

HANDBUCH DER PHYSIK
Band VIII/1
STRÖMUNGSMECHANIK I

MATHEMATICAL PRINCIPLES of CLASSICAL FLUID MECHANICS

by
JAMES SERRIN

Berlin — Göttingen — Heidelberg
1959

Дж. Серрин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

Перевод с английского
А. Б. Шабата

Под редакцией
Л. В. Овсянникова

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1963

АННОТАЦИЯ

Книга американского ученого Дж. Серрина, несмотря на свой малый объем, содержит не только тот материал, который обычно входит в курсы гидродинамики, но и ряд новых или необычно изложенных результатов. Особенно типичными в этом отношении являются разделы, посвященные изложению вариационных принципов, теории динамического подобия, теории тензора напряжений, обобщению теоремы Гельмгольца — Рэлея.

Характерными чертами книги является четкость и последовательность изложения, предельная математическая строгость и высокий теоретический уровень. От читателя требуется лишь известная математическая подготовка и не требуется знакомства с гидродинамикой. Поэтому книга представляет интерес не только для специалистов в области гидроаэромеханики (научных работников и инженеров), но и для широкого круга математиков. Она доступна студентам старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам

ГЛАВА 1

ПРЕДИСЛОВИЕ И ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Обзор содержания. Классическая механика жидкости является одним из разделов механики сплошных сред и исходит, таким образом, из предположения, что жидкость по своей структуре практически непрерывна и однородна. Основное отличие жидкости от других сплошных сред заключается в том, что в положении равновесия касательные напряжения на границе раздела двух смежных частей жидкости должны равняться нулю. Само по себе это свойство не является достаточным для описания движения жидкости, хотя оно и положено в основу гидростатики и гидродинамики. Для того чтобы характеризовать физическое поведение некоторой жидкости, это свойство должно быть обобщено, представлено в надлежащей аналитической форме и учтено в уравнениях движения произвольной сплошной среды. При этом неизбежно получается система дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять скорость, давление, плотность и т. д. при произвольном движении жидкости. В данной статье мы будем рассматривать эти дифференциальные уравнения, их вывод из основных аксиом и различные формы, которые принимают эти уравнения при более или менее ограничительных предположениях, касающихся свойств жидкости или ее движения.

Таким образом, наша цель заключается в математически корректном кратком изложении классической механики жидкости; при этом достаточное внимание уделяется основным аксиомам. Работа содержит точные теоретические результаты, полученные при исследовании основных уравнений и не включает описания релятивистских и квантовых эффектов, большей части кинетической теории газов, некоторых специальных

вопросов, например турбулентности, и всех численных и приближенных исследований. Опущены также некоторые разделы, входящие в общий план статьи, а именно гидростатика, исследование вращающихся масс жидкости, теория одномерного течения газа и теория устойчивости; эти разделы излагаются в других статьях данной Энциклопедии [1]). От читателя требуется знание основ векторного анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными; некоторое знакомство с гидродинамикой будет, несомненно, полезным.

Статья начинается по существу с гл. 2, где выводятся уравнения движения. Мы старались дать строгое и полное исследование исходных предположений, основываясь на концепции движения как непрерывного точечного преобразования пространства в себя. В заключительной части этой главы рассматриваются вопросы, связанные с преобразованием координат и вариационными принципами механики жидкости. Содержание гл. 3 не выходит в основном за рамки общепринятых учебников, однако, выпустив ее, мы нарушили бы единство изложения. Кроме того, в этой главе мы впервые знакомимся со многими идеями, играющими важную роль в дальнейшем, при изучении более сложных вопросов. В гл. 4 мы вновь возвращаемся к исследованию исходных предположений и кратко излагаем термодинамику движения жидкости, включая систему постулатов соответствующих разделов классической термодинамики. Представления, развитые в этом разделе, могут служить моделью при изучении многокомпонентных гидродинамических систем.

В гл. 5 строится общая теория течения идеального (т. е. невязкого) газа. Мы старались как можно более широко охватить результаты, касающиеся неизэнтропических движений, и результаты, не зависящие от предположения о совершенности газа ($pV = \mathcal{R}T$). Интересно, что эта точка зрения приводит во многих случаях к упрощению рассуждений. В гл. 6 рассматривается теория ударных волн в идеальной жидкости. Рассуждения основаны только на постулатах движения (гл. 2 и 4) и не требуют новых динамических предположений. Раздел об ударном слое играет роль введения к специальной литературе по этому вопросу. Заключительная

[1]) Здесь, как и всюду в дальнейшем, имеется в виду „Энциклопедия физических наук“ (Handbuch der Physik), в т. VIII/1 которой включена эта статья Серрина. — *Прим. перев.*

глава начинается с обоснования уравнений, описывающих движение вязкой жидкости, и охватывает некоторые теоретические работы, опубликованные в последние годы.

Ряд разделов содержит новые результаты или более совершенное изложение известных работ. В особенности отметим следующие разделы: изложение вариационных принципов (п. 14, 15, 24 и 47), теорию динамического подобия (п. 36 и 66), теорию тензора напряжений (п. 59), энергетический метод (п. 73), обобщение теоремы Гельмгольца — Рэлея (п. 75) и некоторые новые формулы и уравнения, например (29.9), (40.6), (42.8) и т. д. Везде, где это возможно, мы пытались указывать в ссылках первоисточники, однако полная библиография вопроса приводится далеко не всегда, так как в большинстве случаев ее можно проследить по цитированным работам. В заключение мы должны добавить, что во многих случаях доказательства значительно видоизменены и сокращены по сравнению с их первоначальной формой.

Эта работа многим обязана интересным лекциям и замечательной эрудиции моих учителей Дэвида Джилбарга и Клиффорда Трусделла. Их влияние во многих местах очевидно, хотя ответственность за содержание статьи лежит целиком на мне. Моей жене Барбаре я глубоко благодарен за большую помощь в оформлении рукописи и в особенности за ее ценные замечания по поводу общего плана статьи. Образцом работы по динамике жидкости в смысле стиля, ясности и законченности изложения является книга Ламба „Гидродинамика“ [8]. Автор надеется, что он остался верен манере изложения этой книги.

Научно-исследовательскому отделу ВВС США автор обязан поддержкой в период работы над этой статьей.

2. Векторы и тензоры. В этой статье употребляются традиционные обозначения векторного анализа. Применение этих обозначений приводит к предельной краткости изложения и вместе с тем поясняет физический смысл формулы. Мы используем в основном стандартные векторные операции, однако в отдельных случаях возникает необходимость применения выражений, которые могут показаться необычными или двусмысленными. По этой причине удобно определить все операции при помощи компонент вектора; тогда легко выяснить смысл уравнения, переписав его в виде проекций на оси координат. Этот метод имеет еще и то преимущество, что любому уравнению при желании можно сразу дать тензорную интерпретацию.

За немногими исключениями мы будем употреблять полужирные строчные буквы латинского алфавита для обозначения векторов; компоненты векторов $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и т. д. в фиксированной ортогональной системе координат будут обозначаться через b^i, c^i и т. д. или b_i, c_i и т. д., где $i = 1, 2, 3$. В этих обозначениях скалярное произведение $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ определяется формулой

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = b^i c_i = b_i c^i;$$

согласно общепринятому соглашению, повторяющийся индекс означает суммирование по этому индексу от 1 до 3 [1]).

Аналогичным образом векторное произведение $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ определяется через компоненты этих векторов формулой

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c})^l = e^{ijk} b_j c_k,$$

где e^{ijk} — обычный перестановочный символ [2]). Модуль вектора $\mathbf{b}$ обозначается соответствующей курсивной строчной буквой b, т. е.

$$b = |\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}$$

(следует отметить, что модуль вектора скорости $\mathbf{v}$ будет обозначаться в отличие от общего правила через q, а буква v будет использована для обозначения одной из компонент скорости).

Символы $\operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{b}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{b}$ будут использоваться в их обычном смысле, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = b^i{}_{,i},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{b})^l = e^{ijk} b_{k,j}, \quad (\operatorname{grad} \varphi)_i = \varphi_{,i}.$$

Запятая в этих формулах в соответствии с обычным соглашением обозначает дифференцирование. Другими словами, для произвольной скалярной или векторной функции точки пространства мы имеем, по определению,

$$F_{,i} \equiv \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При использовании криволинейных систем координат, например в п. 12, определение $F_{,i}$ должно быть видоизменено.

[1]) Одновременное употребление верхних и нижних индексов принято для единообразия с обозначениями тензорного исчисления.

[2]) То есть $e^{123} = e^{231} = e^{312} = 1$, $e = {}^{213} = e^{132} = e^{321} = -1$, а остальные компоненты равны нулю.

Мы, однако, на этом останавливаться не будем, так как за несколькими исключениями система координат всюду предполагается декартовой.

В этой работе мы часто будем иметь дело с тензорами второго ранга (диадами). Для их обозначения будут употребляться полужирные прописные буквы $\boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{T}$ и т. д. Компоненты тензора $\boldsymbol{\Sigma}$ будут обозначаться через Σ^{ij} или, когда это удобнее, через $\Sigma^{i}{}_{j}$ и Σ_{ij}. Под равенствами

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{c}$$

мы понимаем соответственно

$$b_i = c_j \Sigma^{ji} \quad \text{и} \quad b^i = \Sigma^{ij} c_j.$$

Наконец, символ $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{T}$ обозначает скалярное произведение $\Sigma^{ij} T_{ij}$.

Удобны некоторые специальные обозначения. Под $\operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma}$ мы понимаем *вектор* с компонентами $\Sigma^{ji}{}_{,\,j}$. Символ $\operatorname{grad} \mathbf{b}$ обозначает *тензор* с компонентами $b_{j,\,i}$;

$$(\operatorname{grad} \mathbf{b})_{ij} = b_{j\,,\,i}.$$

Наконец, под $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{x}}$ мы понимаем *вектор* с компонентами $e^{ijk}\Sigma_{jk}$. Из этих определений следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = (\operatorname{grad} \mathbf{b})_{\mathrm{x}} \quad \text{и} \quad (\mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{b})_i = c^j b_{i,j}.$$

Читатель, знакомый с тензорным анализом, заметит, что если рассматривать символ $\mathbf{b}$ как сокращенное обозначение совокупности контравариантных b^i или ковариантных b_i компонент вектора в произвольной криволинейной системе координат, а $\boldsymbol{\Sigma}$ — как сокращенное обозначение совокупности компонент тензора, то приведенные выше определения инвариантны по отношению к произвольным преобразованиям координат. Таким образом, введенную нами векторную символику можно в равной мере считать и сокращенным обозначением операций тензорного анализа.

Общую формулу преобразования интеграла по объему в интеграл по поверхности можно записать в следующем символическом виде [1]):

$$\int_v F_{,\,i}\, dv = \oint_s F n_i\, da. \tag{2.1}$$

[1]) Филлипс [48], формула (127). (См. также Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд. АН СССР, М., 1951, стр. 138. — *Перев.*)

Формула справедлива для скалярной, векторной или тензорной функции F при фиксированном индексе i, допускается также суммирование по этому индексу. Функция F предполагается здесь непрерывно дифференцируемой в рассматриваемом объеме $\mathfrak{v}$, ограниченном достаточно гладкой поверхностью $\mathfrak{s}$; через n_i обозначены компоненты *внешней* нормали $\mathbf{n}$ к $\mathfrak{s}$. Заменяя F на b^i, получаем так называемую теорему о дивергенции (теорему Гаусса — Остроградского):

$$\int_{\mathfrak{v}} \operatorname{div} \mathbf{b}\, dv = \oint_{\mathfrak{s}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{2.2}$$

Замена F на $e^{ijk}b_j$ приводит к равенству

$$\int_{\mathfrak{v}} \operatorname{rot} \mathbf{b}\, dv = \oint_{\mathfrak{s}} \mathbf{n} \times \mathbf{b}\, da. \tag{2.3}$$

Формулы такого рода будут часто применяться в этой работе.

Перечень часто встречающихся обозначений

Иногда даже в пределах одного раздела один и тот же символ может определяться и использоваться в различных смыслах. Ссылки сделаны на пункт, в котором символ вводится впервые.

c — скорость звука, п. 35,
E — внутренняя энергия, п. 30, 33,
F — произвольная функция,
H — общая энтальпия, п. 18, 38,
I — энтальпия, п. 38
J — якобиан, п. 3,
M — число Маха, п. 36,
n — длина дуги нормали к линии тока,
p — давление,
q — модуль вектора скорости,
Q — поток массы, п. 37,
r — длина радиуса-вектора,
s — длина дуги линии тока,
S — энтропия, п. 30, 33,
t — время,
T — абсолютная температура,
u, v, w — компоненты скорости,

a — вектор ускорения,
D — тензор деформации, п. 11,
f — вектор внешней силы,
I — единичная матрица,
n — вектор единичной (внешней) нормали к поверхности,

$\mathbf{t}$ — вектор напряжения, п. 6,
$\mathbf{T}$ — тензор напряжений, п. 6,
$\mathbf{v}$ — вектор скорости,

ρ — плотность,
θ — полярный угол,
ϑ — угол наклона вектора скорости,
Θ — дивергенция скорости, п. 26,
φ — потенциал скорости,
Φ — функция диссипации, п. 34, 61,
ψ — функция тока, п. 19, 42,
ω — величина завихренности,
Ω — потенциал внешних сил. п. 9,

$\boldsymbol{\omega}$ — вектор завихренности,
$\boldsymbol{\Omega}$ — тензор завихренности, п. 11,

$\mathfrak{T}$ — кинетическая энергия, п. 9,
$\mathfrak{W}$ — мера завихренности, п. 27,
$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{V}$ — кривые, поверхности, объемы, движущиеся вместе с жидкостью,
$\mathfrak{v}$, $\mathfrak{s}$ — объем и поверхность, фиксированные в пространстве.

Ряд других стандартных обозначений указан в п. 2 и 3.

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Кинематика и динамика движения жидкости

3. Основные понятия кинематики. Математическим понятием, соответствующим интуитивному физическому представлению о движении жидкости, является понятие *непрерывного преобразования* трехмерного евклидова пространства в себя. Параметр t, описывающий это преобразование, отождествляется с временем. Роль начального момента времени будет играть $t = 0$, а областью изменения t мы будем обычно считать всю действительную ось.

Для аналитического описания преобразования введем *фиксированную в пространстве прямоугольную систему координат* (x^1, x^2, x^3). Тройку координат (x^1, x^2, x^3) мы отождествляем с *точкой* пространства и обозначаем через $\mathbf{x}$. Рассмотрим теперь характерную точку или частицу P, движущуюся с жидкостью. Пусть в момент $t = 0$ она находится в точке $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)$, а в момент t — в точке $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Тогда величина $\mathbf{x}$ определена как функция $\mathbf{X}$ и t и течение может рассматриваться как преобразование

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (\text{или } x^i = \varphi^i(\mathbf{X}, t)). \tag{3.1}$$

Если $\mathbf{X}$ фиксировано, а t изменяется, то уравнение (3.1) определяет *траекторию* частицы P, первоначально находившейся в точке $\mathbf{X}$. С другой стороны, при фиксированном t соотношение (3.1) определяет преобразование области, занимаемой жидкостью в начальный момент, в область, занимаемую жидкостью в момент времени t.

Мы предполагаем, что первоначально различные точки остаются различными во все время движения, или, другими

словами, что для преобразования (3.1) существует обратное преобразование [1]):

$$\mathbf{X} = \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (\text{или } X^\alpha = \Phi^\alpha(\mathbf{x}, t)). \tag{3.2}$$

Предполагается также, что φ^i и Φ^α обладают непрерывными производными до третьего порядка по всем переменным, исключая, быть может, некоторые особые поверхности, кривые или точки. Если противоположное не оговорено, мы будем рассматривать только те части течения, которые не содержат особенностей. Исключительные случаи (в частности, особые поверхности) требуют специального изучения; о них речь будет идти в п. 51 и 54. Заметим в заключение, что внутри любой замкнутой поверхности, движущейся с жидкостью, содержатся одни и те же частицы во все время движения.

Хотя течение полностью определяется преобразованием (3.1), столь же важно рассмотреть состояние движения в данной точке пространства, изменяющееся во времени. Оно описывается при помощи функций

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad \text{и т. д.}, \tag{3.3}$$

которые дают нам значение плотности, скорости и т. д. для частицы, находящейся в момент t в точке $\mathbf{x}$. Значение описания поля (3.3) при изучении движения жидкости было отмечено впервые Даламбером (1749 г.) и Эйлером (1752 г.). Замечательная идея изучения движения непосредственно через дифференциальные уравнения с частными производными относительно величин (3.3) принадлежит Эйлеру [2]).

Переменные $(\mathbf{x}, t)$, введенные при рассмотрении поля (3.3), будут в дальнейшем называться *пространственными* (их называют также переменными Эйлера); переменные $(\mathbf{X}, t)$,

---

[1]) Греческие буквы будут использоваться в качестве индексов координат частицы.

[2]) Работы Эйлера по механике жидкости содержатся в основном в 12 и 13 томах его собрания сочинений (Opera Omnia. Zurich). Введения к этим томам, написанные проф. Труселлом содержат исторический обзор исследований по механике жидкости того времени. Сравнение работ предшественников Эйлера с работами его учеников и последователей позволяет более ясно представить значение идей Эйлера для развития механики жидкости в целом.

которые выделяют некоторую фиксированную частицу, мы будем называть *переменными Лагранжа* [1]).

Любую величину F, заданную как функцию пространственных переменных $(\mathbf{x}, t)$, можно рассматривать также и как функцию переменных Лагранжа $(\mathbf{X}, t)$, и наоборот. Если мы хотим подчеркнуть зависимость F от определенных переменных, то мы пишем $F = F(\mathbf{x}, t)$ или $F = F(\mathbf{X}, t)$; при этом функции $F(\mathbf{x}, t)$ и $F(\mathbf{X}, t)$ связаны, конечно, заменой переменных (3.1) и (3.2). Геометрически эти функции можно интерпретировать так: $F(\mathbf{X}, t)$ есть величина F, определенная в момент времени t для частицы, которая находилась первоначально в точке $\mathbf{X}$, а $F(\mathbf{x}, t)$ есть величина F, определенная для частицы, находящейся в момент t в положении $\mathbf{x}$. Мы будем употреблять обозначения

$$\frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

для двух возможных производных по времени от F; очевидно, что это совершенно разные величины. Производная dF/dt называется *материальной производной* от F. Она измеряет скорость изменения величины F для выбранной частицы и может быть выражена как в переменных Лагранжа, так и в пространственных переменных. С другой стороны, $\partial F/\partial t$ дает скорость изменения величины F для наблюдателя, находящегося в точке $\mathbf{x}$.

Скорость $\mathbf{v}$ частицы определяется следующим образом:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad \left(v^i \equiv \frac{dx^i}{dt} \equiv \frac{\partial \varphi^i(\mathbf{X}, t)}{\partial t}\right).$$

В силу этого определения скорость $\mathbf{v}$ является функцией переменных Лагранжа; на практике, однако, чаще имеют дело с ее определением в пространственных переменных:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

В большинстве задач важно знать $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, а не действительное движение (3.1).

Мы ввели поле скоростей при помощи движения, заданного соотношениями (3.1). При рассмотрении поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, заданного независимо от соотношений (3.1), есте-

[1]) Установившаяся терминология является не вполне правильной, так как на самом деле и те и другие переменные были введены впервые Эйлером; см. [27], § 14.

ственно возникает вопрос о существовании и нахождении движения с этим полем скоростей. Задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \tag{3.4}$$

при начальных условиях $\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}$. Интегрирование уравнения (3.4) должно быть выполнено „в целом" и, следовательно, не всегда представляет простую задачу [1]).

Ускорение есть скорость изменения $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ для движущейся частицы. Обозначив вектор ускорения через $\mathbf{a}$, мы получим $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Заметим, что ускорение можно найти непосредственно по полю скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$:

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt},$$

или

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}. \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) является частным случаем общей формулы

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} F, \tag{3.6}$$

связывающей материальную производную с пространственной. Выражение (3.6) можно интерпретировать для произвольной величины $F = F(\mathbf{x}, t)$ как скорость изменения F во времени для наблюдателя, движущегося с частицей, которая в момент t находится в точке $\mathbf{x}$.

Якобиан преобразования (3.1)

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(X^1, X^2, X^3)} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha}\right)$$

дает величину относительного расширения бесконечно малого объема, движущегося с жидкостью. Из предположения о существовании дифференцируемого обратного преобразования следует, что

$$0 < J < \infty. \tag{3.7}$$

[1]) В работе [10], § 9.21, приведен интересный пример интегрирования уравнения (3.4), принадлежащий Максвеллу [*Proc. Lond. Math. Soc.*, **3**, 82 (1870)]. Другие примеры можно найти в работах [10], § 9.71 и [8], § 72, 159. Общая задача интегрирования рассматривалась Лихтенштейном [9], стр. 159—170.

Впоследствии мы будем пользоваться изящной формулой

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{3.8}$$

принадлежащей Эйлеру. Для ее вывода обозначим через A_i^α алгебраическое дополнение в J элемента $\partial x^i/\partial X^\alpha$. Тогда из соотношения

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha} A_j^\alpha = J\delta_j^i$$

следует, что

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha}\right) A_i^\alpha = \frac{\partial v^i}{\partial X^\alpha} A_i^\alpha = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha} A_i^\alpha = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} J.$$

Несжимаемые жидкости. Если жидкость предполагается несжимаемой (это означает, что движение происходит без изменения объема), то из формулы (3.8) следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{3.9}$$

Дальнейшее изучение движения несжимаемой жидкости должно включать в себя динамические рассуждения; в частности, обычное предположение $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ всякий раз нуждается в динамическом обосновании.

4. Теорема переноса. Пусть $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(t)$ — произвольный объем, движущийся с жидкостью [1]), а $F(\mathbf{x}, t)$ — скалярная или векторная функция точки. Тогда интеграл по объему

$$\int\limits_{\mathfrak{V}} F\, dv$$

является вполне определенной функцией времени. Производная этой функции выражается следующей важной формулой:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathfrak{V}} F\, dv = \int\limits_{\mathfrak{V}} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \mathbf{v}\right) dv. \tag{4.1}$$

[1]) Мы всегда будем употреблять прописные готические буквы для обозначения объемов, поверхностей и кривых, движущихся с частицами жидкости. С другой стороны, объемы, поверхности и кривые, фиксированные в физическом пространстве, мы будем обозначать строчными готическими буквами. Эти обозначения удобны при изложении основных принципов гидродинамики.

Для доказательства равенства (4.1) выберем в качестве переменных интегрирования переменные (X^1, X^2, X^3), связанные с (x^1, x^2, x^3) соотношениями (3.1). При этом объем $\mathfrak{V}(t)$, движущийся вместе с жидкостью в пространстве переменных $\mathbf{x}$, перейдет в объем $\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}(0)$, фиксированный в пространстве переменных $\mathbf{X}$ (объем $\mathfrak{V}(t)$ состоит все время из одних и тех же частиц жидкости).

Якобиан указанной замены равен J, следовательно,

$$\int\limits_{\mathfrak{V}} F\,dv = \int\limits_{\mathfrak{V}_0} F(\mathbf{X}, t)\,J\,dv_0.$$

Так как в правой части от t зависит только подинтегральная функция, мы видим, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathfrak{V}} F\,dv = \int\limits_{\mathfrak{V}_0}\left(J\,\frac{dF}{dt} + F\,\frac{dJ}{dt}\right)dv$$

и равенство (4.1) сразу следует из формулы Эйлера (3.8).

Формуле (4.1) можно придать вид, который сделает более ясным ее кинематическое значение. В самом деле, подинтегральная функция в правой части равенства (4.1) в силу соотношения (3.6) может быть записана в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}F).$$

Применив теорему Гаусса — Остроградского (2.2), получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathfrak{V}} F\,dv = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathfrak{V}} F\,dv + \oint\limits_{\mathfrak{S}} F\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,da. \qquad (4.2)$$

Здесь $\mathfrak{S}$ обозначает граничную поверхность объема $\mathfrak{V}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ — проекцию $\mathbf{v}$ на направление внешней нормали к $\mathfrak{S}$, а $\partial/\partial t$ — дифференцирование при фиксированном объеме $\mathfrak{V}$. Равенство (4.2) отражает тот факт, что скорость изменения интеграла от величины F, заданной на материальном объеме $\mathfrak{V}$, равна сумме скорости изменения интеграла от F по фиксированному объему, совпадающему в момент t с $\mathfrak{V}$, и потока F через граничную поверхность. Следует подчеркнуть, что равенства (4.1) и (4.2) выражают *кинематическую теорему*, не зависящую от характера величины F.

5. Уравнение неразрывности. Мы предполагаем, что масса $\mathfrak{M}$ жидкости, заключенной в объеме $\mathfrak{V}$, определяется формулой

$$\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{V}} \rho \, dv, \tag{5.1}$$

где $\rho = \rho(\mathbf{x}, t) > 0$. Плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ приписывается физическая размерность „масса/единица объема".

Обращаясь к физическому значению понятия массы, мы постулируем следующий *принцип сохранения массы*: *масса жидкости в объеме $\mathfrak{V}$, движущемся вместе с жидкостью, неизменна во все время движения.* Этот принцип сохранения массы можно сформулировать иначе как утверждение

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{V}} \rho \, dv = 0. \tag{5.2}$$

Из уравнений (4.1) и (5.2) следует, что

$$\int_{\mathfrak{V}} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv = 0,$$

и в силу произвольности объема мы получаем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{5.3}$$

Равенство (5.3), являющееся необходимым и достаточным условием сохранения массы в каждом движущемся объеме, носит название *уравнения неразрывности в форме Эйлера.* Воспользовавшись формулой (3.6), мы можем записать уравнение неразрывности в другом виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{5.4}$$

Заметим, что в сущности приведенные рассуждения принадлежат Эйлеру [1]).

[1]) Euler L., Principes généraux du mouvement des fluids, Hist. Acad. Berlin (1755), Opera Omnia (2), 12, стр. 54—92. Еще раньше (в 1751 г.) Эйлер получил соответствующие результаты для несжимаемой жидкости, но они не были опубликованы до 1761 г.

Умножив уравнение (5.3) на J и применив формулу (3.8), мы получим *уравнение неразрывности в форме Лагранжа*:

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0, \quad \rho J = \rho_0; \tag{5.5}$$

здесь $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X})$ обозначает первоначальное распределение плотности.

Принцип сохранения массы выражают иногда в эквивалентной форме для фиксированного объема: скорость изменения массы в фиксированном объеме $\mathfrak{v}$ равна потоку массы через граничную поверхность, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathfrak{v}} \rho\, dv = -\oint_{\mathfrak{s}} \rho \mathbf{v}\cdot \mathbf{n}\, da. \tag{5.6}$$

Применение теоремы Гаусса—Остроградского к правой части равенства (5.6) приводит к уравнению

$$\int_{\mathfrak{v}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\right) dv = 0,$$

из которого легко получить уравнение (5.4). В большинстве учебников изложение идет именно по этому пути, но применение теоремы о дивергенции маскируется рассмотрением вариации $\rho\mathbf{v}$ в малом параллелепипеде. Единственным возражением против такого обоснования уравнения неразрывности является бóльшая убедительность принципа сохранения массы в его первой форме.

В заключение этого раздела мы приведем важную формулу, справедливую для произвольной функции $F = F(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{B}} \rho F\, dv = \int_{\mathfrak{B}} \rho \frac{dF}{dt}\, dv. \tag{5.7}$$

Равенство (5.7) легко вывести из формул (4.1) и (5.3).

6. Уравнения движения. Мы переходим теперь к рассмотрению *динамики* движения жидкости и ставим перед собой задачу получить те уравнения, которые описывают действия на жидкость внешних и внутренних сил. В этом пункте мы дадим, вероятно, наиболее прямое и обоснованное исследование этого вопроса, намеченное в основных чертах еще в работах Эйлера и Коши.

Мы принимаем в качестве постулата *принцип напряжений* Коши [1]), утверждающий, что „для любой замкнутой поверхности $\mathfrak{S}$ существует распределение *вектора напряжений* $\mathbf{t}$ с результирующей и моментом, эквивалентными полю сил, действующих на сплошную среду, заключенную внутри $\mathfrak{S}$, со стороны среды, расположенной вне этой поверхности" [2]). Предполагается при этом, что в данный момент времени вектор $\mathbf{t}$ зависит только от положения и ориентации элемента поверхности da; другими словами, если обозначить через $\mathbf{n}$ внешнюю нормаль к поверхности $\mathfrak{S}$, то $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$. Как отмечает Трусделл, принцип Коши обладает „гениальной простотой. Его подлинную глубину можно оценить, только представив себе, что целое столетие выдающиеся геометры использовали при исследовании довольно частных задач упругости очень сложные, а иногда и не совсем корректные методы. В их работах нет даже намека на эту основную идею, которая сразу наметила ясные пути обоснования механики сплошных сред" [3]).

Мы сформулируем теперь основной принцип динамики движения жидкости, носящий название *принципа сохранения количества движения*: *скорость изменения количества движения жидкости, заключенной в движущемся объеме* $\mathfrak{B}$, *равна результирующей сил, действующих на эту жидкость* [4]). Аналитическим выражением этого

---

[1]) Cauchy A. L., *Ex. de Math.*, 2 (1827), Oeuvres (2), 7, стр. 79—81. Аналогичный принцип был сформулирован ранее Эйлером в случае идеальной жидкости.

[2]) Приведенная нами формулировка принципа Коши принадлежит Трусделлу [*J. Rational Mech. and Anal.*, 1, 125 (1952)].

[3]) Truesdell C., *Amer. Math. Monthly*, 60, 445 (1953).

[4]) Необходимость четкого определения постулатов, на которых основана механика сплошных сред, была отмечена еще Феликсом Клейном и Давидом Гильбертом. Сведение исходных предположений в систему аксиом было осуществлено впервые Гамелем [*Math. Ann.*, 66, 350 (1908)]; см. также [42], стр. 1—42. Более строгое обоснование механики сплошных сред, сравнимое по уровню строгости с современным математическим анализом, можно найти в недавней работе В. Нолла.

Следует подчеркнуть, что сформулированный выше постулат, несмотря на существующую здесь аналогию, не может быть получен из классической механики системы дискретных материальных точек простым предельным переходом.

принципа является уравнение

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{V}} \rho \mathbf{v}\, dv = \int_{\mathfrak{V}} \rho \mathbf{f}\, dv + \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{t}\, da, \tag{6.1}$$

где через $\mathbf{f}$ обозначено *поле внешних сил, отнесенных к единице массы*. В формулировке (6.1) принципа неявно предполагается, что сила $\mathbf{f}$ является *известной функцией*, зависящей от выбранной точки пространства, времени и, возможно, состояния движения жидкости. Заметим, что при такой точке зрения обходится одна из главных проблем обоснования механики, а именно проблема определения системы координат, в которой $\mathbf{f}$ является известной функцией, или по крайней мере доказательства существования такой системы координат. Однако в приложениях механики жидкости инерциальность рассматриваемой системы координат обычно не вызывает сомнений и переход от сформулированного принципа сохранения количества движения к уравнению (6.1) является, очевидно, законным. Используя формулу (5.7), уравнение (6.1) можно записать в виде

$$\int_{\mathfrak{v}} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}\, dv = \int_{\mathfrak{v}} \rho \mathbf{f}\, dv + \oint_{\mathfrak{s}} \mathbf{t}\, da. \tag{6.2}$$

(Здесь интегрирование по движущемуся объему можно заменить интегрированием по неподвижному объему.)

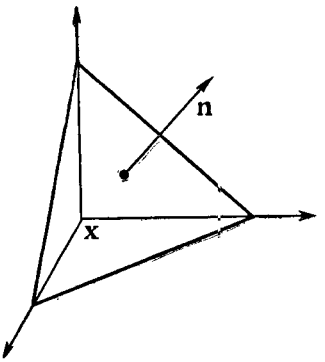


Рис. 1. Напряжения на тетраэдре.

Отметим одно важное следствие уравнения (6.2). Пусть l^3 есть величина объема области $\mathfrak{v}$; разделив обе части равенства (6.2) на l^2, мы получим в пределе, когда $l \to 0$, при одном только предположении ограниченности подинтегральной функции

$$\lim_{\mathfrak{v}\to 0} l^{-2} \oint_{\mathfrak{s}} \mathbf{t}\, da = 0. \tag{6.3}$$

Это равенство показывает, что силы напряжений находятся в локальном равновесии. Рассмотрим теперь тетраэдр, изображенный на рис. 1, с вершиной в некоторой произвольной

точке $\mathbf{x}$ и тремя гранями, параллельными координатным плоскостям. Обозначим нормаль к наклонной грани и площадь этой грани соответственно через $\mathbf{n}$ и Σ. Нормалями к трем остальным граням являются векторы $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$, а их площади равны $n_1\Sigma$, $n_2\Sigma$ и $n_3\Sigma$. Применим формулу (6.3) к семейству тетраэдров с площадью наклонной грани $\Sigma \to 0$ и фиксированной нормалью $\mathbf{n}$. Так как $l^2 \sim \Sigma$ и $\mathbf{t}$ является непрерывной функцией точки, мы получим

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) + n_1\mathbf{t}(-\mathbf{i}) + n_2\mathbf{t}(-\mathbf{j}) + n_3\mathbf{t}(-\mathbf{k}) = 0; \qquad (6.4)$$

здесь $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ сокращенно обозначает $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$. Эта формула доказана нами только при положительных n_i. Для того чтобы проверить ее справедливость при более широких предположениях, заметим сначала, что по непрерывности эта формула остается справедливой при $n_i \geqslant 0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\mathbf{t}(\mathbf{i}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{i}),\ \mathbf{t}(\mathbf{j}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{j}),\ \mathbf{t}(\mathbf{k}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{k}). \qquad (6.5)$$

Рассматривая теперь тетраэдры в других октантах и применяя соотношения (6.5), нетрудно убедиться, что формула

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_1\mathbf{t}(\mathbf{i}) + n_2\mathbf{t}(\mathbf{j}) + n_3\mathbf{t}(\mathbf{k}) \qquad (6.6)$$

справедлива для произвольного вектора $\mathbf{n}$. *Следовательно,* $\mathbf{t}$ *представляет собой линейную функцию компонент вектора* $\mathbf{n}$:

$$t^i = n_j T^{ji}, \text{ где } T^{ji} = T^{ji}(\mathbf{x}, t).$$

Матрица коэффициентов T^{ij} образует, очевидно, тензор; этот тензор называется *тензором напряжений* и обозначается в нашей работе через $\mathbf{T}$. Каждая компонента $\mathbf{T}$ имеет простую физическую интерпретацию, а именно T^{ij} есть компонента по оси j силы, действующей на поверхностный элемент с внешней нормалью, направленной по оси i. Приведенные рассуждения в сущности принадлежат Коши [1]).

Заменяя в уравнении (6.2) $\mathbf{t}$ на $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ и применяя теорему Гаусса — Остроградского, мы получаем, что

$$\int_v \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}\, dv = \int_v (\rho\mathbf{f} + \operatorname{div}\mathbf{T})\, dv,$$

[1]) Cauchy A. L., *Ex. de Math.*, **2** (1827); Oeuvres (2), **7**, стр. 79—81.

а так как объем $\mathfrak{v}$ произволен, отсюда следует, что

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}. \tag{6.7}$$

Впервые это изящное *уравнение движения* было получено Коши [1]). Оно справедливо не только для жидкости, но и вообще для любой сплошной среды независимо от вида тензора напряжений.

Идеальная жидкость. Во всех реальных жидкостях могут возникать, очевидно, тангенциальные напряжения на поверхностных элементах, так что направление силы $\mathbf{t}$ не будет, вообще говоря, ортогонально элементу поверхности, к которому эта сила приложена. Тем не менее во многих практических задачах тангенциальные напряжения играют незначительную роль и поэтому представляет интерес изучение идеализированной среды, в которой тангенциальные напряжения отсутствуют. Итак, по определению, для *идеальной жидкости*

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n}. \tag{6.8}$$

Величина p носит название *давления*: когда $p > 0$, силы $\mathbf{t}$, действующие на замкнутую поверхность, стремятся сжать жидкость, заключенную внутри этой поверхности. Сопоставив равенства (6.6) и (6.8), мы найдем, что $p(\mathbf{n}) = p(\mathbf{i}) = p(\mathbf{j}) = p(\mathbf{k})$. Величина p не зависит, таким образом, от $\mathbf{n}$ и

$$p = p(\mathbf{x}, t).$$

Уравнения движения принимают в рассматриваемом случае более простой вид [1]):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} - \operatorname{grad} p. \tag{6.9}$$

Полученную нами систему, состоящую из трех уравнений, соответствующих уравнениям (6.7) или (6.9), и уравнения (5.3), можно рассматривать как систему относительно четырех неизвестных: ρ и трех компонент скорости $\mathbf{v}$. Переменные $\mathbf{T}$ и p, входящие в уравнения (6.7) и (6.9), на

[1]) Cauchy A. L., *Ex. de Math.*, **3** (1828); Oeuvres (2), **8**, стр. 195—226.

[2]) См. работу Эйлера, указанную в примечании 1 на стр. 18.

основании соображений термодинамического и механического характера могут быть непосредственно выражены через плотность и компоненты скорости. Различные возможные варианты будут рассмотрены в следующих главах.

Уравнения движения в переменных Лагранжа. В случае идеальной жидкости нетрудно получить уравнения, которым удовлетворяют $\mathbf{v}$, ρ и p как функции переменных X^α, t. Действительно, умножив обе части уравнения (6.9) на $x_{i,\alpha} \equiv \equiv x^i{}_{,\alpha}$ и воспользовавшись равенством $d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{x}/dt^2$, мы получим, что

$$\left(\frac{d^2x^i}{dt^2} - f^i\right) x_{i,\alpha} = -\frac{1}{\rho} p_{,\alpha}.$$

Эти уравнения можно записать в векторной форме так:

$$\operatorname{Grad} \mathbf{x} \cdot \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} - \mathbf{f}\right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{6.10}$$

За исключением случая одномерных течений, уравнения (6.10) почти не используются, так как их применение довольно неудобно. Необходимость в них возникает, однако, каждый раз, когда нужно отличать одну частицу от другой, например в случае неоднородной жидкости. Уравнения движения вязкой жидкости в переменных Лагранжа, вероятно, не применяются вообще [1]).

7. Закон сохранения момента количества движения. В классической динамике материальных точек или твердых тел принцип сохранения момента количества движения обычно формулируется в виде теоремы. Ее доказательство основано, однако, на определенных предположениях относительно „внутренних“ сил взаимодействия частиц или тел, образующих материальную систему. Аналогичный метод применим и в механике сплошных сред [2]). Здесь для того, чтобы обеспечить сохранение момента количества движения, нужно

---

[1]) В теории нелинейной упругости, напротив, уравнения движения в переменных Лагранжа играют большую роль.

[2]) Схема, которой мы придерживаемся ниже, похожа на схему, предложенную Гамелем в работе [42], стр. 9. Возможен и другой подход, при котором постулируется обобщенный закон сохранения момента количества движения, справедливый и при наличии моментов внешних сил; см. статью Труселла и Тупина в этой Энциклопедии (том III, часть 1).

сделать определенные предположения относительно напряжений на поверхностных элементах или, другими словами, относительно тензора напряжений. Точнее: мы постулируем симметричность тензора напряжений, т. е. равенство

$$T^{ij} = T^{ji}. \tag{7.1}$$

(При наличии *внешних моментов сил* введенное предположение нуждается в модификации. Однако при изучении механики жидкости можно, что мы и делаем в дальнейшем, пренебрегать воздействием этих закручивающих моментов, так как они, вообще говоря, возникают только в поляризованном веществе.) Соотношения (7.1) были получены впервые Коши [1]) как следствие принципа сохранения момента количества движения. Тот факт, что эти условия являются и достаточными для справедливости указанного принципа, был обнаружен Больцманом (см. [42], стр. 9).

Теорема (закон сохранения момента количества движения). *Для любой сплошной среды, удовлетворяющей уравнению неразрывности* (5.3), *уравнениям движения* (6.7) *и постулату Больцмана* (7.1), *мы имеем*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathfrak{V}} \rho(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,dv = \int\limits_{\mathfrak{V}} \rho(\mathbf{r}\times\mathbf{f})\,dv + \oint\limits_{\mathfrak{S}} \mathbf{r}\times\mathbf{t}\,da \tag{7.2}$$

для произвольного объема $\mathfrak{V}$, *движущегося вместе с жидкостью.*

Доказательство. Исходя из уравнений (5.7) и (6.7), нетрудно показать, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathfrak{V}} \rho(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,dv = \int\limits_{\mathfrak{V}} \rho\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)dv =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{V}} \rho(\mathbf{r}\times\mathbf{f})\,dv + \oint\limits_{\mathfrak{S}} \mathbf{r}\times\mathbf{t}\,da - \int\limits_{\mathfrak{V}} \mathbf{T}_{\times}\,dv.$$

Через $\mathbf{T}_{\times}$ здесь обозначен вектор с компонентами $(\mathbf{T}_{\times})^l = e^{ijk}T_{jk}$. В силу соотношений (7.1) мы имеем $\mathbf{T}_{\times} = 0$, и уравнение (7.2) доказано. Верно и обратное утверждение: если уравнение (7.2) справедливо для произвольного объема $\mathfrak{V}$, то тензор $\mathbf{T}$ должен быть симметричным.

[1]) См. работу Коши, указанную в примечании 1 на стр. 22.

Для некоторых жидкостей тензор напряжений оказывается симметричным в силу чисто механических причин, независимо от каких-либо других предположений. Мы отметим, в частности, невязкие жидкости, для которых $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, и изотропные вязкие жидкости, для которых напряжение является функцией от скорости деформации (п. 59). В этих практически интересных случаях постулат Больцмана является просто тавтологией и уравнение (7.2) может быть получено непосредственно из уравнений движения.

Можно формально построить механическую систему, для которой тензор $\mathbf{T}$ будет несимметричным; примеры таких систем приведены в работе Гамеля [42]. Принцип сохранения момента количества движения в форме (7.2) в этом случае уже несправедлив и нуждается в обобщении.

8. Граничные условия. Если поверхность $\mathfrak{S}$ в движущейся жидкости состоит все время из одних и тех же частиц, то ясно, что она играет роль поверхности раздела, отделяющей жидкость, заключенную внутри $\mathfrak{S}$, от жидкости вне этой поверхности. Обратное предложение о том, что каждая поверхность раздела состоит все время из одних и тех же частиц, менее очевидно.

Предположим, что жидкость находится в непрерывном движении, удовлетворяющем условиям, сформулированным в п. 3, и что поверхность $F(\mathbf{x}, t) = 0$ ограничивает некоторый объем жидкости. Тогда функция F должна удовлетворять следующему условию:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} F = 0 \quad \text{при } F = 0. \tag{8.1}$$

Условие (8.1) было впервые сформулировано Кельвином[1]). Это условие означает, что поверхность $F(x, t) = 0$ все время состоит из одних и тех же частиц (Лагранж[2])).

Доказательство. Нормальная скорость движущейся поверхности $F(\mathbf{x}, t) = 0$ выражается известной формулой

$$V = -\frac{\partial F/\partial t}{|\operatorname{grad} F|}.$$

[1]) Thomson W. (Kelvin), *Cambridge and Dublin Math. J.* (1848); Papers 1, стр. 83.

[2]) Lagrange J. L., *Nouv. Mém. Acad. Sci. Berlin* (1781); Oeuvres 4, стр. 706.

По предположению поверхность $F=0$ является поверхностью раздела. Легко видеть, что для такой поверхности должно выполняться условие

$$V=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{v}\cdot(\operatorname{grad}F/|\operatorname{grad}F|).$$

Отсюда сразу следует равенство (8.1). Покажем теперь, что при выполнении условия (8.1) поверхность $F=0$ состоит все время из одних и тех же частиц. Положим

$$G(\mathbf{X},\ t)=F(\varphi(\mathbf{X},\ t),\ t)$$

и рассмотрим поверхность $G(\mathbf{X},\ t)=0$ в пространстве переменных $\mathbf{X}$. Эта поверхность является геометрическим местом точек, в которых первоначально находились частицы, составляющие в момент t поверхность $F(\mathbf{X},\ t)=0$. Из условия (8.1) следует, что

$$\frac{\partial G}{\partial t}=0 \quad \text{при} \quad G=0.$$

Таким образом, нормальная скорость распространения поверхности $G=0$ равна нулю и, следовательно, в пространстве переменных $\mathbf{X}$ эта поверхность покоится. Это в свою очередь означает, что поверхность $F=0$ состоит все время из одних и тех же частиц.

На неподвижных частях границы выполняется очевидное условие $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$.

§ 2. Перенос энергии и количества движения

9. Уравнение переноса энергии. Обозначим через $\mathfrak{T}$ кинетическую энергию жидкости в объеме $\mathfrak{V}$.

$$\mathfrak{T}=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathfrak{V}}\rho q^2\,dv,$$

а через $\mathbf{D}$ — *тензор деформации*, $D_{ij}=1/2\,(v_{i,\,j}+v_{j,\,i})$. Тогда для произвольного объема $\mathfrak{V}$, движущегося с жидкостью, мы имеем

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt}=\int\limits_{\mathfrak{V}}\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dv+\oint\limits_{\mathfrak{S}}\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,da-\int\limits_{\mathfrak{V}}\mathbf{T}:\mathbf{D}\,dv. \qquad (9.1)$$

Вывод этой формулы сводится к простому применению уравнений (5.7) и (6.7) с учетом симметрии тензора $\mathbf{T}$.

Уравнение (9.1) *означает, что скорость изменения кинетической энергии в движущемся объеме равна разности мощности внешних сил, действующих на объем, и отнесенной к единице времени величины „диссипации", вызванной работой сил напряжений по деформации объема.* Точнее, последний член дает величину работы, затрачиваемой за единицу времени на изменение объема и формы элемента жидкости. Некоторая часть энергии при этом переходит в теплоту (см. п. 34). В случае идеальной жидкости уравнение энергии принимает более простую форму:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = \int\limits_{\mathfrak{V}} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dv - \oint\limits_{\mathfrak{S}} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, da + \int\limits_{\mathfrak{V}} p \operatorname{div} \mathbf{v}\, dv. \quad (9.2)$$

Последний член этой формулы дает величину работы сил давления, затрачиваемой за единицу времени на изменение объема жидкости.

Уравнение энергии допускает небольшое упрощение, если поле $\mathbf{f}$ порождается не зависящим от времени потенциалом: $\mathbf{f} = -\operatorname{grad} \Omega$, $\Omega = \Omega(\mathbf{x})$. В этом случае, полагая $\mathfrak{U} = \int\limits_{\mathfrak{V}} \rho\Omega\, dv$, мы получим

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T} + \mathfrak{U}) = \oint\limits_{\mathfrak{S}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}\, da - \int\limits_{\mathfrak{V}} \mathbf{T} : \mathbf{D}\, dv.$$

10. Уравнение переноса количества движения. Принцип сохранения количества движения (6.1) позволяет определить скорость изменения количества движения в фиксированном объеме $\mathfrak{v}$, равную

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathfrak{v}} \rho\mathbf{v}\, dv = \int\limits_{\mathfrak{v}} \rho\mathbf{f}\, dv + \oint\limits_{\mathfrak{s}} (\mathbf{t} - \rho\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, da. \quad (10.1)$$

Для вывода этого отношения достаточно применить к уравнению (6.1) формулу (4.2). Исходя из физического смысла последнего члена (10.1), это соотношение называют *уравнением переноса количества движения.* Формулировки (6.1) и (10.1) закона сохранения количества движения являются равносильными, и иногда за основу берут второе из этих уравнений.

Уравнение переноса количества движения часто используют для того, чтобы найти силу, действующую на тело в установившемся течении. Проиллюстрируем этот метод одним примером. Предположим, что жидкость занимает все пространство вне некоторого тела и что внешние силы отсутствуют. Тогда, обозначив через $\mathcal{S}$ поверхность тела, а через Σ — „контрольную" поверхность, охватывающую $\mathcal{S}$, мы получим для силы $\mathbf{F}$, действующей на тело, следующее выражение:

$$\mathbf{F} = -\int_{\mathcal{S}} \mathbf{t}\, da = \int_{\Sigma} (\mathbf{t} - \rho \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, da \tag{10.2}$$

(заметим, что $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ на $\mathcal{S}$).

Аналогичным образом, используя уравнение (7.2), нетрудно найти для момента $\mathbf{L}$ сил, действующих на поверхность, выражение

$$\mathbf{L} = \int_{\Sigma} \mathbf{r} \times (\mathbf{t} - \rho \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, da.$$

Другого рода формула для силы, действующей на тело, получается при помощи уравнения энергии (9.1). Рассмотрим твердое тело, движущееся прямолинейно со скоростью $\mathbf{U}$ в жидкости, которая предполагается ограниченной неподвижными стенками. Если область течения обозначить через $\mathfrak{V}$, внешнюю границу этой области — через $\mathcal{S}$ и поверхность движущегося тела — через $\mathcal{S}_0$, то

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}\, da = \mathbf{U} \cdot \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{t}\, da \tag{10.3}$$

(в случае невязкой жидкости это равенство следует из граничного условия $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$, а в случае вязкой жидкости — из предположения $\mathbf{v} = \mathbf{U}$ на $\mathcal{S}_0$). Воспользовавшись теперь уравнением (9.1), мы получим формулу

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = \frac{d\mathfrak{T}}{dt} + \int_{\mathfrak{V}} \mathbf{T} : \mathbf{D}\, dv, \tag{10.4}$$

которая дает величину проекции $\mathbf{F}$ на направление движения. (Формулу (10.4) можно обобщить на случай неограниченной области течения; нужно только наложить определенные требования на поведение течения на бесконечности.

Более подробное изложение приложений принципа сохранения количества движения можно найти в книге [26], стр. 203—204, и в книге [12].)

11. Кинематика деформации. Вектор завихренности. Рассуждения этого раздела основаны на простом представлении тензора grad **v**:

$$\operatorname{grad} \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}, \tag{11.1}$$

где

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \qquad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{j,i} - v_{i,j}).$$

Тензоры **D** и **Ω** являются соответственно симметрической и кососимметрической частью grad **v**. Изложение будет удобно разбить на две части.

1. *Тензор деформации.* Обозначим через $d\mathbf{x}$ жидкий элемент дуги. Скорость изменения этого элемента при движении жидкости выражается формулой

$$\frac{d}{dt}(dx^i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha}\, dX^\alpha\right) = \frac{\partial v^i}{\partial X^\alpha}\, dX^\alpha = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\, dx^j,$$

или, в векторной форме,

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}. \tag{11.2}$$

Из уравнения (11.2) следует, что

$$\frac{d}{dt}(ds^2) = 2\, d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x},$$

где $ds = |d\mathbf{x}|$. Таким образом, тензор **D** представляет собой меру скорости изменения квадрата элемента дуги, движущейся вместе с жидкостью. Если жидкость движется как твердое тело, то $ds \equiv \text{const}$, поэтому *необходимым и достаточным условием того, чтобы в данный момент времени жидкость локально двигалась как твердое тело, является условие* $\mathbf{D} = 0$. Исходя из этих соображений, **D** называют *тензором деформации.* Тензор $\mathbf{D} - {}^1/_3 (\operatorname{Spur} \mathbf{D})\mathbf{I}$ также представляет интерес; равенство этого тензора нулю является необходимым и достаточным условием сохранения углов (в данной точке в данный момент времени).

Если $\mathbf{D} \equiv 0$, то жидкость движется как твердое тело и

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \text{const}. \tag{11.3}$$

Величина $\boldsymbol{\omega}$ здесь не зависит от $\mathbf{r}$ и равна удвоенной угловой скорости вращательного движения. Аналитически соотношение (11.3) является следствием системы уравнений первого порядка с частными производными $\mathbf{D} = 0$ и легко получается из первых интегралов этой системы.

2. *Общий случай движения жидкости.* Рассмотрим поле скоростей в окрестности некоторой фиксированной точки P. Если понимать под F_P значение величины F в точке P, то для точек, близких к P,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \mathbf{r} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v})_P + O(r^2);$$

здесь через $\mathbf{r}$ обозначен радиус-вектор, отложенный из точки P. Если пренебречь членами порядка r^2 и воспользоваться представлением (11.1), то мы получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \mathbf{r} \cdot \mathbf{D}_P + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}_P. \tag{11.4}$$

Выясним теперь смысл отдельных членов этой формулы.

Первый член представляет поступательное движение с постоянной скоростью $\mathbf{v}_P$. Положив $D = \mathbf{r} \cdot \mathbf{D}_P \cdot \mathbf{r}$, мы можем записать второй член в виде

$$\operatorname{grad} \frac{1}{2} D. \tag{11.5}$$

Поле скоростей, соответствующее этому члену, в каждой точке ортогонально поверхности эллипсоида $D = \text{const}$, проходящей через эту точку. В этом поле скоростей есть три взаимно перпендикулярных направления — главные оси деформации, не участвующие в мгновенном вращательном движении (соответствующем этому полю скоростей). Главные значения тензора $\mathbf{D}$ равны скоростям относительного удлинения жидких элементов в этих направлениях.

Последний член формулы (11.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{r}, \tag{11.6}$$

где $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ представляет собой *вектор завихренности.* [Для доказательства формулы (11.6) проще всего восполь-

зоваться тем, что

$$\boldsymbol{\omega} = (\operatorname{grad} \mathbf{v})_{\times} = \boldsymbol{\Omega}_{\times} = 2\,(\Omega_{23},\ \Omega_{31},\ \Omega_{12}).$$

Легко видеть, что вектор $(\Omega_{23},\ \Omega_{31},\ \Omega_{12}) \times \mathbf{r}$ равен $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}_P$.] Векторная запись (11.6) последнего члена, $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}_P$, показывает, что этот член характеризует вращение жидкости как твердого тела с угловой скоростью $^1/_2\ \boldsymbol{\omega}_P$.

Сопоставляя полученные выше результаты, мы приходим к следующему истолкованию соотношения (11.4). Для произвольного движения поле скоростей $\mathbf{v}$ вблизи данной точки P с точностью до бесконечно малых второго порядка имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \operatorname{grad} \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{r}, \tag{11.7}$$

де $D = \mathbf{r} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ определяет эллипсоид деформации, а $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ — вектор завихренности. Таким образом, *любое мгновенное состояние движения сплошной среды является в каждой точке суперпозицией поступательного движения, растяжения по трем взаимно ортогональным осям и вращения этих осей как твердого тела*[1]). Угловая скорость указанного вращения равна $^1/_2\ \boldsymbol{\omega}_P$. Сформулированное предложение позволяет утверждать, что $\boldsymbol{\omega}$ *представляет собой мгновенную скорость вращения жидкости в данной точке.*

Если в данной точке $\mathbf{D} = 0$, то из формулы (11.7) следует, что движение локально представляет собой мгновенное вращение; если же $\mathbf{D} = k\mathbf{I}$, то движение является суперпозицией чистого растяжения и вращения. Эти результаты служат подтверждением предложений, высказанных выше. С другой стороны, если в конечном объеме жидкости $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = 0$, то относительное движение любого элемента этого объема является чистой деформацией и называется безвихревым. В этом случае можно показать, что поле является потенциальным, т. е. представляет собой градиент некоторого потенциала ($\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$); см. [48], стр. 101.

---

[1]) Cauchy A. L., *Ex. d'Anal. Phys. Math.*, **2** (1841), Oeuvres (2), **12**, стр. 343—377; Stokes G., *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8** (1845), Papers 1, стр. 75—129.

§ 3. Преобразование координат

12. Уравнения движения в криволинейных координатах. Мы хотим получить здесь уравнения неразрывности и движения в произвольной криволинейной системе координат. Для этой цели удобно воспользоваться методами элементарного тензорного анализа; читатель, незнакомый с тензорным анализом, может обратиться к работе [47], где дано ясное изложение этого предмета [1]), или может пропустить весь этот раздел без значительного ущерба для понимания остальной части статьи. Обозначим через (x^1, x^2, x^3) координаты точки в произвольной криволинейной системе координат. Мы, как и раньше, положим $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, однако $\mathbf{x}$ здесь нельзя рассматривать как вектор. Движение по-прежнему выражается уравнениями в форме (3.1), которые дают нам положение частицы в момент t; в цилиндрической системе координат, например, движение задается при помощи уравнений

$$r = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \theta = \varphi(\mathbf{X}, t), \quad z = \psi(\mathbf{X}, t).$$

Ясно, что производные dx^i/dt от функций (3.1) являются контравариантными компонентами вектора, так что определение вектора скорости $v^i = dx^i/dt$ сохраняет смысл. Для определения *материальной производной* от произвольной скалярной, векторной или тензорной функции F мы воспользуемся формулой

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + v^i F_{,i}, \tag{12.1}$$

где символ $F_{,i}$ обозначает *ковариантную производную* от F по переменной x^i. Нетрудно проверить, что так определенная материальная производная является тензором и что данное определение согласуется с введенным ранее определением (3.6). Следует отметить, что величина $\partial F(\mathbf{X}, t)/\partial t$ в общем случае уже не является тензором, и, следовательно, определение, введенное в п. 3, в общем случае неприменимо. Для того чтобы получить корректную формулу для материальной производной в *переменных Лагранжа*, можно по-

[1]) См. также К о ч и н Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд. АН СССР, М., 1951, стр. 138. — *Прим. перев.*

ступить следующим образом. Запишем ковариантную производную в виде

$$F_{,i} = \frac{\partial F}{\partial x^i} + A_i,$$

где A_i — хорошо известные выражения, включающие в себя символы Кристоффеля. Подставив это выражение в формулу (12.1), мы получим требуемую формулу:

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + v^i\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + A_i\right) = \frac{dF}{dt} + v^i A_i. \qquad (12.1')$$

Формула (12.1′) встречается также в дифференциальной геометрии в теории параллельного переноса и ясно показывает различие между $\delta F/\delta t$ и dF/dt. Заметим, что в прямоугольной системе координат оба этих определения совпадают, $\delta F/\delta t \equiv dF/dt$; другими словами, точно так же как обобщение обычной производной приводит к понятию ковариантной производной, обобщение понятия материальной производной dF/dt приводит к операции $\delta F/\delta t$. Заметим, наконец, что при использовании понятия материальной производной удобнее исходить из формулы (12.1′), а не (12.1). Ниже мы будем пользоваться векторными обозначениями; определения п. 2 переносятся при этом на случай произвольной криволинейной системы координат очевидным образом. Например, символ $\mathbf{v}$ будет теперь обозначать упорядоченную тройку ковариантных или контравариантных (в зависимости от ситуации) компонент вектора скорости, а формула (12.1) запишется в виде

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} F.$$

Приняв такое соглашение, мы можем записать уравнение неразрывности в любой из двух инвариантных форм:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \qquad (12.2)$$

где дивергенция, как и обычно в тензорном анализе, означает

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = b^i{}_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\, b^i).$$

Тензор деформации мы определим через его компоненты в некоторой прямоугольной системе координат. Тогда соотношение между вектором напряжений $\mathbf{t}$ и нормалью к по-

верхности $\mathbf{n}$, $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ будет справедливым даже в том случае, когда компоненты $\mathbf{T}$ не совпадают с величинами сил, действующих на элементы поверхности. Отметим, наконец, инвариантность уравнения движения, записанного в следующем виде:

$$\rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T}, \tag{12.3}$$

где

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_i = T^k{}_{i,\,k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} T^k{}_i) - T^k{}_j \, \Gamma_i{}^j{}_k. \tag{12.4}$$

Рассмотрим подробнее случай ортогональной системы координат. В таких системах квадрат элемента дуги выражается формулой

$$ds^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2. \tag{12.5}$$

Уравнение неразрывности в рассматриваемом случае упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \rho v^i) = 0, \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3. \tag{12.6}$$

С целью преобразования уравнения (12.3) заметим сначала, что

$$\mathbf{a} = \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \operatorname{grad} \frac{1}{2} q^2 \tag{12.7}$$

[см. формулу (17.1)]; следовательно, ускорение легко выражается через $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Учитывая равенство $\Gamma_j{}^l{}_k = \Gamma_k{}^l{}_j$, вектор $\boldsymbol{\omega}$ можно представить в виде

$$\omega^i = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}} v_{k,\,j} = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial v_k}{\partial x^j}. \tag{12.8}$$

Преобразовать член $\operatorname{div} \mathbf{T}$ более затруднительно в силу сложности формул (12.4). Символы Кристоффеля, соответствующие метрике (12.5), выражаются следующим образом:

$$\Gamma_i{}^i{}_k = \Gamma_k{}^i{}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^k},$$

$$\Gamma_i{}^k{}_i = -\frac{h_i}{h_k^2} \frac{\partial h_i}{\partial x^k} \quad (i \neq k);$$

все остальные величины $\Gamma_i^k{}_j = 0$. (Суммирование по индексам l и k в этой формуле не производится.) Непосредственные вычисления показывают, что

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} T^k{}_i) - T^k{}_k \frac{\partial \log h_k}{\partial x^i} \qquad (12.9)$$

(суммирование по k). В случае идеальной жидкости необходимость в этой формуле отпадает. Заметим также, что в случае вязкой жидкости, удовлетворяющей закону Коши — Пуассона (п. 61), как правило, проще вывести уравнения движения, не обращаясь к формуле (12.9).

Можно указать другую формулу для определения ускорения, а именно

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} - v_k \frac{\partial \log h_k}{\partial x^i} \right). \qquad (12.10)$$

Вывод этой формулы аналогичен выводу формулы (12.9).

На практике часто бывает удобно рассматривать вместо ковариантных или контравариантных компонент вектора $\mathbf{b}$ его физические компоненты β_i. Физические компоненты вектора $\mathbf{b}$ определяются равенствами

$$\beta_i = h_i b^i = \frac{1}{h_i} b_i$$

(по i не суммировать) и представляют собой величины проекций $\mathbf{b}$ на соответствующие координатные линии, проходящие через точку приложения вектора. Аналогичным образом определяют физические компоненты тензора, однако на этом мы останавливаться не будем.

Пример. *Цилиндрическая система координат.* В этом случае мы имеем

$$ds^2 = dr^2 + (r\,d\theta)^2 + dz^2.$$

Если обозначить через v_r, v_θ и v_z соответствующие физические компоненты скорости, то уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r v_z) \right] = 0. \qquad (12.11)$$

Физические компоненты ускорения в уравнении движения в силу соотношения (12.7) или (12.10) выражаются формулами

$$a_r = Dv_r - \frac{v_\theta^2}{r}, \quad a_\theta = Dv_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r}, \quad a_z = Dv_z,$$
$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Физические компоненты $\operatorname{div} \mathbf{T}$ приведены в работе Лява [1]), однако нам они не понадобятся. Наконец, компоненты вектора завихренности определяются из соотношений

$$\omega_r = \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \quad \omega_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r},$$
$$\omega_z = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r}. \tag{12.12}$$

13. Римановo пространство. С точки зрения выяснения логической структуры основ механики жидкости представляет интерес вывод уравнений гидродинамики в римановом пространстве с заданной в некоторой системе координат $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ метрикой

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Вообще говоря, в этом пространстве нельзя ввести декартову систему координат и, следовательно, нельзя применить непосредственно проведенные выше рассуждения для вывода „уравнений движения".

Движение в римановом пространстве описывается преобразованием типа (3.1), но теперь i принимает значения от 1 до n. Мы принимаем в качестве определения компонент вектора скорости соотношения $v^i = dx^i/dt$ и по аналогии с определением материальной производной для евклидова пространства полагаем

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + v^i F_{,i}. \tag{13.1}$$

(Это определение обладает тем свойством, которое имело бы место для пространства, помещенного в евклидово пространство высшей размерности. Если, например, мы рассмотрим

[1]) Ляв А., Математическая теория упругости, ОНТИ, 1935 (см. также указанную выше книгу Н. Е. Кочина. — *Перев.*)

поверхность в трехмерном пространстве, то материальная производная, понимаемая в смысле (13.1), является проекцией на поверхность „естественной" материальной производной евклидова пространства.)

Уравнение неразрывности легко получить, пользуясь методами п. 4 и 5. Формула (4.2) заменяется при этом формулой

$$\int_{\mathfrak{V}} \rho(\mathbf{x}, t)\, dV = \int_{\mathfrak{V}_0} \rho(\mathbf{X}, t)\, \sqrt{g} J\, dv_0,$$

а вместо уравнения (3.8) используется уравнение

$$\frac{\delta}{\delta t}(\sqrt{g} J) = \sqrt{g} J \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Во всем остальном рассуждения полностью совпадают и приводят в конце концов к уравнению

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

идентичному уравнению (12.2), но полученному без привлечения декартовой системы координат.

Вывод уравнения движения включает в себя динамические рассуждения, которые, по-видимому, нельзя приспособить к риманову пространству; в частности, неясно, как надо формулировать принцип сохранения количества движения. Тем не менее нам кажется естественным принять уравнение (12.3) в качестве постулата. В этом случае дальнейшее исследование проводится точно так же, как и в обычной гидродинамике.

§ 4. Вариационные методы

Широкое и успешное применение вариационных принципов в классической механике вызвало много попыток сформулировать аналогичным образом законы механики сплошных сред. Некоторые из этих формулировок будут рассмотрены ниже, в п. 14, все полученные в этом пункте результаты переносятся без всяких изменений на случай произвольной сплошной среды. В п. 15 исследуются некоторые специальные вариационные принципы, справедливые только для движений идеальной жидкости.

14. Произвольные жидкости. Вариационные принципы, соответствующие некоторой диссипативной системе, в точности соответствуют особенностям механизма диссипации этой системы; их нельзя без существенных изменений обобщить на другие системы. Этот факт облегчает формулировку вариационных принципов механики жидкости и указывает, с другой стороны, на необходимость предварительного выяснения свойств исследуемого явления. Следует подчеркнуть, что установленная ниже система вариационных принципов более или менее эквивалентна системе уравнений движения жидкости и является по существу другой формулировкой этих законов движения, приспособленной к применению методов вариационного исчисления.

Пусть $\delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ обозначает *виртуальное перемещение* частицы жидкости из точки $\mathbf{x}$, в которой она находится в данный момент времени t. Векторная функция $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ предполагается ограниченной и непрерывно дифференцируемой; кроме того, она должна удовлетворять всем ограничениям, наложенным на перемещение жидкости. В частности, последнее условие содержит в себе требование, чтобы вектор $\boldsymbol{\eta}$ лежал в касательной плоскости любой стенки, ограничивающей жидкость. *Виртуальную работу*, соответствующую виртуальному перемещению $\delta\mathbf{x}$, определим следующей формулой:

$$\delta\mathfrak{A} = \delta\mathfrak{A}_e - \int_{\mathfrak{V}} \mathbf{T} : \operatorname{grad} \delta\mathbf{x}\, dv;$$

здесь $\mathfrak{V}$ — объем, занимаемый жидкостью, $\mathbf{T}$ — тензорная функция точки, а

$$\delta\mathfrak{A}_e = \int_{\mathfrak{V}} \rho\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{x}\, dv + \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{x}\, da \qquad (14.1)$$

является виртуальной работой внешних сил $\mathbf{f}$ и поверхностных напряжений $\mathbf{t}$. Второй член формулы, определяющей $\delta\mathfrak{A}$, специфичный для механики сплошной среды, отражает то обстоятельство, что при деформации жидкой среды затрачивается работа на преодоление сил напряжения. В дальнейшем мы не будем пользоваться предположением о симметричности $\mathbf{T}$. Заметим, однако, что при несимметричном $\mathbf{T}$ виртуальному перемещению жидкости как твердого тела отвечает, вообще говоря, ненулевая виртуальная работа по деформации

жидкости. По этой причине обычно рассматривают только симметричные тензоры напряжений $\mathbf{T}$.

Сформулируем теперь основной вариационный принцип Даламбера — Лагранжа:

Жидкость движется таким образом, что

$$\delta\mathfrak{A} - \int_{\mathfrak{V}} \rho\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{x}\, dv = 0 \tag{14.2}$$

для всех виртуальных перемещений, которые удовлетворяют заданным кинематическим условиям[1]). Если на движение жидкости не наложено никаких ограничений, кроме условия на неподвижной границе, то после хорошо известных рассуждений получаем, что для экстремалей задачи (14.2)

$$\rho\mathbf{a} = \rho\mathbf{f} + \operatorname{div}\mathbf{T} \quad \text{и} \quad \mathbf{t} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}. \tag{14.3}$$

Первое уравнение имеет место в любой внутренней точке, второе — на „свободной" поверхности. Эти формулы в точности совпадают с уравнениями движения, выведенными ранее.

Методы вариационного исчисления позволяют исследовать движение жидкости, в котором частицы могут перемещаться только по заданному семейству поверхностей или связаны какими-нибудь другими ограничениями. Читатель, интересующийся этими вопросами, может обратиться к статье Хеллингера в Энциклопедии математических наук (§ 3e, 4c и 8b).

Указанный принцип Даламбера — Лагранжа можно сформулировать также в форме принципа Гамильтона. Для этого нужно связать виртуальное перемещение с вариацией траекторий частиц. Пусть множество траекторий, полученных в результате вариации рассматриваемого движения $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$, имеет вид $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t, \varepsilon)$, где $-1 < \varepsilon < 1$ и $\varphi(\mathbf{X}, t; 0) \equiv$

---

[1]) Сначала принцип (14.2) был получен Лагранжем („Аналитическая механика") для случая статического равновесия: *сплошная среда находится в равновесии в том и только в том случае, когда* $\delta\mathfrak{A} = 0$ *для всех виртуальных перемещений.* Позднее Лагранж (там же), используя известный принцип Даламбера, распространил полученные результаты на динамические системы. См. также Voss P., Enc. Math. Wiss., 4^1, № 1; Hellinger E., Enc. Math. Wiss., 4^4, № 30.

$\equiv \varphi(\mathbf{X}, t)$. Если ввести символ

$$\delta \equiv \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0},$$

то виртуальное перемещение, соответствующее полученному в результате вариации движению, запишется в виде

$$\delta\mathbf{x} = \delta\varphi = \frac{d\varphi}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}.$$

В силу того что d и δ перестановочны,

$$\mathbf{a}\cdot\delta\mathbf{x} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{x}) - \mathbf{v}\cdot\frac{d\,\delta\mathbf{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{x}) - \delta\frac{1}{2}q^2. \quad (14.4)$$

Вариация плотности определяется условием сохранения массы жидкости при перемещениях составляющих эту массу частиц. Математически это условие приводит к следующему „условию неразрывности“:

$$\delta\rho = -\rho\,\mathrm{div}\,\delta\mathbf{x}. \quad (14.5)$$

В самом деле, если для движения $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t; \varepsilon)$ в качестве времени взять параметр ε, то величина $\delta\mathbf{x}$ будет играть роль начальной скорости; таким образом, соотношение (14.5) следует сразу из уравнения неразрывности при замене в последнем d/dt и $\mathbf{v}$ на δ и $\delta\mathbf{x}$ соответственно. Аналогичными рассуждениями доказывается формула

$$\delta\int \rho F\,dv = \int \rho\,\delta F\,dv. \quad (14.6)$$

Условие (14.5) является также следствием следующих предположений: а) каждое движение, полученное в результате вариации, удовлетворяет уравнению неразрывности и б) виртуальные перемещения равны нулю в некоторый фиксированный момент времени. Если умножить обе части соотношения (14.4) на ρ и проинтегрировать по объему $\mathfrak{V}$, *движущемуся с жидкостью*, то применение формул (5.7) и (14.6) приводит к уравнению

$$\int_{\mathfrak{V}} \rho\mathbf{a}\cdot\delta\mathbf{x}\,dv = \frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{V}} \rho\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{x}\,dv - \delta\mathfrak{T}, \quad (14.7)$$

где $\mathfrak{T}$ обозначает кинетическую энергию, т. е.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{V}} \rho q^2\,dv.$$

Наконец, в силу принципа Даламбера — Лагранжа уравнение (14.7) можно записать в виде

$$\delta\mathfrak{T} + \delta\mathfrak{A} - \frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{B}} \rho\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{x}\,dv = 0. \tag{14.8}$$

Это уравнение справедливо в том случае, когда полученное в результате вариации движение удовлетворяет уравнению неразрывности (14.5) и согласовано с внешними связями, наложенными на рассматриваемое движение. Проинтегрировав уравнение (14.8) по t от t_0 до t_1 и предположив, что $\delta\mathbf{x} = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$, мы получим так называемый принцип Гамильтона [1]):

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta\mathfrak{T} + \delta\mathfrak{A})\,dt = 0,$$

справедливый для любого полученного в результате вариации движения, удовлетворяющего условию неразрывности, внешним связям и условию $\delta\mathbf{x} = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$ [2]).

15. Идеальные жидкости. Для идеальной несжимаемой жидкости принцип Даламбера — Лагранжа можно сформулировать в более изящной форме, а именно *идеальная несжимаемая жидкость движется таким образом, что*

$$\delta\mathfrak{A}_e - \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{a}\cdot\delta\mathbf{x}\,dv = 0 \tag{15.1}$$

для всех виртуальных перемещений $\delta\mathbf{x}$, *сохраняющих объем, или, другими словами, удовлетворяющих условию* $\operatorname{div}\delta\mathbf{x} = 0$. *Виртуальная работа* $\delta\mathfrak{A}_e$ *определяется здесь, как и раньше, формулой* (14.1).

В соответствии с теорией множителей Лагранжа уравнение (15.1) эквивалентно следующему:

$$\int_{\mathfrak{B}} [\rho(\mathbf{a} - \mathbf{f})\cdot\delta\mathbf{x} - \lambda\operatorname{div}\delta\mathbf{x}]\,dv - \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{x}\,da = 0,$$

---

[1]) См. Hellinger E., Enc. Math. Wiss., 4^4, примечание 61.

[2]) Среди других вариационных принципов наибольший интерес представляет принцип наименьшего времени (Hellinger, § 5c) и энергетический принцип [Herivel J. W., *Proc. Roy. Irish. Acad.*, 56, 37, 67 (1954)]. См. также статью Гёльдера [Hölder E., *Ber. sächs. Acad. Wiss.* (*Lpz*), Math.-phys. Kl., 97 (1950)].

где λ — множитель Лагранжа, а на $\delta\mathbf{x}$ уже не наложено никаких условий. Интегрируя это соотношение по частям, получаем

$$\rho\mathbf{a} = \rho\mathbf{f} - \operatorname{grad}\lambda \quad \text{и} \quad \mathbf{t} = -\lambda\mathbf{n}. \tag{15.2}$$

Величина λ, таким образом, играет роль „давления“ и является одной из основных неизвестных задачи. Уравнения (15.2) вместе с условием неразрывности образуют четыре уравнения с четырьмя неизвестными: $\mathbf{v}$ и λ.

Лагранж считал, что уравнение (15.2) справедливо и в общем случае сжимаемой идеальной жидкости, если в этом уравнении рассматривать λ как „силу реакции“ при изменении объема [1]). Этот метод расширения области применения уравнения, полученного в частном случае введением — посредством множителя Лагранжа — новых „сил реакции“, Гамель назвал „принципом высвобождения“ Лагранжа. Указанные рассуждения, хотя и приводят к правильному результату, довольно неубедительны; трудности станут очевидными, если рассмотреть сжимаемый газ, для которого давление является термодинамической переменной.

Если воспользоваться соотношением (14.5), то вариационный принцип (15.1) можно записать в форме принципа Гамильтона: *при движении идеальной несжимаемой жидкости*

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta\mathfrak{T} + \delta\mathfrak{A}_e)\, dt = 0$$

для вариаций движения $\delta\mathbf{x}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\operatorname{div}\delta\mathbf{x} = 0; \quad \delta\mathbf{x} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad \text{и} \quad t = t_1.$$

Аналогичный вариационный принцип был установлен Лихтенштейном [9, гл. 9] для движения сжимаемой идеальной жидкости. Несколько искусственный метод Лихтенштейна был позднее усовершенствован Таубом [44, стр. 148]. Наиболее

---

[1]) См. [5], стр. 173, 522. Аналогичный метод был использован Пиола [Piola G., *Modena Mem.*, 24, 1 (1848)] для вывода общих уравнений движения сплошной среды.

удачная формулировка этого принципа, которой мы и будем пользоваться ниже, принадлежит Херивелу [1]).

Заметим сначала, что для механической системы с известной энергией принцип Гамильтона можно сформулировать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta \mathfrak{L} + \delta \mathfrak{A}_e)\, dt = 0, \tag{15.3}$$

где функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ представляет собой разность кинетической и потенциальной энергии. Существенное отличие принципа (15.3) от установленных ранее заключается в том, что форма этого принципа не зависит от вида уравнений движения рассматриваемой задачи. Принцип (15.3) позволяет, таким образом, вывести уравнение движения совершенно независимо от принятого выше постулата о сохранении количества движения. Применим этот метод для вывода уравнений движения газа.

Будем предполагать, что движение происходит без выделения тепловой энергии или, точнее, что удельная энтропия S каждой жидкой частицы остается постоянной во время движения [2]), т. е. что

$$\frac{dS}{dt} = 0. \tag{15.4}$$

При этом предположении энергия определяется формулой $\mathfrak{T} + \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{T}$ — кинетическая энергия, а $\mathfrak{E}$ — внутренняя энергия рассматриваемого объема жидкости;

$$\mathfrak{E} = \int_{\mathfrak{V}} \rho E\, dv, \quad E = E(\rho, S) = \text{Удельная внутренняя энергия.}$$

В качестве функции Лагранжа естественно выбрать $\mathfrak{L} = \mathfrak{T} - \mathfrak{E}$. Покажем теперь, что при таком выборе $\mathfrak{L}$ уравнение (15.3) приводит к правильным уравнениям движения сжимаемой идеальной жидкости.

Пусть $\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ обозначает вариацию траектории; $\delta \mathbf{x} = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$. Как было показано выше, из предположения о том, что полученное в результате вариации

[1]) Herivel J. W., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 51, 344 (1955).

[2]) Термодинамическое обоснование последующих рассуждений можно найти в п. 30 и первом разделе п. 33.

движение удовлетворяет уравнению неразрывности, следует, что вариация плотности определяется формулой (14.5). Аналогичными рассуждениями доказывается, что вариация энтропии должна удовлетворять условию

$$\delta S = 0.$$

Из уравнений (14.6), (14.5) и соотношения $(\partial E/\partial \rho)_S = p/\rho^2$ получаем

$$\delta \mathfrak{E} = \int_{\mathfrak{B}} \rho \delta E \, dv = -\int_{\mathfrak{B}} p \operatorname{div} \delta \mathbf{x} \, dv =$$

$$= \int_{\mathfrak{B}} \delta \mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} p \, dv - \oint_{\mathfrak{S}} p\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{x} \, da.$$

Величина $\delta \mathfrak{T}$ определяется формулой (14.7). Мы можем теперь, преобразуя обычным способом уравнение (15.3) и используя формулы для $\delta \mathfrak{T}$, $\delta \mathfrak{E}$ и $\delta \mathfrak{A}_e$, вывести уравнения

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p \quad \text{и} \quad \mathbf{t} = -p\mathbf{n},$$

совпадающие, очевидно, с обычными уравнениями движения [1]). Мы снова подчеркиваем, что они были выведены из вариационного принципа, не включающего в себя априорного знания их формы. Дело обстояло иначе при выводе уравнений движения (14.3) из вариационного принципа (14.2).

В теоретической механике уравнение энергии является следствием принципа Гамильтона. Заметим, что это верно и в нашем случае. Действительно, из соотношения

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \int_{\mathfrak{B}} \rho \frac{dE}{dt} \, dv = \int_{\mathfrak{B}} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dv$$

мы получаем, воспользовавшись уравнением (9.2), уравнение

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T} + \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dv + \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dv,$$

которое совпадает с обычной формулировкой закона сохранения энергии для нетеплопроводной среды.

В работе, на которую мы уже ссылались, Херивел пытался обосновать уравнения движения идеальной жидкости

[1]) В нашем выводе мы следовали в основном работе Херивела, однако в формулировку принципа и его доказательство внесены некоторые изменения.

при помощи вариационного принципа, сформулированного в переменных Эйлера. Ему не удалось, однако, достичь полной общности; только некоторый класс течений, удовлетворяющих уравнениям Эйлера, давал экстремум построенному функционалу. Это затруднение впервые было разрешено Линь Цзя-цзяо, которым была предложена корректная формулировка вариационного принципа Херивела [1]). Рассматриваемый вариационный принцип Херивела — Линя утверждает, что каждая экстремаль функционала

$$\int\int L(\mathbf{v}, \rho, S)\, d\mathbf{v}\, dt, \tag{15.5}$$

где через L обозначена плотность функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\rho q^2 - \rho(E + \Omega),$$

является течением, удовлетворяющим уравнениям Эйлера. Экстремаль функционала разыскивается при этом в классе движений, удовлетворяющих следующим законам сохранения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 && \text{(сохранение массы)},\\ &\frac{dS}{dt} = 0 && \text{(сохранение энергии)},\\ &\frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0 && \text{(идентификация частицы)}; \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

здесь векторное поле $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ определяет начальное положение частицы, находящейся в момент времени t в точке $\mathbf{x}$ [2]).

Сформулированную вариационную задачу можно освободить от ограничений, наложенных на вариации $\mathbf{v}$, ρ, S и $\mathbf{X}$. Для этого нужно ввести множители Лагранжа φ, β, γ, после

---

[1]) В вариационной задаче, сформулированной Херивелом, накладывались только первые два ограничения (15.6), третье ограничение было введено Линем (в неопубликованной работе). Без этого дополнительного условия изэнтропическое течение давало экстремум функционалу (15.5) только в том случае, когда это течение было безвихревым [см. первое уравнение (15.7)].

[2]) Аналогичные результаты предварительного характера были получены Клебшем [Clebsch A., *J. reine angew. Math.*, **54**, 293 (1857); **56**, 1 (1859)] и Бейтменом [Bateman H., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **125**, 598 (1929)].

чего эта задача принимает следующий вид:

$$\delta \int\int \left\{ L + \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) - \rho\beta \frac{dS}{dt} - \rho\boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right\} dv\, dt = 0.$$

Частные вариации величин, входящих в это соотношение, приводят к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\delta\mathbf{v}: \quad \mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi + \beta \operatorname{grad} S + \operatorname{grad}\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{\gamma}, \\ &\delta\rho: \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} q^2 - I - \Omega, \\ &\delta S: \quad \frac{d\beta}{dt} = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_\rho = T, \\ &\delta\mathbf{X}: \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.7}$$

Покажем, что уравнение (6.9) является следствием этих уравнений и двух первых соотношений (15.6). Перепишем с этой целью первое из соотношений (15.7) в виде

$$\mathbf{v} = \sum_\varkappa \xi_\varkappa \operatorname{grad}\eta_\varkappa.$$

Применяя формулы (3.5) и (3.6), мы приходим к следующему выражению для ускорения:

$$\mathbf{a} + \operatorname{grad}\frac{1}{2} q^2 = \sum_\varkappa \left(\xi_\varkappa \operatorname{grad}\frac{d\eta_\varkappa}{dt} + \frac{d\xi_\varkappa}{dt} \operatorname{grad}\eta_\varkappa \right). \tag{15.8}$$

Но $dS/dt = d\mathbf{X}/dt = d\boldsymbol{\gamma}/dt = 0$, поэтому

$$\mathbf{a} = -\operatorname{grad}\frac{1}{2} q^2 + \operatorname{grad}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\operatorname{grad} S = -\operatorname{grad}\Omega - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

(Мы использовали здесь известное термодинамическое тождество $T\,dS = dI - dp/\rho$.)

Для того чтобы придать проведенному исследованию законченный характер, нужно еще показать, что каждое течение идеальной сжимаемой жидкости является экстремалью вариационной задачи Херивела — Линя. Этот факт был установлен автором настоящей работы (см. п. 29а).

Хотелось бы иметь возможность вывести уравнения движения вязкой жидкости на основе вариационного принципа, аналогичного принципу Херивела. Вопрос сводится по существу к тому, что необходимо в качестве дополнительного

условия постулировать уравнение энергии (в работе Херивела, например, уравнение энергии определяется условием сохранения энтропии). Без такого или какого-либо аналогичного дополнительного условия, по-видимому, невозможно получить уравнения движения вязкой жидкости из принципа Гамильтона. Так, например, Милликен [1]) показал, что из принципа вида $\delta \int L\, dv = 0$, где L зависит только от $\mathbf{v}$ и $\operatorname{grad} \mathbf{v}$, нельзя вывести уравнений установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости, за исключением некоторых течений частного вида (эти течения будут рассмотрены в п. 75 нашей статьи) [2]).

Другие вариационные принципы. Кроме рассмотренных выше основных вариационных принципов, существуют различные вариационные формулировки частных задач динамики жидкости. Некоторые из этих вариационных задач мы будем рассматривать ниже в соответствующих разделах нашей статьи. Отметим, в частности, теорему Кельвина о минимуме энергии (п. 24), вариационные принципы Бейтмена (п. 47), теоремы Гельмгольца и Рэлея (п. 75) и т. п.

---

[1]) Millikan C., *Phil. Mag.*, (7) **7**, 641 (1929).

[2]) Результаты отрицательного характера, касающиеся вариационных принципов для движения вязкой жидкости, были получены и другими авторами [Gerber R., *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **1**, 157 (1950), *J. Math. Pure Appl.*, **32**, 79 (1950); Bateman H., *Phys. Rev.*, (2), **38**, 815 (1931)].

ГЛАВА 3

НЕСЖИМАЕМЫЕ И БАРОТРОПНЫЕ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ

§ 1. Общие принципы

16. Введение. Мы начинаем детальное изучение свойств движущейся жидкости с частного, но весьма важного случая идеальной жидкости. В этом случае вектор напряжений выражается простой формулой $\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$ и уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{16.1}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p. \tag{16.2}$$

В общем случае к этим четырем уравнениям следует добавить термодинамическое соотношение

$$p = f(\rho, T), \tag{16.3}$$

где через T обозначена абсолютная температура. Исследование этого общего случая мы отложим до следующих глав, здесь же мы рассматриваем изящную теорию, основанную на предположении, что давление и плотность *связаны непосредственно*, т. е. что

$$p = f(\rho) \quad \text{или} \quad \rho = g(p). \tag{16.4}$$

Течение, в котором плотность и давление связаны таким образом, называется *баротропным*. Заметим, что соотношение (16.4) может выполняться либо в силу особых условий, при которых происходит движение, либо в силу присущих самой жидкости свойств. В последнем случае жидкость называется *пьезотропной* (различие между баротропным движением и движением пьезотропной жидкости станет ясным, если заметить, что любое течение пьезотропной жидкости баротропно, но не наоборот; см., например, приведенные ниже примеры). Пьезотропная жидкость, для которой $\rho \equiv$ $\equiv \text{const}$, называется *несжимаемой*.

Укажем следующие примеры баротропного течения.

1. Установившееся движение воздуха при числах Маха от 0 до 0,4. Изменение плотности во всей области течения при таких числах Маха не превышает 8%, и, как правило, плотность можно считать постоянной.

2. Изэнтропическое движение газа. В случае, например, совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями,

$$p = N\rho^{\gamma}, \quad N, \ \gamma = \text{const}.$$

Все результаты, полученные в этой главе, основаны на предположении консервативности поля внешних сил, $\mathbf{f} = -\operatorname{grad}\Omega$. Заметим, что никакие дополнительные предположения относительно характера движения жидкости здесь использоваться не будут.

Характерным свойством баротропного движения является потенциальность поля ускорений

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad}\left(\int \frac{dp}{\rho} + \Omega\right). \tag{16.5}$$

Эта простая формула Эйлера является основой дальнейшего исследования и приводит к значительному упрощению вопроса о свойствах движения жидкости.

Плоское движение. Осесимметричное движение. Векторные линии. Краткий обзор этих понятий, которым мы заканчиваем вводный пункт данного раздела, имеет своей главной целью установить терминологию.

Движение жидкости называется *плоским* течением, если в некоторой прямоугольной системе координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ скорости $u = v^1$, $v = v^2$ являются функциями только x и y, а $v^3 = 0$. Движение происходит в семействе плоскостей, параллельных плоскости x, y, и в каждой из этих плоскостей имеет один и тот же вид. По этой причине можно ограничиться рассмотрением единственной плоскости $z = 0$. Движение называют *осесимметричным*, если в некоторой цилиндрической системе координат $\mathbf{x} = (x, y, \theta)$[1]) скорости

[1]) Ориентация системы координат показана на рис. 2. Вместо этих обозначений некоторые авторы [например, Ламб и Милн-Томсон используют обозначения (x, ω, θ)]. Следует заметить, что введению в меридианной плоскости полярных координат r, θ обычно соответствует введение в пространстве сферических координат r, φ, θ.

$u = v^1$, $v = v^2$ являются функциями только x и y, а $v^3 = 0$. Очевидно, что в этом случае достаточно изучить движение в меридианной полуплоскости $\theta = 0$.

Кривая, касательная к которой совпадает в каждой точке с данным непрерывным векторным полем, называется векторной линией. В частности, векторные линии поля скоростей называются *линиями тока*, а векторные линии поля вектора завихренности — *вихревыми линиями*. (Заметим, что линии тока и траектории частиц совпадают, вообще говоря, только в случае установившегося движения.) Наконец, говорят, что движение *безвихревое*, если поле вектора завихренности равно нулю.

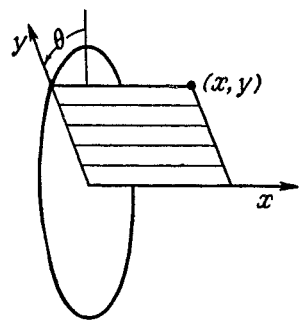


Рис. 2. Система координат для осесимметричного движения.

17. Конвекция завихренности. Изучение изменения во времени поля вектора завихренности является одним из наиболее важных методов получения информации о движении жидкости. Имея это в виду, мы выведем сейчас кинематическое соотношение, определяющее скорость изменения завихренности в произвольном течении сплошной среды. Отправным пунктом нам послужит хорошо известное тождество

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \operatorname{grad} \frac{1}{2} q^2. \tag{17.1}$$

Применив оператор rot к обеим частям уравнения (3.5), мы в силу равенства (17.1) получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \operatorname{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Из этого уравнения и уравнения (5.3) следует *уравнение диффузии* Бельтрами[1]), а именно уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{a}. \tag{17.2}$$

[1]) Beltrami E., *Mem. Acc. Sci. Bologna* (1871—1873); Opere, 2, стр. 202—379, в особенности § 6.

Применим теперь этот результат к баротропному течению идеальной жидкости. В этом случае в силу формулы (16.5) $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$, так что уравнение (17.2) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \operatorname{grad}\mathbf{v}. \tag{17.3}$$

Это изящное уравнение [1]) описывает конвекцию завихренности при баротропном движении. Интересно, что уравнение (17.3), рассматриваемое как дифференциальное уравнение относительно $\boldsymbol{\omega}$, допускает точное интегрирование. Действительно, введем новую неизвестную $\mathbf{c}$, определяемую равенством [2])

$$\boldsymbol{\omega} = \rho\mathbf{c} \cdot \operatorname{Grad}\mathbf{x}. \tag{17.4}$$

Эта замена переменных корректна, так как $J = |\operatorname{Grad}\mathbf{x}| \neq 0$. Тогда, как показывают простые вычисления,

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{X}).$$

Подставляя в формулу (17.4) $t = 0$, получаем $\boldsymbol{\omega}_0 = \rho_0\mathbf{c}$ и, следовательно,

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\rho_0} \cdot \operatorname{Grad}\mathbf{x}. \tag{17.5}$$

Этот замечательный результат был получен, правда, из совсем других соображений, Коши [3]) в 1815 г.

Отметим три важных следствия уравнения (17.5).

1. *Сохраняемость вихревых линий.* Это означает просто, что множество частиц, образующее вихревую линию в некоторый момент времени, при преобразовании $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ переходит в множество, являющееся вихревой линией во все последующие моменты времени. Для доказательства этого удивительного факта достаточно показать, что направление $d\mathbf{x}$, касательное к вихревой линии в некоторый момент времени, перемещается вместе с жидкостью таким образом, что во все

[1]) Оно принадлежит Нансону [Nanson E., *Mess. Math.*, **3**, 120 (1874)]. В несколько иной форме этот результат был получен Эйлером [Euler L., *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* (1762); Opera Omnia (2) **12**, стр. 133—168]. В частном случае постоянной плотности уравнение (17.3) обычно называют уравнением Гельмгольца.

[2]) В следующем далее равенстве $\operatorname{Grad} x \equiv \partial x^j/\partial X^l$.

[3]) Cauchy A.-L., *Mem. Divers Savants* (2), **1**; Oeuvres (1), **1**, стр. 5—318, в особенности ч. 1, § 4.

время движения остается касательным к вихревой линии. Так как при $t = 0$ $d\mathbf{x} = d\mathbf{X} = \boldsymbol{\omega}_0 d\tau$, то в любой другой момент времени

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \operatorname{Grad} \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \operatorname{Grad} \mathbf{x}\, d\tau = \frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{\omega}\, d\tau, \qquad (17.6)$$

и мы действительно получаем, что вектор $d\mathbf{x}$ направлен по касательной к вихревой линии. Кстати, уравнение (17.6) показывает, что длина элемента дуги ds вихревой линии изменяется в соответствии с формулой

$$\frac{\rho}{\omega} ds = \frac{\rho_0}{\omega_0} ds_0. \qquad (17.7)$$

Исследование вихревых линий будет продолжено в п. 25.

2. *Теорема Лагранжа — Коши*[1]). *Если частица жидкости или некоторый объем жидкости находились первоначально в безвихревом движении, то это свойство сохранится во все время движения.* Это утверждение является очевидным следствием формулы Коши (17.5).

3. В случае *плоского движения* мы имеем

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (17.8)$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по нормали к плоскости течения и $\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = 0$. Из уравнения (17.3) следует, что для фиксированной частицы жидкости $\omega/\rho = \text{const}$; этот факт наглядно иллюстрирует следствия 1 и 2, сформулированные выше. Аналогично для осесимметричного течения

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_\varphi = \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (17.9)$$

(см. п. 12). Из уравнения (17.7) следует, что для фиксированной частицы жидкости $\omega/y\rho = \text{const}$. Этот результат можно

[1]) Lagrange J. L., *Nouv. Mém. Acad. Berlin* (1781); Oeuvres, 4, стр. 695—748. При формулировке и доказательстве теоремы Лагранж допустил некоторые неточности. Корректное доказательство теоремы принадлежит Коши, см. примечание выше. Заметим, что теорема Лагранжа — Коши основана на предположении о непрерывности движения в смысле определения, данного в п. 3. Безвихревое течение может стать вихревым после прохождения ударной волны (см. п. 54), но остается безвихревым при переходе через поверхность слабого разрыва (см. п. 51).

было бы получить, исходя, как и в случае плоского течения, из уравнения (17.3), однако вывод был бы не столь прост.

18. Теоремы Бернулли. Уравнением Бернулли обычно называют один из первых интегралов уравнений движения [1]). В зависимости от частных динамических или кинематических предположений относительно характера движения это уравнение принимает различные формы, однако во всех случаях основную роль играет величина

$$H \equiv \frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega.$$

Мы рассмотрим в этом пункте различные формы уравнения Бернулли в случае баротропного течения идеальной жидкости.

Воспользовавшись формулой (17.1), мы можем записать основное уравнение (16.5) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\operatorname{grad} H. \tag{18.1}$$

Предположим теперь, что течение установившееся; тогда, как легко видеть из уравнения (18.1), справедливо следующее утверждение.

Теорема Бернулли. *Если в области установившегося баротропного течения идеальной жидкости* $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \equiv 0$, *то*

$$\frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega \equiv \text{const}.$$

В противном случае, если $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \neq 0$, *в области течения существует семейство поверхностей*

$$H = \frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega = \text{const},$$

причем на каждой из этих поверхностей в качестве координатной сетки можно выбрать вихревые линии и линии тока. В частности, $H = \text{const}$ *на линиях тока.*

[1]) Даниил Бернулли (Bernoulli D., Hydrodynamica, 1738) получил общую теорему типа сформулированной выше. Не надо думать, однако, что ему были известны все результаты, которые сейчас носят название уравнений Бернулли. См., например, предисловие редактора к Собранию сочинений Эйлера (Opera Omnia (2) 12).

Поверхности $H = \text{const}$ можно было бы называть поверхностями Ламба по имени их первого исследователя [1]).

Почти такой же результат можно получить при более слабом предположении *независимости от времени поля вектора завихренности*, не предполагая заранее, что течение установившееся [2]). В самом деле, если $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \equiv 0$, то, применив оператор rot к соотношению $\mathbf{v} = k\boldsymbol{\omega}$, мы получим

$$\mathbf{v} = \frac{\omega^2}{\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\omega},$$

из чего следует, что поле скоростей также является установившимся. Этот основной случай уже был рассмотрен выше. Если $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \neq 0$, то поле скоростей не обязательно будет установившимся, но в этом случае

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = 0$$

и, следовательно, $\partial \mathbf{v}/\partial t = \operatorname{grad} \chi$, где χ — некоторая потенциальная функция. Таким образом, при $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \neq 0$ в области течения существует семейство поверхностей

$$\frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega + \chi = \text{const},$$

на каждой из которых в качестве координатной сетки можно выбрать вихревые линии и линии тока.

Как известно, безвихревое течение характеризуется тем, что существует (быть может, многозначный) *потенциал поля скоростей* $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$, такой, что

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{18.2}$$

(Некоторые авторы по аналогии с потенциалом сил определяют потенциал скоростей соотношением $\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi$. Однако это менее удобно, и в современной литературе последнее определение, как правило, не употребляется.) Соотношение (18.2) позволяет проинтегрировать уравнение (18.1), и мы получаем, таким образом, *теорему Бернулли для безвихревого течения*:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega = f(t). \tag{18.3}$$

---

[1]) Lamb H., *Proc. Lond. Math. Soc.*, 9, 91 (1878); см. также [8], § 165.

[2]) Это обобщение принадлежит, по-видимому, Мазотти [Masotti, *Rend. Lincei*, (6) **6**, 224 (1927)].

В случае установившегося движения уравнение (18.3) принимает более простой вид:

$$\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}+\Omega\equiv\text{const}. \tag{18.4}$$

Большое значение уравнений (18.3) и (18.4) определяется тем, что эти уравнения представляют собой полные интегралы уравнений движения.

19. Функция тока. В каждом случае, когда уравнение неразрывности допускает представление в виде суммы двух производных, это уравнение может быть проинтегрировано введением функции тока. В этом пункте мы рассмотрим только плоское течение и осесимметричное течение, хотя эти течения не исчерпывают все случаи, в которых возможно построение функции тока. Мы будем предполагать также, что жидкость несжимаема; более сложный случай сжимаемой жидкости будет рассмотрен ниже (см. п. 42).

Плоское течение. В этом случае $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, $w=0$, и поэтому уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

В силу этого уравнения криволинейный интеграл $\int u\,dy-v\,dx$, взятый от фиксированной точки (x_0, y_0) до переменной точки (x, y), определяет (быть может, многозначную) функцию $\psi=\psi(x, y, t)$:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{19.1}$$

Легко видеть, что по известной функции ψ поле скоростей восстанавливается однозначно. Ясно также, что линии $\psi=\text{const}$ являются линиями тока; последнее обстоятельство послужило причиной названия функции ψ функцией тока.

Представляет интерес уравнение, которому удовлетворяет функция ψ, а именно уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega, \tag{19.2}$$

которое является следствием уравнений (17.8) и (19.1) и используется для определения ψ по известной величине завихренности. Заметим теперь, что для *плоского устано-*

вившегося течения в силу уравнения (18.1)

$$H = H(\psi), \quad \omega = -\frac{dH}{d\psi}.$$

Следовательно, любое решение уравнения $\Delta^2\psi = f(\psi)$ может служить примером установившегося плоского течения; конечно, в конкретной задаче нужно также принимать во внимание граничные условия, которым должна удовлетворять функция ψ.

В случае безвихревого течения существует потенциал φ и

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Комплексная функция $w = w(z, t) = \varphi + i\psi$, $z = x + iy$ является, следовательно, аналитической; этот факт часто позволяет найти точное решение задачи о плоском безвихревом движении несжимаемой жидкости. Читатель может обратиться по этому вопросу к книгам Ламба [8] и Милн-Томсона [10], а также к статьям Беркера, Вехаузена и Джилбарга в данной Энциклопедии.

Осесимметричное течение. Так как рассуждения в этом случае вполне аналогичны изложенным выше, мы ограничимся формулировкой результатов. Для осесимметричного течения уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(yu) + \frac{\partial}{\partial y}(yv) = 0$$

[см. формулу (12.11)]; следовательно, мы можем определить функцию тока $\psi = \psi(x, y, t)$ так, чтобы

$$u = \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{19.3}$$

Уравнение для нахождения ψ по известной величине завихренности получается в результате исключения u и v из уравнений (17.9) и (19.3) и имеет вид

$$E^2\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = -y\omega. \tag{19.4}$$

В *установившемся течении* H и ω связаны соотношениями

$$H = H(\psi), \quad \omega = -y\frac{dH}{d\psi},$$

и поэтому любое решение уравнения $E^2\psi = y^2 f(\psi)$ можно рассматривать как пример установившегося осесимметричного течения.

Интересный пример дает сферический вихрь Хилла $\psi = {}^1/_2\, Ay^2(a^2 - r^2)$, где $r^2 = x^2 + y^2$. Для этого течения $\omega = 5Ay$ и $H = -5A\psi + \text{const}$ (см. [8], стр. 309).

20. Уравнения движения в естественных координатах. Рассмотрим плоское установившееся движение. Пусть s и n обозначают длину дуги линий тока и их ортогональных траекторий. Поставим своей задачей найти вид уравнений движения, записанных в производных по переменным s и n. Удобно начать наши рассмотрения с формулы для дивергенции вектора скорости; на этом примере станет ясным также общий метод, используемый в этом пункте. В декартовой системе координат (x', y') с началом в неподвижной относительно жидкости точке P и осями, направленными по проходящим через P линии тока и ортогональной траектории,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial x'}[q\cos(\vartheta - \vartheta_P)] + \frac{\partial}{\partial y'}[q\sin(\vartheta - \vartheta_P)];$$

здесь через ϑ обозначен угол наклона вектора скорости к оси x исходной системы координат. Произведя указанное дифференцирование, мы получим, что в точке P

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial q}{\partial s} + q\frac{\partial \vartheta}{\partial n}. \tag{20.1}$$

Искомая формула, таким образом, получена. Введя в рассмотрение кривизну $\varkappa$ и K линий тока и их ортогональных траекторий соответственно

$$\varkappa = \frac{\partial \vartheta}{\partial s}, \quad K = \frac{\partial \vartheta}{\partial n},$$

мы можем, воспользовавшись равенством (20.1), записать уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho q) + K\rho q = 0. \tag{20.2}$$

Точно так же, применив формулу

$$\frac{d}{dt} = q\frac{\partial}{\partial s}, \tag{20.3}$$

мы получим в проекциях на линию тока и на ее ортогональную траекторию уравнения

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad \rho q^2 \varkappa = -\frac{\partial p}{\partial n}. \tag{20.4}$$

Уравнения (20.2) и (20.4) образуют *систему уравнений установившегося плоского течения в естественных координатах*. Рассуждения, аналогичные использованным при выводе формулы (20.1), позволяют найти для определения завихренности формулу

$$\omega = -\frac{\partial q}{\partial n} + \varkappa q. \tag{20.5}$$

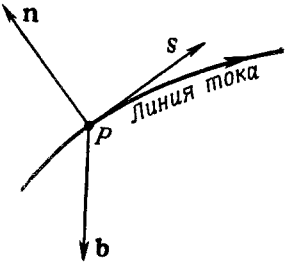


Рис. 3. Естественные координаты в трехмерном течении.

Легко выписать соответствующие уравнения для осесимметричного течения. В частности, мы вместо уравнения (20.2) получим

$$\frac{\partial}{\partial s}(y\rho q) + Ky\rho q = 0, \tag{20.6}$$

а уравнения (20.4) и (20.5) остаются неизменными.

Полученные выше уравнения без труда обобщаются на трехмерный случай, если воспользоваться формулами Френе

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} = \varkappa \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} = -\tau \mathbf{n}, \tag{20.7}$$

где через $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ обозначены соответственно касательная, главная нормаль и бинормаль к линии тока. Мы имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}(q\mathbf{s}) = \frac{\partial q}{\partial s} + q \operatorname{div} \mathbf{s}.$$

Следовательно, если обозначить $\mathfrak{M} = \operatorname{div} \mathbf{s}$, то уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho q) + \mathfrak{M}\rho q = 0. \tag{20.8}$$

Аналогично подставив в уравнения движения выражение $\mathbf{v} = q\mathbf{s}$ и воспользовавшись формулой (20.3), мы получим

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial s}\mathbf{s} + \rho q^2 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} = -\operatorname{grad} p. \tag{20.9}$$

Второе слагаемое левой части можно преобразовать по одной из формул Френе, после чего, записав уравнение (20.9) в проекциях на направления $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$, мы получим

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad \rho q^2 \varkappa = -\frac{\partial p}{\partial n}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial b}. \tag{20.10}$$

Уравнения (20.8) и (20.10) являются искомыми *уравнениями установившегося движения в естественных координатах.*

Выражение для вектора завихренности проще всего получить следующим способом. Заметим, что

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{s}_P & \mathbf{n}_P & \mathbf{b}_P \\ \dfrac{\partial}{\partial s} & \dfrac{\partial}{\partial n} & \dfrac{\partial}{\partial b} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}_P & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_P & \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_P \end{vmatrix}, \tag{20.11}$$

где P — неподвижная относительно потока точка, а (s, n, b) — декартовы координаты с началом отсчета в точке P (см. рис. 3). Подставив в соотношение (20.11) выражение $\mathbf{v} = q\mathbf{s}$ и выполнив указанные дифференцирования, мы получим в точке P

$$\boldsymbol{\omega} = q\left(\mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial n} - \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b}\right)\mathbf{s} + \frac{\partial q}{\partial b}\mathbf{n} + \left(\varkappa q - \frac{\partial q}{\partial n}\right)\mathbf{b}. \tag{20.12}$$

В случае безвихревого течения или в более общем случае, когда поле скоростей нормально к однопараметрическому семейству поверхностей S, множитель $\mathfrak{M}$ в уравнении (20.8) можно интерпретировать как сумму главных кривизн (среднюю кривизну) эквипотенциальных поверхностей или в общем случае поверхностей S.

Остальная часть этой главы разбита на два параграфа, в которых излагаются результаты исследований безвихревого и вихревого движений соответственно. Сначала мы рассмотрим более простой и более изученный случай безвихревого движения.

§ 2. Безвихревое движение

21. Условия потенциальности движения. Основываясь на уравнениях Бернулли (18.3) и (18.4), легко показать, что уравнения движения жидкости значительно упрощаются, если предположить, что движение безвихревое. Обычно для обоснования этого предположения пользуются теоремой Коши — Лагранжа (п. 17), которая утверждает, что *баротропное движение идеальной жидкости является безвихревым, если каждая частица жидкости первоначально нахо-*

дилась в состоянии покоя. Это утверждение не означает, что *каждое* баротропное движение жидкости является безвихревым, так как, оставляя в стороне философский вопрос о том, будет ли каждая частица покоиться в некоторый момент времени, завихренность может возникнуть в конкретной задаче, например под воздействием внешнего механизма вязкости или ударных волн. Тем не менее сформулированная выше теорема свидетельствует о том, что исследование безвихревого движения является весьма важным разделом теории идеальной жидкости.

В этой связи представляется интересным родственный результат, который во многих случаях гарантирует потенциальность течения. Обычно этот результат формулируется следующим образом: течение, возникшее из состояния покоя или равномерного движения, является безвихревым. Сформулированное утверждение на первый взгляд не вызывает сомнений, однако в том случае, когда движение жидкости равномерно на бесконечности, оно нуждается в тщательной проверке. Пусть при $\mathbf{x} \to \infty$ величины $\mathbf{v}$, ρ, p и $\boldsymbol{\omega}$ стремятся к некоторым пределам, причем $\lim \boldsymbol{\omega} = 0$. В случае плоского и осесимметричного течения мы из теоремы 3 п. 17 действительно получаем, что $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$. Иначе обстоит дело в случае трехмерного течения [1]); здесь этот результат можно получить только в случае установившегося движения. Доказательство проводится следующим образом. Согласно теореме Бернулли (п. 18), на линиях тока выполняется равенство

$$H = \frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega = \text{const},$$

причем в силу условий на бесконечности [2]) постоянная имеет одно и то же значение для всех линий тока. Воспользовавшись теперь уравнением (18.1), мы получаем, что $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0$, т. е. что найдется такая скалярная функция $k = k(\mathbf{x})$, что

$$\boldsymbol{\omega} = k\mathbf{v}. \tag{21.1}$$

[1]) Хотя неизвестно ни одного противоречащего примера, нетрудно было бы показать, что потенциальность не является следствием одного только уравнения (17.3) или эквивалентной ему формулы (17.7); см. статью Лекорню [Lecornu, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 168, 923 (1919)]. Ссылку на эту работу и схему доказательства я обнаружил в книге Труселла [27], § 77.

[2]) Предполагается, что потенциал внешних сил Ω стремится к определенному пределу при $\mathbf{x} \to \infty$.

Из формулы (21.1) в свою очередь следует, что

$$0 = \operatorname{div}(k\mathbf{v}) = \operatorname{div}\left(\frac{k}{\rho}\rho\mathbf{v}\right) = \rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\frac{k}{\rho}.$$

Последнее соотношение представляет собой не что иное, как условие постоянства k/ρ на линии тока. Таким образом, на линиях тока

$$\frac{\omega}{\rho\mathbf{v}} = \text{const}. \tag{21.2}$$

Если $\lim \mathbf{v} \neq 0$, то для всех линий тока постоянная равна нулю и, следовательно, $\omega \equiv 0$. В противном случае, если $\lim \mathbf{v} = 0$ (жидкость в бесконечности находится в состоянии покоя), мы будем вынуждены удовлетвориться более скромным результатом (21.2).

Подводя итог рассуждениям, проведенным в предыдущих пунктах, мы можем сформулировать следующее утверждение: *баротропное течение идеальной жидкости в консервативном поле внешних сил является безвихревым, если каждая частица первоначально находилась в области покоя или равномерного движения. Кроме того, плоское течение, осесимметричное течение, а также установившееся трехмерное течение при* $\lim \mathbf{v} \neq 0$ *является безвихревым, если течение на бесконечности является равномерным.*

22. Свойства безвихревого движения. Поведение потенциала на бесконечности. Безвихревое движение характеризуется существованием потенциала скорости $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$, такого, что $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Если рассматриваемая жидкость несжимаема, то $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и, следовательно, потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{22.1}$$

Задача о безвихревом движении несжимаемой жидкости сводится таким образом просто к решению уравнения (22.1) при соответствующих граничных условиях. Мы рассмотрим некоторые основные аспекты этой задачи в этом и следующем пунктах; вопросы, касающиеся движения сжимаемой жидкости, будут изучаться в гл. 5.

Рассмотрим сначала тот важный случай, когда жидкость занимает все пространство вне одного или нескольких движущихся твердых тел конечных размеров. Предположим, что на бесконечности жидкость движется равномерно со скоростью $\mathbf{U}$, т. е. что $\lim_{r\to\infty} \mathbf{v} = \mathbf{U}$. *Тогда потенциал и скорость при* $r \to \infty$ *имеют следующие асимптотические представления*:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \mathbf{U}\cdot\mathbf{x} + C + O(r^{-2}),\\ \mathbf{v} &= \mathbf{U} + O(r^{-3}). \end{aligned}\right\} \tag{22.2}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y, z)$ *и* $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Существуют различные доказательства этого важного результата; самым простым, вероятно, является приведенное ниже. Начнем с замечания, что достаточно рассмотреть случай $\mathbf{U} = 0$; общий случай сводится к этому наложением поля скоростей равномерного движения. Если $\mathbf{U} = 0$, то легко доказать (см. [10], § 3.75), что

$$\varphi(\mathbf{x}) - C = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right) - \frac{1}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]da, \tag{22.3}$$

где C — соответствующим образом выбранная постоянная, Σ — замкнутая поверхность, содержащая обтекаемые тела, $\mathbf{x}$ — точка вне Σ, а r' — расстояние между $\mathbf{x}$ и точкой интегрирования. (Заметим, что при неодносвязной области течения потенциал скорости может быть многозначной функцией, однако и в этом случае при достаточно большом r любую ветвь можно рассматривать как однозначную функцию.) Интеграл в правой части равенства (22.3) имеет, очевидно, следующее асимптотическое представление:

$$\frac{\Delta}{4\pi r} + O(r^{-2}), \tag{22.4}$$

где Δ — поток жидкости через Σ, т. е.

$$\Delta = \oint_{\Sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial n}da.$$

При постановке задачи неявно предполагалось, что источники отсутствуют, следовательно, $\Delta = 0$ и представление (22.2)

доказано. Аналогичным образом, дифференцируя соотношение (22.3) по $\mathbf{x}$, мы получаем, что при $\Delta = 0$

$$\mathbf{v} = O(r^{-3}). \tag{22.5}$$

Этим завершается доказательство справедливости представлений (22.2).

В случае необходимости можно получить полное разложение потенциала и скорости в окрестности бесконечно удаленной точки в виде ряда по сферическим функциям (см. [45], стр. 143).

Другое доказательство формулы (22.2) основано на представлении поля скоростей интегралом Пуассона

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int\limits_{r=R} \mathbf{v} \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi r'^3}\, da, \tag{22.6}$$

где R достаточно велико и $|\mathbf{x}| > R$. Законность представления (22.6) легко проверяется на основе известных свойств интеграла Пуассона (см. [45], стр. 243). Воспользовавшись условием $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, мы получаем из формулы (22.6) соотношение

$$\mathbf{v} = O(r^{-2}). \tag{22.7}$$

Так как из этого соотношения следует, что $\varphi - C = O(r^{-1})$, потенциал φ также можно представить интегралом Пуассона. Заключительная часть доказательства очевидна.

Асимптотику плоского течения можно получить как из теории аналитических функций, так и независимо от нее, используя представление скорости в виде интеграла Пуассона. Эта асимптотика имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \mathbf{U}\cdot\mathbf{x} + C + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + O(r^{-1}), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{U} + \frac{\Gamma}{2\pi r^2}(-y,\ x) + O(r^{-2}). \end{aligned}\right\} \tag{22.8}$$

В отличие от предыдущего случая потенциал φ даже при больших r может представлять собой, вообще говоря, многозначную функцию.

Из второй формулы (22.8) следует, что $\Gamma = \oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}$ для любой замкнутой кривой, содержащей обтекаемые тела (при обходе кривой против часовой стрелки). Величина Γ называется *циркуляцией*; в п. 25 определение циркуляции будет обобщено на случай вихревых течений.

23. Свойства безвихревого движения (продолжение). В этом пункте мы рассмотрим наиболее важные результаты, относящиеся к изучаемому вопросу.

1. *Максимум скорости достигается на границе области течения.* Простое доказательство этого факта, предложенное Кирхгофом, можно найти в книге Ламба [8], § 37; ниже (см. п. 28) мы получим этот результат как следствие более общего утверждения.

2. *Кинетическая энергия.* Для течения в ограниченной односвязной области $\mathfrak{v}$ легко показать, пользуясь формулой Грина, что

$$2\mathfrak{T} = \int_{\mathfrak{v}} \rho (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, d\mathfrak{v} = \rho \oint_{\mathfrak{s}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, da, \tag{23.1}$$

где через $\mathfrak{s}$ обозначена граница $\mathfrak{v}$. Формула (23.1) для кинетической энергии справедлива и для области $\mathfrak{v}$, внешней по отношению к $\mathfrak{s}$, если только жидкость на бесконечности покоится. В самом деле, если обозначить через Σ сферу достаточно большого радиуса, содержащую внутри себя $\mathfrak{s}$, то кинетическая энергия $\mathfrak{T}^*$ жидкости, заключенной в данный момент между $\mathfrak{s}$ и Σ, выразится формулой

$$2\mathfrak{T}^* = \rho \oint_{\mathfrak{s}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, da + \rho \oint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, da.$$

Подинтегральная функция второго слагаемого имеет порядок не ниже r^{-3} (при отсутствии источников порядок равен r^{-5}); при этом предполагается, что потенциал φ выбран так, что в формуле (22.2) $C = 0$. Следовательно, интеграл по Σ стремится к нулю при удалении Σ в бесконечность, и в пределе мы получаем формулу (23.1).

3. *Единственность.* Вернемся к задаче, рассматриваемой в предыдущем пункте. Мы утверждаем, что течение жидкости в односвязной области полностью определяется заданием движения обтекаемых тел и величины U. В самом деле, пусть φ_1 и φ_2 — потенциалы двух течений, удовлетворяющих указанным выше требованиям; тогда $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ является потенциалом течения, с нулевой скоростью на бесконечности и $\partial\varphi/\partial n = 0$ на поверхности движущихся тел. Предполагая, что область течения односвязна, мы получаем из формулы (23.1),

что $\mathfrak{T} = 0$. Так как это означает, что $\operatorname{grad}\varphi = 0$ и $\varphi = \text{const}$, то два рассматриваемые течения совпадают.

Если область течения неодносвязна, то указанные выше условия, как показывают простые примеры, не обеспечивают единственности течения. Исследование возникающих при этом вопросов можно найти в § 47—55 монографии Ламба [8].

Заметим в заключение, что теорема единственности, установленная выше, показывает, что на границе области течения нельзя задавать, вообще говоря, кроме $d\varphi/dn$, еще какие-нибудь дополнительные условия. В частности, *условие прилипания* на поверхности твердого тела при безвихревом движении жидкости, как правило, не выполняется [1]).

4. *Парадокс Даламбера.* Рассмотрим силу, которая действует на движущееся в жидкости твердое тело; предполагается, что скорость твердого тела постоянна и жидкость на бесконечности покоится. Ясно, что эту задачу можно сформулировать и как задачу о силе, действующей на неподвижное тело в равномерном потоке. Если обозначить через $\mathbf{U}$ скорость набегающего потока, то в соответствии с формулой (22.2)

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + O(r^{-3});$$

здесь, как и всюду дальше, символ O относится к асимптотике при $r \to \infty$. Предположим, для простоты, что $\Omega = 0$; тогда из теоремы Бернулли (18.4) следует, что

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho(U^2 - q^2) = p_0 + O(r^{-3}).$$

Применяя теперь формулу (10.2) для сферы Σ достаточно большого радиуса R и пользуясь соотношением $\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$, мы получаем

$$\mathbf{F} = -\int_\Sigma (p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,da =$$

$$= -\int_\Sigma (p_0\mathbf{n} + \rho\mathbf{U}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\,da + O(R^{-1}).$$

[1]) Более подробное исследование этого вопроса приведено в книге Труселлла [27], § 37. Следует отметить, что это замечание сохраняет свою силу и для безвихревых течений сжимаемой идеальной жидкости в тех случаях, когда удается доказать аналогичную теорему единственности.

Так как в силу теоремы Гаусса — Остроградского интеграл, входящий в это соотношение, равен нулю, очевидно, что $\mathbf{F} = 0$.

Этот на первый взгляд неожиданный результат известен под названием парадокса Даламбера [1]). Несоответствие с опытными данными вызвано, конечно, тем, что рассматривается слишком упрощенная модель обтекания тела [8, § 370, 371].

В случае плоского течения из-за наличия циркуляции возникают некоторые дополнительные трудности. Предположим, что система координат выбрана так, что направление скорости набегающего потока совпадает с положительным направлением оси x, т. е. что $\mathbf{U} = (U, 0)$. Тогда, полагая $\mathbf{v} = (u, v)$ и пользуясь формулой (22.8) и уравнением Бернулли, легко показать, что

$$p = p_0 + \rho U (u - U) + O(r^{-2}).$$

Из этого соотношения вытекает следующая формула для проекции силы на направление скорости потока:

$$X = -\int_\Sigma (p \cos\theta + \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, ds =$$

$$= \rho \int_\Sigma [U(u - U)\cos\theta - (u - U)\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - U \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]\, ds + O(R^{-1}),$$

где $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = u \cos\theta + v \sin\theta$. Сумма первых двух членов подинтегральной функции имеет в силу формулы (22.8) порядок $O(R^{-2})$. Интеграл от третьего члена в естественном предположении отсутствия источников равен нулю. Таким образом, даже при наличии циркуляции сопротивление равно нулю. Аналогичные вычисления приводят, однако, к ненулевой величине подъемной силы

$$Y = -\rho \Gamma U. \tag{23.2}$$

Интересно, что подъемная сила зависит только от величины циркуляции, а форма и размеры тела не играют никакой

[1]) d'Alembert J. L., Opuscules Mathematiques, **5** (1768). В этой работе отсутствие силы сопротивления доказано только для симметричных тел на основе очевидной симметрии распределения давления. Аналогичные рассуждения встречались и в более ранних работах Даламбера, а также в работе Эйлера по баллистике (1745 г.); см. предисловие редактора к 12 тому Собрания сочинений Эйлера (Opera Omnia (2), **12**).

роли. Полученная независимо друг от друга Жуковским[1]) и Кутта[2]) формула (23.2) лежит в основе теории подъемной силы крыла.

Мы рекомендуем читателю ознакомиться с интересными формулами Кирхгофа для силы и момента, действующих на тело, движущееся в жидкости *произвольным образом* (см., например [8], гл. 6). Из-за недостатка места эти вопросы здесь не рассматриваются.

24. Теорема Кельвина о минимуме энергии. Рассмотрим движения жидкости в ограниченной односвязной области $\mathfrak{v}$, удовлетворяющие на границе $\mathfrak{s}$ условию

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = h, \tag{24.1}$$

где h — некоторая заданная на $\mathfrak{s}$ функция. Другими словами, проекция количества движения на нормаль имеет в точках $\mathfrak{s}$ для всех течений рассматриваемого класса одно и то же значение. Следующий признак является характерным для безвихревого движения в классе всех движений несжимаемой жидкости, удовлетворяющих условию (24.1).

Принцип Кельвина. *Среди всех течений несжимаемой жидкости в области* $\mathfrak{v}$, *удовлетворяющих условию* (24.1), *безвихревое течение имеет минимальную кинетическую энергию.*

Классическое доказательство этого результата, принадлежащее Кельвину, можно найти в книге Ламба ([8], § 45). Справедливо и обратное утверждение; это утверждение является по существу переформулировкой известного принципа Дирихле для гармонических функций.

Принцип Дирихле[3]). *В классе всех безвихревых течений* $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ *в области* $\mathfrak{v}$ *наибольшее значение функционалу*

$$\mathfrak{I} = -\frac{1}{2}\rho \int_{\mathfrak{v}} q^2 \, dv + \oint_{\mathfrak{s}} \varphi h \, da \tag{24.2}$$

---

[1]) Жуковский Н. Е., *Бюлл. Инст. Аэро. Кучино* (*СПб*) (1906).

[2]) Kutta W. M., *Sitzgsber. bayr. Acad. Wiss.* (München.), **40** (1910).

[3]) Аналогичная теорема была получена Прателли [Pratelli A. R., *Rend. Ist. Lombardo* (3), **17**, 484 (1953)]. В работе Прателли класс рассматриваемых течений несколько шире: в него входят все течения, имеющие заданное распределение завихренности.

дает течение, удовлетворяющее условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = h \quad \text{на } S. \tag{24.3}$$

Множитель ρ, фигурирующий в формулах (24.2) и (24.3), представляет собой некоторую заранее заданную постоянную, которую естественно принять за плотность течения, дающего максимум функционалу (24.2). Движения рассматриваемого класса не обязаны удовлетворять условию $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, и их плотности, следовательно, нельзя отождествлять с ρ. Для доказательства принципа Дирихле обозначим через φ потенциал безвихревого движения, удовлетворяющего условиям (24.3). Ясно, что φ является гармонической функцией и определяется единственным образом с точностью до аддитивной постоянной. Простые преобразования приводят к следующему равенству:

$$\mathfrak{J}(\varphi) = \mathfrak{J}(\varphi^*) + \frac{1}{2} \rho \int_V [\operatorname{grad} (\varphi - \varphi^*)]^2 \, dv,$$

где через φ^* обозначен потенциал любого другого течения. Таким образом, $\mathfrak{J}(\varphi) \geqslant \mathfrak{J}(\varphi^*)$, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $\varphi^* = \varphi + \text{const}$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что решения двух вариационных задач, сформулированных выше, совпадают. Более того, *минимальное значение энергии в принципе Кельвина в точности равно максимуму* $\mathfrak{J}$ *в принципе Дирихле*. Это следует из того, что для течения с экстремальной энергией

$$\frac{1}{2} \rho \int_V q^2 \, dv = \mathfrak{T}$$

и

$$\oint_S \varphi h \, da = \rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, da = 2\mathfrak{T}.$$

§ 3. Вихревое движение

25. Теорема Кельвина о циркуляции. Теоремы Гельмгольца. Понятие циркуляции было введено Кельвином в 1869 г. для более наглядного представления геометрических свойств движения жидкости и для упрощения дока-

зательств замечательных теорем Гельмгольца, установленных незадолго до этого [1]).

По определению, *циркуляция* Γ представляет собой интеграл от вектора скорости по замкнутому контуру, т. е.

$$\Gamma = \oint_{\mathfrak{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathfrak{C}} v_i \, dx^i.$$

Предположим теперь, что контур $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(t)$ движется вместе с жидкостью, и найдем скорость изменения циркуляции по этому контуру. Зададим с этой целью движение кривой $\mathfrak{C}$ уравнением

$$\mathbf{x} = \varphi(s, t), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

где s фиксирует определенную частицу жидкости на $\mathfrak{C}$, а t означает время. Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathfrak{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) ds = \oint_{\mathfrak{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x}. \qquad (25.1)$$

Это соотношение является чисто кинематическим и выполняется для любого движения. Заметим, что для баротропного движения поле ускорений $\mathbf{a}$ является потенциальным в силу формулы (16.5). В этом случае $\int_{\mathfrak{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathfrak{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0. \qquad (25.2)$$

Мы приходим, таким образом, к следующему результату, известному под названием теоремы Кельвина: *в случае баротропного течения идеальной жидкости в консервативном поле внешних сил циркуляция по любому жидкому контуру не зависит от времени.* Справедливо и обратное утверждение: если равенство (25.2) имеет место для любого замкнутого контура $\mathfrak{C}$, то поле ускорений потенциально. Другими словами, движение *несжимаемой жидкости* является динамически возможным в том и только в том слу-

[1]) Thomson W. (Kelvin), *Trans. Roy. Soc. Edinb.*, 25, 217 (1869), Papers, 4, стр. 13—66; Helmholtz H., *J. reine angew. Math.*, 55, 25 (1858).

чае, когда равенство (25.2) выполняется для любого замкнутого контура, движущегося с жидкостью (для сжимаемой жидкости это утверждение в общем случае неверно).

С помощью теоремы Кельвина нетрудно теперь получить три теоремы Гельмгольца, которые так ярко характеризуют геометрические свойства движений, сохраняющих циркуляцию. Первая из этих теорем является чисто кинематической, две остальные легко выводятся из теоремы Кельвина и поэтому справедливы для любого движения, сохраняющего циркуляцию, *независимо* от природы среды.

Вихревая трубка определяется обычно как поверхность, образованная вихревыми линиями, пересекающими заданную замкнутую кривую. Это определение, к сожалению, охватывает и такие конфигурации, которые вряд ли можно назвать „трубками". В дальнейшем мы ограничимся рассуждениями, справедливыми для тех вихревых трубок, у которых „поперечные сечения" представляют собой замкнутые кривые без точек самопересечения; одну из этих кривых мы выберем в качестве определяющей.

Пусть $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ — два произвольных замкнутых контура на поверхности трубки с одинаковым направлением обхода (уточним, что каждая кривая должна быть эквивалентна определяющей в смысле непрерывного преобразования, оставляющего кривую на поверхности трубки). *Первая теорема Гельмгольца утверждает, что циркуляция по* $\mathfrak{C}_1$ *совпадает с циркуляцией по* $\mathfrak{C}_2$. Доказательство этой теоремы читатель может найти почти в любом курсе гидродинамики; мы рекомендуем обратиться к книге Ламба [8], § 145.

Прежде чем перейти к другим теоремам Гельмгольца, нужно сделать несколько замечаний. Во-первых, на основе сформулированной выше теоремы мы можем ввести понятие *интенсивности* вихревой трубки как циркуляции по лежащему на поверхности трубки и охватывающему трубку контуру $\mathfrak{C}$. Таким образом,

$$\text{Интенсивность} = \int_{\mathfrak{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{s}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}\, da;$$

здесь через $\mathfrak{s}$ обозначена некоторая (ориентированная) поверхность, натянутая на кривую $\mathfrak{C}$; последнее равенство является следствием теоремы Стокса. Во-вторых, как видно из приведенного Ламбом доказательства, первая теорема

Гельмгольца остается справедливой даже в том случае, когда поле завихренности кусочно непрерывно, если само поле скоростей остается непрерывным. В-третьих, мы хотим обратить внимание читателя на тот факт, что часто из первой теоремы Гельмгольца делают вывод, что *вихревые линии* представляют собой либо замкнутые кривые, либо заканчиваются на границе области течения жидкости. Келлог [45, стр. 41] указал на ошибочность этого заключения; он заметил, однако, что аналогичное утверждение относительно *вихревых трубок* справедливо.

Вторая теорема Гельмгольца утверждает, что *вихревая линия во все время движения состоит из одних и тех же частиц жидкости* (это эквивалентно утверждению, что вихревые трубки перемещаются вместе с жидкостью). Эта теорема уже встречалась нам ранее (п. 17); ее можно вывести также из теоремы Кельвина о циркуляции (см. [8], § 146). Третья теорема Гельмгольца — *интенсивность вихревой трубки остается постоянной во все время движения жидкости* — является очевидным следствием теоремы Кельвина. Заметим в заключение, что эти две теоремы также остаются справедливыми, если предполагать только кусочную непрерывность поля завихренности.

Теоремы о завихренности для течений, в которых циркуляция меняется со временем, будут установлены в п. 40 и в п. 69.

26. Общие вопросы теории вихревых течений. Общая теория вихревых течений достаточно полно изложена в монографиях Ламба [8] и Вилла [18]. Мы хотим здесь установить более естественным и ясным способом лишь некоторые основные результаты, изложение которых в цитированных книгах, как нам кажется, не совсем отвечает существу дела. В частности, мы рассмотрим задачу определения поля вектора скорости по его завихренности и дивергенции и некоторые связанные с этой задачей результаты, касающиеся распределения завихренности.

Согласно определению дивергенции Θ и завихренности $\boldsymbol{\omega}$,

$$\Theta = \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Легко показать, что *для данного (кусочно непрерывного) распределения дивергенции и завихренности в конеч-*

ной области существует не более одного поля скоростей с заданной нормальной составляющей скорости на границе (см. [8], § 147). Единственность имеет место и для бесконечной области, если задан предел вектора скорости при $\mathbf{x} \to \infty$. Несколько труднее доказать *существование* поля скоростей с заданным распределением дивергенции и завихренности. Мы рассмотрим ниже три случая.

1. *Конечная область*; $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ *на границе*. Предположим, что в конечной области $\mathfrak{v}$ функции Θ и $\boldsymbol{\omega}$ один раз дифференцируемы; тогда искомое поле скоростей нетрудно построить при помощи потенциалов

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathfrak{v}} \frac{\Theta}{r'}\, dv, \quad \boldsymbol{\pi} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathfrak{v}} \frac{\boldsymbol{\omega}}{r'}\, dv, \tag{26.1}$$

где r' обозначает расстояние между точкой интегрирования $\mathbf{x}'$ и точкой $\mathbf{x}$, в которой определяются величины φ и $\boldsymbol{\pi}$. Рассмотрим поле

$$\mathbf{w} = -\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\pi} \tag{26.2}$$

и заметим, что

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = -\nabla^2 \varphi = \Theta,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\pi} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\pi} - \nabla^2 \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\omega}.$$

Мы воспользовались здесь соотношением $\operatorname{div} \boldsymbol{\pi} = 0$, следующим из условия $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ на границе области. Это соотношение выводится так:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\pi} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathfrak{v}} \boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r'}\, dv =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathfrak{v}} \operatorname{div}' \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{r'} \right) dv = -\frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\mathfrak{s}} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}}{r'}\, da = 0;$$

изменение знака во втором равенстве обусловлено заменой дифференцирования по $\mathbf{x}$ дифференцированием по $\mathbf{x}'$. Так как поле $\mathbf{w}$ имеет заданные завихренность и дивергенцию, искомое поле скоростей $\mathbf{v}$ записывается в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \operatorname{grad} h = \operatorname{grad} (h - \varphi) + \operatorname{rot} \boldsymbol{\pi}, \tag{26.3}$$

где гармоническая функция h выбрана так, чтобы нормальная составляющая скорости $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ принимала на $\mathfrak{s}$ заданные значения. (Эти значения должны быть, конечно, согласованы с интегралом от дивергенции по области $\mathfrak{v}$.)

Поле скоростей $\mathbf{v}^* = \operatorname{rot} \boldsymbol{\pi}$ непрерывно во всем пространстве, имеет завихренность $\boldsymbol{\omega}$ внутри $\mathfrak{v}$ и является безвихревым вне этой области, причем на бесконечности $\mathbf{v}^* = 0$. Условие $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ на $\mathfrak{s}$ означает просто, что вихревые линии являются замкнутыми кривыми, лежащими в области $\mathfrak{v}$. Таким образом, поле $\mathbf{v}^*$ представляет собой поле скоростей изолированной вихревой системы несжимаемой жидкости.

При заданном поле скоростей $\mathbf{v}^*$ возникает естественный вопрос о существовании и единственности соответствующего движения жидкости, удовлетворяющего уравнениям Эйлера. Трудная задача о существовании исследовалась Лихтенштейном (см. [9], гл. 12; [25] гл. 11, 12), Гёльдером [1]), Вольбинером [2]), Шеффером [3]) и Маруном [4]).

Единственность течения с заданным начальным полем скоростей можно установить на основании методов, которые будут описаны в п. 72. Различные частные случаи, в которых соответствующее движение находится в конечном виде, рассматриваются в монографиях Ламба, Вилла, Лихтенштейна и Милн-Томсона.

2. *Бесконечная область.* Если предположить, что Θ и $\boldsymbol{\omega}$ равны нулю вне некоторой ограниченной области, а $\mathbf{v}$ обращается на бесконечности в нуль, то соответствующее поле скоростей представляется в виде

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\pi},$$

где φ и $\boldsymbol{\pi}$ — потенциалы (26.1), определенные во всем пространстве. Можно доказать справедливость этого представления в предположении, что Θ и $\boldsymbol{\omega}$ при $r \to \infty$ являются величинами порядка r^{-3}. Наконец, если Θ и $\boldsymbol{\omega}$ при $r \to \infty$ убывают как r^{-2}, то интегралы (26.1) для φ и $\boldsymbol{\pi}$ расходятся, но остается справедливым представление поля скоростей через производные этих потенциалов:

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi} \int \Theta \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r'}\right) dv - \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{\omega} \times \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r'}\right) dv.$$

3. *Конечная область; общий случай.* При попытке представить в этом случае поле скоростей в виде (26.2) мы сталкиваемся с той трудностью, что величина $\operatorname{div} \boldsymbol{\pi}$ теперь не обязательно равна нулю. Но если на поверхности $\mathfrak{s}$ известны значения скорости $\mathbf{v}$, то можно показать, что

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi^* + \operatorname{rot} \boldsymbol{\pi}^*,$$

---

[1]) Hölder E., *Math. Z.*, **37**, 727 (1933).
[2]) Wolbiner W., *Math. Z.*, **37**, 698 (1933).
[3]) Schaeffer A. C., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42**, 497 (1937).
[4]) Maruhn K., *Math. Z.*, **45**, 155 (1939).

где

$$\varphi^* = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{v}} \frac{\Theta}{r'}\,dv - \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{r'}\,da, \tag{26.4}$$

$$\boldsymbol{\pi}^* = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{v}} \frac{\boldsymbol{\omega}}{r'}\,dv - \frac{1}{4\pi}\oint_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{n}\times\mathbf{v}}{r'}\,da \tag{26.5}$$

(см. [48], стр. 190). Заметим, что интегралы по поверхности определяют в области $\mathfrak{v}$ гармонические функции. Если на границе $\mathfrak{s}$ заданы только значения $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$, то интеграл по поверхности в формуле (26.5) вычислить нельзя и следует применить другой метод.

Расширим область определения $\boldsymbol{\omega}$ до всего пространства. Рассмотрим с этой целью в области, внешней по отношению к $\mathfrak{v}$, гармоническую (включая $\mathbf{x}=\infty$) функцию φ', удовлетворяющую на $\mathfrak{s}$ условию $\partial\varphi'/\partial n = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}$, и положим $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad}\varphi'$ в точках вне $\mathfrak{s}$. Дивергенция определенного таким образом поля $\boldsymbol{\omega}$ равна нулю, и $\boldsymbol{\omega}$ имеет на бесконечности порядок r^{-3}. Расширив теперь область интегрирования в формулах (26.1) до всего пространства, мы получим

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\pi}.$$

В связи с полученными выше представлениями поля скоростей отметим некоторые интересные интегральные соотношения. Ламб приводит две формулы для определения кинетической энергии системы вихрей в несжимаемой жидкости. Предположим сначала, что жидкость покоится на бесконечности и что завихренность $\boldsymbol{\omega}$ равна нулю вне некоторой ограниченной области. Тогда

$$\mathfrak{T} = \frac{\rho}{8\pi}\int\int \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}'}{r}\,dv\,dv',$$

причем интегрирование каждый раз проводится по всей области, занятой системой вихрей. (Трусделл [27], § 35), обобщил эту формулу на случай конечной области и отличной от нуля дивергенции. Он получил следующий результат:

$$\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{v}} q^2\,dv = \frac{1}{8\pi}\int_{\mathfrak{v}}\int_{\mathfrak{v}} \frac{\Theta\Theta' + \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}'}{r}\,dv\,dv' -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{v}} (\Theta f + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{g})\,dv - \frac{1}{2}\oint_{\mathfrak{s}} (\varphi^*\mathbf{v} + \boldsymbol{\pi}^*\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,da,$$

где через f и $\mathbf{g}$ обозначены потенциалы простого слоя, фигурирующие в формулах (26.4) и (26.5). Вторая формула Ламба будет рассмотрена в п. 71.

В заключение мы хотим привести две формулы, справедливые для произвольного непрерывного движения. Первая из этих формул принадлежит Ламбу ([8], стр. 273 [1])):

$$\int_v (\Theta\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})\, dv = \oint_s \left[\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) - \frac{1}{2} q^2\mathbf{n}\right] da, \qquad (26.6)$$

а вторая — Трусделлу [2]):

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{V}} \boldsymbol{\omega}\, dv = \oint_{\mathfrak{S}} [\mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}) - (\mathbf{a}\times\mathbf{n})]\, da. \qquad (26.7)$$

[Обе эти формулы легко проверить, воспользовавшись формулой (2.1) и тождествами (17.1) и (17.2).] В тех случаях, когда интегралы по поверхности равны нулю либо в силу условия $\mathbf{v} = 0$ на s, либо в силу соответствующей асимптотики на бесконечности, формулы (26.6) и (26.7) переходят в следующие простые соотношения:

$$\int_v (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})\, dv = 0, \qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{V}} \boldsymbol{\omega}\, dv = 0.$$

Первое из этих соотношений показывает, что среднее значение $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ равно нулю, а второе — что суммарная завихренность системы вихрей постоянна во времени.

27. Мера завихренности. Трусделл [3]) заметил, что величина мгновенной угловой скорости ω далеко не всегда правильно определяет роль, которую играет вращение в движении жидкости. Недостатком этой характеристики является также зависимость величины ω от выбранной системы единиц измерения. Трусделл привел убедительные доводы в пользу

---

[1]) Формула была получена Ламбом для несжимаемой жидкости и в ней, естественно, отсутствовал член $\Theta\mathbf{v}$.

[2]) Truesdell C., *Phys. Rev.* (2) **73**, 510 (1948). В другой работе [*Canad. J. Math.*, **3**, 69 (1951)] Трусделл получил целую серию формул для завихренности, обобщающих формулу (26.7).

[3]) Truesdell C., *J. Rational Mech. Anal.*, **2**, 173 (1953).

того, что за меру завихренности следует взять безразмерный инвариант

$$\mathfrak{W} = \sqrt{\frac{\Omega : \Omega}{\mathbf{D} : \mathbf{D}}} = \frac{\omega}{\sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}}}. \qquad (27.1)$$

Для безвихревого движения, не совпадающего с движением жидкости как твердого тела, $\omega = 0$, $\mathbf{D} \neq 0$ и, следовательно, $\mathfrak{W} = 0$. В случае, когда жидкость вращается как твердое тело, $\mathbf{D} = 0$, $\omega \neq 0$ и $\mathfrak{W} = \infty$. Таким образом, определение (27.1) ставит в соответствие любому движению жидкости (за исключением поступательного движения жидкости как твердого тела) численную меру завихренности со шкалой от 0 до ∞, причем максимальную завихренность имеет вращение жидкости как твердого тела.

Проиллюстрируем понятие меры завихренности вычислением величины $\mathfrak{W}$ для некоторых общеизвестных движений.

1. *Обобщенное течение Пуазейля.* Поле скоростей этого течения в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y). \qquad (27.2)$$

Формулы (27.2) включают в себя как течение чистого сдвига $w = ky$, так и ламинарное течение вязкой жидкости в трубке с постоянным поперечным сечением. Легко проверить, что для таких течений $\mathfrak{W} = 1$.

2. *Движение с постоянной завихренностью.* Рассмотрим плоское течение несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью ω. Функция тока этого течения удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi = -\omega$$

и условию $\psi = \text{const}$ на неподвижных границах. Если жидкость находится в сосуде с неподвижными стенками, то легко видеть, что

$$\psi = \omega \psi^*(x, y).$$

Следовательно, $\mathfrak{W}$ не зависит от завихренности движения и определяется только формой сосуда. Для эллиптического сосуда с полуосями a и b мы получаем, в частности,

$$\mathfrak{W} = \left| \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right|,$$

3. *Волны Герстнера.* Рассмотрим теперь интересный пример волновых движений, полученный Герстнером, и попытаемся оценить в этом случае относительную роль вращательного движения, пользуясь понятием меры завихренности. Заметим, что рассматриваемое движение имеет практический интерес только в том случае, когда величина $\mathfrak{W}$ не слишком велика [1]).

В примере Герстнера движение задается в переменных Лагранжа (3.1) следующими уравнениями:

$$x = a + \frac{1}{k} e^{kb} \sin k(a + ct), \quad y = b - \frac{1}{k} e^{kb} \cos k(a + ct); \tag{27.3}$$

здесь k и c — некоторые положительные постоянные. Хотя величины a и b действительно фиксируют начальное положение частицы, они не являются переменными Лагранжа в точном значении этого слова, так как при $t = 0$ частица не находится в точке с координатами a и b. Мы рассмотрим движение тех частиц, для которых $b \leqslant b_0 < 0$. Легко видеть, что якобиан преобразования $\mathbf{x} = \varphi'(a, b, t)$ не меняет знака при $b < 0$,

$$J' \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 1 - e^{2kb} > 0,$$

и, следовательно, движение, определяемое уравнениями (27.3), является допустимым. Свободная поверхность $b = b_0$ (и вообще любая поверхность $b = \text{const}$) представляет собой трохоиду с длиной волны $2\pi/k$, движущуюся со скоростью c в отрицательном направлении оси x.

Так как

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} \frac{\partial(a, b)}{\partial(X, Y)} = 1,$$

формулы (27.3) определяют движение несжимаемой жидкости. Интегрирование уравнений движения (6.10) в переменных Лагранжа при предположении $\Omega = gy$ приводит к уравнению Бернулли следующего вида:

$$\frac{p}{\rho} = -gb + \frac{1}{2} c^2 e^{2kb} + \frac{1}{k}(g - kc^2) e^{kb} \cos k(a + ct) + \text{const} \tag{27.4}$$

[1]) Приведенный здесь материал взят из цитированной выше работы Трусделла.

Из уравнения (27.4) видно, что для выполнения условия $p = \text{const}$ на свободной поверхности нужно потребовать, чтобы

$$c^2 = g/k. \tag{27.5}$$

Это условие приводит к более простому виду уравнения Бернулли, а именно к уравнению

$$\frac{p}{\rho} = -gb + \frac{1}{2} c^2 e^{2kb} + \text{const}.$$

Заметим в заключение, что произведенное интегрирование уравнений движения (6.10) служит одновременно доказательством возможности волновых движений Герстнера *в поле сил тяжести*.

Для вычисления величины $\mathfrak{W}$ нужно определить компоненты grad **v**. Мы имеем

$$u = \frac{dx}{dt} = ce^{kb} \cos \delta,$$

где $\delta = k(a + ct)$; следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (u, y)}{\partial (a, b)} \frac{\partial (a, b)}{\partial (x, y)} = -A \sin \delta \quad (A = kce^{kb} J'^{-1}).$$

Аналогичным образом находим производные

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -A(\cos \delta + e^{kb}), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -A(\cos \delta - e^{kb}), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A \sin \delta.$$

Подставив эти выражения в соотношение (27.1), мы получим замечательную по своей простоте формулу для меры завихренности $\mathfrak{W}$ на „глубине“ b:

$$\mathfrak{W} = e^{kb} = 2\pi \frac{\text{Амплитуда}}{\text{Длина волны}}.$$

Легко видеть отсюда, что величина $\mathfrak{W}$ достигает максимума на свободной поверхности и экспоненциально убывает при увеличении глубины. Если мы хотим, чтобы величина $\mathfrak{W}$ не превосходила, например 10%, то нужно потребовать, чтобы на свободной поверхности выполнялось условие

$$\text{Амплитуда} < 1{,}5\% \text{ длины волны}.$$

Таким образом, волны Герстнера представляют собой сильно завихренное движение, за исключением случая волн малой

амплитуды; на самом деле амплитуда должна быть настолько малой, что становится применимой линеаризированная теория поверхностных волн.

28. Поле ускорений и уравнение Бернулли. Результаты, излагаемые в данном пункте, основаны на различных кинематических представлениях для div **a**. Вывод этих общих формул и их применение принадлежат Труселлу [1]), хотя различные частные случаи были известны и раньше.

Применив оператор дивергенции к формуле (3.5), определяющей ускорение, и положив $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{v}$, мы получим

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}) = \frac{d\Theta}{dt} + v^i{}_{,j} v^j{}_{,i} = \\ = \frac{d\Theta}{dt} + \mathbf{D} : \mathbf{D} - \frac{1}{2}\omega^2, \qquad (28.1)$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{d\Theta}{dt} + (1 - 2\mathfrak{B}^2)\, \mathbf{D} : \mathbf{D}. \qquad (28.2)$$

Третье представление для div **a**, используемое ниже, является следствием тождества (17.1):

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \nabla^2 \frac{1}{2} q^2. \qquad (28.3)$$

Известно, что любое векторное поле можно разложить на сумму потенциального и соленоидального полей (см. [48], стр. 186); в частности, поле ускорений допускает представление в виде

$$\mathbf{a} = -\operatorname{grad} \varphi^* + \operatorname{rot} \boldsymbol{\pi}^*. \qquad (28.4)$$

Очевидно, что в случае баротропного течения

$$\varphi^* = \int \frac{dp}{\rho} + \Omega, \quad \boldsymbol{\pi}^* = 0. \qquad (28.5)$$

С другой стороны, для несжимаемой вязкой жидкости, удовлетворяющей уравнениям Навье — Стокса (68.2),

$$\varphi^* = \frac{p}{\rho} + \Omega, \quad \boldsymbol{\pi}^* = -\nu\boldsymbol{\omega}. \qquad (28.6)$$

Подставив представление (28.4) в уравнения (28.2) и (28.3), мы получим, что для любого непрерывного движения потен-

[1]) Truesdell C., *J. Rational Mech. Anal.*, 2, 173 (1953).

циал ускорений φ^* удовлетворяет следующим уравнениям Пуассона:

$$\nabla^2\varphi^* = -\frac{d\Theta}{dt} + (2\mathfrak{B}^2 - 1)\,\mathbf{D} : \mathbf{D} \qquad (28.7)$$

и

$$\nabla^2\left(\varphi^* + \frac{1}{2}q^2\right) = -\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}). \qquad (28.8)$$

Так как второе уравнение выражает величину $\varphi^* + 1/2\,q^2$ через другие параметры течения, его можно рассматривать как уравнение Бернулли. Уравнения (28.7) и (28.8) впервые получены Трусделлом, хотя в частных случаях они были приведены ранее Д. К. Бобылевым [1]) и Роулендом [2]).

При применении полученных результатов к динамике жидкости мы ограничимся случаем $p = \text{const}$. Рассмотрим сначала безвихревое движение. В этом случае из уравнений (28.2) и (28.3) получаем, что

$$\nabla^2\frac{1}{2}q^2 = \mathbf{D} : \mathbf{D} \geqslant 0;$$

следовательно максимум модуля скорости достигается на границе; этот факт уже упоминался выше (п. 23). Рассмотрим теперь движение жидкости, удовлетворяющее уравнению (28.5) или уравнению (28.6). В любом из этих случаев (поскольку $\Theta = 0$) мы можем записать уравнение (28.7) в виде так называемого *уравнения давления*:

$$\nabla^2\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right) = (2\mathfrak{B}^2 - 1)\,\mathbf{D} : \mathbf{D}. \qquad (28.9)$$

Таким образом, в случае *течений несжимаемой жидкости, как идеальной, так и вязкой, в консервативном поле внешних сил*

1) *в области, где* $2\mathfrak{B} \geqslant 1$, *максимум величины* $p + \rho\Omega$ *достигается на границе*;

2) *в области, где* $2\mathfrak{B} \leqslant 1$, *минимум величины* $p + \rho\Omega$ *достигается на границе.*

---

[1]) Бобылев Д. К., *Math. Ann.*, 6, 72 (1873).

[2]) Rowland H., *Amer. J. Math.*, 3, 226 (1880). Аналогичные уравнения рассматривались также в работах Лихтенштейна [9, стр. 409], Гамеля [Hamel G., *Mh. Math. Phys.*, 43, 345 (1936)] и Лагалли [Lagally, *Z. angew. Math. Mech.*, 17, 80 (1937)].

Если $\nabla^2\Omega = 0$, *что выполняется, например, для случая поля сил тяжести и для случая отсутствия внешних сил, то оба эти утверждения справедливы также относительно самой величины давления* p.

В частности, утверждение 2 справедливо для безвихревого движения.

29. Преобразования Вебера и Клебша. В заключение этой главы мы опишем два известных преобразования уравнений движения в случае баротропного течения идеальной жидкости. Эти преобразования применяются сравнительно редко, но представляется интересным записать их в более удобном виде, чем тот, в котором они обычно употребляются, и сделать их, таким образом, более доступными для читателя.

Мы начнем с вывода преобразования Вебера и рассмотрим с этой целью очевидное тождество

$$\operatorname{Grad} \mathbf{x}\cdot\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\operatorname{Grad} \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}) - \operatorname{Grad}\frac{1}{2}q^2.$$

[Отметим аналогию с формулой Лагранжа (14.4).] Пользуясь этим соотношением, мы получаем из формулы (16.5) для ускорения, что

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{Grad} \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}) = -\operatorname{Grad}\left(\int\frac{dp}{\rho} + \Omega - \frac{1}{2}q^2\right).$$

Проинтегрировав последнее уравнение от 0 до t и положив

$$\Psi = \int_0^t \left[\int\frac{dp}{\rho} + \Omega - \frac{1}{2}q^2\right]dt,$$

мы получим уравнение

$$\operatorname{Grad} \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = -\operatorname{Grad}\Psi, \tag{29.1}$$

где $\mathbf{v}_0$ — поле скоростей при $t = 0$. Уравнение (29.1), которое называется *уравнением* (или *преобразованием*) *Вебера* [1]), можно рассматривать как видоизмененную форму уравнений движения в переменных Лагранжа.

---

[1]) Weber H., *J. reine angew. Math.*, 68, 286 (1868).

Используя преобразование Вебера, сравнительно легко получить преобразование Клебша [1]). Заметим сначала, что поле скоростей всегда можно (по крайней мере, локально) представить (см. [48], § 49) в виде

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi + f \operatorname{grad} g. \tag{29.2}$$

Но тогда $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g$, следовательно, поверхности $f = \text{const}$ и $g = \text{const}$ являются вихревыми поверхностями. Как было установлено, вихревые поверхности перемещаются вместе с жидкостью, поэтому естественно попытаться в представлении (29.2) подобрать f и g так, чтобы

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{dg}{dt} = 0. \tag{29.3}$$

Докажем, что это действительно возможно.

Представим с этой целью начальное поле скоростей $\mathbf{v}_0$ в виде (29.2), т. е. положим

$$\mathbf{v}_0 = \operatorname{Grad} \varphi_0 + f \operatorname{Grad} g.$$

Здесь функции φ_0, f и g зависят только от $\mathbf{X}$. Подставив это выражение для $\mathbf{v}_0$ в уравнение (29.1) и умножив обе части уравнения на grad $\mathbf{X}$, мы получим

$$\mathbf{v} - \operatorname{grad} \varphi_0 = f \operatorname{grad} g = -\operatorname{grad} \Psi,$$

или

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi + f \operatorname{grad} g,$$

где $\varphi = \varphi_0 - \Psi$, а функции f и g удовлетворяют уравнениям (29.3).

Клебш показал, что в случае, когда поле скоростей $\mathbf{v}$ представлено в виде (29.2) и выполнены условия (29.3), уравнение движения (16.5) допускает интегрирование. Действительно, исходя из тождества (15.8), легко показать, что

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} q^2\right) + \frac{df}{dt} \operatorname{grad} g + f \operatorname{grad} \frac{dg}{dt} =$$

$$= \operatorname{grad}\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} q^2\right) = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} q^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f \frac{\partial g}{\partial t}\right).$$

[1]) Clebsch A., *J. reine angew. Math.*, **54**, 293 (1857); **56**, 1 (1859). Чтение этих работ довольно затруднительно; мы следовали здесь в основном изложению этих вопросов в книге Ламба [8], § 167.

Сравнив полученные выражения с формулой (16.5), мы получаем, что

$$\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}+\Omega=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-f\frac{\partial g}{\partial t}; \tag{29.4}$$

несущественная функция времени включена здесь в φ. Уравнение Клебша (29.4) можно рассматривать как одно из уравнений Бернулли, однако в отличие от рассмотренных выше форм этого уравнения соотношение (29.4) не зависит ни от предположения о потенциальности течения, ни от предположения о его стационарности. Заметим, наконец, что уравнения (29.3) и (29.4) образуют систему трех уравнений относительно неизвестных φ, f, g и ρ; $\mathbf{v}$ определяется из уравнения (29.2), а давление является известной функцией ρ в силу баротропности течения. В качестве четвертого уравнения следует взять уравнение неразрывности [1]).

Кажущаяся простота преобразования Клебша является частично обманчивой, так как даже в установившемся движении функции φ, f и g будут, вообще говоря, зависеть от времени.

Если функции f и g не удовлетворяют условиям (29.3), то вместо уравнения (29.4) мы получим уравнение вида

$$\frac{dg}{dt}\operatorname{grad}f-\frac{df}{dt}\operatorname{grad}g=\operatorname{grad}\mathfrak{H},$$

где

$$\mathfrak{H}=\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}+\Omega+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f\frac{\partial g}{\partial t}. \tag{29.5}$$

Следовательно, $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(f, g, t)$ и

$$\frac{dg}{dt}=\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial f},\qquad \frac{df}{dt}=-\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial g}; \tag{29.6}$$

эти уравнения по форме напоминают канонические уравнения Гамильтона. В случае преобразования Клебша мы имеем, в частности, $\mathfrak{H}=0$ и $df/dt=dg/dt=0$. Предположим теперь, что движение установившееся и что функции f и g

---

[1]) Клебш заметил, что эта система уравнений эквивалентна некоторой вариационной задаче. В более общем виде эта задача была сформулирована независимо друг от друга Херивелом и Лином (см. п. 15).

удовлетворяют не условиям (29.3), а условиям

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} = 0;$$

тогда $\mathfrak{H}$ не зависит явно от t и, следовательно,

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g}\frac{dg}{dt} = 0. \tag{29.7}$$

Здесь уместно заметить, что так же доказывается общеизвестный принцип сохранения энергии в динамике Гамильтона. Уравнение (29.7) эквивалентно, очевидно, уравнению Бернулли (см. п. 17). В основе удивительной аналогии между каноническими уравнениями Гамильтона и уравнениями Клебша лежат, по-видимому, вариационные принципы, установленные в п. 15.

29а. Дополнение. Обобщенные преобразования Вебера и Клебша. Мы рассмотрим здесь обобщение результатов, полученных в п. 29, на случай движения произвольного газа. Термодинамическое обоснование рассуждений, которые проводятся в этом пункте, будет дано в следующей главе (п. 30, 35).

При обобщении преобразования Вебера мы следуем той же схеме, что и в п. 29, причем роль формулы (16.5) будет играть теперь соотношение

$$\mathbf{a} = T \operatorname{grad} S - \operatorname{grad}(I + \Omega), \quad \frac{dS}{dt} = 0, \tag{29.8}$$

где через I обозначена удельная энтальпия, $I = E + p/\rho$ (эта формула является следствием тождества $\rho^{-1}\operatorname{grad} p = T \operatorname{grad} S - \operatorname{grad} I$). В результате несложных преобразований вместо уравнения (29.1) мы получим уравнение

$$\operatorname{Grad}\mathbf{x}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \beta \operatorname{Grad} S - \operatorname{Grad}\Psi, \tag{29.9}$$

где

$$\frac{d\beta}{dt} = T, \quad \frac{d\Psi}{dt} = I + \Omega - \frac{1}{2}q^2. \tag{29.10}$$

Уравнение (29.9), являющееся обобщенным уравнением Вебера, также можно рассматривать как видоизменение уравнений движения в переменных Лагранжа.

Полученные уравнения (29.9) и (29.10) представляют значительный интерес с точки зрения вариационной задачи

Херивела — Линя, рассмотренной в п. 15. Говоря точнее, уравнение (29.10) и уравнение

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\Psi + \beta \operatorname{grad} S + \operatorname{grad}\mathbf{X}\cdot\mathbf{v}_0, \qquad (29.11)$$

получающееся при умножении уравнения (29.9) на $\operatorname{grad}\mathbf{X}$, вместе с очевидным условием $d\mathbf{v}_0/dt = 0$ совпадают (с точностью до обозначений) с уравнениями Эйлера вариационной задачи, определяемой уравнениями (15.5) и (15.6). Это доказывает, что каждое течение дает экстремум вариационной задачи Херивела — Линя (см. п. 15).

Нетрудно получить обобщение преобразования Клебша, однако вывод обобщенных уравнений Клебша и их формальное обоснование мы предоставляем читателю.

ГЛАВА 4

ТЕРМОДИНАМИКА И УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

§ 1. Термодинамика простой среды

Всегда, кроме наиболее простых случаев, рассмотренных в предыдущей главе, число неизвестных в уравнениях, выведенных в гл. 2, превосходит число уравнений и, следовательно, одних этих уравнений недостаточно для полного описания движения жидкости. Создавшееся затруднение разрешается введением *уравнения полной энергии*, основанного на классических принципах термодинамики, и использованием затем заданных заранее уравнений состояния среды.

В этой главе мы выведем уравнение полной энергии, начав с обзора (п. 30—32) тех результатов классической термодинамики, которые нам понадобятся в дальнейшем. Мы рассмотрим, в частности, основные законы, описывающие изменения термодинамической системы, фазы которой имеют постоянную массу и фиксированное уравнение состояния. Прежде чем перейти к деталям, следует заметить, что мы не ставим перед собой задачу (это выходило бы к тому же за рамки данной статьи) физического обоснования логической структуры термодинамики. Укажем лишь, что такого рода обоснование мы находим в законах Клаузиуса и Кельвина, результатах кинетической теории и статистической механики и, пожалуй в наибольшей мере, в успешном применении теории для объяснения экспериментальных фактов [1]).

---

[1]) Трудно указать читателю вполне строгое изложение вопросов обоснования термодинамики. Одним из наиболее удачных элементарных методов является метод Филлипса, изложенный, например, в книге [31], гл. 8; представляют также интерес и другие разделы этой книги (гл. 1—3, 6—7 и 19—24). Более полное исследование принадлежит Каратеодори [*Math. Ann.*, 67, 355 (1909); *Sitzgsber. Akad. Wiss. Berlin, Math.-Phys. Kl.*, 39 (1935); Handbuch der Physik, т. 9, гл. 4, 1926]. Однако как элементарные методы, так и изящный метод Каратеодори неприменимы в случае необратимых процессов; по этому вопросу можно обратиться к работе Ли-

30. Однофазная система. Простейшей термодинамической системой является однородная среда. Свойства однородной среды лежат в основе всей гидродинамики сжимаемой жидкости, поэтому наше изложение естественно начать с математического описания этой однофазной системы. Введем с этой целью *переменные состояния*, наиболее важными из которых являются объем V, энтропия S, внутренняя энергия E, давление p и абсолютная температура T. Заданные значения этих переменных вполне определяют термодинамическое состояние однофазной системы.

Структура однофазной системы определяется функциональными соотношениями между переменными состояния. Следуя изящному методу Гиббса, выберем в качестве основного соотношения

$$E = E(S, V)$$

(функция $E(S, V)$ предполагается *заданной заранее*) и примем следующие *определения* величин p и T:

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V}, \quad T = \frac{\partial E}{\partial S};$$

предполагается, конечно, что $\partial E/\partial S > 0$ и $\partial E/\partial V < 0$. Различные соотношения между E, S, V, T и p, которые можно получить из выписанных выше формул, называются *уравнениями состояния*. Ясно, что зафиксировав любые две переменные состояния, мы тем самым определяем, вообще говоря, все остальные [1]). Полное дифференцирование соотношения $E = E(S, V)$ приводит к следующей важной формуле:

$$T\,dS = dE + p\,dV, \tag{30.1}$$

связывающей переменные состояния.

фа [Leaf B., *J. Chem. Phys.*, **12**, 89 (1944)], в особенности к стр. 94. Заметим, что в последнее время все более популярной становится та точка зрения, что следует отказаться от попыток строгого объяснения аксиом термодинамики необратимых процессов; см. книги Де Грота (Де Грот С., Термодинамика необратимых процессов, Гостехиздат, 1956) и Денбига (Денбиг К., Термодинамика стационарных необратимых процессов, ИЛ, 1954).

Стандартное изложение кинетической теории газов можно найти в книге Чепмена и Каулинга [34].

[1]) В качестве основных переменных мы будем обычно употреблять (S, V) или (p, V); последняя пара переменных применима, конечно, только в тех случаях, когда p и V однозначно определяют термодинамическое состояние системы.

В том частном случае, когда $E = E(S)$, основное уравнение (30.1) заменяется уравнением $T\,dS = dE$, причем давление уже не является более термодинамической переменной. Это вызывает необходимость специальных оговорок в последующих рассуждениях, однако для краткости мы все необходимые изменения предоставляем читателю и *ниже всюду считаем, что* $(\partial E/\partial V)_S < 0$.

Мы рассмотрим сначала в качестве примера простой термодинамической системы совершенный газ, однако предварительно напомним читателю некоторые общие результаты, справедливые для произвольной однофазной системы. Говорят, что однофазная система участвует в *дифференцируемом процессе*, если переменные состояния системы $V = V(t)$, $T = T(t)$ и т. д. являются дифференцируемыми функциями времени. При обратимом процессе, т. е. при процессе, в котором система в любой момент времени находится в равновесии с окружающей средой, приток тепла $Q(t)$ к системе определяется при помощи формулы

$$dQ = dE + p\,dV$$

(см. п. 32). Большой интерес представляют *теплоемкости* однофазной системы [1])

$$c_v = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V \quad \text{и} \quad c_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p.$$

Так как $c_v = T(\partial S/\partial T)_V$ и $c_p = T(\partial S/\partial T)_p$, то обе эти теплоемкости являются переменными состояниями. Из экспериментов установлено, что

$$c_p > c_v > 0. \tag{30.2}$$

Это условие мы примем в качестве дополнительного постулата, описывающего структуру однофазной системы.

В дальнейшем нам понадобятся также известные формулы:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p, \tag{30.3}$$

$$c_p - c_v = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \tag{30.4}$$

[1]) Если однофазная система имеет единичную массу, то теплоемкости называются удельными теплоемкостями.

доказательство которых можно найти в любом курсе термодинамики. Заметим, кроме того, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial (p, V)}{\partial (T, V)} = \frac{\partial (p, V)}{\partial (p, T)} \frac{\partial (p, T)}{\partial (T, V)} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T, \quad (30.5)$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{(\partial p/\partial V)_S}{(\partial p/\partial V)_T}; \quad (30.6)$$

формула (30.6) доказывается аналогично формуле (30.5). Легко проверить, что из формул (30.4) — (30.6) и условия (30.2) следует, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S < \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0. \quad (30.7)$$

В п. 37 будет введено еще одно дополнительное предположение термодинамического характера, однако до тех пор будет достаточно сформулированной выше системы постулатов.

Мы не ставим своей задачей изучение многокомпонентных фаз (теорию таких систем вряд ли можно рассматривать как часть классической механики жидкости), но нам представляется полезным указать те необходимые изменения в приведенных выше формулировках, которые позволили бы включить в рассмотрение такого рода системы. В частности, основное уравнение состояния следовало бы записать в более общем виде

$$E = E(S, V, M_i), \quad (30.8)$$

где величина M_i ($i = 1, \ldots, \beta$) определяет количество i-го вещества в данной фазе. Так как увеличение всех величин M_i в одно и то же число раз не меняет состава фазы, то функция E должна быть однородной функцией первой степени относительно переменных M_i. Определив теми же соотношениями, что и раньше, температуру и давление, мы вместо формулы (30.1) получим формулу

$$T\,dS = dE + p\,dV + \mu_i\,dM_i,$$

где $\mu_i = -\partial E/\partial M_i$. Определение функции $Q(t)$ для дифференцируемого процесса остается прежним, сохраняют свою силу также соотношения (30.2) — (30.7), если понимать под частными производными величины, вычисленные при фиксированных значениях переменных M_i.

31. Совершенный газ. Было замечено, что уравнение состояния многих реальных газов, включая воздух, более или менее точно аппроксимируется формулой

$$pV = \mathcal{R}T, \quad (31.1)$$

где $\mathcal{R}$ — положительная константа. Несложные рассуждения кинетической теории показывают, кроме того, что соотношение (31.1) естественно с теоретической точки зрения.

Таким образом, хотя в природе нет вещества, для которого соотношение (31.1) выполняется точно, изучение свойств гипотетического вещества, удовлетворяющего уравнению (31.1) и называемого совершенным газом [1]), полезно со многих точек зрения.

Соотношения между другими переменными состояния совершенного газа легко получаются из формул (30.3) и (30.4). В частности, мы находим, что

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0, \quad c_p - c_v = \mathcal{R}.$$

Отсюда следует, что $E = E(T)$, а так как $c_v = (\partial E/\partial T)_V$, то и $c_v = c_v(T)$. Для одноатомных реальных газов найдено, что величина c_v остается почти постоянной в широком диапазоне изменения температуры, хотя это утверждение не распространяется на область очень низких температур. В случае многоатомных газов величину c_v можно считать постоянной лишь в области температур, близких к комнатной. Это объясняется тем, что при низких температурах вращательное движение молекул требует малых затрат энергии, а при высоких температурах начинают играть существенную роль колебательные движения молекул. В силу такого положения вещей даже для совершенного газа обычно сохраняют выражение для внутренней энергии в форме

$$E = \int c_v \, dT.$$

Для одноатомного совершенного газа кинетическая теория дает значение $c_v = {}^3/_2 \mathcal{R}$, в то время как для двухатомного газа в области температур, при которых существенны вращательные (но не колебательные) движения, получаем, что $c_v = {}^5/_2 \mathcal{R}$. При этих значениях c_v отношение $\gamma = c_p/c_v$ принимает значения ${}^5/_3$ и ${}^7/_5$ соответственно. Для воздуха при умеренных температурах экспериментально определено $\gamma = 1{,}40$, что соответствует теоретическому значению для двухатомного газа. Это значение, вероятно, остается правильным и при высоких температурах, если при этом энергия колебательного движения будет незначительной. Можно было бы добавить в заключение, что поведение воздуха при

[1]) Часто применяется также термин „идеальный" газ, но его предпочтительнее использовать для обозначения невязкого газа.

высоких давлениях значительно отклоняется от описанной выше схемы [1]).

Интегрирование уравнения (30.1) приводит к следующей формуле для энтропии совершенного газа:

$$S = \int c_v \frac{dT}{T} + \mathcal{R} \log V.$$

При постоянной теплоемкости c_v это соотношение упрощается и принимает вид $S = c_v \log pV^\gamma + \text{const}$; тогда его можно будет разрешить относительно p и получить

$$p = e^{S/c_v} V^{-\gamma}, \quad \gamma = \text{const} > 1. \tag{31.2}$$

В уравнении (31.2) мы освободились от постоянной интегрирования, выбрав за начало отсчета S точку, в которой $p = V = 1$.

32. Законы термодинамики. Рассмотрим совокупность m однофазных систем со свойствами, описанными в п. 30, и предположим, что в любом процессе при механическом и термодинамическом взаимодействии эти фазы сохраняют свою индивидуальность. Припишем каждой фазе рассматриваемой системы номер α ($\alpha = 1, \ldots, m$) и введем переменные V_α, T_α, S_α, E_α и p_α, описывающие термодинамическое состояние системы. Тогда энтропия, объем и внутренняя энергия всей системы в целом определяются следующим образом:

$$\mathfrak{S} = \sum_\alpha S_\alpha, \quad \mathfrak{V} = \sum_\alpha V_\alpha, \quad \mathfrak{E} = \sum_\alpha E_\alpha.$$

Представим теперь себе такой процесс, при котором фазы системы переходят из одного состояния в другое. Обозначим через $\mathfrak{A}$ величину работы, выполненной в системе при этом процессе, и через Q_α^e — количество теплоты, полученной фазой α из *источников, внешних по отношению к системе.* Определим общее количество теплоты $\mathfrak{Q}^e$, полученное системой, формулой $\mathfrak{Q}^e = \sum_\alpha Q_\alpha^e$. Тогда *первый закон термодинамики* утверждает, что

$$\mathfrak{Q}^e = \Delta\mathfrak{E} + \mathfrak{A}, \tag{32.1}$$

[1]) Исследование свойств реальных газов и, в частности, воздуха читатель может найти в книге Бейтмена и др. [2], стр. 504—512; см. также работу Гольдштейна [Goldstein S., *Aero Res. Com. R. and M.*, № 2337 (1946)] и том XII данной Энциклопедии.

где $\Delta\mathfrak{E}$ — приращение внутренней энергии системы. Если рассматривается дифференцируемый процесс, в котором система проходит некоторое множество точно определенных состояний, т. е. если $V_\alpha = V_\alpha(t)$, $Q_\alpha^e = Q_\alpha^e(t)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(t)$ и т. д., то первый закон термодинамики принимает следующий вид:

$$d\mathfrak{Q}^e = d\mathfrak{E} + d\mathfrak{A}. \tag{32.2}$$

Для одной фазы обычно вместо $d\mathfrak{Q}^e$ пишут просто dQ. Известно (см. [35], гл. 2), что для однофазной системы, находящейся в течение процесса в равновесии с окружающей средой, работа, выполненная системой, выражается формулой $d\mathfrak{A} = p\,dV$. Мы выводим, таким образом, для определения количества тепла, полученного однофазной системой в обратимом процессе, уравнение

$$dQ = dE + p\,dV.$$

Эта формула уже упоминалась раньше (см. п. 30).

Второй закон термодинамики не имеет законченной формулировки для произвольных процессов; в связи с этим мы ограничимся случаем дифференцируемых процессов, для которых этот закон формулируется следующим образом:

В дифференцируемом процессе количество теплоты, полученное каждой фазой, и функции состояния этих фаз удовлетворяют неравенству

$$d\mathfrak{S} \geqslant \sum_\alpha \frac{dQ_\alpha^e}{T_\alpha}. \tag{32.3}$$

В любом процессе, для которого $Q_\alpha^e = 0$, *энтропия должна возрастать.*

Процесс называется спонтанным, если в формуле (32.3) имеет место строгое неравенство; если значения переменных состояния таковы, что спонтанный процесс с этими начальными данными невозможен, говорят, что система находится в равновесии. В качестве примера применения второго закона термодинамики рассмотрим процесс, при котором все фазы имеют одинаковую температуру, т. е. $T_1 = T_2 = \ldots = T_m = T(t)$. Тогда в силу уравнения (32.3) $T\,d\mathfrak{S} = d\mathfrak{Q}^e$,

и, проинтегрировав это соотношение, мы получим, что

$$\Delta\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1 \geqslant \int_1^2 \frac{d\mathfrak{Q}^e}{T}. \tag{32.4}$$

Именно это неравенство обычно приводится в учебниках.

Теперь перейдем к вопросу, который не связан с дальнейшим изложением, но представляется нам интересным. Рассмотрим вывод уравнений равновесия изолированной (как термодинамически, так и механически) системы фиксированного объема $\mathfrak{V}$. Так как в рассматриваемом случае $dQ_\alpha^e = d\mathfrak{V} = 0$, то в силу первого закона $d\mathfrak{E} = 0$. Очевидно также, что для системы фиксированного объема $d\mathfrak{V} = 0$. Теперь становится ясным, что спонтанные процессы невозможны только в том случае, когда для всевозможных приращений переменных состояния, подчиненных условиям $d\mathfrak{E} = d\mathfrak{V} = 0$, величина $d\mathfrak{S} = 0$. Простые рассуждения показывают, однако, что всегда можно положить $d\mathfrak{S} \neq 0$, кроме того случая, когда величины T_α и p_α одинаковы для всех фаз системы. Таким образом, мы приходим к выводу, что положение равновесия характеризуется постоянными во всей системе температурой и давлением. Этот результат, хотя его и следовало, конечно, ожидать заранее, представляется тем не менее важным, так как указывает на совместимость второго закона с привычными представлениями, полученными из опыта. Заметим, наконец, что если рассматриваемая система находится в равновесии, то мы имеем

$$T\,d^2\mathfrak{S} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T (dV_\alpha)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V (dT_\alpha)^2,$$

откуда в силу неравенств (30.2) и (30.7) следует, что любые достаточно малые изменения состояния вызывают уменьшение общей энтропии, так что равновесие является устойчивым. Этот результат показывает естественность принятого выше предположения (30.2).

Укажем еще один результат, связанный с обычными представлениями термодинамики. Для произвольного процесса, переводящего систему из состояния с температурой T_1 в состояние с температурой T_2, теплоемкость c определяется

следующим образом:

$$c = \frac{\mathfrak{Q}^e}{\Delta T}.$$

Если процесс является локально обратимым и в любой момент времени температура постоянна во всей системе, то, как легко видеть,

$$c = \frac{d\mathfrak{Q}^e}{dT} \leqslant T\frac{d\mathfrak{S}}{dT} = \sum_\alpha \frac{dQ_\alpha}{dT}.$$

Таким образом, *теплоемкость многофазной системы не может превосходить суммы теплоемкостей отдельных фаз этой системы.*

§ 2. Уравнение энергии

33. Сохранение энергии. Как уже отмечалось в начале этой главы, к уравнениям движения жидкости нужно присоединить уравнение полной энергии [1]). Мы определяем *полную энергию* объема $\mathfrak{V}$ как сумму кинетической энергии $\mathfrak{T}$ и внутренней энергии $\mathfrak{E}$ этого объема, где

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\int \rho q^2\, dv, \quad \mathfrak{E} = \int \rho E\, dv,$$

а величина E представляет собой внутреннюю энергию, отнесенную к единице объема. Термодинамическая интерпретация E существенно различна для сжимаемой и для несжимаемой жидкости: эти случаи соответственно будут рассматриваться отдельно. *В случае сжимаемой жидкости мы полагаем, по определению, что величина E есть термодинамическая переменная состояния, связанная с абсолютной температурой T, удельной энтропией S и давлением p следующим соотношением:*

$$T\,dS = dE + p\,d\tau, \qquad \tau = 1/\rho, \tag{33.1}$$

[1]) В последующем изложении мы рассматриваем только однородные и химически инертные жидкости. Вопросы, связанные с диффузией, химическими реакциями и прочими тонкими физико-химическими процессами, выходят за рамки данной статьи. В связи с этим мы рекомендуем читателю обратиться к замечательной работе Труселла [Truesdell C., Sulle basi della termomeccanica, *Rend. Accad. naz. Lincei* (8), 22, 33—38, 158—166 (1957)], в которой впервые развита рациональная и систематическая теория, освещающая эти сложные вопросы.

где τ *обозначает удельный объем* (см п. 30). Следует отметить, что сформулированный постулат *определяет* давление жидкости как термодинамическую переменную, так что в общем случае $p = f(\rho, S)$.

Для несжимаемой жидкости мы предположим, что вместо соотношения (33.1) *выполняется более простое соотношение*

$$T\,dS = dE, \qquad \rho \equiv \text{const}. \tag{33.2}$$

Из уравнения (33.2) вытекает, что $E = E(S)$ и $T = dE/dS$; следовательно, давление никак не связано с термодинамическими свойствами несжимаемой жидкости и действительно представляет собой независимую величину.

Сформулированные выше аксиомы ни в коей мере не являются тривиальными или очевидными, если принять во внимание, что их предполагается применять к любому возможному движению жидкости. В подтверждение этих аксиом мы прежде всего отметим естественность и относительную простоту соотношения (33.1). Заметим далее, что для достаточно простых молекулярных моделей кинетическая теория приводит точно к такому же результату. Наконец, подтверждением правильности принятых гипотез служит тот факт, что все известные экспериментальные данные находятся в хорошем соответствии с теоретическими результатами, вытекающими из этих гипотез. Последний довод, видимо, не оставляет места сомнениям. Напомним в связи с этим замечание Джилбарга о том, что „уравнения часто остаются справедливыми при предположениях, менее ограничительных, чем предположения, принятые при их первоначальном выводе. Такого рода удача является в действительности одной из характерных черт теории в хорошем значении этого слова“ [1]).

В связи с вышеизложенным представляется естественным *принять в качестве аксиомы следующий закон сохранения общей энергии*:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T} + \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{B}} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dv + \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}\, da - \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{33.3}$$

[1]) Gilbarg D., Paolucci D., *J. Rational Mech. Anal.*, 2, 618 (1953).

Согласно этому уравнению, скорость изменения полной энергии объема, движущегося с жидкостью, равна сумме мощности сил, приложенных к объему, и количества теплоты, полученной объемом (отнесенного к единице времени). Вектор потока тепла $\mathbf{q}$ имеет размерность энергии на единицу площади, отнесенную к единице времени, следовательно, размерность $\mathbf{q}$ равна MT^{-3}. Связь этого вектора с другими механическими и термодинамическими переменными будет определяться впоследствии дополнительными предположениями относительно свойств рассматриваемой среды. При помощи обычных рассуждений, основанных на формуле (9.1), мы получим из уравнения (33.3) так называемое *уравнение полной энергии* [1]), а именно уравнение

$$\rho \frac{dE}{dt} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q}. \tag{33.4}$$

Как заметил Трусделл [2]), это уравнение принадлежит К. Нейману.

Уравнение (33.3) соответствует первому закону термодинамики. По аналогии со вторым законом мы будем предполагать, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{V}} \rho S dv \geqslant - \oint_{\mathfrak{S}} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} da. \tag{33.5}$$

Заметим в заключение, что сформулированные в этом пункте дополнительные предположения завершают систему постулатов, лежащую в основе механики сплошных сред. Дальнейшее развитие теории связано с частными предположениями относительно вида тензора напряжений, вектора потока тепла и уравнения состояния, связывающего термодинамические переменные.

34. Термодинамика деформации. Мы начнем с замечания, касающегося понятия давления. Первоначальное определение давления было введено в п. 6, и, согласно этому определению, давление является динамической переменной, описывающей свойства движения идеальной жидкости. Затем

[1]) Иногда в правую часть уравнения (33.3) добавляют член R, учитывающий различные другие источники энергии в жидкости, например химические реакции, радиацию и т. п.

[2]) Truesdell C., *J. Rational Mech. Anal.*, **1**, 160 (1952).

в начале этой главы было введено понятие давления как термодинамической переменной. Характерной чертой динамики сжимаемой жидкости, или, короче, газовой динамики, является предположение, что термодинамическое давление равно динамическому давлению. Таким образом, в случае идеальной жидкости имеет место следующая формула для напряжений: $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, справедливая как для сжимаемых, так и несжимаемых жидкостей. В первом случае p представляет собой термодинамическую переменную, а во втором рассматривается как не зависящая от термодинамического состояния жидкости динамическая переменная.

В общем случае, когда пренебрегать касательными напряжениями нельзя, мы представим $\mathbf{T}$ в виде

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{V}; \tag{34.1}$$

эту формулу следует рассматривать как определение тензора $\mathbf{V}$. Для сжимаемой жидкости p в соотношении (34.1) обозначает термодинамическое давление, для несжимаемой жидкости p играет несущественную роль, и выбор значения этой неизвестной в зависимости от значения $\mathbf{T}$ будет сделан далее так, чтобы уравнения движения имели возможно более простой вид (см. п. 59а). Во избежание ненужных оговорок, мы в дальнейшем будем рассматривать идеальную жидкость как частный случай, соответствующий $\mathbf{V} \equiv 0$ в формуле (34.1).

Подставив представление (34.1) тензора напряжений в уравнение (33.4), получим, что

$$\rho \frac{dE}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = \Phi - \operatorname{div} \mathbf{q}, \tag{34.2}$$

где $\Phi = \mathbf{V} : \mathbf{D}$. Воспользовавшись теперь уравнением неразрывности и соотношением (33.1) в случае сжимаемой жидкости или (33.2) в случае несжимаемой жидкости, мы приходим к следующему уравнению:

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \Phi - \operatorname{div} \mathbf{q}, \tag{34.3}$$

выражающему скорость изменения энтропии индивидуальной частицы жидкости через Φ и $\operatorname{div} \mathbf{q}$. Заметим, что в силу равенства $dQ = T\,dS$, где dQ обозначает отнесенное к единице массы жидкости количество теплоты, поглощенное жидкостью, из уравнения (34.3) следует также, что скорость поглощения теплоты, отнесенная к единичному объему, равна

$\Phi - \operatorname{div} \mathbf{q}$. Так как второй член представляет собой теплоту, полученную от соседних элементов жидкости, мы приходим, таким образом, к выводу, что величина Φ определяет отнесенное к единице времени и объема количество теплоты, возникшее в результате деформации элементов жидкости. Выделение этой теплоты влечет за собой, конечно, расходование механической энергии, в силу чего Φ носит название *функции диссипации*.

Разделив обе части уравнения (34.3) на T и проинтегрировав полученное соотношение по объему, движущемуся с жидкостью, мы найдем, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathfrak{V}} \rho S\, dv = \int\limits_{\mathfrak{V}} \left[\frac{\Phi}{T} - \frac{\mathbf{q}\cdot \operatorname{grad} T}{T^2}\right] dv - \oint\limits_{\mathfrak{S}} \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}{T}\, da.$$

Это уравнение показывает, что предположение (33.5) налагает на Φ, $\mathbf{q}$ и T следующее ограничение:

$$\Phi - \mathbf{q}\cdot \operatorname{grad} T/T \geqslant 0.$$

В частности, это неравенство выполняется, если

$$\Phi \geqslant 0, \qquad \mathbf{q}\cdot \operatorname{grad} T \leqslant 0. \tag{34.4}$$

Условия (34.4) являются математическим эквивалентом двух известных экспериментально установленных фактов: во-первых, теплота всегда передается от тел с большей температурой к телам с меньшей температурой, во-вторых, в процессе деформации механическая энергия может перейти в тепловую, но не наоборот. Легко видеть, что неравенство (33.5) в свою очередь можно *вывести* из неравенств (34.4), так что предположение (33.5) является прямым следствием простых физических наблюдений.

В термодинамике необратимых процессов одним из основных предположений является известный „закон линейности“ [1]. Грубо говоря, этот закон утверждает, что термодинамическая система стремится к своему положению равновесия со скоростью, линейно зависящей от величины отклонения системы от положения равновесия. Несмотря на сомнительность этого предположения, представляется интересным сформули-

[1]) См. статьи Онзагера [Onsager L., *Phys. Rev.*, **37**, 405 (1931); **38**, 2265 (1931)]; несколько с иных позиций эти вопросы рассматривал Кертисс [33].

ровать два следствия „закона линейности". В нашем случае величина отклонения от положения равновесия измеряется величинами $\mathbf{D}$ и $\operatorname{grad} T$, следовательно, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{q}$ должны быть линейными функциями $\mathbf{D}$ и $\operatorname{grad} T$. Из различного (с точки зрения тензорного анализа) характера этих величин вытекает, что

$$\mathbf{V} = \text{Линейная функция от } \mathbf{D},$$

$$\mathbf{q} = \text{Линейная функция от } \operatorname{grad} T.$$

Первый из этих результатов приводит к закону вязкости Коши — Пуассона, а второй — к известному закону Ньютона и Фурье. Однако эти рассуждения следует считать в значительной степени эвристическими, и их использование в выводе уравнений механики жидкости является некорректным.

ГЛАВА 5

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

§ 1. Общие принципы

35. Введение. В гл. 2 были получены уравнения движения идеальной жидкости, а именно уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{35.1}$$

и

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p. \tag{35.2}$$

К ним нужно добавить уравнение энергии (34.3), выведенное в гл. 4. Естественно предположить, что наряду с касательными напряжениями, которыми мы пренебрегаем при рассмотрении идеальных жидкостей, равен нулю также поток тепла $\mathbf{q}$. (Согласно кинетической теории, вязкость и теплопроводность определяются сходными механизмами взаимодействия молекул и являются величинами одного порядка малости, поэтому, пренебрегая одной из них, мы должны пренебречь и другой.) При этом предположении правая часть уравнения (34.3) обращается в нуль и, следовательно, оно сводится к простейшему виду

$$\frac{dS}{dt} = 0. \tag{35.3}$$

Система уравнений (35.1) — (35.3) становится полной, если к ней присоединить термодинамическое уравнение состояния, связывающее величины p, ρ и S, т. е. уравнение

$$p = f(\rho, S). \tag{35.4}$$

В частном случае совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями уравнение (35.4) принимает следующий

вид:

$$p = e^{S/c_v}\rho^{\gamma}, \quad \gamma = \text{const} > 1. \tag{35.5}$$

Однако в дальнейшем мы, как правило, будем пользоваться только общими свойствами уравнений состояния, сформулированными в п. 30. Из неравенства (30.7), например, вытекает условие $(\partial p/\partial\rho)_S > 0$, которое позволяет *ввести* термодинамическую переменную c:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \rho}}. \tag{35.6}$$

Жидкость, удовлетворяющую уравнениям (35.1) — (35.4), мы ниже будем называть *идеальным газом*. При изучении газовой динамики почти всегда пренебрегают воздействием поля внешних сил, и мы также будем придерживаться этого естественного предположения.

Пожалуй, наиболее характерным свойством системы уравнений (35.1) — (35.4) является конечная скорость распространения волн давления. Для пояснения этого факта воспользуемся следующими соображениями. Рассмотрим течение, полученное возмущением состояния покоя $\mathbf{v} = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $S = S_0$, и предположим, что амплитуда этого возмущения мала. Если при этом пренебречь квадратами малых величин, то уравнения (35.1) и (35.2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p.$$

Исключение $\mathbf{v}$ из этих уравнений приводит к соотношению $\nabla^2 p = \partial^2\rho/\partial t^2$. С другой стороны, из уравнений (35.3) и (35.4) следует, что $\partial^2 p/\partial t^2 = c_0^2 \partial^2\rho/\partial t^2$. Таким образом, малые возмущения давления должны удовлетворять уравнению [1])

$$c_0^2 \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

В силу хорошо известных свойств решений этого уравнения малые возмущения давления распространяются со скоростью c_0. Приведенные рассуждения, несмотря на свою нестрогость, показывают естественность введенного выше определения

[1]) Это уравнение было известно еще Эйлеру [*Mem. Acad. Sci. Berlin* (1759); Opera Omnia (3), **1**, стр. 428—507].

скорости звука c [1]). В более точной постановке вопрос о распространении волн будет рассмотрен в п. 51 и 54.

Нужно заметить, что c не является постоянной, а представляет собой термодинамическую переменную, зависящую от состояния жидкости. Например, для совершенного газа [2])

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T}, \tag{35.7}$$

где $\mathcal{R}$ — универсальная газовая постоянная, отнесенная к единице массы (в системе CGS величина $\mathcal{R}$ равна $2{,}87 \times 10^6$ для воздуха и $83{,}1 \times 10^6$ грамм-моль для чистого газа). Точность формулы (35.7) можно оценить, вычислив значение c для воздуха при 0° по шкале Цельсия (273,16° по абсолютной шкале). Подставив в формулу (35.7) $\gamma = 1{,}40$ и приведенное выше значение $\mathcal{R}$, мы получим $c = 331{,}3$ *м/сек*, что хорошо согласуется с экспериментальными данными. Это совпадение является одним из важных доводов в пользу применения теории идеальной жидкости для изучения движения газов.

Концепция конечной скорости звука приводит к хорошо известной картине дозвукового и сверхзвукового течения.

---

[1]) Первая теоретическая формула для скорости звука была найдена Ньютоном (Математические начала натуральной философии, книга II, отдел VIII, Предложения 48, 49.) Другой подход к вопросу был предложен Эйлером; им было усовершенствовано доказательство Ньютона и выведено волновое уравнение. Так как понятие адиабатического изменения тогда не было известно, Эйлер так же, как и Ньютон, сформулировал окончательный результат в виде $c^2 = p/\rho$. Согласование этой теории с экспериментом было выполнено Лапласом, который отметил тот факт, что температура, так же, как и давление, увеличивается при мгновенном сжатии. Результаты Лапласа впервые были опубликованы, по-видимому, Био [Biot J., *Bull. Soc. Phil. Paris*, **3**, 116 (1802)]. В этой заметке повышение температуры рассматривалось, однако, с точки зрения экспериментальных фактов. Некоторое время спустя Лаплас объяснил указанное повышение температуры, исходя из адиабатического характера процесса распространения звука и получил формулу $c^2 = \gamma p/\rho$, где γ — отношение удельных теплоемкостей [*Ann. Chim. Phys.*, **3**, 238 (1816)]. Общая формула $c^2 = (\partial p/\partial \rho)_S$ была получена, конечно, позже.

[2]) Эта формула справедлива и в случае переменных удельных теплоемкостей, так как в силу соотношения (30.6)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Хотя различия между этими течениями будут естественным образом получены в последующем исследовании, представляется полезным уже здесь выяснить некоторые особенности указанных течений при помощи интуитивных соображений. Рассмотрим случай установившегося дозвукового течения, например горизонтальный полет самолета с постоянной дозвуковой скоростью. При этом возмущение давления распространяется в направлении движения самолета со скоростью, равной разности скорости звука и скорости полета, а в обратном направлении — со скоростью, равной сумме скорости звука и скорости полета. Следовательно, возмущение достигает любой точки при условии, что полет продолжается бесконечно долго. Другая картина будет при полете со сверхзвуковой скоростью. Зона возмущения ограничена теперь конусом, простирающимся от передней точки самолета назад, причем образующие этого конуса составляют с его осью угол, равный $\arcsin(c/q)$ (в эту картину нужно внести некоторые изменения, если рассматриваются возмущения конечной амплитуды, т. е. ударные волны)[1]).

36. Динамическое подобие. В этом пункте мы будем считать, что читатель знаком с обычной инженерной трактовкой понятия динамического подобия, и постараемся четко изложить математические принципы, лежащие в основе рассматриваемого вопроса. Заметим, что понятие динамического подобия принадлежит Стоксу. В его работе о движении маятника в тормозящей жидкой среде[2]) не только впервые было сформулировано понятие динамического подобия, но и в первый раз фигурировала комбинация параметров течения, носящая сейчас название числа Рейнольдса.

Два течения идеальной жидкости называются *динамически подобными*, если переменные этих течений связаны соотношениями

$$\mathbf{v} = U\mathbf{v}', \quad \rho = R\rho', \quad p = Pp' \tag{36.1}$$

и

$$\mathbf{x} = D\mathbf{x}', \quad t = Tt', \tag{36.2}$$

[1]) Интересные соображения общего характера по поводу теории сжимаемой идеальной жидкости можно найти в первой главе работы [39], см. также [21], [23], [24] и [26].

[2]) Stokes G., *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 9, 8 (1850); Papers **3**, стр. 1—141.

где U, R, P, D и T — постоянные подобия [1]). Покажем сейчас, что эти постоянные связаны некоторым соотношением, иначе говоря, что определенные комбинации постоянных подобия должны иметь одно и то же значение для всех подобных между собой течений [2]). Подставив соотношения (36.1) и (36.2) в уравнение неразрывности, мы найдем, что

$$\frac{R}{T}\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{RU}{D}\operatorname{div}'(\rho' \mathbf{v}') = 0.$$

Так как течение, параметры которого помечены штрихами, также удовлетворяет уравнению неразрывности, отсюда следует, что

$$T = \frac{D}{U} \tag{36.3}$$

(исключением является случай установившегося течения, однако в этом случае вторая формула (36.2) теряет смысл). Оставшиеся уравнения движения при помощи соотношения (36.3) можно представить в виде

$$\rho' \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{P}{RU^2}\operatorname{grad}' p' \quad \text{и} \quad \frac{dS}{dt'} = 0.$$

Из первого из этих уравнений следует соотношение

$$\frac{RU^2}{P} = 1. \tag{36.4}$$

Если записать теперь уравнение состояния „штрихованного" течения в виде $p' = g(\rho', S')$, то

$$f(R\rho', S) = Pg(\rho', S'). \tag{36.5}$$

Взяв материальную производную от обеих частей равенства (36.5) и воспользовавшись тем, что $dS/dt = dS'/dt' = 0$, мы после сокращения на общий множитель получим

$$Rc^2 = Pc'^2. \tag{36.6}$$

---

[1]) При обычном инженерном изложении понятия о диамическом подобии оба течения сводятся к одному и тому же „безразмерному" течению. Сформулированное здесь определение нам кажется более ясным и четким.

[2]) Этот результат означает, что одного геометрического подобия двух областей течений недостаточно для динамического подобия этих течений.

В качестве следствия равенств (36.4) и (36.6) можно сформулировать следующее утверждение: *если два течения являются динамически подобными, то местное число Маха*[1]) $M = q/c$ *этих течений принимает равные значения в соответствующих точках областей течений.*

Полученное выше условие не является единственным следствием динамического подобия. Легко убедиться, что соотношение (36.5) между S и S' не должно зависеть от величины ρ' (в противном случае оба течения представляли бы собой движения несжимаемой жидкости). Например, в случае совершенного газа соотношение (36.5) сводится к соотношению

$$S - S' = c_v \log PR^{-\gamma},$$

которое служит для определения энтропии „штрихованного" течения.

В приложениях (например, при экспериментах в аэродинамической трубе) добиваются того, чтобы области течений были геометрически подобны и приведенные скорости v/c и v'/c' были согласованы *в одной точке* P. При этих обстоятельствах динамически подобные течения являются теоретически возможными, если соотношение (36.5) выполняется. Возникает вопрос, будут ли такие течения реализованы в действительности. Ясно, что мы можем быть в этом уверены только тогда, когда течение единственным образом определяется условием, заданным в точке P. Как будет показано ниже, теорема единственности справедлива по крайней мере в случае дозвукового обтекания препятствия при заданном состоянии потока на бесконечности (см. п. 46). Однако в действительности при экспериментах в аэродинамической трубе ситуация сильно усложняется действием различного рода посторонних факторов, так что вопрос о динамическом подобии следует решать — по крайней мере частично — исходя из опытных данных.

Выше было показано, что если уравнение состояния совершенного газа выполняется, то возможны различные динамически подобные течения. Оказывается, что справедливо и

---

[1]) Краткое изложение работы Маха и связанное с ней выяснения приоритета введения характеристики течения q/c можно найти в статье Блека [Black J., *J. Roy. Aero. Soc.*, **54**, 371 (1950)].

обратное утверждение: *если возможны динамически подобные течения двух газов при произвольных постоянных подобия P и R, то уравнение состояния каждого из этих газов имеет вид*

$$p = \sigma(S)\,\rho^m \tag{36.7}$$

с одной и той же постоянной m [1]). Этот результат показывает, какие сильные ограничения нужно наложить на уравнение состояния для того, чтобы газ обладал полезными свойствами динамического подобия. Очень удачно, что обычные газы с большей или меньшей точностью удовлетворяют уравнению (36.7).

Для доказательства сформулированного утверждения рассмотрим траекторию некоторой частицы жидкости (мы считаем для простоты, что постоянная подобия $D = 1$). Вдоль этой траектории величины S и S' постоянны. Так как течение, параметры которого не помечены штрихами, считается заданным заранее, то величина S есть фиксированное число; в формулах, выписанных ниже, мы это число для краткости опускаем. Величина S' является функцией параметров P и R. Обратив это соотношение, мы получим

$$P = P(R,\ S'). \tag{36.8}$$

Возвращаясь теперь к уравнению (36.5), мы видим, что

$$g(\rho',\ S') = \frac{f(R\rho')}{P(R, S')} = \frac{f(\rho')}{P(1, S')}, \tag{36.9}$$

так как R изменяется независимо от S'. Второе равенство (36.9) можно записать в виде

$$\frac{P(R, S')}{P(1, S')} = \frac{f(R\rho')}{f(\rho')} = \frac{f(R)}{f(1)};$$

последний переход в этой формуле законен в силу независимости левой части от ρ'. Таким образом,

$$f(R\rho') = \text{const} \cdot f(R)\, f(\rho'), \tag{36.10}$$

и, следовательно, $f(\rho) = \text{const} \cdot \rho^m$ [2]). Мы видим отсюда, что $f(\rho,\ S) = \sigma(S)\,\rho^m$ и, таким образом, доказательство закончено.

---

[1]) Аналогичный результат для изэнтропических течений приведен в работе Биркгофа [17], стр. 109 (1 изд.).

[2]) Для того чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать соотношение (36.10) по R и подставить $R = 1$.

В более сложных случаях, когда нельзя пренебрегать влиянием вязкости, теплопроводности, поля внешних сил, граничных условий и т. д., приведенный выше анализ не исчерпывает перечень необходимых свойств динамически подобного течения. Влияние некоторых из этих факторов будет рассмотрено далее (см. п. 66).

Теория размерностей и динамическое подобие. Некоторые из приведенных выше результатов можно получить простым анализом размерностей. Например, тот факт, что в соответствующих точках динамически подобных течений величина q/c принимает равные значения, становится очевидным, если заметить, что все члены, входящие в уравнения движения, имеют одинаковую размерность. Имеет место и более общий результат: *если предположить, что существуют два динамически подобных течения и что все параметры этих течений единственным образом определяются состоянием течения в некоторой точке P, то любые безразмерные комбинации параметров течений в соответствующих точках совпадают, так как они являются функциями только от значения числа Маха в точке P.* Доказательство проводится обычными методами теории размерностей. Существенным препятствием применению результатов теории размерностей является, однако, необходимость априорного предположения динамического подобия рассматриваемых течений [1]. С этой точки зрения развитая выше теория динамического подобия представляется более ценной, так как она позволяет получить *необходимые и достаточные условия существования динамически подобных течений* [2].

Нельзя отрицать ценности метода анализа размерностей в тех многочисленных случаях, когда динамическое подобие течений не вызывает сомнений. Этот метод позволяет также

[1]) К сожалению, в приложениях теории размерностей справедливость основного предположения почти никогда не проверяется. Критические замечания по этому поводу и соответствующие многочисленные примеры можно найти в гл. III работы [17]. В этой работе подчеркивается, в частности, что справедливость известной Пи-теоремы, являющейся основным результатом теории размерностей, сомнений не вызывает; трудность здесь связана с предположениями, на которых основан анализ размерностей.

[2]) Интересное замечание по этому поводу приведено в работе Гольдштейна [36], стр. 113.

получить некоторые результаты в случаях, к которым нельзя применить какие-либо другие методы исследования; но рассуждения теории размерностей при этом было бы желательно подтвердить, насколько это возможно, исследованием полных уравнений движения.

§ 2. Энергия, энтропия и завихренность

В оставшейся части этой главы поле внешних сил предполагается равным нулю. До тех пор пока мы имеем дело с газообразной средой, это предположение не является существенным ограничением общности.

37. Уравнение Бернулли. Течение газа называется *изэнтропическим*, если энтропия постоянна во всей области течения. Уравнение (35.3) в этом случае обращается в тождество, а уравнение состояния (35.4) принимает простую форму

$$p = f(\rho). \tag{37.1}$$

Следовательно, мы имеем дело со случаем баротропного течения, уже изучавшимся нами в гл. III. В частности, перефразируя результат, установленный в этой главе, мы видим, что *для изэнтропического установившегося безвихревого течения идеального газа при отсутствии внешних сил* справедлива следующая теорема Бернулли:

$$\frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}; \tag{37.2}$$

в качестве нижнего предела интегрирования в этой формуле обычно выбирают значение $p = 0$. Как будет выяснено ниже, интеграл в формуле (37.2) дает нам величину удельной энтальпии. Уравнение (37.2) можно записать также в дифференциальной форме:

$$\rho q\, dq + dp = 0, \tag{37.3}$$

или, воспользовавшись формулой (35.6) для скорости звука, в виде

$$\rho q\, dq + c^2 d\rho = 0. \tag{37.4}$$

В случае совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями интеграл $\int dp/\rho$ вычисляется в явном виде и

уравнение (37.2) принимает вид

$$\frac{q^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}=\text{const}. \tag{37.5}$$

Мы не будем касаться хорошо известных алгебраических следствий этого соотношения и рассмотрим непосредственно общее уравнение (37.2). При этом удобно ввести следующее термодинамическое предположение [1]):

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}\right)_S > 0. \tag{37.6}$$

Геометрически неравенства (37.6) и (30.7) означают, что в плоскости p, V адиабаты представляют собой выпуклые кривые с отрицательным углом наклона касательной. Здесь мы будем использовать не неравенство (37.6), а его следствие:

$$a \equiv \frac{1}{c}\frac{d}{d\rho}(\rho c) > 0. \tag{37.7}$$

В силу определения величины M, уравнения (37.4) и формулы (37.7)

$$\frac{dM}{dq}=\frac{1}{c}[1+(a-1)M^2]. \tag{37.8}$$

Очевидно, что $dM/dq > 0$ при $M \leqslant 1$; таким образом, для фиксированного уравнения состояния существует только одно значение скорости $q = q_*$, при котором $M = 1$. При $q < q_*$ течение называется *дозвуковым* ($M < 1$), при $q > q_*$ — *сверхзвуковым* ($M > 1$); величина q_* носит название *критической скорости*.

Заметим, что характер изменения величины потока массы $Q = \rho q$ существенно меняется при переходе через критическое значение скорости q. Действительно, в силу уравнения (37.4)

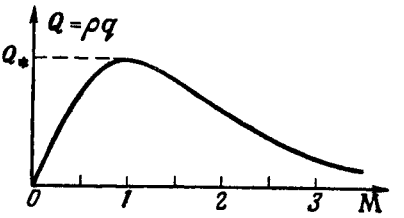
$$\frac{d}{dq}(\rho q)=\rho(1-M^2); \tag{37.9}$$

---

[1]) Неравенство (37.6), естественно, возникает и в других разделах газовой динамики; например, для адиабатической волны сжатия это условие обеспечивает возрастание крутизны профиля скорости (см. [21], § 41). Это условие встречается также в теории Вейля ударного перехода, изложенной в п. 56, где будут рассмотрены различные следствия неравенства (37.6). Очевидно, что неравенство (37.6) выполняется для идеального газа с постоянными удельными теплоемкостями.

следовательно, при $q < q_*$ величина ρq возрастает при увеличении скорости, а при $q > q_*$ убывает. Мы видим отсюда, что при заданной величине потока массы ρq возможны два различных режима течения: дозвуковой и сверхзвуковой.

Описанный характер изменения потока массы помогает понять многие явления газовой динамики, связанные с переходом через максимальное значение Q_* потока массы. В качестве иллюстрации установленных закономерностей может служить рис. 4, на котором показана зависимость ρq от M для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями.



Р и с. 4. Зависимость потока массы $Q = \rho q$ от числа Маха для установившегося изэнтропического течения.

Зависимость плотности от числа Маха очень просто получить при помощи формулы

$$\frac{d\rho}{dM^2} = \frac{d\rho}{dq}\frac{dq}{dM^2} = -\frac{\rho}{2[1+(a-1)M^2]},$$

которая вытекает непосредственно из уравнений (37.4) и (37.8). Разделив переменные и выполнив интегрирование, мы получим равенство

$$\log\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{1}{2}\int_0^{M^2}\frac{du}{1+(a-1)u} = -\frac{1}{2}\left[M^2 - \frac{a_0-1}{2}M^4 + \ldots\right],$$

так что для произвольного газа

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{1}{2}M^2 + \frac{2a_0-1}{8}M^4 + \ldots\right). \qquad (37.10)$$

Это соотношение показывает, как медленно изменяется плотность в зависимости от числа Маха при малых значениях M.

В табл. 1 указаны значения ρ, ρq и $\rho/\sqrt{1-M^2}$ как функции от M в случае совершенного газа. Последняя величина при малых числах Маха почти не меняется.

Таблица 1

Переменные состояния для установившегося изэнтропического течения совершенного газа ($\gamma = 1{,}40$)

Дозвуковое течение					Сверхзвуковое течение				
M	$\frac{q}{q_*}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{Q}{Q_*}$	$\rho_0 k$	M	$\frac{q}{q_*}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{Q}{Q_*}$	$\frac{\hat{p}_0}{p_0}$
0,1	0,109	0,995	0,172	1,000	1,1	1,082	0,582	0,992	0,999
0,2	0,218	0,980	0,337	1,000	1,2	1,158	0,531	0,970	0,993
0,3	0,326	0,956	0,491	0,998	1,3	1,231	0,483	0,938	0,979
0,4	0,431	0,924	0,629	0,992	1,4	1,300	0,437	0,897	0,958
0,5	0,535	0,885	0,746	0,978	1,5	1,365	0,395	0,850	0,930
0,6	0,635	0,840	0,842	0,952	1,7	1,483	0,320	0,748	0,856
0,7	0,732	0,792	0,914	0,903	2,0	1,633	0,230	0,593	0,721
0,8	0,825	0,740	0,963	0,810	3,5	2,064	0,045	0,147	0,213
0,9	0,915	0,687	0,991	0,635	5,0	2,236	0,011	0,040	0,062
1,0	1,000	0,634	1,000	0	∞	2,449	0	0	0

Обозначения. $Q = \rho q$, $k = \rho^{-1}\sqrt{1-M^2}$, $\hat{p}_0$ — давление торможения за ударной волной.

Замечание. Последний столбец служит также для определения отношений $\hat{\rho}_0/\rho_0$, $\hat{Q}_*/Q_*$, см. формулу (55.7). Скачок энтропии при переходе через ударную волну определяется по формуле $\Delta S = \mathscr{R} \log (\hat{p}_0/p_0)$.

38. Уравнение Кроккo — Важоньи. В этом пункте рассматривается установившееся неизэнтропическое движение. Предположив, что поле внешних сил $\mathbf{f}$ равно нулю, из уравнений (35.2) и (17.1) получим, что

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\operatorname{grad} \frac{1}{2} q^2 - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{38.1}$$

Легко видеть, что в силу определения удельной энтальпии $I = E + p/\rho$ имеет место равенство

$$\operatorname{grad} I = T \operatorname{grad} S + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Исключив из этих двух уравнений $\operatorname{grad} p$, мы придем к важному уравнению

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = T \operatorname{grad} S - \operatorname{grad} H, \tag{38.2}$$

где $H = {}^1/_2 q^2 + I$.

В частном случае совершенного газа при $H \equiv \text{const}$ уравнение (38.2) было получено в работе Крокко [1]). Для общего случая этот результат принадлежит Важоньи [2]).

Из формулы (38.2) следует, что завихренность в неизэнтропическом течении, вообще говоря, отлична от нуля. В частности, из неизэнтропичности течения за искривленным ударным фронтом следует завихренность этого течения.

Умножив скалярно обе части уравнения (38.2) на $\mathbf{v}$ и заметив, что в установившемся течении $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} S = 0$, мы получим соотношение $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} H = 0$; следовательно

$$H = \frac{1}{2} q^2 + I = \text{const} \quad \text{на линии тока.} \tag{38.3}$$

Далее, поскольку $(\partial I/\partial p)_S = 1/\rho$, мы имеем

$$I = \int_0^p dp/\rho;$$

здесь предполагается, что $I = 0$ при $p = 0$ (интеграл, конечно, берется при постоянном S). Уравнение (38.3) является обобщением уравнения Бернулли, приведенного в предыдущем пункте, и сводится к последнему при $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad} S = 0$. Если величины S и H известны, то уравнение (38.3) устанавливает зависимость плотности и давления от q.

Заметим, что для совершенного газа энтальпия зависит только от скорости звука. Это следует из того, что

$$I = E + \mathcal{R}T = I(T) \quad \text{и} \quad c^2 = \gamma \mathcal{R} T = c^2(T).$$

Таким образом, для любого течения, у которого $H = \text{const}$, независимо от того, будет ли это течение изэнтропическим, выполняется соотношение

$$\frac{1}{2} q^2 + I(c^2) = \text{const}.$$

Для несовершенных газов энтальпия зависит как от c^2, так и от S.

Можно отметить в заключение, что в силу уравнения (38.3) величина H для установившегося течения равна

[1]) Grocco L., *Rend. Lincei* (6), **23**, 115 (1936); *Z. angew. Math. Mech.*, **17**, 1 (1937).

[2]) Vazsonyi A., *Quart. Appl. Math.*, **3**, 29 (1945).

значению „энтальпии торможения“ I_0, т. е. энтальпии, которую имела бы частица жидкости, если бы она в некоторый момент времени остановилась.

39. Изэнтропическое течение, изоэнергетическое течение и безвихревое установившееся течение. Мы хотим выяснить, как связаны между собой установившиеся течения следующих типов:

изэнтропическое течение $S \equiv \text{const}$,
изоэнергетическое течение $H \equiv \text{const}$,
безвихревое течение $\omega \equiv 0$.

Интерес к течениям этих типов обусловлен их относительной простотой и широким применением.

Рассмотрим сначала течение, возникшее из состояния равномерного движения с постоянной температурой, давлением, плотностью и т. д. Если это течение является непрерывным, то в силу уравнения (35.3) величина энтропии постоянна во всей области течения, и здесь можно воспользоваться рассуждениями, проведенными в п. 21. Из аналогичных соображений вытекает постоянство энергии и потенциальность движения. Энергия будет постоянной даже в том случае, когда имеют место ударные волны, однако течение является при этом, вообще говоря, неизэнтропическим. Сформулируем теперь результаты исследования поставленного вопроса о соотношении течений различных типов в виде теорем.

Теорема 1. *Плоское (или осесимметричное) установившееся изэнтропическое течение с постоянной энергией является безвихревым.*

Доказательство. В силу уравнения Кронко—Важоньи во всей области течения $\omega \times \mathbf{v} = 0$. Следовательно, $\omega = 0$, за исключением, быть может, тех точек, где скорость равна нулю. Если эти точки являются изолированными, то по непрерывности $\omega = 0$ всюду; с другой стороны, если эти точки заполняют некоторую область, то очевидно, что в этой области $\omega = 0$.

Ниже следует теорема, в некотором смысле обратная предыдущей. Эта теорема применима и в трехмерном случае.

Теорема 2. *Установившееся безвихревое течение либо является изэнтропическим и имеет постоянную*

энергию, либо представляет собой течение геликоидального типа [1]).

Доказательство. Если данное безвихревое течение является изэнтропическим, то оно будет иметь также постоянную энергию в силу уравнения Крокко — Важоньи. Таким образом, мы должны доказать, что если в некоторой области течение не является изэнтропическим, то оно геликоидально в этой области. Разобьем доказательство на две части. Покажем сначала, что на любой линии тока скорость и плотность постоянны. Воспользовавшись уравнением (38.1) и уравнением состояния (35.4), получим

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} q^2 = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = -\frac{1}{\rho}\left(f_\rho \operatorname{grad}\rho + f_S \operatorname{grad} S\right).$$

Первая часть этого равенства означает, что $q = q(p)$ и (всюду, где $\operatorname{grad} p \neq 0$) $\rho = \rho(p)$. Тогда из второй части равенства следует, что во всей рассматриваемой области

$$\operatorname{grad} p \times \operatorname{grad} S = 0.$$

Таким образом, $p = p(S)$ и в силу первого замечания $q = q(S)$, $\rho = \rho(S)$. Так как на линиях тока $S = \text{const}$, первая часть доказательства завершена.

Докажем теперь, что *безвихревое течение является геликоидальным, если скорость и плотность постоянны на любой линии тока в области течения.* Так как вдоль линии тока величина ρ постоянна, уравнение (35.1) сводится к условию $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Принимая во внимание потенциальность течения, мы видим, что потенциал φ является гармонической функцией; кроме того, на линиях тока $|\operatorname{grad}\varphi| = \text{const}$. Теперь мы можем сослаться на результат Гамеля [2]), согласно которому течение с описанными выше свойствами является геликоидальным.

---

[1]) Течение геликоидального типа представляет собой суперпозицию плоского вихря и параллельного переноса вдоль оси этого вихря с постоянной скоростью. Сформулированный результат принадлежит Джилбаргу [Gilbarg D., *Amer. J. Math.*, 71, 687 (1949)].

[2]) Hamel G., *Sitzgsber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.*, 5—20 (1937); см. также работу Прима [Prim R. C., *J. Rational Mech. Anal.*, 1, 425 (1952)], в которой результат Гамеля обобщается на более широкий класс течений.

Так как доказательство Гамеля является очень сложным, мы дадим здесь в качестве добавления элементарное доказательство этого факта в случае плоского течения. (Ясно, что геликоидальное течение в этом случае представляет собой течение с точечным вихрем.) Из уравнения (20.5), носящего чисто кинематический характер и справедливого поэтому для любого двумерного течения, вытекает следующая формула для кривизны линий тока:

$$\varkappa = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{1}{q}\frac{dq}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial n} = \rho\frac{dq}{d\psi}, \quad q = q(\psi),$$

где ψ — функция тока. Мы видим из этой формулы, что величина $\varkappa$ постоянна вдоль линии тока и, следовательно, линии тока являются окружностями. Более того, так как производная

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial n} = \frac{d\varkappa}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial n} = \rho q\frac{d\varkappa}{d\psi}$$

зависит только от ψ, линии тока представляют собой концентрические окружности.

Связь между теоремами 1 и 2 становится более ясной, если несколько ослабить доказываемые в них утверждения и сформулировать теоремы следующим образом.

В установившемся изэнтропическом течении с постоянной энергией вектор завихренности удовлетворяет соотношению $\omega \times \mathbf{v} \equiv 0$.

Если в области установившегося течения $\omega \times \mathbf{v} \equiv 0$, *то течение либо является изэнтропическим с постоянной энергией, либо имеет на линиях тока постоянную скорость.*

Рассмотрим теперь установившееся течение газа, уравнение состояния которого имеет вид

$$\rho = P(p)\,\Sigma(S). \tag{39.1}$$

Мы покажем, что либо S, либо H всегда можно считать постоянными во всей области течения. В самом деле, рассмотрим *сопряженное течение*:

$$\mathbf{v}^* = \frac{1}{m}\mathbf{v}, \quad \rho^* = m^2\rho, \quad S^* = \Sigma^{-1}\left[m^2\Sigma(S)\right], \tag{39.2}$$

где m — некоторая скалярная функция, *принимающая на линиях тока постоянные значения*. Нетрудно убедиться, что так определенное сопряженное течение удовлетворяет уравнениям движения (35.1) — (35.3). Легко видеть также, что

$$p^* = p, \quad I^* = \int\frac{dp^*}{\rho^*} = \frac{1}{m^2}I$$

и уравнение Бернулли имеет вид

$$\frac{1}{2}q^{*2}+I^*=H^*=m^{-2}H.$$

Таким образом, сопряженное течение имеет такую же картину линий тока, такое же распределение давления и те же числа Маха, что и исходное течение. Замечаем далее, что если в качестве m взять $m=1/\sqrt{\Sigma(S)}$, то энтропия сопряженного течения будет постоянной; если же положить $m=\sqrt{H}$, то энергия сопряженного течения будет постоянной (последнее утверждение остается в силе даже тогда, когда в области течения имеют место ударные волны). Таким образом, действительно всегда можно сделать либо величину S, либо величину H постоянной во всей области течения [1]).

В общем случае нельзя добиться, чтобы для сопряженного течения обе величины S и H были постоянными. Точнее, *сопряженное течение с постоянными S и H существуют в том и только в том случае, когда давление торможения p_0 постоянно во всей области течения.*

(По определению, давление торможения p_0 представляет собой величину давления, соответствующую $q=0$ в уравнении Бернулли, так что $I(p_0, S)=H$. Легко видеть, что величина p_0 постоянна на линиях тока.) Для доказательства сформулированного утверждения заметим, что если p_0 постоянно во всей области течения, то и p_0^* также постоянно в силу равенства этих давлений. Выбрав m так, чтобы величина S^* была постоянной, мы получим течение, для которого величина H^* также постоянна. Необходимость проверяется аналогично.

В силу уравнения Кроккo — Важоньи для течений с постоянными S^* и H^* имеет место соотношение

$$\boldsymbol{\omega}^*\times\mathbf{v}^*=0 \tag{39.3}$$

(уравнение Кроккo — Важоньи справедливо, конечно, и для сопряженного течения). Течения, удовлетворяющие условию (39.3), носят название *обобщенных течений Бельтрами*. Этот класс течений получается из течений Бельтрами ($\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=0$) заменой (39.2).

В заключение мы отметим, что рассмотрение сопряженных течений представляет интерес главным образом для вихревых движений и применяется только в случае установившегося течения газа, уравнение состояния которого записывается в виде (39.1).

---

[1]) Munk M., Prim R., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **33**, 137 (1947).

40. Диффузия завихренности. Основные кинематические уравнения, которым удовлетворяет распределение завихренности произвольного движения жидкости, были выведены в п. 17 и 25. Этими уравнениями являются уравнение Бельтрами

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v}+\frac{1}{\rho}\operatorname{rot}\mathbf{a} \tag{40.1}$$

и уравнение Кельвина

$$\frac{d}{dt}\oint_{\mathfrak{C}}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}=\oint_{\mathfrak{C}}\mathbf{a}\cdot d\mathbf{x}. \tag{40.2}$$

Применив уравнения (40.1) и (40.2) к случаю неизэнтропического движения идеального газа, мы получим несколько важных результатов.

Нам удобно записать уравнения движения в виде

$$\mathbf{a}=-\tau\operatorname{grad}p, \tag{40.3}$$

где $\tau=1/\rho$ — удельный объем газа. Применив к обеим частям уравнения (40.3) оператор rot и воспользовавшись термодинамическим тождеством

$$\tau\,dp=-T\,dS+dI, \tag{40.4}$$

мы получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\operatorname{grad}T\times\operatorname{grad}S.$$

Найденное представление для rot a позволяет записать уравнение (40.1) в виде уравнения завихренности Важоньи [1]):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}T\times\operatorname{grad}S. \tag{40.5}$$

При отсутствии второго члена в правой части этого уравнения из него следовали бы теоремы Гельмгольца. Этот член показывает, однако, что неоднородное поле энтропии вызывает диффузию завихренности и вследствие этого нарушается четкая картина переноса завихренности, устанавливаемая теоремами Гельмгольца.

---

[1]) Vazsonyi A., *Quart. Appl. Math.*, 3, 29 (1945).

Для *установившегося течения с постоянной энергией* в силу уравнения Крокко — Важоньи справедливо следующее соотношение:

$$\operatorname{grad} T \times \operatorname{grad} S = T^{-1} [\operatorname{grad} T \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})] = \\ = T\left[\mathbf{v}\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{T}\right) - \boldsymbol{\omega} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\right)\right].$$

Подставив полученное выражение для $\operatorname{grad} T \times \operatorname{grad} S$ в уравнение (40.5), мы получим после некоторых упрощений уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho T}\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{v}}{T}\right). \tag{40.6}$$

Для плоских течений из уравнения (40.6) следует, что на линиях тока

$$\frac{\omega}{\rho T} = \text{const}. \tag{40.7}$$

Этот результат был впервые получен Крокко [1]) для частного случая совершенного газа. Заметим, что для установившихся течений с постоянной энергией из равенства $\boldsymbol{\omega} = 0$ в некоторой точке P области течения в силу уравнения (40.7) вытекает равенство $\boldsymbol{\omega} = 0$ вдоль всей линии тока, проходящей через P [2]).

Непосредственные вычисления, в основе которых лежит уравнение Бельтрами, показывают, что для произвольной скалярной, векторной или тензорной функции F справедливо следующее тождество [3]):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} F\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \frac{dF}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} F. \tag{40.8}$$

Соотношение (40.8) является кинематическим эквивалентом интересной формулы для завихренности, найденной Эртелем [4]). Если в качестве F взять энтропию идеального газа,

---

[1]) Crocco L., *Z. angew. Math. Mech.*, **17**, 1 (1937). Крокко записывал этот результат в виде $\omega/p = \text{const}$ на линиях тока.

[2]) Полезно сравнить полученный результат с теоремой Лагранжа — Коши (см. п. 17).

[3]) Truesdell C., *Z. angew. Math. Phys.*, **2**, 1 (1951); см. также [27], § 79, 98, 99.

[4]) Ertel H., *Naturwiss.*, **30**, 543 (1942); *Meteor. Z.*, **59**, 277, 385 (1942); *Phys. Z.*, **43**, 526 (1942).

то правая часть тождества (40.8) обратится в нуль и мы получим, что для фиксированной частицы жидкости

$$\frac{\omega}{\rho} \cdot \operatorname{grad} S = \text{const}.$$

Этот результат был установлен Трусделлом; в работах, на которые мы только что ссылались, можно найти другие интересные следствия формулы (40.8).

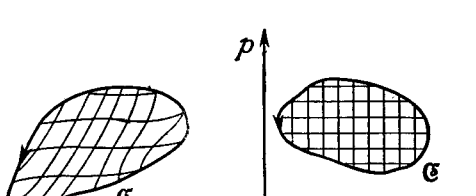


Рис. 5. Геометрическая интерпретация теоремы Бьёркнеса о циркуляции.

Рассмотрим теперь следствия выведенного выше уравнения Кельвина (40.2). Воспользовавшись уравнением движения в форме (40.3), мы получим, что

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathfrak{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = -\oint_{\mathfrak{C}} \tau \, dp;$$

последний интеграл, как легко видеть, дает площадь ограниченной образом кривой $\mathfrak{C}$ области в плоскости p, τ (см. рис. 5). Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathfrak{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \pm \mathscr{S},$$

где $\mathscr{S}$ — площадь указанной области плоскости p, τ. Так как в случае баротропного течения образ кривой $\mathfrak{C}$ представляет собой однозначную функцию $p = p(\tau)$, отсюда следует, в частности, теорема Кельвина о циркуляции, установленная в п. 25. Другую интерпретацию величины $\oint \tau \, dp$ можно получить, если натянуть на кривую $\mathfrak{C}$ ориентированную поверхность $\mathfrak{S}$ и нанести на этой поверхности линии

$p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $\tau=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Обращаясь снова к рис. 5, мы видим, что

$$\frac{d}{dt}\oint_{\mathfrak{C}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = \pm \text{ Число ячеек } (p, \tau) \text{ на } \mathfrak{S}.$$

Этот изящный результат носит название теоремы Бьёркнеса [1]). Вместо ячеек (p, τ) можно было бы рассматривать ячейки (T, S), так как в силу формулы (40.4)

$$\oint \tau\, dp = -\oint T\, ds.$$

Заметим в заключение, что нетрудно проверить справедливость теоремы Бьёркнеса и в том случае, когда в области течения допускаются слабые разрывы (см. п. 51).

§ 3. Специальные методы исследования двумерных течений

41. Уравнения движения в естественных координатах. В п. 20 были выведены уравнения движения в естественных координатах для установившегося плоского течения, а именно уравнения

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad \rho q^2 \varkappa = -\frac{\partial p}{\partial n}, \tag{41.1}$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho q) + K\rho q = 0. \tag{41.2}$$

Так как на линиях тока $dp = c^2 d\rho$, то уравнение неразрывности (41.2) можно записать в несколько другом виде:

$$\frac{\partial q}{\partial s} = \frac{Kq}{M^2 - 1}; \tag{41.3}$$

для этого надо воспользоваться первым из уравнений (41.1). В частном случае безвихревого движения из уравнений (41.1) можно при помощи интеграла Бернулли (37.2) исключить давление, в результате чего получим

$$\frac{\partial q}{\partial s} = \frac{Kq}{M^2 - 1}, \quad \frac{\partial q}{\partial n} = \varkappa q. \tag{41.4}$$

[1]) Bjerknes V., *Vidensk. Skr.*, № 5 (1898); *Kgl. svenska Vet. Handl.* (2), **31**, № 4 (1898).

42. Функция тока. Для несжимаемой жидкости функция тока была введена в п. 19. Высказанные там соображения можно использовать и в случае сжимаемой жидкости, если предположить, что течение является *установившимся*. Уравнение неразрывности установившегося плоского течения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0.$$

Легко видеть отсюда, что функцию тока $\psi=\psi(x, y)$ можно определить следующим образом:

$$\rho u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \rho v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{42.1}$$

При таком определении линии $\psi=\text{const}$ являются, очевидно, линиями тока.

Воспользовавшись уравнениями (17.8) и (42.1), мы сразу получаем уравнение

$$\psi_{xx}+\psi_{yy}-\mathbf{v}^*\cdot\operatorname{grad}\rho=-\rho\omega, \tag{42.2}$$

где $\mathbf{v}^*$ — вектор с компонентами $(-v, u)$. Этому уравнению относительно ψ можно придать более совершенную форму, преобразовав член $\mathbf{v}^*\cdot\operatorname{grad}\rho$. Преобразования носят стандартный характер, однако в некоторых современных работах они излагаются некорректно, поэтому мы приводим их ниже. Начнем с очевидных соотношений:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=\omega\mathbf{v}^*,\\&\operatorname{grad}q^2=\rho^{-2}[\operatorname{grad}(\rho^2q^2)-2\rho g^2\operatorname{grad}\rho],\\&\operatorname{grad}p=c^2\operatorname{grad}\rho+B\operatorname{grad}S,\end{aligned}\right\} \tag{42.3}$$

где $B=(\partial p/\partial S)_\rho$. Подставив выражения (42.3) в уравнение (38.1) и разрешив его относительно $\operatorname{grad}\rho$, получим, что

$$\operatorname{grad}\rho=(\rho q^2-\rho c^2)^{-1}[\rho^2\omega\mathbf{v}^*+\rho B\operatorname{grad}S+\operatorname{grad}{}^1/_2(\rho^2q^2)].$$

Наконец, подставив последнее выражение в уравнение (42.2) и заметив, что

$$\operatorname{grad}(\rho^2q^2)=\operatorname{grad}(\psi_x^2+\psi_y^2),$$
$$\operatorname{grad}S=\rho\mathbf{v}^*S',$$

где $S' = dS/d\psi$, мы после некоторых упрощений придем к уравнению

$$(c^2-u^2)\psi_{xx}-2uv\psi_{xy}+(c^2-v^2)\psi_{yy}=-\rho(c^2\omega+q^2BS'). \quad (42.4)$$

Это и есть искомое уравнение для функции тока. (Этот вывод упрощается в случае изэнтропического течения и становится совсем простым, когда течение является одновременно изэнтропическим и безвихревым.) Член, стоящий в правой части уравнения (42.4), можно связать с уравнением Кронко — Важоньи, которое для плоского течения имеет вид

$$\omega = \rho(TS' - H'), \quad (42.5)$$

где $S = S(\psi)$, а

$$H = H(\psi) = \frac{1}{2}q^2 + I(\rho, S).$$

Если $S(\psi)$ и $H(\psi)$ — известные функции, то уравнение (42.4) можно рассматривать как уравнение второго порядка с частными производными относительно ψ.

Смысл уравнения (42.4) станет более понятным, если рассмотреть частный случай совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями. В этом случае

$$B = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho = \frac{p}{c_v}$$

(см. п. 35), и после несложных вычислений мы получим

$$(d^2-\psi_y^2)\psi_{xx}+2\psi_x\psi_y\psi_{xy}+(d^2-\psi_x^2)\psi_{yy}=$$
$$=d^4\left[\left(\frac{1}{\gamma-1}+\frac{1}{2}M^2\right)\frac{d\log H}{d\psi}-\left(\frac{1}{\gamma-1}+M^2\right)\frac{dS/c_p}{d\psi}\right], \quad (42.6)$$

где $d = \rho c$ — акустический импеданс. Уравнению (42.6) можно придать более простую форму, которая одновременно является более удобной для численного расчета течений. Рассмотрим с этой целью *сопряженное течение* (см. п. 39), определенное формулами

$$\mathbf{v}^* = \rho_0 c_0 \mathbf{v}, \quad \rho^* = \rho/(\rho_0 c_0)^2, \quad p^* = p.$$

Функция тока Ψ этого течения удовлетворяет соотношению $d\Psi = d\psi/\rho_0 c_0$; следовательно,

$$|\operatorname{grad}\Psi| = \frac{\rho q}{\rho_0 c_0}. \quad (42.7)$$

Таким образом, зная только функцию тока Ψ, *можно при помощи обычных газодинамических таблиц (или простых формул) получить значения различных параметров исходного течения*: M, p/p_0, ρ/ρ_0 и т. д. Функция тока Ψ удовлетворяет, очевидно, уравнению (42.6) для сопряженного течения. Мы имеем

$$d^* = \frac{d}{d_0}, \quad M^* = M$$

и

$$H^* = (\rho_0 c_0)^2 H = \text{const} \cdot p_0^2,$$

$$\frac{S^*}{c_v} = \log \frac{p\rho^{-\gamma}}{(\rho_0 c_0)^{-2\gamma}} = \log p_0^{1+\gamma} + \text{const}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (42.6), получаем

$$\left[\left(\frac{d}{d_0}\right)^2 - \Psi_y^2\right]\Psi_{xx} + 2\Psi_x\Psi_y\Psi_{xy} + \left[\left(\frac{d}{d_0}\right)^2 - \Psi_x^2\right]\Psi_{yy} =$$

$$= (1 - M^2)\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{d_0}\right)^4 \frac{d \log p_0}{d\Psi}. \quad (42.8)$$

Уравнение (42.8) является тем самым упрощением уравнения (42.6), о котором мы говорили выше. Значительное преимущество уравнения (42.8) обусловливается тем, что его коэффициенты легко выразить непосредственно через $\operatorname{grad}\Psi$. Добавим, что в уравнении (42.8) функции S' и H' входят только в величину $\log p_0$. В табл. 2 приведены численные значения коэффициентов уравнения (42.8); более удобным оказывается представить все величины в виде функций от числа Маха, хотя на самом деле независимой переменной является величина $|\operatorname{grad}\Psi|$. Следует отметить, что максимум величины $|\operatorname{grad}\Psi|$ равен 0,579 и что каждое значение $|\operatorname{grad}\Psi|$, меньшее 0,579, встречается в таблице дважды. Этот факт становится понятным, если вспомнить, что величина $|\operatorname{grad}\Psi|$ представляет собой поток массы ρq. Связанная с этим неопределенность в выборе значений коэффициентов (42.8) не может вызвать недоразумений, так как в зависимости от характера исследуемой задачи мы пользуемся либо частью таблицы, относящейся к дозвуковому режиму, либо частью, относящейся к сверхзвуковому режиму.

Таблица 2

Коэффициенты уравнения (42.8)

Дозвуковое течение				Сверхзвуковое течение			
M	$\lvert \operatorname{grad} \Psi \rvert$	$(d/d_0)^2$	$\mathcal{A}$	M	$\lvert \operatorname{grad} \Psi \rvert$	$(d/d_0)^2$	$\mathcal{A}$
0,0	0	1	0,714	1,1	0,574	0,272	—0,011
0,1	0,099	0,988	0,690	1,2	0,562	0,219	—0,015
0,2	0,195	0,953	0,623	1,3	0,543	0,174	—0,015
0,3	0,284	0,898	0,524	1,4	0,519	0,137	—0,013
0,4	0,364	0,828	0,411	1,5	0,492	0,108	—0,010
0,5	0,432	0,746	0,299	1,7	0,432	0,065	—0,006
0,6	0,487	0,659	0,199	2,0	0,343	0,029	—0,002
0,7	0,529	0,571	0,119	3,5	0,085	0,001	—0,000
0,8	0,557	0,485	0,061	5,0	0,023	0,000	—0,000
0,9	0,574	0,406	0,022	10,0	0,011	0,000	—0,000
1,0	0,579	0,335	0	∞	0	0	0

Замечание. В этой таблице приняты следующие обозначения: $\lvert \operatorname{grad} \Psi \rvert = \rho q/\rho_0 c_0$, $d = \rho c$, $\mathcal{A} = (1 - M^2)\frac{1}{\gamma}\left(\frac{d}{d_0}\right)^4$. Вычисления выполнены для $\gamma = 1{,}40$.

Для течений с постоянной энергией уравнение, эквивалентное уравнению (42.8), было получено в работе Крокко [1]). Приведенные здесь результаты представляют собой обобщение и упрощение рассуждений, содержащихся в этой работе. В заключение заметим, что введение функции тока Ψ сопряженного течения имеет смысл только в случае совершенного газа. Отметим также, что функция тока Ψ претерпевает разрыв на фронте ударной волны, тогда как исходная функция тока ψ остается непрерывной.

Изэнтропическое безвихревое течение. В этом случае уравнение (42.4) принимает простую и изящную форму, а именно

$$(c^2 - u^2)\psi_{xx} - 2uv\psi_{xy} + (c^2 - v^2)\psi_{yy} = 0. \qquad (42.9)$$

Уравнение (42.9) можно получить при желании непосредственно из уравнения (42.2). Интересно, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению с такими же коэффициентами (см. п. 45).

[1]) Crocco L., *Z. angew. Math. und Mech.*, **17**, 1 (1937).

В случае совершенного газа при расчетах обычно используется несколько более удобное для этих целей уравнение, которому удовлетворяет функция тока сопряженного течения.

Осесимметричное течение. Исследование в этом случае полностью аналогично проведенному выше. Функцию тока можно определить следующим образом:

$$\rho u = \frac{1}{y}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{1}{y}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Путем выкладок, аналогичных тем, которые привели к уравнению (42.4), найдем, что функция ψ удовлетворяет уравнению

$$(c^2 - u^2)\psi_{xx} - 2uv\psi_{xy} + (c^2 - v^2)\psi_{yy} - c^2\frac{\psi_y}{y} = \\ = -\rho y(c^2\omega + yq^2BS').$$

Член, стоящий в правой части уравнения, получается применением формулы $\omega = y\rho(TS' - H')$. Для безвихревого течения правая часть обращается в нуль. В этом случае потенциал скорости удовлетворяет уравнению, мало отличающемуся от уравнения для функции тока:

$$(c^2 - u^2)\varphi_{xx} - 2uv\varphi_{xy} + (c^2 - v^2)\varphi_{yy} + c^2\frac{\varphi_y}{y} = 0.$$

Заметим в добавление, что пара функций тока для пространственных течений была введена Гизе [1]).

43. Метод годографа. Несмотря на относительную простоту уравнений (42.9) или (45.4), их применение приводит к серьезным затруднениям, обусловленным нелинейностью этих уравнений. Моленброк [2]) в 1890 г. заметил, что дифференциальные уравнения движения становятся линейными, если перейти к плоскости годографа, где роль независимых переменных играют компоненты скорости u, v (или q и ϑ). Этот метод был использован Чаплыгиным в его знаменитой работе о газовых струях [3]) и стал затем классическим мето-

[1]) Гизе Д., сб. *Механика*, №1 (17), 86 (1953).

[2]) Molenbroeck P., *Arch. Math. Phys.*, 9, 157 (1890).

[3]) Чаплыгин С. А., О газовых струях (диссертация), собр. соч., т. II, Гостехиздат, М. — Л., 1948 (имеется отдельное издание, 1949).

дом исследований по газовой динамике, применявшимся многими учеными[1]). Мы ограничимся здесь изложением основ метода годографа, не касаясь широкого круга приложений преобразования годографа.

Как мы уже видели, потенциал скорости и функция тока установившегося безвихревого течения удовлетворяют соотношениям

$$u = \varphi_x = \frac{1}{\rho}\psi_y, \quad v = \varphi_y = -\frac{1}{\rho}\psi_x. \tag{43.1}$$

Нас интересуют те уравнения, которым удовлетворяют функции φ и ψ, если за независимые переменные взять модуль скорости q и угол наклона вектора скорости ϑ. Предлагаемый ниже вывод этих уравнений является, вероятно, наиболее простым. Заметим прежде всего, что

$$d\varphi + i\frac{d\psi}{\rho} = (u\,dx + v\,dy) + i(-v\,dx + u\,dy) =$$
$$= (u - iv)(dx + i\,dy) = qe^{-i\vartheta}dz;$$

здесь $z = x + iy$. Рассматривая теперь q и ϑ как независимые переменные, получаем

$$z_q = e^{i\vartheta}\left(\frac{\varphi_q}{q} + i\frac{\psi_q}{\rho q}\right), \quad z_\vartheta = e^{i\vartheta}\left(\frac{\varphi_\vartheta}{q} + i\frac{\psi_\vartheta}{\rho q}\right).$$

Используя равенство $z_{q\vartheta} = z_{\vartheta q}$, после несложных преобразований находим

$$-\frac{\psi_q}{\rho q} + i\frac{\varphi_q}{q} = -\frac{\varphi_\vartheta}{q^2} + i\psi_\vartheta\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho q}\right).$$

Приравнивая в этом уравнении действительные и мнимые части по отдельности и применяя уравнение Бернулли (37.9), приходим к так называемым уравнениям *годографа*:

$$\varphi_q = -\frac{1 - M^2}{\rho q}\psi_\vartheta, \quad \varphi_\vartheta = \frac{q}{\rho}\psi_q. \tag{43.2}$$

[1]) Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в следующих работах: Bers L., *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 79 (1954); Germain P., *Comm. Pure Appl. Math.*, 1, 117 (1954); Lighthill M. J., [33], гл. 7; Schiffer M., данная Энциклопедия, т. IX; см. также Cherry T., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, *A*, 245, 583 (1953); Schäfer M., *J. Rational Mech. Anal.*, 2, 383 (1953) и работы, цитированные далее в этом и следующем пунктах.

Решение уравнений (43.2) соответствует течению в физической плоскости только в том случае, когда якобиан перехода от переменных q, ϑ к переменным x, y не равен нулю. Поэтому представляет интерес найти выражение этого якобиана в переменных плоскости годографа, т. е. величину

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(q, \vartheta)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q, \vartheta)} = -\frac{1}{\rho^2 q^3}\left[\rho^2 \varphi_\vartheta^2 + (1 - M^2)\,\psi_\vartheta^2\right]. \quad (43.3)$$

Заметим, что в случае дозвуковых течений этот якобиан отличен от нуля всюду, кроме, быть может, некоторого множества изолированных точек. Точнее говоря, введение переменных годографа основано на предположении независимости q и ϑ, а не x и y. Решения, для которых эти переменные являются зависимыми, т. е.

$$\frac{\partial(q, \vartheta)}{\partial(x, y)} = 0,$$

не могут быть получены методом годографа, так как образ области соответствующего течения на плоскости u, v представляет собой некоторую кривую. Теорию таких течений читатель сможет найти в IX томе этой Энциклопедии в статье Шиффера. Дальнейшие подробности относительно особых точек преобразования годографа можно найти в книге Куранта и Фридрихса ([21], § 30, 105).

Из уравнений (43.2) легко получить уравнения в плоскости годографа, содержащие только φ или только ψ. Так, например, исключив функцию φ и введя новую переменную

$$\sigma = \int \rho q^{-1}\, dq,$$

мы получим

$$\psi_{\sigma\sigma} + K(\sigma)\,\psi_{\vartheta\vartheta} = 0, \quad K(\sigma) = \rho^{-2}(1 - M^2). \quad (43.4)$$

Это уравнение служит отправной точкой для широкого круга исследований по теории дозвуковых и околозвуковых течений. При изучении дозвуковых течений иногда применяется другая независимая переменная:

$$r = \int \frac{\sqrt{1 - M^2}}{q}\, dq;$$

уравнение для функции тока принимает при этом следующий вид [1]):

$$\psi_{rr}+\psi_{\vartheta\vartheta}+(\log k)_r\psi_r=0, \quad k=\rho^{-1}\sqrt{1-M^2}.$$

Следует упомянуть также уравнения годографа, которые получаются в результате преобразования Лежандра:

$$\Phi=ux+vy-\varphi, \quad \Psi=\rho uy-\rho vx-\psi.$$

В силу очевидных соотношений

$$x=\Phi_u=-\Psi_{\rho v}, \quad y=\Phi_v=\Psi_{\rho u}$$

имеем

$$\Psi_q=\frac{\rho}{q}(1-M^2)\Phi_\vartheta. \quad \Psi_\vartheta=-\rho q\Phi_q. \tag{43.5}$$

Эти уравнения эквивалентны полученным выше уравнениям (43.2).

Как заметил Крокко [2]), систему уравнений годографа (43.2) и (43.5) можно записать в изящной симметричной форме, если одновременно с переменной q ввести другую независимую переменную $Q=\rho q$. Действительно, в переменных q, Q и ϑ мы имеем

$$\varphi_\vartheta=-\frac{1}{Q}\psi_{q^{-1}}, \quad \psi_\vartheta=\frac{1}{q}\varphi_{Q^{-1}} \tag{43.6}$$

и аналогично

$$\Phi_\vartheta=q\Psi_Q, \quad \Psi_\vartheta=-Q\Phi_q. \tag{43.7}$$

44. Частные решения. По-видимому, целесообразно рассмотреть здесь некоторые приложения уравнений годографа.

1. *Приближенный метод.* Для дозвукового течения уравнения (43.2) можно записать в виде

$$\varphi_r=-k\psi_\vartheta, \quad \varphi_\vartheta=k\psi_r, \tag{44.1}$$

где

$$r=\int_{q_0}^{q}\frac{\sqrt{1-M^2}}{q}\,dq, \quad k=\frac{\sqrt{1-M^2}}{\rho}, \tag{44.2}$$

[1]) Нетрудно получить аналогичное уравнение и для сверхзвуковых течений. Дальнейшее преобразование уравнений годографа основано на обобщении преобразования Беклунда из теории поверхностей; см. статью Лёвнера [Loewner C., *J. d'Anal. Math.*, **2**, 219 (1953)].

[2]) Crocco L., NACA Tech. Note 2432, 1951.

а q_0 — некоторое характерное значение скорости. Заметим теперь, что функция $k = k(r)$ мало меняется при изменении числа Маха в сравнительно больших пределах; чтобы проверить это, можно воспользоваться разложением (37.10) или табл. 1. Действительно, в случае совершенного газа изменение k не превышает 8% в широком диапазоне чисел Маха от 0 до $^2/_3$. Поэтому для течений с такими скоростями мы можем упростить уравнения (44.1), положив $k = \text{const}$; ошибка при этом будет незначительной. В случае течений с более высокими скоростями мы также можем положить $k = \text{const}$, предполагая, что *изменение* числа Маха в поле течения не слишком велико.

При предположении $k = \text{const}$ уравнения (44.1) сводятся к уравнениям Коши — Римана теории аналитических функций, в силу чего функция

$$\varphi + ik\psi$$

является аналитической функцией от $r - i\vartheta$. При малых значениях числа Маха мы имеем приближенно

$$r \approx \log \frac{q}{q_0}, \quad r - i\vartheta \approx \log \frac{1}{q_0}(u - iv).$$

Это наводит на мысль обобщить метод, применяющийся при исследовании течений несжимаемой жидкости, на случай течений сжимаемой жидкости. Предположим, что $w(\zeta)$ есть комплексный потенциал некоторого безвихревого течения несжимаемой жидкости в плоскости ζ. Тогда ясно, что параметрические уравнения

$$\varphi + ik\psi = \text{const} \cdot w(\zeta), \quad r - i\vartheta = \log dw/d\zeta \tag{44.3}$$

определяют течение сжимаемой жидкости (для этого течения, конечно, выполняется условие $k = \text{const}$). При малых числах Маха таким образом определенное течение будет очень мало отличаться от течения несжимаемой жидкости; при больших числах Маха различие между течениями станет значительным, однако можно принять гипотезу, что картина линий тока течения сжимаемой жидкости будет, вообще говоря, подобна картине линий тока исходного течения несжимаемой жидкости. Точное соответствие между точками плоскостей z и ζ определяется формулой

$$z = \int^{\zeta} e^{i\vartheta}\left(\frac{d\varphi}{q} + i\,\frac{d\psi}{\rho q}\right). \tag{44.4}$$

Указанное интегрирование представляет, конечно, серьезные затруднения, и разумнее поэтому исходить из картины течения несжимаемой жидкости, изменяя при этом величину скорости в соответствии со второй формулой (44.3), т. е. в соответствии с формулой

$$r(q) = \log q_{\text{несж.}}$$

На этой идее, в частности, основана формула Кармана — Цяня [1]) для определения величины скорости течения газа по скорости течения несжимаемой жидкости. В качестве уравнения состояния газа выбирается при этом уравнение $p = a/\rho + b$, для которого $k = \text{const}$ и несколько упрощается интегрирование в формуле (44.2). Воспользовавшись истинным уравнением состояния рассматриваемого газа, можно было бы получить выражение для поправки скорости более точное, чем формула Кармана.

[Насколько известно автору, таблицы функции $r(q)$ для совершенного газа не составлены, однако в таблицах Гаррика и Каплана [2]) можно найти значения близкого интеграла

$$\sigma = \int \rho q^{-1}\, dq$$

в зависимости от числа Маха M. При использовании этой величины приближенная формула для определения скорости газа имеет вид

$$\sigma(M) = \sigma(M_0) + \log q_{\text{несж.}};$$

предполагается, конечно, как и ранее, что течение несжимаемой жидкости выбрано так, чтобы в некоторой заранее выбранной точке величина скорости этого течения была равна 1.]

Другие формулы поправки скорости для дозвуковых течений сжимаемой жидкости были получены Гарриком, Капланом и Ринглебом (см. [26], стр. 340). При выводе этих формул использовались рассуждения, отличные от приведенных выше, но их применение приводит почти к тем же результатам; по-видимому, это объясняется далеко идущей аналогией между уравнениями (44.1) и уравнениями Коши — Римана.

2. *Спиральное течение.* Уравнение (43.4) имеет два простых частных решения, а именно

$$\psi = \vartheta \quad \text{и} \quad \psi = \sigma = \int \rho q^{-1}\, dq.$$

Первое из них представляет собой радиальное течение, а второе — круговое течение (см. Курант и Фридрихс [21], стр. 244—245). Линейная комбинация этих решений, $a\vartheta + b\sigma$, определяет, следовательно, *спиральное течение.*

3. *Решения Рингледа и Менуэлла.* Найдем общий вид решения уравнений (43.2), которое можно представить в следующей форме:

$$\psi = f(q)\sin\vartheta, \quad \varphi = h(q)\cos\vartheta.$$

[1]) Karman T., *J. Aeronaut. Sci.*, 8, 337 (1941).
[2]) Garrick I., Kaplan C., NACA Rep. 789, 1944.

Легко получить, что

$$f = q^{-1}\left[a + b\int_0^q \rho q\, dq\right], \quad h = -\rho^{-1} q f',$$

где a и b — постоянные. Выбирая, в частности, $a = 1$, $b = 0$, приходим к известному решению Ринглеба [1]). Менуэлл [2]) указал другой интересный пример, а именно

$$f = q^{-1}\int_a^q \rho q\, dq, \quad h = \rho^{-1} f - q,$$

где a — постоянная. Формула преобразования к физической плоскости имеет вид

$$z = \int e^{i\vartheta}\left(\frac{d\varphi}{q} + i\,\frac{d\psi}{\rho q}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(2i\vartheta - e^{2i\vartheta}) + e^{i\vartheta}\left[\cos\vartheta \int_a^q \frac{dh}{q} + i\sin\vartheta \int_a^q \frac{df}{\rho q}\right]. \quad (44.5)$$

Вычисления значительно упрощаются, если интегрирование по ϑ выполнить при $q = a$, а интегрирование по q — при фиксированном ϑ. Легко видеть, что в физической плоскости

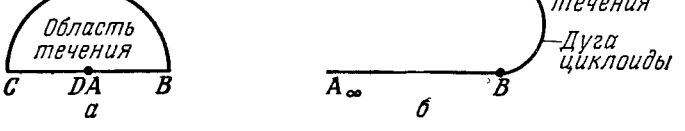


Рис. 6. Область течения Менуэлла.

а — в плоскости годографа, *б* — в физической плоскости.

образом области $0 \leqslant q \leqslant a$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ в плоскости годографа является область, внешняя по отношению к полубесконечному телу, показанному на рис. 6. Заметим, что функция тока $\psi = f\sin\vartheta$ стремится к нулю при приближении

[1]) Ringleb F., *Z. angew. Math. Mech.*, 20, 185 (1940). См. также работу Темпла и Ярвуда [Temple G., Yarwood J., *Aero. Res. Comm. R and M*, 2077 (1942)].

[2]) Manwell A., *J. Math. Phys.*, 34, 113 (1955).

к границе, которая, следовательно, является линией тока. Более того, эта граница не зависит от величины a. Таким образом, решение Менуэлла дает нам класс обтеканий с различными числами Маха *фиксированного* полубесконечного тела.

Для дозвуковых течений, т. е. течений, для которых величина a меньше критической скорости, якобиан (43.3) не обращается в нуль и преобразование от (q, ϑ) к (x, y) является взаимно однозначным. В противном случае при a, большем критической скорости, физического течения, соответствующего решению Менуэлла, не существует. В этом проще всего убедиться, заметив, что одной и той же точке линии тока $\psi = 0$ соответствуют две различные точки плоскости годографа. В самом деле, из уравнения (44.5) следует, что

$$\left.\frac{dx}{dq}\right|_{\psi=0} = \frac{1}{q}\frac{dh}{dq} = \frac{f}{\rho q}(M^2 - 1).$$

Легко видеть отсюда, что при переходе через скорость звука величина dx/dq меняет знак. Заметим, что при a, меньшем критической скорости, течение Менуэлла (точно так же, как и течение Ринглеба) можно продолжать через границу. При этом мы получаем пример околозвукового течения.

Несостоятельность примера Менуэлла для потоков со сверхзвуковыми скоростями связана, вероятно, с теоремой Никольского и Таганова (см. п. 52), которая утверждает, что не может существовать околозвукового течения с локальной сверхзвуковой зоной, примыкающей к прямолинейному участку границы.

4. *Решения Чаплыгина.* Найдем общий вид решения уравнений (43.2), имеющего следующую форму:

$$\psi = f(q)\,F(\vartheta), \quad \varphi = h(q)\,H(\vartheta).$$

Подставив первое из этих выражений в уравнение (43.4), мы найдем, что $F(\vartheta) = e^{in\vartheta}$, где n — произвольное действительное число, а функция f удовлетворяет следующему уравнению:

$$f_{\sigma\sigma} - n^2 K(\sigma) f = 0.$$

Это уравнение служит отправной точкой для многих современных работ, посвященных точным решениям [1]).

[1]) Lighthill M. [33], гл. 7; Crocco L., NACA Tech. Note 2432, 1951; Ghaffari A., The Hodograph method in gas dynamics, Univ. of Teheran Publ. № 85, 1950.

5. *Решения Крокко.* Комплексный потенциал скоростей

$$w = (\log q - i\vartheta)^n = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} (\log q)^k (-i\vartheta)^{n-k}$$

определяет, очевидно, некоторое движение несжимаемой жидкости. Крокко [1]) указал на модификацию этого выражения, которая позволяет удовлетворить уравнениям годографа для течения сжимаемой жидкости. Здесь удобно будет ввести в рассмотрение переменную Q и воспользоваться уравнениями годографа в форме (43.6). Мы полагаем

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \sum_{k=0}^{n} c_{nk} L(q, k)(-i\vartheta)^{n-k}, \\ \psi &= i \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \tilde{L}(q, k)(-i\vartheta)^{n-k}, \end{aligned}\right\} \qquad (44.6)$$

где функции L и $\tilde{L}$ определены следующим образом:

$$L(q, k) = k! \underbrace{\int^{Q^{-1}} q\, dQ^{-1} \int^{q^{-1}} Q\, dq^{-1} \ldots}_{k \text{ раз}}, \quad L(q, 0) = 1,$$

$$\tilde{L}(q, k) = k! \int^{q^{-1}} Q\, dq^{-1} \int^{Q^{-1}} q\, dQ^{-1} \ldots, \quad \tilde{L}(q, 0) = 1$$

(повторные интегралы вычисляются здесь при одном и том же фиксированном нижнем пределе).

Очевидно, что

$$\frac{dL}{dQ^{-1}} = kq\tilde{L}(q, k-1), \quad \frac{d\tilde{L}}{dq^{-1}} = kQL(q, k-1).$$

Теперь нетрудно проверить, что формулы (44.6) дают решение уравнений (43.6). Взяв только действительные или только мнимые части выражений (44.6), мы получим решения в действительной области. В работе, на которую мы ссылались выше, Крокко показывает, как при помощи точных решений (44.6) можно построить течения в физической плоскости.

[1]) Crocco L., NACA Tech. Note, 2432, 1951.

§ 4. Дозвуковое потенциальное течение

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные теоретические вопросы, касающиеся дозвукового потенциального течения идеального газа.

45. Общие принципы. Основными уравнениями установившегося потенциального течения является уравнение Бернулли

$$\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}=\text{const} \tag{45.1}$$

(где функция $p=f(\rho)$ считается заданной) и уравнение неразрывности. Так как $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi$, уравнение неразрывности можно записать в виде $\operatorname{div}(\rho\operatorname{grad}\varphi)=0$, или, в тензорных обозначениях,

$$(\rho\varphi_{,i})_{,i}=0, \quad v^i=\varphi_{,i}. \tag{45.2}$$

Если воспользоваться выражениями для $\rho_{,i}$, полученными из уравнения (45.1), то уравнение (45.2) можно записать так:

$$c^2\nabla^2\varphi-v^iv^j\varphi_{,ji}=0. \tag{45.3}$$

Это широко известное дифференциальное уравнение справедливо, конечно, независимо от того, является ли течение дозвуковым. В случае плоского течения уравнение (45.3) записывается в следующем виде:

$$(c^2-u^2)\varphi_{xx}-2uv\varphi_{xy}+(c^2-v^2)\varphi_{yy}=0. \tag{45.4}$$

Помимо выписанного выше уравнения (45.2) [или эквивалентного ему уравнения (45.3)], для потенциала имеет место также следующий закон сохранения:

$$p_{v^iv^j}\varphi_{,ji}=0,$$

в справедливости которого мы убедимся ниже при рассмотрении одной вариационной задачи (п. 47, добавление).

Математически уравнение (45.3) представляет собой квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно потенциала скорости. Тип этого уравнения определяется свойствами квадратичной формы $c^2\xi_i\xi_i-v^iv^j\xi_i\xi_j$, где ξ — произвольный вектор с действительными компонентами. Начиная с этого места, мы ограничимся рассмотрением дозвуковых течений. При этом предположении уравнение (45.3)

является *эллиптическим* в силу очевидного неравенства

$$c^2\xi_i\xi_i - v^iv^j\xi_i\xi_j > (c^2 - q^2)\,|\,\xi\,|^2. \qquad (45.5)$$

Изучение уравнения (45.3) представляет серьезные математические трудности, так как коэффициенты c^2 и v^iv^j зависят от поля скоростей; тем не менее удается установить ряд важных результатов.

1. *Максимум модуля скорости не может достигаться во внутренней точке области течения.* Для того чтобы убедиться в этом, продифференцируем уравнение (45.3) по x и получим уравнение

$$c^2\nabla^2 u - v^iv^j u_{,\,ij} + D^i u_{,\,i} = 0; \qquad (45.6)$$

здесь u — проекция скорости на ось x, а D^i — некоторые коэффициенты, точное значение которых нам не понадобится. В силу условия (45.5) уравнение (45.6) относительно u является эллиптическим для любого дозвукового течения. Из общей теоремы Хопфа [1]) следует сразу, что отличное от постоянной решение u эллиптического дифференциального уравнения не может принимать максимального значения во внутренней точке. По тем же причинам это имеет место и для функций v и w. Справедливость доказываемого утверждения следует теперь из рассуждений, принадлежащих Кирхгофу (см., например, [8], § 37).

2. *Обтекание препятствия; поведение потока на бесконечности.* Для определенности мы рассмотрим однородный на бесконечности плоский поток, набегающий на неподвижное тело (рассматривается непрерывное обтекание). Так как течение предполагается дозвуковым, число Маха M_∞ меньше 1. Обозначим через $\mathbf{U}$ скорость потока на бесконечности, направленную (для простоты) вдоль оси x. Асимптотическое поведение такого течения при $\mathbf{x} \to \infty$ определяется следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \mathbf{U}\cdot\mathbf{x} + C + \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}(\beta\operatorname{tg}\theta) + O(r^{-1+\varepsilon}),\\ \mathbf{v} &= \mathbf{U} + \frac{\rho\Gamma}{2\pi}\,\frac{(-y,\ x)}{x^2+\beta^2y^2} + O(r^{-2+\varepsilon}). \end{aligned}\right\} \qquad (45.7)$$

[1]) Hopf E., *Sitzgsber. preuss. Akad. Wiss.*, 147 (1927).

В этих формулах (r, θ) — полярные координаты точки на плоскости, $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$, Γ — циркуляция, а ε — любое сколь угодно малое *положительное* число. Если в области течения имеются источники общей интенсивности Δ, расположенные в конечной части плоскости, то в правую часть первой формулы (45.7) нужно ввести дополнительный член $(\Delta/4\pi\beta)\log(x^2+\beta^2y^2)$ и соответственно изменить вторую формулу (45.7). В том случае, когда соотношение между давлением и плотностью выражается аналитической функцией, можно получить полное разложение для φ, а именно

$$\varphi = \mathbf{U}\cdot\mathbf{x} + \frac{\Delta}{2\pi\beta}\log r + \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}(\beta\operatorname{tg}\theta) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(\theta)\left(\frac{\log r}{r}\right)^n\left(\frac{1}{r}\right)^m. \qquad (45.8)$$

При $\Delta = \Gamma = 0$ разложение (45.8) имеет вид

$$\varphi = \mathbf{U}\cdot\mathbf{x} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta)\, r^{-n}. \qquad (45.8')$$

Эти ряды сходятся абсолютно и равномерно при достаточно больших значениях r и, следовательно, допускают почленное дифференцирование. Полученные дифференцированием ряды обладают аналогичными свойствами сходимости.

Представляет интерес история получения разложений (45.8) и (45.8′). Первоначальное предположение о виде главных членов основывалось на том, что при больших значениях r уравнение, которому удовлетворяет функция, становится „близким“ к уравнению

$$(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$

Переходя к новой переменной, т. е. полагая $x = \sqrt{1-M_\infty^2}\,\xi$, получаем уравнение Лапласа, асимптотика решений которого известна. Эти рассуждения кажутся довольно убедительными, но не могут служить строгим доказательством справедливости представления (45.7), кроме того, они не дают возможности определения вида остаточного члена. Впервые правильную догадку о форме полных разложений высказал

Бейтмен [1]; правда, он включал в разложения члены $(\log r)^n/r^p$, $n > p$, которые в действительности в разложение не входят. Несколько позднее Бергман [2] получил разложение φ в переменных годографа, а Ладфорд [3] выполнил расчеты, необходимые для перехода в разложении Бергмана к физическим переменным. В этой работе было получено разложение (45.8), но еще предстояло показать, что потенциальное течение действительно обладает теми асимптотическими свойствами, на основе которых Бергман строил свое разложение. Это было сделано Финном и Джилбаргом [4], которые дали независимое доказательство справедливости представления (45.8). Из сказанного выше становится ясным, что формула (45.8) основывается на глубоких исследованиях, имеющих своим началом теорию Бергмана особых точек решений линейного эллиптического уравнения с частными производными и завершающихся установлением (что вовсе не просто) асимптотических свойств, которые выражены формулой (45.7).

Одним из основных приложений представления (45.7) является доказательство формулы Жуковского — Кутта для подъемной силы в случае течения сжимаемой жидкости. Джилбарг и Финн [5] недавно заметили, что для доказательства этой формулы действительно необходимой является более слабая оценка

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + o(r^{-1/2}). \tag{45.9}$$

Эта оценка проще, чем разложения (45.7) или (45.8), и мы приведем ее схематическое доказательство.

Следуя Джилбаргу и Финну, перейдем в уравнении (45.4) от независимой переменной x и переменной $\sqrt{1-M_\infty^2}\,\xi$ в переменных ξ, y уравнение (45.4) принимает вид

$$A\varphi_{\xi\xi} + 2B\varphi_{\xi y} + C\varphi_{yy} = 0, \tag{45.10}$$

---

[1]) Bateman H., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 24, 246 (1938).
[2]) Bergman S., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 62, 452 (1947).
[3]) Ludford G., *J. Math. Phys.*, 30, 117 (1952). Точное разложение потенциала обтекания круга было получено Имаи [Imai I., *J. Phys. Soc. Japan*, 8, 537 (1953)].
[4]) Finn R., Gilbarg D., *Comm. Pure Appl. Math.*, 10, 23 (1957).
[5]) Finn R., Gilbarg D., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88, 375 (1958).

где A, $C \to 1$, а $B \to 0$, когда точка (ξ, y) стремится к бесконечности. Из уравнения (45.10) следует, что „компоненты" скорости $\bar{u} = \varphi_\xi$ и $v = \varphi_y$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$-Cv_y = A\bar{u}_\xi + 2B\bar{u}_y, \quad v_\xi = \bar{u}_y.$$

Пусть теперь Σ — окружность достаточно большого радиуса; тогда в области, внешней по отношению к этой окружности Σ, коэффициенты A, B, C отличаются от их предельных значений меньше, чем на ε. Следовательно, в этой области

$$C(v_\xi \bar{u}_y - v_y \bar{u}_\xi) = A\bar{u}_\xi^2 + 2B\bar{u}_\xi \bar{u}_y + C\bar{u}_y^2 \geqslant (1-2\varepsilon)(\bar{u}_\xi^2 + \bar{u}_y^2).$$

Аналогичным образом получаем неравенство

$$A(v_\xi \bar{u}_y - v_y \bar{u}_\xi) \geqslant (1-2\varepsilon)(v_\xi^2 + v_y^2).$$

Таким образом, в области, внешней по отношению к Σ, имеет место оценка

$$\bar{u}_\xi^2 + \bar{u}_y^2 + v_\xi^2 + v_y^2 \leqslant 2K(v_\xi \bar{u}_y - v_y \bar{u}_\xi), \tag{45.11}$$

где $K = (1+\varepsilon)/(1-2\varepsilon)$. Исходя из неравенства (45.11), которое математически означает, что функция $w = v + i\bar{u}$ осуществляет квазиконформное отображение, можно показать, что [1])

$$|v|, \quad |\bar{u} - \beta U| \leqslant \text{const} \cdot \left|\frac{R}{r'}\right|^\mu, \quad r' > 2R,$$

где $\mu = K - \sqrt{K^2-1}$, R — радиус Σ, а $r' = \sqrt{\xi^2 + y^2}$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем оценку

$$|v|, \quad |u - U| \leqslant \text{const} \cdot \left|\frac{R}{r}\right|^\mu, \quad r > 2R/\beta,$$

из которой сразу следует представление (45.9); достаточно выбрать ε так, чтобы $\mu > 1/2$.

3. *Обтекание препятствия. Силы, действующие на тело.* Интересно, что при обтекании тела дозвуковым потоком выражение для силы, действующей на тело, имеет тот же вид

$$X = 0, \quad Y = -\rho\Gamma U,$$

что и в случае течения несжимаемой жидкости. Этот результат можно получить, используя рассуждения, почти не отличающиеся от классического доказательства теоремы Жуковского — Кутта (см. [8], § 370b). В самом деле, в силу оценки

[1]) Finn R., Serrin J., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 89, 1 (1958).

(45.9) из уравнения Бернулли следует, что

$$p = p_\infty + \left(\frac{dp}{dq}\right)_\infty (q - q_\infty) + \ldots = p_\infty - \rho_\infty U(u - U) + o(r^{-1}).$$

Применяя теперь для определения силы, действующей на тело, формулу (10.2) и учитывая соотношение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = u\cos\theta + v\sin\theta$, получаем

$$X = -\oint (p\cos\theta + \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, ds = -U \oint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds + o(1).$$

При предположении, что источники отсутствуют, из этой формулы следует равенство $X = 0$. Такими же рассуждениями доказывается формула для подъемной силы. Легко заметить, что приведенное доказательство вполне аналогично доказательству для случая несжимаемой жидкости (см. п. 23).

Для трехмерных течений парадокс Даламбера был доказан Финном и Джилбаргом [1]) на основе асимптотической формулы $\mathbf{v} = \mathbf{U} + o(r^{-2})$.

46. Теоремы существования и единственности. Мы рассматриваем, как и в предыдущих пунктах, обтекание неподвижного профиля плоским установившимся потоком. Основной задачей при этом является определение движения жидкости, если 1) заданы условия на бесконечности и величина циркуляции или 2) заданы условия на бесконечности, а циркуляция определяется из условия Жуковского — Кутта. В обоих этих случаях нужно доказать существование и единственность течения и указать методы его расчета. В последнее время исследование этих задач шло довольно успешно. Мы рассмотрим здесь только результаты, касающиеся вопроса о существовании и единственности, так как описание методов расчета выходит за рамки нашей статьи. Читателю, интересующемуся численными методами, следует обратиться к современным учебникам по газовой динамике (см., например, [26], [29], [38] и [39]), в которых он может найти и перечень литературы по этим вопросам.

Наиболее сильные результаты, касающиеся вопроса о единственности решения, были получены Финном и Джилбар-

[1]) Finn T., Gilbarg D., *Acta Math.*, 98, 265 (1957).

гом [1]). Используя асимптотическую формулу (45.7) и интегральные тождества, напоминающие формулу (23.1) для кинетической энергии, они доказали следующую теорему.

Плоское дозвуковое потенциальное обтекание гладкого профиля единственным образом определяется условиями на бесконечности и величиной циркуляции.

Плоское дозвуковое потенциальное обтекание профиля, имеющего острую заднюю кромку, единственным образом определяется условиями на бесконечности [2]).

Эти результаты, как станет ясно из приведенного ниже анализа, играют большую роль в теории динамического подобия. Рассмотрим непрерывные дозвуковые обтекания двух геометрически подобных профилей потоками двух совершенных газов с одним и тем же показателем адиабаты. Предположим также, что числа Маха M_∞ и величины относительных циркуляций Γ/U для этих потоков совпадают (второе условие можно опустить, если профили имеют острую заднюю кромку). Тогда из сформулированной выше теоремы следует, что эти два течения являются динамически подобными.

С теоретической точки зрения интересно то обстоятельство, что величина Γ/U для обтекания профиля с острой задней кромкой является монотонно возрастающей функцией от числа Маха на бесконечности. Коэффициент подъемной силы $C_L = |Y|/(^1/_2\rho U^2)$ будет при этом возрастающей функцией от M_∞.

Вопрос о существовании решения, несмотря на серьезные математические трудности, решен с достаточной полнотой в работах Ф. И. Франкля и М. В. Келдыша [3]), Шифмана [4]), Берса [5]). Если для определенности считать, что задача формулируется для *заданного* уравнения Бернулли (45.1), заданного профиля и заданного направления скорости на бесконечности, то

---

[1]) Finn R., Gilbarg D., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88, 375 (1958). Доказательства теоремы единственности в появившихся ранее работах Шифмана и Берса (см. примечания 4 и 5) являются менее строгими и четкими.

[2]) Поток на бесконечности предполагается естественно однородным. — *Прим. перев.*

[3]) Келдыш М. В., Франкль Ф. И., *Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук*, 4, 561—607 (1934).

[4]) Shiffman M., *J. Rational Mech. Anal.*, 1, 645 (1952).

[5]) Bers L., *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 441 (1954).

основной результат можно сформулировать в следующем виде.

Для заданного гладкого профиля и заданного уравнения Бернулли [1]) *в плоскости* (M_∞, Γ) *существует такая область, содержащая внутри себя начало координат, что для каждой точки этой области существует единственное дозвуковое обтекание с выбранными значениями* M_∞ *и* Γ. *При приближении точки* (M_∞, Γ) *к границе области максимум местного числа Маха соответствующего течения стремится к* 1.

Для заданного профиля с острой задней кромкой найдется такое число $\hat{M}$, *что для каждого* M_∞ *из интервала* $0 \leqslant M_\infty < \hat{M}$ *существует единственное дозвуковое обтекание профиля с выбранной величиной скорости на бесконечности. При* $M_\infty \to \hat{M}$ *максимум местного числа Маха стремится к* 1.

Доказательства теорем существования типа только что сформулированной слишком сложны, чтобы их можно было здесь изложить. Мы ограничимся поэтому лишь беглым обзором методов, использованных в указанных выше работах.

В работе Франкля и Келдыша использовался некий итерационный процесс; существование при этом было доказано только для достаточно малых значений M_∞. Доказательство Шиффмана основано на прямых методах вариационного исчисления; исходным пунктом является принцип Бейтмена — Кельвина. В его работе использован остроумный прием, который помогает установить существование течения, дающего минимум соответственному функционалу.

Доказательство Берса основано на методах теории функций (аналогично доказательству существования плоского течения несжимаемой жидкости); при этом привлекается, однако, целый арсенал глубоких результатов анализа. Кроме доказательства существования дозвуковых течений, Берс установил их непрерывную зависимость от M_∞, от формы профиля и от вида функции, связывающей плотность и величину ско-

[1]) В случае совершенного газа в формулировке теоремы можно опустить требование заданного уравнения Бернулли; при этом следует заменить Γ на Γ/U. В этих предположениях течение будет определяться единственным образом с точностью до преобразования подобия.

рости. Несмотря на чрезвычайную сложность математических методов, использованных в этих работах, последние как бы перекинули мост через пропасть, давно разделявшую математиков и аэродинамиков [1]).

Существование и единственность трехмерных дозвуковых течений рассматривались в недавно опубликованной работе Джилбарга и Финна [2]). Полученные ими глубокие результаты полностью решают вопросы единственности и асимптотического поведения потенциала на бесконечности; существование дозвуковых течений доказывается при условии, что местное число Маха не превышает 0,53. Вопрос существования рассматривался также в работе Нэша [3]); пользуясь установленной в этой работе замечательной теоремой, можно, по-видимому, получить результат даже более общий, чем в случае плоских течений.

47. Вариационные принципы газовой динамики. В этом пункте мы рассмотрим некоторые *экстремальные* свойства установившегося дозвукового течения. Изучение этих свойств объясняется, с одной стороны, желанием обобщить теорему Кельвина о минимуме кинетической энергии на случай течений сжимаемой жидкости, а с другой стороны, — необходимостью создания методов расчета таких течений. Заметим, что установленная в п. 15 теорема Херивела — Линя не является вариационным принципом в точном значении этого слова, однако идея Херивела о выборе в качестве функции Лагранжа при формулировке принципа Гамильтона величины $\mathfrak{T} - \mathfrak{E}$ в дальнейшем будет служить нам ориентиром при выборе подинтегральной функции.

Рассмотрим некоторый конечный объем $\mathfrak{v}$ газа с границей $\mathfrak{s}$ и предположим, что нормальная составляющая h потока массы

---

[1]) Представляют интерес также другие теоретические работы, в которых рассматривались свойства дозвуковых течений, а именно работы Берса [Bers L., *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 79 (1952)], Джилбарга [Gilbarg D., *J. Rational Mech. Anal.*, **2**, 233 (1953)], Джилбарга и Шифмана [Gilbarg D., Shiffman M., *J. Rational Mech. Anal.*, **3**, 209 (1954)], Лёвнера [Loewner C., *J. Rational Mech. Anal.*, **2**, 537 (1954); On the critical Mach number, Studies in Mathematics and Mechanics, presented R. von Mises, New York. 1954] и Серрина [Serrin J., *J. Math. Phys.*, **33**, 27 (1954)].

[2]) Gilbarg D., Finn R., *Acta math.*, 98, 265 (1957).

[3]) Nash J., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **43**, 754 (1957).

удовлетворяет на $\mathcal{S}$ условию

$$\text{Расход} = \oint_{\mathcal{S}} h\, da = 0.$$

Мы хотим поставить такую вариационную задачу, которая выделила бы класс безвихревых течений как класс течений, дающих минимум некоторому функционалу над полем скоростей. С этой целью удобно поставить в соответствие каждому полю скоростей некоторое поле „плотности". Мы воспользуемся для определения этого поля уравнением Бернулли [1])

$$\frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}. \tag{47.1}$$

Заметим, что определенное таким образом течение $(\rho, \mathbf{v})$ не обязано удовлетворять ни уравнению неразрывности, ни уравнениям движения. Условимся называть скорость $\mathbf{v}$ дозвуковой, если $q < c = \sqrt{dp/d\rho}$. Сделав эти предварительные замечания, мы можем перейти к изложению результатов.

Принцип Бейтмена—Кельвина [2]). *В классе всех дозвуковых полей скоростей, удовлетворяющих уравнению неразрывности и обладающих заданным потоком*

---

[1]) При желании уравнение (47.1) можно рассматривать как „внешнюю связь" в сформулированной ниже вариационной задаче. Нижний предел интегрирования и постоянная, стоящая в правой части уравнения (47.1), в дальнейшем считаются фиксированными.

[2]) Bateman H., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **16**, 816 (1930). Приведенная нами формулировка вариационной задачи о минимуме основана на результатах работы Лаша и Черри [Lush P. E., Cherry T. M., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **9**, 6 (1956)]. Маловероятно, чтобы кто-нибудь из упомянутых авторов обратил внимание на прямую аналогию между этой вариационной задачей и теоремой Кельвина, так как их интересовал в основном только случай плоских течений. Другая формулировка принципа Бейтмена приведена в статье Гёльдера [Hölder E., *Math. Nachr.*, **4**, 366 (1950)].

Соображения в пользу выбора именно такой подинтегральной функции основаны на следующем: мы имеем тождество

$$p + \rho q^2 = {}^1/_2\, \rho q^2 - \rho E + \rho\, ({}^1/_2\, q^2 + I) = {}^1/_2\, \rho q^2 - \rho\, (E + \text{const});$$

таким образом, поскольку энергия E вообще определена с точностью до постоянной, $\mathfrak{J} = \mathfrak{T} - \mathfrak{E}$.

массы h *на* $\mathcal{S}$, *минимум интеграла*

$$\mathfrak{I}(\mathbf{v}) = \int_v (p + \rho q^2)\, dv$$

достигается в том и только том случае, когда поле $\mathbf{v}$ *безвихревое.*

Ясно, что поле скоростей $\mathbf{v}$, являющееся решением этой вариационной задачи, представляет собой динамически возможное изэнтропическое безвихревое течение, удовлетворяющее заданным на $\mathcal{S}$ граничным условиям. Указанные свойства и определяют ценность принципа Бейтмена. Сформулированный принцип допускает обращение, также принадлежащее по существу Бейтмену.

Принцип Бейтмена — Дирихле[1]). *В классе всех дозвуковых полей скоростей* $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$ *максимум интеграла*

$$\mathfrak{I}^*(\mathbf{v}) = \int_v p\, dv + \oint_{\mathcal{S}} \varphi h\, da$$

достигается в том и только в том случае, когда $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ *и* $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = h$ *на* $\mathcal{S}$.

Легко видеть, что решение одной из этих вариационных задач является также решением другой вариационной задачи. Кроме того, как станет ясно из дальнейшего, из существования решения следует его единственность. Поэтому справедлива следующая альтернатива: либо эти задачи имеют одно общее им обеим решение, либо решения не существует вообще. В первом из этих случаев, применив теорему Гаусса — Остроградского, мы получаем, что

$$\mathfrak{I}_{\min} = \mathfrak{I}^*_{\max} = \int_v (p + \rho q^2)\, dv$$

(впервые это было отмечено Лашем и Черри). Возможность отсутствия решения следует из того, что может не

[1]) В работе Бейтмена (см. примечание 2 на стр. 144) не содержится вариационной задачи о максимуме в чистом виде, так как Бейтмен ограничился первым членом с подинтегральной функцией p; добавочный член, содержащий интеграл по поверхности, был введен позднее Лашем и Черри (см. то же примечание). Приведенная здесь формулировка несколько обобщает формулировку Лаша и Черри.

существовать безвихревого дозвукового течения, удовлетворяющего заданным граничным условиям. Шифман [1]) показал, как надо видоизменить эти вариационные задачи, чтобы решение их всегда существовало.

Для доказательства принципа Бейтмена — Кельвина мы введем величину $\mathbf{Q} = \rho\mathbf{v}$ и заметим, что уравнение Бернулли позволяет рассматривать $\mathbf{v}$, а следовательно, и $\mathfrak{J}$ как функцию от $\mathbf{Q}$. (Как было указано в п. 37, каждому значению величины Q соответствует два различных значения величины скорости q. Мы выбираем, естественно, то значение, которое соответствует дозвуковому течению.) Выбор в качестве основной переменной не $\mathbf{v}$, а $\mathbf{Q}$ объясняется тем, что при помощи $\mathbf{Q}$ легче сформулировать условия вариационной задачи. Например, условие $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{Q} = 0.$$

Рассмотрим теперь поле вектора $\mathbf{Q}$, дающее минимум $\mathfrak{J}$. Пусть $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \varepsilon\boldsymbol{\zeta}$ — некоторое допустимое поле вектора $\mathbf{Q}^*$. Разложив $\mathfrak{J}(\mathbf{Q}^*)$ по степеням ε, получим

$$\mathfrak{J}(\mathbf{Q}^*) = \mathfrak{J}(\mathbf{Q}) + \varepsilon\,\delta\mathfrak{J} + \varepsilon^2\mathfrak{K},$$

где

$$\delta\mathfrak{J} = \int_v \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\zeta}\,dv,$$

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2}\int_v \frac{(\tilde{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\zeta})^2 + (\tilde{c}^2 - \tilde{q}^2)\,\zeta^2}{\tilde{\rho}\,(\tilde{c}^2 - \tilde{q}^2)}\,dv.$$

Знак тильда применяется здесь для обозначения величин, вычисленных при некотором промежуточном значении Q. При нахождении $\delta\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{K}$ удобно ввести функцию $F(Q^2) = p + \rho q^2$; производные этой функции имеют простой вид

$$F' = (2\rho)^{-1}, \qquad F'' = [4\rho^3(c^2 - q^2)]^{-1}.$$

Так как рассматриваемые течения дозвуковые ($\mathfrak{K} \geqslant 0$), то экстремаль $\mathbf{Q}$ определяется условием $\delta\mathfrak{J} = 0$. Нашей задачей является показать, что это условие эквивалентно условию $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$.

[1]) Shiffman M., *J. Rational Mech. Anal.*, **1**, 605 (1952).

Прежде всего, если $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$, то $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi$ и

$$\int_v \mathbf{v}\cdot\zeta\,dv=\int_v \operatorname{div}(\varphi\zeta)\,dv=0.$$

Здесь мы воспользовались условиями $\operatorname{div}\zeta=0$ и $\zeta\cdot\mathbf{n}=0$ на граничной поверхности s. С другой стороны, если $\delta\mathfrak{I}=0$ для всех допустимых вариаций ζ, то поле $\mathbf{v}$ должно быть безвихревым. В самом деле, предположим противное: $\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq 0$ в некоторой точке P. Тогда можно найти вектор $\mathbf{A}$, обращающийся в нуль вне некоторой малой окрестности точки P и такой, что

$$\int_v \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}\,dv\neq 0.$$

Но отсюда следовало бы, что $\delta\mathfrak{I}\neq 0$ для некоторой допустимой вариации $\zeta=\operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Для доказательства принципа Бейтмена—Кельвина остается воспользоваться соотношением

$$\mathfrak{I}(\mathbf{v}^*)=\mathfrak{I}(\mathbf{v})+\mathfrak{R},$$

справедливым для любого допустимого поля $\mathbf{v}^*$. Из этой формулы следует, что $\mathfrak{I}(\mathbf{v}^*)>\mathfrak{I}(\mathbf{v})$ при $\mathbf{v}^*\neq\mathbf{v}$; таким образом доказана и единственность экстремали исследуемой вариационной задачи. Справедливость принципа Бейтмена — Дирихле устанавливается тем же методом, однако рассуждения в этом случае оказываются более простыми, так как $\mathfrak{I}^*$ зависит от одной функции φ.

При применении принципа Бейтмена — Кельвина для исследования плоских течений вводят в качестве искомой функции функцию тока. Уравнение неразрывности выполняется тогда автоматически, а граничное условие сводится к заданию величины ψ на s. Аналогичные схемы предлагались и для исследования пространственных течений [1]), однако не ясно, получается ли при этом какое-либо преимущество по сравнению с использованием в качестве неизвестной $\mathbf{Q}$.

Как было отмечено ранее, сформулированные выше вариационные принципы, позволяют строить течение газа путем нахождения экстремалей функционалов $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{I}^*$. Однако

[1]) См. стр. 13 работы Лаша и Черри, указанной в примечании 2 на стр. 144, а также статью Гизе [сб. *Механика*, № 1 (17), 86 (1953)].

в практически важном случае обтекания некоторого конечного тела соответствующие интегралы расходятся. Эту трудность, как было показано рядом авторов (Ванг [1]), Шифман [2]), Лаш и Черри), можно обойти, изменив соответствующим образом подинтегральные функции. Например, функционал вариационной задачи Бейтмена — Кельвина (при отсутствии циркуляции) можно записать в виде

$$\int_v (p + \rho q^2 - p_\infty - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{U})\, dv, \tag{47.2}$$

где через $\mathbf{U}$ обозначена скорость потока на бесконечности. Легко видеть, что интеграл (47.2) сходится, если $\mathbf{v} - \mathbf{U} = O(r^{-1-\varepsilon})$ для плоских течений и $\mathbf{v} - \mathbf{U} = O(r^{-3/2-\varepsilon})$ для трехмерных течений. Как мы видели в п. 45, эти условия действительно имеют место. Вариационная задача о минимуме функционала (47.2) не только приводит к методу численного расчета течений [3]), но и служит отправной точкой для доказательства Шифмана существования дозвукового обтекания заданного тела.

Другие вариационные принципы газовой динамики. Уравнение Бернулли (47.1) можно обобщить, предположив, что $p = f(\rho, S)$, где S — некоторая заданная функция ψ. При этих предположениях решением вариационной задачи Бейтмена — Кельвина является изоэнергетическое и, вообще говоря, вихревое течение [4]). С другой стороны, если вместо уравнения (47.1) рассматривать уравнение

$$\frac{1}{2} q^2 + \int \frac{dp}{\rho} = H(\psi),$$

то, как показали Лаш и Черри, экстремум функционала соответствует вихревому изэнтропическому течению.

Представляет, наконец, интерес изучение вариационной задачи, соответствующей функционалу с подинтегральной

[1]) Wang C., *J. Aeronaut. Sci.*, **15**, 675 (1948); *Quart. Appl. Math.*, **9**, 99 (1951).

[2]) См. примечание на стр. 146.

[3]) См., например, интересную работу Гишперта [Gispert H., *Wiss. Z. Univ. Halle*, **6**, 14 (1956/57)].

[4]) Lin C. C., *Quart. Appl. Math.*, **9**, 421 (1952).

функцией $^1/_2 \rho q^2 - \rho E$, где E — внутренняя энергия, а ρ и $\mathbf{v}$ изменяются независимо. Можно показать, что при условии $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ экстремалью задачи является безвихревое течение, которое, однако, не обязательно соответствует минимуму функционала.

Добавление. Задачи о максимуме функционала $\mathfrak{J}^*(\varphi)$ или в случае плоского течения о минимуме $\mathfrak{J}(\psi)$ являются частными случаями общей вариационной задачи, которая в последнее время интенсивно разрабатывается. В случае плоского течения эту общую задачу можно сформулировать как задачу о минимуме функционала

$$\mathfrak{F}(\varphi) = \int\int F(u, v)\, dx\, dy, \tag{47.3}$$

где $u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$. Уравнение Эйлера указанной вариационной задачи имеет вид

$$(F_u)_x + (F_v)_y = 0, \tag{47.4}$$

или

$$F_{uu}\varphi_{xx} + 2F_{uv}\varphi_{xy} + F_{vv}\varphi_{yy} = 0. \tag{47.5}$$

Это уравнение будет эллиптическим при выполнении условия $F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 > 0$. Условие эллиптичности естественно возникает при рассмотрении формулы

$$\mathfrak{F}(\varphi + \zeta) = \mathfrak{F}(\varphi) + \frac{1}{2}\int\int \left(\tilde{F}_{uu}\zeta_x^2 + 2\tilde{F}_{uv}\zeta_x\zeta_y + \tilde{F}_{vv}\zeta_y^2\right) dx\, dy,$$

связывающей значение функционала для произвольной функции со значением функционала для экстремали φ. Это условие $F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 > 0$ означает, что $\mathfrak{F}(\varphi + \zeta) \geqslant \mathfrak{F}(\varphi)$ или, иначе говоря, что экстремаль вариационной задачи дает минимум функционала $\mathfrak{F}(\varphi)$ и что этот минимум является единственным.

Для вариационной задачи, соответствующей функционалу $\mathfrak{J}^*(\varphi)$, мы имеем $F(u, v) = -p$, следовательно, потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$p_{uu}\varphi_{xx} + 2p_{uv}\varphi_{xy} + p_{vv}\varphi_{yy} = 0. \tag{47.6}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция тока удовлетворяет аналогичному уравнению.

§ 5. Сверхзвуковое течение и характеристики

Теория неустановившихся течений и сверхзвуковых течений сжимаемой жидкости основана в значительной степени на существовании в области течения характеристических кривых или поверхностей. Действительно, успех в исследовании свойств газов, движущихся со сверхзвуковыми скоростями, определяется в большинстве случаев представлениями, связанными с полем характеристик, и большинство интересных примеров решений получено на основе свойств этого поля.

48. Природа характеристик. Рассмотрим сначала произвольное течение некоторой сжимаемой жидкости. Пусть Σ — некоторое трехмерное многообразие четырехмерной области течения пространства $(\mathbf{x}, t)$ или, в менее абстрактной форме, пусть Σ — некоторая *движущаяся* поверхность в трехмерной физической области течения. Предположим теперь, что нам известны значения параметров течения $\mathbf{v}$, ρ, p и S на поверхности.

Тогда при помощи уравнений (35.1) — (35.4) мы, вообще говоря, можем единственным образом определить производные от этих величин в точках Σ. Метод получения этих производных обычен: производные по касательным к Σ направлениям определяются непосредственно по заданным на Σ значениям функций, а *нормальные* производные получаются из системы уравнений (35.1) — (35.4), линейных относительно этих неизвестных производных. Может случиться, однако, что система уравнений (35.1) — (35.4) не позволяет определить величины нормальных производных. В этом случае говорят, что Σ — *характеристическое* многообразие. Смысл условий, определяющих характеристическое многообразие, станет более ясным, если заметить, что два решения могут „касаться“ только вдоль этих характеристических многообразий, или, иначе говоря, производные от решения могут претерпевать разрыв только на этих поверхностях. Можно отметить также большую роль, которую играют характеристические многообразия в распространении возмущений в поле течения; эта роль более или менее ясна на основе вышесказанного.

В следующих двух пунктах мы рассмотрим частный случай установившегося течения [1]). Характеристическое многообразие при этом не зависит от t и представляет собой, следовательно, кривые в случае плоского течения и поверхности в случае пространственного течения. Из последующего станет ясным, что в дозвуковом установившемся течении не может существовать характеристик, отличных от линий тока. В силу этого наши рассуждения в п. 49—50 направлены в основном на изучение сверхзвуковых течений. В п. 51 семейство характеристических многообразий изучается несколько с других позиций, что позволяет дополнить предыдущие рассуждения.

Стройная теория характеристических кривых одномерных неустановившихся течений в этой статье не освещается, так как она достаточно хорошо изложена в ряде учебников.

49. Установившееся плоское течение. Пусть в области установившегося плоского течения некоторая кривая C задана параметрическим уравнением $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$, где $\mathbf{x} = (x, y)$, а σ — длина дуги кривой C. Заданные на C параметры течения можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\sigma), \quad p = p(\sigma), \quad \rho = \rho(\sigma), \quad S = S(\sigma). \tag{49.1}$$

Нас интересует вопрос: при каких условиях, наложенных на C, нельзя по заданным функциям (49.1) определить в точках C производные от величин $\mathbf{v}$, p, ρ и S?

Для определения этих производных мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} p &= 0, \\ \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} S &= 0, \end{aligned}$$

где $p = f(\rho, S)$ — заданное уравнение состояния. Выписанную систему уравнений легко привести к виду

$$\left.\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} p &= 0, \\ \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{49.2}$$

[1]) Характеристические многообразия в общем случае трехмерного неустановившегося течения рассматриваются в книге [24], стр. 128—134. В этой работе содержатся также интересные замечания относительно характеристических многообразий произвольной системы уравнений с частными производными первого порядка (стр. 117—128).

в котором мы и будем ею пользоваться. Чтобы упростить рассуждения, выберем систему координат таким образом, что ось y касается кривой C в некоторой точке P; в этом случае величины частных производных по y в точке P известны и задача сводится к вопросу о возможности определения производных по x. Для определения этих производных мы имеем систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \rho u u_x \quad &+ p_x = -\rho v u_y, \\ \rho u v_x \quad &= -\rho v v_y - p_y, \\ \rho c^2 u_x \quad &+ u p_x = -\rho c^2 v_y - v p_y. \end{aligned}\right\} \tag{49.3}$$

Следовательно, условием того, что кривая C представляет собой характеристику, является *невозможность* определения из этой системы уравнений производных u_x, v_x и p_x.

Приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при производных, получаем уравнение

$$\rho^2 u (u^2 - c^2) = 0.$$

Таким образом, *кривая C является характеристикой в том и только в том случае, когда в каждой точке C либо* 1) *нормальная составляющая скорости равна нулю, либо* 2) *нормальная составляющая скорости по абсолютной величине равна местной скорости звука.* Первое условие совпадает, очевидно, с определением линий тока; тот факт, что линии тока являются характеристиками, был, собственно говоря, ясен заранее. Основную роль в излагаемой ниже теории играют характеристики, определяемые вторым условием.

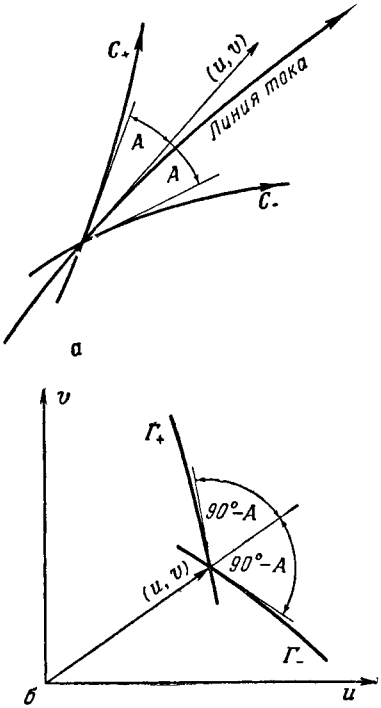
Характеристические кривые, для которых выполнено второе условие, будут, очевидно, иметь место только в случае сверхзвукового течения. Рассмотрим в фиксированной системе координат (x, y) два поля направлений:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\vartheta + A), \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\vartheta - A), \tag{49.4}$$

где ϑ — угол наклона вектора скорости, а A — местый *угол Маха*:

$$\sin A = \frac{c}{q} = \frac{1}{M}.$$

Итак, семейство характеристик плоского установившегося течения образовано из кривых C_+, удовлетворяющих первому из уравнений (49.4), кривых C_-, удовлетворяющих второму из уравнений (49.4), и линий тока. Через каждую точку области сверхзвукового течения проходят, следовательно, три характеристики; заметим, что касательная к линии тока является биссектрисой угла между кривыми C_+ и C_- (рис. 7, *а*). Характеристики $C_\pm$ можно интерпретировать как линии, по которым проходит распространение бесконечно малых возмущений в установившемся течении; столь же важна, однако, интерпретация характеристик как таких линий, вдоль которых могут „соприкасаться" два решения.



Р и с. 7. Характеристические кривые.

а — характеристики в плоскости течения, *б* — образы характеристик в плоскости годографа.

Параметры течения на характеристиках нельзя задавать произвольным образом. В самом деле, на характеристиках, являющихся линиями тока, мы имеем очевидные условия

$$S = \text{const}, \quad H = \text{const},$$

выражающие постоянство энтропии и „энергии". На линиях Маха (т. е. на характеристиках $C_\pm$) из условия совместности системы линейных уравнений (49.3) получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} -\rho v u_y & 0 & 1 \\ -\rho v v_y - p_y & \rho u & 0 \\ -\rho c^2 v_y - v p_y & 0 & u \end{vmatrix} = 0;$$

опустив отличный от нуля множитель, это уравнение можно записать так:

$$\rho c^2 v_y - \rho u v u_y + v p_y = 0. \tag{49.5}$$

Вид этого уравнения связан, конечно, со специальным выбором системы координат, введенной в начале этого пункта. Воспользовавшись условием $|u| = c$ на линии Маха, мы можем записать уравнение (49.5) в виде

$$\rho (u v_y - v u_y) \pm \operatorname{ctg} A \, p_y = 0, \tag{49.6}$$

где знаки $+$ и $-$ относятся соответственно к характеристикам C_+ и C_-. Уравнение (49.6) нетрудно записать в виде, не зависящем от специального выбора системы координат, а именно в виде

$$\rho q^2 \dot{\vartheta} \pm \operatorname{ctg} A \, \dot{p} = 0; \tag{49.7}$$

здесь точка означает дифференцирование по σ (длине дуги характеристики).

В случае безвихревого изэнтропического течения линии тока перестают быть характеристиками (условия $H = \text{const}$, $S = \text{const}$ дают информацию, достаточную для определения производных от параметров течения, заданных на линии тока). Воспользовавшись уравнением Бернулли (37.3), мы можем исключить p из уравнения (49.7), после чего получим, что на линии Маха имеет место соотношение

$$\frac{d\vartheta}{dq} = \pm \frac{\operatorname{ctg} A}{q} = \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{q}. \tag{49.8}$$

Правая часть уравнения (49.8) зависит, очевидно, только от q. Следовательно, на характеристиках в физической плоскости модуль вектора скорости и угол его наклона связаны простым соотношением

$$\vartheta = \pm \int \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{q} dq = \pm \, r(q) + \text{const}. \tag{49.9}$$

В силу этого соотношения образы характеристик $C_\pm$ безвихревого изэнтропического течения в плоскости годографа принадлежат однопараметрическому семейству кривых, не зависящему при фиксированных S и H от характера течения данного газа. По традиции мы будем обозначать образ характеристики C_+

через Γ_+ и образ характеристики C_- через Γ_-. [Так как кривые $\Gamma_\pm$ являются характеристиками уравнений годографа (43.2), они называются также *характеристиками в плоскости годографа.*]

Из свойств функции $\tau(q)$ можно получить ряд сведений относительно геометрии кривых $\Gamma_\pm$. Прежде всего заметим, что функция $\tau(q)$ монотонно возрастает при $q_* \leqslant q < q_{\max}$. Кроме того, при $q = q_*$ мы имеем $M = 1$ и $d\vartheta/dq = 0$, а при $q = q_{\max}$ мы имеем $M = \infty$ и $d\vartheta/dq = \infty$. Кривизна кривой Γ_+ определяется формулой

$$\frac{q^2 + 2q'^2 - qq''}{(q^2 + q'^2)^{3/2}} = \frac{q}{c\sqrt{M^2 - 1}} \qquad \left(q' = \frac{dq}{d\vartheta}\right)$$

и является в силу неравенства (37.7) величиной положительной. Все вышесказанное позволяет утверждать, что *кривые Γ_+ в плоскости (u, v) представляют собой раскручивающиеся против часовой стрелки спирали, заключенные между фиксированными окружностями $q = q_*$ и*

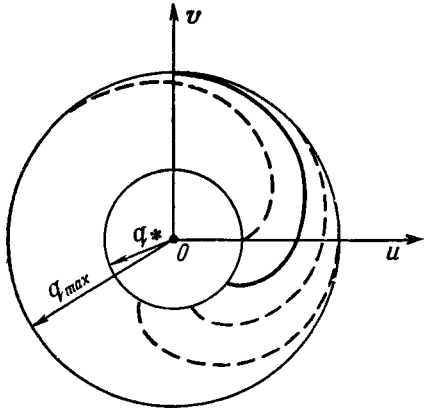


Рис. 8. Кривые Γ_+ в плоскости годографа.

$q = q_{\max}$; все эти спирали получаются вращением какой-либо одной из них вокруг начала координат (рис. 8). Аналогичное утверждение справедливо, очевидно, и относительно кривых Γ_-. Наконец, из элементарных

геометрических соображений ясно, что уравнение (49.8) эквивалентно уравнению

$$\frac{dv}{du} = -\operatorname{ctg}(\vartheta \pm A). \tag{49.10}$$

Сравнивая уравнения (49.10) и (49.4), получаем, что *направления характеристик* C_+ *и* C_- *ортогональны направлениям характеристик* Γ_- *и* Γ_+ *соответственно* (рис. 7). Полученные выше результаты справедливы для любого газа независимо от вида уравнения состояния.

Можно показать, что разрыв grad v на характеристике в случае изэнтропического безвихревого течения удовлетворяет вдоль этой характеристики уравнению Риккати[1]). Из этого следует, что величина разрыва определяется единственным образом и не обращается в нуль ни в одной точке характеристики, если известно значение (отличное от нуля) этого разрыва в некоторой точке характеристики. Нужно подчеркнуть, что все это касается только распространения разрывов grad v и не применимо к разрывам самой функции v. Разрывы самих переменных течения распространяются как „ударные волны", и процесс распространения разрыва носит при этом качественно иной характер (см. гл. 6).

Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями характеристики $\Gamma_\pm$ представляют собой эпициклоиды, получающиеся при обкатывании окружности $q = q_*$ окружностью радиуса $^1/_2(q_{\max} - q_*)$. Преимущество совершенного газа заключается в том, что независимо от состояния системы можно пользоваться одной и той же диаграммой характеристик. В противоположность этому в случае произвольного газа вид характеристик в плоскости годографа существенно зависит от величины энтропии и энергии рассматриваемого равновесного состояния. Это незначительное с теоретической точки зрения преимущество существенно упрощает численные расчеты течений совершенного газа.

Осесимметричное течение. Метод, использованный выше при выводе уравнений характеристик плоского течения, применим и к случаю осесимметричного течения. В силу различий в формуле для div v мы приходим в этом случае

[1]) Nitsche J., *J. Rational Mech. Anal.*, 2, 291 (1953).

к системе уравнений, несколько отличающейся от (49.3):

$$\begin{aligned} \rho u u_x &+ p_x = -\rho v u_y, \\ \rho u v_x &= -\rho v v_y - p_y, \\ \rho c^2 u_x &+ u p_x = -\rho c^2 v_y - v p_y - \rho q c^2 \frac{\sin\vartheta}{y}; \end{aligned}$$

здесь ϑ обозначает угол, образованный вектором скорости и осью вращения. Легко видеть, что характеристические кривые в полуплоскости осесимметричного течения определяются теми же условиями, что и в случае плоского течения. Условие на характеристиках имеет, однако, несколько отличный от условия (49.7) вид:

$$\dot{\vartheta} \pm \left(\frac{\operatorname{ctg} A}{\rho q^2} \dot{p} + \frac{\sin A \sin\vartheta}{y} \right) = 0. \tag{49.11}$$

Для изэнтропического безвихревого течения уравнение (49.11) можно записать так:

$$\frac{d}{d\sigma}(\mathfrak{r} \mp \vartheta) = \frac{\sin A \sin\vartheta}{y}. \tag{49.12}$$

Образы линий Маха на плоскости годографа, следовательно, не образуют фиксированного семейства кривых в отличие от случая плоского течения. В связи с этим расчет осесимметричных течений представляет значительные трудности.

50. Трехмерное установившееся безвихревое течение. В соответствии с теоремой 2 из п. 39 мы, не ограничивая общности, можем считать такое течение изэнтропическим и изоэнергетическим. Напомним, что для таких течений теорема Бернулли справедлива в ее сильной форме (37.2).

Потенциал скоростей φ безвихревого пространственного течения удовлетворяет уравнению

$$c^2 \nabla^2 \varphi - v^i v^j \varphi_{,ij} = 0 \tag{50.1}$$

(см. п. 45). В случае сверхзвукового течения ($q > c$) уравнение (50.1) представляет собой квазилинейное гиперболическое уравнение второго порядка с частными производными. Теория таких уравнений хорошо известна (см., например, [46], гл. 6), и мы отметим здесь лишь некоторые наиболее интересные свойства решений этих уравнений.

Поверхность Σ является характеристическим многообразием для уравнения (50.1) в том и только в том случае, когда в каждой точке Σ

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0; \tag{50.2}$$

здесь через $\mathbf{n}$ обозначен единичный вектор нормали к Σ, а $A^{ij} = c^2\delta^{ij} - v^i v^j$ — матрица коэффициентов уравнения (50.1). Заметим, что условие (50.2) можно записать в более простой форме, а именно

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \pm c. \tag{50.3}$$

Таким образом, нормальная компонента вектора скорости $\mathbf{v}$ должна равняться на Σ местной скорости звука. Пусть P — произвольная точка области (сверхзвукового) течения. Мы определим *конус Маха* в точке P как прямой круговой конус с вершиной P, осью, направленной по вектору скорости $\mathbf{v}$, и углом раствора, равным углу Маха $A = \arcsin c/q$. Легко видеть, что условие (50.3) эквивалентно требованию, чтобы в каждой точке P поверхности Σ эта поверхность касалась конуса Маха с вершиной в точке P.

Рассмотрим линейный элемент или, что то же, направление на поверхности Σ в точке P, по которому конус Маха касается Σ [1]). Мы назовем это направление *характеристическим направлением* на поверхности Σ в точке P. Совокупность характеристических направлений на характеристическом многообразии определяет поле направлений; соответствующие этому полю кривые носят название *характеристических линий*. В соответствии с теорией характеристических поверхностей характеристические линии можно получить, решая систему уравнений

$$\frac{dx^i}{d\sigma} = A^{ij}n_j, \qquad \frac{dn_i}{d\sigma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A^{jk}}{\partial x^i}n_j n_k \tag{50.4}$$

при следующих начальных условиях: точка $\mathbf{x}(0)$ лежит на Σ, а вектор $\mathbf{n}(0)$ в этой точке направлен по нормали к Σ. Ясно поэтому, что характеристическая линия вполне определяется своим начальным *поверхностным элементом* и, следовательно, *два характеристических многообразия, касающихся в некоторой точке P, имеют целую линию*

[1]) Этот линейный элемент получается проектированием $\mathbf{v}$ на Σ.

соприкосновения, которая представляет собой характеристическую линию, проходящую через P. Это показывает, что характеристические линии играют в распространении бесконечно малых возмущений ту же роль, что и характеристические кривые в плоском установившемся течении.

Полоска $\mathbf{x}(\sigma)$, $\mathbf{n}(\sigma)$, удовлетворяющая уравнениям (50.4) и (50.2), называется *бихарактеристикой*. Из изложенного выше следует, что любое характеристическое многообразие можно получить, „склеивая" некоторое однопараметрическое семейство бихарактеристик. Этот факт, вероятно, станет более ясным, если ввести в рассмотрение *характеристический коноид*, образованный семейством бихарактеристик, проходящих через данную точку. Тогда действие возмущения, возникшего в произвольном множестве точек, ограничено огибающей характеристических коноидов, вершины которых лежат в этом множестве точек. Заметим, что этот процесс построения огибающей характеристических коноидов представляет собой не что иное, как построение волнового фронта по методу Гюйгенса.

Метод характеристик, в некотором смысле аналогичный методу характеристик для плоского течения, был разработан для исследования определенного класса трехмерных сверхзвуковых течений Коберном и Долфом. В появившихся недавно работах Холта [1]) и Коберна [2]) рассматривалась задача о характеристических многообразиях установившегося *вихревого* сверхзвукового течения. В этих работах, так же как в п. 49, уравнения движения были записаны в естественной системе координат, связанной с характеристическими направлениями. Коберну удалось, используя полученные уравнения, найти несколько новых точных решений задачи о пространственных течениях.

51. Особые поверхности и звуковые волны. Всюду выше в этой статье мы в основном имели дело с „непрерывными движениями", иначе говоря, считали, что поле скоростей дважды дифференцируемо. Рассмотрим теперь в области течения поверхность $\Sigma = \Sigma(t)$, такую, что сами параметры течения остаются непрерывными при переходе

[1]) Holt M., *J. Fluid Mech.*, 1, 409 (1956).
[2]) Coburn N., *Quart. Appl. Math.*, 15, 237 (1957).

через Σ, а некоторые производные от этих величин претерпевают при переходе через Σ разрыв (предполагается, что как с той, так и с другой стороны от поверхности Σ параметры течения непрерывно дифференцируемы и что их производные при подходе к Σ стремятся к некоторым предельным значениям). Такая поверхность носит название *особой поверхности первого порядка, или поверхности слабого разрыва*, но для краткости мы будем называть такую поверхность просто особой поверхностью. Задача этого пункта состоит в выяснении природы слабых разрывов и законов их распространения в общем случае трехмерного неустановившегося движения. Легко видеть, что особая поверхность обязательно является характеристическим многообразием (п. 48) и, следовательно, можно изучать особые поверхности с этой точки зрения. Однако непосредственное исследование вопроса о распространении слабых разрывов является, с одной стороны, более привлекательным, а с другой стороны, быстрее и изящнее приводит к требуемым результатам.

Пусть поверхность Σ задана уравнением $F(\mathbf{x}, t) = 0$ (предполагается, что $|\operatorname{grad} F| \neq 0$). Тогда вектор нормали $\mathbf{n}$ к Σ и *нормальная скорость распространения* G этой поверхности определяются формулами

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}, \qquad G = -\frac{\partial F/\partial t}{|\operatorname{grad} F|}.$$

Предположим теперь, что некоторый параметр течения $f = f(\mathbf{x}, t)$ остается непрерывным при переходе через Σ, но по крайней мере одна из компонент $\operatorname{grad} f$ претерпевает на Σ разрыв. Мы покажем, что в этом случае существует такая скалярная функция $\alpha \neq 0$, заданная на Σ, что

$$[\operatorname{grad} f] = \alpha \mathbf{n}, \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = -\alpha G; \tag{51.1}$$

квадратные скобки обозначают здесь *скачок* величины, записанной в скобках, при переходе через Σ (т. е. разность ее предельных значений с разных сторон от Σ)[1]). Для доказательства этого факта заметим, что для любого направле-

[1]) Эта теорема принадлежит Максвеллу (Maxwell J. C., Electricity and Magnetism, Oxford, 1881, Sect. 78a).

ния $d\mathbf{x}$, dt, лежащего на Σ, имеет место равенство

$$\left[d\mathbf{x}\cdot\operatorname{grad} f+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)dt\right]=0, \tag{51.2}$$

так как f, а следовательно, и производная от f по направлениям, касательным к поверхности Σ, непрерывны при переходе через Σ. Иначе говоря, уравнение (51.2) выполняется для всех $d\mathbf{x}$, dt, таких, что

$$d\mathbf{x}\cdot\operatorname{grad} F+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)dt=0.$$

Из этого следует сразу, что

$$\frac{[\operatorname{grad} f]}{\operatorname{grad} F}=\frac{[\partial f/\partial t]}{\partial F/\partial t}.$$

Обозначив теперь общую величину вписанных отношений через $\alpha\,|\operatorname{grad} F|^{-1}$, мы приходим к требуемым соотношениям (51.1). В силу соотношений (51.1)

$$\left[\frac{df}{dt}\right]=-\alpha G+\mathbf{v}\cdot\alpha\mathbf{n}=-\alpha\Pi,$$

где $\Pi=G-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ представляет собой скорость распространения Σ относительно частицы, находящейся в рассматриваемый момент времени на этой поверхности.

На поверхности Σ, по предположению, претерпевает разрыв производная по крайней мере от одного из параметров течения p, ρ, S или $\mathbf{v}$. Из предыдущих рассуждений следует, что найдутся заданные на Σ множители α, β, γ и $\boldsymbol{\delta}$ (хотя бы один из которых отличен от нуля), такие, что

$$[\operatorname{grad} p]=\alpha\mathbf{n},\qquad\left[\frac{dp}{dt}\right]=-\alpha\Pi,$$

$$[\operatorname{grad}\rho]=\beta\mathbf{n},\qquad\left[\frac{d\rho}{dt}\right]=-\beta\Pi,$$

$$[\operatorname{grad} S]=\gamma\mathbf{n},\qquad\left[\frac{dS}{dt}\right]=-\gamma\Pi,$$

$$[\operatorname{grad}\mathbf{v}]=\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{n},\qquad\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]=-\boldsymbol{\delta}\Pi.$$

Из уравнений (35.1) — (35.4), справедливых *по обе стороны* от поверхности Σ, мы находим теперь, что

$$\left.\begin{aligned}-\beta\Pi+\rho\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{n}&=0,\\ -\rho\boldsymbol{\delta}\Pi+\alpha\mathbf{n}&=0,\\ \gamma\Pi=0,\quad\alpha&=c^2\beta+B\gamma.\end{aligned}\right\} \tag{51.3}$$

В этих соотношениях $c^2 = (\partial p/\partial \rho)_S$ и $B = (\partial p/\partial S)_\rho$ являются термодинамическими переменными. В дальнейшем при исследовании системы уравнений (51.3) удобно рассматривать отдельно случаи $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$.

Особая поверхность, на которой $\alpha \neq 0$, называется *звуковой волной*, так как на такой поверхности претерпевает разрыв градиент давления. Относительная скорость распространения Π звуковой волны принимается, по определению, за *скорость звука* (величина Π, конечно, меняется при переходе от одной точки Σ к другой, так что более правильно называть Π *местной скоростью звука*). Докажем, что так определенная скорость звука совпадает по величине с $c = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_S}$. Действительно, при $\alpha \neq 0$ в силу второго уравнения (51.3) $\Pi \neq 0$; обращаясь к третьему уравнению (51.3), мы видим, что $\gamma = 0$. Умножив правую часть второго уравнения (51.3) скалярно на $\mathbf{n}$ и воспользовавшись четвертым, приходим к равенству

$$-\rho\Pi\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n} + c^2\beta = 0. \tag{51.4}$$

Наконец, исключение из этого уравнения $\rho\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}$ при помощи первого уравнения (51.3) дает требуемое равенство:

$$\Pi = \pm c = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} \tag{51.5}$$

Приведенное обоснование формулы для скорости звука принадлежит по существу Гюгонио [1]). Это обоснование сравнительно просто, вполне строго с математической точки зрения и основано на четком определении, применимом к произвольному течению идеальной жидкости. Обоснование формулы для скорости звука, приведенное ранее в п. 35, удовлетворяет в лучшем случае только первому из этих требований. Следует заметить, однако, что использованный метод также не охватывает вопроса во всей его полноте, так как он применим только к движениям идеальной жидкости. Другой более общий подход к понятию скорости звука, в некотором смысле снимающий указанный недостаток, будет изложен в п. 57.

[1]) Hugoniot H., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **101**, 1118, 1229 (1885); *Math. Purés Appl.* (4), **3**, 477 (1887); **4**, 153 (1888).

Установим некоторые дополнительные свойства звуковых волн. В силу равенства $\Pi = G - \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ мы имеем

$$|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} - G| = c, \tag{51.6}$$

т. е. разность нормальной скорости в точке поверхности Σ и скорости распространения Σ равна по абсолютной величине скорости звука c. Это соотношение является обобщением результата, полученного ранее при исследовании характеристических многообразий установившегося течения. При переходе через поверхность звуковой волны мы имеем также $\gamma = 0$ и $[\omega] = \delta \times \mathbf{n} = 0$; таким образом, *энтропия является непрерывно дифференцируемой функцией, и завихренность остается непрерывной при переходе через фронт звуковой волны.* Аналогичным образом при помощи второго уравнения (51.3) проверяется *непрерывность касательной составляющей ускорения*:

$$[\mathbf{a}] = -\delta\Pi = \frac{\alpha}{\rho}\mathbf{n}.$$

Рассмотрим теперь особые поверхности, на которых $\alpha = 0$. Из второго уравнения (51.3) следует, что $\Pi = 0$ (в противном случае мы получили бы, что $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$), а так как $dF/dt = -\Pi|\operatorname{grad} F|$, это означает по теореме п. 8, что во все время движения поверхность Σ составлена из одних и тех же частиц жидкости. При переходе через такие поверхности контактного разрыва первые производные от давления, дивергенция скорости и ускорение остаются непрерывными.

В случае несжимаемой жидкости система уравнений (51.3) заменяется первыми двумя уравнениями этой системы и дополнительным условием $\beta = 0$. Умножив скалярно левую часть второго уравнения (51.3) на $\mathbf{n}$ и сравнив полученное равенство с первым уравнением, мы получим $\alpha = 0$, из чего в свою очередь следует, что $\Pi = 0$. Таким образом, *в случае течения несжимаемой жидкости особыми поверхностями могут быть только поверхности, перемещающиеся вместе с жидкостью.*

Если особую поверхность рассматривать как фиксированное многообразие в четырехмерном пространстве $(\mathbf{x}, t)$, то условие (51.6) можно сформулировать в виде следующего геометрического критерия: *в каждой точке P звуковой*

волны фронт волны касается конуса

$$|\mathbf{x} - \mathbf{v}_P t|^2 = c_P^2 t^2 \tag{51.7}$$

по характеристической линии

$$\mathbf{x} = (\mathbf{v}_P \pm c_P \mathbf{n}) t. \tag{51.8}$$

В этой формулировке предполагается, что начало координат помещено в точку P. Формулы (51.7) и (51.8) допускают простую интерпретацию в терминах распространения звуковой волны в пространстве (принцип Гюйгенса). Аналогичным образом *в каждой точке поверхности контактного разрыва эта поверхность касается линии*

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_P t. \tag{51.9}$$

Как было отмечено выше, каждая особая поверхность является характеристическим многообразием. Обратное конечно, неверно, однако в любом случае на характеристическом многообразии должны удовлетворяться геометрические условия, определяющие особые поверхности. Предыдущий анализ показывает, что в произвольном течении сжимаемой жидкости существуют два типа характеристических многообразий: многообразия первого типа — звуковые волны — касаются конусов (51.7), многообразия второго типа — поверхности контактного разрыва — касаются линий (51.9); различия между многообразиями первого и второго типа указаны в табл. 3.

Таблица 3

Основные различия между двумя типами особых поверхностей первого порядка

Тип	Звуковая волна	Контактный разрыв
Скорость распространения	$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$	0
Непрерывные величины	a_t ω $\operatorname{grad} S$	a Θ, ω_n $\operatorname{grad} p$

Точнее, *многообразие* Σ *является характеристическим в том и только в том случае, когда в каждой точке P это многообразие касается либо конуса* (51.7), *либо линии* (51.9). Этот результат можно получить также непосредственно из определения характеристического многообразия. Нужно заметить, что некоторые

вопросы теории характеристических многообразий в настоящее время еще не разработаны. Теория бихарактеристик исследована лишь в общих чертах, не найдено уравнение, описывающее распространение разрывов вдоль характеристических линий.

§ 6. Специальные вопросы

52. Трансзвуковое течение. Течение газа называется трансзвуковым, если это течение в одной своей части является дозвуковым, а в другой — сверхзвуковым. В последнее время появилось много работ, посвященных исследованию различных задач теории трансзвуковых течений, однако недостаток места заставляет нас ограничиться одним из разделов этой теории. Рассматриваемый нами круг вопросов представляет значительный физический интерес; при этом выясняется также характерная математическая особенность течений в трансзвуковом режиме.

Рассмотрим обтекание неподвижного профиля плоским установившимся потоком идеального газа, однородным на бесконечности. Как было указано выше, существует единственное дозвуковое обтекание при M_∞ из некоторого интервала $0 \leqslant M_\infty < \tilde{M}$, причем при приближении M_∞ к $\tilde{M}$ максимум местного числа Маха стремится к единице. Экспериментальные наблюдения показывают, что при дальнейшем увеличении M_∞ вблизи препятствия развиваются местные сверхзвуковые зоны и, наконец, при некотором критическом значении числа Маха в сверхзвуковых зонах возникают ударные волны. Число Маха $M_{уд.}$, при котором впервые возникают ударные волны, определяется не вполне однозначно, однако всегда $\tilde{M} < M_{уд.} < 1$.

Пользуясь методом годографа, можно построить ряд точных примеров трансзвуковых обтеканий профиля[1]). Эти точные решения, несомненно имеющие большое значение, не могут гарантировать, однако, существования трансзвукового обтекания произвольного профиля; кроме того, ни одно из известных решений, полученных методом годографа, не дает нам непрерывного перехода от дозвукового к трансзвуковому обтеканию *данного фиксированного* профиля.

[1]) См. статью Лайтхилла в книге [33], стр. 251, а также работу Черри [Cherry T. M., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **245**, 583 (1953)].

Можно было бы надеяться, что дальнейшие исследования укажут путь решения этих неясных вопросов, однако привлекательная гипотеза о предельной линии, предложенная для объяснения механизма возникновения ударных волн при увеличении M_∞ в первоначально непрерывном околозвуковом обтекании фиксированного профиля [1]), оказалась неправильной [2]). Причину такого странного положения вещей объясняет теорема Никольского и Таганова [3]):

Если в непрерывном потенциальном течении существует местная сверхзвуковая зона, примыкающая к дуге границы, то эта дуга должна быть строго выпуклой.

Согласно этой теореме, доказательство которой будет приведено ниже, любое трансзвуковое обтекание является неустойчивым, так как его всегда можно разрушить сколь угодно малым изменением профиля, а именно заменой некоторого участка границы в сверхзвуковой области отрезком прямой или вогнутой дугой [4]). Таким образом, естественным выводом из теоремы Никольского и Таганова является *некорректность задачи о непрерывном трансзвуковом обтекании фиксированного профиля в рамках теории идеальной жидкости.* Этот факт был замечен независимо друг от друга Франклем, Гудерлеем и Буземаном [5]); точное доказательство неустойчивости трансзвукового обтекания опубликовано Моравец в 1957 году [6]).

Объяснение исследуемого явления связано, по-видимому, с влиянием вязкости в пограничном слое. Внешняя граница пограничного

[1]) Эти утверждения относятся только к теории идеальной жидкости; если принимать во внимание влияние вязкости, то развитие течения при увеличении M_∞ будет несколько иным.

[2]) Friedrichs K. O., *Comm. Pure Appl. Math.*, **1**, 287 (1948); более простое доказательство приведено в работе Колоднера и Моравец (сб. *Механика*, № 2 (24), 14 (1954)]; см. также статью Менуэлла [сб. *Механика*, № 5 (33), 64 (1955)].

[3]) Никольский А. А., Таганов Г. И., *Прикл. мат. и мех.*, **10**, 481 (1946).

[4]) Используя метод, аналогичный методу Никольского и Таганова, Г. Джонсон (Johnson H., Masters thesis, U. of Minn.) показал, что осесимметричное течение также неустойчиво относительно малых изменений границы.

[5]) Франкль Ф. И., *Прикл. мат. и мех.*, **11**, 192 (1947); Guderley G., Wright Field Rep. № F-TR-1171-ND; Busemann A., *J. Aeronaut. Sci.*, **16**, 337 (1949).

[6]) Morawetz C. S., *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**, 107 (1957); **11**, 129 (1958).

слоя предположительно принимает форму, соответствующую характеру невязкого течения вне пограничного слоя; при увеличении M_∞ в некоторой точке внешней границы пограничного слоя кривизна становится очень большой и в течении возникает ударный разрыв. Это предположение подтверждается результатами работы Фридрихса, на которую мы ссылались выше. Линь считает, что задача о трансзвуковых течениях имеет решение для *аналитических* выпуклых профилей; если это действительно так, то на основе приведенных выше соображений о роли пограничного слоя мы получаем нечто вроде теоремы существования для трансзвуковых обтеканий профиля.

В соответствии с вышесказанным мы имеем основания считать, что *вне* пограничного слоя трансзвуковое течение является непрерывным. Некоторые сведения о возможном расположении местных сверхзвуковых зон можно получить из теоремы Никольского — Таганова; например, раньше всего скорость звука достигается на выпуклых участках профиля, там же раньше всего появляется скачок. Теорема применима также к местным сверхзвуковым зонам внутри плоского сопла и может быть использована для отыскания точки с числом Маха $M = 1$ при околозвуковом обтекании клина.

Доказательство теоремы Никольского — Таганова мы разобьем на три части.

1. *Пусть область течения разбивается на зоны дозвукового и сверхзвукового течения звуковой линией C^*, на которой* $M = 1$. *Тогда при обходе C^*, оставляющем сверхзвуковую зону справа, угол наклона вектора скорости монотонно уменьшается на C^** (рис. 9).

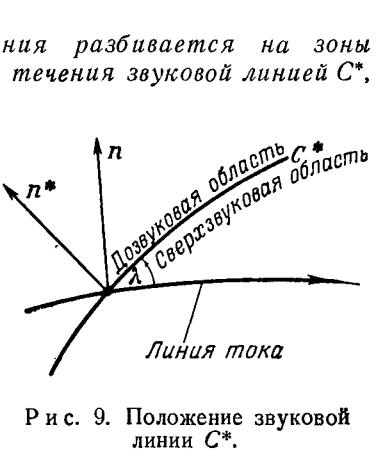


Рис. 9. Положение звуковой линии C^*.

Обозначим через s и s^* соответственно длину дуги линии тока и линии C^*. Тогда (см. рис. 9)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s^*} = \frac{\partial \vartheta}{\partial s}\cos\lambda + \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\sin\lambda. \tag{52.1}$$

Так как на линии C^* выполняются условия $M = 1$ и $q = q_* = \text{const}$, то в силу уравнений (41.4) в естественных координатах соотношение (52.1) можно записать так:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s^*} = \frac{1}{q_*}\frac{\partial q}{\partial n}\cos\lambda = \frac{\cos^2\lambda}{q_*}\frac{\partial q}{\partial n^*}.$$

Поскольку нормаль n^* направлена в сторону зоны дозвукового течения, мы имеем $\partial q/\partial n^* \leqslant 0$ и, следовательно, $\partial\vartheta/\partial s^* \leqslant 0$. Утверждение леммы доказано.

В соответствии с этой леммой сверхзвуковая зона не может лежать внутри области течения, так как при полном обходе границы внутренней сверхзвуковой зоны мы получили бы противоречие с однозначной определенностью угла ϑ.

2. *Образ местной сверхзвуковой зоны* $\mathfrak{D}$, *примыкающей к границе области течения, представляет собой однократное покрытие некоторой области плоскости годографа.*

Рассмотрим характеристику C_- с началом в некоторой точке P, расположенной на профиле в сверхзвуковой зоне. Эта характеристика кончается в некоторой точке A звуковой линии, так как она, очевидно, не может вернуться на профиль. Пусть Q — переменная точка дуги AP, и пусть R обозначает точку пересечения звуковой линии с характеристикой C_+, выходящей из Q (см. рис. 10). В плоскости

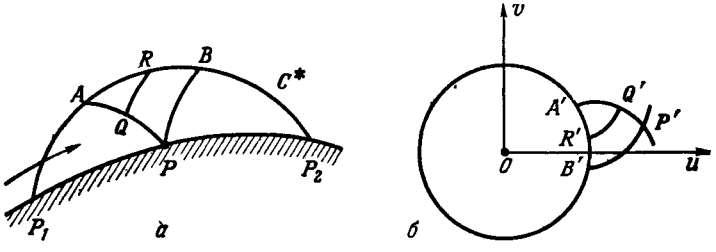


Рис. 10. Локальная сверхзвуковая зона.

а — локальная сверхзвуковая зона в плоскости течения, *б* — образ локальной сверхзвуковой зоны в плоскости годографа.

годографа образы этих точек A', R', B' имеют указанный порядок, так как $\partial\vartheta/\partial s^* \leqslant 0$. Поэтому, когда точка Q проходит дугу AP от точки A к точке P, точка R' движется от A' к B', а точка Q' — от A' к P'. Теперь легко видеть, что при перемещении A вдоль звуковой линии образ области $\mathfrak{D}$ на плоскости годографа покрывается однократно.

3. Переходим к доказательству непосредственного утверждения теоремы Никольского и Таганова. Пусть Λ обозначает образ дуги профиля P_1PP_2 на плоскости годографа. При

движенин по кривой Λ P_1' к P_2' (положительное направление отсчета s) угол ϑ должен монотонно убывать, так как в противном случае кривая Λ пересекла бы некоторую характеристику дважды, а это невозможно в силу того, что оба конца характеристики не могут лежать на границе области течения. Следовательно, $\partial\vartheta/\partial s \leqslant 0$ на дуге P_1PP_2 и рассматриваемая дуга границы должна быть выпуклой. (Дальнейшее исследование показывает, что эта дуга должна быть *строго* выпуклой, однако мы этого доказывать не будем, так как последнее утверждение не содержит существенно нового результата.)

Приведенные выше рассуждения показывают также, что образ сверхзвуковой зоны на плоскости годографа лежит в области, ограниченной характеристикой Γ_+, выходящей из точки P_2', и характеристикой Γ_-, выходящей из точки P_1'. Таким образом, максимум модуля скорости q не может превосходить $\bar{q}$, определенного по формуле

$$\tau(\bar{q}) = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2},$$

где $\vartheta = \pm\tau(q)$ — уравнение характеристических кривых. Для тонких профилей углы ϑ_1 и ϑ_2 мало отличаются друг от друга и, следовательно, величина скорости в местной

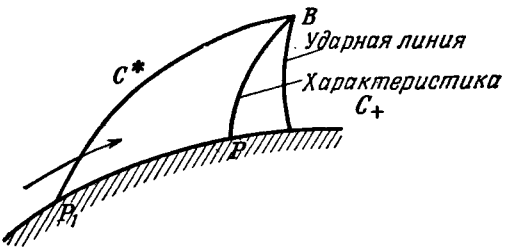


Рис. 11. Локальная сверхзвуковая зона, ограниченная ударной линией.

сверхзвуковой зоне непрерывного течения не может быть велика.

Читатель может без труда убедиться, что результаты пунктов 1, 2 и 3 применимы в равной мере и к сверхзвуковой области P_1BP, показанной на рис. 11. Так как указанная

конфигурация по наблюдениям вполне устойчива, мы имеем здесь еще один пример той определяющей роли, которую играет пограничный слой в сглаживании неровностей профиля в трансзвуковом течении.

53. Исключение давления и плотности из уравнений движения. Представляет определенный интерес задача об исключении p, ρ и S из системы уравнений (35.1) — (35.4) и выяснения посредством этого условий существования и единственности поля скоростей произвольного движения жидкости. В общей постановке эта задача была решена недавно Беркером [1]), однако из-за сложности исследуемого вопроса мы рекомендуем читателю по поводу общей задачи обратиться к первоисточнику. В работе Беркера получено также несколько новых точных решений.

Исследование вопроса несколько упрощается, если ограничиться плоскими установившимися течениями. Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями Эриксен [2]) получил систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M^2}{\partial s} &= \frac{KM^2}{M^2-1}\,[2+(\gamma-1)M^2], \\ \frac{\partial M^2}{\partial n} &= \frac{M^2(M^2-1)}{K}\left[\frac{\partial K}{\partial n}+\frac{\partial \varkappa}{\partial s}-2K\varkappa-M^2\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial s}+yK\varkappa\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{53.1}$$

в которую входят только число Маха и величины, определяющие геометрическую картину течения ($\varkappa$ и K — кривизны линий тока и их ортогональных траекторий). Из условия совместности системы (53.1), т. е. из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)=\varkappa\frac{\partial f}{\partial s}+K\frac{\partial f}{\partial n}, \tag{53.2}$$

где $f=M^2$, он нашел, что

$$A_3G^3+A_2G^2+A_1G+A_0=0; \tag{53.3}$$

здесь $G=M^2-1$, а коэффициенты A_3, A_2, A_1 и A_0 зависят только от $\varkappa$, K и их производных. Отметим два интересных следствия этого результата:

[1]) Berker R., *C. R. Acad. Sci., Paris*, **242**, 342 (1956).
[2]) Ericksen J. L., *Bull. Tech. Univ. Istanbul*, **6**, 1 (1953).

1. *Если известна картина линий тока (например, по фотографии), то уравнение* (53.3) *позволяет определить число Маха, а следовательно, и скорости соответствующего течения.*

2. *Не может существовать более трех различных течений, соответствующих одной и той же картине линий тока*[1]).

В случае безвихревого плоского движения вопрос об исключении давления и плотности был решен нами при выводе уравнений (41.4) в естественных координатах. Применение к этим уравнениям условия совместности (53.2), где $f = \log q$, приводит к квадратному уравнению относительно G, поэтому не может существовать более двух различных безвихревых течений с заданной картиной линий тока. Используя другой метод, Эриксен[2]) показал, что на самом деле существует только одно такое течение. Точнее, им доказано следующее утверждение:

Два плоских безвихревых течения совершенного газа, имеющих одну и ту же картину линий тока, являются динамически подобными.

---

[1]) См. также статью Томаса и Бернштейна [Thomas T. Y., Bernstein B., *J. Rational Mech. Anal.*, **1**, 703 (1955)].

[2]) Ericksen J. L., *J. Math. Phys.*, **31**, 63 (1952).

ГЛАВА 6

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Хорошо известные экспериментальные наблюдения показывают, что в течении газа могут существовать поверхности, при переходе через которые величины давления и плотности резко меняются. Доводы физического и математического характера в пользу существования таких поверхностей — скачков, или ударных волн, — также хорошо известны и освещены в широком круге работ по газовой динамике. За недостатком места мы этого обоснования не приводим[1]). Данная глава посвящена основным теоретическим результатам исследования задачи об ударных волнах. Будут выведены, в частности, соотношения на ударном фронте, установлены некоторые простые свойства ударных волн и описана их структура.

54. Соотношения на разрыве. С математической точки зрения ударная волна представляет собой поверхность $\Sigma = \Sigma(t)$ в области течения, при переходе через которую хотя бы одна из переменных $\mathbf{v}$, ρ, p и S меняется скачком. При выводе соотношений, выполняющихся на ударном фронте, мы будем употреблять индекс 1 для обозначения величин по одну сторону от ударной волны и индекс 2 для обозначения величин по другую ее сторону. (Впоследствии индекс 1 будет относиться к течению перед ударной волной, но в данный момент оба индекса вполне равноправны.) Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор нормали к поверхности $\Sigma(t)$, направленный в сторону области 2, а через G — скорость распро-

[1]) См. книгу [21], § 50, 117, и статью Кабанна в данной Энциклопедии, том IX.

странения поверхности в этом направлении. Тогда значения переменных на двух сторонах поверхности Σ связаны следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} [\rho U] &= 0, \\ [\rho U \mathbf{v} + p\mathbf{n}] &= 0, \\ \left[\rho U\left(\frac{1}{2}q^2 + E\right) + p\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right] &= 0, \\ [\rho U S] &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{54.1}$$

В этих уравнениях величина $U = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} - G$ представляет собой нормальную составляющую скорости течения, отнесенную к движущейся поверхности Σ, а квадратные скобки обозначают скачок величины при переходе через поверхность разрыва, т. е.

$$[f] = f_2 - f_1.$$

Первые три соотношения (54.1) выражают соответственно сохранение массы, количества движения и энергии жидкости при переходе через Σ [1]). Последнее соотношение является следствием постулата (33.5) относительно изменения энтропии в объеме, движущемся вместе с жидкостью [2]). Обычно выписанные выше уравнения обосновываются при помощи рассуждений, более или менее независимых от постулатов, изложенных в гл. 2 и в гл. 4, так что целесообразно показать

[1]) Понятие поверхности разрыва впервые ввел Стокс; он же получил первые два соотношения (54.1) [Stokes G., *Phil. Mag.* (3), **33**, 349 (1848)]. Интересны замечания Стокса по этому поводу: „Эти выводы кажутся, конечно, довольно необычными, но еще более удивительно, что ...“; „этот результат, однако, настолько странен ...“ и т. д.

То обстоятельство, что при переходе через ударный фронт энергия должна сохраняться, неявно указывается уже в работе Ренкина [Rankine W. J. M., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **160**, 277 (1870)]: точная формулировка принадлежит Гюгонио [Hugoniot H., *J. Ecole Polytech.*, **57**, 1 (1887); **58**, 1 (1889)].

[2]) Возрастание энтропии при переходе через скачок уплотнения было отмечено впервые Цемпленом [Zemplén G., *C. R. Acad. Sci., Paris*, **141**, 710 (1905)]. Замечание Цемплена было существенным шагом вперед, хотя и кажется теперь довольно тривиальным. Во время опубликования его работы Кельвин и Рэлей считали, что на ударном фронте $[S] = 0$. Это заставляло их усомниться в правомерности гипотезы об ударных волнах при изучении свойств реальных газов, так как первые три условия (54.1) несовместимы с предполагавшимся верным соотношением $[S] = 0$. Стокс также разделял их точку зрения, и в собрании его сочинений,

здесь, как выводятся условия на разрыве непосредственно из этих основных постулатов.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что поверхность Σ разделяет две области, в каждой из которых течение непрерывно, причем все параметры течения имеют на каждой из сторон Σ вполне определенные пределы. Будет предполагаться также, что эти пределы по крайней мере для одной из переменных не совпадают. Рассмотрим объем $\mathfrak{V}$, движущийся вместе с жидкостью и такой, что Σ разбивает $\mathfrak{V}$ на две части. В силу уравнения (5.2) имеем, что

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{V}} \rho\, dv = 0. \tag{54.2}$$

По аналогии с рассуждениями, проведенными в гл. 2, хотелось бы для преобразования левой части соотношений (54.2) воспользоваться формулой (4.1). Однако при переходе через Σ возможны разрывы как плотности, так и скорости, и поэтому формула (4.1) должна быть модифицирована и записана в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{V}} f\, dv = \int_{\mathfrak{V}} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v}\right) dv + \int_{\Sigma} [fU]\, da. \tag{54.3}$$

В последнем члене этого уравнения, которое легко можно получить из уравнения (4.2), интегрирование ведется по той части поверхности Σ, которая лежит внутри объема $\mathfrak{V}$. Воспользовавшись уравнением неразрывности, мы получаем из уравнений (54.2) и (54.3) следующее условие:

$$\int_{\Sigma} [\rho U]\, da = 0.$$

Для доказательства первого соотношения (54.1) достаточно воспользоваться теперь произвольностью площадки Σ, по которой производится интегрирование. Остальные соотноше-

вышедшем в 1848 г., заметна тенденция избежать применения условий ударного перехода. Следует добавить, что гидродинамики континента вообще не принимали участия в этой дискуссии, а более или менее правильный вывод соотношений на ударном фронте был найден приблизительно в 1915 г. (вызывает, между прочим, удивление тот факт, что Ламб продолжал настаивать на старых ошибочных представлениях).

ния (54.1) проверяются аналогично при помощи уравнений (6.1), (33.3) и (33.5); при этом предполагается, конечно, что $\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$ и $\mathbf{q} = 0$. (С теоретической точки зрения представляет интерес изучение соотношений на ударном фронте в вязкой жидкости. Это изучение приводит к ряду глубоких результатов [1]), однако в настоящее время неизвестны экспериментальные факты, объяснение которых потребовало бы привлечения теории ударных волн в вязкой жидкости.)

В оставшейся части этого пункта мы изложим некоторые элементарные следствия соотношений на ударном фронте. Удобно рассматривать отдельно два возможных случая:

I. $U_1 = U_2 = 0$;

II. $U_1 \neq 0, \quad U_2 \neq 0$.

В первом случае поверхность разрыва не является ударной волной в строгом значении этого слова, так как частицы газа не пересекают этой поверхности, которая просто движется вместе с газом и разделяет две зоны с различной плотностью и температурой. При этом давление и нормальная составляющая скорости имеют одни и те же значения по обе стороны от Σ. Этого простого и сравнительно неинтересного случая мы в дальнейшем касаться не будем. Во втором

[1]) Основная работа по этому вопросу принадлежит Дюгему [Duhem P., *Recherches sur l' hydrodynamique*, *Ann. Toulouse* (2) (1901—1903); перепечатана в Париже в 1903—1904 гг.]. К сожалению, понимание работы Дюгема очень затруднительно из-за запутанности изложения, усугубленной устаревшими обозначениями и поразительным обилием символов. В силу большой важности некоторых результатов представлялось полезным переработать статью Дюгема, что и было сделано автором. Особое внимание было обращено при этом на следующие два результата Дюгема: (A) в вязкой жидкости невозможны особые поверхности нулевого порядка (ударные волны) и (B) особые поверхности первого порядка (см. п. 51) в невязкой теплопроводной жидкости распространяются с ньютоновской скоростью звука. Наше исследование этих результатов привело к следующим выводам: 1) в вязкой жидкости *возможны* ударные волны, на которых выполняются основные законы сохранения; 2) если, однако, постулировать, что при переходе через особую поверхность в вязкой жидкости $[\mathbf{v}] = [T] = 0$, то возможны только контактные разрывы (по сути дела — это первый результат Дюгема); 3) в невязкой теплопроводной жидкости особые поверхности *могут* распространяться с ньютоновской скоростью звука. Подробное изложение этих результатов будет опубликовано в *Journal of Mathematics and Mechanics*.

случае мы имеем дело с ударной волной. Без ограничения общности можно считать, что

$$U_1 > 0, \quad U_2 > 0; \tag{54.4}$$

в противном случае мы могли бы поменять местами стороны 1 и 2 (иначе говоря, изменить направление нормали $\mathbf{n}$ на противоположное). Геометрический смысл условия (54.4) заключается в том, что жидкость входит через сторону 1 и выходит через сторону 2 поверхности ударной волны.

Теперь, обозначив через $\mathbf{v}_t$ составляющую вектора скорости $\mathbf{v}$, лежащую в касательной плоскости поверхности Σ, и приняв во внимание положительность U_1 и U_2, мы можем записать соотношения (54.1) в более симметричном виде, а именно так:

$$\left.\begin{aligned} [\rho U] &= 0, \\ [\rho U^2 + p] &= 0, \quad [\mathbf{v}_t] = 0, \\ \left[\tfrac{1}{2} U^2 + I\right] &= 0, \\ [S] &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{54.5}$$

где $I = E + p/\rho$ — удельная энтальпия. В установившемся движении фронт ударной волны покоится и из третьего и четвертого соотношений (54.5) следует, что

$$\left[\tfrac{1}{2} q^2 + I\right] = 0. \tag{54.5а}$$

Следовательно, уравнение Бернулли для установившегося течения справедливо даже в том случае, когда в течении существуют ударные волны.

Представляет интерес выделение из системы (54.5) соотношений между термодинамическими переменными, в которые другие переменные не входят. Рассмотрим с этой целью поток массы m через поверхность ударной волны:

$$m = \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2. \tag{54.6}$$

Тогда из первого и второго соотношений (54.5) следует, что

$$p_2 - p_1 = \rho_1 U_1^2 - \rho_2 U_2^2 =$$
$$= m(U_1 - U_2) = m^2(\tau_1 - \tau_2) = U_1 U_2 (\rho_2 - \rho_1); \tag{54.7}$$

здесь через τ обозначен объем единичной массы. Из первого, второго и третьего равенств, содержащихся в формуле (54.7), следуют соответственно соотношения

$$(p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1) = U_1^2 - U_2^2, \tag{54.8}$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\tau_2 - \tau_1} = -m^2, \tag{54.9}$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = U_1 U_2. \tag{54.10}$$

Наконец, из формул (54.8) и (54.5) получаем, что

$$(p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1) = 2(I_2 - I_1). \tag{54.11}$$

Эта важная формула была впервые получена Гюгонио, однако для случая совершенного газа она была известна еще Ренкину. При заданном начальном состоянии (p_1, τ_1) соотношение (54.11) определяет все возможные термодинамические состояния (p_2, τ_2), которые могут возникнуть при переходе через ударный фронт. Эквивалентом условия (54.11) является соотношение

$$(p_2 + p_1)(\tau_2 - \tau_1) = 2(E_2 - E_1).$$

Важным свойством ударных волн является то, что они могут вносить завихренность в первоначально безвихревое течение. Обычно это свойство связывают с возможностью возрастания энтропии при условии, что энергия (точнее, энтальпия торможения H) при переходе через фронт ударной волны не меняется. Такие рассуждения применимы только в случае установившегося движения, однако в ряде появившихся недавно работ [1]) этот результат был обобщен на неустановившиеся движения.

Следует отметить интересную простую формулу, определяющую завихренность за фронтом ударной волны в случае, когда поток перед волной является равномерным; для установившегося течения эта формула имеет следующий вид [2]):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{\tau_2}\, \mathbf{n} \times \operatorname{grad}_\Sigma m; \tag{54.12}$$

[1]) Hayes W. D., *J. Fluid Mech.*, 2, 595 (1957); Kanwal R. P., *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1, 225 (1958).

[2]) Lighthill M. J., *J. Fluid Mech.*, 2, 1 (1957); Hayes W. D., *J. Fluid Mech.*, 2, 595 (1957).

здесь $\operatorname{grad}_\Sigma$ — поверхностный градиент и $m = \rho U$. Доказательство этой формулы довольно громоздко, поэтому мы ограничимся тем, что укажем некоторые следствия, вытекающие из равенства (54.12). Очевидно, во-первых, что вектор ω направлен по касательной к поверхности разрыва. Заметим также, что для плоского или осесимметричного течения формула (54.12) принимает более простой вид:

$$\omega = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\rho_1 \rho_2} K v_t, \tag{54.13}$$

где K — кривизна линии разрыва, а v_t — касательная составляющая скорости [1]). Из формулы (54.13) следует, что завихренность за фронтом будет отлична от нуля в тех точках линии разрыва, в которых кривизна $K \neq 0$ и угол между касательной к линии разрыва и направлением скорости набегающего потока не равен $\pi/2$. Заметим, наконец, что величина завихренности имеет по отношению к интенсивности $\tau_1 - \tau_2$ ударной волны второй порядок малости, в то время как изменение энтропии является величиной третьего порядка.

Изучение свойств ударного перехода в течении произвольной идеальной жидкости будет продолжено в п. 56. В частности, будет показано, что скачок энтропии при переходе через ударный фронт имеет по $\tau_1 - \tau_2$ третий порядок малости. Таким образом, рассматривая последовательность ударных волн, интенсивность которых стремится к нулю, мы имеем в пределе

$$\lim U_1^2 = \lim U_2^2 = \lim \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = c^2.$$

Иначе говоря, *скорость распространения скачка бесконечно малой интенсивности относительно жидкости в пределе равна скорости звука*. Этот результат еще раз показывает правильность введенного ранее определения скорости звука c.

55. Соотношения на разрыве в случае совершенного газа. Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями

$$I = \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p\tau.$$

[1]) Truesdell C., *J. Aeronaut. Sci.*, 19, 826 (1952).

Это позволяет записать соотношение Гюгонио в более удобной форме [1]):

$$\left(p_2+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,p_1\right)\left(\tau_2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\tau_1\right)=\frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}\,p_1\tau_1. \quad (55.1)$$

Соотношение (55.1) при заданном начальном состоянии (p_1, τ_1) определяет все возможные термодинамические состояния (p_2, τ_2), которые могут возникнуть при переходе через поверхность Σ ударной волны. Легко видеть, что совокупность конечных состояний (p_2, τ_2) в плоскости (p, τ) образует равнобочную гиперболу с асимптотами

$$p=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,p_1,$$

$$\tau=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\tau_1.$$

Эта кривая называется *кривой Гюгонио*. Условие $S_2 \geqslant S_1$ выделяет ту часть гиперболы, которая лежит выше точки (p_1, τ_1), следовательно,

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\tau_1<\tau_2<\tau_1$$

или

$$\rho_1<\rho_2<\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\rho_1;$$

таким образом, величина скачка плотности при переходе через ударную волну ограничена сверху. На рис. 12 показаны адиабата и кривая Гюгонио, проходящие через точку

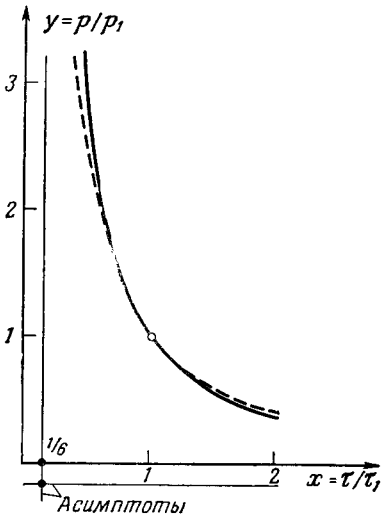


Рис. 12. Кривая Гюгонио и адиабата для $\gamma = 7/5$. На рисунке изображены также асимптоты кривой Гюгонио.

——— кривая Гюгонио $(6x-1)(6y+1)=35$,
— — — адиабата $x^{7/5}y=1$.

[1]) Соотношение Гюгонио для совершенного газа может быть записано также в следующих формах:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{(\gamma+1)\rho_2-(\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1-(\gamma-1)\rho_2}, \quad \frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1}=\gamma\,\frac{p_2+p_1}{\rho_2+\rho_1}.$$

(p_1, τ_1); в точке (p_1, τ_1) эти кривые имеют касание второго порядка.

Если заданы состояние жидкости перед фронтом ударной волны и величина скорости распространения разрыва G, то состояние за фронтом определяется полностью. В частности, вводя „относительные числа Маха"

$$M_1 = U_1/c_1, \quad M_2 = U_2/c_2,$$

мы в случае совершенного газа получаем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{U_2 - U_1}{U_1} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1} = \frac{2}{\gamma+1}\,\frac{1-M_1^2}{M_1^2}, \\ &\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\,(M_1^2 - 1), \\ &\frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\,\frac{(\gamma M_1^2+1)(M_1^2-1)}{M_1^2}, \\ &1 - M_2^2 = \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (55.2)$$

Достаточно доказать первое из этих соотношений, после этого все остальные проверяются просто. В силу равенств (54.9) и (54.6)

$$p_2 - p_1 = m^2(\tau_1 - \tau_2) = \gamma p_1 M_1^2 (1 - \tau_2/\tau_1); \qquad (55.3)$$

нетрудно убедиться в том, что, исключив из этого уравнения величину $p_2/p_1 - 1$ при помощи уравнения (55.1), мы получим первое из соотношений (55.2).

Приращение энтропии при переходе через ударный фронт определяется формулой

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \log\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{\gamma}. \qquad (55.4)$$

Несколько в другом виде можно записать это соотношение в случае установившегося движения. Из уравнения (54.5а) следует, что энтальпия торможения перед фронтом ударной волны такова же, как и за ее фронтом, а это в свою очередь означает равенство температур торможения перед фронтом ударной волны и за ее фронтом. Принимая во внимание, что энтро-

пия постоянна вдоль линий тока, мы получаем отсюда соотношение

$$\frac{p_2\tau_2^\gamma}{p_1\tau_1^\gamma}=\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\gamma}=\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{1-\gamma}, \tag{55.5}$$

где величины с индексом 0 относятся к покоящейся жидкости. Учитывая соотношение (55.5), мы можем записать теперь формулу (55.4) в следующем виде:

$$S_2-S_1=\mathcal{R}\log\frac{p_{01}}{p_{02}}. \tag{55.6}$$

В силу условия (54.5а) и формулы $I=c^2/\gamma-1$ критическая скорость q_* и критическая энтальпия I_* также не меняются при переходе через ударный фронт. Поэтому приведенные выше рассуждения служат одновременно доказательством следующей цепочки равенств, которая часто оказывается полезной:

$$\frac{p_{01}}{p_{02}}=\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}=\frac{p_{*1}}{p_{*2}}=\frac{\rho_{*1}}{\rho_{*2}}=\frac{Q_{*1}}{Q_{*2}}. \tag{55.7}$$

Величина этого отношения приведена в последнем столбце табл. 1 (см. п. 37).

Наконец, так как $p_2/p_1>1$, число Маха M_1 должно быть больше единицы [см. второе уравнение (55.2)]. Это означает, что $U_1>c_1$, т. е. что *относительная нормальная скорость потока перед фронтом ударной волны больше скорости звука*. С другой стороны, $M_2<1$ и, следовательно, *относительная нормальная скорость за ударным фронтом меньше скорости звука* [1]). Как будет показано в следующем пункте, эти свойства ударного фронта сохраняются и в случае движения произвольного газа. Для установившегося потока из первого уравнения (55.2) и уравнения Бернулли следует, что

$$v_{1n}v_{2n}=U_1U_2=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}U_1^2+\frac{2}{\gamma+1}c_1^2=$$

$$=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(q_{\max}^2-v_t^2)=q_*^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}v_t^2.$$

[1]) Эти утверждения дают некоторую информацию о строении ударного фронта; см. [21], стр. 303.

Эта интересная формула была впервые получена Прандтлем. Если поверхность разрыва ортогональна направлению потока, то формула Прандтля сводится к простому соотношению:

$$q_1 q_2 = c_*^2.$$

56. Основные свойства ударного перехода. В этом пункте будут установлены четыре важных результата относительно свойств состояний газа перед ударной волной и за ее фронтом.

I. *Приращение энтропии в ударном переходе имеет третий порядок малости по отношению к интенсивности разрыва* $(\tau_1 - \tau_2)$.

II. *В ударной волне происходит сжатие газа, т. е.* $p_2 > p_1$, $\tau_2 < \tau_1$.

III. *Нормальная составляющая скорости потока относительно ударного фронта является сверхзвуковой перед фронтом и дозвуковой за фронтом.*

IV. *Параметры течения перед фронтом ударной волны и величина относительной нормальной скорости* U_1 *полностью определяют значения параметров течения за фронтом ударной волны.*

Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями справедливость свойств II—IV была показана в предыдущем пункте. Интересно, что эти же свойства выполняются и для произвольного газа при довольно широких предположениях термодинамического характера [1]). Точнее, мы потребуем, чтобы

1) *термодинамическое состояние* Z *газа определялось единственным образом величинами давления и удельного объема*;

2) *имели место неравенства* [2])

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_S < 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}\right)_S > 0.$$

---

[1]) Это обобщение принадлежит Г. Бёте и Г. Вейлю; см. работу Вейля [W e y l H., *Comm. Pure Appl. Math.*, 2, 103 (1949)]. Несколько с других позиций результаты данного параграфа изложены в недавно опубликованной работе Кауэна [C o w a n R. D., *J. Fluid Mech.*, 3, 531 (1958)].

[2]) Эти предположения уже были сформулированы нами при изложении общих термодинамических принципов; см. уравнения (30.7) и (37.6).

[Предполагается также, что все точки первого квадранта плоскости (p, τ) определяют возможные термодинамические состояния. Если условия 1 и 2 не выполняются во всем квадранте, наши рассуждения будут справедливы (с незначительными изменениями) в любой *выпуклой* области, в которой эти условия имеют место.]

Прежде чем перейти к доказательству свойств I—IV, мы заметим, что в наших предположениях адиабаты в плоскости (p, τ) представляют собой выпуклые монотонно убывающие кривые (рис. 13). Более того, можно было бы показать, что из условий 1 и 2 следует, что величина $(\partial S/\partial p)_\tau$ всюду имеет один и тот же знак. Мы будем предполагать для определенности, что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_\tau > 0; \qquad (56.1)$$

на практике, как правило, имеет место именно этот случай.

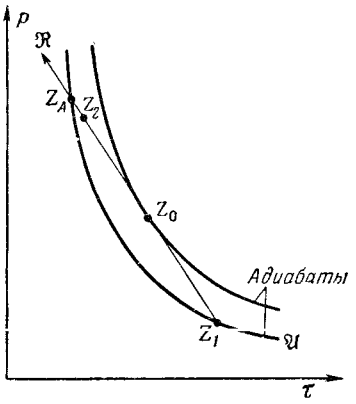


Рис. 13. Адиабаты в плоскости (p, τ).

[Известно лишь несколько примеров, когда имеет место обратное неравенство; наиболее интересным из них является вода при температурах ниже $+4°$ С. Случай такого обратного неравенства почти не требует дополнительных рассуждений.] В силу неравенства (56.1) адиабаты, соответствующие бо́льшим значениям энтропии, расположены в плоскости (p, τ) выше и правее, чем адиабаты, соответствующие меньшим значениям энтропии.

Доказательство свойств I—IV. Рассмотрим функцию

$$H(p, \tau) = 2(I - I_1) - (p - p_1)(\tau + \tau_1), \qquad (56.2)$$

где (p_1, τ_1) — некоторая *фиксированная* точка. Легко видеть, что кривая Гюгонио $\mathfrak{H}$, соответствующая состоянию $Z_1 = (p_1, \tau_1)$, представляет собой геометрическое место точек плоскости (p, τ), для которых $H = 0$. Любое состояние $Z_2 = (p_2, \tau_2)$, которое может быть достигнуто из состояния Z_1 при ударном переходе, должно лежать на $\mathfrak{H}$. Из соотноше-

ния $dI = T\,dS - \tau\,dp$ следует, что дифференциал функции $H(p, \tau)$ имеет вид

$$dH = 2T\,dS - [(p - p_1)\,d\tau + (\tau_1 - \tau)\,dp]. \qquad (56.3)$$

Так как на кривой Гюгонио $dH = 0$, то из соотношения (56.3) следует что

$$dS = 0 \quad (\text{вдоль } \mathfrak{H}) \text{ в точке } Z_1.$$

Введя в рассмотрение второй и третий дифференциалы функции H и вычислив их значение в точке Z_1, найдем, что

$$d^2S = 0, \quad 2T\,d^3S = dp\,d^2\tau - d\tau\,d^2p$$

вдоль $\mathfrak{H}$ в точке Z_1. Выбрав в качестве независимой переменной τ, мы получим $dS = d^2S = 0$ и $d^3S > 0$ для $d\tau < 0$. Таким образом, утверждение I доказано [1]).

Обозначим через

$$r = \frac{p - p_1}{\tau - \tau_1}$$

угловой коэффициент прямой, соединяющей точки Z_1 и Z. С учетом этого обозначения формулу (56.3) можно записать так:

$$dH = 2T\,dS + (\tau_1 - \tau)^2\,dr. \qquad (56.4)$$

В силу выпуклости адиабаты $\mathfrak{A}$, проходящей через Z_1, угловой коэффициент r возрастает при перемещении вдоль кривой $\mathfrak{A}$ слева направо. Из формулы (56.4) теперь следует, что

$dH > 0$ при перемещении вдоль $\mathfrak{A}$ слева направо.

Так как $H = 0$ в точке Z_1, это означает, что $H < 0$ на верхней части $\mathfrak{A}$ и $H > 0$ на ее нижней части (см. рис. 13). Если обозначить через $\mathfrak{R}$ луч $r = \text{const}$, проходящий через точку Z_1, то вдоль $\mathfrak{R}$ мы имеем $dH = 2T\,dS$.

Рассмотрим луч $\mathfrak{R}$, который имеет с $\mathfrak{A}$ только одну общую точку Z_1. Тогда в силу неравенства (56.1) при движении вдоль $\mathfrak{R}$ из точки Z_1 дифференциал dS будет все

---

[1]) В действительности вдоль кривой Гюгонио для $S - S_1$ имеет место следующее разложение:

$$S - S_1 = \frac{1}{12T_1}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}\right)_S\Big|_{Z_1}(\tau_1 - \tau)^3 + \ldots.$$

время иметь либо знак плюс, либо знак минус (в зависимости от того, выше или ниже $\mathfrak{A}$ лежит рассматриваемый нами луч). Так как $dH = 2T\,dS$, такой луч не может иметь отличных от Z_1 точек, в которых $H = 0$. Пусть теперь луч $\mathfrak{R}$ пересекает адиабату $\mathfrak{A}$ в точке Z_A, лежащей на верхней части $\mathfrak{A}$. В силу выпуклости адиабаты из геометрических соображений очевидно, что при движении вдоль $\mathfrak{R}$ из точки Z_1 значение S сначала увеличивается — на отрезке от точки Z_1 до точки Z_0 (см. рис. 13), — а затем уменьшается. Так как $dH = 2T\,dS$, то при движении вдоль $\mathfrak{R}$ из точки Z_1 величина H также сначала увеличивается, а затем уменьшается. Но в точке Z_A, как уже было указано, $H < 0$, и, следовательно, на $\mathfrak{R}$ существует единственная лежащая между Z_0 и Z_A точка Z_2, в которой $H = 0$. Энтропия в этой точке, очевидно, больше энтропии в точке Z_1.

Наконец, если $\mathfrak{R}$ пересекает адиабату $\mathfrak{A}$ в ее нижней части, то из тех же соображений следует, что на $\mathfrak{R}$ не может быть более одной точки, где $H = 0$. Такая точка Z будет лежать *ниже* $\mathfrak{A}$ (напомним, что $H > 0$ на нижней части $\mathfrak{A}$), и, следовательно, в этой точке $S < S_1$.

Таким образом, мы показали, что кривая Гюгонио представляет собой кривую без точек самопересечения, проходящую через точку Z_1, причем $S > S_1$ на верхней части этой кривой и $S < S_1$ на ее нижней части. Из пятого соотношения (54.5) следует, что при ударном переходе из состояния Z_1 перед фронтом могут быть достигнуты только те состояния Z, которые расположены на верхней части кривой Гюгонио. Так как на этой части кривой $p > p_1$ и $\tau < \tau_1$, утверждение II доказано.

Для доказательства утверждения III заметим (см. рис. 13), что для ударного перехода из состояния Z_1 в состояние Z_2 должны выполняться следующие неравенства:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_S\Big|_{Z_2} < r < \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_S\Big|_{Z_1}. \tag{56.5}$$

Так как $(\partial p/\partial \tau)_S = -\rho^2 c^2$ и [см. уравнение (54.9)]

$$r = -m^2 = -\rho^2 U^2,$$

из двух неравенств (56.5) следует соответственно, что $c_2 > U_2$ и $U_1 > c_1$, т. е. что величина нормальной составляющей

относительной скорости перед скачком больше скорости звука, а за скачком меньше скорости звука.

Наконец, если заданы состояние перед скачком Z_1 и нормальная составляющая U_1 относительной скорости, то для определения состояния за скачком нужно найти точку пересечения верхней части кривой Гюгонио и луча $\mathfrak{R}$ с угловым коэффициентом $r = -\rho_1^2 U_1^2$. Легко видеть, что при условии $U_1 > c_1$ (если это условие не выполняется, то скачок невозможен) эта точка определяется *однозначно*. Величина U_2 находится после этого по формуле $U_2 = (\rho_1 U_1)\tau_2$.

В заключение заметим, что r монотонно убывает (по абсолютной величине монотонно возрастает), когда Z движется по верхней части кривой Гюгонио в направлении от точки Z_1. Кроме того, в силу соотношения (56.4) при уменьшении r величина S увеличивается. Таким образом, *при заданном термодинамическом состоянии перед фронтом ударной волны бо́льшим значениям U_1 отвечают при переходе через разрыв бо́льшие изменения энтропии*. Например, приращение энтропии на отошедшей ударной волне, возникающей при полете со сверхзвуковой скоростью, достигает максимума на центральной линии тока и монотонно убывает при удалении от этой линии вдоль фронта.

57. Ударный слой. В реальных газах прохождение частицы через ударный фронт представляет собой не мгновенный процесс, в котором состояние частицы меняется скачком из состояния перед фронтом в новое состояние за фронтом, а быстрый переход из одного состояния в другое в некоторой узкой области, или ударном слое. В этой области движение не может быть описано уравнениями движения идеальной жидкости, и, следовательно, возникают некоторые сомнения относительно справедливости предыдущего вывода соотношений Ренкина—Гюгонио. В силу этого вопрос о структуре ударного слоя представляет значительный интерес и ему посвящаются многочисленные исследования. Изучение ударного слоя позволяет глубже понять природу ударных волн, дает некоторую информацию о толщине ударного слоя и приводит к более обоснованному выводу соотношений Ренкина — Гюгонио. Кроме того, сравнивая полученные результаты с экспериментом, мы можем выяснить границы применимости уравнений Навье — Стокса. Из соображений

математического характера задача рассматривалась в основном для простейшего случая одномерного установившегося движения, однако даже в этом простейшем случае проявляются характерные черты движений типа ударного разрыва.

Задача о структуре ударного разрыва в одномерном течении включает в себя следующие два основных вопроса: вопрос о существовании таких решений уравнений движения

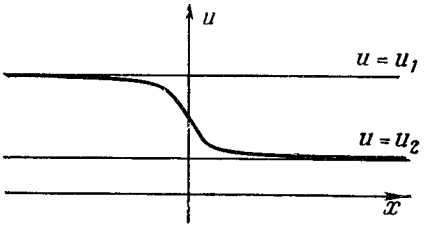


Рис. 14. Профиль скорости в ударном слое.

вязкой жидкости, которые носят характер „быстрого изменения" (профиль скорости, например, должен иметь вид, показанный на рис. 14), и вопрос описания профиля ударной волны, в особенности ее ширины. Первый из этих вопросов после довольно безуспешной попытки Рэлея [1]) был решен в работах Мизеса [2]) и Джилбарга [3]). Второй вопрос — количественная характеристика профиля — связан с весьма сложными расчетами и, таким образом, выходит за рамки этой статьи.

Так как приведенные ниже рассуждения основаны на уравнениях механики сплошной среды, будет не лишним ознакомиться с теми возражениями, которые высказываются по поводу применимости этих уравнений. Первое возражение заключается в том, что толщина ударного слоя имеет порядок нескольких длин свободного пробега молекул и, следовательно, приближения, принятые в меха-

[1]) Rayleigh, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, *Ser. A*, **84**, 247 (1910); см. также статью Тэйлора [Taylor G. I., *Proc. Roy. Soc. Lond.*, *Ser. A*, **84**, 371 (1910)].

[2]) Mises R., *J. Aeronaut. Sci.*, **17**, 551 (1950). Для случая трехмерных течений задача об ударном слое рассматривалась в работе Ладфорда [Ludford G., *Quart. Appl. Math.*, **10**, 1 (1952)].

[3]) Gilbarg D., *Amer. J. Math.*, **73**, 256 (1951).

нике сплошных сред, априори неприменимы [1]); второе — в том, что для толщины ударного слоя дается заниженная оценка (следует из первого возражения). Второе возражение полностью снято работой Джилбарга и Паолуччи [2]), которые показали, что в случае, когда величина вязкости зависит от температуры и среда считается теплопроводной — влияние этих факторов в предыдущих исследованиях учитывалось только частично, — уравнения Навье — Стокса дают оценку толщины ударного слоя, которая согласуется с экспериментом столь же хорошо, как и кинетическая теория [3]). Наконец, первое возражение после более тщательного анализа также едва ли можно считать убедительным [4]). Поэтому мы не видим причин для отказа от методов механики сплошных сред при изучении ударного слоя.

Математическая теория ударного слоя в той мере, в которой она охватывается механикой сплошных сред, основана на уравнениях одномерного установившегося движения газа, а именно на следующих уравнениях:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\rho u) = 0, \\ &\rho u \frac{du}{dx} = \frac{dT_{xx}}{dx}, \\ &\rho u \frac{dE}{dx} = T_{xx}\frac{du}{dx} - \frac{dq}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad (57.1)$$

[см. уравнения (5.4), (6.7) и (33.4)]. К этим уравнениям нужно присоединить два соотношения:

$$T_{xx} = -p + (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dx}, \quad q = -\varkappa\frac{dT}{dx}, \qquad (57.2)$$

---

[1]) Наиболее современное обоснование этого эффекта можно найти в книгах [39], стр. 130, и [26], стр. 550.

[2]) Gilbarg D., Paolucci D., *J. Rational Mech. Anal.*, **2**, 617 (1953).

[3]) Sherman F. S., NACA Tech. Note 3298, 1955; см. также подробное исследование экспериментальных данных в работе Паттерсона [32], гл. 4.

[4]) Пакет и Стюарт [Puckett A. E., Stewart H. J., *Quart. Appl. Math.*, 7, 457 (1950)] установили, что уравнения Навье — Стокса неприменимы лишь в тех исключительных случаях, когда газ сильно разрежен и большую роль играют эффекты диссоциации и конденсации или когда очень высока температура торможения. Интересны также замечания Труселла по поводу относительной применимости методов механики сплошных сред и кинетической теории [*J. Rational Mech. Anal.*, **2**, 678 (1954); **5**, 55 (1956)].

которые будут обоснованы в разделе, касающемся движения вязких жидкостей (п. 61 и п. 63). Уравнения (57.1) легко интегрируются; воспользовавшись формулами (57.2), результаты этого интегрирования можно представить следующим образом:

$$\rho u = m \tag{57.3}$$

и

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\frac{du}{dx} &= p + m(u-a),\\ \varkappa\frac{dT}{dx} &= m\left[E - \frac{1}{2}(u-a)^2 + b\right],\end{aligned}\right\} \tag{57.4}$$

где a, b и m постоянные. В силу соотношения (57.3) функции $p = p(\rho, T)$ и $E = E(\rho, T)$ можно рассматривать как известные функции от u и T.

Течение, соответствующее решению $u = u(x)$, $T = T(x)$ системы уравнений (57.4), называется *ударным слоем*, если при x, стремящемся соответственно к $\pm\infty$, точка $Z(u, T)$ стремится к конечным предельным точкам $Z_1(u_1, T_1)$ и $Z_2(u_2, T_2)$, причем $u_2 < u_1$. Легко видеть, что необходимым условием существования решения вида ударного слоя является обращение в нуль величин в правых частях уравнений (57.4) при подстановке в них предельных значений, т. е. выполнение следующих условий:

$$\left.\begin{aligned}\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 &= m,\\ p_1 + m u_1 = p_2 + m u_2 &= am,\\ E_1 - \frac{1}{2}(u_1 - a)^2 = E_2 - \frac{1}{2}(u_2 - a)^2 &= b.\end{aligned}\right\} \tag{57.5}$$

Эти условия эквивалентны условиям Ренкина—Гюгонио (54.5); следовательно, *ударный слой, соединяющий два состояния Z_1 и Z_2, может существовать только в том случае, когда Z_1 и Z_2 являются допустимыми начальным и конечным состояниями соответственно для ударного перехода в некотором течении идеальной жидкости, имеющей те же уравнения состояния, что и данная жидкость*. Обратно, если состояния Z_1 и Z_2 удовлетворяют условиям Ренкина — Гюгонио, то ударный слой, соединяющий состояния Z_1 и Z_2, определяется решением уравнений (57.4), причем постоянные a, b и m находятся из соотношений (57.5).

Нетрудно показать, следуя описанной выше схеме решения задачи, что *скорость распространения бесконечно слабого ударного слоя относительно движущейся жидкости совпадает со скоростью звука* c. Этот факт еще раз подтверждает корректность принятого определения скорости звука c.

Начиная с этого места, мы ограничимся рассмотрением случая совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями [1]). Уравнения (57.4) принимают тогда вид

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\frac{du}{dx} &= m\left(\frac{\mathcal{R}T}{u}+u-a\right),\\ \varkappa\frac{dT}{dx} &= m\left[c_v T-\frac{1}{2}(u-a)^2-b\right].\end{aligned}\right\} \tag{57.6}$$

[Эти уравнения допускают точное решение при

$$\frac{c_p(\lambda+2\mu)}{\varkappa}=1.$$

Действительно, умножив первое уравнение (57.6) на u и сложив его со вторым уравнением, мы найдем, что

$$(\lambda+2\mu)\frac{d}{dx}\left(c_pT+\frac{1}{2}u^2\right)=m\left(c_pT+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}a^2-b\right);$$

следовательно, существует частное решение

$$c_pT+\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2}a^2+b=\text{const}. \tag{57.7}$$

Исключив теперь из первого уравнения (57.6) величину T, получим

$$(\lambda+2\mu)\frac{du}{dx}=\text{const}\cdot\frac{(u-u_1)(u-u_2)}{u}.$$

Последнее уравнение интегрируется в замкнутом виде в том случае, когда величина $\lambda+2\mu$ постоянна, и допускает численное интегрирование [2]) в том случае, когда $\lambda+2\mu=f(T)$.]

---

[1]) Исследование для произвольного газа можно найти в статье Джилбарга, указанной в примечании 3 на стр. 187.

[2]) Thomas L. H., *J. Chem. Phys.*, **12**, 449 (1944); Мордухов М., Либби П., сб. *Механика*, № 1, 22 (1950); Mises R., *J. Aeronaut. Sci.*, **17**, 551 (1950); Мейергоф Л., сб. *Механика*, № 6 (10), 39 (1951); Puckett A. E., Stewart H. J., *Quart. Appl. Math.*, **7**, 457 (1953).

Покажем сейчас, следуя работе Джилбарга [1]), что *для заданных допустимых конечных состояний* Z_1 *и* Z_2 *существует единственное решение уравнений* (57.6) *вида ударного слоя.*

С этой целью рассмотрим в плоскости $Z(u, T)$ поле направлений, соответствующее системе дифференциальных урав-

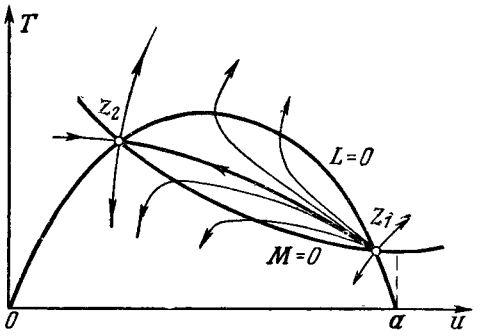


Рис. 15. Поле интегральных кривых и ударная кривая в плоскости Z.

нений (57.6). Конфигурация этого поля показана на рис. 15, начерченные жирными линиями параболы определяются уравнениями

$$L(u, T) = \frac{\mathcal{R}T}{u} + u - a = 0,$$

$$M(u, T) = c_v T - \frac{1}{2}(u - a)^2 - b = 0.$$

Легко видеть, что эти параболы пересекаются в точках Z_1 и Z_2. Задача заключается в отыскании интегральной кривой („ударной линии"), соединяющей особые точки Z_1 и Z_2 системы (57.6). Для выяснения характера поля направлений вблизи этих точек нужно исследовать корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial L}{\partial u} - \delta & \frac{1}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial L}{\partial T} \\ \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial M}{\partial u} & \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial M}{\partial T} - \delta \end{vmatrix} = 0. \qquad (57.8)$$

Нетрудно проверить, что квадратное уравнение (57.8) имеет в точках Z_1 и Z_2 действительные корни, причем в точке Z_1

[1]) См. примечание 3 на стр. 187.

оба корня имеют один и тот же знак, а в точке Z_2 — различные знаки. Таким образом, первая из этих точек представляет собой узел, а вторая — седло [1]). Из картины поля направлений, показанной на рис. 15, следует, что кривая, входящая в точку Z_2 слева, не может пересечь при ее продолжении вправо ни одной из кривых $L=0$, $M=0$. Это означает, что указанная кривая попадет при своем продолжении в точку Z_1. Существование ударного слоя, отвечающего конечным состояниям Z_1 и Z_2, тем самым доказано. Единственность такого решения доказывается аналогичными рассуждениями.

(Заметим, что описанный выше метод дает возможность численного расчета ударного профиля; см. работу Джилбарга и Паолуччи.)

Остается проверить только, что при малых значениях $\varkappa$ и $\lambda+2\mu$ профиль ударного слоя имеет сколь угодно узкую область перехода и ту же качественную структуру, что и профиль, показанный на рис. 14. Не останавливаясь на формальном доказательстве этого факта, мы приведем те соображения, которые показывают существо дела. Начнем с того, что монотонное убывание величины u очевидно, так как $du/dx<0$ во всех точках ударной кривой. Предположим теперь, что мы хотим, чтобы, скажем, 90% изменения величины u происходило на интервале протяженностью меньше ε. Иначе говоря, мы хотим, чтобы „ударная кривая“ проходила бо́льшую часть расстояния между Z_1 и Z_2 при малом (меньше ε) изменении x. Из вида системы (57.6) ясно, что этого можно добиться, сделав $\lambda+2\mu$ и $\varkappa$ достаточно малыми независимо от того, являются ли они постоянными.

Дальнейшее исследование уравнений (57.6) упрощается при замене $v=u^2$. Геометрическая интерпретация полученного уравнения позволяет вывести простые и весьма полезные неравенства для оценки толщины ударного слоя (см. работу Мизеса). Широкий круг вопросов, связанный с ударным слоем, изучен с физической точки зрения в опубликованной недавно работе Лайтхилла [2]).

---

[1]) Коддингтон Е. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958, гл. 15.

[2]) Lighthill M. J., Surveys in Applied Mechanics, Cambridge, 1956, стр. 250.

ГЛАВА 7

ВЯЗКИЕ ЖИДКОСТИ

§ 1. Основные уравнения движения вязкой жидкости

58. Тензор напряжений. Вектор напряжений $\mathbf{t}$, описывающий действие внутренних сил на выделенную поверхность, представляется, как показано в п. 6, в виде

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ — тензор напряжений, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к рассматриваемой поверхности. Введение тензора напряжений в уравнения движения имеет своей целью учет реакций, возникающих в среде в процессе ее движения. Устанавливая связь между тензором $\mathbf{T}$ и другими кинематическими и термодинамическими переменными, мы тем самым определяем и классифицируем тип среды, например жидкость, упругая среда, пластическая среда и т. д. Такое соотношение между тензором $\mathbf{T}$ и другими переменными носит название *определяющего уравнения*. Примером определяющего уравнения может служить, в частности, уравнение $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, устанавливающее указанное соответствие в случае идеальной жидкости.

В следующих пунктах будут выведены определяющие уравнения, применимые к жидкостям, в которых существенную роль играют касательные напряжения. Применяемый здесь метод берет свое начало от работ Стокса [1]) и Буссинеска [2]). Дальнейшее развитие этого метода в исследованиях

[1]) Stokes G., *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8**, 287 (1845); Papers, 1, стр. 75—129.

[2]) Boussinesq J., *J. Math. Pures Appl,* (2), **13**, 377 (1868).

Райнера [1]), Ривлина [2]) и Трусделла [3]) привело к определяющим уравнениям общего вида, включающим в себя в качестве частного случая классический закон Коши — Пуассона и охватывающим все известные типы непрерывной среды. Был значительно усовершенствован также вывод определяющих уравнений. В первом параграфе этой главы устанавливается четкая система условий, которым должно удовлетворять поведение жидкости при ее деформациях. В качестве прямого следствия этой системы аксиом мы получаем определяющие уравнения. Простота логической структуры вывода определяющих уравнений позволяет при этом глубже понять математическую сторону вопроса об определении понятия жидкости. Теория, построенная на основе указанной схемы рассуждений, учитывает нелинейные эффекты вязкости, которые могут играть большую роль в некоторых сложных случаях, таких, как исследование ударного слоя, пограничного слоя и полетов на больших высотах.

Все наши рассуждения не выходят за рамки механики сплошных сред. Молекулярная природа жидкостей и газов при этом в расчет не принимается. Это может, конечно, в некоторых случаях вызвать сомнения в применимости теории. Такие сомнения возникают, например, в применимости уравнений Навье — Стокса к изучению полетов на больших высотах или к изучению ударного слоя в связи с тем, что средняя длина свободного пробега молекул является в этих случаях величиной того же порядка, что и характерный размер. Однако вопрос решается в конце концов не убедительностью доводов, а сравнением результатов теории с экспериментом. При таком сравнении оказывается, что уравнения Навье — Стокса дают хорошие результаты в указанных выше и в подобных случаях. Добавим, что при выборе между кинетической теорией и теорией сплошных сред основным фактором является простота и стройность последней теории.

59. Постулаты Стокса. Джордж Стокс в своей замечательной работе, опубликованной им в возрасте 26 лет, дал

[1]) Reiner M., *Amer. J. Math.*, **67**, 350 (1945).

[2]) Rivlin R. S., *Nature*, **160**, 611 (1947); *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **193**, 260 (1948).

[3]) Truesdell C., *J. Math. Pures Appl.* (9), **29**, 215 (1950); (9), **30**, 111 (1951); *J. Rational Mech. Anal.*, **1**, 125 (1952); **2**, 593 (1953).

следующее определение понятию жидкости [1]): „Разность между давлением в движущейся жидкости на плоскость, проведенную в точке P в любом заданном направлении, и одинаковым для всех направлений давлением, которое существовало бы, если бы жидкость в окрестности точки P находилась в состоянии относительного равновесия, зависит только от относительного движения жидкости в непосредственной близости от точки P; на величину упомянутого выше давления не оказывает влияния относительное движение, вызванное вращением жидкости." Несмотря на кажущуюся расплывчатость этого определения, в нем отражена сущность понятия жидкости. Работая с этим определением, Стокс формулирует свои идеи более четко. В частности, их можно выразить следующей системой постулатов.

1. *Тензор* $\mathbf{T}$ *является непрерывной функцией тензора деформации* $\mathbf{D}$ *и не зависит от других кинематических переменных.*

2. *Тензор* $\mathbf{T}$ *не зависит явно от положения точки* P *в пространстве (однородность по пространственным переменным).*

3. *В пространстве нет исключительных направлений (изотропность).*

4. *При* $\mathbf{D}=0$ *тензор* $\mathbf{T}$ *определяется соотношением* $\mathbf{T}=-p\mathbf{I}$.

Конечно, возможны (а в некоторых случаях и желательны [2])) другие системы постулатов, но для исследований, излагаемых в данной статье, и почти для всех современных приложений гидродинамики вполне достаточно предположений Стокса. Среду, определяющие уравнения которой удовлетворяют сформулированной выше системе постулатов, мы будем называть *стоксовой жидкостью.*

Математическая формулировка первых двух постулатов дается простым соотношением:

$$\mathbf{T}=f(\mathbf{D}). \tag{59.1}$$

[1]) Stokes G., Papers, 1, стр. 75—129.

[2]) Truesdell C., *J. Rational Mech. Anal.*, 1, 125 (1952); Noll W., *J. Rational Mech. Anal.*, 4, 1 (1955). Интересной особенностью работы Нолла является тщательное исследование понятия изотропности.

Условие изотропности выражается требованием, чтобы для любой матрицы $\mathbf{S}$ ортогонального преобразования выполнялось равенство

$$\mathbf{STS}^{-1} = f(\mathbf{SDS}^{-1}). \tag{59.2}$$

Это равенство означает, что ни в пространстве, ни в среде не существует исключительных направлений, или, иначе говоря, что заданная деформация независимо от ее ориентации вызывает одни и те же напряжения. Точнее, равенство (59.2) означает инвариантность соотношения (59.1) относительно всех ортогональных преобразований системы координат.

Тензор $\mathbf{T}$, очевидно, должен зависеть от термодинамического состояния жидкости; эта зависимость не была оговорена выше по той причине, что в данный момент нас интересует лишь зависимость $\mathbf{T}$ от тензора деформаций $\mathbf{D}$.

Мы покажем сейчас, что выписанная выше система постулатов приводит к простой формуле для тензора напряжений, а именно к формуле

$$\mathbf{T} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2, \tag{59.3}$$

где α, β и γ — скалярные функции главных инвариантов тензора $\mathbf{D}$, т. е.

$$\alpha = \alpha(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) \quad \text{и т. д.}$$

Замечание. Главные инварианты можно определить как коэффициенты при разложении определителя $D(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D})$ по степеням λ:

$$D(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{I}\lambda^2 + \mathrm{II}\lambda - \mathrm{III}. \tag{59.4}$$

Из определения вытекает, в частности, что $\mathrm{I} = \mathrm{Spur}\,\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{v} = \Theta$. Характеристические числа d_1, d_2, d_3 матрицы $\mathbf{D}$ являются корнями уравнения $D(\lambda) = 0$; в силу симметричности матрицы $\mathbf{D}$ d_1, d_2 и d_3 являются действительными числами. Ясно, что характеристические числа матрицы $\mathbf{D}$ являются функциями ее главных инвариантов.

Фиксируя функции α, β и γ, мы получаем жидкость с определенным характером вязких напряжений. Например, если мы выберем функции α, β и γ так, чтобы зависимость $\mathbf{T}$ от $\mathbf{D}$ была линейной, то придем к классическому закону вязкости Коши — Пуассона. Ниже (см. п. 65) будет разобрано несколько примеров, в которых зависимость (59.3) имеет нелинейный характер.

Доказательство формулы (59.3)[1]. Покажем сначала, что главные направления тензора $\mathbf{T}$ совпадают с главными направлениями тензора $\mathbf{D}$ или, иначе говоря, что любое ортогональное преобразование, приводящее матрицу $\mathbf{D}$ к диагональному виду, приводит матрицу $\mathbf{T}$ также к диагональному виду. Действительно, предположим, что матрица $\mathbf{D}$ приведена к виду

$$\overline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

и что матрица $\mathbf{T}$ преобразовалась при этом в матрицу $\overline{\mathbf{T}}$. Тогда из соотношений (59.1) и (59.2) вытекает, что $\overline{\mathbf{T}} = f(\overline{\mathbf{D}})$. Легко видеть, что ортогональное преобразование координат

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

не меняет матрицу $\overline{\mathbf{D}}$. Следовательно, обращаясь снова к формулам (59.1) и (59.2), получаем

$$\mathbf{S}\overline{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-1} = f(\mathbf{S}\overline{\mathbf{D}}\mathbf{S}^{-1}) = f(\overline{\mathbf{D}}) = \overline{\mathbf{T}}. \qquad (59.5)$$

Таким образом, при преобразовании $\mathbf{S}$ матрица $\overline{\mathbf{T}}$ также сохраняет свой прежний вид. Простой подсчет показывает, что в этом случае должны выполняться условия $\overline{t}_{12} = \overline{t}_{13} = \overline{t}_{21} = \overline{t}_{31} = 0$ и $\overline{t}_{23} = \overline{t}_{32} = 0$. Итак, мы доказали, что матрица $\overline{\mathbf{T}}$ имеет диагональную форму, т. е. что

$$\overline{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix}.$$

С геометрической точки зрения преобразование $\mathbf{S}$ можно рассматривать как поворот системы координат на 180° вок-

[1]) За исключением заключительной части доказательства, мы следуем изящному методу Эриксена и Ривлина [Ericksen J. L., Rivlin R. S., *J. Rational Mech. Anal.*, **4**, 323 (1955), в особенности § 30]. В другой работе Эриксена [*J. Washington Acad. Sci.*, **44**, 33 (1954)] рассмотрены различные ограничения, которые накладывают на коэффициенты α, β и γ те или иные физические условия.

руг оси x_1. Уравнение (59.5) показывает, что матрица $\overline{\mathbf{T}}$ симметрична относительно этой оси.

Так как матрица $\overline{\mathbf{T}}$ является диагональной, характеристические числа $\overline{\mathbf{T}}$ являются функциями от d_1, d_2 и d_3, т. е.

$$t_i = f_i(d_1, d_2, d_3), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{59.6}$$

Предположим сначала, что характеристические числа матрицы $\mathbf{D}$ различны между собой; тогда мы можем выбрать множители α, β и γ так, что

$$t_i = \alpha + \beta d_i + \gamma d_i^2, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{59.7}$$

Действительно, уравнения (59.7) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно α, β и γ. Тогда определитель, составленный из коэффициентов этой системы,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & d_1 & d_1^2 \\ 1 & d_2 & d_2^2 \\ 1 & d_3 & d_3^2 \end{vmatrix} = (d_1 - d_2)(d_2 - d_3)(d_3 - d_1) \neq 0$$

и, согласно правилу Крамера,

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} t_1 & d_1 & d_1^2 \\ t_2 & d_2 & d_2^2 \\ t_3 & d_3 & d_3^2 \end{vmatrix}. \tag{59.8}$$

Аналогичным образом выражаются множители β и γ. Эти множители являются непрерывными функциями t_i и d_i, а t_i в свою очередь непрерывно зависят от d_i. Следовательно, в случае различных характеристических чисел матрицы $\overline{\mathbf{D}}$ множители α, β и γ являются непрерывными функциями этих характеристических чисел.

В качестве следующего шага заметим, что любая перестановка чисел d_i приводит к аналогичной перестановке чисел t_i [это следует из ортогональности указанного преобразования и из соотношения (59.2), в силу которого матрица $\overline{\mathbf{T}}$ изменяется так же, как матрица $\overline{\mathbf{D}}$]. Нетрудно убедиться, пользуясь этим замечанием, что перестановка чисел d_i оставляет α, β и γ без изменения. Таким образом, *множители* α, β *и* γ *являются симметричными функциями* d_i. Это означает, что α, β и γ зависят только от трех главных инва-

риантов: Θ, II и III (в справедливости этого утверждения легко убедиться, вспомнив, что числа d_i являются корнями многочлена с коэффициентами Θ, II и III). Таким образом, мы доказали, что в случае различных характеристических чисел матрицы $\mathbf{D}$ *множители* α, β *и* γ *являются однозначными непрерывными функциями главных инвариантов* $\mathbf{D}$. Возвращаясь к матричным обозначениям, мы получаем вместо системы (59.7) уравнение

$$\overline{\mathbf{T}} = \alpha\mathbf{I} + \beta\overline{\mathbf{D}} + \gamma\overline{\mathbf{D}}^2,$$

которое в точности совпадает с уравнением (59.3), которое связывает исходные матрицы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$.

Остается доказать справедливость представления (59.3) в случае двух или трех равных характеристических чисел матрицы $\overline{\mathbf{D}}$. Переставив равные характеристические числа матрицы $\overline{\mathbf{D}}$, нетрудно убедиться, подобно тому, как это было сделано выше, что соответствующие характеристические числа матрицы $\overline{\mathbf{T}}$ также совпадают. Из тех же соображений, которые привели к уравнениям (59.7), следует, что в случае двух равных характеристических чисел

$$\overline{\mathbf{T}} = \alpha\mathbf{I} + \beta\overline{\mathbf{D}},$$

а в случае трех равных чисел $\overline{\mathbf{T}} = \alpha\mathbf{I}$. Так как эти формулы также имеют вид (59.3), доказательство завершено.

Приведенное доказательство не дает гарантии непрерывности α, β и γ при совпадении характеристических чисел матрицы $\mathbf{D}$, что оставляет впечатление некоторой незавершенности. Если предположить зависимость $\mathbf{T} = f(\mathbf{D})$ *трижды* непрерывно дифференцируемой, то можно сравнительно просто показать, что указанная непрерывность имеет место. Поскольку этот результат нам в дальнейшем не понадобится, доказательство его будет опущено.

Если к постулатам Стокса добавить условие линейной зависимости компонент матрицы $\mathbf{T}$ от компонент матрицы $\mathbf{D}$, то представление (59.3) принимает вид

$$\mathbf{T} = (-p + \lambda\Theta)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}. \qquad (59.9)$$

Этот результат, как выяснится ниже, является следствием общей теоремы, которая будет доказана в п. 60, однако представляет интерес и другое, значительно более простое

доказательство, в основном не связанное с предыдущими рассуждениями.

В силу четвертого постулата Стокса и гипотезы о линейной зависимости t_i от d_i формулы (59.6) должны иметь следующий вид:

$$t_1 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 - p,$$
$$t_2 = b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 - p,$$
$$t_3 = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 - p.$$

Коэффициенты этих выражений не зависят, конечно, от $\mathbf{D}$. Так как изменению нумерации d_i должно отвечать аналогичное изменение нумерации t_i, то циклическая перестановка $\langle 2, 3, 1\rangle$ приводит к условиям

$$a_1 = b_2 = c_3, \quad a_2 = b_3 = c_1, \quad a_3 = b_1 = c_2.$$

Аналогичным образом, пользуясь перестановкой $\langle 2, 1, 3\rangle$, находим $a_2 = b_1$. Таким образом, мы имеем

$$a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = \lambda, \quad a_1 = b_2 = c_3 = \lambda + 2\mu,$$

и представление (59.9) доказано.

В следующем пункте мы займемся анализом понятия давления жидкости, после чего в заключении раздела о жидкостях, удовлетворяющих постулатам Стокса, будет рассмотрен интересный пример *полиномиальной зависимости* компонент T_{ij} тензора напряжений от компонент D_{ij} тензора деформаций.

59а. Давление. Для сжимаемых жидкостей давление является вполне определенной термодинамической переменной. Это позволяет нам переписать уравнение (59.3) в виде

$$\mathbf{T} = (-p + \alpha^*)\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2, \qquad (59.10)$$

где p — термодинамическое давление, а $\alpha^* = \alpha + p$. В соответствии с четвертым постулатом Стокса величина α^* должна обращаться в нуль при $\mathbf{D} = 0$. Сравнив теперь формулы (59.10) и (34.1), получим соотношение

$$\mathbf{V} = \alpha^*\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2,$$

связывающее тензор вязкости с тензором деформации.

В противоположность случаю сжимаемых жидкостей, для *несжимаемых* жидкостей давление, как уже отмечалось

в п. 33, *не является* термодинамической переменной и остается пока неопределенным [1]). Мы можем, следовательно, ввести любое определение давления, не противоречащее четвертому постулату Стокса. Окончательный выбор этого определения не играет существенной роли, так как следует помнить, что введенное таким образом в гидродинамические уравнения „давление" не обязательно должно совпадать с показанием измерительных приборов; на самом деле эти показания дают нам обычно величину одной из компонент тензора напряжений.

В силу сделанных выше замечаний выбор определения давления естественно подчинить требованию, чтобы уравнения движения имели наиболее простой вид. Мы определим давление p как коэффициент α в формуле (59.3) с обратным знаком. Это приводит к следующему выражению для тензора напряжений *несжимаемой* жидкости:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2. \tag{59.11}$$

Заметим, что введенное определение давления согласовано с условием, что при $\mathbf{D} = 0$ величина $\mathbf{T}$ принимает значение $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$.

Некоторые авторы (например, Ламб [8]) определяют давление иначе, а именно полагают $p = -{}^1/_3\,\mathrm{Spur}\,\mathbf{T}$. Это определение вполне корректно, но выражение для тензора напряжений $\mathbf{T}$ имеет в этом случае более сложный вид. В нашей статье мы будем называть $-{}^1/_3\,\mathrm{Spur}\,\mathbf{T}$ *средним давлением* и обозначать его через $\bar{p}$. Разность между давлением и средним давлением для несжимаемой жидкости нетрудно найти из формулы (59.11) в следующем виде:

$$3(p - \bar{p}) = \gamma\mathbf{D} : \mathbf{D}.$$

Мы видим, таким образом, что $p = \bar{p}$ тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$, т. е. совпадение давления и среднего давления является характерным признаком квазилинейной зависимости тензора напряжений от тензора деформаций. В частности, в рамках классической теории линейной вязкости различие

[1]) Эта неопределенность имеет место, конечно, только для *вязких* жидкостей.

между p и $\bar{p}$ исчезает и оба определения давления, $p = -\alpha$, и $p = -\frac{1}{3}\operatorname{Spur}\mathbf{T}$, дают в точности одно и то же значение. Мы подчеркиваем изложенные выше обстоятельства потому, что часто встречается недостаточно ясное понимание условности понятия давления в случае несжимаемой жидкости.

60. Полиномиальная зависимость. В предыдущем пункте было установлено, что наиболее общий вид зависимости напряжений от деформаций, согласующийся с постулатами Стокса, дается формулой (59.10) или формулой (59.11). Входящие в эти формулы коэффициенты α^*, β и γ представляют собой произвольные функции главных инвариантов матрицы $\mathbf{D}$ и термодинамических переменных. Для того чтобы можно было получить результаты, представляющие интерес для гидродинамики, указанную зависимость следует конкретизировать; в противном случае при исследовании любых задач, кроме наиболее элементарных, возникли бы непреодолимые трудности. Практически универсальным является выбор *полиномиальной* зависимости $\mathbf{T}$ от $\mathbf{D}$.

Наиболее важный и наиболее часто встречающийся случай линейной зависимости $\mathbf{T}$ от $\mathbf{D}$ был уже разобран в п. 59. Следующим по важности является случай квадратичной зависимости $\mathbf{T}$ от $\mathbf{D}$. Так как инварианты Θ, II и III являются функциями первого, второго и третьего порядка соответственно от компонент $\mathbf{D}$, то квадратичную зависимость можно получить просто, конкретизируя формулы (59.10) и (59.11) следующим образом:

$$\mathbf{T} = \begin{cases} (-p + \lambda\Theta + \lambda'\Theta^2 + \lambda''\,\mathrm{II})\,\mathbf{I} + (2\mu + 2\mu'\Theta)\,\mathbf{D} + 4\nu\mathbf{D}^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(для сжимаемой жидкости)}, \\ -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + 4\nu\mathbf{D}^2 \qquad\qquad \text{(для несжимаемой жидкости)}. \end{cases} \tag{60.1}$$

Аналогичным образом можно записать и зависимости более высокого порядка. При этом возникает вопрос, являются ли представления (60.1) и их аналоги более высокого порядка *наиболее общими* представлениями. Мы покажем сейчас, что справедлива следующая основная теорема:

Наиболее общее определяющее уравнение, удовлетворяющее сформулированным выше постулатам Стокса и такое, что компоненты тензора напряжений T_{ij}

являются полиномами степени N от компонент тензора деформаций D_{ij}, имеет вид

$$\mathbf{T} = (-p + P_0)\mathbf{I} + P_1\mathbf{D} + P_2\mathbf{D}^2, \qquad (60.2)$$

где P_k, $k = 0, 1, 2$, представляют собой многочлены от главных инвариантов $\mathbf{D}$, *причем вес*[1] *многочлена P_k не превышает $N - k$. В случае сжимаемой жидкости многочлен P_0 должен иметь свободный член, равный нулю; в случае несжимаемой жидкости $P_0 \equiv 0$*[2]).

Доказательство. Достаточно показать, что коэффициент α^*, входящий в формулу (59.10), имеет вид многочлена P_0; вид коэффициентов β и γ устанавливается вполне аналогично. Заметим сначала, что в принятых нами предположениях функции f_i в формуле (59.6) должны иметь вид многочленов степени не выше N (ортогональное преобразование не может изменить характера полиномиальной зависимости). Следовательно, определитель, стоящий в числителе формулы (59.8) для коэффициента α, является по переменным d_i многочленом степени не выше $N + 3$. Так как этот определитель обращается в нуль при $d_1 = d_2$ (из $d_1 = d_2$ вытекает, что $t_1 = t_2$), а также при $d_2 = d_3$ и $d_1 = d_3$, мы видим после сокращения на $\Delta = (d_1 - d_2)(d_2 - d_3)(d_3 - d_1)$, что α является многочленом по переменным d_i степени не выше N.

Но, как было показано выше, α является симметричной функцией d_i, поэтому в силу известной теоремы алгебры[3])

[1]) Для того чтобы подсчитать вес многочлена P_k, нужно найти максимум весов $k + 2l + 3m$ его членов $\Theta^k \mathrm{II}^l \mathrm{III}^m$.

[2]) Эта теорема, сформулированная с различной степенью общности, приводится во многих работах. Частный случай линейной зависимости был исследован Стоксом. Интерес к общей полиномиальной зависимости $\mathbf{T}$ от $\mathbf{D}$ возник значительно позднее: формула (60.2) появилась впервые в работах Райнера и Ривлина (см. примечания 1 и 2 на стр. 194). Первое строгое, но далеко не простое доказательство теоремы принадлежит Ривлину и Эриксену (на эту работу мы ссылались выше в п. 39 и 41). Приведенное нами доказательство значительно проще и более естественно; некоторые идеи этого доказательства принадлежат Э. Калаби.

Теорема допускает обобщение на случай аналитической зависимости $\mathbf{T}$ от $\mathbf{D}$; роль многочленов P_k будут играть при этом аналитические функции главных инвариантов.

[3]) Ван дер Варден Б. Л., Современная алгебра, ГИТТЛ, 1947, часть 1, § 26.

α имеет вид многочлена веса не выше N от главных инвариантов $\mathbf{D}$. В соответствии с постулатом 4 свободный член этого многочлена должен быть равен $-p$, следовательно, $\alpha^*=\alpha+p$ является многочленом без свободного члена, что и требовалось доказать.

На основе методов теории размерностей Трусделл [1]) нашел характер зависимости коэффициентов многочленов P_k от термодинамических переменных.

61. Классическая гидродинамика. Уравнения Навье — Стокса. Так как тензор деформации, вообще говоря, очень мал по сравнению, скажем, с величиной отношения характерной скорости и характерной длины, естественно принять гипотезу о линейности соотношения между $\mathbf{T}$ и $\mathbf{D}$. Следует подчеркнуть гипотетический характер этого предположения: его нельзя ни вывести из эксперимента, ни строго обосновать. Согласование результатов, полученных на основе принятой гипотезы, с экспериментом является, конечно, доводом в пользу применения гипотезы и нашей веры в ее справедливость, но не более того.

Применяя результат, приведенный в конце п. 59, мы получаем из гипотезы о линейной зависимости классические определяющие уравнения:

$$\mathbf{T}=\begin{cases}(-p+\lambda\Theta)\mathbf{I}+2\mu\mathbf{D} & \text{(для сжимаемой жидкости),}\\ -p\mathbf{I}+2\mu\mathbf{D} & \text{(для несжимаемой жидкости).}\end{cases} \tag{61.1}$$

В случае сжимаемой жидкости p — термодинамическое давление, $\Theta=\operatorname{div}\mathbf{v}$, а λ и μ — скалярные функции термодинамических переменных. В случае несжимаемой жидкости p является одной из основных динамических переменных, а μ зависит только от температуры [2]).

Важный вопрос о характере зависимости коэффициентов вязкости от термодинамических переменных детально иссле-

---

[1]) См. работы Трусделла, указанные в примечании 3 на стр. 194.

[2]) Уравнение (61.1) было приведено впервые в работе Пуассона [Poisson S.-D., *J. Ecole Polytech.*, **13**, Cah. 20, 1 (1831)]. В полученном несколько ранее Коши определяющем уравнении не был учтен член $-p\mathbf{I}$. Дальнейшая литература по этому вопросу указана в работе [2] и в статье Трусделла [Truesdell C., *J. Rational Mech. Anal.*, **1**, 126 (1952)].

дован в книге Чепмена и Каулинга [34], гл. 9—12 [1]). Принципиальная сторона схемы рассуждений кинетической теории, приводящих к соотношению $\mu \sim T^{1/2}$, была рассмотрена Трусделлом; им же было проведено исследование вопроса с точки зрения теории размерности [2]). Указанные исследования и экспериментальные данные показывают, что в довольно широком диапазоне коэффициенты вязкости практически не зависят от давления и формула $\mu \sim T^m$ дает хорошее приближение. К этому вопросу мы еще вернемся в следующем пункте.

Функция диссипации, соответствующая закону Коши — Пуассона (61.1), имеет вид

$$\Phi = \mathbf{V} : \mathbf{D} = \begin{cases} \lambda\Theta^2 + 2\mu\mathbf{D} : \mathbf{D} & \text{(для сжимаемой жидкости),} \\ 2\mu\mathbf{D} : \mathbf{D} & \text{(для несжимаемой жидкости).} \end{cases} \tag{61.2}$$

Условие $\Phi \geqslant 0$, выведенное в п. 34, накладывает некоторые ограничения на величины λ и μ. В случае несжимаемой жидкости, в частности, из этого условия следует, что $\mu \geqslant 0$. Для сжимаемой жидкости, как показывают непосредственные вычисления, имеет место соотношение

$$3\Phi = (3\lambda + 2\mu)\,\Theta^2 + 2\mu\,[(d_1 - d_2)^2 + (d_2 - d_3)^2 + (d_3 - d_1)^2];$$

следовательно, условие $\Phi \geqslant 0$ для любого $\mathbf{D}$ выполняется в том и только в том случае, когда

$$\mu \geqslant 0, \qquad 3\lambda + 2\mu \geqslant 0.$$

Величина $3\lambda + 2\mu$ входит также в формулу для разности между давлением и средним давлением в сжимаемой жидкости:

$$3\,(p - \bar{p}) = (3\lambda + 2\mu) \cdot \Theta. \tag{61.3}$$

Уравнения Навье — Стокса [3]). Уравнения динамики, которые получаются из основных уравнений (6.7) при помощи

---

[1]) В работе Коупа и Хартри [*Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., A*, **241**, 282 (1948)] рассмотрены экспериментальные данные для воздуха; можно обратиться также к опубликованной недавно работе Джилмора (Gilmore F. R., Rand. Corp. Mem. RM-1543, Santa Monica, 1955).

[2]) Truesdell C., *Z. Physik*, **131**, 273 (1952); см. также работы указанные в примечании 3 на стр. 194.

[3]) Navier C. L. M. H., *Mem. Acad. Sci. Inst. France* (2), **6**, 289 (1827); работа датирована 1822 г.; Stokes G., Papers, **1**, стр. 75—129. Навье рассматривал только несжимаемые жидкости.

закона Коши — Пуассона, носят название уравнений Навье — Стокса. Между случаем сжимаемой и несжимаемой жидкости имеется некоторое различие, а именно

для сжимаемой жидкости

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \operatorname{grad}(\lambda\Theta) + \operatorname{div}(2\mu\mathbf{D}); \qquad (61.4)$$

для несжимаемой жидкости

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div}(2\mu\mathbf{D}). \qquad (61.5)$$

Формально уравнение (61.5) получается из уравнения (61.4), если положить $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Это не означает, однако, что уравнение (61.5) является частным случаем уравнения (61.4), так как понятие давления имеет существенно различный смысл в случаях сжимаемой и несжимаемой жидкости. При постоянных λ и μ уравнения (61.4) и (61.5) принимают более простой вид и записываются так:

для сжимаемой жидкости

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \Theta + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \qquad (61.6)$$

для несжимаемой жидкости

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \qquad (61.7)$$

Для того чтобы иметь возможность записать уравнения Навье — Стокса в произвольной ортогональной системе координат, нам нужно найти соответствующие формулы для ускорения, для Θ и для $\nabla^2\mathbf{v}$. Формулы для $\mathbf{a}$ и Θ были получены ранее (см. п. 12), а формулы для лапласиана проще всего найти, воспользовавшись тождеством

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \operatorname{grad} \Theta - \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega};$$

член $\operatorname{grad}\Theta$ удобно оставлять даже в случае несжимаемой жидкости, так как при этом происходит сокращение некоторого числа членов разложения $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$. Компоненты тензора напряжений (61.1) в общей криволинейной системе координат определяются формулами

$$T^l_{\ k} = (-p + \lambda\Theta)\,\delta^l_k + 2\mu D^l_{\ k},$$

где

$$D^l{}_i = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + v^k \frac{\partial \log h_i}{\partial x^k},$$

$$D^i{}_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \left(\frac{h_k}{h_l}\right)^2 \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\right] \qquad (k \neq l).$$

В частном случае цилиндрической системы координат выражения для $\mathbf{a}$, Θ и $\boldsymbol{\omega}$ приведены в п. 12. Пользуясь методом, развитым в п. 11, можно получить следующие выражения;

$$(\operatorname{grad}\Theta)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Theta) - \frac{\Theta}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_r}{r^2},$$

$$(\operatorname{grad}\Theta)_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\Theta) =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta\,\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta},$$

$$(\operatorname{grad}\Theta)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\Theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta\,\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

и

$$(\nabla^2\mathbf{v})_r = \Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_r}{r^2},$$

$$(\nabla^2\mathbf{v})_\theta = \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2},$$

$$(\nabla^2\mathbf{v})_z = \Delta v_z, \qquad \Delta \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Наконец, обозначив через $\widehat{rr}$, $\widehat{r\theta}$ и т. д. физические компоненты тензора напряжений, мы получим

$$\widehat{rr} = -p + \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \widehat{zz} = -p + \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\widehat{\theta\theta} = -p + \lambda\Theta + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right),$$

$$\widehat{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right), \qquad \widehat{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right),$$

$$\widehat{zr} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right).$$

Уравнения (61.6) и (61.7) в сферической системе координат рассмотрены подробно в книге [36], § 39—41.

62. Соотношение Стокса. В работе, на которую мы уже ссылались в п. 58, Стокс приводит два соображения в подтверждение соотношения.

$$3\lambda + 2\mu = 0 \tag{62.1}$$

между коэффициентами вязкости сжимаемой вязкой жидкости. Коротко говоря, эти соображения сводятся к тому, что если бы условие (62.1) не было выполнено, то даже в случае однородного расширения диссипация и разность между давлением и средним давлением были бы отличны от нуля [см. формулу (61.3)]. Другим, и возможно более убедительным, доводом может служить кинетическая теория Максвелла для одноатомных газов, которая приводит к формуле (62.1). Аргументация Стокса в настоящее время кажется неубедительной; правда, и сам Стокс позднее указывал [1]), что он никогда не был полностью уверен в справедливости этого соотношения. Что касается кинетической теории Максвелла, то, как показал Трусделл [2]), в ее основе лежит предположение, равносильное соотношению (62.1).

При желании к вопросу о справедливости соотношения (62.1) можно было бы подойти с более общих позиций. Точнее, можно отказаться от феноменологического подхода, использованного в п. 58 и 59, и рассматривать вместо этого внутреннее строение жидкости при больших напряжениях. При таком подходе простая термодинамическая теория, изложенная в гл. 4, была бы уже несправедлива и можно было бы попытаться тем или иным способом скомпенсировать невязку в термодинамическом уравнении состояния за счет компонент тензора вязкости. В силу сказанного очевидно, что с этой точки зрения вопрос о справедливости соотношения (62.1) теряет всякий смысл.

Обращаясь к эксперименту, мы сталкиваемся с серьезными трудностями. Это видно хотя бы из того, что в любом эксперименте для определения λ необходимо возникают явления, сопровождающиеся большим увеличением Θ, в связи с чем встает вопрос о применимости закона линейной зависимости тензора напряжений от тензора деформаций. Основы-

[1]) Stokes G., Papers, 3, стр. 136—137.
[2]) Truesdell C., *Z. Physik*, 131, 273 (1952).

ваясь на работах, в которых рассматривались экспериментальные данные [1]), можно утверждать следующее: для одноатомных газов соотношение (62.1) выполняется с достаточной степенью точности; с другой стороны, для жидкостей и многоатомных газов коэффициент $\lambda > 0$ может иногда во много раз превосходить по величине коэффициент μ. Наиболее часто встречающиеся значения переменных λ и μ приведены в книге Чепмена и Каулинга [34] и в работах, на которые мы только что ссылались.

Заметим, что в тех случаях, когда эффект сжимаемости незначителен, величина λ не может быть, конечно, большой.

63. Теплопроводность. Для того чтобы система уравнений классической механики жидкости была полной, необходимо выразить вектор потока тепла $\mathbf{q}$ через механические и термодинамические переменные. Мы будем исходить из обычного предположения, что $\mathbf{q}$ *является изотропной функцией от градиента температуры и термодинамических переменных.* Возможны, конечно, и более сложные ситуации, в которых процессы теплопроводности вызываются деформациями (и наоборот) [2]). Однако во всех рассмотренных до настоящего времени случаях принятое нами предположение не нуждалось в уточнении.

Из условия изотропности, как нетрудно видеть, вытекает, что векторы $\mathbf{q}$ и $\operatorname{grad} T$ должны быть параллельны, откуда следует закон Ньютона — Фурье

$$\mathbf{q} = -\varkappa \operatorname{grad} T, \tag{63.1}$$

где $\varkappa$ — скалярная функция $|\operatorname{grad} T|$ и термодинамических переменных. Термодинамическое условие (34.4) включает в себя требование, чтобы множитель $\varkappa$ был неотрицателен. Вид функции $\varkappa$ выбирается в зависимости от характера рассматриваемой задачи на основе эксперимента и кинетической теории. Чаще всего пользуются формулой (см. [34], гл. 13)

$$\frac{\mu c_p}{\varkappa} = \text{const}, \tag{63.2}$$

[1]) Tisza L., *Phys. Rev.*, **61**, 531 (1942); Lieberman L., *Phys. Rev.*, **75**, 1415; **76**, 440 (1950); Карим С., Розенхед Л., сб. *Механика*, № 2 (18), 83 (1953). См. также статью Труселла [Truesdell C., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **226**, 59 (1954)].

[2]) См. примечание 2 на стр. 195.

которая совместима с принимаемым обычно предположением, что величины $\varkappa$, μ и c_p постоянны. Необходимым условием справедливости формулы (63.2) является независимость $\varkappa$ от $|\operatorname{grad} T|$. Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями величина отношения (63.2) выбирается следующим образом:

$$\frac{\mu c_p}{\varkappa} = \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad 0{,}72$$

соответственно в случаях одноатомных газов, двухатомных газов и воздуха. Величина $\mu c_p/\varkappa$ носит название *числа Прандтля*; впоследствии мы встретимся с этой величиной при исследовании вопроса о динамическом подобии течений теплопроводной жидкости.

Подставив выражение (63.1) в уравнение энергии (34.3), мы получим

$$\rho \frac{dS}{dt} = \Phi + \operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T). \tag{63.3}$$

Это уравнение вместе с уравнениями Навье — Стокса, уравнением неразрывности и термодинамическими уравнениями состояния образует систему уравнений, на которой основана классическая гидродинамика. Так как плодотворное исследование этой системы в ее общем виде едва ли возможно, точнее было бы сказать, что классическая гидродинамика имеет дело с различными частными случаями указанной системы.

64. Граничные условия. Рассмотрим теперь те динамические условия, которые должны выполняться на границе жидкости. На свободной поверхности или на внутренней поверхности раздела двух различных жидкостей выполняется, как заметил Ламб, условие непрерывности вектора напряжений. Вопрос о достаточности этого условия для непрерывности поля скоростей при переходе через свободную поверхность или поверхность раздела остается пока открытым, однако исследование различных частных случаев показывает, что утвердительный ответ кажется правдоподобным.

Сложнее обстоит дело с условиями, которые должны выполняться на твердых участках границы; здесь мы сталкиваемся с некоторыми противоречиями. Стокс придерживался

той точки зрения [1]), что жидкость прилипает к твердому телу, так как в противном случае сила сопротивления проскальзыванию двух соседних слоев жидкости должна была бы превосходить силу проскальзывания слоя жидкости над твердым телом в бесконечное число раз. Эксперименты с капиллярным вискозиметром показывают, что по крайней мере для жидкостей при обычных условиях расход убывает очень быстро, примерно как радиус в четвертой степени. Это указывает на то, что прилипание действительно имеет место. Хотя убедительность указанных фактов не вызывает сомнений, они имеют место только при незначительных касательных напряжениях и не очень низких давлениях. Очевидно, например, что условие прилипания неприменимо при изучении полетов на больших высотах [2]).

Для объяснения наблюдаемых при экспериментах явлений мы имеем, во-первых, классическое условие прилипания

$$\Delta \mathbf{v} = 0 \quad \text{на твердых границах,} \tag{64.1}$$

где $\Delta \mathbf{v}$ обозначает разность между скоростью жидкости и скоростью границы. Вместо условия (64.1) предлагались различные условия проскальзывания, из которых наибольший интерес представляет следующее:

$$\Delta v_n = 0, \quad \Delta \mathbf{v}_t = k\mathbf{t}_t \tag{64.2}$$

(индексы n и t обозначают соответственно нормальную и касательную составляющие). Этот естественный с физической точки зрения закон находит подтверждение в кинетической теории. Если в формулах (64.2) коэффициент k является переменной величиной, зависящей от термодинамического состояния (в частности, если k равен нулю вне области низких давлений), то формулы (64.2) могут включать в себя условие прилипания. Нам кажется естественным обобщение условия (64.2) путем введения „коэффициента трения“ k_1; при малых тангенциальных напряжениях и высоких давлениях такое обобщенное условие будет сводиться к условию прилипания, а в противоположном предельном случае — к усло-

[1]) См. примечание 1 на стр. 195.

[2]) Цянь Сюэ-сэнь, сб. Газовая динамика, ИЛ, 1950, стр. 310—340.

вию (64.2). Точнее, мы полагаем

$$K = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k|\mathbf{t}_t| \leqslant k_1|t_n|, \\ k - k_1\left|\dfrac{t_n}{\mathbf{t}_t}\right| & \text{при} \quad k|\mathbf{t}_t| > k_1|t_n|, \end{cases}$$

где k и k_1 — некоторые положительные постоянные, и принимаем в качестве граничного условия

$$\Delta v_n = 0, \quad \Delta \mathbf{v}_t = K\mathbf{t}_t. \tag{64.3}$$

В настоящее время еще не проверено, насколько хорошо эти соотношения согласуются с экспериментами. Различные другие граничные условия были предложены в работах Максвелла, Дюгема, Кнудсена, а также Чанга и Уленбека. Критический обзор исследований по этому вопросу можно найти в работах Бейтмена [2], часть II, § 1.2, 1.7, 3.2, Труселлла [1]) и Паттерсона ([32], гл. 5).

В оставшейся части этой статьи в качестве стандартного граничного условия мы принимаем условие (64.1). Нетрудно показать, что при этом предположении вектор завихренности направлен по касательной к неподвижной стенке. В самом деле, по теореме Стокса

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}\, da = \oint_{c} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0,$$

где $\mathcal{S}$ — произвольная площадка на стенке, ограниченная контуром c. Следовательно, на стенке $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$. Исходя из классического закона вязкости (64.1), Беркер аналогичными рассуждениями показал [2]), что вектор напряжений

[1]) Truesdell C., *J. Rational Mech. Anal.*, **1**, 125 (1952), особенно § 79.

[2]) Berker R., *C. R. Acad. Sci., Paris*, **232**, 148 (1951). Доказательство Беркера идет по следующему пути: мы имеем

$$\oint \mathbf{v} \times d\mathbf{x} = -\int (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{v}\, da = \int \left(\mathbf{n}\Theta + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}\right) da$$

(см. [48], стр. 72), и так как стоящий слева интеграл равен нулю на неподвижной стенке, величина $\mathbf{n}\Theta + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ также равна нулю. Воспользовавшись этим, легко преобразовать формулу $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = (-p + \lambda\Theta)\,\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ к виду (64.4).

имеет на неподвижной стенке следующее выражение:

$$\mathbf{t}=\begin{cases}[-p+(\lambda+2\mu)\,\Theta]\,\mathbf{n}+\mu\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n}) \\ \qquad\qquad\text{(для сжимаемой жидкости),} \\ -p\mathbf{n}+\mu\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n}) \\ \qquad\qquad\text{(для несжимаемой жидкости).}\end{cases} \tag{64.4}$$

В силу этих формул касательные напряжения зависят только от местной завихренности, тогда как нормальные напряжения зависят от давления и величины $\Theta=\operatorname{div}\mathbf{v}$. Заметим, что в случае сжимаемой жидкости величина нормального напряжения *отличается* от среднего давления $\bar{p}$; точнее, между нормальным напряжением p_n, давлением жидкости p и средним давлением $\bar{p}$ имеет место следующее соотношение:

$$p_n=p-(\lambda+2\mu)\,\Theta=\bar{p}-{}^4/_3\,\mu\Theta. \tag{64.5}$$

65. Дополнение. Частные решения уравнений с нелинейной вязкостью. Для того чтобы качественно оценить роль нелинейных членов в формуле (59.3), проще всего воспользоваться частными решениями уравнения движения. Мы рассмотрим здесь два простых примера движений несжимаемой жидкости; первый из них был тщательно изучен Ривлином [1]). При этом будет выяснено основное различие между теориями линейной и нелинейной вязкости, а именно при учете нелинейных членов вязкости в слоистом течении могут существовать нормальные напряжения.

1. *Прямолинейное слоистое течение.* Предположим, что $u=ky$, $v=w=0$, где k — постоянная. Тогда в силу соотношения (59.3) тензор напряжений $\mathbf{T}$ имеет вид

$$\mathbf{T}=-p\mathbf{I}+\frac{1}{2}\beta k\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\gamma k^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{65.1}$$

где

$$\beta=\beta(\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III})=\beta\left(0,\ -{}^1/_4k^2,\ 0\right)\ \text{и}\ \gamma=\gamma\left(0,\ -{}^1/_4k^2,\ 0\right).$$

[1]) Rivlin R. S., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **193**, 260 (1948); *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45**, 88 (1949).

Из представления (65.1) следует, в частности, что удельное сопротивление T_{xy} является четной функцией скорости проскальзывания k. Так как в рассматриваемом течении ускорение равно нулю, динамические уравнения (6.7) записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}\gamma k^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\beta k\right), \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4}\gamma k^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\beta k\right). \end{aligned}\right\} \tag{65.2}$$

Если предположить теперь, что β и γ не зависят от температуры, то уравнения (65.2) имеют простое решение: $p = \text{const}$ и

$$T_{yy} = -p + \frac{\gamma k^2}{2}.$$

Следовательно, для существования слоистого течения между двумя плоскими бесконечными пластинками, кроме силы, вызывающей проскальзывание, и давления, необходимо дополнительное напряжение, направленное по нормали к пластинкам и пропорциональное *квадрату* скорости проскальзывания. Этот несколько неожиданный результат носит название эффекта Пойнтинга.

Если в области течения температура не постоянна, то решение $p = \text{const}$ не удовлетворяет системе (65.2) и для эффективного построения решения нужно выбрать конкретную зависимость β и γ от давления и температуры.

2. *Течение Пуазейля.* Предположим, что в цилиндрической системе координат r, θ, z движение записывается в виде

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_z \equiv w = w(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a,$$

причем $w(a) = 0$. В этом случае $\mathbf{T}$ определяется формулой (см. п. 61)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \frac{1}{2}\beta w' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\gamma w'^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\beta = \beta\left(0, -\frac{1}{4}w'^2, 0\right), \quad \gamma = \gamma\left(0, -\frac{1}{4}w'^2, 0\right).$$

Уравнения движения (12.3) с учетом формулы (12.9) записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{4r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\gamma w'^2\right] - \frac{w'}{2}\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\beta w'\right] - \frac{w'^2}{4}\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{65.3}$$

Если коэффициенты β и γ не зависят от температуры и давления, то мы можем получить решение требуемого вида, положив

$$p = Cz + f(r), \quad C = \text{const}. \tag{65.4}$$

Действительно, подстановка этого выражения для p в первое уравнение (65.3) приводит к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для профиля скоростей:

$$\beta w' = Cr, \tag{65.5}$$

а затем из первого уравнения мы получим

$$f(r) = \int \frac{1}{4r}\frac{d}{dr}\left[r\gamma w'^2\right] dr. \tag{65.6}$$

Поток массы $\mathfrak{M}$ выражается при этом формулой

$$-\rho \int w\, da = -\pi\rho \int_0^a w d(r^2) = \pi\rho C \int_0^a r^3 \beta^{-1} dr. \tag{65.7}$$

(При учете силы тяжести в формуле (65.4) коэффициент C надо заменить на $C - \rho g$.)

В частном случае квадратичной зависимости **T** от **D** коэффициенты β и γ постоянны (так как рассматривается течение несжимаемой жидкости). Полагая $\beta = 2\mu$ и интегрируя уравнение (65.5), мы приходим к классическим формулам для скорости

$$w = \frac{C}{4\mu}(r^2 - a^2)$$

и потока массы

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi\rho C}{8\mu} a^4. \tag{65.8}$$

Заметим, что распределение давления по сечению трубы не будет при этом постоянным. Для более детального исследо-

вания следствий этого результата мы предположим, что жидкость вытекает из трубки в воздух при давлении p_0. Тогда на выходное сечение с внешней стороны будет действовать сила $\pi a^2 p_0$. Так как

$$\widehat{zz} = \widehat{rr} = -Cz - \frac{1}{32}\frac{\gamma C^2}{\mu^2} r^2 - \text{const},$$

то из условия равенства сил, действующих на выходное сечение $z = 0$ снаружи и изнутри, получается следующее соотношение:

$$\pi a^2 p_0 = -\pi \int_0^a \widehat{zz}\, d(r^2) = \frac{\pi}{64}\frac{\gamma C^2}{\mu^2} a^4 + \pi a^2 \cdot \text{const}.$$

Таким образом, сила P, с которой жидкость действует на единичную площадку стенки, равна

$$P = -\widehat{rr}\,|_{r=a} = Cz + \frac{1}{64}\frac{\gamma C^2}{\mu^2} a^2 + p_0.$$

Если ввести величину $\Gamma = \mathfrak{M}/\pi a^2 \rho$, равную объему жидкости, протекающей за единицу времени через единицу площади поперечного сечения, то из формулы (65.8) следует, что

$$C = 8\mu\Gamma/a^2.$$

Подставив это выражение в выписанное выше уравнение, получим интересную формулу:

$$\frac{P - p_0}{(\Gamma/a)^2} = 8\mu\Gamma^{-1} z + \gamma, \tag{65.9}$$

которая может служить теоретическим объяснением наблюдавшегося Меррингтоном [1]) расширения потока у выходного

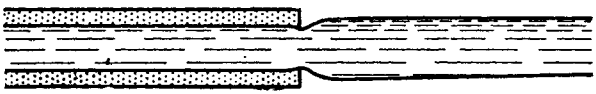


Рис. 16. Истечение жидкости из вискозиметра малого диаметра (по Меррингтону).

отверстия вискозиметра (рис. 16). Действительно, в соответствии с формулой (65.9) разность давлений у выходного

[1]) Merrington A. C., *Nature*, **152**, 663 (1943).

отверстия $z=0$ положительна при $\gamma>0$, так что обнаруженный Меррингтоном эффект легко объясняется влиянием положительной квадратичной добавки в формуле (59.3). Справедливость формулы (65.9) можно проверить экспериментально, определяя величину изменения P вдоль трубки при различных значениях Γ; одновременно это дало бы надежно определенную величину коэффициента γ. При выполнении такого эксперимента наибольший эффект должен наблюдаться, как можно заметить из формулы (65.9), при больших значениях потока массы и малых радиусах трубки, причем характер изменения *P не должен зависеть от длины трубки* (Меррингтон действительно наблюдал увеличение показанного на рис. 16 расширения потока при росте напряжений и потока массы).

В работах Ривлина, на которые мы уже ссылались в начале этого пункта, было исследовано также течение Куэтта; это исследование здесь опущено. Джилбарг и Паолуччи [1]) рассмотрели решение типа ударного слоя для жидкости с нелинейной вязкостью.

§ 2. Динамическое подобие

В следующих ниже пунктах будут выведены необходимые условия динамического подобия двух течений вязкой жидкости. Мы принимаем линейный закон зависимости напряжений от деформаций, но не предполагаем вязкость и теплопроводность постоянными [2]). Случаи сжимаемой и несжимаемой жидкости удобно рассматривать отдельно.

66. Сжимаемые вязкие жидкости. Два течения являются динамически подобными, если они связаны соотношениями

$$\mathbf{v}=U\mathbf{v}', \quad \rho=R\rho', \quad p=Pp', \tag{66.1}$$

и

$$\mathbf{x}=D\mathbf{x}', \quad t=(D/U)t' \tag{66.2}$$

[1]) Gilbarg D., Paolucci D., *J. Rational Mech. Anal.*, **2**, 617 (1953).

[2]) Обычно предполагается, что коэффициенты вязкости либо являются постоянными, либо пропорциональны абсолютной температуре в некоторой степени. Последующий анализ показывает, что предположения такого рода являются *необходимыми* в том смысле, что без этих свойств невозможно точное динамическое подобие.

(см. п. 36). Мы ставим своей задачей выяснение тех свойств двух динамически подобных течений, которые следуют из соотношений (66.1) и (66.2); так как при этом придется проделать большую работу, читатель, которого интересуют только окончательные результаты, может обратиться сразу к утверждению, сформулированному на стр. 221.

Уравнение неразрывности не накладывает никаких ограничений на величины коэффициентов подобия, так что мы переходим сразу к уравнению Навье — Стокса (61.4). Пренебрегая действием внешних сил, мы после подстановки в это уравнение выражений (66.1) и (66.2) получаем

$$RU\rho' \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\frac{P}{U}\operatorname{grad}' p' + \frac{1}{D}\Big[\lambda \operatorname{grad}' \Theta' + 2\mu \operatorname{div}' \mathbf{D}' + \\ + \Theta'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p'}\operatorname{grad}' p' + \frac{\partial\lambda}{\partial\rho'}\operatorname{grad}' \rho'\right) + \\ + 2\mathbf{D}' \cdot \left(\frac{\partial\mu}{\partial p'}\operatorname{grad}' p' + \frac{\partial\mu}{\partial\rho'}\operatorname{grad}' \rho'\right)\Big]. \quad (66.3)$$

Предполагается, что коэффициенты λ и μ зависят только от термодинамических переменных и $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{v}$. (В частном случае постоянных коэффициентов вязкости члены, стоящие во второй и третьей строках уравнения (66.3), обращаются в нуль.) Рассмотрим теперь семейство кривых C в пространстве $\mathbf{x}'$, определяемых уравнениями $p' = \text{const}$, $\rho' = \text{const}$. Вдоль любой из этих кривых уравнение (66.3) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{8} a_i \boldsymbol{\xi}_i = 0,$$

где a_i — постоянные, а $\boldsymbol{\xi}_i$ — векторные переменные; в частности, $a_1 = RU$, $\boldsymbol{\xi}_1 = \rho' d\mathbf{v}'/dt'$, $a_2 = P/U$, $\boldsymbol{\xi}_2 = \operatorname{grad}' p'$ и т. д. В силу того, что „помеченное штрихами“ течение удовлетворяет уравнению Навье — Стокса, мы вдоль кривых C имеем также

$$\sum_{i=1}^{8} b_i \boldsymbol{\xi}_i = 0,$$

где $b_1 = b_2 = 1$, $b_3 = -\lambda'$ и т. д. Из этих двух уравнений следует, что $a_i/b_i = \text{const} = RU$,

$$RU^2/P = 1 \quad (66.4)$$

и

$$RUD = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}. \quad (66.5)$$

(Эти рассуждения теряют свою силу, если переменные ξ_l не независимы на кривых C; примером может служить плоское течение. В таких случаях мы можем, однако, получить указанные результаты, не вводя в рассмотрение кривые C и предположив, что коэффициенты вязкости постоянны или что $\lambda, \mu = \text{const} \cdot p^m \rho^n$.)

К соотношению (66.4) мы вернемся далее, после выяснения других необходимых условий динамического подобия. Что касается соотношения (66.5), то его следствием является утверждение: *отношение* λ/μ *и местное число Рейнольдса* $\mathrm{Re} = \rho q l/\mu$ *должны принимать равные значения в соответствующих точках двух динамически подобных течений.* Через l здесь обозначен некоторый характерный размер (геометрически подобных) областей течения. Следует подчеркнуть, что этот результат доказан при *переменных* коэффициентах вязкости и независимо от соотношения Стокса.

Из соотношений (66.5) следует также, что отношение μ/μ' не зависит от p'; поэтому

$$\frac{\mu(Pp')}{\mu'(p')} = \frac{\mu(P)}{\mu'(1)}.$$

При естественном предположении о справедливости этого соотношения для любых значений P мы получаем отсюда

$$\frac{\mu'(p')}{\mu'(1)} = \frac{\mu(Pp')}{\mu(P)} = \frac{\mu(p')}{\mu(1)};$$

таким образом,

$$\mu(Pp') = \text{const} \cdot \mu(P)\mu(p')$$

и, следовательно, $\mu \sim p^m$ [1]). Аналогичным образом получаем соотношение $\mu \sim \rho^n$, так что окончательно $\mu = \text{const} \cdot p^m \rho^n$. Так как в силу соотношения (66.5) $\mu/\mu' = \lambda/\lambda'$, то справедлива следующая теорема: *для того чтобы были возможны динамически подобные течения двух сжимаемых жидкостей при произвольных значениях* R *и* P, *необходимо, чтобы коэффициенты вязкости каждой из этих жидкостей имели вид*

$$\lambda, \mu = \text{const} \cdot p^m \rho^n \qquad (66.6)$$

с одними и теми же постоянными m *и* n. *Кроме того, отношения* λ/μ *для этих жидкостей должны совпадать.*

[1]) См. примечание 2 на стр. 107.

Дальнейшее исследование основано на предположении, что уравнение состояния жидкости является уравнением состояния совершенного газа [1])

$$p = \mathcal{R}\rho T, \quad E = E(T). \tag{66.7}$$

Из уравнений (66.1) и (66.7) следует, что

$$T = \frac{P}{R}\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}T' \equiv T_0 T'; \tag{66.8}$$

последнее равенство служит для определения коэффициента подобия T_0. Подставив выражения (66.1), (66.2), (66.7) и (66.8) в уравнение энергии (63.3), получим

$$RT_0 c_v \rho' \frac{dT'}{dt'} + Pp'\Theta' = \frac{U}{D}\left(-\lambda\Theta'^2 + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}'\right) + \\ + \frac{T_0}{DU}\left[\varkappa \nabla'^2 T' + \operatorname{grad}' T' \cdot \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial p'}\operatorname{grad}' p' + \frac{\partial \varkappa}{\partial \rho'}\operatorname{grad}' \rho'\right)\right], \tag{66.9}$$

где $c_v = dE/dT$. Если по аналогии с предыдущими рассуждениями ввести в рассмотрение семейство кривых C, то, следуя указанной схеме, нетрудно получить, что

$$RT_0\left(\frac{c_v}{c_v'}\right) = P \quad \text{и} \quad RUD\left(\frac{c_v}{c_v'}\right) = \frac{\varkappa}{\varkappa'}. \tag{66.10}$$

Тогда из соотношений (66.8) и (66.10) мы имеем $\mathcal{R}' c_v = \mathcal{R} c_v'$. Так как $\mathcal{R} = c_p - c_v$, это означает, что $\gamma = \gamma'$; другими словами, отношение удельных теплоемкостей для обоих газов должно быть одним и тем же в соответствующих точках течений. На основании этого равенства, соотношения (66.5) и второго соотношения (66.10) мы заключаем, что число Прандтля

$$\sigma = \mu c_p/\varkappa$$

должно быть одним и тем же в соответствующих точках течений. Наконец,

$$\frac{c^2}{c'^2} = \frac{\gamma p/\rho}{\gamma' p'/\rho'} = \frac{R}{P}. \tag{66.11}$$

Возвращаясь к условию (66.4) и сравнивая его с соотношением (66.11), мы видим, что местные числа Маха должны совпадать в соответствующих точках течений.

---

[1]) Заметим, что удельные теплоемкости *не предполагаются* постоянными.

Если возможны динамически подобные течения двух газов при произвольных значениях R и P, то величины γ и γ' должны быть постоянными. Наряду с этим постоянны c_v и c'_v и выполняется условие $\varkappa = \text{const} \cdot p^m \rho^n$. Таким образом, подводя итог проведенному выше исследованию, мы можем сформулировать следующую теорему.

Если два совершенных газа с отличными от нуля коэффициентами вязкости и теплопроводности находятся в динамически подобном движении, то местные числа Рейнольдса и местные числа Маха равны в соответствующих точках течений. Кроме того, в соответствующих точках равны отношения удельных теплоемкостей γ, отношения коэффициентов вязкости λ/μ и числа Прандтля σ.

Если динамически подобные движения двух таких газов возможны при произвольных значениях R и P, то для каждого из газов

$$\mu,\ \lambda,\ \varkappa = \text{const} \cdot p^m \rho^n$$

с одними и теми же постоянными m и n. Кроме того, отношения удельных теплоемкостей и числа Прандтля обоих газов постоянны и равны.

Следует отметить, что хотя сформулированные в теореме условия являются довольно жесткими, газы, с которыми мы имеем дело в практических задачах, им, как правило, удовлетворяют.

При более детальном изучении вопроса о динамическом подобии нужно учитывать влияние граничных условий. При решении возникающих при этом сложных задач плодотворными оказываются методы теории размерностей. Однако во всех тех случаях, когда полное исследование не проведено, нужно иметь в виду сделанное в п. 36 замечание относительно возможной некорректности выводов теории размерностей.

67. Динамическое подобие; несжимаемые вязкие жидкости. Для несжимаемых жидкостей вопросы динамического подобия являются существенно более сложными в силу того, что термодинамика несжимаемых жидкостей изучена значительно хуже, чем термодинамика газов. Так как давле-

ние определено теперь только с точностью до аддитивной постоянной, условие (66.1) следует видоизменить и записать так:

$$p = Pp' + \text{const}.$$

Тогда при постоянном коэффициенте вязкости легко показать, что в *соответствующих точках динамически подобных течений равны местные числа Рейнольдса*. Дальнейшие результаты связаны с трудно проверяемыми предположениями

$$T = T_0 T' \quad \text{и} \quad E = kT.$$

При этих предположениях устанавливается, аналогично тому, как это было сделано выше, что для каждой из жидкостей коэффициенты вязкости и теплопроводности должны иметь вид

$$\mu,\ \varkappa = \text{const} \cdot T^m$$

и что „числа Прандтля“ $\mu k/\varkappa$ равны в соответствующих точках обоих течений. Исследование влияния силы тяжести можно найти в работе Биркгофа [17].

§ 3. Несжимаемые вязкие жидкости

Далее мы будем рассматривать несжимаемые вязкие жидкости с линейной зависимостью напряжений от деформаций

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

и будем предполагать, что коэффициент вязкости μ постоянен, так как в противном случае возникают значительные математические трудности. Это предположение хорошо согласуется с экспериментальными данными по крайней мере в тех случаях, когда изменение температуры в области течения не очень велико. Будем предполагать также, что поле внешних сил потенциально, т. е. что $\mathbf{f} = -\operatorname{grad} \Omega$.

Теория сжимаемых вязких жидкостей не получила особого развития, за исключением акустического приближения и теории пограничного слоя (см. т. XI и VIII данной Энциклопедии), и поэтому здесь излагаться не будет.

Следует упомянуть, однако, некоторые известные точные решения, в особенности решение типа ударного слоя (см. п. 57),

простые примеры слоистых течений Иллингворта [1]) и исследование задачи Рэлея, приведенное в работе Хоуарта [2]).

68. Уравнения движения. Уравнениями движения несжимаемой вязкой жидкости являются уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{68.1}$$

и уравнение Навье — Стокса

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad}(p + \rho\Omega) + \mu\nabla^2\mathbf{v}. \tag{68.2}$$

Так как в силу уравнения неразрывности мы имеем

$$\nabla^2\mathbf{v} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}, \tag{68.3}$$

то, учитывая тождество (17.1), мы можем записать уравнение Навье — Стокса в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\operatorname{grad} H - \nu \operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}, \tag{68.4}$$

где $H = {}^1/_2 q^2 + p/\rho + \Omega$ и $\nu = \mu/\rho$. В дальнейшем нам придется не раз обращаться к уравнению энергии (9.1). При сделанных предположениях нетрудно заметить, что $\mathbf{T} : \mathbf{D} = 2\mu\mathbf{D} : \mathbf{D} = \Phi$, где Φ — функция диссипации, введенная в п. 61. Следовательно, уравнение энергии в случае несжимаемой вязкой жидкости можно записать так:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T} + \mathfrak{U}) = \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}\, da - \int_{\mathfrak{V}} \Phi\, dv; \tag{68.5}$$

физическая интерпретация различных членов этого уравнения очевидна. Далее, уравнение (63.3) для температуры в случае вязкой несжимаемой жидкости имеет следующий вид:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \Phi + \varkappa\nabla^2 T; \tag{68.6}$$

здесь предполагается, что c_v и $\varkappa$ постоянны. Так как температура не входит в уравнения (68.1) и (68.2) (предполагается все время, что μ постоянно), уравнение (68.6) может

[1]) Illingworth C. R., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **46**, 469 (1950). Дальнейшее исследование плоского течения Куэтта приведено в [23], стр. 362—367.

[2]) Howarth L., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **4**, 157 (1951).

понадобиться только для определения распределения температуры в жидкости. Вопрос о распределении температуры почти не освещен в литературе, за исключением технических приложений [1]), и мы не будем затрагивать его в этой статье.

Запись приведенных выше уравнений в системе криволинейных координат не представляет труда, если воспользоваться общими методами, указанными в п. 61.

69. Завихренность. Характерной чертой движений вязкой жидкости является наличие завихренности. В этом пункте будут выяснены причины возникновения завихренности и рассмотрены уравнения, описывающие ее распределение.

Невозможность безвихревых течений. Поле скоростей $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$, как легко видеть, удовлетворяет уравнениям (68.1) и (68.2), если φ — функция гармоническая. Таким образом, безвихревое движение несжимаемой вязкой жидкости является динамически возможным. Несмотря на это, в действительности такое движение не может быть осуществлено. Причина заключается в специфике граничных условий для вязкой жидкости: на твердых граничных поверхностях должно выполняться условие прилипания (см. п. 64). Это условие, как мы знаем (см. п. 23), не осуществимо при безвихревых движениях несжимаемой жидкости. (Сказанное выше ни в коей мере не противоречит теории пограничного слоя, в которой течение вне пограничного слоя предполагается безвихревым; завихренность течения вне пограничного слоя, конечно, существует, но она настолько мала, что с точки зрения практических приложений это течение вполне можно рассматривать как безвихревое.)

В некоторых случаях, вопреки общему правилу, безвихревое движение вязкой жидкости является возможным. Примером может служить течение с потенциалом $\varphi = A/r$ (вихрь) в области, внешней по отношению к вращающемуся круговому цилиндру; A выбирается так, чтобы на стенке цилиндра выполнялось условие прилипания. Составить полный перечень таких исключительных случаев, по-видимому, невозможно, однако можно с уверенностью сказать, что их немного.

---

[1]) См. статью Сквайра [39], т. 2, а также книгу Холла [Hall N. A., The thermodinamics of fluid flow, New York, 1951].

Распределение завихренности. Основным уравнением для распределения завихренности является следующее уравнение:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \tag{69.1}$$

которое легко получить применением оператора rot к уравнению (68.4). Если в правой части этого уравнения отсутствовал бы второй член, то распределение завихренности в вязкой жидкости удовлетворяло бы теоремам Гельмгольца. Наличие этого члена показывает, однако, что малые изменения завихренности в области течения в общем случае вызывают *диффузию* завихренности. Рассуждения такого рода приводят к следующему практически важному результату: *завихренность не может инициироваться во внутренних точках области течения вязкой несжимаемой жидкости, так что причиной появления завихренности является ее диффузия с граничных поверхностей.* В реальных жидкостях существенно отличная от нуля завихренность наблюдается только в тех частях жидкости, которые проходят близко от твердых границ; ярким примером может служить спутное течение, которое возникает за кормой корабля и завихренность которого порождается только в слоях воды, проходящих в непосредственной близости от бортов. На этом же примере можно проследить затухание вихрей в возмущенной зоне вследствие вязкости. Сформулированный выше результат можно получить также, исследуя скорость изменения циркуляции вдоль замкнутой кривой $\mathfrak{C}$. В силу уравнений (25.1) и (68.2) мы имеем

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathfrak{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathfrak{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} = \nu \int_{\mathfrak{S}} \nabla^2 \mathbf{v} \, da;$$

здесь через $\mathfrak{S}$ обозначена произвольная поверхность, натянутая на кривую $\mathfrak{C}$. В случае плоского течения уравнение (69.1) сводится к простому уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \nabla^2 \omega, \tag{69.2}$$

напоминающему уравнение теплопроводности. Полученная аналогия с потоком тепла служит убедительным свидетельством диффузии завихренности с граничных поверхностей внутрь области течения.

Примеры. Интересно проследить процессы возникновения и затухания вихревых возмущений в вязкой жидкости на примере некоторых частных решений уравнений Навье — Стокса. Рассмотрим сначала движение по концентрическим окружностям с центром на оси, в котором величина скорости q является функцией расстояния от этой оси. Завихренность определяется по формуле (12.12), а именно

$$\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rq). \tag{69.3}$$

Воспользовавшись тем, что ω зависит только от r, мы вместо уравнения (69.2) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right).$$

Частное решение этого уравнения

$$\omega = \frac{A}{4\pi\nu t}e^{-\chi}, \quad \text{где } \chi = \frac{r^2}{4\nu t}, \tag{69.4}$$

соответствует затуханию *потенциального* вихря интенсивности A. Подставив это значение ω в уравнение (69.3), мы находим

$$q = \frac{A}{2\pi r}(1 - e^{-\chi});$$

добавочное слагаемое $f(t)/r$ здесь опущено, исходя из требования конечности q на оси z. Легко видеть, что это течение в начальный момент времени является безвихревым с циркуляцией A (по контуру, охватывающему ось z) и во все время движения имеет одну и ту же суммарную завихренность. В фиксированной точке $r \neq 0$ завихренность равна нулю при $t = 0$ и $t = \infty$ и достигает максимума в некоторый промежуточный момент времени [1]). Нужно заметить, что кинетическая энергия, момент количества движения и энергия диссипации представляются в рассматриваемом примере расходящимися (к бесконечности) интегралами, так что такое течение в неограниченной области физически неосуществимо.

[1]) Мера завихренности этого движения $\mathfrak{W} = \chi/(e^{\chi} - 1 - \chi)$ монотонно возрастает вместе с t от $\mathfrak{W} = 0$ при $t = 0$ до $\mathfrak{W} = \infty$ при $t = \infty$. Таким образом, относительная роль вращательного движения возрастает, хотя завихренность стремится к нулю.

Более реальное движение соответствует полю завихренности [1])

$$\omega = \frac{\Lambda}{2\pi\nu t^2}(1-\chi)\,e^{-\chi}$$

(это решение получается дифференцированием решения (69.4) по t). Скорость определяется из формулы

$$q = \frac{r\Lambda}{4\pi\nu t^2}\,e^{-\chi}.$$

В этом случае циркуляция равна нулю при $t=0$, суммарные величины энергии и диссипации энергии конечны, а момент количества движения L постоянен, так как

$$L = \int_0^\infty 2\pi\cdot\rho r q\cdot r\,dr = \rho\Lambda.$$

В фиксированный момент времени $t>0$ скорость равна нулю на оси z и на бесконечности и достигает максимальной величины $\Lambda/2\pi\sqrt{2\nu e t^3}$ на расстоянии $r=\sqrt{2\nu t}$. Величина

$$r_0 = \sqrt{2\nu t_0}$$

была названа Тэйлором „радиусом" вихря в момент времени t_0. Так как максимальная скорость затухает по закону $t^{-3/2}$, то время, за которое интенсивность вихря радиуса r_0 с максимальной скоростью q_0 уменьшится до значения, соответствующего максимальной скорости $\frac{1}{2}q_0$, равно

$$t - t_0 = (2^{2/3}-1)\,t_0 = 0{,}296\,r_0^2/\nu.$$

Тэйлор принимает это число за меру скорости затухания вихря [2]).

Следует отметить в заключение пример, рассмотренный Ламбом ([8], стр. 740) и иллюстрирующий исчезновение поверхности разрыва в виде соприкасающихся слоев, движущихся с различными скоростями. Полученный при этом

---

[1]) Taylor G. I., *Aero. Res. Comm. R. and M.*, № 598, 1918.

[2]) Мера завихренности $\mathfrak{W} = |\chi^{-1}-1|$ в этом случае также неограниченно возрастает, несмотря на то, что сама завихренность стремится к нулю.

результат показывает, как быстро такая поверхность сгладилась бы, если бы она действительно возникла в некоторый момент времени. Этот пример можно рассматривать так же, как движение первоначально покоящейся неограниченной жидкости, вызванное внезапно начавшимся движением плоской стенки (задача Рэлея).

70. Уравнения установившегося движения в естественных координатах. В случае плоского движения мы можем записать уравнение (68.2) в проекциях на направления линий тока и нормалей к линиям тока и получить следующие уравнения:

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} = -\mu \frac{\partial \omega}{\partial n}, \quad \rho q^2 \varkappa + \frac{\partial p}{\partial n} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial s}.$$

Присоединив к этим уравнениям уравнение неразрывности и формулу для завихренности (см. п. 20)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial q}{\partial s} + Kq = 0, \quad \omega = -\frac{\partial q}{\partial n} + \varkappa q,$$

мы получим полную систему уравнений в естественных координатах.

Для осесимметричного течения мы имеем аналогично

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\mu}{y} \frac{\partial}{\partial n}(y\omega),$$

$$\rho q^2 \varkappa + \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\mu}{y} \frac{\partial}{\partial s}(y\omega),$$

и

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial s}(yq) + Kq = 0, \quad \omega = -\frac{\partial q}{\partial n} + \varkappa q.$$

Уравнения для функции тока плоского и осесимметричного течения приведены в книге [36].

71. Энергетические соотношения. Мы обращаем внимание читателя на два полезных и часто используемых тождества: формулу Ламба — Томсона[1]) для кинетической

[1]) Lamb H., A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids, Cambridge, 1879 (первое издание книги [8]). Thomson J. J., A Treatise on the motion of vortex rings, London, 1883.

энергии

$$\mathfrak{T} = \rho \int_{\mathfrak{v}} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})\, dv + \rho \oint_{\mathfrak{s}} \left[\tfrac{1}{2} q^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\right] da \tag{71.1}$$

и формулу Бобылева — Форсайта [1]) для диссипации энергии

$$\int_{\mathfrak{v}} \Phi\, dv = \mu \int_{\mathfrak{v}} \omega^2\, dv + 2\mu \oint_{\mathfrak{s}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, da. \tag{71.2}$$

В этих формулах через $\mathfrak{v}$ обозначен конечный объем, ограниченный поверхностью $\mathfrak{s}$. Заметим, что справедливость формул (71.1) и (71.2) проверяется формальными выкладками, основанными только на уравнении неразрывности $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и формуле диссипации $\Phi = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}$. В том случае, когда скорости на $\mathfrak{s}$ равны нулю, формулы (71.1) и (71.2) принимают более простой вид, а именно

$$\mathfrak{T} = \rho \int_{\mathfrak{v}} (r \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})\, dv \tag{71.3}$$

и

$$\int_{\mathfrak{v}} \Phi\, dv = \mu \int_{\mathfrak{v}} \omega^2\, dv. \tag{71.4}$$

Для доказательства формулы (71.1) мы воспользуемся следующими тождествами:

$$\operatorname{div}(q^2 \mathbf{r}) = 3q^2 + \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} q^2,$$

$$\operatorname{div}\,[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{v}] = q^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\, \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} q^2;$$

при проверке второго из них надо иметь в виду, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Сравнивая эти тождества и применяя теорему Гаусса — Остроградского, получаем

$$\oint_{\mathfrak{s}} \left[\tfrac{1}{2} q^2 \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{v}\right] \cdot \mathbf{n}\, da = \int_{\mathfrak{v}} \left(\tfrac{1}{2} q^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}\right) dv,$$

откуда сразу следует формула (71.1). Формула (71.1) легко обобщается на случай сжимаемых жидкостей; в этом случае

[1]) Бобылев Д. К., *Math. Ann.*, 6, 72 (1873); Forsythe A. R., *Mess. Math.*, 9, 134 (1880).

она имеет вид

$$\int_v \frac{1}{2} q^2 \, dv = \int_v \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \Theta + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right] dv + \\ + \oint_\sigma [q^2 [\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] \, da. \quad (71.5)$$

Заметим, что в формулах (71.1) и (71.5) подинтегральную функцию интеграла по поверхности можно записать в более симметричной форме, а именно так:

$$\frac{1}{2} [(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})].$$

Доказательство формулы (71.2) основывается на том, что в силу уравнения (28.1)

$$\mathbf{D} : \mathbf{D} = \frac{1}{2} \omega^2 + \operatorname{div} \mathbf{a},$$

так как $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Отсюда формула (71.2) получается простым применением теоремы Гаусса — Остроградского.

Приведенные здесь доказательства значительно проще аналогичных доказательств Ламба ([8], стр. 273 и 726). Несколько других энергетических соотношений было приведено нами ранее (см. п. 26).

72. Теоремы единственности для течений вязкой жидкости. Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость, заполняющую ограниченный объем $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(t)$, граница которого $\mathfrak{S}$ состоит из конечного числа замкнутых твердых поверхностей, движущихся заданным образом (твердые тела, движущиеся в ограниченном сосуде). В силу условия прилипания (см. п. 64) поле скоростей жидкости на границе $\mathfrak{S}$ совпадает с полем скоростей границы $\mathfrak{S}$ в ее собственном движении. Естественно поставить вопрос: будет ли движение жидкости в этих предположениях полностью определяться распределением скорости в некоторый начальный момент $t = 0$? Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема: *если два течения в ограниченной области*

$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(t)$ *имеют одно и то же распределение скорости при* $t = 0$ *и на границе* $\mathfrak{V}$, *то они тождественны* [1]).

Доказательство этой теоремы основано на простом тождестве для кинетической энергии, соответствующей разности скоростей двух движений. Пусть $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^*$ — два поля скоростей, удовлетворяющих условиям теоремы. Введем в рассмотрение величины

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^* - \mathbf{v}, \qquad \mathfrak{K} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathfrak{V}} u^2\, dv.$$

Тогда мы имеем [2])

$$\frac{d\mathfrak{K}}{dt} = -\int\limits_{\mathfrak{V}} (\nu \operatorname{grad}\mathbf{u} : \operatorname{grad}\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{u})\, dv, \qquad (72.1)$$

где $\mathbf{D}$ — тензор деформаций, соответствующий полю $\mathbf{v}$. Действительно, так как $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^*$ являются решениями уравнения Навье — Стокса (68.2), то

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v}^*\cdot\operatorname{grad}\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\frac{p^* - p}{\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{u}.$$

Умножив это уравнение скалярно на $\mathbf{u}$ и воспользовавшись условием несжимаемости $\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, мы получим ра-

---

[1]) Эта теорема принадлежит Фоа [F o á E., *L'Industria* (Milan), **43**, 426 (1929)]. Теорема Фоа была доказана независимо Д. Е. Долидзе [*ДАН СССР*, **96**, 437 (1954)] и обобщена на случай сжимаемых жидкостей Граффи [G r a f f i D., *J. Rational Mech. Anal.*, **2**, 99 (1953)]. См. также работу автора этой статьи (*Arch. Rational Mech. Anal.*, 1959).

Различного рода теоремы единственности так называемых „слабых" решений уравнений Навье — Стокса (см. ниже) можно найти в указанных в конце этого пункта работах Лере, Киселева и Ладыженской.

[2]) Уравнение (72.1) можно найти в работе Рейнольдса [*Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, *A*, **186**, 123 (1894)] и в работе Орра [*Proc. Roy. Irish. Acad.*, *A*, **27**, 69—138 (1907)].

Часто оказываются полезными другие формы соотношения (72.1), вытекающие из тождества

$$\int \operatorname{grad}\mathbf{u} : \operatorname{grad}\mathbf{u}\, dv = \int |\operatorname{rot}\mathbf{u}|^2\, dv = 2\int \mathbf{D}' : \mathbf{D}'\, dv, \qquad (72.1')$$

справедливого в предположении, что $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ и $\mathbf{u} = 0$ на $\mathfrak{S}$. Равенство (72.1′) легко доказать методами, указанными в п. 28.

венство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = -\nu \operatorname{grad}\mathbf{u} : \operatorname{grad}\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{u} + \\ + \operatorname{div}\left(\nu \operatorname{grad}\frac{1}{2}u^2 - \frac{p^*-p}{\rho}\mathbf{u} - \frac{1}{2}u^2\mathbf{v}^*\right),$$

интегрирование которого по объему $\mathfrak{V}$ при условии $\mathbf{u}=0$ на $\mathfrak{S}$ приводит к формуле (72.1).

Обозначим теперь через $-m$ нижнюю грань характеристических чисел матрицы $\mathbf{D}$ в промежутке времени $0<t<T$; заметим, что $m\geqslant 0$, так как $\operatorname{Spur}\mathbf{D}=\operatorname{div}\mathbf{v}=0$. Из определения m и свойств характеристических чисел следует, что в каждой точке $\mathfrak{V}$ и для всех t, $0<t<T$, выполняется неравенство

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}\geqslant -mu^2. \tag{72.2}$$

Тогда в силу формулы (72.1)

$$\frac{d\mathfrak{K}}{dt}\leqslant m\int_{\mathfrak{V}} u^2\,dv = 2m\mathfrak{K}.$$

Переписав это неравенство в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{K}(t)\,e^{-2mt}\right)\leqslant 0$$

и проинтегрировав от $t=0$ до $t=T$, мы получим, что

$$\mathfrak{K}(T)\,e^{-2mT}\leqslant 0.$$

Так как момент T был выбран произвольно, это означает, что величина $\mathfrak{K}$ тождественно равна нулю. Следовательно, $\mathbf{u}=0$ и поля скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^*$ совпадают. При соответствующих предположениях относительно асимптотического поведения течения при $r\to\infty$ установленный выше результат может быть перенесен на случай обтекания бесконечным потоком жидкости конечного числа ограниченных тел. В частности, если для $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^*$ справедливы асимптотические представления

$$\mathbf{v}=\mathbf{U}+O(r^{-k}),\quad \operatorname{grad}\mathbf{v}=O(r^{-k+1}),\quad p=p_\infty+O(r^{-k+1}),$$

где $k>{}^3/_2$, то интеграл в формуле для $\mathfrak{K}$ сходится и приведенное выше доказательство остается справедливым. (Эти условия являются довольно жесткими и, по-видимому, не выполняются в зоне возмущенного движения за препятствием;

можно предложить условия другого рода, которые допускают, однако, только специальный характер движения в возмущенной зоне.)

Мы не имеем возможности остановиться здесь на вопросе о существовании решений уравнений Навье — Стокса, удовлетворяющих заданным начальным и граничным условиям. Эта исключительно трудная задача решена еще не полностью, хотя ей посвящены многочисленные исследования. Не ставя перед собой трудно выполнимой задачи дать полную библиографию, мы ограничимся перечнем монографий, которые содержат основные результаты, полученные к настоящему времени:

Oseen C. W., Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig, 1927.

Leray J., Étude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *J. Math. Pures Appl.* (9), **12**, 1—82 (1933).

Leray J., Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, *J. Math. Pures Appl.* (9), **13**, 331—418 (1934).

Leray J., Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, **63**, 193—248 (1934).

Долидзе Д. Е., Нелинейная краевая задача для неустановившихся движений вязкой жидкости, *Прикл. мат. и мех.*, **12**, 165—180 (1948).

Hopf E., Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, *Math. Nachr.* **4**, 213—231 (1951).

Киселев А. А., Ладыженская О. А., О существовании и единственности решений задачи Коши для вязких несжимаемых жидкостей, *Изв. АН СССР*, **21**, 635—680 (1957).

Основная трудность задачи заключается в том, что даже гладкие начальные данные приводят в некоторых случаях к решениям, непрерывно дифференцируемым только на ограниченном отрезке времени. Это вызывает необходимость введения различного рода „слабых" решений уравнений Навье — Стокса (см. работы, указанные выше), исследование которых требует привлечения тонких математических методов.

73. Устойчивость течений вязкой жидкости. С проблемой единственности тесно связаны более сложные вопросы гидродинамической устойчивости. Рассмотрим движение жидкости, заполняющей объем $\mathfrak{V}$, с заданным распределением скорости на границе этого объема. В большинстве задач указанного типа область $\mathfrak{V}$ ограничена твердыми стенками и граничные условия определяются движением этих стенок (например, течение Куэтта). Предположим теперь, что рассматриваемое поле скоростей получает в начальный момент $t = 0$ малые возмущения. Естественно поставить вопрос

о характере последующего движения при неизменных граничных условиях: будет ли это движение мало отличаться от невозмущенного или даже малые возмущения начальных данных существенно меняют характер течения.

Есть два различных метода исследования этой задачи: первый включает в себя стандартную процедуру линеаризации, второй основан на формуле (72.1). Мы имеем возможность рассмотреть только второй из этих методов [1]). При использовании этого метода задача сводится к доказательству того, что $\mathfrak{K}$ стремится к нулю, так как отсюда сразу следует, что $\mathbf{u}$ стремится к нулю почти всюду.

Сказанное нуждается в некотором пояснении. Пусть $\mathbf{v}$ — поле скоростей основного течения, а $\mathbf{v}^*$ — поле скоростей возмущенного течения. Тогда основное течение называется устойчивым (устойчивым в среднем), если энергия возмущения $\mathbf{u} = \mathbf{v}^* - \mathbf{v}$ стремится к нулю при возрастании t.

Поведение энергии возмущения при $t \to \infty$ определяется знаком величины, стоящей в правой части формулы (72.1); если эта величина отрицательна для произвольного поля $\mathbf{u}$, удовлетворяющего условию $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, то имеет место устойчивость. Так как первый член правой части уравнения (72.1) всегда отрицателен, то любое возмущение имеет тенденцию сгладиться за счет вязкости, однако при больших величинах касательных напряжений в основном потоке знак правой части (72.1) может измениться за счет положительного второго члена и амплитуда возмущений будет при этом возрастать. Таким образом, устойчивость течения определяется относительной величиной этих двух членов.

Другой критерий аналогичного характера можно получить, записав уравнение (72.1) в несколько измененной форме. Так как $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, мы имеем

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} = \operatorname{div} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{u}] - \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Применив теорему Гаусса — Остроградского, мы вместо формулы (72.1) получим равенство

$$\frac{d\mathfrak{K}}{dt} = \int_{\mathfrak{V}} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \nu \operatorname{grad} \mathbf{u} : \operatorname{grad} \mathbf{u})\, dv. \qquad (73.1)$$

[1]) Относительно исследования устойчивости первым из упомянутых методов см. работы Синга [Synge J. L., Semi-Centennial Publications of the Amer. Math. Soc. 2 (Addresses), стр. 227—269, Линя [22], а также Бейтмена и др. [2].

Следовательно, если первый член подинтегрального выражения в правой части равенства (73.1) по абсолютной величине меньше второго члена для всех допустимых функций $\mathbf{u}$, то основное течение с полем скоростей $\mathbf{v}$ является устойчивым. Так как в первый член в качестве сомножителя входит $\mathbf{v}$, мы приходим к выводу, что большие величины скорости основного течения и большие напряжения могут вызвать неустойчивость. Ниже на основе указанных соображений будут получены численные оценки границ устойчивости.

Следует заметить, что метод энергетических оценок принципиально не может дать точных значений границ устойчивости (для получения точных оценок следует обратиться к линеаризированным уравнениям), так как в этом методе знак величины, стоящей в правой части уравнения (72.1) или (73.1), устанавливается для полей $\mathbf{u}$ произвольного вида, которые могут и не быть динамически возможными. Однако, несмотря на это, исследование уравнений (72.1) и (73.1) приводит к ряду интересных и ценных результатов.

Пусть область $\mathfrak{V}$ имеет конечный диаметр d. Тогда кинетическая энергия произвольного возмущения $\mathbf{u} = \mathbf{v}^* - \mathbf{v}$ *удовлетворяет двум следующим неравенствам:*

$$\mathfrak{K} \leqslant \mathfrak{K}_0 e^{(2m - 6\pi^2\nu/d^2)\,t} \tag{73.2}$$

и

$$\mathfrak{K} \leqslant \mathfrak{K}_0 e^{(V^2 - 3\pi^2\nu^2/d^2)\,t/\nu}, \tag{73.3}$$

где $\mathfrak{K}_0$ — начальная энергия возмущения, — m — нижняя грань характеристических чисел тензора деформаций для основного течения на интервале времени от 0 до t, а V — максимум модуля скорости основного течения на том же интервале времени. Если $m < 3\pi^2\nu/d^2$ или если $V < \sqrt{3}\pi\nu/d$ при всех значениях t, то $\mathfrak{K} \to 0$ при $t \to \infty$ и основное течение является устойчивым [1]).

---

[1]) Формулировка и доказательство этой теоремы принадлежат Томасу [Thomas T. Y., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 29, 243 (1943)] и Хопфу [Hopf E., *Math. Ann.*, 117, 769 (1941)]. Аналогичный результат имеет место в случае, когда область $\mathfrak{V}$ можно заключить в бесконечный цилиндр или между двумя плоскостями, и в случае, когда возмущения предполагаются периодическими.

Интересно заметить, что критерий устойчивости $V \leqslant \sqrt{3}\pi\nu/d$ можно выразить через число Рейнольдса: *если* $\mathrm{Re} = \rho V d/\mu \leqslant \sqrt{3}\pi = 5{,}44$, *то течение является устойчивым.*

Доказательство. Заметим сначала, что для любого непрерывно дифференцируемого поля вектора $\mathbf{h}$

$$0 \leqslant (\operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathbf{hu}) : (\operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathbf{hu}) = \\ = \operatorname{grad} \mathbf{u} : \operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathbf{h} \cdot \operatorname{grad} u^2 + h^2 u^2.$$

Принимая во внимание граничное условие $\mathbf{u} = 0$ на $\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — граница области $\mathfrak{V}$, мы получаем отсюда

$$\int_{\mathfrak{V}} \operatorname{grad} \mathbf{u} : \operatorname{grad} \mathbf{u}\, dv \geqslant \int_{\mathfrak{V}} (\operatorname{div} \mathbf{h} - h^2)\, u^2\, dv. \qquad (73.4)$$

Рассмотрим теперь поле вектора $\mathbf{h} = (\mathbf{r}/r)\, C \operatorname{tg} Cr$, непрерывно дифференцируемое внутри шара радиуса $\pi/2C$. Полагая $C = \pi/d$ и фиксируя надлежащим образом начало координат в области $\mathfrak{V}$, мы можем подставить это значение $\mathbf{h}$ в формулу (73.4). Тогда после несложных преобразований мы приходим к неравенству

$$\int_{\mathfrak{V}} \operatorname{grad} \mathbf{u} : \operatorname{grad} \mathbf{u}\, dv \geqslant 3C^2 \int_{\mathfrak{V}} u^2\, dv = (6\pi^2/d^2)\, \mathfrak{K}. \qquad (73.5)$$

Сравнивая соотношения (72.1), (72.2) и (73.5), получаем неравенство

$$\frac{d\mathfrak{K}}{dt} \leqslant (2m - 6\pi^2 \nu/d^2)\, \mathfrak{K},$$

интегрирование которого приводит к требуемой оценке (73.2).

Доказательство оценки (73.3) проводится аналогичным образом. Исходным пунктом является неравенство, справедливое для произвольной диады $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} : \mathbf{A} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + u^2 v^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{uv}) : (\mathbf{A} - \mathbf{uv}) \geqslant 0.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \leqslant \frac{1}{2} (\mathbf{A} : \mathbf{A} + u^2 v^2). \qquad (73.6)$$

Положив $\mathbf{A} = \nu \operatorname{grad} \mathbf{u}$ и использовав полученное неравенство для того, чтобы найти оценку сверху для величины $\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, входящей в уравнение (73.1), мы приходим к соотношению

$$\frac{d\mathfrak{K}}{dt} \leqslant \frac{1}{2\nu} \int_{\mathfrak{V}} (u^2 v^2 - \nu^2 \operatorname{grad} \mathbf{u} : \operatorname{grad} \mathbf{u})\, dv \leqslant \frac{1}{\nu} (V^2 - 3\pi^2 \nu^2/d^2)\, \mathfrak{K},$$

интегрирование которого дает оценку (73.3).

Кроме довольно грубых [1]) численных оценок границ устойчивости, из неравенств (73.2) и (73.3) следует ряд интересных результатов качественного характера. Например, *возмущения достаточно малой длины волны d затухают независимо от характера основного течения.* Иначе говоря, даже в турбулентном движении не могут существовать „вихри" малого диаметра; макроскопически течение может представляться запутанным случайным процессом, но если наблюдения того же течения проводятся прибором с достаточной разрешающей способностью, то структура течения будет всегда выглядеть регулярной.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда скорость $\mathbf{v}$ основного течения равна нулю. Пусть область $\mathfrak{V}$ ограничена *неподвижными* твердыми стенками, так что $\mathbf{v} = 0$ на $\mathfrak{S}$; тогда кинетическая энергия любого движения в $\mathfrak{V}$ в соответствии с условием (73.2) должна стремиться к нулю по закону

$$\mathfrak{T} \leqslant \mathfrak{T}_0 e^{-6\pi^2 \nu t/d^2}, \tag{73.7}$$

где $\mathfrak{T}_0$ — кинетическая энергия движения при $t = 0$ [2]). Остается, однако, неясным, будет ли само поле скоростей при $t \to \infty$ стремиться к нулю. В качестве последнего следствия докажем теорему единственности *установившихся* течений в фиксированной ограниченной области $\mathfrak{v}$.

Пусть $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{v}^*$ *— два установившихся течения в области* $\mathfrak{v}$ *с заданным, не зависящим от времени распределением скорости на границе* $\mathfrak{v}$, *пусть* — m — *нижняя грань характеристических чисел тензора деформаций течения* $\mathbf{v}$ *и пусть* $V = \max |\mathbf{v}|$. *Тогда течения* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{v}^*$ *должны совпадать, если*

$$\text{или } m < 3\nu\pi^2/d^2 \quad \text{или} \quad V < \sqrt{3}\pi\nu/d. \tag{73.8}$$

Доказательство этого утверждения очевидно: кинетическая энергия поля $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ должна быть постоянной и вместе с тем удовлетворять оценкам (73.2) и (73.3). При

[1]) См., например, [2], стр. 336, 377, и работу Томаса, на которую мы ссылались выше.

[2]) Неравенство (73.7) приводится в работе Кампе-де-Ферье [Kampé de Fériet J., *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* (1), **63**, 36 (1949)]; аналогичное неравенство для плоских течений, как указывается в этой работе, было ранее установлено Лере.

выполнении хотя бы одного из неравенств (73.8) отсюда следует, что $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K} = 0$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$.

Сформулированная теорема существенно зависит от предположения (73.8); в общем случае можно, по-видимому, построить пример неединственности.

Как показывает предыдущий анализ, при больших величинах вязкости все течения с одинаковым распределением скорости на границе после достаточно долгого времени будут одинаковы. С другой стороны, при малых значениях вязкости (или, эквивалентно, при больших числах Рейнольдса) наблюдаемые течения уже не стремятся к единственному предельному течению. Указанные факты легко проиллюстрировать на простых примерах течений Куэтта и Пуазейля, для которых устойчивый ламинарный режим возможен только при малых числах Рейнольдса. Исходя из экспериментальных результатов, Хопф [1]) высказал предположение о существовании класса решений уравнений Навье — Стокса, соответствующих течениям, наблюдаемым после достаточно долгого промежутка времени, когда влияние начальных данных уже не сказывается. При больших величинах вязкости этот класс исчерпывается одним решением; при уменьшении вязкости таких решений становится все больше и больше. При фиксированном ν класс Хопфа выделяет „устойчивое" многообразие в фазовом пространстве всех возможных решений. В работе Хопфа, на которую мы ссылались выше, это предположение сформулировано более четко и подтверждено интересной „математической моделью" уравнений Навье — Стокса, решения которой можно выписать в замкнутом виде.

В связи с гипотезой Хопфа было высказано предположение, что при $t \to \infty$ кинетическая энергия произвольного течения убывает до некоторой определенной величины, зависящей только от величины вязкости и граничных условий. Эта задача была исследована Хопфом [2]) в предположениях, сформулированных в начале данного пункта. Полученные им результаты в сущности просты, но громоздкие выкладки вынуждают нас отослать читателя к первоисточнику.

---

[1]) Hopf E., *Comm. Pure Appl. Math.*, **1**, 303 (1948), Proc. of the Conference on Differential Equations, Univ. Maryland, 1956, стр. 49.

[2]) Hopf E., *Math. Ann.*, **117**, 764 (1941).

Исследование течений в неограниченных областях в принципе проводится так же, как и для ограниченных областей, поэтому мы предоставляем читателю соответствующее обобщение приведенных выше результатов.

74. Вариационные методы, связанные с вопросами устойчивости. В предыдущем пункте были найдены критерии устойчивости по отношению к „произвольному" возмущению $\mathbf{u}$, хотя на самом деле далеко не все векторные поля $\mathbf{u}$ являются допустимыми. Для более полного исследования вопросов устойчивости рассмотрим задачу о максимуме правой части уравнения (72.1) при дополнительном условии $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$. После надлежащей нормировки мы приходим к следующей вариационной задаче для исследования устойчивости:

минимизировать интеграл

$$\int_{\mathfrak{B}} \mathbf{u}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}\,dv \tag{74.1}$$

при дополнительных условиях

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\quad \int_{\mathfrak{B}} \operatorname{grad}\mathbf{u}:\operatorname{grad}\mathbf{u}\,dv=1,\quad \mathbf{u}=0 \text{ на } \mathfrak{S}. \tag{74.2}$$

Если обозначить минимум интеграла (74.1) через $-\tilde{\nu}$, то при $\tilde{\nu}<\nu$ величина, стоящая в правой части уравнения (72.1), будет отрицательна для всех „гидродинамически допустимых" возмущений и, следовательно, основное течение будет устойчивым (в среднем).

Вариационную задачу (74.1), (74.2) при помощи хорошо известных методов можно сформулировать в виде уравнения в частных производных для экстремальной функции $\mathbf{u}$. Введем с этой целью множители Лагранжа ν^* и $\lambda=\lambda(\mathbf{x})$ и запишем формально

$$\delta\int_{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}+\nu^*\operatorname{grad}\mathbf{u}:\operatorname{grad}\mathbf{u}-\lambda\operatorname{div}\mathbf{u})\,dv=0. \tag{74.3}$$

Уравнению в вариациях (74.3) соответствует система дифференциальных уравнений

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}=-\operatorname{grad}\lambda+\nu^*\nabla^2\mathbf{u},\quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \tag{74.4}$$

с граничным условием $\mathbf{u} = 0$ на $\mathfrak{S}$. Вообще говоря, система однородных уравнений (74.4) допускает нетривиальные решения только для ограниченного множества собственных чисел ν^*. Если $\tilde{\nu}$ обозначает наибольшее из этих собственных чисел, то обычные методы вариационного исчисления приводят к неравенству

$$-\int_{\mathfrak{V}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}\, dv \leqslant \tilde{\nu},$$

справедливому для всех $\mathbf{u}$, удовлетворяющих условиям (74.2). Таким образом (формально) доказан следующий результат.

Пусть $\tilde{\nu}$ — наибольшее собственное число однородной краевой задачи для системы (74.4) *в области $\mathfrak{V}$. Тогда основное течение* $\mathbf{v}$ *в области $\mathfrak{V}$ является устойчивым, если*

$$\tilde{\nu} < \nu.$$

Заметим, что между уравнениями (74.4) и уравнениями гидродинамики существует примечательная аналогия.

К сожалению, исследование уравнений (74.4) представляет не простую задачу даже в случае элементарных течений. Для плоских слоистых течений $\mathbf{v} = \{U(y), 0, 0\}$ уравнения, аналогичные системе (74.4), были найдены в работах Орра [1]) и Гамеля [2]). В этом случае $\mathbf{D}$ имеет только две ненулевые компоненты $D_{yx} = D_{xy} = {}^1/_2\, U'$, а двумерность возмущений позволяет ввести функцию тока ψ. В этом случае система (74.4) сводится к уравнению Орра — Гамеля:

$$\nu^* \nabla^4 \psi = \frac{1}{2} \{U' \psi_{xy} + U'' \psi_x\}. \tag{74.5}$$

Это уравнение четвертого порядка было детально изучено Орром. Как и следовало ожидать, численные оценки дают грубое приближение границ устойчивости, хотя качественная сторона отражается, конечно, правильно. В частности, для распределения $U = ky$ в канале $0 \leqslant y \leqslant d$ Орр нашел, что критическое число Рейнольдса

$$\widetilde{Re} = kd^2 \tilde{\nu}^{-1} = 177.$$

[1]) Orr W. McF., *Proc. Roy. Irish Acad., A*, 27, 69 (1906).
[2]) Hamel G., *Nachr. Ges. Wiss., Göttingen*, 261—270 (1911).

Линь [22] высказал предположение, что рассматриваемое течение должно быть устойчивым независимо от величины числа Рейнольдса. Кажущееся противоречие между результатами Орра и Линя становится понятным, если вспомнить, что Линь рассматривал только бесконечно малые возмущения; вполне возможно, что бесконечно малые возмущения гасятся даже тогда, когда конечные возмущения приводят к неустойчивости. Ясно, что найденное Орром критическое значение числа Рейнольдса относится именно к этим конечным возмущениям. С дальнейшими приложениями теории Орра читатель может ознакомиться в книге [2], стр. 335—336, 377.

Аналогичным образом можно провести исследование устойчивости течения между двумя вращающимися цилиндрами (течение Куэтта). Если внутренний и наружный цилиндры имеют радиусы R_1 и R_2 и вращаются с угловыми скоростями $\Omega_1 (> 0)$ и Ω_2 соответственно, то поле скоростей течения Куэтта имеет вид

$$v_r = 0, \quad v_\theta = Ar^{-1} + Br,$$

где

$$A = -\frac{(R_1R_2)^2(\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{R_2^2\Omega_2 - R_1^2\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2},$$

причем

$$\omega = 2B, \quad \mathbf{D} = -\frac{A}{r^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{D}$ зависит только от коэффициента A, мы видим, что решение системы (74.4) должно давать критерий устойчивости в виде оценки сверху величины $|A|$. Точнее, можно доказать, что абсолютная устойчивость (устойчивость по отношению к любым возмущениям) будет иметь место при выполнении условия

$$\left|\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\nu}\right| < C(R_1, R_2).$$

Вопрос о точном определении вида функции $C(R_1, R_2)$ остается в настоящее время невыясненным.

Что касается устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям, то, как показал Синг [1], устойчивость

[1]) Synge J. L., Proc., 5th Int. Congr. Appl. Math., Cambridge, USA, стр. 326—332.

течений Куэтта имеет место по крайней мере для $\omega \geqslant 0$, т. е. для $\Omega_1/\Omega_2 \leqslant (R_2/R_1)^2$. Расположение зоны устойчивости (74.5) и найденной Сингом зоны в плоскости (Ω_1, Ω_2)

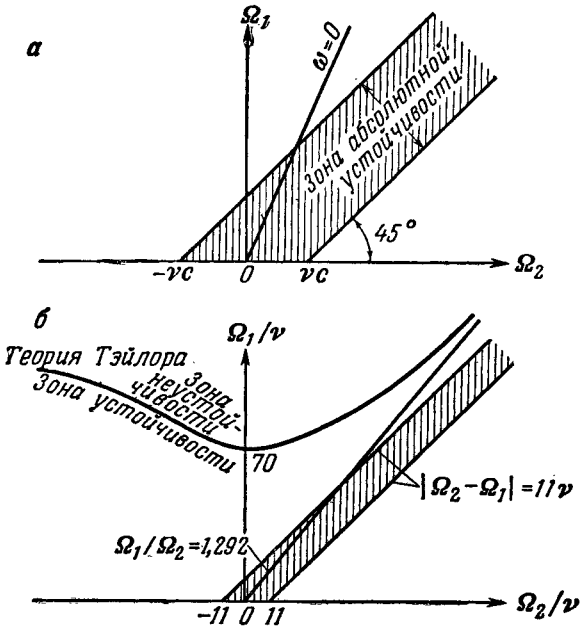


Рис. 17. Зоны устойчивости для течения Куэтта.

а — зона абсолютной устойчивости для течения Куэтта, *б* — зоны устойчивости для течения Куэтта при $R_1=3{,}55$, $R_2=4{,}03$.

показано на рис. 17, *а*. Для случая $R_1 \sim R_2$ применима теория Тэйлора [1]); зона устойчивости, соответствующая радиусам $R_1 = 3{,}55$, $R_2 = 4{,}03$, изображена на рис. 17, *б*. При построении зоны абсолютной устойчивости на этом рисунке мы исходили из приближенного значения $C\,(3{,}55,\ 4{,}03) = 11$, найденного вычислениями [2]).

---

[1]) Taylor G. I., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, *A*, **223**, 289 (1923).
[2]) Serrin J., *Arch. Rational Mech. Anal.*, **2**, 1 (1959).

75. Теорема Гельмгольца — Рэлея о диссипации. Некоторые интересные общие результаты относительно диссипации энергии в движении вязкой жидкости были получены Гельмгольцем [1]) и Рэлеем [2]). В основе этих результатов лежит предположение о потенциальности поля вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$, т. е. предположение, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad}\sigma. \tag{75.1}$$

Обращаясь к уравнению Навье — Стокса, мы видим, что предположение (75.1) эквивалентно предположению о потенциальности вектора ускорения. Условие (75.1) удовлетворяется, в частности, для плоских слоистых течений, течений Пуазейля и Куэтта, установившегося течения Бельтрами и вообще для любого течения, в котором можно пренебречь инерционными членами. В этот класс входят течения весьма частного вида, но тот факт, что исследования носят законченный и строгий характер, имеет большое значение.

Рассмотрим движение жидкости, удовлетворяющее условию (75.1) в некоторой ограниченной области $\mathfrak{v}$. Пусть $\mathbf{v}$ — вектор скорости этого движения, а $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \mathbf{v}'$ — вектор скорости другого *произвольного* движения несжимаемой жидкости. Пусть, наконец, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{F}'$ обозначают диссипации, соответствующие полям $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^*$ и $\mathbf{v}'$ (заметим, что поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ могут и не являться динамически возможными). Тогда мы имеем следующую формулу:

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}' + 2\mu \oint_{\mathfrak{s}} [\sigma\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} + 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}]\, da, \tag{75.2}$$

несколько обобщающую соответствующий результат Рэлея и Гельмгольца. Для доказательства этой формулы заметим, что

$$\mathfrak{F}^* = \int_{\mathfrak{v}} \Phi^*\, dv = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}' + 4\mu \int_{\mathfrak{v}} \mathbf{D} : \mathbf{D}'\, dv$$

и (в тензорных обозначениях)

$$\int_{\mathfrak{v}} \mathbf{D} : \mathbf{D}'\, dv = \int_{\mathfrak{v}} \left[\left(D^{ik}v_i'\right)_{,\,k} - D^{ik}{}_{,k}v_i'\right] dv =$$

$$= \oint_{\mathfrak{s}} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da - \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{v}} \nabla^2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'\, dv;$$

[1]) Helmholtz H., *Verh. naturhist.-med. Ver.* (1868); Wiss. Abh., 1, стр. 223.

[2]) Rayleigh, *Phil. Mag.* (6), 26, 776 (1913).

мы воспользовались здесь уравнением неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$. Преобразовав последний интеграл при помощи соотношений

$$\nabla^2\mathbf{v} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = -\operatorname{grad}\sigma$$

к виду

$$-\oint_{\mathcal{S}} \sigma\mathbf{v}'\cdot\mathbf{n}\,da,$$

мы получим формулу (75.2).

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из формулы Гельмгольца — Рэлея. Предположим сначала, что течение $\mathbf{v}^*$ имеет на $\mathcal{S}$ такое же распределение скорости, как и исходное течение, т. е. что $\mathbf{v}'=0$ на $\mathcal{S}$. Тогда в формуле (75.2) интеграл по поверхности обратится в нуль и, так как $\mathfrak{F}'\geqslant 0$, мы получаем следующую теорему.

Теорема Гельмгольца: *Течение несжимаемой вязкой жидкости, удовлетворяющее условию* (75.1), *характеризуется тем свойством, что для этого течения диссипация энергии в любой области меньше диссипации энергии для любого другого течения с тем же распределением скорости* $\mathbf{v}$ *на границе.*

В качестве следующего приложения формулы (75.2) рассмотрим *обобщенное течение Пуазейля* (ламинарное течение) в прямой трубке произвольного сечения R [1]). Так как компоненты скорости $u=v=0$, $w=w(x, y)$, уравнение Навье — Стокса принимает вид

$$0 = -\operatorname{grad} p + \mu\nabla^2\mathbf{v},$$

и мы видим, что условие (75.1) выполняется при

$$\sigma = -p/\mu. \tag{75.3}$$

Заметим, кроме того, что давление должно быть линейной функцией от z. Выберем за область $\mathcal{V}$ в формуле Гельмгольца — Рэлея отрезок трубки длины l и предположим, что возмущенное течение является ламинарным или удовлетворяет более слабому требованию периодичности функции w' по переменной z с периодом l. Тогда, поскольку на стенках трубки $v'=0$, мы получаем для интегралов, входящих в фор-

[1]) Это применение подсказано одной из работ Томаса [Thomas T. Y., *Amer. J. Math.*, 64, 754, (1942)].

мулу (75.2), следующие значения:

$$\mu \oint_{\mathfrak{S}} \sigma \mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}\, da = \Delta p\,(Q^* - Q), \quad \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da = 0,$$

где $\Delta p > 0$ — перепад давления на рассматриваемом участке трубки, а Q и Q^* — расходы исходного и возмущенного течений соответственно. Формула Гельмгольца — Рэлея принимает, таким образом, вид

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}' + 2\,\Delta p\,(Q^* - Q), \tag{75.4}$$

и мы приходим к следующему результату.

Теорема: *Установившееся ламинарное течение несжимаемой вязкой жидкости в прямой трубке произвольного сечения характеризуется тем свойством, что для него диссипация энергии меньше диссипации энергии для любого другого ламинарного (или периодического по длине трубки) течения с тем же расходом.*

Предположим теперь, что течение $\mathbf{v}^*$ имеет такой же перепад давлений $\Delta p > 0$, как и ламинарное течение $\mathbf{v}$. Тогда можно показать, что

$$\frac{\partial \mathfrak{T}^*}{\partial t} = -\mathfrak{F}' - \Delta p\,(Q^* - Q), \tag{75.5}$$

где $\mathfrak{T}^*$ — кинетическая энергия течения $\mathbf{v}^*$ в рассматриваемом сечении трубки. Для доказательства формулы (75.5) заметим сначала, что в силу уравнения (68.5)

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}\, da - \mathfrak{F}, \quad \frac{d\mathfrak{T}^*}{dt} = \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v}^*\, da - \mathfrak{F}^*.$$

В этих уравнениях d/dt можно заменить на $\partial/\partial t$, так как течения предполагаются периодическими по длине трубки; очевидно также, что $\partial\mathfrak{T}/\partial t = 0$. Используя представление (75.4), мы получаем соотношение

$$\frac{\partial \mathfrak{T}^*}{\partial t} = \oint_{\mathfrak{S}} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v}^*\, da - \{\mathfrak{F} + \mathfrak{F}' + 2\,\Delta p\,(Q^* - Q)\} =$$

$$= -\mathfrak{F}' - 2\,\Delta p\,(Q^* - Q) + \oint_{\mathfrak{S}} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{v}^* - \mathbf{t} \cdot \mathbf{v})\, da.$$

Для того чтобы получить формулу (75.5), остается вычислить последний интеграл, что легко сделать, так как на стенках трубки подинтегральная функция обращается в нуль, а на концах рассматриваемого сечения $\mathbf{t}^*$ и $\mathbf{t}$ равны соответственно $-p^*\mathbf{n}$ и $-p\mathbf{n}$ (в силу периодичности течения).

Применим формулу (75.5) к течению $\mathbf{v}^*$, такому, что $Q^* \geqslant Q$. Тогда $\partial\mathfrak{T}^*/\partial t < 0$ и, следовательно, $\mathfrak{T}^*$ монотонно убывает до тех пор, пока $Q^* \geqslant Q$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема о неустойчивости[1]): *Периодическое по пространственным переменным течение в прямой трубке с заданным на периоде перепадом давления является неустойчивым, если расход этого течения превосходит расход ламинарного течения с тем же перепадом давления.*

Этот результат можно сформулировать несколько иначе, что подчеркнет его физический смысл.

Перепад давления, необходимый для поддержания заданного расхода через сечение трубки, для турбулентного течения больше, чем для ламинарного.

Доказанная теорема о неустойчивости имеет большое практическое значение и находится в полном соответствии с экспериментами. (Условие периодичности турбулентного течения в каждый момент времени можно было бы заменить менее ограничительным требованием независимости от z *усредненного* по времени течения; в этом случае под диссипацией энергии следует понимать, конечно, ее *усредненное*, а не мгновенное значение.)

76. Теоремы Бернулли. Из условия $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad}\sigma$, введенного в предыдущем пункте, вытекают и некоторые другие следствия. В частности, для течений, удовлетворяющих этому условию, поле вектора ускорений потенциально:

$$\mathbf{a} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} - \Omega + \nu\sigma\right)$$

---

[1]) Thomas T. Y., *Amer. J. Math.*, **64**, 754 (1942); *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **29**, 243 (1943). Томас рассматривал только трубки с круговым сечением.

и, следовательно, на рассматриваемый случай переносятся почти все результаты, приведенные в гл. 3. Сохраняют силу, например, формулы (17.3) и (17.5) для конвекции завихренности, теорема Кельвина о циркуляции и теоремы Гельмгольца о вихрях. Теорема Кельвина, в частности, показывает, что *необходимым и достаточным условием выполнения соотношения*

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad}\sigma$$

в течении несжимаемой вязкой жидкости является условие сохранения циркуляции по любому контуру, движущемуся вместе с жидкостью.

Наконец, так как вывод теоремы Бернулли в п. 18 был основан только на существовании потенциала ускорения, результаты этого пункта останутся в силе, если мы всюду прибавим к H добавочный член $\nu\sigma$. Таким образом, *в установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости, сохраняющем циркуляцию, функция*

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega + \nu\sigma$$

постоянна вдоль линий тока и вихревых линий. Аналогичное утверждение справедливо и при более слабом требовании независимости от времени только поля завихренности (см. п. 18).

Класс течений, удовлетворяющих условию (75.1), охватывает лишь незначительную часть всех возможных течений вязкой жидкости, однако течения этого класса могут оказаться полезными для построения новых точных решений уравнений Навье — Стокса при помощи полуобратных методов [1]). Эти возможности еще относительно мало изучены.

Для течений, не сохраняющих циркуляцию [или, эквивалентно, для течений, не удовлетворяющих условию (75.1)], теорема Бернулли в ее обычном виде, вообще говоря, неверна. Легко показать, однако, что [2]) *в установившемся течении функция Бернулли*

$$H = \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega$$

постоянна вдоль каждой траектории поля направлений

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \times \operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}. \qquad (76.1)$$

[1]) Neményi P. F., [19], т. 2, стр. 123—151.
[2]) Truesdell C., *Phys. Rev.*, 77, 535 (1950).

Этот результат является непосредственным следствием уравнения (68.4). Поле вектора $\boldsymbol{\lambda}$ вырождается в тех случаях, когда $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}=0$, когда $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=0$ или когда векторы $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ параллельны. В первых двух случаях поле вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$ потенциально и применима предыдущая теорема Бернулли. Наконец, если векторы $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ параллельны, то из уравнения (68.4) непосредственно следует, что верна теорема Бернулли в ее классической формулировке, т. е. что функция H постоянна на линиях тока и вихревых линиях.

Отметим еще одно интересное свойство функции H: *в установившемся движении вязкой жидкости максимум H достигается на границе области течения.* Для доказательства этого утверждения заметим, что в силу уравнения (68.4) имеют место следующие соотношения:

$$\nabla^2 H=\operatorname{div}\operatorname{grad}H=\operatorname{div}(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}) \tag{76.2}$$

и

$$\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}H=-\nu\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}. \tag{76.3}$$

С другой стороны, мы имеем легко проверяемое тождество

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})=\omega^2-\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega},$$

которое позволяет объединить соотношения (76.2) и (76.3). В результате находим для H следующее уравнение:

$$\nu\nabla^2 H-\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}H=\nu\omega^2. \tag{76.4}$$

Как известно, для эллиптических уравнений вида (76.4) справедлив принцип максимума (см. примечание 1 на стр. 136). Напомним, что аналогичные результаты были получены нами в п. 28.

77. Асимптотическое поведение течений вязкой жидкости. Исследование асимптотики течений вязкой жидкости на бесконечности представляет большой теоретический и практический интерес. Для приближений Стокса и Озеена асимптотические формулы имеют вид [1])

$$\mathbf{v}=\mathbf{U}+O(r^{-1})\quad\text{при}\quad r\to\infty, \tag{77.1}$$

однако аналогичных формул для точных уравнений Навье — Стокса пока еще получить не удалось. Имеются предвари-

[1]) См. книгу Ламба [8], § 336, 342, а также работу Финна и Нолла [Finn R., Noll W., *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1, 97 (1957)].

тельные результаты Удескини [1]) и Беркера [2]), которые рассматривали задачу с несколько другой точки зрения. Эти авторы предполагали заранее, что в установившемся потоке вязкой жидкости, набегающем на неподвижное тело, справедливы асимптотические формулы вида

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + O(r^{-k}), \quad D\mathbf{v}, D^2\mathbf{v} = O(r^{-k-1}), \tag{77.2}$$

где D обозначает оператор частной производной первого порядка по любой из переменных, и исследовали вопрос о допустимых значениях показателя k. Оказалось, что $k \leqslant 2$.

В доказательстве Беркера исходным пунктом является тождество

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \omega^2 - \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}.$$

В силу уравнения (68.4) и предположения, что движение является установившимся, имеет место равенство

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\nu} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} H = -\frac{1}{\nu} \operatorname{div}(H\mathbf{v}).$$

Сравнение этих двух формул приводит к соотношению

$$\omega^2 = \operatorname{div}\left(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\nu} H\mathbf{v}\right),$$

интегрируя которое по сфере (достаточно большого) радиуса R, содержащей внутри себя обтекаемое тело, и используя теорему Гаусса — Остроградского и граничное условие $\mathbf{v} = 0$, мы получаем

$$\int_v \omega^2 \, dv = \oint_\Sigma \left(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\nu} H\mathbf{v}\right) \cdot \mathbf{n} \, da, \tag{77.3}$$

где Σ — поверхность сферы. По предположению,

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = O(r^{-k-1}), \quad H = H_0 + O(r^{-k})$$

(второе из соотношений не совсем очевидно; его доказательство читатель может найти в работе Беркера). Так как уравнение (77.3) будет верным и при замене H на $H - H_0$, отсюда следует, что

$$\int_v \omega^2 \, dv = O(R^{-k+2}) \quad \text{при } R \to \infty.$$

Таким образом, при $k > 2$ движение должно было бы быть безвихревым, что приводит к противоречию с результатом, установленным в п. 69.

[1]) Udeschini P., *Rend. Accad. Italia Cl. Sci.-Fis.*, (7), 2, 957 (1941).
[2]) Berker R., *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), 1, 1, (1952).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. РАБОТЫ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА

[1] Аппель П. (Appell P.), Traité de mécanique rationelle, v. 3, Equilibre et mouvement des milieux continus, 3 ed., Paris, 1921; есть русский перевод предыдущего издания: Аппель П., Руководство теоретической (рациональной) механики, т. 3, Равновесие и движение сплошных средин, М., 1913.

[2] Бейтмен Г., Драйден Х. Л., Мурнаган Ф. Д. (Bateman H., Dryden H. L., Murnaghan F. D.), Hydrodynamics, Bull. Nat. Res. Council № 84, Washington, 1932; New York, 1955.

[3] Бьёркнес В. (Bjerknes V.), Physikalische Hydrodynamik, Berlin, 1933.

[4] Вилла А. (Villat H.), Mécanique des fluides, 2 ed., Paris, 1938.

[5] Гамель Г. (Hamel G.), Theoretische Mechanik, Berlin, 1949.

[6] Гамель Г. (Hamel G.), Mechanik der Kontinua, Stuttgart, 1956.

[7] Гольдштейн С. (Goldstein S.), Lectures on fluid mechanics, Seminar in Applied mathematics, Boulder, 1957.

[8] Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, 1947.

[9] Лихтенштейн Л. (Lichtenstein L.), Grundlagen der Hydromechanik, Berlin, 1929.

[10] Милн-Томсон Л. М. (Milne-Thomson L. M.), Theoretical Hydrodynamics, 3 ed., New York, 1950; готовится к печати русский перевод 4 изд. (ИЛ, 1964).

[11] Прандтль Л., Гидроаэромеханика, ИЛ, 1951.

[12] Прандтль Л., Титьенс О., Гидро- и аэромеханика, ГТТИ, т. I, 1933; т. II, 1935.

[13] Фридрихс К. О., Мизес Р. (Friedrichs K. O., Mises R.), Fluid dynamics, Notes, Brown Univ., 1942.

II. МОНОГРАФИИ И УЧЕБНИКИ

Математика и гидромеханика

[14] Адамар Ж. (Hadamard J.), Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique, Paris, 1903.

[15] Бергман С., Шиффер М. (Bergman S., Schiffer M.) Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, New York, 1953.
[16] Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, 1961.
[17] Биркгоф Г., Гидродинамика, ИЛ, 1954; второе изд. ИЛ, 1963 (в печати).
[18] Вилла А. (Villat H.), Leçons sur la théorie des tourbillons, Paris, 1930.
[19] Вилла А. (Villat H.), Leçons sur les liquides visqueux, Paris, 1943.
[20] Зауер Р., Течения сжимаемой жидкости, ИЛ, 1954.
[21] Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, 1950.
[22] Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, ИЛ, 1958.
[23] Липман Г. В., Рошко А., Элементы газовой динамики, ИЛ, 1960.
[24] Мизес Р., Математическая теория течений сжимаемой жидкости, ИЛ, 1961.
[25] Озеен К. В. (Oseen C. W.), Neuere Methoden und Ergebnisse der Hydrodynamik, Leipzig, 1927.
[26] Осватич К. (Oswatitsch K.), Gasdynamik, Wien, 1952.
[27] Трусделл К. (Truesdell C.), The kinematics of vorticity, Indiana Univ., 1954.
[28] Трусделл К. (Truesdell C.), Vorticity and the thermodynamics state in a gas flow, Memorial des sciences math., Fasc. 119, Paris, 1952.
[29] Шапиро Э. Г. (Shapiro A. H.), The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, v. 1, v. 2, New York, 1953.

Термодинамика и кинетическая теория газов

[30] Гуггенхейм Э. (Guggenheim E.), Advanced thermodynamics, New York — Amsterdam, 1949.
[31] Кинан Дж. (Keenan J. H.), Thermodynamics, New York, 1941.
[32] Паттерсон Г. Н. (Patterson G. N.), Molecular flow of gases, New York, 1956.
[33] Россини Ф. (Rossini F.), ed., Thermodynamics and physics

of matter, High speed aerodynamics and jet propulsion, v. I, Princeton, 1955.
[34] Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.
[35] Эпштейн П. С., Курс термодинамики, Гостехиздат, 1948.

III. СБОРНИКИ, ЭНЦИКЛОПЕДИИ И Т. П.

[36] Гольдштейн С. (ред.), Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. I, т. II, ИЛ, 1948.
[37] Проблемы механики, Вып. I, ИЛ, 1955; вып. II, ИЛ, 1959; вып. III, ИЛ, 1961.
[38] Сирс У. Р. (ред.), Общая теория аэродинамики больших скоростей, Воениздат, 1962.
[39] Хоуарт Л. (ред.), Современное состояние аэродинамики больших скоростей, т. 1, т. 2, ИЛ, 1955.
[40] Эммонс Г. В. (ред.), Основы газовой динамики, ИЛ, 1963.
[41] Handbuch der Experimental-Physik, Bd. IV, Hydrodynamik, Leipzig, 1931.
[42] Handbuch der Physik, Bd. V, Grundlagen der Mechanik, Berlin, 1927.
[43] Handbuch der Physik, Bd. VII, Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper, Berlin, 1927.
[44] Proceedings of Simposia in applied mathematics, v. 1, Non-linear problems in mechanics of continua, New York, 1949.

IV. ЦИТИРОВАННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

[45] Келлог О. Д. (Kellogg O. D.), Foundations of potential theory, Berlin, 1929.
[46] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 2, Гостехиздат, 1951.
[47] Михал А. (Michal A.), Matrix and tensor calculus, New York, 1947.
[48] Филлипс Г. Б. (Phillips H. B.), Vector analysis, New York, 1933.

Многие из перечисленных выше книг содержат обширную библиографию; см., например, [2], [8], [16], [21], [22], [24], [25], [27], [32] и [36] — [43].

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Предисловие и вводные замечания 5

1. Обзор содержания 5
2. Векторы и тензоры 7

Глава 2. Уравнения движения 12

§ 1. Кинематика и динамика движения жидкости 12
3. Основные понятия кинематики 12
4. Теорема переноса 16
5. Уравнение неразрывности 18
6. Уравнения движения 19
7. Закон сохранения момента количества движения . . 24
8. Граничные условия 26
§ 2. Перенос энергии и количества движения 27
9. Уравнение переноса энергии 27
10. Уравнение переноса количества движения 28
11. Кинематика деформации. Вектор завихренности . . . 30
§ 3. Преобразование координат 33
12. Уравнения движения в криволинейных координатах . 33
13. Риманово пространство 37
§ 4. Вариационные методы 38
14. Произвольные жидкости 39
15. Идеальные жидкости 42

Глава 3. Несжимаемые и баротропные идеальные жидкости 49

§ 1. Общие принципы 49
16. Введение 49
17. Конвекция завихренности 51
18. Теоремы Бернулли 54
19. Функция тока 56
20. Уравнения движения в естественных координатах 58

§ 2. Безвихревое движение 60
21. Условия потенциальности движения 60
22. Свойства безвихревого движения. Поведение потенциала на бесконечности 62
23. Свойства безвихревого движения (продолжение) . . 65
24. Теорема Кельвина о минимуме энергии 68
§ 3. Вихревое движение 69
25. Теорема Кельвина о циркуляции. Теоремы Гельмгольца 69
26. Общие вопросы теории вихревых течений 72
27. Мера завихренности 76
28. Поле ускорений и уравнение Бернулли 80
29. Преобразования Вебера и Клебша 82
29а. Дополнение. Обобщенные преобразования Вебера и Клебша 85

Глава 4. Термодинамика и уравнение энергии 87

§ 1. Термодинамика простой среды 87
30. Однофазная система 88
31. Совершенный газ 90
32. Законы термодинамики 92
§ 2. Уравнение энергии 95
33. Сохранение энергии 95
34. Термодинамика деформации 97

Глава 5. Идеальный газ 101

§ 1. Общие принципы 101
35. Введение 101
36. Динамическое подобие 104
§ 2. Энергия, энтропия и завихренность 109
37. Уравнение Бернулли 109
38. Уравнение Крокко — Важоньи 112
39. Изэнтропическое течение, изоэнергетическое течение и безвихревое установившееся течение 114
40. Диффузия завихренности 118
§ 3. Специальные методы исследования двумерных течений 121
41. Уравнения движения в естественных координатах . 121
42. Функция тока 122
43. Метод годографа 126
44. Частные решения 129

§ 4. Дозвуковое потенциальное течение 135
45. Общие принципы 135
46. Теоремы существования и единственности 140
47. Вариационные принципы газовой динамики 143
§ 5. Сверхзвуковое течение и характеристики 150
48. Природа характеристик 150
49. Установившееся плоское течение 151
50. Трехмерное установившееся безвихревое течение . . 157
51. Особые поверхности и звуковые волны 159
§ 6. Специальные вопросы 165
52. Трансзвуковое течение 165
53. Исключение давления и плотности из уравнений движения 170

Глава 6. **Ударные волны в идеальной жидкости** 172

54. Соотношения на разрыве 172
55. Соотношения на разрыве в случае совершенного газа 178
56. Основные свойства ударного перехода 182
57. Ударный слой 186

Глава 7. **Вязкие жидкости** 193

§ 1. Основные уравнения движения вязкой жидкости . . . 193
58. Тензор напряжений 193
59. Постулаты Стокса 194
59а. Давление 200
60. Полиномиальная зависимость 202
61. Классическая гидродинамика. Уравнения Навье — Стокса 204
62. Соотношение Стокса 208
63. Теплопроводность 209
64. Граничные условия 210
65. Дополнение. Частные решения уравнений с нелинейной вязкостью 213
§ 2. Динамическое подобие 217
66. Сжимаемые вязкие жидкости 217
67. Динамическое подобие; несжимаемые вязкие жидкости 221
§ 3. Несжимаемые вязкие жидкости 222
68. Уравнения движения 223
69. Завихренность 224

70. Уравнения установившегося движения в естественных координатах 228
71. Энергетические соотношения 228
72. Теоремы единственности для течений вязкой жидкости 230
73. Устойчивость течений вязкой жидкости 233
74. Вариационные методы, связанные с вопросами устойчивости 239
75. Теорема Гельмгольца — Рэлея о диссипации 243
76. Теоремы Бернулли 246
77. Асимптотическое поведение течений вязкой жидкости 248

Список литературы 250