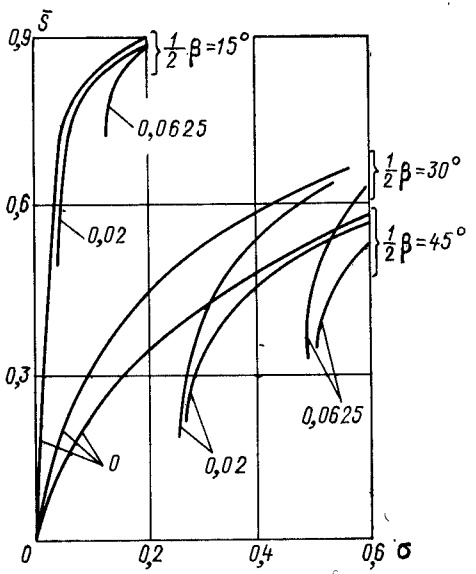


Рис. П.15. Зависимости $\bar{S}(\sigma)$ для конусов

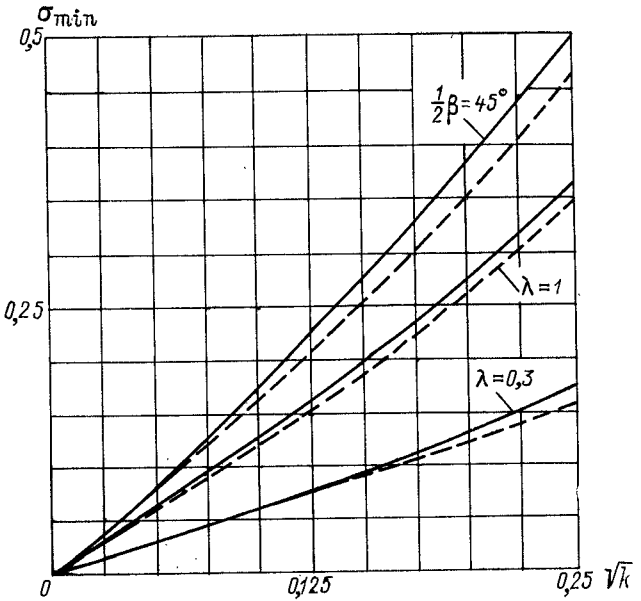


Рис. П.16. Зависимости $\tilde{\sigma}_{\min}$ от параметра $\sqrt{k}$ для конуса шара и эллипсоида вращения

соответствовать оценка, основанная на использовании соотношения для трения на поверхности плоской пластины, ширина которой равна периметру поперечного сечения рабочего участка [48].

Как показывают результаты расчетов и в этом случае, если испытуемое тело помещать не непосредственно в начале рабочего участка, а располагать

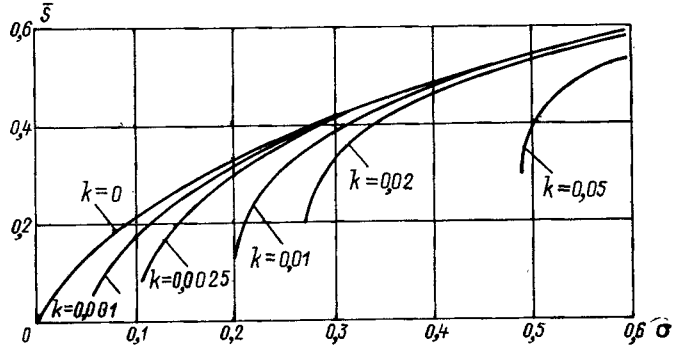


Рис. П.17. Зависимость $\overline{S}(\sigma)$ для конуса с углом при вершине $\beta=90°$

на расстоянии от входного сечения, определяемом $\mathrm{Re}_{x_0} \geqslant 10^6$, перепадом давления, обусловленном гидравлическими потерями, при $\sigma > \sigma_{\min}$ можно пренебречь (Re_{x_0} — число Рейнольдса, где в качестве линейного размера x_0 принято расстояние от входного сечения рабочего участка до испытуемого тела).

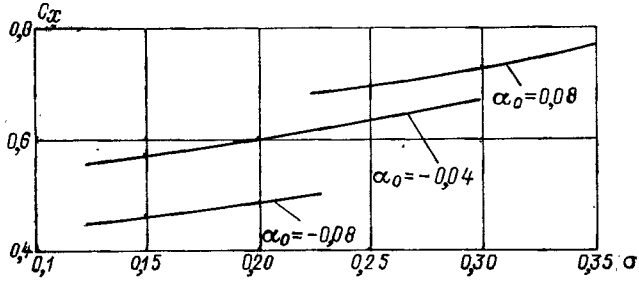


Рис. П.18. Зависимости $C_x(\sigma)$ для различных значений параметра α_0 для конуса $\beta=90°$

Существенным образом на кавитационное течение может сказаться влияние перепада давления, обусловленного неодинаковостью радиуса трубы вдоль ее оси.

На рис. П.18—П.21 приведены результаты расчета обтекания конуса с углом при вершине равным 90°, помещенного в трубу, меридиональное сечение которой выбрано таким образом, чтобы в отсутствие конуса был обеспечен постоянный градиент давления вдоль трубы $\frac{\partial p}{\partial x} \sim -\alpha_0$. Коэффициент α_0 положителен для конфузора и отрицателен для диффузора. Коэффициент загрузки сечения принят постоянным, равным $k=0{,}01$. Он определялся для поперечного сечения трубы, совпадающего с торцем конуса. Начиная

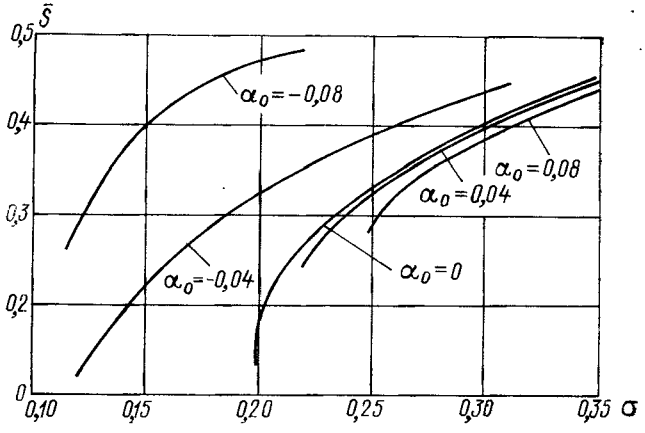


Рис. П.19. Зависимости $\overline{S}(\sigma)$ для различных значений параметра α_0 для конуса $\beta=90°$

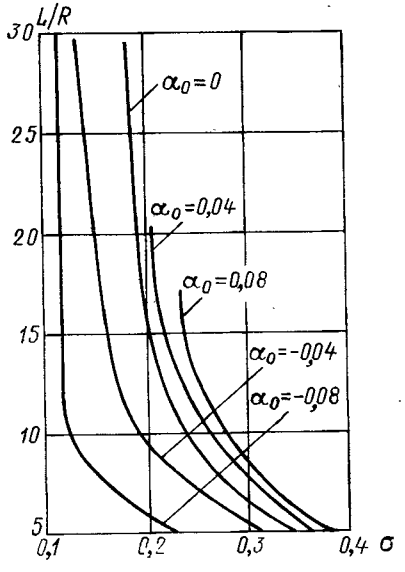


Рис. П.20. Зависимости L/R от σ для различных значений параметра α_0 для конуса $\beta=90°$

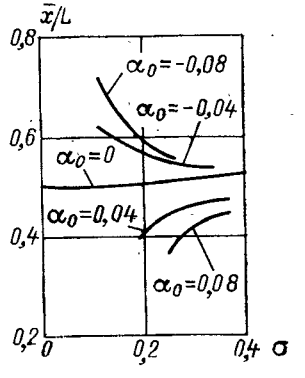


Рис. П.21. Зависимости $\overline{x}/L$ от σ для различных значений параметра α_0 для конуса $\beta=90°$

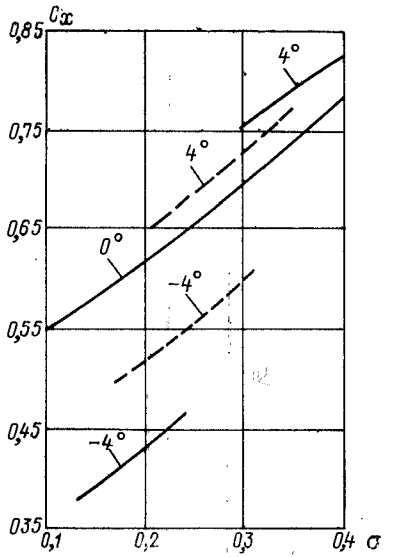


Рис. П.22. Зависимости $C_x(\sigma)$ для конуса $\beta=90°$ при обтекании в конфузорных и диффузорных трубах

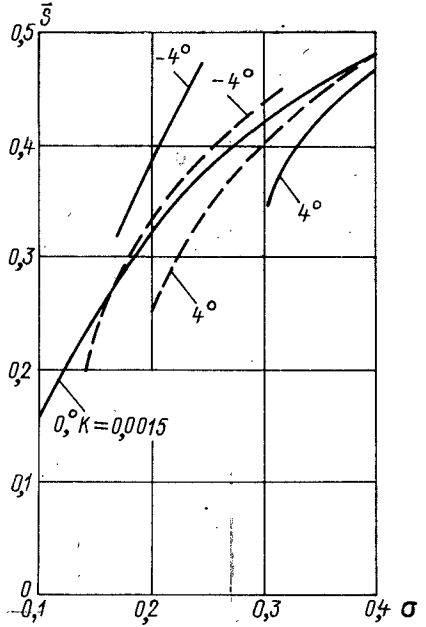


Рис. П.23. Зависимости $\bar{S}(\sigma)$ для конуса $\beta=90°$ при обтекании в конфузорных и диффузорных трубах

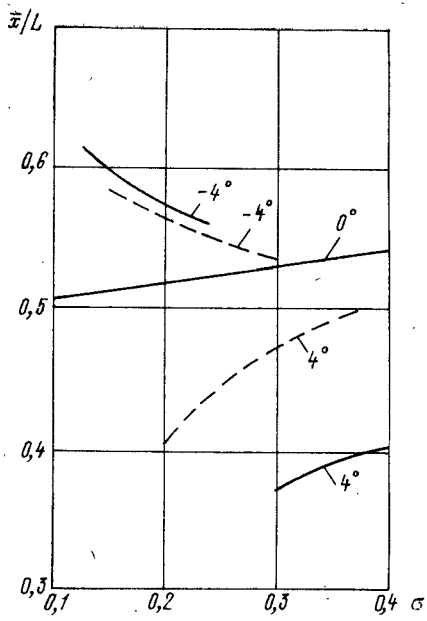


Рис. П.24. Зависимости $\bar{x}/L$ от σ для конуса $\beta=90°$ при обтекании в конфузорных и диффузорных трубах

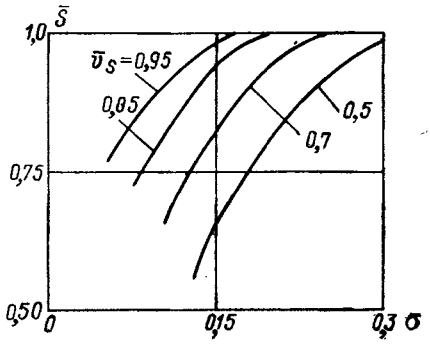


Рис. П.25. Зависимости $\bar{S}(\sigma)$ для гондолы водозаборника водометного движителя

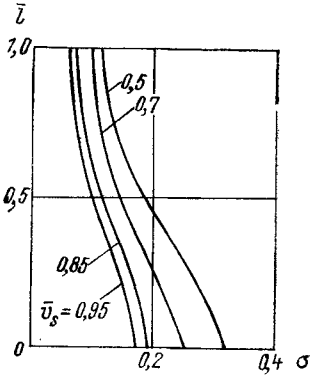


Рис. П.26. Зависимости $\bar{l}(\sigma)$ для гондолы водозаборника водометного движителя

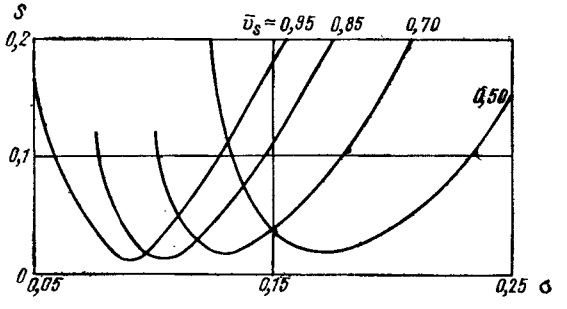


Рис. П.27. Зависимости $S(\sigma)$ для гондолы водозаборника водометного движителя от числа кавитации

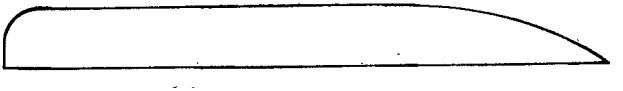


Рис. П.28. Меридиональное сечение гондолы водозаборника водометного движителя

с расстояния, равного ста радиусам торца конуса от этого сечения, площади сечений трубы вверх и вниз по потоку принимались постоянными. Число кавитации определялось по параметрам невозмущенного потока в поперечном сечении трубы, совпадающим с торцем конуса.

На рис. П.18 приведены зависимости $C_x(\sigma)$, а на рис. П.19 — $\overline{S}(\sigma)$ для ряда значений α_0.

На рис. П.20 даны зависимости длины каверны, отнесенной к радиусу трубы в сечении, совпадающем с торцем конуса L/R, от числа кавитации для ряда значений параметра α_0. Из приведенных графиков видно, что увеличение конфузорности приводит к вытягиванию каверны вниз по потоку.

На рис. П.21 построены зависимости от числа кавитации положения миделевого сечения каверны для ряда значений параметра α_0 ($\overline{x}$ — расстояние миделя каверны от торца конуса; L — длина каверны). Из приведенных графиков видно, что мидель каверны с увеличением конфузорности трубы существенно смещается в сторону конуса. Изменение параметра $\overline{x}$ в зависимости от σ для трубы с постоянным радиусом ($\alpha_0=0$) объясняется несимметричной кавитационной схемой принятой при расчетах (замыкание каверны на диск).

На рис. П.22—П.24 приведены результаты расчетов для конфузорных и диффузорных труб с прямолинейной образующей, наклоненной к продольной оси симметрии на угол $\alpha=\pm 4°$. Коэффициент загрузки и число кавитации в этом случае определялись способом аналогичным приведенному выше. Расчеты производились для двух значений поджатия (расширения), определяемого как отношение площадей цилиндрических частей трубы. Пунктирные линии на указанных выше рисунках соответствуют коэффициенту поджатия 2,5, а сплошные — (—4,3). При этом коэффициент загрузки сохраняется постоянным, равным $k=0{,}0015$.

На рис. П.25—П.27 приведены результаты расчетов кавитационного обтекания гондолы водозаборника водометного движителя, выполненной в виде тела вращения, меридиональное сечение которого представлено на рис. П.28. Влияние на обтекание гондолы втекания воды в водозаборное отверстие имитировалось помещением в это отверстие диска стоков. Расчеты производились для четырех значений параметра $\overline{v}_S$, равного отношению скорости втекания воды в водозаборник к скорости движения гондолы.

На рис. П.25 приведена зависимость $\overline{S}(\sigma)$ для значений $\overline{v}_S$ равных 0,5; 0,7; 0,85; 0,95.

На рис. П.26 приведены зависимости $\overline{l}(\sigma)$, где $\overline{l}$ — величина равная отношению длины каверны к длине гондолы.

На рис. П.27 даны зависимости величины S от числа кавитации, где S — площадь кольца, на которое замыкается каверна, отнесенная к квадрату радиуса миделевого сечения гондолы. Эта величина характеризует кавитационное сопротивление, возникающее на гондоле вследствие образования каверны. Как следует из приведенных данных при некоторых значениях параметров σ и $\overline{v}_S$ величина S, а следовательно, и кавитационного сопротивления близка к нулю, что свидетельствует о принципиальной возможности создания водозаборников с малым кавитационным сопротивлением.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айылчиев А., Саламатов Д. С.** К струйному обтеканию осесимметричных тел вращения.— Материалы первой конференции молодых ученых АН Киргизской ССР, 1970, с. 28—32.

2. **Айылчиев А., Саламатов Д. С.** Применение метода вихревого слоя к решению задачи кавитационного обтекания плоского препятствия.— Труды Киргизского университета, 1974, вып. 9, с. 14—19.

3. **Александров К. В., Иванов А. Н., Миниович И. Я.** Влияние формы входящей кромки крылового профиля на возникновение кавитации при обтекании профиля. Симпозиум по физике акустико-гидродинамических явлений (17—21 ноября 1975 г). Сборник докладов. М., Наука, 1975, с. 11—16.

4. **Александров К. В.** Струйное обтекание клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность.— Известия АН СССР, МЖГ, 1976, № 4, с. 140—143.

5. **Александров К. В.** Частичная кавитация произвольного профиля. Всесоюзная научно-техническая конференция по применению ЭВМ и численных методов в гидромеханике судна. Л., Судостроение, 1977.

6. **Амромин Э. Л., Иванов А. Н.** О пересчете результатов кавитационных испытаний тел вращения в трубах на условия обтекания неограниченным потоком.— Труды НТО судпрома, 1977, вып. 253, с. 4—17.

7. **Амромин Э. Л., Иванов А. Н.** Осесимметричное кавитационное обтекание тела в трубе.— Известия АН СССР, МЖГ, 1976, № 4, с. 50—55.

8. **Амромин Э. Л., Иванов А. Н.** Осесимметричное обтекание тел в режиме развитой кавитации.— Известия АН СССР, МЖГ, 1975, № 3, с. 37—42.

9. **Барабаиов В. А., Бутузов А. А., Иваиов А. Н.** и др. Отрывное кавитационное обтекание в случае глиссирования и в безграничном потоке.— Труды Международного симпозиума по неустановившимся движениям воды с большими скоростями. 1971, 1973, с. 292—297.

10. **Барабаиов В. А., Иванов А. Н.** Применение вихревого метода для расчета плоских кавитационных течений.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1970, вып. 258, с. 38—47.

11. **Биркгоф Г.** Математический анализ кавитации.— Труды Международного симпозиума по неустановившимся движениям воды с большими скоростями.

12. **Биркгоф Г., Сарантонелло Э.** Струи, следы и каверны. М., Мир, 1964.

13. **Бутузов А. А.** Об искусственном кавитационном течении за тонким клином, помещенном на нижнюю полуплоскость горизонтальной стенки.— Известия АН СССР, МЖГ, 1967, № 2, с. 83—87.

14. **Бутузов А. А.** О предельных параметрах искусственной каверны, образуемой на нижней поверхности горизонтальной стенки.— Известия АН СССР, МЖГ, 1966, № 2, с. 167—170.

15. **Ван-Дайк М.** Методы возмущения в механике жидкости. М., Мир, 1967.

16. **Воинов О. В., Воинов В. В.** О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования комулятивной струйки.— ДАН СССР, 1976, т. 227, № 4, с. 63—66.

17. **Гаврилов Л. Р.** О содержании свободного газа в воде.— Труды АКИН, 1969, вып. VI, с.

18. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.

19. **Гузевский Л. Г.** Восстановление формы тела вращения по заданному распределению скорости течения вдоль его поверхности.— ПМТФ, 1975, № 3, с. 121—124.

20. **Гузевский Л. Г.** Осесимметричные задачи обтекания со свободными границами.— В сб.: Исследования по развитой кавитации. Новосибирск, 1976, с. 113—130.

21. **Гузевский Л. Г.** Расчет осесимметричных течений со свободными поверхностями.— ДАН СССР, 1975, т. 222, № 2.

22. **Гуревич М. И., Степанов Г. Ю.** Краткий обзор современных работ по теории струй идеальной жидкости.— Труды семинара по обратным краевым задачам, 1970, вып. 7, с. 55—70.

23. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.

24. **Гуревич М. И.** Теория течений со свободными поверхностями.— Итоги науки, сер. Гидромеханика, 1971, т. 5.

25. **Диаиов Д. И.** О физических исследованиях каверн в жидкости.— Труды НТО судпрома, 1974, вып. 217, с. 165—190.

26. **Егорова Н. И., Павлов Н. Н.** Приближенный метод определения размеров и формы частичной каверны, образованной на теле вращения при его движении вблизи границы раздела.— Труды НТО судпрома, 1976, вып. 236, с. 18—29.

27. **Егоров И. Т., Садовников Ю. М., Исаев И. И.** и др. Искусственная кавитация. Л., Судостроение, 1971.

28. **Жермеи П.** Механика сплошных сред. М., Мир, 1965.

29. **Иваиов А. Н., Бутузов А. А., Олении Ю. Л.** Вопросы кавитации в задаче снижения гидродинамического сопротивления судов.— В кн.: Проблемы прикладной гидромеханики судна. Л., 1975, с. 151—178.

30. **Иванов А. Н.** Двумерное обтекание тел произвольной формы в режиме развитой кавитации.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1963, вып. 200, с. 3—23.

31. **Иваиов А. Н.** Кавитационное обтекание профилей крыльев.— Известия АН СССР. Механика и машиностроение, 1960, № 6, с. 117—120.

32. **Иванов А. Н., Леняшин С. А., Насыров А. М.** Измерение среднего во времени давления газа в естественной каверне. Экспериментальная гидродинамика судна.— Труды НТО судпрома, 1973, вып. 193, с. 109—116.

33. **Иванов А. Н.** Обтекание кавитирующего крыла с замыкающейся на его поверхности каверной.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1961, вып. 169, с. 75—85.

34. **Иванов А. Н.** Обтекание тел вращения в режиме частичной кавитации и определение формы тела вращения, при обтекании которого давление на участке заданной протяженности постоянно.— Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 1965, вып. 219, с. 70—82.

35. **Иванов А. Н.** О влиянии сил весомости жидкости на гидродинамические характеристики профилей крыльев.— Судостроение, 1961, № 2, с. 10—12.

36. **Иванов А. Н.** Симметричное кавитационное обтекание удлиненного плоского контура.— Известия АН СССР. Механика и машиностроение, 1962, № 3, с. 61—66.

37. **Киселев О. М.** О влиянии капиллярных сил на кавитационное обтекание гладкого контура.— Известия АН СССР, МЖГ, 1973, № 6, с. 148—149.

38. **Кнэпп Р., Дитли Дж., Хеммит Ф.** Кавитация. М., Мир, 1974.

39. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика, т. 1, М., Физматгиз, 1963.

40. **Кузнецов А. В.** Об одной схеме кавитационного обтекания.— Труды семинара по обратным краевым задачам, 1964, вып. 1, с. 60—64.

41. **Кюхемени Д., Вебер И.** Аэродинамика авиационных двигателей. М., ИЛ, 1956.

42. **Ламб Г.** Гидромеханика. М., Гостехиздат, 1947.

43. **Левковский Ю. Л.** Статистические характеристики пузырьковой кавитации.— Акустический журнал, 1973, т. XIX, вып. 2, с. 200—206.

44. **Мельников А. П.** Вихревой метод и его применение к построению потенциального обтекания крыла.— Труды ЛКВВИА, 1949, вып. 27, с. 13—22.

45. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.

46. **Павловец Г. А.** Методы расчета обтекания сечений крыла идеальным несжимаемым потоком.— Труды ЦАГИ, 1971, вып. 1344, с. 1—14.

47. **Перник А. Д.** Проблемы кавитации, Л., Судостроение, 1966.

48. **Пэнкхерст Р., Холдер Д.** Техника эксперимента в аэродинамических трубах. М., ИЛ, 1955.

49. **Рождественский В. В.** Кавитация. Л., Судостроение, 1977.

50. **Саламатов Д.** Кавитационное обтекание круглого конуса.— В сб.: Плоскопараллельные и осесимметричные течения газов и жидкостей. Фрунзе, 1966, с. 29—40.

51. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Наука, 1965.

52. **Сретенский Л. И.** Об одном методе определения волн конечной амплитуды.— Известия АН СССР. Отделение технических наук, 1952, № 3, с. 223—232.

53. **Терентьев А. Г.** Задача о косом обтекании криволинейной дуги с развитой кавитацией.— Труды семинара по обратным краевым задачам, 1964, вып. 2, с. 188—201.

54. **Терентьев А. Г.** Нелинейная теория кавитационного обтекания.— В сб.: Вопросы прикладной механики и математики, 1976, вып. 5, с. 2—32.

55. **Цейтлин М. Ю.** Исследование сопротивления эллипсоидов вращения при осесимметричном струйном обтекании.— Труды ЦАГИ, 1960, вып. 801, с. 1—20.

56. **Эллер А. О.** О взаимном влиянии искусственных каверн, расположенных друг за другом на нижней стороне горизонтальной стенки.— Труды НТО судпрома, 1969, вып. 125, с. 118—123.

57. **Эллер А. О.** О влиянии внешнего поля давлений на искусственные каверны, создаваемые на нижней стороне горизонтальной стенки. Краткие тезисы докладов на XXII Всесоюзной научно-технической конференции по теории корабля.— Труды НТО судпрома, 1973, вып. 3, с. 121—122.

58. **Эпштейн Л. А.** Течение около тел вращения при малых числах кавитации.— Труды ЦАГИ, 1961, вып. 817, с. 1—14.

59. **Эпштейн Л. А.** О минимальном числе кавитации и ширине каверны в плоском и осесимметричном каналах.— Известия АН СССР, МЖГ, 1966, № 5, с. 170—172.

60. **Эпштейн Л. А.** Методы теории размерностей и подобия в гидромеханике судов. Л., Судостроение, 1970.

61. **Эфрос Д. А.** Гидродинамическая теория плоскопараллельного кавитационного течения.— ДАН СССР, 1946, т. 51, № 4, с. 340—344.

62. **Ackerberg R. C.** The effects of capillarity on free-streamline separation. J. Fluid Mech., 1975, vol. 70, p. 2.

63. **Arakeri V. H.** Viscous effects on the position of cavitation separation from smooth bodies. J. Fluid Mech., 1975, vol. 68, p. 4.

64. **Вреппеп С.** A numerical solution of axisymmetric caviti flows. J. Fluid Mech., 1969, vol. 37, p. 4.

65. **Cox R. N. and Clayden W. A.** Air Entrainment at the rear of a steady caviti. Cavitation in Hydrodynamics. London, 1956.

66. **Garabedian P. R.** Numerical estimates of contraction and drag coefficients Bondary Problem Different. Equat Madison, Univ. Wisconsin Press, 1960, p. 11—18.

67. **Geurst I. A.** Linearized theory for partially cavitated hydrofoils. Internat. Shipbuilding Porgr. 1959, Aug., vol. 6, N 60.

68. **Harvey E. N., Barnes D. K., Me Elroy W. D.** a. o. Bubble Formation in Animals J. Physical Factors, Jr. Cellular and Comp. Physiol., 1944, 24, N 1.

69. **Helmholtz.** Über discontinuirliche Flüssigkeits bewegungen. Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zur Berlin, 1868.

70. **Ivanov A. N.** Das nichtlineare Problem stationärer Wellen an einer freien Flüssigkeitoberfläche. Schiffbauforschung, Sonderheft, 1975.

71. **Иванов С., Кънчев К., Панов А.** Вихров модел на някои течения с развита кавитация.— Тр. Межд. симп. по въпр. на корабл., 1973.

72. **Kirchhoff.** Zur Theorie freier Flussigkeitstrahlen. Borchard's Journal, 1869, Bd. 70.

73. **Kling C. L., Hammitt F. G.** A photographic study of sparc-induced cavitation bubble collapse. J. Basic Engang, Trans. A.S.M.E., D94, 1972.

74. **Lauterborn W., Bolle H.** Experimental investigations of cavitation — bubble collapse in the neighbourhood of a solid boundary. J. Fluid Mech., 1975, vol. 72, p. 2.

75. **Messino D., Sette D., Wanderlingh F.** Statical Approach to Ultrasonic Cavitation. JASA, 1963, N 35, v. 10.

76. **Plesset M. S., Chapman R. B.** Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary. J. Fluid Mech., 1971, vol. 47.

77. **Plesset M. S., Shaffer P. A.** Cavity drag in two and three dimensions. Journal of Applied Physics, 1948, vol. 19, N 10.

78. **Reichardt H.** The laws of cavitation bubbles at axially simmetrical bodies in a flow. Rep. and Translations, N 766, Ministery of Aircraft Production, 1946.

79. **Riabouchinski D.** Sur un probleme de vartation. Comp. rend Acad. Sci. 1927. Paris, p. 185.

80. **Stokes.** On the Theory of Oscillatory Waves, Camb. Trans., VIII (1847) [Papers I, 197].

81. **Strasberg M.** Undissolved Air Cavites as Cavitation Nuclei. Cavitation in Hydrodynamics, London, 1956.

82. **Trefftz.** Über die Kontraction kreisförmigen Flussigkeitstrahlen. Zeitsehrift für Math. und Phys., 1916, S. 64.

83. **Tulin M. P.** Supercavitating flows-smull perturbation theory. J. Ship Res. 1964, 7, N 3.

84. **Wu T. Y.** A wake model for free-streamline flow theory. Part 1. Fully and partially developed wake flow and cavity past an oblique flate. J. Fluid Mech., 1962, 13, N 2.

85. **Wu T. Y., Wang D. P.** A wake model for free-streamline flow theory. Part 2. Caviti flows past obsteicles of arbitary profile. J. Fluid Mech., 1964, 18, N 1.

86. **Zwick W.** Nichtlineare Methode zur Berechnung des Einflusses der Freien Oberfäche auf die Umströmung eines elliptischen Zylindrs. Monatsber. Dtch. Acad. Wiss., Berlin, 1964, 6, N 12.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. ОСНОВНЫЕ ФОРМЫ КАВИТАЦИИ 5

§ 1. Ядра кавитации . . . . . —
§ 2. Возникновение кавитации при обтекании твердых тел . . . 7
§ 3. Основные безразмерные критерии, используемые при изучении кавитации 8
§ 4. Кавитационное обтекание тел в отсутствие отрыва пограничного слоя 11
§ 5. Кавитационное обтекание тел при наличии локальных зон отрыва пограничного слоя 17
§ 6. Некоторые особенности кавитационного обтекания профилей крыльев 21
§ 7. Кавитационное обтекание тел с сильно развитой зоной отрыва пограничного слоя 23
§ 8. Кавитация в свободных вихрях крыла конечного размаха 24
§ 9. Пузырьковая кавитация 25
§ 10. Развитое кавитационное течение 27
§ 11. Смешанная форма кавитации 35
§ 12. Искусственная кавитация 37

Глава II. ПЛОСКИЕ КАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ 39

§ 13. Некоторые сведения из кинематики плоских течений идеальной жидкости . . . . . —
§ 14. Постановка задачи о плоском кавитационном обтекании тел 42
§ 15. Метод интегральных уравнений 51
§ 16. Форма границы каверны вблизи точки ее отрыва от тела 56

Глава III. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЛИНЕАРИЗАЦИИ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ . . . 61

§ 17. Обтекание стенки при наличии местной деформации 62
§ 18. Обратная задача 64

Глава IV. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ 68

§ 19. Общие замечания . . . . . —
§ 20. Симметричное кавитационное обтекание тел безграничным потоком (схемы Жуковского—Рошко и Рябушинского) . . 71

§ 21. Симметричное кавитационное обтекание тел безграничным потоком (обобщенная схема Рябушинского) 77
§ 22. Симметричное кавитационное обтекание тел в канале со стенками произвольной формы 86
§ 23. Кавитационное обтекание профилей крыльев (схема с центральной симметрией и схема Жуковского—Рошко) 91
§ 24. Кавитационное обтекание профилей крыльев (обобщенная схема Рябушинского) 94
§ 25. Расчет кавитационного обтекания профилей крыльев 98
§ 26. Кавитационное обтекание решетки профилей и профиля в канале с прямолинейными стенками 112
§ 27. Упрощенные приемы расчета плоского кавитационного обтекания тел 114

Глава V. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ 124

§ 28. Некоторые сведения из кинематики осесимметричных течений идеальной жидкости 125
§ 29. Интегральные уравнения осесимметричной задачи обтекания тел идеальной жидкостью 126
§ 30. Форма границы каверны вблизи точки ее отрыва от тела 129
§ 31. Кавитационное обтекание тел безграничным потоком . . . 130
§ 32. Кавитационное обтекание тел в круглой трубе с произвольной формой ее меридионального сечения 136

Глава VI. МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОЙ КАВИТАЦИИ И РАЗВИТЫЕ КАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ 139

§ 33. Влияние вязкости на течение в окрестности точек отрыва каверны от тела 141
§ 34. Влияние капиллярности на течение в окрестности точек отрыва каверны от тела 142
§ 35. О совместном влиянии капиллярности и вязкости на течение вблизи точек отрыва каверны от тела 147
§ 36. Об условиях существования различных форм кавитации 155

Глава VII. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ 161

§ 37. Плоская задача об обтекании криволинейного препятствия, расположенного на нижней стороне плоской горизонтальной пластинки 162
§ 38. Результаты расчетов плоского кавитационного обтекания прямощекого клина, расположенного на нижней стороне бесконечной пластинки 166
§ 39. Расчеты и эксперимент 170
§ 40. Задача о плоском обтекании бесконечной системы прямощеких клиньев, расположенных на нижней стороне плоской пластинки 172
§ 41. Влияние неоднородности набегающего потока на одиночную каверну, расположенную на нижней стороне плоской пластинки 177
§ 42. Обтекание глиссирующего профиля с каверной на нижней стороне 181
§ 43. Обтекание клиновидной стойки, пересекающей свободную поверхность жидкости 184
§ 44. Результаты расчетов 189
§ 45. Расчеты и эксперимент 195

Глава VIII. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИКИ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ И КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ 199

§ 46. Интегральные уравнения задачи об установившихся течениях с образованием гравитационных волн на свободной поверхности жидкости неограниченной глубины 201

§ 47. Волны конечной амплитуды на свободной поверхности жидкости неограниченной глубины 206

§ 48. Течение тяжелой жидкости над дном произвольной формы 207

§ 49. Волны конечной амплитуды над плоским горизонтальным дном 213

§ 50. Влияние капиллярности 215

Приложение. Результаты расчетов осесимметричного кавитационного обтекания тел безграничным потоком и в трубах 217

Указатель литературы 230