Д. А. Криксунов

Биологические модели открытых сред

Л. Т. ЧЕРНЫЙ

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.25
Ч-49
УДК 534

Черный Л. Т. **Релятивистские модели сплошных сред.** — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 288 с.

Монография посвящена построению и исследованию релятивистских моделей сплошных сред. Вводятся кинематические параметры, определяющие различные релятивистские процессы. Изложен метод получения динамических законов и условий на разрывах, основанный на вариационном уравнении механики сплошных сред, предложенном академиком Л. И. Седовым. Учитываются необратимые процессы. Получены тождества, вытекающие из свойств симметрии вариационного уравнения.

Рассмотрены модели вязких, тепло- и электропроводных, поляризующихся и намагничивающихся сред, взаимодействующих с электромагнитным полем, а также модели смесей заряженных реагирующих газов при наличии процессов диффузии. Проведен предельный переход к ньютоновской механике.

Для научных работников, аспирантов и студентов университетов, специализирующихся в области механики сплошной среды.

Библ. 68.

Ч $\frac{1703040000-129}{053(02)-83}$ 102-83

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы,
1983

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4

Глава 1. **Основные релятивистские понятия** 7
§ 1. Геометрия и тензорный анализ в пространстве событий Минковского 7
§ 2. Материальные точки и поля 19

Глава 2. **Кинематика релятивистских процессов** 26
§ 3. Движение сплошной среды 26
§ 4. Диффузия и реакции в многокомпонентных средах 41
§ 5. Электромагнитные процессы 60
§ 6. Перенос и производство энтропии 73

Глава 3. **Динамические законы** 82
§ 7. Вариационное уравнение Л. И. Седова 82
§ 8. Уравнения для непрерывных процессов 92
§ 9. Условия на разрывах и границах 100

Глава 4. **Инвариантные свойства вариационного уравнения и динамические тождества** 118
§ 10. Симметрия вариационного уравнения и связанные с ней тождества 118
§ 11. Преобразование сопутствующего «времени» и свойства вариационного уравнения 132
§ 12. Термодинамические соотношения 149

Глава 5. **Специальные модели сплошных сред** 167
§ 13. Нелинейно-упругая теплопроводная вязкая среда . . . 167
§ 14. Проводящая среда и электромагнитное поле 196
§ 15. Поляризующаяся и намагничивающаяся среда 218
§ 16. Смесь заряженных, реагирующих газов 240

Дополнение. **Модели ферромагнитных упруго-пластических сплошных сред в ньютоновской механике** 271

Литература 281

ПРЕДИСЛОВИЕ

В мировой литературе имеется достаточно много монографий по релятивистской механике. Однако даже простейшие модели сплошных сред рассматриваются в них обычно очень кратко и неполно. Еще в большей степени это относится к моделям сред с усложненными свойствами. С другой стороны, в последние годы в работах академика Л. И. Седова и его учеников развит общий вариационный метод построения моделей сплошных сред с внутренними степенями свободы с учетом необратимых и разрывных процессов, который также еще не нашел должного отражения в монографиях по релятивистской механике сплошной среды.

Предлагаемая книга посвящена систематическому изложению основных принципов феноменологической релятивистской механики сплошной среды в рамках специальной теории относительности. В ней на основе вариационного метода проведено построение и исследование общих свойств различных релятивистских моделей сплошных сред с внутренними степенями свободы.

В первой главе кратко изложены основные представления специальной теории относительности о пространстве, времени, материальных точках и полях, которые используются в дальнейшем.

Во второй главе вводятся параметры, определяющие различные релятивистские процессы, и обсуждаются кинематические соотношения, выполняющиеся для них. Рассматривается движение сплошной среды с ускорениями и конечными деформациями, диффузия и реакции в многокомпонентных сплошных средах, перенос и производство энтропии, а также электромагнитные характеристики. Сформулированы основные релятивистские уравнения баланса числа частиц отдельных компонент в смесях,

электрического заряда, энтропии. Для кинематических характеристик, удовлетворяющих этим уравнениям, построены и исследованы релятивистские параметрические представления, которые дают общие решения соответствующих уравнений баланса. Это позволяет пользоваться при описании различных диффузионных и тепловых процессов независимыми определяющими параметрами, что имеет решающее значение при выводе динамических законов вариационным методом.

Третья глава посвящена изложению общей теории построения релятивистских моделей сплошных сред, основанной на вариационном уравнении Л. И. Седова. Рассматриваются связи между определяющими параметрами. Обсуждаются динамические законы для непрерывных процессов и условия на разрывах.

В четвертой главе исследуются общие свойства релятивистских моделей сплошных сред. Получены тождества, вытекающие из свойств симметрии вариационного уравнения. Кроме того приводятся простейшие понятия феноменологической теории необратимых процессов, которая используется для получения замкнутых моделей сплошных сред.

Пятая глава содержит последовательное построение ряда конкретных релятивистских моделей сплошных сред и исследование их свойств. Подробно рассмотрены модели нелинейно-упругих, жидких и газообразных теплопроводных сред с вязкими свойствами, модели проводящих, поляризующихся и намагничивающихся сред, взаимодействующих с электромагнитным полем, а также модели многокомпонентных сред, представляющих собой смеси заряженных реагирующих газов. Получены как уже известные, так и новые модели с внутренними степенями свободы, которые проявляются в зависимости лагранжиана от тепловых и диффузионных потоков. Для построения таких моделей используются полученные во второй главе параметрические представления компонент векторов потоков энтропии и диффузионных потоков, которые позволяют доказать существование голономного вариационного принципа для обратимых процессов во всех рассмотренных конкретных моделях сплошных сред. Исследование перечисленных моделей последовательно проводится на основе установленной в четвертой главе связи между инвариантными свойствами вариационного уравнения и динамическими тождествами. Для всех конкретных моделей выведены

динамические уравнения для непрерывных процессов и условия на разрывах. Получены законы сохранения и показано, что для действительных приращений определяющих параметров вариационное уравнение Л. И. Седова совпадает с инвариантным уравнением энергии. Рассмотрены необратимые процессы и термодинамические соотношения. Проведен предельный переход к ньютоновской механике. В целом пятая глава подробно иллюстрирует применение общих методов на конкретных примерах, которые в то же время представляют большой самостоятельный интерес.

В небольшой по объему книге автор не ставил своей задачей дать библиографический обзор по затронутым вопросам. Поэтому список литературы не претендует на полноту. Однако в указанных в нем работах содержится достаточно подробная библиография.

Пользуясь предоставленной возможностью, автор выражает глубокую признательность своему учителю академику Л. И. Седову за постоянное внимание, полезные обсуждения и поддержку.

Л. Т. Черный

ГЛАВА 1
ОСНОВНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Геометрия и тензорный анализ в пространстве событий Минковского

Принцип относительности. Изучение физических процессов предполагает наличие *системы отсчета наблюдателя* [1 — 3]. Так называют систему координат x, y, z, отмечающих положения в пространстве, и связанные с ней часы, отмечающие моменты времени t. Например, положение *материальной точки*, т. е. тела, размерами которого можно пренебречь при описании его движения, определяется в каждый момент времени t значениями трех координат x, y, z. Установлено, что существует множество так называемых *галилеевых систем отсчета* (ГСО), обладающих следующими свойствами [1]) [3]:

а) система координат x, y, z является декартовой, причем единица длины не зависит от времени;

б) часы во всех точках пространства идут синхронно;

в) свободная материальная точка движется относительно ГСО прямолинейно и равномерно.

Очевидно, что относительное движение любых двух ГСО является прямолинейным и равномерным. У них также могут быть различными направления координатных осей x, y, z и начало отсчета времени t и координат x, y, z. На множестве ГСО справедлив *принцип относительности*, согласно которому все физические законы одинаковы в любых ГСО. Поэтому всякое прямолинейное и равномерное движение относительно. В частности, не существует выделенной ГСО, являющейся абсолютно неподвижной.

Опыт показывает, что все взаимодействия в природе осуществляются с конечными скоростями, а мгновенных взаимодействий между пространственно разделенными телами не существует. Верхнюю грань значений скоростей распространения всевозможных взаимодействий назовем *максимальной скоростью распространения взаимодействий*

---

[1]) Гравитационные и космологические эффекты не рассматриваются.

и обозначим буквой c. Согласно принципу относительности, определенная таким образом универсальная постоянная c не должна зависеть от выбора ГСО. Очевидно, что существуют две возможности: $c<\infty$, $c=\infty$. Первая из них соответствует релятивистской механике, а вторая — классической (ньютоновской) механике. Таким образом, релятивистская механика основана на объединении принципа относительности и принципа конечности максимальной скорости распространения взаимодействий. Это объединение составляет содержание принципа относительности Эйнштейна, который был сформулирован Альбертом Эйнштейном в 1905 г. Классическая механика получается из релятивистской при переходе к пределу $c\to\infty$. В классической механике время абсолютно, т. е. промежуток времени между двумя событиями не зависит от выбора ГСО. При этом имеет место известный закон сложения скоростей, из которого следует, что максимальная скорость распространения взаимодействий не будет зависеть от выбора ГСО только в том случае, когда она бесконечна ($c=\infty$). Таким образом, представление об абсолютности времени противоречит принципу относительности Эйнштейна и должно быть отброшено, так как опыты показывают, что

$$c=2{,}99793\cdot 10^{10}\ \text{см/с}.$$

Поэтому в релятивистской механике промежуток времени между двумя событиями зависит от выбора ГСО, и, в частности, два события, одновременные с точки зрения одной ГСО, вообще говоря, не являются одновременными в других ГСО. При этом, естественно, закон сложения скоростей классической механики не справедлив. Однако благодаря большому значению постоянной c на практике достаточно точной оказывается классическая механика.

Пространство событий Минковского. В релятивистской механике большое значение имеет понятие точечного события, которое обычно называют просто событием. Им может быть, например, какое-нибудь событие, происходящее с телом, рассматриваемым как материальная точка. Такое событие определяется точкой пространства, где оно произошло, и моментом времени, когда оно произошло, т. е. значениями переменных x, y, z, t. Любым двум событиям $\mathscr{A}_1(t_1, x_1, y_1, z_1)$, $\mathscr{A}_2(t_2, x_2, y_2, z_2)$ можно поставить в соответствие число

$$\Delta^2=c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2,$$

которое называется *квадратом интервала* между этими событиями. Если события $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ могут быть связаны сигналом, распространяющимся со скоростью c, то интервал между этими событиями равен нулю. Верно и обратное утверждение. Так как величина c является универсальной постоянной, не зависящей от выбора ГСО, то из равенства нулю интервала Δ в какой-нибудь одной ГСО следует, что он равен нулю и в любой другой ГСО. Для бесконечно близких событий квадрат интервала Δ^2 выражается через приращения времени dt и координат dx, dy, dz следующим образом:

$$d\Delta^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Если $d\Delta^2 = 0$ в некоторой ГСО, то равенство $d\Delta'^2 = 0$ в любой другой ГСО′ должно выполняться в силу преобразования времени t и пространственных декартовых координат x, y, z при переходе от старой ГСО к новой ГСО′. Поэтому в общем случае, когда $d\Delta^2 \neq 0$, величины $d\Delta'^2$ и $d\Delta^2$ должны быть связаны соотношением

$$d\Delta'^2 = \varkappa\, d\Delta^2,$$

причем из однородности и изотропности пространства и времени с учетом равноправия всех ГСО (принцип относительности) следует, что $\varkappa = 1$. Таким образом, квадрат интервала инвариантен при переходе от одной ГСО к другой:

$$d\Delta'^2 = d\Delta^2, \qquad \Delta'^2 = \Delta^2.$$

Рассмотрим множество всех возможных точечных событий. Оно образует четырехмерное многообразие, называемое *пространством-временем или пространством событий* [1 — 4], в котором точки (события) можно задавать координатами x^ν, введенными следующим образом[1]):

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Каждой ГСО соответствует своя пространственно-временная галилеева система координат (ГСК) x^ν, и наоборот (в дальнейшем термин «ГСК» будем использовать также и вместо термина «ГСО»). Переход от одной ГСО к дру-

[1]) В дальнейшем тензорные греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — значения 1, 2, 3, причем в качестве индексов компонент тензоров в галилеевой системе координат используются буквы второй половины соответствующего алфавита: $\varkappa$, λ, μ, ν, ...; k, l, m, n, ...

гой сопровождается преобразованием ГСК x^ν. При этом, как было установлено выше, интервал между любыми двумя событиями не изменяется. Выражение для квадрата интервала Δ^2 можно записать при помощи координат x^ν в виде [1])

$$d\Delta^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu, \tag{1.1}$$

где

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \qquad (\mu \neq \nu) \tag{1.2}$$

Интервал между двумя событиями можно рассматривать как четырехмерное расстояние между соответствующими точками пространства-времени. Тогда равенства (1.1) и (1.2) определяют метрику пространства-времени, которое в этом случае называют *пространством событий Минковского* $\mathcal{M}$.

Множество преобразований координат x^ν, т. е. совокупность переходов от одной ГСК к другой, сохраняющих вид метрики (1.1), (1.2), образует группу, называемую *группой Пуанкаре*. Эти преобразования действуют по закону [2 — 4]

$$x'^\mu = l'^\mu_\nu x^\nu + l'^\mu, \qquad x^\nu = l^\nu_\mu x'^\mu + l^\nu, \tag{1.3}$$

где взаимно обратные матрицы l'^μ_ν, l^ν_μ удовлетворяют условиям

$$l'^\mu_\nu l^\nu_\varkappa = \delta^\mu_\varkappa, \qquad l^\nu_\mu l'^\mu_\varkappa = \delta^\nu_\varkappa, \qquad \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$g_{\mu\nu} l'^\mu_\varkappa l'^\nu_\lambda = g_{\varkappa\lambda}, \qquad g_{\mu\nu} l^\mu_\varkappa l^\nu_\lambda = g_{\varkappa\lambda}. \tag{1.5}$$

Преобразования (1.3) включают четырехмерные повороты, задаваемые матрицами l'^μ_ν (преобразования Лоренца), и четырехмерные сдвиги системы координат x^ν (изменения начала отсчета времени и пространственных координат). Преобразование (1.3), соответствующее переходу к новой ГСО′, совпадающей при $t = 0$ с исходной ГСО и движущейся относительно нее вдоль оси x со скоростью v, называется *специальным преобразованием Лоренца*. Для него коэффициенты l'^μ_ν, l'^μ имеют вид [2 — 4]

$$\begin{gathered} l'^0_0 = l'^1_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad l'^0_1 = l'^1_0 = -\frac{v}{c}\, l'^0_0, \\ l'^\nu_2 = l'^\nu_3 = l'^2_\nu = l'^3_\nu = l'^\nu = 0. \end{gathered} \tag{1.6}$$

[1]) По совпадающим верхним и нижним индексам подразумевается суммирование (правило Эйнштейна).

При $c \to \infty$ отсюда с учетом $x^0 = ct$ получаются преобразования Галилея.

В связи с пространством событий Минковского $\mathscr{M}$ введем еще четырехмерное действительное векторное пространство $\mathscr{M}^1$, обладающее свойствами:

а) каждой ГСК x^ν в $\mathscr{M}$ соответствует базис $\mathfrak{e}_\nu$ в $\mathscr{M}^1$;

б) при преобразовании (1.3) ГСК x^ν соответствующий базис в $\mathscr{M}^1$ преобразуется по закону

$$\mathfrak{e}'_\mu = l^\nu_\mu \mathfrak{e}_\nu, \quad \mathfrak{e}_\nu = l'^\mu_\nu \mathfrak{e}'_\mu; \tag{1.7}$$

в) для любых двух векторов $\boldsymbol{a} = a^\nu \mathfrak{e}_\nu$, $\boldsymbol{b} = b^\nu \mathfrak{e}_\nu$ определено скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \quad (\mathfrak{e}_\mu, \mathfrak{e}_\nu) = g_{\mu\nu}, \tag{1.8}$$

представляющее собой билинейную функцию относительно аргументов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Заметим, что из равенств $\boldsymbol{a} = a^\nu \mathfrak{e}_\nu = a'^\nu \mathfrak{e}'_\nu$ и формул преобразования (1.7) вытекает следующий закон преобразования для компонент a^ν произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ при переходе от одной ГСК к другой:

$$a'^\mu = l'^\mu_\nu a^\nu, \quad a^\nu = l^\nu_\mu a'^\mu. \tag{1.9}$$

Поэтому благодаря равенствам (1.5) скалярное произведение (1.8) инвариантно относительно перехода от одной ГСК к другой, т. е. относительно преобразований Лоренца (1.7) для векторов базиса $\mathfrak{e}_\nu$ в $\mathscr{M}^1$.

Определим величины $g^{\mu\nu}$ равенством $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$, из которого следует, что $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, \ldots, 3$), и введем новые базисные векторы $\mathfrak{e}^\mu$:

$$\mathfrak{e}^\mu = g^{\mu\nu} \mathfrak{e}_\nu, \quad (\mathfrak{e}^\mu, \mathfrak{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu, \quad (\mathfrak{e}^\mu, \mathfrak{e}^\nu) = g^{\mu\nu}. \tag{1.10}$$

Тогда любой вектор $\boldsymbol{a}$ из $\mathscr{M}^1$ можно представить в виде $\boldsymbol{a} = a^\nu \mathfrak{e}_\nu = a_\nu \mathfrak{e}^\nu$, где $a_\nu = g_{\nu\mu} a^\mu$. Компоненты a^ν и a_ν называются соответственно контравариантными и ковариантными компонентами вектора $\boldsymbol{a}$ относительно ГСК, которой соответствуют базисы $\mathfrak{e}_\nu$, $\mathfrak{e}^\mu$ в $\mathscr{M}^1$. Можно показать, что при переходе от одной ГСК к другой векторы $\mathfrak{e}^\mu$ и компоненты a_μ преобразуются по формулам [1 — 4]

$$\mathfrak{e}'^\mu = l'^\mu_\nu \mathfrak{e}^\nu, \quad a'_\mu = l^\nu_\mu a_\nu. \tag{1.11}$$

Зафиксируем в пространстве событий Минковского $\mathscr{M}$ какую-нибудь точку x_0. Тогда любой точке x из $\mathscr{M}$ можно

поставить в соответствие вектор $\boldsymbol{x}$ из векторного пространства $\mathscr{M}^1$, определенный равенством

$$\boldsymbol{x}(x) = (x^\nu - x_0^\nu)\,\boldsymbol{e}_\nu \tag{1.12}$$

и называемый радиус-вектором события x относительно события x_0. Из формул преобразования координат событий и векторов базиса $\boldsymbol{e}_\nu$ при переходе от одной ГСК к другой следует, что определение (1.12) радиус-вектора $\boldsymbol{x}$ не зависит от выбора ГСК. Заметим, что векторы базиса $\boldsymbol{e}_\nu$ связаны с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$ соотношением

$$\boldsymbol{e}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\nu}, \tag{1.13}$$

а скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ совпадает с квадратом интервала между событиями x_0 и x.

Пространство событий Минковского $\mathscr{M}$ и ассоциированное с ним векторное пространство $\mathscr{M}^1$ называют *псевдоевклидовыми*, так как в отличие от евклидовых пространств метрика в $\mathscr{M}$ и скалярные квадраты векторов из $\mathscr{M}^1$ являются индефинитными.

В пространстве событий Минковского можно также ввести произвольную криволинейную систему координат ξ^α [1 — 4]

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\nu), \qquad x^\nu = x^\nu(\xi^\alpha),$$

которая не соответствует никакой ГСО. Тогда выражение (1.1) для квадрата интервала между бесконечно близкими событиями можно записать в виде

$$d\Delta^2 = g_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \qquad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi_\beta}. \tag{1.14}$$

В связи с системой координат ξ^α для каждой точки из $\mathscr{M}$ определим компоненты $g^{\alpha\beta}$:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{\beta\alpha}}, \quad g = |g_{\alpha\beta}| < 0, \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma; \tag{1.15}$$

базисы в $\mathscr{M}^1$ из касательных векторов $\boldsymbol{e}_\alpha$ и взаимных векторов $\boldsymbol{e}^\alpha$:

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha}\boldsymbol{e}_\nu, \qquad \boldsymbol{e}^\alpha = g^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\beta; \tag{1.16}$$

контравариантные и ковариантные компоненты векторов a^α и a_α:

$$\boldsymbol{a} = a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = a_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha, \qquad a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta.$$

Для скалярного произведения векторов легко получить следующие формулы:

$$(\mathfrak{e}_\alpha, \mathfrak{e}_\beta) = g_{\alpha\beta}, \quad (\mathfrak{e}^\alpha, \mathfrak{e}^\beta) = g^{\alpha\beta}, \quad (\mathfrak{e}^\alpha, \mathfrak{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta,$$
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = g^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta. \tag{1.17}$$

Четырехмерные тензоры. Наряду с четырехмерным векторным пространством $\mathscr{M}^1$ для любого $n > 1$ введем *тензорное пространство* $\mathscr{M}^n$ *ранга* n, представляющее собой 4^n-мерное действительное векторное пространство, в котором всякому базису $\mathfrak{e}_\alpha$ из $\mathscr{M}^1$ соответствует базис $\mathfrak{e}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, преобразующийся по закону

$$\mathfrak{e}'_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = L^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots L^{\beta_n}_{\alpha_n} \mathfrak{e}_{\beta_1 \ldots \beta_n} \tag{1.18}$$

при переходе от базиса $\mathfrak{e}_\alpha$ к базису $\mathfrak{e}'_\alpha$, определенном равенствами

$$\mathfrak{e}'_\alpha = L^\beta_\alpha \mathfrak{e}_\beta, \quad \mathfrak{e}_\alpha = N^\beta_\alpha \mathfrak{e}'_\beta, \quad L^\beta_\alpha N^\gamma_\beta = N^\beta_\alpha L^\gamma_\beta = \delta^\gamma_\alpha. \tag{1.19}$$

Подчеркнем, что преобразование (1.19) — это произвольное невырожденное преобразование, вообще говоря, не сохраняющее скалярные произведения векторов базиса $(\mathfrak{e}_\alpha, \mathfrak{e}_\beta) = g_{\alpha\beta}$. Элементы пространства $\mathscr{M}^n$ называются *тензорами ранга* n ($n \geqslant 1$). При помощи компонент $g^{\alpha\beta}$ в $\mathscr{M}^n$ можно определить еще ряд базисов, соответствующих базису $\mathfrak{e}_\alpha$ из $\mathscr{M}^1$:

$$\mathfrak{e}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}}{}^{\beta_i}{}_{\alpha_{i+1} \ldots \alpha_n} = g^{\beta_i \alpha_i} \mathfrak{e}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad \mathfrak{e}^{\beta_1 \ldots \beta_n} = \left(g^{\beta_1 \alpha_1} \ldots g^{\beta_n \alpha_n}\right) \mathfrak{e}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}. \tag{1.20}$$

Можно показать, что при преобразовании (1.19) векторы этих базисов преобразуются по законам [1 — 4]

$$\mathfrak{e}'_{\alpha_1 \ldots}{}^{\alpha_i}{}_{\ldots \alpha_n} = \left(L^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots L^{\beta_{i-1}}_{\alpha_{i-1}} N^{\alpha_i}_{\beta_i} L^{\beta_{i+1}}_{\alpha_{i+1}} \ldots L^{\beta_n}_{\alpha_n}\right) \times$$
$$\times \mathfrak{e}_{\beta_1 \ldots}{}^{\beta_i}{}_{\ldots \beta_n}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{e}'^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \left(N^{\alpha_1}_{\beta_1} \ldots N^{\alpha_n}_{\beta_n}\right) \mathfrak{e}^{\beta_1 \ldots \beta_n}. \tag{1.21}$$

Любой тензор $\boldsymbol{a}^{(n)}$ из $\mathscr{M}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных тензоров:

$$\boldsymbol{a}^{(n)} = a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \mathfrak{e}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} =$$
$$= a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}_{\alpha_i} \mathfrak{e}_{\alpha_1 \ldots}{}^{\alpha_i}{}_{\ldots \alpha_n} = \ldots = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \mathfrak{e}^{\alpha_1 \ldots \alpha_n};$$
$$a^{\alpha_1 \ldots}{}_{\beta_i}{}^{\alpha_n} = g_{\beta_i \alpha_i} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \quad \ldots \tag{1.22}$$
$$\ldots, \quad a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \left(g_{\alpha_1 \beta_1} \ldots g_{\alpha_n \beta_n}\right) a^{\beta_1 \ldots \beta_n}.$$

Коэффициенты в разложении (1.22), у которых все индексы только верхние или только нижние, называются *контравариантными* или *ковариантными компонентами* тензора $\boldsymbol{a}^{(n)}$, соответствующими базису $\mathcal{Э}_\alpha$ или $\mathcal{Э}^\alpha$ в $\mathscr{M}^1$. Коэффициенты со смешанными индексами называются *смешанными компонентами*. Формулы для преобразования компонент тензора при переходе от базиса $\mathcal{Э}_\alpha$ к базису $\mathcal{Э}'_\alpha$ и соответствующем этому переходу преобразовании базисных тензоров (1.18), (1.21) легко находятся из условия инвариантности выражения (1.22) для $\boldsymbol{a}^{(n)}$:

$$a'^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = N^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots N^{\alpha_n}_{\beta_n} a^{\beta_1 \dots \beta_n}, \quad a'^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\alpha_i} =$$
$$= \left(N^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots N^{\alpha_{i-1}}_{\beta_{i-1}} L^{\beta_i}_{\alpha_i} N^{\alpha_{i+1}}_{\beta_{i+1}} \dots N^{\alpha_n}_{\beta_n}\right) a^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\beta_i}, \quad \dots$$
$$\dots, \quad a'_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = L^{\beta_1}_{\alpha_1} \dots L^{\beta_r}_{\alpha_n} a_{\beta_1 \dots \beta_n}. \tag{1.23}$$

Так как тензорное пространство $\mathscr{M}^n$ является 4^n-мерным векторным пространством, то в нем определены обычные операции сложения тензоров и умножения тензора на действительное число. Кроме этих операций, для любых двух тензоров $\boldsymbol{a}^{(n)}$ из $\mathscr{M}^n$ и $\boldsymbol{b}^{(m)}$ из $\mathscr{M}^m$ можно определить их произведение $\boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{b}^{(m)}$, представляющее собою тензор ранга $n+m$ из пространства $\mathscr{M}^{n+m}$:

$$\boldsymbol{a}^{(n)}\boldsymbol{b}^{(m)} = \left(a^{\alpha_1 \dots \alpha_n} b^{\beta_1 \dots \beta_m}\right) \mathcal{Э}_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m}. \tag{1.24}$$

В силу этого определения базисные тензоры $\mathcal{Э}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ из $\mathscr{M}^n$ представляют собой тензорные произведения векторов базиса $\mathcal{Э}_\alpha$ из $\mathscr{M}^1$, которому рассматриваемый тензор $\mathcal{Э}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ поставлен в соответствие согласно определению тензорного пространства $\mathscr{M}^n$:

$$\mathcal{Э}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \mathcal{Э}_{\alpha_1} \dots \mathcal{Э}_{\alpha_n}, \quad \mathcal{Э}^{\alpha_i}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} =$$
$$= \mathcal{Э}_{\alpha_1} \dots \mathcal{Э}_{\alpha_{i-1}} \mathcal{Э}^{\alpha_i} \mathcal{Э}_{\alpha_{i+1}} \dots \mathcal{Э}_{\alpha_n}, \quad \dots, \quad \mathcal{Э}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \mathcal{Э}^{\alpha_1} \dots \mathcal{Э}^{\alpha_n}. \tag{1.25}$$

Всякому тензору $\boldsymbol{a}^{(n)}$ из $\mathscr{M}^n$ можно поставить также в соответствие тензор $\boldsymbol{a}^{(n-2)}$ ранга $n-2$ из $\mathscr{M}^{n-2}$, применяя операцию свертывания $\boldsymbol{a}^{(n)}$, определенную равенством

$$\boldsymbol{a}^{(n-2)} = \delta^{\alpha_j}_{\alpha_i} a^{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n}_{\alpha_j} \mathcal{Э}_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_{j-1} \alpha_{j+1} \dots \alpha_n}. \tag{1.26}$$

Свертывая произведение двух тензоров, получим тензор, называемый внутренним произведением или сверткой

исходных тензоров. Заметим, что свертывание тензора второго ранга приводит к скаляру (числу), который можно рассматривать как тензор нулевого ранга, а внутреннее произведение двух векторов равно их скалярному произведению.

Определим еще четырехмерные полностью антисимметричные *символы Леви-Чивита* $e^{\alpha\beta\gamma\delta}$, которые меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем $e^{0123}=1$. Тогда величины

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\,e^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{1.27}$$

образуют компоненты тензора четвертого ранга, называемого полностью антисимметричным *тензором Леви-Чивита* $\boldsymbol{\varepsilon}$ [1—4]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathfrak{Э}_\alpha\mathfrak{Э}_\beta\mathfrak{Э}_\gamma\mathfrak{Э}_\delta=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathfrak{Э}^\alpha\mathfrak{Э}^\beta\mathfrak{Э}^\gamma\mathfrak{Э}^\delta.$$

Можно показать, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=\sqrt{-g}\,e_{\alpha\beta\gamma\delta},\qquad e_{0123}=-1, \tag{1.28}$$

где $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — полностью антисимметричные величины.

Отметим, что $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, δ^α_β также образуют компоненты тензора $\boldsymbol{g}$, называемого *метрическим*:

$$\boldsymbol{g}=g_{\alpha\beta}\mathfrak{Э}^\alpha\mathfrak{Э}^\beta=g^{\alpha\beta}\mathfrak{Э}_\alpha\mathfrak{Э}_\beta=\delta^\alpha_\beta\mathfrak{Э}_\alpha\mathfrak{Э}^\beta.$$

Элементы тензорного анализа в пространстве Минковского. Векторы базиса $\mathfrak{Э}_\alpha$ были определены выше в связи с системой координат ξ^α для каждой точки ξ пространства событий Минковского. Производные $\partial\mathfrak{Э}_\alpha/\partial\xi^\beta$ характеризуют криволинейность системы координат ξ^α и могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial\mathfrak{Э}_\alpha}{\partial\xi^\beta}=\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(\xi)\,\mathfrak{Э}_\nu(\xi),\qquad d\mathfrak{Э}_\alpha=\frac{\partial\mathfrak{Э}_\alpha}{\partial\xi^\beta}\,d\xi^\beta, \tag{1.29}$$

где величины $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$, так же как и базис $\mathfrak{Э}_\alpha$, являются функциями точки ξ из $\mathscr{M}$ и называются *символами Кристоффеля или коэффициентами связности*. Очевидно, что в любой ГСК имеем $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}=0$. Легко доказываются также следующие равенства [1—4]:

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}=\frac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial^2x^\nu}{\partial\xi^\alpha\,\partial\xi^\beta}=\frac{1}{2}\,g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial\xi^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial\xi^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\xi^\delta}\right), \tag{1.30}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{Э}^\alpha}{\partial\xi^\beta}=-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\mathfrak{Э}^\gamma,\qquad \Gamma^\alpha_{\alpha\gamma}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial\xi^\gamma}. \tag{1.31}$$

Учитывая соотношения (1.25) и (1.29), получим для производных от тензорных базисов формулы

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathfrak{e}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{e}_{\alpha_1} \dots \mathfrak{e}_{\alpha_{i-1}} \frac{\partial \mathfrak{e}_{\alpha_i}}{\partial \xi^\beta} \mathfrak{e}_{\alpha_{i+1}} \dots \mathfrak{e}_{\alpha_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Gamma^{\gamma}_{\alpha_i \beta} \mathfrak{e}_{\alpha_1} \dots \mathfrak{e}_{\alpha_{i-1}} \mathfrak{e}_{\gamma} \mathfrak{e}_{\alpha_{i+1}} \dots \mathfrak{e}_{\alpha_n}. \qquad (1.32)$$

Используя первое равенство (1.31), можно получить аналогичные соотношения для производных

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathfrak{e}_{\alpha_1 \dots \overset{\alpha_i}{} \dots \alpha_n}, \ \dots, \ \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \mathfrak{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Пусть в каждой точке ξ из некоторой области пространства событий Минковского задан тензор $\boldsymbol{a}^{(n)}$, т. е. в этой области определено тензорное поле $\boldsymbol{a}^{(n)}(\xi)$. Тогда, применяя к $\boldsymbol{a}^{(n)}$ инвариантный вектор-оператор $\boldsymbol{\partial}$, определенный равенством

$$\boldsymbol{\partial} = \mathfrak{e}^\beta \frac{\partial}{\partial \xi^\beta},$$

получим тензорное поле $\boldsymbol{\partial a}^{(n)}(\xi)$ ранга $n+1$:

$$\boldsymbol{\partial a}^{(n)} = \mathfrak{e}^\beta \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \left(a^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \mathfrak{e}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \right) = \left(\nabla_\beta a^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \right) \mathfrak{e}^\beta{}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} =$$

$$= \left(\nabla_\beta a^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{ \alpha_i} \right) \mathfrak{e}^\beta{}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{ \alpha_i} = \dots = \left(\nabla_\beta a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \right) \mathfrak{e}^{\beta \alpha_1 \dots \alpha_n}. \qquad (1.33)$$

Для указанных здесь компонент тензора $\boldsymbol{\partial a}^{(n)}$, называемых *ковариантными производными* компонент тензора $\boldsymbol{a}^{(n)}$, при помощи равенств типа (1.32) легко выводятся следующие выражения:

$$\nabla_\beta a^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} a^{\alpha_1 \dots \alpha_n} + \sum_{i=1}^{n} \Gamma^{\alpha_i}_{\gamma \beta} a^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \gamma \alpha_{i+1} \dots \alpha_n},$$

$$\nabla_\beta a^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{ \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} a^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{ \alpha_j} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha_j \beta} a^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}}_{\phantom{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}} \gamma}{}^{\alpha_{i+1} \dots \alpha_n} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{n} \Gamma^{\alpha_i}_{\gamma \beta} a^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \gamma \alpha_{i+1} \dots \alpha_n}_{ \alpha_j}, \ \dots, \ \nabla_\beta a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} - \sum_{i=1}^{n} \Gamma^{\gamma}_{\alpha_i \beta} a_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \gamma \alpha_{i+1} \dots \alpha_n}.$$

Приведем еще ряд полезных соотношений, вытекающих из сформулированных выше определений и результатов [1—4]:

$$\left(\nabla_{\alpha_i} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\right) \mathfrak{Э}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n} = \\ = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha_i}} \left(\sqrt{-g}\, a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \mathfrak{Э}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n}\right), \qquad (1.34)$$

$$\nabla_\alpha g_{\beta\nu} = \nabla_\alpha g^{\beta\nu} = \nabla_\alpha \delta^\beta_\nu = 0, \quad \nabla_\alpha a^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \sqrt{-g}\, a^\alpha, \qquad (1.35)$$

$$\nabla_\alpha a_\beta - \nabla_\beta a_\alpha = \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta}, \quad \nabla_\beta a^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \left(\sqrt{-g}\, a^{\alpha\beta}\right). \qquad (1.36)$$

Здесь $a^{\alpha\beta} = -a^{\beta\alpha}$ — компоненты антисимметричного тензора второго ранга.

В заключение рассмотрим интегрирование по четырехмерной области V и трехмерной гиперповерхности Σ в пространстве событий Минковского [2—4].

Инвариантный интеграл по области V от заданного в ней тензорного поля $\boldsymbol{a}^{(n)}(x)$ образуется обычным путем:

$$\boldsymbol{A}^{(n)} = \int\limits_V \boldsymbol{a}^{(n)}(x)\, d^4x = \int\limits_V \boldsymbol{a}^{(n)}(\xi) \sqrt{-g}\, d^4\xi,$$

где $d^4x = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3$, $d^4\xi = d\xi^0\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3$. Он представляет собой тензор $\boldsymbol{A}^{(n)}$ того же ранга, что и $\boldsymbol{a}^{(n)}$. Чтобы определить инвариантный интеграл по гиперповерхности Σ от заданного на ней тензорного поля $\boldsymbol{a}^{(n)}$, введем на Σ систему координат ζ^k $(k = 1, 2, 3)$. Тогда положение Σ относительно систем координат x^ν, ξ^α задается функциями

$$x^\nu = f^\nu(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3), \qquad \xi^\alpha = f^\alpha(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3).$$

В связи с системой координат ζ^k для каждой точки ζ, принадлежащей гиперповерхности Σ, можно определить тройку касательных векторов $\boldsymbol{f}_{(k)}$:

$$\boldsymbol{f}_{(k)} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \zeta^k} = f^\nu_{(k)} \mathfrak{Э}_\nu = f^\alpha_{(k)} \mathfrak{Э}_\alpha, \qquad f^\nu_{(k)} = \frac{\partial f^\nu}{\partial \zeta^k}, \qquad f^\alpha_{(k)} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial \zeta^k}, \qquad (1.37)$$

и ортогональный им (в смысле псевдоевклидова скалярного произведения (1.17)) вектор $\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{l} = l_\alpha \mathfrak{Э}^\alpha, \qquad l_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} f^\beta_{(1)} f^\gamma_{(2)} f^\delta_{(3)}; \qquad (1.38)$$

$$(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{f}_{(k)}) = l_\alpha f^\alpha_{(k)} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} f^\alpha_{(k)} f^\beta_{(1)} f^\gamma_{(2)} f^\delta_{(3)} = 0. \qquad (1.39)$$

Легко находятся скалярные произведения G_{kr} касательных к Σ векторов $\boldsymbol{f}_{(k)}$:

$$(\boldsymbol{f}_{(k)},\ \boldsymbol{f}_{(r)}) = g_{\mu\nu} f^{\mu}_{(k)} f^{\nu}_{(r)} = g_{\alpha\beta} f^{\alpha}_{(k)} f^{\beta}_{(r)} = G_{kr} \qquad (1.40)$$

и выражение через ζ^k для квадрата интервала между двумя бесконечно близкими событиями, принадлежащими Σ:

$$d\Delta^2 = g_{\alpha\beta}\, d\xi^{\alpha}\, d\xi^{\beta} = g_{\alpha\beta} f^{\alpha}_{(k)} f^{\beta}_{(r)}\, d\zeta^k\, d\zeta^r = G_{kr}\, d\zeta^k\, d\zeta^r.$$

Используя тождество

$$e^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\varepsilon\zeta\eta} = -\begin{vmatrix} \delta^{\beta}_{\varepsilon} & \delta^{\beta}_{\zeta} & \delta^{\beta}_{\eta} \\ \delta^{\gamma}_{\varepsilon} & \delta^{\gamma}_{\zeta} & \delta^{\gamma}_{\eta} \\ \delta^{\delta}_{\varepsilon} & \delta^{\delta}_{\zeta} & \delta^{\delta}_{\eta} \end{vmatrix}, \qquad (1.41)$$

можно доказать, что скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{l}$ связан с определителем G матрицы $\|G_{kr}\|$ простым соотношением

$$(\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{l}) = l^{\alpha} l_{\alpha} = -\left| g_{\alpha\beta} f^{\alpha}_{(k)} f^{\beta}_{(r)} \right| = -G. \qquad (1.42)$$

Инвариантный интеграл по гиперповерхности Σ от заданного на ней тензорного поля $\boldsymbol{a}^{(n)}(\zeta)$ можно образовать следующим способом:

$$\boldsymbol{A}^{(n-1)} = \int_{\Sigma} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} l_{\alpha_i} \mathfrak{Э}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n}\, d^3\zeta \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где $d^3\zeta = d\zeta_1\, d\zeta_2\, d\zeta_3$. Этот интеграл представляет собой тензор ранга $n-1$.

Пусть теперь гиперповерхность Σ является границей области V. Тогда для тензорного поля $\boldsymbol{a}^{(n)}$, заданного в замкнутой области V, имеет место формула Остроградского — Гаусса [2—4]

$$\int_V \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha_i}} \left(\sqrt{-g}\, \boldsymbol{a}^{\alpha_i}_{(n-1)} \right) d^4\xi = \int_{\Sigma} \boldsymbol{a}^{\alpha_i}_{(n-1)} l_{\alpha_i}\, d^3\zeta. \qquad (1.43)$$

Здесь введено обозначение

$$\boldsymbol{a}^{\alpha_i}_{(n-1)} = a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \mathfrak{Э}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Используя соотношение (1.34), формулу Остроградского — Гаусса (1.43) легко представить в ковариантном виде:

$$\int_V \left(\nabla_{\alpha_i} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \right) \mathfrak{Э}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n} \sqrt{-g}\, d^4\xi = \int_{\Sigma} \boldsymbol{a}^{\alpha_i}_{(n-1)} l_{\alpha_i}\, d^3\zeta. \qquad (1.44)$$

При $n=1$, т. е. для векторного поля, равенства (1.43) и (1.44) упрощаются:

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\left(\sqrt{-g}\, a^\alpha\right) d^4\xi = \int\limits_\Sigma a^\alpha l_\alpha\, d^3\zeta, \tag{1.45}$$

$$\int\limits_V (\nabla_\alpha a^\alpha)\sqrt{-g}\, d^4\xi = \int\limits_\Sigma a^\alpha l_\alpha\, d^3\zeta. \tag{1.46}$$

В формулах (1.43) — (1.46) предполагается, что система координат ζ^k выбрана так, что определенный равенством (1.38) вектор $\boldsymbol{l}$ удовлетворяет в каждой точке гиперповерхности Σ неравенству

$$(\boldsymbol{l}\, d\boldsymbol{r}) = (l_\nu\, dx^\nu) = (l_\alpha\, d\xi^\alpha) > 0, \tag{1.47}$$

в котором $d\boldsymbol{r}$ — произвольный бесконечно малый радиус-вектор, направленный из точки гиперповерхности Σ наружу по отношению к области V.

§ 2. Материальные точки и поля

Материальные точки. В пространстве событий [1]) всякой материальной точке соответствует некоторая кривая, называемая ее *мировой линией*. Положение этой линии относительно ГСК наблюдателя можно задать при помощи функций

$$x^\nu = x^\nu(\Delta) \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ \partial x^0/\partial\Delta > 0,\ \Delta > 0),$$

у которых аргументом является положительный интервал, отсчитываемый вдоль данной мировой линии. Тогда вектор $\boldsymbol{u}$, определенный равенством

$$\boldsymbol{u} = u^\nu \boldsymbol{\vartheta}_\nu = \frac{dx^\nu}{d\Delta}\boldsymbol{\vartheta}_\nu, \tag{2.1}$$

называется *четырехмерной скоростью* (*4-скоростью*) *материальной точки*. Учитывая вытекающее из определения интервала равенство

$$d\Delta = c\, dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{2.2}$$

для компонент 4-скорости получим выражения

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad u^k = \frac{v^k}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \left(v^k = \frac{dx^k}{dt}\right). \tag{2.3}$$

[1]) Здесь и в дальнейшем имеется в виду пространство событий Минковского.

Здесь v, v^k — модуль и компоненты обычной трехмерной скорости материальной точки. Заметим, что компоненты u^ν являются безразмерными величинами, а сама 4-скорость — это единичный вектор, касательный к мировой линии материальной точки [1]):

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\Delta}\frac{dx^\nu}{d\Delta} = 1, \quad \boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\Delta} \qquad (\boldsymbol{x} = x^\nu(\Delta)\,\boldsymbol{\vartheta}_\nu). \tag{2.4}$$

В произвольной криволинейной системе координат ξ^α выражение для 4-скорости можно записать в виде

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\Delta} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^\alpha}\frac{d\xi^\alpha}{d\Delta} = \frac{d\xi^\alpha}{d\Delta}\boldsymbol{\vartheta}_\alpha, \qquad u^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\Delta}, \tag{2.5}$$

где функции $\xi^\alpha(\Delta)$ задают положение мировой линии рассматриваемой материальной точки относительно системы координат ξ^α, а $\boldsymbol{x}(\Delta)$ — радиус-вектор точек, лежащих на мировой линии.

Так как свободная материальная точка движется относительно ГСК прямолинейно и равномерно, то для нее 4-скорость постоянна вдоль мировой линии, которая является прямой. Рассмотрим систему материальных точек, взаимодействующих между собой только при столкновениях, в результате которых изменяются их 4-скорости и, возможно, внутренние свойства. Тогда в промежутках между столкновениями такие материальные точки можно рассматривать как свободные. Оказывается, каждой материальной точке соответствует положительное число m (называемое ее *массой покоя* или просто массой и сохраняющее постоянное значение при свободном движении), такое, что при любом столкновении выполняется равенство [3]

$$\left(\sum_i m_i u_i\right)_- = \left(\sum_i m_i u_i\right)_+. \tag{2.6}$$

Здесь индексы минус и плюс указывают на то, что суммирование производится по всем материальным точкам соответственно до и после столкновения. Заметим, что число точек и сумма их масс покоя могут в результате столкновения изменяться. И только, когда $c = \infty$ (при этом, согласно (2.3), $u^0 = 1$), из равенства (2.6) следует закон сохранения массы, применяющийся в нерелятивистской механике. Вектор $\boldsymbol{p} = cm\boldsymbol{u}$ называют *четырехмерным*

[1]) Вектор $\boldsymbol{u}$ по определению указывает положительное направление на мировой линии, причем $u^0 = dx^0/d\Delta > 0$.

импульсом (4-*импульсом*) *материальной точки*. Его компоненты имеют вид

$$p^0 = cmu^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad p^k = cmu^k = \frac{mv^k}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{2.7}$$

Величины $cp^0 = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ и p^k называются *энергией* и *компонентами импульса материальной точки*. Энергия материальной точки относительно ГСО, в которой $v=0$, называется ее *энергией покоя*. Энергия движущейся материальной точки состоит из энергии покоя mc^2 и кинетической энергии. При $c \to \infty$ из равенств (2.7) для кинетической энергии и импульса материальной точки легко получить обычные нерелятивистские выражения

$$\lim_{c\to\infty}(cp^0 - mc^2) = \frac{1}{2}mv^2, \qquad \lim_{c\to\infty} p^k = mv^k.$$

Таким образом, равенство (2.6) представляет собой релятивистский закон сохранения энергии и импульса или 4-импульса системы материальных точек.

Отметим, что из равенств (2.7) вытекает возможность существования материальных точек, у которых $m=0$, $v=c$, а 4-импульс $\boldsymbol{p}$ конечен, отличен от нуля и удовлетворяет соотношению $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})=0$. Для таких материальных точек интервал, отсчитываемый вдоль мировой линии, равен нулю, и невозможно ввести единичный вектор 4-скорости. Касательный вектор к мировой линии, конечно, существует, но его скалярный квадрат равен нулю. Существование таких материальных точек (с $m=0$) — чисто релятивистское явление, не имеющее аналога в классической механике.

Электромагнитное поле и электрические заряды. При изучении движения материальных тел в физическом пространстве и во времени наряду с материальными точками приходится рассматривать идеализированные объекты иного рода, называемые полями [1 — 5]. К ним относится *электромагнитное поле Максвелла*, под действием которого может изменяться движение некоторых материальных точек, если их мировые линии попадают в область пространства событий, где присутствует электромагнитное поле. В свою очередь такие материальные точки создают в пространстве вокруг себя собственное электромагнитное поле, вообще говоря, изменяющееся во времени, которое искажает внешнее электромагнитное поле. Таким образом,

существуют материальные тела, взаимодействующие с электромагнитным полем и через него друг с другом Оказывается, что скорость распространения такого взаимодействия равна максимально возможной скорости распространения взаимодействий c [2, 3].

Для определения количественных характеристик электромагнитного поля и взаимодействующих с ним тел введем идеализированный объект, называемый *пробным электрическим зарядом*. Пробный электрический заряд — это взаимодействующая с электромагнитным полем материальная точка, при движении которой можно пренебречь ее собственным электромагнитным полем, а также нестационарностью и неоднородностью внешнего поля в том месте, где она находится. Установлено, что уравнение движения пробного заряда с массой m можно представить в виде [2, 3]

$$mc\frac{du^{\nu}}{d\Delta} = \frac{e}{c}\mathcal{F}^{\nu\mu}u_{\mu}. \tag{2.8}$$

Здесь e — положительное или отрицательное число, характеризующее способность данного пробного заряда взаимодействовать с электромагнитным полем, а $\mathcal{F}^{\nu\mu}$—компоненты антисимметричного ($\mathcal{F}^{\nu\mu} = -\mathcal{F}^{\mu\nu}$) тензора второго ранга, характеризующего внешнее электромагнитное поле в точке, где находится пробный заряд. Скаляр e и тензор $\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathfrak{Э}_{\mu}\mathfrak{Э}_{\nu}$ называются *электрическим зарядом пробного заряда* и *тензором напряженности электромагнитного поля*. Наблюдая движение пробных зарядов в заданном электромагнитном поле и используя уравнение (2.8), можно найти величины e/e_0 и $e_0\mathcal{F}^{\mu\nu}$, где e — электрический заряд любого пробного заряда, а e_0 — электрический заряд некоторого фиксированного пробного заряда. Единицу измерения электрического заряда (и тем самым электрический заряд e_0 какого-нибудь одного фиксированного пробного заряда) можно выбирать различными способами. Каждому из них соответствует своя система единиц для измерения электромагнитного поля и всех других электромагнитных величин. Используя уравнение движения пробного заряда (2.8) и задавшись единицей измерения электрического заряда, можно в принципе определить не только компоненты $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ тензора напряженности электромагнитного поля в любой точке пространства событий, а еще и электрический заряд любого тела. Например, это можно сделать, наблюдая движение тела в достаточно сильном постоянном и одно-

родном внешнем поле, в котором данное тело можно рассматривать как пробный заряд.

Электромагнитное поле определяется в каждой точке x пространства событий компонентами $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x)$. Функции $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x)$ не являются полностью произвольными, а удовлетворяют некоторым уравнениям электромагнитного поля. Эти уравнения можно разбить на две группы. К первой группе относятся уравнения, связывающие функции $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x)$ с параметрами, характеризующими материальные тела. Эти уравнения для случая, когда материальные тела представляют сплошную среду, будут выведены в дальнейшем из вариационного уравнения Л. И. Седова. Ко второй группе относятся уравнения, связывающие только функции $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x)$ между собой и имеющие следующий вид в любой ГСК [2, 3]:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}\frac{\partial \mathcal{F}_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{\nu}}=0. \tag{2.9}$$

В произвольной криволинейной системе координат их можно записать так:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_{\beta}\mathcal{F}_{\gamma\delta}=0. \tag{2.10}$$

Легко найти общее решение этих уравнений:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}=\nabla_{\alpha}A_{\beta}-\nabla_{\beta}A_{\alpha}=\frac{\partial A_{\beta}}{\partial\xi^{\alpha}}-\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial\xi^{\beta}}. \tag{2.11}$$

Здесь A_{α} — компоненты некоторого вектора $\boldsymbol{A}$, называемого *четырехмерным потенциалом* (*4-потенциалом*) *электромагнитного поля*. Очевидно, чтобы задать в некоторой области V электромагнитное поле, достаточно задать в ней векторное поле $\boldsymbol{A}(x)$. Заметим, что 4-потенциал определяется заданным электромагнитным полем не однозначно, а с точностью до градиентного преобразования

$$A'_{\alpha}=A_{\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\xi^{\alpha}}, \tag{2.12}$$

в котором $A(\xi^{\alpha})$ — произвольная функция от ξ^{α}. В самом деле, легко убедиться, что вектор $\boldsymbol{A}'$ приводит, согласно равенствам (2.11), к тому же самому тензору напряженности электромагнитного поля, что и вектор $\boldsymbol{A}$. В отличие от компонент тензора напряженности электромагнитного поля компоненты его 4-потенциала являются вели-

чинами, физически ненаблюдаемыми. Поэтому физический смысл имеют лишь уравнения и параметры, инвариантные относительно преобразования (2.12). Такую инвариантность называют градиентной или калибровочной [2, 3].

Для компонент тензора напряженности электромагнитного поля и его 4-потенциала, взятых относительно ГСК, приняты следующие специальные обозначения [1 — 3]:

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \mathscr{E}_1 & \mathscr{E}_2 & \mathscr{E}_3 \\ -\mathscr{E}_1 & 0 & -\mathscr{H}_3 & \mathscr{H}_2 \\ -\mathscr{E}_2 & \mathscr{H}_3 & 0 & -\mathscr{H}_1 \\ -\mathscr{E}_3 & -\mathscr{H}_2 & \mathscr{H}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{F}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -\mathscr{E}_1 & -\mathscr{E}_2 & -\mathscr{E}_3 \\ \mathscr{E}_1 & 0 & -\mathscr{H}_3 & \mathscr{H}_2 \\ \mathscr{E}_2 & \mathscr{H}_3 & 0 & -\mathscr{H}_1 \\ \mathscr{E}_3 & -\mathscr{H}_2 & \mathscr{H}_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

$$A_\nu=(\varphi,\ a_1,\ a_2,\ a_3),\quad A^\nu=(\varphi,\ -a^1,\ -a^2,\ -a^3).$$

Здесь индекс μ указывает номер строки, а индекс ν — номер столбца. Можно доказать, что при переходе к другой ГСК, соответствующей системе отсчета, неподвижной относительно исходной, величина φ не изменяется, а величины $\mathscr{E}_k$, $\mathscr{H}_k$, a_k преобразуются как компоненты трехмерных векторов. Они называются соответственно *напряженностью электрического поля, напряженностью магнитного поля* и *векторным потенциалом магнитного поля*. Величина φ называется *скалярным потенциалом* (или просто *потенциалом*) *электрического поля*. Используя равенства (2.2), (2.3), (2.13), легко представить уравнения (2.8), (2.9), (2.11) в трехмерной форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^k}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=e\mathscr{E}^k+\frac{e}{c}e^{kpr}v_p\mathscr{H}_r,\quad \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=e\mathscr{E}_kv^k, \tag{2.14}$$

$$e^{kpr}\frac{\partial\mathscr{H}_r}{\partial x^p}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathscr{E}^k}{\partial t},\quad \frac{\partial\mathscr{H}^k}{\partial x^k}=0, \tag{2.15}$$

$$\mathscr{E}_k=-\frac{1}{c}\frac{\partial a_k}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^k},\quad \mathscr{H}^k=e^{kpr}\frac{\partial a_r}{\partial x^p}, \tag{2.16}$$

где $v_k=v^k=\frac{dx^k}{dt}$, $\mathscr{E}^k=\mathscr{E}_k$, $\mathscr{H}^k=\mathscr{H}_k$, а e^{kpr} — трехмерные, полностью антисимметричные символы Леви-Чивита, причем $e^{123}=1$. Отметим, что среди уравнений (2.8) или (2.14) только три уравнения независимые.

Выше были введены компоненты тензора напряженности электромагнитного поля в вакууме. Средние характеристики электромагнитного поля в веществе будут определены в § 5.

В настоящей главе были сформулированы известные исходные релятивистские понятия, которые потребуются в дальнейшем. Более подробно геометрия пространства событий Минковского, тензорная алгебра и тензорный анализ рассматриваются в работах [1 — 11]. Релятивистская механика материальных точек и электромагнитного поля в вакууме изложена в работах [1 — 4, 12 — 15].

ГЛАВА 2

КИНЕМАТИКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРОЦЕССОВ

§ 3. Движение сплошной среды

Релятивистская сплошная среда. Рассмотрим систему материальных частиц, которые можно считать материальными точками. Пусть их мировые линии проходят через некоторую четырехмерную область V в пространстве событий Минковского. *Физически бесконечно малой* четырехмерной областью o будем называть четырехмерную область, лежащую в V и обладающую следующими свойствами: а) четырехмерный объем v области o много меньше четырехмерного объема V; б) через область o проходит достаточно большое число мировых линий частиц. Рассматривая указанную систему материальных частиц в области V как релятивистскую сплошную среду, введем в каждой точке x из V средние характеристики $\rho(x)$, $u^\nu(x)$, определенные равенствами

$$\rho u^\nu = \frac{1}{v(x)} \sum_o \int m' u'^\nu \, d\Delta', \qquad u^\nu u_\nu = 1. \tag{3.1}$$

Здесь m' и u'^ν — масса и компоненты 4-скорости одной частицы; Δ' — положительный интервал, отсчитываемый вдоль ее мировой линии [1]). Интегрирование проводится по участку мировой линии частицы, принадлежащему физически бесконечно малой области $o(x)$, содержащей рассматриваемую точку x. Сумма берется по всем частицам, чьи мировые линии проходят через $o(x)$. Определение (3.1) предполагает, что результат осреднения по области o, построенной вокруг рассматриваемой точки x, с достаточной точностью не зависит от выбора области o. Из равенства (3.1) следует, что величины ρu^ν являются компонентами четырехмерного вектора ρu. Его называют *4-вектором плотности потока массы покоя среды*. Еди-

[1]) Для частиц с $m' = 0$ в формуле (3.1) надо сделать замену $u'^\nu \to dx'^\nu/d\xi'$, $d\Delta \to d\xi'$, где ξ' — произвольный параметр точек на мировой линии частицы.

ничный вектор u называется 4-скоростью сплошной среды в точке x, а скалярная величина ρ — собственной плотностью массы покоя сплошной среды в точке x.

Равенство (3.1), определяющее величины ρu^ν, можно записать также в виде (учитывая, что $u'^\nu = dx'^\nu/d\Delta'$)

$$\rho u^0(t,\ x^r) = \left\langle \frac{1}{v_3} \sum_{v_3} m' \right\rangle, \quad \rho u^k(t,\ x^r) = \left\langle \frac{1}{cv_3} \sum_{v_3} m' v'^k \right\rangle. \tag{3.2}$$

Здесь $v'^k = dx'^k/dt$ — компоненты трехмерной скорости частицы; v_3 — физически бесконечно малый трехмерный объем, которому принадлежит в рассматриваемый момент времени t точка с пространственными координатами x^r; сумма берется по всем частицам, находящимся в объеме v_3; угловые скобки обозначают операцию осреднения по физически бесконечно малому отрезку времени t_1, содержащему момент времени t. Из равенств (3.2) следует, что относительно выбранной ГСК произведение ρu^0 представляет собой среднюю плотность массы покоя среды [1]), а произведения $c\rho u^k$ ($k = 1, 2, 3$) являются компонентами трехмерного вектора средней плотности потока массы покоя среды. Относительно ГСК, которая является собственной для точки с координатами x^ν [2]), величина $\rho(x^\nu)$ представляет собой среднюю плотность массы покоя среды. Поэтому она называется *собственной плотностью массы покоя среды*.

Из определения и физического смысла величин ρu^0, $c\rho u^k$ следует, что в каждой ГСК они должны удовлетворять обычному интегральному уравнению баланса массы покоя сплошной среды

$$\int_{V_3} \rho u^\nu \, d^3x \Big|_{t_1}^{t_2} = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma_2} c\rho u^k n_k \, d\sigma \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} \varkappa \, d^3x \, dt, \tag{3.3}$$

---

[1]) Здесь и везде в дальнейшем прилагательное «средний» означает «средний по физически бесконечно малой области $o(x)$, построенной около рассматриваемой точки x».

[2]) Галилеевой системой координат (ГСК), *собственной для точки x пространства события*, будем называть ГСК, которая является собственной для сплошной среды в точке x пространства событий, т. е. такую ГСК, относительно которой компоненты 4-скорости сплошной среды в точке x имеют вид $u^{*\nu}(x) = \delta_0^\nu$. Компоненты тензоров в точке x пространства событий, взятые относительно собственной для нее ГСК, будем отмечать звездочкой.

в котором V_3 — трехмерная область пространства переменных x^1, x^2, x^3, ограниченная неподвижной относительно выбранной ГСК двумерной поверхностью Σ_2; n_k — компоненты трехмерного вектора внешней нормали к Σ_2; $d\sigma$ — обычная площадь элемента поверхности Σ_2; $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$.

Величина $\varkappa(x)$ называется *локальной скоростью изменения массы покоя сплошной среды* в точке x пространства событий и определяется равенством

$$\varkappa(x^\nu) = \frac{cL(o)}{v(o)},$$

где $L(o(x))$ — общее изменение суммы масс покоя частиц во всех столкновениях внутри физически бесконечно малой области o, построенной около точки x. Это определение величины $\varkappa(x^\nu)$ можно записать и в трехмерном виде:

$$\varkappa(t, x^k) = \frac{L(o)}{t_1 v_3}.$$

Здесь область o представляет собой физически бесконечно малый трехмерный объем v_3 пространства переменных x^1, x^2, x^3, рассматриваемый в течение физически бесконечно малого промежутка времени t_1. Отметим, что в релятивистской механике величина $\varkappa$ может быть не равна нулю, так как, согласно равенству (2.6), сумма масс покоя частиц при столкновении не обязана сохраняться. И только в пределе при $c = \infty$ имеем $\varkappa = 0$.

Уравнение (3.3) приводит к дифференциальному уравнению баланса массы покоя сплошной среды

$$\frac{\partial \rho u^0}{\partial t} + \frac{\partial c\rho u^k}{\partial x^k} = \varkappa.$$

Его можно записать и в четырехмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(c\rho u^\nu) = \varkappa, \tag{3.4}$$

откуда следует, что величина $\varkappa$ не зависит от выбора ГСК. При переходе от системы координат x^ν к произвольной системе координат ξ^α уравнение (3.4) принимает вид

$$\nabla_\alpha(c\rho u^\alpha) = \varkappa. \tag{3.5}$$

Сопутствующая система координат. Рассмотрим в области V кривую, единичный касательный вектор к которой в каждой точке равен вектору 4-скорости сплошной среды в этой точке. Такая кривая называется мировой линией

бесконечно малой частицы (т. е. точки) сплошной среды или просто *мировой линией сплошной среды*[1]). Пусть ξ^0 — произвольный параметр точек мировой линии, который монотонно возрастает с увеличением времени. Тогда функции $x^\nu(\xi^0)$, задающие положение мировой линии точки сплошной среды относительно ГСК, должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^\nu}{d\Delta} \equiv \left(g_{\mu\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^0}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^0}\right)^{-1/2}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^0} = u^\nu(x^0, x^1, x^2, x^3), \qquad (3.6)$$

в которой Δ — положительный интервал, отсчитываемый вдоль мировой линии точки сплошной среды. Множество всех мировых линий сплошной среды образует трехпараметрическое семейство. Обозначим его параметры через ξ^a ($a = 1, 2, 3$). Они называются *лагранжевыми координатами точек сплошной среды*. Функции, задающие положение семейства мировых линий сплошной среды, следует записать теперь в виде

$$x^\nu = x^\nu(\xi^0, \xi^a) = x^\nu(\xi^\alpha). \qquad (3.7)$$

Параметры ξ^α можно рассматривать как криволинейную систему координат в пространстве событий Минковского [1 — 3]. Она называется *сопутствующей (для сплошной среды) системой координат* ξ^α и обладает всеми рассмотренными в § 1 характеристиками и свойствами произвольной криволинейной системы координат ($g_{\alpha\beta}$, ϑ_α, ϑ^α, $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$, ...). В дальнейшем через ξ^α всегда будем обозначать сопутствующую систему координат (ССК)[2]). Для интервала, отсчитываемого вдоль мировой линии точки сплошной среды, остается в силе выражение (2.2), а для компонент 4-скорости сплошной среды — выражения (2.3), если в них под v и v^k понимать соответственно модуль и компоненты

---

[1]) Следует помнить, что точка сплошной среды представляет собой точку в трехмерном физическом пространстве, а в четырехмерном пространстве событий ей соответствует мировая линия сплошной среды.

[2]) Для обозначения индексов компонент тензоров в ССК ξ^α применяются строчные буквы начала греческого алфавита α, β, γ, δ, ..., принимающие каждая значения 0, 1, 2, 3. Если же рассматриваются компоненты тензора в ССК со значениями 1, 2, 3 некоторого индекса, то он обозначается строчной буквой из начала латинского алфавита a, b, c, d, ... Можно рассматривать также компоненты тензоров, у которых одни индексы относятся к ССК ξ^α, а другие — к ГСК x^ν, причем поднимаются и опускаются они соответственно с помощью компонент $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\mu\nu}$.

обычной трехмерной скорости точки (бесконечно малой частицы) сплошной среды. Эти величины определяются следующим образом:

$$v_k = v^k = c\left(\frac{\partial x^0}{\partial \xi^0}\right)^{-1} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^0}, \quad v = \sqrt{v_k v^k}.$$

Записывая равенства (3.6) относительно ССК и учитывая, что вдоль мировой линии точки сплошной среды $d\xi^\alpha/d\Delta = 0$, найдем компоненты 4-скорости точек сплошной среды относительно ССК [1])

$$u^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\Delta} = \frac{\delta^\alpha_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta = \frac{g_{\alpha 0}}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{3.8}$$

Компоненты $g_{\alpha\beta}$ выражаются через $g_{\mu\nu}$ и производные функций (3.7) при помощи равенств (1.14). Вообще закон движения сплошной среды (3.7), устанавливая связь между ССК ξ^α и системой координат наблюдателя x^ν, позволяет тем самым использовать приведенные в § 1 формулы для пересчета компонент тензоров при переходе от одной системы координат к другой. Отметим еще, что 4-скорость u точек сплошной среды связана с вектором $\mathfrak{e}_0$ из базиса $\mathfrak{e}_\alpha$, соответствующего ССК, простым соотношением

$$u = u^\alpha \mathfrak{e}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \mathfrak{e}_0. \tag{3.9}$$

Собственное время и расстояние. Определим теперь относительно сопутствующей системы отсчета *промежутки собственного времени* $d\tau$ *и элементы собственного пространственного расстояния* $d\lambda$. Промежуток собственного времени между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в одной и той же точке сплошной среды, по определению связан с интервалом $d\Delta$ между этими событиями простым соотношением

$$d\tau = \frac{1}{c} d\Delta = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}}\, d\xi^0. \tag{3.10}$$

Чтобы определить элемент собственного пространственного расстояния $d\lambda$ между произвольной точкой сплош-

---

[1]) В дальнейшем тензорные индексы, на месте которых стоят нули, считаются относящимися к ССК ξ^α, если специально не указана другая система координат. Иногда указанное обстоятельство отмечается символом $\hat{}$ [1], например $g_{00} = \hat{g}_{00}$, $g_{0\alpha} = \hat{g}_{0\alpha}$, $\mathfrak{e}_0 = \hat{\mathfrak{e}}_0$, $u^0 = \hat{u}^0$, $\rho_0 = \hat{\rho}_0$ и т. п.

ной среды с лагранжевыми координатами ξ^a, взятой в момент «времени» ξ^0, и бесконечно близкой ей точкой сплошной среды с лагранжевыми координатами $\xi_1^a = \xi^a + d\xi^a$, рассмотрим эту вторую точку среды в момент ее «времени» $\xi_1^0 = \xi^0 + d\xi^0$, связанный с ξ^0 соотношением $u_\alpha(\xi^0, \xi^a)\, d\xi^\alpha = 0$. Тогда события с координатами ξ^α и ξ_1^α будут одновременными относительно ГСК, которая является собственной для точки ξ^a сплошной среды в момент «времени» ξ^0. Эти события можно назвать истинно одновременными относительно ССК. Используя выражение (3.8) для u_α, условие истинной одновременности относительно ССК легко представить в виде

$$g_{\alpha 0}\, d\xi^\alpha = g_{00}\, d\xi^0 + g_{a0}\, d\xi^a = 0. \tag{3.11}$$

Определим теперь величину $d\lambda^2$ равенствами

$$d\lambda^2 = -\, d\Delta^2 = -\, g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta > 0, \qquad g_{\alpha 0}\, d\xi^\alpha = 0, \tag{3.12}$$

в которых $d\Delta$ — интервал между истинно одновременными относительно ССК событиями в бесконечно близких точках сплошной среды с лагранжевыми координатами ξ^a и $\xi^a + d\xi^a$. Исключив из равенств (3.12) величину $d\xi^0$, получим окончательное выражение для квадрата элемента пространственного расстояния в ССК:

$$d\lambda^2 = \gamma_{ab}\, d\xi^a\, d\xi^b > 0, \quad \gamma_{ab} = \frac{g_{a0} g_{b0}}{g_{00}} - g_{ab}. \tag{3.13}$$

Используя общие формулы преобразования компонент четырехмерных тензоров при переходе от одной системы координат (четырехмерной) в пространстве событий Минковского к другой, можно показать, что компоненты γ_{ab} преобразуются при изменении системы лагранжевых координат ξ^a как ковариантные компоненты трехмерного тензора второго ранга. Пусть из точки сплошной среды с лагранжевыми координатами ξ^a в момент «времени» ξ^0 отправляется в бесконечно близкую ей точку среды с лагранжевыми координатами $\xi^a + d\xi^a$ сигнал, распространяющийся с максимально возможной скоростью c, который затем возвращается в исходную точку сплошной среды по тому же пути. Оказывается, что промежуток собственного времени $d\tau$ в исходной точке среды, прошедший между отправлением и возвращением сигнала, связан с собственным расстоянием $d\lambda$ между точками сплошной среды, определенным равенством (3.13), обычной зависимостью $d\tau = 2d\lambda/c$ [4].

Пространственный метрический тензор. Рассмотрим следующий четырехмерный тензор второго ранга:

$$\gamma = \gamma_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\mu} \mathcal{E}^{\nu}, \quad \gamma_{\mu\nu} = u_{\mu} u_{\nu} - g_{\mu\nu}. \tag{3.14}$$

Учитывая выражения (3.8) для u^{α} и u_{α}, легко показать, что в ССК ξ^{α} пространственные ковариантные компоненты этого тензора совпадают с величинами γ_{ab}, определенными равенством (3.13), остальные же ковариантные компоненты равны нулю (в ССК):

$$\begin{aligned} \gamma_{ab} &= u_a u_b - g_{ab} = \frac{g_{a0} g_{b0}}{g_{00}} - g_{ab}, \\ \gamma_{0\alpha} &= \gamma_{\alpha 0} = u_0 u_{\alpha} - g_{0\alpha} = 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

а его пространственные контравариантные компоненты в ССК ξ^{α} связаны с пространственными контравариантными компонентами метрического тензора простым соотношением

$$\gamma^{ab} = u^a u^b - g^{ab} = -g^{ab}. \tag{3.16}$$

Из равенств (3.15) и (3.16) следует, что компоненты γ_{ab} и γ^{ab} образуют взаимно обратные матрицы

$$\gamma_{ab} \gamma^{bc} = -\gamma_{ab} g^{bc} = -\gamma_{a\beta} g^{\beta c} = -\gamma_a^c = -u_a u^c + g_a^c = \delta_a^c. \tag{3.17}$$

Так как компоненты $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ также образуют взаимно обратные матрицы, имеет место тождество

$$g_{00} = \frac{|g^{ab}|}{|g^{\alpha\beta}|} = \frac{-|\gamma^{ab}|}{g^{\alpha\beta}} = -\frac{|g_{\alpha\beta}|}{|\gamma_{ab}|}. \tag{3.18}$$

Заметим, что определители $g = |g_{\alpha\beta}|$, $\gamma = |\gamma_{ab}|$ и компонента g_{00} должны удовлетворять неравенствам [1])

$$-g > 0, \quad \gamma > 0, \quad g_{00} > 0,$$

вытекающим из вида метрики в ГСК и положительной определенности квадратов элементов собственного пространственного расстояния и промежутков собственного времени для любых возможных ($v < c$) движений сплошной среды. Поэтому тождество (3.18) можно записать в таком виде:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{g_{00}} \sqrt{\gamma}, \quad g = |g_{\alpha\beta}| < 0, \quad \gamma = |\gamma_{ab}| > 0. \tag{3.19}$$

---

[1]) В дальнейшем через g, γ всегда обозначаются определители компонент $g_{\alpha\beta}$, γ_{ab}, относящихся к ССК ξ^{α}. Иногда указанное обстоятельство отмечается символом $\hat{}$ [1].

Теперь элемент четырехмерного объема dv можно представить в виде произведения промежутка собственного времени $d\tau$ на *элемент собственного трехмерного объема* $d\hat{v}_3$

$$dv = \sqrt{-g}\, d^4\xi = c\, d\tau\, d\hat{v}_3, \quad d\hat{v}_3 = \sqrt{\gamma}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3. \tag{3.20}$$

Используя формулы преобразования компонент метрического тензора при переходе от ГСК к ССК, легко показать, что введенные выше величины $d\tau$, $d\lambda$, $d\hat{v}_3$ связаны простыми соотношениями с соответствующими им элементами времени dl^*, пространственного расстояния dl^* и трехмерного объема пространства dv_3^*, взятыми относительно ГСК, которая является собственной для рассматриваемой точки ξ_* пространства событий:

$$d\tau(\xi_*^\alpha) = dt^*, \quad d\lambda(\xi_*^\alpha) = dl^*, \quad d\hat{v}_3(\xi_*^\alpha) = dv_3^*.$$

Определенный выше тензор γ можно назвать *пространственным метрическим тензором сплошной среды*. Отметим, что свертка его с вектором 4-скорости равна нулю:

$$\gamma_{\alpha\beta} u^\beta = \gamma_\alpha^\beta u_\beta = \gamma^{\alpha\beta} u_\beta = 0. \tag{3.21}$$

Поэтому

$$\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\beta\delta} = \gamma_{\alpha\beta}(u^\beta u^\delta - g^{\beta\delta}) = -\gamma_{\alpha\beta} g^{\beta\delta} = -\gamma_\alpha^\delta. \tag{3.22}$$

Равенства (3.21) и (3.22) справедливы, конечно, не только в ССК ξ^α, но и в любой другой системе координат. Например, в системе координат x^ν имеем

$$\gamma_{\mu\nu} u^\nu = \gamma_\mu^\nu u_\nu = \gamma^{\mu\nu} u_\nu = 0, \quad \gamma_{\mu\nu}\gamma^{\nu\lambda} = -\gamma_\mu^\lambda. \tag{3.23}$$

Используя компоненты пространственного метрического тензора, можно определить элемент собственного пространственного расстояния между точками сплошной среды, в которых произошли рассматриваемые бесконечно близкие события:

$$d\lambda^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta. \tag{3.24}$$

Введем еще ряд характеристик движения сплошной среды [1—7].

Четырехмерный вектор ускорения. *Четырехмерным ускорением* w (*4-ускорением*) *сплошной среды* называется

производная от ее 4-скорости, вычисленная вдоль ее мировой линии:

$$w = \frac{du}{d\Delta}. \tag{3.25}$$

Для компонент w^ν и w^α 4-ускорения, взятых относительно соответственно ГСК и ССК, справедливы выражения [1])

$$w^\nu = \frac{du^\nu}{d\Delta} = \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\Delta} = u^\lambda \partial_\lambda u^\nu, \qquad w^\alpha = u^\gamma \nabla_\gamma u^\alpha. \tag{3.26}$$

Дифференцируя равенство $u^\nu u_\nu = 1$, получим следующие простые соотношения:

$$u^\nu \partial_\lambda u_\nu = 0, \quad u^\alpha \nabla_\gamma u_\alpha = 0, \quad u^\nu w_\nu = u^\alpha w_\alpha = 0. \tag{3.27}$$

Заметим, что в собственной ГСК компоненты 4-скорости и 4-ускорения соответственно имеют вид

$$u^{*0} = 1, \quad u^{*k} = 0; \qquad w^{*0} = 0, \quad w^{*k} = \frac{1}{c^2}\frac{dv^k}{dt}. \tag{3.28}$$

Четырехмерный тензор деформаций. Введем для каждой бесконечно малой частицы (точки) сплошной среды некоторое фиксированное состояние, которое по определению будем считать недеформированным. Пусть в этом состоянии для элемента собственного пространственного расстояния $d\mathring{\lambda}$ справедливо выражение

$$d\mathring{\lambda}^2 = \mathring{\gamma}_{ab}\, d\xi^a\, d\xi^b, \quad \mathring{\gamma}_{ab} = \mathring{\gamma}_{ba} = \mathring{\gamma}_{ab}(\xi^c), \tag{3.29}$$

из которого следует, что при изменении системы лагранжевых координат величины $\mathring{\gamma}_{ab}$ преобразуются как ковариантные компоненты трехмерного тензора второго ранга. Определим теперь в каждой точке ξ^c сплошной среды в каждый момент «времени» ξ^0 величины $\gamma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, \ldots, 3$), которые при $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ совпадают с $\mathring{\gamma}_{ab}(\xi^c)$, а при $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ равны нулю:

$$\mathring{\gamma}_{0\beta} = \mathring{\gamma}_{\alpha 0} = 0. \tag{3.30}$$

---

[1]) В дальнейшем для обозначения частных производных по x^0, x^1, x^2, x^3 используются символы ∂_μ, ∂_ν, ∂_λ, ..., а для обозначения частных производных по ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3 — символы ∂_α, ∂_β, ∂_γ, ...

Заметим, что при переходе от ССК ξ^α к любой другой ССК ξ'^α лагранжевы координаты должны преобразовываться независимо от параметра ξ^0:

$$\xi'^0 = \xi'^0(\xi^0, \xi^a), \quad \xi'^a = \xi'^a(\xi^a), \tag{3.31}$$

чтобы оставаться постоянными вдоль мировых линий точек сплошной среды. Учитывая равенства (3.30), (3.31), легко показать, что величины $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}$, определенные указанным способом в каждой ССК, преобразуются при переходе от одной из них к другой как ковариантные компоненты четырехмерного тензора второго ранга:

$$\overset{\circ}{\gamma}'_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi'^\alpha}\frac{\partial \xi^0}{\partial \xi'^\beta}\overset{\circ}{\gamma}_{\nu\delta}, \quad \overset{\circ}{\gamma} = \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}\mathfrak{e}^\alpha\mathfrak{e}^\beta. \tag{3.32}$$

Поэтому можно следующим образом [2] ввести четырехмерный тензор второго ранга, называемый *4-тензором деформаций*:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\alpha\beta}\mathfrak{e}^\alpha\mathfrak{e}^\beta = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta})\mathfrak{e}^\alpha\mathfrak{e}^\beta, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}). \tag{3.33}$$

Свертки этих тензоров с вектором 4-скорости равны нулю:

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\mu\nu}u^\nu = \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}u^\beta = 0, \quad \varepsilon_{\mu\nu}u^\nu = \varepsilon_{\alpha\beta}u^\beta = 0, \quad \varepsilon_{\alpha 0} = 0.$$

Используя компоненты 4-тензора деформаций, получим соотношение

$$d\lambda^2 - d\overset{\circ}{\lambda}{}^2 = (\gamma_{ab} - \overset{\circ}{\gamma}_{ab})\,d\xi^a\,d\xi^b = 2\varepsilon_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha\,d\xi^\beta,$$

аналогичное тому, что имеет место в нерелятивистской механике [1].

Четырехмерный тензор скоростей деформаций. Определим величины $e_{\alpha\beta}$ равенством

$$e_{\alpha\beta} = \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{d\tau} = \frac{c}{2}\frac{d\gamma_{\alpha\beta}}{d\Delta} \qquad \left(\frac{d\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}}{d\Delta} = 0\right), \tag{3.34}$$

в котором производная берется вдоль мировой линии точки сплошной среды. Покажем, что величины $e_{\alpha\beta}$ являются компонентами (в ССК ξ^α) некоторого четырехмерного тензора второго ранга. Для этого вычислим предварительно производные $du_\alpha/d\Delta$ и $dg_{\alpha\beta}/d\Delta$ вдоль

мировой линии точки сплошной среды [1]):

$$\frac{du_\alpha}{d\Delta}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial\xi^0}(x^\nu_\alpha u_\nu)=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left(u_\nu\frac{\partial x^\nu_0}{\partial\xi^\alpha}+x^\nu_\alpha\frac{\partial u_\nu}{\partial\xi^0}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left(u_\nu\frac{\partial x^\nu_0}{\partial\xi^\alpha}+x^\nu_\alpha\frac{dx^\lambda}{d\xi^0}\frac{\partial u_\nu}{\partial x^\lambda}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}u_\nu\partial_\alpha\sqrt{g_{00}}\,u^\nu+x^\nu_\alpha u^\lambda\partial_\lambda u_\nu=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\partial_\alpha\sqrt{g_{00}}+u^\nu\nabla_\nu u_\alpha,$$

$$\frac{dg_{\alpha\beta}}{d\Delta}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial\xi^0}(g_{\mu\nu}x^\mu_\alpha x^\nu_\beta)=\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{00}}}(x^\nu_\beta\partial_\alpha\sqrt{g_{00}}\,u^\mu+x^\mu_\alpha\partial_\beta\sqrt{g_{00}}\,u^\nu)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(x^\nu_\beta u_\nu\partial_\alpha\sqrt{g_{00}}+x^\mu_\alpha u_\mu\partial_\beta\sqrt{g_{00}})+x^\nu_\beta\partial_\alpha u_\nu+x^\mu_\alpha\partial_\beta u_\mu=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(u_\beta\partial_\alpha\sqrt{g_{00}}+u_\alpha\partial_\beta\sqrt{g_{00}})+x^\mu_\alpha x^\nu_\beta(\partial_\mu u_\nu+\partial_\nu u_\mu)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(u_\beta\partial_\alpha\sqrt{g_{00}}+u_\alpha\partial_\beta\sqrt{g_{00}})+\nabla_\alpha u_\beta+\nabla_\beta u_\alpha.$$

Здесь были использованы соотношения

$$x^\nu_0=\sqrt{g_{00}}\,u^\nu,\quad u_\nu\partial_\alpha u^\nu=0,\quad \partial_\alpha=x^\nu_\alpha\partial_\nu,\quad \partial_\nu=\nabla_\nu$$

и общие формулы преобразования компонент тензоров при переходе от системы координат x^ν к ССК ξ^α. Таким образом, справедливы равенства

$$\frac{du_\alpha}{d\Delta}=u^\nu\nabla_\nu u_\alpha+\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\partial_\alpha\sqrt{g_{00}},$$

$$\frac{dg_{\alpha\beta}}{d\Delta}=\nabla_\alpha u_\beta+\nabla_\beta u_\alpha+\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(u_\beta\partial_\alpha\sqrt{g_{00}}+u_\alpha\partial_\beta\sqrt{g_{00}}).\tag{3.35}$$

Теперь легко получить выражение для $d\gamma_{\alpha\beta}/d\Delta$:

$$\frac{d\gamma_{\alpha\beta}}{d\Delta}=\frac{d}{d\Delta}(u_\alpha u_\beta-g_{\alpha\beta})=u_\beta u^\nu\nabla_\nu u_\alpha+u_\alpha u^\nu\nabla_\nu u_\beta-\nabla_\alpha u_\beta-\nabla_\beta u_\alpha=$$

$$=\gamma^\nu_\alpha\nabla_\nu u_\beta+\gamma^\nu_\beta\nabla_\nu u_\alpha=-\gamma^\nu_\alpha\gamma^\delta_\beta(\nabla_\nu u_\delta+\nabla_\delta u_\nu).$$

В этом равенстве учтено, что $u^\alpha\nabla_\beta u_\alpha=0$.

Таким образом, для величин $e_{\alpha\beta}$ справедлива формула

$$e_{\alpha\beta}=-\frac{c}{2}\gamma^\nu_\alpha\gamma^\delta_\beta(\nabla_\nu u_\delta+\nabla_\delta u_\nu),\tag{3.36}$$

---

[1]) В дальнейшем используются обозначения: $x^\nu_\alpha=\partial x^\nu/\partial\xi^\alpha$, $\xi^\alpha_\nu=\partial\xi^\alpha/\partial x^\nu$, причем $x^\nu_\alpha\xi^\beta_\nu=\delta^\beta_\alpha$, $x^\nu_\alpha\xi^\alpha_\mu=\delta^\nu_\mu$.

из которой следует, что они являются компонентами тензора второго ранга $e = e_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha\vartheta^\beta$ (относительно ССК). Этот тензор называется *4-тензором скоростей деформаций*. Выражение (3.36) для его компонент справедливо в любой системе координат (не обязательно сопутствующей), в то время как выражения (3.34) имеют место только в ССК. Например, в ГСК x^ν имеем

$$e_{\mu\nu} = -\frac{c}{2}\gamma^\lambda_\mu\gamma^\varkappa_\nu(\partial_\lambda u_\varkappa + \partial_\varkappa u_\lambda) \neq \frac{d\varepsilon_{\mu\nu}}{d\tau}. \qquad (3.37)$$

Если же эта ГСК является собственной для точки сплошной среды с лагранжевыми координатами ξ^a_* в момент «времени» ξ^0_*, то компоненты $e^*_{\mu\nu}(\xi^\alpha_*)$ имеют особенно простой вид:

$$e^*_{kr}(\xi^a_*, \xi^0_*) = \frac{1}{2}(\partial_k v_r + \partial_r v_k), \quad e^*_{\nu 0}(\xi^\alpha_*) = e^*_{0\nu}(\xi^\alpha_*) = 0. \qquad (3.38)$$

Здесь $v_r = dx^r/dt$ — компоненты обычной трехмерной скорости точек сплошной среды в собственной для точки ξ^a_* в момент «времени» ξ^0_* ГСК, из определения которой следует, что $v_r(\xi^a_*, \xi^0_*) = 0$.

Отметим, что на основании равенств (3.21) и (3.36) свертка 4-тензора скоростей деформаций с 4-скоростью рассматриваемой точки сплошной среды равна нулю:

$$e_{\alpha\beta}u^\beta = 0, \quad e_{\mu\nu}u^\nu = 0 \qquad (e_{\alpha 0} = e_{0\alpha} = 0). \qquad (3.39)$$

Если при $\xi^\alpha = \xi^\alpha_*$ компоненты 4-тензора скоростей деформаций равны нулю, то движение бесконечно малой частицы сплошной среды с лагранжевыми координатами ξ^a_* в момент ее «времени» ξ^0_* можно назвать *твердым*. При таком движении выполняются равенства

$$\frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{d\Delta} = 0, \quad \frac{d\gamma_{\alpha\beta}}{d\Delta} = 0, \quad \frac{d\gamma^{ab}}{d\Delta} = \frac{d}{d\Delta}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_{ba}}\right) = 0, \qquad (3.40)$$

из которых следует, что скалярные произведения

$$(u, u) = 1, \quad (u, \vartheta^a) = \frac{(\vartheta_0, \vartheta^a)}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \qquad (\vartheta^a, \vartheta^b) = g^{ab} = -\gamma^{ab} \qquad (3.41)$$

четверки векторов u, ϑ^a $(a = 1, 2, 3)$ между собой остаются постоянными. Таким образом, при твердом движении бесконечно малой частицы сплошной среды базис из векторов u, ϑ^a перемещается вдоль ее мировой линии без

изменения метрических соотношений между этими векторами (в смысле четырехмерной псевдоевклидовой геометрии), причем вектор $\boldsymbol{u}$ по определению является касательным к мировой линии и направлен в сторону возрастания собственного времени τ.

Четырехмерный вектор угловой скорости. Рассмотрим антисимметричный тензор второго ранга Ω, определенный равенствами

$$\Omega = \omega_{\alpha\beta} \mathcal{E}^{\alpha} \mathcal{E}^{\beta}, \quad \omega_{\alpha\beta} = \frac{c}{2} \gamma_{\alpha}^{\nu} \gamma_{\beta}^{\delta} (\nabla_{\nu} u_{\delta} - \nabla_{\delta} u_{\nu}). \tag{3.42}$$

Этот тензор называется *4-тензором угловой скорости вращения бесконечно малой частицы (точки) сплошной среды.* В ГСК x^{ν} его компоненты имеют вид

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{c}{2} \gamma_{\mu}^{\lambda} \gamma_{\nu}^{\varkappa} (\partial_{\lambda} u_{\varkappa} - \partial_{\varkappa} u_{\lambda}). \tag{3.43}$$

Если же эта ГСК является собственной для точки сплошной среды с лагранжевыми координатами ξ_*^a в момент «времени» ξ_*^0, то компоненты $\omega_{\mu\nu}^* (\xi_*^a, \xi_*^0)$ принимают особенно простую форму:

$$\omega_{kr}^* (\xi_*^a, \xi_*^0) = \frac{1}{2} (\partial_r v_k - \partial_k v_r), \quad \omega_{\nu 0}^* (\xi_*^{\alpha}) = 0. \tag{3.44}$$

Здесь $v_k = dx^k/dt$ — компоненты обычной трехмерной скорости точек сплошной среды относительно собственной для точки ξ_*^a в момент «времени» ξ_*^0 ГСК, из определения которой следует, что $v_k (\xi_*^a, \xi_*^0) = 0$. Так как $u^{\nu} \gamma_{\nu\mu} = 0$, то в каждой точке сплошной среды в любой момент времени выполняются равенства

$$\omega_{\mu\nu} u^{\nu} = 0, \quad \omega_{\alpha\beta} u^{\beta} = 0 \qquad (\omega_{0\alpha} = \omega_{\alpha 0} = 0). \tag{3.45}$$

Введем четырехмерный вектор $\boldsymbol{\omega}$, который связан с тензором Ω следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}, \quad \omega^{\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\beta} \omega_{\gamma\delta}. \tag{3.46}$$

Этот вектор называется *4-вектором угловой скорости вращения бесконечно малой частицы (точки) сплошной среды.* В ГСК x^{ν} равенства (3.46) записываются так:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^{\nu} \mathcal{E}_{\nu}, \quad \omega^{\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\lambda\varkappa} u_{\mu} \omega_{\lambda\varkappa}. \tag{3.47}$$

Если же эта ГСК, как и выше, является собственной для $\xi^\alpha = \xi^\alpha_*$, то компоненты $\omega^{*\nu}(\xi^\alpha_*)$ имеют совсем простой вид:

$$\omega^{*k}(\xi^\alpha_*) = \frac{1}{2} e^{krp}\partial_r v_p, \quad \omega^{*0}(\xi^\alpha_*) = 0. \tag{3.48}$$

В каждой точке области V 4-вектор угловой скорости ортогонален (в смысле псевдоевклидовой метрики) 4-скорости:

$$u_\nu \omega^\nu = \frac{1}{2} e^{\nu\mu\lambda\varkappa} u_\nu u_\mu \omega_{\lambda\varkappa} = 0, \quad u_\alpha \omega^\alpha = 0. \tag{3.49}$$

Используя тождества (1.41) и (3.45), равенства (3.47) можно разрешить относительно $\omega_{\lambda\varkappa}$. Для этого подставим в компоненты $e_{\nu\sigma\tau\varphi}\omega^\nu u^\sigma$ вместо ω^ν выражение (3.47) и проведем следующие тождественные преобразования:

$$e_{\nu\sigma\tau\varphi}\left(\frac{1}{2} e^{\nu\mu\lambda\varkappa} u_\mu \omega_{\lambda\varkappa}\right) u^\sigma =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \delta^\mu_\sigma u^\sigma u_\mu & \delta^\mu_\tau u_\mu & \delta^\mu_\varphi u_\mu \\ \delta^\lambda_\sigma u^\sigma & \delta^\lambda_\tau & \delta^\lambda_\varphi \\ \delta^\varkappa_\sigma u^\sigma & \delta^\varkappa_\tau & \delta^\varkappa_\varphi \end{vmatrix} \omega_{\lambda\varkappa} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \delta^\lambda_\tau & \delta^\lambda_\varphi \\ \delta^\varkappa_\tau & \delta^\varkappa_\varphi \end{vmatrix} \omega_{\lambda\varkappa} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta^\varkappa_\tau \delta^\lambda_\varphi - \delta^\lambda_\tau \delta^\varkappa_\varphi\right)\omega_{\lambda\varkappa} = \omega_{\varphi\tau}.$$

Окончательно получим следующее выражение компонент $\omega_{\varphi\tau}$ через компоненты ω^ν:

$$\omega_{\varphi\tau} = e_{\nu\sigma\tau\varphi}\omega^\nu u^\sigma = e_{\varphi\tau\sigma\nu} u^\sigma \omega^\nu. \tag{3.50}$$

Заметим, что в ССК ξ^α это соотношение записывается с помощью компонент (1.28) тензора Леви-Чивита

$$\omega_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\gamma \omega^\delta. \tag{3.51}$$

Распределение 4-скорости в бесконечно малой частице сплошной среды в течение бесконечно малого промежутка времени. Рассмотрим точку сплошной среды с лагранжевыми координатами ξ^a в момент ее «времени» ξ^0 как некоторую точку в пространстве событий Минковского, имеющую координаты ξ^α в ССК ξ^α. В четырехмерной окрестности этой точки с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно написать следующее разложение для векторного поля 4-скорости сплошной среды:

$$\boldsymbol{u}(\xi^\alpha + d\xi^\alpha) = \boldsymbol{u}(\xi^\alpha) + (\partial_\nu \boldsymbol{u})_{\xi^\alpha} d\xi^\nu =$$

$$= \boldsymbol{u}(\xi^\alpha) + (\nabla_\nu u_\beta \mathfrak{e}^\beta)_{\xi^\alpha} d\xi^\nu. \tag{3.52}$$

Используя определенные выше компоненты 4-вектора ускорения, 4-тензора скоростей деформаций и 4-вектора угловой скорости, можно представить ковариантные производные в таком виде:

$$\nabla_\nu u_\beta = (\delta^\alpha_\nu - u_\nu u^\alpha + u_\nu u^\alpha)\nabla_\alpha u_\beta = u_\nu w_\beta - \gamma^\alpha_\nu \nabla_\alpha u_\beta =$$

$$= u_\nu w_\beta + \gamma^\alpha_\nu \gamma^\delta_\beta \nabla_\alpha u_\delta =$$

$$= u_\nu w_\beta + \frac{1}{c}\omega_{\nu\beta} - \frac{1}{c} e_{\nu\beta} = u_\nu w_\beta + \varepsilon_{\nu\beta\alpha\delta}\frac{1}{c} u^\alpha \omega^\delta - \frac{1}{c} e_{\nu\beta}.$$

Здесь, кроме того, учитывались равенства $u^\delta \nabla_\alpha u_\delta = 0$, $\nabla_\alpha u_\beta = -\gamma^\delta_\beta \nabla_\alpha u_\delta$. Окончательная формула для распределения 4-скорости в бесконечно малой частице сплошной среды в течение бесконечно малого промежутка времени имеет следующий вид (с точностью до бесконечно малых высшего порядка по $d\xi^\alpha$):

$$\boldsymbol{u}(\xi^\alpha + d\xi^\alpha) = \boldsymbol{u}(\xi^\alpha) + (\boldsymbol{w} u_\nu)_{\xi^\alpha} d\xi^\nu +$$

$$+ \frac{1}{c}(\varepsilon_{\nu\beta\alpha\delta} u^\alpha \omega^\delta \mathfrak{I}^\beta)_{\xi^\alpha} d\xi^\nu - \frac{1}{c}(e_{\nu\beta}\mathfrak{I}^\beta)_{\xi^\alpha} d\xi^\nu.$$

Учитывая равенства (1.28), (3.19), (3.8) и (3.39), полученное выражение для распределения 4-скорости можно записать так:

$$\boldsymbol{u}(\xi^\alpha + d\xi^\alpha) = \boldsymbol{u}(\xi^\alpha) + \boldsymbol{w} u_\nu\, d\xi^\nu +$$

$$+ \frac{1}{c}\sqrt{\gamma}\, e_{abc} d\xi^a \omega^b \mathfrak{I}^c - \frac{1}{c} e_{ab}\mathfrak{I}^b\, d\xi^a. \qquad (3.53)$$

Заметим, что для истинно одновременных относительно ССК событий ξ^α и $\xi^\alpha + d\xi^\alpha$ имеем $u_\nu d\xi^\nu = 0$, и, следовательно, слагаемое, содержащее 4-ускорение, из формулы (3.53) выпадает.

Уравнение неразрывности. Дифференциальное уравнение баланса массы покоя сплошной среды (см. (3.3)) переходит при $c = \infty$ в обычное уравнение неразрывности нерелятивистской механики. В этом легко убедиться, учитывая, что на основании равенств (2.3) и (2.6) при $c = \infty$ имеем $u^0 = 1$, $cu^k = v^k$, $\varkappa = 0$. Поэтому уравнение (3.3) или (3.4) можно назвать *уравнением неразрывности* релятивистской механики. В ССК ξ^α оно имеет вид (3.5):

$$\nabla_\alpha(c\rho u^\alpha) = \varkappa. \qquad (3.54)$$

Применяя тождество (1.35), запишем это уравнение так:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha(\sqrt{-g}\, c\rho u^\alpha) = \varkappa.$$

Подставив сюда выражения (3.8) и (3.19) для u^α и $\sqrt{-g}$ и учитывая определение собственного времени, преобразуем уравнение неразрывности к следующей форме:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{d}{d\tau}(\rho\sqrt{\gamma}) = \varkappa. \tag{3.55}$$

Умножив соотношение (3.55) на $\sqrt{\gamma}$ и проинтегрировав его по собственному времени τ, найдем выражение для $\rho\sqrt{\gamma}$

$$\rho\sqrt{\gamma}\,|_\tau = \int_0^\tau \varkappa\sqrt{\gamma}\,d\tau + \rho\sqrt{\gamma}\,|_{\tau=0}. \tag{3.56}$$

Левая часть этого равенства, будучи умножена на $d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$, представляет собой сумму масс покоя частиц, содержащихся в бесконечно малом собственном трехмерном объеме $d\hat{v}_3 = \sqrt{\gamma}\,d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ сплошной среды. Эта сумма не зависит от собственного времени τ, если при столкновениях частиц сумма их масс покоя сохраняется ($\varkappa = 0$).

Отметим также, что при $\rho = 1/\sqrt{\gamma}$, $\varkappa = 0$ уравнение (3.55), а значит, и уравнение (3.54) удовлетворяются тождественно:

$$\nabla_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}u^\alpha\right) \equiv 0. \tag{3.57}$$

§ 4. Диффузия и реакции в многокомпонентных средах

Определение многокомпонентной сплошной среды. Пусть система микроскопических частиц, рассматриваемая в § 3 как сплошная среда, представляет собой смесь, состоящую из частиц N сортов. В этом случае подсистема из частиц одного какого-нибудь сорта называется *компонентой смеси*. Пронумеруем компоненты смеси и будем отмечать микроскопические и средние характеристики частиц i-й компоненты индексом i ($i = 1, 2, \ldots, N$), который иногда будем заключать в скобки, чтобы не путать его с тензорными индексами. Средние характеристики (без индекса i), введенные в § 3, относятся к смеси в целом. Но, очевидно, рассматривая каждую отдельную компоненту и проводя для нее дословно все рассуждения из § 3, можно определить для каждой компоненты такие же характеристики, как и для смеси в целом. Сохраним для них прежние обозначения, добавляя лишь индекс

$i=1, \ldots, N$[1]). Таким образом, для каждой компоненты введем свою сплошную среду со следующими характеристиками:

$$\rho_i,\ \boldsymbol{u}_i,\ \varkappa_i,\ \xi_i^\alpha,\ \mathfrak{e}_{\alpha i},\ \mathfrak{e}_i^\alpha,\ \Gamma_{\alpha\beta i}^\nu,\ v_i^k,\ d\tau_i,$$

$$d\lambda_i,\ \gamma_i,\ \boldsymbol{\gamma}_i,\ \boldsymbol{\varpi}_i,\ \mathring{\boldsymbol{\gamma}}_i,\ \boldsymbol{\varepsilon}_i,\ \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{\Omega}_i,\ \boldsymbol{\omega}_i.$$

Каждую такую среду также будем называть *компонентой*, а сплошную среду для смеси в целом — *многокомпонентной сплошной средой* или просто смесью.

Очевидно, что для каждой компоненты справедливо уравнение типа (3.4):

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(c\rho_i u_i^\nu\right)=\varkappa_i \qquad (i=1, \ldots, N), \tag{4.1}$$

называемое *уравнением неразрывности i-й компоненты смеси*. Входящая в него величина $\varkappa_i(x^\lambda)$ представляет собой локальную скорость изменения массы покоя i-й компоненты смеси за счет столкновений между частицами. Заметим, что из определения величин ρ, u^ν, ρ_i, u_i^ν вытекают тождества

$$\begin{aligned} \rho\boldsymbol{u} &= \sum_{i=1}^{N}\rho_i\boldsymbol{u}_i, \\ \rho = \sum_{i=1}^{N}\rho_i u_i^\nu u_\nu &= \sqrt{g_{\mu\nu}\sum_{i=1}^{N}\rho_i u_i^\mu \sum_{j=1}^{N}\rho_j u_j^\nu}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Поэтому, суммируя равенства (4.1) по i от 1 до N и учитывая уравнение неразрывности (3.4) для смеси в целом, найдем связь между $\varkappa$ и $\varkappa_i$:

$$\varkappa=\sum_{i=1}^{N}\varkappa_i.$$

Уравнения баланса числа частиц. Пусть мировые линии материальных частиц, образующих N-компонентную смесь, проходят через некоторую четырехмерную область V пространства событий Минковского. Рассматривая эту смесь в области V как релятивистскую сплошную среду, введем в каждой точке x из V средние характеристики

[1]) Вместо индекса i будем использовать также индекс j, не применяя их для обозначения компонент тензоров.

$\eta_i^\nu(x)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, определенные равенствами

$$\eta_i^\nu(x) = \frac{c}{v(x)} \sum_o \int' u_i'^\nu \, d\Delta_i'. \tag{4.3}$$

Здесь $u_i'^\nu$ — компоненты 4-скорости одной частицы i-го сорта и Δ_i' — положительный интервал, отсчитываемый вдоль ее мировой линии. Интегрирование производится по участку мировой линии частицы, принадлежащему физически бесконечно малой области $o(x)$, содержащей рассматриваемую точку x. Сумма берется по всем частицам i-го сорта, чьи мировые линии проходят через $o(x)$. Для частиц с $m=0$ в формуле (4.3) надо сделать замену $u_i'^\nu \to dx_i'^\nu/d\xi_i'$, $d\Delta_i' \to d\xi_i'$, в которой ξ_i' — произвольный параметр точек на мировой линии частицы. Из равенства (4.3) следует, что величины η_i^ν являются компонентами четырехмерных векторов η_i $(i=1, \ldots, N)$. Для каждого фиксированного значения i вектор η_i называется *4-вектором плотности потока числа частиц i-го сорта.*

Равенства (4.3) можно записать также в трехмерном виде (учитывая, что $u_i'^\nu = dx_i'^\nu/d\Delta_i'$):

$$\eta_i^0(t, x^r) = \left\langle \frac{c}{v_3} N_i(v_3) \right\rangle, \quad \eta_i^k(t, x^r) = \left\langle \frac{1}{v_3} \sum_{v_3} v_i'^k \right\rangle.$$

Здесь $N_i(v_3)$ — число частиц i-го сорта в физически бесконечно малом трехмерном объеме v_3, которому в рассматриваемый момент времени t принадлежит точка с пространственными координатами x^r; $v_i'^k = dx_i'^k/dt$ — компоненты трехмерной скорости частиц i-го сорта; сумма берется по всем частицам i-го сорта, находящимся в объеме v_3; угловые скобки обозначают операцию осреднения по физически бесконечно малому отрезку времени t_1, содержащему момент времени t. Из этих соотношений следует, что относительно выбранной ГСК величина η_i^0/c представляет собой среднюю плотность числа частиц i-го сорта, а компоненты η_i^k совпадают с компонентами трехмерного вектора средней плотности потока числа частиц i-го сорта. Поэтому вектор η_i называют 4-вектором плотности потока числа частиц i-го сорта.

Из определения и физического смысла величин η_i^0/c и η_i^k следует, что в каждой ГСК они должны удовлетворять обычному интегральному уравнению баланса числа частиц

i-го сорта, которое получается из уравнения (3.3) заменой $\rho u^0 \to \eta_i^0/c$, $c\rho u^k \to \eta_i^k$, $\varkappa \to \nu_i$, где $\nu_i(x)$ — локальная скорость изменения числа частиц i-го сорта за счет столкновений между частицами. Такое интегральное уравнение, как и в § 3, приводит к дифференциальному соотношению, которое теперь имеет вид

$$\partial_\lambda \eta_i^\lambda = \nu_i. \tag{4.4}$$

Оно называется *дифференциальным уравнением баланса числа частиц i-го сорта.*

Пусть m_i — масса частицы i-го сорта. Тогда, сравнивая определение компонент η_i^k (см. равенства (4.3)) и определение величин ρ_i, u_i^ν (см. равенства (3.1), записанные для частиц i-го сорта), легко доказать равенства

$$\eta_i^\nu = c\eta_i u_i^\nu, \quad 1 = u_i^\nu u_{i\nu}, \quad \rho_i = m_i \eta_i. \tag{4.5}$$

Величина η_i, очевидно, является средней плотностью числа частиц i-го сорта относительно i-й ГСК, собственной для рассматриваемой точки пространства событий [1]), и может быть названа *i-й собственной плотностью числа частиц i-го сорта.*

Если частицы какого-либо сорта j имеют нулевую массу покоя ($m_j = 0$), то определение параметров ρ_j, u_j^ν при помощи равенств (3.1), записанных для сорта j, теряет смысл. В этом случае компоненты u_j^ν 4-скорости j-й компоненты смеси, собственная плотность ее массы ρ_j и собственная плотность ее числа частиц η_j могут быть определены непосредственно при помощи равенств (4.5), причем очевидно, что $\rho_j = 0$. И только для системы частиц с нулевой массой покоя, движущихся строго в одном направлении (т. е. при отсутствии разброса по скоростям), нельзя ввести параметры η_j, u_j^ν, удовлетворяющие первым двум равенствам (4.5), так как в этом случае $\eta_j^\nu \eta_{j\nu} = 0$.

Подставим в уравнения (4.1) и (4.4) выражения (4.5) для ρ_i и η_i^ν. Сравнивая получившиеся равенства и учитывая, что $\varkappa = \sum \varkappa_i$, найдем следующие соотношения

---

[1]) i-й ГСК, *собственной для точки x пространства событий*, будем называть ГСК, которая является собственной для i-й компоненты смеси в точке x, т. е. такую ГСК, относительно которой компоненты 4-вектора $\boldsymbol{u}_i$ в точке x имеют вид $u_i^\lambda(x) = \delta_0^\lambda$.

между $\varkappa$, $\varkappa_i$ и ν_i:

$$\varkappa_i = m_i \nu_i, \quad \varkappa = \sum_{i=1}^{N} m_i \nu_i. \tag{4.6}$$

Запишем уравнение (4.4) в ССК ξ^α и проведем рассуждения, применявшиеся при выводе равенства (3.55) из соотношения (3.54), делая при этом замену $c\rho u^\nu \to \eta_i^\nu = c\eta_i u_i^\nu$, $\varkappa \to \nu_i$. В результате получим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_i}} \frac{d}{d\tau_i} (\eta_i \sqrt{\gamma_i}) = \nu_i, \tag{4.7}$$

которое эквивалентно уравнению (4.4). Умножив соотношение (4.7) на $\sqrt{\gamma_i}$ и проинтегрировав его по i-му собственному времени τ_i, найдем выражение для $\eta_i \sqrt{\gamma_i}$:

$$\eta_i \sqrt{\gamma_i}\,|_{\tau_i} = \int_0^{\tau_i} \nu_i \sqrt{\gamma_i}\, d\tau_i + \eta_i \sqrt{\gamma_i}\,|_{\tau_i = 0}.$$

Левая часть этого равенства, будучи умноженной на $d\xi_i^1 d\xi_i^2 d\xi_i^3$, представляет собой число частиц i-го сорта, содержащихся в бесконечно малом собственном трехмерном объеме $d\hat{v}_{3i} = \sqrt{\gamma_i}\, d\xi_i^1 d\xi_i^2 d\xi_i^3$ i-й компоненты смеси. Оно не зависит от момента собственного времени τ_i, если $\nu_i = 0$.

Собственные плотности и диффузионные потоки числа частиц. Назовем *собственной (для смеси) плотностью числа частиц i-го сорта* величину n_i, определенную равенством

$$n_i = \frac{1}{c} (\eta_i, u) = \eta_i u_i^\nu u_\nu \tag{4.8}$$

и являющуюся, очевидно, средней плотностью числа частиц i-го сорта относительно ГСК, собственной для рассматриваемой точки пространства событий [1]). Подставляя во второе равенство (4.2) вместо ρ_i произведение $m_i \eta_i$ и учитывая определение собственной плотности числа частиц i-го сорта n_i, получим следующее выражение для собствен-

---

[1]) ГСК, *собственной для точки x пространства событий*, называется, как и в § 3, ГСК, относительно которой компоненты 4-скорости смеси в точке x имеют вид $u^\lambda(x) = \delta_0^\lambda$. Компоненты тензоров в точке x, взятые относительно собственной для нее ГСК, будем отмечать звездочкой.

ной плотности массы покоя многокомпонентной сплошной среды:

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} m_i \eta_i u_i^\nu u_\nu = \sum_{i=1}^{N} m_i n_i. \tag{4.9}$$

Определим еще четырехмерные векторы I_i ($i = 1, \ldots, N$):

$$I_i = \eta_i - c n_i u = c\eta_i (u_i^\nu - u_i^\lambda u_\lambda u^\nu) e_\nu = -c\eta_i u_i^\lambda \gamma_\lambda^\nu e_\nu, \tag{4.10}$$

компоненты которых относительно ГСК, собственной для рассматриваемой точки x_* пространства событий, имеют вид

$$I_i^{*0}(x_*) = 0, \quad I_i^{*k}(x_*) = \frac{\eta_i v_i^k}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = n_i v_i^k. \tag{4.11}$$

Здесь $v_i^k = \partial x_i^k(\xi_i^a, t)/\partial t$ — компоненты обычного трехмерного вектора скорости i-й компоненты смеси относительно выбранной собственной для точки x_* ГСК. Заметим, что относительно этой ГСК компоненты трехмерного вектора скорости смеси в точке x_* равны нулю: $v^k(x_*) = 0$, а величины $I_i^{*k}(x_*)$ совпадают с компонентами трехмерного вектора диффузионного потока частиц i-го сорта. Поэтому вектор I_i можно назвать *4-вектором плотности диффузионного потока частиц i-го сорта*, а вектор $m_i I_i$ — *4-вектором плотности диффузионного потока массы покоя частиц i-го сорта*. Подчеркнем, что, таким образом, мы будем называть диффузионными потоками любое движение компонент смеси относительно смеси в целом независимо от того, какими причинами оно вызвано.

Определенные равенствами (4.10) векторы I_i ($i = 1, \ldots, N$) ортогональны (в смысле псевдоевклидовой метрики пространства событий) 4-скорости смеси:

$$(I_i, u) = 0, \quad I_i^\nu u_\nu = I_i^\alpha u_\alpha = 0. \tag{4.12}$$

Очевидно, что 4-вектор плотности потока числа частиц i-го сорта выражается через параметры n_i, I_i:

$$\eta_i = c n_i u + I_i \tag{4.13}$$

Умножая обе части этого равенства на m_i и учитывая соотношения (4.5), получим выражение для $c\rho_i u_i$

$$c\rho_i u_i = c m_i n_i u + m_i I_i. \tag{4.14}$$

Подставив его в равенство (4.2), найдем, на основании соотношения (4.9), что параметры I_i связаны между собой:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i I_i = 0. \tag{4.15}$$

Выражение (4.13) для 4-вектора плотности потока числа частиц i-го сорта позволяет записать уравнение баланса числа частиц i-го сорта следующим образом:

$$\partial_\lambda (c n_i u^\lambda + I_i^\lambda) = \nu_i. \tag{4.16}$$

Переходя к ССК ξ^α и используя второе тождество (1.35) и равенства (3.8), (3.19), представим соотношение (4.16) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi^0}(c n_i \sqrt{\gamma}) + \partial_\alpha (\sqrt{-g}\, I_i^\alpha) = \nu_i \sqrt{\gamma}\, \sqrt{g_{00}}.$$

Умножим это равенство на произведение $d\xi^0 \ldots d\xi^3$ и проинтегрируем обе его части по четырехмерной области dV пространства событий, представляющей собой бесконечно тонкую трубку мировых линий точек сплошной среды, боковая поверхность $d\Sigma$ которой состоит из мировых линий, а торцевые поверхности ортогональны им (в смысле псевдоевклидовой метрики пространства событий). Использовав затем формулу Остроградского — Гаусса (1.45), равенства (4.12) и определение собственного времени, получим следующее соотношение:

$$n_i \sqrt{\gamma}\, d^3\xi \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = -\frac{1}{c} \int\limits_{d\Sigma} I^\alpha l_\alpha \, d^3\zeta + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (\nu_i \sqrt{\gamma}\, d^3\xi)\, d\tau, \tag{4.17}$$

где $d^3\xi = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$.

Левая часть равенства (4.17) представляет собой изменение числа частиц i-го сорта в бесконечно малом элементе сплошной среды (смеси), собственный объем которого равен $\sqrt{\gamma}\, d^3\xi \equiv d\hat{v}_3$, в течение промежутка собственного времени от τ_1 до τ_2. Первое слагаемое в правой части равенства (4.17) равно полному потоку числа частиц i-го сорта через боковую поверхность $d\Sigma$ рассматриваемой трубки мировых линий, т. е. потоку числа частиц i-го сорта через двумерную поверхность бесконечно малого элемента сплошной среды (с собственным объемом $d\hat{v}_3 = \sqrt{\gamma}\, d^3\xi$) в течение промежутка собственного времени от τ_1 до τ_2. Второе слагаемое в правой

части равенства (4.17) представляет собой изменение числа частиц i-го сорта в рассматриваемом бесконечно малом элементе сплошной среды в результате столкновений между частицами в нем в течение промежутка собственного времени от τ_1 до τ_2.

Реакции между компонентами смеси. Если в результате столкновений между микроскопическими частицами, образующими смесь, число частиц некоторых сортов изменяется, то говорят, что между компонентами смеси протекают реакции. Они могут быть химическими, ядерными или даже реакциями элементарных частиц в зависимости от того, что представляют собой микроскопические частицы, образующие смесь, которая рассматривается как многокомпонентная сплошная среда. Реакции принято записывать в виде символических соотношений

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_{ir}^{-} \mathscr{A}_i \rightleftarrows \sum_{i=1}^{N} \nu_{ir}^{+} \mathscr{A}_i \qquad (r=1, \ldots, R), \qquad (4.18)$$

где $\mathscr{A}_i$ — символ частиц i-го сорта; r — номер реакции; R — число независимых реакций; ν_{ir}^{-} $(i=1, \ldots, N)$ — минимальное число частиц каждого сорта, которые все вместе должны участвовать в одном столкновении, чтобы между ними могла произойти r-я прямая реакция; ν_{ir}^{+} $(i=1, \ldots, N)$ — число частиц каждого сорта, разлетающихся после одного такого столкновения, в результате которого произошла r-я прямая реакция[1]). Из обратимости микроскопических процессов (здесь рассматриваются только такие процессы) следует, что наряду с прямыми реакциями, которым в соотношениях (4.18) соответствует верхняя стрелка, возможны и обратные реакции, которым в (4.18) соответствует нижняя стрелка. Минимальное число частиц каждого сорта, которые все вместе должны участвовать в одном столкновении, чтобы между ними могла произойти r-я обратная реакция, равно ν_{ir}^{+} $(i=1, \ldots, N)$. После одного такого столкновения, в результате которого произошла r-я обратная реакция, число разлетающихся частиц каждого сорта будет равно ν_{ir}^{-} $(i=1, \ldots, N)$. Разумеется, названия «прямая реакция» и «обратная реакция» условные, и их

[1]) Реакции распада частиц j-го сорта можно рассматривать как частный случай, когда в «столкновении» должна участвовать всего одна частица j-го сорта. При этом для r-й прямой (обратной) реакции распада частиц j-го сорта $\nu_{ir}^{-}=\delta_{ij}$ $(\nu_{ir}^{+}=\delta_{ij})$.

можно поменять местами, т. е. назвать обратную реакцию прямой, а прямую — обратной

Введем для прямых и обратных реакций средние характеристики ω_r^+ и ω_r^-, определенные равенствами

$$\omega_r^+(x) = \frac{L_r^+(o(x))}{\frac{1}{c}v(x)}, \quad \omega_r^-(x) = \frac{L_r^-(o(x))}{\frac{1}{c}v(x)}. \tag{4.19}$$

Здесь $v = ct_1v_3$ — четырехмерный объем физически бесконечно малой четырехмерной области o, построенной около точки x пространства событий; t_1 и v_3 — соответствующие, физически бесконечно малые отрезок времени и трехмерный объем; $L_r^+(o(x))$ — число столкновений между частицами в области $o(x)$, в результате которых происходит r-я прямая реакция; $L_r^-(o(x))$ — число столкновений между частицами в области $o(x)$, в результате которых происходит r-я обратная реакция. Величины ω_r^+ и ω_r^- называются *локальными скоростями r-й прямой и r-й обратной реакций.*

Введем еще коэффициенты ν_{ir}:

$$\nu_{ir} = \nu_{ir}^+ - \nu_{ir}^-, \tag{4.20}$$

называемые *стехиометрическими коэффициентами.* Из данного выше определения понятия реакции между компонентами смеси следует, что для любой r-й реакции не все величины ν_{ir} равны нулю. Очевидно, что изменение числа частиц i-го сорта, происходящее в физически бесконечно малой области o в результате r-й прямой реакции, равно $\nu_{ir}L_r^+$, а изменение в результате r-й обратной реакции равно $-\nu_{ir}L_r^-$. Поэтому изменение числа частиц r-го сорта, происходящее в области o в результате всех R прямых и обратных реакций, будет равно

$$\sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}(L_r^+ - L_r^-) = \frac{1}{c}\sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}(\omega_r^+ - \omega_r^-)\,v.$$

Если разделить эту величину на $v/c = t_1v_3$ (t_1 — физически бесконечно малый отрезок времени, v_3 — физически бесконечно малый трехмерный объем), то, очевидно, получим локальную скорость изменения числа частиц i-го сорта в результате реакций, т. е. ν_i:

$$\nu_i = \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}(\omega_r^+ - \omega_r^-). \tag{4.21}$$

Разность локальных скоростей r-й прямой и r-й обратной реакций называется *локальной скоростью r-й реакции*. Обозначим ее через ω_r. Тогда равенство (4.21) можно записать в виде

$$\nu_i = \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}\omega_r, \quad \omega_r = \omega_r^+ - \omega_r^-. \tag{4.22}$$

Подставим выражение (4.21) для ν_i в уравнение (4.4) и проинтегрируем его по четырехмерной области V, границей которой является гиперповерхность Σ. Применив затем формулу Остроградского — Гаусса (1.43), получим уравнение баланса числа частиц в четырехмерной интегральной форме

$$\int_\Sigma \frac{1}{c}\,\eta_i^\nu l_\nu\, d^3\zeta = \int_V \frac{1}{c} \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}\,(\omega_r^+ - \omega_r^-)\, d^4x. \tag{4.23}$$

Из сформулированных выше определений величин $\omega_r^\pm$, ν_{ir} вытекает, что правая часть этого равенства представляет собой суммарное изменение числа частиц i-го сорта во всех столкновениях внутри области V. Это изменение, очевидно, должно быть равно разности между числом частиц i-го сорта, чьи мировые линии выходят из области V через ее границу Σ, и числом частиц i-го сорта, чьи мировые линии входят в область V через ее границу Σ. Указанная разность выражается интегралом в левой части равенства (4.23), представляющим собой суммарный поток числа частиц i-го сорта из области V через ее границу Σ.

Если относительно выбранной ГСК x^ν область V представляет собой рассматриваемую в течение промежутка времени от t_1 до t_2 трехмерную область V_3 пространства переменных x^1, x^2, x^3, ограниченную неподвижной двумерной поверхностью Σ_2, то соотношение (4.23) можно записать в обычном трехмерном виде:

$$\int_{V_3} \frac{1}{c}\,\eta_i^0\, d^3x \Bigg|_{t_1}^{t_2} = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_2} \eta_i^k n_k\, d\sigma\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3} \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}\omega_r\, d^3x\, dt.$$

Здесь $d^3x = dx^1\, dx^2\, dx^3$; $d\sigma$ — площадь элемента поверхности Σ_2; n_k — компоненты трехмерного вектора внешней нормали к поверхности Σ_2 в декартовой системе координат x^1, x^2, x^3; $\eta_i^0/c = \eta_i u_i^0 = \eta_i\,(1 - v_i^2/c^2)^{-1/2}$ — средняя плот-

ность числа частиц i-го сорта относительно ГСК наблюдателя x^ν; $\eta_i^k = c\eta_i u_i^k = \eta_i v_i^k (1 - v_i^2/c^2)^{-1/2} = (\eta_i^0/c)\, v_i^k$ — компоненты трехмерного вектора средней плотности потока числа частиц i-го сорта относительно ГСК наблюдателя x^ν (средние берутся по физически бесконечно малым четырехмерным областям); $\omega_r = \omega_r^+ - \omega_r^-$ есть локальная скорость r-й реакции.

Параметрическое представление переменных n_i, I_i^α, ν_i. Собственная плотность числа частиц i-го сорта n_i, компоненты 4-вектора плотности диффузионного потока частиц i-го сорта I_i^α и локальная скорость изменения числа частиц i-го сорта в результате столкновений ν_i удовлетворяют уравнению баланса числа частиц i-го сорта (4.16). В ССК ξ^α оно будет иметь вид

$$\nabla_\alpha (cn_i u^\alpha + I_i^\alpha) = \nu_i \tag{4.24}$$

Найдем параметрическое представление величин n_i, I_i^α, ν_i, в силу которого уравнение (4.24), являющееся дифференциальной связью между переменными n_i, I_i^α, ν_i, удовлетворяется тождественно. Это представление будет использовано в следующих главах при выводе динамических законов из вариационного уравнения. Близкие по смыслу выражения для вариаций концентрации и скорости i-й компоненты смеси в нерелятивистской механике рассматривались в работе [8].

Применяя второе тождество (1.35), приведем уравнение (4.24) к виду

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\alpha \sqrt{-g}\, (cn_i u^\alpha + I_i^\alpha) = \nu_i.$$

Подставив сюда выражения (3.8) и (3.19) для u^α и $\sqrt{-g}$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi^0}(c\sqrt{\gamma}\, n_i + \sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}\, I_i^0) + \frac{\partial}{\partial \xi^a}(\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}\, I_i^a) = \\ = \sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}\, \nu_i. \tag{4.25}$$

Введем функции $\psi_i^a(\xi^0, \xi^b)$ ($a, b = 1, 2, 3$; $i = 1, \ldots, N$), удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \psi_i^a}{\partial \xi^0} = \frac{1}{c}\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}\, I_i^a(\xi^0, \xi^a) \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{4.26}$$

Тогда соотношение (4.25) можно переписать так:

$$v_i = \frac{c}{\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi^0}, \tag{4.27}$$

где

$$\psi_i = \sqrt{\gamma}\, n_i + \frac{1}{c}\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}\, I_i^0 + \frac{\partial \psi_i^a}{\partial \xi^a}. \tag{4.28}$$

Разрешая уравнения (4.26) относительно I_i^a и учитывая равенства

$$u_\alpha I_i^\alpha = u_0 I_i^0 + u_a I_i^a = 0, \quad u_\alpha u^\alpha = u_0 u^0 = 1,$$

получим следующие выражения для I_i^a, I_i^0:

$$I_i^a = \frac{c}{\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial \psi_i^a}{\partial \xi^0}, \quad I_i^0 = -u^0 u_a I_i^a = \frac{-c u^0 u_a}{\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial \psi_i^a}{\partial \xi^0}. \tag{4.29}$$

Их можно записать и в четырехмерной форме:

$$I_i^\alpha = \frac{-c}{\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}} (u^\alpha u_b - \delta_b^\alpha) \frac{\partial \psi_i^b}{\partial \xi^0} = \frac{-c\gamma_b^\alpha}{\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial \psi_i^b}{\partial \xi^0}, \tag{4.30}$$

так как

$$\gamma_b^\alpha = u^\alpha u_b - \delta_b^\alpha, \quad u^a = 0, \quad \delta_b^0 = 0.$$

Используя эти же равенства, соотношение (4.28) после подстановки в него выражения (4.29) для I_i^0 легко представить в виде

$$n_i \sqrt{\gamma} = u^0 u_a \frac{\partial \psi_i^a}{\partial \xi^0} - \frac{\partial \psi_i^a}{\partial \xi^a} + \psi_i = \gamma_a^\alpha \frac{\partial \psi_i^a}{\partial \xi^\alpha} + \psi_i. \tag{4.31}$$

Введем еще величину ψ_i^0:

$$\psi_i^0 = -u^0 u_a \psi_i^a, \tag{4.32}$$

после чего, учитывая определение собственного времени и тождества $\gamma_0^\alpha = 0$, соотношения (4.27), (4.30), (4.31) можно записать соответственно так:

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\psi_i}{d\tau}, \quad I_i^\alpha = \frac{-1}{\sqrt{\gamma}} \gamma_\beta^\alpha \frac{d\psi_i^\beta}{d\tau}, \quad n_i \sqrt{\gamma} = \gamma_\beta^\alpha \frac{\partial \psi_i^\beta}{\partial \xi^\alpha} + \psi_i. \tag{4.33}$$

Следовательно, доказано, что для любых функций $n_i(\xi^\alpha)$, $I_i^\alpha(\xi^\alpha)$, $v_i(\xi^\alpha)$, удовлетворяющих уравнению (4.24), существует параметрическое представление (4.33) через

функции $\psi_i^\beta(\xi^\alpha)$, $\psi_i(\xi^\alpha)$, которые связаны между собой на основании равенства (4.32) одним соотношением:

$$u_\alpha \psi_i^\alpha = 0. \tag{4.34}$$

Очевидно, верно и обратное утверждение: функции $n_i(\xi^\alpha)$, $I_i^\alpha(\xi^\alpha)$, $\nu_i(\xi^\alpha)$, определенные равенствами (4.33), удовлетворяют уравнению (4.24) при любых достаточно гладких $\psi_i^\alpha(\xi^\beta)$, $\psi_i(\xi^\beta)$, которые можно еще подчинить условию (4.34).

Ковариантная форма параметрического представления величин n_i, I_i^α, ν_i. При введении параметрических функций $\psi_i^\beta(\xi^\alpha)$, $\psi_i(\xi^\alpha)$ существенно использовалась некоторая выбранная ССК ξ^α. Докажем теперь, что формулы (4.26) — (4.34) сохраняют свой вид при переходе к любой другой ССК ξ^α, если при этом функции $\psi_i^\beta/\sqrt{\gamma}$ преобразуются как контравариантные компоненты векторного поля

$$\tilde{\psi}_i(\xi^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \psi_i^\beta \vartheta_\beta = \tilde{\psi}_i^\beta \vartheta_\beta, \tag{4.35}$$

функции $\psi_i/\sqrt{\gamma}$ представляют собой скалярное поле

$$\tilde{\psi}_i(\xi^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \psi_i, \tag{4.36}$$

а сами параметры ψ_i^β, ψ_i преобразуются по законам, вытекающим соответственно из равенств (4.35), (4.36). Инвариантность формул (4.32), (4.34) очевидна, так как вектор $\tilde{\psi}_i$ ортогонален 4-скорости многокомпонентной сплошной среды (в каждой точке пространства событий):

$$(\tilde{\psi}_i, u) = 0, \quad \tilde{\psi}_i^\nu u_\nu = 0. \tag{4.37}$$

Инвариантность формул (4.26) — (4.31) будет следовать из инвариантности выражений (4.33). Докажем последнюю. Для этого приведем равенства (4.33) к ковариантному виду, используя компоненты векторного поля $\tilde{\psi}_i$ и скалярное поле $\tilde{\psi}_i$.

Выражение для ν_i можно преобразовать так:

$$\nu_i = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\psi_i}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi^0} = \frac{c}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \sqrt{-g} \frac{\psi_i}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta_0^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g}\, \tilde{\psi}_i u^\alpha.$$

Воспользовавшись тождеством (1.35), получим следующую формулу для ν_i:

$$\nu_i = c\nabla_\alpha \tilde{\psi}_i u^\alpha. \tag{4.38}$$

Преобразуем теперь выражение для I_i^α:

$$I_i^\alpha = \frac{-1}{\sqrt{\gamma}} \gamma_\beta^\alpha \frac{d\psi_i^\beta}{d\tau} = \frac{-c}{\sqrt{-g}} \gamma_\beta^\alpha \frac{\partial \psi_i^\beta}{\partial \xi^0} = \frac{-c}{\sqrt{-g}} \gamma_\beta^\alpha \partial_\nu (\psi_i^\beta \delta_0^\nu - \psi_i^\nu \delta_0^\beta) =$$

$$= \frac{-c}{\sqrt{-g}} \gamma_\beta^\alpha \partial_\nu \left[\sqrt{-g} \left(\frac{\psi_i^\beta}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta_0^\nu}{\sqrt{g_{00}}} - \frac{\psi_i^\nu}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta_0^\beta}{\sqrt{g_{00}}} \right) \right] =$$

$$= \frac{-c\gamma_\beta^\alpha}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \sqrt{-g} \, (\tilde{\psi}_i^\beta u^\nu - \tilde{\psi}_i^\nu u^\beta).$$

Воспользовавшись затем вторым тождеством (1.36), получим ковариантную формулу для I_i^α:

$$I_i^\alpha = -c\gamma_\beta^\alpha \nabla_\nu (\tilde{\psi}_i^\beta u^\nu - \tilde{\psi}_i^\nu u^\beta). \tag{4.39}$$

Первое слагаемое в выражении для n_i можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \gamma_\beta^\alpha \partial_\alpha \psi_i^\beta = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (u_\beta u^\alpha \partial_\alpha \psi_i^\beta - \partial_\alpha \psi_i^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(u_\beta \frac{d\psi_i^\beta}{d\Delta} - \partial_\alpha \psi_i^\alpha \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\gamma}} \left(\psi_i^\beta \frac{du_\beta}{d\Delta} + \partial_\alpha \psi_i^\alpha \right) = \frac{-\psi_i^\beta}{\sqrt{\gamma}} \left(u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta + \frac{\partial_\beta \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{g_{00}}} \right) - \frac{\partial_\alpha \psi_i^\alpha}{\sqrt{\gamma}} =$$

$$= -\tilde{\psi}_i^\beta u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{g_{00}} \, \psi_i^\beta =$$

$$= u^\alpha u_\beta \nabla_\alpha \tilde{\psi}_i^\beta - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g} \, \tilde{\psi}_i^\beta =$$

$$= u^\alpha u_\beta \nabla_\alpha \tilde{\psi}_i^\beta - \nabla_\beta \tilde{\psi}_i^\beta = \gamma_\beta^\alpha \nabla_\alpha \tilde{\psi}_i^\beta.$$

Здесь были использованы формула (3.35) для $du_\beta/d\Delta$ и тождество (1.35). Окончательная формула для n_i будет, очевидно, иметь вид

$$n_i = \gamma_\beta^\alpha \nabla_\alpha \tilde{\psi}_i^\beta + \tilde{\psi}_i. \tag{4.40}$$

Выражения (4.38) — (4.40) справедливы не только в исходной ССК ξ^α, но и в любой другой системе координат (не обязательно сопутствующей) в пространстве событий. В частности, они сохраняют свой вид при переходе к любой другой ССК ξ'^α, если у всех входящих в них величин проставить штрихи. Проводя затем все рассуждения в обратной последовательности, найдем, что в ССК ξ'^α

также выполняются равенства (4.33), в которых все величины надо брать относительно ССК ξ'^{α} (т. е. со штрихом). Таким образом, инвариантность соотношений (4.33), а значит и всех предшествовавших им соотношений (4.26) — (4.31), доказана (при законе преобразования функций ψ_i^{α}, ψ_i, следующем из равенств (4.35), (4.36)).

Используя выражения (4.39), (4.40), легко найти ковариантное параметрическое представление для компонент 4-вектора плотности потока числа частиц i-го сорта

$$\eta_i^{\alpha} = cn_i u^{\alpha} + I_i^{\alpha} =$$
$$= cu^{\alpha}\gamma_{\beta}^{\gamma}\nabla_{\nu}\tilde{\psi}_i^{\beta} + c\tilde{\psi}_i u^{\alpha} - c\gamma_{\beta}^{\alpha}\nabla_{\nu}(\tilde{\psi}_i^{\beta}u^{\nu} - \tilde{\psi}_i^{\gamma}u^{\beta}) =$$
$$= cu^{\alpha}\gamma_{\beta}^{\gamma}\nabla_{\nu}\tilde{\psi}_i^{\beta} + c\tilde{\psi}_i u^{\alpha} - cu^{\alpha}u_{\beta}(u^{\nu}\nabla_{\nu}\tilde{\psi}_i^{\beta} - u^{\beta}\nabla_{\nu}\tilde{\psi}_i^{\gamma}) +$$
$$+ c\nabla_{\nu}(\tilde{\psi}_i^{\alpha}u^{\nu} - \tilde{\psi}_i^{\gamma}u^{\alpha}) = c\nabla_{\nu}(\tilde{\psi}_i^{\alpha}u^{\nu} - \tilde{\psi}_i^{\gamma}u^{\alpha}) + c\tilde{\psi}_i u^{\alpha}.$$

Здесь были учтены равенства $u_{\beta}\psi_i^{\beta} = 0$, $u_{\beta}\nabla_{\nu}u^{\beta} = 0$.

Таким образом,

$$\eta_i^{\alpha} = cn_i u^{\alpha} + I_i^{\alpha} = c\nabla_{\nu}\left(\frac{\psi_i^{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}u^{\nu} - \frac{\psi_i^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}u^{\alpha}\right) + \frac{c\psi_i}{\sqrt{\gamma}}u^{\alpha}. \quad (4.41)$$

Подставляя выражения (4.38) для ν_i и (4.41) для $cn_i u^{\alpha} + I_i^{\alpha}$ в уравнение (4.24), легко убедиться, что оно будет удовлетворяться тождественно.

Заметим, что N векторов I_i связаны между собой соотношением (4.15), из которого на основании формул (4.26) для I_i^a следует равенство

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial\psi_i^a}{\partial\xi^0} = 0.$$

Проинтегрировав его по ξ^0 и положив постоянную интегрирования равной нулю, что всегда можно сделать в силу неоднозначности определения параметров ψ_i^a из уравнений (4.26), получим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\psi_i^a = 0.$$

Учитывая определение (4.32) величин ψ_i^0, легко видеть, что такая же связь будет иметь место и для них:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\psi_i^0 = 0.$$

Таким образом, всегда можно считать, что параметры $\tilde{\psi}_i$, ψ_i^α удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \psi_i^\alpha = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \tilde{\psi}_i = 0. \tag{4.42}$$

Физический смысл параметров ψ_i^α, $\tilde{\psi}_i$. Используя полученные выше параметрические представления для компонент 4-вектора плотности диффузионного потока частиц i-го сорта I_i^α и для локальной скорости изменения их числа ν_i, можно установить физический смысл параметров ψ_i^α, $\tilde{\psi}_i$.

Для этого рассмотрим в пространстве событий гиперповерхность в виде бесконечно узкой полоски $d\Sigma^{(c)}$, которая задается соотношениями

$$\xi_*^a \leqslant \xi^a \leqslant \xi_*^a + d\xi^a, \quad \xi_*^b \leqslant \xi^b \leqslant \xi_*^b + d\xi^b,$$
$$\xi^c = \xi_*^c, \quad \xi_*^0 \leqslant \xi^0 \leqslant \xi_{**}^0, \quad a \neq b \neq c \neq a.$$

Здесь звездочками отмечены произвольные фиксированные значения сопутствующих координат ξ^α, а индексы a, b, c принимают произвольные фиксированные значения, получаемые круговой перестановкой из последовательности 1, 2, 3. Очевидно, что гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ образована отрезками мировых линий точек сплошной среды, у которых лагранжевы координаты принадлежат бесконечно малому участку $d\xi^a d\xi^b$ поверхности $\xi^c = \xi_*^c$, построенной в трехмерном пространстве лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3. Сечение гиперповерхности $d\Sigma^{(c)}$ гиперплоскостью $x^0 = \text{const}$ дает с точки зрения ГСК x^ν положение в пространстве в момент времени $t = x^0/c$ вмороженного в среду бесконечно малого участка $d\xi^a d\xi^b$ поверхности $\xi^c = \xi_*^c$.

Обозначим через $d\Psi^{(c)}$ полный поток числа частиц i-го сорта через гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ в направлении ξ^c, т. е. разность между числом мировых линий частиц i-го сорта, пересекающих гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ в направлении возрастания ξ^c, и числом мировых линий частиц i-го сорта, пересекающих гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ в направлении убывания ξ^c. Гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ всегда можно рассматривать как часть гиперповерхности $d\Sigma$, по которой проводится интегрирование в соотношении (4.17). Поэтому выражение для $d\Psi_i^{(c)}$ имеет такой же вид, как и первое

слагаемое в правой части равенства (4.17):

$$d\Psi_i^{(c)} = -\frac{1}{c}\int\limits_{d\Sigma^{(c)}} I_i^\alpha l_\alpha^{(c)}\, d^3\zeta. \tag{4.43}$$

Здесь компоненты $l_\alpha^{(c)}$ определены равенством (1.38), а система координат ζ^k на гиперповерхности $d\Sigma^{(c)}$ выбрана таким образом, что $d\Psi_i^{(c)} > 0$, если смещение вдоль вектора I_i с гиперповерхности $d\Sigma^{(c)}$ приводит к возрастанию ξ^c. В качестве координат ζ^1, ζ^2, ζ^3 можно выбрать, например, координаты ξ^0, ξ^a, ξ^b точек пространства событий, лежащих на гиперповерхности $d\Sigma^{(c)}$. Тогда для компонент $l_\alpha^{(c)}$ на основании равенств (1.38), (1.28) и условия $a \neq b \neq c \neq a$ получим следующие значения:

$$l_\alpha^{(c)} = -\sqrt{-g}\, e_{\alpha 0ab} = -\sqrt{-g}\, \delta_\alpha^c.$$

Так как $u^\alpha l_\alpha^{(c)} = 0$, то в выражении (4.43) для $d\Psi_i^{(c)}$ вместо компонент I_i^α можно использовать компоненты 4-вектора плотности полного потока числа частиц i-го сорта $\eta_i^\alpha = cn_i u^\alpha + I_i^\alpha$. Подставляя в равенство (4.43) значения компонент $l_\alpha^{(c)}$ и учитывая соотношения (4.26) и (3.19), преобразуем его следующим образом:

$$d\Psi_i^{(c)} = \frac{1}{c}\int\limits_{d\Sigma^{(c)}} I_i^c \sqrt{-g}\, d^3\zeta = \int\limits_{d\Sigma^{(c)}} \frac{\partial \psi_i^c}{\partial \xi^0}\, d\xi^0\, d\xi^a\, d\xi^b =$$
$$= \left[\psi_i^c\left(\xi_{**}^0\right) - \psi_i^c\left(\xi_*^0\right)\right] d\xi^a\, d\xi^b.$$

Теперь видно, что между потоком числа частиц i-го сорта через определенную выше гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ и разностью значений параметра ψ_i^c на концах мировых линий, образующих эту гиперповерхность, имеет место простое соотношение

$$\psi_i^c\left(\xi_{**}^0\right) - \psi_i^c\left(\xi_*^0\right) = \frac{d\Psi_i^{(c)}}{d\xi^a\, d\xi^b}. \tag{4.44}$$

Оно устанавливает физический смысл приращений параметров ψ_i^c при перемещении вдоль мировой линии любой точки сплошной среды. Сами параметры ψ_i^c определены соотношением (4.26) только с точностью до произвольной аддитивной функции лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3. Если указанный произвол исключить, приняв, что $\psi_i^c = 0$

при $\xi^0 = 0$, то из равенства (4.44) при $\xi^0_* = 0$ вытекает также физический смысл параметров ψ^α_i.

Чтобы выяснить физический смысл параметров ψ_i, рассмотрим в пространстве событий бесконечно тонкую трубку мировых линий точек сплошной среды, лагранжевы координаты которых принадлежат некоторой бесконечно малой области $d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ в трехмерном пространстве лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3. Обозначим через dV четырехмерную область, представляющую собой участок указанной трубки мировых линий, который задается неравенствами $\xi^0_* \leqslant \xi^0 \leqslant \xi^0_{**}$. Используя определение локальной скорости изменения числа частиц i-го сорта в результате столкновений ν_i и соотношения (4.27), (3.19), легко вычислить суммарное изменение $d\Psi_i$ числа частиц i-го сорта во всех столкновениях внутри области:

$$d\Psi_i = \frac{1}{c}\int\limits_{dV} \nu_i \sqrt{-g}\, d^4\xi = \int\limits_{dV} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi^0}\, d^4\xi = [\psi_i(\xi^0_{**}) - \psi_i(\xi^0_*)]\, d^3\xi.$$

Следовательно, между суммарным изменением $d\Psi_i$ числа частиц i-го сорта во всех столкновениях внутри трубки мировых линий dV и разностью значений параметра ψ_i на торцах этой трубки имеет место простое соотношение

$$\psi_i(\xi^0_{**}) - \psi_i(\xi^0_*) = \frac{d\Psi_i}{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}, \qquad (4.45)$$

которое устанавливает физический смысл приращений параметров ψ_i при перемещении вдоль мировой линии любой точки сплошной среды.

Параметры ψ^α_i и ψ_i будем называть соответственно *параметрами диффузии* и *параметром производства частиц i-го сорта*.

Параметрическое представление локальных скоростей реакций $\omega^\pm_r$, ω_r. Это представление будет использовано в следующих главах при выводе динамических законов. Чтобы получить его, введем функции $\chi^\pm_r(\xi^\alpha)$ $(r = 1, \ldots, R)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\chi^+_r}{d\tau} = \omega^+_r, \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\chi^-_r}{d\tau} = \omega^-_r \qquad (r = 1, \ldots, R), \qquad (4.46)$$

которые легко записать и в ковариантном виде:

$$\nabla_\alpha\left(c\frac{\chi^+_r}{\sqrt{\gamma}}u^\alpha\right) = \omega^+_r, \quad \nabla_\alpha\left(c\frac{\chi^-_r}{\sqrt{\gamma}}u^\alpha\right) = \omega^-_r. \qquad (4.47)$$

Вывод соотношений (4.47) точно такой же, как и выражения (4.38) для ν_i. Из них следует, что если определить величины χ_r^+, χ_r^- в других ССК так, чтобы отношения $\chi_r^+/\sqrt{\gamma}$, $\chi_r^-/\sqrt{\gamma}$ представляли собой скалярные функции от координат, то уравнения (4.46) сохраняют свой вид в любой ССК.

Заметим, что величины ω_r^+, ω_r^-, ν_i ($r=1, \ldots, R$; $i=1, \ldots, N$) связаны между собой соотношением (4.21). Подставляя в него выражения (4.33), (4.46) для ν_i, ω_r^+, ω_r^-, получим равенство

$$\frac{d\psi_i}{d\tau} = \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}\left(\frac{d\chi_r^+}{d\tau} - \frac{d\chi_r^-}{d\tau}\right).$$

Проинтегрировав его по τ и положив постоянную интегрирования равной нулю, что всегда можно сделать в силу неоднозначности определения функций χ_r^+, χ_r^- из уравнений (4.46), найдем связь между параметрами ψ_i и $\chi_r^\pm$:

$$\psi_i = \sum_{i=1}^{R} \nu_{ir}(\chi_r^+ - \chi_r^-) \qquad (i=1, \ldots, N). \tag{4.48}$$

Таким образом, всегда можно считать, что введенный ранее параметр производства частиц i-го сорта ψ_i выражается при помощи равенства (4.48) через функции χ_r^+, χ_r^-, удовлетворяющие уравнениям (4.46). Если определить еще величины χ_r ($r=1, \ldots, R$), для которых выполняются соотношения

$$\chi_r = \chi_r^+ - \chi_r^-, \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\chi_r}{d\tau} = \omega_r, \quad \nabla_\alpha\left(c\frac{\chi_r}{\sqrt{\gamma}}u^\alpha\right) = \omega_r, \tag{4.49}$$

то равенства (4.48) легко представить в виде

$$\psi_i = \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}\chi_r. \tag{4.50}$$

Рассмотрим физический смысл параметров $\chi_r^\pm$, χ_r. Для этого, используя определения (4.19) локальных скоростей $\omega_r^\pm$ r-й прямой и r-й обратной реакций, равенство $c\,d\tau = \sqrt{g_{00}}\,d\xi^0$ и соотношения (4.46), (3.19), вычислим число столкновений $dX_r^\pm$ внутри введенной выше бесконечно тонкой трубки мировых линий dV, в результате которых происходит r-я прямая (+) или r-я обратная (—)

реакция:

$$dX_r^{\pm} = \frac{1}{c}\int\limits_{dV} \omega_r^{\pm} \sqrt{-g}\, d^4\xi = \int\limits_{dV} \frac{\partial \chi_r^{\pm}}{\partial \xi^0} d^4\xi = \left[\chi_r^{\pm}(\xi^0_{**}) - \chi_r^{\pm}(\xi^0_{*})\right] d^3\xi.$$

Следовательно, между числом $dX_r^{\pm}$ элементарных актов r-й прямой или r-й обратной реакции внутри трубки мировых линий dV и разностями значений параметров $\chi_r^{\pm}$ на ее торцах имеет место простое соотношение

$$\chi_r^{\pm}(\xi^0_{**}) - \chi_r^{\pm}(\xi^0_{*}) = \frac{dX_r^{\pm}}{d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3}. \qquad (4.51)$$

Оно устанавливает физический смысл приращений параметров $\chi_r^{\pm}$ при перемещении вдоль мировой линии любой точки сплошной среды. Физический смысл аналогичных приращений параметров χ_r вытекает из соотношения

$$\chi_r(\xi^0_{**}) - \chi_r(\xi^0_{*}) = \frac{dX_r^{+} - dX_r^{-}}{d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3},$$

являющегося следствием равенств (4.49), (4.51). При этом надо учесть, что разность $dX_r^{+} - dX_r^{-}$ представляет собой суммарное число элементарных актов r-й реакции внутри трубки мировых линий dV. Отметим также, что на основании равенств (4.45), (4.51) и (4.48) имеет место выражение

$$d\Psi_i = \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}\,(dX_r^{+} - dX_r^{-}),$$

где $d\Psi_i$ — введенное выше суммарное изменение числа частиц i-го сорта во всех столкновениях внутри области dV.

Параметры χ_r, χ_r^{+} и χ_r^{-} будем называть соответственно *параметрами r-й реакции*, *r-й прямой* и *r-й обратной реакций*.

§ 5. Электромагнитные процессы

Плотность электрического заряда и тока. Рассмотрим систему материальных частиц, мировые линии которых проходят через некоторую четырехмерную область V пространства событий Минковского. Представляя эту систему в области V как релятивистскую сплошную среду, введем в каждой точке x из V средние характеристики $J^{\nu}(x)$,

определенные равенствами

$$J^{\nu}(x) = \frac{c}{v} \sum_{o(x)} \int' eu'^{\nu} d\Delta'. \qquad (5.1)$$

Здесь e — электрический заряд одной частицы (у разных частиц он, конечно, может быть разным); остальные обозначения те же, что и в определении (3.1) для 4-скорости сплошной среды. Из равенства (5.1) следует, что величины J^{ν} являются компонентами четырехмерного вектора $\boldsymbol{J}$. Его называют *4-вектором плотности электрического тока в сплошной среде.*

Равенства (5.1), определяющие величины J^{ν}, можно также записать в трехмерном виде (учитывая, что $u'^{\nu} = dx'^{\nu}/d\Delta'$):

$$J^0(t,\ x^q) = \left\langle \frac{c}{v_3} \sum_{v_3} e \right\rangle, \qquad J^k(t,\ x^q) = \left\langle \frac{1}{v_3} \sum_{v_3} ev^k \right\rangle, \qquad (5.2)$$

где все специальные обозначения (Σ, v_3, $\langle \ldots \rangle$, v^k) такие же, как и в выражениях (3.2) для ρu^0, ρu^k. Из соотношений (5.2) следует, что относительно выбранной ГСК величина J^0/c представляет собой среднюю плотность электрического заряда частиц, а компоненты J^k совпадают с компонентами трехмерного вектора средней плотности электрического тока частиц.

Введем еще собственную плотность электрического заряда z и 4-вектор плотности электрического тока проводимости $\boldsymbol{j}$, которые определяются равенствами

$$\boldsymbol{J} = cz\boldsymbol{u} + \boldsymbol{j}, \qquad z = \frac{1}{c}(\boldsymbol{J},\ \boldsymbol{u}). \qquad (5.3)$$

Из них следует, что вектор $\boldsymbol{j}$ ортогонален (в смысле псевдоевклидовой метрики пространства событий) 4-скорости сплошной среды $\boldsymbol{u}$:

$$(\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}) = 0, \qquad j^{\nu}u_{\nu} = j^{\alpha}u_{\alpha} = 0. \qquad (5.4)$$

Очевидно, в ГСК, являющейся собственной для рассматриваемой точки x из области V, справедливы соотношения

$$z(x) = \frac{1}{c} J^{*0}, \qquad j^{*0}(x) = 0, \qquad j^{*k}(x) = J^{*k}(x). \qquad (5.5)$$

Здесь звездочка указывает, что соответствующие компоненты векторов берутся относительно собственной для точки x ГСК. Из соотношений (5.5) вытекает физический

смысл величины z и компонент j^ν. Величина $z(x)$ представляет собой среднюю плотность электрического заряда частиц в точке x пространства событий относительно ГСК, собственной для этой точки. Компоненты $j^k(x)$ в собственной для точки x ГСК совпадают с компонентами трехмерного вектора средней плотности электрического тока частиц в точке x, а компонента $j^0(x)$ в собственной для точки x ГСК равна нулю.

Пусть рассматриваемая система частиц представляет собой смесь N сортов частиц. Обозначим через e_i электрический заряд частицы i-го сорта ($i=1, \ldots, N$). Тогда, сравнивая определение (4.3) для компонент 4-вектора плотности потока числа частиц i-го сорта и определение (5.1) для компонент 4-вектора плотности электрического тока, легко установить соотношение

$$\boldsymbol{J}=\sum_{i=1}^{N} e_i \boldsymbol{\eta}_i. \tag{5.6}$$

Подставив в него выражение (4.13) для $\boldsymbol{\eta}_i$, получим такое равенство:

$$\boldsymbol{J}=\sum_{i=1}^{N} (ce_i n_i \boldsymbol{u}+e_i \boldsymbol{I}_i). \tag{5.7}$$

Это выражение для $\boldsymbol{J}$ в свою очередь подставим в соотношения (5.3), определяющие z, $\boldsymbol{j}$, и учтем равенства $(\boldsymbol{I}_i, \boldsymbol{u})=0$ ($i=1, \ldots, N$). В результате найдем следующие формулы:

$$z=\sum_{i=1}^{N} e_i n_i, \qquad \boldsymbol{j}=\sum_{i=1}^{N} e_i \boldsymbol{I}_i, \tag{5.8}$$

связывающие собственную плотность электрического заряда с собственными плотностями числа частиц различных сортов и соответственно 4-вектор плотности электрического тока проводимости с 4-векторами плотностей диффузионных потоков частиц различных сортов. Кроме того, в эти формулы входят электрические заряды e_i ($i=1, \ldots, N$) частиц различных сортов.

Закон сохранения электрического заряда. Установлено, что при любых столкновениях между частицами независимо от того, происходят при этом между ними реакции или нет, сумма электрических зарядов частиц, участвующих в каждом столкновении, не меняется в результате

этого столкновения. При свободном движении любой частицы или при движении ее только под действием электромагнитного поля электрический заряд частицы также остается постоянным. Не существует ни одного исключения из этих правил, которые называются *законом сохранения электрического заряда* [4, 5, 9].

Применяя указанный закон к реакциям между компонентами смеси, найдем, что определенные в § 4 стехиометрические коэффициенты ν_{ir} должны для любой r-й реакции удовлетворять соотношениям

$$\sum_{i=1}^{N} e_i \nu_{ir} = 0 \quad (r = 1, \ldots, R). \tag{5.9}$$

Используя равенства (5.9) и (4.22), легко доказать, что сумма $\sum e_i \nu_i$ равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} e_i \nu_i = \sum_{i=1}^{N} e_i \left(\sum_{r=1}^{R} \nu_{ir} \omega_r \right) = \sum_{r=1}^{R} \left(\sum_{i=1}^{N} e_i \nu_{ir} \right) \omega_r = 0. \tag{5.10}$$

Умножим теперь дифференциальное уравнение баланса числа частиц i-го сорта (см. уравнение (4.4)) на величину их электрического заряда e_i и просуммируем полученные равенства по i от 1 до N. В результате, учитывая также выражение (5.6) для 4-вектора плотности электрического тока и соотношение (5.10), получим следующее уравнение:

$$\partial_\nu J^\nu = 0. \tag{5.11}$$

Это уравнение выражает в дифференциальной форме закон сохранения электрического заряда и называется *уравнением баланса электрического заряда*. Интегрируя обе части равенства (5.11) по области V в пространстве событий и используя формулу Остроградского — Гаусса (1.45), получим соотношение

$$\int_{\Sigma} J^\nu l_\nu \, d^3\xi = 0,$$

выражающее закон сохранения электрического заряда в интегральной форме.

Переходя в уравнении (5.11) к ССК ξ^α и учитывая выражение (5.3) для 4-вектора плотности электрического тока, представим его в виде

$$\nabla_\alpha (czu^\alpha + j^\alpha) = 0. \tag{5.12}$$

Используя затем второе тождество (1.35) и равенства (3.8),

(3.19), найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi^0}(cz\sqrt{\gamma}) + \partial_\alpha(\sqrt{-g}\, j^\alpha) = 0.$$

Умножим это равенство на произведение $d\xi^0 \ldots d\xi^3$ и проинтегрируем обе его части по четырехмерной области dV пространства событий, представляющей собой бесконечно тонкую трубку мировых линий точек сплошной среды, боковая поверхность $d\Sigma$ которой состоит из мировых линий, а торцевые поверхности ортогональны им (в смысле псевдоевклидовой метрики пространства событий). Использовав затем формулу Остроградского — Гаусса (1.45), равенства (5.4) и определение собственного времени, получим следующее соотношение:

$$z\sqrt{\gamma}\, d^3\xi \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = -\frac{1}{c}\int\limits_{d\Sigma} j^\alpha l_\alpha\, d^3\zeta.$$

Левая часть этого равенства представляет собой изменение суммы электрических зарядов частиц в бесконечно малом элементе сплошной среды $d^3\xi$ с собственным объемом $d\hat{v}_3 = \sqrt{\gamma}\, d^3\xi$ в течение промежутка собственного времени от τ_1 до τ_2. Правая часть этого равенства дает полный поток электрического заряда частиц через боковую поверхность $d\Sigma$ рассматриваемой трубки мировых линий, т. е. полный поток электрического заряда частиц через двумерную поверхность указанного бесконечно малого элемента сплошной среды $d^3\xi$ в течение промежутка собственного времени от τ_1 до τ_2.

Параметрическое представление величин J, j, z. Четырехмерный вектор плотности электрического тока J, 4-вектор плотности электрического тока проводимости j и собственная плотность электрического заряда z выражаются при помощи равенств (5.6) — (5.8) через параметры η_i, I_i, n_i $(i = 1, \ldots, N)$, где η_i — 4-вектор плотности потока числа частиц i-го сорта, I_i — 4-вектор плотности диффузионного потока частиц i-го сорта, n_i — собственная плотность числа частиц i-го сорта. Запишем выражения (5.6) — (5.8) в компонентах относительно ССК ξ^α и подставим вместо величин n_i, I_i^α, η_i^α их параметрические представления (4.33) или (4.39) — (4.41), учитывая при этом, что на основании соотношений (4.59) и (5 9) выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{N} e_i\psi_i = \sum_{i=1}^{N} e_i\left(\sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}\chi_r\right) = \sum_{r=1}^{R}\left(\sum_{i=1}^{N} e_i\nu_{ir}\right)\chi_r = 0.$$

Здесь ψ_i — параметр производства частиц i-го сорта, χ_r — параметр r-й реакции, ν_{ir} — стехиометрические коэффициенты (эти величины были определены в § 4).

В результате получим следующие параметрические представления для z, j^α, J^α:

$$z = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \gamma^\alpha_\beta \frac{\partial \psi^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \gamma^\alpha_\beta \nabla_\alpha \tilde{\psi}^\alpha,$$
$$j^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \gamma^\alpha_\beta \frac{d\psi^\beta}{d\tau} = -c\gamma^\alpha_\beta \nabla_\gamma (\tilde{\psi}^\beta u^\gamma - \tilde{\psi}^\gamma u^\beta); \tag{5.13}$$

$$J^\alpha = czu^\alpha + j^\alpha = c\nabla_\gamma (\tilde{\psi}^\alpha u^\gamma - \tilde{\psi}^\gamma u^\alpha), \tag{5.14}$$

где

$$\psi^\alpha = \sum_{i=1}^{N} e_i \psi^\alpha_i, \quad u_\alpha \psi^\alpha = 0, \quad \tilde{\psi}^\alpha = \frac{\psi^\alpha}{\sqrt{\gamma}}, \tag{5.15}$$

а ψ^α_i — параметры диффузии частиц i-го сорта, введенные в § 4. Очевидно, что при любых достаточно гладких функциях $\psi^\alpha(\xi^\gamma)$ собственная плотность электрического заряда z и компоненты 4-вектора плотности электрического тока проводимости j^α, определенные равенствами (5.13), удовлетворяют уравнению (5.12). Определенные же равенством (5.14) компоненты 4-вектора плотности электрического тока J^α удовлетворяют уравнению баланса электрического заряда $\nabla_\alpha J^\alpha = 0$. Полученные здесь параметрические представления для величин z, j^α, J^α будут использованы в последующих главах при выводе динамических законов из вариационного уравнения.

Рассмотрим физический смысл параметров ψ^α, которые будем называть *параметрами электрического тока*. Для этого умножим обе части соотношения (4.44) на электрический заряд e_i частиц i-го сорта и просуммируем полученные равенства по i от 1 до N. Учитывая также определение (5.15) параметров электрического тока ψ^α, получим следующее соотношение:

$$\psi^c(\xi^0_{**}) - \psi^c(\xi^0_*) = \frac{1}{d\xi^a\, d\xi^b} \sum_{i=1}^{N} e_i\, d\Psi_i^{(c)}.$$

Здесь $d\Psi_i^{(c)}$ — поток числа частиц i-го сорта через гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ в направлении ξ^c (гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ была введена в § 4 при изучении физического смысла приращений параметров диффузии ψ^c_i); $d\xi^a$, $d\xi^b$ — интер-

валы, которым принадлежат значения сопутствующих координат ξ^a, ξ^b на мировых линиях, образующих гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ (значение координаты ξ^c на ней постоянно); ξ^0_* и ξ^0_{**} — значения сопутствующей координаты ξ^0 на концах этих мировых линий; индексы a, b, c образуют круговую перестановку из 1, 2, 3. Сумма в правой части полученного соотношения представляет собой полный поток электрического заряда частиц через гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ в направлении ξ^c, т. е. поток электрического заряда частиц через вмороженную в сплошную среду бесконечно малую двумерную площадку $d\xi^a\, d\xi^b$ (на которой $\xi^c = \mathrm{const}$) в направлении ξ^c в течение отрезка «времени» от ξ^0_* до ξ^0_{**}. Отсюда непосредственно вытекает физический смысл приращений параметров электрического тока ψ^c при перемещении вдоль мировой линии любой точки сплошной среды.

Поляризация и намагниченность сплошной среды. Из определения плотности четырехмерного электрического тока $\boldsymbol{J}$ следует, что последний возникает за счет движения в пространстве и во времени электрически заряженных частиц, входящих в состав многокомпонентной сплошной среды. Если частицы обладают внутренними степенями свободы, то их внутреннее движение также может привести к возникновению в сплошной среде четырехмерного электрического тока, который будем называть *внутренним*. Обозначим его плотность через $\boldsymbol{J}_{(in)}$. Физический смысл компонент $J^\mu_{(in)}$ аналогичен физическому смыслу компонент J^μ: величина $J^0_{(in)}/c$ является средней плотностью внутреннего электрического заряда, а компоненты $J^k_{(in)}$ представляют собой компоненты трехмерного вектора средней плотности внутреннего электрического тока. Плотность полного четырехмерного электрического тока в сплошной среде равна сумме $\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{(in)}$.

Установлено, что компоненты $J^\mu_{(in)}$ всегда подчиняются интегральному закону сохранения [5, 9—11]

$$\int\limits_{\Sigma} J^\mu_{(in)} l_\mu\, d^3\zeta = 0,$$

где Σ — любая замкнутая гиперповерхность в пространстве событий; ζ^k — координаты на ней; l_μ — компоненты ортогонального к Σ вектора, определенного в § 1. Для достаточно гладких функций $J^\mu_{(in)}(x)$ отсюда на основании формулы Остроградского — Гаусса (1.45) и произвольности Σ

вытекает дифференциальный закон сохранения

$$\partial_\mu J^\mu_{(in)} = 0. \tag{5.16}$$

Очевидно, что 4-вектор плотности внутреннего электрического тока должен выражаться через некоторые независимые параметры, характеризующие среднее внутреннее движение частиц, причем так, чтобы при этом выполнялось уравнение (5.16). Наиболее общее выражение для компонент $J^\mu_{(in)}$, удовлетворяющее равенству (5.16), имеет вид

$$\frac{1}{c} J^\mu_{(in)}(x) = \partial_\nu M^{\mu\nu}(x), \qquad M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}. \tag{5.17}$$

Здесь величины $M^{\mu\nu}(x)$ являются компонентами четырехмерного антисимметричного тензора второго ранга $\boldsymbol{M}^{(2)}(x)$, который определен в занятой сплошной средой области V пространства событий.

Тензор $\boldsymbol{M}^{(2)}(x)$ может быть однозначно связан со средними характеристиками внутреннего движения частиц [5] и носит название *4-тензора поляризации и намагниченности сплошной среды* (в рассматриваемой точке x из области V). Для его компонент в ГСК приняты специальные обозначения:

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ P_1 & 0 & M_3 & -M_2 \\ P_2 & -M_3 & 0 & M_1 \\ P_3 & M_2 & -M_1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & M_3 & -M_2 \\ -P_2 & -M_3 & 0 & M_1 \\ -P_3 & M_2 & -M_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

где индекс μ указывает номер строки, а индекс ν — номер столбца. Можно доказать, что при переходе к другой ГСК, соответствующей системе отсчета, неподвижной относительно исходной, величины P_k и M_k преобразуются как компоненты трехмерных векторов [1]. Они называются соответственно *поляризацией* и *намагниченностью сплошной среды*.

Введем четырехмерные векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m}$, компоненты которых связаны с компонентами 4-тензора поляризации и намагниченности соотношениями

$$p_\nu = u^\lambda M_{\lambda\nu}, \qquad m_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\mu\lambda\varkappa} u^\mu M^{\lambda\varkappa}. \tag{5.19}$$

Из них следует, что в ГСК, являющейся собственной для рассматриваемой точки x из области V, компоненты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m}$ имеют вид

$$p_0^* = M_{00}^* = 0, \quad p_k^* = M_{0k}^* = P_k^*, \quad m_0^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{00\lambda\varkappa}M^{*\lambda\varkappa} = 0,$$
$$m_k^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{k0\lambda\varkappa}M^{*\lambda\varkappa} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{0kpq}M^{*pq} = M_k^*. \tag{5.20}$$

Поэтому векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m}$ будем называть *4-векторами поляризации и намагниченности сплошной среды*. Они ортогональны 4-скорости сплошной среды

$$p_\nu u^\nu = p_\alpha u^\alpha = 0, \qquad m_\nu u^\nu = m_\alpha u^\alpha = 0. \tag{5.21}$$

Равенства (5.19) можно разрешить относительно компонент $M^{\mu\nu}$. Для этого заметим, что выражение (5.19) для m_ν можно записать в виде

$$m_\nu = \frac{1}{2}e_{\nu\mu\lambda\varkappa}u^\mu M_1^{\lambda\varkappa}, \quad M_1^{\lambda\varkappa} \equiv M^{\lambda\varkappa} - (u^\lambda p^\varkappa - u^\varkappa p^\lambda), \tag{5.22}$$

причем

$$u_\lambda M_1^{\lambda\varkappa} = u_\lambda M^{\lambda\varkappa} - p^\varkappa = 0. \tag{5.23}$$

Подставим затем в компоненты $e^{\nu\sigma\tau\varphi}m_\nu u_\sigma$ выражение (5.22) для m_ν и проведем, учитывая тождества (1.41) и (5.23), следующие преобразования:

$$e^{\nu\sigma\tau\varphi}\left(\frac{1}{2}e_{\nu\mu\lambda\varkappa}u^\mu M_1^{\lambda\varkappa}\right)u_\sigma =$$
$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \delta_\mu^\sigma u^\mu u_\sigma & \delta_\lambda^\sigma u_\sigma & \delta_\varkappa^\sigma u_\sigma \\ \delta_\mu^\tau u^\mu & \delta_\lambda^\tau & \delta_\varkappa^\tau \\ \delta_\mu^\varphi u^\mu & \delta_\lambda^\varphi & \delta_\varkappa^\varphi \end{vmatrix} M_1^{\lambda\varkappa} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \delta_\lambda^\tau & \delta_\varkappa^\tau \\ \delta_\lambda^\varphi & \delta_\varkappa^\varphi \end{vmatrix} M_1^{\lambda\varkappa} =$$
$$= \frac{1}{2}(\delta_\varkappa^\tau\delta_\lambda^\varphi - \delta_\lambda^\tau\delta_\varkappa^\varphi)M_1^{\lambda\varkappa} = M_1^{\varphi\tau}.$$

На основании этих равенств, а также соотношений (5.22) найдем окончательное выражение для компонент $M^{\mu\nu}$ через компоненты p^ν, $m_\varkappa$:

$$M^{\mu\nu} = u^\mu p^\nu - u^\nu p^\mu + e^{\mu\nu\lambda\varkappa}u_\lambda m_\varkappa. \tag{5.24}$$

Отметим, что в ССК ξ^α эта формула записывается с помощью компонент (1.27) тензора Леви-Чивита:

$$M^{\alpha\beta} = u^\alpha p^\beta - u^\beta p^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}u_\gamma m_\delta, \tag{5.25}$$

а в ГСК компоненты $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$ тензора Леви-Чивита совпадают с полностью антисимметричными четырехмерными символами Леви-Чивита.

Поляризация и намагниченность многокомпонентной сплошной среды. Повторим для каждой компоненты многокомпонентной сплошной среды рассуждения, на основании которых выше были введены 4-вектор плотности внутреннего электрического тока и 4-тензор поляризации и намагниченности сплошной среды, удовлетворяющие уравнениям (5.16), (5.17). В результате получим N векторов $\boldsymbol{J}_{(in)\,i}$ и N тензоров второго ранга $\boldsymbol{M}_i^{(2)}$ $(i=1, \ldots, N)$, которые определены в каждой точке из занятой сплошной средой области V пространства событий. Вектор $\boldsymbol{J}_{(in)\,i}$ будем называть *4-вектором плотности внутреннего электрического тока i-й компоненты смеси*, а тензор $\boldsymbol{M}_i^{(2)}$ — *4-тензором поляризации и намагниченности i-й компоненты смеси*. Плотность внутреннего электрического тока смеси $\boldsymbol{J}_{(in)}$ и 4-тензор поляризации и намагниченности смеси $\boldsymbol{M}^{(2)}$ связаны с величинами $\boldsymbol{J}_{(in)\,i}$ и $\boldsymbol{M}_i^{(2)}$ простыми соотношениями

$$\boldsymbol{J}_{(in)} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{J}_{(in)\,i}, \tag{5.26}$$

$$\boldsymbol{M}^{(2)} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_i^{(2)}, \qquad M^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} M_i^{\mu\nu}. \tag{5.27}$$

Для компонент $M_i^{\mu\nu}$, $M_{i\mu\nu}$ приняты специальные обозначения, которые получаются из обозначений (5.18) добавлением в них ко всем буквам индекса i. Введенные таким образом величины P_{ik}, M_{ik} преобразуются при переходе к любой другой ГСК, соответствующей системе отсчета, неподвижной относительно исходной, как компоненты трехмерных векторов. Они называются *поляризацией и намагниченностью i-й компоненты смеси*.

Очевидно, что в связи с 4-тензором поляризации и намагниченности любой i-й компоненты смеси можно определить четырехмерные векторы $\boldsymbol{p}_i$ и $\boldsymbol{m}_i$ так, что будут выполняться соотношения

$$p_{i\nu} = u^\lambda M_{i\lambda\nu}, \quad m_{i\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\nu\mu\lambda\varkappa} u^\mu M_i^{\lambda\varkappa}; \tag{5.28}$$

$$\begin{gathered} p_{i0}^* = M_{i00}^* = 0, \quad p_{ik}^* = M_{i0k}^* = P_{ik}^*, \quad m_{i0}^* = 0, \\ m_{ik}^* = \frac{1}{2}\,e_{k0\lambda\varkappa} M_i^{*\lambda\varkappa} = -\frac{1}{2}\,e_{0kpq} M_i^{*pq} = M_{ik}^*; \end{gathered} \tag{5.29}$$

$$p_{i\nu} u^\nu = p_{i\alpha} u^\alpha = 0, \quad m_{i\nu} u^\nu = m_{i\alpha} u^\alpha = 0; \tag{5.30}$$

$$M_i^{\alpha\beta} = u^\alpha p_i^\beta - u^\beta p_i^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\gamma m_{i\delta}, \tag{5.31}$$

которые полностью аналогичны соотношениям (5.19)—(5.21) и (5.25). Из выражений (5.29) для компонент векторов $\boldsymbol{p}_i$ и $\boldsymbol{m}_i$, взятых относительно ГСК, являющейся собственной для рассматриваемой точки пространства событий, вытекает физический смысл векторов $\boldsymbol{p}_i$ и $\boldsymbol{m}_i$. Они называются *4-векторами поляризации и намагниченности i-й компоненты смеси.*

В качестве параметров, характеризующих в каждой точке области V поляризацию и намагниченность i-й компоненты смеси, можно использовать также тензор $\boldsymbol{\mu}_i^{(2)}$ и векторы $\boldsymbol{\pi}_i$, $\boldsymbol{\mu}_i$, определенные равенствами

$$\boldsymbol{M}_i^{(2)} = n_i \boldsymbol{\mu}_i^{(2)}, \quad \boldsymbol{p}_i = n_i \boldsymbol{\pi}_i, \quad \boldsymbol{m}_i = n_i \boldsymbol{\mu}_i. \tag{5.32}$$

Они представляют собой 4-тензор поляризации и намагниченности i-й компоненты смеси и 4-векторы поляризации и намагниченности i-й компоненты смеси, отнесенные к собственной плотности числа частиц i-го сорта.

Средние характеристики электромагнитного поля в сплошной среде. Пусть через некоторую область V пространства событий Минковского проходят мировые линии системы материальных частиц. Если у некоторых сортов этих частиц электрические заряды отличны от нуля, то такие частицы создают в пространстве событий собственное электромагнитное поле, которое может сильно изменяться между мировыми линиями частиц. В результате электромагнитное поле (оно, конечно, может создаваться и внешними источниками) будет в области V микронеоднородным. Рассматривая указанную систему материальных частиц в области V как релятивистскую сплошную среду, введем в каждой точке x из V средние характеристики электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$, определенные равенствами

$$F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{v(o)} \int_o \mathcal{F}^{\mu\nu}\, d^4x. \tag{5.33}$$

Здесь $v(o)$ — четырехмерный объем физически бесконечно малой четырехмерной области o, содержащей точку x, $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ — компоненты тензора напряженности электромагнитного поля в вакууме, определенного в § 2.

Из равенства (5.33) следует, что величины $F^{\mu\nu}$ образуют компоненты четырехмерного антисимметричного тензора второго ранга F, называемого *тензором напряженности электромагнитного поля в сплошной среде.* Компо-

ненты этого тензора удовлетворяют в ГСК x^ν уравнениям

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}\partial_\nu F_{\lambda\varkappa}=0, \tag{5.34}$$

вытекающим из уравнений (2.9). В ССК ξ^α равенство (5.34) записывается следующим образом:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_\beta F_{\gamma\delta}=0. \tag{5.35}$$

Можно легко найти общее решение этих уравнений:

$$F_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha A_\beta-\nabla_\beta A_\alpha=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha, \tag{5.36}$$

где A_α — компоненты вектора $\boldsymbol{A}$, называемого *4-потенциалом электромагнитного поля в сплошной среде*. К нему относится все, что было сказано в § 2 о 4-потенциале электромагнитного поля в вакууме. В частности, 4-потенциал определяется уравнениями (5.36) не однозначно, а с точностью до градиентного преобразования

$$A'_\alpha=A_\alpha-\frac{\partial A}{\partial\underset{\sim}{\xi}^\alpha}, \tag{5.37}$$

относительно которого должны быть инвариантны все уравнения и параметры, имеющие физический смысл. Такую инвариантность называют градиентной [4, 5, 10].

Для компонент тензора напряженности электромагнитного поля и его 4-потенциала, взятых относительно ГСК x^ν, приняты соответственно следующие специальные обозначения:

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & E_1 & E_2 & E_3\\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2\\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1\\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0\end{pmatrix},$$

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -E_1 & -E_2 & -E_3\\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2\\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1\\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0\end{pmatrix}, \tag{5.38}$$

$$A_\nu=(\varphi,\ a_1,\ a_2,\ a_3),$$

$$A^\nu=(\varphi,\ -a_1,\ -a_2,\ -a_3).$$

Здесь индекс μ указывает номер строки, а индекс ν — номер столбца. Можно доказать, что при переходе к другой ГСК, соответствующей системе отсчета, неподвижной относительно исходной, величина φ не изменяется, а величины E_k, B_k, a_k преобразуются как компоненты трехмерных векторов. Они называются соответственно *напряженностью*

электрического поля (в среде), *индукцией магнитного поля* (в среде) и *векторным потенциалом магнитного поля*. Величина φ называется скалярным потенциалом электрического поля. Используя равенства (5.38), легко записать уравнения (5.34), (5.36) в трехмерном виде аналогично тому, как это было сделано в § 2:

$$e^{kpr}\partial_p B_r = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_k}{\partial t}, \quad \partial_k B^k = 0; \tag{5.39}$$

$$E_k = -\frac{1}{c}\frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}, \quad B_k = B^k = e^{kpr}\partial_p a_r. \tag{5.40}$$

Наряду с тензором $\boldsymbol{F}$ в качестве характеристик электромагнитного поля в среде можно ввести еще *тензор индукции электромагнитного поля* $\boldsymbol{H}$; *4-векторы напряженности и индукции электрического поля* $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{d}$; *4-векторы напряженности и индукции магнитного поля* $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{b}$. Их компоненты определяются равенствами

$$H^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} + 4\pi M^{\alpha\beta}; \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned} e_\alpha &= F_{\beta\alpha}u^\beta, \quad b_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma\delta}u^\beta F^{\gamma\delta}, \\ d_\alpha &= H_{\beta\alpha}u^\beta, \quad h_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma\delta}u^\beta H^{\gamma\delta}, \end{aligned} \tag{5.42}$$

причем для компонент тензора $\boldsymbol{H}$ в ГСК приняты специальные обозначения:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ H^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Здесь индекс μ указывает номер строки, а ν — номер столбца. При переходе к другой ГСК, соответствующей системе отсчета, неподвижной относительно исходной, величины D_k, H_k преобразуются как компоненты трехмерных векторов. Они называются *индукцией электрического поля* и *напряженностью магнитного поля*. Из равенств (5.42) следует, что в собственной ГСК

$$\begin{aligned} &e_0^* = 0, \quad e_k^* = E_k^*; \qquad b_0^* = 0, \quad b_k^* = B_k^*; \\ &d_0^* = 0, \quad d_k^* = D_k^*; \qquad h_0^* = 0, \quad h_k^* = H_k^*. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Кроме того, на основании соотношений (5.18), (5.19), (5.41), (5.42), очевидно, имеем

$$D_k = E_k + 4\pi P_k, \quad H_k = B_k - 4\pi M_k, \qquad d_\alpha = e_\alpha + 4\pi p_\alpha, \quad h_\alpha = b_\alpha - 4\pi m_\alpha. \tag{5.45}$$

§ 6. Перенос и производство энтропии

Энтропия. Определение энтропии подробно обсуждается в термодинамике и статистической физике [1, 9, 12]. Напомним здесь лишь основные черты микроскопического определения энтропии [12].

Применяя операцию осреднения по физически бесконечно малым областям $o(x)$, как это делалось в § 3—5, можно определить различные *макроскопические параметры* в каждой точке x из области V пространства событий, в которой происходит движение системы частиц, рассматриваемой как сплошная среда. Некоторый набор таких параметров в точке x задает *макроскопическое состояние* системы частиц в области $o(x)$. Очевидно, что макроскопическое состояние не определяет однозначным образом микроскопических характеристик системы частиц в области $o(x)$.

Возьмем область $o(x) = v_3(x) \times t_1(x)$, представляющую собой относительно выбранной ГСК физически бесконечно малый объем $v_3(x)$ обычного трехмерного пространства, рассматриваемый в течение физически бесконечно малого промежутка времени $t_1(x)$. Пусть, с другой стороны, величина $t_1(x)$ много больше времени, необходимого для установления равновесного состояния в системе частиц, находящихся в объеме $v_3(x)$. В течение времени $t_1(x)$ эта система проходит ряд микроскопических состояний. Обозначим через $\Gamma(v_3)$ количество микроскопических состояний, в которых система частиц, находящихся в рассматриваемом макроскопическом состоянии в объеме $v_3(x)$, проводит почти весь отрезок времени $t_1(x)$.

Величина $\Gamma(v_3)$ называется *статистическим весом* рассматриваемого макроскопического состояния указанной системы и характеризует его вероятность. Величина же, пропорциональная натуральному логарифму статистического веса, называется *энтропией* $S(v_3)$ рассматриваемого макроскопического состояния системы частиц, находящихся в объеме v_3:

$$S(v_3) = k \ln \Gamma(v_3). \tag{6.1}$$

Постоянный коэффициент k, фиксирующий единицу измерения энтропии, обычно принимают равным постоянной Больцмана [1, 9]. Используется также система единиц, в которой $k=1$, а энтропия является безразмерной величиной [12].

Уравнение баланса энтропии. *Плотностью энтропии* $\tilde{s}^0$ *сплошной среды* в точке x пространства событий относительно выбранной ГСК называется отношение

$$\tilde{s}^0(x)=\frac{S(v_3)}{v_3}. \tag{6.2}$$

Входящие сюда величины $v_3(x)$, $S(v_3)$ были определены выше относительно выбранной ГСК для любой точки x пространства событий, в которой присутствует сплошная среда. В этой ГСК уравнение баланса энтропии можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_3}\tilde{s}^0\,d^3x=-\int\limits_{\Sigma_2}\tilde{S}\,d\Sigma_2+\int\limits_{V_3}\sigma\,d^3x, \tag{6.3}$$

где

$$d^3x=dx^1\,dx^2\,dx^3, \tag{6.4}$$

а V_3 — трехмерная область пространства переменных x^1, x^2, x^3, ограниченная двумерной поверхностью Σ_2, неподвижной относительно используемой ГСК. Интеграл в левой части равенства (6.3) по определению есть энтропия сплошной среды в области V_3 трехмерного пространства в рассматриваемый момент времени. Произведение $-\tilde{S}\,d\Sigma_2$ представляет собой скорость изменения энтропии в области V_3 за счет взаимодействия с окружающей средой через элемент $d\Sigma_2$ поверхности Σ_2. Произведение $\sigma\,d^3x$ равно скорости изменения энтропии за счет внутренних процессов в элементе объема d^3x. Величина σ называется *локальной скоростью изменения энтропии сплошной среды.*

Из равенства (6.3) следует, что при $V_3\to 0$ поверхностный интеграл должен быть бесконечно малой величиной того же порядка, что и объемные интегралы. Это возможно только при условии, что поверхностный интеграл преобразуется в объемный. Для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство [1]

$$\tilde{S}=\tilde{s}^k n_k, \tag{6.5}$$

в котором n_k — компоненты трехмерного вектора внешней нормали к поверхности Σ_2, $\tilde{s}^k$ — компоненты некоторого

трехмерного вектора, определенного во всех точках пространства событий, где присутствует сплошная среда. Этот вектор называется *трехмерным вектором плотности потока энтропии сплошной среды* относительно выбранной ГСК. Используя равенство (6.5), уравнение (6.3) можно записать в дифференциальной форме (применяя обычную формулу Остроградского — Гаусса для трехмерного пространства и учитывая произвольность области V_3):

$$\frac{\partial \tilde{s}^0}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{s}^k}{\partial x^k} = \sigma. \tag{6.6}$$

Определив величины s^ν при помощи равенств

$$s^0 = c\tilde{s}^0, \quad s^k = \tilde{s}^k, \tag{6.7}$$

уравнение (6.6) легко привести к четырехмерному виду

$$\partial_\nu s^\nu = \sigma. \tag{6.8}$$

Все рассуждения, проведенные в настоящем параграфе, очевидно, можно повторить и в любой другой ГСК. Введем таким образом относительно нее плотность энтропии $\tilde{s}'^0$, компоненты $\tilde{s}'^k$ трехмерного вектора плотности потока энтропии, локальную скорость изменения энтропии σ' и величины s'^ν, удовлетворяющие соотношениям

$$s'^0 = c\tilde{s}'^0, \quad s'^k = \tilde{s}'^k, \quad \partial'_\nu s'^\nu = \sigma'. \tag{6.9}$$

Значение параметров s'^ν, σ' должно полностью определяться параметрами s^ν, σ и величинами, задающими положение новой ГСК′ относительно старой ГСК в пространстве событий. Последнее равенство из (6.9) при этом должно быть следствием уравнения (6.8). Это возможно, если σ — скаляр ($\sigma' = \sigma$), а параметры s'^ν связаны с s^ν формулами преобразования контравариантных компонент четырехмерного вектора. Таким образом, величины s^ν образуют компоненты четырехмерного вектора s, называемого *4-вектором плотности потока энтропии*.

Уравнение баланса энтропии (6.8) можно представить и в интегральной форме. Для этого проинтегрируем обе части равенства (6.8) по четырехмерной области V пространства событий, ограниченной трехмерной гиперповерхностью Σ, и используем формулу Остроградского — Гаусса (1.45), записав ее относительно ГСК x^ν. В результате получим уравнение

$$\int_\Sigma s^\nu l_\nu \, d^3\zeta = \int_{V_4} \sigma \, d^4x. \tag{6.10}$$

Собственная плотность энтропии и внутренний поток энтропии. Введем еще *собственную плотность энтропии* s и *4-вектор плотности внутреннего потока энтропии* $\boldsymbol{S}$, которые определяются равенствами

$$\boldsymbol{s} = cs\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}, \qquad s = \frac{1}{c}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}). \tag{6.11}$$

Из них следует, что вектор $\boldsymbol{S}$ ортогонален (в смысле псевдоевклидовой метрики пространства событий) 4-скорости сплошной среды $\boldsymbol{u}$:

$$(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{u}) = 0, \qquad S^{\nu}u_{\nu} = S^{\alpha}u_{\alpha} = 0. \tag{6.12}$$

В ГСК, являющейся собственной для рассматриваемой точки x пространства событий, справедливы соотношения

$$s(x) = \frac{1}{c}s^{*0}, \quad S^{*0}(x) = 0, \quad S^{*k}(x) = s^{*k}(x). \tag{6.13}$$

Здесь звездочка указывает на то, что соответствующие компоненты векторов берутся относительно собственной для точки x ГСК. Из соотношений (6.13) вытекает физический смысл величины s и компонент S^{ν}. Величина $s(x)$ представляет собой плотность энтропии в точке x относительно собственной для этой точки ГСК. Компоненты $S^{k}(x)$ в собственной для точки x ГСК совпадают с компонентами трехмерного вектора плотности потока энтропии в точке x, а компонента $S^{0}(x)$ в собственной для точки x ГСК равна нулю.

Подставляя в уравнение баланса энтропии (6.8) выражение для компонент s^{ν} из первого равенства (6.11), получим уравнение

$$\partial_{\nu}(csu^{\nu} + S^{\nu}) = \sigma, \tag{6.14}$$

которое можно записать также и в ССК ξ^{α}:

$$\nabla_{\alpha}(csu^{\alpha} + S^{\alpha}) = \sigma. \tag{6.15}$$

Используя тождество (1.35) и равенства (3.8), (3.19), легко представить соотношение (6.15) в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi^{0}}(cs\sqrt{\gamma}) + \partial_{\alpha}(\sqrt{-g}\,S^{\alpha}) = \sigma\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}. \tag{6.16}$$

Умножим это равенство на произведение $d\xi^{0}\ldots d\xi^{3}$ и проинтегрируем обе его части по четырехмерной области dV пространства событий, представляющей собой бесконечно тонкую трубку мировых линий сплошной среды, боковая

поверхность $d\Sigma$ которой состоит из мировых линий, а торцевые поверхности ортогональны им (в смысле псевдоевклидовой метрики пространства событий). Использовав затем формулу Остроградского — Гаусса (1.45), равенства (6.12) и определение собственного времени, получим следующее соотношение:

$$s\sqrt{\gamma}\,d^3\xi\,\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = -\frac{1}{c}\int\limits_{d\Sigma} S^\alpha l_\alpha\, d^3\zeta + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\sigma\sqrt{\gamma}\,d^3\xi\right)d\tau. \quad (6.17)$$

Левая часть этого равенства представляет собой изменение энтропии бесконечно малой частицы сплошной среды, собственный объем которой равен $\sqrt{\gamma}\,d^3\xi = d\hat{v}_3$, в течение промежутка собственного времени от τ_1 до τ_2. Первое слагаемое в правой части равенства (6.17) равно полному потоку энтропии через боковую поверхность $d\Sigma$ рассматриваемой трубки мировых линий, т. е. потоку энтропии через двумерную поверхность бесконечно малой частицы сплошной среды (с собственным объемом $d\hat{v}_s = \sqrt{\gamma}\,d^3\xi$) в течение промежутка собственного времени от τ_1 до τ_2. Второе слагаемое в правой части равенства (6.17) представляет собой изменение энтропии рассматриваемой бесконечно малой частицы сплошной среды за счет внутренних процессов в течение промежутка собственного времени от τ_1 до τ_2.

Закон возрастания энтропии. Установлено, что в результате одних внутренних процессов энтропия любого тела не может уменьшаться — она или возрастает, или остается постоянной. Не существует ни одного исключения из этого правила, называемого *законом возрастания энтропии*. Математическим выражением этого закона, очевидно, является неравенство

$$\sigma \geqslant 0. \quad (6.18)$$

Локальная скорость роста энтропии σ называется также *диссипативной функцией*. Процессы, для которых $\sigma > 0$, называют *необратимыми*, так как обратные им процессы не могут происходить, потому что для них $\sigma < 0$. *Обратимыми* же процессами называются такие, для которых $\sigma = 0$.

Учитывая данное выше определение энтропии, можно сказать, что в результате одних только внутренних процессов система не может перейти из более вероятного

макроскопического состояния в менее вероятное макроскопическое состояние.

Энтропия компонент смеси. Все рассуждения и определения настоящего параграфа, приведенные выше, справедливы как для однокомпонентных сплошных сред, так и для многокомпонентных. Но в многокомпонентных сплошных средах можно определить еще ряд связанных с энтропией параметров для каждой компоненты смеси, если системы частиц различных сортов, находящихся в любом физически бесконечно малом трехмерном объеме $v_3(x)$, можно в течение физически бесконечно малого отрезка времени $t_1(x)$ рассматривать как независимые.

В этом случае для любой i-й компоненты смеси будут справедливы все предыдущие рассуждения из настоящего параграфа и соотношения типа (6.1)—(6.17), за исключением неравенства (6.18), которое выполняется только для смеси в целом. В частности, для любой i-й компоненты смеси определены параметры: $\boldsymbol{s}_i$ — 4-вектор плотности потока энтропии i-й компоненты; s_i — собственная плотность энтропии i-й компоненты; $\boldsymbol{S}_i$ — 4-вектор плотности внутреннего потока энтропии i-й компоненты; σ_i — локальная скорость изменения энтропии i-й компоненты. Эти параметры удовлетворяют равенствам

$$\boldsymbol{s}_i = cs_i\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_i, \quad s_i = \frac{1}{c}(\boldsymbol{s}_i\boldsymbol{u}), \quad (\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{u}) = 0, \tag{6.19}$$

$$\nabla_\alpha s_i^\alpha = \sigma_i, \quad \nabla_\alpha (cs_i u^\alpha + S_i^\alpha) = \sigma_i, \tag{6.20}$$

$$\int\limits_\Sigma s_i^\nu l_\nu \, d^3\zeta = \int\limits_V \sigma_i \, d^4x.$$

Учитывая предположение о независимости систем частиц различных сортов в физически бесконечно малых областях $o(x) = v_3(x) \times t_1(x)$, легко получить следующие соотношения:

$$\Gamma(v_3) = \prod_{i=1}^{N} \Gamma_i(v_3),$$

$$S(v_3) = k \ln \Gamma(v_3) = \sum_{i=1}^{N} k \ln \Gamma_i(v_3) = \sum_{i=1}^{N} S_i(v_3); \tag{6.21}$$

$$\tilde{s}^0 = \frac{S(v_3)}{v_3} = \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i(v_3)}{v_3} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{s}_i^0, \tag{6.22}$$

где $\Gamma_i(v_3)$ и $S_i(v_3)$ — соответственно статистический вес и энтропия рассматриваемого макроскопического состояния системы частиц i-го сорта, находящихся в физически бесконечно малом объеме v_3; $\tilde{s}_i^0$ — плотность энтропии i-й компоненты смеси относительно используемой ГСК. Учитывая также определение компонент трехмерных и четырехмерных векторов плотности потока энтропии смеси $\tilde{s}^k$, s^v и плотности потока энтропии ее компонент $\tilde{s}_i^k$, s_i^v, легко установить, что

$$\tilde{s}^k = \sum_{i=1}^{N} \tilde{s}_i^k, \quad s^v = \sum_{i=1}^{N} s_i^v. \tag{6.23}$$

Тогда из уравнений (6.8), (6.11), (6.19) и (6.20) на основании соотношений (6.22), (6.23) вытекают равенства

$$s = \sum_{i=1}^{N} s_i, \quad S = \sum_{i=1}^{N} S_i, \quad \sigma = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i. \tag{6.24}$$

Отметим, что при каждом значении i величина σ_i представляет собой локальную скорость изменения энтропии i-й компоненты смеси как за счет внутренних для нее процессов, так и в результате локального взаимодействия с другими компонентами смеси. Поэтому для величин σ_i не обязано выполняться неравенство типа (6.18). Однако в полном соответствии с определением диссипативной функции σ (для смеси в целом) равная ей на основании последнего соотношения (6.24) сумма $\sum_{i=1}^{N} \sigma_i$ представляет собой локальную скорость изменения энтропии смеси только за счет внутренних процессов, так как процессы взаимодействия между компонентами смеси являются внутренними для смеси в целом. Поэтому на основании закона возрастания энтропии должно выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \geqslant 0. \tag{6.25}$$

Параметрические представления. Уравнение баланса числа частиц i-го сорта (4.24) при замене функций n_i, I_i^α, ν_i на s, S^α, σ:

$$n_i \to s, \quad I_i^\alpha \to S^\alpha, \quad \nu_i \to \sigma \tag{6.26}$$

переходит в уравнение баланса энтропии (6.15). Поэтому для собственной плотности энтропии s, для компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии S^α, для локальной скорости изменения энтропии σ и для компонент 4-вектора плотности потока энтропии s^α, очевидно, имеют место параметрические представления

$$s = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \gamma^\alpha_\beta \partial_\alpha \varphi^\beta + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varphi = \gamma^\alpha_\beta \nabla_\alpha \tilde{\varphi}^\beta + \tilde{\varphi}, \tag{6.27}$$

$$S^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \gamma^\alpha_\beta \frac{d\varphi^\beta}{d\tau} = -c\gamma^\alpha_\beta \nabla_\nu \left(\tilde{\varphi}^\beta u^\nu - \tilde{\varphi}^\nu u^\beta\right), \tag{6.28}$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\varphi}{d\tau} = c \nabla_\alpha \tilde{\varphi}\, u^\alpha, \tag{6.29}$$

$$s^\alpha = csu^\alpha + S^\alpha = c\nabla_\nu \left(\tilde{\varphi}^\alpha u^\nu - \tilde{\varphi}^\nu u^\alpha\right) + c\tilde{\varphi} u^\alpha, \tag{6.30}$$

$$u_\alpha \varphi^\alpha = 0, \quad \tilde{\varphi}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varphi^\alpha, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varphi, \tag{6.31}$$

аналогичные параметрическим представлениям (4.33), (4.38) — (4.41) и получаемые из них путем замены функций (6.26) и переобозначения параметров

$$\psi_i^\alpha \to \varphi^\alpha, \quad \psi_i \to \varphi. \tag{6.32}$$

Очевидно, что при любых достаточно гладких функциях $\varphi^\alpha(\xi^\nu)$, $\varphi(\xi^\nu)$ величины s, S^α и σ, определенные равенствами (6.27) — (6.29), тождественно удовлетворяют уравнению (6.15), а величины σ и s^α, определенные равенствами (6.29) и (6.30), тождественно удовлетворяют уравнению баланса энтропии в форме $\nabla_\alpha s^\alpha = \sigma$.

Выясним физический смысл параметров φ^α, φ. Для этого рассмотрим состоящую из мировых линий сплошной среды гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ и трубку мировых линий сплошной среды dV, которые были определены в § 4 при изучении физического смысла параметров диффузии ψ_i^α и производства частиц ψ_i i-го сорта. Обозначим через $d\Phi^{(c)}$ полный поток энтропии через гиперповерхность $d\Sigma^{(c)}$ в направлении ξ^c, т. е. поток энтропии через вмороженную в среду бесконечно малую двумерную площадку $d\xi^a\, d\xi^b$ (на которой $\xi^c = \text{const}$) в направлении ξ^c в течение отрезка «времени» от ξ^0_* до ξ^0_{**}. Пусть также $d\Phi$ — полное производство энтропии внутри трубки мировых линий dV, т. е. производство энтропии в бесконечно малом элементе сплошной среды $d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3$ в течение отрезка «времени» от ξ^0_* до ξ^0_{**}. Тогда на основании уста-

навливаемой соотношениями (6.26), (6.32) математической аналогии между процессами диффузии и рождения частиц i-го сорта, с одной стороны, и процессами переноса и производства энтропии — с другой, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} \varphi^c(\xi^0_{**}) - \varphi^c(\xi^0_*) &= \frac{d\Phi^{(c)}}{d\xi^a\, d\xi^b}, \\ \varphi(\xi^0_{**}) - \varphi(\xi^0_*) &= \frac{d\Phi}{d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Отсюда непосредственно вытекает физический смысл приращений параметров φ^c, φ при перемещении вдоль мировой линии любой точки сплошной среды.

Все рассуждения настоящего пункта справедливы как в случае однокомпонентной сплошной среды, так и в случае многокомпонентной сплошной среды. Однако если для многокомпонентной сплошной среды выполняется условие статистической независимости компонент (6.21), то все рассуждения настоящего пункта можно дословно повторить для каждой компоненты смеси. В частности, наряду с соотношениями (6.26) — (6.32) будут справедливы также соотношения, получаемые из них добавлением номера компоненты i к величинам s, S^α, σ, s^α, φ^α, φ, $d\Phi^{(c)}$, $d\Phi$. Параметрические функции φ^α, φ и φ^α_i, φ_i на основании равенств (6.24) и формул (6.28), (6.29), записанных для смеси в целом и для каждой ее компоненты, связаны между собой соотношениями, которые всегда можно представить в виде

$$\varphi^\alpha = \sum_{i=1}^{N} \varphi^\alpha_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i. \tag{6.34}$$

Величины φ^α и φ будем называть *параметрами переноса и производства энтропии сплошной среды*, а величины φ^α_i и φ_i — *параметрами переноса и производства энтропии i-й компоненты смеси*. Полученные выше параметрические представления будут использованы в следующих главах при выводе динамических законов из вариационного уравнения.

В настоящей главе были кратко изложены основные понятия кинематики различных релятивистских процессов. Многие из них подробно рассматриваются в работах [1 — 15].

ГЛАВА 3

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

§ 7. Вариационное уравнение Л. И. Седова

Определяющие параметры. Рассмотрим движение сплошной среды, сопровождающееся различными внутренними процессами, например переносом и производством энтропии, электромагнитными процессами или диффузией и реакциями, если сплошная среда представляет собой многокомпонентную смесь.

Ограничимся в дальнейшем случаем, когда поведение сплошной среды относительно выбранной ГСК x^ν может быть полностью описано конечным числом функций [1])

$$\mu^A = \mu^A(\xi^\nu),$$

заданных в некоторой области $\hat{V}^0$ из пространства переменных ξ^ν. Эта область представляет собой множество значений сопутствующих координат. Функции $\mu^A(\xi^\nu)$ называются *определяющими параметрами*. Для различных сплошных сред набор определяющих параметров $\mu^A(\xi^\nu)$, а также класс функций, которому они принадлежат, могут быть различными.

Среди определяющих параметров $\mu^A(\xi^\nu)$, например, могут присутствовать некоторые из следующих функций:

$$\begin{array}{llllll} x^\nu(\xi^\nu), & \psi_i^\alpha(\xi^\nu), & \chi_r(\xi^\nu), & \psi^\alpha(\xi^\nu), & & \\ p_\alpha(\xi^\nu), & m_\alpha(\xi^\nu), & p_{i\alpha}(\xi^\nu), & m_{i\alpha}(\xi^\nu), & & (7.1) \\ A_\alpha(\xi^\nu), & \varphi^\alpha(\xi^\nu), & \varphi(\xi^\nu), & \varphi_i^\alpha(\xi^\nu), & \varphi_i(\xi^\nu), & \end{array}$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем мультииндексы, обозначаемые прописными буквами латинского алфавита (A, B, ...), принимают значения из некоторого множества, включающего в себя скалярные индексы (номера определяющих параметров, номера компонент смеси и т. п.), тензорные индексы (ковариантные, контравариантные и смешанные), а также комбинации скалярных и тензорных индексов. По повторяющимся нижним и верхним мультииндексам подразумевается суммирование.

введенных в предыдущей главе. Отметим, что если известны функции (7.1), то известны и все их производные по координатам ξ^ν, а следовательно, и зависимость от ξ^ν введенных ранее величин

$$g_{\alpha\beta}(\xi^\nu),\quad \mathfrak{e}_\alpha(\xi^\nu),\quad \mathfrak{e}^\alpha(\xi^\nu),\quad \Gamma^\nu_{\alpha\beta}(\xi^\nu); \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{\gamma}^{(2)},\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{e},\ \omega,\ n_i,\ \boldsymbol{I}_i,\ \rho,\ \omega_r,\\ &\nu_i,\ z,\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{M}^{(2)},\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{m},\ \boldsymbol{M}_i^{(2)},\\ &\boldsymbol{p}_i,\ \boldsymbol{m}_i,\ \boldsymbol{F}^{(2)},\ \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{S},\ \sigma,\ \boldsymbol{s}_i,\ \boldsymbol{S}_i,\ \sigma_i, \end{aligned} \tag{7.3}$$

выражающихся через функции (7.1) и их производные (а также через постоянные компоненты $g_{\mu\nu}$ и векторы $\mathfrak{e}_\nu$). Зная закон движения сплошной среды, можно, конечно, найти зависимость параметров (7.2), (7.3) не только от сопутствующих координат ξ^ν, но и от координат x^ν ГСК наблюдателя. Очевидно, что для одних и тех же процессов вид функций (7.1), (7.2) зависит от выбора применяемой ССК ξ^α, однако картина мировых линий сплошной среды и значения параметров (7.3) в точках пространства событий не зависят от выбора ССК ξ^α.

Неоднозначность определяющих параметров. Следует иметь в виду, что, хотя функции (7.1) однозначно определяют соответствующие процессы (движение сплошной среды, диффузию и реакции, электромагнитные процессы, перенос и производство энтропии), обратное не верно. Поясним это на ряде примеров.

Так как сопутствующая координата ξ^0 представляет собой просто параметр точек на мировых линиях сплошной среды и не имеет однозначного физического смысла, то функции

$$x'^\nu(\xi^\nu) = x^\nu(\xi^\alpha,\ \xi'^0(\xi^0,\ \xi^\alpha)), \tag{7.4}$$

получающиеся из функций $x^\nu(\xi^\nu)$ в результате произвольного изменения параметризации точек на мировых линиях $(\xi^0 \to \xi'^0(\xi^0,\ \xi^\alpha))$, описывают то же самое движение сплошной среды, что и функции $x^\nu(\xi^\nu)$. Другими словами, мировые линии сплошной среды, задаваемые функциями $x'^\nu(\xi^\nu)$ и $x^\nu(\xi^\nu)$, совпадают. Заметим также, что производная по собственному времени $d/d\tau$ вдоль мировых линий вообще не зависит от способа параметризации точек на них.

Параметры диффузии и реакций ψ_i^a и χ_r были определены в § 4 с точностью до аддитивных функций от

лагранжевых координат ξ^a, которые постоянны вдоль мировых линий сплошной среды. Поэтому функции $\psi_i'^{\alpha}$, χ_r', определенные равенствами

$$\begin{aligned} &\psi_i'^{a}(\xi^\nu) = \psi_i^a(\xi^\nu) + \psi_{i1}^a(\xi^b), \\ &\psi_i'^{0}(\xi^\nu) = -u^0 u_a \psi_i'^{a}(\xi^\nu), \\ &\chi_r'(\xi^\nu) = \chi_r(\xi^\nu) + \chi_{r1}(\xi^b), \quad \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir}\chi_{r1} = \frac{\partial \psi_{i1}^a}{\partial \xi^a}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

описывают те же самые процессы диффузии и реакции в многокомпонентной среде, что и функции $\psi_i^{\alpha}(\xi^\nu)$, $\chi_r(\xi^\nu)$. В равенствах (7.5) через ψ_{i1}^a и χ_{r1} обозначены любые функции от лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3, не зависящие от ξ^0 и удовлетворяющие последнему соотношению (7.5). Рассуждения, аналогичные проведенным здесь для функций ψ_i^a, χ_r, справедливы также для параметров электрического тока ψ^{α}, параметров переноса и производства энтропии компонент смеси φ_i^{α}, φ_i и параметров переноса и производства энтропии всей смеси в целом φ^{α}, φ.

Компоненты 4-потенциала электромагнитного поля A_α были определены в § 2 и § 5 лишь с точностью до градиентного преобразования (5.37):

$$A'_\alpha(\xi^\nu) = A_\alpha(\xi^\nu) - \partial_\alpha A(\xi^\nu), \tag{7.6}$$

где $A(\xi^\nu)$ — произвольная функция от ξ^ν. Поэтому функции $A'_\alpha(\xi^\nu)$ должны описывать то же самое электромагнитное поле, что и функции $A_\alpha(\xi^\nu)$.

Таким образом, определяющие параметры $\mu^A(\xi^\nu)$, вообще говоря, могут быть подвергнуты преобразованиям (при фиксированных ГСК x^ν и лагранжевых координатах ξ^a), которые не влияют ни на какие физические процессы. Естественно, при решении конкретных задач определяющие параметры могут быть найдены лишь с точностью до указанных преобразований. При этом мировые линии сплошной среды и параметры (7.3), которые, собственно говоря, и являются физическими характеристиками различных процессов, определяются однозначно.

Использование в качестве определяющих параметров неоднозначно определенных функций типа (7.1) обусловлено следующими причинами. Функции из (7.1) или не-

зависимы, или связаны между собой простыми соотношениями

$$\begin{gathered} u_\alpha \psi_i^\alpha = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \psi_i^\alpha = 0, \quad u_\alpha \psi^\alpha = 0, \\ u^\alpha p_\alpha = 0, \quad u^\alpha m_\alpha = 0, \quad u^\alpha p_{i\alpha} = 0, \quad u^\alpha m_{i\alpha} = 0, \\ \psi^\alpha = \sum_{i=1}^{N} e_i \psi_i^\alpha, \quad p_\alpha = \sum_{i=1}^{N} p_{i\alpha}, \quad m_\alpha = \sum_{i=1}^{N} m_{i\alpha}, \\ u_\alpha \varphi^\alpha = 0, \quad u_\alpha \varphi_i^\alpha = 0, \quad \varphi^\alpha = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^\alpha, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Параметры же (7.3) (и (7.2)) выражаются достаточно сложным образом (см. гл. 2) через функции (7.1) и их производные. Поэтому указанные параметры нельзя считать независимыми, а связи между ними имеют сложный дифференциальный характер. Выражения параметров (7.2), (7.3) через функции (7.1) являются общим решением этих связей. При выводе динамических законов из вариационного уравнения независимость определяющих параметров из (7.1) или простой характер связей между ними имеют решающее значение.

Действительные и возможные процессы [1]**.** Определяющие параметры μ^A, описывающие физические процессы, должны удовлетворять некоторым уравнениям. Они выражают динамические законы, которым подчиняются рассматриваемые процессы, называемые в этом случае *действительными*.

Рассмотрим наряду с действительными процессами некоторый содержащий их более широкий класс *возможных процессов*. Так называются процессы, которые удовлетворяют тем же кинематическим соотношениям, что и действительные процессы, но не подчиняются динамическим законам. Возможные процессы описываются определяющими параметрами

$$\tilde{\mu}^A(\xi^\nu) = \mu^A(\xi^\nu) + \delta\mu^A(\xi^\nu),$$

значения которых отличаются на величины $\delta\mu^A(\xi^\nu)$ от значений определяющих параметров, описывающих действительные процессы. Функции $\tilde{\mu}^A(\xi^\nu)$ и $\mu^A(\xi^\nu)$ принадлежат одному и тому же классу функций, так как по определению

---

[1]) Теория, изложенная ниже в настоящей главе, в значительной мере основана на результатах работ [1—21].

они должны удовлетворять одинаковым кинематическим условиям. Функции же $\delta\mu^A(\xi^\nu)$, называемые *вариациями* соответствующих определяющих параметров μ^A, могут принадлежать, вообще говоря, к другому классу функций. Пусть, например, функции $\mu^A(\xi^\nu)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области $\hat{V}^0$ функциями, за исключением некоторой гиперповерхности $\hat{\Sigma}_c^0$, на которой заданы скачки параметров μ^A и их производных $\partial_\alpha\mu^A$. Тогда, очевидно, функции $\delta\mu^A(\xi^\nu)$ должны быть непрерывно дифференцируемыми всюду в области $\hat{V}^0$, включая гиперповерхность $\hat{\Sigma}_c^0$.

Рассмотрим величину G, которая является функцией или функционалом от определяющих параметров μ^A и конечного числа их производных. *Вариацией* δG, соответствующей вариациям $\delta\mu^A$ определяющих параметров μ^A, будем называть главную (т. е. линейную по приращениям $\delta\mu^A$, $\delta\partial_\alpha\mu^A$, $\delta\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A$, ...) часть приращения величины G, соответствующую приращениям $\delta\mu^A$ определяющих параметров μ^A. Для вариаций производных от определяющих параметров по сопутствующим координатам ξ^ν, очевидно, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&\delta\partial_\alpha\mu^A \equiv \partial_\alpha\tilde{\mu}^A - \partial_\alpha\mu^A = \partial_\alpha\delta\mu^A,\\
&\delta\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A = \partial_\alpha\delta\partial_\beta\mu^A = \partial_\alpha\partial_\beta\delta\mu^A,\\
&\delta\partial_{\alpha_1}\dots\partial_{\alpha_n}\mu^A = \dots = \partial_{\alpha_1}\dots\partial_{\alpha_n}\delta\mu^A.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Аналогичные формулы справедливы для любой функции $\mathscr{L}$ от определяющих параметров и их производных

$$\delta\partial_\alpha\mathscr{L} = \partial_\alpha\delta\mathscr{L}, \dots, \delta\partial_{\alpha_1}\dots\partial_{\alpha_n}\mathscr{L} = \partial_{\alpha_1}\dots\partial_{\alpha_n}\delta\mathscr{L}. \tag{7.9}$$

Отметим, что введенные здесь вариации определяющих параметров $\delta\mu^A$ ведут себя при преобразованиях ГСК x^ν и ССК ξ^α так же, как и соответствующие параметры μ^A, т. е. имеют ту же тензорную природу. При этом другие тензорные величины, выражающиеся через определяющие параметры и их производные, при варьировании рассматриваются просто как заданные функции этих параметров и их производных.

Примеры вычисления вариаций некоторых величин через вариации определяющих параметров.

1. *Вариации производных* $dx^\nu/\partial\xi^\alpha \equiv x^\nu_\alpha$, $\partial\xi^\alpha/\partial x^\nu \equiv \xi^\alpha_\nu$. Очевидно, имеют место равенства

$$\delta x^\nu_\alpha = \partial_\alpha\delta x^\nu = x^\lambda_\alpha\partial_\lambda\delta x^\nu.$$

Учитывая соотношения

$$\xi^\alpha_\mu x^\nu_\alpha = \delta^\nu_\mu, \quad \delta\xi^\alpha_\nu x^\nu_\beta + \xi^\alpha_\nu \delta x^\nu_\beta = 0,$$

легко также вычислить вариации величин ξ^α_ν:

$$\delta\xi^\alpha_\nu = -\xi^\alpha_\mu \xi^\beta_\nu \delta x^\mu_\beta = -\xi^\alpha_\mu \partial_\nu \delta x^\mu.$$

Окончательно имеем

$$\delta x^\nu_\alpha = x^\lambda_\alpha \partial_\lambda \delta x^\nu, \quad \delta\xi^\alpha_\nu = -\xi^\alpha_\mu \partial_\nu \delta x^\mu. \tag{7.10}$$

2. *Вариации компонент метрического тензора в ССК* ξ^α. Используя выражения (1.14) для $g_{\alpha\beta}$ и (7.10) для δx^ν_α найдем, что [1])

$$\delta g_{\alpha\beta} = \delta\left(g_{\mu\nu} x^\mu_\alpha x^\nu_\beta\right) = g_{\mu\nu}\left(x^\lambda_\alpha x^\nu_\beta \partial_\lambda \delta x^\mu + x^\mu_\alpha x^\lambda_\beta \partial_\lambda \delta x^\nu\right) = \\ = \nabla_\alpha \delta x_\beta + \nabla_\beta \delta x_\alpha = \nabla_{\langle\alpha} \delta x_{\beta\rangle}.$$

Здесь

$$\delta x_\alpha = x^\mu_\alpha \delta x_\mu, \quad \delta x_\mu = g_{\mu\nu}\delta x^\nu, \\ \delta x^\alpha = g^{\alpha\beta}\delta x_\beta = \xi^\alpha_\nu \delta x^\nu. \tag{7.11}$$

Используя равенства

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} = \delta^\nu_\alpha, \quad \delta g_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} + g_{\alpha\beta}\delta g^{\beta\nu} = 0,$$

легко вычислить вариации $\delta g^{\alpha\beta}$:

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\nu} g^{\beta\delta} \delta g_{\nu\delta} = -\left(\nabla^\alpha \delta x^\beta + \nabla^\beta \delta x^\alpha\right) = -\nabla^{\langle\alpha} \delta x^{\beta\rangle}.$$

Окончательно имеем

$$\delta g_{\alpha\beta} = \nabla_{\langle\alpha} \delta x_{\beta\rangle}, \quad \delta g^{\alpha\beta} = -\nabla^{\langle\alpha} \delta x^{\beta\rangle}. \tag{7.12}$$

3. *Вариация величины* $\sqrt{-g}$. Учитывая выражение (7.12) для $\delta g_{\alpha\beta}$ и определение (1.15) компонент $g^{\alpha\beta}$, получим

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = \\ = -\frac{g g^{\alpha\beta}}{2\sqrt{-g}} \nabla_{\langle\alpha} \delta x_{\beta\rangle} = \sqrt{-g}\, \nabla_\alpha \delta x^\alpha.$$

Используя затем тождество (1.35), окончательно имеем

$$\delta\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\, \nabla_\alpha \delta x^\alpha = \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, \delta x^\alpha\right). \tag{7.13}$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем угловые и квадратные скобки в тензорных индексах обозначают соответственно операции симметризации и антисимметризации по индексам, заключенным в указанные скобки. Например, $a^{\langle\alpha} b^{\beta\rangle\nu} \equiv a^\alpha b^{\beta\nu} + a^\beta b^{\alpha\nu}$, $a^{[\alpha} b^{\beta]\nu} \equiv a^\alpha b^{\beta\nu} - a^\beta b^{\alpha\nu}$.

4. *Вариации символов Кристоффеля для ССК* ξ^α. Используя выражение (1.30) для $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$, найдем, что

$$\delta\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \delta\left(\xi^\nu_\nu \partial_\alpha x^\nu_\beta\right) = \delta\xi^\nu_\nu \partial_\alpha x^\nu_\beta + \xi^\nu_\nu \partial_\alpha \delta x^\nu_\beta =$$
$$= -\xi^\nu_\mu \partial_\nu \delta x^\mu \partial_\alpha x^\nu_\beta + \xi^\nu_\nu \partial_\alpha\left(x^\lambda_\beta \partial_\lambda \delta x^\nu\right) =$$
$$= \xi^\nu_\nu x^\lambda_\beta \partial_\alpha \partial_\lambda \delta x^\nu = \xi^\nu_\nu x^\lambda_\beta x^\mu_\alpha \partial_\mu \partial_\lambda \delta x^\nu = \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta x^\nu.$$

Окончательно получим

$$\delta\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta x^\nu. \tag{7.14}$$

5. *Вариации компонент 4-скорости сплошной среды в ССК* ξ^α. Учитывая формулы (3.8) для компонент 4-скорости u^α, u_α и формулу (7.12) для вариаций $\delta g_{\alpha\beta}$, легко вычислить вариации δu^α, δu_α:

$$\delta u^\alpha = \delta\left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\delta^\alpha_0\right) = -\frac{\delta^\alpha_0 \delta g_{00}}{2g_{00}\sqrt{g_{00}}} = -\frac{u^\alpha}{2g_{00}}\delta^\beta_0 \delta^\nu_0 \delta g_{\beta\nu} =$$
$$= -\frac{1}{2} u^\alpha u^\beta u^\nu \nabla_{\langle\beta} \delta x_{\nu\rangle} = -u^\alpha u^\beta u^\nu \nabla_\beta \delta x_\nu,$$

$$\delta u_\beta = \delta\left(g_{\beta\alpha} u^\alpha\right) = \delta g_{\beta\alpha} u^\alpha + g_{\beta\alpha}\delta u^\alpha = u^\alpha \nabla_{\langle\alpha} \delta x_{\beta\rangle} -$$
$$- g_{\beta\alpha} u^\alpha u^\delta u^\nu \nabla_\delta \delta x_\nu = \left(u^{\langle\alpha}\delta^{\nu\rangle}_\beta - u_\beta u^\alpha u^\nu\right)\nabla_\alpha \delta x_\nu.$$

Окончательно получаем

$$\delta u^\alpha = -u^\alpha u^\beta u^\nu \nabla_\beta \delta x_\nu, \quad \delta u_\alpha = \left(u^{\langle\beta}\delta^{\nu\rangle}_\alpha - u_\alpha u^\beta u^\nu\right)\nabla_\beta \delta x_\nu. \tag{7.15}$$

Вариационное уравнение Л. И. Седова. В качестве основного динамического закона, которому подчиняются все действительные процессы, примем предложенный Л. И. Седовым [2—4, 11, 12] принцип, обобщающий принцип экстремального действия. Последний, как известно, заключается в том, что на некотором множестве возможных процессов физической системы существует скалярный функционал I, называемый действием, который для действительных процессов из этого множества имеет экстремальное значение. Отсюда следует, что вариация действия δI на действительных процессах обращается в нуль:

$$\delta I = 0. \tag{7.16}$$

Оказывается, однако, что в такой формулировке принцип экстремального действия не справедлив для действительных необратимых процессов и при наличии внешних воздействий. Кроме того, для учета разрывных процессов и процессов на границах в выражение для функционала I

необходимо, вообще говоря, включать сингулярную часть, что не всегда удобно. Поэтому Л. И. Седов [2—4, 11, 12] предложил принцип, согласно которому на действительных процессах в самом общем случае справедливо вариационное уравнение

$$\delta I + \delta W^* + \delta W = 0. \tag{7.17}$$

В этом уравнении I — действие, которое предполагается определенным для любых возможных процессов; δW^* — некоторый задаваемый скалярный функционал от определяющих параметров и их вариаций, учитывающий процессы, для которых не существует голономного вариационного уравнения (7.16); δW — скалярный функционал от значений определяющих параметров и их вариаций на разрывах и границах, который находится из вариационного уравнения (7 17) Чтобы получить динамические законы, выполняющиеся для действительных процессов на разрывах и границах, необходимо задать функционал δW дополнительно к уравнению (7.17) Очевидно, что функционалы δW^*, δW должны быть линейны по вариациям определяющих параметров. Подчеркнем, что задание функционалов I, δW^*, δW фиксирует рассматриваемую систему и внешние воздействия на нее

Выражения для функционалов I, δW^*. В дальнейшем будем рассматривать только такие модели сплошных сред, для которых действие I и функционал δW^* можно представить в виде [1])

$$I = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \Lambda \sqrt{-g}\, d^4\xi, \quad \Lambda = \Lambda(\mu^A, \partial_\alpha \mu^A, \partial_\alpha \partial_\beta \mu^A, \varkappa_B), \tag{7.18}$$

$$\delta W^* = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \delta w^*\, d^4\xi, \tag{7.19}$$

$$\delta w^* = [M_A\, \delta\mu^A + M_A^\alpha\, \delta(\partial_\alpha \mu^A) + M_A^{\alpha\beta}\, \delta(\partial_\alpha \partial_\beta \mu^A)] \sqrt{-g}.$$

Здесь $\varkappa_B(\xi^\alpha)$ — известные функции от лагранжевых координат ξ^α, которые постоянны вдоль мировых линий сплошной среды

$$\partial \varkappa_B / \partial \xi^0 = 0. \tag{7.20}$$

[1]) Коэффициент $1/c$ введен в выражения (7.18), (7.19) в связи с тем, что элемент четырехмерного объема содержит множитель c: $\sqrt{-g}\, d^4\xi = d^4x = c\, dt\, dx^1\, dx^2\, dx^3$. При этом функции Λ, $\delta w^*/\sqrt{-g}$ имеют размерность плотности энергии, а функционалы I, δW^* — размерность действия (энергия × время).

Функции $\varkappa_B(\xi^\alpha)$ представляют собой различные заданные характеристики сплошной среды или физические постоянные. Среди них могут присутствовать, например, компоненты пространственного метрического тензора $\mathring{\gamma}_{\alpha\beta}$ в недеформированном состоянии (см. § 4).

Функции $\mu^A(\xi^\nu)$, $\varkappa_B(\xi^\nu)$ определены в области $\hat{V}^0$ из пространства переменных ξ^ν, представляющей собой множество значений сопутствующих координат. Всюду в области $\hat{V}^0$, за исключением некоторой гиперповерхности $\hat{\Sigma}_c^0$, параметры $\mu^A(\xi^\nu)$, $\varkappa_B(\xi^\nu)$ предполагаются достаточно гладкими функциями, т. е. имеющими число непрерывных производных, необходимое для справедливости проводимых рассуждений. У различных определяемых параметров это число, конечно, может быть различным. Гиперповерхность $\hat{\Sigma}_c^0$ называется *разрывом* или *скачком*. С разных сторон гиперповерхности $\hat{\Sigma}_c^0$ значения определяющих параметров и их производных, вообще говоря, различны, а на самой гиперповерхности $\hat{\Sigma}_c^0$ они в этом случае не определены. Поэтому условно можно считать, что гиперповерхность разрыва $\hat{\Sigma}_c^0$ имеет две стороны, а именно $\hat{\Sigma}_+^0$ и $\hat{\Sigma}_-^0$, геометрически совпадающие с $\hat{\Sigma}_c^0$, причем на каждой стороне значения определяющих параметров и их производных определены как предельные значения при подходе к $\hat{\Sigma}_c^0$ с соответствующей стороны.

Скалярная функция Λ, называемая *лагранжианом*, является одной из основных характеристик сплошной среды и должна задаваться на основании физических гипотез и изучения свойств среды. Коэффициенты при вариациях в выражении (7.19) для функции δw^* характеризуют необратимость процессов и внешние воздействия. Они зависят от тех же аргументов, что и функция Λ в (7.18). Эта зависимость во многих случаях может быть конкретизирована при помощи общей теории необратимых процессов Онзагера (когда нет внешних воздействий, см. § 12). Всюду в области $\hat{V}^0$ лагранжиан Λ и коэффициенты M_A, M_A^α, $M_A^{\alpha\beta}$ при вариациях в выражении (7.19) для δw^* предполагаются достаточно гладкими функциями своих аргументов.

Интегрирование в выражениях (7.18), (7.19) для функционалов I, δW^* производится по области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$. Здесь через $\hat{V}$ обозначена любая область, принадлежащая мно-

жеству значений сопутствующих координат $\hat{V}^0$, а через $\hat{\Sigma}_c$ — часть гиперповерхности $\hat{\Sigma}_c^0$, принадлежащая $\hat{V}$. Область $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$ получается из области $\hat{V}$ путем исключения значений координат $(\xi^0, \ldots, \xi^3)$, принадлежащих гиперповерхности $\hat{\Sigma}_c$. Вариация δ — это вариация при постоянных значениях сопутствующих координат ξ^ν, которая была определена в настоящем параграфе.

Функции $x^\nu(\xi^\alpha)$, задающие при фиксированных ξ^a мировую линию частицы сплошной среды с лагранжевыми координатами ξ^a, ставят в соответствие каждому набору значений сопутствующих координат ξ^α точку в пространстве событий Минковского, имеющую относительно выбранной ГСК координаты $x^\nu(\xi^\alpha)$ В результате множествам $\hat{V}^0$, $\hat{V}$, $\partial\hat{V}$, $\hat{\Sigma}_c^0$, $\hat{\Sigma}_c$ значений сопутствующих координат соответствуют в пространстве событий четырехмерные области V^0, V и гиперповерхности ∂V, Σ_c^0, Σ_c. Очевидно, что гиперповерхность ∂V является границей области V, которая принадлежит области V^0. Гиперповерхность разрыва Σ_c^0 содержится в этой области, причем условно можно считать, что в пространстве событий гиперповерхность разрыва Σ_c^0 имеет две стороны $\Sigma_{c\pm}^0$, соответствующие сторонам $\hat{\Sigma}_{c\pm}^0$ гиперповерхности $\hat{\Sigma}_c^0$ в пространстве переменных ξ^α. Множество $\hat{V}^0$ значений ξ^α образует в области V^0 сопутствующую систему координат. Поэтому встречающиеся здесь и ниже интегралы по области $\hat{V}$ и по гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm$ можно рассматривать как записанные относительно СКК ξ^α интегралы по области V и по гиперповерхности $\partial V + \Sigma_\pm$ в пространстве событий. Указанные интегралы можно также записать относительно выбранной ГСК x^ν. В связи с этим следует помнить, что из определения вариации δ вытекают соотношения $\delta\hat{V} = 0$, $\delta V \neq 0$, $\delta\hat{\Sigma}_c = 0$, $\delta\Sigma_c \neq 0$.

В следующих главах будет показано, что на основе вариационного уравнения (7.17) и выражений (7.18), (7.19) для I и δW^* можно построить различные релятивистские модели (в том числе и известные), описывающие движение сплошных сред с учетом таких внутренних процессов, как перенос и производство энтропии, электромагнитные процессы или диффузия и реакции в многокомпонентных смесях.

§ 8. Уравнения для непрерывных процессов

Вариация действия. Учитывая очевидное равенство

$$\delta d^4\xi = 0, \tag{8.1}$$

вычислим вариацию действия

$$\delta I = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\mu^A}\delta\mu^A + \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\alpha\mu^A}\delta\partial_\alpha\mu^A + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A}\delta\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A\right]d^4\xi. \tag{8.2}$$

При вычислении фигурирующих в этом соотношении производных от функции $\sqrt{-g}\,\Lambda$ необходимо иметь в виду следующее. Не все аргументы функции $\sqrt{-g}\,\Lambda$, вообще говоря, можно считать независимыми, так как на определяющие параметры μ^A могут быть наложены связи. Например, если определяющие параметры μ^A представляют собой функции (7.1), то они должны удовлетворять соотношениям (7.7), в которых компоненты u^α, u_α выражаются через производные от входящих в набор определяющих параметров функций $x^\nu(\xi^\alpha)$:

$$u^\alpha = \delta^\alpha_0/\sqrt{g_{\mu\nu}x^\mu_0 x^\nu_0}, \qquad u_\alpha = g_{\mu\nu}x^\mu_\alpha x^\nu_\beta u^\beta,$$

где $x^\mu_\alpha = \partial x^\mu/\partial\xi^\alpha$, $x^\mu_0 = \partial x^\mu/\partial\xi^0$.

Поэтому смысл частных производных от функции $\sqrt{-g}\,\Lambda$ по ее аргументам необходимо уточнить. Для этого рассмотрим в пространстве аргументов функции $\sqrt{-g}\,\Lambda$ множество $\mathscr{A}$, которому должны принадлежать значения аргументов $\sqrt{-g}\,\Lambda$, когда определяющие параметры μ^A удовлетворяют наложенным на них связям. Функция $\sqrt{-g}\,\Lambda$ по своему смыслу определена только на множестве $\mathscr{A}$. Продолжим ее достаточно гладко с множества $\mathscr{A}$ на некоторую его окрестность, в которой приращения всех аргументов $\sqrt{-g}\,\Lambda$ можно выбирать независимым образом, если считать сами аргументы независимыми. Тогда частные производные от $\sqrt{-g}\,\Lambda$ определяются обычным образом, как если бы аргументы $\sqrt{-g}\,\Lambda$ были независимы.

Преобразование выражений для функционалов δI и δW*. Используя формулы (7.8) для вариаций производных от определяющих параметров μ^A и выделяя дивер-

гентную часть в выражениях (8.2) и (7.19) для вариации действия δI и функционала δW^*, запишем их в следующей форме:

$$\delta I = \delta_V I + \delta_\Sigma I, \qquad \delta W^* = \delta_V W^* + \delta_\Sigma W^*, \tag{8.3}$$

$$\delta_V I = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \frac{\delta \sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta \mu^A}\, \delta\mu^A\, d^4\xi,$$

$$\delta_\Sigma I = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \partial_\alpha \sqrt{-g}\, \delta\Lambda^\alpha\, d^4\xi, \tag{8.4}$$

$$\frac{\delta \sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta \mu^A} = \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \mu^A} - \partial_\alpha \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\alpha \mu^A} + \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\alpha \partial_\beta \mu^A}, \tag{8.5}$$

$$\sqrt{-g}\,\delta\Lambda^\alpha = \left(\frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\alpha \mu^A} - \partial_\beta \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\beta \partial_\alpha \mu^A}\right) \delta\mu^A + \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\alpha \partial_\beta \mu^A}\, \partial_\beta\, \delta\mu^A, \tag{8.6}$$

$$\delta_V W^* = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \frac{\delta w^*}{\delta \mu^A}\, \delta\mu^A\, d^4\xi,$$

$$\delta_\Sigma W^* = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \partial_\alpha \sqrt{-g}\, \delta w^{*\alpha}\, d^4\xi, \tag{8.7}$$

$$\frac{\delta w^*}{\delta \mu^A} = \sqrt{-g}\, M_A - \partial_\alpha \sqrt{-g}\, M_A^\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta \sqrt{-g}\, M_A^{\alpha\beta}, \tag{8.8}$$

$$\sqrt{-g}\,\delta w^{*\alpha} = \left(\sqrt{-g}\, M_A^\alpha - \partial_\beta \sqrt{-g}\, M_A^{\beta\alpha}\right) \delta\mu^A + \sqrt{-g}\, M_A^{\alpha\beta} \partial_\beta\, \delta\mu^A. \tag{8.9}$$

Отметим, что процедура выделения дивергентных частей $\delta_\Sigma I$, $\delta_\Sigma W^*$ из функционалов δI, δW^* не определяет однозначно коэффициентов при вариациях $\delta\mu^A$ и их производных $\partial_\alpha\, \delta\mu^A$ в формулах (8.6), (8.9) для функций $\delta\Lambda^\alpha$, $\delta w^{*\alpha}$, хотя сами функционалы $\delta_\Sigma I$, $\delta_\Sigma W^*$, конечно, определяются однозначно. Действительно, к правой части равенства (8.2), определяющего функционал δI, всегда можно прибавить тождественно равный нулю функционал

$$\delta\Omega = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \partial_\alpha \partial_\beta \left(\sqrt{-g}\, \Omega_A^{\alpha\beta} \delta\mu^A\right) d^4\xi \equiv 0, \tag{8.10}$$

в котором $\Omega_A^{\alpha\beta} = -\Omega_A^{\beta\alpha}$ — любые антисимметричные по

индексам α, β дважды дифференцируемые функции от любых аргументов. Например, они могут зависеть от тех же аргументов, что и функция Λ. В результате к функциям $\sqrt{-g}\,\delta\Lambda^\alpha$ добавятся, вообще говоря, не равные нулю слагаемые $\sqrt{-g}\,\delta\Omega^\alpha$:

$$\sqrt{-g}\,\delta\Omega^\alpha = \partial_\beta\left(\sqrt{-g}\,\Omega_A^{\alpha\beta}\,\delta\mu^A\right) = \\ = \left(\partial_\beta\sqrt{-g}\,\Omega_A^{\alpha\beta}\right)\delta\mu^A + \sqrt{-g}\,\Omega_A^{\alpha\beta}\partial_\beta\,\delta\mu^A.$$

И следовательно, коэффициенты при вариациях $\delta\mu^A$ и их производных $\partial_\beta\,\delta\mu^A$ в выражении (8.6) для $\sqrt{-g}\,\delta\Lambda^\alpha$ изменятся. Аналогичную процедуру, очевидно, можно проделать для функционала δW^* и функций $\sqrt{-g}\,\delta w^{*\alpha}$.

На основании формулы Остроградского — Гаусса (1.45) выражения (8.4), (8.7) для дивергентных частей $\delta_\Sigma I$, $\delta_\Sigma W^*$ вариации действия и функционала δW^* представляются в виде

$$\delta_\Sigma I = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\delta\Lambda^\alpha l_\alpha\,d^3\zeta, \\ \delta_\Sigma W^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\delta w^{*\alpha} l_\alpha\,d^3\zeta. \tag{8.11}$$

Аналогичным образом можно преобразовать выражение (8.10) для тождественно равного нулю функционала $\delta\Omega$:

$$\delta\Omega = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\delta\Omega^\alpha l_\alpha\,d^3\zeta = \\ = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\sqrt{-g}\,\Omega_A^{\alpha\beta}\right)\delta\mu^A + \Omega_A^{\alpha\beta}\partial_\beta\,\delta\mu^A\right] l_\alpha\,d^3\zeta. \tag{8.12}$$

Здесь интегрирование производится по гиперповерхности $\partial\hat{V}$, ограничивающей область $\hat{V}$, и по гиперповерхностям $\hat{\Sigma}_+$, $\hat{\Sigma}_-$, представляющим собой две стороны участка гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c^0$, принадлежащего области $\hat{V}$. Очевидно, гиперповерхность $\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm$ является границей области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$. Положение гиперповерхностей $\partial\hat{V}$, $\hat{\Sigma}_+$, $\hat{\Sigma}_-$ в пространстве ξ^α задается при помощи функций

$$\xi^\alpha = f^\alpha(\zeta^k), \qquad \xi^\alpha = f_\pm^\alpha(\zeta^k), \tag{8.13}$$

определенных в некоторой области пространства переменных ζ^k ($k=1, 2, 3$). Через $d^3\zeta$ в равенствах (8.11), (8.12) обозначено произведение $d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3$. Компоненты l_α вычисляются по формулам (1.38):

$$l_\alpha = -\,e_{\alpha\beta\gamma\delta} f^\beta_{(1)} f^\gamma_{(2)} f^\delta_{(3)}, \qquad (8.14)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g}\, e_{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad f^\alpha_{(k)} = \partial f^\alpha / \partial \zeta^k,$$

где $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — полностью антисимметричные символы Леви-Чивита ($e_{0123} = -1$).

Система координат ζ^k на гиперповерхностях $\partial\hat{V}$, $\hat{\Sigma}_+$, $\hat{\Sigma}_-$ предполагается выбранной так, что для компонент l_α выполняется неравенство (1.47). Фигурирующие в этом неравенстве компоненты $d\xi^\alpha$ определены на гиперповерхностях $\hat{\Sigma}_+$, $\hat{\Sigma}_-$ так, что изменение координат точек гиперповерхности $\hat{\Sigma}_-$ на величины $d\xi^\alpha$ смещает их в сторону $\hat{\Sigma}_+$ и, наоборот, изменение координат точек гиперповерхности $\hat{\Sigma}_+$ на $d\xi^\alpha$ смещает их в сторону $\hat{\Sigma}_-$.

Подчеркнем, что все величины, входящие в подынтегральные выражения в равенствах (8.11), (8.12), в том числе вариации определяющих параметров и компоненты l_α, вообще говоря, различны на двух сторонах ($\hat{\Sigma}_+$, $\hat{\Sigma}_-$) гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$.

Связи. Как уже отмечалось выше, на определяющие параметры μ^A могут быть наложены связи. Например, определяющие параметры (7.1) должны удовлетворять соотношениям (7.7). Эти соотношения носят кинематический характер и, следовательно, должны выполняться также и для возможных процессов. Поэтому равенства (7.7) останутся в силе, если от обеих частей их взять вариацию δ. Вычисляя эти вариации с помощью выражений (7.15) для δu^α, δu_β и учитывая также сами равенства (7.7), получим, например, следующие соотношения:

$$\delta(u_\alpha \psi^\alpha_i) = \delta u_\alpha \psi^\alpha_i + u_\alpha \delta\psi^\alpha_i = (u^\beta \nabla_\alpha \delta x_\beta - u^\delta \gamma^\gamma_\alpha \nabla_\delta \delta x_\gamma)\psi^\alpha_i + u_\alpha \delta\psi^\alpha_i = (\psi^\alpha_i u^\beta + \psi^\beta_i u^\alpha)\nabla_\alpha \delta x_\beta + u_\alpha \delta\psi^\alpha_i,$$

$$\delta(u^\alpha p_{i\alpha}) = -(u^\alpha u^\beta u^\gamma \nabla_\beta \delta x_\gamma) p_{i\alpha} + u^\alpha \delta p_{i\alpha} = u^\alpha \delta p_{i\alpha},$$

причем

$$\nabla_\alpha \delta x_\beta = x^\mu_\alpha x^\nu_\beta g_{\nu\lambda} \partial_\mu \delta x^\lambda. \qquad (8.15)$$

Аналогично вычисляются вариации левых и правых частей других равенств из (7.7). В результате найдем,

что связи (7.7) приводят к следующим соотношениям для вариаций определяющих параметров (7.1):

$$
\begin{gathered}
u^{\langle\alpha}\psi_i^{\beta\rangle}\nabla_\alpha\,\delta x_\beta + u_\alpha\,\delta\psi_i^\alpha = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i\,\delta\psi_i^\alpha = 0, \\
u^{\langle\alpha}\psi^{\beta\rangle}\nabla_\alpha\,\delta x_\beta + u_\alpha\,\delta\psi^\alpha = 0, \quad u^\alpha\,\delta p_\alpha = 0, \\
u^\alpha\,\delta m_\alpha = 0, \quad u^\alpha\,\delta p_{i\alpha} = 0, \quad u^\alpha\,\delta m_{i\alpha} = 0, \\
\delta\psi^\alpha = \sum_{i=1}^{N} e_i\,\delta\psi_i^\alpha, \quad \delta p_\alpha = \sum_{i=1}^{N}\delta p_{i\alpha}, \quad \delta m_\alpha = \sum_{i=1}^{N}\delta m_{i\alpha}, \\
u^{\langle\alpha}\varphi^{\beta\rangle}\nabla_\alpha\,\delta x_\beta + u_\alpha\,\delta\varphi^\alpha = 0, \\
u^{\langle\alpha}\varphi_i^{\beta\rangle}\nabla_\alpha\,\delta x_\beta + u_\alpha\,\delta\varphi_i^\alpha = 0, \\
\delta\varphi^\alpha = \sum_{i=1}^{N}\delta\varphi_i^\alpha, \quad \delta\varphi = \sum_{i=1}^{N}\delta\varphi_i.
\end{gathered}
\tag{8.16}
$$

В общем случае для произвольных определяющих параметров μ^A будем рассматривать *связи*, задаваемые равенствами

$$R^B(\mu^A,\ \partial_\alpha\mu^A) = 0, \tag{8.17}$$

в которых R^B — достаточно гладкие функции указанных аргументов. Связи (8.17) должны выполняться и для всех возможных процессов. Поэтому вариации левых частей равенств (8.17) также равны нулю. Вычисляя их с учетом перестановочности операций δ и ∂_α, получим следующие соотношения:

$$R_A^B\,\delta\mu^A + R_A^{\alpha B}\,\partial_\alpha\,\delta\mu^A = 0, \tag{8.18}$$

в которых $R_A^B = \partial R^B/\partial\mu^A$, $R_A^{\alpha B} = \partial R^B/\partial\partial_\alpha\mu^A$.

Очевидно, что при надлежащем выборе параметров μ^A и функций R^B равенства (8.16) могут быть получены из соотношений (8.18) с учетом формул (8.15) и (8.17).

Для учета связей (8.18) в вариационном уравнении (7.17) используем известный метод неопределенных множителей Лагранжа. Следуя этому методу, умножим равенства (8.18) на неопределенные множители $\lambda_B(\xi^\nu)$, которые, вообще говоря, являются функциями от координат ξ^ν. Просуммируем затем полученные равенства по мультииндексу B и проинтегрируем по области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$. В результате получим соотношение, которое можно

записать так:

$$\delta R \equiv \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \lambda_B \left(R_A^B \delta\mu^A + R_A^{\alpha B} \partial_\alpha \delta\mu^A\right) \sqrt{-g}\, d^4\xi = 0. \quad (8.19)$$

Проинтегрируем член, содержащий производные $\partial_\alpha \delta\mu^A$, по частям с помощью формулы Остроградского — Гаусса (1.45):

$$\frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \lambda_B R_A^{\alpha B} \partial_\alpha \delta\mu^A \sqrt{-g}\, d^4\xi =$$

$$= \frac{1}{c} \int\limits_{\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm} \left(\lambda_B R_A^{\alpha B} \delta\mu^A l_\alpha\right) d^3\zeta -$$

$$- \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \left(\partial_\alpha \sqrt{-g}\, \lambda_B R_A^{\alpha B}\right) \delta\mu^A\, d^4\xi.$$

После этого равенство (8.19) примет вид

$$\delta R \equiv \delta_V R + \delta_\Sigma R = 0, \quad (8.20)$$

где введены обозначения

$$\delta_V R = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \frac{\delta r}{\delta\mu^A} \delta\mu^A\, d^4\xi,$$

$$\delta_\Sigma R = \frac{1}{c} \int\limits_{\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm} \delta r^\alpha l_\alpha\, d^3\zeta; \quad (8.21)$$

$$\frac{\delta r}{\delta\mu^A} = \sqrt{-g}\, \lambda_B R_A^B - \partial_\alpha \sqrt{-g}\, \lambda_B R_A^{\alpha B},$$

$$\delta r^\alpha = \lambda_B R_A^{\alpha B} \delta\mu^A. \quad (8.22)$$

Прибавим теперь к левой части вариационного уравнения (7.17) выражение для функционала δR, который для всех возможных процессов должен быть равен нулю. В результате получим следующее уравнение:

$$\delta I + \delta W^* + \delta W + \delta R = 0. \quad (8.23)$$

Динамические уравнения для непрерывных процессов. Из вариационного уравнения (8.23) можно получить динамические уравнения, описывающие процессы, непрерывные в области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$. Для этого рассмотрим вариации определяющих параметров $\delta\mu^A(\xi^\gamma)$, равные нулю вместе со своими

первыми производными $\partial_\alpha \delta\mu^A$ на гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_{\pm}$, представляющей собою границу области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$:

$$\delta\mu^A(\xi^\nu) = 0, \quad \partial_\alpha \delta\mu^A(\xi^\nu) = 0, \quad \xi \in \partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_{\pm}. \tag{8.24}$$

Тогда на основании выражений (8.11), (8.21) для поверхностных частей $\delta_\Sigma I$, $\delta_\Sigma W^*$, $\delta_\Sigma R$ функционалов δI, δW^*, δR и соотношений (8.6), (8.9), (8.22), (8.24) поверхностные части указанных функционалов равны нулю:

$$\delta_\Sigma I = 0, \quad \delta_\Sigma W^* = 0, \quad \delta_\Sigma R = 0. \tag{8.25}$$

Поэтому, согласно выражениям (8.3), (8.20), для функционалов δI, δW^*, δR они сводятся к своим объемным частям

$$\delta I = \delta_V I, \quad \delta W^* = \delta_V W^*, \quad \delta R = \delta_V R. \tag{8.26}$$

Функционал δW находится из уравнения (8.23) при не равных нулю на границе области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$ вариациях определяющих параметров $\delta\mu^A$ и их производных $\partial_\alpha \delta\mu^A$. Если же на границе области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$ вариации определяющих параметров и их производные обращаются в нуль, то функционал δW по определению равен нулю. Поэтому на основании равенств (8.26) вариационное уравнение (8.23) для вариаций определяющих параметров, удовлетворяющих условиям (8.18), принимает вид

$$\delta_V I + \delta_V W^* + \delta_V R = 0. \tag{8.27}$$

Подставим в это уравнение выражения (8.4), (8.7), (8.21) для функционалов $\delta_V I$, $\delta_V W^*$, $\delta_V R$:

$$\frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \left(\frac{\delta \sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\mu^A} + \frac{\delta w^*}{\delta\mu^A} + \frac{\delta r}{\delta\mu^A} \right) \delta\mu^A \, d^4\xi = 0. \tag{8.28}$$

Присутствующие здесь в скобках слагаемые $\delta\sqrt{-g}\,\Lambda/\delta\mu^A$, $\delta w^*/\delta\mu^A$, $\delta r/\delta\mu^A$ определены равенствами (8.5), (8.8), (8.22).

Вариации определяющих параметров $\delta\mu^A$ не все являются независимыми, так как они должны удовлетворять связям (8.18). Пусть эти связи таковы, что часть вариаций определяющих параметров можно считать независимыми, а остальные вариации могут быть выражены в конечном виде через указанные независимые вариации и их производные при помощи соотношений (8.18). Именно такого типа связи будут рассматриваться в следующих главах при изучении конкретных моделей сплошных сред.

К нему относятся и связи (8.16), для которых с учетом формулы (8.15) независимыми можно считать, например, вариации

$$\delta x^{\lambda},\ \delta\psi_j^a,\ \delta\chi_r,\ \delta p_{ia},\ \delta m_{ia},\ \delta\varphi_i^a,\ \delta\varphi_i,$$

где $j=1, \ldots, N-1$; $i=1, \ldots, N$; $r=1, \ldots, R$; $a=1, 2, 3$.

Остальные вариации:

$$\delta\psi_i^0,\ \delta\psi_N^{\alpha},\ \delta p_{i0},\ \delta m_{i0},\ \delta p_{\alpha},\ \delta m_{\alpha},\ \delta\varphi_i^0,\ \delta\varphi^{\alpha},\ \delta\varphi$$

выражаются при помощи соотношений (8.16), (8.15) через указанные независимые вариации и производные $\partial_{\alpha}\delta x^{\nu} = x_{\alpha}^{\mu}\,\partial_{\mu}\delta x^{\nu}$.

Выберем неопределенные множители Лагранжа λ_B так, чтобы в уравнении (8.28) коэффициенты при зависимых вариациях определяющих параметров, т. е. выражения в скобках, обратились в нуль [1]). Тогда из уравнения (8.28) следует, что коэффициенты при оставшихся независимых вариациях определяющих параметров также должны быть равны нулю. Таким образом, получаем, что при всех значениях мультииндекса B для достаточно гладких действительных процессов в области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$ должны выполняться уравнения

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\mu^A}+\frac{\delta\omega^*}{\delta\mu^A}+\frac{\delta r}{\delta\mu^A}=0. \tag{8.29}$$

Входящие в них слагаемые определяются равенствами (8.5), (8.8), (8.22).

Уравнения (8.29) являются динамическими уравнениями и называются *уравнениями Эйлера* для вариационного уравнения (8.23). Из них следует, что для значений определяющих параметров, соответствующих действительным процессам, соотношение (8.28) (или эквивалентное ему соотношение (8.27)) выполняется при любых значениях $\delta\mu^A$, возможно и не удовлетворяющих условиям (8.18).

Выражение для функционала δW. Из вариационного уравнения (8.23) можно найти также функционал δW для значений определяющих параметров, соответствующих действительным процессам, и для вариаций определяющих параметров около этих значений.

---

[1]) При сделанном выше предположении о разрешимости связей (8.18) относительно независимых вариаций и их производных всегда можно выбрать множители λ_B, как здесь указано.

Рассмотрим вариации определяющих параметров, отличные от нуля на границе области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$, т. е. на гиперповерхности $\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}$. Подставляя в уравнение (8.23) выражения (8.3), (8.20) для функционалов δI, δW^*, δR, приведем его к виду

$$\delta_V I+\delta_\Sigma I+\delta_V W^*+\delta_\Sigma W^*+\delta W+\delta_V R+\delta_\Sigma R=0.$$

Учитывая затем, что для значений определяющих параметров, соответствующих действительным процессам, при любых вариациях $\delta\mu^A$ выполняется соотношение (8.27), получим следующее равенство:

$$\delta_\Sigma I+\delta_\Sigma W^*+\delta_\Sigma R+\delta W=0.$$

Подставив в него выражения (8.11), (8.21) для функционалов $\delta_\Sigma I$, $\delta_\Sigma W^*$, $\delta_\Sigma R$, получим следующую формулу для функционала δW:

$$\delta W=-\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}}(\delta\Lambda^\alpha+\delta w^{*\alpha}+\delta r^\alpha)\,l_\alpha\,d^3\zeta. \qquad (8.30)$$

Присутствующие здесь под знаком интеграла величины $\delta\Lambda^\alpha$, $\delta w^{*\alpha}$, δr^α определены равенствами (8.6), (8.9), (8.22), причем входящие в них функции $\mu^A(\xi^\gamma)$ должны удовлетворять уравнениям Эйлера (8.29).

Подчеркнем, что полученные выше динамические уравнения для непрерывных процессов не определяют однозначно лагранжиан. Действительно, добавление к лагранжиану величины $\nabla_\alpha\Omega^\alpha$, где Ω^α — произвольные дифференцируемые функции от определяющих параметров, не дает вклада в вариацию $\delta_V I$ и, следовательно, не влияет на уравнения (8.29). Функционалы же $\delta_\Sigma I$ и δW при этом изменяются.

§ 9. Условия на разрывах и границах

Неоднозначность коэффициентов при вариациях определяющих параметров и их производных в выражении для функционала δW. Подставляя выражения (8.6), (8.9), (8.22) для величин $\delta\Lambda^\alpha$, $\delta w^{*\alpha}$, δr^α в соотношение (8.30), определяющее функционал δW, представим его в виде

$$\delta W=\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}}(W_A^\alpha l_\alpha\,\delta\mu^A+W_A^{\alpha\beta}l_\alpha\partial_\beta\,\delta\mu^A)\,d^3\zeta, \qquad (9.1)$$

где

$$W_A^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\alpha\mu^A} - \partial_\beta\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial(\partial_\beta\partial_\alpha\mu^A)} + \sqrt{-g}\,M_A^{\beta\alpha}\right)\right] - M_A^\alpha - \lambda_B R_A^{\alpha B}, \qquad (9.2)$$

$$W_A^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A)} - M_A^{\alpha\beta}.$$

Задавая функционал δW на двух сторонах гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_+$ и на границе $\partial\hat{V}$ области $\hat{V}$, можно получить условия на разрывах и границах [8—22]. Но для этого предварительно необходимо преобразовать выражение для функционала δW [1]).

Дело в том, что коэффициенты при вариациях $\delta\mu^A$ и их производных в выражении (9.1) для функционала δW не определяются однозначно процедурой получения функционала δW из вариационного уравнения (8.23) (сам же функционал δW определяется, конечно, однозначно). Действительно, к правой части равенства (9.1), определяющего функционал δW, всегда можно добавить тождественно равный нулю функционал $\delta\Omega$, задаваемый выражением (8.12). В результате к коэффициентам W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}$ добавятся, вообще говоря, не равные нулю слагаемые $(\partial_\beta\sqrt{-g}\,\Omega_A^{\alpha\beta})/\sqrt{-g}$, $\Omega_A^{\alpha\beta}$. Указанная неоднозначность коэффициентов имеет ту же природу, что и отмечавшаяся в предыдущем параграфе неоднозначность коэффициентов при вариациях $\delta\mu^A$ и их производных $\partial_\beta\delta\mu^A$ в выражениях (8.4), (8.7) или (8.11) для функционалов $\delta_\Sigma I$, $\delta_\Sigma W^*$.

Кроме того, вариации $\delta\mu^A$ и их производные $\partial_\beta\delta\mu^A$ в выражении (9.1) для функционала δW нельзя считать независимыми, так как производные от вариаций $\delta\mu^A$ вдоль гиперповерхности $\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_+$ определяются значениями самих вариаций $\delta\mu^A$ на этой гиперповерхности. Неоднозначность коэффициентов при вариациях $\delta\mu^A$ и их производных $\partial_\alpha\delta\mu^A$ в выражении (9.1) для функционала δW тесно связана с отсутствием независимости между вариациями $\delta\mu^A$

---

[1]) В некоторых частных случаях соответствующие преобразования рассматривались в работах [8, 9]. В общем случае, когда функционал δW содержит любое конечное число последовательных производных от вариаций определяющих параметров, такие преобразования проводились в работах [11—13, 16].

и их производными $\partial_\beta \delta\mu^A$ в указанном выражении для функционала δW. Покажем это. Пусть при замене коэффициентов W^α_A, $W^{\alpha\beta}_A$ на коэффициенты $\tilde{W}^\alpha_A$, $\tilde{W}^{\alpha\beta}_A$ в выражении (9.1) для функционала δW он не изменяется. Если бы вариации $\delta\mu^A$ и все их производные $\partial_\beta \delta\mu^A$ на гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm$ были независимы, то из условия $\delta W = \delta\tilde{W}$ (в силу выражения (9.1) для δW и произвольности $\delta\mu^A$, $\partial_\beta \delta\mu^A$, l_α) вытекали бы равенства

$$\tilde{W}^\alpha_A = W^\alpha_A, \quad \tilde{W}^{\alpha\beta}_A = W^{\alpha\beta}_A, \tag{9.3}$$

приводящие к однозначности указанных коэффициентов.

Таким образом, отсутствие независимости между вариациями $\delta\mu^A$ и их производными $\partial_\beta \delta\mu^A$ (из-за того, что производные от $\delta\mu^A$ вдоль гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm$ определяются значением вариаций $\delta\mu^A$ на ней) делает возможным неоднозначность определения коэффициентов W^α_A, $W^{\alpha\beta}_A$ в выражении (9.1) для функционала δW. Поэтому производные от вариаций $\delta\mu^A$ вдоль гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm$ необходимо исключить из выражения (9.1). Для этого преобразуем второе слагаемое в подынтегральном выражении в правой части равенства (9.1), выделив из него поверхностно дивергентную часть.

Каноническая форма функционала δW. Рассмотрим в пространстве событий гиперповерхности ∂V, $\Sigma_\pm$, введенные в конце § 7. Они представляют собой геометрическое место точек в пространстве событий, для которых сопутствующие координаты принадлежат соответственно гиперповерхностям $\partial\hat{V}$ и $\hat{\Sigma}_\pm$ [1]). Положение гиперповерхностей ∂V, $\Sigma_\pm$ относительно выбранной ГСК x^ν, очевидно, определяется функциями

$$x^\nu = f^\nu(\zeta^k), \qquad x^\nu = f^\nu_\pm(\zeta^k). \tag{9.4}$$

Они получаются в результате подстановки в закон движения сплошной среды $x^\nu(\xi^\nu)$ выражений (8.13) для $\xi^\alpha(\zeta^k)$.

Введем на гиперповерхностях ∂V и $\Sigma_\pm$ произвольное, достаточно гладкое векторное поле $f_{(0)}(\zeta^k)$ так, чтобы

---

[1]) Напомним, что сопутствующие координаты ξ^ν можно рассматривать как криволинейную систему координат в пространстве событий, называемую *сопутствующей системой координат* (ССК) ξ^α (см. § 3).

в каждой точке ζ^k 4-вектор $\boldsymbol{f}_{(0)}$ был линейно независим от тройки касательных векторов $\boldsymbol{f}_{(k)}(\zeta^k)$, определенных равенствами (1.37) Обозначим через $f^{\nu}_{(0)}$ и $f^{\alpha}_{(0)}$ компоненты вектора $\boldsymbol{f}_{(0)}$ относительно ГСК x^{ν} и ССК ξ^{α}:

$$\boldsymbol{f}_{(0)} = f^{\nu}_{(0)}\boldsymbol{\vartheta}_{\nu} = f^{\alpha}_{(0)}\boldsymbol{\vartheta}_{\alpha}, \quad f^{\nu}_{(0)} = x^{\nu}_{\alpha} f^{\alpha}_{(0)}. \tag{9.5}$$

Построим еще в каждой точке гиперповерхностей ∂V, $\Sigma_{\pm}$ четверку векторов $\boldsymbol{f}^{(\delta)}$:

$$\boldsymbol{f}^{(\delta)}(\zeta^q) = f^{(\delta)}_{\nu}\boldsymbol{\vartheta}^{\nu} = f^{(\delta)}_{\beta}\boldsymbol{\vartheta}^{\beta}, \quad x^{\nu}_{\beta} f^{(\delta)}_{\nu} = f^{(\delta)}_{\beta}, \tag{9.6}$$

взаимных четверке векторов $\boldsymbol{f}_{(\gamma)} = (\boldsymbol{f}_{(0)}, \boldsymbol{f}_{(k)})$:

$$\boldsymbol{f}_{(\gamma)}(\zeta^q) = f^{\nu}_{(\gamma)}\boldsymbol{\vartheta}_{\nu} = f^{\alpha}_{(\gamma)}\boldsymbol{\vartheta}_{\alpha}, \quad f^{\nu}_{(\gamma)} = x^{\nu}_{\alpha} f^{\alpha}_{(\gamma)}, \tag{9.7}$$

т. е. четверку векторов $\boldsymbol{f}^{(\delta)}$, для которых выполняются соотношения

$$(\boldsymbol{f}^{(\delta)} \cdot \boldsymbol{f}_{(\gamma)}) = \delta^{\delta}_{\gamma}, \quad f^{(\delta)}_{\nu} f^{\nu}_{(\gamma)} = f^{(\delta)}_{\alpha} f^{\alpha}_{(\gamma)} = \delta^{\delta}_{\gamma}. \tag{9.8}$$

Компоненты $f^{(\delta)}_{\nu}$, $f^{(\delta)}_{\beta}$ этих векторов образуют матрицы, обратные матрицам, образованным из компонент $f^{\nu}_{(\gamma)}$, $f^{\alpha}_{(\gamma)}$ векторов $\boldsymbol{f}_{(\gamma)}$ (верхние индексы указывают номер строки, а нижние — номер столбца).

Поэтому компоненты $f^{(\delta)}_{\nu}$, $f^{(\delta)}_{\beta}$ определяются по формулам

$$f^{(\delta)}_{\nu} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial f^{\nu}_{(\delta)}}, \quad f^{(\delta)}_{\beta} = \frac{1}{\hat{f}}\frac{\partial \hat{f}}{\partial f^{\beta}_{(\delta)}}, \tag{9.9}$$

где f и $\hat{f}$ — определители матриц $\|f^{\nu}_{(\gamma)}\|$ и $\|f^{\alpha}_{(\gamma)}\|$:

$$f = |f^{\nu}_{(\gamma)}| = -e_{\nu\mu\lambda\varkappa} f^{\nu}_{(0)} f^{\mu}_{(1)} f^{\lambda}_{(2)} f^{\varkappa}_{(3)} = -\varepsilon_{\nu\mu\lambda\varkappa} f^{\nu}_{(0)} f^{\mu}_{(1)} f^{\lambda}_{(2)} f^{\varkappa}_{(3)}, \tag{9.10}$$

$$\hat{f} = |f^{\alpha}_{(\gamma)}| = -e_{\alpha\beta\gamma\delta} f^{\alpha}_{(0)} f^{\beta}_{(1)} f^{\gamma}_{(2)} f^{\delta}_{(3)} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} f^{\alpha}_{(0)} f^{\beta}_{(1)} f^{\gamma}_{(2)} f^{\delta}_{(3)}. \tag{9.11}$$

Здесь $\varepsilon_{\nu\mu\lambda\varkappa}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора Леви-Чивита (см. § 1), а $e_{\nu\mu\lambda\varkappa}$, $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — полностью антисимметричные индексы Леви-Чивита, для которых $e_{0123} = -1$. Этим обстоятельством и вызвано появление знака минус в выражениях (9.10), (9.11) для определителей $|f^{\nu}_{(\gamma)}|$, $|f^{\alpha}_{(\gamma)}|$.

Учитывая выражения (1.38) для компонент введенного в § 1 вектора l, ортогонального (в смысле псевдоевклидовой метрики пространства событий) касательным векторам $f_{(k)}$, запишем равенства (9.10), (9.11) в виде

$$f = l_\nu f^\nu_{(0)}, \quad \hat{f} = l_\alpha f^\alpha_{(0)}/\sqrt{-g} = f/\sqrt{-g}. \tag{9.12}$$

Очевидно, что компоненты $f^{(\delta)}_\nu$, $f^{(\delta)}_\beta$, определенные по формулам (9.9), удовлетворяют соотношениям

$$f^{(\gamma)}_\nu f^\mu_{(\gamma)} = \delta^\mu_\nu, \quad f^{(\gamma)}_\beta f^\alpha_{(\gamma)} = \delta^\alpha_\beta, \tag{9.13}$$

вытекающим из коммутативности произведения взаимно обратных матриц. Умножая справа равенства (9.13) соответственно на операторы ∂_μ и ∂_α и суммируя по индексам μ и α, разложим частные производные ∂_ν и ∂_β на производные вдоль рассматриваемой гиперповерхности и по направлению $f_{(0)}$:

$$\partial_\nu = \delta^\mu_\nu \partial_\mu = f^{(\gamma)}_\nu f^\mu_{(\gamma)} \partial_\mu = \left(f^{(k)}_\nu f^\mu_{(k)} + f^{(0)}_\nu f^\mu_{(0)}\right)\partial_\mu =$$
$$= f^{(k)}_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^k}\partial_\mu + f^{(0)}_\nu f^\mu_{(0)}\partial_\mu = f^{(k)}_\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^k} + f^{(0)}_\nu \frac{\partial}{\partial f^{(0)}},$$
$$\partial_\beta = \delta^\alpha_\beta \partial_\alpha = f^{(\gamma)}_\beta f^\alpha_{(\gamma)} \partial_\alpha = f^{(k)}_\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^k} + f^{(0)}_\beta \frac{\partial}{\partial f^{(0)}}.$$

Здесь учтены выражения (1.37) для $f^\mu_{(k)}$, $f^\alpha_{(k)}$ и введено обозначение

$$\frac{\partial}{\partial f^{(0)}} = (f_{(0)} \cdot \partial) = f^\mu_{(0)}\partial_\mu = f^\alpha_{(0)}\partial_\alpha. \tag{9.14}$$

Таким образом, на рассматриваемой гиперповерхности

$$\partial_\nu = f^{(k)}_\nu \frac{\partial}{\partial \zeta^k} + f^{(0)}_\nu \frac{\partial}{\partial f^{(0)}}, \quad \partial_\beta = f^{(k)}_\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^k} + f^{(0)}_\beta \frac{\partial}{\partial f^{(0)}}. \tag{9.15}$$

Используя второе из этих соотношений, преобразуем второе слагаемое в подынтегральном выражении в равенстве (9.1) следующим образом:

$$W^{\alpha\beta}_A l_\alpha \partial_\beta \delta\mu^A = W^{\alpha\beta}_A l_\alpha \left(f^{(k)}_\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^k} + f^{(0)}_\beta \frac{\partial}{\partial f^{(0)}}\right)\delta\mu^A =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \zeta^k}\left(W^{\alpha\beta}_A f^{(k)}_\beta l_\alpha\right)\delta\mu^A + W^{\alpha\beta}_A f^{(0)}_\beta l_\alpha \frac{\partial \delta\mu^A}{\partial f^{(0)}} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \zeta^k}\left(W^{\alpha\beta}_A f^{(k)}_\beta l_\alpha \delta\mu^A\right).$$

В результате выражение (9.1) для функционала δW можно записать в следующей канонической форме[1]):

$$\delta W = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}} \left(W_A \delta\mu^A + W_A^{(0)} \frac{\partial \delta\mu^A}{\partial f^{(0)}}\right) d^3\zeta + \\ + \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}} \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(W_A^{\alpha\beta} f_\beta^{(k)} l_\alpha \delta\mu^A\right) d^3\zeta, \qquad (9.16)$$

где

$$W_A = W_A^\alpha l_\alpha - \frac{\partial}{\partial\zeta^k} W_A^{\alpha\beta} f_\beta^{(k)} l_\alpha, \quad W_A^{(0)} = W_A^{\alpha\beta} f_\beta^{(0)} l_\alpha, \qquad (9.17)$$

а величины W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}$ определены равенствами (9.2).

Свойства функционала δW. Применим к последнему интегралу в равенстве (9.16) обычную формулу Остроградского — Гаусса для трехмерного пространства переменных ζ^k. В результате получим, что для достаточно гладкой замкнутой гиперповерхности $\partial V + \Sigma_\pm$ этот интеграл тождественно равен нулю. Если гиперповерхность $\partial V + \Sigma_\pm$ имеет двумерные ребра, на которых компоненты l_ν (или l_α) терпят разрыв, то последний интеграл в равенстве (9.16), вообще говоря, не равен нулю. В этом случае при помощи формулы Остроградского — Гаусса он сводится к интегралам по двум сторонам двумерных ребер гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm$. Такими ребрами, например, могут быть двумерные поверхности $\partial\hat{\Sigma}_\pm = \partial\hat{V} \cap \hat{\Sigma}_\pm$, которым в пространстве событий соответствуют двумерные поверхности $\partial\Sigma_\pm = \partial V \cap \Sigma_\pm$ (операция $\cap$ означает пересечение указанных множеств). Преобразовав последний интеграл в равенстве (9.16), получим выражение для функционала δW, не содержащее производных от вариаций $\delta\mu^A$ вдоль гиперповерхности $\partial V + \Sigma_\pm$. Производные же от вариаций $\delta\mu^A$ по

---

[1]) В дальнейшем системы координат ζ^k на двух сторонах гиперповерхности разрыва выбираются так, чтобы функции $x^\nu = f_\pm^\nu(\zeta^k)$, задающие их положение относительно ГСК x^ν, были связаны соотношением $f_-^\nu(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = f_+^\nu(\zeta^1, \zeta^3, \zeta^2)$. В этом случае из равенств (8.14), записанных в ГСК x^ν, получаем $l_\nu^-(x^\mu) = -l_\nu^+(x^\mu)$, т. е. $l^- = -l^+$. Векторное поле $f_{(0)}$ тоже будем задавать так, чтобы выполнялось соотношение $f_{(0)}^- = -f_{(0)}^+$. Если, кроме того, на гиперповерхности разрыва функции $x^\nu(\xi^\alpha)$ непрерывны, то справедливо равенство $f_-^\alpha(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = f_+^\alpha(\zeta^1, \zeta^3, \zeta^2)$, и из (8.14) легко находим $(l_\alpha/\sqrt{-g})_+ = -(l_\alpha/\sqrt{-g})_-$.

направлению $f_{(0)}$, не лежащему в касательной плоскости к гиперповерхности $\partial V + \Sigma_{\pm}$, можно считать независимыми от значений функций $\delta\mu^A(\xi^\gamma)$ на этой гиперповерхности.

Используя это свойство производных $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$, можно сделать важные выводы относительно однозначности определения коэффициентов W_A, $W_A^{(0)}$ в выражении (9.16) для функционала δW. Для этого положим вариации $\delta\mu^A$ равными нулю на указанных выше двумерных ребрах гиперповерхности $\partial V + \Sigma_{\pm}$ (если таковые имеются). Тогда последний интеграл в равенстве (9.16) обратится в нуль. Если при замене коэффициентов W_A, $W_A^{(0)}$, на коэффициенты $\tilde{W}_A$, $\tilde{W}_A^{(0)}$ функционал δW не изменяется (при неизменной системе вариаций $\delta\mu^A$ и их производных $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$), то для любых вариаций $\delta\mu^A$ и их производных $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$ должно выполняться соотношение

$$\delta W - \delta\tilde{W} \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}} \left[(W_A - \tilde{W}_A)\,\delta\mu^A + (W_A^{(0)} - \tilde{W}_A^{(0)})\frac{\partial\delta\mu^A}{\partial f^{(0)}}\right] d^3\zeta = 0 \quad (9.18)$$

Пусть на гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_{\pm}$ производные $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$ равны нулю. В силу произвола в выборе вариаций $\delta\mu^A(\xi^\gamma)$ сумма

$$(W_A - \tilde{W}_A)\,\delta\mu^A \quad (9.19)$$

является произвольной функцией на граничной гиперповерхности $\partial\hat{V}$ (суммирование производится по мультииндексу A). На гиперповерхности же разрыва $\hat{\Sigma}_c$ произвольной функцией, вообще говоря, является только сумма значений величины (9.19) на двух ее сторонах [1]):

$$(W_A^+ - \tilde{W}_A^+)\,\delta\mu_+^A + (W_A^- - \tilde{W}_A^-)\,\delta\mu_-^A, \quad (9.20)$$

так как значения определяющих параметров и их вариаций на двух сторонах гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_{\pm}$ могут быть связаны между собой кинематическими соотношениями. Например, если определяющие параметры μ^A принадлежат к классу функций с заданным скачком на гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$, то должны, очевидно, выполняться равенства $\delta\mu_+^A = \delta\mu_-^A$. Подобные кинематические соотноше-

[1]) В дальнейшем индексы плюс и минус указывают на то, что значения соответствующих величин берутся соответственно на сторонах $\hat{\Sigma}_+$ и $\hat{\Sigma}_-$ гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$.

ния, связывающие между собой значения $\mu^A_{\pm}$ или $\delta\mu^A_{\pm}$, будем также называть *связями*.

Сделанный здесь вывод о произвольности функций (9.19), (9.20) на гиперповерхности $\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}$ остается в силе также при наличии между вариациями $\delta\mu^A$ связей, допускающих функциональный произвол в выборе значений $\delta\mu^A$ на гиперповерхности $\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}$. Связи, рассматривавшиеся выше, очевидно, обладают таким свойством. Поэтому из равенства (9.18) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} &W_A\delta\mu^A=\tilde{W}_A\delta\mu^A,\\ &W^+_A\delta\mu^A_+ + W^-_A\delta\mu^A_- = \tilde{W}^+_A\delta\mu^A_+ + \tilde{W}^-_A\delta\mu^A_-, \end{aligned} \tag{9.21}$$

которым должны удовлетворять коэффициенты W_A и $\tilde{W}_A$ соответственно при $\xi^\nu\in\partial\hat{V}$ и $\xi^\nu\in\hat{\Sigma}_c$.

Пусть теперь на гиперповерхности $\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_c$ вариации $\delta\mu^A(\xi^\nu)$ равны нулю, а их производные $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$ не равны нулю. Проводя для функций $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$ рассуждения, полностью аналогичные только что проведенным рассуждениям для функций $\delta\mu^A(\xi^\nu)$, получим соотношения

$$\begin{aligned} &W^{(0)}_A\frac{\partial\delta\mu^A}{\partial f^{(0)}}=\tilde{W}^{(0)}_A\frac{\partial\delta\mu^A}{\partial f^{(0)}},\\ &W^{(0)+}_A\frac{\partial\delta\mu^A_+}{\partial f^{(0)}_+}+W^{(0)-}_A\frac{\partial\delta\mu^A_-}{\partial f^{(0)}_-}=\tilde{W}^{(0)+}_A\frac{\partial\delta\mu^A_+}{\partial f^{(0)}_+}+\tilde{W}^{(0)-}_A\frac{\partial\delta\mu^A_-}{\partial f^{(0)}_-}, \end{aligned} \tag{9.22}$$

которым должны удовлетворять коэффициенты $W^{(0)}_A$ и $\tilde{W}^{(0)}_A$ соответственно при $\xi^\nu\in\partial\hat{V}$ и $\xi^\nu\in\hat{\Sigma}_c$.

Равенства (9.21), (9.22) должны выполняться при любых вариациях $\delta\mu^A$ и их производных $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$, удовлетворяющих наложенным на вариации $\delta\mu^A$ связям.

Если связей нет, то при $\xi^\nu\in\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_c$ все вариации $\delta\mu^A(\xi^\nu)$ независимы между собой и все производные $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$ также независимы между собой. В этом случае из равенств (9.21), (9.22) вытекают соотношения $W_A=\tilde{W}_A$, $W^{(0)}_A=\tilde{W}^{(0)}_A$, $W^{\pm}_A=\tilde{W}^{\pm}_A$, $W^{(0)\pm}_A=\tilde{W}^{(0)\pm}_A$, доказывающие однозначность определения коэффициентов W_A, $W^{(0)}_A$ в выражении (9.16) для функционала δW при отсутствии связей между определяющими параметрами.

Коэффициенты W_A, $W^{(0)}_A$ при вариациях $\delta\mu^A$ и их производных $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$ в канонической форме (9.16) функ-

ционала δW можно рассматривать на граничной гиперповерхности $\partial\hat{V}$ как обобщенные поверхностные силы, соответствующие определяющим параметрам $\mu^A(\xi^\nu)$ [11]. Для независимых определяющих параметров эти обобщенные силы однозначно выражаются через определяющие параметры и их производные и, следовательно, являются физическими характеристиками сплошной среды. Отметим также, что указанные выражения (9.17) для обобщенных сил содержат величины, характеризующие геометрические свойства рассматриваемой гиперповерхности $\partial\hat{V}$: l_α, $f_\alpha^{(k)}$, $\partial l_\alpha/\partial\zeta^k$, $\partial f_\alpha^{(k)}/\partial\zeta^k$.

Условия на границах. На основании равенства (9.16) функционал δW имеет вид

$$\delta W = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left(W_A\delta\mu^A + W_A^{(0)}\frac{\partial\delta\mu^A}{\partial f^{(0)}}\right)d^3\zeta + \\ + \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(W_A^{\alpha\beta}f_\beta^{(k)}l_\alpha\delta\mu^A\right)d^3\zeta. \qquad (9.23)$$

Условия на какой-либо гладкой (не содержащей ребер) части $\hat{\Sigma}'$ граничной гиперповерхности $\partial\hat{V}$ можно задавать, фиксируя на $\hat{\Sigma}'$ значения определяющих параметров $\mu^A(\xi^\nu)$ (кинематические условия) или задавая значения функционала δW на множестве функций $\delta\mu^A[\hat{\Sigma}']$, для которых $\delta\mu^A = \partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)} = 0$ при координатах ξ^ν, не принадлежащих множеству $\hat{\Sigma}'$ (динамические условия) [11]. Во втором случае

$$\delta W\{\delta\mu^A[\hat{\Sigma}']\} = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{\Sigma}'}\left(\tilde{W}_A\delta\mu^A + \tilde{W}_A^{(0)}\frac{\partial\delta\mu^A}{\partial f^{(0)}}\right)d^3\zeta, \qquad (9.24)$$

где $\tilde{W}_A(\xi^\alpha)$, $\tilde{W}_A^{(0)}(\xi^\alpha)$ — заданные функции, определенные на множестве $\hat{\Sigma}'$. Для указанного множества функций $\delta\mu^A[\hat{\Sigma}']$ первый интеграл в выражении (9.23) для функционала δW сводится к интегралу по участку гиперповерхности $\hat{\Sigma}'$. Второй же интеграл в (9.23) тождественно равен нулю, так как он преобразуется в интеграл по двумерной границе участка гиперповерхности $\hat{\Sigma}'$, на которой $\delta\mu^A = 0$.

Сравнивая теперь выражения (9.23) и (9.24) для функционала δW, найдем следующие равенства:

$$(W_A - \tilde{W}_A(\xi^\alpha))\,\delta\mu^A = 0, \quad (W_A^{(0)} - \tilde{W}_A^{(0)}(\xi^\alpha))\,\frac{\partial\delta\mu^A}{\partial f^{(0)}} = 0, \quad (9.25)$$

которые должны выполняться на участке гиперповерхности $\hat{\Sigma}'$. Их вывод дословно совпадает с выводом первых равенств из (9.21) и (9.22), если в последнем заменить множество $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_c$ на $\hat{\Sigma}'$.

Когда связей нет, все вариации $\delta\mu^A$ независимы, и из соотношений (9.25) вытекают условия на $\hat{\Sigma}'$

$$W_A = \tilde{W}_A(\xi^\alpha), \quad W_A^{(0)} = \tilde{W}_A^{(0)}(\xi^\alpha), \quad \xi^\alpha \in \hat{\Sigma}', \quad (9.26)$$

в которых левые части равенств выражаются через определяющие параметры при помощи формул (9.17), (9.2), а правые части являются заданными функциями на множестве $\hat{\Sigma}'$. При наличии связей между вариациями определяющих параметров вывод условий на множестве $\hat{\Sigma}'$ из соотношений (9.25) необходимо проводить с учетом этих связей, например методом неопределенных множителей Лагранжа.

Если участок гиперповерхности Σ' в пространстве событий, соответствующий множеству значений сопутствующих координат $\hat{\Sigma}'$, образован мировыми линиями сплошной среды, то условия (9.26) обычно называют *граничными условиями*. Если же указанный участок гиперповерхности Σ' образован точками трехмерного физического пространства, рассматриваемого в некоторый начальный момент времени $x^0/c = t_0$ (относительно выбранной галилеевой системы отсчета), то условия (9.26) называют *начальными условиями*. Возможны, конечно, и другие случаи расположения гиперповерхности Σ'.

Динамические условия на разрывах. Динамические условия на не содержащей ребер гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$ можно получить, задавая значения функционала δW на множестве функций $\delta\mu^A[\hat{\Sigma}_\pm]$, для которых $\delta\mu^A = \partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)} = 0$ на граничной гиперповерхности $\partial\hat{V}$ [11]. Например, если все внешние воздействия на сплошную среду, сосредоточенные на гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$, включены в функционал δW^*, то имеем

$$\delta W\,\{\delta\mu^A[\hat{\Sigma}_\pm]\} = 0. \quad (9.27)$$

В дальнейшем это предположение всегда будем считать выполненным.

Для указанного множества функций $\delta\mu^A$ первый интеграл в выражении (9.23) для функционала δW сводится к интегралу по двум сторонам $\hat{\Sigma}_\pm$ гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$. Второй же интеграл тождественно равен нулю ввиду того, что он преобразуется в интеграл по двумерной поверхности $\partial\hat{V}\cap\hat{\Sigma}_\pm$, на которой $\delta\mu^A(\xi^\nu)=0$, так как по условию $\delta\mu^A=0$ на $\partial\hat{V}$. Сравнивая теперь выражения (9.23) и (9.27) для функционала δW, получим следующие равенства [1]):

$$\begin{aligned} &W_A^+\delta\mu_+^A+W_A^-\delta\mu_-^A=0,\\ &W_A^{(0)+}\partial\delta\mu_+^A/\partial f_+^{(0)}+W_A^{(0)-}\partial\delta\mu_-^A/\partial f_-^{(0)}=0, \end{aligned} \tag{9.28}$$

которые должны выполняться на гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$. Их вывод дословно совпадает с выводом вторых равенств из (9.21), (9.22), если при этом заменить гиперповерхность $\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm$ на $\hat{\Sigma}_\pm$ и положить $\tilde{W}_A^\pm=\tilde{W}_A^{(0)\pm}=0$.

Когда нет никаких связей и, значит, все вариации $\delta\mu_\pm^A(\xi^\nu)$ и их производные $\partial\delta\mu_\pm^A/\partial f_\pm^{(0)}$ независимы, из соотношений (9.28) вытекают следующие условия на гиперповерхности разрыва:

$$W_A^+=W_A^-=0,\quad W_A^{(0)+}=W_A^{(0)-}=0. \tag{9.29}$$

Если же на гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$ заданы скачки функций $\mu^A(\xi^\nu)$ и их производных $\partial\mu^A/\partial f^{(0)}$ по направлению, не лежащему в касательной плоскости к Σ_c, и никаких других связей нет, то имеют место равенства

$$\delta\mu_A^+=\delta\mu_A^-,\quad \partial\delta\mu_A^+/\partial f_+^{(0)}=-\partial\delta\mu_A^-/\partial f_-^{(0)}.$$

Следовательно, независимыми являются значения вариаций $\delta\mu^A$ и их производных $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$ только на одной из сторон гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$. В этом случае из соотношений (9.28) вытекают такие условия:

$$W_A^++W_A^-=0,\quad W_A^{(0)+}-W_A^{(0)-}=0. \tag{9.30}$$

Входящие в соотношения (9.29), (9.30) величины W_A, $W_A^{(0)}$ выражаются через определяющие параметры $\mu^A(\xi^\nu)$

[1]) См. предыдущее примечание.

при помощи формул (9.17), (9.2), в которых значения всех определяющих параметров берутся на одной и той же стороне гиперповерхности разрыва (для W_A^+ и $W_A^{(0)+}$ на $\hat{\Sigma}_+$, а для W_A^- и $W_A^{(0)-}$ на $\hat{\Sigma}_-$).

Если на каждой из сторон гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$ определяющие параметры должны удовлетворять некоторым связям, то вывод условий на разрыве из соотношений (9.28) усложняется, так как возникает дополнительная задача учета этих связей. В пятой главе будут рассмотрены примеры конкретных моделей сплошных сред, в которых условия на разрывах выводятся при наличии связей между определяющими параметрами (на каждой из сторон гиперповерхности разрыва).

Рассмотренная выше формулировка динамических условий на разрывах и границах предполагает задание функционала δW. Чтобы сделать это при построении конкретных моделей и решении задач, необходимо использовать фактические данные о физико-химической природе внешних воздействий на границах и разрывах. Если внешние воздействия отсутствуют или все они учтены в функционале δW^*, то по определению можно считать $\delta W = 0$.

Каноническая форма функционала $\delta\Omega_0$. Используя процедуру приведения к канонической форме тождественно равного нулю функционала типа (8.10) или (8.12), можно доказать ряд важных тождеств, которые будут использованы в следующих главах. Для этого рассмотрим тождественно равный нулю функционал

$$\delta\Omega_0\{\delta\mu(\xi^\nu)\} = \int\limits_{\hat{V}} \partial_\alpha\partial_\beta\left(\sqrt{-g}\,\Omega^{\alpha\beta}\delta\mu\right) d^4\xi = 0, \qquad (9.31)$$

в котором $\Omega^{\alpha\beta} = -\Omega^{\beta\alpha}$ — произвольные, антисимметричные по индексам α, β, дважды дифференцируемые функции от ξ^ν; $\delta\mu$ — произвольная, дважды дифференцируемая функция от ξ^ν; $\hat{V}$ — произвольная область пространства переменных ξ^ν, ограниченная гиперповерхностью $\partial\hat{V}$.

Используя формулу Остроградского — Гаусса (1.45), преобразуем выражение (9.31) для функционала $\delta\Omega_0$ к следующему виду:

$$\delta\Omega_0 = \int\limits_{\partial\hat{V}} \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\beta\sqrt{-g}\,\Omega^{\alpha\beta}\delta\mu\right) l_\alpha d^3\zeta = 0. \qquad (9.32)$$

Здесь l_α — компоненты, вычисляемые по формулам (1.38):

$$l_\alpha = -e_{\alpha\beta\gamma\delta} f^\beta_{(1)} f^\gamma_{(2)} f^\delta_{(3)},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \sqrt{-g}\, e_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad f^\alpha_{(k)} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial \zeta^k},$$

где $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — полностью антисимметричные индексы Леви-Чивита, причем $e_{0123} = -1$; $f^\alpha(\zeta^k)$ — функции, задающие в параметрическом виде гиперповерхность $\partial\hat{V}$.

Исключим из выражения (9.32) для функционала $\delta\Omega_0$ производные от функции $\delta\mu$ вдоль гиперповерхности $\partial\hat{V}$. Для этого, используя вторую формулу (9.15), преобразуем подынтегральное выражение в равенстве (9.32) следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\beta \sqrt{-g}\,\Omega^{\alpha\beta}\delta\mu)\, l_\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\beta \sqrt{-g}\,\Omega^{\alpha\beta})\, l_\alpha \delta\mu + \\ + \Omega^{\alpha\beta} l_\alpha \partial_\beta \delta\mu = \\ = \left(\frac{l_\alpha}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g}\,\Omega^{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial\zeta^k} l_\alpha \Omega^{\alpha\beta} f^{(k)}_\beta\right)\delta\mu + \\ + l_\alpha \Omega^{\alpha\beta} f^{(0)}_\beta \frac{\partial\delta\mu}{\partial f^{(0)}} + \frac{\partial}{\partial\zeta^k}(l_\alpha \Omega^{\alpha\beta} f^{(k)}_\beta \delta\mu).$$

В результате тождество (9.32) примет вид

$$\delta\Omega_0 = \int\limits_{\partial\hat{V}} \left[\left(\frac{l_\alpha}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g}\,\Omega^{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial\zeta^k} l_\alpha \Omega^{\alpha\beta} f^{(k)}_\beta\right)\delta\mu + \right.$$

$$\left. + (l_\alpha \Omega^{\alpha\beta} f^{(0)}_\beta) \frac{\partial\delta\mu}{\partial f^{(0)}}\right] d^3\zeta + \int\limits_{\partial\hat{V}} \frac{\partial}{\partial\zeta^k}(l_\alpha \Omega^{\alpha\beta} f^{(k)}_\beta \delta\mu)\, d^3\zeta \equiv 0. \qquad (9.33)$$

При помощи обычной формулы Остроградского — Гаусса для трехмерного пространства переменных ζ^k последний интеграл здесь сводится к интегралу по двумерным ребрам гиперповерхности $\partial\hat{V}$.

Некоторые тождества. Положим функцию $\delta\mu(\xi^\nu)$ равной нулю на ребрах гиперповерхности $\partial\hat{V}$. Тогда последний интеграл в тождестве (9.33) также будет равен нулю. Функция $\delta\mu(\xi^\nu)$ является произвольной функцией в области $\hat{V}$. Очевидно, на гиперповерхности $\partial\hat{V}$ (с вырезанными ребрами) значения величины $\delta\mu(\xi^\nu)$ и производной от нее $\partial\delta\mu/\partial f^{(0)}$ по направлению, не лежащему в касательной к $\partial\hat{V}$ плоскости, также являются произвольными независимыми между собой функциями. Поэтому для выполнения

тождества (9.33), когда функция $\delta\mu$ равна нулю на ребрах гиперповерхности $\partial\hat{V}$, необходимо и достаточно, чтобы в первом интеграле в равенстве (9.33) коэффициенты при величинах $\delta\mu$ и $\partial\delta\mu/\partial f^{(0)}$ были тождественно равны нулю:

$$l_\alpha \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta \sqrt{-g}\,\Omega^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(\Omega^{\alpha\beta} l_\alpha f_\beta^{(k)}\right),\quad \Omega^{\alpha\beta} l_\alpha f_\beta^{(0)} \equiv 0. \qquad (9.34)$$

Напомним, что здесь

$$f_\beta^{(\delta)} \equiv \frac{1}{\hat{f}}\frac{\partial \hat{f}}{\partial f^\beta_{(\delta)}},\quad \hat{f} \equiv \left|f^\alpha_{(\gamma)}\right|,\qquad \delta = 0,\ k, \qquad (9.35)$$

$f^\alpha_{(k)} = \partial f^\alpha/\partial\zeta^k$, а $f^\alpha_{(0)}$ — любые функции от ζ^k, для которых $\left|f^\alpha_{(\delta)}\right| \neq 0$ при каждом значении переменных ζ^k. Тождества (9.34) должны выполняться на любой гиперповерхности для любых антисимметричных по индексам α, β функций $\Omega^{\alpha\beta}$.

Отметим, что для функции $\delta\mu(\xi^\nu)$, не равной нулю на ребрах гиперповерхности $\partial\hat{V}$, из равенств (9.33), (9.34) вытекает следующее тождество:

$$\delta\Omega_0 = \int\limits_{\partial\hat{V}} \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(\Omega^{\alpha\beta} l_\alpha f_\beta^{(k)}\delta\mu\right) d^3\zeta \equiv 0. \qquad (9.36)$$

Как уже отмечалось, этот интеграл сводится к интегралу по двумерным ребрам гиперповерхности $\partial\hat{V}$, который, следовательно, равен нулю. Поэтому из произвольности функции $\delta\mu$ вытекает, что коэффициент при $\delta\mu$ в указанном интеграле по двумерным ребрам гиперповерхности $\partial\hat{V}$ тождественно равен нулю.

Рассматривая функции $\Omega^{\alpha\beta}(\xi^\nu)$ как компоненты антисимметричного тензора $\Omega^{\alpha\beta}\vartheta_\alpha\vartheta_\beta$, записанные относительно ССК ξ^α, и используя второе соотношение (1.36), легко преобразовать левую часть первого тождества (9.34) к ковариантному виду, после чего оно примет вид

$$l_\alpha \nabla_\beta \Omega^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(\Omega^{\alpha\beta} l_\alpha f_\beta^{(k)}\right). \qquad (9.37)$$

Считая затем переменные ξ^k криволинейными координатами в пространстве событий, связанными с галилеевыми координатами x^ν достаточно гладкими функциями $x^\nu(\xi^\alpha)$, можно перейти в тождествах (9.34) к ГСК x^ν. В результате найдем, что на любой гиперповерхности в простран-

стве событий для любых антисимметричных по индексам μ, ν функций $\Omega^{\mu\nu}(x^\lambda)$ должны выполняться тождества

$$l_\mu \partial_\nu \Omega^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial \zeta^k}\left(\Omega^{\mu\nu} l_\mu f^{(k)}_\nu\right), \quad \Omega^{\mu\nu} l_\mu f^{(0)}_\nu = 0, \tag{9.38}$$

Тождества (9.34) (а также (9.38)) можно доказать и путем непосредственных выкладок. Например, используя при вычислении величин $f^{(0)}_\nu$, $f^{(0)}_\beta$ по формулам (9.9) выражения (9.12) для определителей f, $\hat{f}$, найдем, что

$$f^{(0)}_\nu = \frac{l_\nu}{l_\mu f^\mu_{(0)}} = \frac{l_\nu}{f}, \quad f^{(0)}_\beta = \frac{l_\beta}{l_\alpha f^\alpha_{(0)}} = \frac{l_\beta}{\hat{f}\sqrt{-g}}. \tag{9.39}$$

Поэтому в силу антисимметрии величин $\Omega^{\alpha\beta}$ имеем

$$\Omega^{\alpha\beta} l_\alpha f^{(0)}_\beta = \Omega^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta / \hat{f}\sqrt{-g} \equiv 0,$$

и, следовательно, второе тождество (9.34) доказано.

Выкладки, которые необходимо провести при непосредственном доказательстве первого тождества (9.34), носят значительно более сложный характер.

Если скалярный квадрат вектора l не равен нулю, то в силу равенств (1.40) и (1.42) метрика на рассматриваемой гиперповерхности невырожденна:

$$|(\boldsymbol{f}_{(k)} \cdot \boldsymbol{f}_{(r)})| = |g_{\alpha\beta} f^\alpha_{(k)} f^\beta_{(r)}| = |G_{kr}| \equiv G \neq 0.$$

В этом случае правую часть равенства (9.37) после деления на $\sqrt{|G|}$ можно преобразовать к поверхностно ковариантному виду

$$\frac{1}{\sqrt{|G|}} \frac{\partial}{\partial \zeta^k}\left(\Omega^{\alpha\beta} l_\alpha f^{(k)}_\beta\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \frac{\partial}{\partial \zeta^k}\left(\sqrt{|G|}\, \Omega^{\alpha\beta} n_\alpha f^{(k)}_\beta\right) = \nabla_{(k)} \Omega^{\alpha\beta} n_\alpha f^{(k)}_\beta.$$

Здесь $\nabla_{(k)}$ — ковариантная производная в трехмерном пространстве переменных ζ^k с компонентами метрического тензора G_{kr}, определенными равенством (1.40); $n_\alpha = l_\alpha/\sqrt{|G|}$ — 4-вектор, скалярный квадрат которого на основании равенства (1.42) равен $-\operatorname{sign} G = \mp 1$.

В результате первое тождество из (9.34) примет полностью ковариантный вид

$$n_\alpha \nabla_\beta \Omega^{\alpha\beta} = \nabla_{(k)} \Omega^{\alpha\beta} n_\alpha f^{(k)}_\beta. \tag{9.40}$$

Очевидным образом его можно записать также относительно ГСК x^ν.

Замечание о канонической форме функционала $\delta\Omega$ и способе однозначного определения величин W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}$. Преобразуя функционал $\delta\Omega$, определенный равенством (8.10), точно так же, как и функционал $\delta\Omega_0$, определенный равенством (9.31), приведем его к следующей канонической форме:

$$\delta\Omega = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left[\left(\frac{l_\alpha}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\sqrt{-g}\,\Omega_A^{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\Omega_A^{\alpha\beta}l_\alpha f_\beta^{(k)}\right)\delta\mu^A + \right.$$

$$\left. + \left(\Omega_A^{\alpha\beta}l_\alpha f_\beta^{(0)}\right)\frac{\partial\delta\mu^A}{\partial f^{(0)}}\right]d^3\zeta + \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(\Omega_A^{\alpha\beta}l_\alpha f_\beta^{(k)}\delta\mu^A\right)d^3\zeta. \quad (9.41)$$

Подставляя в тождества (9.34), (9.36) вместо $\Omega^{\alpha\beta}$ компоненты $\Omega_A^{\alpha\beta}$ и учитывая сделанное после тождества (9.36) замечание, найдем, что коэффициенты при $\delta\mu^A$ и $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$ в канонической форме (9.41) функционала $\delta\Omega$ равны нулю (последний интеграл в (9.41) здесь предполагается записанным в виде интеграла по ребрам гиперповерхности $\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm$). Поэтому добавление тождественно равного нулю функционала $\delta\Omega$ к правой части выражения (9.1) для функционала δW не может изменить его канонической формы (9.16), если последний интеграл в ней записан в виде интеграла по ребрам гиперповерхности $\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm$, хотя коэффициенты при $\delta\mu^A$, $\partial_\xi\delta\mu^A$ в выражении (9.1) для функционала δW при этом изменяются (см начало настоящего параграфа).

Входящие в выражение (9.1) для функционала δW величины W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}$ были определены формулами (9.2) как функции от определяющих параметров и их производных. Как уже отмечалось, это определение не является единственно возможным, и величины W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}$ в общем случае не могут быть определены однозначно. Однако единственности определения функций W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}$ можно добиться, наложив дополнительное условие $W_A^{\alpha\beta} = W_A^{\beta\alpha}$. Покажем это. Так как в выражениях (8.2) и (7.19) для δI и δW^* величины $\partial\sqrt{-g}\,\Lambda/\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A)$ и $M_A^{\alpha\beta}$ умножаются на симметричные по индексам α, β вариации $\delta\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A$, то указанные величины всегда можно считать также симметричными по индексам α, β (кососимметричные части

$\partial\sqrt{-g}\,\Lambda/\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A)$ и $M_A^{\alpha\beta}$, очевидно, не дают вклада в δI и δW^*). Поэтому всегда существует выражение (9.1) для функционала δW, в котором $W_A^{\alpha\beta}=W_A^{\beta\alpha}$. Докажем, что оно единственно. Пусть это не так, и при замене коэффициентов W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}=W_A^{\beta\alpha}$ в выражении (9.1) для функционала δW на коэффициенты $\tilde{W}_A^\alpha$, $\tilde{W}_A^{\alpha\beta}=\tilde{W}_A^{\beta\alpha}$ он не изменяется. Тогда, вычитая из канонического выражения (9.16) для функционала δW выражение, получающееся из него путем замены $W_A^\alpha\to\tilde{W}_A^\alpha$, $W_A^{\alpha\beta}\to\tilde{W}_A^{\alpha\beta}$, получим тождество

$$\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left[(W_A-\tilde{W}_A)\,\delta\mu^A+(W_A^{(0)}-\tilde{W}_A^{(0)})\frac{\partial\delta\mu^A}{\partial f^{(0)}}\right]d^3\zeta+$$

$$+\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\frac{\partial}{\partial\zeta^k}(\ldots)^k\,d^3\zeta\equiv 0.$$

Второй интеграл в нем сводится к интегралу по двумерным ребрам рассматриваемой гиперповерхности. Поэтому в силу независимости и произвольности вариаций $\delta\mu^A(\hat{\zeta}^\nu)$ и их производных $\partial\delta\mu^A/\partial f^{(0)}$ имеем

$$W_A-\tilde{W}_A\equiv 0,\qquad W_A^{(0)}-\tilde{W}_A^{(0)}\equiv 0.$$

Подставляя сюда выражения (9.17) для W_A, $W_A^{(0)}$ и аналогичные выражения для $\tilde{W}_A$, $\tilde{W}_A^{(0)}$, получим следующие тождества:

$$\begin{aligned}&(W_A^\alpha-\tilde{W}_A^\alpha)\,l_\alpha-\frac{\partial}{\partial\zeta^k}(W_A^{\alpha\beta}-\tilde{W}_A^{\alpha\beta})\,l_\alpha f_\beta^{(k)}\equiv 0,\\&(W_A^{\alpha\beta}-\tilde{W}_A^{\alpha\beta})\,l_\alpha f_\beta^{(0)}\equiv 0.\end{aligned}\tag{9.42}$$

Так как на основании формулы (9.39) $f_\beta^{(0)}=l_\beta/\hat{f}\sqrt{-g}$, то второе тождество (9.42) в силу произвольности компонент l_α выполняется тогда и только тогда, когда разность $W_A^{\alpha\beta}-\tilde{W}_A^{\alpha\beta}$ антисимметрична по индексам α, β. Учитывая, что компоненты $W^{\alpha\beta}$ симметричны и по условию компоненты $\tilde{W}_A^{\alpha\beta}$ также должны быть симметричны по индексам α, β, находим, что они равны между собой. После этого из первого тождества (9.42) в силу произвольности компонент l_α следует также равенство коэффициентов W_A^α и $\tilde{W}_A^\alpha$. Таким образом, действительно, единственности определения коэффициентов в неканоническом выражении (9.1)

для функционала δW (при независимых вариациях $\delta\mu^A$) можно добиться, наложив дополнительное условие $W_A^{[\alpha\beta]} = 0$. Если же, кроме того, сумма функционалов δI и δW^* не зависит от производных от $\delta\mu^A$ выше первого порядка, то из условия $W_A^{[\alpha\beta]} = 0$ следует, что $W_A^{\alpha\beta} \equiv 0$.

Отметим, что указанное условие симметричности компонент $W_A^{\alpha\beta}$ делает невозможным произвольное изменение коэффициентов W_A^{α}, $W_A^{\alpha\beta}$ в выражении (9.1) для функционала δW путем добавления к нему тождественно равного нулю функционала $\delta\Omega$, определенного равенством (8.10), в котором $\Omega^{\alpha\beta} = -\Omega^{\beta\alpha} \neq 0$.

В настоящей главе при формулировке вариационного уравнения (§ 7) и выводе динамических уравнений для непрерывных процессов (§ 8), а также условий на границах и разрывах (§ 9) мы ограничились случаем, когда выражения для действия I и функционала δW^* не содержат производных от определяющих параметров и их вариаций выше второго порядка. Этот случай позволяет продемонстрировать основные черты, присущие общей теории построения моделей сплошных сред на основе вариационного уравнения Л. И. Седова, в котором действие I и функционал δW^* могут содержать любое конечное число последовательных производных от определяющих параметров и их вариаций. Указанная общая теория была развита в работах академика Л. И. Седова и его сотрудников [1—7, 9—22].

ГЛАВА 4

ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

§ 10. Симметрия вариационного уравнения и связанные с ней тождества

Инвариантность относительно конечно-параметрических преобразований определяющих параметров. Теорема Нётер. Пусть $\mu^A(\xi^\nu)$ — значения определяющих параметров, соответствующие действительным процессам, т. е. удовлетворяющие динамическим уравнениям, условиям на разрывах и связям. Рассмотрим допускаемое связями и непрерывно зависящее от конечного числа параметров q^B преобразование определяющих параметров μ^A:

$$\tilde{\mu}^A = \mu^A + I^A(\mu^C, q^B), \qquad I^A(\mu^C, 0) \equiv 0. \tag{10.1}$$

Определим вариации $\delta_q\mu^A$, соответствующие бесконечно малому преобразованию (10.1), равенствами

$$\delta_q\mu^A = I^A_B\,\delta q^B, \qquad I^A_B \equiv \left(\frac{\partial I^A}{\partial q^B}\right)_{q^B=0}. \tag{10.2}$$

По условию функции $\tilde{\mu}^A(\xi^\nu)$ удовлетворяют в области $\hat{V}^0$ связям, т. е. равенствам (8.17) и кинематическим соотношениям на гиперповерхности разрыва, и, следовательно, их можно рассматривать как значения определяющих параметров для некоторых возможных процессов. Тогда для определяющих параметров μ^A и их вариаций $\delta_q\mu^A$ функционал δR, введенный для учета связей, тождественно равен нулю:

$$\delta_q R = 0, \tag{10.3}$$

а выражение (9.16) для функционала δW с учетом динамических условий на разрывах (9.28) можно представить в виде

$$\delta_q W = \frac{1}{c}\left[\int_{\partial\hat{V}}\left(W_A I^A_B + W^{(0)}_B\frac{\partial I^A_B}{\partial f^{(0)}}\right)d^3\zeta + \right.$$
$$\left. + \int_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\frac{\partial}{\partial\overset{k}{\tau}{}^k}\left(W^{\alpha\beta}_A l_\alpha f^{(k)}_\beta I^A_B\right)d^3\zeta\right]\delta q^B. \tag{10.4}$$

Пусть преобразование (10.1) таково, что для определяющих параметров μ^A и их вариаций $\delta_q\mu^A$ справедливо равенство

$$\delta_q I + \delta_q W^* = 0. \tag{10.5}$$

Тогда из вариационного уравнения (8.23) и условия (10.3) следует, что для определяющих параметров μ^A и их вариаций $\delta_q\mu^A$ обращается в нуль также и функционал δW. Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях δq^B в выражении (10.4) для функционала δW, найдем, что на действительных процессах выполняются следующие тождества:

$$\int\limits_{\partial\hat{V}} \left(W_A I_B^A + W_A^{(0)} \frac{\partial I_B^A}{\partial f^{(0)}}\right) d^3\zeta + \int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm} \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(W_A^{\alpha\beta} l_\alpha f_\beta^{(k)} I_\beta^A\right) d^3\zeta = 0. \tag{10.6}$$

Выбирая в качестве области $\hat{V}$ бесконечно тонкий четырехмерный слой, содержащий произвольную часть гиперповерхности разрыва, из равенства (10.6) получим тождество, выполняющееся для действительных процессов на гиперповерхности разрыва [1]):

$$\left\{W_A I_B^A + W_A^{(0)} \frac{\partial I_B^A}{\partial f^{(0)}}\right\}_-^+ = 0. \tag{10.7}$$

Соотношения (10.6), (10.7) с учетом выражений (9.17) для коэффициентов W_A, $W_A^{(0)}$ и равенств (9.9), (9.39) можно записать также в виде

$$\int\limits_{\partial\hat{V}} \left(W_A^\alpha I_B^A + W_A^{\alpha\beta}\,\partial_\beta I_B^A\right) l_\alpha\, d^3\zeta + \int\limits_{\hat{\Sigma}_\pm} \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(W_A^{\alpha\beta} l_\alpha f_\beta^{(k)} I_B^A\right) d^3\zeta = 0, \tag{10.8}$$

$$\left\{\left(W_A^\alpha I_B^A + W_A^{\alpha\beta}\,\partial_\beta I_B^A\right) l_\alpha - \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(W_A^{\alpha\beta} l_\alpha f_\beta^{(k)} I_B^A\right)\right\}_-^+ = 0. \tag{10.9}$$

В области непрерывных процессов из соотношения (10.8) на основе формулы Остроградского — Гаусса (1.45) и произвольности области $\hat{V}$ следует дифференциальное уравнение

$$\partial_\alpha \sqrt{-g}\left(W_A^\alpha I_B^A + W_A^{\alpha\beta}\,\partial_\beta I_B^A\right) = 0. \tag{10.10}$$

---

[1]) В дальнейшем используются обозначения $\{A\}_\pm^+ \equiv A_+ + A_-$, $[A]_\pm^+ \equiv A_+ - A_-$, где A — любая величина, $A_\pm$ — ее значения на сторонах $\Sigma_\pm$ гиперповерхности разрыва.

Соотношения (10.6) — (10.10) выполняются тождественно на действительных процессах (т. е. для определяющих параметров $\mu^A(\xi^\nu)$, удовлетворяющих динамическим уравнениям, условиям на разрывах и связям), если существует допускаемое связями непрерывное конечно-параметрическое преобразование определяющих параметров (10.1), удовлетворяющее условию (10.5). Сформулированное утверждение принято называть *теоремой Нётер* [1]).

Отметим, что входящие в соотношения (10.6), (10.7) величины W_A, $W_A^{(0)}$ являются однозначно определенными функциями от определяющих параметров и их производных. Эти функции задаются формулами (9.17) и зависят также от характеристик локальных геометрических свойств рассматриваемой гиперповерхности. Второй интеграл в равенстве (10.6) сводится к интегралам по двумерным ребрам гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_{\pm}$. Подынтегральные выражения в них, как уже отмечалось, тоже являются однозначно определенными функциями от определяющих параметров и их производных (а также от геометрических характеристик гиперповерхности). В целом левая часть равенства (10.6) представляет собой сумму интегралов по гладким участкам рассматриваемой гиперповерхности и по ее ребрам. Подынтегральные выражения в них однозначно определены значениями определяющих параметров и их производных и, следовательно, могут иметь физический смысл [1—5]. Напротив, выражения в круглых скобках в соотношениях (10.8) — (10.10), вообще говоря, не являются однозначно определенными функциями определяющих параметров и их производных в силу неоднозначности процедуры построения величин W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}$ (см. § 9). Они определяются однозначно только при дополнительном условии $W_A^{[\alpha\beta]} = 0$, которое в дальнейшем считается выполненным. При этом выражениям в круглых скобках в соотношениях (10.8) — (10.10) также можно приписать физический смысл (см. ниже). В частности, если сумма $\delta I + \delta W^*$ не зависит от производных от вариаций $\delta\mu^A$ выше первого порядка, то из условия $W_A^{[\alpha\beta]} = 0$ следует, что $W_A^{\alpha\beta} \equiv 0$. Именно этот случай, для которого величины W_A^α определяются

---

[1]) Из приведенного доказательства тождеств (10.6) — (10.10) очевидно, что для их выполнения достаточно существования системы допускаемых связями вариаций (10.2), для которых справедливо условие (10.5).

однозначно обычно рассматривается при формулировке и доказательстве теоремы Нётер [6, 7].

Динамические характеристики, связанные с однородностью и изотропностью пространства событий. Рассмотрим в качестве примера преобразование определяющих параметров, соответствующее преобразованию Пуанкаре галилеевой системы координат наблюдателя x^ν. Пусть относительно исходной ГСК x^ν определяющие параметры имеют значения $\mu^A(\xi^\nu)$, а относительно некоторой другой ГСК x'^ν их значения равны $\mu'^A(\xi^\nu)$. Бесконечно малое преобразование ГСК x^ν представляет собой бесконечно малое преобразование Пуанкаре, которое на основании формул (1.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \left(\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu\right) x^\nu + \varepsilon^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu, \\ \delta x^\mu &\equiv x'^\mu - x^\mu = x^\nu \varepsilon^\mu_\nu + \varepsilon^\mu \end{aligned} \tag{10.11}$$

Здесь через $\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu$ и ε^μ обозначены фигурирующие в формулах (1.3) коэффициенты l'^μ_ν, l'^μ, соответствующие бесконечно малому преобразованию (ε^μ_ν, ε^μ — бесконечно малые величины). Из первого равенства (1.5), выражающего собой условие инвариантности интервала (1.1), вытекает соотношение

$$\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu} \qquad (\varepsilon^{\nu\mu} \equiv g^{\nu\varkappa}\varepsilon^\mu_\varkappa). \tag{10.12}$$

Таким образом, бесконечно малое преобразование ГСК x^ν полностью определяется параметрами $\varepsilon^{\mu\nu}$, ε^ν, среди которых десять независимых. Значения определяющих параметров μ'^A относительно ГСК x'^ν также должны полностью определяться их значениями μ^A относительно ГСК x^ν и коэффициентами l'^μ_ν, l'^μ преобразования Пуанкаре $x^\nu \to x'^\nu$. Поэтому для бесконечно малого преобразования Пуанкаре имеем

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \mu^A &= \mu'^A - \mu^A = \tfrac{1}{2} I^A_{\mu\nu}(\mu^B)\,\varepsilon^{\mu\nu} + I^A_\nu(\mu^B)\,\varepsilon^\nu, \\ I^A_{\mu\nu} &= -I^A_{\nu\mu}, \end{aligned} \tag{10.13}$$

т. е. в рассматриваемом случае роль вариаций δq^B в формулах (10.2) играют бесконечно малые величины $\varepsilon^{\mu\nu}$, ε^ν.

Пусть физическая система, описываемая определяющими параметрами $\mu^A(\xi^\nu)$, замкнута, т. е. отсутствуют любые внешние воздействия. Тогда в силу однородности и изотропности пустого пространства событий Минковского

значения определяющих параметров μ'^A должны удовлетворять связям, если им удовлетворяли исходные значения μ^A. Поэтому для вариаций (10.13) выполняется соотношение (10.3). Кроме того, в силу однородности и изотропности пространства событий при дополнительном изменении вариаций определяющих параметров μ^A, вызванном бесконечно малым преобразованием ГСК x^ν, значение функционала $\delta I + \delta W^*$ должно оставаться неизменным. Поэтому для вариаций определяющих параметров (10.13), полностью обусловленных бесконечно малым преобразованием ГСК x^ν, выполняется соотношение (10.5).

Таким образом, при отсутствии внешних воздействий все условия теоремы Нётер для преобразования (10.11) — (10.13) оказываются выполненными. Следовательно, для действительных процессов при $I_B^A = I_\nu^A$ и $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$ справедливы соотношения (10.6) — (10.10). Они называются *законом сохранения энергии-импульса* (при $I_B^A = I_\nu^A$) и *законом сохранения момента количества движения* (при $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$) *среды*. В этом случае первое подынтегральное выражение в равенстве (10.6) может рассматриваться как поток энергии-импульса (при $I_B^A = I_\nu^A$) или поток момента количества движения (при $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$) через элемент гиперповерхности $d^3\zeta$ и его двумерную границу. Второй интеграл в равенстве (10.6) сводится к интегралам по двумерным ребрам гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm$. Получающиеся при этом подынтегральные выражения определены однозначно и также могут рассматриваться соответственно как поток энергии-импульса или поток момента количества движения через элементы поверхности указанных двумерных ребер. Первое подынтегральное выражение в равенстве (10.8) может рассматриваться как поток энергии-импульса (при $I_B^A = I_\nu^A$) или поток момента количества движения (при $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$) через элемент гиперповерхности $d^3\zeta$ без его двумерной границы.

Входящие в тождества (10.8) — (10.10) величины

$$\begin{aligned} T_\nu^{\cdot\alpha} &\equiv W_A^\alpha I_\nu^A + W_A^{\alpha\beta}\,\partial_\beta I_\nu^A, \\ M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha} &\equiv W_A^\alpha I_{\mu\nu}^A + W_A^{\alpha\beta}\,\partial_\beta I_{\mu\nu}^A \end{aligned} \tag{10.14}$$

образуют компоненты тензоров второго и третьего рангов

$$T^{(2)} = T_\nu^{\cdot\alpha} \vartheta^\nu \vartheta_\alpha = T_\nu^{\cdot\mu} \vartheta^\nu \vartheta_\mu = T_\beta^{\cdot\alpha} \vartheta^\beta \vartheta_\alpha,$$

$$M^{(3)} = M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha} \vartheta^\mu \vartheta^\nu \vartheta_\alpha = M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} \vartheta^\mu \vartheta^\nu \vartheta_\lambda = M_{\beta\gamma}^{\cdot\cdot\alpha} \vartheta^\beta \vartheta^\gamma \vartheta_\alpha,$$

которые называются тензорами соответственно энергии-импульса и момента количества движения среды. Они определяются однозначно при дополнительном условии $W^{[\alpha\beta]}=0$. Для компонент этих тензоров в галилеевой системе координат наблюдателя приняты следующие специальные названия: T^{00} — плотность энергии среды; cT^{0k} — компоненты трехмерного вектора плотности потока энергии среды; T^{k0}/c — компоненты трехмерного вектора плотности импульса среды; T^{kr} — компоненты трехмерного тензора плотности потока импульса среды; $M^{\mu\nu 0}$ — компоненты плотности момента количества движения среды; $M^{\mu\nu k}$ — компоненты плотности потока момента количества движения среды.

Учитывая определение компонент $T_{\nu}^{\cdot\cdot\alpha}$ и $M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$ и тождество (1.34), соотношения (10.10) и (10.9) при $I_B^A=I_\nu^A$ и $I_B^A=I_{\mu\nu}^A$ можно записать соответственно в виде

$$\nabla_\alpha T_{\nu}^{\cdot\cdot\alpha}=0, \quad \left\{T_{\nu}^{\cdot\cdot\alpha}l_\alpha-\frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(W_A^{\alpha\beta}l_\alpha f_\beta^{(k)}I_\nu^A\right)\right\}_-^+=0, \quad (10.15)$$

$$\nabla_\alpha M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}=0, \quad \left\{M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}l_\alpha-\frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(W_A^{\alpha\beta}l_\alpha f_\beta^{(k)}I_{\mu\nu}^A\right)\right\}_-^+=0. \quad (10.16)$$

Первые равенства в (10.15), (10.16) называются соответственно *уравнениями энергии-импульса* и *момента количества движения среды*. Вторые равенства в (10.15), (10.16) представляют собой *условия баланса для потоков энергии-импульса* и *момента количества движения на разрыве*. Уравнение, получающееся из первого соотношения в (10.15) при $\nu=0$, называется *уравнением энергии*, а уравнения, получающиеся из первого соотношения в (10.15) при $\nu=1, 2, 3$, называются *уравнениями импульсов*.

Инвариантность относительно градиентных преобразований 4-потенциала электромагнитного поля. Пусть среди определяющих параметров μ^A присутствуют компоненты 4-потенциала электромагнитного поля A_α. Рассмотрим бесконечно малое градиентное преобразование 4-потенциала при неизменных остальных определяющих параметрах $\bar{\mu}^A$:

$$A'_\alpha=A_\alpha+\delta A_\alpha, \quad \delta A_\alpha\equiv\partial_\alpha\delta A, \quad \delta\bar{\mu}^A=0, \quad (10.17)$$

где $\delta A(\xi^\nu)$ — произвольная, зависящая от точки пространства событий бесконечно малая величина, непрерывная

на гиперповерхности разрыва и равная нулю на границе $\partial\hat{V}$ области $\hat{V}$:

$$\delta A^+ = \delta A^-, \quad \delta A\,|_{\partial\hat{V}} = 0. \tag{10.18}$$

Ограничимся наиболее важным случаем, когда выражение для лагранжиана не содержит производных от компонент A_α выше первого порядка. Как отмечалось в § 2, имеющие физический смысл уравнения должны быть инвариантны относительно общего градиентного преобразования (2.12) [8]. Математическим выражением этого утверждения применительно к динамическим уравнениям для непрерывных процессов и условиям на разрывах является требование обращения в нуль вариации действия δI при вариациях (10.17) компонент 4-потенциала электромагнитного поля и неизменных остальных определяющих параметрах[1]). Используя выражение (8.3) для δI, найдем

$$\begin{aligned}
&\delta_A I = \frac{1}{c}\,\delta \int\limits_{\hat{V}} \Lambda \sqrt{-g}\, d^4\xi = \\
&= \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}} \left[\frac{\delta \sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha} \partial_\alpha \delta A + \partial_\beta \left(\frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\beta A_\alpha} \partial_\alpha \delta A \right) \right] d^4\xi = 0, \\
&\frac{\delta \sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha} = \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\beta A_\alpha}.
\end{aligned} \tag{10.19}$$

Здесь предполагается, что величина δA удовлетворяет на разрыве и границе области $\hat{V}$ соотношениям (10.18). Это дополнительное ограничение возникает из-за того, что динамические уравнения для непрерывных процессов и условия на разрывах могут быть получены из вариационного уравнения при условии непрерывности 4-потенциала на разрыве $\hat{\Sigma}_c$ и обращения в нуль вариаций δA_α на границе $\partial\hat{V}$ (см. § 14). Первое из них представляет собой кинематическое соотношение $A_\alpha^+ = A_\alpha^-$ на $\hat{\Sigma}_c$ для определяющих параметров $A_\alpha(\xi^\nu)$. Второе же условие — это обычное ограничение на вариации определяющих па-

[1]) Если функционал δW^* зависит от δA_α, то, вообще говоря, для вариаций (10.17) должна обращаться в нуль только сумма $\delta I + \delta W^*$. Однако обычно действие всегда выбирают так, чтобы оно было инвариантно относительно градиентного преобразования (2.12). При этом для указанных вариаций δA_α всегда имеет место равенство $\delta I = 0$, что и предполагается в дальнейшем.

раметров, исключающее из рассмотрения соотношения на границе $\partial\hat{V}$.

Используя формулу Остроградского — Гаусса (1.45), выражение (10.19) для δI можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\delta_A I = \delta_V I + \delta_\Sigma I,\\
&\delta_V I = -\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(\partial_\alpha \frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}\right)\delta A\, d^4\xi,\\
&\delta_\Sigma I = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\frac{1}{\sqrt{-g}}\times\\
&\times\left(\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}\, l_\alpha \delta A + \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\beta A_\alpha}\, l_\beta \partial_\alpha \delta A\right) d^3\zeta.
\end{aligned} \tag{10.20}$$

Приведем функционал $\delta_\Sigma I$ к канонической форме, исключив производные от δA вдоль рассматриваемой гиперповерхности, с учетом условия $\delta A = 0$ на $\partial\hat{V}$:

$$\begin{aligned}
\delta_\Sigma I = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{\Sigma}_\pm}&\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}\, l_\alpha - \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\beta A_\alpha}\, l_\beta f_\alpha^{(k)}\right)\times\\
&\times\delta A\, d^3\zeta + \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\beta A_\alpha}\, l_\beta f_\alpha^{(0)}\frac{\partial\delta A}{\partial f^{(0)}}\right) d^3\zeta +\\
&+\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{\Sigma}_\pm}\frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\beta A_\alpha}\, l_\beta f_\alpha^{(k)}\delta A\right) d^3\zeta.
\end{aligned} \tag{10.21}$$

Как обычно, последний интеграл здесь сводится к интегралу по двумерным ребрам (и краям) гиперповерхности $\hat{\Sigma}_\pm$. Поэтому в силу произвольности в области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$ функции $\delta A(\xi^\nu)$, произвольности на границе $\partial\hat{V}$ и на обеих сторонах гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_\pm$ функции $\partial\delta A/\partial f^{(0)}$ и произвольности на одной из сторон гиперповерхности разрыва функции δA (напомним, что $\delta A^+ = \delta A^-$) из условия $\delta I = 0$ и равенств (10.20), (10.21) получим следующие тождества:

$$\partial_\alpha \frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha} \equiv 0, \quad \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\beta A_\alpha}\, l_\beta f_\alpha^{(0)} \equiv 0, \tag{10.22}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}\, l_\alpha - \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\alpha A_\beta}\, l_\alpha f_\beta^{(k)}\right\}_-^+ \equiv 0, \tag{10.23}$$

которым должен удовлетворять лагранжиан Λ. Здесь фигурные скобки означают, что берется сумма значений стоящего в них выражения на двух сторонах гиперповерхности разрыва [1]). Отметим, что первое равенство (10.22) остается в силе и в случае, когда лагранжиан зависит от производных второго порядка от компонент A_α.

Подставляя во второе равенство (10.22) выражение (9.39) для $f_\alpha^{(0)}$ ($f_\alpha^{(0)} = l_\alpha/\sqrt{-g}$) и учитывая произвольность компонент l_α, найдем, что

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\beta A_\alpha} = -\frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\alpha A_\beta}. \tag{10.24}$$

Это соотношение означает, что функция $\sqrt{-g}\,\Lambda$ зависит от производных 4-потенциала электромагнитного поля только через комбинации $\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, которые на основании равенств (5.36), (1.36) совпадают с компонентами тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$:

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Так как величина $\sqrt{-g}$ не зависит от характеристик электромагнитного поля, то лагранжиан Λ также может зависеть от производных $\partial_\alpha A_\beta$ только через компоненты $F_{\alpha\beta}$

$$\Lambda = \Lambda(F_{\alpha\beta},\ A_\alpha,\ \ldots) \tag{10.25}$$

Применяя теперь первое тождество (9.34) при $\sqrt{-g}\,\Omega^{\alpha\beta} = \partial \sqrt{-g}\,\Lambda/\partial\partial_\alpha A_\beta$, запишем равенство (10.23) в виде

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha} l_\alpha - \frac{1}{\sqrt{-g}} l_\alpha \partial_\beta \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \partial_\alpha A_\beta}\right\}_-^+ \equiv 0.$$

Подставляя сюда и в первое равенство (10.22) выражение (10.19) для $\delta\sqrt{-g}\,\Lambda/\delta A_\alpha$ и учитывая антисимметричность величин $\partial\sqrt{-g}\,\Lambda/\partial\partial_\alpha A_\beta$ по индексам α, β, найдем, что

$$\partial_\alpha \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial A_\alpha} = 0, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial A_\alpha} l_\alpha\right\}_-^+ = 0. \tag{10.26}$$

Так как величина $\sqrt{-g}$ не зависит от компонент A_α, то, используя формулу (1.35), соотношения (10.26) легко

[1]) Следует помнить, что, вообще говоря, $l_\alpha^+ \neq l_\alpha^-$.

записать в ковариантном виде

$$\nabla_\alpha (\partial\Lambda/\partial A_\alpha) = 0, \quad \{l_\alpha \partial\Lambda/\partial A_\alpha\}_-^+ = 0. \qquad (10.27)$$

Этим условиям должны удовлетворять производные от лагранжиана по компонентам 4-потенциала электромагнитного поля A_α в области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$ (первое равенство (10.27)) и на гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$ (второе равенство (10.27)).

В пятой главе будет показано, что лагранжиан Λ и функционал δW^* можно выбрать так, что производные $\partial\Lambda/\partial A_\alpha$ будут совпадать с компонентами J^α 4-вектора плотности электрического тока в сплошной среде, поделенными на $-c$ (c — максимальная скорость распространения взаимодействий). Тогда соотношения (10.27) будут выражать закон сохранения электрического заряда, который, таким образом, оказывается связанным с инвариантностью вариационного уравнения относительно градиентных преобразований 4-потенциала электромагнитного поля, обусловленной неоднозначностью определения 4-потенциала. Отметим, что уравнения (10.27) тождественно удовлетворяются в силу параметрического представления (5.14) для компонент J^α через параметры электрического тока ψ^α и кинематических условий на гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$ для функций $\psi^\alpha(\xi^\nu)$, которые будут рассмотрены в § 14.

Отметим также, что, пользуясь произволом в определении 4-потенциала электромагнитного поля A, всегда можно наложить дополнительное условие

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}) = A_\alpha u^\alpha = 0, \qquad (10.28)$$

которое эквивалентно условию $A_0 = 0$ (так как $u^a = 0$). Действительно, в результате следующего градиентного преобразования (здесь $d\tau = \sqrt{g_{00}}\, d\xi^0$):

$$A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha A, \quad A \equiv -\int A_0\, d\xi^0 = -\int A_\alpha u^\alpha\, d\tau$$

получим 4-потенциал электромагнитного поля, удовлетворяющий условию $A'_0 = 0$ и, следовательно, условию (10.28).

Некоторые свойства связей. Обозначим через $\overline{\mu}^A$ такие определяющие параметры, которые по всем входящим в состав мультииндекса A тензорным индексам, относящимся к ССК ξ^α, должны быть ортогональны 4-скорости сплошной среды. Согласно этому определению, среди па-

раметров $\bar{\mu}^A$ могут присутствовать и такие, которые вообще не имеют тензорных индексов, относящихся к ССК ξ^α. Легко видеть, что к числу $\bar{\mu}^A$ принадлежат все определяющие параметры (7.1), кроме компонент 4-потенциала электромагнитного поля A_α. Указанные условия ортогональности параметров $\bar{\mu}^A$ и 4-скорости сплошной среды представляют собой связи, которые можно записать так:

$$u_\alpha \bar{\mu}^{\alpha,\, A/\alpha} = 0, \quad u^\beta \bar{\mu}_\beta^{A/\beta} = 0. \tag{10.29}$$

Здесь введены обозначения: α (β) — любой входящий в состав мультииндекса A контравариантный (ковариантный) индекс, относящийся к ССК ξ^α; A/α (A/β) — мультииндекс, пробегающий значения, которые получаются из значений мультииндекса A, содержащих индекс α (β), путем вычеркивания этого индекса. Примем еще следующие обозначения:

$$\bar{\mu}^{A^0} = \bar{\mu}^{\alpha,\, A/\alpha}|_{\alpha=0}, \quad \bar{\mu}^{A_0} = \bar{\mu}_\beta^{A/\beta}|_{\beta=0}, \tag{10.30}$$

где A^0 (A_0) — те значения мультииндекса A, для которых хотя бы один из входящих в состав мультииндекса A контравариантных (ковариантных) тензорных индексов, относящихся к ССК ξ^α, принимает значение 0. Например, из определяющих параметров (7.1) к числу $\bar{\mu}^{A^0}$ принадлежат значения параметров ψ_i^α, ψ^α, φ_i^α, φ^α при $\alpha = 0$, а к числу $\bar{\mu}^{A_0}$ — значения параметров $p_{i\beta}$, p_β, $m_{i\beta}$, m_β при $\beta = 0$.

Связи вида (10.29) можно разрешить относительно $\bar{\mu}^{A^0}$ и $\bar{\mu}^{A_0}$, причем

$$\bar{\mu}^{A^0} = \mu^{A^0}\left(x_\alpha^\nu,\ \bar{\mu}^{A/A^0}\right), \quad \mu^{A_0} = 0. \tag{10.31}$$

Здесь (и ниже) мультииндекс A/A^0 пробегает значения, получаемые исключением из значений мультииндекса A тех, которые принадлежат к A^0. Производные x_α^ν присутствуют в первом равенстве (10.31) из-за того, что они входят в выражение для компонент 4-скорости u_α. Например, для параметров ψ^α и p_β, таких, что $u_\alpha \psi^\alpha = 0$ и $u^\beta p_\beta = 0$, имеем

$$\psi^0 = -u^0 u_a \psi^a, \quad p_0 = 0.$$

Так как связи (10.29) содержат производные $x_\alpha^\nu = \partial x^\nu / \partial \xi^\alpha$ (через них выражаются компоненты 4-скорости сплошной среды), то с помощью таких связей, вообще

говоря, можно преобразовать выражения для действия I и функционала δW^* так, что изменятся порядки максимальных производных, входящих в I и δW^*. Поэтому необходимо уточнить смысл утверждения о том, что выражения (7.18), (7.19) для действия I и функционала δW^* не содержат производных определяющих параметров выше второго порядка. А именно будем предполагать, что после исключения из I и δW^* параметров $\bar{\mu}^{A^0}$, $\bar{\mu}^{A_0}$ (при помощи равенств типа (10.31)) выражения для I и δW^* не содержат производных ог определяющих параметров выше второго порядка.

Кроме связей типа (10.29) могут быть, конечно, и другие связи. В дальнейшем ограничимся частным случаем, когда после исключения параметров $\bar{\mu}^{A^0}$, $\bar{\mu}^{A_0}$ эти связи можно представить в виде

$$R^B(\bar{\mu}^{A/A^0}) = 0, \tag{10.32}$$

не содержащем значений $\bar{\mu}^{A^0}_A$, а также параметров μ^A, не принадлежащих к числу $\bar{\mu}^A$. Легко видеть, что связи (7.7), рассматривавшиеся в § 7 в качестве примеров, принадлежат к связям типа (10.29) или (10.32). Действительно, связи (7.7), в которых фигурируют компоненты 4-скорости сплошной среды, очевидно, относятся к типу (10.29). Остальные же связи (7.7) приводятся к виду (10.32). Покажем это на примере связей

$$\psi^\alpha = \sum_{i=1}^{N} e_i \psi_i^\alpha, \quad p_\beta = \sum_{i=1}^{N} p_{i\beta}. \tag{10.33}$$

Согласно равенствам (7.7), $u_\alpha \psi^\alpha = 0$, $u_\alpha \psi_i^\alpha = 0$. Это связи типа (10.29). Разрешим их относительно ψ^0 и ψ_i^0:

$$\psi^0 = -u^0 u_a \psi^a, \quad \psi_i^0 = -u^0 u_a \psi_i^a.$$

Подставляя найденные выражения для ψ^0 и ψ_i^0 в первое соотношение (10.33), найдем, что оно при $\alpha = 0$ является следствием равенств

$$\psi^a = \sum_{i=1}^{N} e_i \psi_i^a, \tag{10.34}$$

получаемых из первого соотношения (10.33) при $\alpha = 1, 2, 3$. Таким образом, связи, задаваемые первым равенством

(10.33), сводятся к связям, относящимся к виду (10.32). Для связей, задаваемых вторым равенством (10.33), это еще более очевидно, так как в силу равенств $u^\beta p_\beta = 0$ и $u^\beta p_{i\beta} = 0$ (связи типа (10.29)) имеем $p_0 = p_{i0} = 0$.

Предположим, что наложенные на определяющие параметры μ^A связи либо принадлежат к виду (10.29), либо сводятся к виду (10.32). Тогда их можно сформулировать так, что они будут описываться соотношениями

$$R^B(\bar{\mu}^{A/A^0}, \mu^{A^0}, x^\nu_\alpha) = 0, \tag{10.35}$$

которые обладают следующими свойствами. При любых фиксированных значениях мультииндекса A^0 от параметра $\bar{\mu}^{A^0}$ зависит лишь одна из функций R^B (обозначим ее через $R^{B(A^0)}$). Среди функций R^B могут быть также функции, не зависящие от параметров $\bar{\mu}^{A^0}$ ни при каких значениях мультииндекса A^0. От производных $x^\nu_\alpha = \partial x^\nu / \xi^\alpha$ зависят только функции $R^{B(A^0)}$. В качестве соотношений (10.35), обладающих указанными свойствами, можно использовать, например, соотношения (10.31), (10.32). Поэтому приведение рассматриваемых связей к виду (10.35), действительно, всегда возможно.

Тождества, вытекающие из свойств связей. Для рассматриваемых связей можно продолжить функцию $\Lambda\sqrt{-g}$ и функционал δW^* на любые значения аргументов μ^A (не удовлетворяющие связям) так, что коэффициенты при вариациях параметров $\bar{\mu}^{A^0}$ и их производных в выражениях (8.2) и (7.19) для функционалов δI и δW^* будут равны нулю[1]):

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\bar{\mu}^{A^0}} = \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\alpha\bar{\mu}^{A^0}} = \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\partial_\alpha\partial_\beta\bar{\mu}^{A^0}} = 0,$$
$$\bar{M}_{A^0} = \bar{M}^\alpha_{A^0} = \bar{M}^{\alpha\beta}_{A^0} = 0. \tag{10.36}$$

Этого можно добиться, например, исключив при помощи первого равенства (10.31) параметры $\bar{\mu}^{A^0}$ из функционалов I и δW^* и продолжив затем их на любые значения $\bar{\mu}^{A^0}$ так, чтобы действие I и функционал δW^* от $\bar{\mu}^{A^0}$ не зависели. При этом по предположению максимальный порядок вхо-

[1]) Коэффициенты при $\delta\bar{\mu}^A$, $\delta\partial_\alpha\mu^A$, $\delta\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A$ в выражении (7.19) для δW^* обозначаются соответственно через $\bar{M}_A$, $\bar{M}^\alpha_A$, $\bar{M}^{\alpha\beta}_A$.

дящих в выражения для I и δW^* производных от определяющих параметров не будет превышать число 2.

Динамические уравнения (8.29) для определяющих параметров $\bar{\mu}^{A^0}$ будут иметь вид

$$\frac{\delta \sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta \bar{\mu}^{A^0}} + \frac{\delta w^*}{\delta \bar{\mu}^{A^0}} + \lambda_B \sqrt{-g}\,\frac{\partial R^B}{\partial \bar{\mu}^{A^0}} = 0, \qquad (10.37)$$

так как связи (10.35) не содержат производных от $\bar{\mu}^{A^0}$ (параметры $x^\nu(\xi^\alpha)$, производные от которых входят в равенства (10.35), к числу μ^{A^0} не принадлежат). На основании равенств (10.36) и выражений (8.5) и (8.8) для $\delta\sqrt{-g}\,\Lambda/\delta\bar{\mu}^{A^0}$ и $\delta w^*/\delta\bar{\mu}^{A^0}$, в которых надо заменить μ на $\bar{\mu}$ и M на $\bar{M}$, найдем, что первые два слагаемых в равенстве (10.37) равны нулю. Кроме того, из перечисленных выше свойств связей (10.35) следует, что $\partial R^B/\partial\bar{\mu}^{A^0} \neq 0$ только при $B = B(A^0)$, т. е. только для той единственной функции $R^{B(A^0)}$, которая зависит от $\bar{\mu}^{A^0}$ при данном значении мультииндекса A^0. В результате из уравнений (10.37) находим

$$\lambda_{B(A^0)} = 0, \qquad (10.38)$$

т. е. все неопределенные множители Лагранжа для связей (10.35), зависящих от параметров $\bar{\mu}^{A^0}$, равны нулю. Так как связи (10.35) зависят от параметров $\bar{\mu}^{A^0}$ и производных $\partial x^\nu/\partial\xi^\alpha \equiv x^\nu_\alpha$ только при $B = B(A^0)$, выражение (8.19) для функционала δR можно записать в виде (учитывая, что $\lambda_{B(A^0)} = 0$)

$$\delta R = \frac{1}{c}\int \frac{\delta r}{\delta \mu^A}\,\delta\mu^A\,d^4\xi, \quad \frac{\delta r}{\delta\mu^A} = \lambda_B \frac{\partial R^B}{\partial \mu^A}. \qquad (10.39)$$

Из этого выражения следует, что для рассматриваемых связей определенный равенствами (8.21), (8.22) функционал $\delta_\Sigma R$ тождественно равен нулю. Тогда на основании уравнения $\delta_\Sigma I + \delta_\Sigma W^* + \delta_\Sigma R + \delta W = 0$ (см. конец § 8) имеем

$$\delta W = -\delta_\Sigma I - \delta_\Sigma W^*. \qquad (10.40)$$

В выражениях же (8.30), (9.1) и (9.2) для функционала δW и коэффициентов W^α_A, $W^{\alpha\beta}_A$ надо положить

$$\delta r^\alpha = \lambda_B R^{\alpha B}_A\,\delta\mu^A = 0, \quad \lambda_B R^{\alpha B}_A = 0, \qquad (10.41)$$

так как при $B \neq B(A^0)$ функции R^B от производных определяющих параметров не зависят, а при $B = B(A^0)$ имеем $\lambda_B = 0$. Поэтому связи вида (10.35) на выражение для функционала δW не влияют.

§ 11. Преобразование сопутствующего «времени» и свойства вариационного уравнения

Преобразование сопутствующего «времени». Как уже отмечалось выше (см. § 7), сопутствующая координата ξ^0 (сопутствующее «время») представляет собой произвольный параметр точек на мировых линиях сплошной среды и не имеет физического смысла. Поэтому преобразование этого параметра

$$\xi'^0 = \xi'^0(\xi^\alpha, \xi^0), \quad \xi'^\alpha = \xi^\alpha \tag{11.1}$$

не должно влиять ни на движение сплошной среды (т. е. на расположение ее мировых линий относительно ГСК наблюдателя), ни на протекание различных внутренних процессов. Учитывая это обстоятельство, можно получить некоторые важные соотношения, которым должны удовлетворять производные от лагранжиана и коэффициенты при вариациях определяющих параметров в выражении для функционала δW^*. Для этого предварительно необходимо изучить поведение определяющих параметров при бесконечно малом преобразовании типа (11.1), которое можно записать в виде

$$\xi'^\alpha = \xi^\alpha + \delta^\alpha_0 \delta\xi^0, \quad \delta\xi^0 = \delta\xi^0(\xi^\beta). \tag{11.2}$$

Очевидно, что преобразования (11.1), (11.2) являются частными случаями общего преобразования криволинейной системы координат ξ^α в пространстве событий Минковского. Пусть в состав мультииндекса A входят тензорные индексы $A(\xi)$, относящиеся к ССК ξ^α. Тогда при изменении параметра ξ^0 определяющие параметры μ^A будут преобразовываться как компоненты тензоров с индексами $A(\xi)$. При этом входящие в состав мультииндекса A нетензорные индексы, а также тензорные индексы, относящиеся к ГСК наблюдателя x^ν, не оказывают влияния на законы преобразования определяющих параметров μ^A. Например, определяющие параметры (7.1) при бесконечно малом пре-

образовании (11.2) будут преобразовываться по законам

$$x'^{\nu}(\xi'^{\alpha}) = x^{\nu}(\xi^{\alpha}); \tag{11.3}$$

$$A_{\nu}(\xi^{\alpha}) = \frac{\partial \xi'^{\beta}}{\partial \xi^{\nu}} A'_{\beta}(\xi'^{\alpha}) = A'_{\nu}(\xi'^{\alpha}) + \frac{\partial\, \delta\xi^0}{\partial \xi^{\nu}} \delta_0^{\beta} A_{\beta}(\xi'^{\alpha}); \tag{11.4}$$

$$p_{i\alpha}(\xi^{\nu}) = p'_{i\alpha}(\xi'^{\nu}), \quad m_{i\alpha}(\xi^{\nu}) = m'_{i\alpha}(\xi'^{\nu}); \tag{11.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\psi_i'^{\nu}}{\sqrt{\gamma'}}(\xi'^{\alpha}) &= \frac{\partial \xi'^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\psi_i^{\beta}}{\sqrt{\gamma}}(\xi^{\alpha}) = \frac{\psi_i^{\nu}}{\sqrt{\gamma}}(\xi^{\alpha}) + \delta_0^{\nu} \frac{\partial\, \delta\xi^0}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\psi_i^{\beta}}{\sqrt{\gamma}}(\xi^{\alpha}), \\ \frac{\varphi_i'^{\nu}}{\sqrt{\gamma'}}(\xi'^{\alpha}) &= \frac{\partial \xi'^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\varphi_i^{\beta}}{\sqrt{\gamma}}(\xi^{\alpha}) = \frac{\varphi_i^{\nu}}{\sqrt{\gamma}}(\xi^{\alpha}) + \delta_0^{\nu} \frac{\partial\, \delta\xi^0}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\varphi_i^{\beta}}{\sqrt{\gamma}}(\xi^{\alpha}); \end{aligned} \tag{11.6}$$

$$\frac{\chi'_r}{\sqrt{\gamma'}}(\xi'^{\alpha}) = \frac{\chi_r}{\sqrt{\gamma}}(\xi^{\alpha}), \quad \frac{\varphi'_i}{\sqrt{\gamma'}}(\xi'^{\alpha}) = \frac{\varphi_i}{\sqrt{\gamma}}(\xi^{\alpha}). \tag{11.7}$$

Равенство (11.3) следует непосредственно из неизменности движения сплошной среды при преобразовании ССК ξ^{α}. Соотношения (11.5) доказываются аналогично соотношению (11.4) с учетом связей

$$u^{\beta} p_{i\beta} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \delta_0^{\beta} p_{i\beta} = 0, \quad u^{\beta} m_{i\beta} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \delta_0^{\beta} m_{i\beta} = 0,$$

вытекающих из определения компонент $p_{i\beta}$, $m_{i\beta}$ (см. § 5). Равенства (11.6), (11.7) следуют из доказанного в предыдущей главе свойства параметров ψ_i^{ν}, φ_i^{ν}, χ_r, φ_i, согласно которому при произвольных преобразованиях ССК ξ^{α} величины $\psi_i^{\alpha}/\sqrt{\gamma}$, $\varphi_i^{\alpha}/\sqrt{\gamma}$ ведут себя как компоненты векторов с индексом α, а величины $\chi_r/\sqrt{\gamma}$, $\varphi_i/\sqrt{\gamma}$ — как скаляры. Законы преобразования для перечисленных в (7.1) параметров p_{α}, m_{α}, ψ^{α}, φ^{α}, φ легко получить из равенств (11.5) — (11.7), опуская в них индекс i.

Компоненты пространственного метрического тензора $\gamma_{\alpha\beta}$, согласно равенствам (3.21), удовлетворяют условиям

$$u^{\alpha}\gamma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \delta_0^{\alpha} \gamma_{\alpha\beta} = 0, \quad u^{\beta}\gamma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \delta_0^{\beta} \gamma_{\alpha\beta} = 0.$$

Поэтому закон преобразования компонент $\gamma_{\alpha\beta}$ при бесконечно малом изменении параметра ξ^0 имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\xi^{\nu}) &= \frac{\partial \xi'^{\delta}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \xi'^{\varepsilon}}{\partial \xi^{\beta}} \gamma'_{\delta\varepsilon}(\xi'^{\nu}) = \\ &= \gamma'_{\alpha\beta}(\xi'^{\nu}) + \delta_0^{\delta} \frac{\partial \delta\xi^0}{\partial \xi^{\alpha}} \gamma'_{\delta\beta} + \delta_0^{\varepsilon} \frac{\partial \delta\xi^0}{\partial \xi^{\beta}} \gamma'_{\alpha\varepsilon} = \gamma'_{\alpha\beta}(\xi'^{\nu}), \end{aligned}$$

т. е. они ведут себя как скаляры

$$\gamma_{\alpha\beta}(\xi^\nu) = \gamma'_{\alpha\beta}(\xi'^\nu). \tag{11.8}$$

Следовательно,

$$|\gamma_{ab}| = |\gamma'_{ab}|, \quad \sqrt{\gamma(\xi^\alpha)} = \sqrt{\gamma'(\xi'^\alpha)}, \tag{11.9}$$

и в формулах (11.6), (11.7) коэффициенты $1/\sqrt{\gamma}$ и $1/\sqrt{\gamma'}$ можно опустить.

Из равенств, аналогичных равенствам (11.6), следует, что при бесконечно малом изменении параметра ξ^0 контравариантные компоненты μ^α любого 4-вектора, соответствующие значениям тензорного индекса $\alpha = 1, 2, 3$, ведут себя как скаляры

$$\mu'^a(\xi'^\nu) = \mu^a(\xi^\nu). \tag{11.10}$$

Закон же преобразования компоненты μ^0 более сложный:

$$\mu'^0(\xi'^\nu) = \mu^0(\xi^\nu) + \frac{\partial\delta\xi^0}{\partial\xi^\alpha}\mu^\alpha(\xi^\nu). \tag{11.11}$$

Кроме того, из равенств, аналогичных равенствам (11.4), следует, что все ковариантные компоненты μ_α любого 4-вектора, ортогонального 4-скорости сплошной среды, ведут себя при бесконечно малом изменении параметра ξ^0 как скаляры

$$\mu'_\alpha(\xi'^\nu) = \mu_\alpha(\xi^\nu) \qquad (u^\alpha\mu_\alpha \equiv 0). \tag{11.12}$$

Равенства (11.10) — (11.12) очевидным образом обобщаются на случай любых определяющих параметров μ^A, которые ортогональны 4-скорости сплошной среды по всем входящим в состав мультииндекса A ковариантным тензорным индексам, относящимся к ССК ξ^α:

$$\begin{aligned} \mu'^{A/A^0}(\xi'^\nu) &= \mu^{A/A^0}(\xi^\nu), \\ \mu'^{A^0}(\xi'^\nu) &= \mu^{A^0}(\xi^\nu) + \delta L_A^{A^0}\mu^A(\xi^\nu). \end{aligned} \tag{11.13}$$

Здесь A^0 — те значения мультииндекса A, для которых хотя бы один из входящих в A контравариантных индексов, относящихся к ССК ξ^α, принимает значение нуль. Параметры μ^{A/A^0} получаются путем исключения параметров μ^{A^0} из множества рассматриваемых определяющих

параметров μ^A. Через $\delta L_A^{A^0}$ обозначена сумма произведений, каждое из которых состоит из символов Кронекера и одной производной $\partial_\alpha \delta\xi^0$ (каждому нулю в рассматриваемом значении мультииндекса A^0 соответствует одно произведение, в котором всем индексам из A^0 соответствуют символы Кронекера, а выбранному нулевому индексу — производная $\partial_\alpha \delta\xi^0$). Условие ортогональности 4-скорости среды и параметров μ^A по всем входящим в состав мультииндекса A ковариантным тензорным индексам, относящимся к ССК ξ^α, означает, что функции $\mu^A(\xi^\nu)$ должны удовлетворять связям, задаваемым вторым равенством (10.29). Отметим, что благодаря соотношениям (11.9) равенства (11.10) — (11.13) остаются в силе и для определяющих параметров, являющихся умноженными на $\sqrt{\gamma}$ компонентами тензоров.

Как указывалось в § 7, лагранжиан и функционал δW^* зависят не только от определяющих параметров $\mu^A(\xi^\nu)$, но также от функций $\varkappa_B(\xi^a)$, представляющих различные заданные (неварьируемые) характеристики сплошной среды или физические постоянные. По своему физическому смыслу параметры $\varkappa_B(\xi^a)$ остаются постоянными вдоль мировых линий сплошной среды (т. е. зависят от ξ^a, но не от ξ^0) и не должны зависеть от выбора ГСК наблюдателя x^ν. Поэтому все компоненты тензоров, присутствующие среди параметров $\varkappa_B$, относятся к ССК ξ^α. Кроме того, параметры $\varkappa_B$ не должны зависеть также от выбора способа параметризации точек на мировых линиях сплошной среды, и, следовательно, они должны быть инвариантны относительно преобразований (11.1) или (11.2):

$$\varkappa'_B(\xi'^\nu) = \varkappa_B(\xi^\nu). \tag{11.14}$$

Для выполнения этого равенства необходимо и достаточно, чтобы мультииндекс B не содержал контравариантных тензорных индексов, а по всем ковариантным тензорным индексам, входящим в состав B, параметры $\varkappa_B$ были бы ортогональны 4-скорости сплошной среды, т. е. удовлетворяли связям типа (10.29). Так как $u^\alpha = \delta_0^\alpha/\sqrt{g_{00}}$, то последнее утверждение означает, что $\varkappa_{B_0} \equiv 0$ (здесь B_0 — те значения мультииндекса B, для которых хотя бы один из входящих в B ковариантных тензорных индексов принимает значение нуль). Достаточность сформулированного условия вытекает из первого соотношения (11.13), записанного для параметров $\varkappa_B$. Его же необходимость сле-

дует из второго соотношения (11.13), записанного для параметров $\varkappa_B$ и показывающего необходимость отсутствия в мультииндексе B контравариантных индексов, и из соотношения типа (11.4), показывающего необходимость условия ортогональности 4-скорости и параметров $\varkappa_B$ по ковариантным индексам из B (если $u^\beta A_\beta \neq 0$, то из (11.4) следует неравенство $A_\gamma \neq A'_\gamma$).

Вариация δ^0. Пусть определяющие параметры $\mu^A(\xi^\gamma)$ описывают какой-нибудь действительный процесс. Обозначим через $\mu'^A(\xi'^\gamma)$ значения определяющих параметров $\mu^A(\xi^\gamma)$ относительно ССК ξ'^γ, которая связана с исходной ССК ξ^α преобразованием (11.2), т. е. получается из нее в результате бесконечно малого изменения параметризации точек мировых линий сплошной среды. Будем рассматривать значения функций μ'^A при $\xi'^\gamma = \xi^\gamma$ как варьированные функции $\mu^A(\xi^\gamma)$:

$$\mu'^A(\xi^\gamma) = \mu^A(\xi^\gamma) + \delta^0\mu^A.$$

Для вариации $\delta^0\mu^A$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка по сравнению с $\delta\xi^0$ справедливо выражение

$$\delta^0\mu^A = \mu'^A(\xi'^\gamma) - \mu^A(\xi^\gamma) + \frac{\partial\mu^A}{\partial\xi^\gamma}(\xi^\gamma - \xi'^\gamma) = \\ = -(\partial_\alpha\mu^A)\,\delta^\alpha_0\,\delta\xi^0 + \mu'^A(\xi'^\gamma) - \mu^A(\xi^\gamma), \qquad (11.15)$$

в котором $\mu^A(\xi^\gamma)$ и, следовательно, $\mu'^A(\xi'^\gamma)$ — значения определяющих параметров для действительных процессов.

Если определяющие параметры ортогональны 4-скорости сплошной среды по всем входящим в состав мультииндекса A ковариантным тензорным индексам, относящимся к ССК ξ^α, то из общего выражения (11.15) и соотношений (11.13) вытекают следующие формулы для $\delta^0\mu^A$:

$$\delta^0\mu^{A/A^0} = -(\partial_0\mu^{A/A^0})\,\delta\xi^0, \\ \delta^0\mu^{A^0} = -(\partial_0\mu^{A^0})\,\delta\xi^0 + \delta L^{A^0}_A\mu^A. \qquad (11.16)$$

Например, для вариации δ^0 от определяющих параметров (7.1), за исключением компонент 4-потенциала электромагнитного поля A_α, на основании общего выражения (11.15) для $\delta^0\mu^A$ и равенств (11.3)—(11.9) имеют

место такие выражения:

$$\delta^0 x^\nu = -\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^0}\delta\xi^0 = -\sqrt{g_{00}}\,u^\nu\,\delta\xi^0, \tag{11.17}$$

$$\delta^0 p_{i\alpha} = -\frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial \xi^0}\delta\xi^0, \quad \delta^0 m_{i\alpha} = -\frac{\partial m_{i\alpha}}{\partial \xi^0}\delta\xi^0, \tag{11.18}$$

$$\begin{aligned}\delta^0\psi_i^\gamma &= -\frac{\partial\psi_i^\gamma}{\partial\xi^0}\delta\xi^0 + \delta_0^\gamma\psi_i^\beta\,\partial_\beta\delta\xi^0,\\ \delta^0\chi_r &= -\frac{\partial\chi_r}{\partial\xi^0}\delta\xi^0,\end{aligned} \tag{11.19}$$

$$\begin{aligned}\delta^0\varphi_i^\gamma &= -\frac{\partial\varphi_i^\gamma}{\partial\xi^0}\delta\xi^0 + \delta_0^\gamma\varphi_i^\beta\,\partial_\beta\delta\xi^0,\\ \delta^0\varphi_i &= -\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi^0}\delta\xi^0.\end{aligned} \tag{11.20}$$

Остальные перечисленные в (7.1) параметры p_α, m_α, ψ^α, φ^α, φ (кроме A_α) удовлетворяют соотношениям, которые легко получить из соотношений (11.18) — (11.20), опуская в них индекс i. Для вариаций же $\delta^0 A_\alpha$, используя равенства (11.15), (11.4), можно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned}\delta^0 A_\alpha &= -\delta_0^\beta(\partial_\beta A_\alpha)\,\delta\xi^0 - \delta_0^\beta A_\beta\partial_\alpha\,\delta\xi^0 =\\ &= (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\,\delta_0^\beta\,\delta\xi^0 - \partial_\alpha(\delta_0^\beta A_\beta\,\delta\xi^0) =\\ &= F_{\alpha\beta}\delta_0^\beta\,\delta\xi^0 - \partial_\alpha(\delta_0^\beta A_\beta\,\delta\xi^0).\end{aligned}$$

Учитывая, что $u^\alpha = \delta_0^\alpha/\sqrt{g_{00}}$, найдем окончательное выражение для $\delta^0 A_\alpha$

$$\delta^0 A_\alpha = \sqrt{g_{00}}\,u^\beta F_{\alpha\beta}\,\delta\xi^0 - \partial_\alpha(\sqrt{g_{00}}\,u^\beta A_\beta\,\delta\xi^0). \tag{11.21}$$

Отметим, что второе слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль, если на 4-потенциал электромагнитного поля наложить условие $u^\alpha A_\alpha = 0$ (см. (10.28)). В этом случае

$$A_0 = \delta_0^\alpha A_\alpha = 0, \quad \delta_0^\beta F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_0 - \partial_0 A_\alpha = -\partial_0 A_\alpha,$$

и в полном соответствии с общим результатом (11.16) имеем

$$\delta^0 A_\alpha = \sqrt{g_{00}}\,u^\beta F_{\alpha\beta}\,\delta\xi^0 = -\partial_0 A_\alpha\,\delta\xi^0.$$

Значения функций $\varkappa'_B$ при $\xi'^\nu = \xi^\nu$ также можно рассматривать как варьированные функции $\varkappa_B(\xi^\nu)$, причем в силу равенства (11.14) и условия $\partial\varkappa_B/\partial\xi^0 = 0$ справедливы

соотношения

$$\delta^0 \varkappa_B = \varkappa'_B(\xi'^\nu) - \varkappa_B(\xi^\nu) =$$
$$= \varkappa'_B(\xi'^\nu) - \varkappa_B(\xi^\nu) - (\partial_\alpha \varkappa_B)\,\delta^\alpha_0 \delta\xi^0 = \delta\xi^0\, \partial\varkappa_B/\partial\xi^0 = 0.$$

Таким образом, введенная выше вариация δ^0 для параметров $\varkappa_B$ оказывается равной нулю:

$$\delta^0 \varkappa_B = 0.$$

Например, имеем

$$\delta^0 \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 0,$$

так как $u^\alpha \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, $u^\beta \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$.

Рассмотрим связи (10.35), свойства которых были сформулированы в § 10. Для них определенный равенством (8.19) функционал δR, присутствующий в вариационном уравнении (8.23) для учета связей, имеет вид (10.39). Покажем, что для вариации $\delta^0 \mu^A$ он тождественно равен нулю. Согласно определению фигурирующих в уравнениях связей (10.35) параметров $\bar{\mu}^A$, последние ортогональны 4-скорости сплошной среды по всем входящим в состав мультииндекса A тензорным индексам, относящимся к ССК ξ^α. Поэтому для вариаций $\delta^0 \bar{\mu}^A$ будут справедливы соотношения (11.16), если в них над μ поставить черту. Используя их, выражение (10.39) для функционала δR можно записать в виде

$$\delta^0 R = -\frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \frac{\delta r}{\delta \mu^A} \frac{\partial \mu^A}{\partial \xi^0}\, \delta\xi^0\, d^4\xi,$$

$$\frac{\delta r}{\delta \mu^A} = \lambda_B \frac{\partial R^B}{\partial \mu^A},$$

причем

$$\frac{\delta r}{\delta \mu^A} \frac{\partial \mu^A}{\partial \xi^0} = \lambda_B \frac{\partial R^B}{\partial \mu^A} \frac{\partial \mu^A}{\partial \xi^0} = \lambda_B \frac{dR^B}{d\xi^0} = 0. \qquad (11.22)$$

Здесь учтено, что при $B \neq B(A^0)$ функции R^B зависят только от μ^{A/A^0}, а при $B = B(A^0)$ множитель λ_B обращается в нуль, и, кроме того, на основании равенств (10.35) для действительных процессов $R^B = 0$ и, следовательно, $dR^B/d\xi^0 = 0$.

В результате для вариаций $\delta^0 \mu^A$ функционал δR оказывается тождественно равным нулю:

$$\delta^0 R \equiv 0. \qquad (11.23)$$

Выражение для вариации действия $\delta^0 I$. Предположим, что все определяющие параметры μ^A, за исключением компонент 4-потенциала электромагнитного поля, ортогональны 4-скорости сплошной среды по всем входящим в состав мультииндекса A тензорным индексам, относящимся к ССК ξ^α. Таким образом,

$$\mu^A = \{\bar{\mu}^A,\ A_\alpha\}, \tag{11.24}$$

где черта над μ обозначает указанную ортогональность. Рассмотрим вариации определяющих параметров $\delta^0\mu^A$, введенные выше в связи с бесконечно малым преобразованием сопутствующего «времени» (11.2). Вариацию действия $\delta^0 I$, отвечающую вариациям $\delta^0\mu^A$ определяющих параметров, можно вычислить двумя способами. Сравнивая затем полученные выражения для $\delta^0 I$, легко установить некоторые важные тождества, связывающие между собой производные от лагранжиана в случае, когда определяющие параметры имеют специальный вид (11.24).

Вычислим вариацию $\delta^0 I$ первым способом. Выражение для вариации действия на основании равенств (8.3), (8.4) можно представить в виде (при $\delta\varkappa_B = 0$)

$$\delta I = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\mu^A}\,\delta\mu^A\,d^4\xi + \delta_\Sigma I, \tag{11.25}$$

где

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\mu^A} = \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\mu^A} - \partial_\alpha\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial(\partial_\alpha\mu^A)} + \partial_\alpha\partial_\beta\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A)},$$

а функционал $\delta_\Sigma I$ определен соотношениями (8.4), (8.6). Для вариаций $\delta^0\bar{\mu}^A$ справедливы выражения (11.16) (если в них над μ поставить черту), а из тождеств (10.36) вытекает равенство

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\bar{\mu}^{A^0}} = 0.$$

Поэтому имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\bar{\mu}^A}\,\delta^0\bar{\mu}^A = -\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\bar{\mu}^A}\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\,\delta\xi^0. \tag{11.26}$$

Кроме того, используя выражение (11.21) для вариаций $\delta^0 A_\alpha$, тождество $\partial_\alpha\delta\sqrt{-g}\,\Lambda/\delta A_\alpha = 0$, доказанное в предыдущем параграфе, и формулу Остроградского — Гаусса

(1.45), легко убедиться в справедливости равенства

$$\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}\,\delta^0 A_\alpha\,d^4\xi=$$

$$=\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}F_{\alpha\beta}u^\beta\sqrt{g_{00}}\,\delta\xi^0\,d^4\xi+\delta^0_\Sigma I_A, \qquad (11.27)$$

в котором

$$\delta^0_\Sigma I_A=-\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_+}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}\,l^\alpha u^\beta A_\beta\sqrt{g_{00}}\,\delta\xi^0\,d^3\xi.$$

Учитывая соотношения (11.26) и (11.27), выражение (11.25) для вариации действия $\delta^0 I$, отвечающее вариациям определяющих параметров $\delta^0\mu^A$ (при равных нулю вариациях $\delta^0\varkappa_B$), легко представить в виде

$$\delta^0 I=\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}F_{\alpha\beta}u^\beta\sqrt{g_{00}}-\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\bar{\mu}^A}\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\right)\delta\xi^0\,d^4\xi+$$

$$+\delta^0_\Sigma I+\delta^0_\Sigma I_A. \qquad (11.28)$$

Вычислим теперь вариацию $\delta^0 I$ вторым способом. Учитывая выражение (7.13) для $\delta\sqrt{-g}$, представим вариацию действия в виде

$$\delta I=\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\delta(\sqrt{-g}\,\Lambda)\,d^4\xi=$$

$$=\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}(\sqrt{-g}\,\delta\Lambda+\Lambda\,\partial_\alpha\sqrt{-g}\,\xi^\alpha_\nu\,\delta x^\nu)\,d^4\xi. \qquad (11.29)$$

Заметим, что для любого фиксированного набора функций $\mu^A(\xi^\nu)$, $\varkappa_B(\xi^\nu)$ лагранжиан Λ можно рассматривать как функцию от координат ξ^ν

$$\Lambda(\mu^A(\xi^\nu),\ \partial_\alpha\mu^A(\xi^\nu),\ \partial_\alpha\partial_\beta\mu^A(\xi^\nu),\ \varkappa_B(\xi^\nu))=\Lambda(\xi^\nu).$$

Так как лагранжиан по определению представляет собой скалярную функцию от своих аргументов, то при переходе от ССК ξ^α к любой другой ССК ξ'^α выполняется соотношение

$$\Lambda'(\xi'^\nu)=\Lambda(\xi^\nu). \qquad (11.30)$$

Здесь штрих указывает на то, что вместо ССК ξ^α используется некоторая другая ССК ξ'^α. Вариацию лагранжиана $\delta^0\Lambda$, отвечающую определенным выше вариациям $\delta^0\mu^A$, $\delta^0\varkappa_B$ функций $\mu^A(\xi^\nu)$, $\varkappa_B(\xi^\nu)$, очевидно, можно вычислить непосредственно по общей формуле типа (11.15) как вариацию функции $\Lambda(\xi^\nu)$, обусловленную бесконечно малым преобразованием сопутствующего «времени» (11.2):

$$\delta^0\Lambda \equiv \Lambda'(\xi^\nu) - \Lambda(\xi^\nu) = \Lambda'(\xi'^\nu) - \frac{\partial\Lambda}{\partial\xi^0}\delta\xi^0 - \Lambda(\xi^\nu).$$

Учитывая соотношение (11.30) и равенство $u^\alpha = \delta^\alpha_0/\sqrt{g_{00}}$, получим окончательную формулу для $\delta^0\Lambda$

$$\delta^0\Lambda = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\xi^0}\delta\xi^0 = -\left(\sqrt{g_{00}}\,u^\alpha\,\partial_\alpha\Lambda\right)\delta\xi^0. \qquad (11.31)$$

Подставляя значения вариаций δ^0x^ν, $\delta^0\Lambda$ (см. равенства (11.17), (11.31)) в выражение (11.29) для δI, преобразуем его следующим образом:

$$\delta^0 I = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat V/\hat\Sigma_c}\Big[-\sqrt{-g}\,\sqrt{g_{00}}\,\delta\xi^0 u^\alpha\,\partial_\alpha\Lambda - \Lambda\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\,\xi^\alpha_\nu u^\nu\sqrt{g_{00}}\,\delta\xi^0\right)\Big]d^4\xi = -\frac{1}{c}\int\limits_{\hat V/\hat\Sigma_c}\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\,\Lambda u^\alpha\sqrt{g_{00}}\,\delta\xi^0\right)d^4\xi.$$

Применяя затем формулу Остроградского — Гаусса (1.45), найдем окончательное выражение для $\delta^0 I$:

$$\delta^0 I = -\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat V+\hat\Sigma_+}\Lambda u^\alpha l_\alpha\sqrt{g_{00}}\,\delta\xi^0\,d^3\xi. \qquad (11.32)$$

Тождества для лагранжиана. Выражения (11.28) и (11.32) для функционала $\delta^0 I$ должны, конечно, тождественно совпадать между собой при любых функциях $\delta\xi^0(\xi^\nu)$. Поэтому, рассматривая значения вариации $\delta\xi^0$, равные нулю на границе области $\hat V/\hat\Sigma_c$ и произвольные внутри нее, получим из соотношений (11.28), (11.32) следующее тождество:

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}F_{\alpha\beta}u^\beta - \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\mu^A}\frac{\partial\mu^A}{\partial\xi^0} = 0. \qquad (11.33)$$

Учитывая определение собственного времени τ, его можно записать в виде

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}F_{\alpha\beta}u^\beta-\frac{1}{c}\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\bar{\mu}^A}\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau}=0. \qquad (11.34)$$

При выводе этого тождества существенно использовалось равенство $\delta^0\varkappa_B=0$. Если параметры $\varkappa_B(\xi^\nu)$ удовлетворяют всем перечисленным выше условиям (отсутствие в составе мультииндекса B контравариантных тензорных индексов и ортогональность $\varkappa_B$ 4-скорости среды по всем ковариантным тензорным индексам из B), за исключением условия $\partial\varkappa_B/\partial\xi^0=0$, то вариации $\delta^0\varkappa_B$ равны

$$\delta^0\varkappa_B=-\frac{\partial\varkappa_B}{\partial\xi^0}\delta\xi^0.$$

В этом случае при вычислении вариации $\delta^0 I$ первым способом необходимо учитывать, что $\delta^0\varkappa_B\neq 0$. В результате в равенстве (11.28) в скобках добавится еще одно слагаемое, и тождество (11.34) примет вид

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}F_{\alpha\beta}u^\beta-\frac{1}{c}\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\bar{\mu}^A}\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau}-\frac{1}{c}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\varkappa_B}\frac{d\varkappa_B}{d\tau}=0. \qquad (11.35)$$

Отметим, что, согласно равенству (11.32), вариация действия $\delta^0 I$ обращается в нуль, если $\delta\xi^0=0$ на границе области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$. Указанное свойство вариации $\delta^0 I$ непосредственно вытекает из скалярности действия I

$$\delta^0 I\equiv I'[\hat{V}/\hat{\Sigma}_c]-I[\hat{V}/\hat{\Sigma}_c]=I'[(\hat{V}/\hat{\Sigma}_c)']-I[\hat{V}/\hat{\Sigma}_c]\equiv 0, \qquad (11.36)$$

так как $(\hat{V}/\hat{\Sigma}_c)'=\hat{V}/\Sigma_c$ при $\delta\xi^0=0$ на границе области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$.

Выражение для функционала $\delta^0 W^*$. На основании равенств (8.3), (8.7) функционал δW^* можно представить в виде

$$\delta W^*=\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\frac{\delta w^*}{\delta\mu^A}\delta\mu^A\,d^4\xi+\delta_\Sigma W^*, \qquad (11.37)$$

где, согласно соотношениям (8.8), (8.9), (8.11),

$$\frac{\delta w^*}{\delta \mu^A} = \sqrt{-g}\, M_A - \partial_\alpha \sqrt{-g}\, M_A^\alpha + \partial_\alpha \partial_\beta \sqrt{-g}\, M_A^{\alpha\beta},$$

$$\delta_\Sigma W^* = \frac{1}{c} \int\limits_{\partial \hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm} \left[\left(M_A^\alpha - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g}\, M_A^{\beta\alpha} \right) l_\alpha\, \delta\mu^A + \right.$$

$$\left. + M_A^{\alpha\beta} l_\alpha \partial_\beta\, \delta\mu^A \right] d^3\zeta.$$

Пусть, как и в предыдущих пунктах, определяющие параметры имеют вид (11.24). В следующей главе будет показано, что, используя в числе определяющих параметров введенные в § 5 параметры электрического тока ψ^α, можно строить модели сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем, не включая в функционал δW^* вариаций 4-потенциала электромагнитного поля δA_α. Поэтому ограничимся случаем, когда функционал δW^* зависит только от вариаций $\delta \bar{\mu}^A$. Рассмотрим вариации определяющих параметров $\delta^0 \mu^A$, введенные выше в связи с бесконечно малым преобразованием сопутствующего «времени», и найдем для них значение функционала $\delta W^* \equiv \equiv \delta^0 W^*$.

Для определяющих параметров $\bar{\mu}^A$ из тождеств (10.36) вытекают равенства

$$\frac{\delta w^*}{\delta \bar{\mu}^{A^0}} = 0, \quad \bar{M}_{A^0}^\alpha - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g}\, \bar{M}_{A^0}^{\beta\alpha} = 0, \quad \bar{M}_{A^0}^{\alpha\beta} = 0,$$

а для вариаций $\delta^0 \bar{\mu}^A$ справедливы выражения (11.16). Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\delta w^*}{\delta \bar{\mu}^A}\, \delta^0 \bar{\mu}^A = - \frac{\delta w^*}{\delta \bar{\mu}^A} \frac{\partial \mu^A}{\partial \xi^0}\, \delta \xi^0,$$

$$\left(\bar{M}_A^\alpha - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g}\, \bar{M}_A^{\beta\alpha} \right) \delta^0 \bar{\mu}^A =$$

$$= - \left(\bar{M}_A^\alpha - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g}\, \bar{M}_A^{\beta\alpha} \right) \frac{\partial \bar{\mu}^A}{\partial \xi^0}\, \delta \xi^0,$$

$$\bar{M}_A^{\alpha\beta} \partial_\beta\, \delta^0 \bar{\mu}^A = - \bar{M}_A^{\alpha\beta}\, \partial_\beta \left(\frac{\partial \bar{\mu}^A}{\partial \xi^0}\, \delta \xi^0 \right).$$

Учитывая их, выражение (11.37) для функционала δW^* при $\mu^A = \bar{\mu}^A$ и $\delta\mu^A = \delta^0\bar{\mu}^A$ легко представить в виде

$$\delta^0 W^* = -\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \frac{\delta\omega^*}{\partial\mu^A}\frac{\partial\mu^A}{\partial\xi^0}\,\delta\xi^0\,d^4\xi + \delta^0_\Sigma W^*, \qquad (11.38)$$

$$\delta^0_\Sigma W^* = -\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm} \left\{\left[\left(\bar{M}^\alpha_A - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\sqrt{-g}\,\bar{M}^{\langle\beta\alpha\rangle}\right)\frac{\partial\mu^A}{\partial\xi^0} + \right.\right.$$
$$+\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\left(\sqrt{-g}\,\bar{M}^{\alpha\beta}_A\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\right)\Big]\,l_\alpha\,\delta\xi^0 +$$
$$\left.+\left[\bar{M}^{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\,l_\alpha\right]\partial_\beta\,\delta\xi^0\right\}d^3\zeta.$$

Преобразовав функционал $\delta^0_\Sigma W^*$ к канонической форме относительно вариации $\delta\xi^0$ (это преобразование абсолютно аналогично преобразованию к канонической форме функционала δW), получим для него следующее выражение:

$$\delta^0_\Sigma W^* = -\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm} \left\{\left[\left(\bar{M}^\alpha_A - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\sqrt{-g}\,\bar{M}^{\langle\beta\alpha\rangle}_A\right)\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\,l_\alpha + \right.\right.$$
$$+\frac{l_\alpha}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\left(\sqrt{-g}\,\bar{M}^{\alpha\beta}_A\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\right) - \frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(\bar{M}^{\alpha\beta}_A\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\,l_\alpha f^{(k)}_\beta\right)\Big]\,\delta\xi^0 +$$
$$+\left[\bar{M}^{\alpha\beta}\frac{\partial\mu^A}{\partial\xi^0}\,l_\alpha f^{(0)}_\beta\right]\frac{\partial\,\delta\xi^0}{\partial f^{(0)}}\Big\}\,d^3\zeta +$$
$$+\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(\bar{M}^{\alpha\beta}_A\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\,l_\alpha f^{(k)}_\beta\,\delta\xi^0\right)d^3\zeta. \qquad (11.39)$$

Последний интеграл здесь сводится к интегралу по двумерным ребрам рассматриваемой гиперповерхности.

Если вариация $\delta\xi^0$ равна нулю вместе с ее первыми производными на границе области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$, то значение функционала $\delta^0 W^*$ на действительных процессах можно найти также непосредственно из вариационного уравнения (8.23). В самом деле для действительных процессов вариационное уравнение в форме (8.23) должно быть справедливо при любых вариациях $\delta\mu^A$ [1]. Подставляя в него значе-

[1]) В том числе и не удовлетворяющих связям, так как вариационное уравнение (8.23) содержит функционал δR, введенный для учета связей методом неопределенных множителей Лагранжа.

ния вариаций $\delta^0\mu^A$ и учитывая, что для функционалов $\delta^0 I$, $\delta^0 R$ имеют место равенства (11.32) и (11.23), получаем соотношение

$$-\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm} \Lambda u^\alpha l_\alpha \sqrt{g_{00}}\,\delta\xi^0\,d^3\zeta + \delta^0 W^* + \delta^0 W = 0. \quad (11.40)$$

Здесь $\delta^0 W$ — значение функционала δW при $\delta\mu^A = \delta^0\mu^A$. Очевидно, при $\delta\xi^0 = \partial_\alpha\delta\xi^0 = 0$ на гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm$ функционал $\delta^0 W$ обращается в нуль, и из уравнения (11.40) следует, что в этом случае также $\delta^0 W^* = 0$.

Тождества для коэффициентов при вариациях в функционале δW^*. Пусть вариация $\delta\xi^0$ произвольна внутри области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$ и обращается в нуль на ее границе вместе с производными $\partial_\alpha\delta\xi^0$. Тогда $\delta^0 W^* = 0$, и из выражения (11.38) для $\delta^0 W^*$ (в котором $\delta^0_\Sigma W^* = 0$, так как $\delta\xi^0 = \partial_\alpha\delta\xi^0 = 0$ при $\xi \in \partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm$) вытекает соотношение

$$\frac{\delta\omega^*}{\delta\bar{\mu}^A}\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0} = 0, \quad (11.41)$$

которому должны удовлетворять коэффициенты при вариациях в функционале δW^*.

Приведенное доказательство соотношения (11.41) справедливо только для функций $\mu^A(\xi^\nu)$, соответствующих действительным процессам, т. е. удовлетворяющих динамическим уравнениям (8.29). Но можно показать, что величины $\delta\omega^*/\delta\bar{\mu}^A$ должны зависеть от определяющих параметров μ^A и их производных таким образом, чтобы равенство (11.41) выполнялось тождественно, т. е. при любых функциях $\mu^A(\xi^\nu)$. Действительно, изменение способа параметризации точек на мировых линиях сплошной среды не влияет на физические процессы. Следовательно, функции $\mu'^A(\xi^\nu) \equiv \mu^A(\xi^\nu) + \delta^0\mu^A$ и $\mu^A(\xi^\nu)$ соответствуют физически не различимым процессам в области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$, если вариация $\delta\xi^0$ равна нулю на границе этой области [1]). В этом случае функционал δW^* должен обращаться в нуль для вариаций $\delta^0\bar{\mu}^A$ при любых функциях $\mu^A(\xi^\nu)$:

$$\delta^0 W^* \equiv 0, \quad \delta\xi^0|_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm} = 0. \quad (11.42)$$

---

[1]) Это условие необходимо, иначе области определения функций μ'^A и μ^A не будут совпадать.

Заметим, что аналогичным свойством обладает также функционал $\delta^0 I$ (см. соотношение (11.36)), а значит, и сумма $\delta^0 I + \delta^0 W^*$. Подставляя в первое равенство (11.42) выражение (11.38) для функционала $\delta^0 W^*$ (при $\delta\xi^0 = \partial_\alpha \delta\xi^0 = 0$ на гиперповерхности $\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_+$) и используя произвольность функции $\delta\xi^0(\xi^\nu)$ внутри области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$, снова получим тождество (11.41).

Отметим, что динамические уравнения (8.29), имеющие для рассматриваемых определяющих параметров и связей следующий вид:

$$\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha} = 0, \quad \frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\bar{\mu}^A} + \frac{\delta w^*}{\delta\bar{\mu}^A} + \lambda_B\sqrt{-g}\frac{\partial R^B}{\partial\bar{\mu}^A} = 0,$$

на основании тождеств (11.22), (11.33), (11.41) связаны между собой линейной зависимостью

$$\sqrt{g_{00}}\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta A_\alpha}F_{\alpha\beta}u^\beta - \left(\frac{\delta\sqrt{-g}\,\Lambda}{\delta\bar{\mu}^A} + \frac{\delta w^*}{\delta\bar{\mu}^A} + \lambda_B\sqrt{-g}\frac{\partial R^B}{\partial\bar{\mu}^A}\right)\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0} = 0.$$

Поэтому одно из них является следствием остальных. В результате при решении конкретных задач можно произвольно выбирать способ параметризации событий на мировых линиях сплошной среды, т. е. функцию $x^0 = x^0(\xi^a, \xi^0)$, после чего остальные определяющие параметры находятся из уравнений (8.29). В частности, для действительных процессов всегда можно считать, что $\xi^0 = \Delta$ и, следовательно, $g_{00} = 1$ в ССК ξ^α.

Рассмотрим значения $\delta\xi^0$, такие, что на границе области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$ выполняется условие $\delta\xi^0 = 0$, но производная $\partial\delta\xi^0/\partial f^{(0)}$ остается произвольной функцией. В этом случае из тождеств (11.38), (11.42), (11.41) вытекает, что $\delta^0_\Sigma W^* \equiv 0$. Подставляя сюда выражение (11.39) для функционала $\delta^0_\Sigma W^*$ (в котором надо положить $\delta\xi^0 = 0$) и учитывая произвольность функции $\partial\delta\xi^0/\partial f^{(0)}$, найдем, что

$$\bar{M}^{\alpha\beta}_A \frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0} l_\alpha f^{(0)}_\beta = 0. \tag{11.43}$$

Согласно равенству (9.39), компоненты $f^{(0)}_\beta$ пропорциональны l_β. Поэтому из равенства (11.43) и произвольности компонент l_α вытекает тождество

$$\bar{M}^{\langle\alpha\beta\rangle}_A \frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0} = 0, \tag{11.44}$$

которому должны удовлетворять коэффициенты $\bar{M}_A^{\alpha\beta}$, стоящие при вариациях $\delta(\partial_\alpha\partial_\beta\bar{\mu}^A)$ в исходном выражении (7.19) для функционала δW^*. Так как эти вариации симметричны по индексам α, β, то очевидно, и коэффициенты $\bar{M}_A^{\alpha\beta}$ можно считать симметричными по α, β [1]), что в дальнейшем всегда предполагается. Тогда равенство (11.44) принимает следующий окончательный вид:

$$\bar{M}_A^{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}=0. \tag{11.45}$$

Учитывая определение собственного времени (см. § 3), тождества (11.41), (11.45) можно представить еще в такой форме:

$$\frac{\delta w^*}{\delta\bar{\mu}^A}\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau}=0, \quad \bar{M}_A^{\alpha\beta}\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau}=0. \tag{11.46}$$

Функционал δ^0W^* на основании тождеств (11.41), (11.45) записывается в более простой форме (при любых значениях вариации $\delta\xi^0$ на границе области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$):

$$\delta^0W^*=\delta^0_\Sigma W^*=-\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_+}\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}M^\alpha l_\alpha\delta\xi^0\,d^3\zeta, \tag{11.47}$$

$$M^\alpha=\left(\bar{M}_A^\alpha-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\sqrt{-g}\,\bar{M}_A^{\langle\alpha\beta\rangle}\right)\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau},$$
$$\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau}=\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}, \tag{11.48}$$

причем всегда можно считать, что

$$M^\alpha u_\alpha=0. \tag{11.49}$$

Действительно, так как в основное вариационное уравнение функционалы δI и δW^* входят в виде суммы $\delta I+\delta W^*$, всегда можно переопределить лагранжиан Λ,

---

[1]) Так как $M_A^{\alpha\beta}\delta\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A\equiv{}^1/_2M_A^{\langle\alpha\beta\rangle}\delta\partial_\alpha\partial_\beta\mu^A$, то антисимметричные части $M_A^{[\alpha\beta]}$ из исходного выражения (7.19) для функционала δW^* выпадают.

действие I и функционал δW^* следующим образом:

$$\Lambda_1 = \Lambda + \frac{1}{c} M^\beta u_\beta, \quad I_1 = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \Lambda_1 \sqrt{-g}\, d^4\xi,$$

$$\delta W_1^* = \delta W^* - \frac{1}{c}\, \delta \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \frac{1}{c} M^\alpha u_\alpha \sqrt{-g}\, d^4\xi.$$

При этом все динамические соотношения, вытекающие из вариационного уравнения, остаются неизменными, так как

$$\delta I_1 + \delta W_1^* \equiv \delta I + \delta W^*. \tag{11.50}$$

Записывая это тождество для вариаций $\delta^0\mu^A$ и учитывая выражения (11.32), (11.47) для функционалов $\delta^0 I$, $\delta^0 W^*$, а также произвольность вариации $\delta\xi^0$ и компонент l_α, получим соотношение

$$\Lambda_1 u^\alpha + \frac{1}{c} M_1^\alpha = \Lambda u^\alpha + \frac{1}{c} M^\alpha. \tag{11.51}$$

Подставляя сюда значение Λ_1, найдем компоненты M_1^α, соответствующие функционалу δW_1^*:

$$M_1^\alpha = M^\alpha - u^\alpha u_\beta M^\beta = -\gamma_\beta^\alpha M^\beta.$$

Очевидно, они удовлетворяют условию (11.49). При заданной сумме $\delta I + \delta W^*$ это условие однозначно определяет лагранжиан Λ, действие I и функционал δW^*. В самом деле, пусть равенство (11.49) выполняется для функционалов δW^* и δW_1^*, причем имеет место тождество (11.50). Тогда по-прежнему справедливо соотношение (11.51). Умножая его на u_α, найдем $\Lambda_1 = \Lambda$ и, следовательно, $I_1 = I$. На основании же этого равенства из тождества (11.50) получим $\delta W_1^* = \delta W^*$. В дальнейшем условие (11.49) будем предполагать выполненным.

Если $\delta\xi^0 = 0$ на границе области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$, то, очевидно, эта область при бесконечно малом изменении параметра ξ^0 остается неизменной ($\delta^0\hat{V}/\hat{\Sigma}_c = 0$). Существуют области (трубки мировых линий), для которых $\delta^0\hat{V}/\hat{\Sigma}_c = 0$ и при $\delta\xi^0 \neq 0$ на границе $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$. В этом случае из равенства (11.32) следует, что $\delta^0 I = 0$, так как на границе такой области $u^\alpha l_\alpha = 0$. Можно доказать, что аналогичное соотношение для удовлетворяющего условию (11.49) функцио-

нала δW^*

$$\delta^0 W^* = 0, \quad \delta\xi^0|_{\partial(\hat{V}/\hat{\Sigma}_c)} \neq 0, \quad \delta^0(\hat{V}/\hat{\Sigma}_c) = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$M^\alpha = \left(\bar{M}^\alpha_A - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta \sqrt{-g}\, \bar{M}^{\langle\alpha\beta\rangle}_A\right)\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} = 0. \quad (11.52)$$

§ 12. Термодинамические соотношения

Инвариантное уравнение энергии. Для вариаций определяющих параметров $\delta^0\mu^A$ основное вариационное уравнение имеет вид (11.40). Подставим в него выражение (11.47) для функционала $\delta^0 W^*$:

$$-\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_+}\left(\Lambda u^\alpha + \frac{1}{c}M^\alpha\right) l_\alpha \sqrt{g_{00}}\,\delta\xi^0\, d^3\zeta + \delta^0 W = 0. \quad (12.1)$$

Найдем функционал $\delta^0 W$, предполагая, что определяющие параметры, как и раньше, имеют вид (11.24). Для вариаций $\delta^0\bar{\mu}^A$ справедливы выражения (11.16) (если в них над μ поставить черту), а из тождеств (10.36) вытекают равенства

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial(\partial_\alpha\bar{\mu}^{A^0})}\delta\bar{\mu}^{A^0} = 0, \quad \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\bar{\mu}^{A^0})}\partial_\beta\delta\bar{\mu}^{A^0} = 0,$$

$$\bar{M}^\alpha_{A^0}\delta\bar{\mu}^{A^0} = 0, \qquad \bar{M}^{\alpha\beta}_{A^0}\partial_\beta\delta\bar{\mu}^{A^0} = 0.$$

Поэтому для величин W^α_A, $W^{\alpha\beta}_A$, определенных равенствами (9.2), выполняются соотношения [1])

$$\begin{aligned} \bar{W}^\alpha_A\delta^0\mu^A &= -\bar{W}^\alpha_A\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\delta\xi^0, \\ \bar{W}^{\alpha\beta}_A\partial_\beta\delta^0\bar{\mu}^A &= -\bar{W}^{\alpha\beta}_A\partial_\beta\left(\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\delta\xi^0\right). \end{aligned} \quad (12.2)$$

Здесь через $\bar{W}^\alpha_A$, $\bar{W}^{\alpha\beta}_A$ обозначены коэффициенты W^α_A, $W^{\alpha\beta}_A$, стоящие при вариациях $\delta\bar{\mu}^A$ и их производных $\partial_\beta\delta\bar{\mu}^A$ в выражении (9.1) для функционала δW. Подставляя в него вместо $\delta\mu^A$ вариации $\delta^0\bar{\mu}^A$ и $\delta^0 A_\alpha$ (см. равен-

[1]) При выводе этих соотношений необходимо также учесть, что связи вида (10.35) не дают вклада в выражение (9.2) для W^α_A (см. равенства (10.41)).

ства (11.16) и (11.21)) и используя соотношения (12.2), найдем функционал $\delta^0 W$

$$\delta^0 W = -\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}} \left\{\overline{W}_A^{\alpha}\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\delta\xi^0 + \overline{W}_A^{\alpha\beta}\partial_\beta\left(\frac{\partial\bar{\mu}^A}{\partial\xi^0}\delta\xi^0\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\left[\sqrt{g_{00}}\,F_{\beta\nu}u^\nu\delta\xi^0 - \partial_\beta\left(\sqrt{g_{00}}\,A_\nu u^\nu\delta\xi^0\right)\right]\right\} l_\alpha\, d^3\zeta. \tag{12.3}$$

Здесь учтены значения коэффициентов, стоящих при вариациях δA_α в выражении (9.1) для функционала δW. Эти коэффициенты находятся на основании равенств (9.2) и предположения о независимости лагранжиана от вторых производных $\partial_\alpha\partial_\beta A_\nu$, а функционала $\delta W^* $ — от вариаций δA_ν.

Рассмотрим вариацию $\delta\xi^0$ следующего вида:

$$\delta\xi^0 = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\delta\varepsilon, \quad g_{00} \equiv g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^0}\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^0}, \tag{12.4}$$

где $\delta\varepsilon$ — величина, не зависящая от координат ξ^ν, а функции $x^\mu(\xi^\nu)$ соответствуют действительным процессам. Подставим в вариационное уравнение (12.1) выражение (12.3) для функционала $\delta^0 W$ и затем значение (12.4) для вариации $\delta\xi^0$. В полученном таким образом равенстве величину $\delta\varepsilon$ вынесем за знаки производных и интегралов и сократим. Кроме того, учтем определение собственного времени τ (см. § 3). В результате получим соотношение

$$\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}} (c\Lambda u^\alpha + M^\alpha + W^\alpha)\, l_\alpha\, d^3\zeta = 0, \tag{12.5}$$

где

$$W^\alpha \equiv \overline{W}_A^{\alpha}\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \overline{W}_A^{\alpha\beta}\partial_\beta\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + $$

$$+ \frac{c}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\left[F_{\beta\nu}u^\nu - \partial_\beta(A_\nu u^\nu)\right]. \tag{12.6}$$

Применяя формулу Остроградского — Гаусса (1.46) и замечая, что равенство (12.5) должно выполняться для любой области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$, найдем следующее дифференциальное соотношение:

$$\nabla_\alpha(c\Lambda u^\alpha + M^\alpha + W^\alpha) = 0. \tag{12.7}$$

Как и исходное вариационное уравнение (12.1), оно справедливо только для действительных процессов.

В простейших релятивистских моделях сплошных сред лагранжиан Λ только знаком отличается от плотности энергии среды $\mathscr{E}$ относительно собственной ГСК x^ν (см. § 13). Величина $\mathscr{E}$ называется *собственной плотностью энергии среды или плотностью ее внутренней энергии*. Очевидно, она должна выражаться через компоненты тензора энергии-импульса следующим образом:

$$\mathscr{E} = T^{*00} = T^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = T^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta. \tag{12.8}$$

Если, кроме того, в уравнении неразрывности (3.54) величина $\varkappa$ обращается в нуль, то соотношение (12.7) можно записать в виде

$$\rho \frac{d}{d\tau}\frac{\mathscr{E}}{\rho} = \nabla_\alpha (M^\alpha + W^\alpha), \tag{12.9}$$

где $d/d\tau \equiv cu^\alpha\partial_\alpha$ — производная по собственному времени.

В следующей главе на конкретных примерах будет показано, что с учетом уравнений Эйлера равенство (12.7) (или (12.9)) преобразуется к соотношению, которое можно рассматривать как инвариантное уравнение энергии, представляющее собой релятивистское обобщение уравнения притока тепла.

Термодинамика необратимых процессов. Из тождеств (11.46) можно получить еще одно важное соотношение термодинамики необратимых процессов. Для этого подставим в левую часть первого равенства (11.46) выражение (8.8) для величин $\delta w^*/\delta\bar{\mu}^A$ и преобразуем ее с учетом второго равенства (11.46):

$$0 = \frac{\delta w^*}{\delta\bar{\mu}^A}\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} =$$
$$= \sqrt{-g}\left(\bar{M}_A\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^\alpha_A\partial_\alpha\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^{\alpha\beta}_A\partial_\alpha\partial_\beta\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau}\right) -$$
$$- \partial_\alpha\left[\sqrt{-g}\left(\bar{M}^\alpha_A - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\sqrt{-g}\,\bar{M}^{\langle\alpha\beta\rangle}_A\right)\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau}\right].$$

Используя затем определение (11.48) компонент M^α и второе тождество (1.35), получим следующее соотношение:

$$\bar{M}_A\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^\alpha_A\partial_\alpha\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^{\alpha\beta}_A\partial_\alpha\partial_\beta\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} = \nabla_\alpha M^\alpha. \tag{12.10}$$

Ниже будет показано, что для различных конкретных релятивистских моделей сплошных сред тождество типа (12.10) можно преобразовать к виду

$$\sigma = \sum_B J_B X^B, \tag{12.11}$$

где σ — диссипативная функция, а X^B, J_B — соответственно обобщенные термодинамические силы и потоки, вводимые в теории необратимых процессов Онсагера [9—12]. Продемонстрируем здесь в общих чертах, как это делается.

В простейших релятивистских моделях сплошных сред среди определяющих параметров $\bar{\mu}^A$ присутствует удельная плотность энтропии $S = s/\rho$ (s — собственная плотность энтропии, введенная в § 6) и нет компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии S^α. Кроме того, в выражения для лагранжиана Λ и функционала δW^* не входят производные от S. Выделяя из определяющих параметров $\bar{\mu}^A$ удельную плотность энтропии S ($\bar{\mu}^A \to S, \bar{\mu}^A$), соотношение (12.10) можно записать в виде

$$\rho T \frac{dS}{d\tau} + \bar{M}_A \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^\alpha_A \partial_\alpha \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^{\alpha\beta}_A \partial_\alpha \partial_\beta \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} = \nabla_\alpha M^\alpha. \tag{12.12}$$

Здесь через ρT обозначен коэффициент (типа $\bar{M}_A$), стоящий при вариации δS в выражении (7.19) для функционала δW^*. На основании общих динамических уравнений для непрерывных процессов (8.29) величина T связана с лагранжианом равенством $\partial\Lambda/\partial S + \rho T = 0$, которое, очевидно, можно записать так: $T = -\partial\Lambda/\partial s$. Если $-\partial\Lambda/\partial s \equiv \equiv \partial\mathscr{E}/\partial s$, где $\mathscr{E}$ — плотность внутренней энергии среды, определенная равенством (12.8), то величину T принято называть *абсолютной температурой среды*[1]).

Пусть в уравнении неразрывности (3.54) величина $\varkappa$ обращается в нуль. Тогда с его помощью уравнение баланса энтропии (6.15) легко представить в следующей форме:

$$\rho \frac{dS}{d\tau} + \nabla_\alpha S^\alpha = \sigma. \tag{12.13}$$

---

[1]) Для выполнения тождества $-\partial\Lambda/\partial s \equiv \partial\mathscr{E}/\partial s$ необходимо и достаточно, чтобы лагранжиан имел вид $\Lambda = K - \mathscr{E}$, где K не зависит от s.

Используя это равенство и преобразуя соотношение (12.12), получим

$$T\sigma + S^\alpha \partial_\alpha T + \bar{M}_A \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^\alpha_A \partial_\alpha \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^{\alpha\beta}_A \partial_\alpha \partial_\beta \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} = \\ = \nabla_\alpha (M^\alpha + TS^\alpha). \qquad (12.14)$$

Как будет видно из пятой главы, различные конкретные релятивистские модели сплошных сред можно строить так, что будет выполняться равенство

$$TS^\alpha = -M^\alpha. \qquad (12.15)$$

Тогда из уравнения (12.14), используя определение (11.48) компонент M^α, второе тождество (11.46) и равенство (12.15), найдем выражение для диссипативной функции

$$\sigma = -\frac{\bar{M}_A}{T}\left(\frac{d\mu^A}{d\tau}\right) - \frac{\bar{M}^\alpha_A}{T}\left(\partial_\alpha \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} - \frac{\partial_\alpha T}{T}\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau}\right) - \\ - \frac{\bar{M}^{\alpha\beta}_A}{T}\left(\partial_\alpha \partial_\beta \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} - \frac{\partial_{\langle\alpha} T}{T}\partial_{\beta\rangle}\frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau}\right). \qquad (12.16)$$

Если величины, заключенные в скобки, и коэффициенты при них рассматривать как обобщенные термодинамические силы или потоки, то, очевидно, равенство (12.16) имеет вид (12.11).

Описанную процедуру приведения соотношения (12.10) к виду (12.11) можно существенно упростить, используя для плотности энтропии параметрическое представление, полученное в § 6. Тогда среди определяющих параметров $\bar{\mu}^A$ вместо массовой плотности энтропии S будут присутствовать параметры переноса и производства энтропии φ^α, φ. Выделяя их из числа $\bar{\mu}^A$ ($\bar{\mu}^A \to \varphi, \varphi^\alpha, \bar{\mu}^A$), соотношение (12.10) можно записать в виде

$$\frac{\Phi}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\Phi_\alpha}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi^\alpha}{d\tau} + \bar{M}_A \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^\alpha_A \partial_\alpha \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} + \bar{M}^{\alpha\beta}_A \partial_\alpha \partial_\beta \frac{d\bar{\mu}^A}{d\tau} = \\ = \nabla_\alpha M^\alpha. \qquad (12.17)$$

Здесь через $\Phi/\sqrt{\gamma}$, $\Phi_\alpha/\sqrt{\gamma}$ обозначены коэффициенты (типа $\bar{M}_A$), стоящие при вариациях $\delta\varphi$, $\delta\varphi^\alpha$ в выражении (7.19) для функционала δW^*, причем, согласно равенствам (10.36), $\Phi_\alpha u^\alpha = 0$. Используя общие динамические уравнения для непрерывных процессов (8.29) и параметрическое представление (6.27) для собственной плотно-

сти энтропии, легко установить связь между величиной Φ и лагранжианом Λ в случае, когда последний зависит от параметра φ только через собственную плотность энтропии s:

$$\frac{\Phi}{\sqrt{\gamma}} = -\frac{\delta\Lambda}{\delta\varphi} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\varphi} = \frac{T}{\sqrt{\gamma}} \qquad \left(T \equiv -\frac{\partial\Lambda}{\partial s}\right).$$

Подставляя это выражение для Φ в соотношение (12.17) и учитывая параметрические представления (6.29), (6.28) для диссипативной функции σ и компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии, получим следующее равенство:

$$T\sigma + \Phi_\alpha S^\alpha + \bar{M}_A \frac{d\mu^A}{d\tau} + \bar{M}^\alpha_A \partial_\alpha \frac{d\mu^A}{d\tau} + \bar{M}^{\alpha\beta}_A \partial_\alpha\partial_\beta \frac{d\mu^A}{d\tau} = \nabla_\alpha M^\alpha.$$

Если положить $M^\alpha \equiv 0$, то из него найдем выражение для диссипативной функции σ

$$\sigma = -\frac{\Phi_\alpha}{T}(S^\alpha) - \frac{\bar{M}_A}{T}\left(\frac{d\mu^A}{d\tau}\right) - \frac{\bar{M}^\alpha_A}{T}\left(\partial_\alpha \frac{d\mu^A}{d\tau}\right) - \frac{\bar{M}^{\alpha\beta}_A}{T}\left(\partial_\alpha\partial_\beta \frac{d\mu^A}{d\tau}\right). \tag{12.18}$$

Рассматривая величины, заключенные в скобки, и коэффициенты перед ними как обобщенные термодинамические силы или потоки, легко видеть, что выражение (12.18) для σ имеет вид (12.11). При этом число независимых слагаемых в выражении (12.18) для σ то же, что и в выражении (12.16), так как появление в (12.18) дополнительно члена $-\Phi_\alpha S^\alpha/T$ компенсируется уменьшением числа независимых величин $\bar{M}^\alpha_A$, $\bar{M}^{\alpha\beta}_A$ из-за наличия условия $M^\alpha \equiv 0$.

В следующей главе будет показано, что действительно можно строить конкретные релятивистские модели сплошных сред, считая $M^\alpha \equiv 0$, если в качестве определяющих параметров использовать параметры производства и переноса энтропии φ и φ^α (а также другие параметры из (7.1)). При этом и в случае $M^\alpha \equiv 0$ выражение для диссипативной функции σ, получаемое из соотношения (12.12), содержит слагаемые, пропорциональные компонентам 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии S^α. Кроме того, слагаемые, пропорциональные вариациям $\delta\varphi^\alpha$, входят в выражение для функционала δW. В результате компоненты W^α в уравнении энергии (12.7) (или (12.9)) содержат слагаемые $-TS^\alpha$ (см. § 13). Таким образом, если

в качестве определяющих параметров использовать величины φ, φ^α (а также другие параметры из (7.1)), считая при этом $M^\alpha \equiv 0$, то члены $-TS^\alpha$ входят в уравнение энергии через компоненты W^α. Если же в качестве определяющего параметра использовать собственную плотность энтропии s, не прибегая к параметрическому представлению для нее, то компоненты W^α не содержат слагаемых $-TS^\alpha$. Последние, однако, все равно присутствуют в уравнении энергии (12.7) (или (12.9)), так как в этом случае $M^\alpha = -TS^\alpha$.

Рассмотрим 4-вектор $\boldsymbol{q}$, определенный равенствами

$$\boldsymbol{q} = q^\nu \boldsymbol{\vartheta}_\nu, \qquad q^\nu = TS^\nu. \tag{12.19}$$

Так как $S^\nu u_\nu = 0$, то в собственной ГСК $x^{*\nu}$ компоненты 4-вектора $\boldsymbol{q}$ имеют вид

$$q^{*0} = 0, \qquad q^{*k} = TS^{*k}. \tag{12.20}$$

Как известно [9], в нерелятивистской механике сплошной среды компоненты вектора плотности потока тепла q^{*k} связаны с компонентами вектора плотности внутреннего потока энтропии S^{*k} как раз вторым соотношением (12.20). Поэтому 4-вектор $\boldsymbol{q}$ можно рассматривать как релятивистское обобщение вектора плотности потока тепла и называть его *4-вектором плотности потока тепла.*

После того как соотношение (12.10) приведено к виду (12.11), можно выдвигать различные гипотезы относительно зависимости между обобщенными термодинамическими силами X^B и потоками J_B, аналогичные гипотезам нерелятивистской термодинамики необратимых процессов. Так, во многих моделях сплошных сред при изучении процессов, близких к обратимым, принимается, что обобщенные потоки являются линейными функциями от обобщенных сил

$$J_B = L_{BC} X^C. \tag{12.21}$$

Матрица $\| L_{BC} \|$ может зависеть от определяющих параметров и их производных, причем на основании второго закона термодинамики должно выполняться неравенство

$$\sigma \equiv \sum_{B,\,C} L_{BC} X^B X^C \geqslant 0. \tag{12.22}$$

Соотношения (12.21) называются *линейными законами Онсагера для необратимых процессов.*

В термодинамике необратимых процессов доказывается, что в случае независимых обобщенных сил коэффициенты L_{BC}, фигурирующие в линейных законах Онсагера, должны удовлетворять соотношениям Онсагера — Казимира [10, 11]. Их можно записать в виде

$$\operatorname{sign}(J_B J_C)\ L_{BC} = \operatorname{sign}(J_B^* J_C^*)\, L_{CB}^*. \qquad (12.23)$$

Здесь звездочкой обозначена операция обращения времени [10, 11]. Для линейно зависимых обобщенных сил коэффициенты L_{BC}, очевидно, определены неоднозначно. В этом случае, как доказывается в термодинамике необратимых процессов [10], их можно выбрать таким образом, что соотношения Онсагера — Казимира по-прежнему будут выполнены. Линейные законы (12.21) или их нелинейные обобщения [9] позволяют в принципе определить коэффициенты M_A, M_A^α, $M_A^{\alpha\beta}$, входящие в выражение (7.19) для функционала δW^*. После этого для завершения построения модели сплошной среды остается задать лагранжиан Λ и матрицу $\|L_{BC}\|$.

Обоснование вариационного уравнения. Для построения конкретных моделей сплошных сред в исходном вариационном уравнении необходимо задать выражения для лагранжиана Λ и функционала δW^*. Полезные наводящие соображения о виде Λ и δW^* можно получить, наложив условие, согласно которому вариационное уравнение после замены всех вариаций на действительные приращения соответствующих величин должно совпадать с уравнением энергии, записанным в собственной системе отсчета [9]. Тогда для простейших известных моделей сплошных сред оказывается довольно легко установить структуру лагранжиана Λ и функционала δW^*. Усложняя затем полученные выражения для Λ и δW^*, можно конструировать более сложные модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. Рассмотрим описанную процедуру на примере модели идеально упругой сплошной среды, уравнения движения которой имеют вид [13]

$$\partial_\mu p^{\nu\mu} = Q^\nu. \qquad (12.24)$$

Здесь Q^ν — компоненты объемной плотности 4-силы $\boldsymbol{Q}$, $p^{\nu\mu}$ — компоненты симметричного тензора энергии-импульса, удовлетворяющие в собственной ГСК соотношениям

$$p^{*00} = \mathscr{E}, \quad p^{*k0} = p^{*0k} = 0. \qquad (12.25)$$

Если рассматриваемая среда проводит электрический ток, то при наличии электромагнитного поля 4-сила $\boldsymbol{Q}$ содержит 4-силу Лоренца [13]

$$Q^{\nu} = \frac{1}{c} F^{\nu}_{\cdot\mu} J^{\mu} + \tau^{\nu}. \tag{12.26}$$

Через τ^{ν} здесь обозначены компоненты части 4-силы $\boldsymbol{Q}$, имеющие неэлектромагнитное происхождение (с макроскопической точки зрения). Используя известные уравнения Максвелла [13]

$$\partial_{\mu} F^{\nu\mu} = -\frac{4\pi}{c} J^{\nu}, \tag{12.27}$$

выражение (12.26) для Q^{ν} можно представить в виде

$$Q^{\nu} = -\partial_{\mu} T^{\nu\mu}_{(F)} + \tau^{\nu}, \tag{12.28}$$

$$T^{\nu\mu}_{(F)} \equiv \frac{1}{4\pi}\left(-F^{\nu\lambda}F^{\mu}_{\cdot\lambda} + \frac{1}{4} F_{\varkappa\lambda}F^{\varkappa\lambda} g^{\nu\mu}\right). \tag{12.29}$$

Как известно [14], для идеально упругой среды в собственной ГСК релятивистские уравнения баланса энергии и энтропии совпадают с соответствующими уравнениями в ньютоновской механике и имеют вид

$$\rho \frac{d}{d\tau}\frac{\mathscr{E}}{\rho} = p^{*q}_{k} (\partial_{q} v^{k})^{*} + cQ^{*}_{0}, \quad \rho T \frac{dS}{d\tau} = cQ^{*}_{0}. \tag{12.30}$$

Здесь величина $cQ^{*}_{0} \equiv cQ_{\nu}u^{\nu}$ представляет собой скорость притока тепловой энергии к единице объема в собственной ГСК; $S \equiv s/\rho$ — удельная плотность энтропии среды, т. е. энтропия единицы массы среды в собственной ГСК; $\mathscr{E}$, — плотность внутренней энергии среды, являющаяся функцией аргументов S, $\gamma_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{B}$.

Исключая из первого равенства (12.30) величину Q^{*}_{0} при помощи второго уравнения (12.30) и учитывая определение компонент 4-скорости и соотношения (12.25), получим

$$\rho \frac{d}{d\tau}\frac{\mathscr{E}}{\rho} = cp^{*\mu}_{\nu\cdot} (\partial_{\mu} u^{\nu})^{*} + \rho T \frac{dS}{d\tau}. \tag{12.31}$$

Применяя уравнение движения (12.24) и выражение (12.26) для компонент 4-силы Q^{ν}, первое слагаемое в правой части уравнения (12.31) можно преобразовать следующим образом:

$$cp^{*\mu}_{\nu\cdot} (\partial_{\mu} u^{\nu})^{*} = cp^{\cdot\mu}_{\nu\cdot} \partial_{\mu} u^{\nu} = c\partial_{\mu} (p^{\cdot\mu}_{\nu\cdot} u^{\nu}) - F_{\nu\mu} u^{\nu} J^{\mu} - c\tau_{\nu} u^{\nu}.$$

Используя это соотношение, а также определение собственного времени, уравнение неразрывности (3.54) при $\varkappa=0$[1]) и тождество

$$\partial_\mu\left(\frac{1}{16\pi}F_{\varkappa\lambda}F^{\varkappa\lambda}u^\mu\right)\equiv\partial_\mu\left(T_{(F)\nu}^{\ \ \mu}u^\nu+\frac{1}{4\pi}F_{\nu\lambda}F^{\mu\lambda}u^\nu\right),$$

представим уравнение (12.31) в виде

$$\partial_\mu\Lambda' u^\mu+\partial_\mu\left(T'^{\ \mu}_{\nu}u^\nu-\frac{1}{4\pi}F^{\lambda\mu}F_{\nu\lambda}u^\nu\right)-$$
$$-\tau_\nu u^\nu-\frac{1}{c}F_{\nu\lambda}u^\nu J^\lambda+\rho T\frac{dS}{d\Delta}=0. \qquad (12.32)$$

Здесь

$$\Lambda'\equiv-\mathscr{E}(S,\ \gamma_{\alpha\beta},\ \varkappa_B)-\frac{1}{16\pi}F_{\varkappa\lambda}F^{\varkappa\lambda},$$
$$T'^{\ \mu}_{\nu}\equiv p_\nu^{\ \mu}+T_{(F)\nu}^{\ \ \mu}. \qquad (12.33)$$

Преобразуем теперь присутствующие в уравнении (12.32) коэффициенты $F_{\nu\lambda}u^\nu$:

$$F_{\nu\lambda}u^\nu=u^\nu\partial_{[\nu}A_{\lambda]}=\frac{dA_\lambda}{d\Delta}+A_\nu\partial_\lambda u^\nu-\partial_\lambda(A_\nu u^\nu).$$

В результате содержащие эти коэффициенты слагаемые запишутся следующим образом:

$$-\partial_\mu\left(\frac{1}{4\pi}F^{\lambda\mu}F_{\nu\lambda}u^\nu\right)-\frac{1}{c}F_{\nu\lambda}u^\nu J^\lambda=$$
$$=-\partial_\mu\left[\frac{1}{4\pi}F^{\lambda\mu}\left(\frac{dA_\lambda}{d\Delta}+A_\nu\partial_\lambda u^\nu\right)\right]-\frac{1}{c}J^\lambda\left(\frac{dA_\lambda}{d\Delta}+A_\nu\partial_\lambda u^\nu\right)+$$
$$+\partial_\mu\left[\frac{1}{4\pi}F^{\lambda\mu}\partial_\lambda(A_\nu u^\nu)\right]+\frac{1}{c}J^\lambda\partial_\lambda(A_\nu u^\nu).$$

Учитывая антисимметричность компонент $F^{\mu\lambda}$ и уравнения Максвелла (12.27), легко убедиться, что сумма последних двух слагаемых здесь равна нулю. Поэтому уравнение (12.32) можно представить в виде

$$\partial_\mu\Lambda' u^\mu+\partial_\mu\left[T'^{\ \mu}_{\nu}u^\nu-\frac{1}{4\pi}F^{\lambda\mu}\left(\frac{dA_\lambda}{d\Delta}+A_\nu\partial_\lambda u^\nu\right)\right]-$$
$$-\tau_\nu u^\nu-\frac{1}{c}J^\lambda\left(\frac{dA_\lambda}{d\Delta}+A_\nu\partial_\lambda u^\nu\right)+\rho T\frac{dS}{d\Delta}=0. \qquad (12.34)$$

В § 7 и 11 указывалось, что координата ξ^0 является произвольным параметром точек на мировых линиях

[1]) В идеально упругой среде по определению отсутствуют химические или иные реакции и, следовательно, $\varkappa=0$.

сплошной среды и не определяется физическими процессами. Выберем для рассматриваемых действительных процессов в качестве ξ^0 значение интервала Δ, отсчитываемого вдоль мировых линий сплошной среды от некоторого произвольного фиксированного начального состояния. Тогда

$$g_{00}=1, \quad -g=\gamma, \quad u^\nu=x_0^\nu, \quad u^\alpha=\delta_0^\alpha, \tag{12.35}$$

$$\frac{dA_\lambda}{d\Delta}+A_\nu\partial_\lambda u^\nu=\xi_\lambda^\alpha x_\alpha^\mu\left(\frac{dA_\mu}{d\Delta}+A_\nu\partial_\mu x_0^\nu\right)=$$

$$=\xi_\lambda^\alpha\left(x_\alpha^\mu\frac{dA_\mu}{d\Delta}+A_\nu\frac{dx_\alpha^\nu}{d\Delta}\right)=\xi_\lambda^\alpha\frac{dA_\alpha}{d\Delta},$$

$$\partial_\mu\Lambda' u^\mu=\nabla_\alpha\Lambda' u^\alpha=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\sqrt{-g}\,\Lambda' u^\alpha=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{d}{d\Delta}\sqrt{-g}\,\Lambda',$$

и уравнение (12.34) окончательно запишется таким образом:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{d}{d\Delta}\sqrt{-g}\,\Lambda'+\nabla_\beta\left[T'^\beta_\nu\frac{dx^\nu}{d\Delta}-\frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\frac{dA_\alpha}{d\Delta}\right]-$$

$$-\tau_\nu\frac{dx^\nu}{d\Delta}-\frac{1}{c}J^\alpha\frac{dA_\alpha}{d\Delta}+\rho T\frac{dS}{d\Delta}=0. \tag{12.36}$$

Рассмотрим в четырехмерной области $\hat{V}$ совокупность действительных приращений определяющих параметров $S(\xi^\alpha)$, $x^\nu(\xi^\alpha)$, $A_\alpha(\xi^\alpha)$, задаваемых равенствами

$$dS=\frac{dS}{d\Delta}d\varepsilon, \quad dx^\nu=\frac{dx^\nu}{d\Delta}d\varepsilon, \quad dA_\alpha=\frac{dA_\alpha}{d\Delta}d\varepsilon,$$

в которых $d\varepsilon=\text{const}$ во всей области $\hat{V}$. Тогда, умножая уравнение (12.36) на величину $c^{-1}\sqrt{-g}\,d\varepsilon\,d^4\xi$, интегрируя его по области $\hat{V}/\hat{\Sigma}_c$ и используя формулу Остроградского — Гаусса, получим следующее интегральное соотношение для указанных действительных приращений определяющих параметров:

$$d\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\Lambda'\sqrt{-g}\,d^4\xi+$$

$$+\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(\rho T\,dS-\tau_\nu dx^\nu-\frac{1}{c}J^\alpha dA_\alpha\right)\sqrt{-g}\,d^4\xi+$$

$$+\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left(T'^\beta_\nu\,dx^\nu-\frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\,dA_\alpha\right)l_\beta\,d^3\zeta=0. \tag{12.37}$$

Таким образом, если в качестве лагранжиана Λ рассматриваемой модели выбрать функцию Λ', определенную

первым равенством (12.33), то для действительных приращений определяющих параметров S, x^ν, A_α функционалы δW^* и δW будут иметь следующий вид:

$$dW^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(\rho T\,dS - \tau_\nu\,dx^\nu - \frac{1}{c}\,J^\alpha\,dA_\alpha\right)\sqrt{-g}\,d^4\xi,$$
$$dW = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left(T'^{\beta}_{\nu\cdot}\,dx^\nu - \frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\,dA_\alpha\right)l_\beta\,d^3\zeta. \qquad (12.38)$$

Учет необратимых процессов теплопроводности и вязкости проще всего провести, заменив компоненты 4-силы τ^ν по формуле

$$\tau^\nu = \partial_\mu\left(\tau^{\nu\mu} - \frac{1}{c}\,q^{\langle\nu}u^{\mu\rangle}\right), \quad q^\nu = TS^\nu, \qquad (12.39)$$

где $\tau^{\nu\mu}$ — компоненты 4-тензора, удовлетворяющего условиям $u_\nu\tau^{\nu\mu} = u_\nu\tau^{\mu\nu} = 0$. Подставив выражение (12.39) для τ^ν в уравнение (12.37) и проинтегрировав слагаемое $-\tau_\nu\,dx^\nu$ по частям, получим

$$d\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\Lambda'\sqrt{-g}\,d^4\xi + \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\Big[\rho T\,dS + \left(\tau^{\lambda\beta} - \frac{1}{c}\,TS^{\langle\lambda}u^{\beta\rangle}\right)g_{\lambda\nu}\partial_\beta\,dx^\nu - \frac{1}{c}\,J^\alpha\,dA_\alpha\Big]\sqrt{-g}\,d^4\xi +$$
$$+\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left(T_\nu{}^\beta\,dx^\nu - \frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\,dA_\alpha\right)l_\beta\,d^3\zeta = 0, \qquad (12.40)$$
$$T^{\beta}_{\nu\cdot} \equiv p^{\beta}_{\nu\cdot} - \tau^{\beta}_{\nu\cdot} + \frac{1}{c}\,Tg_{\nu\lambda}S^{\langle\lambda}u^{\beta\rangle} + T_{(F)\nu\cdot}^{\beta\cdot}.$$

Поэтому для действительных приращений определяющих параметров S, x^ν, A_α функционалы δW^*, δW, учитывающие необратимые процессы теплопроводности и вязкости, можно записать следующим образом (при том же лагранжиане Λ'):

$$dW^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\Big[\rho T\,dS + \left(\tau^{\lambda\beta} - \frac{1}{c}\,TS^{\langle\lambda}u^{\beta\rangle}\right)g_{\lambda\nu}\partial_\beta\,dx^\nu - \frac{1}{c}\,J^\alpha\,dA_\alpha\Big]\sqrt{-g}\,d^4\xi, \qquad (12.41)$$
$$dW = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left(T^{\beta}_{\nu\cdot}\,dx^\nu - \frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\,dA_\alpha\right)l_\beta\,d^3\zeta.$$

Заменяя в формулах (12.38) или (12.41) действительные приращения определяющих параметров S, x^ν, A_α на их вариации, легко получить представление о структуре соответствующих функционалов δW^* и δW.

Уравнение (12.40) вытекает также из основных термодинамических соотношений, представляющих собой уравнения баланса энергии и энтропии, которые для системы, состоящей из проводящей, поляризующейся и намагничивающейся среды и электромагнитного поля, на основании результатов работ [9, 12, 13] можно записать в виде (используются принятые выше обозначения):

$$d\int\limits_{\hat V/\hat\Sigma_c}(\mathscr{E}+L)\sqrt{-g}\,d^4\xi=\int\limits_{\hat V/\hat\Sigma_c}\Big[\Big(\frac{1}{8\pi}H^{\mu\lambda}\partial_\nu F_{\mu\lambda}-\frac{1}{c}J^\mu F_{\mu\nu}\Big)dx^\nu+$$

$$+dQ^{(e)}-Q^{(e)}_\nu dx^\nu\Big]\sqrt{-g}\,d^4\xi+dW_0=0, \qquad (12.42)$$

$$\int\limits_{\hat V/\hat\Sigma_c}\rho T\,dS\sqrt{-g}d^4\xi=\int\limits_{\hat V/\hat\Sigma_c}(dQ^{(e)}+dQ')\sqrt{-g}\,d^4\xi;$$

$$L\equiv\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}H^{\mu\nu},\quad dQ'\equiv-\frac{1}{c}J^\mu F_{\mu\nu}dx^\nu+\tau'^\lambda_\nu\partial_\lambda dx^\nu.$$

Здесь $dQ^{(e)}$ — плотность внешнего притока тепла к среде за время $d\tau=d\varepsilon/c$ (не включающего джоулево тепло); $Q^{(e)}_\nu$ — компоненты плотности внешней четырехмерной силы; dQ' — плотность притока некомпенсированного тепла к среде за время $d\tau=d\varepsilon/c$; τ'^λ_ν — тензорные компоненты, характеризующие необратимые процессы вязкости и теплопроводности в среде; dW_0 — слагаемое, учитывающее энергетические взаимодействия на границе объема $\hat V/\hat\Sigma_c$; $\hat V$ — произвольный четырехмерный объем, занятый средой и электромагнитным полем; $\hat\Sigma_c$ — гиперповерхность разрыва, принадлежащая $\hat V$. Выражение для dQ' приведено для случая, когда процессы поляризации и намагничивания среды обратимы. Приращения dx^ν, присутствующие в первом соотношении (12.42) в слагаемых, содержащих компоненты тензора напряженности электромагнитного поля, определены в собственной ГСК соотношением $dx^\nu=cu^{*\nu}d\tau$, причем $\partial_\mu u^{*\nu}=0$. Учитывая это обстоятельство, а также антисимметричность компонент $H^{\mu\lambda}$ и уравнения Максвелла, которые в принятых выше обозначениях имеют вид

$$F_{\mu\nu}=\partial_{[\mu}A_{\nu]},\quad \partial_\lambda H^{\mu\lambda}=-\frac{4\pi}{c}J^\mu,$$

указанные слагаемые в первом соотношении (12.42) можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{1}{8\pi} H^{\mu\lambda}\partial_\nu F_{\mu\lambda} - \frac{1}{c} J^\mu F_{\mu\nu}\right) dx^\nu =$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi} H^{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_\mu A_\lambda + \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu}\partial_\lambda H^{\mu\lambda}\right) dx^\nu = \partial_\lambda\left(\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} H^{\mu\lambda} dx^\nu\right).$$

Преобразуем еще выражение для dQ':

$$dQ' = -\frac{1}{c} J^\mu F_{\mu\nu}\, dx^\nu + \tau'^\lambda_\nu \partial_\lambda\, dx^\nu =$$

$$= \frac{1}{c} J^\mu (dA_\mu - dx^\nu \partial_\mu A_\nu) + \tau'^\lambda_\nu \partial_\lambda\, dx^\nu =$$

$$= \frac{1}{c} J^\alpha\, dA_\alpha + \tau'^\lambda_\nu \partial_\lambda\, dx^\nu - \partial_\lambda\left(\frac{1}{c} J^\lambda A_\nu\, dx^\nu\right).$$

Здесь

$$A_\alpha = x^\mu_\alpha A_\mu, \quad dA_\mu = dx^\nu \partial_\nu A_\mu = \frac{dA_\mu}{d\Delta} d\varepsilon.$$

В результате первое соотношение (12.42) после исключения из него интеграла от величины $dQ^{(e)}$ с помощью второго соотношения (12.42) можно представить в виде

$$d\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} (-\mathscr{E} - L)\sqrt{-g}\, d^4\xi + \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \left(\rho T\, dS - Q^{(e)}_\nu\, dx^\nu - \right.$$

$$\left. - \tau'^\beta_\nu \partial_\beta\, dx^\nu - \frac{1}{c} J^\alpha\, dA_\alpha\right)\sqrt{-g}\, d^4\xi + dW = 0, \qquad (12.43)$$

$$dW = \frac{1}{c} dW_0 + \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \partial_\lambda\left[\left(\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} H^{\mu\lambda} + \frac{1}{c} J^\lambda A_\nu\right) dx^\nu\right]\sqrt{-g}\, d^4\xi.$$

Используя уравнения Максвелла и антисимметричность компонент $H^{\mu\lambda}$, легко показать, что здесь

$$\partial_\lambda\left[\left(\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} H^{\mu\lambda} + \frac{1}{c} J^\lambda A_\nu\right) dx^\nu\right] =$$

$$= -\partial_\mu\left[\frac{1}{4\pi} H^{\nu\mu}\,(dA_\nu + A_\lambda \partial_\nu\, dx^\lambda)\right] = -\nabla_\beta\left(\frac{1}{4\pi} H^{\alpha\beta}\, dA_\alpha\right),$$

и, следовательно,

$$dW = \frac{1}{c}\left(dW_0 - \int\limits_{\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_+} \frac{1}{4\pi} H^{\alpha\beta}\, dA_\alpha l_\beta d^3\zeta\right).$$

Учитывая затем определения Λ' и L, окончательно получим, что для неполяризующейся и ненамагничиваю-

щейся среды в случае, когда

$$Q_{\nu}^{(e)}=0, \quad \tau'^{\nu\lambda}=\frac{1}{c}TS^{\langle\nu}u^{\lambda\rangle}-\tau^{\nu\lambda},$$

$$dW_0=\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}} T_{\nu}^{\cdot\beta}\,dx^{\nu}l_{\beta}d^3\zeta,$$

соотношение (12.43) сводится к уравнению (12.40), которое, таким образом, является тождественным следствием основных термодинамических соотношений (12.42).

Изменение набора определяющих параметров, естественно, отражается на общем виде функционалов δW^*, δW. Рассмотрим случай, когда в число определяющих параметров наряду с функциями $x^{\nu}(\xi^{\nu})$, $A_{\alpha}(\xi^{\nu})$, $\varkappa_B(\xi^{a})$ входят еще параметры электрического тока $\psi^{\alpha}(\xi^{\nu})$ и параметры переноса и производства энтропии $\varphi^{\alpha}(\xi^{\nu})$, $\varphi(\xi^{\nu})$. Тогда для компонент плотности электрического тока J^{α} справедливо параметрическое представление (5.14), и в уравнении (12.40) подынтегральное слагаемое, содержащее величины J^{α}, можно тождественно преобразовать следующим образом (используя также равенства (12.35)):

$$-\frac{1}{c}(J^{\alpha}dA_{\alpha})\sqrt{-g}=-d\left(\frac{1}{c}J^{\alpha}A_{\alpha}\sqrt{-g}\right)+\frac{1}{c}A_{\alpha}d(\sqrt{-g}J^{\alpha}),$$

$$\frac{1}{c}A_{\alpha}d(\sqrt{-g}J^{\alpha})=\frac{1}{c}A_{\alpha}d\left(c\sqrt{-g}\nabla_{\gamma}\frac{\psi^{[\alpha}u^{\gamma]}}{\sqrt{\gamma}}\right)=$$

$$=A_{\alpha}d\left(\partial_{\gamma}\psi^{[\alpha}\delta_0^{\gamma]}\right)=A_{\alpha}\partial_{\gamma}\left(d\psi^{[\alpha}\delta_0^{\gamma]}\right)=A_{\alpha}\sqrt{-g}\,\nabla_{\gamma}\frac{d\psi^{[\alpha}u^{\gamma]}}{\sqrt{\gamma}}=$$

$$=\left[\nabla_{\gamma}\left(A_{\alpha}\frac{u^{[\gamma}\,d\psi^{\alpha]}}{\sqrt{\gamma}}\right)+\Psi_{\alpha}\frac{d\psi^{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}\right]\sqrt{-g},$$

$$\Psi_{\alpha}\equiv -F_{\gamma\alpha}u^{\gamma}.$$

В результате уравнение (12.40) примет вид

$$d\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(\Lambda'-\frac{1}{c}J^{\alpha}A_{\alpha}\right)\sqrt{-g}\,d^4\xi+$$

$$+\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(\rho T\,dS+\left(\tau^{\lambda\beta}-\frac{1}{c}TS^{\langle\lambda}u^{\beta\rangle}\right)\times\right.$$

$$\left.\times g_{\lambda\nu}\partial_{\beta}\,dx^{\nu}+\Psi_{\alpha}\frac{d\psi^{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}\right]\sqrt{-g}\,d^4\xi+$$

$$+\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_{\pm}}\left[T_{\nu}^{\cdot\beta}\,dx^{\nu}-\frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\,dA_{\alpha}+A_{\alpha}\frac{u^{[\beta}\,d\psi^{\alpha]}}{\sqrt{\gamma}}\right]l_{\beta}\,d^3\zeta=0. \tag{12.44}$$

Преобразуем теперь в этом уравнении подынтегральные члены, содержащие удельную плотность энтропии $S \equiv s/\rho$ и компоненты 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии S^λ, используя для них параметрические представления (6.27), (6.28) и учитывая уравнение неразрывности (3.55) при $\varkappa = 0$, определение компонент γ^α_β и соотношения (12.35):

$$\rho T\,dS - \frac{1}{c}\,TS^{\langle\lambda}u^{\beta\rangle}g_{\lambda\nu}\partial_\beta\,dx^\nu =$$

$$= T\left[\rho d\,\frac{\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha\varphi^\beta + \varphi}{\rho\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{c}\,S^\alpha u^\beta g_{\lambda\nu}x^\lambda_{\langle\alpha}\partial_{\beta\rangle}\,dx^\nu\right] =$$

$$= T\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,(d\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha\varphi^\beta + \gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha\,d\varphi^\beta + d\varphi) - \frac{1}{c}\,S^\alpha u^\beta\,dg_{\alpha\beta}\right] =$$

$$= \frac{T}{\sqrt{\gamma}}\,du_\beta\,\frac{d\varphi^\beta}{d\Delta} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\partial_\alpha(T\gamma^\alpha_\beta\,d\varphi^\beta) - \partial_\alpha(T\gamma^\alpha_\beta)\,\frac{d\varphi^\beta}{\sqrt{\gamma}} +$$

$$+ T\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\gamma}} + \frac{T}{\sqrt{\gamma}}\,\gamma^\alpha_\nu\frac{d\varphi^\nu}{d\Delta}u^\beta\,dg_{\alpha\beta} = \frac{T}{\sqrt{\gamma}}\,du_\beta\,\frac{d\varphi^\beta}{d\Delta} +$$

$$+ \nabla_\alpha\left(T\gamma^\alpha_\beta\,\frac{d\varphi^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right) - \left(\gamma^\alpha_\beta\nabla_\alpha T + T\,\frac{du_\beta}{d\Delta}\right)\frac{d\varphi^\beta}{\sqrt{\gamma}} +$$

$$+ T\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\gamma}} - \frac{T}{\sqrt{\gamma}}\,\delta^\alpha_\nu\,\frac{d\varphi^\nu}{d\Delta}\,du_\alpha = \nabla_\alpha\left(Tu_\beta\,\frac{u^{[\alpha}\,d\varphi^{\beta]}}{\sqrt{\gamma}}\right) + \Phi_\beta\,\frac{d\varphi^\beta}{\sqrt{\gamma}} + T\,\frac{d\varphi}{\sqrt{\gamma}},$$

$$\Phi_\beta = -(\gamma^\alpha_\beta\nabla_\alpha T + Tu^\alpha\nabla_\alpha u_\beta).$$

Здесь были использованы также тождества

$$u^\alpha u^\beta\,dg_{\alpha\beta} = 0, \quad u^\beta\,dg_{\alpha\beta} = du_\alpha, \quad \frac{du_\beta}{d\Delta} = u^\alpha\nabla_\alpha u_\beta,$$

вытекающие из принятых выше условий $\xi^0 = \Delta$, $g_{00} = 1$.

После указанных преобразований уравнение (12.44) окончательно примет вид

$$d\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\Lambda\sqrt{-g}\,d^4\xi + dW^* + dW = 0.$$

Здесь

$$dW^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left[T\frac{d\varphi}{\sqrt{\gamma}} + \tau_\nu{}^\beta \partial_\beta\, dx^\nu + \Phi_\alpha \frac{d\varphi^\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \Psi_\alpha \frac{d\psi^\alpha}{\sqrt{\gamma}}\right]\sqrt{-g}\, d^4\xi,$$

$$dW = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left[T_\nu^{\cdot\beta}\, dx^\nu - \frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\, dA_\alpha + \right. \tag{12.45}$$

$$\left. + Tu_\alpha \frac{u^{[\beta}\, d\varphi^{\alpha]}}{\sqrt{\gamma}} + A_\alpha \frac{u^{[\beta}\, d\psi^{\alpha]}}{\sqrt{\gamma}}\right] l_\beta\, d^3\zeta;$$

$$\Lambda = -\mathscr{E}(S,\ \gamma_{\alpha\beta},\ \varkappa_B) - \frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}J^\alpha A_\alpha. \tag{12.46}$$

Заменяя в формулах (12.45) действительные приращения всех величин на их вариации, получим общую структуру функционалов δW^*, δW для рассматриваемой модели в случае, когда лагранжиан Λ задается равенством (12.46), а в качестве определяющих параметров выбираются функции $x^\nu(\xi^\nu)$, $A_\alpha(\xi^\nu)$, $\psi^\alpha(\xi^\nu)$, $\varphi^\alpha(\xi^\nu)$, $\varphi(\xi^\nu)$, $\varkappa_B(\xi^\alpha)$. Усложняя зависимость лагранжиана от этих определяющих параметров, например, путем введения в число аргументов функции $\mathscr{E}$ величин z, j^α, S^α, которые выражаются через параметры ψ^α, φ^α, φ и их производные, можно строить более общие модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. При этом функционал δW^* можно определять соотношением, имеющим ту же структуру, что и первое равенство (12.45), хотя приведенные выше выражения для коэффициентов Ψ_α, Φ_α могут усложняться. При конструировании конкретных моделей выражения для Ψ_α, Φ_α, очевидно, получаются в качестве уравнений Эйлера при вариациях $\delta\psi^\alpha$, $\delta\varphi^\alpha$. Рассматривая модели многокомпонентных сплошных сред, для которых

$$\psi^\alpha = \sum_{i=1}^{N} e_i\psi_i^\alpha, \quad \varphi^\alpha = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i^\alpha, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i,$$

в качестве определяющих параметров наряду с функциями $x^\nu(\xi^\nu)$, $A_\alpha(\xi^\nu)$, $\varkappa_B(\xi^\nu)$, вообще говоря, следует выбирать также функции $\varphi_i^\alpha(\xi^\nu)$, $\varphi_i(\xi^\nu)$, $\psi_i^\alpha(\xi^\nu)$, $\chi_r(\xi^\nu)$, обобщая при этом соответствующим образом выражения для функционала δW^* и для аргументов лагранжиана (12.46). Построение замкнутых моделей сплошных сред требует задания допол-

нительных законов, связывающих коэффициенты при вариациях в функционале δW^* с определяющими параметрами независимо от вариационного уравнения. Это можно сделать, используя общие положения термодинамики необратимых процессов.

В следующей главе будет рассмотрено применение изложенной выше общей теории к построению конкретных релятивистских моделей сплошных сред.

ГЛАВА 5

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 13. Нелинейно-упругая теплопроводная вязкая среда

Определяющие параметры. Рассмотрим модель сплошной среды, для которой лагранжиан имеет вид

$$\Lambda = -\rho U(\rho,\ \gamma_{\alpha\beta},\ S,\ S^{\alpha},\ \varkappa_B),\ S \equiv \frac{s}{\rho}. \qquad (13.1)$$

Здесь ρ — собственная плотность массы покоя среды; $\gamma_{\alpha\beta}$ — компоненты пространственного метрического тензора среды; S — удельная плотность энтропии среды; s — собственная плотность энтропии среды; S^{α} — компоненты 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии среды; $\varkappa_B$ — известные неварьируемые функции лагранжевых координат ξ^a, обладающие сформулированными в § 11 свойствами. Параметры ρ, $\gamma_{\alpha\beta}$, s, S^{α} были определены во второй главе. Среди параметров $\varkappa_B$ могут присутствовать, например, компоненты пространственного метрического тензора среды в недеформированном состоянии $\mathring{\gamma}_{\alpha\beta}$, компоненты тензоров, задающих анизотропные свойства среды в ССК, а также различные физические постоянные. Включение в число аргументов лагранжиана Λ компонент S^{α} обусловлено следующим обстоятельством. В нерелятивистской механике плотность энтропии является скаляром и не зависит от ГСК наблюдателя [1]. В релятивистской же механике она представляет собой нулевую компоненту 4-вектора $c^{-1}s^{\nu}$. В этом случае естественным обобщением скалярной плотности энтропии нерелятивистской механики является значение плотности энтропии $c^{-1}s^{*0}$ в ГСК наблюдателя, относительно которой рассматриваемая частица сплошной среды в рассматриваемый момент времени находится в состоянии покоя. Однако релятивистское обобщение последнего неоднозначно [2, 3] Можно считать, что частица сплошной среды покоится относительно ГСК наблюдателя, если в ней обращаются в нуль компоненты трехмерного вектора плотности потока массы покоя среды: $c\rho u^k = 0$. Но можно также считать, что частица сплошной среды покоится отно-

сительно ГСК наблюдателя, если в ней обращаются в нуль компоненты трехмерного вектора плотности импульса среды: $c^{-1}T^{k0}=0$. Как известно [3], при $q \equiv TS \neq 0$, указанные трехмерные векторы в одной и той же ГСК наблюдателя сразу в нуль не обращаются, и, следовательно, релятивистское обобщение понятия покоя неоднозначно. Согласно первому способу определения ГСК наблюдателя, относительно которой частица сплошной среды покоится, имеем $c^{-1}s^{*0}=s$, а согласно второму способу величина $c^{-1}s^{*0}$ должна зависеть также от S. Поэтому и лагранжиан, вообще говоря, должен содержать среди аргументов наряду с величиной s компоненты S^α.

Собственная плотность массы покоя ρ удовлетворяет уравнению баланса (3.5). Ограничимся здесь и в § 14 и 15 случаем, когда при взаимодействиях микроскопических частиц, образующих рассматриваемую среду, сумму их масс покоя можно считать сохраняющейся величиной. Указанный случай всегда имеет место, если между микроскопическими частицами не происходит реакций. При этом в уравнении (3.5) надо положить $\varkappa=0$, после чего оно принимает вид

$$\nabla_\alpha c\rho u^\alpha = 0. \tag{13.2}$$

В конце § 3 было показано, что уравнение баланса массы покоя сплошной среды (3.5) эквивалентно соотношению (3.55). Положив в нем $\varkappa=0$, получим соотношение

$$\frac{d}{d\tau}\rho\sqrt{\gamma}=0 \qquad (\gamma \equiv |\gamma_{ab}|), \tag{13.3}$$

эквивалентное уравнению неразрывности (13.2). Из равенства (13.3) следует, что

$$\rho\sqrt{\gamma}=f(\xi^a). \tag{13.4}$$

Функция $f(\xi^a)$ постоянна вдоль мировых линий сплошной среды и может считаться заданной на основании начальных условий [4—7]. Поэтому она относится к числу неварьируемых параметров $\varkappa_B(\xi^a)$ [1].

---

[1]) В этом случае аргументы ρ и $\gamma_{\alpha\beta}$ в выражении (13.1) для Λ не являются независимыми. Величина ρ выделена среди аргументов Λ, чтобы в дальнейших соотношениях упростить переход к частному случаю, когда Λ зависит от $\gamma_{\alpha\beta}$ только через ρ. Такая зависимость имеет место, например, для газа (при $\partial\Lambda/\partial S^\alpha=0$).

Так как лагранжиан является скаляром, то функция U в выражении (13.1) для Λ должна зависеть от указанных аргументов только через их комбинации, которые остаются инвариантными при изменении ССК ξ^α (от выбора ГСК x^ν аргументы функции U вообще не зависят). Построение таких инвариантов облегчается, если заметить, что при произвольных преобразованиях ССК ξ^α

$$\xi'^0 = \xi'^0(\xi^0, \xi^a), \quad \xi'^a = \xi'^a(\xi^a)$$

величины γ_{ab}, S^a, а также компоненты параметров $\varkappa_B$, отвечающие значениям тензорных индексов 1, 2, 3 (например, $\mathring{\gamma}_{ab}$), ведут себя как компоненты соответствующих трехмерных тензоров. Величины же $\gamma_{0\alpha}$, $\gamma_{\alpha 0}$ и ковариантные компоненты параметров $\varkappa_B$, один из тензорных индексов которых принимает значение 0 (например, $\mathring{\gamma}_{0\alpha}$, $\mathring{\gamma}_{\alpha 0}$), тождественно равны нулю. Так, для изотропной среды в число аргументов функции U наряду с величинами ρ, S и скалярными параметрами $\varkappa_B$ войдут еще трехмерные инварианты, которые можно построить, например, из компонент

$$\gamma_{ab},\ S^a,\ \mathring{\gamma}^{ab} \equiv \frac{1}{\mathring{\gamma}} \frac{\partial \mathring{\gamma}}{\partial \mathring{\gamma}_{ba}} \quad (\mathring{\gamma} \equiv |\mathring{\gamma}_{ab}|).$$

Напомним некоторые свойства аргументов лагранжиана (13.1). Компоненты $\gamma_{\alpha\beta}$ (и, следовательно, определитель γ) выражаются при помощи полученных в § 3 формул через производные $\partial x^\nu/\partial\xi^\alpha \equiv x^\nu_\alpha$ от независимых функций $x^\nu(\xi^\alpha)$. Параметры s, S^α должны удовлетворять уравнению баланса энтропии (6.15). Для них справедливы полученные в § 6 параметрические представления через функции $\varphi^\alpha(\xi^\nu)$, $\varphi(\xi^\nu)$, связанные между собой простым соотношением

$$u_\alpha \varphi^\alpha = 0. \tag{13.5}$$

Поэтому в качестве определяющих параметров μ^A удобно выбрать функции

$$x^\nu(\xi^\nu), \quad \varphi^\alpha(\xi^\nu), \quad \varphi(\xi^\nu). \tag{13.6}$$

Вычислим вариации аргументов лагранжиана (13.1), используя полученные во второй главе выражения этих аргументов через функции (13.6) и их производные, а также формулы (7.10)—(7.15) и перестановочность операций δ и ∂_α.

1. *Вариации компонент пространственного метрического тензора среды в ССК.*

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \delta\left(u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta}\right) = u_{\langle\alpha}\delta u_{\beta\rangle} - \delta g_{\alpha\beta} =$$
$$= u_{\langle\alpha}\left(u^{\langle\delta}\delta^{\gamma\rangle}_{\beta\rangle} - u_{\beta\rangle}u^\delta u^\nu\right)\nabla_\delta\delta x_\gamma - \nabla_{\langle\alpha}\delta x_{\beta\rangle} =$$
$$= \gamma^{\langle\delta}_{\alpha}\delta^{\gamma\rangle}_{\beta}\nabla_\delta\delta x_\gamma - \gamma^{\langle\nu}_{\alpha}u^{\delta\rangle}u_\beta\nabla_\delta\delta x_\gamma = -\gamma^{\langle\delta}_{\alpha}\gamma^{\gamma\rangle}_{\beta}\nabla_\delta\delta x_\gamma.$$

Здесь и далее $\delta x_\gamma = g_{\mu\nu}x^\mu_\gamma\delta x^\nu$. Вычислим еще вариации смешанных компонент γ^α_β:

$$\delta\gamma^\alpha_\beta = \delta\left(u^\alpha u_\beta - \delta^\alpha_\beta\right) = (\delta u^\alpha)\,u_\beta + u^\alpha\delta u_\beta =$$
$$= -u^\alpha u^\delta u^\nu\left(\nabla_\delta\delta x_\gamma\right)u_\beta + u^\alpha\left(u^{\langle\delta}\delta^{\gamma\rangle}_{\beta} - u_\beta u^\delta u^\nu\right)\nabla_\delta\delta x_\gamma =$$
$$= -u^\alpha u^\nu\gamma^\delta_\beta\nabla_\delta\delta x_\gamma - u^\alpha u^\delta\gamma^\gamma_\beta\nabla_\delta\delta x_\gamma = -u^\alpha u^{\langle\nu}\gamma^{\delta\rangle}_{\beta}\nabla_\delta\delta x_\gamma.$$

Окончательно получим

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma^{\langle\delta}_{\alpha}\gamma^{\gamma\rangle}_{\beta}\nabla_\delta\delta x_\gamma, \quad \delta\gamma^\alpha_\beta = -u^\alpha u^{\langle\nu}\gamma^{\delta\rangle}_{\beta}\nabla_\delta\delta x_\gamma. \tag{13.7}$$

2. *Вариация собственной плотности массы покоя среды.* Используя соотношения $\partial\gamma/\partial\gamma_{ab} = \gamma\gamma^{ba}$, $\gamma^\delta_0 = 0$, найдем сначала вариацию величины $\sqrt{\gamma} \equiv \sqrt{|\gamma_{ab}|}$:

$$\delta\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_{ab}}\delta\gamma_{ab} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\gamma^{ba}\delta\gamma_{ab} =$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ba}\gamma^{\langle\delta}_{a}\gamma^{\gamma\rangle}_{b}\nabla_\delta\delta x_\gamma = -\sqrt{\gamma}\,\gamma^{\beta\alpha}\gamma^\delta_\alpha\gamma^\gamma_\beta\nabla_\delta\delta x_\gamma =$$
$$= -\sqrt{\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta x_\alpha.$$

Теперь на основании равенства (13.4) имеем

$$\delta\rho = \delta\left(\frac{f(\xi^a)}{\sqrt{\gamma}}\right) = -\frac{f}{\gamma}\delta\sqrt{\gamma} = \frac{f}{\gamma}\sqrt{\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta x_\alpha = \rho\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta x_\alpha.$$

Таким образом,

$$\delta\sqrt{\gamma} = -\sqrt{\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta x_\alpha, \quad \delta\rho = \rho\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta x_\alpha. \tag{13.8}$$

Используя формулы (7.13) и (13.8), найдем еще вариацию произведения $\rho\sqrt{-g}$:

$$\delta\left(\rho\sqrt{-g}\right) = \left(\rho\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta x_\alpha\right)\sqrt{-g} + \rho\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta x_\alpha\right) =$$
$$= \rho u^\alpha u^\beta\sqrt{-g}\,\nabla_\beta\delta x_\alpha.$$

3. *Вариация собственной плотности энтропии среды.* Учитывая параметрическое представление (6.27) для соб-

ственной плотности энтропии среды s, а также выражения (13.7), (13.8) для вариаций $\delta\gamma^\alpha_\beta$, $\delta\sqrt{\gamma}$, получим

$$\delta s = \delta\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha\varphi^\beta + \varphi)\right] =$$
$$= s\sqrt{\gamma}\,\delta\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\delta\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha\varphi^\beta + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha\delta\varphi^\beta + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\delta\varphi =$$
$$= s\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\delta x_\beta - \frac{u^{\langle\delta}}{\sqrt{\gamma}}\gamma^{\nu\rangle}_\beta u^\alpha(\partial_\alpha\varphi^\beta)\nabla_\delta\delta x_\nu -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha(\gamma^\beta_\nu\delta\varphi^\nu) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\delta\varphi = s\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\delta x_\beta +$$
$$+ \frac{1}{c}u^{\langle\delta}S^{\nu\rangle}\nabla_\delta\delta x_\nu - \gamma^\alpha_\beta\nabla_\alpha\left(\gamma^\beta_\nu\frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\delta\varphi.$$

Здесь были использованы соотношения

$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\nu_\beta u^\alpha\partial_\alpha\varphi^\beta = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\gamma^\nu_\beta\frac{d\varphi^\beta}{d\tau} = \frac{1}{c}S^\nu,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha\delta\varphi^\beta = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha(\delta^\beta_\nu - u^\beta u_\nu)\delta\varphi^\nu =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha\gamma^\beta_\nu\delta\varphi^\nu = -\gamma^\alpha_\beta\nabla_\alpha\left(\gamma^\beta_\nu\frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}}\right), \qquad (13.9)$$

вытекающие из равенств $u^\alpha\partial_\alpha = d/d\Delta = c^{-1}d/d\tau$, $\gamma^\alpha_0 = 0$, $u^b = 0$ и параметрических представлений (6.28) для компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии среды S^ν. Последнее равенство в (13.9) доказывается при помощи преобразования, совпадающего с проведенным при выводе формулы (4.40) преобразованием выражения $(1/\sqrt{\gamma})\gamma^\alpha_\beta\partial_\alpha\psi^\beta_i$, если в нем заменить ψ^β_i на $\gamma^\beta_\nu\delta\varphi^\nu$. Переход от величин $\delta\varphi^\beta$ к величинам $\gamma^\beta_\nu\delta\varphi^\nu$ под знаком производной в (13.9) вызван тем обстоятельством, что в указанном преобразовании, проведенном при выводе формулы (4.40), существенно использовалось равенство $u_\beta\psi^\beta_i = 0$. Аналогичное равенство, вообще говоря, несправедливо для вариаций $\delta\varphi^\beta$ ($u_\beta\delta\varphi^\beta \neq 0$), но оно всегда справедливо для компонент $\gamma^\beta_\alpha\delta\varphi^\alpha$ ($u_\beta\gamma^\beta_\alpha\delta\varphi^\alpha \equiv 0$). Таким образом, для вариации δs имеет место формула

$$\delta s = \left(s\gamma^{\alpha\beta} + \frac{1}{c}u^{\langle\alpha}S^{\beta\rangle}\right)\nabla_\alpha\delta x_\beta - \gamma^\alpha_\beta\nabla_\alpha\left(\gamma^\beta_\nu\frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}}. \qquad (13.10)$$

Используя выражение (13.8) для $\delta\rho$, найдем еще вариацию удельной плотности энтропии среды $S \equiv s/\rho$:

$$\delta S = \frac{1}{\rho}\delta s - s\frac{1}{\rho}\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta x_\alpha = \\ = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{c}u^{\langle\alpha}S^{\beta\rangle}\nabla_\alpha\delta x_\beta - \gamma^\alpha_\beta\nabla_\alpha\left(\gamma^\beta_\nu\frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}}\right]. \quad (13.11)$$

4. *Вариации компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии среды* S^ν. Учитывая параметрические представления (6.28) для компонент S^ν, определение собственного времени и выражения (7.13), (13.7) для вариаций $\delta\sqrt{-g}$, $\delta\gamma^\alpha_\beta$, найдем

$$\delta S^\alpha = \delta\left(-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\beta\frac{d\varphi^\beta}{d\tau}\right) = \\ = -\delta\left(\frac{c}{\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}}\gamma^\alpha_\beta\delta^\nu_0\partial_\nu\varphi^\beta\right) = -\delta\left(\frac{c}{\sqrt{-g}}\gamma^\alpha_\beta\partial_0\varphi^\beta\right) = \\ = -S^\alpha\nabla_\nu\delta x^\nu + \frac{u^\alpha}{\sqrt{\gamma}}\gamma^{\langle\delta}_\beta u^{\nu\rangle}\frac{d\varphi^\beta}{d\tau}\nabla_\delta\delta x_\nu - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\beta\frac{d\delta\varphi^\beta}{d\tau} = \\ = -(S^\alpha g^{\delta\nu} + u^\alpha S^{\langle\delta}u^{\nu\rangle})\nabla_\delta\delta x_\nu - c\gamma^\alpha_\beta\nabla_\nu\frac{u^{[\nu}\delta\varphi^{\beta]}}{\sqrt{\gamma}}.$$

Здесь были использованы тождества

$$\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}} = \sqrt{-g}, \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\beta\frac{d\delta\varphi^\beta}{d\tau} = c\gamma^\alpha_\beta\nabla_\nu\frac{u^{[\nu}\delta\varphi^{\beta]}}{\sqrt{\gamma}},$$

последнее из которых доказывается при помощи преобразования, совпадающего с проведенным при выводе формулы (4.39) преобразованием компонент I^α_i, если в нем заменить ψ^β_i на $\delta\varphi^\beta$. Таким образом, для вариаций δS^α справедлива формула

$$\delta S^\alpha = -(g^{\delta\nu}S^\alpha + S^{\langle\delta}u^{\nu\rangle}u^\alpha)\nabla_\delta\delta x_\nu - c\gamma^\alpha_\beta\nabla_\nu\frac{u^{[\nu}\delta\varphi^{\beta]}}{\sqrt{\gamma}}. \quad (13.12)$$

Напомним, что везде

$$\delta x_\alpha = g_{\mu\nu}x^\mu_\alpha\,\delta x^\nu, \quad \delta x^\nu = g^{\nu\alpha}\delta x_\alpha = \xi^\nu_\nu\,\delta x^\nu. \quad (13.13)$$

Вариационное уравнение. Действие I, соответствующее лагранжиану (13.1), определяется по общей формуле

$$I = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\Lambda\sqrt{-g}\,d^4\xi. \quad (13.14)$$

Однако выбор действия еще не фиксирует модель сплошной среды, так как необратимые процессы описываются неголономным функционалом δW^*. Зададим его следующим образом:

$$\delta W^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(T\frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}} + \Phi_\alpha\frac{\delta\varphi^\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta\,\delta x_\alpha\right)\sqrt{-g}\,d^4\xi. \quad (13.15)$$

Последнее слагаемое в подынтегральном выражении в (13.15) можно преобразовать так:

$$\tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta\,\delta x_\alpha = \tau_\mu^{\cdot\nu}\partial_\nu\,\delta x^\mu = \tau_\mu^{\cdot\beta}\partial_\beta\,\delta x^\mu.$$

Поэтому выражение (13.15) является частным случаем общего выражения (7.19) для функционала δW^*.

На коэффициенты при вариациях в соотношении (13.15) наложим дополнительные условия

$$\Phi_\alpha u^\alpha = 0, \quad \tau^{\alpha\beta}u_\alpha = \tau_\nu^{\cdot\beta}u^\nu = 0, \quad \tau^{[\alpha\beta]} = 0, \quad (13.16)$$

имеющие следующий смысл.

Первое соотношение (13.16) является частным случаем общих условий (10.36), которые, как было показано в § 10, можно наложить на коэффициенты при вариациях определяющих параметров типа $\bar{\mu}^A$ [1]) в выражении для функционала δW^*. Отметим, что условие $\Phi_\alpha u^\alpha = 0$ не является ограничением на вид функционала δW^*. В самом деле, если оно не выполняется, то на основании соотношения (13.22) (см. ниже) имеем

$$\Phi_\nu\,\delta\varphi^\nu = -\gamma_\nu^\alpha\Phi_\alpha\,\delta\varphi^\nu - u^\nu\Phi_\nu\varphi^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}\nabla_\beta\,\delta x_\alpha.$$

Следовательно, переопределяя компоненты $\tau^{\alpha\beta}$, всегда можно добиться, чтобы коэффициент при вариациях $\delta\varphi^\nu$ в выражении для функционала δW^* был ортогонален 4-скорости, так как $u^\nu\gamma_\nu^\alpha\Phi_\alpha \equiv 0$. В общем случае для произвольных определяющих параметров $\bar{\mu}^A$, ортогональных 4-скорости, аналогичное преобразование функционала δW^* обсуждалось в § 10 при выводе равенств (10.36).

---

[1]) Напомним, что через $\bar{\mu}^A$ в § 10 были обозначены определяющие параметры, которые по всем входящим в состав мультииндекса A тензорным индексам, относящимся к ССК, должны быть ортогональны 4-скорости сплошной среды. Очевидно, параметры переноса энтропии φ^α принадлежат к числу $\bar{\mu}^A$, так как $\varphi^\alpha u_\alpha = 0$.

Второе соотношение (13.16) является частным случаем условия (11.52), которое, как отмечалось в конце § 12, можно наложить на коэффициенты при вариациях определяющих параметров в выражении для функционала δW^*, если среди них используются параметры переноса и производства энтропии φ^α, φ

Последнее соотношение из (13.16) является необходимым и достаточным условием обращения в нуль суммы

$$\delta_\varepsilon I + \delta_\varepsilon W^* = 0 \tag{13.17}$$

при значениях вариаций определяющих параметров, соответствующих бесконечно малому преобразованию Пуанкаре ГСК наблюдателя

$$\delta_\varepsilon \varphi^\alpha = \delta_\varepsilon \varphi = 0, \quad \delta_\varepsilon x^\mu = x^\nu \varepsilon_\nu^{\cdot\mu} + \varepsilon^\mu, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}, \tag{13.18}$$

так как в силу скалярности действия $\delta_\varepsilon I = 0$. Равенство (13.17) при вариациях (13.18) вытекает из однородности и изотропности пространства событий (при отсутствии внешних воздействий на среду). Этот вопрос подробно обсуждался в § 10 при изучении динамических характеристик, связанных с однородностью и изотропностью пространства событий.

Исходное вариационное уравнение имеет вид

$$\delta I + \delta W^* + \delta W = 0, \tag{13.19}$$

где действие I и функционал δW^* определены равенствами (13.14), (13.1) и (13.15). Все вариации в уравнении (13.19), очевидно, выражаются через вариации определяющих параметров (13.6)

$$\delta x^\nu, \quad \delta \varphi^\alpha, \quad \delta \varphi \tag{13.20}$$

и производные от них. Система вариаций (13.20) не является независимой, так как функции $\varphi^\alpha(\xi^\nu)$ должны удовлетворять условию (13.5), из которого вытекает соотношение

$$\delta(\varphi^\alpha u_\alpha) = 0. \tag{13.21}$$

Вычисление вариации с учетом выражения (7.15) для δu_α и соотношения $\varphi^\alpha u_\alpha = 0$ дает

$$\delta(\varphi^\alpha u_\alpha) = u_\alpha \delta\varphi^\alpha + \varphi^{\langle\alpha} u^{\beta\rangle} \nabla_\alpha \delta x_\beta = 0. \tag{13.22}$$

Учитывая связь (13.5) методом неопределенных множителей Лагранжа ($\lambda_{(\varphi)}$), прибавим к левой части вариационного уравнения (13.19) функционал

$$\delta R_{(\varphi)} = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \lambda_{(\varphi)} \delta (\varphi^\alpha u_\alpha) \sqrt{-g}\, d^4\xi, \qquad (13.23)$$

равный нулю для вариаций определяющих параметров, удовлетворяющих соотношению (13.22). В результате вариационное уравнение (13.19) примет вид

$$\delta I + \delta W^* + \delta W + \delta R_{(\varphi)} = 0. \qquad (13.24)$$

Динамические уравнения для непрерывных процессов (уравнения Эйлера). Вычислим вариацию действия δI, используя полученные выше формулы для $\delta(\rho\sqrt{-g})$, $\delta\rho$, $\delta\gamma_{\alpha\beta}$, δS, δS^α:

$$\delta I = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \delta(-\rho U \sqrt{-g})\, d^4\xi =$$

$$= \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \left[-U\delta(\rho\sqrt{-g}) - \rho\sqrt{-g}\,\delta U\right] d^4\xi =$$

$$= \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \left\{-\rho U u^\alpha u^\beta \nabla_\beta\, \delta x_\alpha - \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta\, \delta x_\alpha - \right.$$

$$- \frac{\partial U}{\partial S}\left[\frac{1}{c}\, u^{\langle\alpha} S^{\beta\rangle} \nabla_\beta\, \delta x_\alpha - \gamma^\beta_\alpha \nabla_\beta \left(\gamma^\alpha_\nu \frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}}\right] +$$

$$+ \rho \frac{\partial U}{\partial \gamma_{\delta\nu}} \gamma^{\langle\alpha}_\delta \gamma^{\beta\rangle}_\nu \nabla_\beta\, \delta x_\alpha + \rho \frac{\partial U}{\partial S^\delta}\left[(g^{\alpha\beta} S^\delta + S^{\langle\alpha} u^{\beta\rangle} u^\delta)\, \nabla_\beta\, \delta x_\alpha + \right.$$

$$\left.\left. + c\gamma^\delta_\nu \nabla_\beta \frac{u^{[\beta} \delta\varphi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}\right]\right\} \sqrt{-g}\, d^4\xi.$$

Собирая слагаемые с одинаковыми вариациями и интегрируя по частям с помощью формулы Остроградского —

Гаусса (1.46), окончательно получим

$$\delta I = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left\{\left[\nabla_\beta P^{\alpha\beta}\right]\delta x_\alpha - \left[\gamma_\nu^\alpha \nabla_\beta\left(\gamma_\alpha^\beta \frac{\partial U}{\partial S}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+ cu^\beta \nabla_{[\beta}\left(\gamma_{\nu]}^\delta \rho \frac{\partial u}{\partial S^\delta}\right)\right]\frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}} - \frac{\partial U}{\partial S}\frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}}\Big\}\sqrt{-g}\,d^4\xi +$$
$$+\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left\{-P^{\alpha\beta}\,\delta x_\alpha + \frac{\partial U}{\partial S}\gamma_\alpha^\beta\gamma_\nu^\alpha\frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}}+\right.$$
$$\left.+c\rho\frac{\partial U}{\partial S^\delta}\gamma_\nu^\delta\frac{u^{[\beta}\,\delta\varphi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}\right\}l_\beta\,d^3\zeta, \qquad (13.25)$$

$$P^{\alpha\beta} \equiv \rho U u^\alpha u^\beta + \rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\gamma^{\alpha\beta} - \rho\frac{\partial U}{\partial\gamma_{\delta\nu}}\gamma_\delta^{\langle\alpha}\gamma_\nu^{\beta\rangle} +$$
$$+\frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial S}u^{\langle\alpha}S^{\beta\rangle} - \rho\frac{\partial U}{\partial S^\delta}(g^{\alpha\beta}S^\delta + S^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}u^\delta). \qquad (13.26)$$

Функционалы δW^* и $\delta R_{(\varphi)}$, очевидно, можно представить в виде

$$\delta W^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left\{-\left[\nabla_\beta\tau^{\alpha\beta}\right]\delta x_\alpha + \Phi_\nu\frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}} + T\frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}}\right\}\sqrt{-g}\,d^4\xi +$$
$$+\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}(\tau^{\alpha\beta}\,\delta x_\alpha)\,l_\beta\,d^3\zeta,$$

$$\delta R_{(\varphi)} = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left\{-\left[\nabla_\beta\lambda_{(\varphi)}\varphi^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}\right]\delta x_\alpha + \lambda_{(\varphi)}u_\nu\,\delta\varphi^\nu\right\}\sqrt{-g}\,d^4\xi +$$
$$+\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}(\lambda_{(\varphi)}\varphi^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}\,\delta x_\alpha)\,l_\beta\,d^3\zeta. \qquad (13.27)$$

Подставляя выражения (13.25), (13.27) для δI, δW^*, $\delta R_{(\varphi)}$ в вариационное уравнение (13.24), найдем систему уравнений Эйлера[1]) — динамических уравнений для непре-

---

[1]) Рассматривая вместо вариаций δx^ν вариации $\delta x_\alpha = g_{\mu\nu}x_\alpha^\mu\,\delta x^\nu$, которые также являются независимыми.

рывных процессов, а также функционал δW:

$$\nabla_\beta (P^{\alpha\beta} - \tau^{\alpha\beta} - \lambda_{(\varphi)}\varphi^{(\alpha}u^{\beta)}) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial S} = T,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left[\gamma^\alpha_\nu \nabla_\beta\left(\gamma^\beta_\alpha \frac{\partial U}{\partial S}\right) + cu^\beta \nabla_{[\beta}\left(\gamma^\delta_{\nu]}\rho \frac{\partial U}{\partial S^\delta}\right) - \Phi_\nu\right] = \lambda_{(\varphi)}u_\nu,$$

$$\delta W = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left\{(P^{\alpha\beta} - \tau^{\alpha\beta} - \lambda_{(\varphi)}\varphi^{(\alpha}u^{\beta)})\,\delta x_\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial U}{\partial S}\gamma^\beta_\alpha\gamma^\alpha_\nu \frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}} - c\rho \frac{\partial U}{\partial S^\delta}\gamma^\delta_\nu \frac{u^{[\beta}\,\delta\varphi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}\right\} l_\beta\, d^3\zeta.$$

Умножая уравнения Эйлера, соответствующие вариациям $\delta\varphi^\nu$, на u^ν, и учитывая равенства

$$u^\nu\gamma^\alpha_{\nu]} = 0, \quad u^\nu u^\beta \nabla_{[\beta}(\gamma^\delta_{\nu]}\ldots) = 0, \quad u^\nu\Phi_\nu = 0, \qquad (13.28)$$

найдем, что множитель Лагранжа $\lambda_{(\varphi)}$ тождественно равен нулю (в полном соответствии с общим равенством (10.38)). Опуская в уравнениях Эйлера и функционале δW слагаемые, содержащие $\lambda_{(\varphi)}$, и используя тождества

$$\gamma^\alpha_\nu \nabla_\beta\left(\gamma^\beta_\alpha \frac{\partial U}{\partial S}\right) = -\gamma^\beta_\nu \nabla_\beta \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial U}{\partial S}u^\beta \nabla_\beta u_\nu,$$

$$\gamma^\beta_\alpha\gamma^\alpha_\nu = -\gamma^\beta_\nu, \quad \gamma^\beta_\nu\,\delta\varphi^\nu = u_\nu u^{[\beta}\,\delta\varphi^{\nu]}, \qquad (13.29)$$

получим следующие динамические уравнения и выражение для функционала δW:

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \quad T^{\alpha\beta} \equiv P^{\alpha\beta} - \tau^{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial U}{\partial S} = T; \qquad (13.30)$$

$$-\gamma^\beta_\nu \nabla_\beta T - Tu^\beta \nabla_\beta u_\nu + cu^\beta \nabla_{[\beta}\left(\gamma^\delta_{\nu]}\rho \frac{\partial U}{\partial S^\delta}\right) = \Phi_\nu; \qquad (13.31)$$

$$\delta W = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left\{T^{\alpha\beta}\,\delta x_\alpha + T_\nu \frac{u^{[\beta}\,\delta\varphi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}\right\} l_\beta\, d^3\zeta, \qquad (13.32)$$

$$T_\nu \equiv Tu_\nu - c\rho\gamma^\delta_\nu \frac{\partial U}{\partial S^\delta}.$$

Первое уравнение (13.30) с учетом второго равенства (13.30) представляет собой уравнение движения рассматриваемой среды. Ниже будет показано, что оно совпадает с уравнением энергии-импульса, вытекающим из теоремы Нётер, причем компоненты $T^{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора энергии-импульса среды. Третье равенство (13.30)

можно рассматривать как определение обобщенной абсолютной температуры T. Уравнение (13.31) служит для определения компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии S^α (или 4-вектора плотности потока тепла $q^\alpha = TS^\alpha$) и вместе с уравнением баланса энтропии (6.15) описывает процесс переноса и производства энтропии. Замыкающие систему уравнений (13.30), (13.31) законы, которые можно использовать для определения величин $\tau^{\alpha\beta}$, Φ_γ, рассмотрены ниже в настоящем параграфе. При этом оказывается, что уравнение (13.31) после подстановки в него выражения для Φ_γ можно рассматривать как релятивистское обобщение закона теплопроводности Фурье (в отсутствие перекрестных эффектов).

Условия на разрывах. Чтобы получить динамические условия на гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$, необходимо задать функционал δW, а также кинематические соотношения, связывающие между собой значения вариаций δx^ν, $\delta\varphi^\gamma$ на двух сторонах гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_\pm$ [1]). Эти соотношения могут быть, вообще говоря, различными. В дальнейшем ограничимся исследованием разрывов, на которых функции $x^\nu(\xi^\nu)$ остаются непрерывными. Тогда их вариации, очевидно, также непрерывны [2]):

$$[\delta x^\nu]^\pm_- \equiv \delta x^\nu_+ - \delta x^\nu_- = 0. \tag{13.33}$$

Рассматривая кинематические соотношения на разрыве для вариаций $\delta\varphi^\gamma$, удобно различать два случая, когда на разрыве $u^\alpha l_\alpha = 0$ или $u^\alpha l_\alpha \neq 0$. В этих условиях можно не указывать сторону гиперповерхности разрыва, так как свертка $u^\alpha l_\alpha$ может обращаться в нуль только сразу на обеих сторонах разрыва. Указанное свойство следует из третьего примечания к § 9 и тождеств

$$\begin{gathered} u^\alpha = \frac{\delta^\alpha_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad \sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}} = \sqrt{-g}, \\ \left\{\frac{l_\alpha}{\sqrt{-g}}\right\}^+_- = 0, \quad \left\{\frac{u^\alpha l_\alpha}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_- = 0. \end{gathered} \tag{13.34}$$

---

[1]) Так как выражение (13.32) для δW содержит вариации $\delta x_\alpha \equiv g_{\mu\nu}x^\mu_\alpha \delta x^\nu$ и $\delta\varphi^\gamma$.

[2]) Напомним, что $[A]^\pm_- \equiv A_+ - A_-$, $\{A\}^\pm_- \equiv A_+ + A_-$, где A — любая величина, $A_\pm$ — ее значения на сторонах $\hat{\Sigma}_\pm$ гиперповерхности разрыва.

В первом случае (при $u^\alpha l_\alpha \equiv l_0/\sqrt{g_{00}} = 0$) 4-скорость сплошной среды u лежит в плоскости, касательной к гиперповерхности разрыва, которая, следовательно, состоит из мировых линий сплошной среды. Выберем ССК таким образом, чтобы уравнение гиперповерхности разрыва имело вид $\xi^1 = \text{const}$ [1]). Тогда среди компонент l_α ортогонального к гиперповерхности разрыва вектора l будет отлична от нуля только компонента l_1. Рассматривая гиперповерхность разрыва как бесконечно тонкий четырехмерный слой, в котором 4-вектор плотности потока энтропии, а также локальная скорость изменения энтропии являются ограниченными величинами, найдем, что поток энтропии через любую часть гиперповерхности разрыва непрерывен. Отсюда с учетом физического смысла параметров переноса энтропии φ^α (см. § 6) следует, что в указанной специальной ССК функция $\varphi^1(\xi^\nu)$ остается непрерывной на рассмотренном разрыве. Это условие с учетом третьего тождества (13.34) и равенств $l_0 = l_2 = l_3 = 0$ можно записать в виде

$$\left\{\frac{l_\alpha \varphi^\alpha}{\sqrt{-g}}\right\}^+_- = 0. \tag{13.35}$$

На разрыве величина $x^\nu_0 = \partial x^\nu/\partial\xi^0$ представляет собой производную вдоль гиперповерхности разрыва от непрерывной функции и, следовательно, непрерывна. Поэтому функция $\sqrt{g_{00}} = \sqrt{g_{\mu\nu}x^\mu_0 x^\nu_0}$ также непрерывна. Так как $\sqrt{-g} \equiv \sqrt{g_{00}}\sqrt{\gamma}$, а величины l_α, $\varphi^\alpha/\sqrt{\gamma}$ ведут себя при преобразованиях ССК как компоненты 4-векторов, то равенство (13.35), очевидно, выполняется в любой ССК. Варьируя его и учитывая тождество [2])

$$\delta\left(\frac{l_\alpha}{\sqrt{-g}}\right) = -\delta\left(e_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial f^\beta}{\partial\xi^1}\frac{\partial f^\gamma}{\partial\xi^2}\frac{\partial f^\delta}{\partial\xi^3}\right) = 0, \tag{13.36}$$

получим кинематическое соотношение для вариаций $\delta\varphi^\nu$ на гиперповерхности разрыва при $u^\alpha l_\alpha = 0$

$$\left\{\frac{l_\alpha \delta\varphi^\alpha}{\sqrt{-g}}\right\}^+_- = 0, \quad u^\alpha l_\alpha = 0. \tag{13.37}$$

---

[1]) Для гиперповерхности, состоящей из мировых линий среды, это всегда возможно.

[2]) Символы Леви-Чивита, представляющие собой числовые коэффициенты равные 0 или ± 1, и функции $\xi^\nu = f^\nu(\xi^k)$, задающие положение гиперповерхности разрыва относительно ССК, не варьируются.

Во втором случае (при $u^\alpha l_\alpha \equiv l_0/\sqrt{g_{00}} \neq 0$) 4-скорость сплошной среды $\boldsymbol{u}$ не лежит в плоскости, касательной к гиперповерхности разрыва, и мировые линии сплошной среды пересекают ее. Рассматривая гиперповерхность разрыва как бесконечно тонкий четырехмерный слой, в котором 4-вектор плотности потока энтропии является ограниченной величиной, и учитывая физический смысл параметров переноса энтропии φ^α (см. § 6), найдем, что на таком разрыве функции $\varphi^\alpha(\xi^\nu)$ остаются непрерывными. Следовательно, их вариации также непрерывны:

$$[\delta\varphi^\alpha]_-^+ = 0, \quad u^\alpha l_\alpha \neq 0. \tag{13.38}$$

В это соотношение не входят величины $\varphi^0_\pm$. Отметим, что они не являются независимыми в силу условия $u_\alpha\varphi^\alpha = 0$, которое по определению должно выполняться по обе стороны гиперповерхности разрыва.

Условию (13.38) можно придать ковариантный вид. Для этого докажем тождество

$$\left\{x^\nu_{[\nu} l_{\beta]} \frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}_-^+ = 0, \tag{13.39}$$

которое будет использовано также при выводе динамических условий на разрывах. Используя формулы (9.13), (9.6), (9.39), получим

$$x^\nu_\nu = x^\mu_\nu f^{(\delta)}_\mu f^\nu_{(\delta)} = f^{(\delta)}_\nu f^\nu_{(\delta)} = f^{(k)}_\nu f^\nu_{(k)} + \frac{1}{\hat{f}\sqrt{-g}} l_\nu f^\nu_{(0)}. \tag{13.40}$$

На основании третьего примечания к § 9 и соотношений (9.12) имеем

$$\begin{gathered} f^\lambda_{(1)+} = f^\lambda_{(1)-}, \quad f^\lambda_{(2)+} = f^\lambda_{(3)-}, \quad f^\lambda_{(3)+} = f^\lambda_{(2)-}, \\ f^\alpha_{(1)+} = f^\alpha_{(1)-}, \quad f^\alpha_{(2)+} = f^\alpha_{(3)-}, \quad f^\alpha_{(3)+} = f^\alpha_{(2)-}; \end{gathered} \tag{13.41}$$

$$[\sqrt{-g}\hat{f}]_-^+ = [f]_-^+ = [l_\nu f^\nu_{(0)}]_-^+ = 0. \tag{13.42}$$

Из выражения (9.9) для $f^{(\delta)}_\beta$ и равенств (13.41), (13.42) вытекают тождества

$$[f^{(k)}_\nu f^\nu_{(k)}]_-^+ = \left[\frac{1}{\hat{f}}\frac{\partial\hat{f}}{\partial f^\nu_{(k)}} f^\nu_{(k)}\right]_-^+ = \left[\frac{1}{\sqrt{-g}\hat{f}}\frac{\partial\sqrt{-g}\hat{f}}{\partial f^\nu_{(k)}} f^\nu_{(k)}\right]_-^+ = 0. \tag{13.43}$$

Учитывая соотношения (13.34), (13.40), (13.43) и равенство $l_{[\alpha} l_{\beta]} = 0$, легко установить справедливость доказы-

ваемого тождества (13.39):

$$\left\{x^{\nu}_{[\gamma}l_{\beta]}\frac{u^{\beta}}{\sqrt{\gamma}}\right\}^{+}_{-}=\left\{f^{(k)}_{[\gamma}f^{\nu}_{(k)}l_{\beta]}\frac{\delta^{\beta}_{0}}{\sqrt{-g}}\right\}^{+}_{-}=f^{\nu}_{(k)}f^{(k)}_{[\gamma}\left\{\frac{l_{0]}}{\sqrt{-g}}\right\}^{+}_{-}=0.$$

Так как $x^{\nu}_{[\gamma}l_{\beta]}u^{\beta}=0$ при $\gamma=0$, то, умножая равенство (13.39) на $\delta\varphi^{\gamma}_{+}$ и учитывая соотношение (13.38), получим условие на разрыве для вариаций $\delta\varphi^{\nu}$ в ковариантном виде

$$\left\{\frac{\delta\varphi^{\nu}u^{\beta}}{\sqrt{\gamma}}x^{\nu}_{[\gamma}l_{\beta]}\right\}^{+}_{-}=0. \tag{13.44}$$

Покажем, что оно эквивалентно исходному соотношению (13.38). Для этого умножим равенство (13.44) на $\sqrt{-g}\,\xi^{\alpha}_{\nu+}$ и преобразуем его левую часть с учетом тождеств (13.39), (13.34):

$$\sqrt{-g}\,\xi^{\alpha}_{\nu+}\left\{\frac{\delta\varphi^{\nu}u^{\beta}}{\sqrt{\gamma}}x^{\nu}_{[\gamma}l_{\beta]}\right\}^{+}_{-}=(\delta^{\alpha}_{\gamma}l_{0}-\delta^{\alpha}_{0}l_{\gamma})_{+}[\delta\varphi^{\nu}]^{+}_{-}=0.$$

Очевидно, что при $\alpha=1, 2, 3$ отсюда получаем равенство (13.38), а при $\alpha=0$ — равенство $l_{a}[\delta\varphi^{a}]^{+}_{-}=0$, являющееся следствием равенства (13.38).

В рассматриваемом случае (при $u_{\alpha}l^{\alpha}\neq 0$) поток энтропии через гиперповерхность разрыва, вообще говоря, не является непрерывным. Используя параметрическое представление (6.30) для компонент 4-вектора плотности потока энтропии и тождество (9.37), получим для локальной скорости изменения энтропии на разрыве σ_{c} следующее выражение:

$$\sigma_{c}\equiv-\frac{1}{\sqrt{|G|}}\{s^{\alpha}l_{\alpha}\}^{+}_{-}=-\frac{c}{\sqrt{|G|}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi^{k}}\left(\frac{\varphi^{[\alpha}u^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}l_{\alpha}f^{(k)}_{\nu}\right)+\frac{\varphi}{\sqrt{\gamma}}u^{\alpha}l_{\alpha}\right\}^{+}_{-}.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства на основании соотношений (9.9), (13.34), (13.38), (13.41), (13.42) равно нулю. Поэтому

$$\sigma_{c}\equiv-\frac{c}{\sqrt{|G|}}\left\{\frac{\varphi}{\sqrt{\gamma}}u^{\alpha}l_{\alpha}\right\}^{+}_{-}=-\frac{c}{\sqrt{|G|}}\frac{u^{\nu}l_{\nu}}{\sqrt{\gamma}}[\varphi]^{+}_{-},$$

где $|G|=|'l_{\alpha}l^{\alpha}|$, а параметр производства энтропии $\varphi(\xi^{\alpha})$, вообще говоря, может терпеть разрыв.

Рассмотрим динамические условия на разрывах в случае, когда для вариаций δx^{ν}, $\delta\varphi^{\nu}$ выполняются кинематические соотношения (13.33), (13.37), (13.38). Учитывая их и

считая вариации δx^ν, $\delta\varphi^\nu$ равными нулю на границе $\partial\hat{V}$, представим выражение (13.32) для функционала δW в виде [1])

$$\delta W_c = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{\Sigma}_c}\left(\left\{T_\alpha^{\cdot\beta}\xi_\nu^\alpha l_\beta\right\}_-^+\delta x_+^\nu + \left\{T_{[\gamma}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}_-^+\delta\varphi_+^\gamma\right)d^3\zeta. \qquad (13.45)$$

Динамические условия на гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$ можно получить [8], задавая значение функционала δW_c, определенного равенством (13.45). Если все внешние воздействия на сплошную среду, сосредоточенные на гиперповерхности разрыва, учтены в функционале δW^*, то $\delta W_c = 0$ (см. § 9). Вариации δx_+^ν, $\delta\varphi_+^a$ являются независимыми, а коэффициент при зависимой вариации $\delta\varphi_+^0$ в выражении (13.45) тождественно равен нулю. Поэтому из равенства нулю функционала δW_c вытекают следующие динамические условия на разрыве:

$$\left\{T_\alpha^{\cdot\beta}\xi_\nu^\alpha l_\beta\right\}_-^+ = 0, \quad \left\{T_{[\gamma}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}_-^+ = 0. \qquad (13.46)$$

Записывая свертку по индексу β относительно ГСК наблюдателя и используя равенство $l_\mu^- = -l_\mu^+$ (см. третье примечание к § 9), можно представить первое условие (13.46) в виде

$$\left[T_\nu^{\cdot\mu}\right]_-^+ l_\mu^+ = 0. \qquad (13.47)$$

Ниже будет показано, что первое равенство (13.46) совпадает с вытекающим из теоремы Нётер условием непрерывности на разрыве потока энергии-импульса сплошной среды. Второе равенство (13.46) вместе с соотношением баланса потока энтропии через гиперповерхность разрыва [2]) образует условия на разрыве для уравнения баланса энтропии. При $u^\alpha l_\alpha = 0$, используя равенства (13.34), его можно

---

[1]) При $u^\alpha l_\alpha = 0$ наряду с соотношением (13.37) необходимо использовать равенства (13.34). При $u^\alpha l_\alpha \neq 0$ следует учесть, что коэффициенты при вариациях $\delta\varphi_\pm^0$ в выражении (13.32) для δW^* тождественно равны нулю, так как $u^{[\beta}\delta_0^{\gamma]} \equiv 0$. Поэтому в указанном случае для вывода формулы (13.45) достаточно соотношений (13.38)

[2]) Имеются в виду соотношения

$$\sigma_c \equiv -\frac{1}{\sqrt{|G|}}\{s^\alpha l_\alpha\}_-^+ \geqslant 0, \quad u^\alpha l_\alpha \neq 0; \quad \{s^\alpha l_\alpha\}_-^+ = 0, \quad u^\alpha l_\alpha = 0.$$

записать следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}} l_\nu \delta_0^\beta\right)_+ [T_\beta]_-^+ = 0.$$

Отсюда находим $\delta_0^\beta [T_\beta]_-^+ = 0$. Подставляя в это равенство выражение (13.32) для T_β и учитывая, что $\gamma_0^0 = 0$, а величины $u_0 = \sqrt{g_{00}}$ непрерывны на рассматриваемом разрыве, окончательно получим

$$[T]_-^+ = 0, \quad u^\alpha l_\alpha = 0. \tag{13.48}$$

Назовем *теплопроводной* такую среду, в которой определенный равенством (12.19) 4-вектор плотности потока тепла $q = TS$ может быть не равен нулю. В такой среде, очевидно, и 4-вектор внутреннего потока энтропии S также, вообще говоря, не равен нулю. Тогда условия (13.48) означают, что если в теплопроводной среде на гиперповерхности разрыва $\delta W_c = 0$, $u^\alpha l_\alpha = 0$ и величины s, σ внутри разрыва, рассматриваемого как бесконечно тонкий четырехмерный слой, остаются ограниченными, то на таком разрыве температура $T = \partial U / \partial S$ должна быть непрерывной. Кроме того, как отмечалось выше, непрерывна и плотность потока энтропии через него:

$$\{s^\alpha l_\alpha\}_-^+ \equiv \{S^\alpha l_\alpha\}_-^+ = 0, \quad u^\alpha l_\alpha = 0.$$

При $u^\alpha l_\alpha \neq 0$ второе равенство (13.46) также можно упростить. Для этого умножим его на $\sqrt{\gamma}\, \xi_{\nu+}^\nu$ и преобразуем с учетом тождества (13.39) следующим образом:

$$\left(\sqrt{\gamma}\, \xi_\nu^\nu\right)_+ \left\{T_{[\nu} l_{\beta]} \frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}_-^+ = \left(\xi_\nu^\nu x_{[\nu}^\mu l_{\beta]} u^\beta\right)_+ [T_\mu]_-^+ =$$

$$= \left(\delta_{[\nu}^\mu l_{\lambda]} u^\lambda\right)_+ [T_\mu]_-^+ = (u^\mu l_\mu)_+ [T_\nu]_-^+ - (u^\mu l_\nu)_+ [T_\mu]_-^+ = 0. \tag{13.49}$$

Можно показать, что при $l_\lambda l^\lambda \neq 0$ последнее равенство эквивалентно условию [1])

$$\left(\delta_\nu^\mu - l^\mu l_\nu / l^\lambda l_\lambda\right) [T_\mu]_-^+ = 0, \quad u^\nu l_\nu \neq 0. \tag{13.50}$$

Таким образом, если в теплопроводной среде на гиперповерхности разрыва $\delta W_c = 0$, $u^\nu l_\nu \neq 0$, $l_\nu l^\nu \neq 0$ и величина s внутри разрыва, рассматриваемого как бесконечно

[1]) Гиперповерхности разрыва, на которой $l_\lambda l^\lambda = 0$, соответствует в физическом трехмерном пространстве поверхность разрыва, движущаяся с максимально возможной скоростью c.

тонкий слой, ограничена, то на таком разрыве компоненты T_ν, определенные вторым равенством (13.32), должны удовлетворять условию (13.50), в котором $T_\mu = \xi_\mu^\nu T_\nu$. Оно означает, что касательная составляющая 4-вектора $T_\mu \mathcal{E}^\mu$ к гиперповерхности разрыва непрерывна на нем. Если лагранжиан не зависит от компонент S^α, то $T_\nu = T u_\nu$, и условие (13.50) дает

$$[T\boldsymbol{u}_\tau]_-^+ = 0, \quad \boldsymbol{u}_\tau \equiv \boldsymbol{u} - \frac{(\boldsymbol{u}\boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}\boldsymbol{l})}\boldsymbol{l}. \tag{13.51}$$

Динамические тождества. Из вариационного уравнения можно получить ряд динамических тождеств, т. е. соотношений, удовлетворяющихся тождественно в силу динамических уравнений. Для этого применим общую теорию, развитую в предыдущей главе. Сравнивая общие выражения (7.19), (9.1) и (10.13) для функционалов δW^*, δW и вариаций $\delta_\varepsilon \mu^A$, соответствующих бесконечно малому преобразованию Пуанкаре (10.11), с их конкретными выражениями (13.15), (13.32), (13.18), найдем, что для рассматриваемой модели коэффициенты M_A, M_A^α, $M_A^{\alpha\beta}$, W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}$, $I_{\mu\nu}^A$, I_ν^A, входящие в указанные общие выражения, имеют вид

$\bar{\mu}^A$	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_A^\alpha$	$\bar{M}_A^{\alpha\beta}$	$\bar{W}_A^\alpha$	$\bar{W}_A^{\alpha\beta}$	$I_{\mu\nu}^A$	I_ν^A
φ	$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} T$	0	0	0	0	0	0
φ^ν	$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \Phi_\nu$	0	0	$\frac{T_{\delta\mu}{}^{[\alpha}\delta_\nu^{\delta]}}{\sqrt{\gamma}}$	0	0	0
x^λ	0	$\tau_\lambda^{\cdot\alpha}$	0	$T_\nu^{\cdot\alpha}\xi_\lambda^\nu$	0	$x_{[\mu}\delta_{\nu]}^\lambda$	δ_ν^λ

(13.52)

Рассмотрим законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, вытекающие из однородности и изотропности пространства событий Минковского. Для вариаций (13.18) оказываются равными нулю вариации аргументов лагранжиана (13.1) и, следовательно, $\delta_\varepsilon \Lambda = 0$. Кроме того, в силу выражений (7.13), (13.3) для $\delta\sqrt{-g}$, δx_α и последних равенств (13.16), (13.18) имеем

$$\delta_\varepsilon \sqrt{-g} = \sqrt{-g}\,\nabla_\alpha \delta_\varepsilon x^\alpha = \sqrt{-g}\,\partial_\mu \delta_\varepsilon x^\mu = \sqrt{-g}\, g_{\mu\nu} e^{\mu\nu} = 0,$$

$$\tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta \delta_\varepsilon x_\alpha = \tau^{\mu\nu}\partial_\nu (x^\lambda e_{\lambda\mu} + e_\mu) = \frac{1}{2}\tau^{(\mu\nu)} e_{\nu\mu} = 0.$$

Поэтому $\delta_\varepsilon I = \delta_\varepsilon W^* = 0$. Легко также проверить, что вариации (13.18) принадлежат к числу вариаций, допускаемых связями.

Таким образом, для вариаций (13.18) все условия теоремы Нётер удовлетворяются, и, следовательно, на действительных процессах выполняются тождества (10.6) — (10.10), (10.15), (10.16), записанные с учетом соотношений (13.52) при $I_B^A = I_\nu^A$ и $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$. Они выражают законы сохранения энергии-импульса (при $I_B^A = I_\nu^A$) и момента количества движения (при $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$) сплошной среды. Общие выражения (10.14) для компонент $T_\nu^{\cdot\alpha}$, $M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha}$ тензоров энергии-импульса и момента количества движения в рассматриваемой модели на основании соотношений (13.52) принимают вид

$$T_\nu^{\cdot\alpha} = T_\nu^{\cdot\alpha}\xi_\nu^\gamma, \quad M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha} = x_{[\mu}\xi_{\nu]}^\gamma T_\gamma^{\cdot\alpha}, \quad T_\gamma^{\cdot\alpha} \equiv g_{\gamma\beta}T^{\beta\alpha}. \tag{13.53}$$

Здесь $T^{\beta\alpha}$ — компоненты, определенные вторым равенством (13.30). Из первого равенства (13.53) следует, что они являются контравариантными компонентами тензора энергии-импульса сплошной среды в ССК. Используя соотношения (13.52), (13.53) и тождества (1.34), (1.35), легко убедиться, что для рассматриваемой модели сплошной среды уравнение энергии-импульса (10.15), записанное относительно ССК, совпадает с уравнением движения среды (13.30), а условие баланса на разрыве для потока энергии-импульса (10.15) совпадает с первым динамическим условием на разрыве (13.46). Тождества (10.16), представляющие собой уравнение момента количества движения и условия баланса на разрыве для потока момента количества движения, для рассматриваемой модели сплошной среды являются следствием уравнений (10.15) и симметричности компонент тензора энергии-импульса сплошной среды, определенных вторым равенством (13.30).

На основании соотношений (12.8), (13.53), (13.16) и (13.26) найдем плотность внутренней энергии рассматриваемой среды

$$\mathscr{E} = T^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = \rho\left(U - \frac{\partial U}{\partial S^\alpha}S^\alpha\right). \tag{13.54}$$

Следовательно, если лагранжиан (13.1) не зависит от компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии, то он совпадает с плотностью внутренней энергии среды, взятой с противоположным знаком.

Получим инвариантное уравнение энергии и тождество для коэффициентов при вариациях в функционале δW^*, вытекающие из вариационного уравнения для действительных процессов. В рассматриваемой модели сплошной среды определяющие параметры (13.6) принадлежат к типу $\bar{\mu}^A$ (см. § 10), связь (13.5) относится к связям вида (10.35), а коэффициенты при вариациях в функционале δW^* и лагранжиан Λ удовлетворяют условиям (10.36)[1]. Поэтому применима общая теория, развитая в § 11 и 12, и, в частности, для действительных процессов должны выполняться тождества (12.7) и (12.10).

Используя соотношения (13.52) и второе равенство (13.16), найдем, что для рассматриваемой модели сплошной среды величины M^α, определенные выражением (11.48), равны нулю:

$$M^\alpha = \tau_\lambda^{\cdot\alpha} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = c\tau_\lambda^{\cdot\alpha} u^\lambda = 0. \tag{13.55}$$

Из соотношений (13.52) с учетом выражений (13.32) и (6.28) для компонент T_γ и S^α также следует, что для рассматриваемой модели сплошной среды величины W^α, определенные равенством (12.6), имеют вид[2])

$$W^\alpha = \xi_\nu^\gamma T_\gamma^{\cdot\alpha} \frac{dx^\nu}{d\tau} + T_\delta \frac{u^{[\alpha}\delta_\nu^{\delta]}}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\varphi^\nu}{d\tau} = \\ = cT^{\beta\alpha}u_\beta - TS^\alpha + c\rho \frac{\partial U}{\partial S^\nu} S^\nu u^\alpha. \tag{13.56}$$

Подставляя в тождество (12.7) выражения (13.1), (13.55), (13.56) для лагранжиана Λ и величин M^α, W^α и используя определения плотности внутренней энергии среды $\mathscr{E}$ (13.54) и 4-вектора плотности потока тепла (12.19), найдем

$$\nabla_\alpha (-c\mathscr{E}u^\alpha + cT^{\beta\alpha}u_\beta - q^\alpha) = 0. \tag{13.57}$$

Учитывая затем равенства (13.2) и (13.30), представим соотношение (13.57) в следующем окончательном виде:

$$\rho \frac{d}{d\tau} \frac{\mathscr{E}}{\rho} = cT^{\beta\alpha}\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\alpha q^\alpha. \tag{13.58}$$

---

[1]) В последнем легко убедиться, если заметить, что на основании параметрических представлений (6.27), (6.28) и тождества $\gamma_0^\alpha \equiv 0$ значение параметра φ^0 не влияет на аргументы лагранжиана $S=s/\rho$, S^α и следовательно, на сам лагранжиан.

[2]) Как и указывалось в § 12, $M^\alpha \equiv 0$, но зато компоненты 4-вектора плотности потока тепла $q^\alpha \equiv TS^\alpha$ входят в W^α.

Его можно рассматривать как инвариантное уравнение энергии, представляющее собой релятивистское обобщение уравнения притока тепла.

Подставляя в тождество (12.10) выражения (13.52), (13.55) для величин $\bar{\mu}^A$, $\bar{M}_A$, $\bar{M}^\alpha_A$, $\bar{M}^{\alpha\beta}_A$, M^α, соответствующих рассматриваемой модели сплошной среды, получим

$$\frac{T}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi}{d\tau}+\frac{\Phi_\nu}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi^\nu}{d\tau}+\tau^{\cdot\beta}_{\nu\cdot}\partial_\beta\frac{dx^\nu}{d\tau}=0. \tag{13.59}$$

Используя соотношения (13.16), второе и третье слагаемые в этом равенстве можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{\Phi_\nu}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi^\nu}{d\tau}=-\Phi_\alpha\frac{\left(u^\alpha u_\nu-\delta^\alpha_\nu\right)}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi^\nu}{d\tau}=-\Phi_\alpha\frac{\gamma^\alpha_\nu}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi^\nu}{d\tau},\\&\tau^{\cdot\beta}_{\nu\cdot}\partial_\beta\frac{dx^\nu}{d\tau}=c\tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha=\frac{1}{2}c\tau^{\alpha\beta}\gamma^\delta_\alpha\gamma^\gamma_\beta\nabla_{\langle\delta}u_{\gamma\rangle}.\end{aligned} \tag{13.60}$$

Учитывая затем параметрические представления (6.28), (6.29) для компонент 4-вектора внутреннего потока энтропии S^α и диссипативной функции σ, а также выражение (3.36) для компонент 4-тензора скоростей деформаций $e_{\alpha\beta}$, представим равенство (13.59) в окончательном виде:

$$\sigma=-S^\alpha\frac{\Phi_\alpha}{T}+\tau^{\alpha\beta}\frac{e_{\alpha\beta}}{T}. \tag{13.61}$$

Оно представляет собой тождество, которому должны удовлетворять величины T, Φ_α, $\tau^{\alpha\beta}$, присутствующие в выражении (13.15) для функционала δW^*, соответствующего модели теплопроводной вязкой среды.

Необратимые процессы. Чтобы завершить построение модели теплопроводной вязкой среды, необходимо еще задать законы, определяющие независимо от динамических уравнений коэффициенты Φ_α, $\tau^{\alpha\beta}$ при вариациях в выражении (13.15) для функционала δW^* как функции определяющих параметров и их производных[1]). Для этого используем общую теорию, изложенную в § 12. Рассматривая величины $-T^{-1}\Phi_\alpha$, $T^{-1}e_{\alpha\beta}$ как обобщенные термодинамические силы X^B, а S^α, $\tau^{\alpha\beta}$ — как сопряженные им обобщенные потоки J_B, найдем, что соотношение (13.61)

[1]) Величина T в выражении (13.15) для функционала δW^* не может задаваться независимо от Φ_α, $\tau^{\alpha\beta}$, так как должно выполняться тождество (13.61).

имеет вид (12.11). Применяя затем общие линейные законы (12.21), для необратимых процессов, близких к обратимым, получим кинетические уравнения, которые можно использовать для определения величин Φ_α, $\tau^{\alpha\beta}$ в функционале δW^*:

$$\begin{aligned} TS^\nu &= -L^{\nu\alpha}_{(\Phi\Phi)}\Phi_\alpha + L^{\nu\alpha\beta}_{(\Phi e)}e_{\alpha\beta}, \\ T\tau^{\alpha\beta} &= -L^{\alpha\beta\nu}_{(e\Phi)}\Phi_\nu + L^{\alpha\beta\nu\delta}_{(ee)}e_{\nu\delta}. \end{aligned} \tag{13.62}$$

Входящие в них феноменологические коэффициенты L^A_B, вообще говоря, являются тензорными функциями от определяющих параметров (13.6) и их производных (например, от величин $\gamma^{\alpha\beta}$, ρ, $T \equiv \partial U/\partial S$), а также от известных параметров $\varkappa_B$. Эти функции должны задаваться дополнительно на основании теоретических гипотез и экспериментальных данных. Указанные коэффициенты L^A_B удовлетворяют неравенствам, вытекающим из неотрицательности диссипативной функции σ, и условиям

$$\begin{aligned} &u_\nu L^{\nu\alpha}_{(\Phi\Phi)} = u_\nu L^{\nu\alpha\beta}_{(\Phi e)} = 0, \quad u_\alpha L^{\alpha\beta\nu}_{(e\Phi)} = u_\alpha L^{\alpha\beta\nu\delta}_{(ee)} = 0, \\ &L^{[\alpha\beta]\nu}_{(e\Phi)} = L^{[\alpha\beta]\nu\delta}_{(ee)} = 0, \end{aligned} \tag{13.63}$$

следующим из тождеств $u_\nu S^\nu = u_\alpha \tau^{\alpha\beta} = \tau^{[\alpha\beta]} = 0$. Так как между обобщенными термодинамическими силами $-T^{-1}\Phi_\alpha$, $T^{-1}e_{\alpha\beta}$ существуют зависимости

$$u^\alpha (T^{-1}\Phi_\alpha) = 0, \quad u^\alpha (T^{-1}e_{\alpha\beta}) = 0, \quad T^{-1}e_{[\alpha\beta]} = 0, \tag{13.64}$$

то коэффициенты L^A_B определяются неоднозначно. При этом, однако, согласно термодинамике необратимых процессов [9—14], должно существовать такое представление коэффициентов L^A_B, в котором они удовлетворяют соотношениям Онсагера — Казимира (12.23).

В дальнейшем ограничимся простейшим случаем, когда уравнения (13.62) имеют вид

$$TS^\nu = \chi\Phi^\nu, \quad \tau^{\alpha\beta} = \lambda\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\nu\delta}e_{\nu\delta} + 2\mu e^{\alpha\beta}. \tag{13.65}$$

Входящие в них скалярные величины χ, λ, μ, вообще говоря, являются некоторыми функциями от определяющих параметров и их производных (например, от ρ и $T \equiv \partial U/\partial S$), которые должны задаваться дополнительно. Соотношения (13.65) определяют величины Φ_α, $\tau^{\alpha\beta}$, входящие в выражение (13.15) для функционала δW^*, причем они действительно удовлетворяют условиям (13.16),

так как

$$u_\alpha S^\alpha = 0, \quad u_\alpha \gamma^{\alpha\beta} = u_\alpha e^{\alpha\beta} = 0, \quad \gamma^{[\alpha\beta]} = e^{[\alpha\beta]} = 0.$$

Исключая при помощи первого равенства (13.65) компоненты Φ_ν из динамического уравнения (13.31) и учитывая определение (12.19) 4-вектора плотности потока тепла, получим соотношение

$$q_\nu \equiv TS_\nu = -\chi\left(\gamma_\nu^\beta \nabla_\beta T + Tu^\beta \nabla_\beta u_\nu - cu^\beta \nabla_{[\beta\rho} \frac{\partial U}{\partial S^\delta} \gamma_{\nu]}^\delta\right), \quad (13.66)$$

совпадающее при $\partial U/\partial S^\delta = 0$ с известным релятивистским обобщением закона теплопроводности Фурье [15, 16]. Второе равенство (13.65) в собственной ГСК совпадает с законом вязкости Навье — Стокса и, следовательно, представляет собой его релятивистское обобщение. Величины $\tau^{\alpha\beta}$ называются *компонентами 4-тензора вязких напряжений*. Множитель χ называется *коэффициентом теплопроводности*, а множители λ, μ — *коэффициентами вязкости*.

Используя кинетические уравнения (13.65), выражение (13.61) для диссипативной функции σ можно представить в виде [1])

$$\sigma = -\chi^{-1} S_\nu S^\nu + T^{-1}(\lambda (e_\nu^{\cdot\nu})^2 + 2\mu e^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}). \quad (13.67)$$

Условие неотрицательности диссипативной функции (см. § 6) накладывает ограничение на коэффициенты χ, λ, μ

$$\chi \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geqslant 0. \quad (13.68)$$

Если $\chi = \infty$, $\lambda = \mu = 0$, т. е. среда обладает идеальной теплопроводностью и нулевой вязкостью, то из соотношений (13.65), (13.67) и параметрического представления (6.29) для диссипативной функции σ следует, что

$$\Phi^\nu = 0, \quad \tau^{\alpha\beta} = 0, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\varphi}{d\tau} = 0.$$

На основании последнего равенства функцию $\varphi = \varphi(\xi^a)$ можно отнести к числу неварьируемых параметров $\varkappa_B$, определяемых начальными условиями, и функционал $\delta W^* = 0$. Отметим, что для идеально теплопроводной среды динамическое уравнение (13.31) при $\partial U/\partial S^\delta = 0$ принимает

---

[1]) Во избежание недоразумений отметим, что

$$-S_\nu S^\nu = -g_{\mu\nu} S^{*\mu} S^{*\nu} = \sum_{k=1}^{3} (S^{*k})^2 \geqslant 0.$$

известный вид:

$$\gamma_\gamma^\beta \nabla_\beta T + T u^\beta \nabla_\beta u_\gamma = 0.$$

Если $\chi = \lambda = \mu = 0$, т. е. среда обладает нулевой теплопроводностью и вязкостью, то

$$S^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\varphi^\alpha}{d\tau} = 0, \quad \tau^{\alpha\beta} = 0, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\varphi}{d\tau} = 0.$$

При этом параметры $\varphi(\xi^b)$, $\varphi^a(\xi^b)$ можно отнести к числу неварьируемых параметров $\varkappa_B$ и функционал δW^* равен нулю. В обоих предельных случаях все процессы обратимы ($\sigma \equiv 0$), и исходное вариационное уравнение (13.19) с учетом равенств $\delta W^* = 0$, $\delta W_e = 0$ при вариациях $\delta\varphi^\nu$, δx^ν, обращающихся в нуль на границе области $\hat{V}$, сводится к голономному уравнению $\delta I = 0$, выражающему *принцип экстремальности действия.*

Отметим, что в рассматриваемой модели лагранжиан, динамические уравнения для непрерывных процессов, динамические условия на разрывах, динамические тождества и коэффициенты при вариациях в функционале δW^* зависят от параметров переноса и производства энтропии φ^α, φ только через величины $S \equiv s/\rho$, S^α, σ. Поэтому после построения модели параметры φ^α, φ можно не использовать, если добавить к динамическим уравнениям еще уравнение баланса энтропии:

Специальные модели. Модель сплошной среды, для которой лагранжиан Λ и функционал δW^* имеют вид (13.1), (13.15), является моделью нелинейно-упругой теплопроводной вязкой среды. Рассмотрим некоторые частные случаи, отвечающие специальным выражениям для лагранжиана и функционала δW^*.

Если $q^\alpha \equiv 0$, то среда называется *нетеплопроводной.* В этом случае $S^\alpha \equiv 0$, параметры переноса энтропии φ^α исключаются из числа варьируемых функций и пропадают динамические уравнения и условия на разрывах, получаемые при варьировании функций $\varphi^\alpha(\xi^\nu)$. Если среда еще и невязкая, т. е. $\tau^{\alpha\beta} \equiv 0$, то $\sigma = 0$, и из числа варьируемых функций исключаются также параметры производства энтропии $\varphi(\xi^\nu)$, после чего функционал δW^* тождественно обращается в нуль. При этом температура T по-прежнему определяется равенством $T = \partial U/\partial S$, причем удельная плотность энтропии $S \equiv s/\rho$ для непрерывных процессов остается постоянной вдоль мировых линий среды и является неварьируемой функцией, определяющейся начальными условиями и условиями на разрывах.

Если лагранжиан зависит от компонент $\gamma_{\alpha\beta}$, S^α (при фиксированной плотности ρ) следующим специальным образом:

$$\Lambda = -\rho U(\rho,\ S,\ \gamma_{\alpha\beta}S^\alpha S^\beta,\ \varkappa_B) \tag{13.69}$$

и все параметры $\varkappa_B$ — скаляры, то соответствующая среда называется *газом*[1]) (или жидкостью). Когда хаотические скорости микроскопических частиц, образующих газ, близки к максимально возможной скорости c и средняя плотность энергии их хаотического движения много больше средней плотности энергии покоя частиц, газ называется *ультрарелятивистским*. В этом случае след тензора энергии-импульса газа можно считать равным нулю [17], и на основании соотношений (13.26), (13.65), (13.69) получим

$$T^{\cdot\alpha}_{\alpha} \equiv P^{\cdot\alpha}_{\alpha} - \tau^{\cdot\alpha}_{\alpha} = \rho U - 3\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho} - \\ - 6\rho\frac{\partial U}{\partial(\gamma_{\alpha\beta}S^\alpha S^\beta)}\gamma_{\gamma\delta}S^\gamma S^\delta - (3\lambda + 2\mu)\,e^{\cdot\gamma}_{\gamma} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что для теплопроводного вязкого ультрарелятивистского газа

$$3\lambda + 2\mu = 0, \quad U = C(S,\ \rho^{-2}\gamma_{\alpha\beta}S^\alpha S^\beta)\sqrt[3]{\rho}. \tag{13.70}$$

Первое равенство из (13.70) означает, что в ультрарелятивистском приближении объемная вязкость газа обращается в нуль [18]. Второе равенство из (13.70) определяет общий вид функции U для ультрарелятивистского газа.

Рассмотрим более подробно модели газа (не обязательно ультрарелятивистского), для которых лагранжиан не зависит от S^α. В этом случае функция U совпадает с удельной плотностью внутренней энергии газа, а полученные выше выражения для компонент тензора энергии-импульса, компонент 4-вектора плотности потока тепла и компонент 4-тензора вязких напряжений принимают известный вид

$$T^{\alpha\beta} = \rho U u^\alpha u^\beta + p\gamma^{\alpha\beta} + \frac{1}{c}u^{\langle\alpha}q^{\beta\rangle} - \tau^{\alpha\beta}, \quad p \equiv \rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}, \\ q^\alpha = -\chi(\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta T + Tu^\beta\nabla_\beta u^\alpha), \\ \tau^{\alpha\beta} = \lambda\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\gamma\delta}e_{\gamma\delta} + 2\mu e^{\alpha\beta}. \tag{13.71}$$

---

[1]) Как известно [1], и в нерелятивистской механике модель газа является частным случаем общей модели нелинейно-упругой среды.

Скалярная величина p называется *давлением газа*. Для ультрарелятивистского газа из вторых равенств (13.70), (13.71) следует, что давление связано с плотностью внутренней энергии газа известным соотношением [3]

$$p \equiv \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{3} \rho U. \tag{13.72}$$

Для фиксирования конкретной модели газа часто вместо удельной плотности его внутренней энергии $U(\rho, S, \varkappa_B)$ удобно задавать удельную плотность свободной энергии газа $F(\rho, T, \varkappa_B)$. Она определяется равенством

$$F = U(\rho, S, \varkappa_B) - TS, \tag{13.73}$$

в котором удельная плотность энтропии S предполагается выраженной через аргументы ρ, T, $\varkappa_B$ из соотношения $T = \partial U/\partial S$. Функция $F(\rho, T, \varkappa_B)$ часто имеет более простой вид, чем функция $U(\rho, S, \varkappa_B)$. При помощи равенств

$$U = F + TS, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T \tag{13.74}$$

все основные уравнения модели теплопроводного вязкого газа можно записать, используя функцию F вместо U. Если

$$\begin{aligned} U &= C_0 C_V \rho^{R/C_V} e^{S/C_V} + U_0, \\ F &= C_V T \left(1 + \ln \frac{C_0 \rho^{R/C_V}}{T}\right) + U_0, \end{aligned} \tag{13.75}$$

где C_0, C_V, R, U_0 — постоянные, то соответствующая модель называется *совершенным газом с постоянной теплоемкостью* [1]. В этом случае

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} = C_0 \rho^{R/C_V} e^{S/C_V}, \quad U = C_V T + U_0, \quad p = R\rho T. \tag{13.76}$$

Постоянная C_V называется *удельной теплоемкостью при постоянной плотности*, а R — *газовой постоянной*. Величина U_0 может включать в себя, в частности, среднюю удельную плотность энергии покоя образующих газ частиц, равную c^2. Выражения (13.75) для U и F могут использоваться для описания слаборелятивистского[1]) и

---

[1]) Газ называется *слаборелятивистским*, если хаотические скорости образующих его микроскопических частиц много меньше максимально возможной скорости c.

ультрарелятивистского газов. В последнем случае в них в соответствии с соотношением (13.70) следует положить $C_V = 3R$, $U_0 = 0$.

Если лагранжиан не зависит от компонент 4-вектора внутреннего потока энтропии S^α, т. е.

$$\Lambda = -\rho U(\rho, S, \gamma_{\alpha\beta}, \varkappa_B), \tag{13.77}$$

то рассмотренную общую модель нелинейно-упругой теплопроводной вязкой среды можно построить, не вводя параметров переноса и производства энтропии φ^ν, φ и их вариаций [4—7, 15, 16, 19]. Для этого следует в качестве определяющих параметров вместо функций (13.6) взять функции $x^\nu(\xi^\nu)$, $S(\xi^\nu)$ и определить функционал δW^* равенством

$$\delta W^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left[\rho T\,\delta S + \left(\tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}TS^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}\right)\nabla_\beta\,\delta x_\alpha\right]\sqrt{-g}\,d^4\xi. \tag{13.78}$$

Считая вариации δx^ν, δS независимыми, снова получим динамические уравнения (13.30) и несколько другое выражение для функционала δW, которое получается из выражения (13.32) при $\delta\varphi^\nu \equiv 0$. Компоненты $P^{\alpha\beta}$, входящие во второе равенство (13.30), определяются соотношением (13.26), в котором следует положить $\partial U/\partial S^\delta = 0$, $\partial U/\partial S = T$. Так как теперь функционал δW не содержит слагаемых с вариациями $\delta\varphi^\nu$, то, приравнивая его нулю, получим на разрыве только первое динамическое условие (13.46). Второе же условие (13.46) должно задаваться на основании дополнительных гипотез. Выражения для компонент тензоров энергии-импульса и момента количества движения по-прежнему имеют вид (13.53). Поэтому при $\partial U/\partial S^\delta = 0$ плотность внутренней энергии среды, определенная равенством (13.54), равна лагранжиану, взятому с противоположным знаком, т. е. ρU. Следовательно, функция U в равенстве (13.77) представляет собой удельную плотность внутренней энергии среды. Для компонент M^α, W^α вместо выражений (13.55), (13.56) теперь получим

$$M^\alpha = -TS^\alpha \equiv -q^\alpha, \qquad W^\alpha = cT^{\beta\alpha}u_\beta.$$

В результате инвариантное уравнение энергии (13.58) остается в силе, а вытекающее из тождества (12.10) соотношение (13.59) принимает вид

$$\rho T\frac{dS}{d\tau} + \left(\tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}TS^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}\right)\nabla_\beta c u_\alpha = -\nabla_\alpha TS^\alpha. \tag{13.79}$$

Учитывая уравнение баланса энтропии (12.13) и условия $u_\alpha u^\alpha = 1$, $u_\alpha S^\alpha = 0$, равенство (13.79) можно преобразовать так, что оно будет совпадать с выражением (13.61) для σ, в котором компоненты Φ_α по-прежнему определяются равенством (13.31) при $\partial U/\partial S^\delta \equiv 0$. Поэтому соотношения (13.62) — (13.68), определяющие необратимые эффекты вязкости и теплопроводности, остаются в силе. Однако для обратимых процессов функционал δW^* не равен нулю. Например, при $\chi = \infty$, $\lambda = \mu = 0$ он определяется выражением (13.78), если в последнем положить $\tau^{\alpha\beta} \equiv 0$.

Переход к ньютоновской механике. Рассмотрим, какой вид принимают полученные в настоящем параграфе уравнения нелинейно-упругой теплопроводной вязкой сплошной среды при переходе к ньютоновской механике, т. е. при $c \to \infty$. В случае, когда все параметры $\varkappa_B$ ортогональны 4-скорости среды, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial S^\alpha} u^\alpha = 0, \quad U(\rho, \gamma_{\alpha\beta}, S, S^\alpha, \varkappa_B) = U(\rho, \gamma_{ab}, S, S^a, \varkappa_B).$$

Учитывая также равенство $\gamma_0^\alpha = 0$, выполняющееся в ССК ξ^α, выражение для компонент тензора энергии-импульса можно записать в форме

$$\begin{gathered} T^{\alpha\beta} = \mathscr{E} u^\alpha u^\beta + \frac{1}{c} u^{\langle\alpha} q^{\beta\rangle} - p^{\alpha\beta}, \quad \mathscr{E} = \rho\left(U - \frac{\partial U}{\partial S^a} S^a\right), \\ p^{\alpha\beta} \equiv -\rho\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial S^a} S^a\right)\gamma^{\alpha\beta} + \rho\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ab}}\gamma_a^{\langle\alpha}\gamma_b^{\beta\rangle} + \tau^{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{13.80}$$

Так как $u_\beta q^\beta = 0$, $u_\beta p^{\alpha\beta} = 0$, то в любой ГСК x^ν имеем

$$\begin{gathered} q^0 = \frac{v_k}{c} q^k, \qquad p^{\nu 0} = \frac{v_k}{c} p^{\nu k}, \\ p^{00} = \frac{v_k v_q}{c^2} p^{kq}, \quad v_k \equiv v^k = \left(\frac{dx^k}{dt}\right)_{\xi^a}. \end{gathered} \tag{13.81}$$

Рассмотрим произвольную точку x^* в пространстве событий и выберем собственную для нее ГСК $x^{*\nu}$ так, чтобы в трехмерном физическом пространстве, соответствующем ГСК наблюдателя x^ν, оси x^{*k} были параллельны осям x^k. Тогда относительно ГСК $x^{*\nu}$ уравнения (13.2), (13.30), (13.31), (13.65) в рассматриваемой точке x^* примут с учетом выражений (13.80), (13.81) следующий

вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^*} + \rho\,(\partial_k v^k)^* = 0; \tag{13.82}$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t^*} + \mathscr{E}\,(\partial_k v^k)^* + \frac{2}{c^2}\,q^{*k}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^* = p^{*kq}\,(\partial_q v_k)^* - \partial_k^* q^{*k},$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\mathscr{E}\left(\frac{\partial v^k}{\partial t}\right)^* - p^{*kq}\left(\frac{\partial v_q}{\partial t}\right)^* + \frac{\partial q^{*k}}{\partial t^*}\right] = \tag{13.83}$$

$$= \partial_q^* p^{*kq} - \frac{1}{c^2}\,(q^{\langle q}\,\partial_q v^{k\rangle})^*;$$

$$p^{*kq} = -\rho\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial S^a}\,S^a\right)\delta^{kq} + \rho\,\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ab}}\,x_a^{*\langle k} x_b^{*q\rangle} + \tau^{*kq}; \tag{13.84}$$

$$\Phi_k^* = \partial_k^* T - \xi_k^{*a}\frac{\partial}{\partial t^*}\,\rho\,\frac{\partial U}{\partial S^a} + \frac{1}{c^2}\,T\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^*, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}; \tag{13.85}$$

$$q^{*k} \equiv TS^{*k} = -\chi\Phi_k^*, \quad \tau^{*kq} = \lambda\delta^{kq}\delta^{pn}e_{pn}^* + 2\mu e_{kq}^*. \tag{13.86}$$

Здесь были использованы равенства

$$\left(\frac{\partial q^k}{\partial t}\right)^* = \frac{\partial q^{*k}}{\partial t^*}, \quad (\partial_k q^k)^* = \partial_k^* q^{*k}, \quad (\partial_q p^{kq})^* = \partial_q^* p^{*kq}, \tag{13.87}$$

вытекающие из ортогональности компонент $p^{\alpha\beta}$ и q^α 4-скорости среды и принятого выше специального выбора собственных ГСК $x^{*\nu}$, а также тождество

$$\left(\frac{\partial \xi_k^{*a}}{\partial t}\right)^* + \xi_q^{*a}\,(\partial_k v^q)^* = 0. \tag{13.88}$$

Для компонент γ_{ab}, S^a, очевидно, справедливы выражения

$$\gamma_{ab} = \gamma_{\mu\nu}^* x_a^{*\mu} x_b^{*\nu} = \delta_{kq} x_a^{*k} x_b^{*q}, \quad S^a = \xi_\nu^{*a} S^{*\nu} = \xi_k^{*a} S^{*k}. \tag{13.89}$$

Как отмечалось в § 2, в релятивистской механике энергия всякой материальной точки массы m состоит из энергии покоя mc^2 и кинетической энергии, которая остается конечной при $c \to \infty$. Поэтому при $c \to \infty$ имеем

$$\mathscr{E} = \rho c^2 + \mathscr{E}^\circ, \quad U = c^2 + U^\circ. \tag{13.90}$$

Для перехода к ньютоновской механике, очевидно, нужно опустить в уравнениях (13.82) — (13.86) слагаемые, пропорциональные c^{-2}, и затем перейти от ГСК $x^{*\nu}$, собственной для точки x^*, к ГКС x^ν, общей для всех точек, используя для тензорных величин преобразования, получающиеся из преобразований Лоренца при $c \to \infty$, т. е. преобразования Галилея. Если конкретное выражение для U° зависит от значения c, то соответствующий пре-

дельный переход надо провести и в нем. При этом, например, может исчезнуть зависимость U° от компонент S^a. В общем случае, когда при $c\to\infty$ число аргументов функции U° не меняется, в результате указанной выше процедуры получим следующие ньютоновские уравнения нелинейно-упругой теплопроводной вязкой среды, инвариантные относительно преобразования Галилея:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\partial_k v^k=0,\quad \frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v^k\partial_k; \tag{13.91}$$

$$\rho\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{\mathscr{E}^\circ}{\rho}\right)=\partial_q\left(p^{kq}v_k-q^q\right),\quad \mathscr{E}^\circ=\rho\left(U^\circ-\frac{\partial U^\circ}{\partial S^a}S^a\right),$$

$$\rho\,\frac{dv^k}{dt}=\partial_q p^{kq}, \tag{13.92}$$

$$p^{kq}\equiv-\rho\left(\rho\,\frac{\partial U^\circ}{\partial\rho}+\frac{\partial U^\circ}{\partial S^a}S^a\right)\delta^{kq}+\rho\,\frac{\partial U^*}{\partial\gamma_{ab}}\tilde{x}^{\langle k}_a\tilde{x}^{q\rangle}_b+\tau^{kq};$$

$$q^k=TS^k=\chi\left(-\partial_k T+\tilde{\xi}^a_k\,\frac{d}{dt}\,\rho\,\frac{\partial U^\circ}{\partial S^a}\right),\quad T=\frac{\partial U^\circ}{\partial S}; \tag{13.93}$$

$$\tau^{kq}=\lambda\delta^{kq}\,\partial_p v^p+\mu\,\partial_{\langle k}v_{q\rangle},\quad \gamma_{ab}=\delta_{kq}\tilde{x}^k_a\tilde{x}^q_b,\quad S^a=\tilde{\xi}^a_k S^k,$$

$$\tilde{x}^k_a=\left(\frac{\partial x^k}{\partial\xi^a}\right)_t,\quad \tilde{\xi}^a_k=\left(\frac{\partial\xi^a}{\partial x^k}\right)_t,\quad v_k=v^k=\left(\frac{\partial x^k}{\partial t}\right)_{\xi^a}. \tag{13.94}$$

Здесь через q^k, p^{kq}, τ^{kq} обозначены величины, полученные в результате преобразования Галилея компонент q^{*k}, p^{*kq}, τ^{*kq} при переходе от ГСК $x^{*\nu}$ к ГСК x^ν. Если ГСК $x^{*\nu}$ выбрана специальным образом, указанным выше, то из равенств $q^{*0}=p^{*0\nu}=\tau^{*0\nu}=0$ следует, что $q^k=q^{*k}$, $p^{kq}=p^{*kq}$, $\tau^{kq}=\tau^{*kq}$.

§ 14. Проводящая среда и электромагнитное поле

Определяющие параметры. Рассмотрим модель проводящей среды и электромагнитного поля, для которой лагранжиан имеет вид [1])

$$\Lambda=-\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-\frac{1}{c}J^\alpha A_\alpha-\rho U\,(\rho,\ \gamma_{\alpha\beta},\ S,\ S^\alpha,\ Z,\ j^\alpha,\ \varkappa_B). \tag{14.1}$$

[1]) Здесь предполагается, что величины $F_{\alpha\beta}$ определены равенством $F_{\alpha\beta}=\nabla_{[\alpha}A_{\beta]}$, а компоненты J^α выражены через параметры электрического тока ψ^α при помощи соотношения (5.14). При этом функционал δW^* определяется формулой (14.10) и не содержит членов с вариациями δA_α. Возможно также другое определение лагранжиана [20], при котором величины $F_{\alpha\beta}$ и A_α варьируются независимо, соотношение $F_{\alpha\beta}=\nabla_{[\alpha}A_{\beta]}$ получается в качестве уравнений Эйлера при вариациях $\delta F^{\alpha\beta}$, член $-c^{-1}J^\alpha A_\alpha$ не входит в лагранжиан, а функционал δW^* содержит члены с вариациями δA_α.

Здесь $F_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряженности электромагнитного поля, A_α — компоненты его 4-потенциала, J^α — компоненты 4-вектора плотности электрического тока, $Z \equiv \equiv z/\rho$ — удельная плотность электрического заряда (z — собственная плотность электрического заряда), j^α — компоненты плотности электрического тока проводимости. Эти параметры были определены во второй главе. Остальные аргументы лагранжиана (14.1) те же, что и в § 13. В нерелятивистской механике лагранжиан может зависеть от плотности электрического заряда, например, для унипольярно заряженных сред, в которых он пропорционален плотности числа заряженных частиц. При этом включение в число аргументов релятивистского лагранжиана наряду с $Z = z/\rho$, вообще говоря, и компонент j^α обусловлено соображениями, аналогичными изложенным в § 13 при обсуждении выражения (13.1) для Λ (с заменой S, s, S^α соответственно на Z, z, j^α).

На основании равенств (2.8), (5.1), (5.33), (5.36) легко установить, что единица измерения величины $c^{-1}J^\alpha A_\alpha$ полностью определяется выбранной системой единиц измерения собственного времени, расстояния и массы. Однако единица измерения электрического заряда, а следовательно, и единица измерения напряженности электромагнитного поля при этом остаются произвольными (см. § 2). Поэтому, выбирая различным образом единицу измерения электрического заряда, можно получить вместо коэффициента $(16\pi)^{-1}$ при первом слагаемом в выражении (14.1) для Λ любой другой положительный коэффициент. В рассматриваемых ниже моделях единицы измерения всех электромагнитных величин полностью определяются единицами измерения собственного времени, расстояния, массы и электрического заряда. Система единиц измерения этих величин, которой соответствует выбранное значение $(16\pi)^{-1}$ указанного коэффициента, называется *гауссовой*.

Напомним некоторые свойства аргументов лагранжиана (14.1). Для компонент $F_{\alpha\beta}$ и J^α имеют место выражения (см. § 5)

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_{[\alpha}A_{\beta]} = \partial_{[\alpha}A_{\beta]}, \quad J^\alpha = czu^\alpha + j^\alpha, \quad u_\alpha j^\alpha = 0, \qquad (14.2)$$

причем параметры z, j^α должны удовлетворять дифференциальному уравнению баланса электрического заряда (5.12). Для них справедливы полученные в § 5 параметрические представления через функции $\psi^\alpha(\xi^\nu)$, связанные

между собой простым соотношением

$$u_\alpha \psi^\alpha = 0. \tag{14.3}$$

Свойства остальных аргументов лагранжиана те же, что и в § 13. Все аргументы лагранжиана (14.1) выражаются через функции

$$x^\nu(\xi^\nu),\quad \varphi^\alpha(\xi^\nu),\quad \varphi(\xi^\nu),\quad \psi^\alpha(\xi^\nu),\quad A_\alpha(\xi^\nu) \tag{14.4}$$

и их производные. Поэтому функции (14.4) удобно выбрать в качестве определяющих параметров $\mu^A(\xi^\nu)$. При $\psi^\alpha = A_\alpha = 0$ они совпадают с определяющими параметрами, введенными в § 13.

Вычислим вариации аргументов функции $\Lambda\sqrt{-g}$, используя полученные во второй главе их выражения через определяющие параметры (14.4).

1. *Вариации компонент тензора напряженности электромагнитного поля.* На основании выражения (14.2) для $F_{\alpha\beta}$ имеем

$$\delta F_{\alpha\beta} = \delta(\partial_{[\alpha} A_{\beta]}) = \partial_{[\alpha}\delta A_{\beta]} = \nabla_{[\alpha}\delta A_{\beta]}, \tag{14.5}$$

после чего с учетом формул (7.12), (7.13) для $\delta g^{\alpha\beta}$, $\delta\sqrt{-g}$ найдем

$$\delta\left(\frac{F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}{16\pi}\sqrt{-g}\right) = \delta\left(\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta A_\alpha + T^{\alpha\beta}_{(F)}\nabla_\beta\delta x_\alpha\right)\sqrt{-g}, \tag{14.6}$$
$$T^{\alpha\beta}_{(F)} \equiv \frac{1}{4\pi}\left(-F^{\alpha\gamma}F^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma} + \frac{1}{4}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta}\right).$$

2. *Вариации компонент* $J^\alpha\sqrt{-g}$. Используя параметрическое представление (5.14) для J^α, второе тождество (1.36) и равенства $u^\nu = \delta^\nu_0/\sqrt{g_{00}}$, $\sqrt{-g} = \sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}$, найдем

$$\delta(J^\alpha\sqrt{-g}) = \delta\left(c\sqrt{-g}\,\nabla_\nu\frac{\psi^{[\alpha}u^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}\right) = \delta\left(c\partial_\nu\psi^{[\alpha}\delta^{\nu]}_0\right) =$$
$$= c\partial_\nu\delta\psi^{[\alpha}\delta^{\nu]}_0 = c\sqrt{-g}\,\nabla_\nu\frac{\delta\psi^{[\alpha}u^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}.$$

Поэтому

$$\delta\left(\frac{1}{c}J^\alpha A_\alpha\sqrt{-g}\right) = \left(\frac{1}{c}J^\alpha\delta A_\alpha + A_\alpha\nabla_\nu\frac{\delta\psi^{[\alpha}u^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}\right)\sqrt{-g}. \tag{14.7}$$

3. *Вариации удельной плотности электрического заряда Z и компонент 4-вектора плотности электрического тока проводимости j^α.* Легко видеть, что параметрические представления (6.27), (6.28) для собственной плотности энтропии s и компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии S^α, а также определение $S \equiv s/\rho$ для удельной плотности энтропии S при формальной подстановке

$$s \to z, \quad S^\alpha \to j^\alpha, \quad \varphi^\alpha \to \psi^\alpha, \quad \varphi^\alpha \to 0, \quad S \to Z$$

переходят в параметрические представления (5.13) для величин z, j^α и определение $Z \equiv z/\rho$ для величины Z. Поэтому, производя указанную подстановку в выражениях (13.11), (13.12) для вариаций δS, δS^α, сразу получим

$$\begin{aligned} \delta Z &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{c}\, u^{\langle\alpha} j^{\beta\rangle} \nabla_\alpha\, \delta x_\beta - \gamma^\alpha_\beta \nabla_\alpha \left(\gamma^\beta_\nu \frac{\delta\psi^\nu}{\sqrt{\gamma}}\right)\right], \\ \delta j^\alpha &= -\left(g^{\delta\nu} j^\alpha + j^{\langle\delta} u^{\nu\rangle} u^\alpha\right) \nabla_\delta\, \delta x_\nu - c\gamma^\alpha_\beta \nabla_\nu \frac{u^{[\nu}\, \delta\psi^{\beta]}}{\sqrt{\gamma}}. \end{aligned} \tag{14.8}$$

Вариации остальных аргументов функции U из выражения (14.1) для лагранжиана, а также вариация произведения $\rho\sqrt{-g}$ по-прежнему определяются по формулам, полученным в § 13.

Вариационное уравнение. Исходное вариационное уравнение имеет вид

$$\delta I + \delta W^* + \delta W = 0, \quad I \equiv \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \Lambda \sqrt{-g}\, d^4\xi. \tag{14.9}$$

Функционал δW^* зададим следующим образом:

$$\delta W^* = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \left(T \frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}} + \Phi_\alpha \frac{\delta\varphi^\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \Psi_\alpha \frac{\delta\psi^\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \tau^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta x_\alpha\right) \times \sqrt{-g}\, d^4\xi, \tag{14.10}$$

где

$$\Psi_\alpha u^\alpha = 0, \tag{14.11}$$

а коэффициенты Φ_α, $\tau^{\alpha\beta}$ удовлетворяют равенствам (13.16). Обоснование условия (14.11) полностью аналогично обоснованию первого условия (13.16) с заменой φ^α на ψ^α и Φ_α на Ψ_α. Смысл равенств (13.16) тот же, что и в § 13, но при обосновании последнего равенства (13.16) наряду с соотношениями (13.18) следует учесть, что вариации $\delta_\varepsilon \psi^\alpha$,

соответствующие бесконечно малому преобразованию Пуанкаре ГСК наблюдателя, равны нулю

$$\delta_\varepsilon \psi^\alpha = 0. \tag{14.12}$$

В рассматриваемой модели сплошной среды все вариации в уравнении (14.9), очевидно, выражаются через вариации определяющих параметров (14.4)

$$\delta x^\nu, \quad \delta\varphi^\alpha, \quad \delta\varphi, \quad \delta\psi^\alpha, \quad \delta A_\alpha \tag{14.13}$$

и производные от них по координатам ξ^ν. Система вариаций (14.13) не является независимой, так как функции $\varphi^\alpha(\xi^\nu)$, $\psi^\alpha(\xi^\nu)$ должны удовлетворять связям (13.5), (14.3). Учитывая первую из них методом неопределенных множителей Лагранжа, по-прежнему получим соотношения (13.21) — (13.23). Аналогичная процедура для второй связи приводит к соотношениям, получающимся при замене в (13.21) — (13.23) величин φ^α, $\lambda_{(\varphi)}$, $\delta R_{(\varphi)}$ на ψ^α, $\lambda_{(\psi)}$, $\delta R_{(\psi)}$. В результате к левой части вариационного уравнения (14.9), вообще говоря, следует добавить функционалы $\delta R_{(\varphi)}$ и $\delta R_{(\psi)}$. Однако множитель $\lambda_{(\varphi)}$, который находится точно так же, как и в § 13, оказывается равным нулю. Совершенно аналогично вычисляется множитель $\lambda_{(\psi)}$, который также равен нулю. Поэтому $\delta R_{(\varphi)} \equiv \delta R_{(\psi)} \equiv 0$, и можно использовать непосредственно уравнение (14.9).

Динамические уравнения для непрерывных процессов. Вычислим вариацию действия для рассматриваемой сплошной среды, используя формулы (14.2), (14.6) — (14.8), а также выкладки, проведенные в § 13. В результате получим

$$\delta I = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \left\{ \left[\nabla_\beta \left(T^{\alpha\beta}_{(F)} + P^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta}_{(J)} \right) \right] \delta x_\alpha - \left[\gamma^\alpha_\nu \nabla_\beta \left(\gamma^\beta_\alpha \frac{\partial U}{\partial S} \right) + \right.\right.$$

$$+ cu^\beta \nabla_{[\beta} \left(\gamma^\delta_{\nu]} \rho \frac{\partial U}{\partial S^\delta} \right) \Big] \frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}} - \frac{\partial U}{\partial S} \frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}} - \left[\gamma^\alpha_\nu \nabla_\beta \left(\gamma^\beta_\alpha \frac{\partial U}{\partial Z} \right) + \right.$$

$$+ cu^\beta \nabla_{[\beta} \left(\gamma^\delta_{\nu]} \rho \frac{\partial U}{\partial j^\delta} \right) - F_{\alpha\nu} u^\alpha \Big] \frac{\delta\psi^\nu}{\sqrt{\gamma}} - \left[\frac{1}{4\pi} \nabla_\beta F^{\alpha\beta} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{c} J^\alpha \right] \delta A_\alpha \right\} \sqrt{-g}\, d^4\xi - \frac{1}{c} \int\limits_{\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm} \left\{ \left(T^{\alpha\beta}_{(F)} + P^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta}_{(J)} \right) \delta x_\alpha + \right.$$

$$\left. + T_\nu \frac{u^{[\beta} \delta\varphi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} + \mu_\nu \frac{u^{[\beta} \delta\psi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} - \frac{F^{\alpha\beta}}{4\pi} \delta A_\alpha \right\} l_\beta d^3\xi. \tag{14.14}$$

Здесь

$$P^{\alpha\beta}_{(J)} = \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial Z}u^{\langle\alpha}j^{\beta\rangle} - \rho\frac{\partial U}{\partial j^\delta}(g^{\alpha\beta}j^\delta + j^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}u^\delta), \quad (14.15)$$

$$T_\nu = \frac{\partial U}{\partial S}u_\nu - c\rho\gamma^\delta_\nu\frac{\partial U}{\partial S^\delta}, \quad (14.16)$$

$$\mu_\nu = \frac{\partial U}{\partial Z}u_\nu - c\rho\gamma^\delta_\nu\frac{\partial U}{\partial j^\delta} + A_\nu, \quad (14.17)$$

а компоненты $P^{\alpha\beta}$ по-прежнему определяются равенством (13.26), если в нем для функции U использовать ее выражение в рассматриваемой модели.

Подставляя в вариационное уравнение (14.9) выражения (14.14) и (14 10) для δI и δW^*, преобразуя последние слагаемые в функционале δW^* так же, как в § 13, и используя тождества (13.29), найдем систему динамических уравнений для непрерывных процессов и функционал δW [1])

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \quad T^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta}_{(F)} + P^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta}_{(J)} - \tau^{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad (14.18)$$

$$-\gamma^\beta_\nu\nabla_\beta\frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial U}{\partial S}u^\beta\nabla_\beta u_\nu + cu^\beta\nabla_{[\beta}\left(\gamma^\delta_{\nu]}\rho\frac{\partial U}{\partial S^\delta}\right) = \Phi_\nu, \quad (14.19)$$

$$-F_{\alpha\nu}u^\alpha - \gamma^\beta_\nu\nabla_\beta\frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial Z}u^\beta\nabla_\beta u_\nu + cu^\beta\nabla_{[\beta}\left(\gamma^\delta_{\nu]}\rho\frac{\partial U}{\partial j^\delta}\right) = \Psi_\nu, \quad (14.20)$$

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c}J^\alpha, \quad J^\alpha \equiv c\rho Z u^\alpha + j^\alpha, \quad (14.21)$$

$$\delta W = \frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\left\{T^{\alpha\beta}\delta x_\alpha + T_\nu\frac{u^{[\beta}\delta\varphi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} + \mu_\nu\frac{u^{[\beta}\delta\psi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} - \frac{F^{\alpha\beta}}{4\pi}\delta A_\alpha\right\}l_\beta d^3\zeta. \quad (14.22)$$

Первое уравнение (14.18) с учетом второго представляет собой уравнение движения проводящей среды в электромагнитном поле. Ниже будет показано, что оно совпадает с уравнением энергии-импульса, вытекающим из теоремы Нётер, причем компоненты $T^{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора энергии-импульса сплошной среды и электромагнитного поля. Последнее равенство (14.18) по-прежнему можно рассматривать как определение обобщенной абсолютной температуры. Уравнение (14.19)

[1]) При этом надо учесть, что вариации δx_α, $\delta\varphi^a$, $\delta\varphi$, $\delta\psi^a$, δA_α являются независимыми, а коэффициенты при вариациях $\delta\varphi^0$, $\delta\psi^0$ в функционалах δI, δW^* тождественно равны нулю. Именно поэтому неопределенные множители Лагранжа $\lambda_{(\varphi)}$, $\lambda_{(\psi)}$ обращаются в нуль.

полностью совпадает с уравнением (13.31) модели сплошной среды, рассмотренной в § 13, и имеет тот же физический смысл. Уравнение (14.20) служит для определения компонент 4-вектора плотности электрического тока проводимости и вместе с уравнением баланса электрического заряда (5.12) описывает процесс переноса электрического заряда в сплошной среде. Уравнения (14.21) вместе с соотношениями (5.35) и (14.2) образуют записанную в четырехмерной форме систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в проводящей сплошной среде. Замыкающие систему уравнений (14.18)—(14.21) законы, которые можно использовать для определения величин $\tau^{\alpha\beta}$, Φ_γ, Ψ_γ, рассмотрены ниже в настоящем параграфе. При этом оказывается, что в отсутствие перекрестных эффектов (см. ниже) уравнения (14.19) и (14.20) после подстановки в них выражений для Φ_γ и Ψ_γ можно рассматривать как релятивистские обобщения закона теплопроводности Фурье и закона электропроводности Ома.

Условия на разрывах. Ограничимся исследованием разрывов, на которых функции $x^\nu(\xi^\gamma)$ непрерывны. Рассмотрим сначала кинематические соотношения, связывающие между собой значения вариаций определяющих параметров на двух сторонах гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$. Для вариаций δx^ν, $\delta\varphi^\alpha$ по-прежнему примем соотношения (13.33), (13.37) и (13.38) (или эквивалентное последнему равенство (13.44)). Соотношение на разрыве для вариаций $\delta\psi^\alpha$ получим, учитывая физический смысл параметров электрического тока ψ^α (см. § 5) и рассматривая гиперповерхность разрыва как бесконечно тонкий четырехмерный слой, в котором 4-вектор плотности электрического тока остается ограниченной величиной. Рассуждения, которые необходимо провести для этого, дословно совпадают с рассуждениями, проведенными в § 13 при выводе кинематических соотношений на разрыве для параметров φ^α, если в них компоненты s^α и φ^α заменить на J^α и ψ^α, а величины σ и φ положить равными нулю. В результате для величин J^α, ψ^α, $\delta\psi^\alpha$ получаются кинематические соотношения, полностью аналогичные соотношениям для s^α, φ^α, $\delta\varphi^\alpha$ из § 13:

$$\{J^\alpha l_\alpha\}^+_- = 0; \tag{14.23}$$

$$\left\{\frac{l_\alpha\psi^\alpha}{\sqrt{-g}}\right\}^+_- = 0, \quad \left\{\frac{l_\alpha\delta\psi^\alpha}{\sqrt{-g}}\right\}^+_- = 0, \quad u^\alpha l_\alpha = 0, \tag{14.24}$$

$$[\psi^\alpha]^+_- = 0, \qquad [\delta\psi^\alpha]^+_- = 0, \quad u^\alpha l_\alpha \neq 0.$$

При помощи тождества (13.39) второе условие (14.24) можно представить в четырехмерном виде, аналогичном соотношению (13.44).

Для вариаций компонент 4-потенциала электромагнитного поля соотношения на разрыве получим в случае, когда гиперповерхность разрыва можно рассматривать как бесконечно тонкий четырехмерный слой, в котором тензор напряженности электромагнитного поля остается ограниченной величиной. Интегрируя тождество

$$F_{\mu\nu}\mathfrak{e}^{\mu}\mathfrak{e}^{\nu} = \partial_{\varkappa}\left(\delta^{\varkappa}_{[\mu}A_{\nu]}\mathfrak{e}^{\mu}\mathfrak{e}^{\nu}\right)$$

по части указанного слоя, соответствующей участку гиперповерхности разрыва $\Delta\Sigma_c$, и применяя формулу Остроградского — Гаусса (1.44), записанную относительно ГСК наблюдателя, найдем

$$\int\limits_{\Delta\Sigma_{\pm}} \delta^{\varkappa}_{[\mu}A_{\nu]}\mathfrak{e}^{\mu}\mathfrak{e}^{\nu}l_{\varkappa}d^3\zeta = 0.$$

Отсюда в силу произвольности области $\Delta\Sigma_c$ и непрерывности векторов базиса ГСК наблюдателя $\mathfrak{e}^{\mu}$, $\mathfrak{e}^{\nu}$ вытекает соотношение

$$\{l_{[\mu}A_{\nu]}\}^{+}_{-} = 0. \tag{14.25}$$

Используя его, можно показать, что компоненты тензора напряженности электромагнитного поля на разрыве удовлетворяют соотношению

$$\{\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}l_{\nu}F_{\lambda\varkappa}\}^{+}_{-} = 0. \tag{14.26}$$

Действительно, на основании третьего примечания к § 9 и равенств (1.39), (9.9), (9.15), (9.39), (13.41), (13.42), (14.25) имеем

$$\{\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}l_{\nu}F_{\lambda\varkappa}\}^{+}_{-} = 2e^{\mu\nu\lambda\varkappa}\{l_{\nu}\partial_{\lambda}A_{\varkappa}\}^{+}_{-} = 2e^{\mu\nu\lambda\varkappa}\left\{l_{\nu}f^{(k)}_{\lambda}\frac{\partial A_{\varkappa}}{\partial\zeta^k}\right\}^{+}_{-} =$$

$$= e^{\mu\nu\lambda\varkappa}\left(f^{(k)}_{\lambda}\frac{\partial}{\partial\zeta^k}\{l_{[\nu}A_{\varkappa]}\}^{+}_{-} - 2\left\{f^{(k)}_{\lambda}f^{(\delta)}_{\nu}f^{\rho}_{(\delta)}\frac{\partial l_{\rho}}{\partial\zeta^k}A_{\varkappa}\right\}^{+}_{-}\right) =$$

$$= e^{\mu\nu\lambda\varkappa}\left(\left\{f^{(k)}_{\langle\lambda}f^{(r)}_{\nu\rangle}\frac{\partial^2 f^{\rho}}{\partial\zeta^r\partial\zeta^k}l_{\rho}A_{\varkappa}\right\}^{+}_{-} - f^{(k)}_{\lambda}\frac{\partial l_{\rho}}{\partial\zeta^k}\frac{f^{\rho}_{(0)}}{f}\{l_{[\nu}A_{\varkappa]}\}^{+}_{-}\right) = 0.$$

Чтобы получить из условия (14.25) соотношения для вариаций δA_{α}, преобразуем его левую часть, используя равенства (9.9), (9.15), (9.39), (13.41), (13.42) и третье

примечание к § 9:

$$\left\{l_{[\mu}f^{(\delta)}_{\nu]}f^{\alpha}_{(\delta)}A_\alpha\right\}^+_- = \left\{l_{[\mu}\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial f^{\nu]}_{(k)}}f^{\alpha}_{(k)}A_\alpha\right\}^+_- =$$

$$= (l_{[\mu}f^{(\delta)}_{\nu]}f^{\alpha}_{(\delta)})_+[A_\alpha]^+_- = (l_{[\mu}\xi^{\nu}_{\nu]})_+[A_\nu]^+_-.$$

Умножив затем соотношение (14.25) на $(x^\mu_\alpha x^\nu_\beta/\sqrt{-g})_+$, получим

$$\left(\frac{x^\mu_\alpha x^\nu_\beta}{\sqrt{-g}}\right)_+\{l_{[\mu}A_{\nu]}\}^+_- = -\left(\frac{l_{[\beta}\delta^\nu_{\alpha]}}{\sqrt{-g}}\right)_+[A_\nu]^+_- = -\left\{\frac{l_{[\beta}A_{\alpha]}}{\sqrt{-g}}\right\}^+_- = 0. \quad (14.27)$$

Последнее равенство (14.27) содержит три независимых условия на разрыве для четырех компонент A_α. Следовательно, значения компонент A_α на одной из сторон гиперповерхности разрыва определяются их значениями на другой стороне неоднозначно, что является проявлением общей неоднозначности 4-потенциала электромагнитного поля, определенного лишь с точностью до градиентного преобразования (см. § 2, 5 и 10). Используя последнее обстоятельство, на компоненты A_α можно наложить более жесткое условие непрерывности на гиперповерхности разрыва, из которого в силу соотношений $\{l_\alpha/\sqrt{-g}\}^+_- = 0$ сразу вытекает последнее равенство (14.27). Проводя в нем варьирование и учитывая тождества (13.36), получим следующее соотношение для вариаций δA_α:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{-g}}l_{[\beta}\delta A_{\alpha]}\right\}^+_- \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}l_{[\beta}[\delta A_{\alpha]}]^+_- = 0. \quad (14.28)$$

Если же компоненты A_α непрерывны на разрыве, то, очевидно, имеем более жесткое условие $[\delta A_\alpha]^+_- = 0$, из которого сразу вытекает последнее равенство (14.28).

Рассмотрим динамические условия на разрывах в случае, когда для вариаций δx^ν, $\delta\varphi^\nu$, $\delta\psi^\nu$, δA_α выполняются кинематические соотношения (13.33), (13.37), (13.38), (14.24), (14.28). Используя их и полагая вариации определяющих параметров равными нулю на границе $\partial\hat{V}$, представим выражение (14.22) для функционала δW в виде[1])

$$\delta W_c = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{\Sigma}_c}\left(\left\{T^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\xi^\alpha_\nu l_\beta\right\}^+_-\delta x^\nu_+ + \left\{T_{[\nu}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_-\delta\varphi^\nu_+ + \right.$$

$$\left. + \left\{\mu_{[\nu}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_-\delta\psi^\nu_+ - \left\{\frac{F^{\alpha\beta}}{4\pi}l_\beta\right\}^+_-\delta A^+_\alpha\right)d^3\zeta. \quad (14.29)$$

[1]) См. примечание перед формулой (13.45). Все сказанное там остается в силе при замене $\delta\varphi^\nu$ на $\delta\psi^\nu$.

Задавая значения функционала δW_c, определенного равенством (14.29), получим динамические условия на гиперповерхности разрыва Σ_c. Как и раньше, ограничимся случаем, когда $\delta W_c = 0$. Учитывая, что вариации δx^ν_+, $\delta\varphi^a_+$, $\delta\psi^a_+$, δA^+_α являются независимыми, а коэффициенты при вариациях $\delta\varphi^a_+$, $\delta\psi^a_+$ в выражении (14.29) тождественно равны нулю, из уравнения $\delta W_c = 0$ найдем следующие динамические условия на разрыве:

$$\{T^{\cdot\beta}_{\alpha}\xi^\alpha_\nu l_\beta\}^+_- = 0, \quad \left\{T_{[\gamma l_\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_- = 0,$$

$$\left\{\mu_{[\gamma l_\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_- = 0, \quad \{F^{\alpha\beta}l_\beta\}^+_- = 0. \tag{14.30}$$

Ниже будет показано, что первое равенство (14.30) совпадает с вытекающим из теоремы Нётер условием непрерывности на разрыве потока энергии-импульса сплошной среды и электромагнитного поля. Второе условие (14.30) имеет тот же смысл, что и § 13. В частности, его можно представить в виде соотношений (13.48) и (13.49) — (13.51). Третье равенство (14.30) вместе с соотношением (14.23) образует условия на разрыве для уравнения баланса электрического заряда. Если функция U в выражении (14.1) для лагранжиана Λ не зависит от аргументов Z, j^α, то третье условие (14.30) удовлетворяется тождественно в силу кинематических соотношений (14.27) для компонент A_α. Действительно, в этом случае на основании выражений (14.17) для величин μ_γ и равенств (13.34), (14.27) имеем

$$\left\{\mu_{[\gamma l_\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_- = \left\{A_{[\gamma l_\beta]}\delta^\beta_0\frac{1}{\sqrt{-g}}\right\}^+_- = \left\{\frac{1}{\sqrt{-g}}\,l_{[\beta}A_{\gamma]}\right\}^+_-\delta^\beta_0 = 0.$$

Третье условие (14.30) получается из второго при замене величин T_γ на μ_γ. Поэтому его можно также представить в виде соотношений, получающихся из равенств (13.48) — (13.51) путем замены в них величин T и T_ν на $\partial U/\partial Z$ и μ_ν. Последнее равенство (14.30) вместе с соотношением (14.26) образует известную систему условий на разрыве для электромагнитного поля [1], записанную в четырехмерной форме. Отметим, что, используя антисимметричность компонент $F^{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varkappa}$ и равенства (9.39), (13.34), (13.43), последнее условие (14.30) можно записать в ГСК наблюдателя. Для этого умножим последнее равенство (14.30)

на $(x^\nu_\alpha)_+$ и преобразуем его левую часть следующим образом:

$$(x^\nu_\alpha)_+ \{F^{\alpha\beta} l_\beta\}^+_- =$$

$$= \left(x^\nu_\alpha \frac{l_\beta}{\sqrt{-g}}\right)_+ [\sqrt{-g}\, F^{\alpha\beta}]^+_- = \left(f^\nu_{(k)} f^{(k)}_\alpha \frac{l_\beta}{\sqrt{-g}}\right)_+ [\sqrt{-g}\, F^{\alpha\beta}]^+_- =$$

$$= \{f^\nu_{(k)} f^{(k)}_\alpha l_\beta F^{\alpha\beta}\}^+_- = \{x^\nu_\alpha l_\beta F^{\alpha\beta}\}^+_- = \{F^{\nu\mu} l_\mu\}^+_- = 0. \qquad (14.31)$$

Аналогично можно переписать в ССК соотношение (14.26).

Динамические тождества. Установим некоторые динамические тождества для рассматриваемой модели. Для этого, как и в § 13, применим теорию, развитую в предыдущей главе. Сравнивая общие выражения (7.19), (9.1) и (10.13) для функционалов δW^*, δW и вариаций $\delta_\varepsilon \mu^A$, соответствующих бесконечно малому преобразованию Пуанкаре (10.11), с их конкретными выражениями (14.10), (14.22), (13.18) и (14.12), найдем, что для рассматриваемой модели коэффициенты M_A, M^α_A, $M^{\alpha\beta}_A$, W^α_A, $W^{\alpha\beta}_A$, $I^A_{\mu\nu}$, I^A_ν, входящие в указанные общие выражения, имеют вид (13.52)[1]) и

$\bar{\mu}^A$	$\bar{M}_A$	M^α_A	$\bar{M}^{\alpha\beta}_A$	$\overline{W}^\alpha_A$	$\overline{W}^{\alpha\beta}_A$	$I^A_{\mu\nu}$	I^A
ψ^ν	$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\Psi_\nu$	0	0	$\frac{\mu_\delta u^{[\alpha}\delta^{\delta]}_\nu}{\sqrt{\gamma}}$	0	0	0
μ^A	M_A	M^α_A	$M^{\alpha\beta}_A$	W^α_A	$W^{\alpha\beta}_A$	$I^A_{\mu\nu}$	I^A_ν
A_ν	0	0	0	$-\frac{F^{\nu\alpha}}{4\pi}$	0	0	0

(14.32)

Здесь учтено очевидное равенство

$$\delta_\varepsilon A_\alpha = 0, \qquad (14.33)$$

выполняющееся для вариаций компонент 4-потенциала электромагнитного поля в ССК, соответствующих бесконечно малому преобразованию Пуанкаре (10.11).

Рассмотрим законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, вытекающие из однородности и изотропности пространства событий Минковского. Как и в § 13, легко проверить, что для вариаций (13.18),

[1]) Компоненты $T^{\cdot\alpha}_{\gamma\cdot}$, входящие в выражения (13.52), для рассматриваемой модели определяются вторым равенством (14.18).

(14.12) и (14.33) все условия теоремы Нётер удовлетворяются. Поэтому на действительных процессах выполняются тождества (10.6)—(10.10), (10.15), (10.16), записанные с учетом соотношений (13.52), (14.32) при $I_B^A = I_\nu^A$ и $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$. Они выражают законы сохранения энергии-импульса (при $I_B^A = I_\nu^A$) и момента количества движения (при $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$) сплошной среды и электромагнитного поля. Общие выражения (10.14) для компонент $T_\nu^{\cdot\alpha}$, $M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha}$ тензоров энергии-импульса и момента количества движения в рассматриваемой модели на основании соотношений (13.52), (14.32) по-прежнему можно записать в виде равенств (13.53), в которых компоненты $T^{\beta\alpha}$ теперь определяются второй формулой (14.18). Отсюда следует, что последние являются контравариантными компонентами тензора энергии-импульса проводящей среды и электромагнитного поля в ССК. Поэтому для рассматриваемой модели уравнение энергии-импульса (10.15), записанное относительно ССК, совпадает с уравнением движения (14.18), а условие баланса на разрыве для потока энергии-импульса (10.15) совпадает с первым динамическим условием на разрыве (14.30). Тождества (10.16), представляющие собой уравнение момента количества движения и условия баланса на разрыве для потока момента количества движения, для рассматриваемой модели являются следствием уравнений (10.15) и симметричности компонент тензора энергии-импульса проводящей среды и электромагнитного поля, определенных вторым равенством из (14.18).

Компоненты тензора энергии-импульса проводящей среды и электромагнитного поля представляют собой сумму компонент двух симметричных тензоров $\boldsymbol{T}_{(C)}$, $\boldsymbol{T}_{(F)}$:

$$T^{\alpha\beta} = T_{(C)}^{\alpha\beta} + T_{(F)}^{\alpha\beta}, \quad T_{(C)}^{\alpha\beta} \equiv P^{\alpha\beta} + P_{(J)}^{\alpha\beta} - \tau^{\alpha\beta}, \qquad (14.34)$$

причем тензор $\boldsymbol{T}_{(F)}$ зависит только от тензора напряженности электромагнитного поля $\boldsymbol{F}$, а тензор $\boldsymbol{T}_{(C)}$ от него совсем не зависит. Поэтому слагаемые $T_{(C)}^{\alpha\beta}$ и $T_{(F)}^{\alpha\beta}$ можно рассматривать как компоненты тензоров энергии-импульса соответственно проводящей сплошной среды и электромагнитного поля. Плотность внутренней энергии, определенная равенством (12.8), для проводящей среды и электромагнитного поля на основании соотношений (14.34), (13.26), (14.15), (13.16), (14.6) представляется в виде суммы

$$\mathscr{E} = T^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = \mathscr{E}_{(C)} + \mathscr{E}_{(F)}, \qquad (14.35)$$

где

$$\mathscr{E}_{(C)} = T^{\alpha\beta}_{(C)} u_\alpha u_\beta = \rho\left(U - \frac{\partial U}{\partial S^\alpha} S^\alpha - \frac{\partial U}{\partial j^\alpha} j^\alpha\right), \quad (14.36)$$

$$\mathscr{E}_{(F)} = T^{\alpha\beta}_{(F)} u_\alpha u_\beta = -\frac{1}{8\pi}(e_\alpha e^\alpha + b_\alpha b^\alpha) = \\ = \frac{1}{8\pi}(E^{*k} E^*_k + B^{*k} B^*_k), \quad (14.37)$$

а e_α, b_α — компоненты 4-векторов напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, определенные равенствами (5.42). Очевидно, слагаемое $\mathscr{E}_{(C)}$ можно рассматривать как плотность внутренней энергии проводящей сплошной среды, а слагаемое $\mathscr{E}_{(F)}$ — как плотность энергии электромагнитного поля в собственной ГСК.

Рассмотрим тождества, вытекающие из инвариантности электромагнитного поля относительно градиентного преобразования. Если функционал δW^* не содержит вариаций δA_α, то как указывалось в § 10 действие для сплошной среды и электромагнитного поля должно быть инвариантно относительно градиентного преобразования, определенного равенствами (10.17), (10.18)[1]). Следствием этой инвариантности являются соотношения (10.25), (10.27), которым должен удовлетворять лагранжиан сплошной среды и электромагнитного поля. Используя выражения (14.14), (5.14) для δI, J^α и антисимметричность компонент $F^{\alpha\beta}$, $\psi^{[\alpha} u^{\nu]}/\sqrt{\gamma}$, легко проверить, что для рассматриваемой модели действие инвариантно относительно градиентного преобразования (10.17), (10.18):

$$\delta_A I = -\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(\frac{1}{4\pi}\nabla_\beta F^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} J^\alpha\right)\nabla_\alpha \delta A \sqrt{-g}\, d^4\xi + \\ + \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{\Sigma}_+}\frac{F^{\alpha\beta}}{4\pi} l_\beta \nabla_\alpha \delta A\, d^3\zeta = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{\Sigma}_+}\left(-\nabla_\nu \frac{\psi^{[\alpha} u^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}\right)\delta A l_\alpha\, d^3\zeta = \\ = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{\Sigma}_c}\left[-\frac{\partial}{\partial\zeta^k}\psi^{[\alpha}\delta^{\nu]}_0 f^{(k)}_\nu\right]^+_-\left(\frac{l_\alpha \delta A}{\sqrt{-g}}\right)_+ d^3\zeta = 0. \quad (14.38)$$

Справедливость последних двух равенств в этом преобразовании вытекает из тождеств (9.37), (13.34) и кинематических соотношений на разрыве для параметров электри-

[1]) См. примечание перед формулой (10.19).

ческого тока ψ^α (14.24). Для рассматриваемой модели лагранжиан, очевидно, имеет вид (10.25) и, как указывалось в § 10, $\partial\Lambda/\partial A_\alpha = -c^{-1}J^\alpha$. При этом соотношение (10.27) тождественно удовлетворяется в силу параметрического представления (5.14) для компонент J^α и кинематических соотношений (14.24) для параметров электрического тока ψ^α. Доказательство этого факта аналогично приведенному доказательству равенства $\delta_A I = 0$.

Получим инвариантное уравнение энергии и тождество для коэффициентов при вариациях в функционале δW^*, вытекающие из вариационного уравнения для действительных процессов. Как и в предыдущем параграфе, легко проверить, что к рассматриваемой модели применима общая теория, развитая в § 11 и 12. В частности, имеют место тождества (12.7) и (12.10). Входящие в них компоненты M^α, определенные равенством (11.48), как и в предыдущей модели, оказываются равными нулю (см. равенство (13.55)). Компоненты W^α, определенные равенством (12.6), на основании соотношений (13.52) и (14.32), параметрических представлений величин S^ν, j^ν и выражений (14.1), (14.34), (14.6), (14.16), (14.17), (14.2) для величин Λ, $T^{\alpha\beta}$, $T^{\alpha\beta}_{(F)}$, T_δ, μ_δ, J^ν можно представить в виде

$$W^\alpha = cT^{\beta\alpha}_{(C)}u_\beta - \frac{\partial U}{\partial S}S^\alpha - \frac{\partial U}{\partial Z}j^\alpha + \\ + c\left(\frac{1}{16\pi}F^{\beta\nu}F_{\beta\nu} + \rho\frac{\partial U}{\partial S^\nu}S^\nu + \rho\frac{\partial U}{\partial j^\nu}j^\nu + \frac{1}{c}J^\nu A_\nu\right)u^\alpha + \\ + \frac{c}{4\pi}F^{\alpha\beta}\nabla_\beta(A_\nu u^\nu) - J^\alpha A_\nu u^\nu. \qquad (14.39)$$

Подставим в тождество (12.7) выражения (14.1), (13.55) (14.39) для Λ, M_α, W^α и учтем, что в силу уравнений (14.2), (14.18), (14.21), (14.34), выражения (14.6) для $T^{\alpha\beta}_{(F)}$ и антисимметричности компонент $F^{\alpha\beta}$ имеем

$$\nabla_\alpha\left[J^\alpha A_\nu u^\nu - \frac{c}{4\pi}F^{\alpha\beta}\nabla_\beta(A_\nu u^\nu)\right] = \nabla_\alpha\nabla_\beta\left[\frac{cF^{\alpha\beta}A_\nu u^\nu}{4\pi}\right] \equiv 0, \qquad (14.40)$$

$$\nabla_\alpha T^{\beta\alpha}_{(C)} = -\nabla_\alpha T^{\beta\alpha}_{(F)}, \quad -cu_\beta\nabla_\alpha T^{\beta\alpha}_{(F)} = F_{\beta\nu}u^\beta j^\nu.$$

Используя затем выражение (14.36) для плотности внутренней энергии среды, уравнение неразрывности (13.2) и определения абсолютной температуры T и собственного времени, окончательно получим соотношение

$$\rho\frac{d}{d\tau}\frac{\mathscr{E}_{(C)}}{\rho} = T^{\beta\alpha}_{(C)}\nabla_\alpha(cu_\beta) - \nabla_\alpha\left(q^\alpha + \frac{\partial U}{\partial Z}j^\alpha\right) + F_{\beta\nu}u^\beta j^\nu, \qquad (14.41)$$

в котором $q^\alpha \equiv TS^\alpha$ — компоненты 4-вектора плотности потока тепла. Соотношение (14.41) можно рассматривать как инвариантное уравнение энергии, представляющее собой релятивистское обобщение уравнения притока тепла для проводящей сплошной среды в электромагнитном поле.

Подставляя в тождество (12.10) выражения (13.52), (14.32) и (13.55) для величин μ^A, $\bar{M}_A$, $\bar{M}_A^\alpha$, $\bar{M}_A^{\alpha\beta}$ и M^α, отвечающие рассматриваемой модели проводящей среды и электромагнитного поля, получим равенство

$$\frac{T}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\Phi_\nu}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi^\nu}{d\tau} + \frac{\Psi_\nu}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\psi^\nu}{d\tau} + \tau_\nu^{\cdot\beta}\partial_\beta\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \qquad (14.42)$$

Оно отличается от аналогичного равенства (13.59) наличием члена с $d\psi^\nu/d\tau$. Преобразуем второе и четвертое слагаемые в левой части соотношения (14.42) при помощи формул (13.60). Третье слагаемое в соотношении (14.42) преобразуем аналогично второму[1]). Учитывая затем параметрические представления (6.29), (6.28), (5.13) для диссипативной функции и компонент 4-векторов плотности внутреннего потока энтропии S^α и плотности электрического тока проводимости j^α, а также выражение (3.36) для компонент 4-тензора скоростей деформаций $e_{\alpha\beta}$, представим равенство (14.42) в окончательном виде:

$$\sigma = -S^\nu\frac{\Phi_\nu}{T} - j^\nu\frac{\Psi_\nu}{T} + \tau^{\alpha\beta}\frac{e_{\alpha\beta}}{T}. \qquad (14.43)$$

Оно отличается от аналогичного соотношения (13.61) для модели теплопроводной вязкой среды наличием члена, содержащего компоненты 4-вектора плотности электрического тока проводимости j^α. Соотношение (14.43) представляет собой тождество, которому должны удовлетворять величины T, Φ_ν, Ψ_ν, $\tau^{\alpha\beta}$, присутствующие в выражении (14.10) для функционала δW^*, соответствующего модели электро- и теплопроводной вязкой среды и электромагнитного поля.

Необратимые процессы. Для завершения построения модели тепло- и электропроводной вязкой среды необходимо задать законы, определяющие независимо от динамических уравнений величины Φ_α, Ψ_α, $\tau^{\alpha\beta}$, входящие в выражение (14.10) для функционала δW^*. Для этого,

---

[1]) Соответствующие равенства получаются из первого соотношения в (13.60) путем замены величин φ^ν, Φ_ν на ψ^ν, Ψ_ν.

как и в предыдущем параграфе, используем общую теорию, изложенную в § 12. Рассматривая величины $-T^{-1}\Phi_\alpha$, $-T^{-1}\Psi_\alpha$, $T^{-1}e_{\alpha\beta}$ как обобщенные термодинамические силы X^B, а величины S^α, j^α, $\tau^{\alpha\beta}$ как сопряженные им обобщенные потоки J_B, легко видеть, что выражение (14.43) для σ имеет вид (12.11). Применяя общие линейные законы (12.21) для необратимых процессов, близких к обратимым, получим кинетические уравнения, которые можно использовать для определения коэффициентов Φ_α, Ψ_α, $\tau^{\alpha\beta}$ в функционале δW^*:

$$\begin{aligned} TS^\nu &= -L^{\nu\alpha}_{(\Phi\Phi)}\Phi_\alpha - L^{\nu\alpha}_{(\Phi\Psi)}\Psi_\alpha + L^{\nu\alpha\beta}_{(\Phi e)}e_{\alpha\beta}, \\ Tj^\nu &= -L^{\nu\alpha}_{(\Psi\Phi)}\Phi_\alpha - L^{\nu\alpha}_{(\Psi\Psi)}\Psi_\alpha + L^{\nu\alpha\beta}_{(\Psi e)}e_{\alpha\beta}, \\ T\tau^{\alpha\beta} &= -L^{\alpha\beta\nu}_{(e\Phi)}\Phi_\nu - L^{\alpha\beta\nu}_{(e\Psi)}\Psi_\nu + L^{\alpha\beta\nu\delta}_{(ee)}e_{\nu\delta}. \end{aligned} \tag{14.44}$$

Входящие в них феноменологические коэффициенты L^A_B, вообще говоря, являются тензорными функциями от определяющих параметров и их производных (например, от величин $\gamma^{\alpha\beta}$, ρ, $T \equiv \partial U/\partial S$, u^α, $F_{\alpha\beta}$), а также от известных параметров $\varkappa_B$. Эти функции задаются дополнительно на основании экспериментальных данных и теоретических гипотез. Указанные коэффициенты L^A_B должны удовлетворять условиям, обеспечивающим неотрицательность диссипативной функции σ, а также равенствам (13.63) и равенствам

$$\begin{aligned} &u_\nu L^{\nu\alpha}_{(\Phi\Psi)} = 0, \quad u_\nu L^{\nu\alpha}_{(\Psi\Phi)} = u_\nu L^{\nu\alpha}_{(\Psi\Psi)} = u_\nu L^{\nu\alpha\beta}_{(\Psi e)} = 0, \\ &u_\alpha L^{\alpha\beta\nu}_{(e\Psi)} = 0, \quad L^{[\alpha\beta]\nu}_{(e\Psi)} = 0, \end{aligned} \tag{14.45}$$

вытекающим из тождеств $u_\nu S^\nu = u_\nu j^\nu = u_\alpha \tau^{\alpha\beta} = \tau^{[\alpha\beta]} = 0$. Обобщенные термодинамические силы $-T^{-1}\Phi$, $-T^{-1}\Psi$, $T^{-1}e_{\alpha\beta}$ связаны между собой зависимостями (13.64) и зависимостью $T^{-1}\Psi_\alpha u^\alpha = 0$. Поэтому коэффициенты L^A_B определены не однозначно. При этом, согласно общей теории необратимых процессов [9—12], существует такое представление коэффициентов L^A_B, в котором они удовлетворяют соотношениям Онсагера — Казимира (12.23).

В дальнейшем при рассмотрении необратимых процессов ограничимся простейшим случаем, когда уравнения (14.44) имеют вид

$$q^\nu \equiv TS^\nu = \chi\Phi^\nu, \quad j^\alpha = \gamma\Psi^\alpha, \quad \tau^{\alpha\beta} = \lambda\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\delta\nu}e_{\delta\nu} + 2\mu e^{\alpha\beta}. \tag{14.46}$$

Входящие в них множители χ, γ, λ, μ, вообще говоря, являются функциями от определяющих параметров и их производных (например, от величин ρ, $T=\partial U/\partial S$), которые должны задаваться дополнительно. Законы (14.46) определяют величины Φ_ν, Ψ_ν, $\tau^{\alpha\beta}$, причем так, что выполняются условия (13.16), (14.11).

Исключая при помощи второго равенства (14.46) компоненты Ψ_ν из динамического уравнения (14.20), получим соотношение

$$j_\nu=\gamma\left(F_{\nu\alpha}u^\alpha-\gamma_\nu^\beta\nabla_\beta\frac{\partial U}{\partial Z}-\frac{\partial U}{\partial Z}u^\beta\nabla_\beta u_\nu+cu^\beta\nabla_{[\beta\rho}\frac{\partial U}{\partial j^\delta}\gamma_{\nu]}^\delta\right). \quad (14.47)$$

В собственной ГСК при $\partial U/\partial Z\equiv\partial U/\partial j^\delta\equiv 0$ оно совпадает с законом электропроводности Ома и, следовательно, является его релятивистским обобщением. Множитель γ называется *коэффициентом проводимости среды*. Физический смысл первого и третьего законов (14.46) остается тем же, что и в § 13; в частности, для компонент 4-вектора плотности потока тепла справедливо выражение (13.66).

Используя уравнения (14.46), представим выражение (14.43) для диссипативной функции σ в виде[1])

$$\sigma=-\frac{1}{\chi}S_\nu S^\nu-\frac{1}{T\gamma}j_\alpha j^\alpha+\frac{\lambda}{T}(e_\nu^{\cdot\nu})^2+\frac{2\mu}{T}e^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}. \quad (14.48)$$

Условие неотрицательности диссипативной функции σ (см. § 6) накладывает ограничения на коэффициенты χ, γ, λ, μ, присутствующие в уравнениях (14.46):

$$\chi\geqslant 0,\quad \gamma\geqslant 0,\quad \mu\geqslant 0,\quad 3\lambda+2\mu\geqslant 0. \quad (14.49)$$

Если среда идеально проводящая ($\gamma=\infty$) или абсолютно непроводящая ($\gamma=0$), то из второго равенства (14.46) получим соответственно $\Psi_\nu=0$ или $j^\nu=0$. Эти случаи полностью аналогичны случаям среды с бесконечной и нулевой теплопроводностью, рассмотренным в § 13. В частности, для непроводящей среды $\psi^a=\psi^a(\xi^b)$ и $\delta\psi^a\equiv 0$. В обоих случаях в выражениях (14.43) и (14.10) для σ и δW^* члены, содержащие величины Ψ_ν, обращаются в нуль, причем для идеально проводящей среды динамическое уравнение (14.20) при $\partial U/\partial Z\equiv\partial U/\partial j^\alpha=0$ принимает известный вид

$$F_{\alpha\beta}u^\alpha\equiv e_\beta=0.$$

---

[1]) См. примечание перед формулой (13.67).

Если, кроме того, $\chi = \infty$ или $\chi = 0$ и $\lambda = \mu = 0$ (см. § 13), то $\sigma \equiv 0$, $\delta W^* \equiv 0$, и, следовательно, все процессы обратимы, а из исходного вариационного уравнения (14.9) вытекает принцип экстремальности действия $\delta I = 0$ при $\delta W = 0$.

Отметим, что, как и в предыдущем параграфе, после построения рассматриваемой модели использование параметров φ, φ^ν, ψ^ν не является необходимым.

Специальные модели. Модель, для которой лагранжиан Λ и функционал δW^* имеют вид (14.1), (14.10), является моделью нелинейно-упругой электро- и теплопроводной вязкой среды и электромагнитного поля. Она содержит в себе рассмотренную в предыдущем параграфе модель нелинейно-упругой теплопроводной вязкой среды как частный случай, для которого $F_{\alpha\beta} \equiv J^\nu \equiv 0$, $\partial U/\partial Z \equiv \equiv \partial U/\partial j^\alpha \equiv 0$. В другом предельном случае, когда $\rho U \equiv \equiv J^\nu \equiv 0$, получается модель электромагнитного поля в вакууме, для которой

$$\Lambda_{(F)} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad \delta W^* = 0, \quad F_{\alpha\beta} \equiv \nabla_{[\alpha}A_{\beta]},$$

а динамические уравнения и условия на разрывах имеют вид (14.21) (при $J^\nu \equiv 0$) и (14.25), (14.31). При этом компоненты тензора энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ совпадают с определенными вторым соотношением (14.6) компонентами $T^{\alpha\beta}_{(F)}$, которые называются *компонентами тензора энергии-импульса электромагнитного поля в вакууме.*

Если $j^\alpha \equiv 0$, то среда называется *абсолютно непроводящей.* В этом случае параметры электрического тока ψ^α исключаются из числа варьируемых функций и пропадают динамические уравнения и условия на разрывах, получаемые при варьировании ψ^α. Удельная плотность электрического заряда Z при этом остается постоянной вдоль мировых линий среды и является неварьируемой функцией, определяющейся начальными условиями. Если среда еще нетеплопроводная и невязкая, то из числа варьируемых функций исключаются также параметры φ^α, φ, после чего функционал δW^* становится тождественно равным нулю. Удельная плотность энтропии S при этом также остается постоянной вдоль мировых линий среды (для непрерывных процессов) и является неварьируемой функцией, определяющейся начальными условиями и условиями на разрывах.

Модель электро- и теплопроводного вязкого газа (или жидкости) и электромагнитного поля получается как специальный случай рассмотренной модели, когда функция U в выражении (14.1) для лагранжиана имеет вид

$$U = U(\rho,\ S,\ Z,\ |S|^2,\ |j|^2,\ -(Sj),\ \varkappa_B), \qquad (14.50)$$

где $|S|^2 = \gamma_{\alpha\beta} S^\alpha S^\beta$, $|j|^2 = \gamma_{\alpha\beta} j^\alpha j^\beta$, $-(Sj) = \gamma_{\alpha\beta} S^\alpha j^\beta$ и все неварьируемые параметры $\varkappa_B(\xi^\alpha)$ — скаляры. Для ультрарелятивистского проводящего газа след тензора энергии-импульса равен нулю [17], и на основании соотношений (14.6), (13.26), (14.15), (14.46) и (14.50) имеем

$$T^{\cdot\alpha}_{\alpha} \equiv T_{(F)}{}^{\cdot\alpha}_{\alpha} + P^{\cdot\alpha}_{\alpha} + P_{(J)}{}^{\cdot\alpha}_{\alpha} - \tau^{\cdot\alpha}_{\alpha} \equiv$$
$$\equiv \rho U - 3\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} - 6\rho\left[\frac{\partial U}{\partial |S|^2}|S|^2 + \frac{\partial U}{\partial |j|^2}|j|^2 + \frac{\partial U}{\partial (Sj)}(Sj)\right] -$$
$$- (3\lambda + 2\mu)\, e^{\cdot\nu}_{\nu\cdot} \equiv 0.$$

Отсюда находим, что для электро- и теплопроводного вязкого ультрарелятивистского газа

$$3\lambda + 2\mu = 0,\ U = C\left(S,\ Z,\ \frac{|S|^2}{\rho^2},\ \frac{|j|^2}{\rho^2},\ -\frac{(Sj)}{\rho^2},\ \varkappa_B\right)\sqrt[3]{\rho}. \qquad (14.51)$$

Рассмотрим более подробно модели газа (не обязательно ультрарелятивистского), для которых функция U не зависит от аргументов Z, $|S|^2$, $|j|^2$, $-(Sj)$. Тогда она совпадает с удельной плотностью внутренней энергии газа, а полученные выше выражения для компонент тензора энергии-импульса газа и электромагнитного поля и компонент 4-вектора плотности электрического тока проводимости принимают известный вид

$$T^{\alpha\beta} = \rho U u^\alpha u^\beta + p\gamma^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} u^{\langle\alpha} q^{\beta\rangle} - \tau^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{(F)},$$
$$j^\alpha = \gamma F^{\alpha\beta} u_\beta. \qquad (14.52)$$

Входящие сюда величины p, q^β, $\tau^{\alpha\beta}$ по-прежнему определяются обычными равенствами (13.71). Скаляр p называется *давлением газа*, причем для ультрарелятивистского газа справедлив известный закон (13.72). Удельная плотность свободной энергии газа F определяется равенством (13.73) и удовлетворяет соотношениям (13.74). Для совершенного газа функции U, F задаются формулами (13.75). В этом случае имеют место известные уравнения состояния совершенного газа (13.76), причем для ультрарелятивистского газа $C_V = 3R$, $U_0 = 0$.

Если функция U в выражении (14.1) для лагранжиана не зависит от аргументов S^α, Z, j^α, то рассмотренную общую модель нелинейно-упругой электро- и теплопроводной вязкой среды и электромагнитного поля можно построить, не вводя параметров переноса и производства энтропии φ^ν, φ и параметров электрического тока ψ^ν [20—23]. В изложенной выше процедуре построения модели для этого следует: взять в качестве определяющих параметров вместо функций (14.4) функции $x^\nu(\xi^\nu)$, $S(\xi^\nu)$ и $A_\alpha(\xi^\nu)$, опустить в выражении (14.1) для лагранжиана член $c^{-1}J^\alpha A_\alpha$ и переопределить функционал δW^*

$$\delta W^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\Big[\rho T\,\delta S + \Big(\tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\,TS^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}\Big)\nabla_\beta\,\delta x_\alpha - \\ - \frac{1}{c}\,J^\alpha\delta A_\alpha\Big]\sqrt{-g}\,d^4\xi.$$

При таком подходе, однако, невозможно получить на разрыве второе и третье условия (14.30), которые должны теперь задаваться на основе дополнительных гипотез.

Переход к ньютоновской механике. Рассмотрим переход к ньютоновской механике в случае, когда все параметры $\varkappa_B$ ортогональны 4-скорости среды и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial S^\alpha}u^\alpha = \frac{\partial U}{\partial j^\alpha}u^\alpha = 0,\quad U = U(\rho,\ \gamma_{ab},\ S,\ S^a,\ Z,\ j^a,\ \varkappa_B),$$

$$T^{\alpha\beta} = \mathscr{E}_{(C)}u^\alpha u^\beta + \frac{1}{c}\Big(\frac{\partial U}{\partial S}S^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle} + \frac{\partial U}{\partial Z}j^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}\Big) - p^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{(F)}, \quad (14.53)$$

$$\mathscr{E}_{(C)} = \rho\Big(U - \frac{\partial U}{\partial S^a}S^a - \frac{\partial U}{\partial j^a}j^a\Big),$$

$$p^{\alpha\beta} \equiv -\rho\Big(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{\partial U}{\partial S^a}S^a + \frac{\partial U}{\partial j^a}j^a\Big)\gamma^{\alpha\beta} + \rho\frac{\partial U}{\partial\gamma_{ab}}\gamma_a^{\langle\alpha}\gamma_b^{\beta\rangle} + \tau^{\alpha\beta}.$$

Так как $u_\beta S^\beta = u_\beta j^\beta = u_\beta p^{\alpha\beta} = 0$, то в любой ГСК x^ν выполняются равенства типа (13.81)

$$S^0 = \frac{v_k}{c}S^k,\quad j^0 = \frac{v_k}{c}j^k,\quad p^{\nu 0} = \frac{v_k}{c}p^{\nu k},\quad p^{00} = \frac{v_k v_q}{c^2}p^{kq}. \quad (14.54)$$

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим в пространстве событий произвольную точку x^* и выберем собственную для нее ГСК $x^{*\nu}$ так, чтобы в трехмерном физическом пространстве, соответствующем ГСК наблюдателя x^ν, оси x^{*k} были параллельны осям x^k. Тогда относительно ГСК $x^{*\nu}$ уравнения (14.18)—(14.21), (5.34) и (14.46) в рассматриваемой точке x^* с учетом выражений

(14.53), (14.54) и (5.5), (5.38) примут следующий вид:

$$\frac{\partial \mathscr{E}_{(C)}}{\partial t^*} + \mathscr{E}_{(C)}\,(\partial_k v^k)^* + \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\,S^k + \frac{\partial U}{\partial Z}\,j^k\right)^* \left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^* =$$

$$= p^{*kq}\,(\partial_q v_k)^* - \partial_k^* \left(\frac{\partial U}{\partial S}\,S^k + \frac{\partial U}{\partial Z}\,j^k\right)^* + j^{*k} E_k^*,$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\mathscr{E}_{(C)}\left(\frac{\partial v^k}{\partial t}\right)^* - p^{*kq}\left(\frac{\partial v_q}{\partial t}\right)^* + \frac{\partial}{\partial t^*}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\,S^k + \frac{\partial U}{\partial Z}\,j^k\right)^*\right] = \tag{14.55}$$

$$= \partial_q^* p^{*kq} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\,S^{\langle q} + \frac{\partial U}{\partial Z}\,j^{\langle q}\right)^* (\partial_q v^{k\rangle})^* +$$

$$+ \rho Z E_k^* + \frac{1}{c}\,e^{kpq} j^{*p} B_q^*;$$

$$p^{*kq} = -\rho\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial S^a}\,S^a + \frac{\partial U}{\partial j^a}\,j^a\right)\delta^{kq} +$$

$$+ \rho\,\frac{\partial U}{\partial \gamma_{ab}}\,x_a^{*\langle k} x_b^{*q\rangle} + \tau^{*kq}; \tag{14.56}$$

$$\Phi_k^* = \partial_k^* \frac{\partial U}{\partial S} - \xi_k^{*a}\frac{\partial}{\partial t^*}\rho\frac{\partial U}{\partial S^a} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial S}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^*, \quad \frac{\partial U}{\partial S} = T; \tag{14.57}$$

$$\Psi_k^* = -E_k^* + \partial_k^* \frac{\partial U}{\partial Z} - \xi_k^{*a}\frac{\partial}{\partial t^*}\rho\frac{\partial U}{\partial j^a} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial Z}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^*; \tag{14.58}$$

$$(\partial_k B^k)^* = 0, \qquad e^{kpq}\,(\partial_p E_q)^* = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B^k}{\partial t}\right)^*,$$

$$B^k \equiv B_k,$$

$$(\partial_k E^k)^* = 4\pi\rho Z, \quad e^{kpq}\,(\partial_p B_q)^* = \frac{4\pi}{c}\,j^{*k} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E^k}{\partial t}\right)^*, \tag{14.59}$$

$$E^k \equiv E_k;$$

$$q^{*k} \equiv TS^{*k} = -\chi\Phi_k^*, \quad j^{*k} = -\gamma\Psi_k^*,$$

$$\tau^{*kq} = \lambda\delta^{kq}\delta^{pn}e_{pn}^* + 2\mu e_{kq}^*. \tag{14.60}$$

Уравнение неразрывности (13.2) по-прежнему представляется в форме (13.82). При записи уравнений (14.55)—(14.59) для производных от величин S^k, j^k, p^{kq} использовались равенства, аналогичные равенствам (13.87). Кроме того, при выводе уравнений (14.55) из уравнений (14.18) слагаемые $\left(\partial_\nu T_{(F)}^{\mu\nu}\right)^*$ были преобразованы с учетом выражений (14.6) для компонент $T_{(F)}^{\mu\nu}$ и уравнений Максвелла (14.59), а при выводе соотношений (14.57) и (14.58) использовалось тождество (13.88). Для компонент γ_{ab}, S^a по-прежнему справедливы выражения (13.89), а для компонент j^a — аналогичные им соотношения

$$j^a = \xi_\nu^{*a} j^{*\nu} = \xi_k^{*a} j^{*k}. \tag{14.61}$$

Как и выше, представим плотность энергии среды $\mathscr{E}_{(C)}$ в виде (13.90).

В отличие от модели, рассмотренной в предыдущем параграфе, уравнения, описывающие проводящую среду и электромагнитное поле, в собственной ГСК содержат наряду с членами, не зависящими от c и пропорциональными c^{-2}, также и члены, пропорциональные c^{-1}. Как известно [17], преобразования Лоренца для пространственных координат и времени после пренебрежения малыми величинами, пропорциональными c^{-2}, переходят в преобразования Галилея, описывающие свойства пространства и времени в ньютоновской механике. Поэтому для перехода к ньютоновской механике, очевидно, достаточно в уравнениях (14.55)—(14.60) опустить только слагаемые, пропорциональные c^{-2}, и затем перейти от ГСК $x^{*\nu}$, собственной для рассматриваемой точки x^*, к ГСК x^ν, общей для всех точек x^*, пренебрегая при преобразованиях тензорных компонент малыми величинами, пропорциональными c^{-2}, и сохраняя члены, пропорциональные c^{-1}. Если конкретное выражение для U° зависит от c, то в нем также надо сохранить члены, пропорциональные c^{-1}, опуская при этом величины более высокого порядка малости. При этом, например, может исчезнуть зависимость U° от компонент S^a или j^a. Если же число аргументов функции U° не изменяется, то в результате получим следующие уравнения, описывающие рассматриваемую среду в рамках ньютоновской механики и инвариантные относительно преобразования Галилея с точностью до членов, пропорциональных c^{-2}:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{\mathscr{E}^\circ}{\rho}\right)=\partial_q\left(p^{kq}v_k-\frac{\partial U^\circ}{\partial S}S^q-\frac{\partial U^\circ}{\partial Z}j^q\right)+(\rho Z v^k+j^k)E_k,$$

$$\rho\frac{dv^k}{dt}=\partial_q p^{kq}+\rho Z E^k+\frac{1}{c}e^{kpq}(\rho Z v_p+j_p)B_q,\quad j_p\equiv j^p,$$

$$\mathscr{E}^\circ=\rho\left(U^\circ-\frac{\partial U^\bullet}{\partial S^a}S^a-\frac{\partial U^\circ}{\partial j^a}j^a\right),$$

$$p^{kq}=-\rho\left(\rho\frac{\partial U^\bullet}{\partial\rho}+\frac{\partial U^\circ}{\partial S^a}S^a+\frac{\partial U^\bullet}{\partial j^a}j^a\right)\delta^{kq}+\rho\frac{\partial U^\bullet}{\partial\gamma_{ab}}\tilde{x}_a^{\langle k}\tilde{x}_b^{q\rangle}+\tau^{kq},$$

$$j^k=\gamma\left(E^k+\frac{1}{c}e^{kqp}v_q B_p-\partial_k\frac{\partial U^\circ}{\partial Z}+\tilde{\xi}_k^a\frac{d}{dt}\rho\frac{\partial U^\bullet}{\partial j^a}\right),$$

$$\partial_k B^k=0,\quad e^{kpq}\partial_p E_q=-\frac{1}{c}\frac{\partial B^k}{\partial t},\quad B^k\equiv B_k,$$

$$\partial_k E^k=4\pi\rho Z,\quad e^{kpq}\partial_p B_q=\frac{4\pi}{c}(\rho Z v^k+j^k)+\frac{1}{c}\frac{\partial E^k}{\partial t},\quad E^k\equiv E_k.$$

Кроме того, по-прежнему будут справедливы соотношения (13.91), (13.93), (13.94), а также равенство $j^a = \hat{\xi}^a_k j^k$. В полученных уравнениях через S^k, q^k, j^k, p^{kq}, τ^{kq} обозначены компоненты, получающиеся при переходе к ГСК x^ν из компонент S^{*k}, q^{*k}, j^{*k}, p^{*kq}, τ^{*kq} в результате преобразований, в которых опущены малые величины, пропорциональные c^{-2}. Если ГСК $x^{*\nu}$ выбрана указанным выше специальным образом, то из соотношений $S^{*0} = q^{*0} = j^{*0} = p^{*0\nu} = \tau^{*0\nu} = 0$ вытекают равенства $S^k = S^{*k}$, $q^k = q^{*k}$, $j^k = j^{*k}$, $p^{kq} = p^{*kq}$, $\tau^{kq} = \tau^{*kq}$.

§ 15. Поляризующаяся и намагничивающаяся среда

Определяющие параметры. Рассмотрим модель системы, состоящей из проводящей, поляризующейся и намагничивающейся сплошной среды и электромагнитного поля, с лагранжианом [1])

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J^\alpha A_\alpha - \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} + \frac{1}{\Gamma}\omega^\nu m_\nu - \rho U(\rho, S, \gamma_{\alpha\beta}, p_\nu, m_\nu, \varkappa_B). \quad (15.1)$$

Здесь $M^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора поляризации и намагниченности среды; p_ν, m_ν — компоненты 4-векторов поляризации и намагниченности среды; ω^ν — компоненты 4-вектора угловой скорости среды. Эти параметры были определены во второй главе. Остальные аргументы лагранжиана встречались в § 13 и 14. Слагаемое $\Gamma^{-1}\omega^\nu m_\nu$ включено в лагранжиан для описания гиромагнитных свойств среды, т. е. внутреннего момента количества движения, связанного с намагниченностью, по аналогии с нерелятивистской механикой [24] [2]). Коэффициент Γ может зависеть от определяющих параметров и их производных, например, от величин ρ и $T \equiv \partial U/\partial S$. Для упрощения последующих выкладок ограничимся случаем $\Gamma = \text{const}$.

---

[1]) Здесь предполагается, что компоненты $F_{\alpha\beta}$, J^α выражены через величины A_α, ψ^α при помощи формул (14.2), (5.14). Кроме того, для сокращения последующих выкладок рассматривается частный случай, когда функция U не зависит от Z, S^α, j^α. Возможно также другое определение лагранжиана [20], при котором компоненты $F_{\alpha\beta}$, A_α варьируются независимо и члены, содержащие величины J^α, присутствуют не в лагранжиане, а в функционале δW^*.

[2]) Другие подходы к построению моделей сред с внутренним моментом количества движения развиты в [25—28].

По сравнению с лагранжианом, рассмотренным в § 14, выражение (15.1) содержит одно дополнительное слагаемое, зависящее от компонент тензора напряженности электромагнитного поля. Принятая зависимость Λ от $F_{\alpha\beta}$ определяется требованием, чтобы уравнение Эйлера при вариациях δA_α имело бы по аналогии с уравнением (14.21) вид

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c}\left(J^\alpha + J^\alpha_{(in)}\right), \quad \frac{1}{c} J^\alpha_{(in)} \equiv \nabla_\beta M^{\alpha\beta}.$$

При этом используется также дополнительное условие о независимости лагранжиана от компонент A_α при $J^\alpha \equiv 0$ и от производных $\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}$.

Напомним некоторые свойства аргументов лагранжиана (15.1). Для компонент $F_{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, ω^α имеют место выражения (см. § 3 и 5)

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_{[\alpha} A_{\beta]} \equiv \partial_{[\alpha} A_{\beta]}, \quad M^{\alpha\beta} = u^{[\alpha} p^{\beta]} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\gamma m_\delta, \tag{15.2}$$

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta \omega_{\gamma\delta} = \frac{c}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta \nabla_\gamma u_\delta = \frac{c}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta \partial_\gamma u_\delta, \tag{15.3}$$

причем аргументы p_α, m_α по определению удовлетворяют связям

$$u^\alpha p_\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} p_0 = 0, \quad u^\alpha m_\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} m_0 = 0. \tag{15.4}$$

Свойства остальных аргументов были рассмотрены в § 13 и 14. Все аргументы лагранжиана (15.1) выражаются через функции координат ξ^ν

$$x^\nu, \quad \varphi^\alpha, \quad \varphi, \quad \psi^\alpha, \quad A_\alpha, \quad p_\nu, \quad m_\nu \tag{15.5}$$

и их производные. Поэтому функции (15.5) удобно выбрать в качестве определяющих параметров $\mu^A(\xi^\nu)$.

Вычислим вариации аргументов функции $\Lambda\sqrt{-g}$, используя полученные во второй главе их выражения через определяющие параметры (15.5).

1. *Вариации величин* $M^{\alpha\beta}\sqrt{-g}$. На основании выражений (15.2), (1.27) для $M^{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ и формул (7.13), (7.15) для вариаций $\delta\sqrt{-g}$, δu^α, δu_α имеем

$$\delta\left(M^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\right) = \delta\left(\sqrt{-g}\, u^{[\alpha} p^{\beta]} + e^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\gamma m_\delta\right) =$$
$$= \left(M^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_\delta \delta x_\gamma + u^{[\alpha} g^{\beta]\gamma} \delta p_\gamma + \varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma} u_\delta \delta m_\gamma\right)\sqrt{-g}, \tag{15.6}$$

где введено обозначение

$$M^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv -u^{[\alpha}p^{\beta]}\gamma^{\gamma\delta} - u^{[\alpha}g^{\beta]\langle\gamma}p^{\delta\rangle} - \\ - \varepsilon^{\alpha\beta\varepsilon\zeta}u_\varepsilon m_\zeta u^\gamma u^\delta - \varepsilon^{\alpha\beta\varepsilon\langle\gamma}u^{\delta\rangle}m_\varepsilon. \quad (15.7)$$

Используя соотношения (15.6), (14.5), найдем также вариацию третьего члена в выражении (15.1) для лагранжиана, умноженного на $\sqrt{-g}$:

$$\delta\left(\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\right) = \left(-M^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta A_\alpha + P^{\gamma\delta}_{(M)}\nabla_\delta\delta x_\gamma - \right. \\ \left. - F^{\gamma\alpha}u_\alpha\delta p_\gamma - \frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\delta\alpha\beta}u_\delta F_{\alpha\beta}\delta m_\gamma\right)\sqrt{-g}. \quad (15.8)$$

Здесь

$$P^{\gamma\delta}_{(M)} \equiv \frac{1}{2}M^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}. \quad (15.9)$$

2. *Вариация произведения* $\Gamma^{-1}\omega^\gamma m_\gamma\sqrt{-g}$. На основе выражений (15.3), (1.27) для ω^α, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ и формул (7.15) для вариаций δu_α имеем

$$\delta\left(\frac{1}{\Gamma}\omega^\alpha m_\alpha\sqrt{-g}\right) = \delta\left(\frac{c}{2\Gamma}e^{\alpha\beta\gamma\delta}m_\alpha u_\beta\partial_\gamma u_\delta\right) = \\ = \left[\frac{c}{2\Gamma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}m_\alpha(\delta u_\beta\nabla_\gamma u_\delta + u_\beta\nabla_\gamma\delta u_\delta) + \frac{\omega^\alpha}{\Gamma}\delta m_\alpha\right]\sqrt{-g} = \\ = \left[-P^{\alpha\beta}_{(\omega)}\nabla_\beta\delta x_\alpha - \nabla_\gamma(P^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta\delta x_\alpha) + \frac{\omega^\gamma}{\Gamma}\delta m_\gamma\right]\sqrt{-g}. \quad (15.10)$$

Здесь введены обозначения

$$P^{\alpha\beta}_{(\omega)} \equiv \frac{2}{\Gamma}\omega^\gamma m_\gamma u^\alpha u^\beta + \frac{c}{2\Gamma}\varepsilon^{\gamma\delta\varepsilon\langle\alpha}m_\gamma(u^{\beta\rangle}\nabla_\varepsilon u_\delta - u_\delta\nabla_\varepsilon u^{\beta\rangle}) - \nabla_\gamma P^{\alpha\beta\gamma}, \\ P^{\alpha\beta\gamma} = \frac{c}{4\Gamma}\varepsilon^{\varepsilon\delta\alpha\langle\beta}m_\varepsilon u_\delta u^{\gamma\rangle}. \quad (15.11)$$

Вариации первых двух членов в выражении для функции $\Lambda\sqrt{-g}$, соответствующей рассматриваемой модели, а также вариации ее аргументов ρ, S, $\gamma_{\alpha\beta}$, $\rho\sqrt{-g}$ определяются по формулам, полученным в § 13 и 14.

Вариационное уравнение. Исходное вариационное уравнение имеет вид

$$\delta I + \delta W^* + \delta W = 0, \quad I \equiv \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\Lambda\sqrt{-g}\,d^4\xi. \quad (15.12)$$

Функционал δW^* зададим следующим образом:

$$\delta W^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(T\frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}} + \Phi_\alpha\frac{\delta\varphi^\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \Psi_\alpha\frac{\delta\psi^\alpha}{\sqrt{\gamma}} + P^\alpha\delta p_\alpha + \right. \\ \left. + M^\alpha\delta m_\alpha + \tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta\delta x_\alpha\right)\sqrt{-g}\,d^4\xi, \quad (15.13)$$

где

$$P^\alpha u_\alpha = 0, \quad M^\alpha u_\alpha = 0, \tag{15.14}$$

а коэффициенты Φ_α, Ψ_α, $\tau^{\alpha\beta}$ удовлетворяют равенствам (13.16), (14.11). Условия (15.14) не являются ограничением на вид функционала δW^*. Действительно, используя вытекающие из связей (15.4) соотношения

$$\delta(u^\alpha p_\alpha) = u^\alpha \delta p_\alpha = 0, \quad \delta(u^\alpha m_\alpha) = u^\alpha \delta m_\alpha = 0,$$

можно, например, провести тождественное преобразование члена $P^\alpha \delta p_\alpha$:

$$P^\alpha \delta p_\alpha \equiv (P^\alpha - u^\alpha u_\nu P^\nu)\,\delta p_\alpha \equiv -\gamma^\alpha_\nu P^\nu \delta p_\alpha.$$

В результате коэффициенты при вариациях δp_α будут удовлетворять первому равенству (15.14). Аналогичное рассуждение справедливо для члена $M^\alpha \delta m_\alpha$. Смысл условий (13.16), (14.11) тот же, что и в § 13 и 14, но при обосновании последнего равенства (13.16) наряду с соотношениями (13.18), (14.12) следует учесть, что вариации $\delta_\varepsilon p_\alpha$, $\delta_\varepsilon m_\alpha$, соответствующие бесконечно малому преобразованию Пуанкаре ГСК наблюдателя, равны нулю:

$$\delta_\varepsilon p_\alpha = 0, \quad \delta_\varepsilon m_\alpha = 0. \tag{15.15}$$

Для рассматриваемой модели все вариации в вариационном уравнении (15.12) выражаются через вариации определяющих параметров (15.5)

$$\delta x^\nu, \quad \delta\varphi^\alpha, \quad \delta\varphi, \quad \delta\psi^\alpha, \quad \delta p_\alpha, \quad \delta m_\alpha, \quad \delta A_\alpha \tag{15.16}$$

и производные от них по координатам. Система вариаций (15.16) не является независимой, так как параметры φ^α, ψ^α, p_α, m_α должны удовлетворять связям (13.5), (14.3), (15.4). Учитывая их методом неопределенных множителей Лагранжа, к левой части вариационного уравнения (15.12) следует добавить функционал

$$\delta R \equiv \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_\tau} [\lambda_{(\varphi)} \delta(u_\alpha \varphi^\alpha) + \lambda_{(\psi)} \delta(u_\alpha \psi^\alpha) + \lambda_{(p)} \delta(u^\alpha p_\alpha) + \lambda_{(m)} \delta(u^\alpha m_\alpha)] \sqrt{-g}\, d^4\xi. \tag{15.17}$$

В результате исходное вариационное уравнение примет вид

$$\delta I + \delta W^* + \delta W + \delta R = 0. \tag{15.18}$$

Динамические уравнения для непрерывных процессов. Вычислим вариацию действия для рассматриваемой модели сплошной среды, используя формулы (15.2), (15.8), (15.10), а также выкладки, проведенные в § 13 и 14. В результате найдем, что

$$\delta I = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}c} \Big\{\Big[\nabla_\beta\big(T^{\alpha\beta}_{(F)} + P^{\alpha\beta}_{(M)} + P^{\alpha\beta}_{(\omega)} + P^{\alpha\beta}\big)\Big]\delta x_\alpha -$$

$$-\left[\gamma^\alpha_\nu \nabla_\beta \gamma^\nu_\alpha \frac{\partial U}{\partial S}\right]\frac{\delta\varphi^\nu}{\sqrt{\gamma}} - \frac{\partial U}{\partial S}\frac{\delta\varphi}{\sqrt{\gamma}} + F_{\alpha\nu}u^\alpha\frac{\delta\psi^\nu}{\sqrt{\gamma}} -$$

$$-\left[\nabla_\beta \frac{H^{\alpha\beta}}{4\pi} + \frac{1}{c}J^\alpha\right]\delta A_\alpha + \left[F^{\nu\alpha}u_\alpha - \rho\frac{\partial U}{\partial p_\nu}\right]\delta p_\nu +$$

$$+\left[\frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\delta\alpha\beta}u_\delta F_{\alpha\beta} + \frac{\omega^\nu}{\Gamma} - \rho\frac{\partial U}{\partial m_\nu}\right]\delta m_\nu\Big\}\sqrt{-g}\,d^4\xi -$$

$$-\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_\pm}\Big\{\big[T^{\alpha\beta}_{(F)} + P^{\alpha\beta}_{(M)} + P^{\alpha\beta}_{(\omega)} + P^{\alpha\beta}\big]\delta x_\alpha + P^{\alpha\nu\beta}\nabla_\nu\delta x_\alpha +$$

$$+\frac{\partial U}{\partial S}u_\nu\frac{u^{[\beta}\delta\varphi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} + A_\nu\frac{u^{[\beta}\delta\psi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} - \frac{H^{\alpha\beta}}{4\pi}\delta A_\alpha\Big\}l_\beta\,d^3\zeta. \qquad (15.19)$$

Здесь $H^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора индукции электромагнитного поля:

$$H^{\alpha\beta} \equiv F^{\alpha\beta} + 4\pi M^{\alpha\beta}. \qquad (15.20)$$

Входящие в выражение для δI компоненты $P^{\alpha\beta}$ по-прежнему определяются равенством (13.26), в котором теперь для функции U надо использовать ее выражение в рассматриваемой модели.

Подставляя в вариационное уравнение (15.18) выражения (15.19), (15.13) и (15.17) для соответственно δI, δW^* и δR, вычисляя множители Лагранжа[1]) и используя тождества (13.29), найдем систему динамических уравнений

---

[1]) Для этого надо умножить соответствующие уравнения Эйлера на u^α или u_α. В результате получим

$$\lambda_{(\varphi)} = \lambda_{(\psi)} = 0, \quad \lambda_{(p)} = \rho u_\nu\,\partial U/\partial p_\nu, \quad \lambda_{(m)} = \rho u_\nu\,\partial U/\partial m_\nu.$$

для непрерывных процессов и функционал δW:

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \quad T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(F)} + P^{\alpha\beta}_{(M)} + P^{\alpha\beta}_{(\omega)} + P^{\alpha\beta} - \tau^{\alpha\beta}; \tag{15.21}$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad -\gamma^\beta_\nu \nabla_\beta \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial U}{\partial S} u^\beta \nabla_\beta u_\nu = \Phi_\nu; \tag{15.22}$$

$$F_{\nu\alpha} u^\alpha = \Psi_\nu, \quad \nabla_\beta H^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\alpha; \tag{15.23}$$

$$\begin{aligned} &-\rho\gamma^\nu_\alpha \frac{\partial U}{\partial p_\alpha} - F^{\nu\alpha} u_\alpha = P^\nu, \\ &-\rho\gamma^\nu_\alpha \frac{\partial U}{\partial m_\alpha} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\delta\alpha\beta} u_\delta F_{\alpha\beta} - \frac{\omega^\nu}{\Gamma} = M^\nu; \end{aligned} \tag{15.24}$$

$$\delta W = \frac{1}{c} \int\limits_{\partial\hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm} \left\{ T^{\alpha\beta} \delta x_\alpha + P^{\alpha\gamma\beta} \nabla_\gamma \delta x_\alpha + T u_\nu \frac{u^{[\beta} \delta\varphi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} + \right.$$

$$\left. + A_\nu \frac{u^{[\beta} \delta\psi^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} - \frac{H^{\alpha\beta}}{4\pi} \delta A_\alpha \right\} l_\beta d^3\zeta. \tag{15.25}$$

Первое уравнение (15.21) с учетом второго равенства (15.21) представляет собой уравнение движения проводящей, поляризующейся и намагничивающейся среды с гиромагнитными свойствами в электромагнитном поле. Ниже будет показано, что оно совпадает с уравнением энергии-импульса, вытекающим из теоремы Нётер, причем компоненты $T^{\alpha\beta}$ можно интерпретировать как компоненты тензора энергии-импульса рассматриваемой среды и электромагнитного поля. Первое уравнение (15.22) является определением абсолютной температуры, а второе при $\Phi_\nu = \chi^{-1} T S_\nu = \chi^{-1} q_\nu$ представляет собой релятивистское обобщение закона теплопроводности Фурье (см. § 13). Первое уравнение (15.23) при $\Psi_\nu = \gamma^{-1} j_\nu$ является законом электропроводности Ома, записанным в четырехмерной форме (см. § 14). Второе уравнение (15.23) вместе с соотношениями (5.35), (15.2), (15.20) образует систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в проводящей, поляризующейся и намагничивающейся среде, записанную в четырехмерной форме [1]. Соотношения (15.24) после задания величин P^ν, M^ν (см. ниже) представляют собой законы поляризуемости и намагничивания среды, которые служат для определения компонент 4-векторов p_α, m_α

[1] Если использовать в качестве определяющих параметров наряду с компонентами A_α еще компоненты $F^{\alpha\beta}$, считая вариации δA_α, $\delta F^{\alpha\beta}$ независимыми, то можно так выбрать лагранжиан, что и первое соотношение (15.2) будет получаться в качестве уравнений Эйлера (при $\delta F^{\alpha\beta}$) [20].

и 4-тензора $M^{\alpha\beta}$. Из второго уравнения (15.24) следует, что влияние электромагнитного поля с тензором напряженности $F_{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\alpha}\mathcal{E}^{\beta}$ на намагниченность среды с гиромагнитными свойствами ($\Gamma \neq \infty$) эквивалентно ее вращению с 4-вектором угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\Gamma\varepsilon^{\nu\delta\alpha\beta}u_{\delta}F_{\alpha\beta}\mathcal{E}_{\nu} = -\,\Gamma b^{\alpha}\mathcal{E}_{\alpha}.$$

Наоборот, влияние вращения такой среды на ее намагниченность эквивалентно включению магнитного поля с 4-вектором индукции $\boldsymbol{b} = -\,\Gamma^{-1}\boldsymbol{\omega}$. Замыкающие систему уравнений (15.21) — (15.24) законы, которые можно использовать для определения величин $\tau^{\alpha\beta}$, Φ_{ν}, Ψ_{ν}, P^{ν}, M^{ν}, рассмотрены ниже в настоящем параграфе.

Условия на разрывах. Как и в предыдущих двух параграфах, ограничимся исследованием разрывов, на которых функции $x^{\nu}(\xi^{\nu})$ непрерывны. Рассмотрим кинематические соотношения, связывающие между собой значения вариаций определяющих параметров на двух сторонах гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$. Для вариаций δx^{ν}, $\delta\varphi^{\alpha}$, $\delta\psi^{\alpha}$, δA_{α} по-прежнему примем соответственно условия (13.33), (13.37), (13.38), (14.24) и (14.28). Однако для вывода динамических условий на разрывах этих соотношений недостаточно, так как в выражение (15.25) для функционала δW входят производные от вариаций $\delta x_{\alpha} \equiv g_{\mu\nu}x^{\mu}_{\alpha}\delta x^{\nu}$. Поэтому еще необходимо задать условия, связывающие значения производных $\partial\delta x^{\nu}/\partial f^{(0)} \equiv f^{\mu}_{(0)}\partial_{\mu}\delta x^{\nu}$ на двух сторонах гиперповерхности разрыва. В дальнейшем рассмотрим случай, когда указанные производные связаны условием непрерывности:

$$\left\{\frac{\partial\delta x^{\nu}}{\partial f^{(0)}}\right\}^{+}_{-} \equiv \{f^{\mu}_{(0)}\partial_{\mu}\delta x^{\nu}\}^{+}_{-} \equiv f^{\mu}_{(0)+}[\partial_{\mu}\delta x^{\nu}]^{+}_{-} = 0. \quad (15.26)$$

Здесь $f^{\mu}_{(0)-} = -\,f^{\mu}_{(0)+}$ — компоненты вектора $\boldsymbol{f}_{(0)}$, линейно независимого от касательных к гиперповерхности разрыва векторов $\boldsymbol{f}_{(k)}$ (см. третье примечание к § 9).

Чтобы получить динамические условия на разрывах, функционал δW необходимо записать в канонической форме (см. § 9). Для этого преобразуем второе слагаемое в подынтегральном выражении в равенстве (15.25), исполь-

зуя тождества (9.15), (9.39):

$$P^{\alpha\nu\beta}l_\beta\nabla_\nu\delta x_\alpha = P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}l_\beta\partial_\nu\delta x^\nu =$$
$$= P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}l_\beta\left(f^{(k)}_\nu\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial\zeta^k}+f^{(0)}_\nu\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial f^{(0)}}\right)=\left(-\frac{\partial}{\partial\zeta^k}P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}l_\beta f^{(k)}_\nu\right)\delta x^\nu+$$
$$+P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}l_\beta l_\nu\frac{1}{f^\alpha_{(0)}l_\alpha}\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial f^{(0)}}+\frac{\partial}{\partial\zeta^k}\left(P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}l_\beta f^{(k)}_\nu\delta x^\nu\right). \quad (15.27)$$

Применяя затем кинематические соотношения на разрыве для вариаций δx^ν, $\partial\delta x^\nu/\partial f^{(0)}$, $\delta\varphi^\alpha$, $\delta\psi^\alpha$, δA_α и полагая их равными нулю на границе $\partial\hat{V}$, представим функционал δW в следующем виде [1]):

$$\delta W_c=\frac{1}{c}\int\limits_{\hat{\Sigma}_c}\left(\left\{T^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\xi^\alpha_\nu l_\beta-\frac{\partial}{\partial\zeta^k}P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}l_\beta f^{(k)}_\nu\right\}^+_-\delta x^\nu_+ +\right.$$
$$+\left[P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}\frac{l_\beta l_\nu}{l_\alpha f^\alpha_{(0)}}\right]^+_-\left(\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial f^{(0)}}\right)_+ +\left\{Tu_{[\nu}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_-\delta\varphi^\nu_+ +$$
$$+\left\{A_{[\nu}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_-\delta\psi^\nu_+-\left\{\frac{H^{\alpha\beta}}{4\pi}l_\beta\right\}^+_-\delta A^+_\alpha+$$
$$\left.+\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta^k}P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}l_\beta f^{(k)}_\nu\,\delta x^\nu\right\}^+_-\right)d^3\zeta. \quad (15.28)$$

Интеграл от последнего слагаемого здесь сводится к интегралам по двумерным ребрам и краям гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$ (последние представляют собой пересечения гиперповерхностей $\hat{\Sigma}_c$ и $\partial\hat{V}$).

Приравнивая функционал δW_c нулю и учитывая, что вариации δx^ν_+, $(\partial\delta x^\nu/\partial f^{(0)})_+$, $\delta\varphi^a_+$, $\delta\psi^a_+$, δA^+_α являются независимыми, а коэффициенты при вариациях $\delta\varphi^0_+$, $\delta\psi^0_+$ в выражении (15.28) тождественно равны нулю, получим следующие динамические условия на разрыве [2]):

$$\left\{T^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\xi^\alpha_\nu l_\beta\right\}^+_- -\frac{\partial}{\partial\zeta^k_+}\left\{P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}l_\beta\right\}^+_- f^{(k)}_{\nu+}=0,\quad \left[P^{\cdot\nu\beta}_{\nu\cdot\cdot}l_\beta l_\nu\right]^+_-=0, \quad (15.29)$$

$$\left\{Tu_{[\nu}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_-=0,\quad \left\{A_{[\nu}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_-=0,\quad \left\{H^{\alpha\beta}l_\beta\right\}^+_-=0. \quad (15.30)$$

[1]) См. примечание перед формулой (13.45). Все сказанное там остается в силе при замене $\delta\varphi^\nu$ на $\delta\psi^\nu$.

[2]) При этом следует учесть вытекающие из третьего примечания к § 9 тождества

$$\frac{\partial}{\partial\zeta^k_+}Af^{(k)}_+=\frac{\partial}{\partial\zeta^k_-}Af^{(k)}_-,\quad \left(l_\alpha f^\alpha_{(0)}\right)_+=\left(l_\alpha f^\alpha_{(0)}\right)_-.$$

Ниже будет показано, что первое равенство (15.29) совпадает с вытекающим из теоремы Нётер условием баланса на разрыве потока энергии-импульса поляризующейся и намагничивающейся среды с гиромагнитными свойствами и электромагнитного поля. Второе равенство (15.29) с учетом первого эквивалентно следующему условию на гиперповерхности разрыва:

$$\left\{\left(x_{[\mu}\xi^{\alpha}_{\nu]}T^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot} - P_{[\mu\nu]}^{\cdot\cdot\beta}\right)l_{\beta} - \frac{\partial}{\partial\xi^{k}}\,x_{[\mu}P^{\cdot\cdot\gamma\beta}_{\nu]\cdot\cdot}\,l_{\beta}f^{(k)}_{\gamma}\right\}^{+}_{-} = 0, \qquad (15.31)$$

которое, как будет показано ниже, совпадает с вытекающим из теоремы Нётер условием баланса на разрыве потока момента количества движения поляризующейся и намагничивающейся среды с гиромагнитными свойствами и электромагнитного поля.

Первые два условия (15.30) имеют тот же смысл, что и в § 13 и 14, если учесть, что для рассматриваемой модели $T_{\gamma} \equiv Tu_{\gamma}$, $\mu_{\gamma} \equiv A_{\gamma}$. Здесь T_{γ}, μ_{γ} — компоненты, введенные в § 13 и 14 и фигурирующие в рассмотренных там условиях на разрывах. При этом первое условие (15.30) может быть представлено в виде (13.48) или (13.51), а второе условие (15.30) тождественно удовлетворяется в силу кинематических соотношений на разрыве для компонент A_{γ} (см. равенство (14.27)). Последнее равенство (15.30) вместе с соотношением (14.26) образует известную систему условий на разрыве для электромагнитного поля в поляризующейся и намагничивающейся среде [1], записанную в четырехмерной форме. Используя преобразование, получающееся из (14.31) заменой компонент $F^{\alpha\beta}$ на $H^{\alpha\beta}$, легко показать, что последнее условие (15.30) имеет такой же вид и в ГСК наблюдателя.

Динамические тождества. Чтобы получить динамические тождества для рассматриваемой модели, применим теорию, развитую в предыдущей главе. Сравнивая общие выражения (7.19), (9.1) и (10.13) для функционалов δW^{*}, δW и вариаций $\delta_{\varepsilon}\mu^{A}$, соответствующих бесконечно малому преобразованию Пуанкаре (10.11), с их конкретными выражениями (15.13), (15.25), (13.18), (14.12), (14.33), (15.16), найдем, что для рассматриваемой модели коэффициенты M_{A}, M^{α}_{A}, $M^{\alpha\beta}_{A}$, W^{α}_{A}, $W^{\alpha\beta}_{A}$, $I^{A}_{\mu\nu}$, I^{A}_{ν}, входящие в указанные общие выражения, имеют вид (13.52),

14.32)[1]) и

$\bar{\mu}^A$	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_A^\alpha$	$\bar{M}_A^{\alpha\beta}$	$\overline{W}_A^\alpha$	$\overline{W}_A^{\alpha\beta}$	$I^A_{\mu\nu}$	I^A_ν
x^λ	0	$\tau^{\cdot\alpha}_{\lambda\cdot}$	0	$T^{\cdot\alpha\xi\gamma}_{\gamma\cdot\xi\lambda}$	$P^{\cdot\beta\alpha\xi\gamma}_{\gamma\cdot\cdot\xi\lambda}$	$x_{[\mu}\delta^\lambda_{\nu]}$	δ^λ_ν
p_α	P^α	0	0	0	0	0	0
m_α	M^α	0	0	0	0	0	0

(15.32)

Рассмотрим законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, вытекающие из однородности и изотропности пространства событий Минковского. Легко проверить, что для вариаций (13.18), (14.12), (14.33) и (15.16) все условия теоремы Нётер удовлетворяются. Следовательно, на действительных процессах выполняются тождества (10.6)—(10.10), (10.15), (10.16), записанные с учетом соотношений (13.52), (14.32), (15.32) при $I^A_B = I^A_\nu$ и $I^A_B = I^A_{\mu\nu}$. Они выражают законы сохранения энергии-импульса (при $I^A_B = I^A_\nu$) и момента количества движения (при $I^A_B = I^A_{\mu\nu}$) поляризующейся и намагничивающейся среды с гиромагнитными свойствами и электромагнитного поля. Общие выражения (10.14) для компонент $T^{\cdot\alpha}_{\nu\cdot}$, $M^{\cdot\cdot\alpha}_{\mu\nu\cdot}$ тензоров энергии-импульса и момента количества движения в рассматриваемой модели на основании соотношений (13.52), (14.32), (15.32) принимают вид

$$T^{\cdot\alpha}_{\nu\cdot} = T^{\cdot\alpha\xi\gamma}_{\gamma\cdot\xi\nu}, \quad M^{\cdot\cdot\alpha}_{\mu\nu\cdot} = x_{[\mu}T^{\cdot\alpha}_{\nu]\cdot} - P^{\cdot\cdot\alpha}_{[\mu\nu]\cdot}. \tag{15.33}$$

Отсюда следует, что компоненты $T^{\alpha\beta}$, определенные вторым равенством (15.21), являются контравариантными компонентами (в ССК) тензора энергии-импульса поляризующейся и намагничивающейся среды с гиромагнитными свойствами и электромагнитного поля. Первое и второе слагаемые в правой части второго равенства (15.33) представляют собой соответственно компоненты тензора орбитального момента количества движения и компоненты тензора внутреннего момента количества движения $K^{\cdot\cdot\alpha}_{\mu\nu\cdot}$. Для последних на основании определения (15.11) величин $P^{\alpha\beta\gamma}$ имеем

$$K^{\mu\nu\lambda} \equiv -P^{[\mu\nu]\lambda} =$$

$$= -\frac{c}{2\Gamma}\varepsilon^{\varkappa\rho\mu\nu}m_\varkappa u_\rho u^\lambda + \frac{c}{4\Gamma}\varepsilon^{\varkappa\rho\lambda[\mu}m_\varkappa u_\rho u^{\nu]}. \tag{15.34}$$

[1]) Для рассматриваемой модели в выражениях (13.52), (14.32) следует положить $T_\delta = Tu_\delta$, $\mu_\delta = A_\delta$. Кроме того, для коэффициентов, соответствующих определяющим параметрам $x^\nu(\xi^\gamma)$, вместо (13 52) следует использовать выражения (15.32).

Значения величин $c^{-1}K^{\mu\nu 0}$ относительно собственной ГСК называются *компонентами собственной плотности внутреннего момента количества движения* $K^{\mu\nu}$. Из равенства (15.34) и антисимметричности величин $\varepsilon^{\varkappa\rho\lambda\mu}$ вытекает следующее выражение:

$$K^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{c} u_\lambda K^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2\Gamma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\varkappa} u_\rho m_\varkappa. \tag{15.35}$$

Наряду с антисимметричным тензором собственной плотности внутреннего момента количества движения, компоненты которого определяются соотношением (15.35), можно ввести еще 4-вектор плотности внутреннего момента количества движения с компонентами

$$K_\varkappa \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\varkappa\rho\mu\nu} u^\rho K^{\mu\nu} = \frac{1}{2\Gamma} m_\varkappa. \tag{15.36}$$

Последнее равенство здесь вытекает из выражения (15.35) для $K^{\mu\nu}$ и тождества (1.41) (см. также доказательство формулы (5.24)). Таким образом, в рассматриваемой модели 4-вектор плотности внутреннего момента количества движения оказывается пропорциональным 4-вектору намагниченности среды. Величина 2Γ, обратная коэффициенту пропорциональности, называется *гиромагнитным отношением*. Если $\Gamma = \infty$, то, очевидно, внутренний момент количества движения отсутствует.

Используя соотношения (15.32), (15.33) и тождества (1.34), (1.35), легко показать, что для рассматриваемой модели уравнение энергии-импульса (10.15), записанное относительно ССК, совпадает с уравнением движения (15.21), а условие баланса на разрыве потока энергии-импульса (10.15) совпадает с первым динамическим условием на разрыве (15.29). Учитывая равенства (1.40), (1.42), запишем его в ковариантной форме (при $l_\alpha l^\alpha \neq 0$):

$$\{T^{\nu\mu} n_\mu\}^+_- - \nabla_{(k)} \{P^{\nu\lambda\mu} n_\mu\}^+_- f^{(k)}_\lambda = 0, \quad n_\mu \equiv \frac{l_\mu}{\sqrt{|G|}}. \tag{15.37}$$

Отсюда следует, что тензор

$$-\{P^{\nu\lambda\mu} n_\mu\}^+_- f^{(k)}_\lambda \mathcal{Э}_\nu \mathcal{Э}_{(k)}$$

можно рассматривать как *тензор гиперповерхностной плотности потока энергии-импульса среды с гиромагнитными свойствами*. Для среды, не обладающей гиромагнитными свойствами ($\Gamma = \infty$), этот тензор на основании равенства

(15.11) тождественно равен нулю. Первое соотношение (10.16), представляющее собой уравнение момента количества движения для рассматриваемой модели, является следствием первого уравнения (10.15) и тождества

$$T^{[\alpha\beta]} \equiv -\nabla_\nu P^{[\alpha\beta]\nu},$$

вытекающего из определений (15.11), (15.21) соответственно компонент $P^{\alpha\beta\nu}$, $T^{\alpha\beta}$. Второе соотношение (10.16), представляющее собой условие баланса на разрыве потока момента количества движения, для рассматриваемой модели совпадает с соотношением (15.31), являющимся следствием динамических условий на разрыве (15.29). Оно также записывается в ковариантном виде, аналогичном равенству (15.37), причем тензор

$$-x^{[\mu} \{P^{\nu]\lambda\mu} n_\mu\}^+ f_\lambda^{(k)} \mathcal{E}_\mu \mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_{(k)}$$

может рассматриваться как *тензор гиперповерхностной плотности потока момента количества движения среды с гиромагнитными свойствами*. Для среды, не обладающей ими ($\Gamma = \infty$), этот тензор тождественно равен нулю.

Компоненты тензора энергии-импульса проводящей, но неполяризующейся и ненамагничивающейся сплошной среды и электромагнитного поля могут быть представлены в виде суммы компонент двух тензоров, один из которых зависит только от тензора напряженности электромагнитного поля, а другой от него совсем не зависит (см. § 14). Для поляризующейся и намагничивающейся среды и электромагнитного поля подобное представление компонент суммарного тензора энергии-импульса, определенных вторым равенством (15.21), вообще говоря, не возможно. Поэтому, как известно [5], тензор энергии-импульса единой системы, которую представляет собой поляризующаяся и намагничивающаяся сплошная среда и электромагнитное поле, можно различным образом разбивать на сумму двух тензоров, рассматриваемых как тензоры энергии-импульса сплошной среды и электромагнитного поля. Выберем в качестве последнего тензор Минковского [5] с компонентами

$$T_{(H)}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha\nu} H^{\beta\cdot}_{\cdot\nu} - \frac{1}{4} F_{\nu\delta} H^{\nu\delta} g^{\alpha\beta}\right). \qquad (15.38)$$

Тогда компоненты тензора энергии-импульса сплошной среды $T_{(C)}^{\alpha\beta}$ определяются однозначно из уравнения

$$T^{\alpha\beta} = T_{(C)}^{\alpha\beta} + T_{(H)}^{\alpha\beta}. \qquad (15.39)$$

Плотность внутренней энергии, введенная равенством (12.8), для поляризующейся и намагничивающейся среды с гиромагнитными свойствами и электромагнитного поля на основании соотношений (15.39) и приведенных выше выражений для компонент 4-тензоров $T^{\alpha\beta}_{(H)}$, $T^{\alpha\beta}$, $T^{\alpha\beta}_{(F)}$, $P^{\alpha\beta}_{(M)}$, $P^{\alpha\beta}_{(\omega)}$, $P^{\alpha\beta}$ представляется в виде суммы

$$\mathscr{E} = T^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = \mathscr{E}_{(C)} + \mathscr{E}_{(H)}, \tag{15.40}$$

где

$$\mathscr{E}_{(H)} = T^{\alpha\beta}_{(H)}u_\alpha u_\beta = -\frac{1}{8\pi}(e^\alpha d_\alpha + b^\alpha h_\alpha) = \frac{1}{8\pi}(E^{*k}D^*_k + B^{*k}H^*_k), \tag{15.41}$$

$$\mathscr{E}_{(C)} = T^{\alpha\beta}_{(C)}u_\alpha u_\beta = \rho U + \frac{1}{2}(e^\alpha p_\alpha + b^\alpha m_\alpha) - \frac{1}{2\Gamma}\omega^\nu m_\nu, \tag{15.42}$$

а e^α, b^α, d_α, h_α — компоненты 4-векторов, определенные равенствами (5.42). Очевидно, слагаемое $\mathscr{E}_{(C)}$ можно рассматривать как плотность внутренней энергии поляризующейся и намагничивающейся среды с гиромагнитными свойствами в электромагнитном поле, а величину $\mathscr{E}_{(H)}$ — как плотность энергии электромагнитного поля в поляризующейся и намагничивающейся среде в собственной ГСК. Выражение (15.42) для $\mathscr{E}_{(C)}$ с учетом соотношения (15.36) записывается также в виде

$$\mathscr{E}_{(C)} = \rho U(\rho, S, \gamma_{\alpha\beta}, p_\nu, m_\nu, \varkappa_B) + \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} - \omega^\nu K_\nu. \tag{15.43}$$

Рассмотрим тождества, вытекающие из инвариантности электромагнитного поля относительно градиентного преобразования. Для рассматриваемой модели функционал δW^* не зависит от вариаций компонент 4-потенциала электромагнитного поля. Поэтому, согласно общей теории, изложенной в § 10, действие должно быть инвариантно относительно градиентного преобразования (10.17), (10 18)[1]. Следствием этой инвариантности являются соотношения (10.25), (10.27), которым должен удовлетворять лагранжиан. Используя выражения (15.19) и (5.14) для δI и J^α и антисимметричность компонент $H^{\alpha\beta}$, $\psi^{[\alpha}u^{\nu]}/\sqrt{\gamma}$, легко доказать инвариантность действия в рассматриваемой модели относительно градиентного преобразования (10.17), (10.18). Соответствующие выкладки получаются из ра-

[1] См. примечание перед формулой (10.19).

венств (14.38) путем замены компонент $F^{\alpha\beta}$ на $H^{\alpha\beta}$. Для рассматриваемой модели лагранжиан, очевидно, имеет вид (10.25) и, как указывалось в § 10, $\partial\Lambda/\partial A_\alpha = c^{-1}J^\alpha$. В результате соотношение (10.27) тождественно удовлетворяется в силу параметрического представления (5.14) для компонент J^α и кинематических соотношений (14.24) для параметров электрического тока ψ^α.

Получим инвариантное уравнение энергии и тождество для коэффициентов при вариациях в функционале δW^*. Для этого применим к рассмотренной модели общую теорию, развитую в § 11 и 12, в частности соотношения (12.7), (12.10). Входящие в них компоненты M^α, как и для предыдущих двух моделей, оказываются равными нулю (см. равенства (13.55)). Определенные равенством (12.6) компоненты W^α при помощи простых, но громоздких преобразований с учетом соотношений (13.52), (14.32), (15.32)[1]), параметрических представлений величин S^ν, j^ν (см. § 5 и 6) и выражений (15.1), (15.39), (15.38), (14.2) соответственно для Λ, $T^{\alpha\beta}$, $T^{\alpha\beta}_{(H)}$, J^ν можно привести к виду

$$W^\alpha = cT^{\beta\alpha}_{(C)}u_\beta - TS^\alpha - \frac{c^2}{2}K^{\nu\alpha}w_\nu + \\ + c\left(\frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta} + \frac{1}{c}J^\nu A_\nu - \frac{1}{2\Gamma}\omega^\nu m_\nu\right)u^\alpha + \\ + \frac{c}{4\pi}H^{\alpha\beta}\nabla_\beta(A_\nu u^\nu) - J^\alpha A_\nu u^\nu, \qquad (15.44)$$

где w_ν — компоненты 4-ускорения сплошной среды (см. § 3). Подставим в тождество (12.7) выражения (15.1), (13.55), (15.44) соответственно для Λ, M_α, W^α и учтем, что в силу уравнений (14.2), (15.21), (15.23), (15.39), выражения (15.38) для $T^{\alpha\beta}_{(H)}$ и антисимметричности компонент $F^{\alpha\beta}$, $H^{\alpha\beta}$ имеем

$$\nabla_\alpha\left[J^\alpha A_\nu u^\nu - \frac{c}{4\pi}H^{\alpha\beta}\nabla_\beta(A_\nu u^\nu)\right] = \nabla_\alpha\nabla_\beta\left(\frac{c}{4\pi}H^{\alpha\beta}A_\nu u^\nu\right) \equiv 0,$$

$$\nabla_\alpha T^{\beta\alpha}_{(C)} = -\nabla_\alpha T^{\beta\alpha}_{(H)}, \qquad (15.45)$$

$$-cu_\beta\nabla_\alpha T^{\beta\alpha}_{(H)} = F_{\beta\nu}u^\beta j^\nu + \frac{cu^\nu}{16\pi}(H^{\alpha\beta}\nabla_\nu F_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta}\nabla_\nu H^{\alpha\beta}) \equiv F.$$

Используя затем выражение (15.42) для плотности внутренней энергии среды, уравнение неразрывности (13.2) и

[1]) См примечание перед соотношением (15.32).

определение собственного времени (см. § 3), окончательно получим соотношение

$$\rho\frac{d}{d\tau}\frac{\mathscr{E}_{(C)}}{\rho}=T^{\beta\alpha}_{(C)}\nabla_\alpha(cu_\beta)-\nabla_\alpha\left(q^\alpha+\frac{c^2}{2}K^{\nu\alpha}w_\nu\right)+F, \quad (15.46)$$

в котором $q^\alpha\equiv TS^\alpha$ — компоненты 4-вектора плотности потока тепла. Соотношение (15.46) можно рассматривать как инвариантное уравнение энергии, представляющее собой релятивистское обобщение уравнения притока тепла для проводящей, поляризующейся и намагничивающейся сплошной среды с гиромагнитными свойствами в электромагнитном поле.

Подставляя в тождество (12.10) выражения (13.52), (14.32), (15.32)[1] и (13.55) для величин μ^A, $\bar{M}_A$, $\bar{M}^\alpha_A$, $\bar{M}^{\alpha\beta}_A$ и M^α, соответствующих рассматриваемой модели, получим равенство

$$\frac{T}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi}{d\tau}+\frac{\Phi_\alpha}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi^\alpha}{d\tau}+\frac{\Psi_\alpha}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\psi^\alpha}{d\tau}+P^\alpha\frac{dp_\alpha}{d\tau}+$$
$$+M^\alpha\frac{dm_\alpha}{d\tau}+\tau_\nu^{\cdot\beta}\partial_\beta\frac{dx^\nu}{d\tau}=0. \quad (15.47)$$

Оно отличается от аналогичного равенства (14.42) только наличием членов с $dp_\alpha/d\tau$, $dm_\alpha/d\tau$. Используя преобразование последнего к виду (14.43), проведенное в § 14, легко убедиться, что соотношение (15.47) можно представить в следующем виде:

$$\sigma=-S^\alpha\frac{\Phi_\alpha}{T}-j^\alpha\frac{\Psi_\alpha}{T}-\frac{dp_\alpha}{d\tau}\frac{P^\alpha}{T}-\frac{dm_\alpha}{d\tau}\frac{M^\alpha}{T}+\tau^{\alpha\beta}\frac{e_{\alpha\beta}}{T}. \quad (15.48)$$

Это выражение для σ отличается от аналогичного выражения (14.43) в модели проводящей сплошной среды наличием членов, содержащих производные по собственному времени от компонент 4-векторов поляризации и намагниченности среды. Указанные производные образуют компоненты 4-векторов, так как, используя тождества $u^\nu p_\nu\equiv$ $\equiv u^\nu m_\nu\equiv 0$, их можно представить в ковариантном виде:

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}(x^\nu_\alpha p_\nu)=x^\nu_\alpha\frac{dp_\nu}{d\tau}+\frac{cp_\nu}{\sqrt{g_{00}}}\partial_\alpha x^\nu_0=$$
$$=cx^\nu_\alpha u^\mu\partial_{[\mu}p_{\nu]}=cu^\beta\nabla_{[\beta}p_{\alpha]}=c\,(u^\beta\nabla_\beta p_\alpha+p_\beta\nabla_\alpha u^\beta),$$

[1] См. примечание перед формулой (15.32).

и аналогично:

$$\frac{dm_\alpha}{d\tau} = cu^\beta \nabla_{[\beta} m_{\alpha]} = c\,(u^\beta \nabla_\beta m_\alpha + m_\beta \nabla_\alpha u^\beta).$$

Отсюда, в частности, следует, что $u^\alpha\, dp_\alpha/d\tau \equiv 0$, $u^\alpha dm_\alpha/d\tau \equiv \equiv 0$. Соотношение (15.48) представляет собой тождество, которому должны удовлетворять величины T, Φ_α, Ψ_α, P^α, M^α, $\tau^{\alpha\beta}$, присутствующие в выражении (15.13) для функционала δW^*, соответствующего модели электро- и теплопроводной, вязкой, поляризующейся и намагничивающейся среды и электромагнитного поля.

Необратимые процессы. Для завершения построения модели тепло- и электропроводной, поляризующейся и намагничивающейся, вязкой среды следует еще задать законы, определяющие независимо от динамических уравнений величины Φ_α, Ψ_α, P^α, M^α, $\tau^{\alpha\beta}$, присутствующие в выражении (15.13) для функционала δW^*. Для этого используем общую теорию, изложенную в § 12. Рассматривая величины $-T^{-1}\Phi_\alpha$, $-T^{-1}\Psi_\alpha$, $-T^{-1}P^\alpha$, $-T^{-1}M^\alpha$, $T^{-1}e_{\alpha\beta}$ как обобщенные термодинамические силы X^B, а величины S^α, j^α, $dp_\alpha/d\tau$, $dm_\alpha/d\tau$, $\tau^{\alpha\beta}$ как сопряженные им обобщенные потоки J_B, найдем, что выражение (15.48) для σ имеет вид (12.11). Применяя затем линейные законы (12.21), для необратимых процессов, близких к обратимым, получим кинетические уравнения, которые можно использовать для определения коэффициентов Φ_α, Ψ_α, P^α, M^α, $\tau^{\alpha\beta}$ в функционале δW^*:

$$\begin{aligned}
TS^\nu &= -L^{\nu\alpha}_{(\Phi\Phi)}\Phi_\alpha - L^{\nu\alpha}_{(\Phi\Psi)}\Psi_\alpha - L^{(\Phi P)\,\nu}_{\quad\alpha}P^\alpha - \\
&\qquad - L^{(\Phi M)\,\nu}_{\quad\alpha}M^\alpha + L^{\nu\alpha\beta}_{(\Phi e)}e_{\alpha\beta},\\
Tj^\nu &= -L^{\nu\alpha}_{(\Psi\Phi)}\Phi_\alpha - L^{\nu\alpha}_{(\Psi\Psi)}\Psi_\alpha - L^{(\Psi P)\,\nu}_{\quad\alpha}P^\alpha - \\
&\qquad - L^{(\Psi M)\,\nu}_{\quad\alpha}M^\alpha + L^{\nu\alpha\beta}_{(\Psi e)}e_{\alpha\beta},\\
T\frac{dp_\gamma}{d\tau} &= -L^{(P\Phi)\,\alpha}_{\quad\gamma}\Phi_\alpha - L^{(P\Psi)\,\alpha}_{\quad\gamma}\Psi_\alpha - L^{(PP)}_{\gamma\alpha}P^\alpha - \\
&\qquad - L^{(PM)}_{\gamma\alpha}M^\alpha + L^{(Pe)\,\alpha\beta}_{\quad\gamma}e_{\alpha\beta},\\
T\frac{dm_\gamma}{d\tau} &= -L^{(M\Phi)\,\alpha}_{\quad\gamma}\Phi_\alpha - L^{(M\Psi)\,\alpha}_{\quad\gamma}\Psi_\alpha - L^{(MP)}_{\gamma\alpha}P^\alpha - \\
&\qquad - L^{(MM)}_{\gamma\alpha}M^\alpha + L^{(Me)\,\alpha\beta}_{\quad\gamma}e_{\alpha\beta},\\
T\tau^{\alpha\beta} &= -L^{\alpha\beta\gamma}_{(e\Phi)}\Phi_\gamma - L^{\alpha\beta\gamma}_{(e\Psi)}\Psi_\gamma - L^{(eP)\,\alpha\beta}_{\quad\gamma}P^\gamma - \\
&\qquad - L^{(eM)\,\alpha\beta}_{\quad\gamma}M^\gamma + L^{\alpha\beta\gamma\delta}_{(ee)}e_{\gamma\delta}.
\end{aligned} \tag{15.49}$$

Входящие в них феноменологические коэффициенты L_B^A, вообще говоря, являются тензорными функциями от определяющих параметров, их производных и известных параметров $\varkappa_B(\xi^\alpha)$ (например, от величины $\gamma^{\alpha\beta}$, u^ν, $F_{\alpha\beta}$, p_α, m_α, ω^ν, ρ, $T \equiv \partial U/\partial S$) и задаются на основании дополнительных теоретических гипотез и экспериментальных данных. Указанные коэффициенты должны удовлетворять неравенствам, следующим из неотрицательности диссипативной функции σ, а также условиям (13.63), (14.45) и соотношениям

$$u_\nu L^{(\Phi P)\nu}{}_\alpha = u_\nu L^{(\Phi M)\nu}{}_\alpha = u_\nu L^{(\Psi P)\nu}{}_\alpha = u_\nu L^{(\Psi M)\nu}{}_\alpha = 0,$$

$$u^\nu L^{(P\Phi)\alpha}{}_\nu = u^\nu L^{(P\Psi)\alpha}{}_\nu = u^\nu L^{(PP)}_{\nu\alpha} = u^\nu L^{(PM)}_{\nu\alpha} = u^\nu L^{(Pe)\alpha\beta}{}_\nu = 0,$$

$$u^\nu L^{(M\Phi)\alpha}{}_\nu = u^\nu L^{(M\Psi)\alpha}{}_\nu = u^\nu L^{(MP)}_{\nu\alpha} = u^\nu L^{(MM)}_{\nu\alpha} = u^\nu L^{(Me)\alpha\beta}{}_\nu = 0,$$

$$u_\alpha L^{(eP)\alpha\beta}{}_\nu = u_\alpha L^{(eM)\alpha\beta}{}_\nu = 0, \quad L^{(eP)[\alpha\beta]}{}_\nu = L^{(eM)[\alpha\beta]}{}_\nu = 0,$$

вытекающим из тождеств

$$u_\nu S^\nu = u_\nu j^\nu = u^\alpha \frac{dp_\alpha}{d\tau} = u^\alpha \frac{dm_\alpha}{d\tau} = u_\alpha \tau^{\alpha\beta} = \tau^{[\alpha\beta]} = 0.$$

Обобщенные термодинамические силы $-T^{-1}\Phi_\alpha$, $-T^{-1}\Psi_\alpha$, $-T^{-1}P^\alpha$, $-T^{-1}M^\alpha$, $T^{-1}e_{\alpha\beta}$ связаны между собой зависимостями

$$\Phi_\alpha u^\alpha = \Psi_\alpha u^\alpha = P^\alpha u_\alpha = M^\alpha u_\alpha = e_{\alpha\beta}u^\alpha = e_{[\alpha\beta]} = 0.$$

Поэтому коэффициенты L_B^A определяются неоднозначно, причем их можно выбрать так, что будут выполняться соотношения Онсагера — Казимира (12.23).

В дальнейшем, рассматривая необратимые процессы, ограничимся простейшим случаем, когда уравнения (15.49) имеют вид

$$\begin{aligned} &q^\alpha \equiv TS^\alpha = \chi\Phi^\alpha, \quad j^\alpha = \gamma\Psi^\alpha, \quad P^\alpha = M^\alpha = 0, \\ &\tau^{\alpha\beta} = -\lambda\gamma^{\alpha\beta}e^\nu_\nu + 2\mu e^{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{15.50}$$

Из выражения (15.48) для σ следует, что при $P^\alpha = M^\alpha = 0$ процессы поляризации и намагничивания не дают вклада в диссипативную функцию. Таким образом, третье и четвертое равенства (15.50) означают, что процессы поляризации и намагничивания протекают обратимым образом. Положив $P^\alpha = M^\alpha = 0$ в динамических уравнениях (15.24) и учитывая определение (5.42) компонент 4-векторов напряженности электрического поля и индук-

ции магнитного поля e_α, b_α, получим соотношения

$$\rho\gamma_\alpha^\nu \frac{\partial U}{\partial p_\alpha} = e^\nu, \quad \rho\gamma_\alpha^\nu \frac{\partial U}{\partial m_\alpha} + \frac{1}{\Gamma}\omega^\nu = b^\nu. \qquad (15.51)$$

Они определяют обратимые процессы поляризации и намагничивания сплошной среды. Физический смысл первого, второго и последнего равенств (15.50) тот же, что и в §§ 13, 14. В частности, для компонент 4-векторов плотности потока тепла и плотности электрического тока проводимости справедливы выражения, получающиеся из (13.66) и (14.47) при $\partial U/\partial S^\alpha = \partial U/\partial j^\alpha = \partial U/\partial Z = 0$.

Диссипативную функцию по-прежнему можно представить в виде (14.48), из которого следуют неравенства (14.49) для коэффициентов χ, γ, λ, μ, определяющих необратимые эффекты тепло- и электропроводности и вязкости Как и в §§ 13, 14, если коэффициенты вязкости λ, μ равны нулю, а коэффициенты теплопроводности χ и проводимости γ равны нулю или бесконечности, то все процессы обратимы ($\sigma \equiv 0$), функционал $\delta W^* \equiv 0$, и из исходного вариационного уравнения вытекает принцип экстремальности действия

$$\delta I = 0 \quad \text{при} \quad \delta W = 0.$$

Специальные модели. Модель с лагранжианом (15.1) и функционалом δW^* (15.13) представляет собой модель нелинейно-упругой тепло- и электропроводной, поляризующейся и намагничивающейся, вязкой среды и электромагнитного поля. Очевидно, она является обобщением тех из рассмотренных в § 13 и 14 моделей, для которых $\partial U/\partial S^\alpha = \partial U/\partial j^\alpha = \partial U/\partial Z = 0$. Различные модели поляризующихся и намагничивающихся сред построены также в работах [5, 15, 16, 20—34].

Рассмотрим некоторые частные модели, соответствующие специальным выражениям (15.1), (15.13) для лагранжиана и функционала δW^*. Как и в предыдущих параграфах, для нетеплопроводной и неэлектропроводной среды параметры φ^α и ψ^α исключаются из числа варьируемых функций и, следовательно, пропадают динамические уравнения и условия на разрывах, получающиеся при варьировании $\varphi^\alpha(\xi^\nu)$ и $\psi^\alpha(\xi^\nu)$. Если среда еще и невязкая, а процессы поляризации и намагничивания обратимы (точнее, $P^\alpha \equiv M^\alpha \equiv 0$), то из числа варьируемых функций исключается также параметр φ, после чего функционал δW^* становится тождественно равным нулю. Удель-

ная плотность энтропии S при этом остается постоянной вдоль мировых линий среды (для непрерывных процессов) и является неварьируемой функцией, определяющейся начальными условиями и условиями на разрывах.

Модель тепло- и электропроводного, поляризующегося и намагничивающегося, вязкого газа (или жидкости) и электромагнитного поля получается как частный случай рассмотренной в настоящем параграфе модели, для которого функция U в выражении (15.1) для лагранжиана имеет вид

$$U = U(\rho,\ S,\ p^2,\ m^2,\ \varkappa_B),$$
$$p^2 \equiv \gamma^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta, \qquad m^2 \equiv \gamma^{\alpha\beta} m_\alpha m_\beta, \tag{15.52}$$

где все неварьируемые параметры $\varkappa_B$ — скаляры.

В связи с данным определением модели поляризующегося и намагничивающегося газа отметим следующее обстоятельство. Из условий (15.4) следует, что величины p^2, m^2, определенные равенствами (15.52), зависят от компонент $\gamma^{\alpha\beta}$ только через величины γ^{ab}. Последние образуют матрицу, обратную по отношению к матрице $\| \gamma_{cd} \|$, и, следовательно, являются функциями от величин γ_{cd}. Поэтому выражение (15.52) для U действительно представляет собой частный случай функции U, присутствующей в выражении (15.1) для лагранжиана.

Подставляя в равенство (13.26) выражение (15.52) для U и используя условия (15.4), свойства компонент γ^{ab}, γ^α_β (см. § 3) и соотношение $d\gamma^{ab} = -\gamma^{ac}\gamma^{bd}\, d\gamma_{cd}$, найдем компоненты $P^{\alpha\beta}$ для поляризующегося и намагничивающегося газа:

$$P^{\alpha\beta} = \rho U u^\alpha u^\beta + \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \gamma^{\alpha\beta} + 2\rho \frac{\partial U}{\partial p^2} p^\alpha p^\beta + 2\rho \frac{\partial U}{\partial m^2} m^\alpha m^\beta. \tag{15.53}$$

Рассмотрим более подробно модель газа, в которой

$$\rho U = \frac{2\pi}{\varepsilon' - 1} p^2 + \frac{2\pi\mu'}{\mu' - 1} m^2 + \rho \tilde{U}(\rho,\ S,\ \varkappa_B), \qquad \Gamma = \infty, \tag{15.54}$$

где $\varepsilon'(\xi^a)$, $\mu'(\xi^a)$ — известные неварьируемые параметры типа $\varkappa_B$. В этом случае уравнения (15.51) принимают вид

$$p_\alpha = \frac{\varepsilon' - 1}{4\pi} e_\alpha, \quad m_\alpha = \frac{\mu' - 1}{4\pi\mu'} b_\alpha. \tag{15.55}$$

Подставляя эти выражения для p_α, m_α в равенства (5.45), найдем соотношения между компонентами 4-векторов

индукции и напряженности электрического и магнитного полей

$$d_\alpha = \varepsilon' e_\alpha, \quad b_\alpha = \mu' h_\alpha.$$

В собственной ГСК они, очевидно, записываются следующим образом:

$$D_k^* = \varepsilon' E_k^*, \quad B_k^* = \mu' H_k^*. \tag{15.56}$$

Коэффициенты ε', μ' называются *диэлектрической и магнитной проницаемостями газа.* Компоненты тензора энергии-импульса поляризующегося и намагничивающегося газа и электромагнитного поля в случае, когда справедливы соотношения (15.54), можно представить в виде

$$T^{\alpha\beta} \equiv T_{(F)}^{\alpha\beta} + P_{(M)}^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} - \tau^{\alpha\beta} = \tilde{T}^{\alpha\beta} + T_{(A)}^{\alpha\beta}, \tag{15.57}$$

где

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} \equiv \rho \tilde{U} u^\alpha u^\beta + \tilde{p}\gamma^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} q^{\langle\alpha} u^{\beta\rangle} - \tau^{\alpha\beta}, \quad \tilde{p} \equiv \rho^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho},$$

$$T_{(A)}^{\alpha\beta} \equiv T_{(F)}^{\alpha\beta} + P_{(M)}^{\alpha\beta} + 2\pi\left(\frac{p^2}{\varepsilon' - 1} + \frac{\mu' m^2}{\mu' - 1}\right) g^{\alpha\beta} + \\ + 4\pi\left(\frac{p^\alpha p^\beta}{\varepsilon' - 1} + \frac{\mu' m^\alpha m^\beta}{\mu' - 1}\right), \tag{15.58}$$

а величины q^α, $\tau^{\alpha\beta}$, $T_{(F)}^{\alpha\beta}$, $P_{(M)}^{\alpha\beta}$ определяются равенствами (15.50), (14.6), (15.9). Очевидно, компоненты $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ совпадают с компонентами тензора энергии-импульса в модели газа (см. § 13), для которой $\Lambda = -\rho\tilde{U}$ (ρ, S, $\varkappa_B$). Используя уравнения (15.55), непосредственной проверкой можно убедиться, что в собственной ГСК компоненты $T_{(A)}^{\alpha\beta}$ записываются следующим образом:

$$T_{(A)}^{*00} = \frac{\varepsilon' E^{*2}}{8\pi} + \frac{B^{*2}}{8\pi\mu'}, \quad T_{(A)}^{*0k} = T_{(A)}^{*k0} = \frac{1}{4\pi\mu'} \varepsilon^{krn} E_r^* B_n^*, \tag{15.59}$$

$$T_{(A)}^{*kr} = -\frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon' E_k^* E_r^* - \frac{\varepsilon'}{2} E^{*2}\delta_{kr} + \frac{1}{\mu'} B_k^* B_r^* - \frac{1}{2\mu'} B^{*2}\delta_{kr}\right).$$

Тензор, компоненты которого в собственной ГСК определяются равенствами (15.59), называют *тензором энергии-импульса Абрагама электромагнитного поля в поляризующейся и намагничивающейся среде.*

Таким образом, определенные последним равенством (15.58) компоненты $T_{(A)}^{\alpha\beta}$ совпадают с компонентами тензора Абрагама, которые можно также записать в виде

$$T_{(A)}^{\alpha\beta} = T_{(H)}^{\alpha\beta} - \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon' - \frac{1}{\mu'}\right)\gamma^{\alpha\delta} u^\beta u^\varepsilon F_{\varepsilon\nu} F_\delta^{\cdot\nu}. \tag{15.60}$$

Однако этот вывод верен только в случае, когда справедливы законы поляризации и намагничивания (15.55). При этом для плотности внутренней энергии поляризующегося и намагничивающегося газа и электромагнитного поля получается известное выражение:

$$\mathscr{E} \equiv T^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = \rho\tilde{U}(\rho,\ S,\ \varkappa_B) + \frac{\varepsilon'}{8\pi}E^{*2} + \frac{1}{8\pi\mu}B^{*2}.$$

Для совершенного газа функция $\tilde{U}(\rho,\ S,\ \varkappa_B)$ задается формулой (13.75) и имеют место уравнения состояния (13.76), в которых следует заменить величины U и p на $\tilde{U}$ и $\tilde{p}$.

Рассмотренную в настоящем параграфе общую модель нелинейно-упругой тепло- и электропроводной, поляризующейся и намагничивающейся, вязкой среды и электромагнитного поля можно также построить, не вводя параметров переноса и производства энтропии φ^α, φ и параметров электрического тока ψ^α. Для этого следует: в качестве определяющих параметров вместо функций (15.5) взять функции $x^\nu(\xi^\nu)$, $S(\xi^\nu)$, $A_\alpha(\xi^\nu)$, $p_\alpha(\xi^\nu)$, $m_\alpha(\xi^\nu)$, опустить в выражении (15.1) для лагранжиана член $c^{-1}J^\alpha A_\alpha$ и определить функционал δW^* следующим образом:

$$\delta W^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left[\rho T\delta S + \left(\tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}TS^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}\right)\nabla_\beta\delta x_\alpha - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{c}J^\alpha\delta A_\alpha + P^\alpha\delta p_\alpha + M^\alpha\delta m_\alpha\right]\sqrt{-g}\,d^4\xi.$$

При таком подходе, однако, из вариационного уравнения невозможно получить на разрыве первое условие (15.30). Кроме того, он непосредственно не применим в общем случае, когда лагранжиан зависит от аргументов S^α, j^α, Z.

Переход к ньютоновской механике. Рассмотрим переход к ньютоновской механике на примере простейшей модели поляризующегося и намагничивающегося газа, для которой выполняются равенства (15.54). Рассуждая, как и в § 13 и 14 при переходе к ньютоновской механике, найдем, что относительно собственной ГСК $x^{*\nu}$ уравнения (15.21) — (15.23), (5.34) в рассматриваемой точке x^* на основании выражений (15.57) и (15.58) для компонент

$T^{\alpha\beta}$, $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ примут следующий вид:

$$\rho\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t^*}+\frac{2}{c^2}q^{*k}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^*=p^{*kq}(\partial_q v_k)^*-\partial_k^* q^{*k}+j^{*k}E_k^*,$$
$$p^{*kq}=-\rho^2\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\rho}\delta^{kq}+\tau^{*kq}; \tag{15.61}$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\rho\tilde{U}\left(\frac{\partial v^k}{\partial t}\right)^*+p^{*kq}\left(\frac{\partial v_q}{\partial t}\right)^*+\frac{\partial q^{*k}}{\partial t^*}\right]=\partial_q^* p^{*kq}-\frac{1}{c^2}(q^{\langle q}\partial_q v^{k\rangle})^*+$$
$$+\rho ZE_k^*+\frac{1}{c}e^{kpq}j^{*p}B_q^*-\frac{1}{8\pi}\left(E^{*2}\partial_k^*\varepsilon'-B^{*2}\partial_k^*\frac{1}{\mu'}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon'\mu'-1}{4\pi c\mu'}\left[e^{pqn}E_p^*B_q^*(\partial_k v_n)^*+\right.$$
$$\left.+e^{kpq}\left(E_pB_q\partial_n v^n+\frac{\partial}{\partial t}E_pB_q\right)^*\right]; \tag{15.62}$$

$$\Phi_k^*=\partial_k^* T+\frac{1}{c^2}T\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^*,\quad \Psi_k^*=-E_k^*,\quad T=\frac{\partial\tilde{U}}{\partial S}; \tag{15.63}$$

$$(\partial_k B^k)^*=0,\quad e^{kpq}(\partial_p E_q)^*=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B^k}{\partial t}\right)^*,\quad B^k\equiv B_k,$$
$$(\partial_k D^k)^*=4\pi\rho Z,\quad e^{kpq}(\partial_p H_q)^*=\frac{4\pi}{c}j^{*k}+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial D^k}{\partial t}\right)^*,\quad D^k\equiv D_k. \tag{15.64}$$

При выводе уравнений (15.61), (15.62) из первого соотношения (15.21) слагаемые $(\partial_\nu T^{\mu\nu}_{(A)})^*$ были преобразованы с учетом выражений (15.60) для компонент $T^{\mu\nu}_{(A)}$, уравнений Максвелла (15.64) и уравнений состояния (15.56) для трехмерных векторов индукции и напряженности электрического и магнитного полей. Кроме того, для производных от величин q^k, p^{kq} использовались равенства (13.87). Уравнение неразрывности, уравнения, определяющие обратимые процессы поляризации и намагничивания, а также уравнения, определяющие необратимые процессы теплопроводности, электропроводности и вязкости, по-прежнему будут иметь соответственно вид (13.82), (15.56) и (14.60).

При $c\to\infty$ для плотности энергии среды $\mathscr{E}_{(C)}$ справедливо выражение $\mathscr{E}_{(C)}=\rho c^2+\mathscr{E}^\circ$, в котором слагаемое $\mathscr{E}^\circ$ является конечной величиной. Поэтому на основании соотношений (15.42), (15.54) получим $\tilde{U}=c^2+U^\circ(\rho, S, \varkappa_B)$.

Для перехода к ньютоновской механике, как и в § 14, отбросим слагаемые, пропорциональные c^{-2}, в уравнениях (15.61)—(15.64) и затем перейдем от ГСК $x^{*\nu}$, собственной для рассматриваемой точки x^*, к ГСК x^ν, общей для всех

точек x^*, пренебрегая при этом в преобразованиях тензорных компонент малыми величинами, пропорциональными c^{-2}. Аналогичный переход проведем также и в соотношениях (13.82), (15.56), (14.60). В результате получим следующие уравнения, описывающие в рамках ньютоновской механики рассматриваемый электропроводный и теплопроводный, вязкий, поляризующийся и намагничивающийся газ и инвариантные относительно преобразования Галилея с точностью до членов, пропорциональных c^{-2}:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+U^\circ\right)=\partial_q\left(p^{kq}v_k-q^q\right)+(\rho Z v^k+j^k)E_k+Q^k v_k,$$

$$\rho\frac{dv^k}{dt}=\partial_q p^{kq}+\rho Z E_k+\frac{1}{c}e^{kpq}(\rho Z v_p+j^p)B_q+Q^k;$$

$$p^{kq}\equiv -\rho^2\frac{\partial U^\circ}{\partial\rho}\delta^{kq}+\tau^{kq},$$

$$Q^k\equiv\frac{1}{8\pi}\left(B^2\partial_k\frac{1}{\mu'}-E^2\partial_k\varepsilon'\right)+e^{pqn}E_pB_q\partial_k\left(\frac{\varepsilon'\mu'-1}{4\pi c\mu'}v_n\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon'\mu'-1}{4\pi c\mu'}\rho\frac{d}{dt}\left(e^{kpq}\frac{E_pB_q}{\rho}\right);$$

$$\partial_k B^k=0,\quad e^{kpq}\partial_p E_q=-\frac{1}{c}\frac{\partial B^k}{\partial t},$$

$$\partial_k D^k=4\pi\rho Z,\quad e^{kpq}\partial_p H_q=\frac{4\pi}{c}(\rho Z v^k+j^k)+\frac{1}{c}\frac{\partial D^k}{\partial t};$$

$$D_k=\varepsilon' E_k+\frac{\varepsilon'\mu'-1}{c\mu'}e^{kpq}v_pB_q,\quad H_k=\frac{1}{\mu'}B_k+\frac{\varepsilon'\mu'-1}{c\mu'}e^{kpq}v_pE_q,$$

$$j^k=\gamma\left(E_k+\frac{1}{c}e^{kpq}v_pB_q\right),\quad q^k=-\chi\partial_k T,\quad T=\frac{\partial U^\circ}{\partial S}.$$

Здесь $\varepsilon'=\varepsilon'(\xi^a)$, $\mu'=\mu'(\xi^a)$ — заданные функции от лагранжевых координат. Для плотности ρ и компонент тензора вязких напряжений τ^{kq} по-прежнему получаются уравнения (13.91) и (13.94).

§ 16. Смесь заряженных, реагирующих газов

Определяющие параметры. Рассмотрим модель многокомпонентной сплошной среды, представляющей собой смесь N заряженных, реагирующих газов, для которой

лагранжиан имеет вид

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J^{\alpha}A_{\alpha} - \varepsilon\,(n_i,\ s_i,\ I_{ij},\ S_{ij},\ Q_{ij},\ \varkappa_B). \quad (16.1)$$

Здесь $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$;

$$I_{ij} = -g_{\alpha\beta}I_i^{\alpha}I_j^{\beta},\quad S_{ij} = -g_{\alpha\beta}S_i^{\alpha}S_j^{\beta},\quad Q_{ij} = -g_{\alpha\beta}I_i^{\alpha}S_j^{\beta}; \quad (16.2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i I_i^{\alpha} = 0,\quad u_{\alpha}I_i^{\alpha} = 0,\quad u_{\alpha}S_i^{\alpha} = 0; \quad (16.3)$$

$F_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряженности электромагнитного поля; A_{α} — компоненты его 4-потенциала; J^{α} — компоненты 4-вектора плотности электрического тока; n_i — собственная плотность числа частиц i-го сорта, образующих i-ю компоненту смеси; s_i — собственная плотность энтропии i-й компоненты смеси; I_i^{α} — компоненты 4-вектора плотности диффузионного потока частиц i-го сорта [1]); S_i^{α} — компоненты 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии i-й компоненты смеси; m_i — масса покоя частиц i-го сорта; $\varkappa_B$ — скалярные параметры, являющиеся известными неварьируемыми функциями от лагранжевых координат смеси ξ^a.

Все перечисленные аргументы лагранжиана были определены во второй главе. Напомним некоторые их свойства. Для компонент $F_{\alpha\beta}$, J^{α} справедливы выражения (см. § 5)

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_{[\alpha}A_{\beta]},\quad J^{\alpha} = czu^{\alpha} + j^{\alpha},$$
$$z = \sum_{i=1}^{N} e_i n_i,\quad j^{\alpha} = \sum_{i=1}^{N} e_i I_i^{\alpha}, \quad (16.4)$$

в которых e_i — электрический заряд частиц i-го сорта, образующих i-ю компоненту смеси. Аргументы n_i, I_i^{α} удовлетворяют уравнению баланса числа частиц i-го сорта (4.24), а аргументы s_i, S_i^{α} — уравнению баланса энтропии i-й компоненты смеси (6.20). Для них имеют место полученные в § 4 и 6 параметрические представления через функции $\psi_i^{\alpha}(\xi^{\nu})$, $\psi_i(\xi^{\nu})$, $\varphi_i^{\alpha}(\xi^{\nu})$, $\varphi_i(\xi^{\nu})$, связанные между

[1]) Отметим, что в нерелятивистской механике лагранжиан для смеси газов также может зависеть от векторов плотности диффузионного потока частиц, образующих компоненты смеси [35].

собой независимыми соотношениями[1])

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \psi_i^{\alpha} = 0, \quad u_\alpha \psi_i^{\varkappa} = 0, \quad u_\alpha \varphi_i^{\alpha} = 0, \tag{16.5}$$

причем, согласно равенству (4.50),

$$\psi_i = \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir} \chi_r. \tag{16.6}$$

Здесь $\psi_i^{\varkappa}$, ψ_i — параметры диффузии и производства частиц i-го сорта; $\varphi_i^{\varkappa}$, φ_i — параметры переноса и производства энтропии i-й компоненты смеси; χ_r — параметры r-й реакции; ν_{ir} — стехиометрические коэффициенты. Легко видеть, что все аргументы лагранжиана (16.1) выражаются через функции

$$x^{\nu}(\xi^{\nu}), \quad \varphi_i^{\alpha}(\xi^{\nu}), \quad \varphi_i(\xi^{\nu}), \quad \psi_i^{\alpha}(\xi^{\nu}), \quad \chi_r(\xi^{\nu}), \quad A_\alpha(\xi^{\nu}) \tag{16.7}$$

и их производные. Поэтому функции (16.7) удобно выбрать в качестве определяющих параметров $\mu^A(\xi^{\nu})$.

Вычислим вариации аргументов функции $\Lambda\sqrt{-g}$, используя полученные во второй главе их выражения через определяющие параметры (16.7).

1. *Вариация первого слагаемого* в выражении (16.1) для лагранжиана (умноженного на $\sqrt{-g}$) по-прежнему дается равенством (14 6).

2. *Вариация второго слагаемого* в выражении (16.1) для лагранжиана (умноженного на $\sqrt{-g}$) находится на основании равенств (14.7) и (5.15):

$$\delta\left(\frac{1}{c} J^{\alpha} A_\alpha \sqrt{-g}\right) = \left(\frac{1}{c} J^{\alpha} \delta A_\alpha + \sum_{i=1}^{N} e_i A_\alpha \nabla_{\nu} \frac{\delta \psi_i^{[\alpha} u^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}\right) \sqrt{-g}. \tag{16.8}$$

3. *Вариации аргументов* n_i, I_i^{α}. Легко видеть, что параметрические представления (6.27), (6.28) для собственной плотности энтропии s и компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии S^{α} при формальной

[1]) Отметим, что следствием первых двух соотношений (16.5) является равенство $\sum_{i=1}^{N} m_i \psi_i^0 = 0$ (см. § 4).

подстановке $s \to n_i$, $S^\alpha \to I_i^\alpha$, $\varphi^\alpha \to \psi_i^\alpha$, $\varphi \to \psi_i$ переходят в параметрические представления (4.33), (4.39), (4.40) для величин n_i, I_i^α. Поэтому, производя эту подстановку в выражениях (13.10), (13.12) для вариаций δs, δS^α, получим

$$\delta n_i = \left(n_i \gamma^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} u^{\langle\alpha} I_i^{\beta\rangle}\right) \nabla_\alpha \delta x_\beta - \gamma_\beta^\alpha \nabla_\alpha \left(\gamma_\nu^\beta \frac{\delta\psi_i^\nu}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{\delta\psi_i}{\sqrt{\gamma}}, \tag{16.9}$$

$$\delta I_i^\alpha = -\left(g^{\delta\nu} I_i^\alpha + I_i^{\langle\delta} u^{\nu\rangle} u^\alpha\right) \nabla_\delta \delta x_\nu - c\gamma_\beta^\alpha \nabla_\nu \frac{u^{[\nu} \delta\psi_i^{\beta]}}{\sqrt{\gamma}}, \tag{16.10}$$

причем из равенства (16.5) следует

$$\delta\psi_i = \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir} \delta\chi_r. \tag{16.11}$$

Входящие в формулы (16.9), (16.10) величины δx_α выражаются через вариации δx^ν при помощи равенств (13.13). В нерелятивистской механике выражение для δn_i, аналогичное формуле (16.9), рассматривалось в работе [35].

4. *Вариации аргументов* s_i, S_i^α. Параметрические представления для величин s_i, S_i^α получаются путем добавления индекса i (номера компоненты смеси) к функциям s, S^α, φ^α, φ в параметрических представлениях (6.27), (6.28) для величин s, S^α (см. § 6). Поэтому для вариаций δs_i, δS_i^α справедливы выражения, получающиеся из выражений (13.10), (13.12) для вариаций δs, δS^α путем добавления индекса i к функциям s, S^α, φ^α, φ.

Используя полученные здесь формулы для вариаций δI_i^α, δS_i^α, выражение (7.12) для вариаций $\delta g_{\alpha\beta}$, а также тождества (16.3), найдем

$$\begin{aligned}
\delta I_{ij} &= -\left(I_i^{\langle\alpha} I_j^{\beta\rangle} + 2 I_{ij} g^{\alpha\beta}\right) \nabla_\beta \delta x_\alpha - c I_{\langle i\nu} \nabla_\delta \frac{u^{[\delta} \delta\psi_{j\rangle}^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}, \\
\delta S_{ij} &= -\left(S_i^{\langle\alpha} S_j^{\beta\rangle} + 2 S_{ij} g^{\alpha\beta}\right) \nabla_\beta \delta x_\alpha - c S_{\langle i\nu} \nabla_\delta \frac{u^{[\delta} \delta\varphi_{j\rangle}^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}, \\
\delta Q_{ij} &= -\left(I_i^{\langle\alpha} S_j^{\beta\rangle} + 2 Q_{ij} g^{\alpha\beta}\right) \nabla_\beta \delta x_\alpha - \\
&\qquad - c S_{j\nu} \nabla_\delta \frac{u^{[\delta} \delta\psi_i^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} - c I_{i\nu} \nabla_\delta \frac{u^{[\delta} \delta\varphi_j^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{16.12}$$

Здесь и ниже угловые скобки у нетензорных индексов i, j означают операцию симметризации по этим индексам.

Вариационное уравнение. Исходное вариационное уравнение имеет вид

$$\delta I + \delta W^* + \delta W = 0, \quad I = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \Lambda \sqrt{-g}\, d^4\xi. \tag{16.13}$$

Функционал δW^* для рассматриваемой модели зададим следующим образом [1]):

$$\delta W^* = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(T_i \frac{\delta \varphi_i}{\sqrt{\gamma}} + \Phi_{i\alpha} \frac{\delta \varphi_i^\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \Psi_{i\alpha} \frac{\delta \psi_i^\alpha}{\sqrt{\gamma}} \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{r=1}^{R} X_r \frac{\delta \chi_r}{\sqrt{\gamma}} + \tau^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta x_\alpha \right] \sqrt{-g}\, d^4\xi, \tag{16.14}$$

где

$$\Phi_{i\alpha} u^\alpha = 0, \quad \Psi_{i\alpha} u^\alpha = 0,$$
$$\tau^{\alpha\beta} u_\alpha = \tau_{\nu}^{\cdot\beta} u^\nu = 0, \quad \tau^{[\alpha\beta]} = 0. \tag{16.15}$$

Обоснование первых двух условий (16.15) полностью аналогично обоснованию первого условия (13.16) с заменой φ^α, Φ_α соответственно на φ_i^α, $\Phi_{i\alpha}$ или на ψ_i^α, $\Psi_{i\alpha}$. Последние два условия (16.15) совпадают с последними условиями (13.16) и имеют тот же смысл, что и в § 13. Однако при их обосновании вместо соотношений (13.18) следует использовать равенства

$$\delta_\varepsilon \varphi_i^\alpha = \delta_\varepsilon \varphi_i = \delta_\varepsilon \psi_i^\alpha = \delta_\varepsilon \chi_r = 0,$$
$$\delta_\varepsilon x^\mu = x^\nu \varepsilon_{\nu}^{\cdot\mu} + \varepsilon^\mu, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}. \tag{16.16}$$

Для рассматриваемой модели все вариации в уравнении (16.13) выражаются через вариации определяющих параметров (16.7)

$$\delta x^\nu, \quad \delta \varphi_i^\alpha, \quad \delta \varphi_i, \quad \delta \psi_i^\alpha, \quad \delta \chi_r, \quad \delta A_\alpha \tag{16.17}$$

и производные от них по координатам ξ^α. Система вариаций (16.17) не является независимой, так как функции

---

[1]) Можно использовать также более сложные выражения для δW^*, содержащие слагаемые вида $\Psi_{i\gamma}^{\beta} \nabla_\beta \left(\gamma_\alpha^\nu \delta \psi_i^\alpha / \sqrt{\gamma} \right)$. Аналогичные нерелятивистские модели рассматривались в работе [35]

$\varphi_i^\alpha(\xi^\nu)$, $\psi_i^\alpha(\xi^\nu)$ должны удовлетворять связям (16.5). Варьируя их и записывая первое из полученных соотношений в четырехмерной форме, получим

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma_\nu^\alpha \sum_{i=1}^{N} m_i\,\delta\psi_i^\nu = 0, \quad \delta(u_\alpha\psi_i^\alpha) = 0, \quad \delta(u_\alpha\varphi_i^\alpha) = 0. \qquad (16.18)$$

Вычисление вариаций $\delta(u_\alpha\psi_i^\alpha)$ и $\delta(u_\alpha\varphi_i^\alpha)$ с учетом связей (16.5) приводит к формулам, получающимся из соотношения (13.22) путем замены φ^α соответственно на ψ_i^α и φ_i^α. Учитывая связи методом неопределенных множителей Лагранжа, к левой части вариационного уравнения (16.13) следует добавить функционал

$$\delta R = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\lambda_\alpha\gamma_\nu^\alpha m_i\,\delta\psi_i^\nu + \lambda_{(\psi)}^i\delta(u_\alpha\psi_i^\alpha) + \\ + \lambda_{(\varphi)}^i\delta(u_\alpha\varphi_i^\alpha)\Big]\sqrt{-g}\,d^4\xi. \qquad (16.19)$$

Множители $\lambda_{(\psi)}^i$, $\lambda_{(\varphi)}^i$ находятся из динамических уравнений с учетом первых двух условий (16.15) точно так же, как множитель $\lambda_{(\varphi)}$ в § 13, и оказываются равными нулю. Отметим, что значения функционала δW^* не определяют однозначно коэффициентов $\Psi_{i\nu}$, стоящих при вариациях $\delta\psi_i^\nu$, так как последние не являются независимыми. Воспользовавшись этим обстоятельством, всегда можно переопределить коэффициенты $\Psi_{i\nu}$ так, чтобы коэффициенты $\lambda_\alpha\gamma_\nu^\alpha$ в функционале δR были тождественно равны нулю. Для этого достаточно провести в функционале δW^* замену $\Psi_{i\nu} \to \tilde{\Psi}_{i\nu} \equiv \Psi_{i\nu} + m_i\lambda_\alpha\gamma_\nu^\alpha$, которая не нарушает второго условия (16.15) и благодаря первой связи (16.18) не меняет значений функционала δW^*. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $\Psi_{i\nu}$ определены таким образом, что $\lambda_\alpha\gamma_\nu^\alpha \equiv 0$. В этом случае $\delta R \equiv 0$, и можно использовать непосредственно уравнение (16.13).

Динамические уравнения. Вычисляя вариацию действия для рассматриваемой модели с учетом формул (7.13),

(14.6), (16.8), (16.9), (16.11), (16.12), получим

$$\delta I = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\Big\{\big[\nabla_\beta\big(T^{\alpha\beta}_{(F)}+P^{\alpha\beta}\big)\big]\,\delta x_\alpha -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\Bigg[\Bigg(\gamma^\alpha_\nu\nabla_\beta\Big(\gamma^\beta_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_i}\Big)+\sum_{j=1}^{N}cu^\beta\nabla_{[\beta}\Big(S_{j\nu]}\frac{\partial\varepsilon}{\partial S_{\langle ij\rangle}}+I_{j\nu]}\frac{\partial\varepsilon}{\partial Q_{ji}}\Big)\Bigg)\times$$

$$\times\frac{\delta\varphi_i^\nu}{\sqrt{\gamma}}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_i}\frac{\delta\varphi_i}{\sqrt{\gamma}}-\Big(\gamma^\alpha_\nu\nabla_\beta\Big(\gamma^\beta_\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_i}\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}cu^\beta\nabla_{[\beta}\Big(I_{j\nu]}\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_{\langle ij\rangle}}+S_{j\nu]}\frac{\partial\varepsilon}{\partial Q_{ij}}\Big)-e_iF_{\alpha\nu}u^\alpha\Big)\frac{\delta\psi_i^\nu}{\sqrt{\gamma}}\Bigg]-$$

$$-\sum_{r=1}^{R}\Bigg[\sum_{i=1}^{N}\nu_{ir}\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_i}\Bigg]\frac{\delta\chi_r}{\sqrt{\gamma}}-\Big[\frac{1}{4\pi}\nabla_\beta F^{\alpha\beta}+\frac{1}{c}J^\alpha\Big]\delta A_\alpha\Big\}\sqrt{-g}\,d^4\xi -$$

$$-\frac{1}{c}\int\limits_{\partial\hat{V}+\hat{\Sigma}_+}\Big\{\big[T^{\alpha\beta}_{(F)}+P^{\alpha\beta}\big]\,\delta x_\alpha +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\Bigg[T_{i\nu}\frac{u^{[\beta}\,\delta\varphi_i^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}+\mu_{i\nu}\frac{u^{[\beta}\,\delta\psi_i^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}}\Bigg]-\frac{1}{4\pi}F^{\alpha\beta}\,\delta A_\alpha\Big\}l_\beta\,d^3\xi. \qquad (16.20)$$

Здесь

$$P^{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{N}\Big[\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_i}n_i+\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_i}s_i\Big)\gamma^{\alpha\beta}+\frac{1}{c}\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_i}I_i^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_i}S_i^{\langle\alpha}u^{\beta\rangle}\Big)\Big]-$$

$$-\sum_{i,\,j=1}^{N}\Big[\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_{ij}}\big(I_i^{\langle\alpha}I_j^{\beta\rangle}+2I_{ij}g^{\alpha\beta}\big)+\frac{\partial\varepsilon}{\partial S_{ij}}\big(S_i^{\langle\alpha}S_j^{\beta\rangle}+2S_{ij}g^{\alpha\beta}\big)+$$

$$+\frac{\partial\varepsilon}{\partial Q_{ij}}\big(I_i^{\langle\alpha}S_j^{\beta\rangle}+2Q_{ij}g^{\alpha\beta}\big)\Big]+\varepsilon g^{\alpha\beta}, \qquad (16.21)$$

$$T_{i\nu}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_i}u_\nu-c\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial S_{\langle ij\rangle}}S_{j\nu}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial Q_{ji}}I_{j\nu}\Big), \qquad (16.22)$$

$$\mu_{i\nu}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_i}u_\nu-c\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_{\langle ij\rangle}}I_{j\nu}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial Q_{ij}}S_{j\nu}\Big)+e_iA_\nu. \qquad (16.23)$$

Подставляя в вариационное уравнение (16.13) выражения (16.20), (16.14) для δI, δW^*, найдем систему динамических уравнений для непрерывных процессов и

функционал δW [1]):

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \quad T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(F)} + P^{\alpha\beta} - \tau^{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_i} = T_i, \tag{16.24}$$

$$-\gamma^\beta_\nu \nabla_\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_i} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_i} u^\beta \nabla_\beta u_\nu + \\ + c u^\beta \sum_{i=1}^{N} \nabla_{[\beta} \left(S_{i\nu]} \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_{\langle ij\rangle}} + I_{i\nu]} \frac{\partial \varepsilon}{\partial Q_{ji}} \right) = \Phi_{i\nu}, \tag{16.25}$$

$$-\gamma^\beta_\nu \nabla_\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i} u^\beta \nabla_\beta u_\nu + \\ + c u^\beta \sum_{i=1}^{N} \nabla_{[\beta} \left(I_{i\nu]} \frac{\partial \varepsilon}{\partial I_{\langle ij\rangle}} + S_{i\nu]} \frac{\partial \varepsilon}{\partial Q_{ij}} \right) - e_i F_{\alpha\nu} u^\alpha = \Psi_{i\nu}, \tag{16.26}$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \nu_{ir} \mu_i = X_r \quad \left(\mu_i \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i} \right),$$

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\alpha, \qquad J^\alpha \equiv \sum_{i=1}^{N} e_i (c n_i u^\alpha + I_i^\alpha), \tag{16.27}$$

$$\delta W = \frac{1}{c} \int\limits_{\partial \hat{V} + \hat{\Sigma}_\pm} \left\{ T^{\alpha\beta}\, \delta x_\alpha + \sum_{i=1}^{N} \left(T_{i\nu} \frac{u^{[\beta}\, \delta \varphi_i^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_{i\nu} \frac{u^{[\beta}\, \delta \psi_i^{\nu]}}{\sqrt{\gamma}} \right) - \frac{F^{\alpha\beta}}{4\pi} \delta A_\alpha \right\} l_\beta \, d^3\zeta. \tag{16.28}$$

Первое уравнение (16.24) с учетом второго представляет собой уравнение движения смеси заряженных газов в электромагнитном поле. Как будет показано ниже, оно совпадает с уравнением энергии-импульса, вытекающим из теоремы Нётер, причем компоненты $T^{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора энергии-импульса смеси газов и электромагнитного поля. Последнее равенство (16.24) при $= 1, \ldots, N$ можно рассматривать как определение обобщенных абсолютных температур компонент смеси. Уравнение (16.25) служит для определения компонент 4-вектора плотности внутреннего потока энтропии S_i^α или 4-вектора плотности потока тепла $q_i^\alpha \equiv T_i S_i^\alpha$ i-й компоненты смеси. Вместе с уравнением баланса энтропии (6.20) оно описывает процесс переноса энтропии i-й компоненты смеси. Первое

[1]) С учетом сделанного выше замечания о равенстве нулю множителей Лагранжа.

уравнение (16.26) служит для определения компонент 4-вектора плотности диффузионного потока частиц, образующих i-ю компоненту смеси, и вместе с уравнением баланса числа частиц i-го сорта (4.24) описывает процесс их переноса. Второе уравнение (16.26) можно рассматривать как определение величины X_r, называемой *химическим сродством r-й реакции*. Оно используется при нахождении локальной скорости r-й реакции. Производные $\partial\varepsilon/\partial n_i \equiv \mu_i$, входящие в уравнения (16.26), можно рассматривать как обобщенные химические потенциалы компонент смеси. Уравнение (16.27) вместе с соотношениями (5.35) и (16.4) образует записанную в четырехмерной форме систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в многокомпонентной проводящей сплошной среде. Замыкающие систему уравнений (16.24)—(16.27) законы, которые можно использовать для независимого определения коэффициентов при вариациях в функционале δW^*, рассмотрены ниже.

Условия на разрывах. Как и в предыдущих параграфах, будем исследовать разрывы, на которых функции $x^\nu(\xi^\nu)$ непрерывны. Рассмотрим кинематические соотношения, связывающие значения вариаций определяющих параметров на двух сторонах гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$. Для вариаций δx^ν, δA_α по-прежнему примем условия (13.33), (14.28). Соотношения на разрыве для вариаций $\delta\varphi_i^\alpha$, $\delta\psi_i^\alpha$ получим, учитывая физический смысл параметров φ_i^α, ψ_i^α (см. § 6 и 4) и рассматривая гиперповерхность разрыва как бесконечно тонкий четырехмерный слой, в котором 4-вектор плотности потока энтропии i-й компоненты смеси s_i и 4-вектор плотности потока числа частиц i-го сорта η_i остаются ограниченными величинами. Кроме того, в случае, когда на гиперповерхности разрыва $u^\alpha l_\alpha = 0$, еще предположим, что в указанном четырехмерном слое локальная скорость изменения энтропии i-й компоненты смеси σ_i и локальная скорость изменения числа частиц i-го сорта ν_i также являются ограниченными величинами. При этом все рассуждения дословно совпадают с рассуждениями, проведенными в § 13 при выводе кинематических соотношений на разрыве для параметров φ^α, если в последних величины s^α, φ^α, σ, φ заменить соответственно на s_i^α, φ_i^α, σ_i, φ_i или на η_i^α, ψ_i^α, ν_i, ψ_i. В результате для величин s_i^α, φ_i^α, η_i^α, ψ_i^α получаются кинематические соотношения, полностью аналогичные соотноше-

ниям для s^α, φ^α из § 13:

$$\sigma_{ci} \equiv \frac{-1}{\sqrt{|G|}} \{s_i^\alpha l_\alpha\}_-^+ = -\frac{c}{\sqrt{|G|}} \frac{u^\nu l_\nu}{\sqrt{\gamma}} [\varphi_i]_-^+, \tag{16.29}$$

$$s_i^\alpha \equiv c s_i u^\alpha + S_i^\alpha;$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{-g}} l_\alpha \varphi_i^\alpha\right\}_-^+ = 0, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{-g}} l_\alpha \delta\varphi_i^\alpha\right\}_-^+ = 0 \text{ при } u^\alpha l_\alpha = 0, \tag{16.30}$$

$$[\varphi_i^a]_-^+ = 0, \quad [\delta\varphi_i^a]_-^+ = 0 \quad \text{при} \quad u^\alpha l_\alpha \neq 0;$$

$$\nu_{ei} \equiv \frac{-1}{\sqrt{|G|}} \{\eta_i^\alpha l_\alpha\}_-^+ = -\frac{e}{\sqrt{|G|}} \frac{u^\nu l_\nu}{\sqrt{\gamma}} [\psi_i]_-^+, \tag{16.31}$$

$$\eta_i^\alpha \equiv c n_i u^\alpha + I_i^\alpha;$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{-g}} l_\alpha \psi_i^\alpha\right\}_-^+ = 0, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{-g}} l_\alpha \delta\psi_i^\alpha\right\}_-^+ = 0 \text{ при } u^\alpha l_\alpha = 0, \tag{16.32}$$

$$[\psi_i^a]_-^+ = 0, \quad [\delta\psi_i^a]_-^+ = 0 \quad \text{при} \quad u^\alpha l_\alpha \neq 0.$$

Используя тождество (13.39), условия (16.30) и (16.32) при $u^\alpha l_\alpha \neq 0$ можно представить в ковариантном виде, аналогичном соотношению (13.44).

Рассмотрим динамические условия на разрывах. Используя кинематические соотношения (13.33), (16.30), (16.32), (14.28) и полагая вариации определяющих параметров равными нулю на границе $\partial\hat{V}$, представим выражение (16.28) для функционала δW в виде[1])

$$\delta W_c = \frac{1}{c} \int\limits_{\hat{\Sigma}_c} \Big(\{T^{\beta}_{\alpha\cdot} \xi^\alpha_\nu l_\beta\}_-^+ \delta x_+^\nu + \sum_{i=1}^{N} \Big(\Big\{T_{i\,[\nu} l_{\beta]} \frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\Big\}_-^+ \delta\varphi_{i+}^\nu + \Big\{\mu_{i\,[\nu} l_{\beta]} \frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\Big\}_-^+ \delta\psi_{i+}^\nu \Big) - \frac{1}{4\pi} \{F^{\alpha\beta} l_\beta\} \delta A_\alpha^+ \Big) d^3\zeta. \tag{16.33}$$

Задавая значения функционала δW_c, определенного равенством (16.33), получим динамические условия на гиперповерхности разрыва $\hat{\Sigma}_c$. Как и в предыдущих параграфах, ограничимся случаем $\delta W_c = 0$. Вариации $\delta\varphi_{i+}^\nu$, $\delta\psi_{i+}^\nu$, входящие в это уравнение, должны удовлетворять связям (16.18). Учитывая их методом неопределенных множителей

[1]) См. примечание перед формулой (13.45). Все сказанное там остается в силе при замене $\delta\varphi^\nu$ на $\delta\varphi_i^\nu$ или на $\delta\psi_i^\nu$.

Лагранжа, получим уравнение

$$\delta W_c + \frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma_c}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mu_\alpha}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\nu m_i\,\delta\psi^\nu_i + \mu_{(\psi)i}\delta\left(u_\alpha\psi^\alpha_i\right) + \right.$$

$$\left. + \mu_{(\varphi)i}\delta\left(u_\alpha\varphi^\alpha_i\right)\right)_+ d^3\zeta = 0, \qquad (16.34)$$

где μ_α, $\mu_{(\psi)i}$, $\mu_{(\varphi)i}$ — неопределенные множители Лагранжа. Подставляя в уравнение (16.34) выражение (16.33) для функционала δW_c и исключая множители Лагранжа, найдем следующие динамические условия на разрыве[1]):

$$\left\{T^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\xi^\alpha l_\beta\right\}^+_- = 0, \quad \left\{T_{i\,[\nu}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_- = 0,$$

$$\left\{\mu_{i\,[\nu}l_{\beta]}\frac{u^\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}^+_- = -\frac{m_i}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\nu\mu_\alpha, \quad \left\{F^{\alpha\beta}l_\beta\right\}^+_- = 0. \qquad (16.35)$$

В следующем пункте будет показано, что первое равенство (16.35) совпадает с вытекающим из теоремы Нётер условием непрерывности на разрыве потока энергии-импульса смеси газов и электромагнитного поля.

Второе равенство (16.35) вместе с соотношениями (16.29) образует условия на разрыве для уравнения баланса энтропии i-й компоненты смеси. Это равенство полностью аналогично второму динамическому условию (13.46) и может быть представлено в виде соотношений, получающихся из равенств (13.48) и (13.49) — (13.51) путем замены величин T, T_μ на T_i, $T_{i\mu}$. Например,

$$[T_i]^+_- = 0 \quad \text{при} \quad u^\alpha l_\alpha = 0,$$

$$[T_i u_\tau]^+_- = 0 \quad \text{при} \quad u^\alpha l_\alpha \neq 0, \quad l_\alpha l^\alpha \neq 0, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial S^\alpha_i} = 0. \qquad (16.36)$$

Таким образом, если в смеси теплопроводных ($q_i \equiv T_i S_i \neq 0$) газов на гиперповерхности разрыва $\delta W_c = 0$, $u^\alpha l_\alpha = 0$ и величины s_i, σ_i внутри разрыва, рассматриваемого как бесконечно тонкий четырехмерный слой, остаются ограниченными, то на таком разрыве температуры $T_i \equiv \partial\varepsilon/\partial s_i$ компонент смеси должны быть непрерывны. Если же в смеси теплопроводных газов с лагранжианом, не зависящим от S^α_i, на гиперповерхности разрыва $\delta W_c = 0$,

[1]) Легко видеть, что множители $\mu_{(\psi)i}$, $\mu_{(\varphi)i}$ оказываются тождественно равными нулю.

$u^\alpha l_\alpha \neq 0$, $l_\alpha l^\alpha \neq 0$, а величины s_i внутри разрыва, рассматриваемого как бесконечно тонкий четырехмерный слой, остаются ограниченными, то на таком разрыве касательные к нему 4-векторы $T_i u_\tau$ должны быть непрерывны.

Третье равенство (16.35) вместе с соотношениями (16.31) составляет условия на разрыве для уравнения баланса числа частиц i-го сорта, образующих i-ю компоненту смеси. Причем в силу кинематического соотношения (14.27) и тождества $u^\beta/\sqrt{\gamma} \equiv \delta^\beta_0/\sqrt{-g}$ величины $e_i A_\gamma$, входящие в выражение (16.23) для $\mu_{i\gamma}$, из третьего динамического условия (16.35) выпадают. Используя рассуждения, проведенные при выводе соотношений (13.48) — (13.51), третье условие (16.35) можно представить в виде соотношений, получающихся из равенств (13.48) — (13.51) путем замены величин T и T_ν соответственно на $\mu'_i - \mu'_j$ и $\mu'_{i\nu} - \mu'_{j\nu}$, где $\mu'_i \equiv \mu_i/m_i$, $\mu'_{i\nu} \equiv \mu_{i\nu}/m_i$. Например,

$$
\begin{gathered}
[\mu'_1]^\pm = [\mu'_2]^\pm = \ldots = [\mu'_N]^\pm \quad \text{при} \quad u^\alpha l_\alpha = 0, \\
[\mu'_1 u_\tau]^\pm = \ldots = [\mu'_N u_\tau]^\pm \quad \text{при} \quad u^\alpha l_\alpha \neq 0, \\
l_\alpha l^\alpha \neq 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial I_i^\alpha} = 0.
\end{gathered}
\tag{16.37}
$$

Следовательно, если в рассматриваемой смеси диффундирующих ($I_i \neq 0$) газов на гиперповерхности разрыва $\delta W_c = 0$, $u^\alpha l_\alpha = 0$ и величины η_i, ν_i остаются ограниченными, то на таком разрыве скачки химических потенциалов $\mu_i \equiv \partial\varepsilon/\partial n_i$, деленных на массы m_i, должны быть одинаковы для всех компонент смеси. Если же в смеси диффундирующих газов с функцией ε, не зависящей от I_i^α, на гиперповерхности разрыва $\delta W_c = 0$, $u^\alpha l_\alpha \neq 0$, $l_\alpha l^\alpha \neq 0$ и величины η_i остаются ограниченными, то на таком разрыве скачки касательных к нему 4-векторов $\mu'_i u_\tau$ должны быть одинаковы для всех компонент смеси.

Последнее равенство (16.35) совпадает с последним динамическим условием (14.30) и имеет тот же физический смысл (см. § 14).

Динамические тождества. Рассмотрим динамические тождества для смеси газов и электромагнитного поля. Для этого, как и в § 13 — 15, применим теорию, развитую в предыдущей главе. Сравнивая общие выражения (7.19), (9.1) и (10.13) для функционалов δW^*, δW и вариаций $\delta_\varepsilon \mu^A$, соответствующих бесконечно малому преобразованию Пуанкаре (10.11), с их конкретными выраже-

ниями (16.14), (16.28) и (16.16), (14.33), найдем, что для рассматриваемой модели коэффициенты M_A, M_A^α, $M_A^{\alpha\beta}$, W_A^α, $W_A^{\alpha\beta}$, $I_{\mu\nu}^A$, I_ν^A, входящие в указанные общие выражения (7.19), (9.1) и (10.13), имеют вид

$\bar{\mu}^A$	$\bar{M}_A$	$\bar{M}_A^\alpha$	$\bar{M}_A^{\alpha\beta}$	$\bar{W}_A^\alpha$	$\bar{W}_A^{\alpha\beta}$	$I_{\mu\nu}^A$	I_ν^A
x^λ	0	$\tau_\lambda^{\cdot\alpha}$	0	$T_\gamma^{\cdot\alpha}\xi_\lambda^\gamma$	0	$x_{[\mu}\delta_{\nu]}^\lambda$	δ_ν^λ
φ_i^γ	$\dfrac{\Phi_{i\gamma}}{\sqrt{\gamma}}$	0	0	$T_{i\delta}\dfrac{u^{[\alpha}\delta_\gamma^{\delta]}}{\sqrt{\gamma}}$	0	0	0
φ_i	$\dfrac{T_i}{\sqrt{\gamma}}$	0	0	0	0	0	0
ψ_i^γ	$\dfrac{\Psi_{i\gamma}}{\sqrt{\gamma}}$	0	0	$\mu_{i\delta}\dfrac{u^{[\alpha}\delta_\gamma^{\delta]}}{\sqrt{\gamma}}$	0	0	0
χ_r	$\dfrac{-X_r}{\sqrt{\gamma}}$	0	0	0	0	0	0
μ^A	M_A	M_A^α	$M_A^{\alpha\beta}$	W_A^α	$W_A^{\alpha\beta}$	$I_{\mu\nu}^A$	I_ν^A
A_γ	0	0	0	$-\dfrac{1}{4\pi}F^{\gamma\alpha}$	0	0	0

(16.38)

Рассмотрим законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, вытекающие из однородности и изотропности пространства событий. Легко проверить, что для вариаций (16.16), (14.33) все условия теоремы Нётер удовлетворяются. Следовательно, на действительных процессах выполняются тождества (10.6) — (10.10), (10.15), (10.16), записанные с учетом выражений (16.38) при $I_B^A = I_\nu^A$ и $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$. Указанные тождества выражают законы сохранения энергии-импульса (при $I_B^A = I_\nu^A$) и момента количества движения (при $I_B^A = I_{\mu\nu}^A$) смеси газов и электрического поля. Общие выражения (10.14) для компонент $T\dot{\nu}\dot{.}^\alpha$, $M_{\dot{\mu}}\dot{\nu}\dot{.}^\alpha$ тензоров энергии-импульса и момента количества движения в рассматриваемой модели на основании выражений (16.38) принимают вид

$$T\dot{\nu}\dot{.}^\alpha = T_\gamma^{\cdot\alpha}\xi_\nu^\gamma, \quad M_{\dot{\mu}\dot{\nu}}\dot{.}^\alpha = x_{[\mu}\xi_{\nu]}^\gamma T_\gamma^{\cdot\alpha}, \quad T_\nu^{\cdot\alpha} \equiv g_{\nu\beta}T^{\beta\alpha}. \tag{16.39}$$

Здесь $T^{\beta\alpha}$ — компоненты, определенные вторым равенством (16.24). Следовательно, они являются контравариантными

компонентами тензора энергии-импульса смеси газов и электромагнитного поля в ССК. Поэтому для рассматриваемой модели уравнение энергии-импульса (10.15), записанное относительно ССК, совпадает с уравнением движения (16.24), а условие баланса на разрыве потока энергии-импульса (10.15) совпадает с первым динамическим условием на разрыве (16.35). Тождества (10.16), представляющие собой уравнение момента количества движения и условие баланса на разрыве потока момента количества движения, для рассматриваемой модели являются следствием уравнений (10.15) и симметричности компонент тензора энергии-импульса смеси газов и электромагнитного поля, определенных вторым равенством (16.24).

Очевидно, компоненты тензора энергии-импульса рассматриваемой смеси газов и электромагнитного поля представляют собой сумму компонент двух симметричных тензоров $\boldsymbol{T}_{(C)}$ и $\boldsymbol{T}_{(F)}$:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(C)} + T^{\alpha\beta}_{(F)}, \quad T^{\alpha\beta}_{(C)} \equiv P^{\alpha\beta} - \tau^{\alpha\beta}. \tag{16.40}$$

Тензор $\boldsymbol{T}_{(F)}$ зависит только от тензора напряженности электромагнитного поля $\boldsymbol{F}$, а тензор $\boldsymbol{T}_{(C)}$ от него совсем не зависит. Поэтому их можно рассматривать как тензор энергии-импульса смеси газов $\boldsymbol{T}_{(C)}$ и тензор энергии-импульса электромагнитного поля $\boldsymbol{T}_{(F)}$. Определенная равенством (12.8) плотность внутренней энергии для рассматриваемой модели на основании соотношений (16.40), (16.21), (16.15) и (14.6) представляется в виде суммы

$$\mathscr{E} \equiv T^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = \mathscr{E}_{(C)} + \mathscr{E}_{(F)}, \tag{16.41}$$

где

$$\mathscr{E}_{(C)} = \varepsilon - 2 \sum_{i,\, j=1}^{N} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial I_{ij}} I_{ij} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_{ij}} S_{ij} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial Q_{ij}} Q_{ij} \right), \tag{16.42}$$

а величина $\mathscr{E}_{(F)}$ определена равенством (14.37). Слагаемое $\mathscr{E}_{(C)}$ можно рассматривать как плотность внутренней энергии смеси газов, а слагаемое $\mathscr{E}_{(F)}$ — как плотность энергии электромагнитного поля в собственной ГСК. Следовательно, если функция ε в выражении (16.1) для лагранжиана не зависит от аргументов I_{ij}, S_{ij}, Q_{ij}, то она совпадает с плотностью внутренней энергии смеси газов.

Рассмотрим тождества, вытекающие из инвариантности электромагнитного поля относительно градиентного преобразования. Согласно общей теории, изложенной в § 10, для рассматриваемой модели действие должно быть инвариантно относительно градиентного преобразования (10.17), (10.18)[1]). Следствием этого являются тождества (10.25), (10.27), которым должен удовлетворять лагранжиан. Используя выражения (16.20), (5.14) и (5.15) для δI, J^α и $\delta\psi^\alpha$ и антисимметричность компонент $F^{\alpha\beta}$, $\psi_i^{[\alpha}u^{\beta]}/\sqrt{\gamma}$, легко проверить, что для рассматриваемой модели действие инвариантно относительно градиентного преобразования (10.17), (10.18). Соответствующие выкладки получаются из преобразований (14.38) путем подстановки в них выражения (5.15) для ψ^α с учетом кинематических соотношений на разрыве (16.32) для параметров диффузии ψ_i^a. Лагранжиан (16.1), очевидно, имеет вид (10.25), и, как отмечалось в § 10, $\partial\Lambda/\partial A_\alpha = -c^{-1}J^\alpha$. При этом соотношения (10.27) тождественно удовлетворяются в силу параметрических представлений (5.14), (5.15) для компонент J^α и кинематических соотношений (16.32) для параметров диффузии ψ_i^α. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству (14.38) равенства $\delta_A I = 0$.

Получим инвариантное уравнение энергии и тождество для коэффициентов при вариациях в функционале δW^*, вытекающее из вариационного уравнения для действительных процессов. Легко видеть, что все определяющие параметры (16.7), кроме A_α, относятся к типу параметров $\bar{\mu}^A$ (см. § 10), связи (16.5) относятся к связям типа (10.35), а коэффициенты при вариациях в функционале δW^* (16.14) и лагранжиан (16.1) удовлетворяют условиям (10.36). Следовательно, применима общая теория, развитая в § 11 и 12, и, в частности, для действительных процессов выполняются тождества (12.7), (12.10). Входящие в них компоненты M^α, определенные равенством (11.48), для рассматриваемой модели вычисляются точно так же, как и в § 13, и оказываются равными нулю. Компоненты W^α, определенные равенством (12.6), на основании соотношений (16.38), параметрических представлений для величин S_i^γ, I_i^γ и выражений (16.1), (16.40), (14.6), (16.22), (16.23), (16.4) для Λ, $T^{\alpha\beta}$, $T^{\alpha\beta}_{(F)}$, $T_{i\delta}$, $\mu_{i\delta}$, J^γ можно пред-

[1]) См. примечание перед формулой (10.19).

ставить в виде

$$W^\alpha = cT^{\beta\alpha}_{(C)}u_\beta - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_i}S_i^\alpha + \frac{\partial\varepsilon}{\partial n_i}I_i^\alpha\right) +$$

$$+ c\left[\frac{1}{16\pi}F^{\beta\nu}F_{\beta\nu} + 2\sum_{i,\,j=1}^{N}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_{ij}}I_{ij} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial S_{ij}}S_{ij} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial Q_{ij}}Q_{ij}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{c}J^\nu A_\nu\right]u^\alpha + \frac{c}{4\pi}F^{\alpha\beta}\nabla_\beta(A_\nu u^\nu) - J^\alpha A_\nu u^\nu. \qquad (16.43)$$

Подставим в тождество (12.7) выражения (16.1), (13.55) и (16.43) для Λ, M_α и W^α и учтем, что в силу уравнений (16.4), (16.24), (16.27), (16.40), выражений (14.6) для $T^{\alpha\beta}_{(F)}$ и антисимметричности компонент $F^{\alpha\beta}$ для рассматриваемой модели выполняются соотношения (14.40). Используя затем выражение (16.42) для плотности внутренней энергии смеси газов и определения температур T_i и химических потенциалов μ_i компонент смеси ($i = 1, 2, \ldots, N$), окончательно получим соотношение

$$\nabla_\alpha(c\mathscr{E}_{(C)}u^\alpha) =$$

$$= T^{\beta\alpha}_{(C)}\nabla_\alpha c u_\beta - \nabla_\alpha\sum_{i=1}^{N}\left(q_i^\alpha + \mu_i I_i^\alpha\right) + F_{\beta\nu}u^\beta j^\nu, \qquad (16.44)$$

в котором $q_i^\alpha \equiv T_i S_i^\alpha$ — компоненты 4-вектора плотности потока тепла в i-й компоненте смеси. Соотношение (16.44) можно рассматривать как инвариантное уравнение энергии, представляющее собой релятивистское обобщение уравнения притока тепла для смеси заряженных газов в электромагнитном поле.

Подставляя в тождество (12.10) выражения (16.38), (13.55) для величин $\bar{\mu}^A$, $\bar{M}_A$, $\bar{M}^\alpha_A$, $\bar{M}^{\alpha\beta}_A$ и M^α, отвечающих рассматриваемой модели смеси газов и электромагнитного поля, получим равенство

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{T_i}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi_i}{d\tau} + \frac{\Phi_{i\alpha}}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\varphi_i^\alpha}{d\tau} + \frac{\Psi_{i\alpha}}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\psi_i^\alpha}{d\tau}\right) -$$

$$- \sum_{r=1}^{K}\frac{X_r}{\sqrt{\gamma}}\frac{d\chi_r}{d\tau} + \tau^\beta_\nu\partial_\beta\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \qquad (16.45)$$

Последнее слагаемое в его левой части преобразуем при помощи второго соотношения (13.60). Слагаемые же, содержащие величины $\Phi_{i\alpha}$, $\Psi_{i\alpha}$, преобразуем при помощи равенств, получающихся из первого соотношения (13.60) путем замены величин φ^α, Φ_α соответственно на φ_i^α, $\Phi_{i\alpha}$ и на ψ_i^α, $\Psi_{i\alpha}$. Учитывая затем параметрические представления для локальной скорости изменения энтропии i-й компоненты смеси и для компонент 4-векторов плотности внутреннего потока энтропии i-й компоненты смеси и плотности диффузионного потока частиц i-го сорта [1]), а также выражение (4.49) для локальной скорости r-й реакции ω_r и выражение (3.36) для компонент 4-тензора скоростей деформаций $e_{\alpha\beta}$, преобразуем равенство (16.45) к окончательному виду

$$\sum_{i=1}^{N}\left(T_i\sigma_i+\Phi_{i\alpha}S_i^\alpha+\Psi_{i\alpha}I_i^\alpha\right)-\sum_{r=1}^{R}X_r\omega_r-\tau^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}=0. \qquad (16.46)$$

Это соотношение представляет собой тождество, которому должны удовлетворять коэффициенты T_i, $\Phi_{i\alpha}$, $\Psi_{i\alpha}$, X_r, $\tau^{\alpha\beta}$, стоящие при вариациях в функционале δW^* для модели смеси разнотемпературных, теплопроводных, диффундирующих, реагирующих, вязких газов.

Необратимые процессы. Для завершения построения рассматриваемой модели требуется задать законы, определяющие коэффициенты при вариациях в функционале δW^* независимо от динамических уравнений. При этом должно выполняться тождество (16.46), которое можно записать следующим образом:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_i'\frac{T_i}{T}-S_i^\alpha\frac{\Phi_{i\alpha}}{T}-I_i^\alpha\frac{\Psi_{i\alpha}}{T}\right)+$$

$$+\sum_{r=1}^{R}\omega_r\frac{X_r}{T}+\tau^{\alpha\beta}\frac{e_{\alpha\beta}}{T}, \qquad (16.47)$$

---

[1]) Имеются в виду равенства, получающиеся из соотношений (6.29), (6.28) при замене в них величин σ, φ, S^α, φ^α на σ_i, φ_i, S_i^α, φ_i^α, а также формулы (4.33) для I_i^α.

где[1])

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \quad \sigma_i' = c_i\sigma - \sigma_i, \quad T = \sum_{i=1}^{N} c_i T_i, \quad c_i = \frac{n_i}{\sum\limits_i n_i}. \tag{16.48}$$

Из определения величин σ_i' следует, что они связаны между собой соотношением

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i' = 0. \tag{16.49}$$

Рассматривая величины $T^{-1}T_i$, $-T^{-1}\Phi_{i\alpha}$, $-T^{-1}\Psi_{i\alpha}$, $T^{-1}X_r$, $T^{-1}e_{\alpha\beta}$ как обобщенные термодинамические силы X^B, а величины σ_i', S_i^α, I_i^α, ω_r, $\tau^{\alpha\beta}$ — как сопряженные им обобщенные потоки J_B, легко видеть, что выражение (16.47) для диссипативной функции σ имеет вид (12.11). Как и в предыдущих параграфах, применяя общие линейные законы (12.21), для необратимых процессов, близких к обратимым, получим кинетические уравнения, которые можно использовать для определения величин T_i, $\Phi_{i\alpha}$, $\Psi_{i\alpha}$, X_r, $\tau^{\alpha\beta}$. Входящие в эти уравнения коэффициенты L_B^A, вообще говоря, являются тензорными функциями от определяющих параметров, их производных и известных параметров $\varkappa_B(\xi^a)$ (например, от величин $\gamma^{\alpha\beta}$, u^α, $F_{\alpha\beta}$, n_i, $T_i \equiv \equiv \partial\varepsilon/\partial s_i$) и задаются на основании дополнительных теоретических гипотез и экспериментальных данных. Указанные коэффициенты должны удовлетворять соотношениям, обеспечивающим неотрицательность диссипативной функции σ, а также равенствам, вытекающим из тождеств (16.49), (16.3) и последних двух условий (16.15). Обобщенные термодинамические силы $-T^{-1}\Phi_{i\alpha}$, $-T^{-1}\Psi_{i\alpha}$, $e_{\alpha\beta}$ связаны между собой первыми двумя соотношениями (16.15) и последними двумя условиями (13.64). Поэтому коэффициенты L_B^A определяются неоднозначно. При этом, как доказывается в термодинамике необратимых процессов [9—14], коэффициенты L_B^A можно выбрать так, что будут выполняться соотношения Онсагера — Казимира (12.23).

Рассмотрим более подробно частный случай, когда среди тензорных аргументов коэффициентов L_B^A присутст-

[1]) Величину T можно рассматривать как среднюю температуру смеси газов.

вуют только компоненты $\gamma^{\alpha\beta}$, u^{α}, и кинетические уравнения с учетом соотношений Онсагера — Казимира имеют следующий простой вид:

$$
\begin{aligned}
T\sigma_i' &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} T_j + \sum_{r=1}^{R} a_{ir} X_r + a_i \gamma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}, \\
TS_i^{\gamma} &= \sum_{j=1}^{N} (\chi_{ij} \Phi_j^{\gamma} + b_{ij} \Psi_j^{\gamma}), \\
TI_i^{\gamma} &= \sum_{j=1}^{N} (b_{ji} \Phi_j^{\gamma} + \mathscr{D}_{ij} \Psi_j^{\gamma}), \\
T\omega_r &= \sum_{i=1}^{N} a_{ir} T_i + \sum_{q=1}^{R} k_{rq} X_q + k_r \gamma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}, \\
\tau^{\alpha\beta} &= \gamma^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N} a_i T_i + \frac{1}{T} \sum_{r=1}^{R} k_r X_r + \lambda \gamma^{\nu\delta} e_{\nu\delta} \right) + 2\mu e^{\alpha\beta},
\end{aligned}
\tag{16.50}
$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, N$; $q, r = 1, 2, \ldots, R$;

$$
\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \chi_{ij} = \chi_{ji}, \quad \mathscr{D}_{ij} = \mathscr{D}_{ji}, \quad k_{rq} = k_{qr}. \tag{16.51}
$$

Входящие в эти уравнения скалярные коэффициенты переноса

$$
\alpha_{ij}, \ a_{ir}, \ a_i, \ \chi_{ij}, \ b_{ij}, \ \mathscr{D}_{ij}, \ k_{rq}, \ k_r, \ \lambda, \ \mu
$$

могут зависеть, например, от собственной плотности частиц различных сортов n_i и от температур компонент смеси $T_i = \partial\varepsilon/\partial s_i$ и должны удовлетворять вытекающим из тождеств (16.49), (16.3) равенствам

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} a_{ir} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} a_i = 0, \\
&\sum_{i=1}^{N} m_i b_{ji} = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \mathscr{D}_{ij} = 0.
\end{aligned}
\tag{16.52}
$$

Используя их и учитывая соотношения Онсагера (16.51), кинетические уравнения (16.50) можно представить в виде

$$T\sigma_i' = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(T_j - T_i) + \sum_{r=1}^{N} a_{ir}X_r + a_i\gamma^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta},$$

$$TS_i^\gamma = \sum_{j=1}^{N} [\chi_{ij}\Phi_j^\gamma + m_j b_{ij}(m_j^{-1}\Psi_j^\gamma - m_i^{-1}\Psi_i^\gamma)],$$

$$TI_i^\gamma = \sum_{j=1}^{N} [b_{ji}\Phi_j^\gamma + m_j\mathscr{D}_{ij}(m_j^{-1}\Psi_j^\gamma - m_i^{-1}\Psi_i^\gamma)], \qquad (16.53)$$

$$T\omega_r = \sum_{i=1}^{N} a_{ir}(T_i - T) + \sum_q k_{rq}X_q + k_r\gamma^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta},$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}\left[\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N} a_i(T_i - T) + \frac{1}{T}\sum_{r=1}^{R} k_r X_r + \lambda\gamma^{\gamma\delta}e_{\gamma\delta}\right] + 2\mu e^{\alpha\beta}.$$

Первое уравнение (16.53) вместе с определением (16.48) величин σ_i' и выражением (16.47) для σ задает локальные скорости изменения энтропии компонент смеси σ_i. Для однотемпературной смеси газов, т. е. для такой смеси газов, в которой выравнивание температур компонент смеси происходит бесконечно быстро, имеем $\alpha_{ij} = \infty$ $(i \neq j)$ и

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_N = T. \qquad (16.54)$$

В этом случае первый член в выражении (16.47) для диссипативной функции σ можно опустить, так как в силу тождества (16.49) он равен нулю.

Второе равенство (16.53) с учетом выражений для Φ_i^γ, Ψ_i^γ, следующих из динамических уравнений (16.25), (16.26), и определения компонент 4-вектора плотности потока тепла i-й компоненты смеси $q_i^\alpha \equiv T_i S_i^\alpha$ представляет собой релятивистский закон теплопроводности для i-й компоненты смеси. В частности, для смеси идеально теплопроводных газов $\chi_{jj} = \infty$ и $\Phi_j^\gamma \equiv 0$. В этом случае функционал δW^* не содержит члена с вариациями $\delta\varphi_i^\gamma$.

Третье равенство (16.53) с учетом выражений для Φ_i^γ, Ψ_i^γ, следующих из динамических уравнений (16.25), (16.26), представляет собой релятивистский закон диффузии i-й компоненты смеси. В частности, для смеси идеально

диффундирующих газов $\mathscr{D}_{ij}=\infty$ $(i\neq j)$ и

$$m_1^{-1}\Psi_1^\gamma=m_2^{-1}\Psi_2^\gamma=\ldots=m_N^{-1}\Psi_N^\gamma\equiv C^\gamma. \qquad (16.55)$$

В этом случае из соотношений (16.15), (16.18), (16.55) вытекает тождество

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sum_{i=1}^{N}\Psi_{i\gamma}\delta\psi_i^\gamma=-C_\alpha\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma_\gamma^\alpha\sum_{i=1}^{N}m_i\delta\psi_i^\gamma\equiv 0, \qquad (16.56)$$

означающее, что для смеси идеально диффундирующих газов функционал δW^* не зависит от вариаций $\delta\psi_i^\gamma$ (удовлетворяющих связям).

Четвертое равенство (16.53) вместе с определением химического сродства r-й реакции X_r, следующим из второго динамического уравнения (16.26), дает выражение для локальных скоростей реакций, т. е. законы кинетики реакций. Для равновесных реакций $k_{rq}=\infty$, и из четвертого уравнения (16.53) и второго уравнения (16.26) получим известные соотношения:

$$X_r=0,\quad\sum_{i=1}^{N}\nu_{ir}\mu_i=0. \qquad (16.57)$$

В этом случае функционал δW^* не зависит от вариаций $\delta\chi_r$.

Пятое равенство (16.53) представляет собой релятивистское обобщение закона вязкости Навье — Стокса для смеси разнотемпературных реагирующих газов. В частности, для невязкой смеси $a_i=k_r=\lambda=\mu=0$.

Из уравнений (16.53), (16.47) следует, что в однотемпературной, невязкой смеси идеально теплопроводных и диффундирующих газов, все реакции между которыми равновесные, диссипативная функция σ тождественно равна нулю и, следовательно, все процессы обратимы. В этом случае на основании параметрического представления (6.29) для σ и второго соотношения (6.34) имеем

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=0,\quad\sum_{i=1}^{N}\varphi_i=\varphi(\xi^a),\quad\sum_{i=1}^{N}\delta\varphi_i=0, \qquad (16.58)$$

так как параметр производства энтропии для смеси в целом φ теперь определяется начальными условиями и может рассматриваться как неварьируемая функция типа $\varkappa_B(\xi^a)$. С учетом равенств $\Phi_\gamma=X_r=\tau^{\alpha\beta}=0$ и соотношений (16.54),

(16.56), (16.58) получим

$$\delta W^* = \frac{1}{c}\int\limits_{\hat{V}/\hat{\Sigma}_c}\left(\frac{T}{\sqrt{\gamma}}\sum_{i=1}^{N}\delta\varphi_i - C_\alpha\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\gamma^\alpha_\beta\sum_{i=1}^{N}m_i\delta\psi_i^\beta\right)\times$$
$$\times\sqrt{-g}\,d^4\xi \equiv 0. \qquad (16.59)$$

Поэтому для смеси газов в рассматриваемом случае, когда все процессы обратимы, из исходного вариационного уравнения (16.13) вытекает принцип экстремальности действия

$$\delta I = 0 \quad \text{при} \quad \delta W = 0. \qquad (16.60)$$

Однако при выводе из него динамических уравнений необходимо учитывать связи (16.18) и (16.58). Это можно сделать, например, методом неопределенных множителей Лагранжа, добавив к левой части уравнения (16.60) тождественно равный нулю функционал δW^*, определенный равенством (16.59). Легко видеть, что из принципа экстремальности действия (16.60) вытекают уравнения, получающиеся из уравнений (16.24)—(16.27), если в них положить

$$\tau^{\alpha\beta} \equiv 0, \quad T_i = T, \quad \Phi_{i\gamma} = 0, \quad \Psi_{i\gamma} = m_i C_\alpha \gamma^\alpha_\gamma, \quad X_r \equiv 0.$$

Отметим, что, как и в предыдущих параграфах, после построения рассматриваемой модели параметры φ_i, φ_i^γ, ψ_i^γ, χ_r можно не использовать.

Специальные модели. Модель, для которой лагранжиан Λ и функционал δW^* имеют вид (16.1), (16.14), представляет собой модель смеси заряженных, теплопроводных, вязких, реагирующих газов и электромагнитного поля. Очевидно, она является обобщением построенных в § 13 и 14 моделей однокомпонентного газа и электромагнитного поля.

Рассмотрим более подробно частные модели смеси газов, в которых функция ε из выражения (16.1) для лагранжиана имеет следующий специальный вид:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i,\ s_i,\ I_{ii},\ S_{ii},\ Q_{ii},\ \varkappa_{iB}). \qquad (16.61)$$

Здесь каждая функция ε_i зависит только от указанных аргументов с тем же самым значением индекса i. В этом

случае лагранжиан (16.1) можно записать в виде

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i,$$

$$\Lambda_i \equiv -e_i\left(n_i u^\alpha + \frac{1}{c} I_i^\alpha\right) A_\alpha - \varepsilon_i, \qquad (16.62)$$

рассматривая первый член как лагранжиан электромагнитного поля, а каждое слагаемое Λ_i как лагранжиан i-й компоненты смеси в электромагнитном поле. Если лагранжиан любой компоненты смеси не зависит от присутствия других компонент смеси, то каждая функция ε_i должна однозначно фиксироваться значениями характеристик i-й компоненты смеси, в определении которых не участвует 4-скорость смеси, т. е.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i((\eta_i\eta_i), (s_i s_i), (\eta_i s_i), \varkappa_{iB}). \qquad (16.63)$$

Здесь

$$(\eta_i\eta_i) \equiv g_{\alpha\beta}\eta_i^\alpha\eta_i^\beta = c^2 n_i^2 - I_{ii},$$
$$(s_i s_i) \equiv g_{\alpha\beta}s_i^\alpha s_i^\beta = c^2 s_i^2 - S_{ii},$$
$$(\eta_i s_i) \equiv g_{\alpha\beta}\eta_i^\alpha s_i^\beta = c^2 n_i s_i - Q_{ii},$$

η_i — 4-вектор плотности потока числа частиц i-го сорта, s_i — 4-вектор плотности потока энтропии i-й компоненты смеси.

Для смеси ультрарелятивистских газов след тензора энергии-импульса равен нулю, и на основании соотношений (14.6), (16.21), (16.53) и (16.61) имеем

$$T_{\alpha}^{\cdot\alpha} \equiv T_{(F)\alpha}^{\cdot\alpha} + P_{\alpha}^{\cdot\alpha} - \tau_{\alpha}^{\cdot\alpha} = \sum_{i=1}^{N}\left[4\varepsilon_i - 3\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial n_i} n_i + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial s_i} s_i\right) - \right.$$
$$\left. - 6\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial I_{ii}} I_{ii} + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial S_{ii}} S_{ii} + \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial Q_{ii}} Q_{ii}\right) + 3a_i(T_i - T)\right] +$$
$$+ 3\sum_{r=1}^{R} k_r X_r + (3\lambda + 2\mu)\gamma^{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} \equiv 0. \qquad (16.64)$$

Отсюда находим, что для вязкой смеси теплопроводных, реагирующих газов коэффициенты в кинетических уравнениях и функции ε_i в выражении (16.62) для лагранжиана должны удовлетворять соотношениям

$$a_i = 0, \quad k_r = 0, \quad 3\lambda + 2\mu = 0, \qquad (16.65)$$

$$\varepsilon_i = C_i\left(\frac{s_i}{n_i}, \frac{I_{ii}}{n_i^2}, \frac{S_{ii}}{n_i^2}, \frac{Q_{ii}}{n_i^2}, \varkappa_{iB}\right)\cdot n_i^{4/3} + C_{i0}, \qquad (16.66)$$

где C_{i0} — постоянные, сумма которых равна нулю. Так как лагранжиан зависит от суммы функций ε_i, постоянные C_{i0} на него не влияют. В дальнейшем положим их равными нулю. Равенства (16.66) получаются в результате решения уравнения (16.64) с учетом равенств (16.65) и того обстоятельства, что каждая функция ε_i зависит только от указанных в (16.61) аргументов с тем же самым значением индекса i. Выражение (16.66) для ε_i полностью аналогично выражениям (13.68), (14.51) для U, полученным в § 13 и 14 при построении моделей однокомпонентного ультрарелятивистского газа [1]). Если зависимость ε_i от своих аргументов имеет специальный вид (16.63), то для ультрарелятивистского газа получим

$$\varepsilon_i = C_i\left(\frac{c^2 s_i^2 - S_{ii}}{c^2 n_i^2 - I_{ii}},\ \frac{c^2 n_i s_i - Q_{ii}}{c^2 n_i^2 - I_{ii}},\ \varkappa_{iB}\right)(c^2 n_i^2 - I_{ii})^{2/3}.$$

Рассмотрим модели смеси газов (не обязательно ультрарелятивистских), для которых функции ε_i в выражении (16.61) можно считать не зависящими от аргументов I_{ii}, S_{ii}, Q_{ii}:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i (n_i,\ s_i,\ \varkappa_{iB}). \tag{16.67}$$

В этом случае, согласно равенству (16.42), функция ε совпадает с плотностью внутренней энергии смеси газов, и, следовательно, каждое слагаемое ε_i можно рассматривать как плотность внутренней энергии i-й компоненты смеси. Полученное же выше выражение для компонент тензора энергии-импульса смеси газов и электромагнитного поля принимает известный вид:

$$T^{\alpha\beta} = \varepsilon u^\alpha u^\beta + p\gamma^{\alpha\beta} + \\ + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{c} q_i^{\langle\alpha} u^{\beta\rangle} + \frac{1}{c}\mu_i I_i^{\langle\alpha} u^{\beta\rangle}\right) - \tau^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}_{(F)}, \tag{16.68}$$

где

$$p = \sum_{i=1}^{N} p_i, \quad p_i = \mu_i n_i + T_i s_i - \varepsilon_i, \\ \mu_i \equiv \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial n_i}, \quad T_i \equiv \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial s_i}, \quad q_i^\alpha \equiv T_i S_i^\alpha, \tag{16.69}$$

[1]) При этом функции ε_i соответствует произведение ρU.

а компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля $T^{\alpha\beta}_{(F)}$ определяются вторым равенством (14.6). Скаляр p называется *давлением смеси газов*, а скаляры p_i и μ_i представляют собой парциальное давление и химический потенциал i-й компоненты смеси. В случае смеси ультрарелятивистских газов из равенств (16.66), (16.67), (16.69) вытекает обычное выражение для p_i

$$\varepsilon_i = C_i\left(\frac{s_i}{n_i}, \varkappa_{iB}\right)\cdot n_i^{4/3}, \quad p_i = \frac{1}{3}\varepsilon_i. \tag{16.70}$$

Присутствующие в формуле (16.68) компоненты $q_i^\alpha \equiv T_i S_i^\alpha$ и I_i^α определяются при помощи второго и третьего кинетических уравнений (16.53), выражающих релятивистские законы теплопроводности и диффузии для смеси газов. Входящие в них величины Φ_i^ν, Ψ_i^ν в рассматриваемом случае на основании динамических уравнений (16.25), (16.26) и равенств (16.69) имеют простой вид:

$$\Phi_i^\nu = -(\gamma^{\nu\beta}\nabla_\beta T_i + T_i w^\nu), \quad w^\nu \equiv u^\alpha \nabla_\alpha u^\nu,$$
$$\Psi_i^\nu = -(\gamma^{\nu\beta}\nabla_\beta \mu_i + \mu_i w^\nu + e_i e^\nu), \quad e^\nu \equiv F^{\alpha\nu}u_\alpha.$$

Здесь w^ν — компоненты 4-ускорения среды, e^ν — компоненты 4-вектора напряженности электрического поля.

Плотность свободной энергии i-й компоненты смеси $f_i(n_i, T_i, \varkappa_{iB})$ определяется равенством

$$f_i = \varepsilon_i(n_i, s_i, \varkappa_{iB}) - T_i s_i,$$

в котором собственная плотность энтропии s_i предполагается выраженной через аргументы n_i, T_i, $\varkappa_{iB}$ из соотношения $T_i = \partial\varepsilon_i/\partial s_i$. При помощи равенств

$$\varepsilon_i = f_i + T_i s_i, \quad \left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial n_i}\right)_{s_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial n_i}\right)_{T_i}, \quad s_i = -\frac{\partial f_i}{\partial T_i} \tag{16.71}$$

все основные уравнения рассматриваемой модели смеси газов можно записать, используя вместо функций ε_i функции f_i.

Для смеси совершенных газов с постоянными теплоемкостями функции ε_i и f_i определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon_i = n_i\left[C_i c_{iV} n_i^{k/c_{iV}} \exp\left(\frac{s_i}{c_{iV}n_i}\right) + \varepsilon_{i0}\right],$$
$$f_i = n_i\left[c_{iV}T_i\left(1 + \ln\frac{C_i n_i^{k/c_{iV}}}{T_i}\right) + \varepsilon_{i0}\right]. \tag{16.72}$$

Здесь c_{iV} — постоянные, называемые *теплоемкостями компонент смеси* ($i = 1, 2, \ldots, N$); k — постоянная Больцмана; C_i, ε_{i0} — постоянные.

Выражения (16.72) для ε_i и f_i можно использовать для описания смеси слаборелятивистских или ультрарелятивистских газов. В последнем случае в них в соответствии с первым соотношением (16.70) следует положить $c_{iV} = 3k$, $\varepsilon_{i0} = 0$.

Используя соотношения (16.71), (16.72) и приведенные выше определения величин T_i, p_i, μ_i, получим известные уравнения состояния для смеси совершенных газов [36]:

$$s_i = -n_i c_{iV} \ln \frac{C_i n_i^{k/c_{iV}}}{T_i}, \quad \varepsilon_i = n_i (c_{iV} T_i + \varepsilon_{i0}),$$

$$\mu_i = \frac{f_i}{n_i} + kT_i = kT_i \ln \left[n_i \left(\frac{C_i}{T_i} \right)^{c_{iV}/k} \right] + (c_{iV} + k) T_i + \varepsilon_{i0},$$

$$p_i = k n_i T_i.$$

Если функция ε в выражении (16.1) для лагранжиана не зависит от аргументов I_{ij}, S_{ij}, Q_{ij}, то рассматриваемую модель вязкой смеси теплопроводных, реагирующих заряженных газов можно построить, не вводя параметров переноса и производства энтропии компонент смеси φ_i^α, φ_i, параметров диффузии частиц различных сортов ψ_i^α и параметров реакций χ_r. Для этого следует в качестве определяющих параметров вместо функций (16.7) взять функции $x^\nu(\xi^\nu)$, $s_i(\xi^\nu)$, $n_i(\xi^\nu)$, $A_\alpha(\xi^\nu)$, опустить второй член в выражении для лагранжиана и соответствующим образом переопределить функционал δW^*. При таком подходе, однако, из вариационного уравнения невозможно получить второе и третье соотношения (16.35), представляющие собой динамические условия на разрыве для уравнений баланса энтропии i-й компоненты смеси и частиц i-го сорта. В этом случае они должны задаваться на основании дополнительных гипотез.

Переход к ньютоновской механике. Рассмотрим переход к ньютоновской механике в случае, когда кинетические уравнения для необратимых процессов имеют вид (16.53). Выражение (16.24) для компонент тензора энергии-

импульса можно записать следующим образом:

$$T^{\alpha\beta} = \mathscr{E}_{(C)} u^\alpha u^\beta + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N} \left(\mu_i I_i^{\langle\alpha} + T_i S_i^{\langle\alpha}\right) u^{\beta\rangle} - p^{\alpha\beta} + T_{(F)}^{\alpha\beta}, \quad (16.73)$$

$$p^{\alpha\beta} \equiv \left[\mathscr{E}_{(C)} - \sum_{i=1}^{N} (\mu_i n_i + T_i s_i)\right] \gamma^{\alpha\beta} +$$

$$+ \sum_{i,\, j=1}^{N} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial I_{ij}} I_i^{\langle\alpha} I_j^{\beta\rangle} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_{ij}} S_i^{\langle\alpha} S_j^{\beta\rangle} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial Q_{ij}} I_i^{\langle\alpha} S_j^{\beta\rangle}\right) + \tau^{\alpha\beta}. \quad (16.74)$$

Здесь $\mathscr{E}_{(C)}$, μ_i, T_i — соответственно плотность энергии смеси газов, химический потенциал и температура i-й ее компоненты, которые определены равенствами (16.42), (16.24), (16.26).

Так как $u_\alpha I_i^\alpha = u_\alpha S_i^\alpha = u_\beta p^{\alpha\beta} = 0$, то в любой ГСК x^ν выполняются равенства

$$I_i^0 = \frac{v_k}{c} I_i^k, \quad S_i^0 = \frac{v_k}{c} S_i^k, \quad p^{\nu 0} = \frac{v_k}{c} p^{\nu k}, \quad p^{00} = \frac{v_k v_q}{c^2} p^{kq}. \quad (16.75)$$

Рассмотрим в пространстве событий произвольную точку x^* и выберем собственную для нее ГСК $x^{*\nu}$ так, чтобы в трехмерном физическом пространстве наблюдателя с ГСК x^ν оси x^{*k} были параллельны осям x^k. Тогда в точке x^* относительно ГСК $x^{*\nu}$ уравнения (16.24)—(16.27), (5.34) и (16.53) с учетом соотношений (16.73) — (16.75) и (5.38) запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial \mathscr{E}_{(C)}}{\partial t^*} + \mathscr{E}_{(C)} (\partial_k v^k)^* + \frac{2}{c^2} \sum_{i=1}^{N} \left(T_i S_i^k + \mu_i I_i^k\right) \left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^* =$$

$$= p^{*kn} (\partial_n v_k)^* - \partial_k^* \sum_{i=1}^{N} \left(T_i S_i^k + \mu_i I_i^k\right)^* + j^{*k} E_k^*; \quad (16.76)$$

$$\frac{1}{c^2} \left[\mathscr{E}_{(C)} \left(\frac{\partial v^k}{\partial t}\right)^* - p^{*kn} \frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^* + \frac{\partial}{\partial t^*} \sum_{i=1}^{N} \left(T_i S_i^k + \mu_i I_i^k\right)^*\right] =$$

$$= \partial_n^* p^{*kn} - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{N} \left(T_i S_i^{\langle n} + \mu_i I_i^{\langle n}\right)^* (\partial_n v^{k\rangle})^* +$$

$$+ z E_k^* + \frac{1}{c} e^{kpn} j^{*p} B_n^*; \quad (16.77)$$

$$\Phi_{ik}^{*} = \partial_k^* T_i + $$

$$+ \xi_k^{*a} \frac{\partial}{\partial t^*} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S_{\langle ij \rangle}} S_{ja} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial Q_{ji}} I_{ja} \right) + \frac{T_i}{c^2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} \right)^*; \qquad (16.78)$$

$$\Psi_{ik}^{*} = - e_i E_k^* + \partial_k^* \mu_i + $$

$$+ \xi_k^{*a} \frac{\partial}{\partial t^*} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial I_{\langle ij \rangle}} I_{ja} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial Q_{ij}} S_{ja} \right) + \frac{\mu_i}{c^2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} \right)^*; \qquad (16.79)$$

$$(\partial_k B^k)^* = 0, \qquad e^{kpn} (\partial_p E_n)^* = - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial B^k}{\partial t} \right)^*,$$

$$B^k \equiv B_k,$$

$$(\partial_k E^k)^* = 4\pi z, \qquad e^{kpn} (\partial_p B_n)^* = \frac{4\pi}{c} j^{*k} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E^k}{\partial t} \right)^*, \qquad (16.80)$$

$$E^k \equiv E_k;$$

$$z = \sum_{i=1}^{N} e_i n_i, \quad j^{*k} = \sum_{i=1}^{N} e_i I_i^{*k}, \quad T_i = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_i}, \quad \mu_i = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i}; \qquad (16.81)$$

$$T \sigma_i' = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} (T_j - T_i) + \sum_{r=1}^{R} a_{ir} X_r + a_i \delta^{kn} e_{kn}^*,$$

$$T S_i^{*k} = - \sum_{j=1}^{N} \left[\chi_{ij} \Phi_{jk}^* + b_{ij} \left(\Psi_{jk}^* - \frac{m_j}{m_i} \Psi_{ik}^* \right) \right],$$

$$T I_i^{*k} = - \sum_{j=1}^{N} \left[b_{ji} \Phi_{jk}^* + \mathscr{D}_{ij} \left(\Psi_{jk}^* - \frac{m_j}{m_i} \Psi_{ik}^* \right) \right], \qquad (16.82)$$

$$T \omega_r = \sum_{i=1}^{N} a_{ir} (T_i - T) + \sum_{q=1}^{R} k_{rq} X_q + k_r \delta^{kn} e_{kn}^*,$$

$$\tau^{*kn} = \delta^{kn} \left[\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{T_i - T}{T} + \sum_{r=1}^{R} k_r \frac{X_r}{T} + \lambda \gamma^{pm} e_{pm}^* \right] + 2\mu e_{kn}^*,$$

$$X_r = - \sum_{i=1}^{N} \nu_{ir} \mu_i.$$

К этим уравнениям необходимо еще добавить уравнение баланса числа частиц i-го сорта (4.24) и уравнение баланса энтропии i-й компоненты смеси (6.20), записанные в

собственной ГСК $x^{*\nu}$:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t^*} + n_i (\partial_k v^k)^* + \frac{1}{c^2} I^{*k} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^* = \sum_{r=1}^{R} \nu_{ir} \omega_r,$$
$$\frac{\partial s_i}{\partial t^*} + s_i (\partial_k v^k)^* + \frac{1}{c^2} S^{*k} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)^* = \sigma_i. \tag{16.83}$$

Входящие в соотношения (16.82) величины σ_i', T определены равенствами (16.48). При выводе уравнений (16.76), (16.77) из уравнения (16.24), как и в § 14, слагаемые $\left(\partial_\nu T^{\mu\nu}_{(F)}\right)^*$ были преобразованы с учетом выражения (14.6) для компонент $T^{\mu\nu}_{(F)}$ и уравнений Максвелла (16.80). Кроме того, при записи уравнений (16.76), (16.77) и (16.83) для производных от величин I_i^k, S_i^k, p^{kn} использовались равенства, аналогичные равенствам (13.87), а при выводе уравнений (16.78), (16.79) использовалось тождество (13.88).

Так как энергия всякой релятивистской материальной точки с массой m состоит из энергии покоя mc^2 и кинетической энергии, которая остается конечной при $c \to \infty$ (см. § 2), плотность энергии смеси газов $\mathscr{E}_{(C)}$ можно представить в виде

$$\mathscr{E}_{(C)} = \rho c^2 + \mathscr{E}^\circ,$$

где

$$\mathscr{E}^\circ = \varepsilon^\circ - 2 \sum_{i,\, j=1}^{N} \left(\frac{\partial \varepsilon^\circ}{\partial I_{ij}} I_{ij} + \frac{\partial \varepsilon^\circ}{\partial S_{ij}} S_{ij} + \frac{\partial \varepsilon^\circ}{\partial Q_{ij}} Q_{ij}\right),$$
$$\varepsilon^\circ = \varepsilon - \rho c^2, \quad \rho = \sum_{i=1}^{N} m_i n_i,$$

причем величины $\mathscr{E}^\circ$ и ε° остаются конечными при $c \to \infty$.

Как и в § 14 и 15, для перехода к ньютоновской механике отбросим в уравнениях (16.76) — (16.83) слагаемые, пропорциональные c^{-2}, и затем перейдем от ГСК $x^{*\nu}$, собственной для рассматриваемой точки x^*, к ГСК x^ν, общей для всех точек x^*, пренебрегая при этом в преобразованиях тензорных компонент малыми величинами, пропорциональными c^{-2}. Если функция ε° зависит от c, то в ней также надо провести аналогичный предельный переход. При этом функция ε°, вообще говоря, может перестать зависеть от всех или некоторых аргументов I_{ij}, S_{ij}, Q_{ij}. В результате указанной процедуры получим следующие уравнения, описывающие в рамках ньютоновской меха-

ники смесь заряженных реагирующих газов и инвариантные относительно преобразования Галилея с точностью до членов, пропорциональных c^{-2}:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{\mathscr{E}^\circ}{\rho}\right)=\partial_k\left[p^{nk}v_n-\sum_{i=1}^{N}\left(T_iS_i^k+\mu_iI_i^k\right)\right]+$$

$$+(zv^k+j^k)\,E_k-c^2\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{N}\nu_{ir}m_i\omega_r,$$

$$\rho\frac{dv^k}{dt}=\partial_np^{kn}+zE^k+\frac{1}{c}\,e^{kpn}(zv_p+j_p)\,B_n,\quad j_p\equiv j^p,$$

$$p^{kn}=\left[\mathscr{E}^\circ-\sum_{i=1}^{N}\left(\mu_i^\circ n_i+T_iS_i\right)\right]\delta^{kn}+$$

$$+\sum_{i,\,j=1}^{N}\left(\frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial I_{ij}}\,I_i^{\langle k}I_j^{n\rangle}+\frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial S_{ij}}\,S_i^{\langle k}S_j^{n\rangle}+\frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial Q_{ij}}\,I_i^{\langle k}S_j^{n\rangle}\right)+\tau^{kn};$$

$$\Phi_{ik}=\partial_kT_i+\tilde{\xi}_k^a\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial S_{\langle ij\rangle}}\,S_{ja}+\frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial Q_{ji}}\,I_{ja}\right),$$

$$\Psi_{ik}=\partial_k\mu_i^\circ+\tilde{\xi}_k^a\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial I_{\langle ij\rangle}}\,I_{ja}+\frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial Q_{ij}}\,S_{ja}\right)-$$

$$-e_i\left(E_k+\frac{1}{c}\,e^{kpn}v_pB_n\right)+m_i\frac{dv_k}{dt},$$

$$T_i=\frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial s_i},\quad \mu_i^\circ=\frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial n_i};$$

$$e^{kpn}\partial_pE_n=-\frac{1}{c}\frac{\partial B^k}{\partial t},\quad e^{kpn}\partial_pB_n=\frac{4\pi}{c}(zv^k+j^k)+\frac{1}{c}\frac{\partial E^k}{\partial t},$$

$$\partial_kB^k=0,\quad \partial_kE^k=4\pi z,\quad z=\sum_{i=1}^{N}e_in_i,\quad j^k=\sum_{i=1}^{N}e_iI_i^k;$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\partial_k\left(n_iv^k+I_i^k\right)=\sum_{r=1}^{R}\nu_{ir}\omega_r,\quad \frac{\partial s_i}{\partial t}+\partial_k\left(s_iv^k+S_i^k\right)=\sigma_i.$$

К этим уравнениям необходимо еще добавить кинетические уравнения для необратимых процессов в ньютоновской механике, которые получаются из соотношений (16.82), если в них опустить индекс * и подставить вместо величин e_{kn} и μ_i их значения $^1/_2\partial_{\langle k}v_{n\rangle}$ и $m_ic^2+\mu_i^\circ$ соответственно. При этом члены $m_i\,dv_k/dt$, входящие в вы-

ражения для компонент Ψ_{ik}, после подстановки последних в кинетические уравнения для I_i^k и S_i^k сокращаются. Величины $c^2 \sum_{i=1}^{N} \nu_{ir} m_i$, присутствующие в полученных ньютоновских уравнениях, остаются конечными при $c \to \infty$, так как в этом случае из закона сохранения 4-импульса (2.6) следует, что сумма $\sum_{i=1}^{N} \nu_{ir} m_i$ пропорциональна c^{-2}. Аргументы I_{ij}, S_{ij}, Q_{ij} функции ε°, входящей в ньютоновские уравнения, связаны с компонентами I_i^k, S_i^k равенствами

$$I_{ij} = \delta_{kn} I_i^k I_j^n, \quad S_{ij} = \delta_{kn} S_i^k S_j^n, \quad Q_{ij} = \delta_{kn} I_i^k S_j^n.$$

В ньютоновской механике символы I_i^k, S_i^k, j^k, p^{kn}, τ^{kn} обозначают компоненты, получающиеся при переходе к ГСК x^ν из компонент I_i^{*k}, S_i^{*k}, j^{*k}, p^{*kn}, τ^{*kn} в результате преобразований, в которых опущены малые величины, пропорциональные c^{-2}. Если ГСК $x^{*\nu}$ выбрана, как указано выше, то из равенств $I_i^{*0} = S_i^{*0} = j^{*0} = p^{*0\nu} = \tau^{*0\nu} = 0$ следует, что $I_i^k = I_i^{*k}$, $S_i^k = S_i^{*k}$, $j^k = j^{*k}$, $p^{kn} = p^{*kn}$, $\tau^{kn} = \tau^{*kn}$.

ДОПОЛНЕНИЕ

МОДЕЛИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ СРЕД В НЬЮТОНОВСКОЙ МЕХАНИКЕ

Как известно [1], существует многочисленная группа сред, называемых ферромагнетиками, характерной особенностью которых является очень большая величина магнитной проницаемости. Среди важнейших свойств этих сред отметим неоднозначный характер зависимости намагниченности от напряженности магнитного поля (магнитный гистерезис) и наличие остаточной намагниченности при равной нулю напряженности магнитного поля. Изучению свойств ферромагнетиков посвящена обширная литература. Основные экспериментальные данные и микроскопическая теория различных свойств ферромагнетиков приведены в монографиях [1—4]. Феноменологические модели сплошных сред, намагничивающихся без гистерезиса, построены в работах [4—9]. Ниже в рамках ньютоновской механики рассмотрены нерелятивистские модели ферромагнитных упруго-пластических сред с учетом магнитного гистерезиса.

Определяющие параметры. Рассмотрим в рамках ньютоновской механики движение сплошной среды относительно системы отсчета наблюдателя с пространственными координатами x^i, временно́й координатой t, координатным базисом $\mathfrak{e}_i$ и компонентами метрического тензора g_{ij}. Введем также сопутствующую для среды систему отсчета с лагранжевыми координатами ξ^a, временно́й координатой t и координатным базисом $\mathfrak{e}_a$. Связь между этими двумя системами отсчета устанавливается законом движения

$$x^i = x^i(\xi^a, t).$$

Базисные векторы $\mathfrak{e}_a$ получаются из векторов $\mathfrak{e}_i$ аффинным преобразованием (в каждой точке)

$$\mathfrak{e}_a = x^i_a \mathfrak{e}_i, \quad x^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a}; \quad \mathfrak{e}_i = \xi^a_i \mathfrak{e}_a, \quad \xi^a_i = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i},$$

а компоненты метрического тензора в сопутствующей системе координат даются формулами

$$g_{ab} = g_{ij} x^i_a x^j_b.$$

Обозначим через μ^c и B^c контравариантные компоненты векторов намагниченности единицы массы и индукции магнитного поля. Как известно, B^c представляется в виде

$$B^c = \varepsilon^{cab} \nabla_a A_b,$$

где ε^{cab} — компоненты тензора Леви-Чивита, ∇_a — ковариантная производная, A_b — компоненты векторного потенциала. Определим компоненты вектора напряженности магнитного поля равенством

$$H^c = B^c - 4\pi\rho\mu^c,$$

Здесь ρ — плотность среды, причем $\rho = \rho^\circ (|g^\circ_{ab}|/|g_{ab}|)^{1/2}$, где ρ° и g°_{ab} — плотность среды и компоненты метрического тензора в начальном состоянии.

Для учета пластических деформаций и остаточной намагниченности введем определяющие параметры g^*_{ab} и μ^{*a}. Им можно придать физический смысл при помощи следующего мысленного процесса разгрузки. Возьмем бесконечно малую частицу с лагранжевыми координатами ξ^a, вырежем ее из тела и доведем в ней напряженность магнитного поля и тензор внутренних напряжений до нуля. При этом частица деформируется, и векторы базиса $\mathfrak{e}_a$ перейдут в $\mathfrak{e}^*_a$, а компоненты метрического тензора g_{ab} примут значения g^*_{ab}. Вектор намагниченности $\mu^a \mathfrak{e}_a$ также изменится и станет равен $\mu^{*a}\mathfrak{e}^*_a$. Дальше примем, что компоненты g^*_{ab} и μ^{*a} зависят только от координат ξ^a и времени t. Многообразие с координатами ξ^a, компонентами метрического гензора g^*_{ab} и контравариантными компонентами вектора намагниченности μ^{*a} является обобщением вводимого в теории пластичности состояния среды, в котором отсутствуют внутренние напряжения [10]. В этом многообразии можно ввести связность и превратить его в многообразие аффинной связности. Отметим, что кривизна и кручение этого многообразия, вообще говоря, отличны от нуля, а вектор индукции магнитного поля в нем не является соленоидальным. Все это указывает на невозможность проведения процесса полной разгрузки для частицы конечных размеров.

С компонентами g^*_{ab} и μ^{*a} можно связать следующие физические параметры:

вектор обратимой намагниченности

$$\mu^a_{(e)} = \mu^a - \mu^{*a},$$

тензор обратимых деформаций

$$\varepsilon^{(e)}_{ab} = \frac{1}{2}(g_{ab} - g^*_{ab}),$$

тензор остаточных деформаций

$$\varepsilon^*_{ab} = \frac{1}{2}(g^*_{ab} - g^\circ_{ab}).$$

Здесь g°_{ab} — компоненты метрического тензора в начальном состоянии.

Наряду с намагниченностью и магнитным полем, вообще говоря, необходимо учитывать поляризацию и электрическое поле. Но в ферромагнетиках обычно отношение напряженности электрического поля к напряженности магнитного поля и отношение диэлектрической проницаемости к магнитной проницаемости малы ($\lesssim 10^{-5}$). В дальнейшем мы ограничимся приближением квазистационарного электромагнитного поля, как это делается в магнитной гидродинамике [11]. Тогда можно считать, что поляризация и напряженность электрического поля не входят в число определяющих параметров, а намагниченность, электрический ток, индукция и напряженность магнитного поля инвариантны относительно преобразования Галилея [11].

Если также не рассматривать химические и фазовые превращения магнетиков и сильно неравновесные процессы в переменных магнитных полях сверхвысокой частоты ($\gtrsim 10^9$ Гц) [1—4], то для построения модели магнито-упруго-пластического тела с учетом магнитного

гистерезиса достаточно ограничиться следующим набором определяющих параметров:

$$v_a,\quad g_{ab},\quad \mu^a,\quad \nabla_b\mu^a,\quad B^c,\quad g^*_{ab},\quad \mu^{*a},\quad S,\quad \varkappa_B. \tag{1}$$

Здесь v_a — компоненты скорости точек среды; S — энтропия единицы массы; $\varkappa_B$ — набор компонент тензоров, характеризующих физические или геометрические свойства среды в начальном состоянии. К $\varkappa_B$ относятся и g°_{ab}. По определению принимается, что $(d\varkappa_B/dt)_{\xi^a=\text{const}}=0$.

Основные уравнения. Построение моделей сплошных сред удобно производить, исходя из вариационного уравнения [12,13]

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\Lambda\rho\,dV_3\,dt+\delta W^*+\delta W=0. \tag{2}$$

Здесь Λ — удельная плотность функции Лагранжа, зависящая от определяющих параметров (1); V_3 — произвольная область, связанная с частицами среды; dV_3 — элемент объема

$$dV_3=\sqrt{|g_{ab}|}\,d\xi^1\,d\xi^2\,d\xi^3=\sqrt{|g_{ij}|}\,dx^1\,dx^2\,dx^3.$$

Функционал δW^* задается и служит для учета некоторых внешних воздействий и необратимых процессов, а функционал δW находится из (2) и представляется интегралом по границе четырехмерной области $V_3\times t$, причем вариации определяющих параметров входят в δW линейно.

Определяющие параметры (1), от которых зависит Λ, могут быть выражены через функции $x^k(\xi^c,\ t)$, $\mu^a(\xi^c,\ t)$, $A_a(\xi^c,\ t)$, $S(\xi^c,\ t)$, $g^*_{ab}(\xi^c,\ t)$, $\mu^{*a}(\xi^c,\ t)$ и их производные по координатам и времени. Вариации этих функций в (2) считаются независимыми и определяются равенствами

$$\delta x^k=\tilde{x}^k(\xi^c,\ t)-x^k(\xi^c,\ t),\quad \delta\mu^a=\tilde{\mu}^a(\xi^c,\ t)-\mu(\xi^c,\ t),$$
$$\delta A_a=\tilde{A}_a(\xi^c,\ t)-A_a(\xi^c,\ t),$$
$$\delta g^*_{ab}=\tilde{g}^*_{ab}(\xi^c,\ t)-g^*_{ab}(\xi^c,\ t),$$
$$\delta\mu^{*a}=\tilde{\mu}^{*a}(\xi^c,\ t)-\mu^{*a}(\xi^c,\ t),$$
$$\delta S=\tilde{S}(\xi^c,\ t)-S(\xi^c,\ t).$$

Тогда для δv_a, δg_{ab}, $\delta\nabla_b\mu^a$, δB^c будут справедливы следующие выражения:

$$\delta v_a=v^i x^r_a\nabla_r\delta x_i+x^i_a D\delta x_i,\quad \delta g_{ab}=\left(x^r_a x^j_b+x^r_b x^j_a\right)\nabla_r\delta x_j,$$
$$\delta\nabla_b\mu^a=\nabla_b\delta\mu^a+\mu^c\nabla_b\nabla_c\delta x^a,\quad \delta B^c=\varepsilon^{cab}\nabla_a\delta A_b-B^c\nabla_a\delta x^a,$$

где

$$D\equiv\partial/\partial t+v^k\nabla_k,\quad \delta x^a=\xi^a_k\delta x^k,\quad \delta x_a=x^k_a\delta x_k=x^k_a g_{kr}\delta x^r.$$

Компоненты тензоров $\varkappa_B$ считаются известными данными функциями от ξ^a и поэтому не варьируются. Учитывая, что $\delta\int\rho\,dV_3=0$,

для вариации первого члена в (2) находим

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\Lambda\rho\,dV_3\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\left[\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial S}\delta S+\rho\frac{\delta\Lambda}{\delta\mu^a}\delta\mu^a+\left(\varepsilon^{abc}\nabla_b\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial B^c}\right)\delta A_a+\right.$$
$$+\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^{*a}}\delta\mu^{*a}+\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial g^*_{ab}}\delta g^*_{ab}+\left(\nabla_r T^{\cdot r}_{k\cdot}-\rho Dp_k\right)\delta x^k\Big]dV_3\,dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_2}\Big[\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_b\mu^a}(\delta\mu^a+\mu^c\nabla_c\,\delta x^a)+\varepsilon^{cba}\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial B^c}\delta A_a-$$
$$-T^{\cdot b}_{a\cdot}\delta x^a\Big]n_b\,d\Sigma_2\,dt+\Big[\int_{V_3}\rho p^a\,\delta x_a\,dV_3\Big]_{t_1}^{t_2}. \qquad (3)$$

Здесь n_b — компоненты вектора нормали к поверхности Σ_2, ограничивающей область V_3. В (3) введены следующие обозначения:

$$T^{ab}=\nabla_c\left(\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_c\mu^a}g^{da}\mu^b\right)+\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial B^c}B^c g^{ab}-2\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{ab}}-\rho v^a p^b,$$
$$p^a=\frac{\partial\Lambda}{\partial v_a},\qquad \frac{\delta\Lambda}{\delta\mu^a}=\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^a}-\frac{1}{\rho}\nabla_c\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_c\mu^a}. \qquad (4)$$

По определению положим, что функционал δW^* имеет вид

$$\delta W^*=\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\left(\rho T\,\delta S+\frac{1}{c}j^a\,\delta A_a-\rho h_a\,\delta\mu^a-\rho R_a\,\delta\mu^{*a}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\rho R^{ab}\,\delta g^*_{ab}-\tau^{\cdot r}_{k\cdot}\nabla_r\delta x^k\right)dV_3\,dt. \qquad (5)$$

Здесь T — абсолютная температура; j^a — компоненты вектора электрического тока; $\tau^{\cdot r}_{k\cdot}$ — компоненты тензора вязких напряжений; h_a, R_a, R^{ab} — некоторые обобщенные силы, определяющие необратимые эффекты релаксации намагниченности, магнитного гистерезиса и пластического деформирования, c — скорость счета в вакууме.

Полагая вариации переменных на границе четырехмерной области равными нулю (при этом по определению $\delta W=0$), из вариационного уравнения (2) с учетом (3), (4) и (5) получим следующие уравнения:

$$-\frac{\partial\Lambda}{\partial S}=T,\quad \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^a}-\frac{1}{\rho}\nabla_c\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_c\mu^a}=h_a; \qquad (6)$$

$$-\varepsilon^{bca}\nabla_b\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial B^c}=\frac{1}{c}j^a,\quad \rho Dp^k=\nabla_r(T^{kr}+\tau^{kr}); \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^{*a}}=R_a,\quad 2\frac{\partial\Lambda}{\partial g^*_{ab}}=R^{ab}. \qquad (8)$$

Уравнения (6) представляют собой определение температуры и обобщение уравнений состояния для обратимой намагниченности, учитывающее релаксацию намагниченности. Уравнения (7) — это уравнения Максвелла для напряженности магнитного поля и уравнения

импульсов Уравнения (8) служат для определения остаточной намагниченности и остаточных деформаций и будут рассмотрены более подробно ниже.

Вводя вариации, отличные от нуля на границе, получим выражение для δW

$$\delta W = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_2}\left[\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_b\mu^a}(\delta\mu^a+\mu^c\nabla_c\,\delta x^a)+\right.$$
$$\left.+\varepsilon^{cba}\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial B^c}\delta A_a-\left(T^{\cdot b}_{a\cdot}+\tau^{\cdot b}_{a\cdot}\right)\delta x^a\right]n_b\,d\Sigma_2\,dt-\left[\int_{V_3}\rho p^a\,\delta x_a\,dV_3\right]_{t_1}^{t_2}. \qquad (9)$$

Задавая δW на границе четырехмерной области $V_3\times t$, получим краевые условия на поверхности Σ_2 и условия при $t=t_1$ и $t=t_2$

$$\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_b\mu^a}n_b\Big|_{\Sigma_2}=M_a,\quad \rho\varepsilon^{cba}\frac{\partial\Lambda}{\partial B^c}n_b\Big|_{\Sigma_2}=N^a,$$
$$\left(T^{\cdot b}_{a\cdot}+\tau^{\cdot b}_{a\cdot}\right)n_b\Big|_{\Sigma_2}=P_a,\quad \rho p^a\Big|_{t=t_1,\ t_2}=\Pi^a_{1,\,2}. \qquad (10)$$

При помощи вариационного уравнения (2) можно рассматривать также условия на скачках [12, 13].

Из уравнения (2) можно получить уравнение энергии. Для этого выберем значения независимых вариаций следующим образом:

$$\delta x^k=v^k\,\delta\alpha,\quad \delta\mu^a=\frac{d\mu^a}{dt}\delta\alpha,\quad \delta A_a=\frac{dA_a}{dt}\delta\alpha,$$
$$\delta\mu^{*a}=\frac{d\mu^{*a}}{dt}\delta\alpha,\quad \delta g^*_{ab}=\frac{dg^*_{ab}}{dt}\delta\alpha,\quad \delta S=\frac{dS}{dt}\delta\alpha$$

Здесь $\delta\alpha$ — произвольная постоянная, а d/dt — производная по времени при постоянных ξ^a. Подставляя эти вариации в (2) и учитывая (9) и то, что уравнение (2) справедливо при любом объеме V_3 и любых t_1 и t_2, получим уравнение энергии

$$\rho\frac{d}{dt}(p^av_a-\Lambda)+\nabla_b\left[\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_b\mu^a}\left(\frac{d\mu^a}{dt}+\mu^c\nabla_cv^a\right)+\right.$$
$$\left.+\varepsilon^{cba}\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial B^c}\frac{dA_a}{dt}-(T^{ab}+\tau^{ab})\,v_a\right]-\rho T\frac{dS}{dt}-\frac{1}{c}j^a\frac{dA_a}{dt}+$$
$$+\rho h_a\frac{d\mu^a}{dt}+\frac{1}{2}\rho R^{ab}\frac{dg^*_{ab}}{dt}+\rho R_a\frac{d\mu^{*a}}{dt}+\tau^{ab}\nabla_bv_a=0,$$

которое является следствием уравнений (4), (6), (7), (8).

Используя тождество

$$\frac{1}{c}j^a\frac{dA_a}{dt}=-j^aE'_a-j^a\nabla_a\varphi'=-j^aE'_a-\nabla_a\left(c\varepsilon^{abc}\rho\frac{\partial\Lambda}{\partial B^c}\nabla_b\varphi'\right),$$

в котором

$$E'_a=x^k_a\left(E_k+\frac{1}{c}\varepsilon_{kij}v^iB^j\right),\quad E_k=-\frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t}-\nabla_k\varphi,\quad \varphi'=\varphi-\frac{1}{c}v^kA_k,$$

E_k и φ — компоненты вектора напряженности и потенциал электрического поля относительно системы отсчета наблюдателя, можно пре-

образовать уравнение энергии к виду

$$\rho \frac{d}{dt}(p^a v_a - \Lambda) + \nabla_b \left[\rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_b \mu^a} \left(\frac{d\mu^a}{dt} + \mu^c \nabla_c v^a \right) - \right.$$
$$\left. - c\varepsilon^{bac} E'_a \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial B^c} - (T^{ab} + \tau^{ab}) v_a \right] - \rho T \frac{dS}{dt} + j^a E'_a +$$
$$+ \rho h_a \frac{d\mu^a}{dt} + \rho R_a \frac{d\mu^{*a}}{dt} + \frac{1}{2} \rho R^{ab} \frac{dg^*_{ab}}{dt} + \tau^{ab} \nabla_b v_a = 0.$$

Дальнейшее построение моделей связано с некоторыми предположениями относительно притока тепла и плотности энергии сплошной среды и магнитного поля.

Будем считать, что имеют место равенства

$$\nabla_a q^a = -\rho T \frac{dS}{dt} + j^a E'_a + \rho h_a \frac{d\mu^a}{dt} + \rho R_a \frac{d\mu^{*a}}{dt} +$$
$$+ \frac{1}{2} \rho R^{ab} \frac{dg^*_{ab}}{dt} + \tau^{ab} \nabla_b v_a = 0, \qquad (11)$$

$$\mathscr{E} = \rho (p^a v_a - \Lambda), \qquad (12)$$

в которых q^a — компоненты вектора потока тепла, $\mathscr{E}$ — объемная плотность энергии сплошной среды и магнитного поля. Равенство (11) можно рассматривать как уравнение баланса энтропии. Равенство (12) устанавливает связь между плотностью полной энергии и лагранжианом.

Из вариационного уравнения (2) можно также получить уравнения, которые можно рассматривать как уравнения моментов количества движения. Для этого возьмем следующие значения независимых вариаций:

$$\delta x^k = \varepsilon^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} r^i \, \delta\alpha^j, \quad \delta\mu^a = \delta A_a = \delta\mu^{*a} = \delta g^*_{ab} = \delta S = 0.$$

Здесь $r^i \mathfrak{e}_i = \boldsymbol{r}(x^k)$ — радиус-вектор точки с координатами x^k относительно начала системы координат наблюдателя, $\delta\alpha^j \mathfrak{e}_j = \delta\boldsymbol{\alpha}$ — произвольный постоянный вектор. Подставляя эти вариации в (2) и учитывая (5), (9) и то, что уравнение (2) справедливо при любом объеме V_3 и любых t_1 и t_2, получим уравнения

$$\rho D (\varepsilon_{ijk} r^j \rho^k) + \nabla_r \left[\rho \varepsilon^{\cdot\cdot k}_{ij\cdot} \mu^j \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_c \mu^a} x^r_c \xi^a_k - \varepsilon_{ijk} r^j (T^{kr} + \tau^{kr}) \right] -$$
$$- \varepsilon_{ijk} \tau^{jk} = 0, \qquad (13)$$

которые можно рассматривать как уравнения моментов количества движения. Они являются следствием уравнений (4) и (7).

Далее, по определению положим

$$\Lambda = \frac{1}{2} v^a v_a - \frac{1}{8\pi\rho} H^a H_a - U(g_{ab}, \mu^a, \nabla_b \mu^c, g^*_{ab}, \mu^{*a}, S, \varkappa_B). \qquad (14)$$

Используя равенство (12), для плотности полной энергии сплошной среды и магнитного поля получим обычное выражение [4]

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} \rho v^a v_a + \frac{1}{8\pi} H^a H_a + \rho U, \qquad (15)$$

из которого следует физический смысл функций U и Λ. Если вместо (14) постулировать соотношения (15) и $p_a = v_a$, то равенство (14) может быть получено из (12).

Уравнения (6), (7), (8), (4) и уравнение энергии после подстановки в них выражения для Λ принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad H_a - \frac{\partial U}{\partial \mu^a} + \frac{1}{\rho} \nabla_c \rho \frac{\partial U}{\partial \nabla_c \mu^a} = h_a; \tag{16}$$

$$\operatorname{rot}^a \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} j^a, \quad \rho D v^k = \nabla_r (T^{kr} + \tau^{kr}); \tag{17}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \mu^{*a}} = R_a, \quad -2 \frac{\partial U}{\partial g^*_{ab}} = R^{ab}; \tag{18}$$

$$T^{ab} = 2\rho \frac{\partial U}{\partial g_{ab}} - \nabla_c \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \nabla_c \mu^d} g^{da} \mu^b \right) + \frac{1}{4\pi} \left(H^a H^b - \frac{1}{2} H^2 g^{ab} \right); \tag{19}$$

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{\mathscr{E}}{\rho} + \nabla_c \left[\frac{c}{4\pi} \varepsilon^{cab} E'_a H_b - \rho \frac{\partial U}{\partial \nabla_c \mu^a} \left(\frac{d\mu^a}{dt} + \mu^b \nabla_b v^a \right) - \right.$$
$$\left. - (T^{ac} + \tau^{ac}) v_a + q^c \right] = 0. \tag{20}$$

К этим уравнениям следует добавить уравнения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{21}$$

которые выполняются тождественно, если $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$ выражены через потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ.

Феноменологическая таблица необратимых процессов. Уравнение баланса энтропии (11) можно преобразовать к форме

$$T \left(\rho \frac{dS}{dt} + \nabla_a \frac{q^a}{T} \right) = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{22}$$

$$\sigma_1 = \rho R_a \frac{d\mu^{*a}}{dt} + \rho R^{ab} \frac{d\varepsilon^*_{ab}}{dt},$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{T} q^a \nabla_a T + j^a E'_a + \tau^{ab} \nabla_b v_a + \rho h_a \frac{d\mu^a}{dt}.$$

Обозначим приращение энтропии за счет внутренних необратимых процессов через $d_i S$ и предположим, что

$$\rho T d_i S = \tilde{\sigma}\, dt, \quad \tilde{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2. \tag{23}$$

Величина σ_1 характеризует необратимые эффекты за счет пластических деформаций и магнитного гистерезиса, а величина σ_2 — за счет теплопроводности, электропроводности, релаксации намагниченности и вязкой диссипации. Согласно второму закону термодинамики диссипативная функция $\tilde{\sigma}$ удовлетворяет неравенству $\tilde{\sigma} \geqslant 0$.

В термодинамике необратимых процессов обычно предполагают, что функция диссипации является функцией обобщенных термодинамических сил или потоков [12, 14, 15]. Поэтому будем считать, что величина $\tilde{\sigma}$ зависит от обобщенных термодинамических сил

$$\frac{d\mu^{*a}}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon^*_{ab}}{dt}, \quad \nabla_a T, \quad E'_a, \quad \nabla_b v_a, \quad \frac{d\mu^a}{dt},$$

определяющих параметров (1) и некоторых добавочных параметров χ_s, которые являются заданными функционалами от совокупности величин (1).

Зададим зависимость $\tilde{\sigma}$ от своих аргументов и, согласно общей теории необратимых процессов [12, 14, 15], примем, что обобщенные потоки

$$\rho R_a, \quad \rho R^{ab}, \quad -\frac{1}{T} q^a, \quad j^a, \quad \tau^{ab}, \quad \rho h_a$$

определяются равенствами

$$\rho R_a = \gamma_1 \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (d\mu^{*a}/dt)}, \quad \rho R^{ab} = \gamma_1 \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (d\varepsilon^*_{ab}/dt)},$$

$$-\frac{1}{T} q^a = \gamma_2 \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (\nabla_a T)}, \quad j^a = \gamma_2 \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial E'_a}, \tag{24}$$

$$\tau^{ab} = \gamma_2 \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (\nabla_b v_a)}, \quad \rho h_a = \gamma_2 \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (d\mu^a/dt)},$$

которые представляют собой обобщение принципа Онсагера. В (24) производные вычисляются при постоянных параметрах (1) и χ_s, а множители γ_1 и γ_2 задаются так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\tilde{\sigma} = \gamma_1 \Gamma_1 + \gamma_2 \Gamma_2,$$

$$\Gamma_1 \equiv \frac{d\mu^{*a}}{dt} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (d\mu^{*a}/dt)} + \frac{d\varepsilon^*_{ab}}{dt} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (d\varepsilon^*_{ab}/dt)},$$

$$\Gamma_2 \equiv \nabla_a T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (\nabla_a T)} + E'_a \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial E'_a} + \nabla_b v_a \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (\nabla_b v_a)} + \frac{d\mu^a}{dt} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial (d\mu^a/dt)}.$$

Рассмотрим класс моделей, в которых термодинамические силы $d\mu^{*a}/dt$ и $d\varepsilon^*_{ab}/dt$ входят лишь в σ_1; $\nabla_a T$, E'_a, $\nabla_b v_a$, $d\mu^a/dt$ — лишь в σ_2, а величины σ_1 и σ_2 удовлетворяют неравенствам $\sigma_1 \geqslant 0$, $\sigma_2 \geqslant 0$. В этом случае множители γ_1 и γ_2 определяются из соотношений $\sigma_1 = \gamma_1 \Gamma_1$, $\sigma_2 = \gamma_2 \Gamma_2$

При построении моделей пластических сред, обладающих гистерезисом намагниченности, в качестве основного предположения примем, что приращение энтропии, обусловленное изменением остаточных деформаций и остаточной намагниченности, связано только с приращением последних и не зависит от скоростей, с которыми осуществляются эти приращения. Такое предположение хорошо согласуется с тем фактом, что сколь угодно медленные процессы пластического деформирования и перемагничивания тела, обладающего гистерезисом намагниченности, являются необратимыми процессами В качестве σ_1 в этом случае следует взять однородную функцию первой степени ($\gamma_1 = 1$) относительно $d\mu^{*a}/dt$ и $d\varepsilon^*_{ab}/dt$. Тогда из (24) с учетом (23) находим

$$\rho R_a = \frac{\partial \sigma_1}{\partial (d\mu^{*a}/dt)}, \quad \rho R^{ab} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial (d\varepsilon^*_{ab}/dt)}. \tag{25}$$

Как известно [12], если диссипативная функция является функцией первой степени относительно термодинамических сил, то из обобщенного принципа Онсагера следует существование функций нагружения для обобщенных потоков и ассоциированного закона для термодинамических сил. Поэтому компоненты тензоров R_a, R^{ab}, опре-

деленные равенствами (25), лежат на некоторых поверхностях в пространстве переменных R_a, R^{ab}

$$f_k(R_a, R^{ab}, \chi_s) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N), \tag{26}$$

которые можно называть поверхностями нагружения, а для $d\mu^{*a}/dt$ и $d\varepsilon^*_{ab}/dt$ имеет место ассоциированный закон

$$d\mu^{*a} = \sum_{k=1}^{N} \partial\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial R_a}, \quad d\varepsilon^*_{ab} = \sum_{k=1}^{N} \partial\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial R^{ab}}. \tag{27}$$

Здесь $d\lambda_k$ — некоторые множители, которые должны быть дополнительно определены с учетом равенств (26) и условия $\sigma_1 \geqslant 0$, причем $d\lambda_k = 0$ при $f_k \neq 0$. Отметим также, что функции нагружения f_k могут зависеть от определяющих параметров (1)

Если область G в пространстве переменных R_a, R^{ab}, ограниченная поверхностями нагружения, является невогнутой и содержит начало координат, то из (27) следует принцип максимума Мизеса для магнитопластических сред:

$$R^{ab} d\varepsilon^*_{ab} + R_a\, d\mu^{*a} \geqslant R'^{ab}\, d\varepsilon^*_{ab} + R'_a\, d\mu^{*a}.$$

Здесь R'^{ab} и R'_a — любые значения R^{ab} и R_a из области G.

В дальнейшем функции f_k будем выбирать так, чтобы смещениям в область G соответствовали неравенства

$$f_k = 0, \quad \frac{\partial f_k}{\partial R_a} dR_a + \frac{\partial f_k}{\partial R^{ab}} dR^{ab} < 0.$$

Тогда из условия $\sigma_1 \geqslant 0$ следуют неравенства $d\lambda_k \geqslant 0$.

Рассматривая необратимые эффекты, обусловленные теплопроводностью, электропроводностью, релаксацией намагниченности и вязкой диссипацией, будем предполагать [15], что функция σ_2 является квадратичной формой ($\gamma_2 = 1/2$) относительно термодинамических сил $\nabla_a T$, E'_a, $\nabla_b v_a$, $d\mu^c/dt$, причем коэффициенты этой формы, вообще говоря, зависят от определяющих параметров (1). В этом случае из равенств (24) следует, что обобщенные потоки $-q^a/T$, j^a, τ^{ab}, ρh_a линейно зависят от указанных выше термодинамических сил, и матрица коэффициентов этой линейной зависимости симметрична.

Но, как известно [15], при наличии магнитного поля и намагниченности матрица из коэффициентов линейной зависимости обобщенных потоков от термодинамических сил, вообще говоря, симметричной не является. Эта матрица, очевидно, может быть представлена в виде суммы симметричной матрицы, совпадающей с матрицей коэффициентов квадратичной формы σ_2, и некоторой кососимметричной матрицы, которая должна быть задана дополнительно. Поэтому равенства (24) для $-q^a/T$, j^a, τ^{ab} и ρh_a можно обобщить следующим образом:

$$-\frac{1}{T} q^a = \gamma_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial(\nabla_a T)} - \frac{1}{T} q'^a, \quad j^a = \gamma_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial E'_a} + j'^a,$$
$$\tau^{ab} = \gamma_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial(\nabla_b v_a)} + \tau'^{ab}, \quad \rho h_a = \gamma_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial(d\mu^a/dt)} + \rho h'_a. \tag{28}$$

Здесь величины $-q'^a/T$, j'^a, τ'^{ab}, $\rho h'_a$ линейно зависят от термодинамических сил $\nabla_a T$, E'_a, $\nabla_b v_a$, $d\mu^a/dt$. Матрица коэффициентов этой линейной зависимости кососимметрична, и поэтому имеет место тождество

$$-\frac{1}{T} q'^a \nabla_a T + j'^a E'_a + \tau'^{ab} \nabla_b v_a + \rho h'_a \frac{d\mu^a}{dt} \equiv 0,$$

которое показывает, что дополнительные члены в (28) не дают вклада в функцию диссипации σ_2.

Уравнения (28) позволяют получить законы Фурье, Ома, Навье—Стокса и уравнения релаксации намагниченности, а также учесть различные перекрестные явления и эффекты, связанные с влиянием магнитного поля на теплопроводность, электропроводность, вязкую диссипацию и релаксацию намагниченности. К ним относятся термомагнитные и гальваномагнитные эффекты, которые в ферромагнетиках проявляются особым образом [1—4], например, обладают гистерезисом, т. е. неоднозначно зависят от напряженности магнитного поля. Подобные аномальные свойства ферромагнетиков учитываются в (28), так как коэффициенты в линейной зависимости обобщенных потоков от термодинамических сил могут зависеть не только от напряженности магнитного поля, но и от величины остаточной намагниченности, которая определяется историей намагничивания тела.

Если не учитывать перекрестные эффекты, то будут справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\sigma_2 = \varkappa^{ab} \nabla_a T \nabla_b T + \rho^{ab} E'_a E'_b + \lambda^{abcd} \nabla_a v_b \nabla_c v_d + \gamma_{ab} \frac{d\mu^a}{dt} \frac{d\mu^b}{dt}; \\
\varkappa^{ab} = \varkappa^{ba}, \quad \rho^{ab} = \rho^{ba}, \quad \lambda^{abcd} = \lambda^{cdab}, \quad \gamma_{ab} = \gamma_{ba}; \\
-\frac{1}{T} q'^a = \varkappa'^{ab} \nabla_b T, \quad j'^a = \rho'^{ab} E'_{ab}, \\
\tau'^{ab} = \lambda'^{abcd} \nabla_c v_d, \quad \rho h'_a = \gamma'_{ab} \frac{d\mu^b}{dt}; \\
\varkappa'^{ab} = -\varkappa'^{ba}, \quad \rho'^{ab} = -\rho'^{ba}, \\
\lambda'^{abcd} = -\lambda'^{cdab}, \quad \gamma'_{ab} = -\gamma'_{ba}.
\end{gathered} \tag{29}$$

В этом случае дополнительные члены в уравнениях (28) учитывают эффекты Холла, Ледюка—Риги и влияние магнитного поля и намагниченности на тензор вязких напряжений и на процесс релаксации намагниченности. Подставляя (29) в (28), получим законы Фурье, Ома, Навье—Стокса и уравнения релаксации намагниченности

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{T} q^a = (\varkappa^{ab} + \varkappa'^{ab}) \nabla_b T, \qquad j^a = (\rho^{ab} + \rho'^{ab}) E'_b, \\
\tau^{ab} = (\lambda^{abcd} + \lambda'^{abcd}) \nabla_c v_d, \quad \rho h_a = (\gamma_{ab} + \gamma'_{ab}) \frac{d\mu^b}{dt}.
\end{gathered} \tag{30}$$

Вся предыдущая теория была развита для ускоренно движущейся анизотропной среды с учетом конечности деформаций Предположения об изотропии среды и малости деформаций приводят к упрощению полученных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

К ГЛАВЕ 1

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1976, т. 1, 536 с.; т. 2, 573 с.
2. Паули В. Теория относительности: Пер. с нем. — М.; Л.: Гостехиздат, 1947. — 300 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1967. — 460 с.
4. Синг Дж Л. Общая теория относительности: Пер. с англ./ Под ред. А З. Петрова. — М.: ИЛ, 1963. — 432 с.
5. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962. — 284 с.
6. Седов Л. И., Лохин В. В. Описание с помощью тензоров точечных групп симметрии. — Докл АН СССР, 1963, т. 149, № 4, с. 796—797.
7. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких аргументов. — Прикл. мат. и мех., 1963, т. 27, вып. 3, с. 393—417.
8. Бердичевский В. Л. О нелинейных тензорных функциях в теории относительности. — Прикл. мат. и мех., 1967, т. 31, вып 1, с. 187—189.
9. Голубятников А. Н. Нелинейные спинорные функции. — Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 2, с. 265—267.
10. Голубятников А. Н. Об интегральном представлении тензорных функций. — Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 1, с. 24.
11. Желнорович В. А. Тензорное представление спиноров и спинорных уравнений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979, 154 с.
12. Тонела М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности: Пер. с фр. — М.: ИЛ, 1962. — 483 с.
13. Мёллер К. Теория относительности. — 2-е изд., перераб. и доп.: Пер. с англ./Под ред. Д. Иваненко. — М.: Атомиздат, 1975. — 400 с.
14. Шмутцер Э. Симметрии и законы сохранения в физике: Пер. с нем. — М.: Мир, 1974. — 159 с.
15. Шмутцер Э. Основные принципы классической механики и классической теории поля (канонический аппарат): Пер. с нем./ Под ред. С. П. Аллилуева. — М.: Мир, 1976. — 157 с.

К ГЛАВЕ 2

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1976, т. 1, 536 с.; т. 2, 573 с.

2. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред.—Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 5 (125), с. 121—180.
3. Седов Л. И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций.—Прикл. мат. и мех., 1965, т. 29, вып. 1, с. 4—17.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля.—5-е изд., перераб. и доп.—М.: Наука, 1967.—460 с.
5. Паули В. Теория относительности: Пер. с нем.—М.; Л.: Гостехиздат; 1947.—300 с.
6. Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа.—Прикл. мат. и мех., 1966, т. 30, вып. 3, с. 510—530.
7. Бердичевский В. Л. Вариационные методы построения моделей сплошных сред с необратимыми процессами в специальной теории относительности.—Прикл. мат. и мех., 1966, т. 30, вып. 6, с. 1081—1086.
8. Штейн А. А. Смесь нескольких компонент как сплошная среда с внутренними степенями свободы.—Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1974, № 31, с. 131—143.
9. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика: Пер. с англ./Под ред. Д. Н. Зубарева.—М.: Мир, 1964.—456 с.
10. Мёллер К. Теория относительности.—2-е изд. перераб. и доп.: Пер. с англ./Под ред. Д. Иваненко.—М.: Атомиздат, 1975.—400 с.
11. Тонела М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности: Пер. с фр.—М.: ИЛ, 1962.—483 с.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5. Статистическая физика, часть 1.—3-е изд., доп. Е. М. Лифшицем и Л. П. Питаевским.—М.: Наука, 1976.—684 с.
13. Kluitenberg G. A., de Groot S. R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. I. Heat conduction, diffusion, viscous flow and chemical reactions; formal part.—Physica, 1953, v. 19, N 8, p. 689—704.
14. Kluitenberg G. A., de Groot S. R. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. III. Systems without polarization and magnetization in an electromagnetic field.—Physica, 1954, v. 20, N 4, p. 199—209.
15. Kluitenberg G. A., de Groot S. R. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. IV. Systems with polarization and magnetization in an electromagnetic field.—Physica, 1955, v. 21, N 3 p. 148—168.

К ГЛАВЕ 3

1. Седов Л. И. Об основных концепциях механики сплошной среды.—В кн.: Некоторые проблемы математики и механики (К 60-летию акад. М. А. Лаврентьева). Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1961, с. 227—235.
2. Sedov L. I. Some problems of designing new models of continuum media.—In: Applied Mechanics (Proc. 11th Intern. Congr. Appl. Mech., Munich, 1964), Berlin etc., Springer-Verlag, 1966, p. 9—19.

3. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. — Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 5 (125), с. 121 — 180.
4. Sedov L. I. Variational methods of constructing models of continuous media. — In: Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics of moving fluids (Proc. IUTAM Symp., Vienna, 1966), Wien; New York: Springer-Verlag, 1968 p. 346 — 358.
5 Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа. — Прикл. мат и мех.; 1966, т. 30, вып. 3, с. 510 — 530.
6. Бердичевский В. Л. Вариационные методы построения моделей сплошных сред с необратимыми процессами в специальной теории относительности. — Прикл. мат. и мех., 1966, т. 30, вып. 6, с. 1081 — 1086.
7. Голубятников А. Н. Сплошная среда со спинорными и векторными характеристиками. — Докл АН СССР, 1966, т. 169, № 2, с. 299 — 302.
8. Mindlin R. D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. — Int. J. Solids Structures, 1965, v. 1, N 4, p. 417 — 438.
9. Лурье М. В Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде. — Прикл мат. и мех., 1966, т 30, вып. 4, с. 747 — 753.
10. Желнорович В. А. К теории построения моделей сплошных сред. — Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 2, с. 283 — 286.
11. Седов Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. — Прикл. мат. и мех., 1968, т. 32, вып. 5, с. 771 — 785.
12. Sedov L. I. Über den begriff des spannungstensors bei kontinuumsmodellen mit inneren freiheitsgraden. — Z. angew. Math. und Phys., 1969, v. 20, Fsc. 5, p. 653 — 658.
13. Желнорович В. А. Вариационный принцип и уравнения состояния для сплошных сред. — Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 1, с. 55 — 58.
14. Лурье М. В. Использование вариационного принципа для изучения распространения поверхностей разрыва в сплошной среде. — Прикл. мат. и мех., 1969, т. 33, вып. 4, с. 602 — 608.
15. Желнорович В. А. Об интегральных законах сохранения для сплошных сред в общей теории относительности — Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 1, с. 50 — 53.
16. Бердичевский В. Л. Вариационное уравнение в механике сплошных сред. — В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела (К 60-летию акад. В. В. Новожилова). — Л.: Судостроение, 1970, с. 55 — 66.
17. Седов Л. И. Об условиях на сильных разрывах в теории гравитации. — Прикл. мат. и мех., 1972, т. 36, вып. 1, с. 3 — 14.
18. Штейн А. А., Цыпкин А. Г. Модели сплошных сред в ньютоновской механике. — Отчет Ин-та механики МГУ, 1973, № 1468. — 103 с.
19. Черный Л. Т. Построение моделей магнитоупругих сплошных сред с учетом магнитного гистерезиса и пластических деформаций. — Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1974, № 31, с. 100 — 119.
20. Седов Л. И. Размышления о науке и об ученых. — М.: Наука, 1980. — 440 с.

21. Желнорович В. А., Седов Л. И. О вариационном выводе уравнений состояния для материальной среды и гравитационного поля. — Прикл. мат. и мех., 1978, т. 42, вып. 5, с. 771—780.
22. Седов Л. И., Цыпкин А. Г. О построении моделей сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем. — Прикл. мат. и мех., 1979, т. 43, вып. 3, с. 387—400.

К ГЛАВЕ 4

1. Седов Л. И. О тензоре энергии-импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах. — Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 3, с. 519—522.
2. Седов Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. — Прикл. мат. и мех., 1968, т. 32, вып. 5, с. 771—785.
3. Седов Л. И. О локальном уравнении энергии в гравитационном поле. — Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3, с. 568—571.
4. Желнорович В. А. Об интегральных законах сохранения для сплошных сред в общей теории относительности. — Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 1, с. 50—53.
5. Седов Л. И. Об условиях на сильных разрывах в теории гравитации. — Прикл. мат. и мех., 1972, т. 36, вып. 1, с. 3—14.
6. Шмутцер Э. Симметрии и законы сохранения в физике: Пер. с нем. — М.: Мир, 1974. — 159 с.
7. Шмутцер Э. Основные принципы классической механики и классической теории поля (канонический аппарат): Пер. с нем./ Под ред. С. П. Аллилуева. — М.: Мир, 1976. — 157 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1967. — 460 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1976, т. 1, 536 с.; т. 2, 573 с.
10. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика: Пер. с англ./ Под ред. Д. Н. Зубарева. — М.: Мир, 1964. — 456 с.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5. Статистическая физика, часть 1. — 3-е изд., доп. Е. М. Лифшицем и Л. П. Питаевским. — М.: Наука, 1976. — 684 с.
12. Седов Л. И. Виды энергии и их трансформации. — Прикл. мат. и мех., 1981, т. 45, вып. 6, с. 963—984.
13. Седов Л. И., Цыпкин А. Г. О построении моделей сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем. — Прикл. мат. и мех., 1979, т. 43, вып. 3, с. 387—400.
14. Черный Л. Т. Переход от механики специальной теории относительности к ньютонианской механике и релятивистские эффекты. — Прикл. мат. и мех., 1981, т. 45, вып. 6, с. 985—993.

К ГЛАВЕ 5

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1976, т. 1, 536 с.; т. 2, 573 с.
2. Синг Дж. Л. Общая теория относительности Пер. с англ./ Под ред. А. З. Петрова. М.: ИЛ, 1963. — 432 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Гостехиздат, 1954, 795 с.

4. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. — Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 5 (125), с. 121 — 180.
5. Седов Л. И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. — Прикл. мат. и мех., 1965, т. 29, вып. 1, с. 4 — 17.
6. Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа. — Прикл. мат. и мех., 1966, т. 30, вып. 3, с. 510 — 530.
7. Бердичевский В. Л. Вариационные методы построения моделей сплошных сред с необратимыми процессами в специальной теории относительности. — Прикл. мат. и мех., 1966, т. 30, вып. 6, с. 1081 — 1086.
8. Седов Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. — Прикл. мат. и мех., 1968, т. 32, вып. 5, с. 771 — 785.
9. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика: Пер. с англ./Под ред. Д. Н. Зубарева. — М.: Мир, 1964. — 456 с.
10. Kluitenberg G. A., de Groot S. R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. I. Heat conduction, diffusion, viscous flow and chemical reactions; formal part. — Physica, 1953, v. 19, N 8, p. 689 — 704.
11. Kluitenberg G. A., de Groot S. R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. II. Heat conduction and diffusion; physical part. — Physica, 1953, v. 19, N 11, p. 1079 — 1094.
12. Kluitenberg G. A., de Groot S. R. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. III. Systems without polarization and magnetization in an electromagnetic field. — Physica, 1954, v. 20, N 4, p. 199 — 209.
13. Kluitenberg G. A., de Groot S. R. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. IV. Systems with polarization and magnetization in an electromagnetic field. — Physica, 1955, v. 21, N 3, p. 148 — 168.
14. Kluitenberg G. A., de Groot S. R. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. V. The energy-momentum tensor of the macroscopic forces acting on matter and the first and second lows of thermodynamics. — Physica, 1955, v. 21, N 3, p. 169 — 192.
15. Schöpf H. G. Allgemeinrelativistische prinzipien der kontinuumsmechanik. — Ann. der Phys. 7 Folge, 1963, Bd 12, Hf. 7 — 8, p. 377 — 395.
16. Schöpf H. G. Bewegte anisotrope dielektrika in relativistischer Sicht. — Ann. der Phys. 7 Folge, 1964, Bd 13, Hf. 1 — 2, p. 41 — 52.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1967. — 460 с.
18. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
19. Голубятников А. Н. Течения релятивистского газа с изотропным вектором Киллинга. — Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 1, с. 67 — 70.
20. Седов Л. И., Цыпкин А. Г. О построении моделей сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем. — Прикл. мат. и мех., 1979, т. 43, вып. 3, с. 387 — 400.

21. Седов Л. И. Применение базисного вариационного уравнения для построения моделей сплошных сред. — В кн.: Избран. вопр. соврем. мех., ч. 1, М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 11—64.
22. Цыпкин А. Г. Об одной модели сплошной среды с учетом электромагнитных эффектов. — Прикл. мат. и мех., 1977, т. 41, вып. 1, с. 34—40.
23. Желнорович В. А. Релятивистские модели намагничивающихся и поляризующихся сред и тензор энергии-импульса электромагнитного поля. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех., 1980, № 3, с. 71—78.
24. Черный Л. Т. Построение моделей магнитоупругих сплошных сред с учетом магнитного гистерезиса и пластических деформаций. — Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1974, № 31, с. 100—119.
25. Желнорович В. А. Модели сред с внутренним механическим и электромагнитным моментами. — В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (К 60-летию акад. Л. И. Седова). — М.: Наука, 1969, с. 221—233.
26. Maugin G. A., Eringen A. C. Polarized elastic materials with electronic spin — a relativistic approach. — J. Math. Phys., 1971, v. 13, N 11, p. 1777—1788.
27. Желнорович В. А. Об уравнениях для жидкостей с внутренним магнитным и механическим моментами. — Изв. АН СССР, Механ. жидкости и газа, 1974, № 5, с. 174—177.
28. Желнорович В. А. О тензоре энергии-импульса электромагнитного поля в связи с одной моделью намагничивающейся и поляризующейся жидкости, обладающей внутренним моментом количества движения. — Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 5, с. 1029—1032.
29. Цыпкин А. Г., Штейн А. А. Модель вязкой сжимаемой многокомпонентной жидкости с учетом эффектов поляризации и намагничивания. — Прикл. мат. и мех., 1974, т. 38, вып. 4, с. 644—653.
30. Maugin G. A. Relativistic theory of magnetoelastic interactions. I. — J. Phys. A: Gen. Phys., 1972, v. 5, N 6, p. 786—802.
31. Maugin G. A. Relativistic theory of magnetoelastic interactions. II. — J. Phys. A: Math., Nucl. Gen., 1973, v. 6, N 3, p. 306—321.
32. Maugin G. A. Relativistic theory of magnetoelastic interactions. III. — J. Phys. A: Math., Nucl. Gen., 1973, v. 6, N 11, p. 1647—1666.
33. Maugin G. A. Relativistic theory of magnetoelastic interactions. IV. — J. Phys. A: Math., Nucl Gen., 1974, v. 7, N 6, p. 818—837.
34. Lenz J. Magnetoelastische wechselwirkungen in festen Körpern. — Z. angew. Math. und Mech., 1972, v. 52, N 4. p. 139—141.
35. Штейн А. А. Смесь нескольких компонент как сплошная среда с внутренними степенями свободы. — Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1974, № 31, с. 131—143.
36. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5. Статистическая физика, часть 1. — 3-е изд., доп. Е. М. Лифшицем и Л. П. Питаевским. — М.: Наука, 1976. — 684 с.

ЛИТЕРАТУРА К ДОПОЛНЕНИЮ

1. Вонсовский С. В. Магнетизм. — М. Наука, 1971. — 1031 с.
2. Вонсовский С. В., Шур Я. С. Ферромагнетизм. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — 816 с.
3. Белов К. П Упругие, гепловые и электрические явления в ферромагнетиках. — М.. Гостехиздат, 1957. — 279 с.
4. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
5. Седов Л И О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций — Прикл мат и мех., 1965, т. 29, вып. 1, с. 4—17.
6. Седов Л. И., Цыпкин А. Г. О посгроении моделей сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем. — Прикл мат и мех., 1979, т. 43, вып. 3, с.387—400.
7. Гогосов В. В., Налетова В. А, Шапошникова Г. А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей. — В кн.: Итоги науки и гехники, механика жидкости и газа, т.16, М.: Изд-во ВИНИТИ, 1981, с. 76—208
8. Власов К. Б., Ишмухаметов Б. Х. Уравнения движения и состояния магнитоупругих сред — Жур эксп и теор физ., 1964, г. 46, вып 1, с. 201—209.
9. Желнорович В. А. Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим момен том. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 174 с.
10. Бердичевский В. Л., Седов Л. И. Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций Связь с теорией пластичности — Прикл. мат. и мех., 1967, т. 31, вып. 6, с. 981—1000
11. Куликовский А Г., Любимов Г. А Магнитная гидро динамика — М.: Физматгиз, 1962. — 246 с
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды — 3-е изд., перераб и доп. — М.: Наука, 1976, т 1, 536 с.; т. 2, 573 с.
13. Седов Л. И. Применение базисного вариационного уравнения для построения моделей сплошных сред. — В кн.: Избран вопр соврем мех., ч. 1, М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 11—64.
14. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды.: Пер. с англ. — М.: Мир, 1966 — 135 с.
15. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика.: Пер. с англ /Под ред. Д. Н. Зубарева. — М.: Мир, 1964. — 456 с.

Леонид Тимофеевич Черный
РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Редактор *Н. П. Рябенькая.*
Технический редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *В. П. Сорокина.*

ИБ № 11522

Сдано в набор 28.10.82. Подписано к печати 19.08.83. Т-17663. Формат 84×108$^{1}/_{32}$. Бумага книжно-журнальная. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 16,78. Тираж 2300 экз. Заказ № 648.

Цена 2 р. 80 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Отпечатано со стереотипа в Ленинградской типографии № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000. Ленинград, Прачечный переулок, 6