Л.И.Седов

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ТОМ 2

М.: Наука, 1970 г., 568 стр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VIII. Гидромеханика **5**
§ 1. Гидростатика 5
§ 2. Общая теория установившихся движений идеальных жидкости и газа. Интеграл Бернулли 20
§ 3. Интеграл Бернулли для несжимаемой тяжелой жидкости 26
§ 4. Явление кавитации 32
§ 5. Интеграл Бернулли для адиабатических течений совершенного газа 36
§ 6. Влияние сжимаемости на форму трубок тока. Элементарная теория сопла Лаваля 44
§ 7. Применение интегральных соотношений к конечным объемам материальной среды при установившемся движении 53
§ 8. Взаимодействие жидкостей и газов с обтекаемыми телами при установившемся движении 63
§ 9. Основные агрегаты гидродинамических и газовых машин 88
§ 10. Основные элементы теории реактивной тяги 122
§ 11. Потенциальные течения идеальной жидкости. Интеграл Коши Лагранжа 149
§ 12. Потенциальные движения несжимаемой жидкости. Свойства гармонических функций 157
§ 13. Задача о движении сферы в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости 181
§ 14. Кинематическая задача о движении твердого тела в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости 187
§ 15. Энергия, количество движения, момент количества движения жидкости при движении в ней твердого тела и основы теории присоединенных масс 192
§ 16. Силы воздействия идеальной жидкости на тело, движущееся в безграничной массе жидкости 200
§ 17. Движения газа с малыми возмущениями 210
§ 18. Распространение плоских волн конечной амплитуды (волны Римана) 220
§ 19. Движение шара внутри вязкой несжимаемой жидкости 228
§ 20. Движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрических трубах 235
§ 21. Турбулентные движения жидкости 242
§ 22. Уравнения ламинарного пограничного слоя 253
§ 23. Пограничный слой при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластинки. Задача Блязиуса 258
§ 24. Некоторые важные эффекты движения вязкой жидкости в пограничном слое 263
§ 25. Определение поля скоростей по заданным вихрям и источникам 267
§ 26. Важные примеры вихревых полей 279

§ 27. Динамическая теория цилиндрических вихрей 295
§ 28. Движение системы непрерывно распределенных вихрей в идеальной жидкости 302
§ 29. Диффузия вихрей в вязкой несжимаемой жидкости 305
Глава IX. Теория упругости **309**
§ 1. Вводные замечания 309
§ 2. Модель упругого тела 311
§ 3. Задачи об одноосном растяжении упругого бруса 321
§ 4. Деформации и напряжения, возникающие в круглой трубе из упругого материала под действием внутреннего и внешнего давлений (задача Ламе) 332
§ 5. Постановка задач теории упругости. Уравнение Клапейрона. Теорема единственности решения задач теории упругости. Принцип Сен-Венана 341
§ 6. Задача об изгибе балки ЗЬО
§ 7. Кручение цилиндрических стержней 356
§ 8. Методы сопротивления материалов в задачах об изгибе балок 377
§ 9. Вариационные методы в теории упругости 388
§ 10. Упругие волны в изотропной среде 397
Глава X. Теория пластичности **410**
§ 1. Некоторые эффекты, возникающие при деформировании твердых тел и не описывающиеся в рамках модели упругого тела 410
§ 2. Остаточные деформации. Поверхность нагружения 421
§ 3. Основные определяющие соотношения в теории пластических тел 428
§ 4. Примеры моделей пластических тел 451
§ 5. Задача о кручении цилиндрического стержня из упруго-пластического материала без упрочнения 462
Глава XI. Введение в теорию плоских задач теории упругости и теорию трещин **481**
§ 1. Плоские задачи теории упругости 4S1
§ 2. Концентрация напряжений 504
§ 3. Теория трещин 532
Литература 559
Предметный указатель 562

Предметный указатель

Аналогия задач о давлении жестких прямоугольных штампов на упругую полуплоскость и нагруженной упругой плоскости с прямолинейными щелями 528
— — кручения пластического стержня и равновесия сыпучей среды (аналогия песчаная) 468, 471
— — — упругого стержня и вихревого течения идеальной жидкости 374— 376
— — — — — — потенциального течения идеальной жидкости 372, 373

— — — — — — — течения вязкой жидкости 372
— — — — — — — прогиба мембраны (аналогия мембранная) 368—371, 471
— задачи кручения упруго-пластического стержня (аналогия песчано-мембранная) 471—473
Атмосфера изотермическая 10
— однородная 10
— политропная 11
— стандартная 12
Балки 350, 355, 377-338
Вентилятор 103
Винт 35, 69, 80, 103, 144—149
Вихри, диффузия в вязкой жидкости 305
——, плотность распределения 267
—, примеры движения 298
— присоединенные 299
— свободные 299
— —, система (пелена) 288
—, система, интегралы движения 297
—, сохраняемость в идеальной жидкости 153, 296, 303—305
Вихрь круглый 293, 295
— прямолинейный 289
Водослив 27
Волна отраженная 213
— поперечная плоская 400
— прогрессивная 212, 404
— продольная плоская 400
— простая (волна Римана) 222, 224, 226
— сдвига вихревая пространственная 402
— сжатия 224
— — (расширения) безвихревая пространственная 402
— ударная, искривленная, вихревое движение за ней 25
Волны Римана центрированные (автомодельные) 227
— Рэлея поверхностные 404, 408, 409
— упругие в изотропной среде 397
Гидростатика 5
Глиссирование 57, 287
Глубины проникания волн Рэлея 409
Давление гидростатическое 7, 15, 29
— динамическое 15, 29
— жесткого штампа на упругую полуплоскость 525, 528, 529, 531
— импульсивное 154, 176, 286, 287
— полное (торможения) 28, 37
— торможения и расход топлива 127
—, связь с числом Маха (и коэффициентом скорости) 41, 42
Двигатель воздушно-реактивный 130
— — — прямоточный 137, 138
— ракетный 122, 130
— турбореактивный 141
Движение адиабатическое 21, 25, 36
— в идеальной несжимаемой жидкости сферы 181
— — — — — тела, кинематическая задача 187, 189, 190
— — — — — — —, динамическая задача 200
— газа дозвуковое 40
— — сверхзвуковое 40
— — с малыми возмущениями 210
— — с плоскими волнами 211
— — со сферическими волнами 213
— жидкости несжимаемой в трубке переменного поперечного сечения 31
— — — вязкой в трубе 235
— ламинарное 243
— потенциальное 150, 157
Депланация 478
Дефинитность квадратичной формы свободной энергии 348
Деформации малые упругого тела, совпадение лагранжевых начальной и актуальной систем координат 319

— начальные 310
— остаточные 412
— пластические 422
— полные 422
— упругие 422
Диаграмма всестороннего растяжения (сжатия) 198
— одноосного растяжения-сжатия 411,
— чистого сдвига 414
Диполь точечный пространственный 158
Дислокации линейные 542
—, непрерывно распределенные по объему 543
—, — — — поверхности 542
Диффузор 94
— для сверхзвуковых скоростей 96
Дорожка вихрей 292
Единственность решения задач для гармонических функций, краевых внешних
— — — — — — — — внутренних 165
— — — статической теории упругости 348
— — задачи об определении поля скоростей по вихрям и источникам 269
Жесткость балки на изгиб 355
— — при кручении 360
Жидкость идеальная — пример нелинейно-упругого тела 317
Задача Блязиуса 258
— Дирихле 155, 164
— краевая для гармонических функций внешняя 165
— — — — — — внутренняя 165
— — — — — — смешанная 164
— Ламе 332
— — для составной трубы 338
— Неймана 164, 188
— о движении газа за поршнем, выдвигаемым с постоянной скоростью из трубы 228
— — — сферы в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости 181
— о разъединении двух гладких прижатых друг к другу полуплоскостей под действием внешних сил 524
— — — — — склеенных полуплоскостей под действием внешних сил 557
— об обтекании твердой сферы потоком идеальной несжимаемой жидкости 183
— равновесия балки на трех опорах 387
— — — неразрезной на *n* опорах 388
— Стокса о движении шара в вязкой несжимаемой жидкости 229
Задачи краевые в плоской задаче теории упругости для функций комплексного переменного 500
— статически неопределимые 386, 387
— — определимые 343, 384
— — — теории пластичности, примеры 461, 466
— теории упругости плоские, закон Гука 483
— — — — определение 481
— — — —$_f$ перемещения 482
— — — —, уравнения Бельтрами—Мичелла 483
— — — типичные статические 341
Зависимости напряжений от деформаций динамически линейные и нелинейные 411
Закон Архимеда 13
— ассоциированный 428, 435, 446
—, — в случае поверхностей нагружения с угловыми точками 438
— Био—Савара 281
— Гука с учетом температурных напряжений 320

— движения среды 309
— Паскаля 6
— сохранения энергии для конечного тела с учетом возможности разрывов 533— 537
— теплопроводности Фурье, диссипативная функция 443
Законы определения пластических деформаций, основное свойство 429—432
Запирание эжектора 120
Изгиб балки поперечной силой 377
— — — — на шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной опорах 383
— — — — — — — — опоре, когда второй конец ее жестко закреплен 384
— — чистый 351
Изобары 7
Изостеры 7
Интеграл Бернулли 23, 26, 37, 66
— —, обобщение 66
— Коши—Лагранжа 150
— — — в подвижной системе координат 151
Интегралы движения системы вихрей 297
Источник (сток) точечный 214
— —, плотность распределения 267
Кавитация 32, 35, 163
Камера сгорания 98
— смешения 113
Количество движения бесконечной массы
идеальной жидкости при движении в ней конечного тела 192
Компрессор 102
Конвекция атмосферы 17
Консоль 378
Конус Маха 219
Конфузор 93 Концентрация напряжений 504, 513, 528, 550, 551, 555
Коэффициент восстановления давления
в диффузоре 95, 100
— вязкости турбулентной 252
— давления 33
— интенсивности напряжений 519, 521 — 523
— линейного расширения 321
— нагрузки винта 145, 147, 148
— неравномерности потока 94
— полезного действия двигателя идеальный 131, 147
— — — — полетный 131, 144, 148
— — — — пропульсивный 135, 140, 144, 148
— — — — термический 135, 140, 143
— — — камеры смешения 117
— — — компрессора адиабатический 106
— — — турбины адиабатический 112
— Пуассона 321
— расхода 97, 147
— скорости 40
— сопротивления трения 241, 262
— — —, способы его уменьшения 245
— тяги 94, 135
— эжекции 116
Коэффициенты присоединенных масс 194
— — — для тел вращения 196
— — — — — — $_{c}$ плоскостями симметрии 196
Кривизна изогнутой балки при изгибе 354
Кризис тепловой в камере сгорания 102
Кручение упругого стержня 356, 375
— — — круглого поперечного сечения 360
— — — — — — — с концентрической полостью 363
— — — полого 363

— — — эллиптического поперечного сечения 365, 395
— упруго-пластического стержня 462
— — — — круглого поперечного сечения 479
Крыло конечного размаха, вихревая система 288
Линии равного уровня 468
Манометры 8
Масса жидкости бесконечная при движении в ней конечного твердого тела как механическая система 201, 203
— шара присоединенная 187
Мембрана 368, 370
Метод Бубнова 395
— конформных отображений решения плоских задач теории упругости 500—502
— — — — — — — — —, физические компоненты вектора перемещений 503
— — — — — — — — —, — — тензора напряжений 503
— Ритца 392, 393
— Сен-Венана полуобратный 357
— — решения частных задач о кручении стержней 364
Методы сопротивления материалов 377
— теории упругости вариационные 388
Модель линейно-упругого тела 319
Модели сред идеальных жестко-пластических 414
— — — упруго-пластических 414
— — пластических с «памятью» 415
— — — с упрочнением 415
Модуль Юнга 321
Момент гидродинамических сил, действующих на тело 64, 200, 203, 205
— изгибающий 351, 378
— количества движения бесконечной массы идеальной жидкости при движении в ней конечного тела 192
— крутящий 351, 470
— —, критическое значение 472
— —, предельное значение 472
Мультиполь 159
Нагревание тел в потоке газа 42
Нагружение активное 426
— нейтральное 427
— пропорциональное 433
Нагрузка 411
— погонная 379
Наклеп 412
Направления главные движения тела в жидкости 195
Напряжения вблизи концов щели, асимптотические формулы 518, 520
— внутренние, пример конструкции 418
— касательные максимальные 361, 454, 506
— начальные в составной трубе 339
— турбулентные 251
Насадок Борда 60
Насадки Брикса-Корта 146
Насос 102
— водоструйный 31
— поршневый 9
Нить вихревая 279, 289
— —, потенциал индуцируемых скоростей 281—284
Обратимость процессов теории упругости 311
Определение перемещений по деформациям 325
— поля скоростей по вихрям и источникам 267—278
Опрокидывание римановской волны сжатия 224
Опыт Рейнольдса 242
Осреднение течений в каналах 88

— характеристик турбулентного движения 247
Ось балки нейтральная 381
Отображения конформные, их применение в плоской задаче теории упругости 500
Отрыв пограничного слоя 264—267
Очко (сопло простое) 47
Парадокс Даламбера 73, 75, 133, 185, 206
— Дюбуа 71
— Жуковского 15
Параметры Ламе 320
— состояния упругого тела 311
— торможения 28, 37, 125, 127
— упрочнения 425, 436, 439
Перемещения вблизи концов щели, асимптотические формулы 518, 520
— в волнах Рэлея 408, 409
— — задаче о кручении упруго-пластического стержня 473
Перепад давления в трубе 237
Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный 265
— — режима течения в трубе в турбулентный 243—245
Плоскость с вырезом круговым, растяжение всестороннее 504
— — — —, — одноосное 507
— — — эллиптическим, растяжение всестороннее 509
— — — —, —одноосное 511
— с прямолинейной щелью под действием расклинивающих сил 523
— — — —, — — —, — и одноосного сжатия 555
— — — —, растяжение всестороннее 521
— — — —, — одноосное 522
— с трещиной под действием расклинивающих напряжений, распределенных на ее берегах 552
— — — — — — —, — — постоянном участке берегов 553
— — — — — — сосредоточенных сил 554
— — —, одноосное растяжение 552
Плотность торможения (см. *Давление)*
Площадка текучести 412
Площадки максимальных касательных напряжений 452
Поверхность вихревая, разрыв касательных скоростей 285
— контрольная 54
— нагружения 423, 427, 434
— — гладкая 434
— — с угловыми точками 436
— равного ската 467
— разрыва возмущений слабого 220
— — касательных скоростей 285
— — перемещений 542, 543
— — плотности 6
— текучести 423
— — Мизеса 458
— — Треска 455
— характеристическая 220
Поле скоростей, определение по заданным вихрям и источникам 267
Ползучесть 418
Помпаж 102
Постановка задач теории упругости в напряжениях 343
— — — — — перемещениях 342
Постоянная аддитивная для внутренней энергии 534
Потенциал векторный 275
— вихревой нити прямолинейной 289
— двойного слоя 160
— запаздывающий 216

— магнитного листка, геометрическая интерпретация 282
— напряжений 316
— объемного распределения источников 159
— простого слоя 160
— системы вихревых нитей 284, 291, 292
— скоростей, динамическая интерпретация 155
— — системы особенностей в полупространстве, ограниченном плоской стенкой 179
Потери в скачках уплотнения 78
— в сопле 127
— кинетической энергии газов при смешении 118
Поток энергии в особых точках, совпадающих с краями трещин 538
Предел пропорциональности 411
— прочности 412
— текучести 412
— упругости 412
— усталости (выносливости) 420
Преобразование инверсии относительно сферы 179
Приближение Стокса уравнений движения вязкой жидкости 229
Принцип вариационный для упругих тел в равновесии 391
— минимума работы напряжений на пластических деформациях 434
— Онзагера, обобщение на нелинейные связи 443
— относительности Галилея—Ньютона 71, 209
— Сен-Венана 328, 332, 349
Приток, энергии *dq* ** в сложных моделях упругих тел 313, 314
— — к выделенному контрольной поверхностью объему жидкости 64
— — к среде внешний, возможные трактовки 68
Пропеллер идеальный 144
Пространство напряжений 423
Процесс адиабатический 398
— баротропный 150
— изэнтропический 398
— нагружения полный 438
— небаротропный, пример вычисления функции давления 21
— пластического деформирования, равновесность, необратимость 446
— развития трещины неустойчивый 551
— — — устойчивый 551
Процессы деформирования упругих тел, обратимость 311
Прочность материалов, связь с внутренней энергией сцепления 536
Пульсации характеристик турбулентного течения 246, 248, 249
Работа гидродинамических сил, действующих на подвижную решетку 87
— напряжений на приращениях деформаций пластических 433
— — — — — упругих 433
Равенство Гриффитса в теории трещин 540
Равновесие в поле сил тяжести жидкостей и газов 7
— — — — — однородной несжимаемой жидкости 7
— — — — — совершенного газа 9
— жидкости относительное, примеры 18
Разгрузка 411, 426

Развитие трещины в плоскости со щелью под действием возрастающих расклинивающих сил и одноосного сжатия на бесконечности 554
Разложение потенциала течения несжимаемой жидкости в ряд по сферическим функциям 168—172
Разрушение квазихрупкое 533
— хрупкое 533
Распространение возмущений малых в упругих телах 397
— — от источника, движущегося с постоянными дозвуковой и сверхзвуковой скоростями 217—219
— плоской упругой волны в изотропной среде 399
— сигналов в дозвуковом потоке 217
— — — сверхзвуковом потоке 220
Растяжение бруса простое (одноосное) 321
— — в случае жестко заделанного торца 328
— — под действием собственного веса 328
Расход жидкости 44, 168
— — при движении в круглой трубе
— источника объемный 214
— критический сопла Лаваля 48
— топлива удельный весовой 129
Режим работы сопла нерасчетный 52, 124
— — — расчетный 50, 124
Релаксация напряжений 418
Решение бигармонического уравнения 494,
— волнового уравнения с волнами плоскими, общее 211
— — — — — сферическими, общее 213, 214
— уравнения Лапласа, фундаментальное 157
— — Пуассона 270
Решетка профилей 81
Свойства осреднения характеристик турбулентного движения 248
— симметрии гармонических функций 175, 177
Свойство пластичности 412, 413, 423
Связь между давлением и плотностью, при которой волна Римана не опрокидывается 226
— — — — — политропная 11
— — пластическими деформациями и напряжениями, отсутствие однозначности 416, 429
Сжимаемость, влияние на зависимость давления и плотности от скорости 42
—, — — форму трубок тока 44
Сила Архимеда 13, 30, 76
—, вынуждающая несвободный вихрь двигаться предназначенным образом 301
— гидродинамическая, действующая на контрольную поверхность 64
Сила гидродинамическая, действующая на поверхность тока 75
— —, — — решетку профилей 82
— —, — — тело в идеальной жидкости 200, 202
— —, — — — вращения в идеальной жидкости 205
— —, — — — со стороны вязкой жидкости (приближение Стокса) 229
—, действующая на поверхность со стороны покоящейся жидкости 12
— перерезывающая 378
— подъемная гидродинамическая 13, 73, 85, 300
— растягивающая 379

— реакции жидкости, текущей в трубе 68
— сопротивления при непрерывном обтекании тел 73
— — при обтекании тел газом со скачками уплотнения 79
— — — — — — жидкостью со срывом струй 76
— — трения 74
— тяги 79
— — ракетного двигателя 123
Силы гидродинамические, действующие на тело в идеальной жидкости на глубине 208
— —, — — — — — — — при наличии массовых сил 208
— —, — — — — — — — при обтекании ускоренным потоком 209
— сцепления внутренние микроскопические 535
Система вихревых нитей 284, 291, 292
— уравнений идеально пластического тела, подчиняющегося условию пластичности Мизеса, замкнутая 460, 461
— — упругого тела замкнутая 316
— — — — — при адиабатических процессах 398
Скачок уплотнения 79, 225
Скорость в реактивной струе 128, 136
— звука 39, 212, 220
— — максимальная 39
— — местная 39
—, играющая роль скорости звука 45
— истечения из сосуда газа 41
— — — несжимаемой жидкости 26
— критическая 39
— максимальная при установившемся движении 38, 39
— потенциальных течений несжимаемой жидкости, максимальность значений на границе 162
— производства энтропии за счет необратимости, связанной с градиентом температуры и пластическим деформированием 443
— распространения малых возмущений в газе 212
— — — — — в упругих телах 400
— — поверхностных волн Рэлея 405, 407
— — постоянных значений плотности 223
Слой пограничный 253
— — ламинарный на пластинке 254, 258
— — — на искривленной поверхности 257, 258, 263, 264
— — при движении газа 266
— — турбулентный 265, 266
Соотношения интегральные для установившихся движений жидкости 53
— статической теории трещин 540
Сопло Лаваля 47, 93
— — с регулируемым горлом 52
Сопло Лаваля расчетное, максимальность тяги 124
— простое (очко) 47
Сопротивление индуктивное 289
— сферы при движении в идеальной жидкости с переменной скоростью 186
— — — — — в вязкой жидкости 235
— трения 265
Состояние начальное 309, 342
— «начальное» 309
— плоское деформированное 485
— — — как пример статически определимой задачи пластичности 461

— —напряженное 486
— — — как пример статически определимой задачи пластичности 461
— — — обобщенное 488
Среда идеально-пластическая 424
— упрочняющаяся 424
Стабилизатор в камере сгорания 102
Степень сжатия в ВРД общая 136, 137
— — в компрессоре 104
Стратосфера 12
Суперпозиция решений в задаче о теле со щелью 515
— — в линейной теории упругости 345
Существование поверхностных волн Рэлея 404
— функций нагружения и ассоциированного закона 446
Схема струйного обтекания с возвратной струйкой 78
Текстура 318
Тело анизотропное 318
— изотропное 318
— упругое однородное 312
Температура торможения (см. *Давление)*
— — продуктов горения 125
Тензор деформаций 309
— диссипации энергии 441
— напряжений, свойства компонент при постоянных объемных силах и температуре 344
Тензоры деформаций пластических 421
— — полных 422
— — упругих 421
Теорема Ампера 282
— Гельмгольца о сохранении вихревых линий 304
— — — — — трубок 304
— Жуковского о подъемной силе крыла 85, 300
— — — — — профиля в решетке 84
— Клапейрона 347, 348
— Лагранжа 153
— Мориса Леви 494
— о среднем гармонических функций 161
— Томсона 288, 296
Теории геометрически линейные упругих тел 311
— пластичности деформационные 429, 432
— —, основные задачи при построении 414
Теория идеального пропеллера 144
— трещин 532
Теплоемкость при постоянных деформациях 398
Теплосодержание 36
— полное 64 ' м-
— — и постоянная в интеграле Бернулли 36, 37
— —, сохранение при переходе через скачок 24
Теплота реакции 125
Течение жидкости в трубке переменного поперечного сечения 31
— материала 415
Течения идеальных жидкости и газа при наличии баротропии, постановки задач 155
— сверхзвуковые и дозвуковые Толщина вытеснения 263
— пограничного слоя 258, 262 40
Топлива, применяемые и перспективные
Точка отрыва пограничного слоя 264
— тела центральная 195
Тропосфера 12
Трубы аэродинамические 93, 103
— кавитационные 35
Трубка вихревая 279
— Пито—Прандтля 27
Трубки тока 44

Турбина 107
Тяга двигателя 123, 127
— удельная 126, 128
Угол дрейфа 206
— закручивания 358, 359
— Маха 220
Удар плавающего тела 175, 178
— по свободной поверхности воды 286
— струи о плоскую стенку 55
Упрочнение материала 412
Уравнение бигармоническое 344, 492
— вариационное для упругих тел в равновесии 390
— волновое 157, 210
— — неоднородное 402
— второго закона термодинамики в теории пластичности 440
— Гельмгольца 303
— диффузии вихрей 305
— для производства энтропии в теории пластичности с учетом теплопроводности 443
— изогнутой оси балки 354
— — — — дифференциальное 383
— импульсов (количества движения) при установившемся движении жидкости 53
— Лапласа 155
— моментов (моментов количества движения) при установившемся движении жидкости 54
— поверхности нагружения для упрочняющихся материалов 425
— — текучести для идеально-пластических материалов 425
— — — Мизеса 457
— — — Треска 452
— принципа возможных перемещений в теории упругости 347
— притока тепла в теории пластичности 440
— прогиба мембраны постоянного натяжения 370
— Пуассона 160, 270, 366
— — векторное 276
— Рэлея для скорости поверхностных волн 406
— сохранения массы при установившемся движении жидкости 53
— теории трещин основное 539
— теплопроводности 305
— энергии (первый закон термодинамики) 54
— — в случае развития внутренних разрывов при хрупком разрушении 537
Уравнение энергии вдоль линии тока 67
— — для тела с трещиной в рамках модели упругого тела 538
Уравнения Бельтрами—Мичелла 343
— волновые в двумерной задаче теории упругости 403
— движения в форме Громеки—Лемба 20
— Ламе с учетом температурных напряжений 343
— ламинарного пограничного слоя (уравнения Прандтля) 256
— модели упругого тела основные 312
— равновесия жидкостей и газов 5
— — упругого тела в напряжениях 343
— Рейнольдса для турбулентного движения жидкости 251
— совместности деформаций 324, 343
— состояния упругого тела 314, 315
— — — материала несжимаемого 315, 316
Условие минимума свободной энергии в состоянии равновесия 391

— на перемещения в плоском напряженном состоянии 487
— на плотность внешних сил в гидростатике 6
— пластичности для изотропного идеально-пластического тела 465
— — Мизеса 457, 458
— — Треска 452
— прилипания 232, 253
— развития трещин 550
— теплового равновесия среды 11
Условия в бесконечности при движении конечного тела в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости 165, 201
— — — — — — — — в трубе 69
—, граничные в линейной теории упругости, выполнения на недеформированной поверхности 342
—, — на свободной поверхности упругого полупространства 403, 404
—, — для функции Эри 492
—, — для функций комплексного переменного в плоской задаче теории упругости 499, 504
— для напряжений на поверхности дислокаций 543
— для исключения перемещений упругого тела как твердого при определении перемещений по деформациям, возможные 327
— для определения постоянных интегрирования в граничных условиях для функции Эри 499
— Коши—Римана 364
— критические для внешних нагрузок, действующих на тело со щелью 551
— на внешние силы в плоской задаче теории упругости 484
— на прямых скачках 66
Усталость материала 419, 420
Устойчивость ламинарного течения 245
— равновесия несжимаемой жидкости 16
— — плавающих тел 18
— — политропной атмосферы 17
— — упругой системы 346
Формула барометрическая 10
— Гурса 494
— для количества движения жидкости при движении в ней твердого тела, удобная для вычисления коэффициентов присоединенных масс 197
Формула для притока энергии в случае развивающейся поверхностной дислокации 548
— — — — — — — — трещины 547
— — — — при образовании разрывов 547
— Ирвина 549
— Сен-Венана—Венцеля 41
— Стокса 281
— Торичелли 27
— Эйлера для момента сил, действующих на лопатки турбины 112
Формулы Грина 164
— Колосова 497
— Сен-Венана 357, 474
Форсаж 143
Функция гармоническая 155, 161
— — как сумма потенциалов простого и двойного слоя 166
— Грина 167
— — в задаче Дирихле для сферы 180
— — для полупространства, ограниченного плоскостью 178
— давления 20
— —, пример вычисления для небаротропного процесса 21

— диссипации, вычисление с помощью ассоциированного закона 444
— — для модели пластической среды по Мизесу 445
— кручения 359, 475
— нагружения 425
— напряжений 366, 463
— — Эри 490, 497
— текучести 425
Функции гармонические, условия симметрии 173, 177
— нагружения 446
— сферические 172
Характеристики состояния пластических тел физические 422
Характеристики средние потока совершенного газа 90
Циркуляция скорости 83
Число кавитации 34
— Маха 40
— Рейнольдса критическое 243
— Эйлера 146
Шлепок по свободной поверхности жидкости 286, 287
Штамп жесткий, давление на упругую полуплоскость 525
— — прямоугольный, давление на упругую полуплоскость 528
— — со слабоискривленным профилем 529, 531
Щель под действием касательной антисимметричной нагрузки 519
— — — нормальной симметричной нагрузки 516
Эжектор 113
Энергия кинетическая несжимаемой жидкости при потенциальном движении 164, 173, 192
— на разрыв 534
— — —, плотность 537, 555, 558
— свободная единицы объема упругого тела 320, 347
— сил сцепления 535
— поверхностная, плотность 536, 537
Энтальпия (см. *Теплосодержание)*
Эпюры изгибающих моментов 381
Эффект Баушингера 413
— Допплера 218
Ядро упругое 469, 477

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VIII. **Гидромеханика** 5
§ 1. Гидростатика 5
§ 2. Общая теория установившихся движений идеальных жидкости и газа. Интеграл Бернулли 20
§ 3. Интеграл Бернулли для несжимаемой тяжелой жидкости . 26
§ 4. Явление кавитации 32
§ 5. Интеграл Бернулли для адиабатических течений совершенного газа 36
§ 6. Влияние сжимаемости на форму трубок тока. Элементарная теория сопла Лаваля 44
§ 7. Применение интегральных соотношений к конечным объемам материальной среды при установившемся движении . . . 53
§ 8. Взаимодействие жидкостей и газов с обтекаемыми телами при установившемся движении 63
§ 9. Основные агрегаты гидродинамических и газовых машин . . 88
§ 10. Основные элементы теории реактивной тяги 122
§ 11. Потенциальные течения идеальной жидкости. Интеграл Коши — Лагранжа 149
§ 12. Потенциальные движения несжимаемой жидкости. Свойства гармонических функций 157
§ 13. Задача о движении сферы в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости 181
§ 14. Кинематическая задача о движении твердого тела в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости 187
§ 15. Энергия, количество движения, момент количества движения жидкости при движении в ней твердого тела и основы теории присоединенных масс 192
§ 16. Силы воздействия идеальной жидкости на тело, движущееся в безграничной массе жидкости 200
§ 17. Движения газа с малыми возмущениями 210
§ 18. Распространение плоских волн конечной амплитуды (волны Римана) 220
§ 19. Движение шара внутри вязкой несжимаемой жидкости . . 228
§ 20. Движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрических трубах 235
§ 21. Турбулентные движения жидкости 242
§ 22. Уравнения ламинарного пограничного слоя 253
§ 23. Пограничный слой при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластинки. Задача Блязиуса 258
§ 24. Некоторые важные эффекты движения вязкой жидкости в пограничном слое 263
§ 25. Определение поля скоростей по заданным вихрям и источникам 267
§ 26. Важные примеры вихревых полей 279
§ 27. Динамическая теория цилиндрических вихрей 295
§ 28. Движение системы непрерывно распределенных вихрей в идеальной жидкости 302
§ 29. Диффузия вихрей в вязкой несжимаемой жидкости . . . 305

Глава IX. **Теория упругости** 309

§ 1. Вводные замечания 309
§ 2. Модель упругого тела 311
§ 3. Задачи об одноосном растяжении упругого бруса 321
§ 4. Деформации и напряжения, возникающие в круглой трубе из упругого материала под действием внутреннего и внешнего давлений (задача Ламе) 332
§ 5. Постановка задач теории упругости. Уравнение Клапейрона. Теорема единственности решения задач теории упругости. Принцип Сен-Венана 341
§ 6. Задача об изгибе балки 350
§ 7. Кручение цилиндрических стержней 356
§ 8. Методы сопротивления материалов в задачах об изгибе балок 377
§ 9. Вариационные методы в теории упругости 388
§ 10. Упругие волны в изотропной среде 397

Глава X. **Теория пластичности** 410

§ 1. Некоторые эффекты, возникающие при деформировании твердых тел и не описывающиеся в рамках модели упругого тела 410
§ 2. Остаточные деформации. Поверхность нагружения 421
§ 3. Основные определяющие соотношения в теории пластических тел 428
§ 4. Примеры моделей пластических тел 451
§ 5. Задача о кручении цилиндрического стержня из упруго-пластического материала без упрочнения 462

Глава XI. **Введение в теорию плоских задач теории упругости и теорию трещин** 481

§ 1. Плоские задачи теории упругости 481
§ 2. Концентрация напряжений 504
§ 3. Теория трещин 532
Литература 559
Предметный указатель 562

ГЛАВА VIII

ГИДРОМЕХАНИКА

§ 1. Гидростатика

Рассмотрим некоторые разделы гидростатики, т. е. теории равновесия жидкостей и газов относительно выбранной системы координат [1]).

Результаты и методы гидростатики имеют большое значение для многих практически важных задач. В гидростатике рассматриваются задачи о равновесии воды в океанах и воздуха в атмосфере; задачи о силах, действующих со стороны жидкости на плавающие корабли, подводные лодки и аэростаты; задачи об устойчивости судов, плавающих на поверхности воды, и множество других задач.

Уравнения равновесия

При равновесии ($\boldsymbol{v} = 0$) из уравнения неразрывности получаем $\partial\rho/\partial t = 0$. Это означает, что в принятой системе отсчета поле плотности стационарно, т. е. $\rho = \rho(x, y, z)$.

Легко видеть, что в случае равновесия уравнения Эйлера и Навье — Стокса приводятся к одному и тому же уравнению

$$\operatorname{grad} p = \rho \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

или в декартовых координатах

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho F_x, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho F_y, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho F_z, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где через F_x, F_y, F_z обозначены проекции плотности внешних массовых сил (в общем случае включающие в себя плотность сил инерции) на оси координат.

Если $F_x = F_y = F_z = 0$, т. е. *внешние массовые силы отсутствуют*, то $\operatorname{grad} p = 0$ и, следовательно, давление p во всех

[1]) Обычно и ниже рассматривается равновесие относительно инерциальной или неинерциальной декартовой системы координат. Иначе говоря, равновесие относительно некоторого абсолютно твердого тела.

точках газа или жидкости одинаково. Этот вывод носит название *закона Паскаля*.

Условие на плотность внешних сил

Из уравнения (1.1) следует, что векторное поле плотности массовых сил $\boldsymbol{F}$ при равновесии не может быть произвольным. В общем случае для сжимаемой жидкости, когда плотность ρ является определяемой величиной, из (1.1) вытекает, что

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \operatorname{grad} p = \rho \operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \boldsymbol{F}, \tag{1.3}$$

так как для любых вектора $\boldsymbol{a}$ и скаляра c справедлива формула

$$\operatorname{rot} c\boldsymbol{a} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} c \times \boldsymbol{a}.$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0. \tag{1.4}$$

Соотношение (1.4) является необходимым условием для поля сил $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, при котором возможно равновесие.

Можно показать, что для заданного поля сил $\boldsymbol{F}$, удовлетворяющего условию (1.4), можно определить два скалярных поля: поле плотности $\rho(x, y, z)$ и поле давления $p(x, y, z)$, так, чтобы уравнения (1.2) удовлетворялись.

Если плотность $\rho = \text{const}$ (жидкость несжимаема и однородна), то $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ и силы должны обладать потенциалом $\mathcal{U}$, т. е. $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \mathcal{U}$. Поэтому однородная несжимаемая жидкость может находиться в равновесии только в потенциальном поле внешних массовых сил.

В общем случае для сжимаемой среды, если поле сил потенциально, из (1.1) получим

$$dp = \rho\, d\mathcal{U}. \tag{1.5}$$

Отсюда вытекает, что при равновесии в потенциальном поле сил плотность и давление являются функциями только $\mathcal{U}$. Действительно, по (1.5) при $\mathcal{U} = \text{const}$ имеем $p = \text{const}$, т. е. $p = p(\mathcal{U})$, но $dp/d\mathcal{U} = \rho$ и, следовательно, $\rho = \rho(\mathcal{U})$.

Из общей теории разрывов [1]) следует, что в покоящейся жидкости возможны только поверхности разрыва плотности, а давление должно быть непрерывным. Из непрерывности давления и потенциала $\mathcal{U}$ получим, что соотношение (1.5) при $\rho_1 \neq \rho_2$ может удовлетворяться вдоль поверхности разрыва только при $d\mathcal{U} = dp = 0$, т. е. *в покоящейся жидкости поверхности разрыва плотности должны быть эквипотенциальными поверхностями* $\mathcal{U} = \text{const}$.

---

[1]) См. § 4 гл. VII т. 1.

Равновесие в поле сил тяжести

Рассмотрим равновесие жидкостей и газов в поле сил тяжести. Выберем систему координат, у которой ось z направлена вертикально вверх. Тогда $F_x = F_y = 0, F_z = -g$, $\mathcal{U} = -gz + \text{const}$ и $p = p(z)$, $\rho = \rho(z)$. Таким образом, при действии только сил тяжести в покоящихся жидкостях и газах поверхности постоянного давления (изобары) и постоянной плотности (изостеры) являются горизонтальными плоскостями. Из уравнения состояния $f(p, \rho, T) = 0$ получается, что температура в тяжелой покоящейся жидкости также зависит только от координаты z, $T = T(z)$.

По (1.5) $dp/dz = -\rho g < 0$ и, следовательно, давление с увеличением высоты падает. Из уравнения (1.5) для разности давлений на двух уровнях z и z_0 получаем

$$p - p_0 = -\int_{z_0}^{z} \rho g\, dz = -\int_{z_0}^{z} \gamma\, dz, \tag{1.6}$$

где $\gamma = \rho g$ — удельный вес жидкости. Следовательно, разница в давлениях в двух точках, расположенных на разных высотах z и z_0, равна интегралу $\int_{z_0}^{z} \gamma\, dz$, т. е. весу столба жидкости с площадью основания, равной 1, и высотой, равной $z - z_0$. Этот вывод не зависит от вида области, в которой находится жидкость или газ, и физических свойств жидкостей и газов.

Равновесие однородной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести

Рассмотрим отдельно случай однородной несжимаемой жидкости и случай совершенного газа.

Пусть жидкость однородная и несжимаемая, т. е. $\rho = \text{const}$. Из (1.6) получим

$$p = p_0 - \rho g (z - z_0), \tag{1.7}$$

т. е. давление в покоящейся однородной несжимаемой жидкости убывает с высотой по линейному закону.

Если в (1.7) положить $z_0 = 0$, т. е. принять, что p_0 есть давление в плоскости $z = 0$, то

$$p = p_0 - \rho g z = p_0 + \rho g h, \tag{1.8}$$

где h — глубина относительно плоскости $z = 0$. С помощью формулы (1.7) или (1.8) можно рассчитать давление на дно сосуда, заполненного жидкостью. Величина этого давления зависит только от глубины жидкости.

Если взять сосуды различной формы (рис. 1) и налить в них одинаковую жидкость, то давление на одинаковой глубине

в сосудах будет одинаковым. В частности, при одинаковой глубине горизонтального дна давление на него во всех сосудах (независимо от их формы) будет одинаковым.

Если площади дна сосудов одинаковы, то и силы, действующие со стороны жидкости на дно сосудов, одинаковы. Чашки

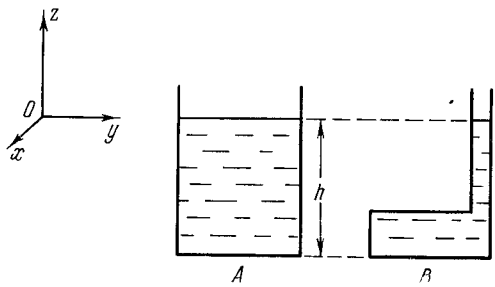


Рис. 1. Гидростатическое давление на дно сосуда определяется высотой жидкости h и одинаково как в сосуде A, так и в сосуде B.

весов на рис. 2 будут находиться в равновесии, так как они являются поршнями, воспринимающими одинаковые усилия, хотя вес расположенной над ними жидкости различен. (Силовым взаимодействием между стенками сосудов и весов и, в

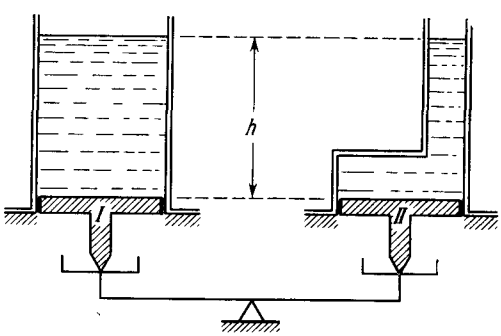


Рис. 2. На поршни I и II действуют одинаковые силы.

частности, трением при этом пренебрегается.) Если же сосуды I и II просто поставить на чашки весов, то они воспримут веса сосудов и различные веса жидкости.

На основе законов гидростатики построены манометры — приборы для измерения давлений; они часто представляют собой сообщающиеся сосуды, в которых находится покоящаяся

жидкость: ртуть, вода, спирт. На одно колено манометра подается измеряемое давление, а на второе — противодавление, с которым хотят сравнить измеряемое давление. Разность уровней в сосудах определяет разность переданных давлений.

Поршневой насос

Рассмотрим поршневой насос. Пусть в начальный момент поршень касается поверхности воды (рис. 3, *а*). Если переместить поршень вверх, то вода последует за ним (рис. 3, *б*). Однако, поднимая поршень,

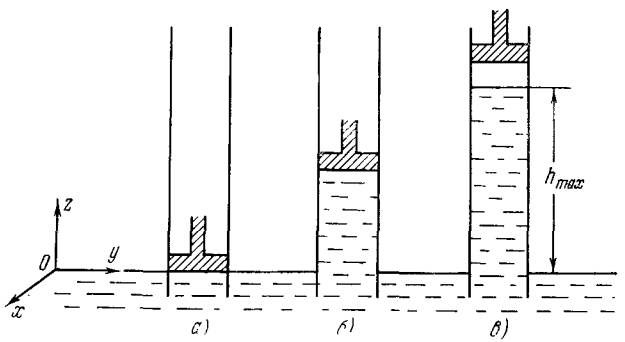


Рис. 3. Поршневой насос.

мы заметим, что в некоторый момент вода оторвется от него. Между поверхностью воды в трубе и поршнем образуется полость (рис. 3, *в*), давление в которой будет равно нулю или малому давлению p_d насыщенных паров воды при данной температуре [1]). Воду таким путем можно поднять только на некоторую высоту $h_{\max}$.

Положив в (1.8) $p_0 = p_{\text{атм}}$ и $p = 0$, получим $h_{\max} = \dfrac{p_{\text{атм}}}{\rho g}$, Если $p_{\text{атм}} = 10\,000$ *кГ/м*^{2}, $\rho = 102$ *кГсек*^{2}*/м*^{4} и $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2} то $h_{\max} \approx 10$ *м*.

Равновесие совершенного газа в поле сил тяжести

Рассмотрим теперь равновесие совершенного газа в поле сил тяжести. Имеем уравнения $dp = -\rho g\, dz$ и $p = \rho RT$. Из них легко получим

$$\frac{dp}{p} = -\,g\,\frac{dz}{RT(z)}$$

[1]) Опыты показывают, что в воде вообще могут существовать отрицательные давления ($p < 0$), соответствующие растяжению, однако в течение длительных промежутков времени ограниченные отрицательные давления могут существовать только в воде, не содержащей растворенных газов и примесей твердых частиц.

или

$$p = p_0 \exp\left(-\int_{z_0}^{z} \frac{g\,dz}{RT(z)}\right). \tag{1.9}$$

Эта формула носит название *барометрической формулы*. Зная зависимость $T(z)$ температуры от высоты, с помощью формулы (1.9) можно найти изменение с высотой давления.

Если условно принять, что $\rho = \text{const}$ (*однородная атмосфера*), то p и T согласно уравнениям равновесия будут линейными функциями z и согласно (1.7) найдется такая высота h, на которой $p = 0$. Высота воздушной атмосферы, если считать воздух несжимаемой жидкостью, оказывается конечной,

$$h = \frac{p_a}{\rho g} \approx 8000\,м.$$

Если считать, что *атмосфера* находится *в изотермическом равновесии* ($T = \text{const}$), то из барометрической формулы (1.9) следует экспоненциальный закон убывания давления с высотой

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left[-\frac{g}{RT}(z - z_0)\right].$$

Высота изотермической атмосферы получается бесконечной.

В ограниченном диапазоне высот (до 11 *км*) в соответствии с опытом принимают, что *температура с высотой в атмосфере убывает по линейному закону*

$$T = T_0 - \frac{\Delta}{100} z, \tag{1.10}$$

где T_0 ($= 288°$ K $= 15°$ C) — абсолютная температура при $z = 0$, а Δ — величина, на которую убывает температура при подъеме на 100 *м*. В ряде практических вопросов можно для действительной атмосферы принять, что $\Delta = 0{,}65°$ и что $z = 0$ соответствует уровню моря. В этом случае из (1.10) имеем

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\Delta}{100T_0} z\right)^{g100/R\Delta}. \tag{1.11}$$

Высота атмосферы получается конечной: $p = 0$ при

$$h = \frac{100T_0}{\Delta} = \frac{100 \cdot 288}{0{,}65} \approx 48\,км.$$

Поэтому очевидно, что допущение (1.10) неприемлемо для всей атмосферы.

Установим связь между плотностью ρ и давлением p для такой атмосферы. Из (1.11) согласно (1.10) получим, что

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g100/R\Delta},$$

а из уравнения Клапейрона

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{T}{T_0},$$

поэтому

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{g100/(100g-R\Delta)},$$

или

$$p = C\rho^n, \quad C = \text{const}, \quad n = \frac{100g}{100g - R\Delta}.$$

Такая связь между давлением и плотностью называется *политропной*, но в этом случае необходимо иметь в виду, что различные плотности и давления, связанные политропой, относятся к различным частицам. В гл. V были рассмотрены политропные процессы, в которых имелась аналогичная связь между плотностью и давлением для одной и той же частицы.

При $\Delta = 0{,}65°$ и $R/g = 29{,}27$ *м/град* получается, что $n = 1{,}2$. Если $n = \gamma = 1{,}4$, т. е. показатель политропы совпадает с показателем адиабаты, то $\Delta = 0{,}98°\ \text{C} \simeq 1°\ \text{C}$.

Условие теплового равновесия среды получается из уравнения притока тепла, которое при $v = 0$ и при учете только теплопроводности (см. (7.17) гл. V т. 1) имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho}\Delta T. \tag{1.12}$$

В действительности, кроме теплопроводности, распределение температуры по высоте в атмосфере зависит от явлений излучения и конвекции. В нашем случае $U = c_V T + \text{const}$ и $T = T(z)$, поэтому $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ и из (1.12) получаем, что

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{1.12'}$$

Закон (1.10) линейной зависимости температуры от высоты удовлетворяет условию (1.12').

Строение действительной атмосферы связано со сложными и вообще переменными во времени (за счет солнечного и земного излучения) механизмами теплообмена и переменностью состава атмосферы (например, за счет диссоциации и ионизации от солнечного излучения). Состав атмосферы и распределение

температуры в атмосфере постоянно изучаются с помощью воздушных шаров-зондов, самолетов, искусственных спутников Земли и другими методами.

В технических расчетах обычно используют «*стандартную атмосферу*». В первом приближении на практике принимают, что до высоты в 11 *км* температура убывает с высотой по закону (1.10) с $\Delta = 0{,}65°$. Этот слой атмосферы называется тропосферой. Выше тропосферы расположена стратосфера, в которой принимают, что $T = \text{const} = -56°$ С. Для многих практических задач эта модель стандартной атмосферы неудовлетворительна, требуется обращаться к уточненным данным, которых мы не будем здесь касаться.

Данные о стандартной атмосфере имеют большое значение в авиации. Изменение характеристик набегающего воздушного потока с высотой полета весьма существенно. Имитация высотных полетов в земных условиях проводится с помощью данных о стандартной атмосфере.

Суммарные сила и момент, действующие со стороны жидкости на поверхность, расположенную внутри нее. Закон Архимеда

Перейдем теперь к вычислению сил, действующих со стороны покоящихся жидкостей или газов на помещенные в них твердые тела. Главный вектор $\boldsymbol{A}$ и главный момент $\mathfrak{M}$ сил, действующих со стороны покоящейся как идеальной, так и вязкой жидкости на какую-либо часть граничной поверхности тела Σ или на поверхность Σ, выделенную внутри жидкости мысленно, определяются формулами:

$$\boldsymbol{A} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n d\sigma = -\int_{\Sigma} p\boldsymbol{n}\, d\sigma, \tag{1.13}$$

$$\mathfrak{M} = \int_{\Sigma} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n)\, d\sigma = -\int_{\Sigma} p\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})\, d\sigma. \tag{1.14}$$

Рассмотрим твердое тело объема V, ограниченное поверхностью Σ, которое полностью погружено в покоящуюся жидкость (рис. 4).

Найдем полную силу (1.13), действующую на это тело со стороны покоящейся жидкости или газа. Для этого воспользуемся следующим соображением: очевидно, что равновесие окружающей тело жидкости не нарушится (а значит, и сила $\boldsymbol{A}$ не изменится), если мысленно или в действительности заменить объем твердого тела объемом покоящейся жидкости с распределениями плотности и давления, удовлетворяющими уравнениям равновесия. Проделав мысленно эту замену, воспользуемся для вычисления силы $\boldsymbol{A}$ формулой Гаусса — Остроградского.

Так как $\boldsymbol{n} = \cos(\boldsymbol{n}, x)\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{n}, y)\boldsymbol{j} + \cos(\boldsymbol{n}, z)\boldsymbol{k}$, то

$$\boldsymbol{A} = -\int_{\Sigma} p\boldsymbol{n}\, d\sigma = -\int_{V} \operatorname{grad} p\, d\tau = -\int_{V} \rho \boldsymbol{F} d\tau.$$

Если $\boldsymbol{F}$ — сила тяжести и ось z направлена вертикально вверх, то $\boldsymbol{F} = -g\boldsymbol{k}$ и

$$\boldsymbol{A} = \int_{V} \rho g \boldsymbol{k} d\tau = -\boldsymbol{G},$$

где $\boldsymbol{G}$ — вес жидкости, заключенной в объеме V.

Мы получили закон Архимеда: на тело, погруженное в покоящуюся тяжелую жидкость, со стороны жидкости действует подъемная сила, равная весу жидкости или газа, вытесненных телом. Сила, действующая со стороны жидкости на тело, направлена вертикально вверх и стремится вытолкнуть его из жидкости. Она называется гидростатической подъемной силой, или силой Архимеда. Можно сказать, что за счет действия силы Архимеда погруженное в жидкость тело теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость. Гидростатическая подъемная сила возникает за счет неравномерного распределения давления в жидкости, давление в тяжелой жидкости возрастает с глубиной.

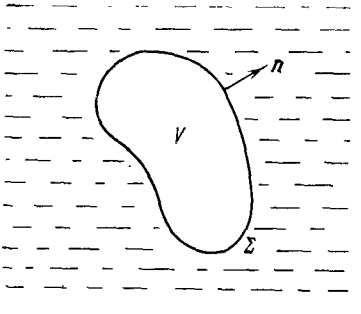


Рис. 4. К выводу закона Архимеда.

Покажем теперь, что линия действия силы Архимеда $\boldsymbol{A}$ проходит через центр тяжести массы вытесненной жидкости. Действительно, система поверхностных сил, приложенных на поверхности Σ, уравновешивается системой сил веса частиц среды внутри объема V. Поэтому совокупность системы сил, действующих на поверхности тела Σ, можно свести к одной силе, равной общему весу и приложенной в центре тяжести мысленно введенной внутрь поверхности Σ массы жидкости с распределениями плотности и давления, удовлетворяющими уравнениям равновесия.

Таким образом, если погруженное в жидкость или газ тело можно считать твердым, то эффект взаимодействия тела с покоящейся жидкостью можно свести к силе Архимеда, приложенной в центре тяжести вытесненной телом массы жидкости

или газа. Если жидкость однородна, то центр тяжести вытесненной массы совпадает с центром тяжести вытесненного объема. В этом случае для тела, полностью погруженного в жидкость, точка приложения силы Архимеда, отмеченная в теле, не зависит от ориентации тела. В общем случае для тел, погруженных в среду с неоднородной плотностью, сила Архимеда и ее линия действия зависят существенно от положения тела в жидкости и от его ориентации.

Если сила Архимеда меньше веса тела, то тело, погруженное в жидкость и предоставленное само себе, тонет; если сила Архимеда больше веса, то всплывает. В рамках квазистатического рассмотрения тело всплывает до тех пор, пока его вес не сравняется с гидростатической подъемной силой.

Для тел, плавающих на поверхности воды, гидростатическая подъемная сила также равняется силе Архимеда. Действительно, для вычисления этой силы можно ввести замкнутую поверхность Σ, состоящую из смоченной поверхности тела и площади сечения объема тела горизонтальной плоскостью π, совпадающей с уровнем покоящейся жидкости. На поверхности этого сечения тела давление следует считать постоянным и равным p_0 — давлению на свободной поверхности жидкости.

На практике при расчете гидростатических сил, действующих на корабли, изменениями гидростатического давления воздуха в различных частях корабля можно пренебрегать и считать это давление постоянным и равным p_0 — атмосферному давлению. Очевидно, что при вычислении интеграла (1.13) по полной поверхности тела мы получим силу Архимеда для части тела, погруженной в воду и ограниченной сечением тела плоскостью π.

Для тела, погруженного в жидкость только частично, положение линии действия силы Архимеда относительно тела существенно зависит от ориентации тела.

Наличие гидростатической подъемной силы широко используется в технике. Эта сила поддерживает суда, плавающие на поверхности воды, удерживает подводные лодки на нужной глубине, удерживает в воздухе аэростаты и дирижабли и т. д. На основе закона Архимеда построены приборы для измерения плотности жидкости — ареометры, измерители жирности молока — лактометры, концентрации спирта — спиртометры и т. п.

Существенным моментом в выводе закона Архимеда является предположение о замкнутости поверхности Σ соприкосновения тела с жидкостью. Если поверхность не замкнута, то закон Архимеда не имеет места. Например, если некоторое тело A погрузить в воду так, что оно со всех сторон будет окружено водой (рис. 5), то на него будет действовать выталкивающая сила; но

если то же тело опустить на дно, то подъемная сила исчезнет и, наоборот, появится сила, которая будет прижимать тело ко дну. С этим явлением связаны случаи, когда подводные лодки ложились на дно океана, теряли плавучесть и не могли всплыть.

Рассмотрим еще *парадокс Жуковского*, суть которого заключается в следующем. Если в стенке сосуда с жидкостью поместить цилиндр (рис. 6), который может вращаться без трения

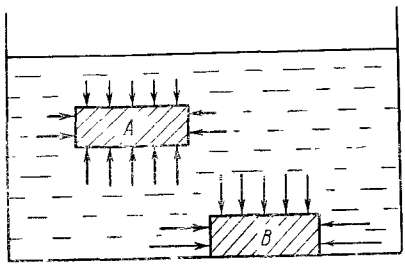


Рис. 5. На тело A действует подъемная сила Архимеда, на тело B действует сила, прижимающая его ко дну, если доступ жидкости под тело невозможен.

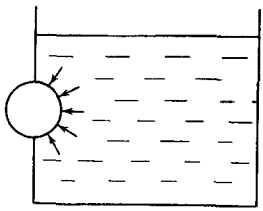


Рис. 6. К парадоксу Жуковского.

вокруг своей оси, то, казалось бы, должна возникнуть подъемная сила, действующая на часть цилиндра, находящуюся в воде, и под действием этой силы цилиндр должен начать вращаться. Однако этого не происходит, так как равнодействующая сил, действующих со стороны воды на цилиндр, проходит не через центр объема вытесненной жидкости, а через ось цилиндра, ибо давление в каждой точке поверхности цилиндра направлено по нормали к ней.

С помощью формул для распределения гидростатического давления, например (1.7) или (1.9), легко рассчитать суммарные силы и моменты, действующие за счет гидростатических давлений на *любые поверхности или их части, находящиеся в* контакте с покоящейся жидкостью, например, на стенки сосудов, на плотины, на различного рода аппараты, находящиеся в воздухе и в воде, и т. п. Подчеркнем, что здесь речь идет о силах, действующих на тела, погруженные в жидкость, только за счет гидростатических давлений, тогда как общая сила, действующая на поверхность тела при движении жидкости, может зависеть и определяться не только гидростатическим давлением, которое, как будет показано ниже, в общем случае является только частью суммарного давления.

Устойчивость равновесия несжимаемой жидкости и политропной атмосферы в поле сил тяжести

Рассмотрим теперь устойчивость равновесия несжимаемой жидкости. Если, например, в сосуде имеются слой воды и слой ртути, то с точки зрения уравнений равновесия тяжелой жидкости равно возможны оба состояния равновесия, изображенные на рис. 7. Но будут ли оба эти состояния устойчивыми?

Равновесие называется устойчивым, если после произвольного малого перемещения система стремится возвратиться в прежнее состояние равновесия, неустойчивым, если найдется

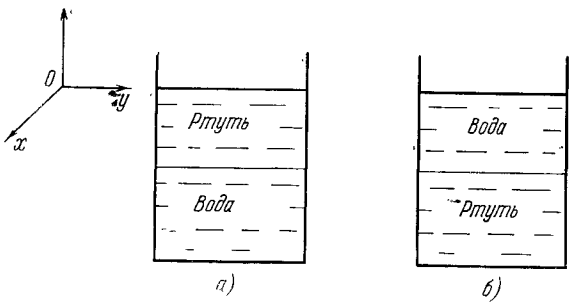


Рис. 7. Примеры неустойчивого (*а*) и устойчивого (*б*) равновесия несжимаемой жидкости.

такое малое перемещение (возмущенное состояние) всей системы или ее части, после которого система стремится еще более удалиться от положения равновесия, и безразличным, если в системе можно произвести любое малое перемещение, не нарушая равновесия.

Для того чтобы для жидкости установить необходимые условия устойчивости равновесия, можно мысленно переместить некоторое количество жидкости и посмотреть, что затем будет происходить с этой частью жидкости под действием сил, которые на нее будут действовать после сообщенного ей перемещения. В указанном выше примере вода — ртуть состояние равновесия, изображенное на рис. 7, *а*, будет, очевидно, неустойчивым, так как частица ртути, смещенная в слой воды, в силу того, что действующая на нее архимедова сила будет меньше действующей на нее силы тяжести, начнет опускаться вниз. Наоборот, равновесие, изображенное на рис. 7, *б*, будет устойчивым.

Очевидно, что необходимое условие устойчивости (или безразличности) состояния равновесия несжимаемой жидкости в поле сил тяжести заключается в том, что плотность среды долж-

на увеличиваться с глубиной (или оставаться постоянной), т. е. $\partial\rho/\partial z \leqslant 0$.

Для газа вопрос устойчивости состояния равновесия решается несколько сложнее, так как частица газа, смещенная из слоя с одним давлением в слой с другим давлением, изменяет свою плотность.

Рассмотрим устойчивость равновесия политропной атмосферы, в которой $p_1/p_2 = (\rho_1/\rho_2)^n$, считая, что частица воздуха с плотностью ρ_1, при перемещении из слоя *1* в слой *2* (рис. 8), испытывает адиабатическое сжатие или расширение, т. е.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_1'}{\rho_1}\right)^{\gamma}.$$

Через ρ_1' мы обозначили плотность частицы воздуха A после перемещения ее в слой *2*. Очевидно, что для устойчивости равновесия необходимо, чтобы $\rho_1' < \rho_2$, так как в этом случае сила Архимеда будет больше силы тяжести; при $\rho_1' > \rho_2$ равновесие неустойчиво; при $\rho_1' = \rho_2$ оно может быть безразличным. Так как

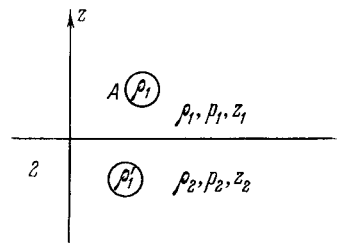


Рис. 8. К устойчивости равновесия политропной атмосферы.

$$\left(\frac{\rho_1'}{\rho_1}\right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{n},$$

то для устойчивости равновесия должно быть $n < \gamma$, равновесие неустойчиво при $n > \gamma$ и может быть безразличным при $n = \gamma$. Как указывалось выше, адиабатическому ($n = \gamma$) расслоению атмосферы соответствует падение температуры $\Delta \approx 1°$ С на каждые 100 *м* высоты. Поэтому, так как

$$n = \frac{100g}{100g - R\Delta},$$

получим, что при устойчивом равновесии $\Delta < 1°$ С, равновесие неустойчиво, если $\Delta > 1°$ С, и может быть безразличным при $\Delta \approx 1°$ С.

Конвекция в атмосфере часто является следствием неустойчивости, возникающей при прогревании нижних слоев воздуха.

Об устойчивости равновесия плавающих тел

Одной из важных задач гидростатики является исследование устойчивости равновесия тел, плавающих на поверхности воды. Для качественного объяснения сути дела обратим внимание на то, что плавающее на поверхности воды тело A (например, деревянный брусок) (рис. 9) опрокинется при малом откло-

нении его от вертикального положения, этот же брусок в положении B, наоборот, вернется в прежнее положение.

Теория устойчивости равновесия плавающих тел, называемая «теорией сстойчивости», имеет очень важное практическое значение для кораблей (с ее помощью рассматриваются вопросы

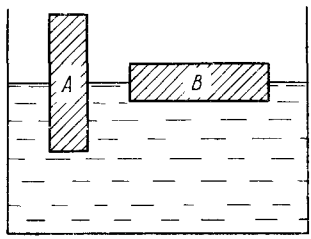


Рис. 9. Равновесие плавающего тела B устойчиво, а тела A неустойчиво.

непотопляемости кораблей, их качки на волне). Теория остойчивости — хорошо развитая изящная геометрическая теория [1]), которую мы здесь не будем рассматривать.

Равновесие жидкости относительно подвижных систем координат

Рассмотрим еще равновесие тяжелой несжимаемой жидкости относительно вращающейся с постоянной угловой скоростью ω системы координат. Пусть мы имеем сосуд, который вращается вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω (рис. 10). Определим форму свободной поверхности налитой в сосуд жидкости при условии, что она находится в покое по отношению к сосуду. В правую часть уравнений равновесия (1.2) в этом случае, помимо силы тяжести, следует ввести центробежную силу инерции. Уравнения относительного равновесия имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Легко видеть, что их общее решение представится формулой

$$p = C - \rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2, \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Для точки $r = 0$, $z = z_0$ на свободной поверхности имеем $p = p_0$, поэтому

$$C = p_0 + \rho g z_0$$

[1]) См., например, П. Аппель, Руководство теоретической (рациональной) механики, т. III, Москва, 1911; А. Н. Крылов Качка корабля, Изд-во АН СССР, 1951.

и

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2.$$

Уравнение свободной поверхности жидкости, на которой $p = p_0$, имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g},$$

т. е. свободная поверхность представляет собой параболоид вращения. Аналогичную форму будут иметь и все другие изобарические поверхности. Вектор grad p направлен по нормали к соответствующим параболоидам, как указано на рис. 10. В фиксированной системе координат постоянная z_0 для жидкости в сосуде определяется через объем жидкости, налитой в сосуд. Если в жидкость поместить взвешенные частицы разной плотности, то в результате вращения более легкие частицы, имеющие плотность, меньшую плотности жидкости, под действием силы Архимеда, обусловленной силой тяжести и центробежной силой, поднимутся вверх и соберутся вблизи оси вращения, а более плотные, чем жидкость,— опустятся вниз и расположатся у стенок сосуда.

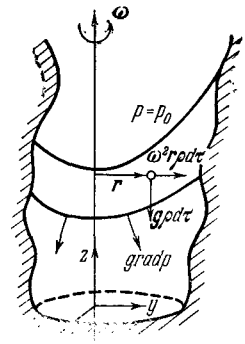


Рис. 10. Равновесие несжимаемой жидкости в сосуде, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω.

В случае равновесия тяжелой жидкости в цистерне, двигающейся поступательно с постоянным ускорением a (рис. 11),

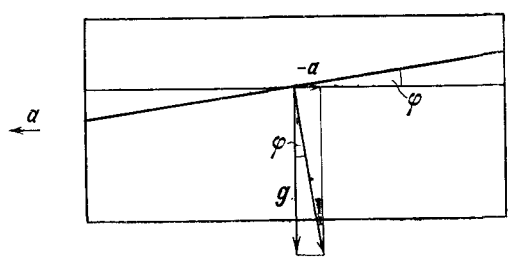


Рис. 11. Равновесие жидкости в цистерне, двигающейся с постоянным ускорением.

уровень свободной поверхности жидкости получится наклоненным к горизонту под углом $\varphi = \operatorname{arctg}(a/g)$. Направления суммарных массовых сил (силы тяжести и силы инерции), действующих на каждую частицу жидкости, будут составлять, постоянный угол φ с вертикалью.

§ 2. Общая теория установившихся движений идеальных жидкости и газа. Интеграл Бернулли

Перейдем к изучению движения идеальных сред. Установим важное конечное соотношение — *первый интеграл уравнений движения идеальной жидкости* или газа *в случае установившихся движений*. Для этого возьмем уравнения движения Эйлера в форме Громеки — Лемба

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \boldsymbol{F}. \qquad (2.1)$$

Так как движение установившееся, то

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0.$$

Кроме этого примем, что *внешние массовые силы обладают потенциалом* $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \mathcal{U}$.

Функция давления

Рассмотрим в потоке жидкости некоторую произвольную линию $\mathcal{L}$ и введем вдоль нее направление отсчета длины l, начиная от некоторой точки O. Заданием l будут фиксироваться точки на линии $\mathcal{L}$. Через $d\boldsymbol{l}$ обозначим элемент касательной к линии $\mathcal{L}$ в произвольной точке M (рис. 12).

Проектируя уравнение (2.1) на направление касательной к $\mathcal{L}$ в произвольной точке M с учетом сделанных предположений, получим

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})_l. \qquad (2.2)$$

Вдоль данной линии $\mathcal{L}$ плотность и давление являются функциями длины дуги l. Эти функции различны для разных линий $\mathcal{L}$, т. е.

$$\rho = \rho(l, \mathcal{L}) \quad \text{и} \quad p = p(l, \mathcal{L}).$$

Очевидно, что вдоль данной линии $\mathcal{L}$ плотность ρ можно считать функцией давления:

$$\rho = \rho(p, \mathcal{L}),$$

и можно всегда ввести функцию давления $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, \mathcal{L}) = \int_{p_1}^{p} \frac{dp}{\rho(p, \mathcal{L})}, \qquad p_1 = \text{const} \qquad (2.2')$$

так, что

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial l};$$

причем это равенство и определенная по (2.2′) функция $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ имеют место только для данной линии $\mathcal{L}$. Очевидно, что функция давления определена только с точностью до аддитивной постоянной, которая связана с выбором p_1 и может зависеть от $\mathcal{L}$. Заметим, что в случае баротропных процессов, если известна зависимость $p = p(\rho)$, так введенная функция давления $\mathcal{P}$ легко вычисляется и не зависит от линии $\mathcal{L}$, если p_1 не зависит от $\mathcal{L}$.

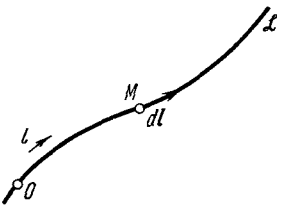


Рис. 12. К выводу интеграла Бернулли.

Например, для однородной несжимаемой жидкости

$$\mathcal{P} = p/\rho + \text{const}.$$

Для изотермических процессов в совершенном газе, когда $\rho = p/(RT)$,

$$\mathcal{P} = RT \ln p + \text{const}.$$

Важным примером небаротропного процесса, при котором функция $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ легко вычисляется вдоль неизвестной заранее линии тока $\mathcal{L}$, может служить случай адиабатических обратимых течений совершенного газа, когда $dq^{(e)} = Tds = 0$, и поэтому энтропия s в каждой фиксированной частице сохраняется постоянной, $s = \text{const}$. Однако у различных частиц энтропия может быть различной, и процесс тогда не будет баротропным. Так как движение установившееся, то все частицы, движущиеся вдоль одной и той же линии тока, будут иметь одинаковую энтропию.

В самом деле, при установившемся движении линии тока и траектории совпадают, и если бы вдоль одной линии тока двигались частицы с разной энтропией, то, проходя через фиксированную геометрическую точку линии тока, они создавали бы изменение энтропии со временем в этой точке пространства, т. е. движение не было бы установившимся. На разных линиях тока энтропия может быть различной.

Уравнение состояния совершенного газа можно представить в виде (см. § 5 гл. V т. 1):

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} e^{(s_0 - s)/c_p} = \rho(p, s).$$

Так как в рассматриваемом случае энтропия s вдоль линии тока постоянна, то, вычисляя функцию давления $\mathcal{P}$ для

какой-нибудь линии тока, получим

$$\mathcal{P}(p, \mathcal{L}) = \int \frac{dp}{\frac{\rho_0}{p_0^{1/\gamma}} \exp\left(\frac{s_0 - s(\mathcal{L})}{c_p}\right) p^{1/\gamma}} =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} \exp\left(\frac{s(\mathcal{L}) - s_0}{c_p}\right) p^{(\gamma-1)/\gamma} + \text{const}. \qquad (2.3)$$

Используя уравнение состояния, можно представить $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ в виде

$$\mathcal{P}(p, \mathcal{L}) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \text{const}. \qquad (2.3')$$

В формуле (2.3) зависимость функции давления от линии тока проявляется через значения двух параметров — постоянной для каждой линии тока энтропии s и постоянной интегрирования. Подчеркнем, что формулы (2.3) и (2.3') для функции давления $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ справедливы только вдоль линии тока.

Интеграл Бернулли вдоль линии тока и вихревой линии

Введя функцию давления $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$, уравнение (2.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(p, \mathcal{L}) - \mathcal{U}\right] = -2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})_l. \qquad (2.3'')$$

Пусть теперь $\mathcal{L}$ есть линия тока. В этом случае стоящая справа в (2.3'') проекция векторного произведения $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})_l$ обратится в нуль, так как вектор $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ перпендикулярен к линии тока.

Аналогичный результат получится, если $\mathcal{L}$ будет вихревой линией.

В общем случае функции $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ на линии тока и на вихревой линии различны.

Таким образом, вдоль линий тока и вихревых линий имеем

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(p, \mathcal{L}) - \mathcal{U}\right] = 0, \qquad (2.4)$$

т. е.

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(p, \mathcal{L}) - \mathcal{U} = i^*(\mathcal{L}). \qquad (2.5)$$

Подчеркнем, что стоящая справа постоянная i^*, вообще говоря, различна для разных линий тока и вихревых линий: i^* зависит от $\mathcal{L}$. Эта зависимость i^* от $\mathcal{L}$ связана не только с тем, что в случае небаротропных процессов $\mathcal{P}$ зависит от $\mathcal{L}$, но и с тем, что постоянная интегрирования выражения (2.4) вдоль

разных линий может быть разной и в том случае, когда функция $\mathcal{P}$ не зависит от линии тока [1]).

В тех случаях, когда функция давления $\mathcal{P}$ известна, *соотношение* (2.5) является первым интегралом уравнений движения идеальной жидкости и *называется интегралом Бернулли*. Этот интеграл имеет фундаментальное значение в теории движения идеальных жидкостей и газов и является основой во многих практических расчетах.

Если функция давления $\mathcal{P}(p)$ и значение постоянной i^* вдоль данной линии тока или вихревой линии известны, то, пользуясь интегралом Бернулли, можно в любой точке линии тока или вихревой линии, зная скорость, найти давление, или наоборот. Для определения постоянной i^* в интеграле Бернулли достаточно знать значения характеристик движения жидкости, входящих в левую часть интеграла Бернулли, только в одной точке на линии тока или на вихревой линии.

Случаи, когда постоянная интеграла Бернулли не зависит от линии

При наличии баротропии постоянная интеграла Бернулли одинакова для части или всей массы жидкости и не зависит от линии тока или вихревой линии, если векторное произведение $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ в этой массе жидкости равно нулю. Это может быть в трех случаях; либо когда $\boldsymbol{v} = 0$ (гидростатика), либо когда $\boldsymbol{\omega} = 0$ (движение потенциально), либо когда вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарен вектору скорости $\boldsymbol{v}$.

Последний случай не может иметь место при движении твердого тела и плоскопараллельных движениях [2]) жидкости, в которых $\boldsymbol{\omega}$ ортогонально $\boldsymbol{v}$. Многообразие возможных движений жидких сред гораздо богаче многообразия возможных движений твердых тел; для деформируемых тел случай, когда $\boldsymbol{\omega}$ параллельно $\boldsymbol{v}$, может иметь место. Например, если непрерывное поле скоростей задается формулами:

$$\begin{aligned} \frac{u}{V_0} &= -\sin\frac{x}{a} + \cos\frac{x}{a}, \\ \frac{v}{V_0} &= \left(\frac{y}{a} + \frac{z}{a}\right)\sin\frac{x}{a}, \\ \frac{w}{V_0} &= \left(\frac{y}{a} + \frac{z}{a}\right)\cos\frac{x}{a}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

[1]) Аддитивную постоянную, входящую в определение функции давления $\mathcal{P}$, удобно включать в постоянную интегрирования i^*.

[2]) Как показано в конце этого параграфа, плоскопараллельные движения сжимаемой жидкости при наличии баротропии, если $i^* = \text{const}$, являются потенциальными; при отсутствии баротропии из равенства $i^* = \text{const}$ не следует, что движение потенциально.

где V_0 и a — постоянные, то легко проверить, что $\omega = \frac{1}{2} v$, следовательно, в поле скоростей (2.6) линии тока совпадают с вихревыми линиями.

Очевидно, что в трех перечисленных выше случаях для определения постоянной в интеграле Бернулли достаточно знать входящие в левую часть интеграла характеристики движения жидкости только в одной произвольной точке жидкости.

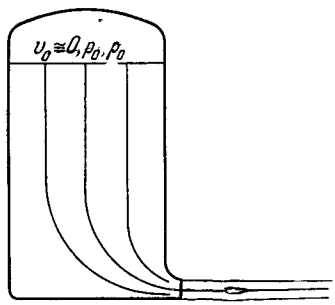


Рис. 13. Постоянные в интеграле Бернулли одинаковы на различных линиях тока.

Отметим еще, что постоянная i^* в интеграле Бернулли одна и та же на таких линиях тока, которые начинаются или проходят через область, где все характеристики движения одинаковы. Так, например, если из большого сосуда, заполненного идеальной жидкостью или газом, через небольшое отверстие вытекает струя, обтекающая некоторое тело (рис. 13), то постоянные i^* интеграла Бернулли на различных линиях тока будут одинаковыми.

В задаче об адиабатическом обтекании тел газом, когда параметры в набегающем потоке в бесконечности одинаковы, *величина* i^* (определенная для семейства линий тока) *постоянна* во всем потоке *даже при наличии в потоке скачков уплотнения.*

Действительно, если согласно (2.3′) для адиабатических движений газа положить

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho},$$

то из условий на неподвижных скачках в случае совершенного газа (см. (6.4) § 6 гл. VII) легко получим, что вдоль линии тока пересекающей поверхность разрыва, величина

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

остается непрерывной, поэтому постоянная i^* с обеих сторон скачка одинакова, тогда как энтропия, функция давления $\mathcal{P}(s, p)$ и скорость частицы терпят разрыв. Таким образом, наличие в потоке совершенного газа скачков уплотнения не меняет значение постоянной i^* интеграла Бернулли вдоль линии тока, но меняет энтропию на линиях тока, пересекающих скачок.

В этом случае при различных значениях энтропии на разных линиях тока в потоке газа нет баротропии.

Найдем полную производную $\frac{di^*}{dl}$ в любом направлении для величины i^*, определенной формулой (2.5) для линий тока при отсутствии баротропии. Определим функцию $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ как функцию давления на некотором *семействе* линий.

Из формулы (2.5) при дифференцировании в любом направлении $\boldsymbol{l}$ следует равенство

$$\frac{di^*}{dl} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(p, \mathcal{L}) - \mathcal{U}\right]_{\mathcal{L}=\text{const}} + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial l}\right)_{p=\text{const}} =$$

$$= -2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})_l + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial l}\right)_{p=\text{const}}. \qquad (2.7)$$

В случае адиабатических движений определим $\mathcal{P}(p, s)$ на семействе линий тока, тогда можно написать

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial l}\right)_{p=\text{const}} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial l}, \qquad (2.8)$$

где s — энтропия, которая может принимать различные значения на разных линиях тока. Этот член равен нулю при дифференцировании вдоль линии тока, но, вообще говоря, отличен от нуля при дифференцировании в направлениях, не касательных к линиям тока.

Если $i^* = \text{const}$ в рассматриваемой области потока, то в этом случае из (2.7) и (2.8) следует

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, s)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial l} = 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})_l \neq 0, \qquad (2.9)$$

т. е. при $\partial s/\partial l \neq 0$ поток обязательно вихревой. Таким образом, если однородный поступательный поток пересекает искривленную ударную волну, то скачки энтропии на различных линиях тока получаются разными, поэтому вообще $\partial s/\partial l \neq 0$ и, следовательно, за искривленной ударной волной обязательно образуется вихревое поле скоростей.

Если движение непрерывно и на всех линиях тока величина i^* и энтропия одинаковы, то с учетом (2.8) из равенства (2.7), примененного к любым направлениям $\boldsymbol{l}$, найдем, что

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \equiv 0. \qquad (2.10)$$

Отсюда вытекает, что в этом случае либо движение потенциально, либо линии тока совпадают с линиями вихря. Если движение плоскопараллельно, то из (2.10) следует, что движение потенциально.

§ 3. Интеграл Бернулли для несжимаемой тяжелой жидкости

Рассмотрим некоторые приложения интеграла Бернулли. Пусть мы имеем однородную несжимаемую жидкость, движущуюся в поле сил тяжести. Направив ось z вертикально вверх, получим $\mathcal{U} = -gz$, и интеграл Бернулли примет вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = i^*. \tag{3.1}$$

Выбрав на линии тока точку с координатой z_1, можно определить постоянную i^* интеграла Бернулли по значениям параметров p_1 и v_1 в этой точке:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1. \tag{3.2}$$

Скорость истечения несжимаемой жидкости из сосуда

Определим скорость истечения несжимаемой жидкости из сосуда (рис. 14). При истечении жидкости из сосуда уровень жидкости понижается и движение является неустановившимся, но если предположить, что сосуд достаточно велик, а отверстие мало, то движение в течение не очень

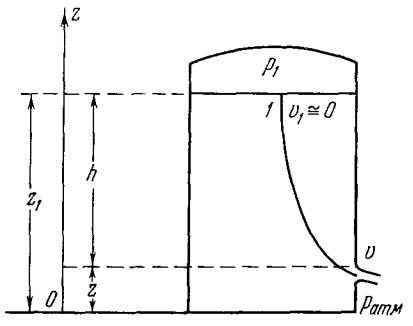


Рис. 14. Истечение жидкости из сосуда.

большого промежутка времени можно приближенно считать установившимся.

Возьмем некоторую линию тока и напишем для точек вдоль нее интеграл Бернулли. Все линии тока начинаются, очевидно, на свободной поверхности жидкости в сосуде, где $p = p_1$ и $v_1 \approx 0$. На свободной поверхности вытекающей струи $p = p_{атм}$. Будем приближенно считать, что на выходе из сосуда давление внутри струи всюду равно $p_{атм}$, а скорость равна v.

Тогда

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho} + gz = \frac{p_1}{\rho} + gz_1,$$

откуда (см. рис. 14)

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_{\text{атм}})}{\rho} + 2gh}\,. \qquad (3.3)$$

Если давление на свободной поверхности жидкости в сосуде равняется атмосферному, то

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (3.4)$$

Как известно, такую же скорость получает материальная точка, падающая с высоты h свободно или при наличии идеальных связей, когда силы реакции связей не совершают работы. Формула (3.4) носит название формулы Торичелли.

Водослив

Определим теперь скорость на свободной поверхности жидкости, перетекающей через вертикальную стенку (рис. 15).

Предположим, что объем водоема очень велик, и можно считать, что уровень жидкости далеко от водослива практически

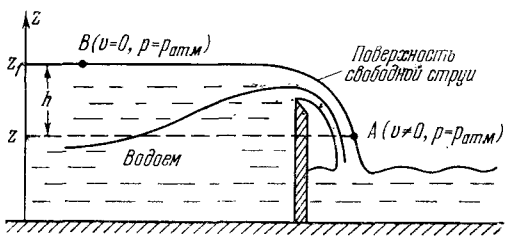


Рис. 15. Водослив.

не меняется и равен z_1. Движение можно считать установившимся. Свободная поверхность жидкости является поверхностью тока, на которой давление равно атмосферному $p_{\text{атм}}$, а скорость в точках водоема, далеких от стенки водослива, равна нулю. Из интеграла Бернулли следует, что

$$\frac{p_{\text{атм}}}{\rho} + gz_1 = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2},$$

где v — скорость в произвольной точке A на свободной поверхности жидкости с координатой z. Следовательно,

$$v = \sqrt{2gh}, \quad \text{где} \quad h = z_1 - z.$$

Трубка Пито — Прандтля Скорость течения жидкости измеряют обычно с помощью трубки Пито — Прандтля, схема которой изображена на рис. 16.

Трубка Пито — Прандтля представляет собой тонкое вытянутое цилиндрическое тело со скругленной передней частью. При такой форме трубка слабо искажает распределение скоростей в потоке. Для измерения скорости трубку Пито — Прандтля помещают в жидкость и располагают ее вдоль потока. На теле трубки Пито — Прандтля имеются отверстия, через которые по каналам, расположенным внутри тела трубки, жидкость может поступать в два колена манометра. Одно из отверстий расположено в передней точке трубки Пито — Прандтля (точка *1*). Другое — на ее цилиндрической части, на достаточном удалении от первого, (точка *2*) так, чтобы искажение поля

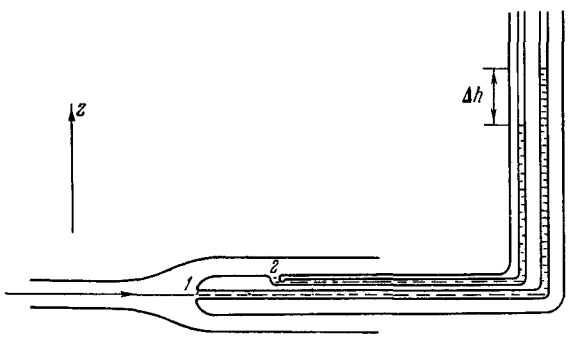


Рис. 16. Схема трубки Пито — Прандтля.

скоростей за счет обтекания скругленного конца трубки Пито — Прандтля можно было не учитывать при рассмотрении течения вблизи второго отверстия. При обтекании трубки потоком жидкости передняя точка *1* будет критической точкой, в ней скорость v будет равна нулю, а давление $p = p_1 = p^*$. Давление в критической точке иногда называют полным давлением или давлением торможения. В точке *2* скорость и давление приближенно равны скорости и давлению в набегающем потоке при отсутствии в нем трубки, $v_2 = v$ и $p_2 = p$.

Применив интеграл Бернулли к точкам *1* и *2*, лежащим, очевидно, на одной линии тока, будем иметь

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2,$$

где z_1 и z_2 — вертикальные координаты точек *1* и *2*. Прене-

брегая членом $g(z_2 - z_1)$ ввиду малой толщины трубки, получим

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}.$$

Разность давлений $p_1 - p_2$ равна, очевидно, удельному весу жидкости, используемой в манометре $\gamma = \rho_1 g$, умноженному на разность Δh высот уровней жидкости в вертикальных коленах манометра, поэтому, если $\rho_1 = \rho$, то

$$v = \sqrt{2g\Delta h}.$$

В рассмотренных выше примерах (истечение жидкости из сосуда, водослив, трубка Пито — Прандтля) интеграл Бернулли использовался для определения скоростей по имеющимся сведениям о давлениях.

Динамическое и гидростатическое давление

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости давления от скорости вдоль линии тока. Для этого возьмем на данной линии тока две точки с вертикальными координатами z и z_1; давление и скорость в этих точках обозначим соответственно через p, p_1 и v, v_1.

Из интеграла Бернулли получим

$$p = p_1 + \rho g(z_1 - z) + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}. \qquad (3.5)$$

Видно, что давления в двух точках на линии тока, как и в гидростатике, отличаются друг от друга на величину $\rho g(z_1 - z)$, вызванную разностью уровней, и, кроме того, на величину $(\rho v_1^2/2) - (\rho v^2/2)$, связанную с разностью скоростей в этих точках. Назовем член $p_1 + \rho g(z_1 - z) = p_{\text{гст}}$ гидростатическим давлением, а член $(\rho v_1^2/2) - (\rho v^2/2)$, зависящий от скорости v, динамическим давлением.

Если поместить тело в поток жидкости или газа, то на тело будут действовать силы, связанные, во-первых, с неравномерностью распределения гидростатического давления (сила Архимеда) и, во-вторых, с неравномерностью распределения динамического давления по поверхности тела. Во многих случаях, например при полете самолетов, динамическая подъемная сила оказывается во много раз больше гидростатической.

Сравним порядки величин разностей гидростатического и динамического давлений в различных точках тела при установившемся обтекании его поступательным потоком жидкости или газа с постоянной не слишком большой скоростью на бесконечности, равной v_∞.

Рассмотрим обтекание несимметричного профиля крыла горизонтальным потоком воздуха со скоростью $v_\infty \approx 100$ *м/сек* $\approx$ $= 360$ *км/час* (рис. 17). Как будет показано ниже (см. § 5), для таких скоростей при вычислении давления в установившемся

движении воздух с большой точностью можно считать несжимаемой жидкостью.

При обтекании несимметричного профиля крыла скорость на его верхней поверхности больше, чем на нижней, а давление, как это следует из интеграла Бернулли, наоборот, больше на нижней поверхности. Предположим, что скорости в точках *1* и *2* на верхней и нижней поверхностях крыла (см. рис. 17) отличаются на величину порядка 10 *м/сек*. В точке *1* скорость, например, равна 105 *м/сек*, а в точке *2* — 95 *м/сек*. Тогда, так как плотность воздуха при обычных условиях

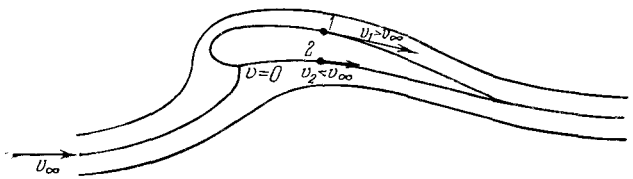


Рис. 17. Обтекание несимметричного крылового профиля.

$\rho \approx 0{,}125$ *кГсек*^{2}/*м*^{4}, разница в давлениях за счет разницы скоростей в точках *1* и *2* будет около 130 *кГ*/*м*^{2}. В то же время разница гидростатических давлений в этих точках при вертикальном размере крыла порядка 1 *м* будет всего около 1,2 *кГ*/*м*^{2}. Мы видим, что разность давлений в точках *1* и *2* на верхней и нижней частях крыла за счет даже сравнительно небольшой разницы в скоростях ($\sim$ 10 *м/сек*) на два порядка больше разности давлений за счет разницы уровней.

Несущественность гидростатических давлений по сравнению с динамическими в аэродинамике самолетов можно еще ощутить с помощью следующих соображений. При установившемся горизонтальном полете самолета полная подъемная сила, обусловленная распределением полных давлений, равна, конечно, весу самолета, а сила Архимеда, обусловленная распределением по поверхности самолета гидростатических давлений, равна только весу воздуха с плотностью, отвечающей высоте полета, в объеме самолета. Ясно, что сила Архимеда меньше тысячных долей полной подъемной силы, равной весу самолета.

При движении больших по объему тел с малыми скоростями, например, воздушных шаров и дирижаблей в воздухе, кораблей и подводных лодок в воде, роль динамических давлений в создании подъемной силы незначительна. При движении в воде, плотность которой в 800 раз больше плотности воздуха, сила Архимеда оказывается достаточно большой, и именно эта сила удерживает корабль или подводную лодку. Заметим, что за счет плотности динамические давления при движении в воде

также возрастают в 800 раз по сравнению с динамическими давлениями в воздухе при тех же скоростях. Подъемная сила динамической природы удерживает суда над водой при движении их на подводных крыльях и при глиссировании (скольжении) по поверхности воды судов, имеющих днище, смоченная часть которых имеет «плоскодонную» форму. Эти случаи соответствуют большим скоростям движения по воде.

Течение несжимаемой жидкости в трубке переменного поперечного сечения

Рассмотрим теперь движение несжимаемой жидкости в тонкой трубке переменного поперечного сечения (рис. 18).

Будем считать, что течение в такой трубке одномерно, т. е. скорости жидкости в различных точках каждого сечения S приблизительно одинаковы и могут отличаться при установившемся движении только при переходе от одного сечения к другому. В силу неразрывности течения через каждое поперечное сечение в единицу времени должен проходить одинаковый объем жидкости, т. е. вдоль трубки верно равенство

$$vS = \text{const}.$$

Видно, что с уменьшением сечения

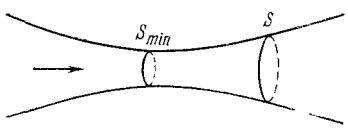


Рис. 18. Трубка переменного поперечного сечения.

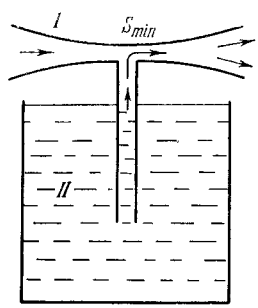


Рис. 19. Схема водоструйного насоса.

скорость растет. В минимальном сечении $S_{\min}$ скорость имеет наибольшее значение $v_{\max}$.

Из интеграла Бернулли (при $z = \text{const}$) имеем

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}. \qquad (3.6)$$

Следовательно, с уменьшением сечения S давление p уменьшается, и в минимальном сечении давление минимально.

Это свойство жидкости используется в водоструйных насосах (рис. 19). При подаче воздуха в трубку переменного поперечного сечения I в области минимального сечения $S_{\min}$ может возникнуть давление меньшее, чем давление в сосуде II. Под действием образовавшегося перепада давлений жидкость из сосуда II поднимается в трубку I и вместе с потоком воздуха капли жидкости будут выбрасываться в окружающую среду.

§ 4. Явление кавитации

Из интеграла Бернулли следует, что при установившемся движении газа или несжимаемой жидкости распределение давлений в потоке существенно зависит от распределения скоростей.

При решении математических задач о движении несжимаемой жидкости в некоторых частях потока давление может получаться отрицательным или даже равняться минус бесконечности, если в потоке имеются точки, в которых величина скорости обращается в бесконечность. Жидкости, встречающиеся в природе и применяемые в технике, содержат взвешенные твердые частицы и растворенные газы. В большинстве случаев такие жидкости неспособны воспринимать растягивающие усилия (отрицательные давления). В особых условиях удается наблюдать течения, при которых возникают растягивающие напряжения в двигающейся жидкости, но обычно давление p в потоке не может стать ниже некоторой положительной величины p_d, близкой при обычных температурах ($\sim 20°$ С) к нулю [1]).

В тех местах потока, где давление падает до этого значения, происходит нарушение сплошности течения и образуется область, заполненная пузырьками, внутри которых находятся пары жидкости или газ, выделившийся из раствора. Это явление называется кавитацией. Начальную стадию кавитации можно трактовать как явление закипания жидкости при понижении давления. При дальнейшем понижении давления мелкие пузырьки объединяются и в потоке возникают большие полости — каверны, заполненные выделившимися из жидкости газами и парами жидкости.

Величину давления p_d можно рассматривать как физическую характеристику, которая не влияет на движение жидкости при $p > p_d$. При $p = p_d$ в жидкости может возникать кавитация, оказывающая существенное влияние на законы движения жидкости. Кавитация может возникнуть, например, вблизи минимального сечения в трубке с пережатием (см. рис. 18), в поршневом насосе (см. рис. 3), когда давление за поднимающимся поршнем стремится к нулю, а также при обтекании различных тел потоком жидкости.

---

[1]) Вместе с тем опыт и физические теории указывают на то, что даже в обычных условиях в короткие промежутки времени в жидкости могут возникать ограниченные по величине отрицательные давления, вызывающие внутренние растяжения, при отсутствии действительных разрывов или кипения. Могут возникать состояния перегретой жидкости. Химически чистая вода может выдерживать растяжения до 200 *атм*. Обычная водопроводная вода может выдерживать очень короткое время растяжения до четырех атмосфер, но в обычных условиях можно принимать p_d равным давлению насыщенных паров.

Число кавитации

Для установившихся движений тяжелой несжимаемой жидкости на основании интеграла Бернулли (3.5)

$$p = p_{\text{гст}} + \frac{\rho v_\infty^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}$$

можно написать

$$\frac{2(p_{\text{гст}} - p)}{\rho v_\infty^2} = \frac{v^2}{v_\infty^2} - 1. \tag{4.1}$$

В ряде случаев отношение v/v_∞ определяется кинематическими условиями задачи, в частности, ниже мы увидим, что так обстоит дело при непрерывном потенциальном обтекании тел неограниченным потоком идеальной несжимаемой жидкости. В этом случае максимальная скорость $v_{\max}$ достигается на границе текущей жидкости, т. е. на поверхности тела (см. § 12), и отношение $v_{\max}/v_\infty$ зависит только от геометрических свойств поверхности тела и его ориентации относительно скорости набегающего потока [1]). Максимальной скорости $v_{\max}$ частиц жидкости в потоке соответствует минимальное давление $p_{\min}$. Величину $2(p_{\text{гст}} - p)/\rho v_\infty^2$ в точках поверхности тела называют коэффициентом давления и обозначают через c_p.

На основании (4.1) для коэффициента давления, соответствующего точке минимального давления, можно написать

$$c_{p_{\min}} = \frac{2(p_{\text{гст}} - p_{\min})}{\rho v_\infty^2} = \frac{v_{\max}^2}{v_\infty^2} - 1. \tag{4.2}$$

---

[1]) Как было показано в гл. VII (т. 1), при обтекании тел поступательным потоком безразмерные характеристики поля скоростей в идеальной несжимаемой жидкости определяются системой безразмерных параметров x/d, y/d, z/d, α, β, где d — характерный размер тела, α, β — углы, задающие ориентацию тела относительно скорости набегающего потока. Безразмерное отношение v/v_∞ не зависит от скорости, плотности и давления в набегающем потоке и получается постоянным при фиксированных безразмерных координатах x/d, y/d, z/d, α, β. Максимальное значение $v_{\max}/v_\infty$ соответствует вообще одной вполне определенной точке на поверхности тела. При учете сжимаемости в случае адиабатических движений совершенного газа получается

$$\frac{v}{v_\infty} = f\left(\alpha, \beta, \frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}, M_\infty = \frac{v_\infty}{a_\infty}\right)$$

и

$$\frac{v_{\max}}{v_\infty} = f_1(\alpha, \beta, M_\infty).$$

Наступление кавитации определяется условием

$$c_{p_{\min}} = \frac{2(p_{\text{гст}} - p_d)}{\rho v_\infty^2} = \varkappa. \tag{4.3}$$

Безразмерное число

$$\varkappa = \frac{2(p_{\text{гст}} - p_d)}{\rho v_\infty^2}$$

называется числом кавитации. Число кавитации определяется заданными условиями обтекания. Значения $\varkappa$ зависят от давления в бесконечности через $p_{\text{гст}}$, которое зависит от глубины погружения тела в жидкость. При фиксированной разности $p_{\text{гст}} - p_d$ число кавитации $\varkappa$ резко падает с увеличением скорости набегающего потока v_∞.

В тот момент, когда $\varkappa$ становится равным $c_{p_{\min}}$, в обтекающем потоке в том месте, где достигается максимальная скорость, возникает кавитация, которая может привести к резкой перестройке всего течения жидкости. Если $\varkappa < c_{p_{\min}}$, то безразмерное число кавитации приобретает существенное значение как определяющий безразмерный параметр. В этом случае число кавитации необходимо вводить наряду с числом Рейнольдса и числом Фруда в качестве основного параметра, характеризующего гидродинамический поток, и основного критерия подобия при моделировании.

Очевидно, что при движении в жидкости любого профиля при увеличении его скорости неизбежно наступление кавитации. Кавитация наступает тем позже, чем ближе к единице отношение $v_{\max}/v_\infty$, т. е. чем меньше профиль возмущает поток.

Как видно из (4.3), кавитация может возникнуть не только при увеличении скорости данного профиля, но и при уменьшении $p_{\text{гст}}$. Очевидно, что с погружением на глубину, когда $p_{\text{гст}}$ растет, наступление кавитации затрудняется.

Моделирование явления кавитации

Для экспериментального исследования кавитации используются различные экспериментальные установки, например гидродинамические, или кавитационные, трубы. Принципиальная схема гидродинамической трубы замкнутого действия приведена на рис. 20. Поток воды в такой трубе создается с помощью пропеллерного или центробежного насоса, расположенного в нижней части трубы и приводимого во вращение электродвигателем. Обтекаемое тело размещается в верхней части трубы.

Нужное значение числа кавитации при испытании тела в такой трубе создается в основном посредством изменения $p_{\text{гст}}$.

Для этого в трубе устраивается специальная шахта со свободной поверхностью воды. Уменьшая давление над свободной поверхностью воды в шахте, уменьшают давление во всей массе жидкости, заполняющей трубу, и таким образом моделируют кавитационный поток при значительно меньших скоростях обтекания модели, чем в натурных условиях.

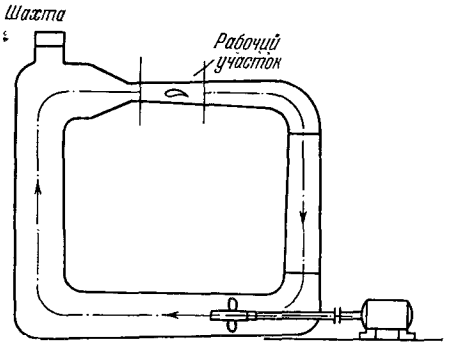


Рис. 20. Принципиальная схема кавитационной трубы.

В настоящее время в связи с возрастающим значением проблемы движения тел в воде с большими скоростями исследование явления кавитации становится весьма актуальным.

Эффекты кавитации на практике

С явлением кавитации, в частности, приходится встречаться при движениях с большой скоростью на подводных крыльях, при работе гребных винтов и турбин на повышенных оборотах, при движении жидкости в насосах и других гидравлических машинах. Кавитация встречается и в гидравлических системах на самолетах, когда при подъеме их на высоту $p_{\text{гст}}$ сильно уменьшается.

Возникновение кавитации на подводных крыльях, лопастях гребных винтов и водяных насосов приводит к резкому ухудшению их гидродинамических характеристик, в частности, подъемная сила подводных крыльев резко падает.

При возникновении кавитации на поверхности тела в области $p_{\min}$ образуются пузырьки, заполненные паром с давлением, близким к нулю, затем они перемещаются вместе с жидкостью и попадают в область бóльших давлений. В области повышенных давлений жидкость со значительной скоростью устремляется внутрь пузырей, происходит их схлопывание, сопровождающееся большими приращениями местных давлений (порядка сотен атмосфер). В результате этого возникает разрушение поверхности обтекаемых тел, которое носит название кавитационной эррозии.

В некоторых случаях это разрушение может быть столь интенсивным, что после нескольких часов работы винтов корабля в режиме кавитации их лопасти оказываются полностью разрушенными.

Кавитация обычно сопровождается рядом нежелательных явлений: появляются вибрации, сильный шум.

Процесс образования и развития пузырьков связан с некоторым характерным линейным размером (размеры центров образования пузырьков, постоянные поверхностного натяжения и т. д.), за счет этого подобие при моделировании может нарушаться. На малой модели время образования и жизни пузырьков от момента их образования до момента схлопывания мало. В явлениях большого масштаба эти времена могут возрастать; за счет этого нарушается подобие, возникает масштабный эффект.

При развитом кавитационном обтекании тела образуются резко выраженные границы между жидкостью и парами газа, заполняющими большую полость вблизи тела — каверну. Вдоль поверхности раздела каверны и жидкости давление с большой степенью точности можно считать постоянным и равным p_d. Поэтому такие поверхности можно рассматривать как поверхности струй, образованные частицами жидкости, сошедшими с обтекаемого тела (см. § 8).

§ 5. Интеграл Бернулли для адиабатических течений совершенного газа

Рассмотрим теперь интеграл Бернулли для совершенного газа. Свойство весомости газа учитывать не будем. Отметим, что есть области приложения интеграла Бернулли (например, метеорология), где газ нельзя считать невесомым.

Будем рассматривать обратимые адиабатические течения совершенного газа. В этом случае

$$p = p_0 e^{(s-s_0)/c_V} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},$$

где $s = \text{const}$ в частице газа, поэтому для функции давления $\mathcal{P}(p, \mathcal{L})$ вдоль линии тока легко получаются следующие выражения [1]):

$$\mathcal{P} = \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma - 1} e^{(s-s_0)/c_V} \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(s-s_0)/c_p} p^{(\gamma-1)/\gamma} =$$

$$= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p}{\rho} = c_p T. \qquad (5.1)$$

Величина $c_p T$ для совершенного газа, как легко видеть, равна *внутреннему теплосодержанию* (энтальпии) [2]) $i = U + p/\rho$. Заметим, что в случае установившихся адиабатических движений произвольных двухпараметрических идеальных сред,

[1]) Постоянные интегрирования в (5.1) опущены.

[2]) См. § 6 гл. V, т. 1.

так как согласно уравнению притока тепла вдоль линии тока

$$dU = -pd\frac{1}{\rho},$$

т. е.

$$di = \frac{1}{\rho}dp,$$

функция давления также представляет собой не что иное, как энтальпию.

С помощью (5.1) интеграл Бернулли вдоль линии тока для адиабатических движений при пренебрежении массовыми силами можно записать в виде

$$\frac{v^2}{2} + i = i^*,$$

или для совершенного газа

$$\frac{v^2}{2} + c_pT = i^*. \tag{5.2}$$

Из интеграла Бернулли (5.2) и (5.1) видно, что *давление, плотность* и *температура с ростом скорости вдоль линии тока падают.*

Параметры торможения

Очевидно, что самая высокая температура на линии тока будет там, где $v = 0$. Обозначив температуру в этой точке через T^*, можно записать постоянную интеграла Бернулли (5.2) в виде $i^* = c_pT^*$. Температура T^* называется температурой торможения, а i^* — полным теплосодержанием. Полное теплосодержание, как и энтропия s, может быть различным вдоль разных линий тока.

Если воспользоваться выражениями (5.1) для функции $\mathcal{P}$ через давление или плотность, то из интеграла Бернулли будет следовать, что в точке, где $v = 0$, не только температура, но и давление, и плотность имеют значения, максимально возможные на линии тока. Обозначив эти значения давления и плотности через p^* и ρ^*, можно представить постоянную интеграла Бернулли еще в одном из следующих видов:

$$i^* = c_pT^* = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}e^{(s-s_0)/c_p}p^{*(\gamma-1)/\gamma} =$$
$$= \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}e^{(s-s_0)/c_V}\rho^{*\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p^*}{\rho^*}. \tag{5.3}$$

Величины p^* и ρ^* называются давлением торможения и плотностью торможения соответственно.

При установившемся адиабатическом обратимом истечении газа из большого сосуда скорость v в далеких от отверстия

точках равна нулю, а давление, плотность и температура соответственно равны давлению торможения, плотности торможения и температуре торможения (рис. 21).

Очевидно, что при заданном значении полного теплосодержания i^* температура торможения полностью определяется через i^*. Давление и плотность торможения зависят на линии тока не только от i^*, но и от значения энтропии $s - s_0$. Если энтропия возрастает за счет пересечения частицами скачков уплотнения, то давление и плотность торможения уменьшаются. Этот эффект, связанный с потерями механической энергии, имеет существенное значение для практических приложений.

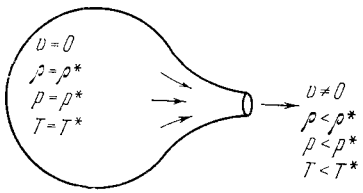


Рис. 21. К истечению газа из сосуда.

При обтекании профиля крыла потоком газа на крыле образуется критическая точка, в которой $v = 0$, а $p = p^*$, $\rho = \rho^*$, $T = T^*$. Если на линии тока в действительности нет точки, где $v = 0$, то параметры торможения можно ввести мысленно, как параметры, которые имела бы частица газа, если бы ее из данного рассматриваемого состояния затормозили обратимым адиабатическим путем до состояния покоя.

Максимальная скорость истечения газа

Постоянную интеграла Бернулли можно определить и по значению его левой части в любой другой характерной точке, имеющейся на линии тока в действительности или вводимой мысленно с помощью некоторого идеального процесса, например в точке, отвечающей состоянию полного разгона в адиабатическом процессе до нулевого давления $p = 0$ и нулевой плотности $\rho = 0$.

Из интеграла Бернулли видно, что в точке $p = 0$ скорость газа имеет максимальное значение. Обозначив ее через v_{max}, видим, что постоянная в интеграле Бернулли будет равна

$$i^* = \frac{v_{max}^2}{2}. \qquad (5.4)$$

Скорость v_{max} можно, очевидно, трактовать как скорость истечения газа из баллона в пустоту, где $p = \rho = T = 0$.

Приравнивая два выражения постоянной интеграла Бернулли, получим

$$v_{max} = \sqrt{2c_p T^*}, \qquad (5.5)$$

т. е. максимальная скорость v_{max} зависит только от температуры торможения T^*. При установившемся движении скорость

газа не может быть больше $v_{\max} = \sqrt{2c_pT^*}$. Этот вывод существенным образом связан с установившимся характером движения газа. При неустановившихся адиабатических движениях в потоке могут получаться скорости, температуры, давления и плотности большие, чем $v_{\max}$, T^*, p^* и ρ^*.

Скорость звука. Критическая скорость

Введем скорость звука [1]) $a = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$. Она зависит от вида функции $p = p(\rho, s)$. Для совершенного газа

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}, \tag{5.6}$$

т. е. скорость звука зависит только от температуры T.

Интеграл Бернулли можно записать теперь в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{\max}^2}{2}. \tag{5.7}$$

Отсюда видно, что при изменении скорости частиц v скорость звука вдоль линии тока меняется. Если скорость вдоль линии тока растет до своего максимального значения $v_{\max}$, то скорость звука убывает до нуля.

Наибольшее возможное значение скорости звука на линии тока получается в точке торможения. Обозначим это значение скорости звука через a^*. Теперь постоянную в интеграле Бернулли можно записать еще в виде

$$i^* = c_pT^* = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{v_{\max}^2}{2}. \tag{5.8}$$

Поэтому

$$a^* = \sqrt{\gamma RT^*} \tag{5.9}$$

и

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}\, a^*. \tag{5.10}$$

Значение скорости частицы газа, равное местной скорости звука, называется критической скоростью и обозначается через $v_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}$. Из интеграла Бернулли при $v = v_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}$ имеем

$$\frac{v_{\text{кр}}^2}{2} + \frac{v_{\text{кр}}^2}{\gamma - 1} = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{v_{\max}^2}{2},$$

откуда

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}\, a^* = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}\, v_{\max}. \tag{5.11}$$

[1]) См. § 6 гл. VII т. 1.

Значение $v_{кр}$ зависит только от температуры торможения T^*.

Сравним значения a^*, v_{max} и $v_{кр}$ при $T^* = 288°\,K = 15°\,C$ и $\gamma = 1{,}4$. Имеем

$$a^* \approx 340\ м/сек,\quad v_{max} \approx 756\ м/сек,\quad v_{кр} \approx 310\ м/сек.$$

Введенные выше параметры a, a^*, v_{max} и $v_{кр}$ играют важную роль в газовой динамике.

Течение газа называется дозвуковым, если скорости движения частиц меньше местной скорости звука ($v < a$), и сверхзвуковым, если $v > a$.

Число Маха. Коэффициент скорости

Отношение скорости движения частиц к местной скорости звука $v/a = M$ называется числом Маха. Очевидно, что для дозвуковых течений $M < 1$, а для сверхзвуковых $M > 1$.

Поскольку скорость v может изменяться от нуля до v_{max}, а скорость звука от a^* до нуля, то число M может изменяться от нуля до бесконечности.

Наряду с числом Маха или вместо числа Маха часто используют отношение скорости движения частиц к критической скорости

$$\lambda = \frac{v}{v_{кр}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,\frac{v}{v_{max}}.$$

Величина λ называется коэффициентом скорости. Знаменатель в выражении для λ в различных точках на линии тока одинаков, так как $v_{кр} = a_{кр}$ зависит только от температуры торможения T^*, которая при адиабатических обратимых движениях постоянна вдоль данной линии тока. Легко видеть, что коэффициент скорости изменяется в следующих пределах: $0 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$.

Формула для скорости истечения газа из сосуда

Изучим зависимость скорости от значений параметров торможения и давления вдоль линии тока. Для этого возьмем интеграл Бернулли в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}\, e^{(s-s_0)/c_p}\, \frac{\gamma}{\gamma-1}\, p^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{v_{max}^2}{2}$$

и разделим первое слагаемое и постоянную на $\frac{v_{max}^2}{2}$, а второе — на равную ей величину

$$\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}\, e^{(s-s_0)/c_p}\, \frac{\gamma}{\gamma-1}\, p^{*(\gamma-1)/\gamma}.$$

Получим

$$\frac{v^2}{v_{\max}^2}+\left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}=1,$$

откуда

$$v^2=v_{\max}^2\left[1-\left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right], \tag{5.12'}$$

или, так как

$$v_{\max}=\sqrt{2c_pT^*},$$

$$v=\sqrt{2c_pT^*}\left[1-\left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}. \tag{5.12}$$

Формула (5.12), называемая формулой Сен-Венана — Венцеля, может быть использована для определения скорости установившегося истечения газа через насадок из сосуда, в котором $p=p^*$, $T=T^*$, в пространство с давлением p. Но для того чтобы действительно иметь на выходе из насадка заданное давление p, необходимо сделать насадок специальным образом. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

Формула (5.12) является обобщением на случай совершенного газа формулы Торичелли $v=\sqrt{2gh}$ для скорости установившегося истечения тяжелой несжимаемой жидкости из сосуда.

Связь p, ρ, T с параметрами торможения и числом M

Аналогичным образом интеграл Бернулли можно разрешить относительно давления, плотности и температуры и получить формулы:

$$\left.\begin{aligned}
p&=p^*\left(1-\frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}=p^*\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)},\\
\rho&=\rho^*\left(1-\frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)}=\rho^*\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)},\\
T&=T^*\left(1-\frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)\qquad\quad=T^*\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right).
\end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Введем в эти формулы число Маха. Для этого запишем интеграл Бернулли в виде

$$\frac{v^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{v_{\max}^2}{2}$$

и разделим обе части этого равенства на $v^2/2$; получим

$$\frac{v^2}{v_{\max}^2}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M^2}}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2.$$

Формулы (5.13) запишутся теперь следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} p &= p^*\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)},\\ \rho &= \rho^*\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1/(\gamma-1)},\\ T &= T^*\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.14)$$

Нагревание тел в потоке газа

С ростом скорости потока температура в потоке падает. Однако если в поток газа поместить неподвижное твердое тело, первоначальная температура которого равна температуре газа, то оно будет нагреваться.

В самом деле, для воздуха ($\gamma = 1{,}4$) температура вблизи критической точки тела будет равна [1]) $T^* = T(1 + 0{,}2\,M^2)$. Если температура потока вдали от тела $T = -23°\,C = 250°\,K$, то при скорости потока порядка скорости звука ($M \approx 1$) $T^* \approx 290°\,K$, т. е. температура газа вблизи критической точки тела будет на 40° выше температуры набегающего потока. При $M \approx 3$ и $T = 250°\,K$ имеем $T^* \approx 700°\,K$, а при $M = 5$ имеем $T^* = 1500°\,K$.

При обтекании тел газом с большими сверхзвуковыми скоростями большие температуры получаются не только в критической точке. Действительное распределение температур по поверхности обтекаемого тела связано с процессами диссоциации и ионизации газа и с отсутствием адиабатичности, что обусловлено свойствами вязкости, излучением и теплообменом между газом и обтекаемым телом. Поверхность тела при движении его в газе может сильно нагреваться, плавиться и испаряться. Головные части баллистических и космических ракет при входе в плотные слои атмосферы сильно оплавляются, головки баллистических ракет или космические аппараты не сгорают полностью только благодаря кратковременности их движения в атмосфере в таких условиях. Проблема борьбы с нежелательными эффектами сильного нагревания тел на больших сверхзвуковых скоростях полета в атмосфере является одной из основных аэродинамических проблем. Она связана с выбором материалов и разработкой форм конструкций летательных аппаратов.

С другой стороны, при засасывании покоящегося воздуха с $T^* \approx 290°\,K$ в области больших скоростей можно получить очень малые температуры T, например, при $M \approx 5$ будет происходить такое охлаждение, что воздух в потоке начнет конденсироваться в жидкость.

[1]) При наличии в газовом потоке скачков уплотнения на линиях тока, проходящих через скачки, величина i^* сохраняет свое значение (см. стр. 24).

Влияние сжимаемости на зависимость давления и плотности от скорости

Покажем теперь, что в случае установившихся движений с достаточно малыми скоростями, $(v^2/v^2_{\max}) \ll 1$, учет сжимаемости жидкости оказывает слабое влияние на зависимость давления и плотности от скорости. Сначала покажем, что при малых скоростях движения давления, определяемые по формулам

$$p = p^* - \rho_0 \frac{v^2}{2} \tag{5.15}$$

(случай несжимаемой жидкости) и

$$p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v^2_{\max}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{5.16}$$

(адиабатические обратимые движения совершенного газа), достаточно близко совпадают. Для этого разложим выражение (5.16) в ряд Тейлора по параметру $v^2/v^2_{\max}$. Пользуясь тем, что $v^2_{\max} = \frac{2a^{*2}}{\gamma-1}$ и $\frac{\gamma p^*}{\rho^*} = a^{*2}$, получим

$$\begin{aligned} p = p^*\left(1 - \frac{v^2}{v^2_{\max}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} &= p^*\left[1 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{v^2}{v^2_{\max}} + \right. \\ &\left. + \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}-1\right)}{2!}\frac{v^4}{v^4_{\max}} + \ldots\right] = \\ = p^* - \frac{\rho^* v^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2(\gamma-1)}\frac{v^2}{v^2_{\max}} + \ldots\right) &= \\ = p^* - \frac{\rho^* v^2}{2}\left(1 - \frac{v^2}{4a^{*2}} + \ldots\right). & \end{aligned}$$

Отсюда видно, что динамические давления в сжимаемой и несжимаемой жидкости с плотностью, равной плотности торможения в сжимаемой жидкости, отличаются друг от друга членами порядка $\rho^* v^4/8a^{*2}$.

Разница не будет превышать одного процента, если $v^2/4a^{*2} \leqslant 0{,}01$, т. е. если $v \leqslant (a^*/5)$. Так, если $a^* \approx 340$ *м/сек*, то при скоростях $v \leqslant 68$ *м/сек* $= 240$ *км/час* разница в динамических давлениях, вычисленных по формуле для несжимаемой жидкости и по формуле для сжимаемого газа, меньше 1%.

Аналогично для плотности будем иметь

$$\frac{\rho}{\rho^*} = 1 - \frac{1}{\gamma-1}\frac{v^2}{v^2_{\max}} + \ldots$$

Легко проверить, что ρ будет отличаться от ρ^* меньше чем на 2% при $v < \frac{a^*}{5} = 68$ *м/сек*. Таким образом, если мы будем

считать газ несжимаемой жидкостью, то при одной и той же скорости $v = a^*/5$ для давлений мы получим ошибку в 1%, а для плотностей — в 2%.

Еще тридцать лет назад в аэродинамике изучались в основном движения только несжимаемой жидкости. В настоящее время, когда скорости движения самолетов достигли и значительно превзошли скорость звука, учет сжимаемости приобретает первостепенное значение.

Вместе с тем нельзя думать, что всегда при $v < 68$ *м/сек* можно пренебрегать сжимаемостью среды. Этот вывод был сделан на основании интеграла Бернулли *только для установившихся* движений газа. Если движение газа неустановившееся, то учет сжимаемости может оказаться существенным уже при весьма малых скоростях движения среды. Например, при распространении звуковых волн скорости движения частиц малы, но все основные эффекты в этом случае связаны со свойством сжимаемости среды.

§ 6. Влияние сжимаемости на форму трубок тока. Элементарная теория сопла Лаваля

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии сжимаемости на форму трубок тока при установившемся движении газа. Предположим, что трубка тока тонкая, и поэтому будем считать характеристики движения в разных точках каждого сечения одинаковыми. Пусть S — площадь произвольного поперечного сечения трубки тока, причем сечение берется перпендикулярно к скорости движения частиц газа.

Форма трубок тока в несжимаемой жидкости

Если жидкость однородная и несжимаемая, то из уравнения неразрывности следует, что массовый и объемный расходы через трубку тока постоянны $v_1S_1 = v_2S_2 = vS = \text{const}$; $\rho_1 = \rho_2$ и

$$S = \frac{\text{const}}{v}, \tag{6.1}$$

т. е. чем больше скорость, тем меньше сечение; график этой зависимости — гипербола (рис. 22).

Форма трубок тока в сжимаемой жидкости

Если жидкость сжимаемая, то вдоль трубки должен сохраняться только массовый расход жидкости $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \rho v S = \text{const}$, откуда

$$S = \frac{\text{const}}{\rho v}. \tag{6.2}$$

Для сжимаемой жидкости плотность зависит от скорости. Для адиабатических обратимых течений совершенного газа имеем

$$\rho = \rho^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Подставив это выражение в (6.2), можно получить зависимость $S = S(v)$ и найти форму трубок тока.

Выясним вопрос о форме трубок тока несколько иным путем для любых, вообще не адиабатических, движений произвольной идеальной сжимаемой жидкости. Для этого вычислим

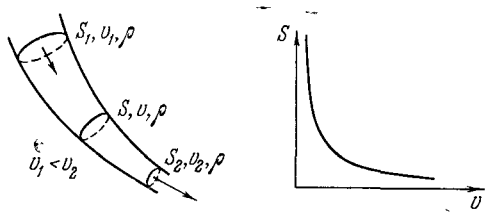


Рис. 22. Изменение поперечного сечения трубки тока в зависимости от скорости в несжимаемой жидкости.

$d(\rho v)$ следующим образом. Спроектировав уравнения движения Эйлера на линию тока, при установившемся движении получим

$$v\,dv = -\frac{dp}{\rho} = -a^2\frac{d\rho}{\rho},$$

где $a^2 = dp/d\rho$ вдоль линии тока. Для адиабатических движений a совпадает со скоростью звука, определяемой как $\sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$. В общем случае величина a отлична от скорости звука, но в последующем для неадиабатических движений играет роль скорости звука.

Таким образом, вдоль линии тока будем иметь

$$v\,d\rho = -\mathrm{M}^2\rho\,dv, \tag{6.3}$$

где $\mathrm{M} = v/a$. Для неадиабатических процессов введенное здесь число M вообще не равно числу Маха, определяемому как отношение $v/\sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$. Из (6.3) непосредственно следует равенство

$$d(\rho v) = \rho\,dv + v\,d\rho = \rho(1 - \mathrm{M}^2)\,dv. \tag{6.4}$$

Видно, что с ростом скорости, когда $dv > 0$, величина ρv растет при дозвуковых скоростях, когда $v < \sqrt{dp/d\rho}$ ($\mathrm{M} < 1$), и

убывает при сверхзвуковых скоростях, когда $v > \sqrt{dp/d\rho}$ ($M > 1$). Очевидно, что в той точке, в которой $v = \sqrt{dp/d\rho}$, т. е. $M = 1$, величина ρv имеет максимум (рис. 23).

Из формулы (6.2) и характера изменения ρv можно сделать ряд важных выводов. Если поток дозвуковой ($M < 1$), то, так же как в несжимаемой жидкости, поперечное сечение трубки тока с ростом скорости v уменьшается, а с уменьшением скорости — увеличивается. Наибольшая скорость, которая может быть достигнута при дозвуковом потоке в сужающейся трубке тока, равна скорости звука.

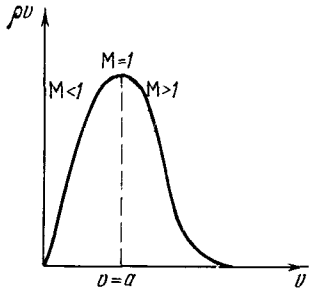


Рис. 23. Зависимость ρv от v при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях течения.

Если поток сверхзвуковой ($M > 1$) и скорость потока вдоль трубки тока растет, то ρv убывает и трубка тока расширяется. Наоборот, если трубка тока расширяется, то скорость сверхзвукового потока в ней растет. Если же скорость сверхзвукового потока вдоль трубки убывает, то ρv растет и поперечное сечение уменьшается, следовательно, сверхзвуковой поток в сужающемся канале замедляется. Мы видим, что имеется принципиальное различие между поведением трубок тока в дозвуковом и сверхзвуковом потоках. Полученные выводы справедливы для произвольных установившихся движений любого идеального газа.

При адиабатических обратимых течениях совершенного газа поперечное сечение трубки тока S связано со скоростью формулой

$$S = \frac{\text{const}}{\rho^* \left(1 - \dfrac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)} v}. \quad (6.5)$$

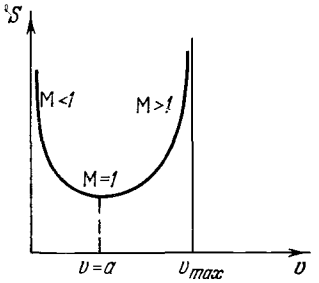


Рис. 24. Зависимость поперечного сечения трубки тока от скорости при адиабатических обратимых течениях совершенного газа.

График $S = S(v)$ приведен на рис. 24. Кривая $S(v)$ имеет две асимптоты: $v = 0$ и $v = v_{\max}$.

Простое сопло, сопло Лаваля

Мы показали, что площадь поперечного сечения трубки тока, в которой скорость непрерывно растет от значений, меньших скорости звука, до значений, больших скорости звука, на дозвуковых режимах течения уменьшается, а на сверхзвуковых — увеличивается, и трубка тока имеет минимальное сечение

$S_{\min}$ при $M = 1$ (рис. 25). Это обстоятельство нужно иметь в виду при проектировании насадков, в которых происходит адиабатический переход от дозвуковых скоростей течения газа к сверхзвуковым. Такой насадок, называемый соплом Лаваля,

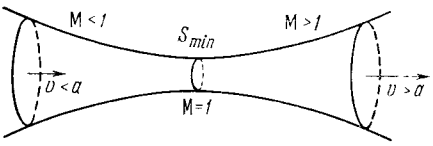


Рис. 25. Трубка тока в сжимаемой жидкости.

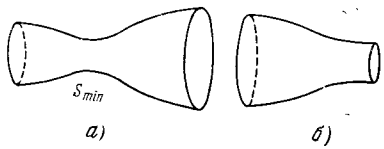


Рис. 26. *а*) Сопло Лаваля и *б*) простое сопло (очко).

должен иметь сужающийся участок, минимальное сечение и расширяющийся участок (рис. 26, *а*).

Насадок, состоящий лишь из сужающегося участка (рис. 26, *б*), называется простым соплом, или очком. Наибольшая скорость, которую можно получить, выпуская адиабатически газ через простое сопло, равна скорости звука, и достигается эта скорость в наиболее узком сечении, т. е. на срезе сопла. Простые сопла и сопла Лаваля широко применяются в технике; сопло Лаваля является необходимым элементом конструкций ракетных двигателей, сверхзвуковых аэродинамических труб и т. п. Рассмотрим подробнее адиабатические течения в простом сопле и в сопле Лаваля.

Течение в простом сопле. Исследование величины расхода через сопло

Пусть имеется большой сосуд (рис. 27), заполненный газом, который может вытекать из него через простое сопло в пространство с давлением p_0. Величина p_0 называется противодавлением. Значения характеристик течения на срезе сопла обозначим через ρ', p', v', а в сосуде далеко от насадка — через p^*, ρ^*, T^*, v^*; примем, что $v^* = 0$. Если $p^* = p_0$, то течения в сопле не будет. Если противодавление p_0 будет несколько меньше p^*, то возникнет течение.

Установим зависимость массового расхода газа $Q = \rho v S$ через сопло от отношения давлений p_0/p^* при постоянных значениях температуры T^* и давления p^* в сосуде, когда отсутствует теплообмен между газом и окружающей средой. Если $p_0/p^* = 1$, то $Q = 0$ (точка A на рис. 28); при p_0/p^*, несколько меньшем единицы, скорость течения в сопле будет дозвуковой и наибольшее значение скорости будет достигаться на срезе сопла. Пусть на рис. 28 этому режиму соответствует точка b. При дальнейшем уменьшении p_0/p^* скорость на срезе сопла, оставаясь

дозвуковой, будет увеличиваться и расход также будет увеличиваться. Наконец, при некотором значении $p_0/p^* = p_{кр}/p^*$

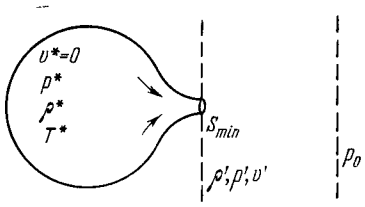


Рис. 27. Обозначения параметров газа, используемые при изучении истечения газа через простое сопло.

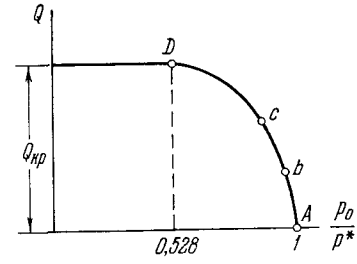


Рис. 28. Зависимость расхода через простое сопло от отношения давлений.

скорость на срезе сопла станет равной местной скорости звука $v' = v_{кр} = a_{кр}$. Подсчитаем критические значения плотности и давления, которые достигаются на срезе сопла при $v' = v_{кр}$; согласно (5.13) и (5.11) будем иметь

$$\rho' = \rho_{кр} = \rho^* \left(1 - \frac{v_{кр}^2}{v_{max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)} = \rho^* \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}, \qquad (6.6)$$

$$p' = p_{кр} = p^* \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \qquad (6.7)$$

Как показывает опыт, до тех пор, пока $p_0 \geqslant p_{кр}$, давление на срезе сопла практически совпадает с противодавлением ($p' \approx p_0$). Поэтому при достижении в минимальном сечении скорости звука можно считать, что

$$\frac{p_0}{p^*} = \frac{p_{кр}}{p^*} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \qquad (6.8)$$

при $\gamma = 1{,}4$

$$\frac{p_{кр}}{p^*} \approx 0{,}528.$$

На рис. 28 этому режиму соответствует точка D. Критический расход, согласно (6.6) и (5.11) или (5.3) и (5.11), будет равен

$$Q_{кр} = \rho_{кр} v_{кр} S_{min} = \rho^* \left(\frac{2\xi}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} a^* S_{min} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \frac{p^*}{\sqrt{RT^*}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} S_{min}. \qquad (6.9)$$

При дальнейшем понижении противодавления p_0 течение внутри сопла перестает меняться. Расход также остается неизмен-

ным и равным критическому. Величина $Q_{кр}$, как видно из (6.9), определяется значениями параметров торможения и размером минимального поперечного сечения сопла. Скорость на срезе сопла остается равной местной скорости звука. Таким образом, через данное простое сопло (S_{min} задано) при отсутствии отвода тепла через стенки сопла и при заданных p^*, T^* нельзя пропустить расход, больший $Q_{кр}$.

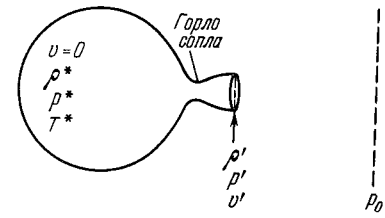


Рис. 29. Обозначения параметров газа, используемые при изучении истечения газа через сопло Лаваля.

Невозможность изменения режима течения в простом сопле путем изменения противодавления p_0 после достижения на срезе сопла скорости звука имеет простое физическое объяснение. Действительно, слабые возмущения, а следовательно, и небольшие изменения противодавления распространяются по частицам среды со скоростью звука. Но сами частицы на срезе сопла имеют скорость, равную скорости звука, и возмущения не могут проникнуть внутрь сопла, они сносятся потоком. Частицы, находящиеся внутри сопла, после достижения критического режима течения «не знают» о том, что происходит вне сопла.

Однако изменение противодавления p_0 будет сказываться на течении газа вне сопла; в свободной струе вне сопла скорость при понижении p_0 может стать сверхзвуковой, но поток в свободной струе не будет однородным (скорость существенно меняется по сечению струи).

Течение в сопле Лаваля

Рассмотрим теперь случай истечения газа из сосуда через сопло Лаваля (рис. 29). Сохраним те же обозначения, что и в предыдущем случае. Используя основные соотношения на линии тока, справедливые для непрерывных адиабатических установившихся течений (5.11), (5.12′) и уравнение состояния

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{p}{p^*}\right)^{1/\gamma},$$

напишем выражение для плотности потока массы ρv как функции отношения p/p^*, где p — давление в произвольной точке на линии тока:

$$\rho v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,\rho^* \left(\frac{p}{p^*}\right)^{1/\gamma} v_{кр}\left[1-\left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}. \qquad (6.10)$$

График этой зависимости ρv от p/p^* приведен на рис. 30. Очевидно, что точке максимума на этом графике соответствует точка на линии тока, в которой $M = 1$ и $p = p_{кр}$.

Правая ветвь ρv соответствует дозвуковым ($M < 1$ и $p < p_{кр}$), а левая — сверхзвуковым ($M > 1$ и $p < p_{кр}$) режимам течения. Каждому сечению сопла Лаваля соответствует определенная

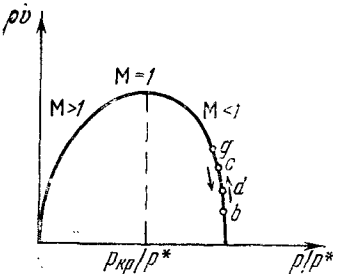


Рис. 30. Зависимость плотности массы ρv от p/p^* вдоль линии тока при адиабатических обратимых течениях.

точка кривой $\rho v = f(p/p^*)$; каждому перемещению по оси сопла соответствует определенное перемещение вдоль этой кривой.

Расчетные режимы истечения газа из сопла Лаваля

Рассмотрим качественно течение в сопле Лаваля при условии, что давление на срезе сопла равняется давлению в окружающей среде. Такие режимы течения в сопле называются расчетными режимами, а сопло в этом случае называется расчетным. Нас будут интересовать распределения давления и скорости по оси сопла (рис. 31) и характер изменения расхода через сопло $Q = \rho v S$ от p_0/p^* (рис. 32). При $p_0 = p^*$ газ через сопло Лаваля не течет и $Q = 0$ (точка A на рис. 32). Если противодавление p_0 несколько уменьшить, то в сопле начнется дозвуковое течение с некоторым расходом Q (например, точка B на рис. 32). Распределения скорости v и давления p по оси сопла в этом случае показаны на рис. 31 (кривые *1—1'*). Наибольшая скорость и наименьшее давление будут достигаться в минимальном сечении сопла Лаваля.

Перемещению вдоль оси сопла по направлению к его выходному срезу $S_{вых}$ будет соответствовать перемещение по кривой ρv (рис. 30) от некоторой точки b к точке c, соответствующей S_{min}, и обратно от точки c к точке d, соответствующей $S_{вых}$. Еще уменьшая противодавление, опять получим дозвуковой режим течения в сопле, но с бóльшим расходом Q (например, точка E на рис. 32); кривые распределения скорости и давления по оси сопла имеют вид *2—2'* на рис. 31. Перемещению по оси сопла будет соответствовать перемещение по кривой ρv (рис. 30), аналогичное предыдущему, но конечная точка g подъема по дозвуковой ветви кривой ρv будет лежать несколько выше точки c.

Наконец, при некотором, еще меньшем значении противодавления, в самом узком сечении сопла $S_{\min}$, скорость газа станет равной скорости звука $v = a = v_{кр}$, а давление $p = p_{кр}$ (кривые *3—3′* или *3—4′* на рис. 31, точка *D* на рис. 32). Перемещению по оси сопла будет соответствовать перемещение по кривой рис. 30, при котором точка g попадет в точку $M = 1$. За минимальным сечением — горлом сопла Лаваля — поперечное сечение увеличивается, а v может либо уменьшаться, и мы тогда должны идти назад по дозвуковой ветви кривой ρv на рис. 30, либо увеличиваться, и тогда мы должны перейти на сверхзвуковую ветвь кривой ρv на рис. 30. Давление вдоль сопла при этом будет соответственно либо расти (кривая *3—3′* на рис. 31) до давления на срезе сопла p_3', либо уменьшаться (кривая *3—4′*) до

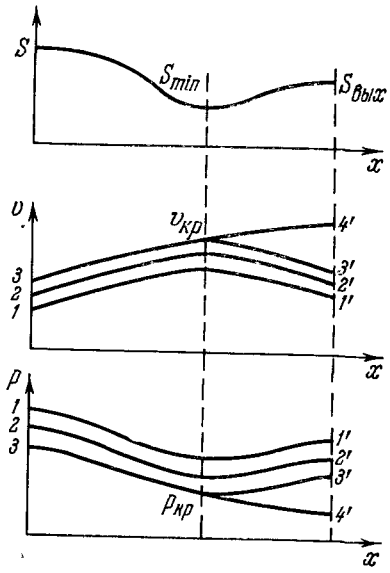


Рис. 31. Распределение скоростей и давлений по оси сопла Лаваля.

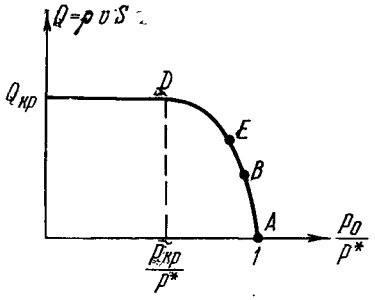


Рис. 32. Зависимость расхода через сопло Лаваля от отношения давлений.

давления на срезе сопла p_4'. Только при этих двух определенных давлениях на срезе сопла ($S_{вых}/S_{\min}$ задано) возможно непрерывное течение газа.

При $p_0 = p_3'$ в сопле осуществляется полностью дозвуковой режим течения, а при $p_0 = p_4'$ — дозвуковой до минимального сечения и сверхзвуковой за минимальным сечением; на срезе сопла при этом возникает определенная сверхзвуковая скорость v_4'. Отметим, что получить в данном сопле сверхзвуковой режим течения с другой скоростью на срезе сопла, не меняя параметров газа в баллоне, а меняя только давление на выходе p_0, невозможно. Для того чтобы получить другую сверхзвуковую скорость истечения, не меняя параметров торможения потока,

необходимо воспользоваться другим соплом с другим отношением выходного сечения к минимальному.

Нерасчетные режимы истечения газа через сопло Лаваля; сопла с регулируемым горлом

Если $p' \neq p_0$, то режим течения газа в сопле и сопло называются нерасчетными. При $p' < p_0$ сопло называется перерасширенным, а при $p' > p_0$ — недорасширенным. В первом случае во внешней среде должно происходить дополнительное торможение потока и свободная струя при выходе из сопла сужается, во втором случае — дополнительное ускорение потока и свободная струя расширяется. Если для заданного p_0/p^* сопло нерасчетное, то истечение газа из сопла теряет характер одномерного движения и сопровождается образованием скачков уплотнения. При $p_0 < p_1'$ скачки уплотнения образуются во внешней газовой струе за срезом сопла, при $p_4' < p_0 < p_3'$ скачки могут образовываться за горлом в сверхзвуковой части потока внутри сопла. Нарушение непрерывности неодномерного потока в сопле, связанное с формой сопла и движением газа на входе в сопло, может происходить при любых $p_0 < p_3'$.

Как только в минимальном сечении сопла скорость потока становится равной скорости звука, расход через сопло Лаваля перестает меняться при дальнейшем уменьшении p_0. Это значение расхода равно $Q_{кр} = \rho_{кр} v_{кр} S_{min}$ (см. (6.9)). Предельный расход, как и в случае простого сопла, зависит только от параметров торможения и величины минимального сечения. Данное сопло при заданных параметрах торможения обладает определенной пропускной способностью, т. е. через него нельзя пропустить расход газа, больший $Q_{кр}$. При проектировании сопел по заданным расходу $Q_{кр}$ и параметрам газа в баллоне подбирают $S_{min}/S_{вых}$.

Заметим, что если параметры торможения газа меняются, а расход пропускаемого через сопло газа должен оставаться неизменным ($Q_{кр} = \text{const}$), то сопло, вообще говоря, должно иметь регулируемое горло, S_{min} должно изменяться. Согласно (6.9) получается, что при $Q_{кр} = \text{const}$ должно быть $\frac{p^* S_{min}}{\sqrt{T^*}} = \text{const}$.

Если температура торможения увеличивается (за счет подогрева газа в баллоне), а $p^* = \text{const}$, то горло сопла необходимо расширять. При $T^* = \text{const}$ за счет потерь может происходить уменьшение p^* (рост энтропии); при уменьшении p^* горло сопла также необходимо расширять. Если сопло не может пропустить расход, задаваемый внешними условиями, то установившееся движение газа становится невозможным. В этом случае в газовом потоке могут возникать резкие колебания.

§ 7. Применение интегральных соотношений к конечным объемам материальной среды при установившемся движении

В главах III и V применительно к произвольным конечным объемам среды сформулированы основные интегральные соотношения механической и термодинамической природы. Для непрерывных движений они эквивалентны соответствующим фундаментальным дифференциальным уравнениям; в гл. VII интегральные соотношения были использованы для получения условий на поверхностях сильных разрывов.

Рассмотрим теперь некоторые важные приложения интегральных динамических соотношений и закона сохранения энергии, записанных в гл. VII в виде уравнений (4.8) — (4.11).

Пусть объем V^* — подвижный конечный объем, расположенный целиком в конечной части пространства и состоящий из индивидуальных частиц данной среды; через V обозначим неподвижный объем, ограниченный некоторой замкнутой контрольной поверхностью Σ. Применим интегральные соотношения к такому объему V^*, который в рассматриваемый момент времени t совпадает с фиксированным в пространстве объемом V и ограничен подвижной поверхностью Σ^*, совпадающей в момент t с неподвижной контрольной поверхностью Σ.

Из общей формулы (8.15) гл. III следует, что индивидуальные производные от объемных интегралов [1]) для *установившихся* движений в любой данный момент времени представляются поверхностными интегралами по контрольной поверхности Σ.

Основные интегральные соотношения для установившихся движений

Таким образом, для любого установившегося движения, сопровождаемого любыми физико-химическими процессами, в любой среде для произвольной замкнутой контрольной поверхности Σ, ограничивающей объем V, можно пользоваться следующими интегральными соотношениями.

Уравнение сохранения массы

$$\int_{\Sigma} \rho v_n \, d\sigma = 0. \tag{7.1}$$

Уравнение импульсов (количества движения)

$$\int_{\Sigma} \rho \boldsymbol{v} v_n \, d\sigma = \int_{V} \boldsymbol{F} \rho \, d\tau + \int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n \, d\sigma. \tag{7.2}$$

[1]) Дальше подразумевается, что в тех случаях, когда вводятся идеализированные потоки с особенностями у подынтегральных функций, рассматриваемые объемные интегралы сходятся и имеют конечные значения

Уравнение моментов (моментов количества движения)

$$\int_{\Sigma} \rho\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{k})\,v_n\,d\sigma=\int_{V}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{h})\,\rho\,d\tau+\int_{\Sigma}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n+\boldsymbol{Q}_n)\,d\sigma. \tag{7.3}$$

Уравнение энергии (первый закон термодинамики)

$$\int_{\Sigma}\rho\left(\frac{v^2}{2}+U\right)v_n\,d\sigma=\int_{V}\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{dq^{*}_{\text{мас}}}{dt}\right)\rho\,d\tau+\int_{\Sigma}(\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}-q^{*}_n)\,d\tau. \tag{7.4}$$

Все обозначения обычные и были подробно разъяснены раньше. Приложения уравнений (7.1) — (7.4) связаны главным образом с тем, что с помощью подходящего выбора контрольной поверхности Σ можно точно или приближенно вычислить или выразить

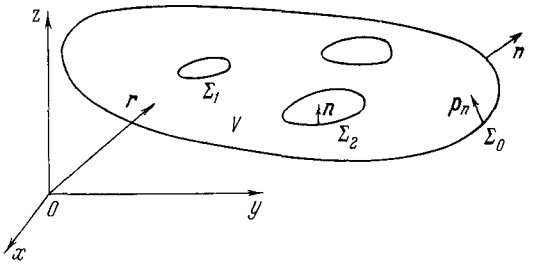


Рис. 33. Схема контрольной поверхности.

поверхностные интегралы через известные или искомые величины, для которых соотношения (7.1) — (7.4) могут служить определяющими уравнениями или формулами. Контрольная замкнутая поверхность Σ может состоять из нескольких замкнутых поверхностей $\Sigma=\Sigma_0+\Sigma_1+\ldots$ (рис. 33).

Внутри объема V и на некоторых поверхностях Σ_i установившееся движение среды и физические процессы могут быть сколь угодно сложными. Например, могут происходить химические реакции, горение, различные фазовые превращения, могут быть внешние механические силовые воздействия и т. п. На всей или на некоторой части выбираемой контрольной поверхности для вычисления поверхностных интегралов можно пользоваться некоторыми асимптотическими выражениями или допущениями. В связи с этим соотношения (7.1) — (7.4) полезны для вычисления суммарных сил и притоков энергии по заданному или по предполагаемому движению, которое требуется знать только в точках контрольной поверхности Σ.

Воздействие струи жидкости и газа на плоскую стенку

Продемонстрируем типичные приложения на примерах. Рассмотрим установившееся движение жидкости или газа в струе, натекающей на плоскую стенку и растекающейся по стенке (рис. 34). Пусть далеко от стенки в набегающей струе с поперечным сечением S давление p_0, плотность ρ_0 и скорость $\boldsymbol{v}_0$ заданы и постоянны по сечению струи, причем вектор скорости $\boldsymbol{v}_0$ составляет угол α с плоской стенкой. Для простоты рассмотрим случай идеальной и невесомой,

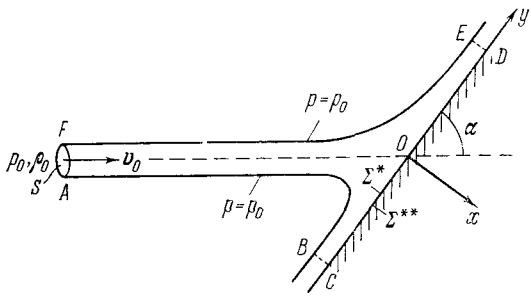


Рис. 34. Удар струи о плоскую стенку.

но вообще сжимаемой жидкости. На свободной границе струи, изображаемой схематически кривыми BA и EF, имеем граничное условие $p = p_0$, где p_0 — *постоянное* давление, равное давлению в окружающей среде и равное по условию давлению в сечении S набегающей струи.

Для любой замкнутой поверхности Ω, ограничивающей объем V_Ω, верно часто используемое равенство

$$\int_\Omega p_0 \boldsymbol{n}\, d\sigma = \pm \int_{V_\Omega} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p_0}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p_0}{\partial z}\boldsymbol{k} \right) d\tau = 0, \qquad (7.5)$$

где $\boldsymbol{n} = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} + n_z\boldsymbol{k}$ — единичный вектор внутренней или внешней нормали к элементам поверхности Ω.

Сила, действующая со стороны струи на стенку, перпендикулярна к стенке, ее величина представляется интегралом

$$\int_{\Sigma^*} p\, d\sigma,$$

где Σ^* — часть поверхности стенки, смоченная растекающейся струей. Направим ось координат x перпендикулярно к стенке. Если принять, что на задней (не смоченной) части Σ^{**} стенки

давление равно p_0, то очевидно, что величина общей силы, обусловленной распределением давлений на $\Sigma^* + \Sigma^{**}$, действующих на обе стороны стенки, в силу равенства (7.5), представится формулой

$$P = \int\limits_{\Sigma^*} p\,d\sigma - \int\limits_{\Sigma^{**}} p_0\,d\sigma = \int\limits_{\Sigma^*} (p - p_0)\,d\sigma. \tag{7.6}$$

Покажем теперь, как определенную таким образом силу можно вычислить с помощью уравнения импульсов (7.2). В качестве контрольной поверхности Σ возьмем поверхность, изображаемую контуром $ABCDE_\infty A$ на рис. 34, включающую в себя площадь сечения струи S, смоченную площадь стенки CD, свободную поверхность струи AB, FE и сечение растекающейся струи (на рис. 34 BC и ED), в котором скорости жидкости становятся параллельными стенке, а давление выравнивается [1]) с давлением на свободной поверхности p_0.

С учетом (7.5) и формулы $\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали, внешней по отношению к жидкости, соотношение (7.2) дает

$$\int\limits_{\Sigma} \rho \boldsymbol{v} \cdot v_n\,d\sigma = -\int\limits_{\Sigma^*} (p - p_0)\,\boldsymbol{n}\,d\sigma, \tag{7.7}$$

так как на контрольной поверхности Σ давление $p \neq p_0$ только на смоченной части стенки CD. Кроме того, $v_n = 0$ везде, кроме сечений струи AF, BC и ED; на FA имеем $v_n = -v_0$, $v_x = v_0 \sin\alpha$, на BC и ED имеем $v_x = 0$, поэтому

$$P = \rho_0 v_0^2 S \sin\alpha = G v_0 \sin\alpha, \tag{7.8}$$

где G — массовый расход струи в единицу времени. Формула (7.8) определяет динамическую силу воздействия струи на препятствие — стенку. Эта сила пропорциональна квадрату скорости в струе и связана с изменением величины и поворотом вектора количества движения жидкости набегающей струи. Формула (7.8) применима для струй идеальных жидкостей или газов при любой форме сечения S.

---

[1]) Здесь и дальше соответствующие предельные значения при точных вычислениях могут достигаться теоретически только в бесконечности, но всегда можно проводить приближенно вычисления в сечениях, находящихся на конечных расстояниях, имея в виду, что допускаемые при этом ошибки в пределе равны нулю.

Воздействие на стенку плоскопараллельной струи несжимаемой жидкости

Рассмотрим теперь детальнее случай, когда жидкость идеальная и несжимаемая, а движение плоскопараллельное. В этом случае, применяя к слою жидкости единичной ширины уравнения расхода, импульсов и моментов относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения, кроме формулы (7.8) для силы, действующей на единицу ширины пластинки, получим еще другие соотношения.

Уравнение расхода дает

$$\rho l v_0 = \rho l_1 v_0 + \rho l_2 v_0 \quad \text{или} \quad l = l_1 + l_2,$$

где l, l_1, l_2 — толщины струи в сечениях AF, BC и ED соответственно.

Уравнение количества движения в проекции на ось y, направленную вдоль пластинки, дает

$$\rho l v_0^2 \cos\alpha = \rho l_2 v_0^2 - \rho l_1 v_0^2 \text{ или } l\cos\alpha = l_2 - l_1.$$

Отсюда следует, что

$$l_1 = \frac{1-\cos\alpha}{2} l,$$

$$l_2 = \frac{1+\cos\alpha}{2} l.$$

Обозначим через h расстояние точки приложения силы $\boldsymbol{P}$ от точки O пересечения пластинки с осью струи (см. рис. 34).

Уравнение моментов (7.3) относительно точки O при $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{h} = \boldsymbol{Q}_n = 0$ дает

$$Ph = \frac{\rho l_2^2}{2} v_0^2 - \frac{\rho l_1^2}{2} v_0^2;$$

отсюда и из формулы (7.8), в которой надо положить $G = \rho l v_0$, следует, что

$$h = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2l\sin\alpha} = \frac{1}{2}\frac{l_2 - l_1}{\sin\alpha} = \frac{l}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче общие теоремы позволяют определить не только величину равнодействующей силы $\boldsymbol{P}$, но и точку ее приложения на стенке.

Глиссирование плоской пластинки

Рассмотрим движение с постоянной горизонтальной скоростью $\boldsymbol{v}_0$ полубесконечной пластинки бесконечного размаха, наклоненной к горизонту под углом α и соприкасающейся своим краем с жидкостью на ее поверхности. Такое скользящее движение днища тела по поверхности жидкости называется глис-

сированием. Край пластинки, след которого на рис. 35 обозначен точкой B, представляет собой горизонтальную прямую, перпендикулярную к плоскости чертежа и, в рассматриваемом случае, вектору скорости глиссирования.

Рассмотрим установившееся относительно пластинки плоскопараллельное движение жидкости, одинаковое во всех плоскостях, параллельных плоскости xy. Относительное движение

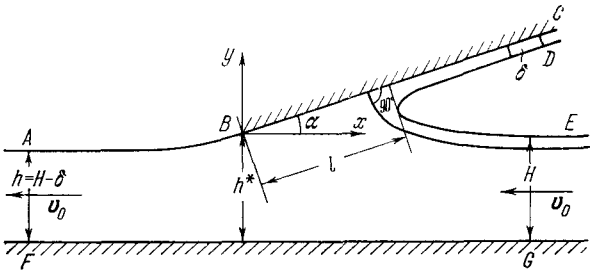


Рис. 35. Глиссирование пластинки по поверхности несжимаемой жидкости.

жидкости является движением относительно системы координат, связанной с пластинкой неизменно. Обозначим через H глубину плоского горизонтального дна перед пластинкой (см. рис. 35). Для простоты пренебрежем силой тяжести и будем считать жидкость идеальной и несжимаемой. По условию, далеко перед и за пластинкой в абсолютном движении жидкость покоится, в относительном движении жидкость в бесконечности имеет постоянную горизонтальную скорость v_0, направленную справа налево (см. рис. 35). В относительном движении в сечении плоскостью xy свободные поверхности AB и DE, обтекаемая твердая граница пластинки BC и дно GF представляют собой линии тока. Примем, что на свободной поверхности давление постоянно и равно p_0 (атмосферное давление). Из интеграла Бернулли для невесомой жидкости следует, что величина относительной скорости на свободной поверхности постоянна.

Впереди пластинки образуется тонкая брызговая струя толщины δ, очевидно, что на поверхности струи и в бесконечности в струе величина скорости жидкости равна v_0. Следовательно, брызги, образующиеся впереди глиссирующей поверхности в относительном движении, имеют скорость v_0, равную скорости глиссирования, а в абсолютном движении (соответствующем неподвижной жидкости в бесконечности впереди пластинки) при малых α скорость брызг приближенно равна $2v_0$.

Возьмем в качестве контрольной поверхности цилиндрическую поверхность единичной ширины с образующими, нормальными к плоскости xy, и плоскими сечениями, параллельными этой плоскости, изображенными в плоскости xy контуром $ABCDEGFA$, в которой сечения AF, EG и CD расположены достаточно далеко, так что в этих сечениях можно принять, что давление равно p_0, а скорость равна v_0.

Из уравнения сохранения масс следует [1])

$$h = H - \delta. \tag{7.9}$$

Из уравнения импульсов в проекции на ось x (силы, действующие на жидкость со стороны дна, исключаются) найдем

$$\rho H v_0^2 - \rho h v_0^2 + \rho \delta v_0^2 \cos\alpha = -P \sin\alpha, \tag{7.10}$$

где P — величина силы, действующей на единицу ширины глиссирующей пластинки

$$P = \int_{BC} (p - p_0)\, d\sigma.$$

Из идеальности жидкости следует, что общая сила, действующая со стороны жидкости на глиссирующую пластинку, перпендикулярна к ее плоскости.

Из (7.9) и (7.10) легко найдем

$$P = \rho \delta v_0^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \tag{7.11}$$

Эта формула показывает, что величина силы воздействия жидкости на глиссирующую пластинку тесно связана с толщиной брызговой струи δ, которую можно рассматривать как функцию α, H и h^* (см. рис. 35).

Полное теоретическое решение соответствующей задачи при заданных H и h^* показывает, что при малых α толщина струи у переднего края имеет порядок α^2, и поэтому при малых α величина силы P имеет порядок α (так как при малых α $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \approx 2/\alpha$).

Из формулы (7.11) следует, что сила сопротивления R — составляющая силы P против скорости движения, т. е. против оси x, и подъемная сила A — составляющая P,

[1]) Очевидно, что при применении интегральных соотношений интегралы по двум плоским сечениям поверхности Σ, параллельным плоскости xy, равны нулю или сокращаются в соответствующих уравнениях.

перпендикулярная к скорости движения, представляются формулами:

$$\left.\begin{aligned} R &= P\sin\alpha = \rho\delta v_0^2(1+\cos\alpha) \\ \text{и} \qquad & \\ A &= P\cos\alpha = \rho\delta v_0^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Формулы (7.12) не зависят явно от H и верны в случае бесконечно глубокой жидкости при $H=\infty$, $h=\infty$ и $h^*=\infty$. Для бесконечно глубокой жидкости величина δ остается произвольной, однако ее можно выразить через угол α и «длину» смоченной поверхности l. Определение величины l ясно из чертежа на рис. 35.

В действительности сила сопротивления глиссированию увеличивается почти вдвое за счет силы вязкого трения, возникающей на обтекаемой поверхности пластинки. Силы вязкого трения при малых α оказывают пренебрежимо малое влияние на подъемную силу A. Выше мы пренебрегли весомостью жидкости. Можно показать, что при больших скоростях глиссирования влияние весомости жидкости вообще очень мало [1]).

Насадок Борда

Рассмотрим струйное истечение несжимаемой жидкости из большого, в пределе из бесконечного, сосуда через насадок Борда (рис. 36). Примем, что сосуд с невесомой жидкостью занимает все левое полупространство, ограниченное стенкой $ABEG$. В стенке имеется отверстие с площадью S, контур отверстия может быть любым. В отверстие вставлен цилиндрический достаточно длинный насадок ED — BC, который называется насадком Борда. Вдали от отверстия в сосуде с жидкостью имеется давление p_1, во внешнем пространстве давление $p_0 < p_1$. Под влиянием перепада давления $p_1 - p_0$ происходит установившееся струйное истечение жидкости из сосуда во внешнее пространство. Образуется струя с поверхностью DN — CM. Обозначим через S_0 площадь поперечного сечения струи, которая вырабатывается асимптотически на далеких расстояниях от отверстия в сосуде. Определим величину коэффициента сжатия струи, равного отношению $\frac{S_0}{S}$.

Обозначим через v_0 скорость на поверхности струи, соответствующую постоянному давлению p_0, и в предельном сечении

---

[1]) См. Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд-во «Наука», 1966 и 1950. В книге дано полное решение плоской гидродинамической задачи о глиссировании с учетом весомости жидкости.

струи с площадью S_0, в котором устанавливается давление p_0. Интеграл Бернулли, примененный к любой линии тока в истекающей струе несжимаемой жидкости, дает

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}, \tag{7.13}$$

де ρ — плотность жидкости; здесь принято, что на больших

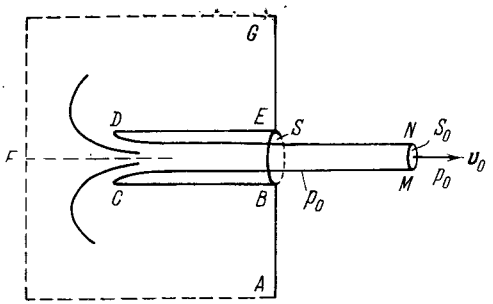


Рис. 36. Схема истечения жидкости через насадок Борда.

расстояниях от отверстия скорость жидкости в сосуде в пределе равна нулю, а давление равно p_1.

Для нахождения величины коэффициента сжатия струи применим уравнение количеств движения (7.2) к контрольной поверхности Σ, составленной из пунктирной поверхности (см. рис. 36), стенок сосуда, поверхности струи и площади S_0; схематически на рис. 36 поверхность Σ изображается контуром $ABCMNDEGFA$. С учетом соотношения (7.5) уравнение (7.2) можно написать в виде

$$\rho \int_{\Sigma} \boldsymbol{v} v_n \, d\sigma = -\int_{\Sigma} (p - p_0)\, \boldsymbol{n} \, d\sigma.$$

Спроектируем теперь это равенство на направление скорости, которое параллельно образующим цилиндрической вставки насадка Борда. На пунктирной части Σ, удаляемой в бесконечность от отверстия, можно принять, что скорость $\boldsymbol{v}$ стремится к нулю и что поэтому поток количества движения по этой части Σ обращается в нуль. В других частях поверхности Σ, за исключением S_0, имеем $v_n = 0$. Поэтому и в силу того, что жидкость идеальная, можно написать

$$\rho v_0^2 S_0 = -\int_{BAFGE} (p - p_0) \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_0)\, d\sigma = (p_1 - p_0)\, S, \tag{7.14}$$

так как по замкнутой поверхности $BAFGEB$ верно равенство

$$\int\limits_{BAFGEB} (p_1 - p_0)\cos(n, v_0)\,d\sigma = 0,$$

и поэтому

$$\int\limits_{BAFGE} (p_1 - p_0)\cos(n, v_0)\,d\sigma = -\int\limits_{S} (p_1 - p_0)\,d\sigma.$$

Из (7.13) и (7.14) сразу находим

$$\frac{S_0}{S} = \frac{1}{2}. \tag{7.15}$$

Таким образом, для несжимаемой жидкости коэффициент поджатия струи, вытекающей через насадок Борда, равен 1/2. В общем случае (для насадков другого вида) этот коэффициент зависит от геометрической формы насадка.

Для газов при непрерывном дозвуковом истечении с образованием струи, на поверхности которой $p = p_0$, формула (7.14) сохраняет свой вид. Для совершенного газа ее можно переписать в виде

$$\frac{S_0}{S} = \frac{p_1 - p_0}{\rho_0 v_0^2} = \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)\frac{1}{\gamma M_0^2},$$

где M_0 — число Маха в сечении S_0.

Теперь вместо уравнения Бернулли в форме (7.13) нужно использовать уравнение Бернулли для газа. На основании первой из формул (5.14), в которой надо положить $p^* = p_1$ и $M = M_0$, получим

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\left(1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1}{\gamma M_0^2}. \tag{7.16}$$

Формула (7.16) в пределе при $M_0 \to 0$ переходит в формулу (7.15).

Дозвуковое истечение будет происходить при

$$\frac{p_0}{p^*} > \frac{p_{кр}}{p^*} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

При больших перепадах давления, когда $(p_0/p^*) < (p_{кр}/p^*)$, в струе получаются сверхзвуковые скорости. При достаточно малых p_0/p^* в струе будут возникать скачки уплотнения; в связи с этим решение задачи усложняется.

§ 8. Взаимодействие жидкостей и газов с обтекаемыми телами при установившемся движении

Определения общей силы реакции R, момента M и «отдаваемой» потоком энергии W

Рассмотрим установившееся движение материальной среды, обтекающей некоторое тело или систему тел (рис. 37).

Возьмем в качестве части контрольной поверхности Σ трубку тока Σ_0, содержащую внутри себя обтекаемые тела, ограниченные поверхностями Σ_1, Σ_2,..., которые включим в контрольную поверхность Σ. Трубка тока Σ_0 может быть выделена в движущемся потоке материальной среды мысленно и, в частности, может представлять собой стенки действительной трубы, внутри которой происходит рассматриваемое движение материальной среды. Выделяемая трубка тока Σ_0 может также совпадать только в отдельных своих частях с некоторыми твердыми границами. Плоские сечения S_1 и S_2 трубки тока Σ_0 тоже включим в контрольную поверхность Σ. Таким образом, контрольная поверхность, к которой мы применим соотношения (7.1) — (7.4), представится суммой $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + S_1 + S_2$.

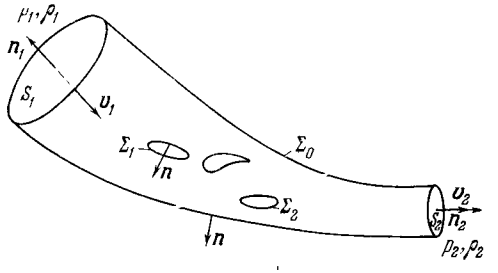


Рис. 37. Схема установившегося движения материальной среды в трубе с обтекаемыми препятствиями. Контрольная поверхность $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \ldots + S_1 + S_2$.

Предположим, что на достаточно далеких расстояниях от внутренних тел, ограниченных поверхностями Σ_1, Σ_2, ..., в плоских сечениях S_1 и S_2 (с конечными площадями, которые будем обозначать также через S_1 и S_2) трубки тока поток жидкости (или газа — сжимаемой жидкости) выравнивается и в этих сечениях получаются постоянные плотности ρ_1 и ρ_2 и постоянные скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, нормальные к S_1 и S_2 соответственно. Кроме этого, предположим, что *в сечениях* S_1 и S_2 *внутренние напряжения сводятся к давлениям* [1]) p_1 и p_2. Внутри трубы и на стенках трубы можно допустить наличие различных механизмов энергообмена с внешними телами и наличие касательных

[1]) Это предположение удобно и во многих случаях вполне приемлемо. Однако можно обобщить последующие формулы на случай, когда на S_1 и S_2 могут быть касательные напряжения.

напряжений, так как в общем случае нам не потребуется предположение об идеальности жидкости.

Далее воспользуемся следующими обозначениями:

$$-\boldsymbol{R} = \int\limits_{\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots} \boldsymbol{p}_n\, d\sigma, \tag{8.1}$$

$$-\boldsymbol{M} = \int\limits_{\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots} (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{Q}_n)\, d\sigma, \tag{8.2}$$

$$-W = \int\limits_V \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{dq^*_{\text{мас}}}{dt}\right)\rho\, d\tau + \int\limits_{\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots} (\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v} - q^*_n)\, d\sigma, \tag{8.3}$$

$$i^* = \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho}. \tag{8.4}$$

Очевидно, что $-\boldsymbol{R}$ представляет собой главный вектор поверхностных сил, действующих на жидкость со стороны внутренних тел на границах Σ_1, Σ_2, ... и со стороны границ трубки тока Σ_0. Вектор $\boldsymbol{R}$ представляет собой соответствующую суммарную силу противодействия, т. е. силу, с которой жидкость действует на внутренние тела и на поверхность Σ_0. Аналогичное толкование применимо к векторам суммарных моментов относительно некоторой неподвижной точки, $-\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}$.

Скалярная величина $-W$ представляет собой не что иное, как общий «приток» (а W — «отток») механической, тепловой и других видов энергии в единицу времени к объему жидкости, выделенному контрольной поверхностью Σ, отличающийся от полного «притока» энергии к индивидуальному объему жидкости V только за счет «притоков» энергии к жидкости в сечениях S_1 и S_2.

Величина, обозначенная через i^*, представляет собой по определению *полное удельное теплосодержание* с учетом кинетической энергии движения (см. формулу (6.7) гл. V, т. 1).

При учете *силы тяжести*, если положить $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_V \boldsymbol{F}\rho\, d\tau = \mathcal{M}\boldsymbol{g}, \quad \int\limits_V (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\,\rho\, d\tau = \mathcal{M}\boldsymbol{r}^*\times\boldsymbol{g} \\ &\text{и} \\ &\int (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\,\rho\, d\tau = \mathcal{M}\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{g}, \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

где $\mathcal{M}$ — масса жидкости внутри объема V, $\boldsymbol{r}^*$ и $\boldsymbol{v}^*$ — соответственно радиус-вектор и скорость центра тяжести этого

объема жидкости (плотность может быть переменной по объему V).

Во многих приложениях можно принимать, что $\boldsymbol{h} = 0$, $dq^*_{\text{мас}}/dt = 0$ и $\boldsymbol{F} = 0$.

Из закона сохранения масс (7.1) получим

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = G, \tag{8.6}$$

где через G обозначен массовый расход в единицу времени через рассматриваемую трубку тока.

Так как на Σ_0 и по условию на обтекаемых поверхностях Σ_1, Σ_2,..., $v_n = 0$, то уравнение импульсов (7.2) приводит к следующей формуле:

$$\boldsymbol{R} = (p_1 + \rho_1 v_1^2)\, S_1 \frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1} - (p_2 + \rho_2 v_2^2)\, S_2 \frac{\boldsymbol{v}_2}{v_2}. \tag{8.7}$$

Здесь вместо единичных векторов внешних нормалей $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ на сечениях S_1 и S_2 введены единичные векторы $\boldsymbol{v}_1/v_1 = -\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{v}_2/v_2 = \boldsymbol{n}_2$. Для учета силы тяжести жидкости на основании (8.1) и (8.5) справа в (8.7) необходимо только добавить силу веса жидкости, находящейся между сечениями S_1 и S_2.

Введем теперь радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1^*$ и $\boldsymbol{r}_2^*$ центров тяжести площадей сечений S_1 и S_2 и положим $\boldsymbol{k} = 0$ на S_1 и S_2. Уравнение моментов (7.3) приводит к следующей формуле:

$$\boldsymbol{M} = (p_1 + \rho_1 v_1^2)\, S_1 \frac{\boldsymbol{r}_1^* \times \boldsymbol{v}_1}{v_1} - (p_2 + \rho_2 v_2^2)\, S_2 \frac{\boldsymbol{r}_2^* \times \boldsymbol{v}_2}{v_2}. \tag{8.8}$$

Для учета весомости жидкости в (8.8) нужно добавить момент силы веса, приложенный в центре тяжести жидкости между сечениями S_1 и S_2 (см. (8.5)). Если на всю поверхность Σ_0 (поверхность трубы и струи в целом) извне действует постоянное давление p_0, согласно сказанному выше, в формулах (8.7) и (8.8) можно заменить p_1 и p_2 через $p_1 - p_0$ и $p_2 - p_0$. В дальнейшем можно считать, что p_1 и p_2 равны полным давлениям или добавкам к постоянному давлению p_0.

Наконец, уравнение энергии при естественном допущении, что $q_n^* = 0$ на S_1 и S_2 (наличие $q_n^* \neq 0$ на S_1 и S_2 легко учесть, однако для многих приложений в этом нет надобности), приводит к равенству простого вида:

$$W = (i_1^* - i_2^*)\, G. \tag{8.9}$$

В этой формуле легко учесть также работу сил тяжести (изменение потенциальной энергии жидкости между сечениями S_1 и S_2).

Отсюда при $W = 0$ получим, что $i_1^* = i_2^*$. Для совершенного газа в раскрытом виде это равенство совпадает с уравнением Бернулли (5.2). При $W \neq 0$ мы имеем *обобщение уравнения Бернулли* на более сложные среды с учетом изменения константы энергии вдоль линий тока за счет «оттока» энергии W от жидкости к внешним телам.

Соотношения (8.6) — (8.9) применимы в общем случае как для непрерывных движений, так и движений с наличием различных разрывов внутри рассматриваемого объема. Они играют фундаментальную роль в инженерной гидравлике и инженерной газовой динамике. Эти основные соотношения, уравнения и определяющие формулы положены в основу одномерной теории всевозможных расчетов газовых и гидравлических машин. Легко видеть, что для установившихся движений соотношения (8.6) — (8.9) для конечных масс среды между сечениями S_1 и S_2 выражают собой связи той же природы, что и соотношения на сильных скачках. При сближении и совпадении сечений S_1 и S_2 равенства (8.6) — (8.9) переходят в условия на *прямых* скачках, последнее связано с принятым выше условием, что скорости в сечениях S_1 и S_2 перпендикулярны к ним.

Соотношения (8.6) — (8.9) выведены для трубки тока с конечными сечениями S_1 и S_2 в предположении, что на этих сечениях скорость, плотность и давление выравниваются. Если для точных решений соответствующих гидродинамических задач эти предположения выполняются, то равенства (8.6) — (8.9) являются точными. Если в точных решениях или по данным опытов эти предположения выполняются приближенно, то полученные соотношения имеют приближенный характер, однако во многих случаях эти приближения практически вполне удовлетворительны. Вместе с этим нужно иметь в виду, что с точки зрения приложений к действительности вообще все теоретические расчеты всегда имеют только приближенный характер. Эти соотношения приложимы к бесконечно тонким трубкам тока без всяких предположений о выравнивании скорости, плотности и давления. В общем случае, когда характеристики движения в сечениях S_1 и S_2 существенно переменны, можно написать аналогичные формулы, в которых справа необходимо проводить интегрирование — суммирование правых частей (8.6) — (8.9), написанных для бесконечно малых площадок ΔS_1 и ΔS_2, по S_1 и S_2.

Уравнение энергии вдоль линии тока

Для каждой трубки тока при установившихся адиабатических движениях *идеальной* жидкости, при $dq^* = 0$ и при отсутствии притока механической энергии за счет работы массовых сил из (8.3) получается, что $W = 0$, если граничащие с жидкостью тела неподвижны, так как поверхностные силы

в идеальной жидкости (давление) на *неподвижных* поверхностях Σ_0 и Σ_1, Σ_2, ... работы не совершают. Поэтому на основании (8.9) вдоль линии тока верно уравнение энергии в виде равенства

$$\frac{v_1^2}{2} + U_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho}. \qquad (8.10)$$

В рассматриваемом общем случае удельная внутренняя энергия U (p, ρ, χ_1, χ_2, ...) может зависеть от различных механических и физико-химических вообще переменных параметров χ_1, χ_2,..., характеризующих происходящие в частицах жидкости внутренние процессы. Эти параметры могут меняться вдоль линии тока. Равенство (8.9) и соответственно (8.10) сохранятся и в том случае, когда внутри потока в объеме V имеются сильные разрывы — скачки.

В вязкой жидкости поверхностные силы не совершают работы на неподвижных твердых границах (Σ_1, Σ_2,..., и, возможно, всей или части поверхности Σ_0) при условии прилипания жидкости к обтекаемым стенкам. Однако на свободной границе (всей или части поверхности Σ_0) поверхностные вязкие силы внутренних напряжений совершают работу и поэтому $W \neq 0$. Кроме этого, в вязкой и, например, теплопроводной жидкости значение W зависит еще от эффектов теплообмена в потоке. В связи с этим в вязкой жидкости вдоль элементарной трубки тока справа в (8.10) будет присутствовать в общем случае член вида W/G, причем $W \to 0$, если расход через данную трубку тока стремится к нулю.

Для теплоизолированной неподвижной твердой трубы конечного сечения (при равенстве нулю точно или приближенно работы сил вязкости в сечениях S_1 и S_2) можно принять, что $W = 0$.

В связи с практикой применения уравнения (8.9) сделаем еще следующее примечание.

Возможные трактовки внешнего притока энергии

Для газов часто можно пользоваться формулой $U = c_V T + U_0$. При химических реакциях и, в частности, при горении в уравнении (8.9) нужно рассматривать разность

$$U_2 - U_1 = c_{V2} T_2 - c_{V1} T_1 + U_{02} - U_{01}$$

и учитывать изменение аддитивной постоянной $U_{02} - U_{01}$. Соответствующее приращение энергии за счет изменения параметров χ_1, χ_2, ... истолковывается как изменение внутренней химической энергии, это — «теплота химической реакции»; аналогичным образом можно вводить энергию плавления и энергию испарения, энергию ионизации и т. п.

В практике инженерных расчетов нередко для внутренней энергии газа пользуются формулой

$$U = c_V T,$$

а изменение энергии за счет химических реакций и других аналогичных процессов вводят как внешне заданные притоки или оттоки энергии, которые проявляются в уравнении (8.9) через величину W/G. При таком, на практике удобном, способе действие внутренних физико-химических процессов, по существу, заменяется задаваемыми внешними притоками энергии.

Сила реакции жидкости, текущей в трубе

Рассмотрим теперь несколько важных примеров.

Пусть жидкость (или газ) движется по неподвижной, в общем случае искривленной, трубе Σ_0 (рис. 38). Согласно формуле (8.7) сила реакции жидкости на стенки трубы (сосуда) представляется вектором, являющимся диагональю параллелограмма, построенного на векторах

$$-(p_2 + \rho_2 v_2^2) S_2 \frac{\boldsymbol{v}_2}{v_2}$$

и

$$(p_1 + \rho_1 v_1^2) S_1 \frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1}.$$

Если расход жидкости

$$G = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

отличен от нуля, $p_1 \geqslant 0$ и $p_2 \geqslant 0$, площадки S_1 и S_2 не параллельны, то сила $\boldsymbol{R}$ заведомо отлична от нуля. Очевидно, что всякий поворот потока связан с наличием силы реакции, действующей на стенки трубы.

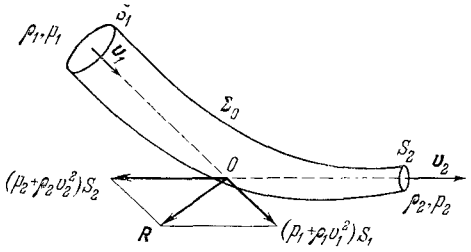


Рис. 38. Сила реакции жидкости на трубу.

Легко видеть из формулы (8.8), что если векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, приложенные в некоторых определенных точках сечений S_1 и S_2, пересекаются в точке O, то суммарный момент сил реакции жидкости на стенки трубы относительно точки O равен нулю, поэтому равнодействующую силу $\boldsymbol{R}$ можно рассматривать как силу, приложенную в точке O, связанной с трубой.

Об условиях в бесконечности при движении тела в цилиндрической трубе

Для определения силы сопротивления, испытываемой телами, движущимися в безграничном потоке, рассмотрим сначала тело или систему тел, движущихся поступательно с постоянной скоростью v в бесконечной цилиндрической трубе (рис. 39) параллельно образующим трубы. Возмущенное движение жидкости зависит от формы тел и трубы, расположения тел относительно трубы, скорости тел, свойств жидкости (вязкость, сжимаемость и т. п.) и первоначального невозмущенного состояния жидкости. Для решения этой гидроаэродинамической задачи необходимо, в соответствии с опытом, сделать некоторые допущения, которые

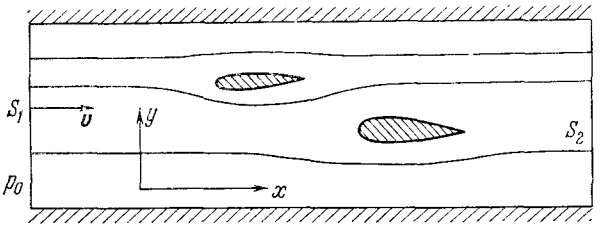


Рис. 39. Схема обтекания тел в цилиндрической трубе.

должны быть выставлены в качестве добавочных условий, определяющих решение соответствующей задачи.

Для тел, малых по сравнению с поперечными размерами трубы, во многих случаях можно считать практически и теоретически приемлемым следующее основное допущение. Перед телом в бесконечности в пределе возмущения, вызываемые в жидкости движущимися телами, затухают, и поэтому можно выставить условие о том, что перед движущимися телами впереди в бесконечности жидкость покоится [1]).

Предположим далее, что абсолютное и относительное (в системе координат, связанной с телами) движения жидкости установившиеся, теоретически это означает, что рассматриваемое движение жидкости является предельным для тел, движущихся в жидкости с данной скоростью бесконечно долго, т. е.

[1]) В некоторых случаях для тел, помещенных в трубу, это «естественное» допущение невозможно! В частности, если тело неподвижно, но просасывает с помощью винта жидкость, то впереди образуется струя, поэтому нельзя считать, что для такого неподвижного тела жидкость впереди покоится, т. е. при удалении вперед в бесконечность скорость стремится к нулю во всех точках сечения трубы. В безграничном потоке указанный эффект пропадает. Однако для бесконечной системы тел (например, решетки) этот эффект может быть и в безграничной жидкости.

что тела побывали в бесконечности сзади, откуда они пришли в данное место трубы.

В связи с предположением об установившемся характере движения сильно осложняется вопрос об условиях в бесконечности сзади за движущимися телами. На первый взгляд можно предположить, что возмущения, вызываемые телами, затухают при удалении в бесконечность назад так же, как и при удалении в бесконечность вперед. Более глубокое изучение вопроса о схеме потока жидкости показывает, что в рамках употребляемых моделей жидкости, например, для идеальной жидкости, можно находить различные возмущенные движения в зависимости от условий за телами в бесконечности. В ряде важных случаев опыту отвечают именно такие схемы потоков, в которых возмущения в жидкости не затухают в бесконечности за телами.

Для более глубокого понимания проблемы схематизирования и постановки задач о возмущенных движениях жидкости, вызываемых движущимися внутри жидкости телами, рассмотрим сначала вопрос о сопротивлении, испытываемом телами, в предположении, что жидкость идеальная и что далеко сзади за телами возмущения затухают.

Обращение движения, парадокс Дюбуа

Дальнейшую теорию удобно развивать, обратив движение, т. е. сообщив системе жидкость — тела поступательную скорость, равную скорости тел, но направленную в противоположную сторону. Иначе говоря, рассматривать задачу о движении жидкости относительно тел. После обращения получим, что тела неподвижны, а жидкость в силу условия на бесконечности впереди тел набегает на тела из бесконечности со скоростью, равной, но противоположной скорости тел при абсолютном движении.

Очевидно, что после обращения движения или, что то же самое, просто при изучении движения жидкости относительно неподвижных тел все силы и внутренние напряжения останутся неизмененными. Согласно принципу Галилея — Ньютона такое обращение с сохранением всех силовых взаимодействий можно делать всегда для любой модели жидкости. В случае вязкой жидкости из-за условия прилипания необходимо после обращения движения двигать трубу вдоль ее образующих, если при абсолютном движении труба была неподвижной. В идеальной жидкости такое движение трубы никакого влияния на движение жидкости не оказывает, поэтому при обращении движения трубу можно сохранять неподвижной. В вязкой жидкости влияние граничных условий прилипания на стенках трубы конечной длины существенно проявляется в обычных случаях только вблизи стенок трубы, и поэтому для обтекания

небольших тел, расположенных вблизи оси трубы, эти пристеночные эффекты не имеют существенного практического значения.

Таким образом, задачу о движении с постоянной одинаковой скоростью тел в жидкости можно заменить эквивалентной задачей об обтекании неподвижных тел набегающим потоком жидкости со скоростью, противоположной скорости движения тел.

В опытах отсутствие полной эквивалентности при наличии других тел, не участвующих в обращении движения, например, стенок аэродинамической трубы или стенок канала, лотка, приводит к парадоксу Дюбуа, состоящему в том, что сопротивления тел, движущихся в неподвижной жидкости, и обтекаемых неподвижных тел различны. Для устранения парадокса Дюбуа при моделировании необходимо устранить (снизить) влияние посторонних тел, что связано, вообще говоря, с увеличением размеров рабочих частей испытательных устройств.

Парадокс Даламбера

Так как движение среды установившееся, а обтекаемые тела твердые и непроницаемые, то линии тока, совпадающие с траекториями и приходящие из бесконечности, должны уходить в бесконечность за телами. Для простоты рассмотрим случай, когда внешних массовых сил нет, а жидкость является идеальной несжимаемой жидкостью или идеальным совершенным газом, движущимся адиабатически. В этих случаях на каждой линии тока имеет место интеграл Бернулли. На всех линиях тока, приходящих из бесконечности, в бесконечности имеем плотность ρ_1, давление p_1 и скорость v_1, одинаковые на всех линиях тока, поэтому интеграл Бернулли и условие адиабатичности можно представить в виде двух (см. (5.13)) соотношений:

$$p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}; \qquad \rho = \frac{p^*}{RT^*}\left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)}, \tag{8.11}$$

где

$$\frac{1}{2} v_{\max}^2 = c_p T^* = i^*; \qquad p^{*(\gamma-1)/\gamma} = \frac{\rho_1}{p_1^{1/\gamma}} \frac{\gamma - 1}{\gamma} i^* e^{-(s-s_1)/c_p}, \tag{8.12}$$

а величины i^*, T^* и $v_{\max}$ постоянны и одинаковы на всех линиях тока, причем это верно как для непрерывного движения, так и для движения со скачками уплотнения. Эти величины могут меняться только за счет подведения к частицам внешней энергии W, отличной от работы сил давления. Величина p^* может изменяться только за счет роста энтропии, который будет происходить в рассматриваемом адиабатическом движении при пересечении линиями тока скачков уплотнения.

Рассмотрим характеристики движения в сечениях S_1 и S_2 при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$. На всех линиях тока, простирающихся от S_1 до S_2, верно равенство $v_{max1} = v_{max2}$ ($T_1^* = T_2^*$); кроме этого, для линий тока, на которых движение непрерывно, имеем $p_1^* = p_2^*$, на линиях тока, которые пересекают скачки уплотнения, будем иметь $p_2^* < p_1^*$.

Рассмотрим теперь движение жидкости или газа в сечении S_2. Основное допущение, которое хорошо соответствует опытам, состоит в том, что давление далеко от тела выравнивается во всех точках S_2, и поэтому p_2 — одно и то же во всех точках сечения S_2. Отсюда и из (8.11) следует, что, если движение жидкости везде непрерывно, т. е. в сечении S_2 $p_2^* = p_1^* = \text{const}$, то на S_2 будем иметь $v_2 = \text{const}$ и $\rho_2 = \text{const}$; причем уравнение расхода дает соотношение

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \tag{8.13}$$

Если поток далеко впереди и сзади тел занимает всю площадь сечения цилиндра, т. е. $S_1 = S_2 = S$, то из (8.13) найдем

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2.$$

Отсюда, так как вдоль каждой линии тока ρv согласно (8.11) легко выразить через p^*, T^*, v_{max} и p/p^*, следует, что $p_2/p_2^* = p_1/p_1^*$, или, так как $p_1^* = p_2^*$, что $p_1 = p_2$, $\rho_1 = \rho_2$ и $v_1 = v_2$. Таким образом, из предположения о непрерывном обтекании тела в цилиндрической трубе при отсутствии полостей, распространяющихся за телами в бесконечность, т. е. при $S_1 = S_2$, как следствие условия о выравнивании давлений получилось, что все характеристики потока в переднем и заднем сечениях S_1 и S_2 далеко от тел одинаковы. Этот вывод установлен для непрерывных адиабатических движений газа: очевидно, что для несжимаемой жидкости это положение также верно.

Отсюда на основании формулы (8.7) следует, что

$$\boldsymbol{R} = 0. \tag{8.14}$$

При отсутствии внешних массовых сил сила $\boldsymbol{R}$ представляет собой суммарную силу реакции жидкости на внутренние тела $\boldsymbol{R}_1$ и на стенки цилиндрической трубы $\boldsymbol{R}_2$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2.$$

Формула (8.14) верна для трубы любых очертаний, когда $S_1 = S_2$ в бесконечности. Ввиду того, что труба цилиндрическая, из предположения об идеальности жидкости следует, что сила $\boldsymbol{R}_2$, действующая на стенки трубы, нормальна к образующим трубы и, следовательно, перпендикулярна к оси трубы и ско-

рости потока жидкости в бесконечности. Поэтому на основании (8.14) верен следующий фундаментальный вывод:

$$\boldsymbol{R}_1 \perp \boldsymbol{v}_\infty. \tag{8.15}$$

Таким образом, установлено, что в рассматриваемой постановке задачи общая сила воздействия потока газа или жидкости на помещенные в него неподвижные тела при установившемся обтекании может быть отличной от нуля, но эта сила перпендикулярна к скорости набегающего потока $\boldsymbol{v}_\infty = \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$.

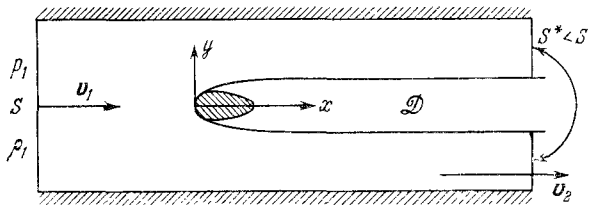


Рис. 40. Схема обтекания тела со срывом струй.

Иначе говоря, подъемная сила $\boldsymbol{R}_1$ может отличаться от нуля, но общее сопротивление обтекаемых тел равно нулю.

Этот вывод противоречит данным опытов, в которых всегда наблюдается сила сопротивления, поэтому он носит название «парадокса» Даламбера. Парадокс Даламбера получается как следствие сформулированных выше допущений о том, что жидкость идеальна, что обтекание непрерывно и поток в бесконечности впереди тела поступательный с постоянной скоростью, а сзади тела получается выравнивание давлений (отсутствуют полости, тянущиеся назад за обтекаемыми телами в бесконечность, например такие, как на рис. 40).

Несмотря на то, что вывод об отсутствии сопротивления для тел, движущихся в жидкости с постоянной скоростью, на первый взгляд резко расходится с опытом, можно усмотреть его соответствие опыту, если обратить внимание на то что для данной скорости набегающего потока и фиксированного объема тела в опытах можно добиваться путем придания телу «обтекаемой формы» (рис. 41) очень значительного снижения силы сопротивления. Обтекаемость внешней формы тела необходима для обеспечения непрерывности обтекающего потока, для обеспечения отсутствия срывов линий тока с поверхности тела, аналогичных срывам, наблюдающимся при обтекании, представленном на рис. 40. За счет обтекаемости формы тела можно снижать сопротивление тела в сотни раз по сравнению с сопротивлением такого плохо обтекаемого тела, как шар. Однако полного исчезновения сопротивления для тел,

ограниченных неподвижными и непроницаемыми поверхностями, обтекаемыми воздухом или водой, нельзя получить из-за наличия на поверхности тел касательных составляющих напряжений — сил трения, обусловленных свойствами вязкости. Полное устранение сопротивления для хорошо обтекаемых тел, вероятно, можно получить в сверхтекучих, лишенных вязкости жидкостях.

Выше парадокс Даламбера (8.15) установлен для обтекания тела идеальной жидкостью в цилиндрической трубе независимо

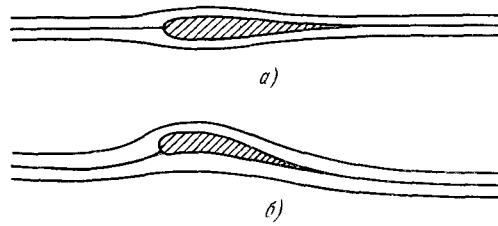


Рис. 41. Тела обтекаемой формы: *а*) симметричное обтекание тела с очень малым сопротивлением, *б*) несимметричное обтекание с подъемной силой.

от формы сечения S трубы. Этот основной вывод не зависит также от размеров площади сечения трубы, в частности, для круглой трубы от радиуса трубы. Устремляя радиус трубы в бесконечность, получим, что выводы, заключенные в формулах (8.14) и (8.15), сохраняют свою силу в пределе, поэтому парадокс Даламбера имеет место и в случае обтекания системы тел непрерывным установившимся безграничным потоком жидкости или газа, в котором происходит выравнивание характеристик потока в бесконечности, вдали от тела, и который можно рассматривать как предел обтекания той же системы тел в цилиндрической трубе.

Парадокс Даламбера установлен для любой системы тел. При наличии в потоке нескольких тел нельзя утверждать, что составляющая силы воздействия потока, параллельная скорости, для каждого тела в отдельности равна нулю. Подчеркнем, что было доказано равенство нулю только общей суммарной составляющей силы, параллельной одной и той же поступательной скорости системы тел.

Отметим также, что при доказательстве парадокса Даламбера, вообще говоря, не предполагается, что движение жидкости потенциально и что в жидкости нет конечных полостей, заполненных газом, паром и жидкостью (см. схемы на рис. 42).

Очевидно, что для установившихся обтеканий идеальной жидкостью, аналогичных указанным на рис. 42, общая сила

сопротивления изолированного тела (или системы тел) равна нулю, так как из общего уравнения (7.2) очевидно, что равна нулю общая сила, действующая со стороны тела и жидкости на области в потоке, ограниченные системой поверхностей, на которых $v_n = 0$. Например, равна нулю общая сила, действующая на движущуюся или покоящуюся жидкость в объеме [1]) внутри замкнутой поверхности, изображенной контуром $ABCDEA$ на рис. 42.

Рассмотрим еще отдельно случай обтекания тела для простоты несжимаемой жидкостью с учетом силы веса, когда цилиндрическая труба и соответствующий поток вертикальны. Для определенности примем, что имеется только одно

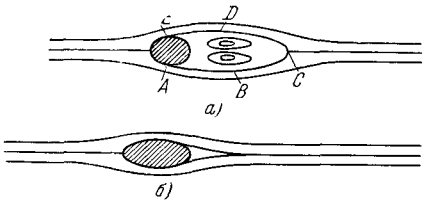


Рис. 42. Обтекание тел с образованием вихревой зоны (схема *а*)) и каверны, заполненной газом или покоящейся жидкостью (схема *б*)).

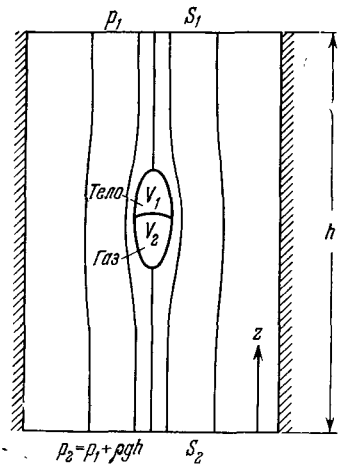


Рис. 43. Схема обтекания тяжелой жидкостью тела с присоединенным газовым «пузырем».

тело, которое, всплывая, движется с постоянной скоростью вверх; соответственно скорость обтекания неподвижного тела направлена вниз. Общую схему обтекания усложним введением за телом застойной области — «пузыря», наполненного газом, весомостью которого можно пренебречь (рис. 43).

В этом случае уравнение (8.7) с учетом силы тяжести для проекции на ось z силы, действующей на тело, приводит к формуле

$$R_z = -(p_1 + \rho v_1^2) S + (p_2 + \rho v_2^2) S - \mathcal{M}g, \qquad (8.16)$$

где $\mathcal{M}$ — масса жидкости между сечениями S_1 и S_2.

Очевидно, что для величины $\mathcal{M}$ верна формула

$$\mathcal{M} = \rho Sh - \rho (V_1 + V_2), \qquad (8.17)$$

[1]) Если в некоторых точках этого объема в схематизированном движении скорость жидкости обращается в бесконечность, то предполагается, что интеграл, определяющий количество движения жидкости в этом объеме, сходится.

где h — расстояние по вертикали между сечениями S_1 и S_2, а V_1 и V_2 — соответственно объем тела и пузыря за телом.

Далее, на основании уравнения Бернулли (3.5), условия выравнивания давлений в сечениях S_1 и S_2 и из уравнения неразрывности сразу найдем, что

$$v_1 = v_2 \quad \text{и} \quad p_2 - p_1 = \rho g h.$$

Пользуясь этим, из (8.16) получим

$$R_z = \rho (V_1 + V_2) g. \tag{8.18}$$

Таким образом, вертикальная компонента общей силы, R_z, представляет собой просто силу Архимеда для общего объема тела и пузыря. Эта сила будет переменной, если объем пузыря изменяется либо за счет вдува газа, либо за счет падения гидростатического давления при вертикальном движении. Если благодаря предварительному или перманентному выпусканию газа за телом образуется пузырь, то общая сила R_z может значительно превышать вес тела. При отсутствии пузыря тяжелое тело тонет, а при наличии пузыря тело может всплывать, причем с увеличивающимся ускорением, если при подъеме вверх пузырь расширяется и сила Архимеда увеличивается.

Сила сопротивления при обтекании тел жидкостью со срывом струй

Вычислим силу сопротивления при обтекании идеальной несжимаемой жидкостью ($\rho_1 = \rho_2$) тела в цилиндрической трубе по схеме на рис. 40. В этом случае, в соответствии с опытными данными, предполагается, что за телом образуется ограниченная свободной поверхностью тока область (область $\mathcal{D}$ на рис. 40), в которой имеется газ или пары жидкости с некоторым давлением p_d. Как и раньше, примем, что в набегающем потоке далеко впереди имеется однородное поступательное движение жидкости, далеко сзади также получается однородное поступательное движение с давлением p_2 и скоростью v_2, но сзади асимптотическое значение площади сечения жидкости равно $S^* < S$.

Из уравнения неразрывности и несжимаемости следует, что $v_1 S = S^* v_2$, т. е. $v_2 > v_1$.

Из уравнения Бернулли получим

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho (v_2^2 - v_1^2)}{2};$$

отсюда следует, что $p_2 < p_1$. Если приравнять $p_2 = p_d$, то этим определится скорость v_2.

Для силы сопротивления из (8.7) получим

$$R_x = (p_1 - p_2) S + G (v_1 - v_2) = \rho \left[\frac{v_2 + v_1}{2} - v_1 \right] S (v_2 - v_1)$$

или

$$R_x = \frac{\rho S}{2}(v_2 - v_1)^2. \qquad (8.19)$$

Таким образом, при струйном обтекании в идеальной жидкости тело испытывает сопротивление, отличное от нуля. При движении в трубе величины давлений p_1 и $p_2 = p_d$ можно задать произвольно при условии $p_2 < p_1$. Для получения величины сопротивления изолированного тела при обтекании со срывом струй, с образованием за телом полости с постоянным давлением, необходимо рассмотреть предельное движение жидкости при $S \to \infty$. В этом случае при $S \to \infty$ для изолированного тела в пределе [1]) получается, что $v_2 \to v_1$ и, следовательно, $p_d \to p_1$. Таким образом, обтекание изолированного тела невесомой идеальной жидкостью с полостью, простирающейся в бесконечность, возможно только в том случае, когда давление в полости p_d точно равно давлению в жидкости на далеких расстояниях от тела, т. е. $p_1 = p_\infty = p_d$. Если в полости задать давление $p_d \neq p_\infty$, то соответствующие обтекания тел с полостью можно построить, но в этом случае полость не будет простираться до бесконечности. Можно показать, что если $p_d > p_\infty$, то получается обтекание по схеме *б* рис. 42. В этом случае в идеальной жидкости гидродинамическое сопротивление равно нулю.

Если $p_d < p_\infty$, то можно рассматривать различные схемы установившегося обтекания, например, обтекание по схеме, изображенной на рис. 44, с образованием струйки, уходящей в бесконечность на второй лист математического пространства. Эта струйка впервые была введена и изучена в работе Д. А. Эфроса [2]). Очевидно, что в действительности такое теоретически построенное пространственное движение неосуществимо, и это означает, что в случае $p_d < p_\infty$ установившееся обтекание невозможно. Однако опыты ясно демонстрируют возникновение этой струйки, которая, попадая на поверхность границы полости, обусловливает клокочущий неустановившийся характер движения жидкости за телом. При обтекании с образованием струйки за счет расхода жидкости в струйке получается гидродинамическое сопротивление.

---

[1]) Здесь принимается, что предельное обтекание со срывом струй изолированного конечного тела представляет собой обтекание по схеме Кирхгофа, в которой $v_1 = v_2$.

[2]) См. А. Д. Эфрос, Гидродинамическая теория плоскопараллельного кавитационного течения, ДАН СССР, т. 1, № 4, 1946. Более подробное изложение соответствующей теории см. Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 1950 и 1966; см. также М. И. Гуревич, Теория струй идеальной жидкости, 1962.

Переход к формуле для сопротивления изолированного тела при обтекании со срывом струй и с образованием полости за телом, когда $p_d = p_\infty$, с помощью рассмотрения обтекания тела в цилиндрической трубе без опоры на решение соответствующих гидродинамических задач провести невозможно.

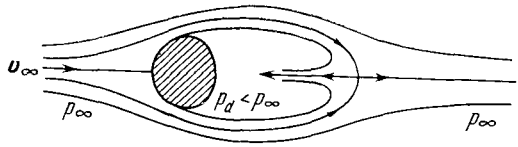


Рис. 44. Схема струйного обтекания с образованием обратной струйки.

Выше рассмотрены некоторые вопросы об обтекании несжимаемой идеальной жидкостью тел в трубе со срывом струй. Аналогичную теорию легко построить для адиабатических струйных обтеканий тел газом в цилиндрической трубе, когда скорости в потоке изменяются непрерывно, т. е., вообще говоря, для дозвуковых скоростей.

Сила сопротивления при обтекании тел газом со скачками уплотнения в потоке

Рассмотрим еще раз обтекание тела установившимся потоком идеального совершенного газа при наличии адиабатичности, но в данном случае предположим, что либо набегающий поток сверхзвуковой, либо в возмущенном потоке вблизи тела образуются сверхзвуковые зоны. В этих случаях обычно возникают скачки уплотнения, и поэтому нельзя пользоваться принятым выше основным допущением о непрерывности движения. При наличии в потоке скачков уплотнения на линиях тока, пересекающих скачок, температура торможения T^* по-прежнему сохраняется, а давление торможения p^* падает, так как при переходе через скачок благодаря росту энтропии появляются необратимые потери, связанные с переходом механической энергии в тепло. Наличие этих потерь в скачках, характеризующихся убыванием давления торможения, влечет за собой появление сопротивления при обтекании тел газом.

Рассмотрим более подробно величину сопротивления с учетом изменения давления торможения и температуры торможения в далеких сечениях впереди и сзади тела, т. е. того, что $p_2^* \neq p_1^*$, $T_2^* \neq T_1^*$. Изменение температуры торможения может происходить за счет химических реакций и, в частности, горения в газовом потоке или за счет работы внешних сил, сообщающих газу или отбирающих у газа энергию. Предположим, что на далеких от тела расстояниях движение адиабатическое,

давление выравнивается, а скорости становятся параллельными скорости набегающего потока [1]).

Для проекции на ось x силы, действующей со стороны газа на обтекаемое тело в цилиндрической трубе, согласно (7.2) для неравномерно распределенных ρ_2 и v_2 на S_2 можно написать

$$R_x = (p_1 - p_2)\,S + \int\limits_{S_2} (v_1 - v_2)\,\rho_2 v_2\,d\sigma. \tag{8.20}$$

Выше мы показали, что при $T_1^* = T_2^*$ и $p_1^* = p_2^*$ имеем $p_1 = p_2$ и $v_1 = v_2$, поэтому $R_x = 0$, и таким образом получился парадокс Даламбера. При изменении полного теплосодержания

$$i^* = c_p T^* = \frac{v_{\max}^2}{2}, \qquad i_1^* \neq i_2^*,$$

и давления торможения, $p_1^* \neq p_2^*$, согласно (8.20) получим силу R_x, вообще говоря, отличную от нуля. Величина силы R_x зависит от характера изменения T^* и p^* на линиях тока. Если (см. рис. 39) $R_x > 0$, имеем сопротивление, если $R_x < 0$, получается тяга. Тяга в общем случае связана с подводом энергии и увеличением теплосодержания $i_2^* > i_1^*$.

Рассмотрим случай, когда $i_2^* = i_1^*$, но в потоке имеются потери, снижающие в некоторой области на линиях тока вблизи тела давление торможения $p_2^* < p_1^*$. Давление далеко вниз по потоку p_2 вообще отлично от p_1 — давления далеко впереди в набегающем потоке. Если задать ρ_1, v_1, p_1 и p_2^*, то из уравнения расхода для определения p_2 получается довольно сложное уравнение. Это уравнение согласно (6.10) можно написать в виде

$$1 = \frac{1}{S}\int\limits_S \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} \left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \left[\frac{1 - \left(\frac{p_2}{p_2^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}}{1 - \left(\frac{p_1}{p_1^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}}\right]^{1/2} d\sigma. \tag{8.21}$$

Из этого уравнения можно усмотреть, что если $p_2^* \neq p_1^*$ только в ограниченной области площади S, то при $S \to \infty$ получим, что $p_2 / p_1 \to 1$. Для изолированного тела в безграничном потоке при $S = \infty$ во многих случаях, в том числе и при

[1]) Можно и нужно рассматривать также такие теоретические схемы обтекания, когда в бесконечности за телом эти предположения не выполняются, например, схему крыла конечного размаха (см. § 26), а также вихревую схему винта с учетом закрученности потока в следе за винтом.

подводе энергии в ограниченной области потока [1]), можно принять, что

$$\lim_{S\to\infty}(p_1 - p_2)\,S = 0.$$

Поэтому на практике для силы сопротивления (или тяги) R_x в безграничном потоке газа можно пользоваться формулой

$$R_x = \int_{S_2} \rho_1 v_1 (v_1 - v_2)\,d\sigma, \tag{8.22}$$

причем для v_1 и v_2 верны формулы (5.12)

$$v_1 = \sqrt{2c_p T_1^*}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_1^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}$$

и

$$v_2 = \sqrt{2c_p T_2^*}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_2^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}.$$

Если $T_1^* = T_2^*$, а $p_2^* < p_1^*$, то $v_2 < v_1$ и получается сопротивление. Если $T_2^* > T_1^*$ и $p_1^* \approx p_2^*$ или $p_2^* > p_1^*$, то $v_2 > v_1$ и, следовательно, тело будет испытывать тягу. Таким образом, выясняется механизм зависимости сопротивления и тяги от необратимых потерь и подвода энергии к главному потоку.

Исследованию и использованию различных выгодных способов подвода энергии к потоку при различных условиях полета посвящены теория и практика реактивных двигателей, к которым можно отнести также воздушные и водяные винты. Ниже мы рассмотрим некоторые элементы теории двигателей. Здесь отметим только, что для получения тяги подвод энергии можно производить, например, с помощью вращающихся винтов или путем сжигания в газовом потоке топлива. Сжигание можно осуществлять в специальных камерах сгорания внутри двигателя, через которые протекает внешний воздух, но можно получать тягу с помощью сжигания топлива прямо во внешнем потоке, обтекающем тело, например, вне крыла и фюзеляжа самолета.

---

[1]) Если $T_1^* \neq T_2^*$, то в (8.21) под знаком интеграла появится множитель $\sqrt{T_2^*/T_1^*}$, отличный от единицы только на ограниченной области в сечении S. Это обстоятельство не меняет предыдущих выводов, аналогичный множитель представляет собой отношение $\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$.

Гидродинамические силы при обтекании решеток профилей

В гидродинамической теории газовых и гидравлических машин большое значение имеют решения задач о движении жидкостей или газов через решетки профилей. Пусть имеем бесконечную систему одинаковых цилиндрических крыльев с параллельными образующими, расставленных периодически (рис. 45).

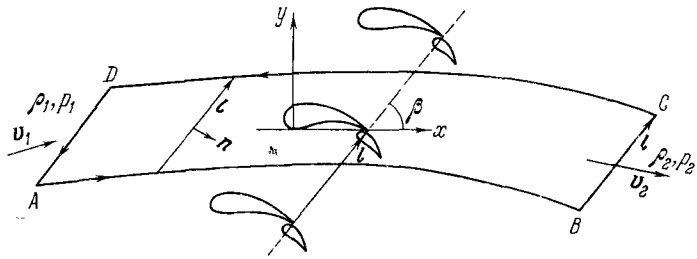


Рис. 45. Схема решетки профилей в сечении цилиндрических крыльев плоскостью, перпендикулярной к их образующим.

В плоскости сечения профилей возьмем декартову систему координат, которую для определенности свяжем с каким-либо из профилей. Обозначим через $\boldsymbol{l}$ вектор периода решетки; пусть β — угол наклона вектора $\boldsymbol{l}$ к оси x. Угол β называется выносом решетки. На рис. 45 изображена решетка, образованная поступательными смещениями двойного профиля (биплана) на вектор $k\boldsymbol{l}$, где k — любое целое положительное или отрицательное число. Все последующие выводы применимы и в том случае, когда периодическая решетка состоит из сдвигаемой на период любой системы полипланов.

Рассмотрим обтекание решетки профилей установившимся плоскопараллельным потоком жидкости или газа. Относительно движения жидкости или газа предположим еще, что поля плотности, скорости и напряжения периодические с периодом $\boldsymbol{l}$ и что на далеких расстояниях от решетки (по нормали к периоду $\boldsymbol{l}$) перед решеткой и за решеткой потоки выравниваются к поступательным движениям с постоянными векторами скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ соответственно (см. рис. 45).

Для применения интегральных соотношений выделим цилиндрическую контрольную поверхность Σ единичной ширины вдоль образующих профилей решетки, изображенную на рис. 45 контуром $ABCDA$ в плоскости xy и включающую в себя контуры обтекаемых неподвижных профилей. Сечения AD и BC параллельны вектору периода $\boldsymbol{l}$, а контуры AB и DC — любые кривые, сдвинутые поступательно друг относительно друга на один период; из свойств периодичности и плоскопараллельно-

сти потока следует, что на AB и DC, а также на площадках поверхности Σ, параллельных плоскости xy, все характеристики потока в соответствующих точках одинаковы. В отличие от предыдущих приложений в этом случае части контрольной поверхности AB и DC не являются поверхностями тока, а сечения AD и BC не перпендикулярны к соответствующим скоростям потока.

Закон сохранения массы дает

$$l\rho_1 v_{1n} = l\rho_2 v_{2n} = G, \tag{8.23}$$

где v_{1n} и v_{2n} — проекции скорости жидкости на направление единичного вектора $\boldsymbol{n}$, вектора, полученного от поворота на прямой угол по часовой стрелке вектора периода $\boldsymbol{l}$ (см. рис. 45), а G — массовый расход жидкости в одном периоде в слое единичной ширины.

Уравнение количества движения при отсутствии массовых сил [1]) с учетом периодичности и плоскопараллельности потока для силы $\boldsymbol{R}$, действующей на единицу ширины системы обтекаемых профилей в одном периоде, приводит к формуле

$$\boldsymbol{R} = (p_1 - p_2)\, l\boldsymbol{n} + G(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2). \tag{8.24}$$

Эта формула проста и удобна для приложений на практике или в теории гидродинамических решеток. В этой формуле первый член дает силу, перпендикулярную к вектору периода решетки, второй член связан с изменением величины и направления скорости потока, протекающего сквозь решетку. Этот член дает составляющую силу вдоль периода решетки, т. е. силу, стремящуюся двигать решетку в направлении ее периода. Формулы (8.23) и (8.24) в рамках сформулированной выше постановки задачи приложимы в общем случае как для жидкостей, так и для газов с любыми свойствами, как для идеальных, так и для вязких сред [2]). Они приложимы при наличии в потоке (внутри Σ) различных физико-химических процессов. В частности, эти формулы позволяют вычислить силу $\boldsymbol{R}$ по данным экспериментальных измерений характеристик потока на входе и выходе из решетки. Далее при допустимых предположениях мы преобразуем формулу (8.24) для получения важных следствий относительно подъемной силы, действующей на изолированные полипланы в безграничном потоке жидкости.

---

[1]) Массовые силы инерции при рассмотрении относительных движений в соответствующих приложениях теории решеток легко учесть дополнительно.

[2]) Так как в бесконечности в поступательных потоках вязкие напряжения равны нулю.

Введем теперь в рассмотрение циркуляцию скорости Γ по замкнутому контуру $ABCDA$ в направлении против хода часовой стрелки. Нетрудно видеть, что для Γ верна формула

$$\Gamma = (v_{2l} - v_{1l})\, l, \tag{8.25}$$

где v_{2l} и v_{1l} — проекции скоростей $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ на направление вектора периода $\boldsymbol{l}$. В общем случае для вихревого движения жидкости или газа циркуляция Γ зависит от выбора контура интегрирования [1]). Если движение жидкости или газа вблизи контура $ABCDA$ потенциально, то контур интегрирования при определении циркуляции можно деформировать, а в случае непрерывного потенциального потока во всей плоскости вне обтекаемых контуров контур $ABCDA$ можно деформировать в контуры обтекаемых профилей. Таким образом, в этом случае циркуляцию Γ, для которой справедлива формула (8.25), можно рассматривать как суммарную циркуляцию по контуру, состоящему из всех контуров полиплана в одном периоде, каждый из которых проходится против часовой стрелки.

Формулу (8.24) удобно переписать в комплексной форме, в которой векторы рассматриваются как комплексные числа, т. е.

$$\boldsymbol{R} = R_x + iR_y; \qquad \boldsymbol{n} = n_x + in_y = -ie^{i\beta},$$

$$\boldsymbol{v}_1 = v_{1x} + iv_{1y} = (v_{1l} - iv_{1n})\, e^{i\beta}; \quad \boldsymbol{v}_2 = v_{2x} + iv_{2y} = (v_{2l} - iv_{2n})\, e^{i\beta}.$$

Нетрудно проверить, что в этих обозначениях можно написать

$$\boldsymbol{R} = [(p_2 - p_1)\, ie^{i\beta} + \rho_1 v_{1n}\boldsymbol{v}_1 - \rho_2 v_{2n}\boldsymbol{v}_2]\, l$$

и отсюда

$$\boldsymbol{R} = -i\,\frac{\rho_1\boldsymbol{v}_1 + \rho_2\boldsymbol{v}_2}{2}\,\Gamma + ie^{i\beta}\Gamma\left[\frac{\rho_1 v_{1l} + \rho_2 v_{2l}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(p_2 - p_1) + \rho_2 v_{2n}^2 - \rho_1 v_{1n}^2}{v_{2l} - v_{1l}}\right]. \tag{8.26}$$

Второй член в формуле (8.26) перпендикулярен к периоду решетки; в общем случае при обтекании решеток как сжимаемой, так и несжимаемой жидкостью, этот член отличен от нуля.

---

[1]) В общем случае циркуляция Γ не зависит от выбора конгруэнтных кривых AB и DC, однако значение Γ вообще зависит от вида кривых AB и DC внутри одного периода, если эти кривые не конгруэнтны; при потенциальном обтекании циркуляция Γ не зависит от вида этих неконгруэнтных кривых.

Теорема Н. Е. Жуковского о гидродинамической силе воздействия на профили в решетке и о подъемной силе изолированного полиплана или отдельного профиля

Рассмотрим теперь отдельные частные случаи. Пусть имеем обтекание неподвижной решетки *идеальной однородной несжимаемой* жидкостью ($\rho_1 = \rho_2$) без подвода внешней механической энергии. В этом случае имеется часть потока, образованная системой линий тока, приходящих из бесконечности перед решеткой и уходящих в бесконечность за решеткой. Из условий в бесконечности и из уравнения Бернулли следует, что движение жидкости в области потока, образованного этой системой линий тока, потенциальное (см. конец § 2). Вместе с тем в потоке могут быть области с вихревым движением. Можно рассматривать различные обтекания с вихревыми областями или кавернами, а также и такие, когда движение жидкости везде вне профилей потенциально. Для полипланов такие потенциальные обтекания могут быть разными в зависимости от различного задания циркуляций по отдельным планам при заданной суммарной циркуляции Г.

Из уравнения Бернулли на линиях тока, приходящих и уходящих в бесконечность, имеем

$$p_1 + \frac{\rho\,(v_{1n}^2 + v_{1l}^2)}{2} = p_2 + \frac{\rho\,(v_{2n}^2 + v_{2l}^2)}{2}\,. \tag{8.27}$$

На основании (8.27) и (8.23) следует, что в (8.26) второй член равен нулю, и поэтому формула (8.26) приобретает вид

$$\boldsymbol{R} = -i\rho\frac{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2}{2}\,\Gamma. \tag{8.28}$$

Равенство (8.28) представляет собой теорему Н. Е. Жуковского для решетки, обтекаемой потенциальным потоком с циркуляцией Г в бесконечности. Обычно рассматривается движение, потенциальное всюду вне профилей. Согласно этой формуле имеем, что сила $\boldsymbol{R}$ перпендикулярна к средней скорости $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)/2$ и пропорциональна плотности и циркуляции по контуру, охватывающему один раз профили и внутренние вихревые области или каверны в одном периоде. Согласно формуле (8.28) направление силы $\boldsymbol{R}$ получается поворотом вектора средней скорости на прямой угол против направления циркуляции Г (т. е. в данном случае, при $\Gamma > 0$, по ходу часовой стрелки, поворот характеризуется множителем $-i$).

Переход от решетки к изолированным профилю или полиплану профилей можно осуществить в (8.28) предельным переходом при $l \to \infty$. Очевидно, что в пределе при конечной циркуляции Г получим $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_\infty$. Формула (8.28) в пре-

деле дает знаменитую теорему Н. Е. Жуковского для изолированного профиля или для системы профилей в обычном виде:

$$\boldsymbol{R} = -i\rho \boldsymbol{v}_\infty \Gamma, \tag{8.29}$$

где Γ — общая циркуляция, равная циркуляции по бесконечно удаленному контуру.

Для изолированной системы профилей или для изолированного профиля можно рассматривать различные предельные течения, в частности, обтекания с вихревыми зонами или с кавернами. Для любого из таких обтеканий формула (8.29) верна.

Эта формула представляет собой фундаментальный результат, ставший основой аэродинамики крыльев самолетов. Формула (8.29) находится в согласии с парадоксом Даламбера, так как из (8.29) следует, что составляющая силы, параллельная скорости, (сопротивление) равна нулю, но подъемная сила в идеальной жидкости может отличаться от нуля, наличие ее тесно связано с циркуляцией $\Gamma \neq 0$.

Для определения действительного значения подъемной силы необходимо указать методы определения циркуляции Γ. Этот вопрос был изучен и разрешен тоже в работах С. А. Чаплыгина и Н. Е. Жуковского.

Данный выше вывод теоремы Н. Е. Жуковского для изолированной системы профилей можно распространить на случай их непрерывного *обтекания газом* при любых значениях числа Маха в набегающем потоке [1]), *когда непрерывное обтекание газом осуществимо*. В самом деле, рассмотрим некоторую последовательность обтеканий некоторой системы полипланов в решетках, в которых период l стремится к бесконечности. При построении этой последовательности важны только следующие два допущения. 1°. При $l \to \infty$ существует предельное движение. 2°. В решетке и в пределе все линии тока, приходящие из бесконечности впереди решетки, образуют все линии тока, уходящие в бесконечность сзади решетки, причем на этих линиях тока движение газа непрерывно и имеет место баротропия.

Из предположения 2°, из уравнения Бернулли и из условий в бесконечности следует, что движение газа потенциально в области, заполненной линиями тока, приходящими из бесконечности и уходящими в бесконечность (см. § 2 этой главы). Пусть для определенности циркуляция Γ по любому контуру, который в области потенциального движения может быть деформирован в контур $ABCDA$, имеет фиксированное значение для всей данной последовательности обтеканий решеток.

---

[1]) См. Л. И. Седов, Гидроаэродинамические силы при обтекании профилей сжимаемой жидкостью, ДАН СССР, т. LXIII, № 6, 1948 г., стр. 627.

В каждом из обтеканий верны следующие соотношения: условие баротропии

$$\rho_2 = f(p_2) \text{ и } \rho_1 = f(p_1),$$

уравнение расхода

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_{1n}}{v_{2n}},$$

уравнение Бернулли

$$\frac{v_{2n}^2 + v_{2l}}{2} - \frac{v_{1n}^2 + v_{1l}^2}{2} + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

и

$$v_{2l} - v_{1l} = \frac{\Gamma}{l}. \tag{8.30}$$

Соотношения (8.30) можно рассматривать как уравнения для определения ρ_1, ρ_2, p_2, v_{2n}, v_{2l}, если величины p_1, v_{1n}, v_{1l} и Γ/l заданы.

В общем случае система уравнений (8.30) имеет несколько решений. При наличии принятой по условию баротропии изменение всех характеристик движения вдоль линий тока непрерывно (условием о баротропии появление скачков уплотнения исключается). В некоторых случаях, в частности, при больших сверхзвуковых скоростях обтекания, предположение о баротропии слишком сильно, так как в рамках теории идеального газа нельзя построить теоретически непрерывных обтеканий: в этих случаях теорема Жуковского не верна, и поэтому мы ограничиваемся только непрерывными баротропными и, в частности, адиабатическими движениями в указанной выше области.

Дальше мы принимаем, что при достаточно больших l имеются линии тока, вдоль которых изменения скорости очень малы (размеры возмущающих тел и вихревых областей малы по сравнению с l). Отсюда ясно, что характеристики течения за решеткой при достаточно больших l отвечают решению системы (8.30), близкому к характеристикам течения перед решеткой. Поэтому при переходе к пределу, когда $l \to \infty$, будем иметь

$$\rho_2 \to \rho_1, \quad p_2 \to p_1, \quad v_{2n} \to v_{1n}, \quad v_{2l} \to v_{1l}.$$

Все величины с индексом 2 согласно уравнениям (8.30) можно рассматривать как функции отношения $\Gamma/l = v_{2l} - v_{1l}$. На основании этого предельное значение выражения в скобках второго члена формулы (8.26) можно

написать в виде

$$\rho_2 v_{2l} + \frac{d}{dv_{2l}}(p_2 + \rho_2 v_{2n}^2).$$

На основании (8.23) имеем

$$\frac{d}{dv_{2l}}(\rho_2 v_{2n}^2) = \rho_2 v_{2n}\frac{dv_{2n}}{dv_{2l}}.$$

Из уравнения Бернулли (см. (8.30)) получим

$$\frac{dp_2}{dv_{2l}} = -\rho_2 v_{2l} - \rho_2 v_{2n}\frac{dv_{2n}}{dv_{2l}}.$$

Отсюда следует, что при конечном Γ в пределе второй член в (8.26) обращается в нуль; таким образом, доказано, что при непрерывном обтекании газом изолированных профиля или полиплана также верна формула (8.29).

Работа гидродинамических сил, действующих на подвижную решетку

Формула (8.24) определяет общую гидродинамическую силу воздействия потока идеальной жидкости или газа при установившемся обтекании на неподвижную решетку. Эта сила выражается простой формулой (8.24) через характеристики потока перед и за решеткой. Очевидно, что силы, действующие на элементы неподвижной решетки, никакой работы не совершают.

Уравнение энергии в этом случае, примененное к контрольной поверхности Σ (см. рис. 45), дает

$$W = (i_1^* - i_2^*)G = \left(\frac{v_1^2}{2} + U_1 + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{v_2^2}{2} - U_2 - \frac{p_2}{\rho_2}\right)G.$$

Исходя из изученного установившегося относительного обтекания неподвижной решетки, можно рассмотреть обтекание решетки, движущейся поступательно с постоянной скоростью относительно некоторой системы координат. Для этого достаточно сообщить всей системе, состоящей из решетки и движущейся относительно решетки жидкости или газа, постоянную поступательную скорость $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$.

Рассмотрим для простоты важный для приложений случай, когда поступательная скорость $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ параллельна оси решетки, т. е. наклонена к оси x под углом β, равным выносу решетки. В этом движении перед и за решеткой получаются асимптотические скорости

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}\,1} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_{\text{пер}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{v}_{\text{абс}\,2} = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_{\text{пер}}.$$

На основании принципа Галилея — Ньютона очевидно, что в относительном обтекании и в абсолютном движении газа или жидкости, обтекающей неподвижную решетку, все силы воздействия и приток энергии W за счет внутренних процессов одинаковы, но для абсолютного и относительного движения кинетические энергии разные, теплосодержания $i^*_{\text{абс}}$ и $i^*_{\text{отн}}$ разные, общая сила воздействия потока на решетку одинакова, но для абсолютного движения эта сила совершает работу, равную $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$.

Рассмотрим теперь полное изменение теплосодержания $i^*_{\text{абс}}$ в абсолютном движении жидкости или газа в одном периоде.

На основании простых преобразований легко найдем

$$(i^*_{\text{абс}\,1} - i^*_{\text{абс}\,2})\,G = \left(\frac{v^2_{\text{абс}\,1}}{2} + U_1 + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{v^2_{\text{абс}\,2}}{2} - U_2 - \frac{p_2}{\rho_2}\right) G =$$

$$= (i^*_{\text{отн}\,1} - i^*_{\text{отн}\,2})\,G + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = W + \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{пер}}.$$

Таким образом, уравнение энергии в абсолютном движении показывает, что в этом случае появляется дополнительный расход энергии абсолютного потока, который в точности равен работе гидродинамической силы, действующей на подвижную решетку.

§ 9. Основные агрегаты гидродинамических и газовых машин

Выше были изучены важные для приложений примеры и закономерности силовых взаимодействий между потоками жидкости и газа и ограничивающими их стенками и внутренними телами.

Осреднение неравномерных движений жидкости и газа в каналах

Основные результаты получены с помощью предположений о выравнивании потоков в сечениях контрольных поверхностей, расположенных в пределе в бесконечности. В действительности все каналы, в которых двигаются жидкости и газы, конечные и зачастую даже очень короткие. Поэтому при выборе контрольных поверхностей необходимо иметь в виду, что на характерных сечениях плотность, давление и скорость распределены неравномерно.

В частности, из-за прилипания, обусловленного свойством вязкости, на неподвижных стенках скорости газа и жидкости всегда равны нулю, поэтому вблизи стенок и поверхностей обтекаемых тел всегда имеет место существенная неравномерность в распределении скорости частиц жидкости и газа.

На практике, однако, часто получается так, что неравномерность распределения скорости вблизи границ потока, например, на стенках канала проявляется только в узких слоях с массовым расходом, очень малым по сравнению с общим характерным расходом в канале.

Кроме этого, на практике невозможно дать точные гидродинамические расчеты пространственных течений жидкостей и газов в различных агрегатах, составляющих в целом газовую машину. В связи с этим развиваются инженерные методы гидравлических расчетов, в которых поток жидкости или газа в каждом рассматриваемом сечении характеризуется небольшим числом глобальных характеристик. Эти характеристики можно вводить как некоторые средние действительных неравномерно распределенных характеристик течения, которые можно измерять в опытах.

Даже в тех случаях, когда в отдельных элементах газовых машин можно учесть и рассчитать пространственный поток протекающего газа, связь между различными элементами машины при анализе работы машины в целом устанавливается гидравлически — по средним значениям параметров жидкости или газа. В связи с необходимостью повышать точность расчетов, а также в связи с высоким совершенством создаваемых в современной технике агрегатов и машин в целом практическое значение приобретает каждый процент характерных показателей, которые могут и должны вводиться как некоторые средние величины.

Можно применять и рассматривать средние характеристики для различных величин, например, для плотности и температуры, для расхода газа по сечению, различного рода коэффициенты полезного действия (к.п.д.) и т. п. Значения этих величин в одном и том же процессе зависят от метода осреднения неравномерного потока и могут сильно различаться при разных способах осреднения. Очевидно, необходимы специальные условия для единообразного метода осреднения, причем применяемые единообразные методы осреднения должны базироваться на разумных основах так, чтобы соответствующие средние, во-первых, представляли бы собой характеристики, удовлетворяющие основным механическим и физическим законам и, во-вторых, были бы действительно величинами, характеризующими нужные с точки зрения приложений эффекты и свойства агрегатов и машин. Эта проблема осложняется еще тем, что малое число средних характеристик никогда не может полностью описать сложные взаимодействия неравномерных потоков с частями элементов машин, которые могут становиться существенными при более детальном анализе явлений для разработки и постройки изделий повышенного качества.

Вопросы осреднения [1]) и теории элементов газовых машин здесь затрагиваются только в самой общей форме, по сути дела, только с точки зрения механического определения названий гидравлических и газовых машин и разъяснения самых общих гидродинамических принципов их действия [2]).

Основная идея принципов введения средних характеристик потока совершенного газа в данном сечении канала состоит в определении термодинамических характеристик в мысленно адиабатически обратимым путем заторможенном до состояния покоя газе (давления торможения p^* и удельного теплосодержания i^* для идеального совершенного газа) или введении некоторого мысленно определенного поступательного движения газа в данном сечении с постоянными по сечению скоростью $v_{ср}$, давлением p и температурой T. Вместо поступательного движения в некоторых приложениях требуется введение простых канонических течений с закруткой.

В каждом сечении канала с неравномерным потоком газа можно ввести следующие важные характерные величины. Полный массовый расход газа

$$G = \int_S \rho v_n d\sigma. \tag{9.1}$$

Средний поток удельного теплосодержания

$$i^*_{ср} = \frac{1}{G}\int_G i^* dG = \frac{1}{G}\int_S i^* \rho v_n d\sigma, \tag{9.2}$$

где i^* — теплосодержание в газовых струйках, проходящих через сечение S.

Средний поток энтропии

$$s_{ср} = \frac{1}{G}\int_G s\, dG, \tag{9.3}$$

где s — энтропия частиц газа, пересекающих данное сечение канала.

[1]) Об осреднении потоков более подробно см. Л. И. Седов и Г. Г. Черный, сб. статей № 12, вып. 4, «Теоретическая гидродинамика», Оборонгиз, 1954; см. также Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, 6-е изд., 1966, Изд-во «Наука».

[2]) Теория и практика гидравлических и газовых машин — это обширная инженерная наука, богатая своим огромным опытом, многочисленными результатами и достижениями. Качественные показатели совершенства газовых и гидравлических машин связаны с их экономичностью, прочностью, надежностью регулирования и действия, причем для авиационных и ракетных конструкций остро стоят проблемы компактности их габаритов и минимума веса. Решения, оптимальные в целом, получаются как компромиссы, в возможность достижения которых совершенство аэрогидродинамических процессов дает основной вклад.

Средний поток импульса сквозь данное сечение

$$\boldsymbol{I}_{\text{ср}} = \frac{1}{G}\int_S (p\boldsymbol{n} + \rho \boldsymbol{v} v_h)\, d\sigma, \tag{9.4}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к элементу сечения $d\sigma$. Здесь мы не рассматриваем среднего потока момента количества движения, который важен только в том случае, когда канонический поток не поступателен.

Из предыдущего обсуждения понятно, что сохранение величин (9.1) — (9.4) для действительного потока и для потока, мысленно вводимого как средний, очень необходимо для получения правильных характеристик, обусловливающих силовые и энергетические взаимодействия потока с обтекаемыми телами, которые в свою очередь определяют нужные свойства газового потока. В связи с этим важно отметить, что, например, при замене в данном сечении трубы с площадью S данного неравномерного потока поступательным потоком *нельзя* получить одинаковые значения всех величин (9.1) — (9.4) в обоих потоках.

Действительно, состояние газа при поступательном движении в цилиндрической трубе определяется тремя параметрами.

$$\rho,\ p,\ v. \tag{9.5}$$

Если заданы площадь S, расход G, удельное теплосодержание i^* и удельная энтропия s, то все величины (9.5) можно вычислить по формулам газовой динамики. Если теперь по данным ρ, p, v вычислить еще импульс $\boldsymbol{I}$ и абсолютную температуру по формуле $T = p/R\rho$, то $\boldsymbol{I}$ не совпадает с $\boldsymbol{I}_{\text{ср}}$, вычисленным по формуле (9.4) по данным измерений в опытах, а вычисленная температура $T = p/R\rho$ не совпадет со средним значением температуры по площади сечения или по массе, или со средним значением, определенным каким-либо другим независимым от первоначального введения способом.

Средние величины $\widetilde{\rho}, \widetilde{p}, \widetilde{v}$ для характерного поступательного потока можно было бы вычислить и из других условий, например, из условия сохранения [1]) G, i^* и компонент импульса I_x, I_y, I_z. В этом случае удельную энтропию $\widetilde{s}$ соответствующего поступательного движения можно вычислить с помощью термодинамических формул. При наличии неравномерностей при этом получим, что $\widetilde{s} > s_{\text{ср}}$, где $s_{\text{ср}}$ определено по формуле

[1]) Более детальное исследование показывает, что вообще такое вычисление не всегда возможно. Это означает, что уравнения для определения ρ, p и v из условий сохранения G, i^* и $\boldsymbol{I}$ в некоторых случаях не имеют решения, тогда как аналогичные уравнения с заданными по сечению G, i^* и s всегда имеют решения (см. работы, цитированные выше).

(9.3), так как энтропия $\tilde{s}$ соответствует мысленному (или действительному) выравниванию неравномерных скоростей в результате необратимых внутренних процессов смешения потоков в различных струйках в цилиндрическом канале при отсутствии сил трения на стенках канала (переходу к поступательному потоку). Такое смешение, связанное с потерями, вызывающими рост энтропии и падение давления торможения, вообще говоря, не всегда возможно даже теоретически. Соответствующее обесценивание располагаемой энергии может получаться в действительности при дальнейшем развитии течения газа, а может и не получаться в действительности, если соответствующего выравнивания скоростей не происходит. Отсюда понятно, что осреднение путем введения соответствующего поступательного движения в некоторых случаях выгоднее и правильнее производить при сохранении G, i^* и $s_{ср}$.

Указанные различия в средних на практике могут заметно проявляться только в случаях больших неравномерностей потока. Для слабо неравномерных потоков различие соответствующих средних может проявляться слабо, иногда только в пределах точности измерений и расчетов, однако это не всегда так, и ясно сформулированные условия введения средних обязательны как для общего понимания сути дела, так и для использования в расчетах экспериментальных данных.

Ниже мы будем пользоваться средними характеристиками газового потока в данном сечении канала при сохранении G, i^* и энтропии $s_{ср}$. Этим определяются p, ρ и величина скорости v; что же касается направления скорости, то в осесимметричных каналах обычно можно принимать, что средняя скорость направлена по оси канала, в общем случае направление скорости можно подчинить условию сохранения в неравномерном потоке и в моделирующем поступательном потоке направления среднего импульса, определенного по формуле (9.4).

Всякое осреднение и сокращение числа характеристических величин связано с утратой ряда свойств рассматриваемого явления. Для более подробного анализа и для решения задач о профилировании каналов и о выборе очертаний обтекаемых тел требуется, вообще говоря, увеличивать число характерных для потока средних величин, рассматривать не поступательные моделирующие течения, и в связи с этим усложнять модель, представляющую в среднем данный поток. Однако эти усложнения относятся к деталям, нужным для разработки уточненных расчетов.

Сопло и конфузор

Потоки жидкости или газа с требуемыми скоростями получаются с помощью применения специальных профилированных каналов или насадков. Для ускорения потоков при дозвуковых скоростях при-

меняются суживающиеся сопла (конфузоры), для получения сверхзвуковых скоростей — сопла Лаваля. Эти вопросы для идеальных жидкостей и газов при обратимых адиабатических процессах в частицах были подробно рассмотрены в §§ 3 и 6.

Здесь отметим только, что сопло является важной составной частью множества всевозможных машин и устройств. В частности, сопла применяются в аэродинамических трубах, ракетных и реактивных двигателях, создающих тягу за счет истечения с повышенной скоростью через сопло реактивной струи жидкости или газа, в различного рода направляющих каналах и аппаратах, в водяных, паровых и газовых турбинах, в различного рода испытательных стендах и т. д.

К соплам предъявляются различного рода требования. В частности, для аэродинамических труб обычно требуется большая равномерность потока на выходе из сопла в рабочую часть, в которой поток, приготовленный в сопле, используется для исследования обтекания различных тел и устройств. Равномерность потока в реактивной струе двигателей способствует повышению тяги двигателей. Вопросы расхода, скорости истечения и равномерности потока, выходящего из сопла, тесно связаны с выбором геометрических размеров сопла и профилированием направляющего канала.

В §§ 3 и 6 были рассмотрены идеальные процессы. На практике при движении жидкостей или газов в каналах проявляется влияние свойства вязкости и внешних по отношению к потоку сил трения на стенках канала. Это влияние сильно возрастает для длинных каналов, в связи с этим характерно стремление делать короткие сопла. С другой стороны, при очень коротких соплах сильно нарушается равномерность распределения скоростей, возникают резко выраженные неравномерные пространственные движения с возможными отрывами потока от стенок и появлением «карманов» с противотоками. Не только основные размеры и соответствующий градиент давления, но и форма контуров канала оказывают большое влияние на распределение скоростей внутри канала. Необходимо также учитывать шероховатость стенок канала и в некоторых случаях тепловые потоки сквозь их стенки (например, в соплах ракетных двигателей движущийся газ имеет температуру порядка 3000° К). В сверхзвуковых потоках основным источником потерь и неравномерностей могут являться скачки уплотнения. Внутри сопла такие скачки могут образовываться в зависимости от некоторых геометрических свойств контура канала и независимо от формы канала на нерасчетных режимах истечения (см. § 6). В связи с этим в значениях средних по сечению характеристик потока в сопле могут наблюдаться отклонения от значений, рассчитанных по идеальной теории, изложенной в §§ 3 и 6.

Обозначим через p_1^* значение давления торможения на входе в сопло и через p_2^* — значение на выходе. В идеальном сопле имеем $p_2^*/p_1^* = 1$; при действительном движении за счет необратимых потерь, обусловливающих рост энтропии в частицах, имеем

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} < 1. \tag{9.6}$$

Коэффициент σ является одной из важных характеристик качества сопла и отклонения соответствующего действительного режима истечения жидкости или газа через сопло от идеального. На практике для хороших сопел величина σ близка к единице, $\sigma \approx 0{,}98$.

В применяемых для двигателей соплах коэффициент σ высок и основное значение для сопел двигателей имеет коэффициент тяги $\bar{R} = R/R_{\text{ид}}$, т. е. отношение тяги R двигателя с данным соплом к тяге $R_{\text{ид}}$ двигателя с идеальным расчетным соплом, в котором нет потерь и обеспечена равномерность потока на выходе при том же перепаде давления в сопле. Для хороших сопел $\bar{R}$ порядка 0,98—0,996.

Для аэродинамических труб существенное значение имеет величина коэффициента неравномерности потока

$$e = \frac{\Delta v}{v}, \tag{9.7}$$

где Δv — среднее по сечению и по времени отклонение скорости в рабочей части струи от ее среднего значения. В хороших аэродинамических трубах значение e имеет порядок 1%.

Во многих случаях на практике для обеспечения нужных изменений расхода или скорости потока на выходе из сопла требуется применять регулируемые или сменные сопла (например, в аэродинамических трубах).

Основной регулируемой характеристикой для дозвуковых сопел является площадь сечения на выходе, а для сверхзвуковых сопел — площадь сечения горла сопла, в котором достигается критическая скорость потока (см. § 6).

Диффузор

Торможение потока, происходящее при движении жидкости или газа против возрастающего давления, может решаться с помощью применения специальных каналов, называемых диффузорами.

Так же как и сопла, диффузоры являются составной частью реактивных двигателей, всевозможных машин и испытательных установок. В частности, в аэродинамических трубах поток, прошедший рабочую часть, дозвуковую или сверхзвуковую, обладает значительной механической энергией. Этот поток дол-

жен быть заторможен [1]), поэтому в аэродинамических трубах имеются диффузорные каналы. Проблема уменьшения потерь в диффузорах — это проблема сохранения ценной механической энергии для обеспечения в случае аэродинамических труб экономичности установки, а в случае реактивных двигателей для получения тяги.

В диффузорах мы имеем дело с процессами, обратными процессам в соплах, и в связи с этим при дозвуковых скоростях диффузорные каналы расширяются вниз по потоку; при сверхзвуковых скоростях на входе диффузорные каналы вначале суживаются, затем имеют горло, отвечающее скорости потока, равной скорости звука, после чего, при дальнейшем торможении, расширяются для уменьшения дозвуковых скоростей потока.

Получение регулярных потоков с малыми потерями при торможении в диффузорах — задача гораздо более трудная, чем получение ускоренных потоков с малыми потерями в соплах. В диффузорах идеальные обратимые движения нарушаются за счет тех же причин и свойств среды, что и в соплах, однако при торможении потоков влияние перечисленных выше факторов проявляется в более сильной степени. В диффузорах из-за движения против возрастающего давления условия отрыва потока от стенок более благоприятны, чем в соплах, в которых движение ускоряется — частицы стремятся двигаться по потоку за счет падения давления. Для избежания отрывов на контурах диффузоров в дозвуковой части они должны быть плавными, без стыков и изломов и без слишком больших углов расширения. В сверхзвуковых диффузорах поток газа на входе сверхзвуковой и поэтому, как правило, у входа в диффузор образуются скачки уплотнения, в которых возникают большие потери механической энергии.

Основной характеристикой диффузора является коэффициент восстановления давления:

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*}.$$

В идеальном диффузоре $\sigma = 1$, на практике даже в очень хороших диффузорах значения σ меньше, чем в соплах с аналогичными перепадами давлений.

---

[1]) Торможение необходимо либо при выбрасывании струи воздуха в атмосферу, в которой давление выше, чем давление в рабочей части трубы, либо для повторного использования воздуха через вентилятор. В замкнутой трубе воздух надо тормозить, чтобы снизить сопротивление стенок трубы и улучшить условия работы вентилятора.

В реактивных двигателях впереди имеется воздухозаборник, представляющий собой переднюю часть диффузора. Ниже мы покажем, что скорость забираемого воздуха надо уменьшить с тем, чтобы сообщить ему энергию для создания реактивной струи большой скорости, благодаря чему создается нужная тяга.

Потери в потоке газа при подходе к диффузору или в самом диффузоре могут быть очень большими при больших сверхзвуковых скоростях полета.

Диффузор для сверхзвуковых скоростей полета

При полете со сверхзвуковыми скоростями в относительном сверхзвуковом потоке при подходе к диффузору реактивного двигателя или в самом диффузоре образуются скачки уплотнения, в которых могут получаться большие потери механической энергии. На рис. 46 показан прямой скачок перед входом в простой диффузор.

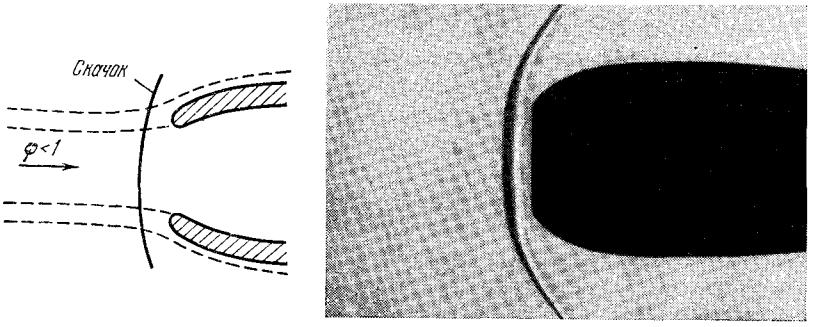


Рис. 46. Схема и фотография ударной волны перед входом в диффузор при сверхзвуковых скоростях обтекания.

С помощью условий на прямом скачке (см. § 6 гл. VII) и общих газодинамических формул §§ 5 и 6 легко получить формулу для отношения давления торможения p_2^* за скачком к давлению торможения p_1^* перед скачком в зависимости от числа Маха $M_1 = v_1/a_1$ в набегающем потоке (число Маха M_1 отвечает скорости полета).

Это отношение равно

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\dfrac{2}{\gamma-1}M_1^2-1\right)}{\left[\dfrac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}-\dfrac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\dfrac{1}{M_1^2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}. \tag{9.8}$$

Из этой формулы при $\gamma = 1{,}4$ следует, что

при $M_1 = 1{,}4$ $\sigma = 0{,}96$,
при $M_1 = 2$ $\sigma = 0{,}72$,
при $M_1 = 3$ $\sigma = 0{,}33$.

Отсюда ясно, что при увеличении числа Маха полета потери растут очень сильно. Для того чтобы избежать таких больших потерь, диффузор делают с передним острым краем и центральным коническим телом, перед которым возникают косые скачки уплотнения (см. схемы на рис. 47).

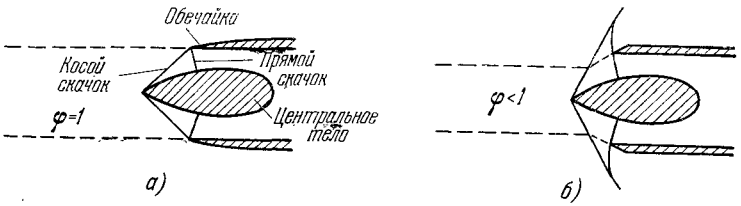


Рис. 47. Схемы входа сверхзвукового потока в диффузор.

Прямой скачок в этом случае образуется лишь после серии косых скачков. Так как число M, подсчитанное по нормальной скорости для косого скачка, мало, то и потери в косом скачке невелики. Перед замыкающим прямым скачком, в котором происходит переход к дозвуковой скорости, число M в этом случае уже близко к единице и поэтому потери в нем также малы. Чем больше будет косых скачков, тем меньше будут потери полного давления при торможении сверхзвукового потока. На практике для чисел M_1 полета до $M_1 \approx 3$ оказывается достаточным одного-двух косых скачков, чтобы снизить потери до приемлемой величины.

Другой важной характеристикой диффузора является коэффициент расхода φ. Величина φ определяется как отношение фактического расхода через диффузор к максимально возможному расходу при сверхзвуковом полете. Максимальный расход будет, если в диффузор входит струя газа, имеющая на бесконечности площадь, равную площади входа в диффузор. При дозвуковых скоростях полета возможно засасывание струи, поэтому максимально возможное значение φ и, следовательно, максимальный расход через диффузор отвечают критическим значениям скорости на входе в диффузор. Отсюда следует, что

$$\varphi_{max} = \frac{\rho_{кр} v_{кр}}{\rho_\infty v_\infty}.$$

Если в сверхзвуковом диффузоре косые скачки приходят в точности на кромку обечайки (рис. 47, *а*), то $\varphi = 1$. Если полностью закрыть канал, то весь поток пойдет вне диффузора и $\varphi = 0$. На практике может оказаться, что на некоторых режимах работы самое узкое сечение — горло диффузора не пропускает всего расхода, который может войти в диффузор, тогда $0 < \varphi < 1$. При этом линии тока крайних струек газа, идущих в диффузор, разворачиваются и проходят вне диффузора. Косые скачки могут проходить или пересекаться перед обечайкой, тогда у обечайки образуется ударная волна (рис. 47, *б*). Все это приводит к возникновению дополнительного внешнего сопротивления диффузора. Если это сопротивление велико и его необходимо избежать, то применяют регулируемые диффузоры, в которых можно изменять площадь горла, например, изменением положения конуса внутреннего тела относительно обечайки или другими путями.

Камера сгорания

Как было показано выше, воздействие потока совершенного газа на внутренние тела может приводить к тяге, если к газу подводится внешняя энергия или в потоке выделяется энергия за счет химических реакций, например, горения. В двигателях, создающих тягу, всегда происходит подвод энергии. Обычно к потоку подводится либо некоторое количество тепла, либо над потоком совершают работу внешние поверхностные или массовые силы. Тепло потоку можно сообщить, сжигая топливо в воздухе, протекающем через специальные каналы внутри двигателей. Такие каналы называются камерами сгорания.

При сжигании топлива в движущемся воздухе в поток вводится дополнительная масса топлива; при сгорании топлива в воздухе выделяется тепло и образуется газ — продукты горения. В детальных расчетах можно учесть появление этой дополнительной массы газа и связанное с этим изменение физико-механических характеристик газа. На практике эта масса и изменение свойств часто относительно малы, так как массовая доля топлива по сравнению с массовой долей воздуха, участвующего в химической реакции, даже в случае стехиометрической смеси мала, например, отношение массы керосина к потребной для его сжигания массе воздуха равно $\alpha_{\text{стехиом}} \approx 1/15$. В действительности в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей (ВРД) весовая доля воздуха значительно больше стехиометрической, отношение α имеет порядок 1,5—3%.

Рассмотрим основные эффекты и элементы теории движения совершенного газа в камерах сгорания, причем учтем только количество тепла, поступающее в установившийся поток идеального совершенного газа. Изучим изменение параметров

газового потока в канале камеры сгорания на основе гидравлической теории, иначе говоря, примем в расчетах, что канал цилиндрический и что в нормальных к его оси сечениях все характеристики потока одинаковы.

При подводе тепла энтропия газа, рассчитанная на единицу массы, всегда возрастает, так как

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 ds \geqslant \int_1^2 \frac{dq^{(e)}}{T} \quad \text{и} \quad dq^{(e)} > 0, \tag{9.9}$$

индекс 1 здесь относится к параметрам на входе в камеру сгорания, а индекс 2 — к параметрам в рассматриваемом сечении или на выходе; $dq^{(e)}$ — приток тепла, рассчитанный на единицу массы в промежуточных положениях частиц газа.

Согласно уравнению энергии (8.9) имеем

$$i_2^* - i_1^* = c_p (T_2^* - T_1^*) = q^{(e)} > 0$$

и (9.10)

$$dq^{(e)} = c_p dT^*.$$

Здесь через $q^{(e)}$ обозначен общий приток тепла на единицу массы газа между рассматриваемыми сечениями.

Отношение давлений торможения через температуры торможения и энтропию выражается формулой (см. (5.15) гл. V)

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} e^{-(s_2-s_1)/(c_p - c_V)}. \tag{9.11}$$

Из этой формулы следует, что при заданных начальном теплосодержании $i_1^* = c_p T_1^*$ и подводе тепла $q^{(e)}$, т. е. при заданном отношении T_2^*/T_1^*, коэффициент σ получается тем меньше, чем больше возрастает энтропия $s_2 - s_1 > 0$. Определив температуру торможения T^* как температуру, которую имел бы газ, если его адиабатически затормозить из данного состояния с температурой T до состояния покоя, при $i = i^* = \text{const}$, будем иметь

$$T = T^* - \frac{v^2}{2c_p} \tag{9.12'}$$

и с помощью (9.9) и (9.10) получим

$$s_2 - s_1 \geqslant \int_1^2 \frac{c_p dT^*}{T^* - \frac{v^2}{2c_p}}. \tag{9.12}$$

Формула (9.12) показывает, что рост энтропии, а следовательно, и потери давления торможения могут быть тем меньше, чем

при меньшей скорости подводится тепло. Очевидно, что минимально возможный рост энтропии соответствует обратимому процессу подвода тепла при скорости потока, равной нулю, т. е. $v = 0$, и при отсутствии других диссипативных потерь. В этом идеально выгодном случае имеем

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{c_p dT^*}{T^*} = c_p \ln \frac{T_2^*}{T_1^*},$$

поэтому

$$e^{-(s_2 - s_1)/(c_p - c_V)} = \left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}$$

и, следовательно,

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = 1. \tag{9.13}$$

В реальных условиях в камере сгорания всегда $\sigma < 1$.

Полученные важные выводы установлены с помощью одномерной гидравлической теории, причем очевидно, что в рамках такой теории эти выводы верны и тогда, когда камера сгорания вообще не цилиндрическая. Подчеркнем, что снижение гидравлических потерь и выгодные условия подвода тепла в камере сгорания соответствуют процессу, в котором в пределе скорость газа относительно камеры равна нулю. В связи с этим, а также в связи с необходимостью организовать сгорание впрыскиваемого топлива в движущемся воздухе требуется поступающий в камеру сгорания воздух предварительно затормозить. Предварительное торможение воздуха можно осуществить частично или полностью с помощью диффузора, расположенного перед камерой сгорания. В сверхзвуковом полете для этого нужно применять специальные диффузоры для торможения сверхзвуковой скорости (см. выше стр. 96).

Из анализа вопроса об образовании тяги (формула (8.22)) ясно видно, что для ее увеличения необходимо повышать разность $T_2^* - T_1^*$ и стремиться к увеличению или сохранению отношения p_2^*/p_1^*. Выше показано, что при подводе к потоку тепла в идеальном случае отношение p_2^*/p_1^* сохраняется и его нельзя увеличить. Ниже мы покажем, что при подводе к потоку работы внешних сил отношение p_2^*/p_1^* можно значительно увеличить по сравнению с единицей.

Для дальнейшего анализа свойств движения газа в камере сгорания рассмотрим законы изменения скорости, плотности, давления и числа Маха потока в цилиндрической камере сгорания. Уравнения установившегося движения идеального совершенного газа в цилиндрической трубе имеют вид:

уравнение расхода (для простоты без учета массы поступающего топлива)

$$d\rho v = \rho\, dv + v\, d\rho = 0;$$

уравнение импульсов при отсутствии внешних сил

$$dp + \rho v\, dv = 0;$$

уравнение притока тепла, так как для внутренней энергии верна формула $U = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \text{const}$, можно написать в форме

$$dU = -pd\frac{1}{\rho} + dq^{(e)} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\gamma - 1} d\left(\frac{p}{\rho}\right) + pd\frac{1}{\rho} = dq^{(e)}.$$

Разрешая эти три уравнения относительно дифференциалов dv, $d\rho$ и dp, найдем

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{1 - M^2}(\gamma - 1)\frac{dq^{(e)}}{a^2}; \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v};$$
$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{(1 - M^2)}(\gamma - 1)\frac{dq^{(e)}}{a^2}, \tag{9.14}$$

где $a^2 = (\partial p/\partial\rho)_s = \gamma p/\rho$ и $M = v/a$ — число Маха; причем согласно (9.10), (9.12′) и уравнения состояния совершенного газа $p = \rho RT$ легко получается, что

$$(\gamma - 1)\frac{dq^{(e)}}{a^2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\frac{dT^*}{T^*}. \tag{9.15}$$

Из формул (9.14) видно, что в цилиндрическом канале при подводе тепла ($dq^{(e)} > 0$) на дозвуковых режимах движения скорость потока возрастает, а давление падает, на сверхзвуковых — наоборот.

На основании (9.14) и определения числа Маха $M = \frac{v}{\sqrt{\gamma p/\rho}}$ легко найдем

$$\frac{dM^2}{M^2} = 2\frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dp}{p} = \frac{1 + \gamma M^2}{1 - M^2}(\gamma - 1)\frac{dq^{(e)}}{a^2}, \tag{9.16}$$

следовательно, в дозвуковом потоке при подводе тепла число Маха M возрастает, а в сверхзвуковом — падает. На основании (9.15) равенство (9.16) легко проинтегрировать и заменить конечным соотношением.

Таким образом, при подводе тепла к дозвуковому потоку в цилиндрическом канале (камере сгорания) скорость может возрастать только до тех пор, пока не достигнет критического значения $v_{кр}$. После достижения критической скорости даль-

нейший подвод тепла к частицам газа в цилиндрическом канале оказывается невозможным. Это явление носит название *теплового кризиса*. Если же попытаться подвести большее количество тепла (например, продолжать сжигать топливо), то произойдет одно из двух: либо течение перестроится, параметры на входе в камеру изменятся, скорость на выходе упадет до такой величины, что при новом подводе тепла скорость будет равна скорости звука в конце камеры; либо, если такая перестройка течения невозможна (например, специальными устройствами обеспечивается подача газа в камеру со строго определенными параметрами), при принудительном подводе тепла становится невозможным стационарное течение; возникает неустановившееся колебательное движение газа (в частности, помпаж).

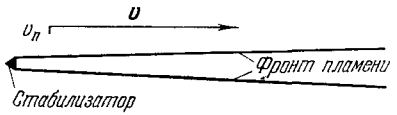


Рис. 48. Принципиальная схема действия стабилизатора в камере сгорания.

Скорость распространения фронта пламени по частицам имеет порядок всего нескольких метров в секунду. Поэтому даже при небольших скоростях потока прямой фронт пламени не может удерживаться в потоке и будет выноситься из камеры. Для обеспечения устойчивого горения приходится ставить в камере сгорания стабилизаторы, т. е. тела, на которых происходит поджигание потока и от которых отходит косой фронт пламени (см. схему на рис. 48).

Угол наклона фронта пламени определяется равенством скорости пламени по частицам проекции на нормаль к фронту скорости набегающего потока.

Так как этот угол небольшой, то для того, чтобы камера не оказалась слишком длинной, в сечении камеры сгорания необходимо ставить несколько стабилизаторов.

Компрессор (насос)

Компрессор представляет собой газовую машину, в результате действия которой за счет переданной газу механической энергии происходит, вообще говоря, повышение его внутренней или кинетической энергии, или повышение его полезной работоспособности. В случае жидкости действие подобной машины нередко сводится к подъему жидкости на высоту и, следовательно, к увеличению ее потенциальной энергии. Такие машины называются насосами.

При медленном квазистатическом сжатии газа происходит, вообще говоря, увеличение его внутренней энергии. Однако если процесс сжатия газа сопровождается его охлаждением, например, за счет теплообмена с окружающей средой, то внут-

ренняя энергия газа может и не увеличиваться. В самом деле, для совершенного газа внутренняя энергия единицы массы зависит только от его температуры и поэтому является тепловой энергией. Если процесс медленного сжатия газа происходит при постоянной температуре, то к газу подводится механическая энергия и отводится такое же количество тепла, так что полная энергия единицы массы газа не меняется, а энтропия газа

$$s = c_p \ln \frac{T}{p^{(\gamma-1)/\gamma}} + \text{const}$$

при этом падает. Однако практическая полезная работоспособность газа, т. е. непосредственная возможность превращения его внутренней энергии в работу механических сил или в кинетическую энергию, помимо запаса внутренней энергии зависит, очевидно, еще от давления. С практической точки зрения при данной температуре и массе газа энергия газа с высоким давлением (т. е. с более низкой энтропией) более ценна [1]), хотя в обоих случаях для совершенного газа эта энергия является тепловой.

Существуют различные типы газовых компрессоров. Это могут быть поршневые машины, в которых поступающий газ низкого давления сжимается в цилиндрах поршнем. Поршневые компрессоры часто применяются для получения газа с очень высокими давлениями. В авиационной технике и в промышленности вообще большое распространение получили компрессоры непрерывного действия, в которых передача энергии протекающему газовому потоку в направляющих каналах или прямо в открытом объеме производится с помощью специальных вращающихся лопастей или систем лопаток. Вращающееся колесо с системой лопаток, или вентилятор, или воздушный винт, или водяной винт являются основными и типичными элементами компрессоров, передатчиков энергии газу от двигательных систем: электромоторов, двигателей внутреннего сгорания, турбин и т. п.

Воздушные и водяные винты предназначаются также для получения тяги. Они передают механическую энергию газу и создают непосредственно сзади себя область повышенного давления, которая в свою очередь обусловливает развитие реактивной струи. Промышленные и бытовые вентиляторы часто используются для создания перепадов давлений, нужных для организации требуемых потоков. Например, внутри аэродинамических труб с замкнутым контуром вентиляторные установки используются для обеспечения непрерывной циркуляции воз-

[1]) См. т. 1, стр. 243.

духа, необходимой для преодоления различных сопротивлений и компенсаций потерь механической энергии. Заметим также, что в процессе действия аэродинамической трубы происходит непрерывный переход механической энергии в тепловую, поэтому, если отток тепла естественным путем недостаточен, может возникнуть необходимость специального охлаждения.

В аэродинамических трубах с потоком воздуха на выброс необходимо предварительно с помощью компрессоров заготовлять запасы сжатого воздуха, накачивая его в специальные баллоны, из которых этот воздух выпускается через трубу в атмосферу или в вакуумные камеры. В различных системах реактивных и поршневых двигателей, особенно в случаях работы их на большой высоте в разреженной атмосфере, воздух, забираемый диффузором, перед его поступлением в камеру сгорания выгодно предварительно тормозить и сжимать с помощью компрессора.

Существуют два основных типа компрессоров непрерывного действия, это — центробежные и осевые компрессоры. На рис. 49 даны их схемы.

В центробежном компрессоре основное движение газа через профилированные колеса — радиальное, в относительном движении газ ускоряется и сжимается центробежными силами. В осевом компрессоре основное движение газа происходит по цилиндрическим поверхностям через систему вращающихся лопаток, действующих на газ подобно решетке в рассмотренном выше плоскопараллельном обтекании.

Ответственными элементами компрессоров являются направляющие аппараты на входах во вращающиеся колеса и выходные диффузорные каналы.

Практически очень трудно получить без больших потерь большие степени сжатия, т. е. большие значения величины

$$\pi = \frac{p_2^*}{p_1^*}$$

в одном колесе, поэтому приходится прибегать к последовательному сжатию в нескольких колесах с промежуточными направляющими аппаратами. Для получения больших степеней сжатия конструируются многоступенчатые компрессоры.

Основными параметрами, характеризующими режим работы компрессора, являются: массовый расход газа

$$G = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2,$$

где S_1 и S_2 — площади на входе и выходе компрессора соответственно; температуры торможения T_1^*, T_2^* и достигаемая степень сжатия $\pi = p_2^*/p_1^*$ (вместо величины π можно вводить другие эквивалентные характеристики действия компрессора).

Ниже мы рассмотрим перечисленные величины для движения газа относительно неподвижных каналов компрессоров. Из уравнения энергии следует, что общая работа, подведенная

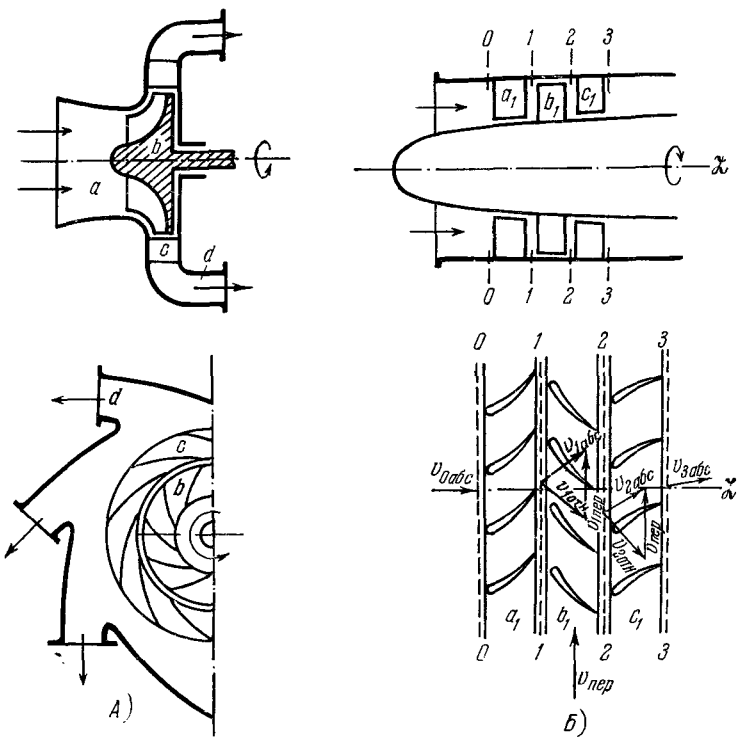


Рис. 49. Схемы компрессоров: *А*) одноступенчатый центробежный компрессор (*a* — входной патрубок, *b* — рабочее колесо с крыльчаткой, *c* — диффузорный выходной аппарат, *d* — выходные патрубки); *Б*) осевой компрессор (a_1 — входной и c_1 — выходной направляющие аппараты, b_1 — рабочее колесо, $\mathscr{L}$ — ось вращения рабочего колеса). Внизу изображена решетка, образующаяся в результате развертки на плоскость поверхности круглого цилиндра с осью $\mathscr{L}$, пересекающего лопатки компрессора. Если радиус этого цилиндра велик по сравнению с размерами сечения лопаток, то в ряде случаев можно пренебрегать радиальным движением газа и с хорошим приближением рассматривать движение газа по цилиндрической поверхности как плоскопараллельное движение через решетки. На рисунке указаны направления абсолютных, относительных и переносных скоростей в соответствующих сечениях.

к газу в единицу времени, в действительном процессе равна

$$-W = A = c_p (T_2^* - T_1^*) G.$$

Легко показать, что эта работа всегда больше идеальной работы,

которую необходимо подвести к газу в обратимом процессе без потерь для того, чтобы получить ту же степень сжатия π. В самом деле, для совершенного газа верны следующие общие формулы:

$$T_1^* = \alpha \frac{\gamma - 1}{\gamma} p_1^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s_1 - s_0}{c_p}} \quad \text{и} \quad T_2^* = \alpha \frac{\gamma - 1}{\gamma} p_2^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s_2 - s_0}{c_p}}$$

(α — размерная постоянная), причем из-за потерь в проточной части компрессора (вязкость, скачки уплотнения, срывы потока, смешения неравномерных потоков и т. п.) имеем

$$s_2 - s_0 > s_1 - s_0.$$

Введем мысленно адиабатический обратимый процесс, в котором достигается переход от p_1^* к p_2^*. В этом идеальном процессе нет потерь и, следовательно, энтропия сохраняется постоянной, поэтому для температуры торможения получим другое значение $T_{2\text{ад}}^*$, определяемое формулой

$$T_{2\text{ад}}^* = \alpha \frac{\gamma - 1}{\gamma} p_2^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s_1 - s_0}{c_p}} < T_2^*.$$

Соответствующая механическая работа $A_{\text{ад}}$, которую надо затратить в идеальном процессе, равна

$$A_{\text{ад}} = c_p (T_{2\text{ад}}^* - T_1^*) G < A = c_p (T_2^* - T_1^*).$$

Отношение

$$\frac{A_{\text{ад}}}{A} = \eta_{\text{ад}} < 1$$

называется адиабатическим коэффициентом полезного действия (к.п.д.) компрессора в целом, этот коэффициент можно рассматривать также для каждой ступени в отдельности. Адиабатический к.п.д. является главной характеристикой технического совершенства компрессора.

Для данного компрессора $\eta_{\text{ад}}$ и степень сжатия π зависят в основном от расхода G, который можно в общем случае регулировать внешними условиями (скорость полета, площади проходных сечений и т. п.), и от числа оборотов рабочих колес, создающих напор. Для данного компрессора существуют расчетные наивыгоднейшие режимы работы, для которых $\eta_{\text{ад}}$ имеет наибольшее значение. Максимальные значения $\eta_{\text{ад}}$ зависят от типа, назначения и условий работы компрессора. В лучших авиационных компрессорах в одной ступени со степенью сжатия $\pi \approx 1{,}5$—$1{,}4$ достигаются значения $\eta_{\text{ад}} \approx 0{,}87$—$0{,}88$.

Из общей формулы при наличии в установившемся движении газа внешнего притока или оттока энергии

$$A + Q^{(e)} = c_p T_1^* \left(\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s_2-s_1}{c_p}} - 1\right) G \qquad (9.17)$$

можно вывести, что для получения данной степени сжатия π можно уменьшить потребную работу A с помощью уменьшения энтропии s_2 путем охлаждения газа ($Q^{(e)} < 0$) в процессе сжатия, так как при отборе тепла энтропия падает. В этом случае сжатый газ может оказаться первоначально при заметно пониженной температуре, однако при создании запасов сжатого газа в баллонах его сниженная температура впоследствии все равно выравнивается с температурой окружающей среды за счет теплопроводности.

Для установления количественных оценок возможных выгод сжатия газа с охлаждением применим формулу (9.17) к квазистационарному (обратимому) изотермическому процессу сжатия газа. В этом случае формула (9.17) и равенство $TdS = dQ^{(e)}$ дают

$$A^{(e)}_{\text{изот}} = -Q^{(e)} = -T(s_2 - s_1)G.$$

Так как в изотермическом процессе имеем

$$1 = \frac{T_2^*}{T_1^*} = \left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s_2-s_1}{c_p}}, \quad \text{то} \quad s_2 - s_1 = -c_p \ln \pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Следовательно, в этом случае получим

$$A^{(e)}_{\text{изот}} = Gc_pT_1 \ln \pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < A_{\text{ад}} = Gc_pT_1\left(\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right),$$

так как при $x = \pi^{(\gamma-1)/\gamma} > 1$ имеет место очевидное неравенство:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x} < \int_1^x dx = x - 1.$$

Турбина

В противоположность компрессору, в котором энергия сообщается потоку, турбина применяется для отбора механической энергии от потока жидкости или газа. В адиабатическом ($Q^{(e)} = 0$) потоке, проходящем через турбину, $A < 0$, поэтому согласно (9.17) в турбине $\pi < 1$ и, следовательно, в газе, проходящем через турбину, происходит падение полного давления $p_2^* < p_1^*$. На рис. 50 показаны типичные схемы осевой и радиальных турбин.

Простыми примерами турбин могут служить уже много веков используемые мельничные воздушные ветряные роторы и водяные колеса. Водяные турбины разнообразных мощностей вплоть до миллиона киловатт в одном колесе широко используются на гидроэлектростанциях. Паровые и газовые турбины

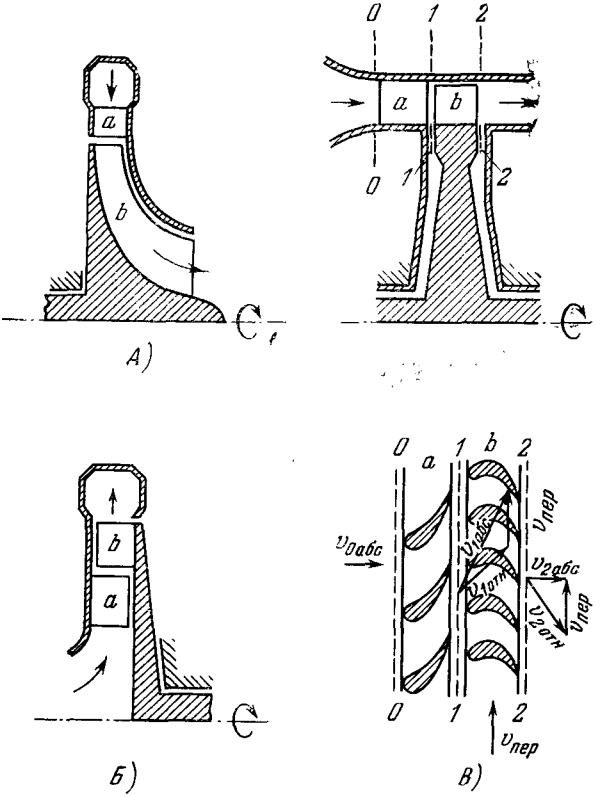


Рис. 50. Различные схемы турбин: *А*) радиальная центростремительная турбина; *Б*) радиальная центробежная турбина; *В*) ступень осевой турбины (*a* — сопловые аппараты, *b* — рабочие колеса), внизу справа показаны соответствующая развертка и направления скоростей).

получили большое распространение в технике для решения множества важных промышленных задач. В современных авиационных двигателях для вращения компрессоров или воздушных винтов применяются мощные газовые турбины (порядка сотен тысяч киловатт). Во многих случаях турбины используются как корабельные двигатели.

Турбинные колеса несут на себе специально спроектированные лопасти или лопатки, которые поворачивают протекающий через них водяной или газовый поток. Благодаря этому лопатки и колеса воспринимают большие реактивные силы, совершающие положительную работу. Таким путем энергия от газа или жидкости переходит к телу вращающегося колеса. Во многих случаях для получения наиболее благоприятных скоростей поток предварительно закручивается перед колесом и выпрямляется за ним с помощью специальных неподвижных направляющих сопловых аппаратов, которые регулируют также и величины скоростей жидкости или газа (см. схемы на рис. 50). Так же как и компрессор, турбина может состоять из нескольких ступеней, имеющих одинаковую или разные угловые скорости вращения.

Рассмотрим вопрос о моменте (относительно неподвижной оси вращения) гидродинамических сил, действующих на колесо одной ступени турбины (или компрессора), вращающееся с постоянной угловой скоростью.

Заметим прежде всего, как это было много раз уже указано и использовано выше, что в относительных движениях в различных инерциальных системах отсчета силовые взаимодействия в каждой точке среды, а также и суммарные силы и моменты одинаковы. Если рассмотреть теперь два движения жидкости или газа: первое относительно неподвижной инерциальной системы координат и второе относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с колесом турбины, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной оси, то в последнем случае необходимо ввести в рассмотрение действующие на среду внешние массовые центробежные силы инерции и внешние массовые силы инерции Кориолиса. Наличие массовых сил инерции в относительных движениях связано с появлением обобщенных «архимедовых сил» и их моментов.

Эти силы действуют не только на газ или жидкость, но и на тело вращающегося колеса и на укрепленные на нем лопатки. Большие (из-за большой угловой скорости вращения ω колеса турбины) массовые силы инерции приводят к огромным разрывающим напряжениям в теле колес и, особенно, в лопастях (лопатках) турбин. В основном именно поэтому приходится ограничивать величину угловой скорости вращения турбин и воздушных винтов. В связи с этим условием прочности турбин в их стальных лопастях и лопатках не допускаются окружные скорости, превышающие 700 *м/сек*. Это является серьезным ограничением, которое необходимо учитывать при проектировании воздушных винтов и вращающихся колес. Очевидно, что в профилированных элементах неподвижных направляющих аппаратов такого рода разрывающих напряжений не возникает.

С практической точки зрения рассмотрение сил и моментов, действующих на неподвижные части конструкции, надо производить в неподвижных системах координат, а силы и моменты, действующие на подвижные части, необходимо определять и рассматривать в сопутствующей подвижной системе. При определении суммарного гидроаэродинамического момента, действующего на вращающееся колесо турбомашины, можно воспользоваться допущением о том, что движение жидкости и газа относительно колеса установившееся [1]).

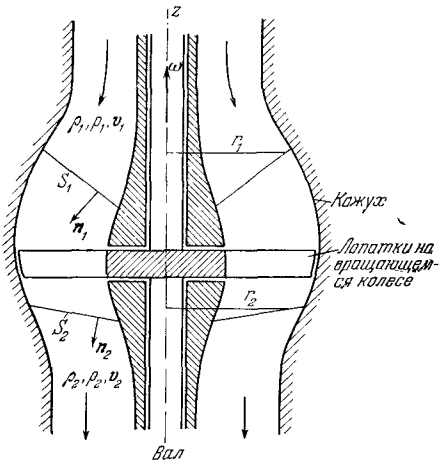


Рис. 51. Схема проточной части турбины и соответствующих элементов контрольной поверхности.

Для определенности рассмотрим одно колесо турбины (рис. 51) и возьмем в качестве контрольной поверхности поверхности лопаток турбины, осесимметричного кожуха, части тела обтекателя вала (соприкасающейся с потоком) и поверхности круглых конусов S_1 и S_2, пересекающих поток на входе и выходе из турбины соответственно.

Произведем расчет момента относительно оси турбины z гидродинамических сил, действующих на лопатки турбины, для простоты в рамках теории идеальной жидкости. Поэтому пренебрежем силой трения на неподвижном кожухе, обтекателе и сечениях S_1 и S_2.

Очевидно, что все силы давления, действующие на части контрольной поверхности, являющиеся поверхностями вращения около оси z, пересекают ось z или параллельны ей, и поэтому их момент относительно этой оси равен нулю. Следовательно, отличный от нуля момент гидродинамических сил давления относительно оси z дадут, вообще говоря, только силы давления, действующие на вращающиеся лопатки турбины.

---

[1]) Это допущение при наличии направляющих аппаратов хорошо согласуется с действительностью только в среднем, так как положение лопаток турбины относительно каналов направляющих аппаратов периодически меняется и движение газа или жидкости будет периодическим, неустановившимся. При большой угловой скорости вращения соответствующий период очень мал, увеличение числа лопаток также приводит к его уменьшению.

Центробежные силы, действующие на лопатки, пересекают ось z и также не дают момента относительно оси z. Отличный от нуля суммарный момент сил Кориолиса, действующих на частицы жидкости, обозначим через M_{kz}. В случае установившегося движения этот момент легко вычисляется. Для этого представим в каждой точке потока относительную скорость среды $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ в виде

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v}_z,$$

где $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_t$ и $\boldsymbol{v}_z$ — радиальная, трансверсальная и осевая относительные скорости. Через v_r, v_t и v_z будем обозначать величины этих скоростей. Легко видеть, что момент M_{kz} будет равен

$$M_{kz} = -2\omega \int_V r v_r \rho d\tau = -2\omega \int_{\mathcal{M}} r \frac{dr}{dt} dm = -\omega \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} r^2 dm,$$

где V — объем, а $\mathcal{M}$ — масса, ограниченные контрольной поверхностью.

Отсюда, так как движение принято установившимся и на екнтрольной поверхности $v_{n\,\text{отн}} \neq 0$ только в сечениях S_1 и S_2, получим

$$M_{kz} = \omega \int_{S_1} r_1^2 \, dG - \omega \int_{S_2} r_2^2 dG = \int_{S_1} r_1 u_1 dG - \int_{S_2} r_2 u_2 dG, \qquad (9.18)$$

где G — массовый расход, $dG = \rho v_n d\sigma$, u_1 и u_2 — значения переносной линейной скорости в сечениях S_1 и S_2 соответственно, а направление нормали $\boldsymbol{n}$ к S_1 и S_2 указано на рис. 51.

На основании уравнения моментов количества движения для установившегося движения (7.3) (при $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{h} = \boldsymbol{Q}_n = 0$) найдем момент сил давления, действующих на лопатки ротора,

$$M_z = \int_{S_1} r_1 v_{t1\text{отн}} dG - \int_{S_2} r_2 v_{t2\text{отн}} dG + M_{kz}. \qquad (9.19)$$

Формула Эйлера

Вместо относительных трансверсальных скоростей можно ввести абсолютные трансверсальные скорости

$$v_{t1\text{отн}} = v_{t1\text{абс}} - u_1 \quad \text{и} \quad v_{t2\text{отн}} = v_{t2\text{абс}} - u_2,$$

и с помощью (9.18) и (9.19) получить

$$M_z = \int_{S_1} r_1 v_{t1\text{абс}} dG - \int_{S_2} r_2 v_{t2\text{абс}} dG. \qquad (9.20)$$

Формула (9.20) называется формулой Эйлера, ее легко получить непосредственно из формулы (9.19), если рассмотреть установившееся абсолютное движение жидкости или газа, для которого $M_{kz} = 0$. Естественно использовать этот простой и непосредственный вывод формулы Эйлера, однако предыдущий вывод тоже несложен и вместе с этим полезен для более глубокого понимания сущности этой задачи и относительного движения.

Крутящий момент M_z тесно связан с расходом газа или жидкости через газовую или гидравлическую машину и определяется закруткой потока $v_{t\,1\text{абс}}$ и $v_{t\,2\text{абс}}$ на входе и выходе из вращающегося колеса. Пропускная способность, расход и закрутка определяются геометрическими параметрами подводящих каналов направляющих аппаратов и рабочего колеса, а также заданными параметрами газа и угловой скоростью ротора.

По аналогии с $\eta_{\text{ад}}$ для компрессора можно определить адиабатический коэффициент полезного действия $\eta_{\text{ад}}$ турбины как отношение полученной мощности к мощности идеальной, достижимой при адиабатическом обратимом процессе без потерь, без роста энтропии,

$$\eta_{\text{ад}} = \frac{c_p (T_1^* - T_2^*)}{c_p (T_1^* - T_{2\text{ад}}^*)} = \frac{A}{A_{\text{ад}}}. \tag{9.21}$$

Организация совершенного гидроаэродинамического процесса в турбинах легче, чем в компрессорах, к.п.д. турбин обычно высок и, вообще говоря, превышает к.п.д. компрессоров. В лучших газовых турбинах достигается

$$\eta_{\text{ад}} \approx 0{,}94.$$

Качественное соотношение между турбинами и компрессорами приблизительно такое же, как между соплами и диффузорами.

В газовую турбину поступает газ из камер сгорания с высокой температурой торможения T_1^* и статической температурой T_1, поэтому в газовых турбинах лопатки работают в более тяжелых условиях, чем в компрессорах. В связи с этим возникают важные задачи охлаждения лопаток и дисков турбин и обеспечения прочности и долговечности турбинных дисков и лопаток [1]).

В гидравлических турбинах при больших скоростях обтекания возникают опасности, связанные с образованием кави-

[1]) Потери, связанные с охлаждением, снижают к.п.д. турбин на 2—4%.

тации. При отборе большой энергии от жидкости или газа в турбине происходит большое снижение температуры газа. Этим эффектом можно пользоваться для охлаждения газа в установках для сжижения газа (турбодетандерах).

Данная турбина может работать на различных режимах при разном числе оборотов в секунду и в зависимости от регулирования расхода газа или жидкости путем заданной подачи массы газа в единицу времени, регулирования давления или проходных сечений на выходе.

Эжектор

Эжектор представляет собой специальный канал, во входное сечение которого поступают струи жидкости или газа с различными давлениями торможения и, как правило, с различными скоростями; эжектор обычно применяется для того, чтобы повысить полное давление струи одного газа за счет струи другого. Разнородные

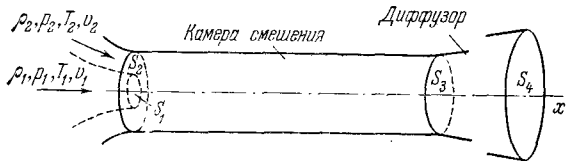


Рис. 52. Схема эжектора. На входе поступают эжектирующая (в сечении S_1) и эжектируемая (в сечении S_2) струи. В сечениях S_3 и S_4 после камеры смешения поток однороден.

струи жидкости и газа смешиваются в части канала эжектора, который называется камерой смешения. В камере смешения происходит обмен энергией, выравнивание давлений, плотностей и температур, в результате чего вырабатывается однородный поток смеси, который затем можно тормозить или ускорять с помощью диффузора или сопла, примыкающих к камере смешения. Схема эжектора приведена на рис. 52. Эжекторы применяются также в тех устройствах, во входное сечение которых требуется засосать жидкость или газ.

Эжектирующий высоконапорный поток с параметрами, обозначенными индексом 1, вытекает через сопло с площадью S_1 в камеру смешения — канал постоянного (или изменяющегося по длине) круглого (или другой формы) сечения и увлекает частицы эжектируемой жидкости или газа, поступающие в камеру смешения через сечение с площадью S_2. Параметры этого потока отмечены индексом 2. Между струями происходит смешение, которое приводит к практически равномерному потоку на расстоянии 8—10 диаметров камеры в сечении S_3. Характер выравнивания профиля скорости показан на рис. 53.

На рис. 52 и 53 эжектирующая струя показана как внутренняя, но могут быть различные случаи, когда эжектирующая струя является внешней или когда каждая из струй подводится к камере смешения через несколько сопел. Последний способ позволяет достигнуть перемешивания при более короткой камере смешения.

Механизм смешения потоков с разными скоростями на входе в эжектор обусловливается в ряде случаев неустойчивостью начальной поверхности разрыва скорости и тесно связан

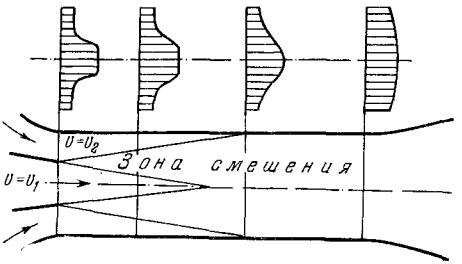


Рис. 53. Типичные профили распределения скоростей в эжекторе при дозвуковых режимах смешения.

с эффектом вязкости и явлением диффузии, а в некоторых случаях с физико-химическими процессами, например с горением внутри камеры смешения. Несмотря на это, в случае цилиндрической камеры смешения при пренебрежении силами трения на границах камеры смешения во многих случаях, когда смешение в действительности осуществляется, характеристики результирующего потока в сечении S_3 можно рассчитать независимо от промежуточных процессов в камере смешения. По аналогии и по существу в эжекторе параметры потоков в сечениях $S_1 + S_2$ и S_3 связаны универсальными уравнениями сохранения так же как на сильных разрывах — скачках, которые тоже во многих случаях (но тоже не всегда) можно вводить и рассматривать в рамках моделей идеальных жидкостей или газов независимо от внутренних непрерывных, но резко меняющихся процессов в действительных явлениях, связанных со свойствами вязкости, теплопроводности, с кинетикой химических реакций и т. п.

Проблема смешения потоков в струях имеет важное значение при проектировании камер смешения и, в частности, при установлении их длины. Тем не менее ответ на вопрос о возможности или невозможности осуществить смешение заданных на входе в данный эжектор потоков в некоторых случаях можно дать на основании написанных ниже общих уравнений сохра-

нения. Однако в некоторых важных случаях, например при наличии сверхзвуковых струй в камере смешения, для ответа на этот вопрос требуется анализировать меняющуюся форму струй и механизм их смешения внутри эжектора.

Для камеры смешения с установившимся потоком общие интегральные соотношения, примененные к контрольной поверхности, состоящей из цилиндрической поверхности камеры, сечений $S_1 + S_2$ и S_3, независимо от характера внутренних процессов в камере смешения, записываются следующим образом.

Уравнение сохранения массового расхода

$$G_1 + G_2 = G_3, \quad \text{где} \quad G_i = \rho_i v_i S_i. \tag{9.22}$$

При отсутствии внешних притоков энергии уравнение энергии имеет вид

$$G_1 i_1^* + G_2 i_2^* = G_3 i_3^*, \tag{9.23}$$

где

$$i^* = \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho}$$

— полное удельное теплосодержание, i_1^* и i_2^* — удельные теплосодержания, вообще говоря, разных сред на входе, i_3^* — термодинамически определенное удельное теплосодержание для смеси данного состава на выходе.

Уравнение импульсов для цилиндрической камеры

$$p_1 S_1 + G_1 v_1 + p_2 S_2 + G_2 v_2 = p_3 S_3 + G_3 v_3. \tag{9.24}$$

Если камера смешения не цилиндрическая, а, например, поверхность вращения около оси x, то слева в (9.24) необходимо приписать член вида

$$-\int_{\Sigma_0} p \cos(n, x)\, d\sigma = -R_{\Sigma_0},$$

где n — направление внешней нормали к боковой поверхности камеры смешения Σ_0, а p — давление на Σ_0, величина которого связана с деталями явления смешения в камере. Величина R_{Σ_0} представляет собой силу сопротивления (или тягу) эжектора, действующую на часть его поверхности Σ_0. В некоторых случаях уравнение (9.24) можно использовать для определения R_{Σ_0}. В других случаях можно задаваться величиной R_{Σ_0} на основании опытов или апробированных опытами допущений. Введением добавочного эмпирического члена в уравнение (9.24) можно приближенно учесть наличие сил сопротивления, обусловленных силами вязкого трения на Σ_0. Площади S_1,

S_2 и S_3 — характерные геометрические параметры эжектора. Если камера смешения цилиндрическая, то

$$S_1 + S_2 = S_3. \tag{9.25}$$

Отношение расхода эжектируемого потока G_2 к расходу эжектирующего потока G_1 называется коэффициентом эжекции

$$n = \frac{G_2}{G_1} = \frac{\rho_2 v_2 S_2}{\rho_1 v_1 S_1}. \tag{9.26}$$

Величина коэффициента эжекции n является одной из основных характеристик рабочего процесса в эжекторе, от n зависит величина i_3^*, если газы или жидкости на входе разные. Соотношения (9.22) — (9.26) одинаковы как для жидкостей, так и для газов. Если некоторые из характеристик потока (например, при дозвуковом истечении — давление) заданы на выходе из диффузора, то выписанная система уравнений должна быть дополнена соотношениями, характеризующими движение жидкости или газа в диффузоре (на практике с учетом данных о потерях в диффузоре). В четырех соотношениях (9.22) — (9.25), содержащих 12 параметров ρ_i, p_i, v_i, S_i, специфика жидкостей и газов проявляется через выражение для теплосодержания i_i^* (ρ, p, v).

Теория и расчет эжекторов с целью их проектирования или установления свойств текущих в них жидкостей или газов тесно связаны и в значительной мере основаны на анализе и разрешении указанных выше уравнений относительно соответствующих неизвестных параметров [1]). Системы известных заданных и неизвестных искомых параметров могут быть различными в зависимости от постановки задачи. Действительный переход в эжекторе от неравномерного «раздельного» потока во входном сечении $S_1 + S_2$ к смешанному однородному потоку в сечении S_3 в цилиндрической камере смешения можно рассматривать как осредненное течение при условии сохранения импульса (9.24) в действительном и осредненном движениях.

Анализ уравнений (9.22) — (9.25) показывает, что при заданных p_1, ρ_1, v_1, S_1, p_2, ρ_2, v_2, S_2 (или p_1^*, T_1^*, $\lambda_1 = \frac{v_1}{v_{\text{кр.1}}}$, S_1, p_2^*, T_2^*, λ_2, S_2) эта система при $S_3 = S_1 + S_2$ не всегда имеет решение для p_3, ρ_3, v_3 (или p_3^*, T_3^*, λ_3). Таким образом,

---

[1]) С применяемыми методами и результатами решения можно ознакомиться в специальных книгах и статьях. См., например, Г. Н. Абрамович, Прикладная газовая динамика, Изд-во «Наука», 1969, С. С. Григорян, К теории газового эжектора, сб. статей № 13, «Теоретическая гидромеханика», изд. Мин. авиац. промышленности СССР, 1954.

такое осреднение вообще может быть невозможным. В случае дозвуковых струй задаваемые давления на входе должны быть одинаковыми, т. е. $p_1 = p_2$. Если обе струи (или одна из них) сверхзвуковые, то равенство $p_1 = p_2$ может не выполняться. Значения p_1, ρ_1, v_1 и p_2, ρ_2, v_2 при заданных p_1^*, T_1^* и p_2^*, T_2^* зависят от профилей подводящих каналов.

В тех случаях когда смешение возможно, в соответствии с уравнениями (9.22) — (9.25) можно вычислить изменение энтропии

$$G_1 s_1 + G_2 s_2 - (G_1 + G_2)\, s_3 = \Delta S. \qquad (9.27)$$

В результате вычислений должно быть

$$\Delta S \geqslant 0,$$

что связано с необратимым характером процесса смешения.

Можно рассмотреть идеальный обратимый процесс смешения (при наличии внешних массовых сил), когда вместо сохранения импульса (9.24) можно взять уравнение (9.27) при $\Delta S = 0$ и определить соответствующее давление торможения $p_{3\,\text{ид}}^*$. Тогда в качестве основной характеристики камеры смешения (к.п.д. камеры смешения) можно ввести коэффициент

$$\sigma_{\text{эж}} = \frac{p_3^*}{p_{3\,\text{ид}}^*} \leqslant 1, \qquad (9.28)$$

где p_3^* — давление торможения в действительном процессе, а $p_{3\,\text{ид}}^*$ — давление торможения в случае идеального смешения, при одинаковых данных на входе в эжектор.

Потери кинетической энергии газов при смешении

Рассмотрим еще некоторые важные качественные эффекты течений в эжекторах. Предположим, что в эжектор входят струи одной и той же несжимаемой жидкости $\rho_1 = \rho_2 = \text{const}$ с разными скоростями, но с одинаковыми давлениями $p_1 = p_2$.

Для несжимаемой жидкости

$$i^* = \frac{v^2}{2} + cT + \frac{p}{\rho},$$

где c — теплоемкость, а cT — внутренняя энергия. Форму осесимметрической части эжектора можно подобрать так, чтобы в смешивающемся потоке давление везде сохранялось постоянным, $p = p_1 = p_2$. Примем, что смешение в камере, происходит из-за вязкости (вязким трением на стенках камеры эжектора и в сечениях S_1, S_2 и S_3 пренебрегаем). В такой постановке задачи уравнения энергии (9.23) и импульсов (9.24)

дают

$$G_1\frac{v_1^2}{2}+G_2\frac{v_2^2}{2}+G_1cT_1+G_2cT_2=(G_1+G_2)\frac{v_3^2}{2}+(G_1+G_2)\,cT_3$$

и

$$G_1v_1+G_2v_2=G_3v_3,$$

так как постоянное на S_1, S_2, S_3 и Σ_0 давление дает общую силу, равную нулю.

Из этих двух соотношений непосредственно получим

$$\Delta E=G_1\frac{v_1^2}{2}+G_2\frac{v_2^2}{2}-(G_1+G_2)\frac{v_3^2}{2}= \tag{9.29}$$

$$=\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}\frac{(v_1-v_2)^2}{2}=(G_1+G_2)\,cT_3-(G_1cT_1+G_2cT_2)>0.$$

Из-за постоянства давлений в камере при смешении несжимаемой жидкости величина ΔE — потеря кинетической энергии, представляет собой общие потери механической энергии. Эта потерянная энергия идет на нагревание, подобно энергии, теряемой при неупругих ударах, когда также происходит выравнивание скоростей. Справа в (9.29) стоит увеличение внутренней энергии после смешения. Из (9.29) можно вычислить температуру смеси T_3.

Газовый эжектор со сверхзвуковыми скоростями в камере смешения

Рассмотрим эжектор, в котором происходит смешение газовых струй совершенного газа. С ростом отношения давлений торможения p_1^*/p_2^*, а также при снижении противодавления на выходе из диффузора в сечении S_4 (см. рис. 52) скорость газов на входе в камеру увеличивается. При определенных соотношениях указанных параметров скорость высоконапорного (эжектирующего) газа, если сопло суживающееся, становится звуковой, $M_1=\lambda_1=1$, или, если в эжекторе для этого газа применено сопло Лаваля, сверхзвуковой, когда $\lambda_1=\lambda_{\text{расч}}>1$, где $\lambda_{\text{расч}}$ — расчетное значение коэффициента скорости на срезе сопла. Дальнейшее повышение p_1^*/p_2^* или p_0/p_4, где p_0 — давление покоящегося газа далеко перед соплом, не может изменить этой величины λ_1. При некотором значении p_0/p_4 в горле сопла достигается скорость звука и, начиная с этого момента, расход в эжектирующей струе становится критическим. В этом случае статические давления на входе в эжектирующей и эжектируемой струе могут быть различными и в соответствии с этим коэффициент скорости λ_2 можно задавать, вообще говоря, произвольно. Из экспериментов, однако, известно, что существует

только определенный диапазон изменений значений λ_2, для которых возможно движение газа в эжекторе с $G_2 \neq 0$. Для определения возможных значений λ_2 необходим анализ течения газов в начальном участке камеры смешения. При звуковых или сверхзвуковых режимах в эжектирующей струе (при $\lambda_1 \geqslant 1$) возникают эффекты, качественно отличные от эффектов, наблюдающихся при движении газа с дозвуковыми скоростями или при смешении струй несжимаемой жидкости.

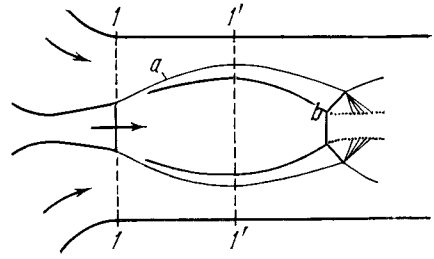


Рис. 54. Схема движения газов в начальном участке камеры смешения, когда внутренняя сверхзвуковая эжектирующая струя расширяется; a — граница струи, b — скачки уплотнения.

Звуковая или сверхзвуковая струя эжектирующего газа со статическим давлением p_1 на выходе из сопла большим, чем в эжектируемом газе, после выхода в камеру продолжает расширяться, при этом средняя сверхзвуковая скорость растет, а площадь сечения струи увеличивается. В сечении $1' - 1'$ (рис. 54) площадь сечения эжектирующей струи достигает максимума, а статическое давление в ее ядре становится значительно меньше, чем во внешнем потоке. Далее струя вновь сжимается и образуется характерная периодическая «бочкообразная» структура струи со значительными изменениями давления и скорости как в продольном, так и в поперечном направлениях.

Для основных законов эжектирования весьма существенны характеристики движения эжектирующего газа от среза сопла до максимального сечения первой «бочки»; это сечение ($1'—1'$ на рис. 54) называется *сечением запирания*. С помощью ряда допущений, основанных на опытных данных, течение в начальном участке поддается приближенному расчету. Оставляя в стороне количественные расчеты, отметим в общих чертах некоторые качественные особенности эжектирования при образовании в камере смешения сечения запирания. Ускоряющаяся эжектирующая струя между сечениями $1—1$ и $1'—1'$ увлекает эжектируемый газ, который при дозвуковых скоростях истечения в сечении $1—1$ ускоряется главным образом за счет перепада давлений до сечения $1'—1'$ при сравнительно слабом смешении с эжектирующим потоком.

В наиболее узком для эжектируемого потока сечении $1'—1'$ коэффициент скорости λ_2' эжектируемого газа достигает максимума $\lambda_2' \leqslant 1$. Наибольшее значение $\lambda_2 = 1$ соответствует

критическому значению $\widetilde{\lambda}_2$ на входе в эжектор, которое нельзя повысить уменьшением противодавления p_4 на выходе из диффузора эжектора. Коэффициент λ_2 для эжектируемой струи в зависимости от давления на выходе из эжектора может меняться произвольно, оставаясь меньше, чем $\widetilde{\lambda}_2$. Установившееся движение в эжекторе при $\lambda_2 = \widetilde{\lambda}_2$ (в сечении *1—1*), зависящем от отношения p_1^*/p_2^*, называется *критическим режимом*.

На рис. 55 представлены экспериментальные

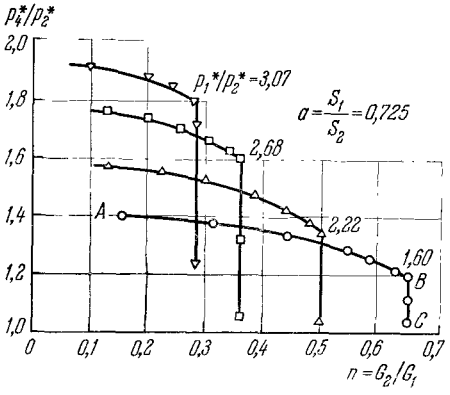


Рис. 55. Характеристики эжектора при разных p_1^*/p_2^*. Участки кривых типа AB соответствуют докритическим режимам, участки типа BC — критическим режимам, на которых коэффициент эжекции n не зависит от противодавления.

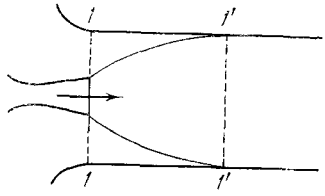


Рис. 56. Схема расширения эжектирующей струи при запирании эжектора.

данные для эжектора со сверхзвуковой струей эжектирующего газа.

При критическом режиме с уменьшением p_4^*/p_1^* и повышением p_1^*/p_2^* струя эжектирующего газа расширяется более интенсивно и поэтому сужается проходная площадь для эжектируемого газа. В связи с этим падает коэффициент эжекции $n = G_2/G_1$. При некотором значении p_1^*/p_2^*, зависящем от отношений p_4^*/p_1^* и S_2/S_1, расширяющаяся струя в сечении *1′—1′* заполняет полностью площадь камеры смешения (рис. 56), вследствие этого коэффициент эжекции n обращается в нуль, происходит *явление запирания* эжектора. На режиме запирания эжекция отсутствует. Явление запирания исключает возможность реализации некоторых режимов смешения в цилиндрической камере, которые можно получить расчетом по уравнениям (9.22) — (9.25).

На практике критические режимы смешения в эжекторе являются наивыгоднейшими, так как они соответствуют максимальным коэффициентам эжекции и минимальным потерям из-за наименьшей разности скоростей в смешиваемых струях.

Так же как и в случае условий на скачках, решение системы уравнений (9.22) — (9.25) при смешении совершенного газа двузначно. Одно из решений соответствует дозвуковому, а другое — сверхзвуковому режиму течения смеси на выходе из камеры. Отбор требуемого решения связан с анализом потока в камере смешения. Можно показать, что осуществляемый режим истечения на выходе из камеры смешения определяется в значительной степени условиями в сечении запирания.

Применение эжекторов

Эжектор представляет собой простое и удобное для применений устройство, широко используемое на практике. Например, эжекторы применяются в аэродинамических трубах для засасывания потока воздуха на выходе из трубы. Эжекторы часто употребляются в сверхзвуковых трубах, действующих на выхлоп в атмосферу и рассчитанных на большие значения числа Маха.

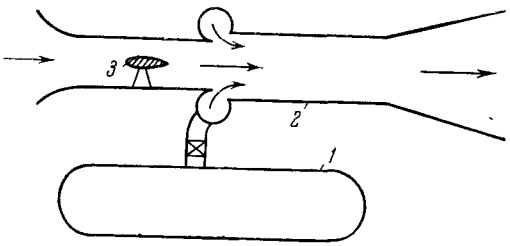


Рис. 57. Схема аэродинамической трубы с эжектором: *1* — баллон со сжатым воздухом, *2* — эжектор, *3* — рабочая часть трубы.

В рабочую часть сверхзвуковых труб подается сжатый и сильно подогретый воздух с большими давлением и температурой торможения, соответствующими по условиям полного или частичного подобия большим скоростям полета. При больших значениях числа M в рабочей части трубы при дальнейшем торможении потока неизбежны большие потери полного давления. С помощью диффузоров и эжектора, действующего как компрессор или эксгаустер, с использованием запаса сжатого воздуха в баллонах, в аэродинамической трубе обеспечивается требуемый поток воздуха (рис. 57).

Эжекторы применяются для дополнительного использования энергии реактивной струи, смешиваемой с засасываемым атмосферным воздухом. На входе и внутри специальной камеры смешения создаются благоприятные распределения давлений, способствующие увеличению тяги. Однако наряду с тягой, развивающейся на входе и внутри дополнительно присоедини-

емого эжектора, при этом появляется дополнительное сопротивление на внешних поверхностях системы эжектора. Это и некоторые другие обстоятельства ограничивают области применения эжекторов для увеличения тяги. Эжекторы используются также как насосы для создания глубокого вакуума. Например, с помощью эжекторов, работающих на парах ртути, можно получать разрежения порядка миллионных долей атмосферы. Эжекторы широко используются во многих системах добычи и транспортировки по трубам различных газов.

§ 10. Основные элементы теории реактивной тяги

Классическим типом реактивного двигателя является ракетный двигатель.

Ракетный двигатель

Рассмотрим неподвижное тело или тело, движущееся поступательно с постоянной скоростью. Пусть в теле есть камера — полость, в которой имеется или образуется при горении из запаса веществ, входящих в состав массы тела (обычно твердое или жидкое топливо),

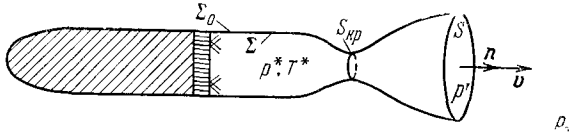


Рис. 58. Схема ракетного двигателя.

сжатый газ с давлением торможения p^* и температурой торможения T^*. Допустим, что сжатый газ вытекает из камеры через специальное сопло во внешнее по отношению к телу пространство, в котором имеется давление $p_0 < p^*$ (рис. 58).

Если отношение $p^*/p_0 \approx 1$, то на выходе из сопла скорость истечения дозвуковая; если $p^*/p_0 \gg 1$, то возникнет сверхзвуковая струя (при применении сопла Лаваля).

Обозначим через S площадь сечения на выходе газовой струи из тела во внешнее пространство. Если скорость истечения газа относительно тела дозвуковая, то на выходе в однородной (по предположению одномерной теории) струе давление будет равно внешнему давлению p_0. Если сопло представляет собой расчетное сопло Лаваля, то давление в сверхзвуковой струе на выходе тоже равно p_0. Поток газа в сопле Лаваля может достигать сверхзвуковых скоростей за критическим сечением и затем внутри сопла Лаваля переходить в дозвуковое движение через систему скачков уплотнения. В этом случае на срезе сопла (в рамках одномерной теории) в истекающей дозвуковой

струе также будет образовываться давление, равное внешнему давлению p_0. При чисто сверхзвуковом нерасчетном истечении давление в струе p' на площади S будет получаться не равным p_0; если $p' > p_0$, то имеем недорасширенное сопло, если $p' < p_0$ — перерасширенное. В одномерной теории можно принять, что вектор относительной скорости истечения газа на выходе из сопла $\boldsymbol{v}$ постоянен по сечению S и перпендикулярен к нему.

Рассмотрим общую силу, действующую на тело по поверхности Σ, состоящей из стенок сопла и границы камеры сгорания, со стороны движущегося газа, и по внешней поверхности тела Σ_0 от распределенного по ней постоянного давления p_0.

Определим силу тяги $\boldsymbol{R}$ ракетного двигателя как сумму поверхностных сил, действующих на тело по поверхности $\Sigma + \Sigma_0$. Так как

$$-\int_{\Sigma_0} p_0 \boldsymbol{n} d\sigma = \int_S p_0 \boldsymbol{n} d\sigma = p_0 S \boldsymbol{n},$$

то для силы тяги $\boldsymbol{R}$ (см. определение (8.1)) верна формула

$$\boldsymbol{R} = -\int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n d\sigma - \int_{\Sigma_0} p_0 \boldsymbol{n} d\sigma = -\int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n d\sigma + p_0 S \boldsymbol{n}, \qquad (10.1)$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S, параллельный вектору скорости истечения. Для вычисления силы тяги применим уравнение количества движения к движущейся относительно тела массе газа, ограниченной замкнутой контрольной поверхностью, состоящей из поверхности Σ и сечения сопла на выходе S. Предполагая движение относительно двигателя ракеты установившимся и пренебрегая массовыми силами, напишем

$$\int_{\Sigma+S} \rho \boldsymbol{v} v_n d\sigma = \int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n d\sigma - \int_S p' \boldsymbol{n} d\sigma. \qquad (10.2)$$

Так как $v_n = 0$ на твердых границах, то, пренебрегая малым количеством движения поступающих в камеру сгорания в жидком или твердом виде с большой плотностью компонент горючего, из (10.1) и (10.2) найдем основную формулу для тяги ракетного двигателя:

$$\boldsymbol{R} = -[(p' - p_0) S + \rho v^2 S] \boldsymbol{n}. \qquad (10.3)$$

Знак минус перед скобкой показывает, что при положительном значении выражения в скобках вектор $\boldsymbol{R}$ направлен против направления внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к S и, следовательно, действительно имеется тяга.

В частности, если *режим* истечения *расчетный*, то для величины тяги верна очень простая формула:

$$R = \rho v^2 S = Gv,$$

где $G = \rho v S$ — расход газа через сопло.

Максимальность тяги расчетного сопла

Покажем, что при заданном расходе, который определяется полностью площадью сечения горла сопла, тяга расчетного сопла имеет максимальное значение. Рассмотрим разницу в тяге при истечении на различных режимах. На рис. 59

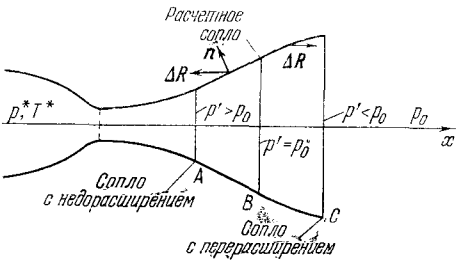


Рис. 59. Схема сечений на выходе из сопла при различных режимах истечения.

схематически показаны сечения сопла, соответствующие различным режимам истечения.

Из общей формулы (10.1) следует, что, если не учитывать сил трения по поверхности сопла, то при недорасширении недобирается часть тяги ΔR, представляемая интегралом по участку AB:

$$\Delta R = -\int_{AB} (p - p_0)\cos(nx)\,d\sigma > 0,$$

так как $p > p_0$, $\cos(nx) < 0$ на AB. При перерасширении тяга получает отрицательное приращение ΔR

$$\Delta R = -\int_{BC} (p - p_0)\cos(nx)\,d\sigma < 0,$$

так как $p < p_0$, $\cos(nx) < 0$ на BC. Отсюда следует, что расчетное сопло теоретически наиболее выгодное.

Однако на практике в ракетных двигателях, предназначенных для работы на больших высотах (и тем более в космическом пространстве), невозможно обеспечить расчетные режимы истечения газа из сопла, так как требуемая для этого площадь выходного сечения оказывается чрезмерно большой. Например, при давлении внутри камеры сгорания $p^* = 100$ *кГ/см*^{2}

и высоте полета 30 *км* ($p_0 = 0{,}01$ *кГ/см*^{2}) площадь выходного сечения должна быть примерно в 500 раз больше критического, а при $p_0 \to 0$ $S/S_{кр} \to \infty$. Поэтому сопла ракетных двигателей работают, как правило, на режимах недорасширения.

Температура торможения продуктов горения и теплота реакции

Обозначим через T'^* и p'^* температуру и давление торможения в газовом потоке на срезе сопла ракетного двигателя. Рассмотрим газ горячей реактивной струи как совершенный и обозначим через i'^* его полное удельное теплосодержание. Если пренебречь небольшой теплоотдачей через стенки камеры сгорания и сопла, то можно написать

$$i'^* = c_p T'^* = i_1^* = i_2^* + h. \tag{10.4}$$

Здесь c_p — средняя теплоемкость при постоянном давлении продуктов горения; i_1^* — полное удельное теплосодержание при исходной начальной температуре композиции топливных компонент, подаваемых в камеру сгорания [1]); i_2^* — полное теплосодержание при той же начальной температуре продуктов химической реакции (соответственно при полном или неполном сгорании, в зависимости от организации процесса горения); h — соответствующая теплота реакции, рассчитанная на единицу массы газа, истекающего через сопло [2]).

Теплосодержание, так же как и внутреннюю энергию, для данной системы компонент топлива и, соответственно, продуктов горения можно рассматривать с точностью до аддитивной постоянной. Использование для газа (продуктов реакции) формулы $i^* = c_p T^*$, где T^* — температура адиабатического торможения, связано с определенным фиксированием этой аддитивной постоянной.

Величины i_1^* и h — основные химические характеристики применяемых топлив; эти величины существенно зависят от весового отношения компонент топлива, поступающего в камеру сгорания двигателя, и от полноты сгорания [3]), обусловленной процессами испарения, смешения и, вообще говоря, свойствами кинетики химических реакций. В зависимости от состава топлива величину i_1^* можно рассчитать по опытным

---

[1]) В полном теплосодержании i_1^* доля кинетической энергии компонент топлива, поступающего в камеру сгорания, ничтожна и на практике меньше 10^{-4} части от h.

[2]) Во многих практически важных случаях, особенно при применении жидких топлив при низкой температуре (например, жидкий кислород и водород), в современных двигателях имеет место неравенство $i_2^* \ll h$.

[3]) В современных двигателях достигается очень высокая степень полноты сгорания.

данным химической термодинамики. Наибольшее удельное значение i_1^* отвечает стехиометрической смеси. Стехиометричность можно обеспечивать с помощью систем подачи компонент топлива в камеру сгорания. Сравнение различных комбинаций ракетных топлив и их оценку можно производить для стехиометрических смесей или для некоторых заданных диапазонов весовых соотношений компонент.

Таблица

Теплота реакции горючих компонент топлив при стехиометрической смеси [1])

Горючее	Окислитель	Удельная теплота реакции, $h\frac{ккал}{кГ}$	Удельная тяга $R_{уд.\ ид.}$, $\frac{кГ}{кГ/сек}$, при $\frac{p'}{p'^*}=\frac{1}{100}$
Жидкий водород H_2	Жидкий кислород O_2	3 030	400
Литий	» »	3 500	370
Керосин	» »	2 270	310
Этиловый спирт	» »	2 020	300
Гидразин	» »	1 940	320
Водород H_2	Жидкий фтор F_2	3 030	420
Литий	» »	3 170	420
Гидразин	» »	2 420	370
Керосин	Азотная кислота	1 440	265
Керосин	Четырехокись азота	1 710	285
Атомарный кислород O	Атомарный кислород O	3 800	
Атомарный водород H	Атомарный водород H	51 600	4500
Атомарный водород H	Атомарный кислород O	11 300	

[1]) Подробные термодинамические данные для различных систем горючего и окислителей можно найти в G. Sutton Rocket propulsion elements N. Y.—L., 1963; М. Баррер и др., Ракетные двигатели, Оборонгиз, 1962; S. F. Sarner. Propellant chemistry, N. Y., 1967.

В таблице представлены некоторые данные о применяемых и перспективных топливах. Из таблицы видно, что водород и литий являются высококалорийным топливом. С механической точки зрения наибольшее преимущество по сравнению с кислородом имеет фтор. Однако фтор ядовит и химически очень агрессивен. Значительное выделение теплоты получается при рекомбинациях атомов кислорода и водорода.

При использовании топлив имеют значение не только данные, указанные в этой таблице. Большое значение имеют также вопросы организации процесса горения в камере ракетного двигателя, токсичность и агрессивность компонент, их взрывоопасность, вопросы удобства и возможности хранения топлив,

цены их приготовления и некоторые другие обстоятельства. Например, в настоящее время из-за трудностей приготовления и сохранения на практике не используются указанные в таблице реакции с большим выделением тепла для атомарных кислорода и водорода.

За счет теплоотдачи или использования части выделяющейся энергии для систем подачи топлива происходит некоторое снижение i_1^* и T_1^* до i'^* и T'^* ($i'^* < i_1^*$ и $T'^* < T_1^*$), которое можно учесть в специальных расчетах.

Давление торможения и расход топлива

Если результирующее полное теплосодержание в идеальном процессе сгорания связано только с величиной освобождающейся химической энергии, то для идеального процесса в двигателе давление торможения при заданном критическом сечении сопла $S_{кр}$ зависит в первую очередь от массового расхода компонент топлива. Кроме этого, давление торможения зависит от необратимых особенностей процессов в камере сгорания и потерь, связанных с ростом энтропии при движении газа в сопле.

Для массового расхода газа (см. (6.9)) верна формула

$$G = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma^2-1}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}} \frac{p^*}{\sqrt{c_p T^*}} S_{кр},$$

где p^* и T^* — давление и температура торможения в критическом сечении.

Если сгорание заканчивается до критического сечения сопла и можно пренебречь теплоотдачей, то $T^* = T'^*$. Из формулы для расхода G ясно, что величины G и p^* практически пропорциональны.

Регулированием подачи топлива в камеру сгорания можно менять давление торможения.

Как указывалось выше (см. § 9), отношение

$$\frac{p'^*}{p^*} = \sigma$$

характеризует потери в сопле между критическим сечением и сечением на срезе сопла. Обычно величина σ близка к единице. В хороших соплах коэффициент σ имеет значение 0,98—0,99.

Тяга двигателя

Из основного равенства (10.3) для тяги ракетного двигателя на основании формул § 6 можно написать

$$R = (Gv + p'S) - p_0 S = [p'^* f(\lambda) - p_0] S, \qquad (10.5)$$

где S — площадь на выходе из сопла,

$$\lambda = \frac{v}{v'_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\frac{v}{\sqrt{2c_pT'^*}}$$

и

$$f(\lambda) = (1+\lambda^2)\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

При $p^* \gg p_0$ (p^* имеет порядок 50—100 *атм*, $p_0 \approx 1$ *атм* на Земле и $p_0 \approx 0$ на большой высоте) второй член в скобках в (10.5) мал по сравнению с первым.

Коэффициент скорости λ на выходе из сопла при пренебрежении малыми потерями в сопле по формулам § 6 выражается через конструктивно определяемое для сопла отношение $S_{\text{кр}}/S$ из соотношения

$$\lambda\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}\frac{S_{\text{кр}}}{S}.$$

Отсюда следует, что

$$v = \sqrt{c_pT^*}\,F\left(\gamma, \frac{S_{\text{кр}}}{S}\right).$$

Скорость истечения в реактивной струе зависит от теплоты горения и от показателя адиабаты Пуассона γ продуктов горения.

Из (10.5) следует, что при $p_0 \approx 0$ тяга пропорциональна расходу G или давлению торможения p^*, все потери в давлении торможения — это прямые потери в тяге.

Регулирование расходом давления торможения p^* равносильно регулированию тяги.

Удельная тяга

Важнейшей практической характеристикой данных компонент топлива, совершенства процесса горения и истечения газа в ракетном двигателе является удельная тяга, представляющая собой величину тяги, снимаемой двигателем с килограмма расходуемого за одну секунду топлива:

$$R_{\text{уд}} = \frac{R}{gG}\,\frac{\text{кГ}}{\text{кГ/сек}},$$

где gG — секундный весовой расход продуктов сгорания через сопло.

Для расчетного сопла, когда $p' = p_0$, из (10.5) имеем

$$R_{\text{уд}} = R'_{\text{уд}} = \frac{v}{g} = \frac{\sqrt{2i'^*}}{g}\left[1-\left(\frac{p'}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2},$$

или $R_{\text{уд}} = R'_{\text{уд}} \approx 0{,}1\ v$.

Для нерасчетного сопла (см. (10.3) и рис. 59) имеем

$$R_{\text{уд}} = R'_{\text{уд}} + \frac{p' - p_0}{\rho' v} < R_{\text{уд при } p'=p_0}.$$

Из двух последних формул ясно, что удельная тяга существенно зависит от калорийности топлива, т. е. от величины i'^*, от перепада давления p'/p^* в двигателе и довольно чувствительно зависит от показателя адиабаты Пуассона γ продуктов горения. Из формулы для $R_{\text{уд}}$ в случае расчетного сопла вытекает, что при прочих равных условиях удельная тяга растет с ростом γ. (Для атомарных газов $\gamma = 5/3$, для газов с молекулярным строением, молекулы которых имеют повышенное число степеней свободы, имеем $1 < \gamma < 5/3$.) Очевидно, что удельная тяга ракетного двигателя совсем не зависит от скорости полета и слабо зависит от высоты полета (через величину p_0). При увеличении высоты полета давление p' сохраняется, а давление p_0 падает, поэтому удельная тяга несколько возрастает за счет уменьшения p_0.

В приведенной выше таблице указаны расчетные удельные тяги различных комбинаций топлив стехиометрического состава для идеальных процессов в двигателе при полном сгорании и при обратимом процессе истечения из сопла для перепада давления $p'/p'^* = 1/100$. Из этой таблицы следует, что получение большой удельной тяги связано не только с большим тепловыделением при горении. Например, гидразин с кислородом имеет лучшую удельную тягу, чем этиловый спирт с кислородом,— это связано с различными свойствами молекулярного состава продуктов горения.

В современных жидкостно-реактивных двигателях (ЖРД) у Земли достигнуты удельные тяги

$$R_{\text{уд}} \approx 240 - 420 \text{ кГсек/кГ},$$

в ракетных двигателях на твердом топливе (РДТТ) имеем

$$R_{\text{уд}} \approx 220 - 250 \text{ кГсек/кГ}.$$

В перспективных двигателях эти показатели могут быть лучшими. Удельные тяги на высоте могут быть большими.

В качестве характеристики топлив и двигателя вместо удельной тяги можно рассматривать и использовать величину, обратную удельной тяге

$$c_{\text{уд}} = \frac{1}{R_{\text{уд}}} = \frac{gG}{R} \frac{\text{кГ/сек}}{\text{кГ}},$$

которая дает весовой расход топлива в одну секунду для получения тяги в один килограмм (*удельный весовой расход топлива*).

Основные особенности ракетных двигателей

Удельный расход топлива $c_{уд}$ в ракетных двигателях большой, запасы химического топлива при полетах на очень большой высоте должны находиться на борту летательных аппаратов, поэтому ракетные двигатели могут работать, вообще говоря, только очень короткое время. Даже для сверхмощных современных ракет время действия главных двигателей измеряется всего несколькими минутами. При полетах в атмосфере другие типы двигателей, забирающие кислород из атмосферного воздуха, имеют много меньший расход запасов топлива, находящихся на борту летательного аппарата, и поэтому в этом отношении они выгоднее ракетных двигателей.

Ракетные двигатели легки, могут работать в пустоте и способны развивать в течение короткого времени очень большие тяги, практически недостижимые для двигателей других типов. Например, в настоящее время имеются жидкостные ракетные двигатели с одним соплом, развивающие в полете тягу до 800 T. На больших современных космических ракетах на первой ступени ставится несколько таких двигателей. Существуют ракетные двигатели на твердом топливе, которые развивают тягу в несколько тысяч тонн.

Воздушно-реактивные двигатели (ВРД) и другие типы двигателей

При полетах в атмосфере Земли в качестве окислителя можно использовать атмосферный кислород. Забираемый для этой цели из атмосферы воздух вместе с топливом, имеющимся на борту летательного аппарата (в перспективе вместо энергии горения для подогрева рабочей среды можно использовать энергию ядерных реакций), можно использовать для образования реактивной струи, создающей тягу. Важно, что обычно в рабочем газе вес воздуха значительно превышает вес топлива. Этот процесс непосредственно осуществляется в воздушно-реактивных двигателях (ВРД). Атмосферный воздух используют также в поршневых и газотурбинных двигателях, в которых энергия продуктов горения с помощью турбины преобразуется в механическую энергию, используемую в свою очередь для вращения винта (компрессора), передающего механическую энергию воздуху или воде для создания реактивной струи, обусловливающей появление тяги.

Существует множество различных схем и типов двигателей, создающих тягу, для полетов аппаратов в воздухе или для движения в воде, для движения различных транспортных средств по поверхности земли или воды. Опыт и теория показывают, что в зависимости от условий движения и эксплуатации двигательных систем целесообразно и возможно применять различные типы двигателей. Например, сразу ясно, что в пустоте (в кос-

мосе) можно применять пока только ракетные двигатели, но рабочий процесс, источники энергии (в частности, ядерная энергия) и рабочая среда, создающая реактивную струю в ракетных двигателях, могут быть разнообразными: продукты горения химических топлив, подогретые газы, плазменные струи, потоки ионов и т. п.; можно говорить даже о реактивных струях фотонов и других элементарных частиц (в этих случаях возникают проблемы создания двигателей, использующих разреженную космическую среду, подобно тому как в ВРД используется атмосфера Земли). В общем случае проблема выбора и конструирования оптимальных двигательных систем теснейшим образом связана с конкретными условиями их применения. Однако существуют некоторые универсальные соотношения, которые положены в основу представлений о свойствах и выгодных условиях работы любых определенных двигательных систем. Обратимся теперь к установлению подобных универсальных понятий и характеристик применительно к различным системам ВРД.

Полетный к.п.д. ВРД

Полетный коэффициент полезного действия (к.п.д.) двигателя можно определить с помощью следующей формулы

$$\eta = \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{W} = \frac{\text{полезная мощность}}{\text{затраченная мощность}}, \qquad (10.6)$$

где $\boldsymbol{R}$ — тяга двигательной системы, $\boldsymbol{v}$ — скорость полета, W — мощность энергии, подведенной к потоку. Величина W вообще пропорциональна весу топлива, расходуемого в единицу времени.

Подобно к.п.д. цикла Карно (см. гл. V) можно ввести *идеальный* к.п.д. двигателя. Идеальный к.п.д. вводится с целью получения критерия, который позволил бы дать оценку возможных пределов наивыгоднейшего использования подводимой энергии и степени приближения к этому пределу при работе в практически осуществляемой конструкции. Как известно из термодинамики, идеальный к.п.д. меньше единицы. Идеальный к.п.д. достигается при идеальном обратимом процессе. Действительный к.п.д. вследствие неизбежной необратимости явления всегда будет меньше, чем идеальный. Однако в ряде случаев в правильно сконструированных машинах можно подойти к идеальным условиям весьма близко. Величина отклонения действительного к.п.д. от идеального характеризует техническое совершенство машины. Характеристики идеального двигателя могут послужить указанием для выбора основных параметров при проектировании двигателей и для правильных способов организации процесса их работы. Значения идеального к.п.д.

могут быть использованы также для оценки различного рода перспективных возможностей.

На рис. 60 представлена схема установившегося движения воздуха относительно летательного аппарата с воздушно-реактивным двигателем. На этом рисунке заштрихованы условно изображенные элементы конструкции двигателя и летательного аппарата, пунктиром проведены линии тока частиц воздуха, принимающих непосредственное участие в энергетическом взаимодействии с элементами двигателя, сплошными линиями — линии тока частиц воздуха, которые непосредственно не получают внешнюю (тепловую или механическую) энергию от топлива или подвижных элементов конструкции двигателя или движителя (например, винта). Совокупность первых линий тока, простирающаяся от $-\infty$ до $+\infty$, условно назовем внутренним потоком, а совокупность вторых — внешним потоком.

Опыт показывает, что при больших скоростях полета силы воздействия воздуха на летательный аппарат от внешнего и внутреннего потоков тесно связаны между собой и механически неразделимы. Это видно и из общей картины потока. Получение фактических значений к.п.д. возможно из опытов или расчетным путем с помощью подробного анализа и построения взаимно связанных обоих потоков с учетом необратимых эффектов. Эти пути сложны и тесно связаны со спецификой конкретных объектов.

Проведем *дальнейший анализ* в предельных случаях идеальных и обратимых процессов *для вычисления идеальных к.п.д.* В частности, как было показано выше, в идеальных условиях при обратимом установившемся непрерывном обтекании газом любых тел конечных размеров в случае отсутствия подвода энергии к газу извне тяга и сопротивление равны нулю (парадокс Даламбера). Поэтому при наличии энергетического взаимодействия под тягой в идеальных условиях в рассматриваемом случае необходимо понимать величину общей силы воздействия потока газа на внешние и внутренние поверхности всех элементов летательного аппарата.

Покажем прежде всего [1]), что если внешнее обтекание во всем пространстве вне поверхности $ABDEE_1D_1B_1A_1$ с конечными площадями S_1 и S_2 сечений в бесконечности (см. рис. 60) представляет собой непрерывное установившееся адиабатическое баротропное движение идеального газа [2]), то имеет место

[1]) См. Л. И. Седов, О полетном коэффициенте полезного действия идеального винта и идеального воздушно-реактивного двигателя, сб. статей № 13, «Теоретическая гидромеханика», изд. Мин. авиац. промышленности СССР, 1954.

[2]) Легко показать, что решения задач о таком обтекании тел подходящих очертаний в рамках теории идеальных жидкостей и газов при

парадокс Даламбера в более общей формулировке. Эта формулировка заключается в том, что при указанных условиях равна нулю общая сила сопротивления или тяга, действующая со стороны внешнего потока на внешние поверхности летательного

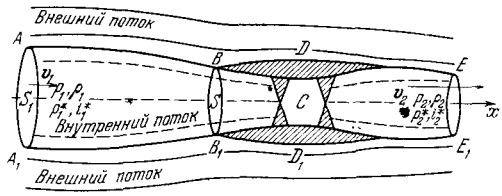


Рис. 60. Схема потока воздуха относительно летательного аппарата с ВРД.

аппарата и на поверхности струй внутреннего потока, простирающихся от бесконечности перед телом до бесконечности за телом.

Из этого предложения, которое доказывается ниже, следует, что общая сила тяги (или сопротивления), действующая на обтекаемые поверхности летательного аппарата со стороны внешнего потока, вообще отлична от нуля. Она равна с обратным знаком общей силе сопротивления (или тяги), действующей со стороны внешнего потока на поверхности струй внутреннего потока, граничащие с внешним потоком.

Как и раньше при доказательстве парадокса Даламбера для конечных тел, рассмотрим изучаемое внешнее движение идеального газа как предел движений в цилиндрической трубе с образующими, параллельными скорости потока в бесконечности, и примем, что давления в бесконечности впереди p_1 и сзади p_2 выравниваются и постоянны на площади сечения трубы, которую обозначим через S^*. Уравнения расхода и количества движения газа в проекции на ось канала, примененные к объему внешнего потока между сечениями $S^* - S_1$ и $S^* - S_2$ в бесконечности, дают

$$\rho_1 v_1 (S^* - S_1) = \rho_2 v_2 (S^* - S_2), \tag{10.7}$$

$$R = (p_2 - p_1)(S^* - S_2) + \rho_1 v_1 (S^* - S_1)(v_2 - v_1), \tag{10.8}$$

дозвуковых скоростях существуют, при сверхзвуковых скоростях в обтекающем потоке образуются вообще скачки уплотнения. Однако можно подобрать теоретически такие формы обтекаемых тел, чтобы эти скачки отсутствовали или вносили в поток сколь угодно малые потери. При построении идеального к.п.д. потерями во внешнем потоке следует пренебрегать.

где R — сила сопротивления, определяемая формулой

$$R = -\int\limits_{ABCDEE_1D_1C_1B_1A_1} (p - p_1)\, d\sigma_x,$$

в которой $d\sigma_x$ — проекция элемента обтекаемой поверхности на плоскость, нормальную к набегающему потоку (скорость $\boldsymbol{v}$ параллельна оси x).

Из (10.7) при $S_1 \neq S_2$ имеем

$$S^* - S_2 = \frac{\rho_1 v_1 (S_2 - S_1)}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}, \qquad S^* - S_1 = \frac{\rho_2 v_2 (S_2 - S_1)}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}.$$

Пользуясь этим, из (10.8) находим

$$R = \frac{p_2 - p_1 + \rho_2 v_2 (v_2 - v_1)}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1} \rho_1 v_1 (S_2 - S_1) =$$

$$= \rho_1 v_1 (S_2 - S_1) \int\limits_{v_1}^{v_2} \frac{\rho_2 v_2 - \rho v}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}\, dv, \quad (10.9)$$

так как вдоль линий тока верно равенство

$$\rho v\, dv = -\, dp.$$

Если площади S_1 и S_2 конечны, а площадь S^* стремится к бесконечности, то $p_2 \to p_1 \to p_\infty$ и $v_2 \to v_1$. Отсюда следует, что $R \to 0$, так как интеграл в (10.9) стремится к нулю при $v_2 \to v_1$.

Если $S_1 = S_2$, то $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. Отсюда и из баротропности следует, что $p_1 = p_2$ и $v_1 = v_2$ и, следовательно, $R = 0$, т. е. в этом случае сопротивление обращается в нуль не только при обтекании в безграничном потоке, но и при обтекании в трубе при любом S^*.

В предыдущих выводах существенны только баротропность и непрерывность движения газа, причем все линии тока простираются от $x = -\infty$ до $x = +\infty$ (нет возвратных токов из бесконечности). Вывод ($R = 0$) сохраняется и при неадиабатических движениях при наличии баротропии. Полученный обобщенный парадокс Даламбера верен и в тех случаях, когда внутренний поток необратим, а обратим только внешний поток. Отсюда вытекает, что *сила сопротивления, действующая со стороны внутреннего потока на границах с внешним потоком, точно равна внешнему сопротивлению летательного аппарата.*

Обозначим через $G = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$ расход газа во внутреннем потоке, где ρ_1, v_1 и ρ_2, v_2 — плотности и скорости во внутренней струе впереди и сзади в бесконечности соответственно. Из постановки задачи и формул § 8 следует, что для общей силы

тяги R и для общего притока энергии W к газу верны формулы

$$R = G(v_2 - v_1), \tag{10.10}$$

$$W = G(i_2^* - i_1^*). \tag{10.11}$$

Таким образом, установлено, что формулы (10.10) и (10.11) верны для случая обратимого адиабатического внешнего потока и любого необратимого внутреннего потока.

Если подводимая извне энергия W тепловая, то полный полетный коэффициент полезного действия, идеальный или фактический, определенный равенством (10.6), всегда можно представить в виде

$$\eta = \eta_{\text{тер}}\eta_{\text{проп}}, \tag{10.12}$$

где $\eta_{\text{тер}}$ — термический к.п.д.,

$$\eta_{\text{тер}} = \frac{G\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right)}{W} < 1, \tag{10.13}$$

а $\eta_{\text{проп}}$ — пропульсивный к.п.д. или полетный механический к.п.д., который с учетом (10.10) можно представить в виде

$$\eta_{\text{проп}} = \frac{Rv_1}{G\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}} < 1. \tag{10.14}$$

Если двигательная система может быть разделена на систему двигателя, вырабатывающего механическую энергию (например, поршневой двигатель), и движителя (например, винт), то, согласно (10.12), общий к.п.д. представляется произведением термического к.п.д., являющегося основной характеристикой теплового двигателя, и пропульсивного к.п.д., являющегося характеристикой движителя. Для ВРД такое разделение может носить только условный характер, так как оба коэффициента, $\eta_{\text{тер}}$ и $\eta_{\text{проп}}$, представляют собой характеристики одного и того же объекта — двигательной системы в целом.

На практике в стационарных условиях, на кораблях и самолетах наивысшее значение $\eta_{\text{тер}}$ у поршневых двигателей достигается для дизелей и имеет порядок $\eta_{\text{тер}} \approx 0{,}45$; для паровых машин наивысшее значение $\eta_{\text{тер}} \approx 0{,}35$; современные мощные авиационные газотурбинные двигатели имеют $\eta_{\text{тер}} \approx 0{,}35 - 0{,}45$.

Так как для получения тяги необходимо, чтобы имело место неравенство

$$v_2 > v_1,$$

то очевидно, что пропульсивный к.п.д. будет получаться наибольшим, когда величина v_2 мало отличается от v_1. В общем случае для уменьшения величины v_2 при данной тяге необходимо увеличивать массовый расход G реактивной струи. Большие расходы G можно получать за счет увеличения площади проходных сечений двигателя или диаметра винта, однако это связано с увеличением сопротивления обтекаемых каналов, веса и габаритов двигательных систем, а для вращающихся частей с уменьшением их угловой скорости, т. е. допустимого числа оборотов в единицу времени. Эти и некоторые другие обстоятельства заставляют искать и применять компромиссные решения.

В ВРД величины v_1, p_1^*, T_1^*, ρ_1, i_1^* задаются условиями полета (скорость и высота полета при известных атмосферных данных).

Для определения общего массового расхода G нужно знать коэффициент расхода φ:

$$G = \varphi \rho_1 v_1 S,$$

где S — площадь входных каналов двигателя, которая определяется устройством двигателя и режимом его работы.

Скорость в реактивной струе

Скорость в реактивной струе v_2 можно выразить через давление торможения и статическое давление. Для несжимаемой жидкости из определения p^* имеем

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_2^* - p_{ст})}{\rho}}; \qquad p_{ст} = p_2. \tag{10.15}$$

Для совершенного газа

$$v_2 = \sqrt{2 c_p T_2^*}\left[1 - \left(\frac{p_{ст}}{p_2^*}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\right]^{1/2}. \tag{10.16}$$

Давления торможения p_1^* и p_2^* могут различаться за счет потерь или подвода механической энергии к потоку жидкости или газа. Отношение $\pi = p_2^*/p_1^*$, полную степень сжатия, удобно взять в качестве основной характеристики аэрогидродинамического процесса работы ВРД или винта.

Вместо формул (10.15) и (10.16) из условия $p_1 = p_2$ легко получим для несжимаемой жидкости

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2(p_2^* - p_1^*)}{\rho}}, \tag{10.17}$$

а для газа, согласно формулам (5.13) и (5.14), можно написать

$$\pi^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} = \frac{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}. \tag{10.18}$$

Отсюда получим

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= \sqrt{\pi^{(\gamma-1)/\gamma}\left(M_1^2+\frac{2}{\gamma-1}\right)-\frac{2}{\gamma-1}},\\ \lambda_2 &= \sqrt{\pi^{(1-\gamma)/\gamma}\left(\lambda_1^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

Формулы (10.19) дают выражения для M_2 и λ_2 через $\pi = p_2^*/p_1^*$, общую степень сжатия в ВРД, и через задаваемые величины M_1 и λ_1 набегающего встречного потока воздуха. Очевидно, что всегда $M_2 > M_1$ и $\lambda_2 > \lambda_1$, если $\pi > 1$. При $\pi < 1$ получается, что $M_2 < M_1$ и $\lambda_2 < \lambda_1$.

Отношение площадей в бесконечности для внутренней струи

Найдем еще в самом общем случае отношение S_2/S_1 площадей струи в бесконечности во внутреннем потоке.

Для несжимаемой жидкости на основании (10.17) имеем

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2(p_2^*-p_1^*)}{\rho_1 v_1^2}}}. \tag{10.20}$$

Для газа из формул (5.13) и (5.14) получим

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho_2 v_2} = \frac{q(M_1)}{q(M_2)}\,\frac{p_1^*}{p_2^*}\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}}, \tag{10.21}$$

где

$$q(M) = \frac{\rho v}{\rho_{кр} v_{кр}} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(1+\gamma)\cdot 2(\gamma-1)} \frac{M}{\left(1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{(1+\gamma)/2(\gamma-1)}}. \tag{10.22}$$

Далее из уравнения состояния имеем

где

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \frac{p_2^*}{p_1^*} = \left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \varkappa,\\ \varkappa &= e^{\frac{s_1-s_2}{R}}, \end{aligned}\right\} \tag{10.23}$$

$R = c_p - c_V$ — удельная газовая постоянная, а s_1 и s_2 — энтропии, рассчитанные на единицу массы в сечениях S_1 и S_2. Обычно $\varkappa < 1$, так как энтропия растет вследствие потерь или подогрева газа в камере сгорания. Для винта, компрессора или турбины величина π равняется отношению давлений торможения

$\frac{P_{2\,\text{отн}}^*}{P_{1\,\text{отн}}^*} = \sigma$ в установившемся относительно вращающихся частей потоке. В идеальных обратимых процессах это отношение равно единице.

На основании (10.23) соотношение (10.21) можно переписать в виде

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{q(M_1)}{q(M_2)\,\pi^{(\gamma+1)/2\gamma}\,\varkappa^{(\gamma-1)/2\gamma}} = f(M_1, \pi, \varkappa), \quad (10.24)$$

где M_2 определено формулой (10.19), а $q(M)$ — формулой (10.22). На рис. 61 дано графическое изображение $f(M_1, \pi)$ при $\varkappa = 1$.

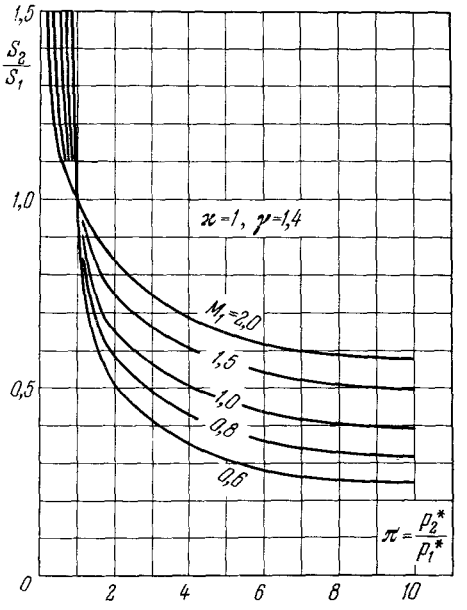


Рис. 61. Зависимость отношения S_2/S_1 от степени повышения полного давления π в реактивной струе и от числа Маха полета M_1.

Потери механической энергии по тракту двигателя и подогрев приводят к увеличению отношения S_2/S_1. Однако это увеличение, вообще говоря, незначительно, так как показатель у $\varkappa$ мал

$$\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \ll 1\right).$$

Выше установлены некоторые универсальные определения и соотношения, применимые к различным типам ВРД, к водяным и воздушным винтам. Дальнейший анализ и конкретизацию соответствующих связей нужно давать с опорой на механизмы подвода энергии и с учетом потерь во внутреннем потоке.

Прямоточный воздушно-реактивный двигатель (ПВРД)

Рассмотрим простейший с точки зрения общей схемы тип ВРД — прямоточный воздушно-реактивный двигатель (ПВРД). Схема ПВРД изображена на рис. 62. ПВРД с аэродинамической точки зрения представляет собой профилированный канал, состоящий из диффузора, камеры сгорания и выхлопного сопла. Диффузор необходим для организации выгодного режима горения в камере сгорания при малых скоростях потока воздуха. Сопло необходимо для разгона газа за счет перепада давлений в подогретом газе в камере сгорания и во внешнем пространстве. В соответствии с тем, что дает

анализ работы диффузоров и сопел, диффузоры и сопла для больших сверхзвуковых скоростей существенно отличаются по форме от диффузоров и сопел для дозвуковых скоростей (см. § 9).

При пренебрежении массой топлива, впрыскиваемого в камеру сгорания (см. (10.13), (10.14), (10.11), (8.4) и интеграл

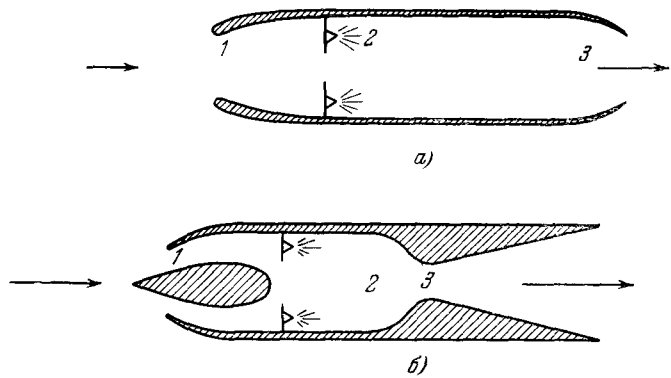


Рис. 62. Схема ПВРД: *а*) для дозвуковых скоростей полета, *б*) для больших сверхзвуковых скоростей полета. *1* — входной диффузор, *2* — камера сгорания, *3* — реактивное сопло.

Бернулли), можно написать

$$\left.\begin{aligned} \eta_{\text{тер}} &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c_p(T_2^* - T_1^*)} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\frac{\dfrac{T_2^*}{T_1^*}\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\dfrac{T_2^*}{T_1^*} - 1}, \\ \eta_{\text{проп}} &= \frac{2}{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\sqrt{\dfrac{T_2^*}{T_1^*}} + 1}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.25)$$

так как по определению

$$\lambda^2 = \frac{v^2}{v_{\text{кр}}^2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{2c_pT^*}.$$

Формула (10.25) для $\eta_{\text{тер}}$ введена в общем случае реального ПВРД. Формулы (10.25) дают выражения $\eta_{\text{тер}}$ и $\eta_{\text{проп}}$ через отношение T_2^*/T_1^* (которое легко выразить через количество тепла, подводимого в двигателе к единице массы газа внутреннего потока) и через коэффициент скорости λ (или число Маха) полета.

Согласно (5.13) λ_2 выражается через потери полного давления $\pi = p_2^*/p_1^* = \sigma$. Отношение σ для прямоточного двигателя зависит от аэродинамических качеств процессов в диффузоре, в камере сгорания и в сопле. Это отношение особенно чувствительно к потерям в сверхзвуковом диффузоре, которые могут быть значительными из-за скачков уплотнения. В частности, из формулы (10.19) можно указать такие значения $\pi < 1$, когда не только $\lambda_2 < \lambda_1$, но и $v_2 \leqslant v_1$, и вместо тяги получается сопротивление.

При идеальном обратимом процессе в ПВРД имеем, что в диффузоре, камере сгорания, сопле и внешнем потоке давление торможения сохраняется. Отсюда вытекает, что $p_2^* = p_1^*$. Поэтому из (10.19) получим, что $M_2 = M_1$ и $\lambda_2 = \lambda_1$, но $v_2 > v_1$, так как $T_2^* > T_1^*$ из-за подогрева. Таким образом, для идеального ПВРД получим

$$\eta_{\text{тер}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda_1^2 < 1 \quad \text{и} \quad \eta_{\text{проп}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}} + 1} < 1. \tag{10.26}$$

С помощью формулы (10.26) легко оценить $\eta_{\text{тер}}$ для идеального ПВРД. Для воздуха при $\gamma = 1{,}4$ и $\lambda_1 = M_1 = 1$ $\eta_{\text{тер}} = 17\%$, при $\lambda_1 = 1{,}93$, $M_1 = 3$ $\eta_{\text{тер}} = 64\%$ и при $\lambda_1 = 2{,}39$, $M_1 = 10$ $\eta_{\text{тер}} = 99\%$.

Из сделанного выше анализа следует, что даже идеальный ПВРД не может создавать тягу «на месте» (при $v_1 = 0$).

Приведенные значения для $\eta_{\text{тер}}$ и, вообще говоря, приемлемые значения для $\eta_{\text{проп}}$ при больших T_1^* и, следовательно, при $(T_2^*/T_1^*) \approx 1$, но при существенной разности $T_2^* - T_1^*$, показывают, что при малых скоростях полета (малые λ_1 и большие T_1^*) применение прямоточного двигателя нецелесообразно, при больших же сверхзвуковых скоростях прямоточный двигатель может быть весьма эффективен. Однако нужно иметь в виду, что при возрастании числа Маха свыше $M = 4$ температуры торможения становятся очень большими. Статические температуры в потоке внутри двигателя можно сохранять в приемлемых пределах регулированием величины скорости потока газа внутри двигателя.

Путем изменения схемы можно рассматривать двигатель, в котором «внутренний поток» находится во «внешнем пространстве» и отделен от поверхности тела соответствующим защитным слоем.

Из всего сказанного следует, что применение ПВРД возможно лишь при больших скоростях полета. Для того чтобы реактивный двигатель мог работать и при малых скоростях полета (в том числе и при нулевой скорости, т. е. на старте), не-

обходимо существенно увеличить полное давление газа, входящего в камеру сгорания. Для этого перед камерой сгорания ставится компрессор, а для получения работы, необходимой для приведения его в действие, за камерой сгорания ставится турбина. Двигатель такой схемы называется турбореактивным двигателем (ТРД).

Турбореактивный двигатель (ТРД)

Схема ТРД, основного двигателя современных самолетов, в простейшем варианте показана на рис. 63. В турбореактивном двигателе компрессор совершает над воздухом работу $L_к$, которая повышает давление торможения и температуру торможения

$$\frac{p_{11}^*}{p_1^*} = \pi_к > 1, \quad L_к = c_p (T_{11}^* - T_1^*) = c_p T_1^* \left[\left(\frac{\pi_к}{\sigma_к} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right], \quad (10.27)$$

где $\sigma_к = e^{\frac{s_1 - s_{11}}{R}}$ — характеристика потерь в компрессоре. В применяемых двигателях $\pi_к$ имеет значение 8—15 и много выше.

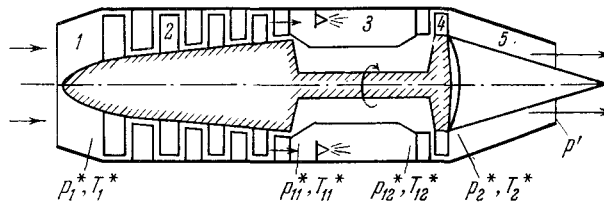


Рис. 63. Схема турбореактивного двигателя. Указаны характерные основные сечения и соответствующие давления торможения и температуры торможения. *1* — диффузор, *2* — компрессор, *3* — камеры сгорания, *4* — турбина, *5* — выхлопное сопло, возможно, с форсажной камерой.

Турбина устанавливается для вращения компрессора за счет энергии подогретого газа. Для турбины имеем

$$\frac{p_{12}^*}{p_2^*} = \pi_т > 1, \quad L_т = c_p (T_{12}^* - T_2^*) = c_p T_2^* \left[(\pi_т \sigma_т)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right], \quad (10.28)$$

где $\sigma_т = e^{\frac{s_{12} - s_2}{R}}$ — коэффициент, характеризующий потери в турбине. Температура T_{12}^* имеет порядок 1200—1500° К. Наибольшие значения температуры T_{12}^* лимитируются жаропрочностью

лопаток турбины, работающих при больших напряжениях растяжения, и возможностью организации их охлаждения.

Для полного притока энергии к газу можно написать

$$W = c_p (T_2^* - T_1^*) G = c_p (T_{12}^* - T_{11}^*) G > 0; \qquad (10.29)$$

из равенств работ [1]) компрессора и турбины

$$L_к = L_т$$

следует, что

$$c_p T_1^* \left[\left(\frac{\pi_к}{\sigma_к} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] = c_p T_2^* [(\pi_т \sigma_т)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1].$$

Ввиду того, что $T_2^* > T_1^*$, получим

$$\pi_к > \pi_т \sigma_к \sigma_т. \qquad (10.30)$$

В камере сгорания происходит подвод тепла и поэтому

$$\sigma_{сгор} = \frac{p_{12}^*}{p_{11}^*} = \left(\frac{T_{12}^*}{T_{11}^*} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} e^{(s_{11}-s_{12})/R} \leqslant 1,$$

причем знак равенства имеет место в обратимом идеальном процессе.

Для полного сжатия в двигателе π можно написать

$$\pi = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{p_2^*}{p_{12}^*} \frac{p_{12}^*}{p_{11}^*} \frac{p_{11}^*}{p_1^*} = \frac{\pi_к}{\pi_т} \sigma_{сгор}. \qquad (10.31)$$

В идеальном процессе, когда $\sigma_к = 1$, $\sigma_т = 1$ и $\sigma_{сгор} = 1$, согласно неравенству (10.30) получим

$$\pi = \frac{\pi_к}{\pi_т} > 1. \qquad (10.32)$$

Таким образом, за счет того, что турбина работает на газе с более высокой температурой, на выходе из турбины $T_2^* > T_1^*$, работа турбины, передаваемая компрессору, получается при меньшем перепаде $\pi_т$ давлений торможения, чем повышение давления $\pi_к$ в поступающем в компрессор низкотемпературном воздухе. За счет этого эффекта общий перепад давлений $\pi = p_2^*/p_1^*$ в двигателе ТРД получается большим единицы, тогда

[1]) На практике работа $L_т$ немного больше работы $L_к$ в связи с необходимостью обеспечить энергией некоторые приводы (в частности, подачу топлива в камеру сгорания).

как для ПВРД это отношение в идеальном процессе равно единице, а за счет потерь меньше единицы. На практике значение π в формуле (10.31) имеет порядок 2—3. Так как $\pi > 1$, то, согласно (10.19), в ТРД получается $\lambda_2 > \lambda_1$ и $M_2 > M_1$. Поэтому ТРД может работать на старте, компрессор засасывает воздух, возникает внутренняя струя при $\varphi > 1$ и получается тяга.

При $\pi \approx 2{,}3$ скорость на срезе расчетного сопла получается близкой к скорости звука. Если сопло сужающееся, то возможно истечение струи со скоростью звука с неполным расширением. Из-за больших температур торможения T_2^* величина скорости истечения получается большой.

Увеличения тяги ТРД при практически неизменном перепаде давления π можно достичь с помощью повышения температуры торможения на выходе из выхлопного сопла, для этого можно дополнительно дожигать топливо за турбиной в сопле и таким путем форсировать тягу двигателя. При форсаже температуру газа, вытекающего из сопла, можно поднять до 2000° К и более, т. е. значительно выше, чем в основной камере сгорания, где температура не может быть больше значений, при которых обеспечивается прочность лопаток турбины. Для полетов с ТРД на значительных сверхзвуковых скоростях, как было указано выше, необходимо применять специальные диффузоры со сниженными потерями на сверхзвуковых скоростях.

Следует иметь в виду, что при указанных условиях увеличения тяги можно добиться также переходом к другим, более сложным, схемам двигателей. В настоящее время широко применяются турбовинтовые и двухконтурные ТРД. В двухконтурном двигателе часть воздуха, сжимаемого компрессором, минуя турбину, после подогрева поступает в сопло. Двухконтурные двигатели получили в последнее время широкое распространение в связи с тем, что они сочетают положительные качества обычного пропеллера на малых скоростях и турбореактивного двигателя на больших крейсерских скоростях.

Для вычисления к.п.д. $\eta_{тер}$, $\eta_{проп}$ и η для ТРД в идеальном или действительном режиме работы можно пользоваться формулами (10.25). В этом случае величину $\lambda_2 > \lambda_1$, обеспечиваемую, вообще говоря, расчетным соплом, можно выразить через общую степень сжатия π и λ_1 в набегающем потоке, согласно формуле (10.19). Очевидно, что термический к.п.д. ТРД зависит от степени сжатия π, от числа Маха в полете и отношения T_2^*/T_1^*. При скорости полета, равной нулю, когда $\pi > 1$,

$$\eta_{тер} > 0.$$

Для данного фиксированного двигателя ТРД при заданном значении числа Маха (или λ_1) в полете степень сжатия π и, соот-

ветственно, число оборотов турбины и компрессора можно регулировать подачей топлива в камеру сгорания.

Теория идеального пропеллера

В заключение рассмотрим идеальный пропульсивный к.п.д. для водяного и воздушного винта (пропеллера), как движителей, которые создают тягу, но приводятся в движение специальным двигателем (электромотором, поршневым двигателем или газовой турбиной), когда энергетические характеристики двигателя заданы или известны из его отдельного технического паспорта. Рассмотрим идеальный пропульсивный к.п.д. в случае установившегося непрерывного адиабатического обтекания беспредельным потоком идеальной несжимаемой жидкости (или идеального совершенного газа) некоторого устройства с наивыгоднейшими формами. Примем, что в результате работы этого устройства образуется струя, к которой обратимым путем подводится механическая энергия в виде работы сил, действующих на жидкость или газ со стороны тел этого устройства.

В соответствии с данными выше определениями тягой этого устройства, представляющего собой идеальный компрессор, по определению назовем суммарную силу воздействия внешнего потока и внутренней струи на компрессор в целом. Примем, что в бесконечности статические давления выравниваются и что в сечениях S_1 и S_2 на бесконечности во внутренней струе скорости одинаковы по сечениям, причем далеко впереди в набегающем потоке в пределе характеристики внешнего и внутреннего потоков совпадают.

Из непрерывности движения, адиабатичности и однородности набегающего потока следует, что удельная энтропия всех частиц в потоке одинакова. Поэтому за телом в бесконечности во внутреннем и во внешнем потоках в пределе из равенства давления и энтропии в частицах следует равенство плотности и температуры. Таким образом, в этом случае во внутренней струе в сечениях S_1 и S_2 имеем

$$p_1 = p_2, \qquad \rho_1 = \rho_2, \quad s_1 = s_2, \quad T_1 = T_2.$$

За счет работы внешних сил

$$v_1 \neq v_2,$$

причем согласно равенствам (8.4), (10.10) и (10.11)

$$W = G\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \quad \text{и} \quad R = G(v_2 - v_1). \tag{10.10'}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае идеальный полетный $\eta = \frac{R \cdot v_1}{W}$ (см. (10.6)) и пропульсивный (см. (10.14)) к.п.д.

совпадают и определены формулой

$$\eta = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}}, \qquad (10.14')$$

которая верна как для несжимаемой жидкости, так и для газа, как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях полета.

Очевидно, что $\eta \to 1$ при $v_2 \to v_1$; в этом случае для получения конечной тяги R необходимо увеличивать расход во внутренней струе, $G \to \infty$. В общем случае, как мы покажем ниже, при заданной тяге идеальный к.п.д. растет с увеличением расхода во внутренней струе. Реактивная струя тем выгоднее, чем больше ее массовый расход.

Введем в качестве характеристики винта или компрессора коэффициент нагрузки

$$B = \frac{2R}{\rho_1 v_1^2 S},$$

где S — площадь входа в компрессор или площадь внутренней струи на входе в движитель. Для воздушных или водяных винтов примем, что S равняется площади круга, ометаемого лопастями винта. Коэффициент B — важная характеристика режима работы винта.

На основании формулы (10.10) можно написать

$$B = \frac{2R}{\rho_1 v_1^2 S_1}\varphi = 2\varphi\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right), \qquad (10.33)$$

где $\varphi = S_1/S$. Введя отсюда коэффициент нагрузки B в формулу (10.14'), получим

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{B}{4\varphi}}. \qquad (10.34)$$

Коэффициент расхода φ, вообще говоря, зависит от геометрических особенностей форм движителя и от режима его работы. При заданном B наилучшие возможные к.п.д. η соответствуют максимально возможным значениям φ. Иначе говоря, при заданных габаритах и тяге наивыгоднейший случай соответствует наибольшему количеству воздуха или жидкости, которое можно пропустить через движитель.

В случае несжимаемой жидкости имеем

$$p_1^* = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}, \qquad p_2^* = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

На основании этих формул получим

$$\eta = \frac{2}{1+\sqrt{1+\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}-1\right)\frac{2p_1^*}{\rho v_1^2}}}. \qquad (10.35)$$

Безразмерное число Эйлера $\rho v_1^2/2p_1^*$, аналогичное числу Маха, определено условиями полета. В (10.35) единственным параметром, зависящим от компрессора, является отношение $\pi = p_2^*/p_1^*$; при $\pi \to 1$ имеем $\eta \to 1$.

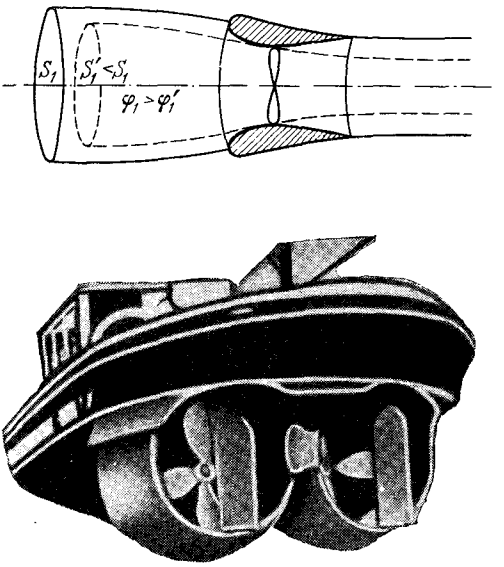


Рис. 64. Пунктиром показана струя без направляющих насадков, сплошными линиями — с направляющими насадками. На фото двухвинтовой буксир с насадками на винтах.

В формуле (10.34) вместо отношения π можно задаваться φ, необходимые значения которого для винта в идеальном процессе можно обеспечивать с помощью специальных кольцевых насадков (насадков Брикса-Корта на водяных винтах), изображенных на рис. 64. С помощью такого рода насадков можно увеличивать площадь потока, забираемого в струю винта. Очевидно, что применение таких насадков может быть выгодно при больших значениях коэффициентов нагрузки B (большие тя-

ги и малые скорости движения). На буксирных судах при больших B применение насадков увеличивает тягу до 50%, а к.п.д.— до 60%. Фактическое использование таких насадков осложняется внесением в систему добавочных сопротивлений, обусловленных силами вязкого трения на увеличенных площадях обтекаемых поверхностей.

Коэффициент φ можно определить, когда действие винта можно свести к действию внешних сил, распределенных по диску винта, в предположении, что осевая скорость v' на диске винта постоянна. Определим эту скорость. Обозначим через p_2' и p_1' давления на разных сторонах диска, разность $p_2' - p_1'$ уравновешивается внешней силой со стороны винта, мощность этой силы, передаваемая жидкости, равна

$$v' \int_S (p_2' - p_1')\, d\sigma = Rv' = G(v_2 - v_1)\, v' = \frac{G}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Отсюда получим

$$v' = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Из уравнения расхода найдем

$$v'S = \frac{v_2 + v_1}{2} S = v_1 S_1 \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{S_1}{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_2}{v_1} + 1\right).$$

Подставляя это значение для φ в (10.33), получим

$$B = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1 \quad \text{или} \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + B}.$$

Следовательно, в этом случае для η по (10.14′) верна формула

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + B}}. \tag{10.35′}$$

Отсюда вытекает, что $\eta = 1$ при $B = 0$. В схеме несущего диска наилучшие идеальные к.п.д. соответствуют малым B, для этого при заданной тяге R и расчетной скорости v_1 надо увеличивать S, однако требования прочности и возможности возникновения кавитации заставляют ограничивать диаметр водяных винтов. С помощью кольцевых насадков по схеме рис. 64 при больших B можно получить идеальный к.п.д. и фактический к.п.д. больше, чем к.п.д., рассчитанный по формуле (10.35′), отвечающей идеальному к.п.д. схемы несущего диска.

При движении в воздухе, так как $p_1 = p_2$, $\rho_2 = \rho_1$ и, следовательно, $a_1 = a_2$ (a — скорость звука), на основании (10.19)

получим

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{(\pi^{(\gamma-1)/\gamma} - 1)\frac{2}{(\gamma-1)M_1^2} + \pi^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

Подставляя это значение v_2/v_1 в формулу (10.14′) для η, найдем $\eta(\pi, M_1)$. Соответствующий график $\eta(\pi, M_1)$ дан на рис. 65.

При полете в воздухе легко указать правила для определения наивыгоднейшего значения коэффициентов φ. По свойству

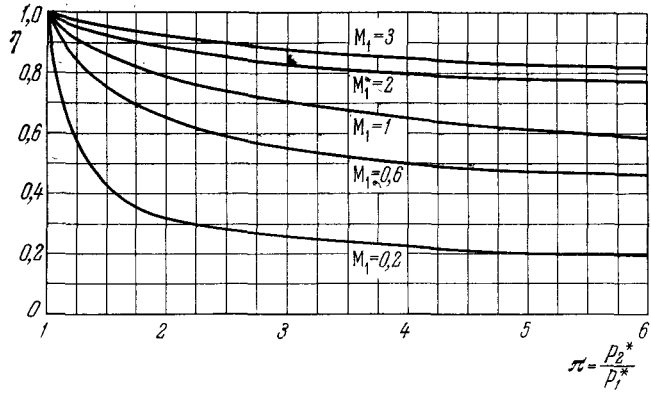


Рис. 65. Полетный к.п.д. винта или вентилятора-компрессора как функция $\pi = p_2^*/p_1^*$ и числа Маха M_1.

сверхзвуковых потоков при $M \geqslant 1$ надо положить $\varphi = 1$. Для дозвуковых скоростей максимум φ получается в том случае, если скорость газа при входе в двигатель (в сечении S) равна скорости звука. В современных авиационных компрессорах ясно выражено стремление приблизиться к выполнению этого условия. В этом случае получаем

$$\varphi = \frac{S_1}{S} = \frac{\rho_{кр} v_{кр}}{\rho_1 v_1} = \frac{1}{q(M_1)}.$$

Таким образом, находим

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{B}{4}} \qquad (10.36)$$

для сверхзвуковых скоростей и

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{Bq(M_1)}{4}} \qquad (10.37)$$

для дозвуковых скоростей.

Формула (10.37) при малых значениях M_1 не совпадает с обычной общеизвестной формулой идеального к.п.д. винта, полученной в теории несущего диска. Это объясняется тем, что рассматриваемая постановка задачи носит более широкий характер и охватывает случай работы винта в насадках, когда

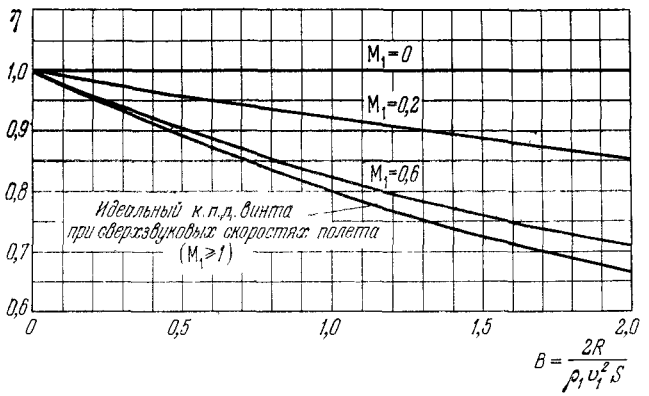


Рис. 66. Полетный к.п.д. идеального механического движителя (винта) для дозвуковых и сверхзвуковых скоростей полета как функция коэффициента нагрузки.

часть тяги может образовываться в результате применения насадков. Зависимости (10.36) и (10.37) представлены графически на рис. 66.

На основании изложенной выше теории идеального винта можно сделать вывод о том, что при конструировании двигателей с наименьшим весом входные устройства и проточная часть двигателя должны обеспечивать на расчетных режимах работы при входе в компрессор скорость потока, близкую к скорости звука. Разобранные выше закономерности для к.п.д. имеют фундаментальное значение для оценки построенных машин, для выяснения возможных перспектив и конструктивных тенденций.

§ 11. Потенциальные течения идеальной жидкости. Интеграл Коши — Лагранжа

Для потенциальных течений идеальной жидкости как установившихся, так и неустановившихся, может быть получен первый интеграл уравнений Эйлера. Этот интеграл носит название интеграла Коши — Лагранжа.

Рассмотрим движение идеальной жидкости, определенное по отношению к некоторой системе отсчета, и запишем уравнения движения в форме Громеки — Лемба:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \boldsymbol{F}. \qquad (11.1)$$

Предположим, что 1) движение потенциально, т. е. $\boldsymbol{\omega} = 0$ и $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$, где φ — потенциал скоростей; 2) имеет место баротропия, $p = p(\rho)$, и, следовательно, можно ввести единую для всего потока функцию давления

$$\mathcal{P}(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}, \quad \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \mathcal{P}.$$

При этих предположениях уравнение Громеки — Лемба записывается в виде

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v_2}{2} + \mathcal{P}\right) = \boldsymbol{F}.$$

Отсюда видно, что массовые силы в этом случае должны обладать потенциалом. Обозначим потенциал внешних массовых сил через $\mathcal{U}$. Если же предположить, что движение потенциально, $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$, и внешние массовые силы обладают потенциалом, то из (11.1) как следствие получится, что движение должно быть баротропным. Уравнение (11.1) приобретает вид

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - \mathcal{U}\right) = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - \mathcal{U} = f(t), \qquad (11.2)$$

где $f(t)$ — некоторая произвольная функция времени t.

Соотношение (11.2), выполняющееся во всех точках области потенциального движения жидкости или газа, и есть интеграл Коши — Лагранжа.

Для того чтобы найти функцию $f(t)$, достаточно знать левую часть интеграла как функцию времени в какой-либо одной точке потока. Иногда такой точкой может служить некоторая точка, принадлежащая границе потока. В случае безграничной жидкости функцию $f(t)$ можно определить по заданным значениям потенциала φ и других характеристик на бесконечности. Пользуясь тем, что потенциал φ определен с точностью до произвольной функции времени, вместо потенциала φ можно ввести потенциал $\varphi_1 = \varphi + \int f(t)\, dt$. Введение в потенциал φ добавочного члена $\int f(t)\, dt$ не влияет на поле скоростей, так как

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \varphi_1.$$

После замены в (11.2) $\partial\varphi/\partial t$ через $\partial\varphi_1/\partial t$ получим, что функция $f(t)$ в интеграле Коши — Лагранжа равна нулю. В этом случае потенциал φ определяется с точностью до аддитивной постоянной по времени и по координатам.

Интеграл Коши — Лагранжа может служить для тех же целей, что и интеграл Бернулли; если потенциалы скоростей φ и внешних сил $\mathcal{U}$ известны, то с помощью интеграла Коши — Лагранжа можно определить распределение давлений.

В частном случае, когда потенциальное движение жидкости или газа установившееся, интеграл Коши — Лагранжа имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - \mathcal{U} = \text{const} = i^*$$

и совпадает с интегралом Бернулли, в котором постоянная i^* одинакова для всей массы жидкости, а функция давления зависит только от давления (из-за баротропии).

Интеграл Коши — Лагранжа в подвижной системе координат

Интеграл Коши — Лагранжа (11.2) был получен в предположении, что потенциал скоростей φ представлен как функция времени и координат системы отсчета, по отношению к которой рассматривается движение. Однако для описания движения относительно некоторой системы отсчета можно пользоваться (и это часто делают) другой, подвижной по отношению к системе отсчета, системой координат, например системой координат, жестко скрепленной с телом, движущимся в жидкости.

Формулы преобразования координат

$$x = x(\xi, \eta, \zeta, t), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta, t), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta, t), \tag{11.3}$$

где x, y, z — декартовы координаты относительно системы отсчета, а ξ, η, ζ — декартовы координаты относительно подвижной системы, можно рассматривать как закон движения подвижной системы относительно системы отсчета. Потенциал скоростей можно представить как функцию x, y, z, t или как функцию ξ, η, ζ, t:

$$\varphi(x(\xi, \eta, \zeta, t), y(\xi, \eta, \zeta, t), z(\xi, \eta, \zeta, t), t) = \varphi(\xi, \eta, \zeta, t). \tag{11.4}$$

Интеграл Коши — Лагранжа (11.2) является следствием уравнений импульса и поэтому в него входит частная производная потенциала φ по времени t, вычисленная в той системе координат, относительно которой рассматривается движение. Заметим, что

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{x, y, z = \text{const}} \neq \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\xi, \eta, \zeta = \text{const}}.$$

Действительно, первая берется в предположении, что x, y и z постоянные, т. е. в фиксированной точке пространства x, y, z; вторая при ξ, η и ζ постоянных, т. е. в точке, которая по отношению к системе отсчета x, y, z движется по закону (11.3). Легко установить связь между этими производными; из (11.4) имеем

$$\frac{\partial\varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{dz}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta}, \tag{11.5}$$

причем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = v_z,$$

а

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} = v_{x\,\text{пер}}, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} = v_{y\,\text{пер}}, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_{\xi, \eta, \zeta} = v_{z\,\text{пер}}$$

являются компонентами в системе отсчета x, y, z скорости движения точки, жестко связанной с подвижной системой, т. е. переносной скорости $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$. Поэтому равенство (11.5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial\varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial t} + \operatorname{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{v}_{\text{пер}}. \tag{11.6}$$

Скалярное произведение $\operatorname{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ является инвариантной величиной и может быть записано как через компоненты векторов в системе ξ, η, ζ, так и через компоненты в системе x, y, z.

Если потенциал φ определяется как функция ξ, η ζ и t, то интеграл Коши — Лагранжа (11.2) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{пер}} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} - \mathcal{U} = f(t). \tag{11.7}$$

Если предположить, что подвижная система координат движется как абсолютно твердое тело, то, как известно,

$$\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = \boldsymbol{v}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{v}_{O_1}$ — скорость начала координат O_1 подвижной системы относительно xyz, $\boldsymbol{\Omega}$ — мгновенная угловая скорость вращения подвижной системы и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки относительно подвижной системы координат. В частном

случае, когда подвижная система движется поступательно с постоянной скоростью $\boldsymbol{V}$ вдоль оси x, интеграл Коши — Лагранжа (11.7) представится в виде

$$\frac{\partial\varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} V + \frac{(\operatorname{grad}\varphi)^2}{2} + \mathcal{P} - \mathcal{U} = f(t). \quad (11.8)$$

В частном случае для несжимаемой жидкости, когда $\mathcal{P} = p/\rho$, интеграл Коши — Лагранжа (11.8) имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} V + \frac{(\operatorname{grad}\varphi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \mathcal{U} = f(t). \quad (11.9)$$

Наличие потенциала скоростей существенно облегчает решение математических задач гидродинамики и в то же время потенциальные течения представляют собой очень важный физический класс течений.

О сохраняемости потенциальных течений

В § 7 гл. VI были изложены теоремы о свойствах вектора вихря

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$$

в случае непрерывных баротропных течений идеальной жидкости в поле потенциальных массовых сил. В частности, была доказана теорема Лагранжа о сохраняемости потенциальности течения во времени.

Многие движения можно рассматривать как движения, возникающие из состояния покоя, когда в начальный момент времени $\boldsymbol{v} = 0$, а следовательно, и $\boldsymbol{\omega} = 0$. Такие движения должны быть потенциальными и во все последующие моменты времени. В приложениях движения жидкостей и газов во многих задачах рассматриваются как потенциальные. Таковы, например, волновые движения воды, движения воздуха в случае распространения акустических (звуковых) волн, различные непрерывные движения жидкостей и газов, вызванные движением в них твердых тел, струйные движения жидкости и многие другие.

Подчеркнем, что изложенные в § 7 гл. VI теоремы основаны на определенных допущениях о свойствах среды и о характере процессов. Невыполнение сформулированных при этом условий может привести к нарушению свойств потенциальности течений. Например, наличие вязкости может оказаться источником возникновения вихрей. В идеальном газе могут появляться поверхности разрыва скорости и нарушаться баротропность течения вследствие разрывов и т. д.

Динамическая интерпретация потенциала скоростей; задача Дирихле о движении идеальной несжимаемой жидкости под действием импульсивных давлений

Дадим теперь динамическую интерпретацию потенциала скоростей в случае потенциальных движений идеальной несжимаемой жидкости.

Пусть на некоторый объем идеальной несжимаемой жидкости в течение малого промежутка времени τ действовали бесконечно большие давления p', импульс которых за бесконечно малое время конечен и равен $p_t = \lim\limits_{\tau \to 0} \int\limits_0^\tau p'\, dt$.

Напишем уравнения Эйлера в виде

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \tag{11.10'}$$

проинтегрируем (11.10') по времени от 0 до τ и возьмем предел при τ, стремящемся к нулю.

В результате, так как интегралы от нуля до τ от обычных конечных сил давления и массовых сил в пределе обратятся в нуль, получим

$$v' - v = -\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p'\, dt, \tag{11.10}$$

где v и v' — скорости одной и той же частицы жидкости до и после действия импульсивных давлений соответственно. Скорость частицы за бесконечно малое время τ изменится на конечную величину, если импульс сил давления конечен. В пределе при $\tau \to 0$ смещение частицы отсутствует и скорости v' и v являются значениями скорости в фиксированной точке пространства. Скорость частиц изменяется скачком, мы имеем течение жидкости, которое возникает в результате удара. Поменяв в (11.10) последовательность выполнения операций градиента по точкам пространства и интегрирования по времени для индивидуальной частицы жидкости, что в пределе возможно, так как координаты частиц во время удара не изменяются, получим

$$v' - v = -\operatorname{grad} \frac{p_t}{\rho} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{11.11}$$

где

$$p_t = -\rho\varphi. \tag{11.12}$$

Если начальное состояние было состоянием покоя, то в результате удара возникает потенциальное поле скоростей. Соответствующий потенциал скоростей $\varphi(x, y, z)$ и импульс давления связаны равенством (11.12). Это равенство можно рас-

сматривать как динамическую интерпретацию потенциала скоростей.

Для несжимаемой жидкости из уравнения неразрывности $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ следует, что потенциал скоростей $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{11.13}$$

Функция φ, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической функцией.

Решение уравнения Лапласа в некоторой области $\mathcal{D}$ определяется заданием значений функции φ на поверхности Σ, ограничивающей область $\mathcal{D}$. Задача об отыскании гармонической в области $\mathcal{D}$ функции по ее значениям на границе области $\mathcal{D}$ называется задачей Дирихле. Эта задача в односвязной области, вообще говоря, всегда имеет однозначное единственное решение. Поэтому движение жидкости и импульс давления *внутри области* полностью определяются, если на *границе* заданы значения внешнего импульса давления $p_l = -\rho\varphi$.

Приведенное истолкование потенциала скоростей с помощью понятия импульса давления существенно связано со свойством несжимаемости жидкости и, в частности, с мгновенностью распространения всяких изменений давления на всю массу несжимаемой жидкости.

Рассмотрим теперь некоторые вопросы общей теории потенциальных движений.

Потенциальные течения идеальных жидкости и газа при наличии баротропии

Основными уравнениями потенциальных течений идеальной жидкости в случае баротропных процессов ($\rho = f(p)$) являются: уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = 0 \tag{11.14}$$

и интеграл Коши — Лагранжа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2 + \mathcal{P}(p) - \mathcal{U} = 0. \tag{11.15}$$

Для дифференциала функции давления $\mathcal{P} = \int \frac{dp}{f(p)}$ имеем

$$d\mathcal{P} = \frac{dp}{\rho} = \frac{a^2}{\rho}\,d\rho,$$

где $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. Следовательно,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a^2}\frac{d\mathcal{P}}{dt}, \qquad a = a(\mathcal{P}).$$

Систему уравнений (11.14) и (11.15) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\frac{d\mathcal{P}}{dt} + \Delta\varphi = 0, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\operatorname{grad}\varphi)^2}{2} + \mathcal{P} - \mathcal{U} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

Неизвестными в этой системе являются функция давления $\mathcal{P}$ и потенциал скоростей φ. В общем случае эту нелинейную систему дифференциальных уравнений проинтегрировать трудно. Однако существуют важные классы движений, для которых методы решения системы уравнений (11.16) подробно и хорошо разработаны. Перечислим такие классы потенциальных движений жидкости.

Потенциальные течения несжимаемой жидкости. В этом случае $a^2 = (dp / d\rho) \to \infty$ и первое уравнение системы (11.16) сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Второе уравнение системы (11.16) служит в этом случае для определения давления. В такой постановке рассматриваются такие важные задачи, как задачи о движении воды, возникшем при перемещении в ней твердых тел, задачи о волнах на поверхности воды, задачи о струйных течениях воды и многие другие. Ниже подробно будет рассмотрена задача о движении твердого тела в несжимаемой жидкости.

Движения сжимаемой жидкости или газа, представляющие собой малые возмущения некоторого известного состояния равновесия или движения. Такие движения изучаются, например, в акустике (задачи о распространении звуковых волн) и в некоторых задачах аэродинамики тонких тел с плавными «обтекаемыми» обводами.

При решении задач о движении среды с малыми возмущениями предполагается, что скорость, плотность, давление и их производные по координатам и по времени представляют собой известные функции плюс неизвестные малые добавки. Если пренебречь малыми величинами порядка выше, чем первый, то система уравнений становится линейной.

Если движение представляет собой малое возмущение около состояния покоя, то система уравнений (11.16) с точностью до малых первого порядка может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} + \Lambda\varphi = 0, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathcal{P} - \mathcal{U}_0 = 0, \end{aligned}\right\}$$

где $a_0^2 = \text{const}$ — значение производной $dp/d\rho$, вычисленное для невозмущенного состояния покоя.

Из этих двух уравнений можно получить одно уравнение для φ, которое, если потенциал массовых сил не зависит от времени, имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (11.17)$$

Это линейное уравнение называется волновым уравнением. Если жидкость несжимаемая, то $a_0 \to \infty$ и волновое уравнение (11.17) переходит в уравнение Лапласа.

Установившиеся движения сжимаемой жидкости. Наибольшее развитие в этом случае получила теория плоскопараллельных течений, когда искомые функции зависят лишь от двух переменных x и y. Уравнения движения в этом случае специальной заменой переменных и искомых функций также удается преобразовать к линейным. Это преобразование было предложено и использовано в 1902 г. С. А. Чаплыгиным в его знаменитой работе «О газовых струях»[1]). Эта работа стала основной для развития многих современных теорий в газовой динамике.

Одномерные неустановившиеся течения. В этом случае все параметры движения зависят только от одной пространственной координаты r и времени t. На поверхности $r = \text{const}$ все характеристики движения одинаковы. Это — движения с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами.

К задачам этого класса относятся рассмотренные в гл. VII т. 1 задачи о вытеснении газа поршнем, о распространении взрывных волн и многие другие важные практические задачи. Система уравнений в этом случае нелинейна.

§ 12. Потенциальные движения несжимаемой жидкости. Свойства гармонических функций

Рассмотрим теперь потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости.

Основные частные решения уравнения Лапласа

Изучим некоторые основные решения уравнения Лапласа. Ранее (см. § 3 гл. II) было рассмотрено фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}, \qquad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \qquad (12.1)$$

[1]) С. А. Чаплыгин, О газовых струях, Собр. сочинений, т. II, Гостехиздат, 1948; отдельное издание, Гостехиздат, 1949.

и установлен его физический смысл как течения от *источника* (при $Q > 0$) или стока (при $Q < 0$), расположенных в точке x_0, y_0, z_0.

Решения уравнения Лапласа в силу его линейности, очевидно, можно складывать, дифференцировать и получать таким путем новые частные решения уравнения Лапласа. Например, частное решение уравнения Лапласа можно получить путем дифференцирования решения $\varphi = 1/r$ по некоторому направлению $\boldsymbol{s}$. Таким образом получаем решение

$$\varphi = C\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right) = -C\frac{(x-x_0)\alpha + (y-y_0)\beta + (z-z_0)\gamma}{r^3} = -C\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}^0}{r^3}, \tag{12.2}$$

где $C = \text{const}$, $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$ — косинусы углов направления $\boldsymbol{s}$ с осями координат x, y, z соответственно, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки x_0, y_0, z_0, а $\boldsymbol{s}^0$ — единичный вектор направления $\boldsymbol{s}$. В частности, выбрав в качестве направления $\boldsymbol{s}$ ось x, получим следующее решение уравнения Лапласа:

$$\varphi = C\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -C\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r}\right) = -C\frac{x-x_0}{r^3}.$$

Решение $\varphi = C\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)$ имеет простой физический смысл. Оно получается в пределе из суммы течений от стока и источника с равными расходами Q, расположенных на расстоянии Δs в направлении $\boldsymbol{s}$ друг от друга, при условии, что $\Delta s \to 0$, а $Q \to \infty$ так, что $\frac{1}{4\pi} Q\,\Delta s$ стремится к конечной величине C. Это течение называется течением от *точечного диполя в пространстве*, C называется моментом диполя, а направление $\boldsymbol{s}$ — его осью. Точка x_0, y_0, z_0, где расположен диполь, является особой точкой, в ней, как легко проверить, скорость бесконечна. Жидкость, если $C > 0$, вытекает из этой точки по направлению $\boldsymbol{s}$ и втекает в ту же точку с противоположной стороны (рис. 67).

Решение $C\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right)$, уравнения Лапласа, как и решение $Q/4\pi r$, играет важную роль при построении других, более общих решений уравнения Лапласа.

При повторном многократном дифференцировании потенциала (12.1) по различным направлениям $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, ..., $\boldsymbol{s}_n$ получаются новые решения уравнения Лапласа

$$\varphi = C_n\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\cdots\frac{\partial}{\partial s_n}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{12.3}$$

Соответствующие течения жидкости при постоянных x_0, y_0, z_0 регулярны во всем пространстве x, y, z, кроме точки x_0, y_0, z_0; потенциалы (12.3) и их производные имеют повышенный порядок исчезания в бесконечности по сравнению с $1/r$.

Точка $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ ($r = 0$) является особой, в этой точке скорость жидкости обращается в бесконечность. Построенные таким способом течения называются течениями от *мультиполей*. Свойства течения от мультиполя определяются постоянной C_n и направлениями дифференцирования $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n$, которые можно выбирать произвольным способом.

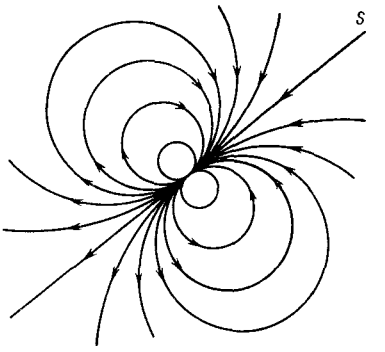


Рис. 67. Течение от диполя.

С помощью сложения решений вида (12.3) *можно построить* сходящийся при всех $r \geqslant r_0$ (где r_0 — некоторый подходящим образом выбранный радиус) *ряд* вида

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \cdots \frac{\partial}{\partial s_n} \left(\frac{1}{r}\right). \tag{12.4}$$

содержащий значительный произвол. Соответствующий потенциал определяет регулярное течение жидкости вне сферы радиуса r_0 с центром в точке x_0, y_0, z_0.

Потенциал объемного распределения источников

Возьмем некоторый объем V_0 вне области $\mathcal{D}$, занятой движущейся несжимаемой жидкостью и не совпадающей со всем бесконечным пространством. Пусть координаты x_0, y_0, z_0 соответствуют точкам объема V_0. Очевидно, что функция $\varphi(x, y, z)$, определяемая интегралом

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{Q(x_0, y_0, z_0)\, dx_0\, dy_0\, dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \tag{12.5}$$

где $Q(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая произвольная интегрируемая функция, является гармонической функцией в $\mathcal{D}$. В некоторых случаях при решении гидродинамических задач можно исходить из формулы (12.5) и с помощью выбора функции Q находить нужный потенциал φ. Можно показать [1]), что, если

[1]) См. § 25 этой главы.

функция $Q(x_0, y_0, z_0)$ непрерывная кусочно гладкая внутри V_0, то в объеме V_0 потенциал $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет *уравнению Пуассона*

$$\Delta\varphi = Q(x, y, z). \tag{12.6}$$

Внутри V_0 имеется распределение объемных источников с плотностью $Q(x, y, z)$. При продолжении движения несжимаемой жидкости в объем V_0 получим, что в объеме V_0 условие несжимаемости ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) не удовлетворяется.

Потенциалы простого и двойного слоя

Пусть имеем некоторую поверхность Σ, замкнутую или незамкнутую, расположенную вне области движения жидкости $\mathcal{D}$ (рис. 68). Поверхность Σ может в некоторых случаях совпадать со всей границей области $\mathcal{D}$ или с некоторой ее частью. Рассмотрим интеграл

$$\varphi = \int_{\Sigma} \frac{q(M)\, d\sigma_0}{r}, \tag{12.7}$$

где q — некоторая произвольная интегрируемая функция точек поверхности Σ. Очевидно, потенциал (12.7), полученный с помощью распределения источников по поверхности Σ, является гармонической функцией вне Σ. Решение уравнения Лапласа, представляемое формулой (12.7), называется потенциалом простого слоя.

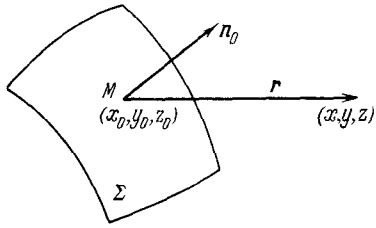


Рис. 68. Схема для построения потенциалов простого и двойного слоя.

Аналогичным путем можно построить решение с помощью распределения по поверхности Σ диполей, оси которых направлены по нормали $\boldsymbol{n}_0$ к Σ. Получим

$$\varphi = \int_{\Sigma} \mu(M) \frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_0. \tag{12.8}$$

Здесь $\mu(M)$ — некоторая интегрируемая функция точек поверхности Σ. Функция φ, определяемая формулой (12.8),— гармоническая функция вне Σ. Потенциал (12.8) называется потенциалом двойного слоя.

Во многих приложениях задачу об отыскании потенциала $\varphi(x, y, z)$ сводят к задаче об отыскании функций точек поверхности Σ, входящих под знаки интегралов в формулах (12.7) или (12.8), т. е. к задаче об отыскании плотностей распределения источников $q(M)$ или диполей $\mu(M)$. В этом случае неизвестные функции входят под знак интеграла, поэтому соответству-

ющие уравнения для определения этих функций получаются интегральными уравнениями.

Свойства гармонических функций

Рассмотрим несколько очень важных свойств гармонических функций.

Пусть S — некоторая замкнутая поверхность, расположенная в области $\mathcal{D}$, внутри которой происходит *регулярное* потенциальное течение несжимаемой жидкости.

Непосредственно из уравнения неразрывности видно, что всегда имеет место следующее равенство:

$$\int_S v_n \, d\sigma = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma = \int_V \Delta \varphi \, d\tau = 0, \tag{12.9}$$

где V — объем, ограниченный поверхностью S, т. е. *поток несжимаемой жидкости через любую замкнутую поверхность, расположенную в области $\mathcal{D}$, равен нулю.* Поверхность S может совпадать с границей области $\mathcal{D}$.

Возьмем в качестве поверхности S сферу радиуса R с центром в некоторой точке M. На основании формулы (12.9) можно написать

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial R} R^2 \, d\omega = 0 \quad \text{или} \quad R^2 \frac{\partial}{\partial R} \int_\Omega \varphi \, d\omega = 0,$$

где $d\omega$ — телесный угол, Ω — единичная сфера, концентрическая S, значения подынтегральных функций берутся в точках S, соответствующих точкам Ω. Отсюда следует, что независимо от радиуса сферы S

$$\int_\Omega \varphi \, d\omega = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad \int_\Omega \varphi \, d\omega = \varphi_M \, 4\pi. \tag{12.10}$$

Последнее равенство (12.10) можно еще переписать в виде

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S \varphi \, d\sigma, \tag{12.11}$$

следовательно, *значение гармонической функции в данной точке M равно среднему по поверхности любой сферы с центром в точке M.*

Это — важное свойство гармонических функций. Можно показать, что всякая функция, непрерывная вместе со своими вторыми производными и удовлетворяющая в области $\mathcal{D}$ теореме о среднем, выраженной равенством (12.11), для сфер $S \subset \mathcal{D}$ с

произвольными радиусами является гармонической функцией, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа.

Пусть $\mathcal{D}$ — область, в которой функция $\varphi(x, y, z)$ гармонична; пользуясь свойством (12.11), легко показать, что *функция* φ *не может достигать ни максимума, ни минимума внутри области* $\mathcal{D}$.

В самом деле, предположим противное. Пусть в некоторой точке M внутри $\mathcal{D}$ потенциал φ достигает минимума, тогда во всех точках N сколь угодно малой окрестности точки M должно выполняться неравенство

$$\varphi_M < \varphi_N, \tag{12.12}$$

но при наличии такого неравенства формула (12.11) не может выполняться, следовательно, неравенство (12.12) для всех точек N в малой окрестности точки M недопустимо. Аналогичным образом получим, что внутри $\mathcal{D}$ нет точек максимумов функции φ. Следовательно, максимальные и минимальные значения потенциала φ регулярного течения несжимаемой жидкости в области $\mathcal{D}$ достигаются только на границе области $\mathcal{D}$. Это справедливо для всех гармонических функций, в частности, это свойство выполняется и для производных $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$.

Рассмотрим теперь квадрат величины скорости при потенциальном движении несжимаемой жидкости:

$$v^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Величина скорости и квадрат величины скорости не являются гармоническими функциями, тем не менее *максимальное значение величины скорости при потенциальном движении несжимаемой жидкости достигается на границе регулярного потока жидкости.*

Докажем это. Предположим противное: пусть в некоторой точке M внутри $\mathcal{D}$ величина скорости достигает максимума. Тогда $v_M^2 > v_N^2$, где N — любая точка в достаточно малой окрестности точки M. Направим ось x параллельно скорости в точке M, тогда будем иметь

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_M = v > 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_M = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_M = 0.$$

Так как гармоническая функция $\partial\varphi/\partial x$ в точке M не может иметь максимума, то в любой малой окрестности точки M найдется такая точка N, в которой

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_N > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_M.$$

Но при наличии этого неравенства подавно должно выполняться неравенство

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]_N>\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_M^2=v_M^2,$$

т. е. внутри потока невозможна реализация максимума скорости. Максимальные значения скорости при потенциальном движении несжимаемой жидкости всегда достигаются на границах потока.

При обтекании тел безграничным потоком максимальное значение величины скорости достигается на поверхности обтекаемых тел. При установившемся обтекании согласно интегралу Бернулли максимальной скорости в потоке соответствует минимальное значение давления. Следовательно, точка с минимальным давлением находится на поверхности тела. Кавитация впервые возникает в области, близкой к минимуму давлений, поэтому кавитация возникает вблизи поверхности обтекаемых тел.

Минимальное значение скорости может возникать как на границах, так и внутри потенциального потока. В частности, критическая точка со скоростью, равной нулю, может находиться во внутренних точках потенциального потока. Например, во внутренней точке $x=y=z=0$ для течения с потенциалом $\varphi=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-z^2$ скорость имеет минимальное значение, равное нулю.

Формулы Грина. Кинетическая энергия жидкости

Выведем формулы Грина, представляющие собой простые полезные следствия из формулы Гаусса — Остроградского. Пусть в некотором конечном объеме V, ограниченном регулярной поверхностью S, даны три функции P, Q, R, однозначные и непрерывные внутри V вместе со своими частными производными первого порядка. Формулу Гаусса — Остроградского можно написать в виде

$$\int_S [P\cos(\boldsymbol{n},x)+Q\cos(\boldsymbol{n},y)+R\cos(\boldsymbol{n},z)]\,d\sigma=$$

$$=\int_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\tau, \qquad (12.13)$$

где $\cos(\boldsymbol{n},x)$, $\cos(\boldsymbol{n},y)$, $\cos(\boldsymbol{n},z)$ — компоненты единичного вектора внешней к объему V нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности S. Подставим в (12.13) P, Q, R, определенные формулами

$$P=\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad Q=\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad R=\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

где $\varphi(x,y,z)$ и $\psi(x,y,z)$ — произвольные однозначные функции,

непрерывные вместе со своими производными до второго порядка включительно внутри V. После подстановки получим *первую* формулу Грина

$$\int_V \psi \Delta\varphi \, d\tau + \int_V \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi \, d\tau = \int_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, d\sigma. \qquad (12.14)$$

Вторая формула Грина легко получается из первой. Для этого в (12.14) поменяем местами φ и ψ и вычтем результат из первоначальной формулы, тогда получим

$$\int_V (\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi) \, d\tau = \int_S \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\sigma. \qquad (12.15)$$

Пусть φ — потенциал скоростей течения идеальной несжимаемой жидкости, из формулы (12.14), если положить $\varphi = \psi$, получим

$$\frac{1}{\rho} E = \frac{1}{2} \int_V |\operatorname{grad}\varphi|^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \int_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, d\sigma. \qquad (12.16)$$

Очевидно, что величина E равняется кинетической энергии жидкости в объеме V. Формула (12.16) показывает, что кинетическая энергия жидкости в объеме V представляется поверхностным интегралом по граничной поверхности S. По смыслу формулы (12.16) существенно предположение об однозначности потенциала φ. Если объем V, в котором потенциальное движение регулярно, односвязный, то однозначность потенциала φ получается автоматически. Если V — многосвязный, то предположение об однозначности φ существенно.

Если на замкнутой поверхности S — границе конечного объема V функция φ равна нулю или производная $\partial\varphi/\partial n$ равна нулю, или на одних частях этой поверхности $\varphi = 0$, а на других $\partial\varphi/\partial n = 0$, то из (12.16) следует, что $E = 0$, поэтому в этих случаях имеем $|\operatorname{grad}\varphi| = 0$, или $\partial\varphi/\partial x = \partial\varphi/\partial y = \partial\varphi/\partial z = 0$ внутри V; отсюда $\varphi = \text{const}$, т. е. жидкость покоится.

Задачи Дирихле, Неймана и смешанная

Пусть дана некоторая область $\mathcal{D}$, ограниченная поверхностью Σ. Задача об определении гармонической функции $\varphi(x, y, z)$, регулярной внутри $\mathcal{D}$, по заданным значениям функции φ на границе Σ называется задачей Дирихле.

Задача об определении гармонической функции $\varphi(x, y, z)$, регулярной внутри Σ, по заданным значениям нормальной производной $\partial\varphi/\partial n$ на Σ — границе $\mathcal{D}$ называется задачей Неймана.

Задача об определении гармонической функции $\varphi(x, y, z)$ в $\mathcal{D}$ называется смешанной, когда на одних частях границы

Σ задана функция φ, а на других — нормальная производная $\partial\varphi/\partial n$.

Задачи называются внутренними, когда внутри области $\mathcal{D}$ не содержится бесконечно удаленная точка, в противном случае задачи называются внешними.

В случае внешней задачи необходимо задавать добавочные условия в бесконечно удаленной точке. В качестве такого условия можно принять требование об исчезании скорости, т. е.

$$|\operatorname{grad}\varphi|_\infty = 0 \tag{12.17}$$

в пределе при удалении в бесконечность по любому пути.

Единственность решения внутренних задач

Теперь легко доказать единственность решений указанных выше внутренних задач о потенциальном движении несжимаемой жидкости в предположении, что потенциал φ однозначен и что кинетическая энергия конечна, область $\mathcal{D}$ может быть многосвязной.

В самом деле, пусть две однозначные гармонические функции φ_1 и φ_2 дают два решения рассматриваемой задачи. Рассмотрим гармоническую функцию $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Очевидно, что для однозначной функции φ получается та же задача, что для функций φ_1 и φ_2, но только с нулевыми значениями на границе Σ. С помощью формулы (12.16), примененной к функции $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, получим, что $\varphi = \text{const}$. Для задачи Дирихле или для смешанной задачи $\varphi = 0$. В задаче Неймана постоянная может быть отличной от нуля, но движение жидкости определяется однозначно.

Полученные выводы о единственности решения опираются существенно на формулу (12.16); справедливость этой формулы основана на допущении, что интеграл

$$\int_{\mathcal{D}} |\operatorname{grad}\varphi|^2 \, d\tau \tag{12.18}$$

существует. Единственность решения нарушается в классе решений, для которых этот интеграл не существует, за счет усложненных свойств решения вблизи границы Σ.

Для доказательства единственности внешних задач на основе формулы (12.16), кроме условий о поведении решения вблизи Σ, необходимо еще учесть, что область $\mathcal{D}$ содержит бесконечно удаленную точку, и необходимо показать, что добавочное требование о регулярности и конечности потенциала φ вблизи бесконечно удаленной точки гарантирует сходимость интеграла (12.18), распространенного на бесконечную область интегрирования $\mathcal{D}$. Для решения этого вопроса ниже мы

рассмотрим более подробно поведение регулярной гармонической функции φ в бесконечности для пространственной задачи.

Заметим еще, что для многосвязной области $\mathcal{D}$ задача Неймана и некоторые смешанные задачи наряду с единственным однозначным решением для потенциала могут иметь еще решения с неоднозначным потенциалом φ. В случае неоднозначных функций φ в многосвязных областях единственность решения не имеет места. В этом случае для выделения единственных неоднозначных решений требуется выставлять дополнительные условия, фиксирующие периоды неоднозначности — циркуляции по контурам, не стягиваемым в точку внутри многосвязной области $\mathcal{D}$.

Функция Грина. Гармоническая функция как сумма потенциалов простого и двойного слоя

С помощью второй формулы Грина можно дать формулу, выражающую однозначную гармоническую функцию $\varphi(x, y, z)$ внутри объема V через значения φ и $\partial\varphi/\partial n$ на границе S этого объема.

Возьмем в качестве функции $\psi(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ некоторую гармоническую функцию по переменным x_0, y_0, z_0 и по переменным x, y, z, имеющую при $x = x_0, y = y_0 z = z_0$ такую особенность, что вблизи этой точки верна асимптотическая формула

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + h(x_0, y_0, z_0, x, y, z) = \frac{1}{r} + h, \tag{12.19}$$

где h — регулярная гармоническая функция по каждой тройке своих аргументов в объеме V. Дальше при использовании формулы (12.15) будем подразумевать, что переменные интегрирования обозначены через x_0, y_0, z_0. Так как функция ψ имеет особенность в точке $r = 0$, то будем писать формулу (12.15) применительно к объему V_1, из которого удалена внутренность весьма малой сферы S_ε радиуса ε с центром в точке $r = 0$ (рис. 69).

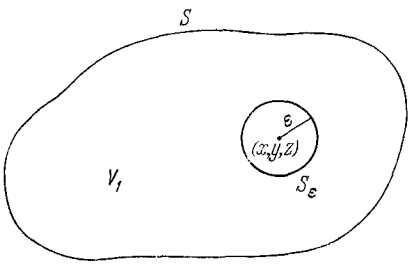


Рис. 69. Область интегрирования для получения потенциала.

Так как φ и ψ — по условию регулярные однозначные функции в объеме V_1, то по формуле (12.15) получим

$$\int_{S_\varepsilon}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma + \int_{S}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma = 0.$$

Интеграл по сфере S_ε вычислим, устремляя радиус сферы ε к нулю и используя асимптотическую формулу (12.19). При $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \to} \int_{S_\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) d\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma + \int_\Omega \varphi \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial \varepsilon}\, \varepsilon^2\, d\omega\right) =$$

$$= -4\pi\varphi(x, y, z), \quad (12.20)$$

поэтому

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) d\sigma. \quad (12.21)$$

Эта формула даст решение внутренней задачи Дирихле, если принять, что поверхность S совпадает с Σ и что $\psi = 0$ на Σ. Эта же формула даст решение задачи Неймана, если гармоническая функция ψ определена условием $\partial\psi/\partial n = 0$ на Σ. Две различные функции ψ, определенные такими условиями, называются функциями Грина для задачи Дирихле или для задачи Неймана. Гармонические функции $\psi(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ имеют особенности внутри $\mathcal{D}$; соответствующие условия на Σ для регулярной гармонической функции h имеют вид

$$h = -\frac{1}{r} \quad \text{или} \quad \frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}. \quad (12.22)$$

Таким путем решение общих задач Дирихле и Неймана для функции φ с произвольными граничными данными сводится к решению частных задач Дирихле и Неймана для функции h с граничными условиями (12.22). Очевидно, что таким же путем можно строить функцию Грина для смешанной задачи.

Если положить $\psi = 1/r$, т. е. $h = 0$, то формула (12.21) принимает вид

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma. \quad (12.23)$$

Здесь можно принять, что S — любая поверхность внутри области регулярности функции φ или что S совпадает с Σ — границей области $\mathcal{D}$. Формула (12.23) дает представление потенциала φ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя.

Разложение потенциала в ряд в бесконечно удаленной области

Теперь можно показать, что гармоническая функция φ, удовлетворяющая условию (12.17), вне всякой сферы достаточно большого радиуса, охватывающей все границы Σ области $\mathcal{D}$, может быть разложена в ряд вида

$$\varphi = C - \frac{M}{4\pi R} + \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z}{R^3} + \ldots + \frac{\mathcal{P}_n(x, y, z)}{R^{2n+1}} + \ldots, \quad (12.24)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, C, c_1, c_2, c_3 — постоянные, $\mathcal{P}_n$ — однородный гармонический полином степени n и

$$M = \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma,$$

причем Σ_1 — любая замкнутая поверхность, охватывающая один раз внутренние границы области $\mathcal{D}$, т. е. поверхности Σ. Поверхность Σ_1 может совпадать с поверхностью Σ, так как по (12.9)

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

если между Σ_1 и Σ функция φ регулярна. Знак минус у второго интеграла связан с тем, что нормаль на Σ взята внутренней к $\mathcal{D}$. Очевидно, что величина M равняется расходу жидкости через поверхность Σ, т. е.

$$M = \int_{\Sigma} v_n\, d\sigma = \frac{dV}{dt},$$

где dV/dt — изменение объема внутри Σ, которое может быть вообще отличным от нуля. Расход $M = 0$, если Σ состоит из поверхностей твердых тел, движущихся внутри жидкости. Величина M будет конечной и отличной от нуля, если мы будем рассматривать, например, задачу о расширении сферы в несжимаемой жидкости.

Обратимся теперь к доказательству справедливости разложения (12.24). Пусть Σ_1 — сфера с центром в начале координат радиуса R_1, охватывающая поверхности Σ, и Σ_2 — сфера с центром в точке x, y, z, весьма большого радиуса R_2, содержащая сферу Σ_1 внутри себя (рис. 70).

Потенциал $\varphi(x, y, z)$ является гармонической функцией внутри объема, ограниченного сферами Σ_1 и Σ_2, и поэтому согласно

(8.23) можно написать

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_1}\left(\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R_1} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial R_1}\right)d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_2}\left[\varphi\left(-\frac{1}{R_2^2}\right) - \frac{1}{R_2}\frac{\partial\varphi}{\partial R_2}\right]d\sigma. \tag{12.25}$$

Устремляя радиус R_2 к бесконечности, определим предельные значения интегралов, взятых по сфере Σ_2.

Так как

$$\int\limits_{\Sigma_2}\frac{\partial\varphi}{\partial R_2}\,d\sigma = M, \quad \text{то} \quad \lim_{R_2\to\infty}\frac{1}{R_2}\int\limits_{\Sigma_2}\frac{\partial\varphi}{\partial R_2}\,d\sigma = 0. \tag{12.26}$$

Для элемента сферы Σ_2 имеем $d\sigma = R_2^2 d\omega$, где ω — телесный угол, поэтому первое равенство из (12.26) дает

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\int\limits_{\Omega}\varphi\,d\omega = \frac{M}{R_2^2},$$

откуда

$$\int\limits_{\Omega}\varphi\,d\omega = -\frac{M}{R_2} + 4\pi C$$

и, следовательно,

$$\lim_{R_2\to\infty}\int\limits_{\Sigma_2}\varphi\frac{d\sigma}{R_2^2} = 4\pi C, \tag{12.27}$$

где C — постоянная интегрирования по R_2.

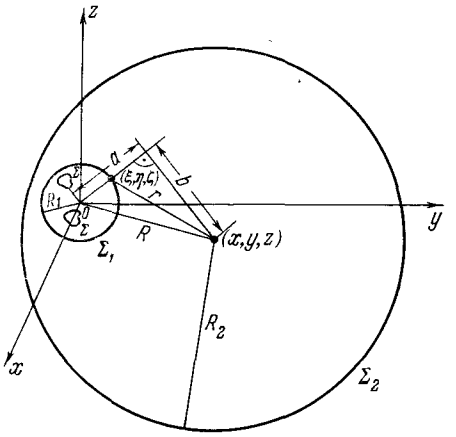


Рис. 70. Схема к доказательству разложения (12.24).

Покажем теперь, что величина C не зависит от координат x, y, z центра сферы Σ_2. В самом деле, возьмем сферу Σ_2' *радиуса* $R_2' = R_2$ с центром в точке с координатами $x + \Delta x, y, z$. Для этой сферы будем иметь

$$\int\limits_{\Omega'}\varphi\,d\omega = -\frac{M}{R_2'} + 4\pi C'.$$

Можно написать, что

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\varphi(\xi+\Delta x,\,\eta,\,\zeta) - \varphi(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{\Delta x}\,d\omega = 4\pi\frac{C'-C}{\Delta x},$$

где ξ, η, ζ — координаты точек на сфере Σ_2. В пределе при $\Delta x \to 0$ получим

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\, d\omega = 4\pi \frac{\partial C}{\partial x}.$$

По условию (12.17) имеем, что производная $\partial\varphi/\partial\xi$ исчезает при $R_2 \to \infty$, следовательно, $\partial C/\partial x = 0$. Аналогичным образом можно показать, что $\partial C/\partial y = \partial C/\partial z = 0$, откуда вытекает, что C есть не зависящая от координат x, y, z, постоянная.

Из формулы (12.25) на основании (12.26) и (12.27) получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R_1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial R_1} \right) ds + C. \qquad (12.28)$$

Эта формула представляет собой *обобщение формулы* (12.23) *на случай внешней задачи*. Очевидно, что после замены производной $\partial/\partial R_1$ через производную $\partial/\partial n$ поверхность интегрирования (сферу Σ_1) в формуле (12.28) можно заменить любой другой замкнутой поверхностью, охватывающей все внутренние границы области $\mathcal{D}$.

В окрестности всякой *внутренней* точки области $\mathcal{D}$ с конечными координатами x', y', z' функции $1/r$ и $\partial\,(1/r)/\partial n$ разлагаются в ряды Тейлора по $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, сходящиеся обсолютно и равномерно внутри некоторой сферы, в которой $r \neq 0$. Отсюда следует, что вблизи точки x', y', z', в которой потенциал φ регулярен, потенциал $\varphi\,(x, y, z)$ представляется сходящимся степенным рядом по $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$. Следовательно, гармонические функции в точках регулярности x', y', z' являются *аналитическими функциями*, имеющими производные любых порядков.

С помощью рис. 70 легко усмотреть, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + (a - R_1)^2}} = f(a - R_1),$$

причем $f(a) = 1/R$. Функция

$$f(a - R_1) = \frac{1}{r}$$

является регулярной всюду, где $r \neq 0$. Считая, что точка x, y, z, в которой определяется потенциал φ, расположена достаточно далеко от сферы Σ_1, разложим функцию $f(a - R_1)$ в ряд Тейлора по R_1

$$f(a - R_1) = \frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{R}\right) R_1 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{R}\right) R_1^2 - \ldots \qquad (12.29)$$

Производная по направлению $\boldsymbol{a}$, очевидно, равна

$$\frac{\partial}{\partial a} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z},$$

где α, β, γ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{R}_1$, соединяющего начало координат с переменной точкой ξ, η, ζ, лежащей на сфере Σ_1. Для первой производной

$$f'(a) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

будем иметь

$$f'(a) = -\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{R^3} = \frac{\pi_1(x, y, z)}{R^3},$$

где π_1 — однородный полином от x, y, z первой степени. Используя метод математической индукции, легко показать, что

$$f^{(n+1)}(a) = \frac{\pi_{n+1}(x, y, z)}{R^{2(n+1)+1}},$$

где π_{n+1} — однородный полином от x, y, z степени $n+1$ с коэффициентами, зависящими от ξ, η, ζ, если верно, что

$$f^{(n)}(a) = \frac{\pi_n(x, y, z)}{R^{2n+1}},$$

где π_n — однородный полином x, y, z степени n с коэффициентами, зависящими от ξ, η, ζ.

Таким образом, разложение (12.29) можно записать в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{R^3} R_1 + \frac{\pi_2(x, y, z)}{R^5} R_1^2 - \ldots + \\ + (-1)^n \frac{\pi_n(x, y, z)}{R^{2n+1}} R_1^n + \ldots \qquad (12.30)$$

Каждый из членов этого ряда является гармонической функцией и представляет собой течение от источника, диполя и мультиполей более высокого порядка, расположенных в начале координат O. Этот ряд сходится равномерно, и его можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Подставляя разложение (12.30) для $1/r$ в формулу (12.28) для потенциала φ, получим разложение (12.24). Гармоничность каждого члена в разложении (12.24) непосредственно очевидна из вывода.

Гармоничность однородных полиномов $\mathscr{P}_n(x, y, z)$ в (12.24) вытекает из равенства

$$\Delta\left(\frac{\mathscr{P}_n(x, y, z)}{R^{2n+1}}\right) = \frac{\Delta\mathscr{P}_n(x, y, z)}{R^{2n+1}},$$

которое получается в результате дифференцирования.

Однородные гармонические функции $\frac{\pi_n(x, y, z)}{R^{2n+1}}$, получающиеся при дифференцировании $1/R$ и путем их суммирования, $\mathscr{P}_n(x, y, z)/R^{2n+1}$, называются сферическими функциями. Таким образом, любая гармоническая функция, удовлетворяющая условию (12.17), может быть разложена в ряд по сферическим функциям $\mathscr{P}_n(x, y, z)/R^{2n+1}$ вне сферы Σ_1.

Порядок убывания потенциала в бесконечности. Кинетическая энергия неограниченного объема жидкости при скорости, равной нулю в бесконечности

Несущественную для определения поля скоростей аддитивную постоянную, входящую в разложение (12.24) для потенциала φ, можно определить из условия $\varphi_\infty = 0$. Тогда $C = 0$, и ясно, что потенциал φ в случае течения жидкости, вызванного движением в ней твердого тела (т. е. при $M = 0$), будет стремиться в бесконечности к нулю по крайней мере как $1/R^2$, а решение внешней задачи Неймана в случае $M \neq 0$ — по крайней мере как $1/R$.

Для кинетической энергии E некоторого объема V идеальной несжимаемой жидкости, ограниченного поверхностью S, имеется формула (12.16). Рассмотрим случай, когда объем V не ограничен, а на бесконечности выполняется условие (12.17). Тогда для потенциала φ в окрестности бесконечно удаленной точки будет справедливо разложение (12.24). Возьмем поверхность S, состоящую из Σ — поверхности тел, находящихся в жидкости и охватывающей их поверхности Σ_1, которую потом устремим в бесконечность, тогда

$$E = \frac{\rho}{2}\int_{\Sigma}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma + \frac{\rho}{2}\int_{\Sigma_1}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma.$$

Первый интеграл будет конечной величиной, если мы будем рассматривать такие течения, для которых на поверхности тел Σ произведение $\varphi\,(\partial\varphi/\partial n)$ интегрируемо. Второй интеграл по Σ_1 в силу разложения (12.24) при $M = 0$ или при $C = 0$ будет стремиться к 0 при $\Sigma_1 \to \infty$, так как подынтегральное выражение будет убывать при этом по крайней мере как $1/R^3$. Для кинети-

ческой энергии E неограниченной массы жидкости при этом будем иметь [1])

$$E = \frac{\rho}{2} \int_V (\operatorname{grad} \varphi^2)\, d\tau = \frac{\rho}{2} \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma. \qquad (12.31)$$

Таким образом, кинетическая энергия неограниченного объема несжимаемой жидкости конечна, если в этом объеме происходит регулярное потенциальное течение и скорость течения в бесконечности равна нулю.

Единственность внешних задач Дирихле, Неймана и смешанной, когда $(\operatorname{grad} \varphi)_\infty = 0$

Из существования конечной кинетической энергии следует, что приведенные выше доказательства о единственности однозначных решений внутренних задач Дирихле, Неймана и смешанной при наличии условия (12.17) автоматически распространяются на случай внешних задач.

Заметим, что если граничная поверхность Σ простирается до бесконечности, то проведенное выше рассуждение о поведении гармонических функций в бесконечности недействительно. В этих случаях требуется отдельное специальное аналогичное исследование, в частности, это необходимо для плоских задач, в которых поверхности Σ — бесконечные цилиндры. Однако и в этом случае требование об исчезновении скорости при удалении от внутренних границ области в бесконечность и требование об однозначности потенциала гарантируют единственность решения рассматриваемых основных краевых задач.

Условия зеркальной симметрии для гармонических функций

Пусть гармоническая функция $\varphi(x, y, z)$, регулярная вблизи точки x', y', z', на сколь угодно малом элементе плоскости $z = z'$, проходящем через точку x', y', z', обращается в нуль. Очевидно, что все частные производные от φ, содержащие дифференцирование только по x и y, обращаются в нуль в точке x', y', z'.

Полагая $x - x' = \xi$, $y - y' = \eta$ и $z - z' = \zeta$, в силу доказанной выше разложимости функции $\varphi(\xi, \eta, \xi)$ в ряд Тейлора получим, что вблизи точки $\xi = \eta = \zeta = 0$ потенциал $\varphi(\xi, \eta, \xi)$ разлагается в ряд следующего вида:

$$\varphi = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{P}_n(\xi, \eta, \zeta^2) + \zeta^2 \sum_{n=2}^{\infty} \mathscr{Q}_n(\xi, \eta, \zeta^2), \qquad (12.32)$$

[1]) Если $C \neq 0$ и $M \neq 0$, то справа в (12.31) появится добавочный член $\rho \frac{CM}{2}$. Напомним, что если объем, ограниченный поверхностью Σ, постоянный, то $M = 0$. Так как потенциал φ определен с точностью до аддитивной функции $f(t)$, то всегда можно принимать, что $C = 0$.

где $\mathscr{P}_n$ и $\mathscr{Q}_n$ — однородные полиномы степени n по ξ, η, ζ. В первом члене (12.32) сгруппированы все члены ряда Тейлора с нечетными степенями ζ, во втором — с четными степенями ζ.

Покажем теперь, что в нашем случае из свойства гармоничности функции следует, что все $\mathscr{Q}_n \equiv 0$. Путем дифференцирования легко проверить, что после применения оператора Лапласа к однородному полиному по ξ, η, ζ опять получается однородный полином, причем степень этого полинома будет на две единицы меньше степени исходного. Таким образом,

$$\Delta(\zeta\mathscr{P}_n) = \zeta\mathscr{R}_{n-2}(\xi, \eta, \zeta^2) \tag{12.33}$$

и

$$\Delta(\zeta^2\mathscr{Q}_n) = \zeta^2 S_{n-2}(\xi, \eta, \zeta^2) + 2\mathscr{Q}_n(\xi, \eta, \zeta^2), \tag{12.34}$$

где $\mathscr{R}_{n-2}$ и S_{n-2} — однородные полиномы по ξ, η, ζ степени $n-2$.

Так как для любых n степени однородных полиномов (12.33) нечетные, а степени полиномов (12.34) четные и так как однородные полиномы по ξ, η, ζ с различными показателями однородности линейно независимы, то правые части в (12.33) и (12.34) в силу гармоничности функции φ должны обращаться в нуль тождественно. Отсюда следует, что полиномы $\zeta^2\mathscr{Q}_n(\xi, \eta, \zeta^2)$ должны быть регулярными гармоническими функциями во всем пространстве, но это невозможно, так как они не удовлетворяют теореме о среднем в точках плоскости $\zeta = 0$. В самом деле, пусть $\zeta^2\mathscr{Q}_n(\xi, \eta, \zeta^2) = \zeta^{2p}\mathscr{Q}_n'(\xi, \eta, \zeta^2)$, где $\mathscr{Q}_n'(\xi, \eta, 0)$ отлично от нуля при некоторых ξ, η, не равных нулю, причем целое число $p \geqslant 1$. По теореме о среднем должно иметь место точное равенство:

$$0 = \int_S \zeta^{2p}\mathscr{Q}_n'(\xi, \eta, \zeta^2)\, d\sigma, \tag{12.35}$$

где S — сфера любого радиуса с центром в фиксированной точке $\xi_1 \neq 0$, $\eta_1 \neq 0$ на плоскости $\zeta = 0$, принадлежащей области, где $\varphi = 0$. Для достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$ сферы S имеем

$$\zeta^{2p}\mathscr{Q}_n'(\xi, \eta, \zeta^2) = \zeta^{2p}\mathscr{Q}_n'(\xi_1, \eta_1, 0)\,[1 + O(\varepsilon)], \tag{12.36}$$

где $O(\varepsilon)$ — величина, стремящаяся к нулю вместе с ε. После подстановки (12.36) в (12.35) получим, что интеграл в (12.35) отличен от нуля при достаточно малых ε, не равных нулю. Отсюда следует справедливость утверждения о том, что $\mathscr{Q}_n = 0$ для любых n.

Другое доказательство обращения в нуль $\mathscr{Q}_n$ для любых n можно получить непосредственно из (12.34) после приравнивания правой части этого выражения нулю.

Равенство (12.32) приобретает следующий вид:

$$\varphi = \zeta\omega(\xi, \eta, \zeta^2), \tag{12.37}$$

где $\omega(\xi, \eta, \zeta^2)$ — некоторая аналитическая функция своих аргументов. Из этой формулы, полученной из предположения, что φ обращается в нуль на некоторой сколь угодно малой площади в плоскости $\zeta = 0$, непосредственно вытекает следующее свойство симметрии для потенциала $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = -\varphi(\xi, \eta, -\zeta) \quad \text{или} \quad \varphi(P) = -\varphi(P'), \tag{12.38}$$

где P и P' — точки, симметричные относительно плоскости $\zeta = 0$. Точки P и P' являются зеркальными изображениями друг друга относительно плоскости $\zeta = 0$ (см. рис. 71). Из свойства симметрии (12.38) легко выводим

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{P'}, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{P'}$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_{P'}. \tag{12.39}$$

Свойства симметрии (12.38) и (12.39), доказанные выше только в области сходимости ряда (12.32), после аналитического продолжения функции φ будут выполняться во всей области $\mathcal{D}$ определения гармонической функции φ, причем область $\mathcal{D}$ получится симметричной относительно плоскости $\zeta = 0$.

Внутри сферы радиуса сходимости ряда (12.32) на плоскости $\zeta = 0$ функция φ обращается в нуль. Однако это не означает, что $\varphi = 0$ во всех точках плоскости $\zeta = 0$. Если возможно аналитическое продолжение функции φ, то при достаточно больших ξ, η на плоскости $\zeta = 0$ могут появиться части плоскости $\zeta = 0$, на которых $\varphi \neq 0$; при подходе к этой части плоскости $\zeta = 0$ с разных сторон значения φ будут отличаться знаком. Область $\mathcal{D}$ может быть многолистной, на плоскости $\zeta = 0$ могут появиться особые точки и т. п.

Задача об ударе плавающего тела

Пусть имеем твердое тело, плавающее на горизонтальной поверхности несжимаемой жидкости, занимающей все нижнее полупространство (рис. 71). Для простоты примем, что вначале жидкость и тело покоились. В результате внезапного приложения внешних импульсивных сил тело и жидкость начинают двигаться. Движение жидкости после удара будет потенциальным и потенциал этого движения сразу после удара будет равен

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{p_t}{\rho},$$

где

$$p_l = \lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau p\, dt$$

— импульс давления, подействовавший на жидкость в момент удара.

Для определения гармонической функции $\varphi(x, y, z)$ в момент, следующий непосредственно после удара, имеем условия: на

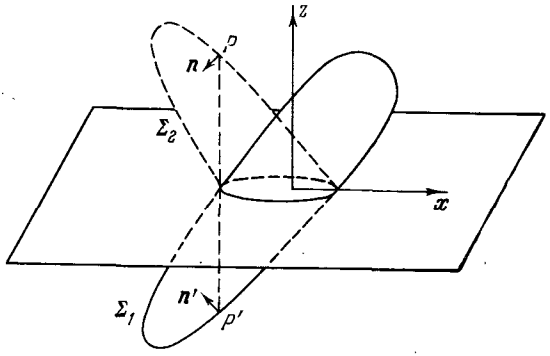


Рис. 71. К задаче об ударе тела, плавающего на горизонтальной поверхности жидкости.

свободной границе жидкости (на части плоскости xOy вне тела)

$$\varphi = 0; \tag{12.40}$$

на смоченной поверхности тела Σ_1 импульс давления p_l отличен от нуля, но вообще неизвестен заранее. Однако, если движение тела, возникающее в результате удара, известно, то при отсутствии отрыва жидкости от тела, т. е. при сохранении контакта тела с жидкостью, на поверхности Σ_1 имеем условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_n, \tag{12.41}$$

где V_n — известная составляющая скорости тела по направлению нормали к его поверхности.

Примем еще, что в бесконечности жидкость покоится, и поэтому

$$(\operatorname{grad} \varphi)_\infty = 0. \tag{12.42}$$

Таким образом, определение потенциала $\varphi(x, y, z)$ сводится к решению смешанной задачи.

В силу условия (12.40) с помощью соотношения (12.38) потенциал φ можно продолжить аналитически в верхнее полупространство. В результате аналитического продолжения получим, что потенциал $\varphi(x, y, z)$ будет определен во всем пространстве вне симметричной поверхности $\Sigma_1 + \Sigma_2$; причем согласно равенствам (12.39) и свойству симметрии поверхности $\Sigma_1 + \Sigma_2$ получим, что в симметричных точках P и P' будут выполняться соотношения

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{P'}. \tag{12.43}$$

В самом деле, пусть α, β, γ — направляющие косинусы нормали в точке P'; тогда направляющие косинусы в точке P будут $\alpha, \beta, -\gamma$ (см. рис. 71). Учитывая это и равенства (12.39), получим (12.43).

На основании (12.41) и (12.43) смешанная задача об определении потенциала скоростей возмущенного движения жидкости, возникшего в результате удара тела, плавающего на горизонтальной поверхности жидкости, равносильна задаче Неймана, поставленной в симметричной области — внешности замкнутой поверхности $\Sigma_1 + \Sigma_2$ с симметричными краевыми данными (12.41) и (12.43).

Из единственности решения задач Неймана и смешанной задачи нетрудно усмотреть, что так поставленная симметричная задача Неймана и соответствующая смешанная задача полностью эквивалентны. Отсюда следует, что задача Неймана с данными, удовлетворяющими равенству (12.43) на симметричной замкнутой поверхности $\Sigma_1 + \Sigma_2$, имеет решение [1]), обладающее свойствами симметрии, выраженными равенствами (12.37), (12.38) и (12.39).

Случай, когда потенциал в симметричных точках имеет одинаковые значения

Если для потенциала $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ вместо равенства (12.37) верно равенство

$$\varphi = \omega(\xi, \eta, \zeta^2), \tag{12.44}$$

то будут удовлетворяться следующие свойства симметрии:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi, \eta, -\zeta), \\ &\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{P'}, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{P'} \end{aligned}\right\} \tag{12.45}$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)_{P'}. \tag{12.46}$$

[1]) См. Л. И. Седов, Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости, Труды ЦАГИ, № 187, 1933.

Из равенства (12.46) следует, что на плоскости $\zeta = 0$ внутри жидкости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0, \quad \text{а} \quad \varphi(\xi, \eta, 0) \neq 0. \tag{12.47}$$

Очевидно, что в этом случае задача Неймана для внешней по отношению к симметричной поверхности $\Sigma_1 + \Sigma_2$ области с симметричными на $\Sigma_1 + \Sigma_2$ данными

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_P = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{P'} \tag{12.48}$$

эквивалентна следующей задаче Неймана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_n \text{ на } \Sigma_1 \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0 \text{ вне тела при } \zeta = 0. \tag{12.49}$$

Эта задача соответствует задаче об определении движения жидкости, возникшего в результате удара тела, погруженного в жидкость, когда жидкость ограничена не свободной поверхностью, а горизонтальной неподвижной плоской непроницаемой стенкой.

Функция Грина для полупространства, ограниченного плоскостью

Основываясь на рассмотренных здесь свойствах зеркальной симметрии, построим функции Грина для задач Дирихле и Неймана в области $\mathcal{D}$, представляющей собой верхнее или нижнее полупространство, ограниченное плоскостью $z = 0$.

Легко видеть, что для точек x, y, z и x_0, y_0, z_0 при $z > 0$ и $z_0 > 0$ функция Грина ψ_1 для задачи Дирихле в области $z > 0$ представится формулой

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}} = \frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP'}}, \tag{12.50}$$

так как функция ψ_1 удовлетворяет условию (12.19), а на границе Σ (плоскости $z = 0$) $\psi_1 = 0$. Из условия (12.19) ясно, что соответствующая функция Грина для нижнего полупространства $z < 0$ будет равняться $\psi_1' = -\psi_1$.

Очевидно, что функция Грина ψ_2 при $z > 0$ и при $z < 0$ для задачи Неймана одна и та же, она представляется формулой

$$\psi_2 = \frac{1}{r_{MP}} + \frac{1}{r_{MP'}}, \tag{12.51}$$

так как при $z = 0$ выполняется краевое условие

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial n} = \frac{\partial \psi_2}{\partial z_0} = 0.$$

Потенциал скоростей от системы особенностей в полупространстве $z > 0$, ограниченном плоскостью $z = 0$

Рассмотрим задачу об отыскании потенциала скоростей движения несжимаемой жидкости в верхнем полупространстве, ограниченном плоской стенкой $z = 0$, от системы заданных особенностей: источников, диполей и мультиполей.

Для удовлетворения условия обтекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \tag{12.52}$$

достаточно наряду с течением от заданных особенностей в верхнем полупространстве ввести еще фиктивное течение в нижнем полупространстве. Внизу под стенкой в зеркально симметричных точках следует поместить такую же систему особенностей. Очевидно, что суммарное течение будет удовлетворять краевому условию (12.52).

Например, если искомое течение обусловлено источниками в точках P_k и диполями в точках Q_j, то соответствующий потенциал течения несжимаемой жидкости в точке M с координатами x, y, z представится формулой

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi}\sum_k q_k\left(\frac{1}{r_{MP_k}} + \frac{1}{r_{MP'_k}}\right) + \sum_j m_j\left(\frac{\partial}{\partial s_j}\frac{1}{r_{MQ_j}} + \frac{\partial}{\partial s'_j}\frac{1}{r_{MQ'_j}}\right), \tag{12.53}$$

где q_k и m_j — заданные постоянные, а P_k и P'_k, Q_j и Q'_j, $d\boldsymbol{s}_j$ и $d\boldsymbol{s}'_j$ — зеркально симметричные точки и направления относительно плоскости $z = 0$.

Преобразование инверсии относительно сферы

Пусть дана сфера S с центром в начале координат и радиусом R.

Рассмотрим преобразование координат

$$\xi = \frac{xR^2}{r^2}, \quad \eta = \frac{yR^2}{r^2}, \quad \zeta = \frac{zR^2}{r^2}, \qquad \text{где } r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{12.54}$$

Нетрудно усмотреть, что точке P с координатами x, y, z и радиусом r внутри сферы соответствует точка P' с координатами ξ, η, ξ и радиусом $r' = R^2/r$ вне сферы; точки P и P' лежат на одной прямой, проходящей через центр сферы.

Легко проверить, что из (12.54) следуют аналогичные обратные формулы:

$$x = \frac{\xi R^2}{r'^2}, \quad y = \frac{\eta R^2}{r'^2}, \quad z = \frac{\zeta R^2}{r'^2}, \quad \text{где } r'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \tag{12.55}$$

Точки P и P' называются зеркально симметричными относительно сферы S. На сфере S имеем $P' = P$, так как в этом случае $\xi = x$, $\eta = y$ и $\zeta = z$.

Построение функции Грина в задаче Дирихле для сферы

Рассмотрим расстояния r_{PM} и $r_{P'M}$ от симметричных относительно сферы S точек $P(x, y, z)$ и $P'(\xi, \eta, \zeta)$ с радиусами-векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ относительно центра сферы, соответственно, до некоторой точки $M(x_0, y_0, z_0)$ с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_0$ внутри сферы:

$$r_{PM}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 + r_0^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_0,$$

$$r_{P'M}^2 = (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2 = r_0^2 + r'^2 - 2\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}_0 = r_0^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2\boldsymbol{r}_0\cdot\frac{R^2}{r^2}\boldsymbol{r}.$$

Очевидно, в том случае, когда точка M лежит на сфере S ($r_0 = R$), верно равенство

$$r_{P'M}^2 = \frac{R^2}{r^2} r_{PM}^2. \tag{12.56}$$

Симметричная относительно переменных x, y, z и x_0, y_0, z_0 функция

$$\psi_1 = \frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{r r_{P'M}} = \frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{\sqrt{r^2 r_0^2 + 1 + 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_0}} \tag{12.57}$$

является гармонической внутри S, имеет особенность типа $1/r_{PM}$ вблизи точки P, не имеет внутри S других особенностей и обращается в силу (12.56) в нуль на сфере S. Следовательно, функция ψ_1, определенная формулой (12.57), является функцией Грина для задачи Дирихле внутри сферы.

Легко усмотреть, что функция Грина для задачи Дирихле вне сферы представится формулой

$$\psi_1' = \frac{1}{r_{P'M}} - \frac{r}{R r_{PM}}. \tag{12.58}$$

Таким образом получается полное решение внешней и внутренней задач Дирихле для сферы с помощью формулы (12.21), в которой функции ψ_1 или ψ_1' определены формулами (12.57) и (12.58).

§ 13. Задача о движении сферы в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости

Рассмотрим задачу о движении абсолютно твердой сферы в безграничной массе несжимаемой идеальной жидкости, когда на жидкость не действуют внешние массовые силы. Пусть сфера радиуса a движется поступательно относительно некоторой неподвижной системы отсчета (x_1, y_1, z_1) со скоростью $\boldsymbol{V}(t)$ в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Движение жидкости, вызванное движением сферы, относительно этой системы отсчета будем называть «абсолютным» движением.

Изучать «абсолютное» движение жидкости будем, пользуясь подвижной системой координат x, y, z, которая жестко скреплена со сферой и имеет начало в ее центре.

Постановка задачи о движении сферы

Возмущенное движение жидкости будет потенциальным, если оно непрерывно и возникло из состояния покоя. Потенциал φ в силу уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости должен удовлетворять уравнению Лапласа всюду вне сферы

$$\Delta\varphi = 0 \tag{13.1}$$

и следующим добавочным условиям: в бесконечности жидкость покоится и, следовательно,

$$(\operatorname{grad}\varphi)_\infty = 0, \tag{13.2}$$

на поверхности сферы Σ должно выполняться условие непроницаемости и безотрывности течения жидкости, т. е. нормальная составляющая скорости v_n жидкости должна равняться нормальной составляющей скорости точек поверхности сферы V_n.

Если сфера движется поступательно со скоростью $\boldsymbol{V}$ вдоль оси x (так выбираем ось x), то условие обтекания запишется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = V\cos(\boldsymbol{r}, x) = V\cos\theta, \tag{13.3}$$

где через θ обозначен переменный угол между $\boldsymbol{r}$ и x. Заметим, что с точки зрения условия обтекания случай движения сферы вдоль оси x со скоростью $V(t)$ является, в силу полной симметрии сферы, наиболее общим случаем движения сферы в идеальной жидкости. Таким образом, требуется решить простейшую частную задачу Неймана.

Потенциал абсолютного движения

Решение поставленной задачи единственно; его легко сконструировать с помощью рассмотренных выше частных решений уравнения Лапласа. Решение типа источника $-1/r$, очевидно, для этой цели не годится, так оно не удовлетворяет условию непроницаемости. Попробуем воспользоваться течением от диполя с осью, параллельной оси x, расположенного в начале координат O. Положим

$$\varphi = A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -A\frac{x}{r^3} = -A\frac{\cos\theta}{r^2}, \tag{13.4}$$

где A — некоторая постоянная. Так подобранная функция φ удовлетворяет вне сферы уравнению Лапласа и в бесконечности стремится к нулю вместе со своими производными, т. е. удовлетворяет граничному условию в бесконечности.

Посмотрим, нельзя ли подбором постоянной A удовлетворить и граничному условию непроницаемости (13.3). На поверхности сферы, очевидно, будем иметь

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-A\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\right]_{r=a} = \frac{2A\cos\theta}{a^3}.$$

Подставляя это значение в (13.3), получим

$$\frac{2A\cos\theta}{a^3} = V\cos\theta,$$

т. е. условие (13.3) будет удовлетворено, если положить

$$A = \frac{Va^3}{2}.$$

Таким образом, функция

$$\varphi = -\frac{Va^3}{2}\frac{x}{r^3} = -\frac{a^3}{2}\frac{V\cos\theta}{r^2} \tag{13.5}$$

дает решение поставленной задачи о движении сферы в жидкости. Линии тока построенного течения показаны на рис. 72. Если сфера движется поступательно со скоростью, направленной как угодно относительно осей координат, то для потенциала скоростей возмущенного движения жидкости будет верна формула

$$\varphi = -\frac{a^3}{2r^3}(V_1x + V_2y + V_3z), \tag{13.6}$$

где через V_1, V_2, V_3 обозначены компоненты скорости V сферы на оси координат. Если скорость поступательного движения

сферы зависит от времени, то для потенциала скоростей это проявится только через функции $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$.

Если сфера вращается около некоторой оси, проходящей через ее центр, то, очевидно, нормальные составляющие скорости сферы на ее поверхности будут равны нулю. Поэтому при таком вращении идеальная жидкость не будет возмущена.

В общем случае при произвольных движениях сферы как твердого тела потенциал скоростей представляется формулой (13.6), в которой V_1, V_2, V_3 являются компонентами скорости центра сферы в подвижных осях.

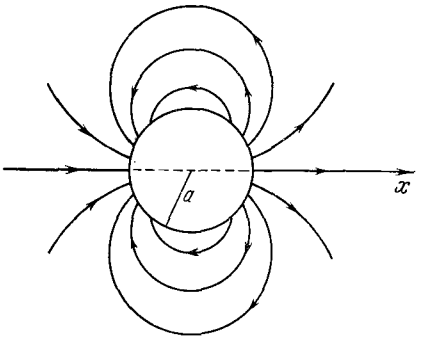


Рис. 72. Линии тока при движении сферы в идеальной жидкости.

Для определения распределения давлений по поверхности сферы следует воспользоваться интегралом Коши — Лагранжа. При поступательном движении вдоль оси x, когда функция $\varphi(x, y, z, t)$ определена в подвижной системе координат (см. (11.7)), имеем

$$p = p_\infty - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} V - \rho \frac{(\operatorname{grad} \varphi)^2}{2}, \qquad (13.7)$$

где функция $f(t)$ уже определена на основании данных в бесконечно удаленной точке, в которой принято, что $\varphi = 0, |\operatorname{grad} \varphi| = 0$ и $p = p_\infty$. Зная распределение давления по поверхности Σ, можно найти силу, действующую со стороны жидкости на сферу Σ.

Постановка задачи об обтекании сферы

Рассмотрим теперь задачу об обтекании неподвижной сферы потоком идеальной несжимаемой жидкости. Пусть скорость потока в бесконечности равна $-\boldsymbol{V}$ и направлена параллельно оси x. Движение жидкости в этом случае можно назвать «относительным». Именно такую картину течения жидкости будет видеть наблюдатель, движущийся вместе со сферой. Потенциал скоростей (обозначим его $\varphi_{\text{отн}}$) должен всюду вне сферы удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_{\text{отн}} = 0$$

и следующим граничным условиям: в бесконечности

$$(\operatorname{grad} \varphi_{\text{отн}})_\infty = -\boldsymbol{V}$$

и на поверхности Σ сферы

$$(v_n)_\Sigma = \left(\frac{\partial \varphi_{\text{отн}}}{\partial r}\right)_{r=a} = 0.$$

Потенциал относительного движения

Для того чтобы получить решение этой задачи, воспользуемся решением предыдущей задачи о движении сферы в неподвижной жидкости. Легко видеть, что мы получим решение задачи об обтекании сферы, если всей системе жидкость плюс сфера в предыдущей задаче сообщим скорость $-\boldsymbol{V}$, где $\boldsymbol{V}$ — скорость движения сферы. Сфера при этом остановится, а на имевшееся

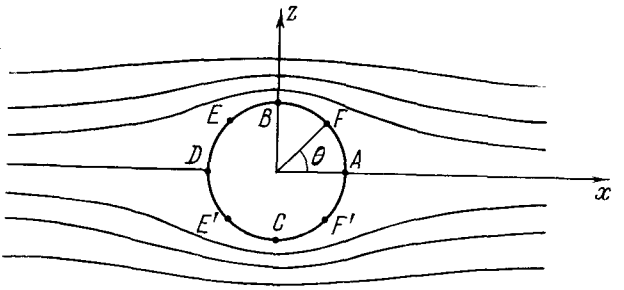


Рис. 73. Линии тока при обтекании сферы идеальной жидкостью.

ранее движение жидкости наложится поступательный поток, параллельный оси x, потенциал которого $\varphi_1 = -Vx$.

Потенциал полученного таким образом течения

$$\varphi_{\text{отн}} = -\frac{a^3}{2} V \frac{x}{r^3} - Vx = -V\cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right) \qquad (13.8)$$

будет гармонической функцией, удовлетворяющей как условию в бесконечности

$$\operatorname{grad}\varphi_{\text{отн}} = \frac{\partial \varphi_{\text{отн}}}{\partial x}\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{V},$$

так и условию на поверхности сферы

$$\left(\frac{\partial \varphi_{\text{отн}}}{\partial r}\right)_{r=a} = -V\cos\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)_{r=a} = 0.$$

Таким образом, формула (13.8) дает решение поставленной задачи. Линии тока этого течения начерчены на рис. 73. Поверхность сферы в этом случае является поверхностью тока.

Очевидно, что как в абсолютном, так и в относительном движении при неустановившемся движении линии тока в любой фиксированный момент времени t_1 будут совпадать с линиями тока установившегося движения, соответствующего скорости $V = V(t_1)$. Картина линий тока связана с вектором скорости центра сферы, система координат в общем случае может быть повернута относительно вектора скорости и соответствующего поля скоростей на любой угол.

Распределение относительных скоростей по поверхности сферы

Найдем распределение относительных скоростей по поверхности сферы

$$v_{r=a} = \left(\frac{\partial \varphi_{\text{отн}}}{\partial s}\right)_{r=a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_{\text{отн}}}{\partial \theta}\right)_{r=a} = \frac{3}{2} V \sin\theta. \quad (13.9)$$

Таким образом, в точках A и D (см. рис. 73), где $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, скорость $v = 0$, это — критические точки. Самая большая скорость достигается при $\theta = \pi/2$ и $\theta = \frac{3}{2}\pi$, т. е. в точках большого круга, плоскость которого ортогональна V, например в точках B и C. Эта скорость равна $\frac{3}{2}V$, т. е. в полтора раза больше скорости набегающего потока.

Парадокс Даламбера для сферы

Зная распределение скоростей по поверхности сферы, можно вычислить распределение давлений. Если скорость V не зависит от времени, то движение установившееся и можно пользоваться интегралом Бернулли:

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}(V^2 - v^2) = p_\infty + \frac{\rho V^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right). \quad (13.10)$$

Обратимся теперь к вопросу о вычислении силы, действующей со стороны жидкости на движущуюся в ней со скоростью V сферу. Если скорость V постоянна, то распределение давлений на сфере одинаково в абсолютном и относительном движении (см. (13.7)) и его можно вычислять по формуле (13.10). Из формулы (13.10) следует, что давления в симметричных точках, например E, E', F и F', одинаковы. Отсюда ясно, что суммарная сила, действующая со стороны жидкости на обтекаемую сферу, точно равна нулю. Сфера не испытывает сопротивления. Подъемная сила также равна нулю.

Выше уже было показано (см. § 8), что этот результат, известный под названием парадокса Даламбера, справедлив не только для сферы, но и для любого конечного тела произвольной формы, движущегося с постоянной скоростью в идеальной жидкости при отсутствии отрыва от поверхности тела и при ус-

ловии, что скорость жидкости в бесконечности равна нулю. Парадокс объясняется тем, что в действительности безотрывное потенциальное движение жидкости вокруг сферы не осуществляется. С поверхности сферы сходят вихри, картина течения видоизменяется и нарушается симметрия в распределении давления по передней и задней частям поверхности сферы.

Сопротивление сферы, движущейся с переменной скоростью

Рассмотрим теперь случай, когда центр сферы движется в жидкости прямолинейно вдоль оси x с переменной скоростью. В этом случае движение жидкости неустановившееся, для определения распределения давлений можно пользоваться интегралом Коши — Лагранжа в форме (13.7), а для потенциала скоростей жидкости — формулой (13.5).

Нетрудно усмотреть, что при вычислении суммарной силы в формуле (13.7) необходимо использовать только член с

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{a\cos\theta}{2}\frac{dV}{dt},$$

так как остальные члены дают части давления, одинаковые в симметричных точках E, E' F, F' (те же давления, что и при установившемся движении с рассматриваемым мгновенным значением скорости).

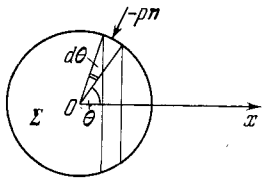


Рис. 74. К вычислению силы сопротивления при движении сферы с ускорением.

Разбив поверхность сферы на элементарные полоски (рис. 74) с площадью $d\sigma = 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$ и проводя интегрирование по всей поверхности сферы, для силы сопротивления получим следующее выражение:

$$X = -\int_{\Sigma} p\cos\theta\, d\sigma = -\rho a^3 \pi \frac{dV}{dt}\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = -\frac{2}{3}\pi a^3 \rho \frac{dV}{dt}. \tag{13.11}$$

Составим уравнение движения шара массы m под действием некоторых сил F_x и силы сопротивления, будем иметь

$$m\frac{dV}{dt} = F_x - \frac{2}{3}\pi a^3 \rho \frac{dV}{dt}.$$

Обозначив $\frac{2}{3}\pi a^3 \rho$ через μ, перепишем это уравнение в виде

$$(m+\mu)\frac{dV}{dt} = F_x.$$

Присоединенная масса сферы

Отсюда следует, что шар в жидкости будет двигаться под действием некоторых сил F_x так же, как он двигался бы в пустоте, если бы его масса изменилась на μ. Величина μ называется присоединенной массой шара. Она равна половине массы жидкости, вытесненной сферой. Присутствие внешней среды (жидкости) сводится только к увеличению инерции шара.

§ 14. Кинематическая задача о движении твердого тела в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости

Пусть в неограниченном объеме $\mathcal{D}$ идеальной несжимаемой жидкости движется одно конечное твердое тело произвольной формы. Поставим задачу об определении непрерывного возмущенного движения жидкости, возникающего из состояния покоя под действием заданного движения твердого тела. Для описания абсолютного движения жидкости относительно неподвижной системы координат, в которой жидкость в бесконечности покоится, выберем подвижную сопутствующую телу декартову систему координат x, y, z, через $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ обозначим единичные векторы, направленные вдоль соответствующих осей этой подвижной системы координат.

Распределение скоростей в твердом теле

Скорость $\boldsymbol{U}$ любой точки твердого тела в случае его произвольного движения, как известно, определяется формулой Эйлера

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{14.1}$$

где $\boldsymbol{U}_0$ — скорость некоторой точки O твердого тела, $\boldsymbol{\Omega}$ — мгновенная угловая скорость вращения тела, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в ту точку твердого тела, скорость которой определяется.

Введем проекции скоростей $\boldsymbol{U}_0$ и $\boldsymbol{\Omega}$ на оси подвижной системы

$$\boldsymbol{U}_0 = U^1\boldsymbol{i} + U^2\boldsymbol{j} + U^3\boldsymbol{k}, \tag{14.2}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = U^4\boldsymbol{i} + U^5\boldsymbol{j} + U^6\boldsymbol{k} = \Omega^1\boldsymbol{i} + \Omega^2\boldsymbol{j} + \Omega^3\boldsymbol{k}. \tag{14.3}$$

Поле скоростей в твердом теле будет известно, если будут известны шесть функций U^i времени t.

Постановка задачи о движении жидкости

Если движение идеальной несжимаемой жидкости, вызванное движением твердого тела, возникло из состояния покоя и непрерывно, а внешние массовые силы потенциальны или отсутствуют, то это движение будет потенциальным

$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$, причем потенциал φ будет однозначной [1]) функцией координат.

Для определения движения жидкости достаточно определить потенциал скоростей $\varphi(x, y, z, t)$, который должен удовлетворять всюду в области $\mathcal{D}$ вне твердого тела уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{14.4}$$

и следующим граничным условиям: в бесконечности должно быть

$$(\operatorname{grad}\varphi)_\infty = 0, \tag{14.5}$$

так как по условию скорость движения жидкости, вызванного движением твердого тела, должна затухать в бесконечности, на поверхности Σ твердого тела должно выполняться условие непроницаемости и безотрывности течения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = U_n = \boldsymbol{U}_0\cdot\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{U}_0\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}), \tag{14.6}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя по отношению к области, занятой жидкостью, нормаль к поверхности тела Σ. Таким образом, искомый потенциал должен быть решением внешней задачи Неймана.

Сведение задачи о движении жидкости к шести задачам Неймана, зависящим только от геометрии тела

В § 12 мы показали, что кинетическая энергия такого возмущенного движения жидкости конечна, если скорости частиц жидкости конечны, и что так поставленная задача Неймана имеет единственное решение.

Пользуясь линейностью поставленной выше внешней задачи Неймана, потенциал φ можно искать в виде суммы

$$\varphi = U^i\varphi_i \tag{14.7}$$

или в виде

$$\varphi = \boldsymbol{U}_0\cdot\boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Phi}_2, \tag{14.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_1 &= \varphi_1\boldsymbol{i} + \varphi_2\boldsymbol{j} + \varphi_3\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{\Phi}_2 &= \varphi_4\boldsymbol{i} + \varphi_5\boldsymbol{j} + \varphi_6\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{14.9}$$

[1]) Внешность поверхности тела, область, в которой происходит непрерывное возмущенное движение жидкости, может быть многосвязной. Однозначность потенциала, связанная с равенством нулю циркуляции по любым замкнутым контурам, следует из теоремы Томсона и условия непрерывности движения жидкости.

и φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 зависят от x, y, z — координат сопутствующей точкам тела системы.

Для определения каждого из однозначных потенциалов φ_i имеем внешнюю задачу Неймана:

$$\Delta\varphi_i = 0$$

всюду вне Σ; в бесконечно удаленной точке

$$(\operatorname{grad}\varphi_i)_\infty = 0$$

и на границе Σ твердого тела (см. условие (14.6))

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = n_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{14.10}$$

$$\frac{\partial\varphi_{j+3}}{\partial n} = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})_j \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{14.11}$$

С помощью (14.9) условия на поверхности Σ можно также записать следующим образом:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_1}{\partial n} = \boldsymbol{n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_2}{\partial n} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}. \tag{14.12}$$

Таким образом, вместо одной внешней задачи Неймана для определения потенциала φ, в формулировку которой (в условие на поверхности тела) входило время t, мы получили шесть внешних задач Неймана для определения шести потенциалов φ_i, в формулировку каждой из которых время уже не входит.

Из линейности и единственности решения задачи Неймана непосредственно вытекает, что решение одной задачи об определении потенциала φ для произвольных U^1, U^2,..., U^6 эквивалентно решению этих шести задач. Замечательно, что функциональная связь потенциалов φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 и координат x, y, z в скрепленной с телом системе координат определяется только геометрическими свойствами поверхности твердого тела и не зависит от кинематики движения. Следовательно, потенциалы φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, φ_6 для тела заданной формы могут быть вычислены раз и навсегда.

Потенциал φ будет равняться φ_1, если $U^1 = 1$, а $U^i = 0$ при $i = 2, 3,..., 6$, т. е. φ_1 является потенциалом возмущенного движения жидкости в случае поступательного движения тела в направлении оси x с единичной скоростью; аналогично φ_2 и φ_3 представляют собой потенциалы возмущенного движения жидкости в тех случаях, когда тело движется поступательно с единичной скоростью в направлении осей y и z соответственно. Потенциалы φ_4, φ_5 и φ_6 являются потенциалами возмущенного движения в тех случаях, когда тело вращается с единичной

угловой скоростью вокруг координатных осей x, y и z соответственно.

Формула (14.8) устанавливает зависимость потенциала φ от времени. Потенциал скоростей в подвижной системе координат зависит от времени t только через компоненты вектора скорости $\boldsymbol{U}_0$ и мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ твердого тела.

Свойства потенциалов φ_i для тел, имеющих плоскость симметрии

Если тело симметрично относительно плоскости xy, то нетрудно усмотреть, что для точек P и P', лежащих на поверхности тела и симметричных относительно плоскости xy, справедливы следующие соотношения (рис. 75):

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)_{P'} \qquad (i = 1, 2, 6), \tag{14.13}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\right)_P = -\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\right)_{P'} \qquad (k = 3, 4, 5). \tag{14.14}$$

Из соотношений (14.13), (14.14) вытекает, что на части плоскости

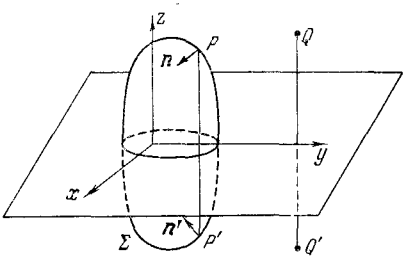


Рис. 75. Схема поверхности Σ, симметричной относительно плоскости xy.

xy, находящейся внутри жидкости, справедливы равенства

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_6}{\partial z} = 0, \qquad \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 0. \tag{14.15}$$

В точках, симметричных относительно плоскости xy (см. § 12 этой главы), имеем

$$\varphi_i(Q) = \varphi_i(Q') \qquad (i = 1, 2, 6), \tag{14.16}$$

$$\varphi_k(Q) = -\varphi_k(Q') \qquad (k = 3, 4, 5). \tag{14.17}$$

Свойства потенциалов φ_i для тел вращения

Очевидно, что для тела вращения относительно оси x (рис. 76) потенциал φ_1 не зависит от угла θ (θ — полярный угол в плоскости yz), и имеются только три различных потенциала: φ_1, φ_2, φ_5. В самом деле, вращение около оси x несущественно,

поэтому $\varphi_4 = 0$; потенциалы φ_3 и φ_6 в силу симметрии выражаются через потенциалы φ_2 и φ_5 по формулам

$$\varphi_3(x, y, z) = \varphi_2(x, z, -y), \quad \varphi_6(x, y, z) = \varphi_5(x, z, -y).$$

В цилиндрических координатах эти соотношения принимают вид

$$\varphi_3(x, r, \theta) = \varphi_2\left(x, r, \theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_6(x, r, \theta) = \varphi_5\left(x, r, \theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

здесь r — полярный радиус в плоскости yz.

Определим теперь зависимость потенциалов φ_2 и φ_5 от угла θ. Потенциалы φ_2 и φ_3 соответствуют поступательным движениям с единичными скоростями в направлении осей y и z.

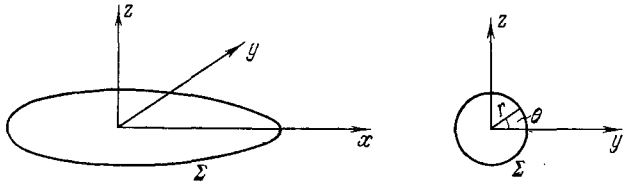


Рис. 76. Схема расположения осей координат в случае тела вращения.

При поступательном движении с единичной скоростью в направлении, перпендикулярном к оси x, под углом ϑ к оси y, имеем

$$\varphi(x, r, \theta) = \varphi_2(x, r, \theta - \vartheta) = \cos\vartheta\varphi_2(x, r, \theta) + \sin\vartheta\ \varphi_3(x, r, \theta).$$

Отсюда получаем

$$\varphi_2(x, r, \theta - \vartheta) = \cos\vartheta\varphi_2(x, r, \theta) + \sin\vartheta\varphi_2\left(x, r, \theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Положим $\theta = 0$ и заменим угол ϑ на $-\theta$; заметив еще, что

$$\varphi_2\left(x, r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

получим

Отсюда
$$\left.\begin{aligned}\varphi_2(x, r, \theta) &= \varphi_2(x, r, 0)\cos\theta.\\ \varphi_3(x, r, \theta) &= \varphi_2(x, r, 0)\sin\theta.\end{aligned}\right\} \qquad (14.18)$$

Аналогично легко получить формулы

$$\left.\begin{aligned}\varphi_5(x, r, \theta) &= \varphi_5\left(x, r, \frac{\pi}{2}\right)\sin\theta,\\ \varphi_6(x, r, \theta) &= -\varphi_5\left(x, r, \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta.\end{aligned}\right\} \qquad (14.19)$$

Таким образом, для произвольного движения тела вращения потенциал скоростей можно представить в форме

$$\varphi = \varphi_1(x, r)\,U^1 + \varphi_2(x, r, 0)\,(U^2\cos\theta + U^3\sin\theta) + \\ + \varphi_5\left(x, r, \frac{\pi}{2}\right)(\Omega^2\sin\theta - \Omega^3\cos\theta). \quad (14.20)$$

§ 15. Энергия, количество движения, момент количества движения жидкости при движении в ней твердого тела и основы теории присоединенных масс

Выше было показано, что всякое потенциальное движение однородной несжимаемой жидкости можно рассматривать как возникшее внезапно из состояния покоя в результате удара, причем потенциал скоростей связан с импульсом давления формулой

$$p_i = -\rho\varphi, \quad (15.1)$$

где ρ — плотность жидкости (плотность ρ одинакова и постоянна для всех частиц жидкости).

Задача Дирихле об определении однозначной гармонической функции — потенциала $\varphi(x, y, z)$ по ее значениям на границе Σ области, которой принадлежит бесконечно удаленная точка, имеет единственное решение при $\varphi = 0$ в бесконечности.

Энергия, количество движения и момент количества движения бесконечной массы жидкости

Кинетическую энергию E, вектор количества движения $\boldsymbol{Q}$ и вектор момента количества движения $\boldsymbol{K}$ бесконечной массы жидкости определим через импульс давления p_i, подействовавший на жидкость на поверхности твердого тела, а следовательно, и через φ следующими формулами [1]):

$$2E = \rho\int_\Sigma \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma = \rho\int_\Sigma \varphi U_n\,d\sigma = -\int_\Sigma p_i U_n\,d\sigma, \quad (15.2)$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= -\int_\Sigma p_i\boldsymbol{n}\,d\sigma = \rho\int_\Sigma \varphi\boldsymbol{n}\,d\sigma = \rho\int_\Sigma \varphi\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_1}{\partial n}\,d\sigma, \\ \boldsymbol{K} &= -\int_\Sigma (\boldsymbol{r}\times p_i\boldsymbol{n})\,d\sigma = \rho\int_\Sigma \varphi\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\,d\sigma = \rho\int_\Sigma \varphi\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_2}{\partial n}\,d\sigma, \end{aligned}\right\} \quad (15.3)$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к Σ, внешней по отношению к области $\mathcal{D}$, занятой жидкостью, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор,

[1]) В следующем параграфе показано, что эти величины играют такую же роль, как соответствующие величины в динамике системы конечных тел.

проведенный в переменную точку на Σ из точки O, относительно которой вычисляется момент. Векторы $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ равны суммарному импульсу и моменту импульса относительно точки O внешних сил, подействовавших на жидкость со стороны твердого тела, ограниченного поверхностью Σ.

Так как $U_n = \boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{U}_0$ — скорость подвижной точки O, скрепленной с твердым телом, из формул (15.2) и (15.3) с учетом (14.8) следует, что

$$2E = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \sum_{i,\ k=1}^{6} \lambda_{ik} U^i U^k, \tag{15.4}$$

причем для компонент Q_k ($k = 1, 2, 3$) и K_{k-3} ($k = 4, 5, 6$) верны формулы:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{6} \lambda_{ik} U^i, \qquad K_{k-3} = \sum_{i=1}^{6} \lambda_{ik} U^i, \tag{15.4'}$$

где $\boldsymbol{U}_0 = U^1 \boldsymbol{i} + U^2 \boldsymbol{j} + U^3 \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\Omega} = U^4 \boldsymbol{i} + U^5 \boldsymbol{j} + U^6 \boldsymbol{k}$,

$$\lambda_{ik} = \rho \int_{\Sigma} \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\, d\sigma. \tag{15.5}$$

Энергия, количество движения и момент количества движения твердого тела

В теории движения абсолютно твердого тела вводятся живая сила E_0, количество движения $\boldsymbol{Q}_0$ и момент количества движения $\boldsymbol{K}_0$ твердого тела. Они связаны соотношением, аналогичным (15.4):

$$\left.\begin{aligned} &2E_0 = \boldsymbol{Q}_0 \cdot \boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{K}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} = \sum_{i,\ k} m_{ik} U^i U^k, \\ &\text{причем} \\ &Q_{0k} = \sum_{i=1}^{6} m_{ik} U^i \qquad (k = 1, 2, 3), \\ &K_{0k} = \sum_{i=1}^{6} m_{ik} U^i \qquad (k = 4, 5, 6). \end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

Матрица коэффициентов m_{ik} характеризует свойства инерции твердого тела и в общем случае, когда начало координат взято в некоторой произвольной точке O тела, имеет следующий

специальный вид:

$$\begin{Vmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz^* & -my^* \\ 0 & m & 0 & -mz^* & 0 & mx^* \\ 0 & 0 & m & my^* & -mx^* & 0 \\ 0 & -mz^* & my^* & J_x & -D_z & -D_y \\ mz^* & 0 & -mx^* & -D_z & J_y & -D_x \\ -my^* & mx^* & 0 & -D_y & -D_x & J_z \end{Vmatrix}, \tag{15.7}$$

где m — масса тела, x^*, y^*, z^* — координаты центра масс тела, J_x, J_y, J_z — моменты инерции тела относительно осей координат, а D_x, D_y, D_z — центробежные моменты инерции. Например,

$$J_x = \int_m (y^2 + z^2)\, dm \quad \text{и} \quad D_x = \int_m yz\, dm.$$

Коэффициенты присоединенных масс и их свойства

Матрица (15.7) симметрична, *матрица* (15.5) $\|\lambda_{ik}\|$ *также симметрична*, так как на основании второй формулы Грина (12.15), примененной к двум гармоническим функциям φ_i и φ_k, каждая из которых исчезает в бесконечности как $1/r^2$, получим

$$\lambda_{ik} - \lambda_{ki} = \rho \int_\Sigma \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Полная кинетическая энергия системы тело плюс жидкость представится в виде

$$2(E + E_0) = \sum_{i,\,k=1}^{6} (m_{ik} + \lambda_{ik}) U^i U^k. \tag{15.8}$$

Величины λ_{ik} называются коэффициентами присоединенных масс. Матрица присоединенных масс $\|\lambda_{ik}\|$, характеризующая более сложные, чем свойства инерции твердого тела, свойства инерции жидкости, имеет более общий, чем матрица (15.7), вид.

Очевидно, что для системы координат, неизменно скрепленной с телом, величины λ_{ik} (см. (15.5)) не зависят от времени, а зависят только от выбора такой системы координат и от геометрических свойств поверхности Σ тела. Число независимых, отличных от нуля элементов симметричной матрицы $\|\lambda_{ik}\|$, равно с общем случае двадцати одному. Симметричная матрица

$\|m_{ik}\|$ (15.7) содержит только десять независимых и вообще отличных от нуля элементов. Формулы преобразования элементов матрицы $\|\lambda_{ik}\|$ при переходе от одной системы координат к другой легко получить с помощью формулы (15.4) и формул преобразования компонент векторов $\boldsymbol{U}$ и Ω. В частности, при изменении направления осей координат и положения в теле точки O будем иметь

$$\boldsymbol{U}'_0 = \boldsymbol{U}_0 + \Omega \times (\boldsymbol{r}_{O_1} - \boldsymbol{r}_0), \qquad \Omega' = \Omega.$$

Нетрудно усмотреть, что коэффициенты λ_{11}, λ_{22}, λ_{33}, λ_{12}, λ_{13} и λ_{23} зависят только от направления осей координат, а остальные коэффициенты зависят как от направления осей координат, так и от положения в теле точки O (т. е. от компонент вектора $\boldsymbol{r}_{O_1} - \boldsymbol{r}_O$).

Главные направления движения и центральная точка тела

При поступательных движениях твердого тела его количество движения $\boldsymbol{Q}_0 = m\boldsymbol{U}_0$ направлено по скорости движения, причем масса тела не зависит от направления движения тела.

Количество движения жидкости и скорость поступательного движения тела вообще не параллельны. Величины λ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) образуют симметричный тензор второго ранга, поэтому существуют три взаимно перпендикулярных главных направления таких, что при поступательных движениях тела вдоль этих направлений векторы количества движения жидкости и поступательной скорости тела параллельны, в других случаях такой параллельности вообще нет. Если декартовы оси координат направлены по главным направлениям, то $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$, причем вообще

$$\lambda_{11} \neq \lambda_{22} \neq \lambda_{33} \neq \lambda_{11}. \tag{15.9}$$

Таким образом, коэффициенты присоединенных масс зависят от направления поступательного движения тела.

Матрица (15.7) для твердого тела сильно упрощается, если точка O совпадает с центром масс $x^* = y^* = z^* = 0$. С этим связана особая динамическая роль центра масс твердого тела.

Возьмем систему координат, оси которой направлены вдоль главных направлений. Нетрудно проверить, что три компоненты вектора $\boldsymbol{r}_{O^*} - \boldsymbol{r}_O$, определяющие положение точки O^*, можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства

$$\lambda_{15} = \lambda_{24}, \ \lambda_{16} = \lambda_{34}, \ \lambda_{26} = \lambda_{35}. \tag{15.10}$$

Точка O^*, для которой выполняются эти равенства, **называется центральной точкой.**

Если оси координат направлены по главным направлениям, а начало координат (центр моментов) совпадает с центральной точкой, то согласно (15.9) и (15.10) симметричная матрица $\|\lambda_{ik}\|$ содержит только пятнадцать независимых элементов.

Коэффициенты присоединенных масс для тел с плоскостями симметрии

Если поверхность твердого тела Σ обладает некоторыми свойствами симметрии, то часть коэффициентов присоединенных масс λ_{ik} обращается в нуль. В самом деле, пусть поверхность тела Σ допускает плоскость симметрии, которую мы примем за плоскость xy (рис. 75). Можно написать, что

$$\lambda_{ik} = \rho \int_{\Sigma_1+\Sigma_2} \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\, d\sigma,$$

где Σ_1 и Σ_2 — симметричные части Σ.

На основании соотношений (14.13), (14.14) и (14.16), (14.17) очевидно, что в симметричных точках поверхности Σ

$$\left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\right)_{P'} = -\left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\right)_P \qquad (i = 1, 2, 6,\ k = 3, 4, 5).$$

Следовательно,

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} = 0 \qquad (i = 1, 2, 6,\ k = 3, 4, 5). \tag{15.11}$$

Если поверхность Σ симметрична относительно плоскости xz, то

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} = 0 \qquad (i = 1, 3, 5,\ k = 2, 4, 6). \tag{15.12}$$

Если поверхность Σ симметрична относительно плоскостей xy и xz, то только следующие коэффициенты присоединенных масс отличны от нуля:

$$\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66}, \lambda_{26}, \lambda_{35}. \tag{15.13}$$

Для поверхности Σ, обладающей тремя плоскостями симметрии xy, xz и yz, например, для эллипсоида, в этой системе координат будут отличны от нуля только следующие шесть коэффициентов присоединенных масс: λ_{11}, λ_{22}, λ_{33}, λ_{44}, λ_{55}, λ_{66}.

Коэффициенты присоединеиных масс и центральная точка тела вращения

Когда поверхность Σ является поверхностью вращения около оси x, из симметрии дополнительно получаем $\lambda_{22} = \lambda_{33}$, $\lambda_{55} = \lambda_{66}$ и $\lambda_{44} = 0$. Так как при вращении тела около оси x жидкость не возмущается, то $\varphi_4 = 0$. Кроме этого, $\lambda_{26} = -\lambda_{35}$, так как при вращении около оси z или около оси y с одинаковыми угловыми

скоростями проекции количеств движения на ось y в первом случае $Q_y = \lambda_{26}\Omega^3$ и на ось z во втором случае $Q_z = \lambda_{35}\Omega^2$ отличаются только знаком.

Таким образом, при движении в жидкости тела вращения для соответствующих компонент количества движения и момента количества движения жидкости имеем

$$\begin{aligned} &Q_x = \lambda_{11}U^1, \quad Q_y = \lambda_{22}U^2 + \lambda_{26}\Omega^3, \quad Q_z = \lambda_{22}U^3 - \lambda_{26}\Omega^2, \\ &K_x = 0, \quad K_y = -\lambda_{26}U^3 + \lambda_{35}\Omega^2, \quad K_z = \lambda_{26}U^2 + \lambda_{55}\Omega^3, \end{aligned} \tag{15.14}$$

а для кинетической энергии жидкости

$$2E = \lambda_{11}U^{1^2} + \lambda_{22}(U^{2^2} + U^{3^2}) + \lambda_{55}(\Omega^{2^2} + \Omega^{3^2}) + 2\lambda_{26}(\Omega^3U^2 - \Omega^2U^3). \tag{15.15}$$

Если перенести начало координат вдоль оси x на величину ξ, то для проекций скорости нового начала будем иметь

$$U'^1 = U^1, \quad U'^2 = U^2 + \Omega^3\xi, \quad U'^3 = U^3 - \Omega^2\xi.$$

Коэффициенты присоединенных масс для новой системы координат согласно (15.4) будут связаны с коэффициентами присоединенных масс для старой системы формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda'_{11} = \lambda_{11}, \quad \lambda'_{22} = \lambda_{22}, \\ &\lambda'_{55} = \lambda_{55} + \lambda_{22}\xi^2 - 2\lambda_{26}\xi, \quad \lambda'_{26} = \lambda_{26} - \lambda_{22}\xi. \end{aligned}\right\} \tag{15.16}$$

Центральная точка лежит, очевидно, на оси x, ее координата ξ^* определяется формулой

$$\xi^* = \frac{\lambda_{26}}{\lambda_{22}}.$$

Формула для Q, удобная для вычисления λ_{ik}

Установим теперь для количества движения жидкости Q следующую формулу, справедливую при произвольном движении в идеальной несжимаемой жидкости твердого тела любой формы:

$$Q = -\rho V U^* - 4\pi\rho c, \tag{15.17}$$

где

$$U^* = \frac{1}{V}\int_V U\,d\tau,$$

U — скорость движения любой точки твердого тела, V — его объем, $c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$, c_1, c_2 и c_3 — коэффициенты однородного полинома первой степени, входящего в разложение

(12.24) потенциала φ течения жидкости в окрестности бесконечно удаленной точки.

Из первой формулы (15.3) имеем

$$\boldsymbol{Q} = \rho \int_{\Sigma} \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma = \rho \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial n}\, d\sigma, \tag{15.18}$$

где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Введем сферу Σ_1 с центром в некоторой точке O тела, охватывающую поверхность Σ тела, и к конечному объему жидкости между Σ и Σ_1 применим вторую формулу Грина для функций φ и $\boldsymbol{r}$. Так как φ и $\boldsymbol{r}$ в области между Σ и Σ_1 — гармонические функции, получим

$$\int_{\Sigma+\Sigma_1} \left(\varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial n} - \boldsymbol{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Поэтому согласно (15.18), так как на Σ выполняется условие $\partial\varphi/\partial n = U_n$, будем иметь

$$\boldsymbol{Q} = \rho \int_{\Sigma} \boldsymbol{r} U_n\, d\sigma - \rho \int_{\Sigma_1} \left(\varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial n} - \boldsymbol{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma. \tag{15.19}$$

Вектор скорости точек тела $\boldsymbol{U}$ определен внутри объема абсолютно твердого тела, ограниченного Σ. Пользуясь теоремой Гаусса — Остроградского, получим

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{r} U_n\, d\sigma = -\int_{V} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r} U_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{r} U_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{r} U_z}{\partial z}\right) d\tau = -\int_{V} \boldsymbol{U}\, d\tau = -V\boldsymbol{U}^*. \tag{15.20}$$

Радиус сферы Σ_1 устремим в бесконечность. При вычислении в (15.19) интеграла по сфере Σ_1 можно пользоваться разложением (12.24) для потенциала φ, при этом в связи с тем, что $C = M = 0$, только член разложения $(c_1 x + c_2 y + c_3 z)/R^3$ будет существенным, так как остальные члены убывают как $1/R^3$. Заметим, что на сфере Σ_1

$$\varphi \sim \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{c_n}{R^2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \sim -\frac{2c_n}{R^3}$$

и, следовательно,

$$\int_{\Sigma_1} \left(\varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial n} - \boldsymbol{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma = 3 \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{n} c_n \frac{d\sigma}{R^2} = 3 \int_{S} \boldsymbol{r} c_n\, d\sigma_S,$$

где S — сфера единичного радиуса, концентрическая Σ_1. Интеграл по S преобразуем по формуле Гаусса — Остроградского:

$$\int_S r c_n \, d\sigma_S = \int_V \left[\frac{\partial (r c_1)}{\partial x} + \frac{\partial (r c_2)}{\partial y} + \frac{\partial (r c_3)}{\partial z} \right] d\tau = \int_V \boldsymbol{c} \, d\tau = \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{c}.$$

Следовательно,

$$\int_{\Sigma_1} \left(\varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial n} - \boldsymbol{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma = 4\pi \boldsymbol{c}. \tag{15.21}$$

Для получения формулы (15.17) достаточно подставить вычисленные интегралы (15.20) и (15.21) в равенство (15.19).

Если известен потенциал скоростей, то обычно легко определить вектор $\boldsymbol{c}$, а следовательно, по формуле (15.17) и $\boldsymbol{Q}$. С помощью формулы (15.17) удобно также определять коэффициенты присоединенных масс. Таким путем можно вычислить все коэффициенты λ_{ik} при $i < 4$ и k любых или при $k < 4$ и i любых.

Например, в случае подробно рассмотренного выше движения в жидкости сферы радиуса a потенциал имеет вид $\varphi = -a^3 U^1 x / 2r^3$, т. е. $c_1 = -a^3 U^1/2$, $c_2 = c_3 = 0$, из-за полной симметрии сферы

$$\boldsymbol{Q} = Q_1 \boldsymbol{i} = \lambda_{11} U^1 \boldsymbol{i},$$

где согласно (15.17)

$$Q_1 = \rho \frac{2\pi a^3}{3} U^1,$$

и поэтому присоединенная масса сферы, как выше было непосредственно получено, равна

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{2\pi a^3 \rho}{3} = \frac{\rho V}{2},$$

где V — объем сферы. Остальные λ_{ik} равны нулю.

Коэффициенты присоединенных масс

$$\lambda_{ik} = \int_\Sigma \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \, d\sigma$$

можно определить как теоретически, так и экспериментально. Как было показано выше, для тел специальной формы некоторые из коэффициентов λ_{ik} обращаются в нуль.

§ 16. Силы воздействия идеальной жидкости на тело, движущееся в безграничной массе жидкости

В проблемах, связанных с движением тел внутри жидкости, необходимо рассматривать движение жидкости и учитывать силовые взаимодействия между жидкостью и телом.

Два способа рассмотрения проблемы движения твердого тела в жидкости

При решении задач о движении абсолютно твердого тела в безграничной массе идеальной несжимаемой жидкости можно действовать двумя способами.

1. Рассматривать тело и жидкость как единую механическую систему с шестью степенями свободы. Кинетическая энергия этой системы представляется формулой (15.8), в которой величины U^k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) представляют собой обобщенные скорости, равные проекциям на подвижные оси векторов поступательной и угловой скорости твердого тела. Располагая формулой для кинетической энергии системы и данными об элементарной работе внешних к системе тело — жидкость сил, действующих на твердое тело (предполагаем, что подобные внешние силы на жидкость не действуют), можно составить уравнения Лагранжа второго рода и с их помощью ставить и решать различные задачи. Получающаяся при этом система уравнений аналогична уравнениям движения свободного твердого тела, однако она имеет более общий вид, так как инерция системы (тело — жидкость) задается матрицей $\|m_{ik}+\lambda_{ik}\|$, имеющей более общую природу, чем специальная матрица $\|m_{ik}\|$ для свободного твердого тела.

Если написать уравнения движения системы тело — жидкость в целом и уравнения движения твердого тела отдельно, то после этого из сравнения этих уравнений легко выделить суммарную силу и суммарный момент воздействия жидкости на тело.

2. Можно прямо с самого начала рассматривать уравнения движения твердого тела, в которых учитываются суммарная сила A и суммарный момент $\mathfrak{M}_0$ воздействия жидкости на тело. В этом случае необходимо воспользоваться формулами

$$A = \int_\Sigma p\boldsymbol{n}\, d\sigma \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_0 = \int_\Sigma p\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\, d\sigma, \tag{16.1}$$

где $\mathfrak{M}_0$ — момент гидродинамических сил относительно некоторой произвольной фиксированной подвижной точки O, скрепленной с телом неизменно. Единичный вектор $\boldsymbol{n}$ и радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ определены так же, как и в формуле (15.3). В прило-

жениях в качестве точки O можно брать центр масс твердого тела, центральную точку или какую-либо другую точку тела. Интегралы (16.1) можно вычислить, когда распределение давлений по поверхности тела известно.

Этот способ рассмотрения пригоден и в тех случаях, когда жидкость имеет другие границы, кроме Σ, и когда движение жидкости *не потенциально*. Замечательно, что для потенциальных движений несжимаемой жидкости, занимающей все пространство, внешнее к поверхности Σ, интегралы (16.1) для любой данной формы тела, задаваемой поверхностью Σ, с помощью интеграла Коши — Лагранжа можно выразить через компоненты $\boldsymbol{U}_0$ и $\boldsymbol{\Omega}$ и их производные по времени.

Нестрогие, но верные допущения для рассмотрения бесконечной массы жидкости как механической системы

Соответствующие формулы для тела произвольной формы и любого вида движения, легко написать, если воспользоваться следующими двумя положениями, справедливость которых будет обоснована ниже.

А. Бесконечную массу жидкости можно рассматривать как механическую систему с суммарным количеством движения $\boldsymbol{Q}$ и суммарным моментом количества движения $\boldsymbol{K}$, определенными в предыдущем параграфе формулами (15.3).

В. Суммы всех внешних сил и внешних моментов, действующих на бесконечную массу жидкости, по условию покоящуюся в бесконечности, равны векторам $-\boldsymbol{A}$ и $-\mathfrak{M}_0$ (16.1). Условие об исчезании потенциала φ и $\operatorname{grad}\varphi$ в бесконечности можно рассматривать как накладываемую дополнительную внешнюю связь, которая могла бы, вообще говоря, стать источником внешних сил реакции. В действительности такие внешние силы реакции отсутствуют.

Трудности в определении количества движения и момента количества движения бесконечной массы жидкости

Эти положения существенны, так как, например, количество движения бесконечной массы жидкости, определенное интегралом $\int\limits_{\mathscr{D}} \rho \boldsymbol{v}\, d\tau$, вообще не имеет смысла, так как этот интеграл сходится условно из-за того, что подынтегральная функция при $M = 0$ в (12.24) в бесконечности имеет порядок $1/R^3$. В самом деле, рассмотрим предельное соотношение

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \rho \boldsymbol{v}\, d\tau = \lim_{\mathscr{D}_n \to \mathscr{D}} \int\limits_{\mathscr{D}_n} \rho \boldsymbol{v}\, d\tau,$$

где $\mathscr{D}_n$ — конечная область, ограниченная поверхностью тела Σ и поверхностью Σ_n, устремляющейся всеми своими точками в бесконечность; в зависимости от свойств последовательности

Σ_n этот предел может вообще не существовать, или если он существует, то зависит от вида поверхностей Σ_n. Для вектора момента количества движения жидкости, определяемого интегралом $\int\limits_{\mathscr{D}_n} (\boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{v})\, d\tau$, при $\mathscr{D}_n \to \mathscr{D}$ дело обстоит еще хуже, так как этот интеграл вообще расходится.

При действиях в рамках способа 1 необходимо иметь дело только с кинетической энергией жидкости, в этом случае нет затруднений, связанных со сходимостью интеграла для кинетической энергии. Однако и в этом случае требуется обоснование отсутствия притока энергии к жидкости из бесконечности за счет условий $\varphi_\infty = 0$ и $(\operatorname{grad} \varphi)_\infty = 0$.

Общие формулы для гидродинамической силы и момента

На основании положений A и B можно написать

$$-\boldsymbol{A} = \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{Q}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{Q}, \qquad (16.2)$$

где производная $d\boldsymbol{Q}/dt$ определяет изменение вектора $\boldsymbol{Q}$ по отношению к инерциальной системе отсчета, а производная $d'\boldsymbol{Q}/dt$ взята по отношению к подвижной системе координат, скрепленной с телом неизменно. Формула (16.2) определяет суммарную силу воздействия жидкости на тело, так как согласно (15.3) вектор $\boldsymbol{Q}$ выражается через λ_{ik} и U^i по формуле

$$\boldsymbol{Q} = \rho \int\limits_{\Sigma} \varphi_i U^i \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\, d\sigma = \sum_{\substack{i=1,2,\ldots,6 \\ k=1,2,3}} \lambda_{ik} U^i \boldsymbol{\vartheta}^k, \qquad (16.3)$$

где $\boldsymbol{\vartheta}^k$ — векторы базиса в подвижной системе ($\boldsymbol{\vartheta}^1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\vartheta}^2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\vartheta}^3 = \boldsymbol{k}$).

Для получения уравнения, определяющего момент сил, действующих на тело, обратим внимание на то, что центр моментов (точка O) — подвижная точка. Введем неподвижную точку O_1 и радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, проведенный из точки O_1 в точку O. Пусть $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}$ — моменты количества движения жидкости соответственно относительно точек O_1 и O. Очевидно, что между $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}$ имеется следующая связь:

$$\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{Q}. \qquad (16.4)$$

Обозначим еще через $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_0$ суммарные моменты гидродинамических сил, действующих на тело, относительно точек O_1 и O. Наряду с равенством (16.4), очевидно, имеет место равенство

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_0 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A} = \mathfrak{M}_0 - \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}. \qquad (16.5)$$

Уравнение моментов количества движения жидкости относительно неподвижной точки O_1 с учетом (16.4) можно написать в виде

$$-\mathfrak{M}_1 = \frac{d\boldsymbol{K}_1}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{K} + \boldsymbol{U}_0\times\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}; \quad (16.6)$$

здесь использовано очевидное равенство $\boldsymbol{U}_0 = d\boldsymbol{r}/dt$. Из (16.6) и (16.5) следует окончательная формула:

$$-\mathfrak{M}_0 = \frac{d'\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{K} + \boldsymbol{U}_0\times\boldsymbol{Q}. \quad (16.7)$$

Эта формула дает искомое выражение для вектора $\mathfrak{M}_0$ момента гидродинамических сил, действующих на тело. В эту формулу для $\boldsymbol{Q}$ можно подставить его выражение из (16.3), а для $\boldsymbol{K}$ — на основании (15.3) следующее выражение:

$$\boldsymbol{K} = \rho\int_\Sigma \varphi_i U^i \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_2}{\partial n}\,d\sigma = \sum_{\substack{i=1,2,\ldots,6\\ k=1,2,3}} \lambda_{i3+k} U^i \boldsymbol{\vartheta}^k. \quad (16.8)$$

Формулы (16.2) и (16.7) показывают, что задача об определении суммарных сил сводится к выяснению коэффициентов присоединенных масс λ_{ik}. Коэффициенты λ_{ik} и все силы пропорциональны плотности жидкости ρ.

Обоснование сделанных допущений

Теперь в порядке обоснования предположений A и B докажем справедливость формул (16.2) и (16.6), в которых $\boldsymbol{A}$ и $\mathfrak{M}_1$ определены формулами (16.1), а $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}_1$ — формулами (15.3) (в обоих случаях в качестве центра для вычисления моментов берем одну и ту же неподвижную точку O_1). Для доказательства применим теоремы о количестве движения и о моменте количества движения к мысленно выделенному из бесконечного объема $\mathscr{D}$ конечному индивидуальному объему жидкости $\mathscr{D}_n$, ограниченному подвижной поверхностью Σ и поверхностью Σ_n. Имеем

$$\left.\begin{aligned} -\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}_{\Sigma_n} &= \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{D}_n} \operatorname{grad}\varphi\,d\tau = \frac{d}{dt}\rho\int_\Sigma \varphi\boldsymbol{n}\,d\sigma + \frac{d}{dt}\rho\int_{\Sigma_n}\varphi\boldsymbol{n}\,d\sigma,\\ -\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_{\Sigma_n} &= \frac{d}{dt}\rho\int_{\mathscr{D}_n}(\boldsymbol{r}_1\times\operatorname{grad}\varphi)\,d\tau = \\ &= \frac{d}{dt}\rho\int_\Sigma \varphi(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{n})\,d\sigma + \frac{d}{dt}\rho\int_{\Sigma_n}\varphi(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{n})\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (16.9)$$

Здесь на основании интеграла Коши — Лагранжа в неподвижной системе координат

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2}$$

можно написать

$$F_{\Sigma_n} = \rho \int\limits_{\Sigma_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \boldsymbol{n}\, d\sigma + \rho \int\limits_{\Sigma_n} \frac{v^2}{2} \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

и

$$\mathfrak{M}_{\Sigma_n} = \rho \int\limits_{\Sigma_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})\, d\sigma + \rho \int\limits_{\Sigma_n} \frac{v^2}{2} (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})\, d\sigma, \qquad (16.10)$$

так как интегралы по Σ_n от постоянного слагаемого p_0 равны нулю.

Далее,

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Sigma_n} \rho \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho}{\Delta t} \left(\int\limits_{\Sigma_n'} \varphi' \boldsymbol{n}'\, d\sigma' - \int\limits_{\Sigma_n} \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma \right) =$$

$$= \rho \int\limits_{\Sigma_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \boldsymbol{n}\, d\sigma + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho}{\Delta t} \left(\int\limits_{\Sigma_n'} \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma - \int\limits_{\Sigma_n} \varphi \boldsymbol{n}\, d\sigma \right) =$$

$$= \rho \int\limits_{\Sigma_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \boldsymbol{n}\, d\sigma + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho}{\Delta t} \int\limits_{\Delta \mathscr{D}_n} \operatorname{grad} \varphi\, d\tau = \rho \int\limits_{\Sigma_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \boldsymbol{n}\, d\sigma + \rho \int\limits_{\Sigma_n} \boldsymbol{v} v_n\, d\sigma,$$

где $\Delta \mathscr{D}_n$ — объем между Σ_n' и Σ_n, причем для малого элемента объема $d\tau$ имеем $d\tau = v_n\, d\sigma\, dt$. Аналогичным путем получим формулу

$$\frac{d}{dt} \rho \int\limits_{\Sigma_n} \varphi (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})\, d\sigma = \rho \int\limits_{\Sigma_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})\, d\sigma + \rho \int\limits_{\Sigma_n} (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v})\, v_n d\sigma.$$

С помощью этих преобразований, с учетом (16.10) и определений $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}_1$ (15.3) уравнения (16.9) приведем к виду

$$\left.\begin{aligned} -\boldsymbol{A} &= \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} + \rho \int\limits_{\Sigma_n} \left(\boldsymbol{v} v_n - \frac{v^2}{2} \boldsymbol{n} \right) d\sigma, \\ -\mathfrak{M}_1 &= \frac{d\boldsymbol{K}_1}{dt} + \rho \int\limits_{\Sigma_n} \left[(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v})\, v_n - (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n}) \frac{v^2}{2} \right] d\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (16.11)$$

Интегралы по поверхности Σ_n в этих формулах не зависят от выбора поверхности Σ_n и, следовательно, от выбора объема $\mathcal{D}_n$. Это следует из того, что остальные члены в этих формулах не зависят от выбора Σ_n. На основании асимптотического разложения для потенциала (12.24) при $M \neq 0$ ясно, что при удалении точек Σ_n в бесконечность подынтегральные величины в первом и втором равенствах (16.11) имеют порядки $1/r^4$ и $1/r^3$ соответственно. Отсюда следует, что для любой удаляющейся в бесконечность поверхности Σ_n эти интегралы точно равны нулю.

Обращение в нуль этих интегралов можно получить с помощью формальных выкладок на основании асимптотической формулы (12.24) и с применением формулы Гаусса — Остроградского к области, внешней к поверхности Σ_n, в которой потенциал скоростей регулярен.

Таким образом доказана справедливость уравнений (16.2) и (16.6). Поэтому конечные векторы $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$, определенные равенствами (15.3), можно рассматривать как количество движения и момент количества движения бесконечной массы жидкости. Одновременно с этим установлено, что условие о покое жидкости в бесконечности не связано с введением отличных от нуля сил реакции или притоков энергии из бесконечности.

Гидродинамические силы, действующие на тело вращения

На основании уравнений (16.2), (16.7) и формул (15.14) для проекций на подвижные оси координат силы $\boldsymbol{A}$ и момента $\mathfrak{M}_0$, действующих со стороны жидкости на движущееся в ней тело вращения, легко получаем

$$\left.\begin{aligned} A_x &= -\lambda_{11}\frac{dU^1}{dt} - \lambda_{22}(\Omega^2U^3 - \Omega^3U^2) + \lambda_{26}(\Omega^{2^2} + \Omega^{3^2}),\\ A_y &= -\lambda_{22}\frac{dU^2}{dt} - \lambda_{26}\frac{d\Omega^3}{dt} - \lambda_{11}U^1\Omega^3 + \lambda_{22}\Omega^1U^3 - \lambda_{26}\Omega^1\Omega^2,\\ A_z &= -\lambda_{22}\frac{dU^3}{dt} + \lambda_{26}\frac{d\Omega^2}{dt} + \lambda_{11}U^1\Omega^2 - \lambda_{22}U^2\Omega^1 - \lambda_{26}\Omega^1\Omega^3 \end{aligned}\right\} \tag{16.12}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= 0,\\ \mathfrak{M}_y &= -\lambda_{55}\frac{d\Omega^2}{dt} + \lambda_{26}\frac{dU^3}{dt} + \lambda_{26}(U^2\Omega^1 - U^1\Omega^2) +\\ &\quad + \lambda_{55}\Omega^1\Omega^3 + (\lambda_{22} - \lambda_{11})U^1U^3,\\ \mathfrak{M}_z &= -\lambda_{55}\frac{d\Omega^3}{dt} - \lambda_{26}\frac{dU^2}{dt} + \lambda_{26}(U^3\Omega^1 - U^1\Omega^3) -\\ &\quad - \lambda_{55}\Omega^1\Omega^2 - (\lambda_{22} - \lambda_{11})U^1U^2. \end{aligned}\right\} \tag{16.13}$$

Эти формулы дают явное выражение для гидродинамических сил и моментов через проекции скорости центра моментов, лежащего на оси x, совпадающей с осью вращения, и проекции угловой скорости тела вращения на подвижные оси. Если центр моментов совпадает с центральной точкой, то в формулах (16.12) и (16.13) необходимо положить $\lambda_{26} = 0$. В частности, при поступательном движении с постоянной скоростью $\boldsymbol{U}$, лежащей в плоскости xOy и составляющей с осью x угол α (α — угол дрейфа), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0, \\ &U^1 = U\cos\alpha, \quad U^2 = U\sin\alpha, \quad U^3 = 0, \\ &A_x = A_y = A_z = 0, \\ &\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = 0, \quad \mathfrak{M}_z = -\frac{1}{2}(\lambda_{22} - \lambda_{11})U^2\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{16.14}$$

При действительных движениях гидродинамические силы отличаются от сил, определенных в рассматриваемой теории непрерывных потенциальных возмущенных движений идеальной жидкости. Отличия обусловлены главным образом силами вязкого трения, появлением разрывов внутри поля скоростей жидкости, влиянием сжимаемости для газов и наличием границ других тел. Несмотря на эти добавочные влияния, развитая выше теория и ее основные идеи имеют важное значение. Эта теория кладется в основу дальнейших более точных теорий и непосредственно используется во многих приложениях.

Парадокс Даламбера

Для поступательного движения с постоянной скоростью твердого тела любой формы из уравнений (16.2) и (16.6) непосредственно вытекает, что

$$\boldsymbol{A} = 0, \qquad \mathfrak{M}_0 = -(\boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{Q}). \tag{16.15}$$

Первое из этих равенств составляет парадокс Даламбера для *потенциальных* течений. Суммарная сила, действующая со стороны идеальной несжимаемой жидкости на поступательно движущееся в ней твердое тело, равна нулю, если скорость движения тела постоянна, жидкость в бесконечности покоится и течение непрерывно и потенциально. В общем случае на поступательно движущееся в идеальной несжимаемой жидкости с постоянной скоростью твердое тело действует пара сил с моментом $\mathfrak{M}_0 = -(\boldsymbol{U}_0 \times \boldsymbol{Q})$. Этот момент равен нулю, если $\boldsymbol{Q}$ коллинеарно $\boldsymbol{U}_0$, т. е. если тело движется вдоль одного из трех главных направлений движения.

Подчеркнем, что здесь мы показали наличие парадокса Даламбера для потенциальных течений, но он спра-

ведлив и во многих других случаях, когда течения не потенциальны (см. также §§ 8 и 10). В самом деле, если течение жидкости установившееся, то количество движения жидкости, если только его можно рассматривать, т. е. если оно является конечной величиной, не зависит от времени. Поэтому и в общем случае его производная по времени, равная силе, с которой жидкость действует на тело, равна нулю [1]):

$$-A = \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что при установившемся движении жидкости силы, действующие на тело, находящееся внутри бесконечной жидкости, могут получиться отличными от нуля только в том случае, когда количество движения жидкости, определенное как сумма количеств движения ее частиц, представляется расходящимся интегралом. Очевидно, что этот вывод верен не только для идеальной жидкости, но и в общем случае для любых движений, любых жидкостей, газов и вообще для произвольных сред, внутри которых рассматривается данное установившееся движение тела и движение которых установившееся.

С другой стороны, известно, что в действительности при практически установившихся движениях сопротивление тел, движущихся в различных средах, отлично от нуля. Все схемы движения вязких или идеальных жидкостей или газов (в том числе и с ударными волнами), при которых получается сопротивление, связаны с тем, что бесконечная масса жидкости, занимающая все пространство вне тела, имеет бесконечное количество движения не только для относительного, но и для абсолютного поля скоростей.

Однако бесконечность количества движения жидкости не обязательно связана с наличием сопротивления. Например, в рассмотренной выше задаче о потенциальном возмущенном движении идеальной жидкости сила сопротивления отсутствует и в относительном обтекании тела, для которого количество движения жидкости бесконечно.

Накапливание бесконечного количества движения в установившемся абсолютном движении жидкости при конечном сопротивлении связано с тем, что установившиеся движения получаются только как пределы неустановившихся движений, продолжавшихся теоретически бесконечное время.

[1]) Величина A равняется силе воздействия жидкости на тело, если условия на бесконечности не связаны с введением внешних сил. Ниже мы рассмотрим задачу об обтекании сферы вязкой жидкостью, в соответствующем решении появятся внешние силы как следствие условий в бесконечности.

О гидродинамических силах при наличии массовых сил

При потенциальных движениях идеальной жидкости наличие массовых сил приводит к появлению в интеграле Коши — Лагранжа добавочного гидростатического давления, выражающегося через потенциал массовых сил. Поэтому, а также и по другим причинам, во многих важных случаях массовые силы влияют на поле скоростей. Например, это влияние может сказаться за счет граничных условий на свободной поверхности, которые формулируются с помощью интеграла Коши — Лагранжа, содержащего член, зависящий от массовых сил.

В связи с этим при непрерывном потенциальном возмущенном движении идеальной тяжелой жидкости, возникающем в случае горизонтального поступательного движения с постоянной скоростью твердого тела (корабля) по ее свободной поверхности или внутри нее вблизи свободной поверхности (подводной лодки), парадокс Даламбера не имеет места. В этих случаях возникают волновое сопротивление и подъемная сила, а количество движения жидкости при установившемся течении представляется расходящимся интегралом.

О гидродинамических силах при движении тела в воде на значительной глубине

При движении подводной лодки на большой глубине влияние существования свободной поверхности жидкости на поле скоростей вблизи тела ничтожно мало. В этом случае наличие сопротивления связано с силами вязкого трения и с возникновением в потоке жидкости вихрей, что при малых скоростях хода обусловливается свойством вязкости воды. Если в рамках теории идеальной жидкости можно принять, что влияние свободной поверхности несущественно, то потенциал скоростей вблизи тела можно считать таким же, как и в бесконечной массе жидкости. На этом основании при установившемся поступательном движении лодки с постоянной скоростью из формулы (16.1) после подстановки в нее давления, выраженного по формуле Коши — Лагранжа, получим, что сила A будет отлична от нуля только за счет гидростатической части давления и будет точно равна силе Архимеда (см. также § 8). Момент гидродинамических сил $\mathfrak{M}$ будет равен моменту силы Архимеда, определенному по правилам гидростатики, и добавочному динамическому моменту, определенному по формуле (16.15).

Если движение неустановившееся, то в рассматриваемом случае полная сила A и полный момент $\mathfrak{M}$ будут определены формулами (16.2) и (16.6), в которых справа нужно добавить силу Архимеда и ее момент. В случае тела вращения можно воспользоваться формулами (16.12) и (16.13) с добавлением данных о силе Архимеда.

О силах при обтекании тел ускоренными потоками

Выше мы рассмотрели вопрос об обращении движения в случае поступательного движения тела с постоянной скоростью. Согласно принципу Галилея — Ньютона добавление ко всем точкам системы постоянной скорости не сказывается на распределении давления и на силах. Задачу о движении тела в жидкости можно заменить эквивалентной задачей об обтекании неподвижного тела набегающим потоком жидкости со скоростью, противоположной скорости движения тела.

Рассмотрим теперь вопрос об относительном обтекании вообще подвижных тел ускоренным потоком несжимаемой жидкости. Во многих приложениях приходится иметь дело с движением тел в жидкости, которая на далеких от тела расстояниях находится в движении, обусловленном внешними обстоятельствами, механически не связанными с данным телом. Например, обтекание дирижаблей воздухом при порывистом ветре или движение кораблей при наличии водяных течений, движение сравнительно небольших частиц — тел в сложных неустановившихся потоках воды и т. п.

В задачах о потенциальном движении несжимаемой жидкости потенциал скоростей всегда, независимо от краевых условий на поверхности тела и от условий в бесконечности, является гармонической функцией. Пусть скорость жидкости в бесконечности конечна, отлична от нуля и переменна по времени, т. е. мы имеем дело с порывистым движением жидкости на далеких от тела расстояниях. Возьмем подвижную систему координат $л$, движущуюся поступательно с переменной скоростью $\boldsymbol{U}_{\text{пост}}(t)$, равной скорости набегающего потока.

Пусть имеем тело, которое движется как угодно, обозначим через $\boldsymbol{U}_a$ различные переменные во времени скорости точек тела, определенные относительно «неподвижной» системы координат — той же самой системы, относительно которой определена скорость жидкости $\boldsymbol{U}_{\text{пост}}$. При определении $\boldsymbol{U}_a$ возможность вращения тела учитываем. Рассмотрим задачу о движении тела относительно неинерциальной системы координат $л$. Относительные скорости точек тела в системе $л$ представятся формулой

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_a - \boldsymbol{U}_{\text{пост}}(t). \tag{16.16}$$

Легко видеть, что для несжимаемой жидкости задача о возмущенном движении безграничной массы жидкости относительно системы $л$ — та же задача, которую мы подробно изучили выше. Следовательно, соответствующий потенциал скоростей, построенный для распределения скоростей $\boldsymbol{U}$, определенного

формулой (16.16), будет в точности совпадать с потенциалом, рассмотренным раньше для абсолютных скоростей.

Задачи об относительном движении в неинерциальных системах отсчета отличаются от соответствующих задач о движении в инерциальных системах только тем, что в уравнениях движения первых задач будут присутствовать массовые силы инерции, подобные силе тяжести. Наличие этих сил инерции приведет к появлению соответствующего, связанного с гидростатическим давлением члена в интеграле Коши — Лагранжа. Если обратиться к формулам (16.1), то станет очевидным, что суммарная сила и суммарный момент будут отличаться от соответствующих сил и моментов, определенных для относительных скоростей $\boldsymbol{U}$ (16.16), только «гидростатическими» слагаемыми, определенными по значениям сил инерции. При определении этих сил нужно учесть, что роль ускорения силы тяжести $\boldsymbol{g}$ теперь будет играть величина $-d\boldsymbol{U}_{\text{пост}}/dt$, где производная по времени берется относительно «неподвижной» инерциальной системы координат. В частности, если тело в порывистом потоке идеальной жидкости неподвижно, то на него со стороны жидкости будет действовать сила Архимеда, равная $-\rho V d\boldsymbol{U}_{\text{пост}}/dt$, где V — объем тела. Эта сила направлена не по скорости ветра, а по его ускорению. Очевидно, что эта сила может быть противоположна скорости ветра. Однако надо иметь в виду, что в данном случае рассматривается непрерывное движение идеальной несжимаемой жидкости и при отсутствии ускорения внешнего потока имеет место парадокс Даламбера.

Сделанные выше выводы о различии гидродинамических сил при обращении ускоренных потоков только за счет «силы Архимеда», вызванной силами инерции, сохраняют свою силу в общем случае для других схем течения и других сред, когда условия, определяющие поток, имеют кинематический характер и не зависят от добавления каких-либо массовых сил в уравнения движения.

§ 17. Движения газа с малыми возмущениями

В § 11 было показано, что задача об определении потенциала скоростей $\varphi(x, y, z, t)$ возмущенного баротропного движения газа в случае малых возмущений сводится к решению волнового уравнения

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (17.1)$$

При рассмотрении конкретных задач необходимо находить решения волнового уравнения, удовлетворяющие соответствующим дополнительным условиям: краевым, начальным или другим.

Решение волнового уравнения с плоскими волнами

Рассмотрим сначала случай движений газа с плоскими волнами, когда потенциал φ зависит только от одной координаты x и от времени t. В этом случае волновое уравнение (17.1) приобретает следующую простую форму:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{a_0^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,. \tag{17.2}$$

Легко видеть, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x, t) = f_1(x - a_0t) + f_2(x + a_0t) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{17.3}$$

где $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов

$$\xi = x - a_0t \quad \text{и} \quad \eta = x + a_0t$$

соответственно. Действительно, в результате дифференцирования (17.3) будем иметь

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = f_1''(\xi) + f_2''(\eta), \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a_0^2[f_1''(\xi) + f_2''(\eta)].$$

Отсюда непосредственно видно, что (17.3) удовлетворяет уравнению (17.2) при произвольных функциях f_1 и f_2, вид которых при решении конкретных задач необходимо определять из дополнительных условий.

Прогрессивные волны

Установим теперь некоторые основные свойства решений уравнения (17.2). Рассмотрим сначала случай

$$\varphi = f_1(x - a_0t) = f_1(\xi)$$

и допустим, что в момент времени $t = 0$ потенциал возмущенного движения $\varphi(x)$, а следовательно, и $f_1(\xi)$ имеет вид, изображенный на рис. 77, т. е. функция $f_1(\xi)$ отлична от нуля только на участке от 0 до $x_0 = \xi_0$. В любой последующий момент времени $t > 0$

$$\varphi(x, t) = f_1(x - a_0t) = f_1(\xi)$$

и потенциал $\varphi(x, t)$ отличен от нуля только при $0 \leqslant x - a_0t \leqslant x_0$, т. е. при $a_0t \leqslant x \leqslant x_0 + a_0t$ (рис. 78). Видно, что область возмущенного движения переместится по оси x вправо на расстояние $x = a_0t$. Ясно, что существенной особенностью решения уравнения (17.2) для плоских волн при малых возмущениях является свойство сохранения в плоскости xt формы возмущения. Рассматриваемое возмущенное движение

представляет собой *перемещающуюся поступательно вправо прогрессивную волну* неизменного вида (см. рис. 78). Поступательная скорость распространения первоначального возмущения вдоль оси x будет равна $a_0 = \sqrt{(dp/d\rho)_0}$ — «скорости звука» в невозмущенном состоянии покоя. Отсюда непосредственно видно, что скорость a_0 действительно представляет собой скорость распространения слабых возмущений, этим оправдывается название a_0 — «скорость звука», так как, в частности, звуковые колебания можно рассматривать как малые механические возмущения в жидкостях, газах и вообще деформируемых средах.

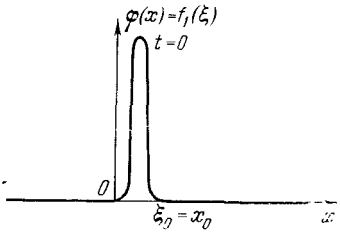


Рис. 77. Начальное значение потенциала возмущенного движения.

Аналогично решение

$$\varphi(x, t) = f_2(\eta)$$

представляет собой прогрессивную волну, распространяющуюся поступательно влево со скоростью a_0, а сумма решений

$$\varphi(x, t) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

представляет собой сумму двух прогрессивных волн, одна из которых, $f_1(\xi)$, распространяется вправо, а вторая, $f_2(\eta)$,

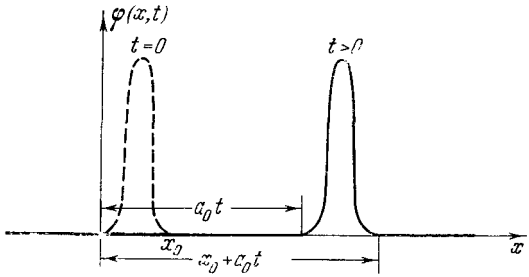


Рис. 78. Возмущение в произвольный момент времени.

влево вдоль оси x со скоростью звука a_0 (рис. 79). В общем случае, если $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ отличны от нуля только на конечном интервале $0 \leqslant \xi \leqslant x_0$ и $0 \leqslant \eta \leqslant x_0$, с течением времени произойдет разделение первоначального возмущения на две отдельные прогрессивные волны, распространяющиеся в разные стороны; это разделение произойдет за конечное время

$t_1 = x_0/a_0$. Эффект разделения возмущения, заданного в конечной области, на две бегущие в разные стороны прогрессивные волны будет сохраняться, начиная с некоторого момента времени, до

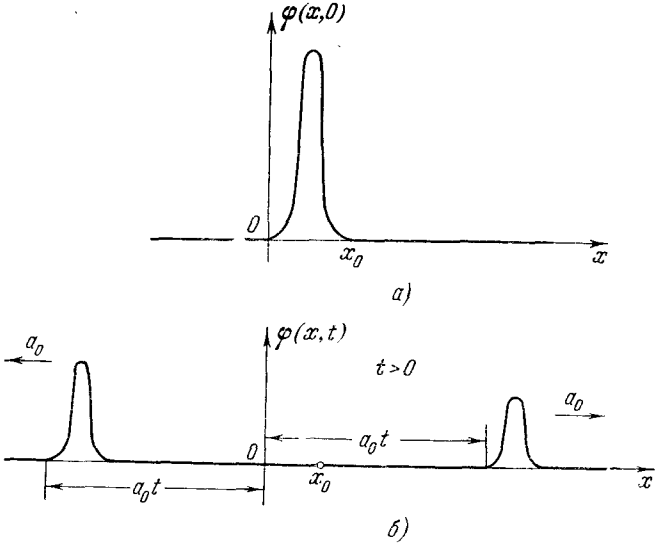


Рис. 79. *а*) Начальное возмущение, *б*) две прогрессивные волны, распространяющиеся вправо и влево со скоростью a_0.

$t = \infty$ в том случае, когда вначале покоящаяся среда бесконечна по оси x вправо и влево. Если на оси x имеются граничные точки (плоская стенка, свободная граница и т. п.), то прогрессивные волны при подходе к границе будут взаимодействовать с ней и могут возникнуть «отраженные» волны, распространяющиеся от границы внутрь среды.

Решение волнового уравнения со сферическими волнами

Если возмущенное движение газа обладает сферической симметрией относительно начала координат, то потенциал возмущенного движения φ зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и от времени t. Покажем, что волновое уравнение (17.1) в случае возмущенного движения со сферическими волнами имеет решение вида

$$\varphi(r, t) = \frac{f(r \mp a_0 t)}{r}, \qquad (17.4)$$

где f — произвольная дважды дифференцируемая функция своего аргумента $r \mp a_0 t$. Действительно, в результате диффе-

ренцирования (17.4), так как $\partial r/\partial x = x/r$, $\partial r/\partial y = y/r$ и $\partial r/\partial z = z/r$, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{fx}{r^3} + \frac{f'x}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{f}{r^3} + \frac{3fx^2}{r^5} - \frac{f'x^2}{r^4} + \frac{f'}{r^2} - \frac{2f'x^2}{r^4} + \frac{f''x^2}{r^3},$$

$$\Delta\varphi = \frac{f''}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{a_0^2 f''}{r}.$$

Отсюда непосредственно видно, что выражение (17.4) удовлетворяет волновому уравнению (17.1) при любой функции f от $r \mp a_0 t$. Для исследования решения (17.4) запишем это решение в виде

$$\varphi = -\frac{Q(a_0 t - r)}{4\pi r}. \tag{17.5}$$

Примем вначале, для простоты, что Q — аналитическая функция своего аргумента. Нетрудно усмотреть, что потенциал скоростей (17.5), удовлетворяющий волновому уравнению, можно рассматривать как обобщение соответствующего потенциала от источника в несжимаемой жидкости $\varphi = -Q(t)/4\pi r$, удовлетворяющего уравнению Лапласа. Действительно, при малых r, разложив Q в ряд Тейлора, получим выражение

$$\varphi = -\frac{Q(a_0 t)}{4\pi r} - \frac{Q(a_0 t)}{4\pi} + O(r),$$

главный член которого совпадает с выражением для потенциала скоростей течения от источника, расположенного в точке $r = 0$ в несжимаемой жидкости. Переменный объемный расход этого источника определяется функцией $Q(a_0 t)$.

Для характеристики основных особенностей соответствующего сферически симметричного движения среды предположим теперь, что в точке $r = 0$ безграничной массы жидкости имеется источник, который действует некоторый малый промежуток времени τ. Зависимость расхода этого источника $Q(a_0 t)$ от времени t имеет вид, изображенный на рис. 80, расход отличен от нуля только при $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Посмотрим, как со временем будут распространяться по объему жидкости возмущения, посланные этим источником. Из вида решения (17.5) ясно, что при $t > 0$ и $r > 0$ потенциал возмущенного течения будет отличен от нуля только тогда, когда $a_0 t - r$ будет лежать в пределах $0 \leqslant a_0 t - r \leqslant a_0 \tau$. В каждый фиксированный момент времени $t > 0$ потенциал φ будет отличен от нуля только для тех r, которые удовлетворяют

неравенству

$$a_0 t \geqslant r \geqslant a_0 (t - \tau).$$

Таким образом, область возмущенного ($\varphi \neq 0$) течения будет расположена между двумя сферами S_1 и S_2 радиусов $r_1 = a_0 (t - \tau)$ и $r_2 = a_0 t = r_1 + a_0 \tau$ с центрами в точке $r = 0$ (рис. 81).

Указанная область возмущений подвижна, передний S_2 и задний S_1 фронты возмущения распространяются по жидкости со скоростью a_0:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt} = a_0.$$

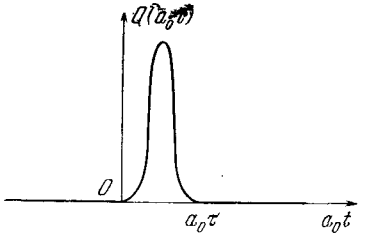


Рис. 80. Пример зависимости расхода источника, действующего в начале координат, от времени.

В противоположность плоским волнам, форма которых при их распространении сохраняется, интенсивность сферических волн при их распространении со временем падает благодаря наличию множителя $1/r$ в формуле (17.5). Это связано с тем, что, распространяясь, возмущения захватывают область пространства между двумя сферами S_2 и S_1, объем которой возрастает пропорционально r^2.

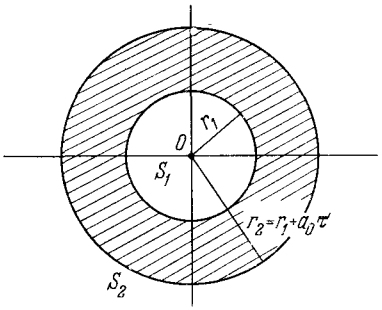


Рис. 81. Заштрихована область возмущенного в момент времени $t > \tau$ движения жидкости от источника с расходом, отличным от нуля только в конечный промежуток времени τ.

Решение волнового уравнения (17.5) представляет собой движение с расходящимися от точки $r = 0$ сферическими волнами. Аналогичным путем можно рассмотреть решение волнового уравнения вида

$$\varphi = \frac{Q(r + a_0 t)}{r},$$

которое представляет собой сходящиеся из бесконечности к точке $r = 0$ сферические волны (источник в бесконечности). Для сходящейся волны интенсивность возмущений нарастает при подходе к центру симметрии. Для многих приложений особенно важен случай расходящихся сферических волн. Однако эффект усиления возмущений в сходящихся волнах во многих вопросах также интересен и используется на практике.

Возмущения, посланные источником, в несжимаемой жидкости мгновенно распространяются на всю массу жидкости.

В сжимаемых средах возмущения распространяются с конечной скоростью, причем малые возмущения распространяются со скоростью звука $a_0 = \sqrt{(dp/d\rho)_{\rho=\rho_0}}$. Выше (см. гл. VII т. 1) было показано, что в сжимаемых средах скорость распространения конечных возмущений (скачков) больше соответствующей скорости звука $a = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$, но тоже конечна.

Запаздывающие потенциалы. Способы конструирования решений волнового уравнения

Возмущения, посланные из точки $r = 0$, доходят до некоторой точки $r \neq 0$ только через определенное время. Поэтому решения вида (17.5) называются запаздывающими потенциалами.

С помощью решений (17.4) или (17.5) можно строить другие решения волнового уравнения. Например, если $\varphi(x, y, z, t)$ является решением волнового уравнения, то $\varphi(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0)$, где x_0, y_0, z_0, t_0 — некоторые произвольные постоянные, также будет решением волнового уравнения. Таким образом, например, функция

$$\varphi^*(x, y, z, t) = -\frac{Q\left(a_0(t - t_0) - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right)}{4\pi\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \tag{17.6}$$

будет решением волнового уравнения (17.1). Это решение при условии, что функция $Q(a_0 t)$ определена графиком рис. 80, соответствует источнику, который в момент t_0 начинает действовать в точке с координатами x_0, y_0, z_0. Волновое уравнение (17.1) является линейным уравнением, поэтому сумма решений волнового уравнения также является его решением. Пользуясь этим, можно строить новые решения волнового уравнения с помощью сложения решений вида (17.6), в которых x_0, y_0, z_0, t_0 принимают различные значения. Можно рассматривать совокупность точек x_0, y_0, z_0, в которых в разные моменты времени t_0 вспыхивают и некоторое время продолжают действовать различного вида источники с постоянной или переменной интенсивностью Q_{t_0}. (Функция Q_{t_0}, помимо аргумента, указанного в (17.6), может зависеть еще как угодно от параметра t_0.) С помощью сложения потенциалов таких источников возмущения можно конструировать решения различных задач аэродинамики тонких тел, когда применима теория малых возмущений. Например, можно рассмотреть кривую $x_0 = x_0(t_0)$, $y_0 = y_0(t_0)$, $z_0 = z_0(t_0)$, представляющую собой траекторию движения тонкого снаряда, и моделировать движение снаряда с помощью источников, вспыхивающих в каждой точке этой кривой в момент t_0 прохождения через нее снаряда и продолжающих действовать в этой точке некоторый малый промежу-

ток времени. В некоторых случаях закон движения $x_0 = x_0(t_0)$, $y_0 = y_0(t_0)$ и $z_0 = z_0(t_0)$ тела — возбудителя возмущений можно отождествить с законом движения подвижного источника. При этом потенциал возмущенного движения сжимаемой среды можно определить формулой

$$\varphi = \int_0^t \varphi^* dt_0,$$

где φ^* определено равенством (17.6). Возмущения, возбуждаемые в каждой точке x_0, y_0, z_0, через которую снаряд проходит в момент $t = t_0$, в последующие моменты времени $t > t_0$ распространяются в пространстве. Граница каждого такого возмущения в момент времени $t > t_0$ представляет собой поверхность сферы радиуса $r = a_0(t - t_0)$ с центром в точке x_0, y_0, z_0.

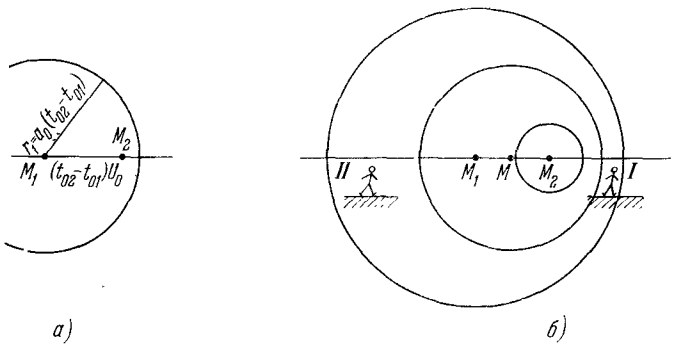
Рассмотрим более подробно задачу о распространении возмущений от источника, движущегося вдоль прямой с постоянной скоростью U_0. Весьма важно, что картина распространения возмущений будет существенно различной в случаях движения источника с дозвуковой ($U_0 < a_0$) и со сверхзвуковой ($U_0 > a_0$) скоростью.

Распространение возмущений от источника, движущегося вдоль прямой с постоянной дозвуковой скоростью. Эффект Допплера

Остановимся сначала на изучении поля возмущений от источника, движущегося в бесконечной массе жидкости вдоль прямой с постоянной *дозвуковой* скоростью $U_0 < a_0$ (рис. 82, *а*). Пусть в некоторый начальный момент t_{01} источник находится в точке M_1, с координатой x_{01}, все возмущения от него в этот момент времени также сосредоточены в этой же точке M_1. Возьмем некоторый другой момент времени $t = t_{02} > t_{01}$. Источник за промежуток времени $t_{02} - t_{01}$ продвинется на расстояние $(t_{02} - t_{01})U_0$ и попадет в точку M_2 с координатой x_{02}. Возмущения от источника, находившегося в момент t_{01} в точке M_1, за время $t_{02} - t_{01}$ распространятся до поверхности сферы радиуса $r_1 = (t_{02} - t_{01})\,a_0$ с центром в точке M_1 и обгонят источник ($r_1 > M_1M_2 = x_{02} - x_{01}$).

Отметим следующие особенности рассматриваемой картины распространения возмущений от источника, движущегося вдоль прямой с дозвуковой скоростью. Во-первых, возмущения от источника обгоняют сам источник, и он движется по уже возмущенной среде; среда перед источником возмущена. Во-вторых, возмущения, посланные источником из его предыдущих положений, всегда обгоняют возмущения, посланные из его последующих положений, и если источник двигался бесконечно долго, то *вся среда* перед и за источником *возмущена*.

В-третьих, картина распространения возмущений от подвижного источника, в противоположность картине распространения возмущений от неподвижного источника (см. рис. 81), несимметрична; очевидно, что впереди источника звук имеет бо́льшую частоту, чем за ним (см. рис. 82, *б*). Последнее обстоятельство объясняет так называемый *эффект Допплера*, который заключается в том, что наблюдатель I, стоящий впереди



а) *б)*

Рис. 82. Распространение возмущений от источника, движущегося с постоянной дозвуковой скоростью.

приближающегося подвижного источника звука, слышит звук более высокого тона, чем наблюдатель II, стоящий позади удаляющегося источника звука. Аналогично подвижный, удаляющийся от Земли источник света (например, звезда) дает отклонения в сторону красных спектральных линий, соответствующих световым волнам большей длины, в то время как приближающийся к Земле подвижный источник света дает отклонения в сторону фиолетовой части спектра, соответствующей более коротким световым волнам. По величине отклонения спектральных линий можно определить величину скорости движения звезды относительно Земли.

Распространение возмущений от источника, движущегося вдоль прямой с постоянной сверхзвуковой скоростью

Изучим теперь картину распространения возмущений от источника, движущегося вдоль прямой со сверхзвуковой скоростью $U_0 > a_0$ (рис. 83). Пусть, как и в первом случае, источник в момент времени t_{01} находится в точке M_1 с координатой x_{01}. В момент времени $t = t_{02} > t_{01}$ источник будет находиться в точке M_2 с координатой $x_{02}=x_{01}+U_0\,(t_{02}-t_{01})$. Возмущения от источника, расположенного в момент t_{01} в точке M_1, в момент времени t_{02} достигнут поверхности сферы радиуса $r_1 = a_0\,(t_{02} - t_{01})$ с центром в точке M_1. В силу

того, что $U_0 > a_0$, путь, пройденный источником за время $t_{02} - t_{01}$, будет больше r_1.

Возмущения, посланные источником в моменты времени t_0, большие t_{01} и меньшие t_{02}, в момент t_{02} достигнут, очевидно,

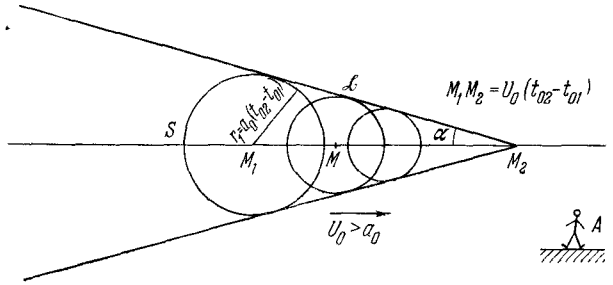


Рис. 83. Распространение возмущений от источника, движущегося с постоянной сверхзвуковой скоростью.

поверхностей соответствующих сфер радиусов $r = (t_{02} - t_0)a_0$, $t_{01} < t < t_{02}$, с центрами в точках $M(x_0)$ $(x_{01} < x_0 < x_{02})$ (см. рис. 83), и все эти возмущения будут оставаться позади источника.

Таким образом, *среда впереди источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью, остается невозмущенной*; наблюдатель A, стоящий впереди движущегося со сверхзвуковой скоростью источника, «не знает», что к нему приближается источник возмущений; он не может слышать звуковых сигналов, посылаемых движущимся со сверхзвуковой скоростью источником. Таким образом, имеется фундаментальное различие между распространением возмущений от источников, движущихся со сверхзвуковой и дозвуковой скоростями.

Конус и угол Маха

Очевидно, что все возмущения от источника, начавшего двигаться с постоянной сверхзвуковой скоростью бесконечно давно, в произвольный момент времени t_{02} будут заключены внутри кругового конуса, вершина которого находится в точке M_2, а боковая поверхность является огибающей сфер радиусов $r = a_0(t_{02} - t_0)$, где $t_0 \leqslant t_{02}$. Этот конус, отделяющий возмущенную область от невозмущенной, называется конусом Маха. Синус α — половины угла раствора конуса Маха — равен обратной величине числа Маха $M = U_0/a_0$. Действительно,

$$\sin\alpha = \frac{r_1}{M_1M_2} = \frac{a_0}{U_0} = \frac{1}{M}.$$

Этот угол α называется углом Маха. Заметим, что если сверхзвуковое движение источника началось, например, в момент t_{01}, то в момент t_{02} все возмущения от источника будут расположены внутри области, ограниченной частью поверхности конуса Маха $\mathscr{L}$ и частью сферы S радиуса $r_1 = a_0 (t_{02} - t_{01})$ с центром в точке M_1.

На поверхности $\mathscr{L}$ конуса Маха сопрягаются два решения волнового уравнения, соответствующие состоянию покоя, $\varphi = 0$, и состоянию возмущенного движения, $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$. Подобные поверхности сопряжения решений с различными аналитическими свойствами называются характеристическими поверхностями уравнений с частными производными. Характеристическая поверхность — конус Маха является в общем случае поверхностью разрыва возмущений; в рамках рассматриваемой теории эта поверхность будет поверхностью, на которой разрывы скорости, давления и других величин невелики. В пределе такие поверхности соответствуют слабым разрывам, на которых искомые функции непрерывны, но их производные по координатам вообще терпят разрыв. Очевидно, что скорость распространения поверхности характеристического конуса по неподвижной среде, нормальная к его поверхности, точно равна скорости звука.

Распространение сигналов в сверхзвуковых потоках

Если на течение, изображенное на рис. 83, наложить постоянное поле скоростей $-U_0$, то среда, заполняющая все пространство, будет двигаться с постоянной сверхзвуковой скоростью U_0 вдоль отрицательной оси x, а источник возмущений будет покоиться. Возмущения от источника, расположенного в точке M_2, в сверхзвуковом потоке будут сказываться только внутри поверхности конуса Маха с вершиной в точке M_2, расширяющегося вниз по потоку, а перед этим конусом Маха будет иметь место поступательное невозмущенное движение среды с постоянной скоростью U_0. Параметры движения среды в произвольной точке сверхзвукового потока могут изменяться только от возмущений, возникающих в точках, лежащих внутри поверхности конуса Маха с вершиной в рассматриваемой точке и расширяющегося вверх по потоку.

§ 18. Распространение плоских волн конечной амплитуды (волны Римана)

В предыдущем параграфе рассматривалось распространение слабых возмущений. Уравнения движения были линейными и сводились к волновому уравнению.

Решение Римана системы уравнений одномерных баротропных движений идеального газа с плоскими волнами

В случае плоских волн мы рассмотрели решения волнового уравнения, зависящие только от $x \pm a_0 t$, что соответствовало прогрессивным волнам, которые без изменения своей формы распространяются вдоль оси x с постоянной и одинаковой для всех возмущений скоростью a_0. Скорость, плотность, давление (а также и другие характеристики движения) в такой волне являются функциями только $x \pm a_0 t$ и, следовательно, могут быть выражены как функции друг друга в виде соотношений, не содержащих явно ни координат, ни времени t (например, $u = u(\rho)$, $p = p(\rho)$ и т. д.).

Выпишем *нелинейную* систему уравнений одномерных движений идеальной сжимаемой жидкости в случае баротропных процессов. Она состоит из уравнения Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{18.1}$$

уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{18.2}$$

и условия баротропности

$$p = f(\rho), \tag{18.3}$$

которое в случае адиабатических процессов в совершенном газе имеет вид

$$p = A\rho^{\gamma}, \tag{18.4}$$

где A — постоянная, одинаковая для всех частиц газа.

Система уравнений (18.1) — (18.2) с учетом условия баротропности течения (18.3) представляет собой систему двух уравнений для определения плотности ρ и скорости u в зависимости от координаты x и времени t. Проводимые ниже рассуждения справедливы, вообще говоря, при любой зависимости (18.3) p от ρ. Случай адиабатических движений совершенного газа (18.4) мы будем рассматривать далее для иллюстрации полученных выводов только в качестве частного примера.

Выписанная система уравнений движения газа (18.1) — (18.3) *не имеет* решений, зависящих только от $x \pm a_0 t$, но оказывается возможным найти решение этой системы, представляющее собой плоскую волну и являющееся обобщением решений вида $f(x \pm a_0 t)$, которые имеют место для приближенных линейных уравнений.

Будем искать такие частные решения системы уравнений (18.1) — (18.3), для которых скорость u является функцией только плотности ρ, т. е.

$$u = u(\rho), \tag{18.5}$$

где $\rho = \rho(x, t)$. Такие частные решения системы уравнений (18.1) — (18.3) носят название решений Римана; соответствующие этим решениям движения называются волнами Римана.

В результате сделанного предположения (18.5) систему уравнений можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(u\frac{du}{d\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(u + \rho\frac{du}{d\rho}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

Очевидно, что эти два уравнения будут согласовываться между собой, если будет выполнено равенство

$$\rho\frac{du}{d\rho} = \frac{\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}}{\frac{du}{d\rho}}. \tag{18.7}$$

Равенство (18.7) обязательно должно выполняться для того, чтобы сделанное выше предположение о существовании решений вида $u = u(\rho)$ выполнялось.

Таким образом, согласно (18.7) имеем

$$\frac{du}{d\rho} = \pm\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\frac{dp}{d\rho}}, \tag{18.8}$$

и, следовательно, скорость u как функция ρ в случае волн Римана может быть найдена независимо от интегрирования уравнений движения (18.1) — (18.2). Для скорости $u(\rho)$ будем иметь

$$u = \pm\int\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\frac{d\rho}{\rho}. \tag{18.9}$$

Для определения плотности $\rho(x, t)$ можно использовать уравнения (18.6), которые в силу (18.7) сводятся к одному нелинейному уравнению. Это уравнение после обозначения

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2(\rho) \tag{18.10}$$

и использования пока только одного из решений (18.9) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (u + a)\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0. \tag{18.11}$$

Введем в рассмотрение величину

$$c = u + a, \tag{18.12}$$

которая имеет, очевидно, размерность скорости и на основании уравнения (18.11) может быть истолкована как *скорость распространения постоянных значений плотности* ρ.

В самом деле, уравнение (18.11) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

где

$$\frac{dx}{dt} = c.$$

Аналогично можно рассмотреть и скорость c, равную $u - a$. Согласно (18.9) и (18.10) величина c для баротропных процессов является известной функцией плотности ρ.

Для определения плотности $\rho(x, t)$ имеем нелинейное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{18.13}$$

Подсчитаем величину $c = u + a$ для случая адиабатических движений совершенного газа.

Из (18.4) получим

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = A\gamma\rho^{\gamma-1},$$

$$u(\rho) = \pm\int \sqrt{A\gamma}\,\rho^{\frac{(\gamma-1)}{2}-1}\,d\rho = \pm\sqrt{A\gamma}\,\frac{2}{\gamma-1}\rho^{(\gamma-1)/2} + \text{const},$$

$$c(\rho) = u + a = \sqrt{A\gamma}\left[1 + \frac{2}{\gamma-1}\right]\rho^{(\gamma-1)/2} + \text{const}. \tag{18.14}$$

Отсюда видно, что скорости a и c являются монотонно возрастающими функциями плотности ρ. Аналогичное исследование характера зависимости a и c от плотности ρ можно провести для произвольной зависимости p от ρ (18.3).

Так как постоянные значения плотности ρ и скорости $u = u(\rho)$ перемещаются в пространстве со скоростью c, можно написать, что

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\rho, u} = c(\rho) = u + a.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$x = tc(\rho) + F(\rho), \tag{18.15}$$

где $F(\rho)$ — произвольная функция плотности, а функция

$$c(\rho) = u + a \tag{18.16}$$

определяется, например, равенством (18.14).

Формулы (18.15), (18.16) и (18.14) дают решение Римана. В этом решении функция $F(\rho)$ произвольна, этой функцией можно распорядиться и удовлетворить некоторым добавочным частным условиям.

В полученном решении Римана плотность, а следовательно, и другие параметры течения найдены как неявные функции от x и t. Для каждого определенного значения ρ имеем $x = c_1 t + c_2$, где c_1 и c_2 — постоянные, т. е. точка, в которой скорость и плотность имеют фиксированные значения (фазовая характеристика состояния), передвигается в пространстве с постоянной скоростью. В этом смысле построенное решение представляет собой волну. Скорость перемещения возмущений в пространстве равна $c = u + a$ или $c = u - a$; скорость распространения возмущений по частицам равна $+a$ или $-a$. Два знака соответствуют двум разным решениям для волн, распространяющихся относительно частиц газа либо в положительном, либо в отрицательном направлениях оси x. Найденные частные движения получены как точные решения нелинейных уравнений движения; соответствующие движения часто называют *простыми волнами*.

Опрокидывание римановской волны сжатия

Пусть в некоторый фиксированный момент времени t профиль распределения плотности ρ от x в распространяющейся вправо ($c = u + a$) волне Римана имеет вид, изображенный на рис. 84, *а*. Слева от точки M плотность ρ растет с ростом x и мы имеем волну разрежения, а справа от точки M плотность ρ убывает с ростом x и мы имеем волну сжатия. Скорость c распространения определенных значений плотности ρ зависит от величины плотности ρ, поэтому профиль распределения плотности ρ будет *меняться* с течением времени. Рассмотрим случай, подобный адиабатическому движению совершенного газа [1]), когда скорость c растет с ростом ρ и убывает с уменьшением ρ. Волна сжатия, т. е. та часть волны Римана, в которой плотность ρ при распространении волны возрастает, так как точки N_1 и N_2 будут сближаться, становится все короче, а профиль волны сжатия становится все круче, в то время как волна разрежения, т. е. те части волны Римана, в которых плотность при распространении волны убывает, так как

[1]) Для упрощения рассуждений примем, что постоянная в (18.14) положительна или равна нулю. Прибавление любой постоянной к $c(\rho)$ не может изменить всех последующих выводов.

точки N_1' и N_2' раздвигаются, удлиняется, а профиль волны разрежения становится все положе (см. рис. 84, *б*). С математической точки зрения возможно наступление такого момента времени t_2, когда в некотором месте x будет наблюдаться несколько значений плотности ρ (см. рис. 84, *в*), что физически недопустимо.

Ясно, что однозначное непрерывное решение, соответствующее волне Римана, может существовать только до момента времени t, когда профиль распределения плотности ρ от x

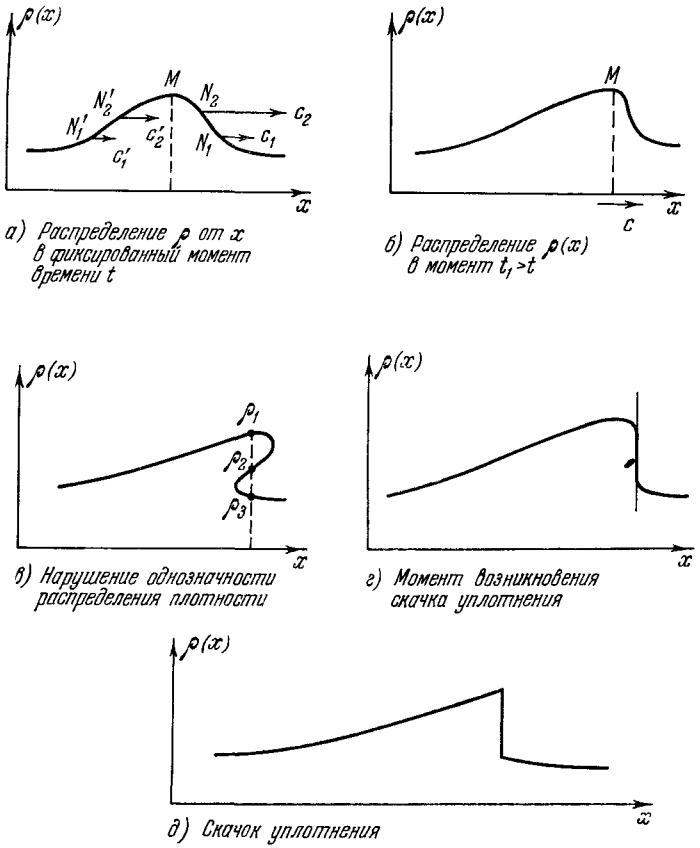


Рис. 84. Опрокидывание римановской волны сжатия.

приобретает вертикальную касательную (см. рис. 84, *г*). Начиная с этого момента времени, непрерывное решение Римана теряет силу. Как показывают опыт и теория, в этом случае непрерывное решение Римана должно быть заменено более

общим разрывным решением *со скачком уплотнения* (рис. 84, *д*). Опрокидывание волны сжатия приводит к появлению скачков уплотнения.

Таким образом, если в решении Римана имеются участки волны сжатия, в потоке идеальной (невязкой) среды обязательно будут возникать скачки уплотнения. Разрывы не будут образовываться, если плотность в волне Римана монотонно возрастает в направлении распространения волны на всем ее протяжении, как, например, в случае волны, возникающей при непрерывном выдвигании поршня из заполненной газом длинной трубы. Скачки уплотнения могут, а *скачки разрежения не могут возникать*, так как профиль волны разрежения становится все более пологим.

При использовании второго решения со знаком минус все выводы сохраняют свою силу после изменения направления оси x на противоположное. Предыдущие выводы существенно связаны с видом функции $p = f(\rho)$.

Связь $p = f(\rho)$, при которой волна Римана перемещается поступательно

Можно поставить задачу об отыскании такой зависимости $p = f(\rho)$, при которой не будет иметь место эффект опрокидывания волны сжатия Римана. Так будет, например, если скорость c получается постоянной, т. е. $dc/d\rho = 0$. В этом случае на основании (18.8), (18.10) и (18.12) для определения вида зависимости p от ρ будем иметь следующее простое дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\rho}\sqrt{f(\rho)} + \frac{d}{d\rho}\sqrt{f(\rho)} = 0. \qquad (18.17)$$

После интегрирования (18.17) найдем

$$p = f(\rho) = A - \frac{B}{\rho}, \qquad (18.17')$$

где A и B — произвольные постоянные. Уравнение (18.17′) можно рассматривать как уравнение процесса с некоторым подходящим притоком тепла для совершенного газа или вообще другой среды. Уравнение (18.17′) можно рассматривать также как уравнение прямой, касательной к адиабате. Таким путем можно задавать адиабату приближенно, но при таком приближении теряется важная тенденция к опрокидыванию волн.

О волнах Римана в других моделях сплошной среды

Теорию простых волн Римана можно применять непосредственно в некоторых других сложных моделях сплошной среды для движений с плоскими волнами, когда деформированное состояние определено одним переменным параметром, связанным однозначно с плотностью, и когда напря-

жение на плоскости фазы волны перпендикулярно к этой плоскости и определено деформированным состоянием, т. е. плотностью.

В частности, теория волн Римана непосредственно применима в нелинейной теории упругости для движений с плоскими волнами, перпендикулярными к оси x, когда перемещения параллельны оси x. В этих приложениях нет необходимости использовать плотность как основную неизвестную величину, вместо плотности можно взять в качестве искомой величины любой другой параметр, связанный известным способом с плотностью. Соответствующие видоизменения решения Римана очевидны.

Автомодельные или центрированные волны Римана

Как узнать, когда и где необходимо воспользоваться решением Римана при конструировании решений задач о движении сплошной среды?

Из постановки задач с помощью теории размерности можно установить случаи, когда имеет место автомодельность искомого решения. Легко видеть, что в автомодельных движениях (см. гл. VII, т. 1) с плоскими волнами, когда переменные аргументы x и t входят только в комбинации x/t, т. е. когда имеют место формулы

$$u = u_0 f\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{и} \quad \rho = \rho_0 \varphi\left(\frac{x}{t}\right),$$

будет

$$u = u(\rho).$$

Следовательно, такие автомодельные движения являются волнами Римана или кусочно гладкими комбинациями решений Римана, но автомодельные волны соответствуют случаю, когда в формуле (18.15) функция $F(\rho)$ равна нулю. Соответствующие решения, называются центрированными волнами, так как в плоскости xt на каждой прямой, проходящей через начало координат,

$$\frac{x}{t} = \text{const},$$

величины u и ρ постоянны.

В общем случае при u и ρ постоянных соотношение (18.15) также определяет прямую, однако если $F(\rho) \neq 0$, то п и различных u и ρ прямые этого семейства не проходят через начало координат. Очевидно, что вдоль каждой такой прямой *решение Римана можно склеивать непрерывно с покоем* или *с поступательным движением* среды. (Поступательные движения также являются простейшими примерами решения Римана.) **Таким образом, эти прямые являются характеристиками, и решения**

Римана можно определить как такие решения, для которых имеется семейство прямолинейных характеристик.

Указанные выше особенности решений Римана служат главной основой для конструирования решения ряда задач с использованием решений Римана. В частности, с помощью решений Римана легко построить решение автомодельной задачи о движении газа за поршнем, выдвигаемым при $t > 0$ с *постоянной* скоростью из цилиндрической трубы, заполненной совершенным газом, в предположении, что при $t \leqslant 0$ поршень и газ покоились, а при $t > 0$ движение газа адиабатично или вообще баротропно.

В различных приложениях существует очень много задач, при точном или приближенном решении которых необходимо опираться на рассмотренную выше теорию простых волн Римана.

§ 19. Движение шара внутри вязкой несжимаемой жидкости

Эффективная разрешимость задачи о движении тела в идеальной несжимаемой жидкости обеспечивается условием о потенциальности движения. При этом для определения потенциала скоростей получается линейная задача.

В аналогичных задачах для вязкой несжимаемой жидкости движение непотенциально, требуется интегрировать нелинейную систему уравнений Навье — Стокса и уравнения неразрывности. В точной постановке задача о движении тела в вязкой жидкости математически очень трудна. При аналитических исследованиях получение соответствующих решений всегда связано с введением дополнительных предположений. В частности, многие теории связаны с линеаризацией уравнений движения.

Приближенная постановка Стокса

Простейшим примером такой линеаризации, пригодной только для очень малых чисел Рейнольдса $\mathrm{R} = Ud/\nu$ (U — скорость тела, d — характерный линейный размер, $\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости), является приближение Стокса, когда в уравнениях Навье — Стокса пренебрегается нелинейными конвективными членами.

В этой приближенной постановке система уравнений установившегося движения в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (19.1)$$

и

$$\mu \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mu \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (19.2)$$

При постоянном коэффициенте вязкости μ в рамках системы уравнений (19.1), (19.2), условий прилипания на поверхности тела и условия об исчезании абсолютных скоростей жидкости в бесконечности можно решить ряд конкретных задач.

Формула для силы, действующей на тело со стороны вязкой жидкости

Рассмотрим задачу об установившемся обтекании неподвижного тела набегающим потоком жидкости с заданной скоростью U при заданном давлении p_0 в бесконечности. Для тела заданной геометрической формы все размеры тела определяются через характерный размер d, который может быть различным для геометрически подобных тел.

Очевидно, что в постановке Стокса (система уравнений (19.1) и (19.2)) глобальные характеристики потока в целом зависят только от следующих параметров [1]):

$$\mu,\ d,\ U,\ \alpha,\ \beta,\ p_0,$$

где α, β — углы, определяющие ориентацию тела относительно набегающего потока. Очевидно, что постоянная p_0 — давление в бесконечности — входит в решение для давления аддитивно и является несущественной при определении суммарной силы A, действующей со стороны жидкости на тело.

Из изложенной в гл. VII теории подобия и размерности следует, что для тела любой формы должны иметь место формулы вида

$$A^i = c_k^i(\alpha, \beta) U^k \mu d, \tag{19.3}$$

где A^i — проекции силы, а U^k — проекции скорости на декартовы оси координат, c_k^i — отвлеченные коэффициенты — компоненты постоянного тензора, зависящие от формы тела. В общем случае векторы силы A и скорости U не коллинеарны. Возникают подъемная сила и боковые силы воздействия потока жидкости на тело. Для определения постоянных c_k^i необходимо решить математическую задачу или произвести соответствующие измерения в опытах.

Задача о распределении давлений при движении шара

Рассмотрим теперь в приближенной постановке Стокса решение задачи об обтекании шара вязкой несжимаемой жидкостью.

Из уравнений (19.2) и (19.1) вытекает, что

$$\Delta p = 0. \tag{19.4}$$

[1]) Здесь и дальше считаем, что коэффициент вязкости μ не зависит от координат.

Следовательно, p — гармоническая функция. Рассмотрим свойства функции $p(x, y, z)$ в предположении, что p обращается в нуль в бесконечности. При $p_\infty = p_0 \neq 0$ достаточно к найденному решению с $p_\infty = 0$ прибавить p_0.

Так как задача линейная, то в случае произвольного направления набегающего потока очевидно следующее равенство:

$$p = U^1 p_1 + U^2 p_2 + U^3 p_3, \tag{19.5}$$

где $p_1(x, y, z)$, $p_2(x, y, z)$ и $p_3(x, y, z)$ — функции, аналогичные потенциалам φ_1, φ_2, φ_3, введенным в § 14.

Поместим начало декартовой системы координат в центр шара, тогда из осевой симметрии каждой из задач для $p_i(x, y, z)$ следует, что

$$p_1 = p_1(x, \sqrt{y^2 + z^2}), \quad p_2 = p_2(y, \sqrt{z^2 + x^2}),$$
$$p_3 = p_3(z, \sqrt{x^2 + y^2}); \tag{19.6}$$

с другой стороны, соображения, приводящие к формуле (14.18) для потенциалов φ_i, в этом случае также применимы и дают

$$p_2 = f(x, \sqrt{z^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}. \tag{19.7}$$

Из равенства

$$p_2(y, \sqrt{z^2 + x^2}) = f(x, \sqrt{z^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

следует, что

$$F(y, \sqrt{z^2 + x^2}) = g(x, \sqrt{z^2 + y^2}), \tag{19.8}$$

где

$$p_2 = Fy \quad \text{и} \quad f = g\sqrt{z^2 + y^2}.$$

Функциональное соотношение (19.8) может удовлетворяться только в том случае, когда

$$F = g = \chi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \tag{19.9}$$

где $\chi(r)$ — некоторая функция радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В самом деле, при $y = 0$, $x = \xi$ и $z = \eta$ имеем

$$g(\xi, \eta) = F(0, \sqrt{\xi^2 + \eta^2}) = \chi(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}).$$

Отсюда, полагая $\xi = x$ и $\eta = \sqrt{z^2 + y^2}$, получим (19.9). Таким образом, для $p_i(x, y, z)$ верны формулы следующего вида:

$$p_1 = \psi'(r)\frac{x}{r} = \frac{\partial \psi(r)}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial \psi(r)}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial \psi(r)}{\partial z}, \tag{19.10}$$

где положено $\chi = \frac{1}{r}\psi'(r)$.

Так как давление удовлетворяет уравнению Лапласа, то легко усмотреть, что единственно возможной функцией $\psi(r)$ является функция

$$\psi(r) = -\mu \frac{a_1}{r} + b,$$

где a_1 и b — постоянные; знак минус и множитель μ приписаны для упрощения последующих выкладок.

Дальше, не ограничивая общности, примем, что скорость набегающего потока в бесконечности параллельна оси x. В этом случае для давления получим следующую формулу:

$$p = p_0 + \frac{\mu a}{r^3} x. \tag{19.11}$$

Задача об определении поля скоростей

Подставляя выражение для давления (19.11) в уравнения (19.2), получим простые уравнения Пуассона с известной правой частью для компонент скорости u, v, w.

Обозначим через R радиус обтекаемого шара и положим

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R^2}{r^5}\right)x^2 - \frac{a}{2r} + \frac{aR^2}{6r^3} + u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_1, \\ v &= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R^2}{r^5}\right)xy + v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_1, \\ w &= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R^2}{r^5}\right)xz + w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w_1. \end{aligned}\right\} \tag{19.12}$$

Первые члены в формулах (19.12) соответствует потенциальному движению с потенциалом φ, определенным формулой

$$\varphi = -\frac{a}{2}\frac{x}{r} + \frac{aR^2 x}{6r^3}. \tag{19.13}$$

Этот потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = \frac{ax}{r^3} = \frac{1}{\mu}(p - p_0). \tag{19.14}$$

Для определения добавочных членов в формулах (19.12), обозначенных через u_1, v_1 и w_1, по (19.2) имеем следующие условия:

$$\Delta u_1 = \Delta v_1 = \Delta w_1 = 0,$$

т. е. $u_1(x, y, z)$, $v_1(x, y, z)$ и $w_1(x, y, z)$ — гармонические функции. В бесконечности на основании (19.12) имеем следующие условия:

$$u_1 = U, \; v_1 = w_1 = 0. \tag{19.15}$$

На сфере условия прилипания на основании (19.12) дают

$$\left.\begin{aligned} 0 = u &= -\frac{a}{3R} + u_1, \quad \text{откуда} \quad u_1 = \frac{a}{3R}, \\ 0 &= v = v_1, \\ 0 &= w = w_1. \end{aligned}\right\} \tag{19.16}$$

Отсюда ясно, что задачи Дирихле для v_1 и w_1, обращающихся в нуль на сфере и в бесконечности, имеют решения, тождественно равные нулю

$$v_1 = w_1 = 0. \tag{19.17}$$

Компонента скорости u_1 обращается в $a/(3R)$ на сфере и имеет постоянное значение U в бесконечности. Обоим этим условиям можно удовлетворить, если взять для u_1 гармоническую функцию:

$$u_1 = U + \frac{c}{r},$$

где c — постоянная. На сфере первое из условий (19.16) дает

$$U + \frac{c}{R} = \frac{a}{3R}, \quad \text{откуда} \quad c = \frac{a}{3} - UR. \tag{19.18}$$

Для определения a осталось использовать и удовлетворить уравнение (19.1), которое имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + \Delta\varphi = 0. \tag{19.19}$$

Так как $v_1 = w_1 = 0$, то это уравнение на основании (19.14) приводится к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{cx}{r^3} = -\Delta\varphi = -\frac{ax}{r^3}.$$

Отсюда и из (19.18) найдем

$$a = c = -\frac{3UR}{2}.$$

Формулы для давления и скорости

Таким образом, полное решение задачи об установившемся обтекании шара потоком с постоянной скоростью U, параллельной оси x, представится в виде формул:

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0 - \frac{3UR\mu x}{2r^3}, \\ u &= -\frac{3}{4}RU\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R^2}{r^5}\right)x^2 - \frac{3}{4}UR\,\frac{1}{r} - \frac{R^3U}{4r^3} + U, \\ v &= -\frac{3}{4}RU\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R^2}{r^5}\right)xy, \\ w &= -\frac{3}{4}RU\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R^2}{r^5}\right)xz. \end{aligned}\right\} \tag{19.20}$$

Из формул (19.20) следует, что распределение характеристик движения несимметрично относительно плоскости yz, перпендикулярной к скорости набегающего потока.

Вычисление сопротивления

Формулы (19.20) позволяют вычислить распределение напряжений в любой точке потока и, в частности, на поверхности сферы. Зная напряжения на сфере, легко вычислить силу сопротивления. Полная сила $\boldsymbol{A}$ воздействия вязкой жидкости на шар представится интегралом:

$$\boldsymbol{A} = \int\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{p}_n d\sigma, \tag{19.21}$$

где Σ_0 — поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (здесь и дальше направление нормали выбирается в сторону возрастания радиуса).

Уравнения Стокса (19.2) для установившегося движения можно записать как статические уравнения в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z} = 0.$$

Отсюда следует, что для любой замкнутой поверхности Σ^*, ограничивающей любой конечный объем непрерывного движения жидкости, в приближении Стокса верна формула

$$\int\limits_{\Sigma^*} \boldsymbol{p}_n d\sigma = \int\limits_{V} \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z} \right) d\tau = 0. \tag{19.22}$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение количества движения, так как в приближенной постановке Стокса в установившемся движении пренебрегается ускорением, и поэтому для любого объема необходимо пренебрегать изменением количества движения жидкости:

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \int\limits_{\Sigma^*} \rho \boldsymbol{v} v_n d\sigma.$$

В общем случае при любых Σ^* $d\boldsymbol{Q}/dt \neq 0$, но является малой второго порядка по сравнению с малыми величинами скоростей жидкости. Ниже мы выбираем поверхность Σ^* так, чтобы $d\boldsymbol{Q}/dt = 0$, и поэтому соотношение (19.22) можно рассматривать как точное уравнение количества движения для решений о движении жидкости и о внутренних напряжениях, определяемых из приближенных уравнений Стокса.

Примем теперь, что поверхность Σ^* состоит из поверхности сферы Σ_0 и любой взятой в жидкости замкнутой поверхности Σ, охватывающей сферу. Из (19.22) следует, что

$$A = \int\limits_{\Sigma_0} p_n d\sigma = \int\limits_{\Sigma} p_n d\sigma. \tag{19.23}$$

В качестве поверхности Σ возьмем поверхность параллелепипеда с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным плоскостям. Пусть $2l$ — размеры ребер, параллельных оси x, а $2b$ — размеры ребер, параллельных осям y и z (рис. 85). Формула (19.23) в проекции на ось x на основании свойств симметрии решения дает [1])

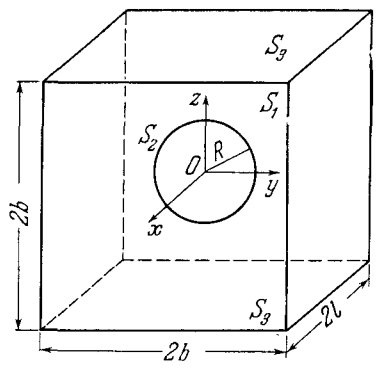


Рис. 85. Выделенный объем жидкости ограничен параллелепипедом и сферой.

$$A_x = W = 4 \int\limits_{S_3(l,b)} p_{zx} d\sigma + \int\limits_{S_1(b,b)} p_{xx} d\sigma - \int\limits_{S_2(b,b)} p_{xx} d\sigma; \tag{19.24}$$

здесь через S_1 и S_2 обозначены передняя и задняя грани параллелепипеда, перпендикулярные к оси x, а через S_3 — грань, перпендикулярная к оси z (см. рис. 85). В силу симметрии силы по всем четырем граням, перпендикулярным к осям z и y, одинаковы, поэтому интеграл по S_3 взят с множителем 4. Для вычисления интегралов от поверхностных сил найдем p_{zx} и p_{xx}. На основании закона Навье — Стокса и решения (19.20) имеем

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -p_0 + \frac{9\mu UR}{2} \frac{x^3}{r^5} + \ldots, \tag{19.25}$$

$$p_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{9}{2} UR\mu \frac{x^2 z}{r^5} + \ldots \tag{19.26}$$

[1]) Для изменения проекции на ось x количества движения имеем $dQ_x/dt = \int u v_n d\sigma$, где интеграл взят по поверхности параллелепипеда. Из-за симметрии интеграл по всем боковым граням обратится в нуль, интегралы по равноудаленным от центра сферы передней и задней граням отличаются только знаком, так как в силу решения (19.20) $u(x) = u(-x)$, а $v_n = u$ на передней грани и $v_n = -u$ на задней грани. Следовательно, при таком выборе контрольной поверхности $\Sigma^* = \Sigma_0 + \Sigma$ для решения (19.20) верно точное равенство $dQ_x/dt = 0$.

В этих формулах указаны только главные члены. Следующие члены при больших r имеют более высокий порядок малости.

Сначала перейдем в (19.24) к пределу при $b \to \infty$. Из (19.26) следует, что при конечных x величина p_{zx} при $r \to \infty$ имеет порядок $\frac{1}{r^4}$, поэтому при $b \to \infty$ получим, что

$$\lim_{b\to\infty} \int_{S_1} p_{zx}\, d\sigma = 0.$$

Учитывая это равенство и формулу (19.25), из (19.24) при $b = \infty$ получим

$$W = 2 \iint_{S_1} \left(\frac{9\mu UR}{2} \frac{l^3}{(l^2+\eta^2)^{5/2}} + \ldots \right) \eta\, d\eta\, d\theta, \qquad (19.27)$$

где η и θ — полярные координаты в плоскости S_1. Первый член в скобках имеет порядок $1/l^2$, следующие не выписанные явно члены имеют порядок $1/l^4$. Полагая $\eta = l\lambda$ и переходя к пределу при $l \to \infty$, найдем

$$W = 18\mu UR\pi \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(1+\lambda^2)^{5/2}} = 6\pi\mu RU, \qquad (19.27')$$

так как не выписанные члены в (19.24) в пределе при $l \to \infty$ равны нулю, а определенный интеграл в (19.27′) не зависит от l и равен 1/3. При движении шара в вязкой несжимаемой жидкости сопротивление получилось отличным от нуля. В этом случае очевидно, что коэффициенты c_k^i в формуле (19.3) сводятся к $c\delta_k^i$, причем при $d = R$ $c = 6\pi$.

Выше была решена задача о движении сферы внутри вязкой несжимаемой жидкости. Это решение соответствует действительности только при малых значениях числа Рейнольдса $\mathrm{R} = (UR/\nu) \ll 1$. Границы применимости формулы (19.7) можно усмотреть из графика, приведенного на стр. 419, т. 1.

§ 20. Движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрических трубах

Система уравнений движения

Рассмотрим движение несжимаемой вязкой жидкости в длинной цилиндрической трубе произвольного поперечного сечения. Выберем декартовы оси координат так, чтобы ось z была направлена по оси трубы. Обозначим через Σ поперечное сечение трубы плоскостью xy и через C контур, ограничивающий Σ (рис. 86). Будем искать решения уравнений движения,

предполагая, что линии тока — прямые, параллельные оси z, иначе говоря, примем, что $u = v = 0$, $w \neq 0$.

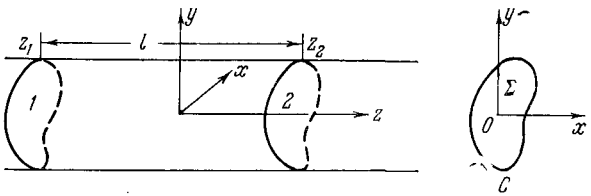


Рис. 86. К течению вязкой жидкости в цилиндрической трубе.

Полная система уравнений движения жидкости, состоящая из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

и уравнений Навье — Стокса

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \boldsymbol{v},$$

в этом случае сильно упрощается и принимает следующий вид:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{20.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{20.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \tag{20.3}$$

Из (20.1) и (20.2) непосредственно вытекает, что

$$w = w(x, y, t) \tag{20.4}$$

и

$$p = p(z, t). \tag{20.5}$$

Ясно, что равенство (20.3) может иметь место только тогда, когда

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho \frac{\partial w}{\partial t}$$

является функцией только одного времени t в случае неустановившихся движений и постоянной величиной в случае установившихся движений.

Распределение давлений вдоль оси трубы

Обозначив $\partial p/\partial z$ через $-i$, будем иметь

$$p = -iz + C_1, \tag{20.6}$$

где постоянная интегрирования C_1 зависит вообще от t, если движение неустановившееся. Таким образом, вдоль трубы давление изменяется в зависимости от z по линейному закону и имеет одно и то же значение во всех точках сечения, перпендикулярного к оси трубы.

Величина

$$i = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{20.7}$$

представляет собой изменение давления вдоль оси трубы, отнесенное к единице длины трубы, и называется перепадом давления вдоль оси трубы. Для полного определения вида прямой (20.6), характеризующей изменение давления вдоль оси трубы, т. е. для определения перепада i и C_1, достаточно задать значения давлений в каких-либо двух сечениях трубы.

Задача об определении скорости

Рассмотрим теперь задачу об определении скорости движения жидкости в трубе при условии, что перепад давления i задан. Для определения $w(x, y, t)$ на основании (20.3) и (20.6) имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{i}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}\Delta w, \tag{20.8}$$

и граничное условие прилипания на контуре C:

$$w = w_0, \tag{20.9}$$

где w_0 — заданная, параллельная оси z скорость стенок трубы. Если стенки трубы неподвижны, то $w_0 = 0$. В общем случае контур C может быть составлен из нескольких замкнутых контуров, некоторые из которых могут быть подвижными. Если движение жидкости неустановившееся, то для определения движения следует задать начальное условие при $t = t_0$

$$w(x, y, t_0) = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — известная функция.

Если рассматривается задача об установившихся колебаниях вязкой жидкости в цилиндрической трубе, когда

$$i = \mathrm{Reel}\,(i_0 e^{i\omega t}),$$

где i_0 и ω — заданные постоянные, то для w можно искать решение в виде

$$w(x, y, t) = \mathrm{Reel}\,[f_1(x, y)\, e^{i\omega t}].$$

Если движение жидкости установившееся, то $i = \text{const}$, $\partial w/\partial t = 0$; скорость $w(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Пуассона с постоянной правой частью

$$\Delta w = -\frac{i}{\mu} \tag{20.10}$$

и граничному условию (20.9) на контуре C. Поставленная таким образом задача об определении функции $w(x, y)$ простой заменой искомой функции

$$w(x, y) = \psi(x, y) - \frac{i}{4\mu}(x^2 + y^2) \tag{20.11}$$

сводится к задаче Дирихле об определении гармонической функции $\psi(x, y)$ в области Σ, ограниченной контуром C. Действительно, подставив (20.11) в уравнение Пуассона (20.10), видим, что функция $\psi(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \tag{20.12}$$

и, согласно граничному условию (20.9) для w, получим, что функция ψ на C должна принимать значения

$$\psi = w_0 + \frac{i}{4\mu}(x^2 + y^2). \tag{20.13}$$

Очевидно, что на заданном контуре C функция ψ известна, когда скорость w_0 известна. Решение внутренней задачи Дирихле, а следовательно, и задачи об определении скорости $w(x, y)$ единственно.

Поставленная задача решена для многих контуров, например, для труб круглого, треугольного, прямоугольного, эллиптического поперечных сечений, для труб, поперечное сечение которых ограничено двумя концентрическими и неконцентрическими окружностями, и т. д.

По известным компонентам вектора скорости $\boldsymbol{v}(0, 0, w)$ можно легко вычислить компоненты тензора скоростей деформаций

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right).$$

В нашем случае, очевидно,

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0, \quad e_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Зная компоненты тензора скоростей деформаций, с помощью закона Навье — Стокса

$$p_{ij} = -pg_{ij} + \tau_{ij},$$

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}$$

легко вычислить компоненты тензора напряжений. В рассматриваемой задаче будем иметь

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{12} = 0, \quad \tau_{13} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{23} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (20.14)$$

Отсюда ясно, что τ_{ij} не зависят от z и что компоненты тензора вязких напряжений τ_{13} и τ_{23} вызваны градиентом скорости w.

Скорость движения жидкости w не зависит от z. Каждый элемент жидкости при установившемся движении будет двигаться с постоянной скоростью, без ускорения $d\boldsymbol{v}/dt = 0$, и поэтому сумма всех внешних сил, действующих на любой выделенный объем жидкости, будет равна нулю. Таким образом, силы вязких напряжений, действующие на границе каждого выделенного элемента жидкости, будут уравновешиваться силами давления, действующими на поверхности этого элемента.

Нетрудно убедиться, что рассматриваемое движение жидкости вихревое, несмотря на то, что линии тока являются прямыми; вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$ можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \boldsymbol{i} - \frac{\partial w}{\partial x} \boldsymbol{j} \right).$$

Решение задачи для неподвижной трубы круглого поперечного сечения

Пусть поперечное сечение неподвижной ($w_0 = 0$) трубы представляет собой круг радиуса a. Поместив начало координат в центр круга C, согласно (20.11) будем иметь

$$w(x, y) = \psi(x, y) - \frac{i}{4\mu} r^2,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. По условию (20.13) функция $\psi(x, y)$ на контуре C, т. е. при $r = \sqrt{x^2 + y^2} = a$, должна принимать постоянное значение, равное $ia^2/4\mu$.

Очевидно, что

$$\psi = \frac{ia^2}{4\mu}$$

будет представлять собой решение поставленной выше задачи Дирихле, так как постоянная величина $ia^2/4\mu$, как легко видеть, удовлетворяет и уравнению Лапласа, и граничному условию на окружности C.

Определив таким образом функцию ψ, для распределения скорости w по поперечному сечению круглой цилиндрической трубы получим формулу

$$w = \frac{i}{4\mu}(a^2 - r^2). \tag{20.15}$$

Профиль скоростей (20.15) в поперечном сечении круглой трубы представляет собой параболоид вращения.

Максимальная скорость достигается на оси трубы при $r = 0$, причем

$$w_{\max} = \frac{ia^2}{4\mu}. \tag{20.16}$$

Подсчитаем объемный расход жидкости Q, т. е. объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени. Имеем

$$Q = \int_0^a w 2\pi r\, dr = \frac{i\pi}{2\mu}\int_0^a (a^2 - r^2) r\, dr = \frac{i\pi a^4}{8\mu}. \tag{20.17}$$

Заметим, что расход Q сильно зависит от радиуса трубы a, он пропорционален радиусу a в четвертой степени.

Средняя скорость течения жидкости в круглой трубе будет равна

$$w_{\text{ср}} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{ia^2}{8\mu} = \frac{w_{\max}}{2}. \tag{20.18}$$

Общие свойства решения задачи в случае трубы произвольного поперечного сечения

Рассмотрим теперь аналогичную задачу об установившемся движении несжимаемой вязкой жидкости в трубе с произвольным фиксированным поперечным сечением. В этом случае определяющими параметрами течения несжимаемой вязкой жидкости в целом в неподвижной цилиндрической трубе, очевидно, будут

$$a,\ \mu,\ i, \tag{20.19}$$

где a — характерный линейный размер поперечного сечения. Плотность ρ в систему определяющих параметров включать не требуется, так как в рассматриваемом течении ускорение жидкости равно нулю и, следовательно, ее инерционные свойства несущественны. Из определяющих параметров (20.19) нельзя составить безразмерной комбинации, поэтому на основании теории размерности для трубы произвольного поперечного сечения получаются следующие формулы:

$$w_{\max} = k_1 \frac{ia^2}{\mu}, \quad Q = k_2 \frac{ia^4}{\mu}, \quad w_{\text{ср}} = k_3 \frac{ia^2}{\mu}, \tag{20.20}$$

где k_1, k_2, k_3 — постоянные безразмерные коэффициенты, и ia^2/μ и ia^4/μ имеют соответственно размерности скорости и объемного расхода. Таким образом, максимальная скорость, расход и средняя скорость зависят от i, a и μ в случае трубы произвольного поперечного сечения, так же как и в случае круглой трубы. Для трубы круглого поперечного сечения, как видно из приведенного выше решения, имеем

$$k_1 = \frac{1}{4}, \quad k_2 = \frac{\pi}{4}, \quad k_3 = \frac{1}{8}.$$

Для определения постоянных k_1, k_2, k_3 в других случаях необходимы либо теоретические расчеты, либо данные опытов.

Сила, действующая на участок трубы круглого поперечного сечения

Вычислим силу R, действующую со стороны жидкости на участок длины l трубы круглого поперечного сечения. С одной стороны, из уравнения количества движения для жидкого цилиндра радиуса a и длины l будем иметь

$$\boldsymbol{R} = (p_1 - p_2)\pi a^2, \tag{20.21}$$

где p_1 и p_2 — давления в сечениях трубы, отстоящих друг от друга на расстоянии l (см. рис. 86). С другой стороны, касательное напряжение, действующее со стороны жидкости на стенку, можно вычислить по закону Навье — Стокса

$$\tau = -\mu \frac{\partial w}{\partial r},$$

откуда по (20.15) при $r = a$ будем иметь

$$\tau = \frac{ia}{2} = \tau_0, \tag{20.22}$$

т. е. касательное напряжение на стенках трубы постоянно, и сила сопротивления R будет равна

$$R = 2\pi a l \tau_0. \tag{20.23}$$

Коэффициент трения

Коэффициентом трения c_f называется отношение силы R к скоростному напору $\rho w_{\text{ср}}^2/2$ и к некоторой характерной площади S

$$c_f = \frac{R}{\frac{\rho w_{\text{ср}}^2}{2} S}.$$

Если за S принять площадь участка боковой поверхности трубы, на которую рассчитывается сопротивление, то в случае

круглой трубы для c_f по (20.21) и (20.23) получим

$$c_f = \frac{2\tau_0}{\rho w_{ср}^2} = \frac{ia}{\rho w_{ср}^2}$$

или, с помощью (20.18), придем к формуле

$$c_f = \frac{8\mu}{\rho a w_{ср}} = \frac{16}{R}, \qquad (20.24)$$

где $R = (dw_{ср})/(\mu/\rho)$ — число Рейнольдса, а $d = 2a$ — диаметр трубы.

Рассмотренное течение жидкости было впервые изучено Пуазейлем и Гагеном в середине прошлого столетия. На практике оно в основном осуществляется только в случае течений при малых числах Рейнольдса и особенно важно для исследования течений в трубах малого диаметра — капиллярах.

§ 21. Турбулентные движения жидкости

Опыт Рейнольдса

Рассмотрим следующий классический опыт. Из большого бака (рис. 87) через длинную стеклянную трубу круглого поперечного сечения под действием перепада давлений $p_1 - p_{атм} > 0$ вытекает некоторая жидкость. Из воронки A в текущую жидкость попадает тонкая струйка той же, но подкрашенной жидкости. Расход вытекающей жидкости можно изменять за счет поднятия

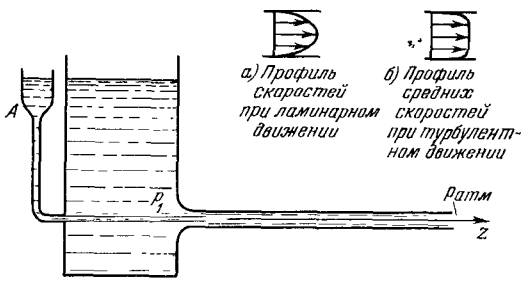


Рис. 87. Опыт Рейнольдса.

или опускания уровня жидкости в баке, или за счет удлинения основной трубы (при этом изменяется градиент давлений i).

Определяя расход вытекающей из трубы жидкости и зная радиус трубы, можно, очевидно, вычислить среднюю скорость $w_{ср}$ течения жидкости по трубе. Наблюдая за течением жидкости в трубе, мы увидим, что при малых скоростях течения $w_{ср}$ под-

крашенная жидкость тонкой струйкой протянется по всей трубе, течение жидкости в трубе будет спокойным, слоистым и будет хорошо соответствовать рассмотренному выше решению Пуазейля.

Увеличивая скорость $w_{ср}$, мы заметим, что, начиная, с некоторого значения скорости, струйка подкрашенной жидкости начнет размываться, жидкость во всей трубе окрасится, т. е. у частиц появятся составляющие скорости u и v, перпендикулярные к оси трубы; возникнет движение жидкости с перемешиванием в поперечном направлении.

Подсоединив к баку трубу большего диаметра, чем первая, и проведя тот же опыт (значение соответствующего перепада давлений сохраняется), мы установим, что при малых скоростях в трубе опять будет слоистое течение, которое потом также нарушится, и начнется перемешивание окрашенной и неокрашенной жидкости. Однако, во втором случае перемешивание жидкости наступит при меньшей, чем в первом случае, скорости $w_{ср}$. Повторив опыт с первой трубой на другой жидкости, имеющей больший, чем первая, кинематический коэффициент вязкости $\nu = \mu/\rho$, заметим, что перемешивание жидкости в трубе наступит при большей, чем в первом случае, средней скорости течения жидкости $w_{ср}$ в трубе.

Критическое число Рейнольдса. Ламинарные и турбулентные течения

Серия подобных экспериментов позволяет установить, что нарушение режима слоистого течения происходит во всех экспериментах с различными средами (с водой, воздухом, маслом, нефтью и т. д.) при одном и том же значении числа Рейнольдса $R = w_{ср} r/\nu$ (r — радиус трубы), которое называется критическим числом Рейнольдса и обозначается через $R_{кр}$.

При $R < R_{кр}$ подкрашенная струйка жидкости не размывается и мы имеем слоистое течение, а при $R > R_{кр}$ вся жидкость в трубе быстро окрашивается, т. е. течение перестает быть слоистым. Для круглых труб в обычных условиях критическое число Рейнольдса имеет порядок 1200—1400.

Спокойные упорядоченные слоистые течения жидкости, без интенсивного нерегулярного перемешивания поперек направления основного движения называются ламинарными. Беспорядочные, нерегулярные, неустановившиеся течения, при которых частицы жидкости, кроме скорости основного среднего направленного движения, имеют еще и беспорядочно отклоняющиеся от нее скорости, называются турбулентными. В описанном выше опыте ламинарное течение при $R = R_{кр}$ переходит в турбулентное. Вполне естественно, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при определенном числе Рейнольдса, так как в качестве определяющих параметров движения в

целом вязкой жидкости в трубе можно взять параметры:

$$r, \quad \mu, \quad \rho, \quad w_{ср},$$

из которых можно составить только одну безразмерную комбинацию — число Рейнольдса. Поэтому эта безразмерная комбинация является основной характеристикой режима движения и критерием подобия рассматриваемых течений вязкой жидкости. Турбулентные течения имеют место не только в трубах. Многие течения, встречающиеся в природе и в технических приложениях, являются турбулентными. Типичными примерами турбулентных течений могут служить движение воздуха в атмосфере, движение жидкостей и газов в гидравлических и газовых машинах и, в частности, в аэродинамических трубах, движение воды в водопроводе, нефти в нефтепроводах, движение воды в реках, в пограничных слоях на телах больших масштабов — на поверхности самолетов, кораблей и т. п. В последнее время проявляется большой интерес к турбулентным движениям плазмы в различного рода лабораторных и технических устройствах, к турбулентным движениям в астрофизике — в космических облаках и звездах и т. д.

Опыт и общая теория показывают, что среднее давление вдоль оси неподвижной трубы как при ламинарном, так и при турбулентном движении распределено по линейному закону. Рассмотренное в предыдущем параграфе течение жидкости с параболическим профилем распределения скоростей по сечению круглой трубы имеет место только при ламинарных течениях; при турбулентных течениях профиль распределения скоростей становится менее вытянутым, благодаря перемешиванию и обмену количеством движения поперек трубы средняя скорость w оказывается почти постоянной по всему сечению трубы и только в узком слое около стенок трубы, благодаря прилипанию, скорость резко падает до нуля (см. рис. 87, *б*).

Об устойчивости и неустойчивости ламинарных течений в трубе

При числах Рейнольдса, значительно меньших $R_{кр}$, ламинарные течения не чувствительны к небольшим возмущениям. Ламинарный режим течения сохраняется (не переходит в турбулентный) при наличии небольших внешних вибраций, шероховатостей внутренней поверхности трубы, недостаточно плавного входа из бака в трубу и т. д. При значениях числа Рейнольдса, близких к $R_{кр}$, ламинарные течения весьма чувствительны к влиянию такого рода факторов. Существование ламинарного режима можно затянуть, т. е. добиться того, чтобы течение было ламинарным при бóльших, чем 1400, числах Рейнольдса, избегая внешних вибраций, используя очень гладкие трубы, обеспечивая спокойствие жидкости в баке и организуя очень плавный

вход в трубу. Если принимать все эти меры предосторожности, режим ламинарного течения удается затянуть до чисел Рейнольдса порядка 20 000. Таким образом, мы приходим к идее о возможной неустойчивости ламинарного течения в трубе и к мысли об объяснении возникновения турбулентного движения как результата неустойчивости течения Гагена — Пуазейля. Этот вопрос является предметом интенсивного изучения уже более ста лет, и до сих пор в этой области появляются новые интересные работы. Большинство работ посвящено исследованию устойчивости течения Гагена — Пуазейля в бесконечно длинных трубах. Течение является устойчивым, если малые возмущения с течением времени затухают, и неустойчивым, если эти возмущения с течением времени нарастают. Однако более подробный анализ показывает, что бесконечная длина трубы очень существенна в этой теории. Развитие неустойчивости течения Гагена — Пуазейля без учета условий на границах конечной трубы может проявиться только в нереально длинных трубах. Поэтому и в связи с тем, что опыт указывает на существование достаточно большого (до $R = 20\,000$) запаса устойчивости, тесно связанного со специальными устройствами плавного входа в трубу, наиболее интересны и, видимо, перспективны те работы, в которых рассматривается устойчивость течения Гагена — Пуазейля в конечных трубах с учетом условий во входном и выходном сечениях трубы. Постановка и исследование таких задач гораздо труднее постановки и исследования задач об устойчивости в бесконечно длинных трубах, так как зависимость возмущений от времени в конечной трубе существенно зависит от вида и комбинации условий в конце и в начале трубы в связи с тем, что, распространяясь по трубе, возмущения подвергаются влиянию этих условий, происходит отражение возмущений на концах трубы и возникает взаимодействие условий на концах трубы.

О способах уменьшения коэффициента трения

Затягивание ламинарного режима течения до больших значений числа Рейнольдса имеет большое практическое значение. Опыт и теория показывают, что коэффициент трения, характеризующий сопротивление вязкого трения на поверхности тела при движении тела в жидкости, при одном и том же числе Рейнольдса значительно меньше при ламинарном пограничном слое (см. § 22), чем при турбулентном. В связи с этим предпринимается множество исследований для разработки мер по затягиванию ламинарного пограничного слоя и получения таким образом большого выигрыша в снижении сопротивления.

Увеличение гладкости поверхности тела до зеркальной способствует затягиванию ламинарного режима обтекания; при турбулентном обтекании повышение гладкости также приводит к снижению сопротивления. Затягивание ламинарного течения

можно обеспечивать с помощью соответствующего отсоса жидкости из пограничного слоя внутрь тела через специальные щели или поры.

Экспериментально было установлено, что введением в движущуюся вблизи тела жидкость весьма малых (до сотых долей процента) количеств специальных полимерных веществ (присадок) можно значительно повлиять на движение жидкости в пристеночном слое и уменьшить сопротивление трения на стенках трубы. Добавление присадок в столь малых количествах фактически не изменяет плотности и вязкости жидкости и не сказывается заметно на распределении скорости в ламинарном движении при малых значениях чисел Рейнольдса, но может влиять на свойства турбулентного движения вблизи обтекаемых стенок. Поэтому ясно, что в этом случае принятая до сих пор теория движения вязкой жидкости Навье — Стокса нуждается в существенных видоизменениях. Можно вполне определенно сказать, что в некоторых областях при турбулентных движениях могут проявиться некоторые свойства среды, которые несущественны для описания ламинарных движений.

О моделях сплошной среды для описания турбулентных движений

Турбулентные движения характеризуются тем, что поле истинных скоростей частиц жидкости, которая рассматривается как сплошная среда-континуум, имеет нерегулярный пульсационный характер, является неустановившимся и напоминает хаотическое поле скоростей отдельных молекул, из которых состоят тела. Траектории частиц жидкости при турбулентном движении в высшей степени извилисты. Точные измерения указывают на то, что изменения всех параметров течения при турбулентном движении во времени имеют вид, изображений на рис. 88, где для примера дано характерное для турбулентных течений изменение плотности в данной точке x, y, z с течением времени t. На основное изменение плотности (на рисунке — плавная пунктирная линия) накладываются нерегулярные пульсации большой частоты. Подобные изменения плотности могут также наблюдаться при некоторых движениях в твердых телах, сейсмографы регистрируют такого рода кривые при распространении колебаний в земной коре.

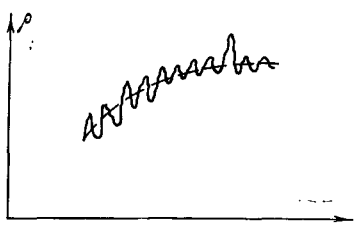


Рис. 88. Характерное для турбулентных течений изменение плотности с течением времени в определенной точке пространства.

В случае турбулентного режима течения изучать истинные движения частиц жидкости весьма сложно, да, вообще говоря, и

не нужно. Для описания движения газа как совокупности подвижных молекул с большим успехом применяется макроскопическая точка зрения, во многих вопросах турбулентные течения жидкости также целесообразно изучать только в среднем. При исследовании турбулентных течений обычно вводят средние значения компонент скорости $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, давления $\overline{p}$, плотности $\overline{\rho}$, температуры $\overline{T}$ и других характеристик движения (черточки над буквами здесь и далее в этом параграфе обозначают осреднение). Для определения средних характеристик движения можно ставить и решать математические задачи.

Таким образом, в случае турбулентных течений сложное движение континуума, моделирующего дискретную среду, вторично осредняется и при этом возникают проблемы составления полной системы уравнений для определения средних характеристик движения и проблемы изыскания способов экспериментального измерения осредненных характеристик движения. В теории турбулентности, в противоположность ранее рассмотренным разделам гидромеханики, нет и, видимо, не может быть единого подхода к исследованию всевозможных задач; для изучения различных классов движений жидкости предложены различные теории турбулентности. В настоящее время разработаны различающиеся между собой теории турбулентных течений в трубах, в атмосфере, в спутной струе реактивного двигателя и во многих других случаях.

Способы осреднения

Практика построения моделей для изучения турбулентных движений показывает, что способы введения средних характеристик движения, вообще говоря, несущественны для составления полной системы уравнений теорий турбулентности, но они являются главной основой для разработки методов экспериментальных измерений различных средних величин, проведение которых необходимо для сравнения результатов предложенной теории турбулентности с опытными данными.

Укажем некоторые возможные способы осреднения истинных характеристик движения. Пусть $A(x, y, z, t)$ — некоторая истинная характеристика турбулентного движения. В любой фиксированной точке пространства можно провести осреднение A по времени t. Тогда среднее значение $\overline{A}$ будет равно

$$\overline{A} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A\, dt,$$

где промежуток времени T достаточно велик по отношению ко времени отдельных пульсаций и мал по отношению ко времени заметного изменения средних характеристик (осредненное движение может быть нестационарным).

С другой стороны, в определенный момент времени t осреднение A можно провести по объему, тогда

$$\bar{A} = \frac{1}{V} \int_{V} A \, d\tau,$$

причем объем V должен удовлетворять условиям, аналогичным условиям на промежуток времени T. Можно провести осреднение по времени и по объему V одновременно.

Указанные выше осреднения по времени и по объему возможно проводить с весом, когда среднее значение A определяется, например, следующим образом:

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A g(t) \, dt,$$

где $g(t)$ — некоторая заданная функция. В различных задачах при выборе V и T можно руководствоваться различными соображениями, но в имеющихся приложениях результат осреднения рассматривается как не зависящий от V и T.

В ряде случаев используются вероятностные способы осреднения, и среднее значение $\bar{A}$ часто определяется как математическое ожидание A.

После введения среднего значения $\bar{A}$ истинное значение A представляется в виде

$$A = \bar{A} + A',$$

где A' — пульсация A; среднее значение пульсаций равно нулю, $\bar{A}' = 0$.

Свойства осреднения

Потребуем, чтобы операции осреднения во всех случаях обладали следующими свойствами.

1) Среднее значение суммы равняется сумме средних значений

$$\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}.$$

2) Среднее значение производной от истинной характеристики турбулентного движения равняется производной от

среднего значения

$$\frac{\overline{\partial A}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x}.$$

3) Среднее значение произведения двух сомножителей, из которых только один испытывает турбулентные пульсации, равно произведению средних. В частности, $\overline{\overline{A}A'} = 0$. Среднее значение произведения двух пульсирующих величин не равняется произведению средних

$$\overline{AB} \neq \overline{A}\,\overline{B},$$

а равняется сумме произведения средних величин и среднего значения произведений пульсаций этих величин

$$\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A'B'}.$$

Заметим, что при определении средних значений с помощью интегрирования по времени или по пространству перечисленные здесь свойства осреднения выполняются лишь приближенно.

Об использовании различных способов осреднения

Пусть проведено осреднение скорости $u = \bar{u} + u'$. Среднее значение u^2 не равняется квадрату среднего значения u:

$$\overline{u^2} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2}.$$

Можно назвать средним значением u^2 макроскопическую величину $\widetilde{u^2}$, введенную, например, по формуле

$$\widetilde{u^2} = \overline{u}^2.$$

Для истинных значений u^2 в этом случае можно написать

$$u^2 = \overline{u}^2 + u^{2\prime} = \widetilde{u^2} + u^{2\prime\prime},$$

причем

$$\overline{u^{2\prime}} = 0, \quad \text{но} \quad \overline{u^{2\prime\prime}} \neq 0.$$

Если для следующего ряда встречающихся в механике жидкости величин ρ, u, v, w, p, T, U, E, dA и т. д. ввести средние одинаковым способом, то характеристики движения таким образом осредненного континуума не будут удовлетворять основным законам сохранения и уравнениям состояния, удовлетворяющимся для истинных движений.

Действительно, если, например, при изучении турбулентного движения совершенного газа мы осредним p подобно ρ и T, то

$$\overline{p} = \overline{\rho R T} = \overline{\rho} R \overline{T} + \overline{\rho' T'} R,$$

и уравнение Клапейрона из-за наличия члена $\overline{\rho' T' R}$ не будет выполняться для средних величин. Если же нам более удобно сохранить уравнение Клапейрона, то для осреднения p можно избрать другой способ, ввести $\widetilde{p}$ так, чтобы

$$\widetilde{p} = \overline{\rho} R \overline{T},$$

и тогда $p = \overline{p} + p' = \widetilde{p} + p''$, причем

$$\overline{p''} \neq 0.$$

В различных теориях турбулентности для определенного набора основных величин, например p, ρ, ρu_i, осреднения вводятся некоторым одинаковым способом, а способы осреднения других величин вводятся по соглашению так, чтобы удовлетворялись основные законы физики, как и при обычном определении этих величин для истинных движений.

Турбулентные движения несжимаемой жидкости

Рассмотрим турбулентные движения несжимаемой вязкой жидкости. Полная система уравнений движения в этом случае, как известно, состоит из уравнения неразрывности и уравнений импульса, которые в декартовой системе координат имеют вид

$$\frac{\partial v^k}{\partial x^k} = 0, \tag{21.1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} + \rho F_i, \tag{21.2}$$

где τ_i^k — компоненты тензора вязких напряжений. Для вязкой жидкости τ_{ij} зависят от e_{ij}, для изотропной линейной вязкой жидкости по закону Навье — Стокса

$$\tau_{ik} = 2\mu e_{ik}, \qquad e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right). \tag{21.3}$$

Для дальнейшего мы не будем фиксировать закон зависимости τ_{ik} от $e_{\alpha\beta}$, заметим только, что в общем случае τ_{ik} могут зависеть от производных $e_{\alpha\beta}$. Используя уравнение неразрывности (21.1) и условие $d\rho/dt = 0$, легко показать, что левую часть уравнений Навье — Стокса можно написать в виде

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v^k}{\partial x^k}. \tag{21.4}$$

При теоретических исследованиях турбулентных движений

исходят из предпосылки о справедливости уравнений (21.1), (21.2) для истинного неустановившегося пульсирующего движения. Однако ввиду крайней запутанности, извилистости и сложности траекторий частиц жидкости при турбулентном движении получение решений этих уравнений для турбулентных движений представляется собой громоздкую и сложную задачу. Ставится задача о разыскании функциональных соотношений между средними величинами.

Уравнения движения для средних величин получаются путем осреднения уравнений движения (21.1), (21.2) для величин, описывающих мгновенное состояние движения.

Осреднив уравнение неразрывности (21.1), на основании свойств операции осреднения легко получим уравнение неразрывности для осредненных величин

$$\frac{\partial \overline{v^k}}{\partial x^k} = 0; \tag{21.5}$$

оно имеет тот же вид, что и для истинных скоростей (21.1).

Осредним уравнения импульса, левую часть которых предварительно запишем в виде (21.4). Так как

$$\rho \overline{v_i v_k} = \rho \bar{v}_i \bar{v}_k + \rho \overline{v_i' v_k'} \tag{21.6}$$

(плотность ρ считается постоянной, одинаковой во всех точках), то, очевидно, получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}^k}{\partial x^k} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x^i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_i^k - \rho \overline{v_i' v'^k})}{\partial x^k} + \rho \bar{F}_i \tag{21.7}$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

которые называются *уравнениями Рейнольдса.*

Если связь τ_i^k и $e_{\alpha\beta}$ (и, возможно, производных $e_{\alpha\beta}$) линейная и $\mu = \text{const}$, то $\bar{\tau}_i^k$ выражаются через $\bar{e}_{\alpha\beta}$, так же как τ_i^k через $e_{\alpha\beta}$. Поэтому уравнения Рейнольдса (21.7) отличаются от уравнений импульса (21.2) для истинных движений только за счет членов вида

$$-\frac{\partial \rho \overline{v_i' v'^k}}{\partial x^k}.$$

Шесть различных величин

$$-\rho \overline{v_i' v'^k},$$

вошедших в уравнения Рейнольдса, называются *турбулентными*

напряжениями. Заметим, что истинные напряжения τ_{ij} в газе представляются такого же рода формулами через скорости молекул. Вид зависимости турбулентных напряжений от средних характеристик течения в различных классах задач может быть различным. Эти зависимости требуется устанавливать или постулировать на основании специальных гипотез или опытных данных.

Таким образом, ввиду нелинейности уравнений истинных движений, после их осреднения мы получаем большее, чем число уравнений, число неизвестных. Следовательно, для математического изучения осредненных турбулентных движений одних уравнений гидромеханики, достаточных для изучения истинных движений, недостаточно. Поэтому полное теоретическое исследование осредненных турбулентных движений возможно только на основании некоторых дополнительных законов или гипотез, справедливость которых может быть в конечном счете установлена только на опыте.

Содержание многих работ по исследованию турбулентных движений сводится к изучению справедливости различных простых и естественных гипотез о зависимости турбулентных напряжений от средних скоростей и их градиентов, которые позволяют поставить и решить теоретически основные частные задачи о турбулентном движении.

В настоящее время не существует общей математической постановки задачи о произвольных осредненных турбулентных движениях и вообще не выяснена возможность такой формулировки задачи.

Иногда по аналогии с законом Навье — Стокса (21.3) полагают, что

$$\tau^*_{ik} = \bar{\tau}_{ik} - \rho\overline{v'_i v'_k} = M_1 \bar{e}_{ik},$$

где $M_1 = \mu + M$, M — коэффициент турбулентной вязкости, который в противоположность коэффициенту молекулярной вязкости μ зависит от переменных параметров движения жидкости.

Отметим, что закон Навье — Стокса в случае турбулентных движений становится второстепенным, так как вместо гипотез о зависимости τ_{ij} от $e_{\alpha\beta}$ можно непосредственно выдвигать гипотезы о зависимости τ^*_{ij} от $\bar{e}_{\alpha\beta}$ и, таким образом, совсем не привлекать к рассмотрению закон Навье — Стокса. Это можно оправдать также тем, что законом Навье — Стокса, вообще говоря, не отражаются такие свойства жидкости, которые могут оказаться существенными в турбулентных потоках.

§ 22. Уравнения ламинарного пограничного слоя

Учет свойства вязкости жидкостей и газов ведет к повышению порядка дифференциальных уравнений движения и в связи с этим появляются добавочные краевые условия на границах объема движущейся среды. Типичными примерами таких условий являются условие полного прилипания жидкости или газа к подвижным телам или неподвижным граничным стенкам и условие непрерывности трех компонент вектора силы напряжения на поверхностях контакта двух сред.

При рассмотрении задачи об обтекании тел идеальной жидкостью условие обтекания сводится к равенству нормальных составляющих скоростей жидкости и тела на поверхности тела. На поверхности тела касательные составляющие скоростей тела и жидкости различны, поэтому в рамках идеальной жидкости вдоль поверхности тела возможно проскальзывание частиц жидкости относительно тела. Нетрудно видеть, что влияние вязкости на поле скоростей проявляется существенным образом за счет граничных условий, которые запрещают такое проскальзывание.

Это обстоятельство хорошо иллюстрировать на примере задачи о движении тела в несжимаемой жидкости. Легко видеть, что подробно изученные раньше поля скоростей и давлений, возникающие при решениях задач о потенциальном обтекании тел несжимаемой жидкостью, являются также точными решениями уравнений Навье — Стокса. Это очевидно непосредственно, так как для потенциальных движений несжимаемой жидкости верны равенства

$$\Delta\varphi = 0 \text{ и } \operatorname{grad}\Delta\varphi = \Delta\boldsymbol{v} = 0, \tag{22.1}$$

следовательно, для потенциальных движений несжимаемой жидкости $\mu\,\Delta\boldsymbol{v} = 0$, т. е. для таких движений уравнения Навье — Стокса точно совпадают с уравнениями Эйлера для движения идеальной жидкости.

Отсюда ясно, что при одинаковых движениях твердого тела в жидкости отличие поля скоростей вязкой жидкости от соответствующего поля скоростей идеальной жидкости существенно связано с условием прилипания, которое должно выполняться в вязкой жидкости.

Понятие о пограничном слое

Опыт и качественные теоретические соображения указывают, что в некоторых важных случаях на движение жидкости существенное влияние оказывает условие отсутствия проскальзывания жидкости только непосредственно вблизи самой границы, в тонком слое, окутывающем поверхность обтекаемого тела.

В связи с этим возникла теория тонкого пограничного слоя на границах вязкой жидкости — тонкого слоя, внутри которого нельзя пренебрегать вязкостью. В этой теории принимается, что имеется основной поток жидкости, которую можно рассматривать как идеальную, и имеется тонкий пограничный слой, внутри которого жидкость рассматривается как вязкая; на границе пограничного слоя эти два течения непрерывно сопрягаются. Существенно отметить сразу, что такое представление о структуре поля скоростей вязкой жидкости приемлемо во многих типичных классах задач, но в ряде случаев эта точка зрения не отвечает действительности. Подробное знакомство с теорией пограничного слоя позволяет более определенно разъяснить и выделить задачи, в которых эта теория перестает успешно действовать.

Представление о пограничном слое оказалось плодотворным по двум главным причинам. Во-первых, появилась возможность производить построение теории движения вязкой жидкости и газа на основе известных решений уравнений для идеальной жидкости и газа. Во-вторых, сложные уравнения Навье — Стокса в тонком пограничном слое оказалось возможным заменить более простыми уравнениями теории пограничного слоя.

Уравнения ламинарного пограничного слоя

Уравнения и основные понятия теории пограничного слоя были установлены в 1904 г. Л. Прандтлем.

В пограничном слое, так же как и при течении в трубе, режимы движения жидкостей или газов могут быть как ламинарными, так и турбулентными. При разных режимах течения основные характеристики движения жидкости и законы, управляющие ламинарным или осредненным турбулентным движением в пограничном слое, получаются резко отличающимися друг от друга. Ниже мы рассмотрим теорию ламинарного пограничного слоя.

Для получения уравнений теории пограничного слоя рассмотрим основную модельную задачу об обтекании несжимаемой вязкой жидкостью неподвижной тонкой пластинки, поставленной по скорости набегающего поступательного потока перед пластинкой (рис. 89).

Вывод уравнений движения в пограничном слое основан на оценках — гипотезах о порядке различных членов в уравнениях Навье — Стокса и пренебрежении малыми членами; сохраняются только конечные члены.

Для плоскопараллельного движения в плоскости xy имеем следующие уравнения [1]) движения вязкой несжимаемой

[1]) Под членами этих уравнений указаны их оценки по величине δ (толщина пограничного слоя). Справедливость этих оценок обсуждается ниже.

жидкости:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ \qquad 1 \qquad\quad 1\cdot 1 \qquad\quad \delta\,\dfrac{1}{\delta} \qquad\qquad\qquad\quad 1 \qquad\quad \dfrac{1}{\delta^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \\ \qquad \delta \qquad\quad 1\cdot\delta \qquad\quad \delta\cdot 1 \qquad\qquad\qquad\quad \delta \qquad\quad \dfrac{1}{\delta} \end{array}\right\} \qquad (22.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \qquad (22.3)$$

$$1 \qquad\quad 1$$

Пусть l — некоторый характерный размер, например длина пластинки. Обозначим через δ «толщину» пограничного слоя. По основному допущению примем, что на расстоянии δ по нормали от обтекаемой поверхности (пластинки) имеется «граница»

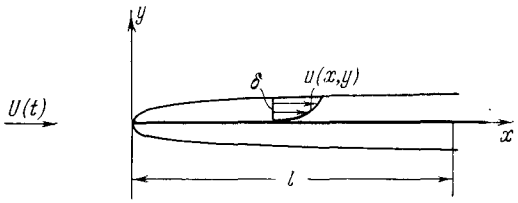


Рис. 89. Пограничный слой на обтекаемой пластинке.

пограничного слоя, на которой скорости жидкости извне и изнутри пограничного слоя практически совпадают (практическая малость разности скоростей в процентном или в некотором другом отношении определяется дополнительным условием).

Величина δ или, точнее, отношение $\frac{\delta}{l}$ принимается в качестве основной малой величины. Воспользуемся преобразованием:

$$x = l\xi, \quad y = \delta\eta \qquad (22.4)$$

и предположим, что в пограничном слое переменные ξ, η и x изменяются в конечных пределах, а интервал изменения переменной y имеет порядок δ. Дальше примем, что величины $U(t)$, $u(x, t)$, их производные по времени и производные $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$ внутри пограничного слоя и на его границе с основным потоком конечны.

Из равенств

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\delta}\frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

так как u и η изменяются в конечных пределах, следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2}. \tag{22.5}$$

Далее, из уравнения неразрывности (22.3) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = -\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \sim \delta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \sim \delta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \delta. \tag{22.6}$$

На основании этих оценок под каждым членом уравнений (22.2) и (22.3) указан порядок его величины.

Первое из уравнений (22.2) показывает, что при конечных l и U должно быть конечным ν/δ^2, в безразмерном виде должно быть

$$\frac{\delta^2}{l^2} \approx \frac{\nu}{Ul} \quad \text{или} \quad \delta \approx l\sqrt{\frac{\nu}{Ul}}. \tag{22.7}$$

Эти прикидочные оценки и послужили основой для упрощения уравнений Навье — Стокса в пограничном слое. После сохранения в (22.2) только конечных членов получаются следующие уравнения пограничного слоя:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad p = p(x, t). \end{aligned}\right\} \tag{22.8}$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение неразрывности (22.3). Уравнения (22.8) остаются нелинейными. Поперек пограничного слоя давление сохраняется постоянным и определяется значением на границе слоя в основном потоке, рассчитываемым из теории идеальной жидкости, следовательно, в уравнении (22.8) член $\partial p/\partial x$ можно считать известным.

В отличие от уравнений Навье — Стокса система уравнений (22.8) и (22.3) поддается решению в ряде важных случаев. При приближенных расчетах эта система применяется не только для исследования движения в пограничном слое на плоской пластинке, но и для исследования движения в пограничном слое на криволинейных профилях. В общем случае принимается, что координата x представляет собой длину дуги вдоль профиля, а координата y измеряется по нормали к профилю. Зависимость $U(x, t)$, задающая скорость на внешней границе пограничного слоя, определяется из решения соответствующей задачи теории идеальной жидкости. Предложены уточнения уравнений (22.8) для учета криволинейности обтекаемых профилей и для

исследования пространственных задач. Более формальный математический вывод уравнений (22.8) с более определенной формулировкой соответствующих предположений можно дать следующим способом. В уравнениях (22.2) и (22.3) сделаем следующее преобразование переменных:

$$\left.\begin{aligned} x &= lx_1, & u &= U_0 u_1, \\ y &= \sqrt{\frac{\nu l}{U_0}}\, y_1, & v &= \sqrt{\frac{\nu U_0}{l}}\, v_1, \end{aligned} \qquad t = \frac{l}{U_0} t_1, \quad p = U_0^2 p_1, \right\} \tag{22.9}$$

где l и U_0 — некоторые постоянные — характерные линейный размер и скорость. Выполнив это преобразование, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \\ &\frac{1}{\mathrm{R}}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2}, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \end{aligned} \right\} \tag{22.10}$$

где $\mathrm{R} = \dfrac{U_0 l}{\nu}$ — число Рейнольдса. Эти уравнения представляют собой точные уравнения Навье — Стокса, записанные в соответствующих безразмерных переменных.

Предположим теперь, что при $\mathrm{R} \to \infty$ все величины с индексом 1 в (22.9) и (22.10) сохраняют конечные значения. После перехода к пределу при $\mathrm{R} \to \infty$ из (22.10) получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \\ &0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y_1}, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{22.11}$$

Эти уравнения после обратного преобразования с помощью (22.9) переходят в уравнения (22.8) и (22.3). Таким образом, уравнения пограничного слоя можно рассматривать в некотором смысле как предельную форму уравнений Навье — Стокса, когда число Рейнольдса $\mathrm{R} = U_0 l/\nu$ стремится к бесконечности.

В задачах об обтекании профилей необходимо решать систему (22.11) со следующими граничными условиями: $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ при $y_1 = 0$ (условие прилипания на профиле) и $u_1 = U(x, t)/U_0$ при $y_1 = \infty$ (условие на внешней границе погра-

ничного слоя), причем внутри пограничного слоя $p_1(x, t)$ не зависит от y_1 и определяется из решения задачи о внешнем обтекании.

Задача о внешнем обтекании профиля идеальной жидкостью в первом приближении может быть решена без учета наличия пограничного слоя, так как для толщины пограничного слоя по (22.7) имеем

$$\frac{\delta}{l} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}} \to 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{R} \to \infty,$$

т. е. толщина пограничного слоя получается очень малой при больших значениях числа Рейнольдса, характерных для многих практически важных задач.

§ 23. Пограничный слой при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластинки. Задача Блазиуса

Дадим теперь полное решение задачи об установившемся пограничном слое на абсолютно гладкой тонкой неподвижной пластинке — полуплоскости $y = 0$, $x \geqslant 0$ (см. рис. 89), когда скорость U_0 набегающего потока постоянна и направлена по оси x (по пластинке).

В этом случае уравнения (22.8) и (22.3) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{23.1}$$

так как движение установившееся, а внешний поток представляет собой поступательное движение с постоянным давлением p_0.

На пластинке имеем условие прилипания

$$\text{при } y = 0,\ x \geqslant 0 \quad u = v = 0, \tag{23.2}$$

на внешней границе пограничного слоя

$$\text{при } y = \infty \quad u = U_0. \tag{23.3}$$

Автомодельность решения

Так как в рассматриваемой задаче нет характерного линейного размера, то система размерных и безразмерных определяющих параметров имеет вид

$$U_0, \quad \nu, \quad x, \quad y \quad \text{и} \quad \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}. \tag{23.4}$$

Поэтому искомые функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ можно представить через безразмерные функции f и Φ вида

$$u = U_0 f\left(\frac{y}{x},\ \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right),\qquad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}\,\Phi\left(\frac{y}{x},\ \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right). \tag{23.5}$$

Если теперь в уравнениях (23.1) и в граничных условиях (23.2) и (23.3) совершить замену переменных:

$$x = lx_1,\quad y = \sqrt{\frac{\nu l}{U_0}}\,y_1,\quad u = U_0 u_1,\quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{l}}\,v_1, \tag{23.6}$$

то получим

$$\left.\begin{aligned} &u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2},\\ &\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0\\ &\text{и при } x_1 \geqslant 0,\ y_1 = 0 \quad u_1 = v_1 = 0,\\ &\text{а при } y_1 = \infty \qquad\quad u_1 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{23.7}$$

Уравнения и граничные условия для функций $u_1(x_1, y_1)$ и $v_1(x_1, y_1)$ не содержат параметра l, поэтому решение системы (23.7) не должно зависеть от l. Из (23.5) получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u}{U_0} = u_1 = f\left(\frac{y_1}{x_1\sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}}},\ \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right) = f\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right),\\ &\frac{v}{\sqrt{\frac{\nu U_0}{l}}} = v_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1}}\,\Phi\left(\frac{y_1}{x_1\sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}}},\ \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x_1}}\,\Phi\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{23.8}$$

так как аргумент $y_1 \Big/ \left(x_1\sqrt{\frac{U_0 l}{\nu}}\right)$ содержит параметр l, от которого решение не зависит.

Из формул (23.8) вытекает, что уравнения с частными производными (23.7) приводятся в данной задаче к обыкновенным уравнениям с одной независимой переменной

$$\xi = \frac{y_1}{\sqrt{x_1}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}. \tag{23.9}$$

Решение задачи Блязиуса В общем случае из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0$$

следует, что для плоскопараллельных движений несжимаемой жидкости существует (см. гл. VII, т. 1) функция тока $\psi(x_1, y_1)$ такая, что

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \quad \text{и} \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

Полагая

$$f(\xi) = \varphi'_1(\xi) = \varphi'\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right),$$

найдем

$$\psi = \sqrt{x_1}\varphi\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right).$$

Таким образом, на основании уравнения неразрывности получим, что компоненты u_1 и v_1 выражаются через функцию $\varphi(\xi)$ в виде

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varphi'(\xi), \\ v_1 &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_1}}[\xi\varphi'(\xi) - \varphi(\xi)]. \end{aligned}\right\} \tag{23.10}$$

Подставляя (23.10) в уравнение движения, после простых преобразований получим

$$2\varphi'''(\xi) + \varphi''(\xi)\varphi(\xi) = 0. \tag{23.11}$$

Для получения решения этого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка необходимо найти функцию $\varphi(\xi)$ в интервале $0 < \xi < \infty$, удовлетворяющую уравнениям (23.11) и на концах интервала $0 < \xi < \infty$ следующим граничным условиям, вытекающим из (23.7):

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'(\infty) = 1. \tag{23.12}$$

Для определения функции $\varphi(\xi)$ требуется решить краевую задачу. Эту краевую задачу легко свести к задаче Коши с данными на одном конце, если воспользоваться следующим общим свойством решений уравнения (23.11).

Пусть $\varphi_0(\xi)$ — некоторое решение уравнения (23.11); непосредственной проверкой легко убедиться, что функция

$$\varphi(\xi) = \alpha^{1/3}\varphi_0(\alpha^{1/3}\xi) \tag{23.13}$$

также является решением уравнения (23.11) при любом постоянном α.

Определим теперь функцию $\varphi_0(\xi)$ как решение следующей задачи Коши для уравнения (23.11):

$$\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \quad \varphi_0''(0) = 1. \tag{23.14}$$

С помощью уравнения (23.11) и данных Коши (23.14) функцию $\varphi_0(\xi)$ нетрудно рассчитать известными численными методами для любых $\xi > 0$. По данным расчета можно определить предел

$$\lim_{\xi\to\infty} \varphi'(\xi) = k \neq 1, \quad \text{причем} \quad k^{3/2} = \frac{1}{0{,}332}. \tag{23.15}$$

Определим теперь в формуле (23.13) постоянную α таким образом, чтобы удовлетворялось условие (23.12) при $\xi \to \infty$. Имеем

$$\varphi'(\xi) = \alpha^{2/3}\varphi_0'(\eta), \qquad \eta = \alpha^{1/3}\xi$$

и

$$\varphi''(\xi) = \alpha\varphi_0''(\eta), \qquad \varphi''(0) = \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\xi\to\infty} \varphi'(\xi) = \alpha^{2/3} \lim_{\eta\to\infty} \varphi_0'(\eta) = \alpha^{2/3}k.$$

Очевидно, что для получения искомого решения для функции $\varphi(\xi)$ с помощью формулы (23.13) достаточно положить $\alpha^{2/3}k = 1$ или на основании (23.15)

$$\alpha = \frac{1}{k^{3/2}} = 0{,}332. \tag{23.16}$$

Следовательно, полное решение представляется формулами (23.10) и (23.13) при $\varphi_0(\xi)$, определенной из численного решения задачи Коши (23.14).

Сопротивление трения

Вычислим теперь касательную составляющую τ напряжения вязкого трения на поверхности пластинки. По закону Навье — Стокса имеем

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu U_0 \left(\frac{\partial \varphi'\left(\dfrac{y}{\sqrt{\dfrac{\nu x}{U_0}}}\right)}{\partial y}\right)_{y=0} = \alpha\sqrt{\frac{\rho\mu U_0^3}{x}} =$$

$$= 0{,}332\sqrt{\frac{\rho\mu U_0^3}{x}}. \tag{23.17}$$

Напряжение трения зависит от координаты x и падает с ростом x,

Полное сопротивление одной стороны прямоугольного участка пластинки ширины b и длины по потоку L представится формулой

$$R = b\int_0^L \tau dx = 0{,}664b\sqrt{\rho\mu L U_0^3}.$$

Отсюда для коэффициента трения получим

$$c_f = \frac{2R}{\rho b L U_0^2} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \qquad (23.18)$$

где $\mathrm{R} = U_0 L/\nu$.

Таким образом, в этом случае полное сопротивление пропорционально скорости обтекания U_0 в степени 3/2, а коэффициент трения обратно пропорционален корню квадратному из числа Рейнольдса.

Напомним, что сила сопротивления движению тел с постоянной поступательной скоростью в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса пропорциональна *первой* степени скорости, а в идеальной жидкости, когда парадокс Даламбера не имеет места, пропорциональна *квадрату* скорости.

Толщина пограничного слоя; толщина вытеснения

Согласно (23.10) распределение продольной компоненты скорости в пограничном слое определяется формулой

$$\frac{u}{U_0} = \varphi'\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right)$$

и представляется кривой, вид которой изображен на рис. 89. Если толщину пограничного слоя $y = \delta$ определить, например, из условия $u/U_0 = 0{,}995$, т. е.

$$U_0 - u \approx 0{,}005\ U_0 \approx 0{,}5\%\ U_0,$$

то величину δ можно вычислить из уравнения

$$0{,}995 = \varphi'\left(\frac{\delta}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right) \qquad (23.19)$$

Из расчета функции $\varphi'(\xi)$ и из (23.19) следует, что

$$\delta = 5{,}16\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}. \qquad (23.20)$$

При большой скорости U_0, малой вязкости $(\mu/\rho) = \nu$ и умеренных значениях координаты x толщина пограничного слоя δ получается весьма малой.

При $x > 0$ и больших $y > 0$ вдали от пластинки за счет торможения жидкости в пограничном слое линии тока смещаются на величину δ^* (рис. 90), определяемую формулой

$$\delta^* U_0 = \int_0^\infty (U_0 - u)\, dy = U_0 \int_0^\infty [1 - \varphi'(\xi)]\, d\xi \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} =$$

$$= U_0 \cdot 1{,}72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}.$$

Отсюда

$$\delta^* = 1{,}72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \approx \frac{\delta}{3}.$$

Аналогичным образом толщину пограничного слоя δ и толщину вытеснения δ^* можно определять при решении других

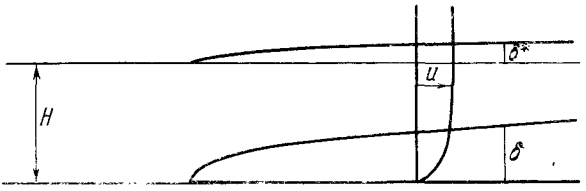


Рис. 90. К определению толщины пограничного слоя δ и толщины вытеснения δ^* ($H \to \infty$).

задач об обтекании профилей с заданным переменным распределением давлений на внешней границе пограничного слоя. В некоторых случаях дальнейшие уточнения распределения давлений по обтекаемому телу во внешнем обтекании тела идеальной жидкостью можно получать для тел, утолщенных по нормалям на величину толщины вытеснения δ^*.

§ 24. Некоторые важные эффекты движения вязкой жидкости в пограничном слое

В плоских задачах при обтекании профилей давление по обтекаемому профилю, равное давлению на внешней границе пограничного слоя, переменно, и поэтому в уравнениях (22.8) продольный градиент давления по профилю (производная $\partial p/\partial x$) отличен от нуля.

Точка отрыва пограничного слоя

В точке минимума давления на профиле $\partial p/\partial x = 0$, при уменьшении давления от передней критической точки до точки минимума давления $\partial p/\partial x < 0$, за точкой минимума давления $\partial p/\partial x > 0$.

На поверхности обтекаемого профиля на основании условий прилипания $u = v = 0$ из уравнения (22.8) при установившемся движении получается

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{24.1}$$

кроме этого, для напряжения поверхностной силы вязкого трения на поверхности обтекаемого профиля имеем

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \tag{24.2}$$

Важной характеристикой пограничного слоя является кривая распределения продольных скоростей. На рис. 91 показаны различные виды кривых распределения продольных скоростей

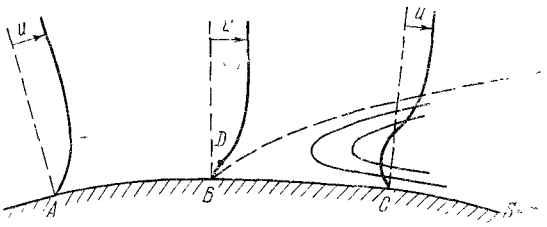


Рис. 91. В точке B имеем $\tau = 0$, в этой точке возникает отрыв пограничного слоя. Точка D на кривой профиля скоростей является точкой перегиба.

в пограничном слое при $\partial p/\partial x \neq 0$. В точке B касательная к кривой $u\,(y)$ вертикальна, поэтому в ней $\partial u/\partial y = 0$ и, следовательно, $\tau = 0$. Слева от точки B имеем $\tau > 0$, справа $\tau < 0$. В точке B возникает отрыв пограничного слоя от поверхности профиля. За точкой B в пограничном слое получается возвратное движение жидкости.

На кривой $u\,(y)$ для сечения, проходящего через точку B, обязательно имеется точка перегиба D, поэтому в точке B имеем $\partial^2 u/\partial y^2 > 0$ и по (24.1) $\partial p/\partial x > 0$. Следовательно, точка отрыва B должна лежать за точкой минимума давления, в которой $\tau > 0$ и $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$. Если давление вдоль профиля монотонно падает, то отрыв пограничного слоя не возникает. Отрыв пограничного слоя сопровождается резким увеличением толщины пограничного слоя и может привести к существенной перестройке основного внешнего течения жидкости, которое в этом случае становится существенно зависящим от свойств вязкости жидкости.

О переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный

Движение жидкости и газа в пограничном слое на поверхности обтекаемых тел, как и движение жидкости в трубе, может быть ламинарным и турбулентным. При больших значениях числа Рейнольдса в передней части обтекаемой поверхности тела развивается ламинарный пограничный слой, который на некотором расстоянии от переднего края тела переходит в турбулентный пограничный слой. Так же как и при движении жидкости в трубах, имеются характерные признаки — характерные значения числа Рейнольдса, при которых в пограничном слое ламинарное движение сменяется турбулентным. Явление перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный имеет много общего с явлением перехода ламинарных движений в трубах в турбулентные.

Область перехода или точка перехода характеризуется возникновением в пограничном слое интенсивных пульсаций скорости, давления, плотности (в сжимаемых средах) и т. п. Распределения скоростей по сечению в ламинарном и в турбулентном пограничных слоях, вообще говоря, резко отличаются друг от друга. Так же как и при турбулентных движениях в трубах, в турбулентном пограничном слое происходит интенсивное перемешивание *макроскопических* частиц жидкости в поперечном направлении, за счет этого в турбулентном пограничном слое происходит выравнивание средних скоростей. Вместе с этим прилипание на обтекаемых стенках приводит к появлению более резких градиентов скоростей вблизи стенок, что вызывает резкое увеличение поверхностных сил трения и соответственно сопротивления трения.

При обтекании гладких поверхностей в турбулентном пограничном слое на обтекаемой поверхности возникает очень тонкий ламинарный подслой, в котором скорости жидкости вообще невелики, пульсации скорости практически отсутствуют, но имеются очень большие поперечные градиенты скорости, вызывающие большие значения напряжений силы трения $\tau = \mu\,(\partial u/\partial y)$.

Теоретическое исследование и расчет турбулентного пограничного слоя, так же как и расчет турбулентных движений жидкостей в трубах, основаны на эмпирических данных о законах распределения средних скоростей и других характеристик и на специальных интегральных соотношениях, устанавливаемых с помощью различных законов сохранения.

О роли сопротивления трения

При движении в жидкостях и газах хорошо обтекаемых тел таких, как самолеты, корабли, подводные лодки и т. п., сопротивление, обусловленное вязким трением, составляет от 50 до 90% общего сопротивления. Поэтому теория и методы расчета пограничных слоев, так же как и способы влияния на

свойства течений в пограничных слоях, имеют очень большое практическое значение.

Сопротивление трения при турбулентном пограничном слое, как уже указывалось в § 21, сильно зависит от шероховатости обтекаемой поверхности, причем это сопротивление заметно уменьшается с уменьшением шероховатости (при устранении разного рода неровностей на обтекаемой поверхности: выступающих заклепок, сварочных швов, волнистости поверхности и т. п., т. е. в результате применения зеркально гладких обтекаемых поверхностей).

Особенно большой выигрыш достигается при затягивании ламинарного пограничного слоя, т. е. при устранении причин возмущений, переводящих ламинарный пограничный слой в турбулентный. С помощью осуществления различных специальных мер можно передвинуть точку перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный ниже по потоку вдоль профиля и таким путем существенно (иногда более чем в два раза) снизить сопротивление трения.

Затягивание существования ламинарного слоя («ламинаризация») пограничного слоя достигается различными способами. Вот примеры некоторых из них. Во-первых, применение специальных безотрывных форм обтекаемых поверхностей, обеспечивающих плавное распределение давлений. Заметим, что появление отрыва течения связано, вообще говоря, с немедленной турбулизацией пограничного слоя. Во-вторых, применение зеркально гладких обтекаемых поверхностей; наличие заметной шероховатости или различных выступов на обтекаемой поверхности вызывает преждевременную турбулизацию пограничного слоя. В-третьих, неравномерности и различные возмущения и, в частности, возмущения, вызванные различными вибрациями в набегающем потоке, сильно способствуют преждевременной потере устойчивости в ламинарном слое и его переходу в турбулентный пограничный слой; затягивания ламинарного слоя в некоторых случаях можно достигнуть с помощью отсоса заторможенных масс жидкости из пограничного слоя.

Выше был рассмотрен вопрос об отрыве ламинарного пограничного слоя. Возможен также отрыв турбулентного пограничного слоя; это явление, как и в случае ламинарного слоя, как правило, связано также с движением жидкости или газа против возрастающего давления (возрастание давления по потоку приводит к торможению потока).

О пограничном слое в газе

Наличие пограничных слоев, ламинарных или турбулентных, является характерной особенностью не только течения несжимаемой жидкости, но и течения газа. В газовых потоках поперек пограничного слоя происходят не только рез-

кие изменения скорости из-за прилипания на стенках, но и резкие изменения температуры, плотности, а в некоторых случаях и химического состава среды.

При больших температурах торможения и больших статических температурах в газовом потоке могут возникать различного рода физико-химические процессы, связанные с ионизацией, химическими реакциями, оплавлением и испарением поверхности обтекаемого тела, с диффузией и излучением. В этих случаях особенно важное значение имеют свойства теплообмена между телом и обтекающим потоком газа или жидкости. Все эти явления имеют большое значение в тонких пограничных слоях. Проблемы теплообмена и нагревания тел, движущихся в газе с большими скоростями, в значительной степени являются проблемами теории пограничного слоя.

§ 25. Определение поля скоростей по заданным вихрям и источникам

Напомним определение понятий объемной плотности источников $\varepsilon\ (x^1, x^2, x^3, t)$ и вихря $\omega\ (x^1, x^2, x^3, t)$ для поля скоростей $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{\vartheta}_i$, определяемого с помощью своих компонент $v^i\ (x^1, x^2, x^3, t)$, заданных в соответствующем базисе $\boldsymbol{\vartheta}_i$, как кусочно непрерывные дифференцируемые функции пространственных координат x^i и времени t в некоторой области $\mathcal{D}$ евклидова пространства. Имеем

$$\varepsilon = \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla_k v^k \tag{25.1}$$

и

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\vartheta}^1 & \boldsymbol{\vartheta}^2 & \boldsymbol{\vartheta}^3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \tag{25.2}$$

где $g = |\, g_{ij} \,|$, g_{ij} — компоненты метрического тензора. В декартовой системе координат $g = 1$ и $\boldsymbol{\vartheta}_i = \boldsymbol{\vartheta}^i$. В гл. II детально выяснен механический смысл инвариантных характеристик ε и ω. Для несжимаемой жидкости в отсутствии источников массы $\varepsilon = 0$, при $\omega \neq 0$ движение среды вихревое.

Об определении ε и ω при данном векторном поле

Если поле скоростей $\boldsymbol{v}$ известно, то с помощью операций дифференцирования легко вычислить ε и ω. Инвариантные характеристики ε и ω можно ввести для любого векторного поля, и вся последующая теория может относиться к любому векторному полю, а не только к полю скоростей.

Например, в случае стационарного электромагнитного поля из уравнений Максвелла (см. гл. VI, т. 1) для вектора магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$ имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = -4\pi \operatorname{div} \boldsymbol{M}, \tag{25.3}$$

где $\boldsymbol{j}$ — вектор электрического тока, а скаляр — $4\pi \operatorname{div} \boldsymbol{M}$ определяется вектором намагниченности $\boldsymbol{M}$; если намагниченность отсутствует или имеет место связь $\boldsymbol{M} = k_1 \boldsymbol{H}$ ($k_1 = \text{const}$), то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{25.4}$$

Для вектора электрической напряженности $\boldsymbol{E}$ стационарного электрического поля из уравнений Максвелла имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi (\rho_e - \operatorname{div} \boldsymbol{P}), \tag{25.5}$$

где $\boldsymbol{P}$ — вектор электрической поляризации, а ρ_e — плотность распределения зарядов. Если поляризация отсутствует или если $\boldsymbol{P} = k_2 \boldsymbol{E}$ ($k_2 = \text{const}$), то

$$(1 + 4\pi k_2) \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi \rho_e. \tag{25.6}$$

Задача определения векторного поля по заданным ε и ω

Ниже рассмотрим обратную задачу об определении векторного поля по заданной дивергенции и ротации искомого вектора. Многие теории в механике и физике вообще непосредственно связаны с предварительным заданием плотности источников и распределения вихрей при постановке задачи или эти характеристики поля определяются после разрешения вспомогательных уравнений. В связи с этим возникает важная проблема определения соответствующего векторного поля через величины ε и ω.

Дальше ради терминологических удобств будем говорить о поле скоростей $\boldsymbol{v}$, об объемных источниках ε и о поле вихрей ω для движения сплошной среды. Развиваемая ниже теория имеет кинематический характер и не связана непосредственно со свойствами среды. Динамические и физические свойства среды могут существенным образом проявиться при задании функций $\varepsilon(x, y, z, t)$ и $\omega(x, y, z, t)$ в зависимости от координат и, особенно, от времени t. Все полученные ниже формулы и выводы прилагаются в теориях различных векторных полей.

Прежде всего рассмотрим задачу об определении непрерывного поля скоростей $\boldsymbol{v}$ в безграничном пространстве, когда во всем пространстве задано скалярное поле ε и векторное поле ω. Время t в последующих выводах входит только как внешний параметр. По условию примем, что

$$\varepsilon \to 0 \quad \text{и} \quad \omega \to 0 \quad \text{при} \quad R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty, \tag{25.7}$$

т. е. ε и ω исчезают при удалении в бесконечность (x, y, z — декартовы координаты точек пространства). Будем для вектора v искать решение, исчезающее в бесконечности, т. е. удовлетворяющее условию

$$v \to 0 \quad \text{при} \quad R_1 \to \infty. \tag{25.8}$$

Единственность решения оставленной задачи

Нетрудно доказать, что поставленная задача может иметь только единственное решение. В самом деле, предположим, что имеются два решения $v_1(x, y, z)$ и $v_2(x, y, z)$. Покажем, что вектор $v = v_1 - v_2$ тождественно равен нулю, если $v \to 0$ при $R_1 \to \infty$. Для векторного поля v имеем

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} v = 0. \tag{25.9}$$

Из второго равенства (25.9) следует, что вектор v потенциальный и, следовательно, существует потенциал $\varphi(x, y, z)$

$$v = \operatorname{grad} \varphi.$$

Из равенства $\operatorname{div} v = 0$ следует

$$\Delta\varphi = 0, \quad \text{причем} \quad (\operatorname{grad}\varphi)_\infty = 0, \tag{25.10}$$

т. е. функция $\varphi(x, y, z)$ — регулярная гармоническая функция с градиентом, исчезающим в бесконечности. Рассмотрим сферу радиуса R_1 с центром в начале координат. Как показано в § 12, максимальная скорость потенциального потока $v_{\max}$ должна достигаться на границе области, занятой потоком; отсюда следует, что

$$\left[\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\right]_{\max}$$

для внутренности любой сферы достигается на ее поверхности, но так как $v \to 0$ при $R_1 \to \infty$, то отсюда следует, что всюду

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} = 0 \quad \text{или} \quad |\operatorname{grad}\varphi| = 0,$$

т. е. имеет место тождество $v \equiv 0$, что и доказывает единственность решения поставленной задачи.

Постановка задачи об определении поля скоростей по распределению источников

На основании доказанной единственности решения разделим основную задачу на две задачи. Первая задача — определить потенциальное (безвихревое) векторное поле скоростей при $\varepsilon \neq 0$ и $\omega = 0$; вторая — определить поле скоростей вихревого движения несжимаемой жидкости при $\varepsilon = 0$ и $\omega \neq 0$. Очевидно, что реше-

ние полной задачи можно представить в виде суммы решений первой и второй задач.

Рассмотрим первую задачу. Имеем

$$v = \operatorname{grad} \Phi \text{ и } \Delta\Phi = \varepsilon. \tag{25.11}$$

Построение решения сводится к отысканию потенциала $\Phi(x, y, z)$, удовлетворяющего уравнению Пуассона с заданной правой частью, равной $\varepsilon\ (x, y, z)$.

Для получения решения необходимо принять некоторые предположения о свойствах функции $\varepsilon\ (\xi, \eta, \zeta)$. Здесь и далее через ξ, η, ζ будем обозначать координаты точек, в которых задано распределение источников ε, а через x, y, z — координаты точек, в которых ищется потенциал Φ. Мы примем, что $\varepsilon(\xi,\eta,\zeta)$— кусочно гладкая функция, причем, начиная с некоторого достаточно большого значения $R = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = R_0$, выполняется неравенство

$$|\varepsilon| < \frac{k}{R^{2+\lambda}}, \tag{25.12}$$

где $k > 0$ и $0 < \lambda < 1$ — подходящие постоянные. В частности, неравенство (25.12) выполняется, когда ε отлично от нуля только внутри некоторой конечной области пространства.

О сходимости интеграла, представляющего решение

Так как ε имеет смысл объемной плотности расхода источников, то естественно искать потенциал $\Phi\ (x, y, z)$ в виде суммы потенциалов источников, расположенных в точках ξ, η, ζ. Положим

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varepsilon d\tau}{r} = -\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}. \tag{25.13}$$

Покажем прежде всего, что в силу условия (25.12) интеграл в (25.13), взятый по всему пространству, сходится и определяет собой функцию $\Phi\ (x, y, z)$, стремящуюся к нулю при $R_1 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty$. Часть интеграла (25.13), в которой интегрирование производится по внутренности сферы некоторого радиуса R_0 с центром в начале координат,

$$\int\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_0^2}\frac{\varepsilon\, d\tau}{r},$$

определяет функцию x, y, z, исчезающую в бесконечности как $1/R_1$.

В случае, когда $\varepsilon \neq 0$ в бесконечной области, из неравенства (25.12) следует, что

$$\left| \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant R_0^2} \frac{\varepsilon\, d\tau}{r} \right| < k \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant 0} \frac{d\tau}{R^{2+\lambda} r} =$$

$$= k \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dR \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{R^\lambda \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos\gamma}} = kf(R_1), \quad (25.14)$$

так как в сферических координатах $d\tau = R^2 dR \sin\theta\, d\theta d\varphi$, а смысл величин $R_1 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и γ ясен из рис. 92. Из (25.14)

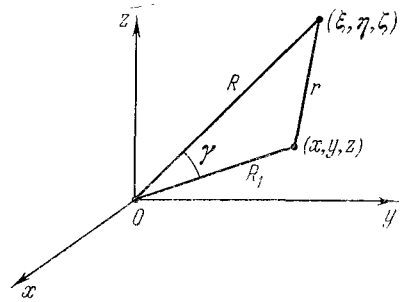


Рис. 92. Схема для расчета величины $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

и из условия $0 < \lambda < 1$ очевидно, что объемный интеграл $f(R_1)$ при $R_1 \neq 0$ сходится.

Порядок исчезания потенциала и скорости в бесконечности

Функцию $f(R_1)$ с точностью до постоянной легко определить. Действительно, имеем

$$f(R_1) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\left(\frac{R}{R_1}\right) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{R_1^\lambda \left(\frac{R}{R_1}\right)^\lambda \sqrt{\left(\frac{R}{R_1}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{R}{R_1}\right)\cos\gamma}} = \frac{f(1)}{R_1^\lambda}. \quad (25.15)$$

Таким образом, при наличии неравенства (25.12) функция $f(R_1)$, а следовательно, и потенциал $\Phi(x, y, z)$, определенный формулой (25.13), при $R_1 \to \infty$ стремится к нулю как $1/R_1^\lambda$.

Эти выводы сохраняют свою силу, если плотность ε в некоторых точках или на некоторых отдельных линиях и поверхностях имеет разрывы или принимает интегрируемые бесконечные значения.

Для grad Φ можно написать

$$v = \operatorname{grad}\Phi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varepsilon r}{r^3}\,d\tau. \tag{25.16}$$

Если в конечной части пространства и в начале координат ε конечно или интегрируемо, причем выполняется неравенство (25.12), то интеграл в (25.16) сходится и скорость v исчезает в бесконечности как $1/R_1^{1+\lambda}$. Если заданные значения ε не удовлетворяют условиям интегрируемости или ограничению [1]) (25.12), то интеграл для Φ в (25.13) может терять смысл, и поэтому нельзя искать решение задачи в виде (25.13). В этом случае решение рассматриваемой задачи вообще может отсутствовать.

Потенциал (25.13) удовлетворяет уравнению Пуассона

Теперь необходимо еще убедиться в том, что функция Φ, определенная формулой (25.13), имеет вторые частные производные и удовлетворяет уравнению Пуассона (25.11). Для того чтобы это доказать, для простоты [2]) предположим, что ε (ξ, η, ζ) непрерывна и имеет конечные первые производные $\partial\varepsilon/\partial\xi$, $\partial\varepsilon/\partial\eta$, $\partial\varepsilon/\partial\zeta$.

Пусть M — рассматриваемая точка с координатами x, y, z; обозначим через T внутренность сферы Σ малого радиуса с центром в точке M, а через $\mathscr{D}'$ область течения жидкости вне T. Функцию Φ, определенную по формуле (25.13), представим в виде суммы

$$\Phi = \Phi' + \Phi'',$$

где

$$\Phi' = -\frac{1}{4\pi}\int_T \frac{\varepsilon\,d\tau}{r},$$

$$\Phi'' = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathscr{D}'} \frac{\varepsilon\,d\tau}{r}.$$

Очевидно, что в точке M, внешней к области $\mathscr{D}'$, функция $\Phi''(x, y, z)$ аналитична. В точке M при

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \neq 0,$$

так как точки ξ, η, ζ принадлежат $\mathscr{D}'$, имеем $\Delta 1/r = 0$, поэтому

$$\Delta\Phi'' = 0$$

---

[1]) В ньютонианской механике определение потенциала гравитационных сил по плотности распределения масс сводится к этой задаче (стр. 272, т. 1). Если принять, что Вселенная бесконечна, а средняя плотность масс постоянна, то (25.12) не будет выполняться.

[2]) При более тонком анализе это предположение можно ослабить.

и, следовательно,

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi'.$$

Рассмотрим теперь частные производные от $\Phi'(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$. Имеем

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\int_T \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_T \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = \frac{1}{4\pi}\int_T \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) d\tau - \frac{1}{4\pi}\int_T \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}\, d\tau.$$

Здесь принято во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r}.$$

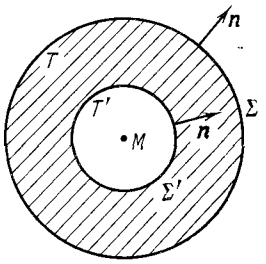


Рис. 93. Область $T - T'$ (заштрихована).

В этой формуле первый интеграл в области $T - T'$ между двумя сферами Σ и Σ' (рис. 93) можно преобразовать по формуле Гаусса — Остроградского. Получим

$$\frac{1}{4\pi}\int_{T-T'} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) d\tau = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\varepsilon}{r}\cos(\boldsymbol{n}, \xi)\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'} \frac{\varepsilon}{r}\cos(\boldsymbol{n}, \xi)\, d\sigma.$$

В силу предположений о функции $\varepsilon(x, y, z)$ при стягивании Σ' к точке M получим, что

$$\lim_{\Sigma' \to M} \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'} \frac{\varepsilon \cos(\boldsymbol{n}, \xi)}{r}\, d\sigma = 0.$$

Поэтому для производной $\partial\Phi'/\partial x$ верна формула

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\varepsilon \cos(\boldsymbol{n}, \xi)}{r}\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_T \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}\, d\tau.$$

Теперь можно составлять вторую производную и дифференцировать функцию $1/r$ под знаком интеграла. Таким путем получим формулу

$$\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x^2} = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \varepsilon \cos(\boldsymbol{n}, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r}\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_T \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\, d\tau.$$

Учитывая аналогичные формулы для $\partial^2\Phi'/\partial y^2$ и $\partial^2\Phi'/\partial z^2$, получим

$$\Delta\Phi' = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\varepsilon\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_{T}\operatorname{grad}\varepsilon\cdot\operatorname{grad}_{\xi,\eta,\zeta}\frac{1}{r}\,d\tau. \quad (25.17)$$

Покажем, теперь, что правая часть (25.17) точно равна $\varepsilon(x, y, z)$. Для этого применим первую формулу Грина в области $T - T'$ к двум функциям

$$\varepsilon(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

(см. § 12). Получим

$$\int_{T-T'}\varepsilon\Delta\left(\frac{1}{r}\right)d\tau + \int_{T-T'}\operatorname{grad}\varepsilon\cdot\operatorname{grad}_{\xi,\eta,\zeta}\frac{1}{r}\,d\tau = \int_{\Sigma+\Sigma'}\varepsilon\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma,$$

где нормаль n — внешняя к $T - T'$. Учитывая, что $\Delta(1/r) = 0$, перейдем к пределу при стягивании сферы Σ' к точке M. Будем иметь

$$\lim_{\Sigma'\to M}\int_{\Sigma'}\varepsilon\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma = \lim_{\Sigma'\to M}\int_{\Sigma'}\frac{\varepsilon r^2\,d\Omega}{r^2} = 4\pi\varepsilon(M),$$

так как $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$ на сфере Σ' и $d\sigma = r^2 d\Omega$, где Ω — телесный угол. Отсюда следует, что

$$-\int_{\Sigma}\varepsilon\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma + \int_{T}\operatorname{grad}\varepsilon\cdot\operatorname{grad}_{\xi,\eta,\zeta}\frac{1}{r}\,d\tau = 4\pi\varepsilon(M).$$

Поэтому равенство (25.17) окончательно дает

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi' = \varepsilon(x, y, z).$$

Таким образом, полное решение первой задачи об определении поля скоростей в безграничном пространстве по заданному распределению источников $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$ при указанных ограничениях, наложенных на функцию $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$, представляется формулой (25.16).

Постановка задачи об определении поля скоростей несжимаемой жидкости по заданному распределению вихрей

Дадим теперь решение второй задачи — об определении поля скоростей v по заданному распределению вихрей ω в безграничной массе жидкости. Имеем

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} v = 2\omega. \tag{25.18}$$

Вектор вихря в силу своего определения является соленоидальным вектором, т. е.

$$\operatorname{div} \omega = 0, \quad \text{так как} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} v \equiv 0. \tag{25.19'}$$

Так же как и в предыдущей задаче, примем для простоты, что в области вихревого потока вектор ω является кусочно гладкой функцией точек пространства. На поверхностях S разрыва вектора ω в соответствии с (25.19') примем, что нормальные составляющие ω_n на S непрерывны. Далее примем, что при удалении в бесконечность вектор ω обращается в нуль, причем, начиная с некоторого достаточно большого радиуса $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, выполняется неравенство

$$|\omega(\xi, \eta, \zeta)| < \frac{k}{R^{2+\lambda}},$$

где $k > 0$ и $0 < \lambda < 1$ — подходящие постоянные.

Векторный потенциал

Условие несжимаемости $\operatorname{div} v = 0$ будет выполнено, если положить

$$v = \operatorname{rot} A, \tag{25.19}$$

где A — векторный потенциал, зависящий произвольно от координат точек пространства. Очевидно, что поле скоростей не изменится, если вместо вектора A взять вектор A_1, отличающийся от A на вектор-градиент скалярной функции, т. е. положить

$$A_1 = A + \operatorname{grad} \psi,$$

где ψ — произвольная скалярная функция.

Таким образом, векторный потенциал в (25.19) для данного поля не определяется однозначно. В связи с этим для вектора A выставим дополнительное условие

$$\operatorname{div} A = 0. \tag{25.20}$$

Выполнимость этого условия можно всегда обеспечить выбором скалярной функции $\psi(x, y, z)$.

Определение векторного потенциала

Для получения уравнений, определяющих векторный потенциал A, подставив (25.19) в (25.18), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = 2\omega. \tag{25.21}$$

Преобразуем уравнение (25.21). В проекции на ось x имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=2\omega_x.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)=2\omega_x.$$

Пользуясь этим, перепишем уравнение (25.21) в виде

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} A-\Delta A=2\omega. \tag{25.22}$$

На основании условия (25.20) из (25.22) для вектора A получим векторное уравнение Пуассона

$$\Delta A=-2\omega, \tag{25.23}$$

равносильное трем скалярным уравнениям Пуассона.

Пользуясь решением первой задачи, для вектора A получим следующее решение уравнения (25.23):

$$A=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_\infty}\frac{\omega(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\tau. \tag{25.24}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что при $R_1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$ имеем

$$|A|<\frac{C}{R_1^{\lambda}} \quad \text{и} \quad |\operatorname{rot} A|<\frac{C}{R_1^{1+\lambda}}.$$

Проверим теперь, что вектор A, определенный формулой (25.24), удовлетворяет условию соленоидальности (25.20). Имеем

$$\operatorname{div} A=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_\infty}\operatorname{div}_{x,y,z}\left(\frac{\omega(\xi,\eta,\zeta)}{r}\right)d\tau=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_\infty}\operatorname{div}_{\xi,\eta,\zeta}\left(\frac{\omega}{r}\right)d\tau,$$

так как $\operatorname{div}_{\xi,\eta,\zeta}\omega(\xi,\eta,\zeta)=0$. Возьмем шар T_0, ограниченный сферой Σ_0 с центром в начале координат и радиусом R_0. Согласно определению интеграла по всему пространству T_∞ можно написать

$$\int\limits_{T_\infty}\operatorname{div}\frac{\omega}{r}\,d\tau=\lim_{R_0\to\infty}\int\limits_{T_0}\operatorname{div}\frac{\omega}{r}\,d\tau=\lim_{R_0\to\infty}\int\limits_{\Sigma_0}\frac{\omega_n}{r}\,d\sigma. \tag{25.25}$$

В равенстве (25.25) при преобразовании объемного интеграла в поверхностный по формуле Гаусса — Остроградского необ-

ходимо выделить в виде границ обе стороны поверхностей внутренних разрывов вектора ω, однако поверхностные интегралы по различным сторонам поверхностей внутренних разрывов ω сократятся в силу сформулированного выше условия о непрерывности ω_n на поверхностях разрыва.

При достаточно больших R_0 имеем $|\omega| < (k/R^{2+\lambda})$, поэтому

$$\lim_{R_\sigma \to \infty} \int_{\Sigma_\sigma} \frac{\omega_n}{r}\, d\sigma = 0.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{div} A = 0$, поэтому будет удовлетворенно не только уравнение (25.23), но и уравнение (25.22), представляющее собой иную запись основных уравнений (25.21) или (25.18).

Все выведенные формулы применимы к частному случаю, когда вихри заполняют конечную часть пространства $\mathcal{D}^*$, ограниченную поверхностью Σ^*. Вне Σ^* имеем $\omega = 0$, условие непрерывности ω_n на Σ^* приводит к равенству $\omega_n = 0$ на Σ^*, поэтому поверхность Σ^* должна быть вихревой поверхностью.

На основании (25.24) и (25.19) можно написать

$$v(x, y, z) = \operatorname{rot} \frac{1}{2\pi} \int_{T_\infty} \frac{\omega}{r}\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{T_\infty} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \omega\, d\tau = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{T_\infty} \frac{\omega \times r}{r^3}\, d\tau, \quad (25.26)$$

где r — радиус-вектор, проведенный от переменной точки интегрирования с координатами ξ, η, ζ к рассматриваемой точке с координатами x, y, z.

Решение общей задачи

Полное решение задачи об определении векторного поля в безграничном пространстве по распределению источников ε и вихрей ω представится формулами вида

$$v = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} A = \operatorname{grad}\left(-\frac{1}{4\pi} \int_{T_\infty} \frac{\varepsilon}{r}\, d\tau\right) + \operatorname{rot}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{T_\infty} \frac{\omega}{r}\, d\tau\right), \quad (25.27)$$

или

$$v = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varepsilon r}{r^3}\, d\tau + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega \times r}{r^3}\, d\tau. \quad (25.28)$$

О решении рассматриваемой задачи в ограниченной области

Если область $\mathcal{D}$, в которой заданы ε и ω и в которой требуется найти поле скоростей v, имеет некоторую границу Σ, то на Σ необходимо дополнительно задать краевые условия.

Краевые условия на Σ могут быть разнообразными. Рассмотрим важный для гидродинамики частный случай, когда на Σ заданы нормальные составляющие v_n вектора v. Для определенности рассмотрим внешнюю задачу, когда область $\mathcal{D}$ содержит бесконечно удаленную точку.

Решение такой задачи можно сконструировать, опираясь на решение задачи об определении векторного поля по источникам и вихрям в неограниченном пространстве, после продолжения функций ε и ω, заданных в области $\mathcal{D}$, во все пространство. Для удовлетворения граничных условий на Σ потребуется найти в $\mathcal{D}$ добавочное безвихревое потенциальное поле скоростей, для которого

$$\varepsilon = 0, \quad \omega = 0.$$

Продолжение ε и ω, заданных в $\mathcal{D}$, в пространство вне $\mathcal{D}$ можно осуществлять различными способами. Распределение ε вне $\mathcal{D}$ с учетом выполнения различных допущений, связанных с построением поля скоростей по источникам, можно задать с большим произволом и, в частности, принять, что $\varepsilon = 0$ вне $\mathcal{D}$. Во многих частных случаях при продолжении плотности ε во все пространство полезно использовать различные соображения, связанные с симметрией области $\mathcal{D}$ и соответствующих граничных условий (метод зеркальных изображений и т. п.).

При продолжении вектора ω на все пространство через поверхность Σ эта поверхность в общем случае может оказаться поверхностью разрыва вектора ω. Для использования формулы (25.28) необходимо обеспечить непрерывность ω_n на Σ.

Непрерывные распределения вектора ω в области $\mathcal{D}'$, ограниченной Σ и дополнительной к области $\mathcal{D}$, можно строить следующим способом. Положим в $\mathcal{D}'$

$$\omega = \operatorname{grad} \chi.$$

Для определения функции $\chi(x, y, z)$ при этом получим следующую задачу Неймана в области $\mathcal{D}'$. Так как

$$\operatorname{div} \omega = 0, \quad \text{то} \quad \Delta\chi = 0. \tag{25.29}$$

На Σ из условия непрерывности ω_n получим

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = \omega_n, \tag{25.30}$$

где ω_n на Σ известно, так как ω в области $\mathcal{D}$ задано. Если ω в области $\mathcal{D}$ задано так, что $\omega_n = 0$ на Σ, то на основании (25.30) и (25.29) получим $\chi = \text{const}$, и, следовательно, таким образом распределение вектора ω в $\mathcal{D}$ можно продолжить в область $\mathcal{D}'$, положив $\omega = 0$ в $\mathcal{D}'$.

При решении некоторых частных задач при продолжении в $\mathcal{D}'$ распределения вектора ω, заданного в $\mathcal{D}$, могут оказаться очень полезными соображения симметрии.

Обозначим через $v_1(x, y, z)$ вектор скорости, полученный по формуле (25.28) после продолжения ε и ω во все пространство, и положим

$$v = v_1 + v^*,$$

где v — искомый вектор скорости, соответствующий заданному в $\mathcal{D}$ распределению ε и ω. Для определения векторного поля v^* получим следующую задачу Неймана. В области $\mathcal{D}$ имеем

$$\operatorname{div} v^* = 0, \quad \operatorname{rot} v^* = 0,$$

поэтому

$$v^* = \operatorname{grad} \varphi \quad \text{и} \quad \Delta\varphi = 0. \tag{25.31}$$

На поверхности Σ — границе области $\mathcal{D}$ — имеем

$$v_n^* = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n - v_{1n}, \tag{25.32}$$

причем $v_n - v_{1n}$ — известная функция, так как по условию v_n на Σ задана. В бесконечности условия исчезания v и v_1 дают

$$(\operatorname{grad} \varphi)_\infty = 0. \tag{25.33}$$

Таким образом, в общем случае описанным путем после продолжения ε и ω в область вне $\mathcal{D}$ и после использования решения (25.28) для окончательного решения краевой задачи в области, имеющей границы, потребуется еще решить краевую задачу для определения гармонической функции $\varphi(x, y, z)$.

§ 26. Важные примеры вихревых полей

Рассмотрим некоторые приложения общей теории, развитой в предыдущем параграфе.

Закон Био — Савара

Предположим, что в неограниченном объеме несжимаемой жидкости задана изолированная замкнутая бесконечно тонкая вихревая трубка (рис. 94), которую в пределе можно рассматривать как замкнутую вихревую нить C. Такую нить можно также рассматривать как стационарный замкнутый линейный ток $4\pi j/c$, индуцирующий соответствующее магнитное поле H.

Для определения индуцированного магнитного поля $\boldsymbol{H}$ или соответственно индуцированного вихревой нитью поля вектора скорости $\boldsymbol{v}$ на основании формулы (25.26) можно написать

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,d\tau, \tag{26.1}$$

где интеграл распространен на объем вихревой трубки. Вдоль тонкой вихревой трубки имеем

$$\boldsymbol{\omega}\,d\tau = \boldsymbol{\omega}\,ds\,d\sigma = d\boldsymbol{s}\,\omega\,d\sigma = \frac{1}{2}\,\Gamma\,d\boldsymbol{s},$$

где $d\boldsymbol{s}$ — элемент линии C, $d\sigma$ — бесконечно малая площадь нормального сечения вихревой трубки, а Γ — циркуляция скорости по любому контуру $\mathscr{L}$, охватывающему один раз вихревую

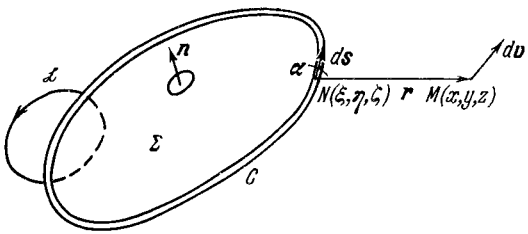


Рис. 94. Замкнутая тонкая вихревая трубка в безграничном объеме жидкости.

трубку (см. рис. 94). Постоянное вдоль трубки значение циркуляции Γ является основной кинематической характеристикой вихревой трубки. Переходя в (26.1) к пределу при $d\sigma \to 0$ и $\omega \to \infty$ при условии конечной циркуляции $\Gamma = 2\omega\,d\sigma$, получим

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_C \frac{d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{26.2}$$

Эта формула определяет распределение скоростей от вихревой линии или распределение магнитной напряженности от соответствующего линейного тока.

Формулу (26.2) можно написать в виде

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \int_C d\boldsymbol{v}, \quad \text{где} \quad d\boldsymbol{v}(x,y,z) = \frac{\Gamma}{4\pi}\,\frac{d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{26.3}$$

Элементарный вектор $d\boldsymbol{v}$ можно трактовать как бесконечно малую скорость, индуцируемую элементом $d\boldsymbol{s}$ вихревой линии в рассматриваемой точке (см. рис. 94).

Векторное равенство (26.2) или иная его запись в форме (26.3) составляет закон Био — Савара. Элементарная скорость $d\boldsymbol{v}$, индуцируемая элементом вихревой линии $d\boldsymbol{s}$, перпендикулярна к площадке, определяемой векторами $d\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{r}$, и равна по величине

$$|d\boldsymbol{v}| = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{|d\boldsymbol{s}\sin\alpha|}{r^2}, \tag{26.4}$$

где α — угол между $d\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{r}$ (см. рис. 94).

Потенциал скоростей, индуцируемых вихревой нитью

Очевидно, что поле скоростей от изолированной вихревой нити во всем пространстве вне точек этой нити безвихревое и, следовательно, потенциальное. Вычислим потенциал скоростей, индуцируемых изолированной замкнутой вихревой нитью. Так как

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

то

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \operatorname{grad}_{N(\xi,\eta,\zeta)}(1/r), \quad (\boldsymbol{r} = \boldsymbol{NM}),$$

и поэтому по формуле (26.2) имеем

$$v_x = \left[\frac{\Gamma}{4\pi}\int_C d\boldsymbol{s}\times\operatorname{grad}_N\frac{1}{r}\right]_x = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_C\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta\right]. \tag{26.5}$$

Применим теперь к контурному интегралу (26.5) формулу Стокса

$$\int_C P\,d\xi + Q\,d\eta + R\,d\zeta = \int_\Sigma\left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial\eta} - \frac{\partial Q}{\partial\zeta}\right) + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial\zeta} - \frac{\partial R}{\partial\xi}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi} - \frac{\partial P}{\partial\eta}\right)\right]d\sigma,$$

где Σ — поверхность, натянутая на контур C, α, β, γ — направляющие косинусы положительной нормали к Σ, направление которой определяется направлением интегрирования по контуру C, связанному с направлением вектора вихря ω. Положим $P = 0$, $Q = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)$, $R = -\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\right)$; учитывая, что $\Delta_N\frac{1}{r} = 0$, получим

$$v_x = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_\Sigma\left[\alpha\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \beta\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \gamma\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_\Sigma\frac{\partial}{\partial n_N}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),$$

то можно написать

$$v_x = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n_N}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma$$

или окончательно

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n_N}\frac{1}{r}\,d\sigma. \tag{26.6}$$

Теорема Ампера

Следовательно, потенциал поля скоростей, индуцированных замкнутой вихревой нитью в безграничной массе жидкости, можно рассматривать как потенциал двойного слоя — потенциал распределения диполей постоянной интенсивности по поверхности Σ, натянутой на контур вихревой нити.

Это предложение в применении к магнитному полю показывает, что магнитное поле, индуцированное замкнутым током, можно рассматривать как магнитное поле от системы элементарных магнитов постоянной плотности, распределенных по поверхности Σ, натянутой на контур тока, т. е. магнитное поле от магнитного листка.

Поверхностный интеграл в формуле (26.6) определяется положением точки M и поверхности Σ; этот интеграл является геометрической характеристикой, он зависит только от координат точки M и контура C, так как поверхность Σ может быть любой поверхностью, натянутой на контур C.

Геометрическая интерпретация потенциала магнитного листка

Выясним детально геометрический смысл потенциала φ в формуле (26.6). Возьмем элемент $d\sigma$ поверхности Σ (рис. 95). Имеем

$$-\frac{\partial}{\partial n_N}\frac{1}{r}\,d\sigma = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n_N}\,d\sigma = \frac{\cos\gamma\, d\sigma}{r^2} = \frac{d\sigma_1}{r^2} = d\Omega, \tag{26.7}$$

где $d\sigma_1$ — проекция $d\sigma$ на плоскость, перпендикулярную к радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$, а $d\Omega$ — телесный угол, под которым элемент $d\sigma$ виден из точки M. Величина $d\Omega > 0$, если $\gamma < 90°$ (γ — угол между $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{MN}$), и $d\Omega < 0$, когда $\gamma > 90°$. На основании (26.7) получим

$$\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi}\int\limits_{\Sigma} d\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi}\,\Omega,$$

где Ω — полный телесный угол, под которым видна ориентированная поверхность Σ из рассматриваемой точки M (рис. 96).

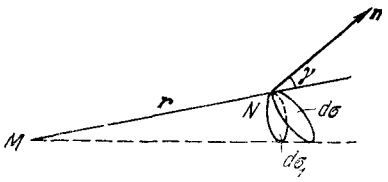


Рис. 95. Геометрический смысл элемента подынтегрального выражения в формуле (26.6) величины $-\partial/\partial n\ (1/r)\ d\sigma$.

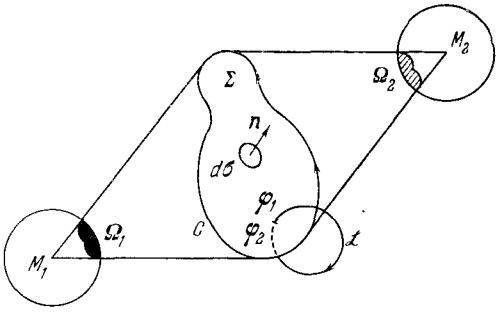


Рис. 96. Для точки M_1 имеем $\Omega_1 > 0$, для точки M_2 имеем $\Omega_2 < 0$.

Для точки M_1 имеем $\gamma < 90°$, поэтому $\Omega_1 > 0$, для точки M_2 $\gamma > 90°$, и поэтому $\Omega_2 < 0$.

Согласно формуле Био — Савара поле скоростей непрерывно во всем пространстве, за исключением контура вихревой нити C. Из формулы (26.6) следует, что в бесконечности потенциал $\varphi\ (x, y, z)$ исчезает как $1/R^2$, где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а величина скорости исчезает в бесконечности как $1/R^3$.

На магнитном листке потенциал φ и телесный угол Ω терпят разрыв

Потенциал φ, определенный формулой (26.6), является регулярной гармонической функцией во всем пространстве, за исключением поверхности Σ, ограниченной контуром C. Циркуляция скорости v по контурам $\mathscr{L}$, охватывающим вихревую линию, одинакова и равна Γ. Из формулы

$$\int_{\mathscr{L}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{L}} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma,$$

где φ_2 и φ_1 — значения потенциала на разных сторонах поверхности Σ, следует, что поверхность Σ является поверхностью разрыва потенциала φ (см. рис. 96). Таким образом, поверхность Σ является поверхностью разрыва для потенциала φ и для угла Ω, причем скачок этих величин на поверхности Σ постоянен. Имеем

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma = \text{const} \quad \text{и} \quad \Delta\Omega = [\Omega] = 4\pi \tag{26.8}$$

в случае изолированной вихревой нити.

Скачок φ постоянен вдоль Σ, и поэтому поле скоростей вдоль Σ непрерывно. В рассматриваемом примере в качестве поверхности Σ можно взять любую поверхность, натянутую на контур нити C. При конечном Γ только контур нити C является особой линией поля скоростей, при приближении к точкам контура C интеграл (26.2) расходится, вектор скорости v стремится при этом к бесконечности. В пространстве, разрезанном по поверхности Σ, потенциал φ — однозначная регулярная гармоническая функция. В двусвязном пространстве вне особого контура C потенциал φ является неоднозначной периодической регулярной гармонической функцией. При обходе по контурам вида $\mathscr{L}$ потенциал получает приращение, равное циркуляции Γ.

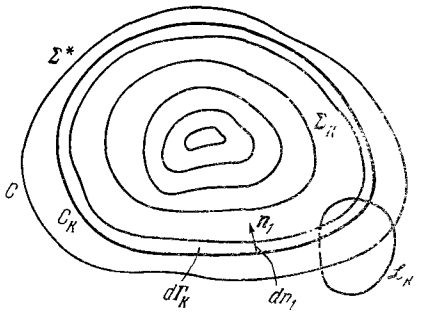


Рис. 97. Вихри, непрерывно распределенные по поверхности Σ*, индуцируют поле скоростей с разрывом касательной скорости вдоль Σ*.

Потенциал системы вихревых нитей

Из общей формулы (26.1) ясно, что поле скоростей, индуцируемое системой конечного или бесконечного числа вихревых нитей, и соответствующий потенциал можно определить с помощью сумм вида

$$v = \sum_k \frac{\Gamma_k}{2\pi} \int_{C_k} \frac{ds \times r}{r^3}$$

и

$$\varphi = -\sum_k \frac{\Gamma_k}{4\pi} \int_{\Sigma_k} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

при условии, что эти суммы сходятся.

Рассмотрим теперь конечную поверхность Σ*, ограниченную контуром C, на которой непрерывно распределено семейство замкнутых вихревых нитей с непрерывно изменяющейся от нити к нити интенсивностью (рис. 97). Обозначим через $d\Gamma_k$ интенсивность элементарной вихревой трубки C_k. Потенциал скоростей от такого семейства вихревых нитей представится интегралом

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int d\Gamma_k \int_{\Sigma_k} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\, d\sigma. \qquad (26.9)$$

В этом случае потенциал φ на каждой из сторон поверхности Σ^* конечен и непрерывен, но терпит разрыв при пересечении Σ^* по нормали. В точках любой промежуточной вихревой линии C_k будем иметь

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma_k = \int_C^{C_k} d\Gamma_k. \tag{26.10}$$

Вихревая поверхность — поверхность разрыва касательных скоростей

Так как вдоль C_k циркуляция $\Gamma_k = \text{const}$, то при дифференцировании (26.10) вдоль C_k получим

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial s} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = v_{2s} - v_{1s} = 0,$$

т. е. касательные составляющие поля скоростей на вихревой линии C_k непрерывны. В направлении нормали n_1 к C_k, расположенной в плоскости, касательной к поверхности Σ^* (см. рис. 97), имеем

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} = v_{2n_1} - v_{1n_1}, \tag{26.11}$$

т. е. касательная к Σ^* в направлении n_1 составляющая скорости терпит на Σ^* разрыв, который формулой (26.11) связан с распределением циркуляции, взятой по замкнутым контурам типа $\mathscr{L}_k$ (см. рис. 97), пересекающим поверхность Σ^*. В общем случае, если $\partial\Gamma/\partial n_1$ непрерывна на Σ^*, нормальные составляющие скорости к Σ^* во внутренних точках Σ^* также непрерывны. Следовательно, вихревая поверхность Σ^* является в этом случае поверхностью разрыва только касательных составляющих скорости жидкости. В общем случае при подходе к точкам контура C, ограничивающего Σ^*, скорость жидкости может обратиться в бесконечность.

Если $\Gamma(N)$ задана как функция точек N на Σ^*, то линии $\Gamma(N) = \text{const}$ на Σ^* соответствуют вихревым нитям. Вектор разрыва касательной скорости на Σ^* определится формулой

$$\operatorname{grad}_{\Sigma^*} \varphi_2 - \operatorname{grad}_{\Sigma^*} \varphi_1 = \boldsymbol{v}^*_{s2} - \boldsymbol{v}^*_{s1} = \operatorname{grad}_{\Sigma^*} \Gamma(N). \tag{26.12}$$

Здесь через $\operatorname{grad}_{\Sigma^*} \varphi$ обозначен вектор, в который проектируется вектор $\operatorname{grad} \varphi$ на плоскость, касательную к Σ^*. Вектор разрыва касательной скорости на Σ^* направлен по нормали к вихревым линиям на Σ^*.

Из формулы (26.12) следует, что, если движение жидкости везде вне Σ^* потенциально, то вектор разрыва касательной скорости на поверхности Σ^* должен обладать потенциалом $\Gamma(N)$.

Шлепок по свободной поверхности воды

Рассмотрим удар — шлепок по некоторой плоской площадке Σ^* на свободной горизонтальной плоскости xy, ограничивающей нижнее полупространство $z < 0$, занятое покоящейся несжимаемой жидкостью (рис. 98).

Для определения потенциала скоростей возмущенного движения в момент времени, следующий непосредственно после удара, в нижнем полупространстве имеем задачу Дирихле.

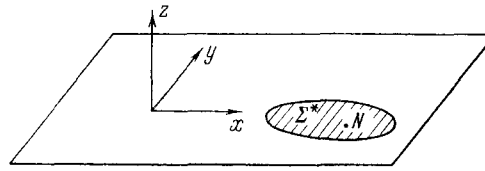


Рис. 98. По площадке Σ^* в момент $t = 0$ действуют импульсивные давления (шлепок).

На плоскости xy вне Σ^* импульс давления равен нулю и поэтому

$$p_t = -\rho\varphi = 0. \tag{26.13}$$

На площадке Σ^* импульс давления известен, поэтому

$$p_t = -\rho\varphi_1(N), \tag{26.14}$$

где $\varphi_1(N)$ — известная функция на Σ^*. Учитывая условие отсутствия возмущений в бесконечности и продолжив аналитически гармоническую функцию φ в верхнее полупространство с помощью соотношения (см. § 12)

$$\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, y, -z), \tag{26.15}$$

получим движение бесконечной массы жидкости с поверхностью разрыва потенциала скоростей вдоль площадки Σ^*. Обозначая через φ_2 значение потенциала φ при подходе к Σ^* сверху, имеем $\varphi_2 = -\varphi_1$ или по (26.10) и (26.15)

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -2\varphi_1 = \Gamma \neq 0.$$

Площадку Σ^* можно рассматривать как поверхность разрыва касательных компонент скорости $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$, нормальные составляющие скорости $\partial\varphi/\partial z$ согласно (26.15) при $z = 0$ одинаковы.

Таким образом, потенциальное движение несжимаемой жидкости в нижнем полупространстве или продолженное движение во всем пространстве можно рассматривать как индуцированное

системой вихрей, распределенных по площадке Σ^*. Распределение этих вихрей связано с распределением импульса давлений, который может быть задан непосредственно или определен в результате решения задачи Неймана, если задача об ударе (шлепке) на Σ^* ставится так, что на Σ^* известны нормальные скорости $\partial\varphi/\partial z$ (см. § 12).

По заданным значениям потенциала φ_1 на Σ^* поле скоростей возмущенного движения жидкости можно определить с помощью формулы Био — Савара. Математическую задачу об отыскании распределения циркуляции $\Gamma(N) = -2\varphi_1(N)$ можно формулировать, опираясь на формулу (26.9).

Глиссирование как последовательность шлепков

Рассмотренную выше задачу о шлепке можно усложнить и рассмотреть непрерывную последовательность шлепков, перемещающихся с течением времени по свободной границе жидкости. Таким путем можно строить решение задачи о взаимодействии воды с днищем глиссирующего (скользящего с большой скоростью по поверхности воды) катера.

При рассмотрении линеаризированной задачи о глиссировании, когда граничные условия формулируются на невозму-

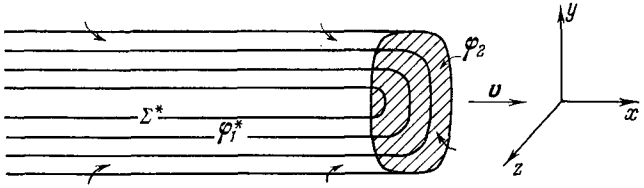


Рис. 99. Схема вихревых линий при глиссировании по свободной поверхности воды или при движении крыла конечного размаха в бесконечной массе жидкости.

щенном уровне горизонтальной плоскости и когда условие [1]) $\varphi = 0$ вне шлепков на плоскости xy сохраняется, движение жидкости можно продолжить в верхнее полупространство. После этого получается движение во всем пространстве с поверх-

[1]) Если пренебречь весомостью и квадратом малой скорости абсолютного движения жидкости v^2, то условие о постоянстве атмосферного давления p_0 на свободной поверхности на основании интеграла Коши — Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2}$$

дает $\partial\varphi / \partial t = 0$ или $\varphi = \text{const}$. В тех местах плоскости xy, через которые шлепки не проходили, имеем $\varphi = 0$.

ностью разрыва потенциала на плоскости xy. Эта поверхность разрыва совпадает со следом передвигающихся по плоскости xy шлепков и соответствует системе вихревых линий, общий вид которых указан на рис. 99. Если движение продолжалось от $t = -\infty$, то след за поверхностью, глиссирующей с конечной скоростью, простирается назад до бесконечности.

Вихревая система в теории крыла конечного размаха

Аналогичная вихревая схема вводится также для схематизации действительного движения среды в случае движения в ней крыла конечного размаха. Задачи определения возмущенного движения жидкости в нижнем полупространстве при глиссировании и возмущенного движения бесконечной массы жидкости, вызванного движением соответственно выбранного крыла конечного размаха, в приближенной постановке одинаковы. При наличии у крыла подъемной силы, направленной вверх, главная масса жидкости отбрасывается вниз. Направление движения среды на рис. 99 показано стрелками.

Основная трудность решения задачи состоит в определении вихревой системы на плоскости xy. Очевидно, что определение этой вихревой системы сводится к установлению распределения циркуляции по контурам типа $\mathscr{L}_k$, пересекающим поверхность разрыва Σ^*.

Заштрихованная на рисунке область соответствует подвижной площади крыла или глиссирующего днища; на этой площади происходит силовое взаимодействие между крылом или днищем и жидкостью, и вырабатываются разрывные значения φ_1 и φ_2. В остальной части поверхности разрыва — в свободной «вихревой пелене» — «удары» уже не происходят, и разрыв $\varphi_1^* = -\varphi_2^*$ сохраняется постоянным. Таким образом, в рассматриваемой схеме мы имеем возмущенное движение идеальной несжимаемой жидкости с поверхностью разрыва касательной скорости — вихревой пеленой, образующейся за движущимся крылом.

Теорема Томсона и образование вихревой пелены

Согласно теореме Томсона в идеальной несжимаемой первоначально покоившейся жидкости вихри не могут возникать, но возникновение поверхности разрыва касательной составляющей скорости, стекающей с задней острой кромки поверхности крыла внутрь жидкости, вполне возможно и этот динамический эффект хорошо отвечает действительности. Такую поверхность разрыва в жидкости можно рассматривать как вихревую поверхность, и в этом смысле без противоречия с теоремой Томсона можно говорить о появлении вихревых движений в идеальной жидкости. Этот вопрос был уже отчасти обсужден в § 7 гл. VI т. I.

Приводимое иногда объяснение появления вихревой пелены за хорошо обтекаемым крылом за счет вязкости жидкости,

вообще говоря, неверно. В задаче о крыле влияние вязкости проявляется в превращении вихревой поверхности разрыва касательных скоростей в тонкий пограничный слой непрерывного изменения скорости. Этот слой тянется за крылом назад и на далеких расстояниях от крыла сильно деформируется и размывается в общей массе жидкости. Однако эти эффекты не оказывают существенного влияния на возмущенное движение жидкости вблизи крыла. Этим объясняется, что расчет движения жидкости вблизи крыла в рамках теории идеальной жидкости дает правильную картину распределения давлений. С помощью найденного таким образом распределения давлений можно правильно вычислить подъемную силу крыла и правильно найти долю индуктивного сопротивления, обусловленного распределением давления.

Подчеркнем, что в этой схеме в рамках теории идеальной жидкости в установившемся движении в бесконечности сзади крыла в плоскостях, параллельных плоскости yz, остается возмущенное движение жидкости (нет выравнивания давлений и скоростей), за счет нарастания энергии этого возмущенного движения получается индуктивное сопротивление в идеальной жидкости. Полное сопротивление можно получить как сумму индуктивного сопротивления и сопротивления трения, определенного с помощью теории пограничного слоя.

Таковы общие качественные основы схематизации общей картины движения жидкости при постановке задачи о движении крыла конечного размаха в несжимаемой идеальной жидкости. С помощью закона Био — Савара в линеаризированной теории крыла и во многих других случаях задачу об определении возмущенного движения жидкости можно сводить к задаче об отыскании системы вихрей, индуцирующих искомое поле скоростей.

Поле и потенциал скоростей прямолинейной вихревой нити

Фактический расчет полного поля скоростей по формуле Био — Савара (26.2) приводит, вообще говоря, к громоздким формулам. Даже в том случае, когда вихревая нить C является просто окружностью, получающиеся в результате интегрирования формулы довольно сложны. Все результаты сильно упрощаются в пределе, когда радиус вихревой нити — окружности стремится к бесконечности и окружность переходит в прямую линию.

Пусть вихревая нить совпадает с осью z системы декартовых координат x, y, z (рис. 100). Рассчитаем поле скоростей с помощью формулы

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}}{r^3}\, dz,$$

где $\boldsymbol{k}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z и совпадающий с направлением вектора вихря в точках оси z.

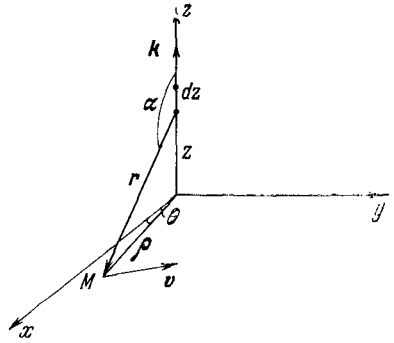


Рис. 100. К расчету поля скоростей, индуцируемого прямолинейной вихревой нитью, расположенной по оси z.

Рассмотрим точку $M(x, y)$ в плоскости xy. Очевидно, что вектор скорости M лежит в плоскости xy и перпендикулярен к радиусу-вектору $\boldsymbol{\rho}$ точки M в плоскости xy.

Для величины скорости имеем

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha\, dz}{\rho^2 + z^2},$$

где α — угол между $\boldsymbol{k}$ и радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, направленным от оси z в точку M. Этот интеграл легко вычислить. Имеем

$$\frac{z}{\rho} = -\operatorname{ctg}\alpha, \quad dz = \rho\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad \rho^2 + z^2 = \frac{\rho^2}{\sin^2\alpha},$$

поэтому

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi\rho}\int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi\rho}. \tag{26.16}$$

Отсюда следует, что в плоскости xy, а также в любой точке вне оси z имеем

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi\rho}\frac{y}{\rho}, \quad v_y = \frac{\Gamma}{2\pi\rho}\frac{x}{\rho}. \tag{26.17}$$

Соответствующее поле скоростей плоскопараллельно, движение жидкости симметрично относительно оси z и одинаково во всех плоскостях, параллельных плоскости xy.

Из формул (26.17) следует, что

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi, \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \text{const} = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + \text{const}, \tag{26.18}$$

где θ — полярный угол в плоскости xy. Потенциал скоростей представляет собой неоднозначную гармоническую функцию. В плоскости xy начало координат $x = y = 0$ является особой точкой для потенциала φ (26.18) и для вектора скорости жидкости (26.17).

Обозначим через $\psi(x, y)$ функцию тока — гармоническую функцию, сопряженную с потенциалом φ. Уравнения Коши —

Римана

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\Gamma x}{2\pi\rho^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\Gamma y}{2\pi\rho^2}$$

дают

$$\psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\rho+\text{const}. \tag{26.19}$$

Соответствующая характеристическая функция течения имеет вид

$$w(z)=\varphi+i\psi=\frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln\rho+i\theta)+\text{const}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z+\text{const}. \tag{26.20}$$

Очевидно, что если прямолинейная вихревая нить получается как предел бесконечно тонкой вихревой трубки, для которой вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$ направлен против оси z, то формула (26.20) остается справедливой с учетом того, что циркуляция Γ в этом случае имеет отрицательное значение. Если прямолинейная вихревая нить параллельна оси z, но не совпадает с осью z, то для характеристической функции $w(z)$ в этом случае имеет место формула

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-z_0)+\text{const},$$

где $z_0=x_0+iy_0$ — комплексная координата точки в плоскости xy, через которую проходит прямолинейная вихревая нить.

Поле и потенциал скоростей системы прямолинейных вихревых линий

Для конечной или бесконечной системы прямолинейных вихрей (вихревых шнуров), параллельных оси z, проходящих в плоскости xy через точки z_{0k}, будем иметь

$$w=\sum_k\left[\frac{\Gamma_k}{2\pi i}\ln(z-z_{0k})+\frac{\Gamma_k}{2\pi i}\ln C_k\right], \tag{26.21}$$

где C_k — постоянные, которые можно выбирать дополнительно для обеспечивания сходимости бесконечной суммы (26.21).

Поле скоростей можно вычислить, взяв производную $dw/dz=u-iv$, называемую функцией скорости. На основании (26.21) имеем

$$\frac{dw}{dz}=u-iv=\sum_k\frac{\Gamma_k}{2\pi i(z-z_{0k})}. \tag{26.22}$$

Для определения скорости частицы в точке расположения вихря z_{0s} необходимо по определению воспользоваться суммой

(26.22), в которой опущен один член, отвечающий точке z_{0s},

$$\frac{\Gamma_s}{2\pi i}\frac{1}{z-z_{0s}}.$$

Поле и потенциал скоростей «дорожки» вихрей

В частности, для периодической цепочки точечных вихрей с одинаковыми циркуляциями $\Gamma_k = \Gamma$, расположенных в плоскости xy вдоль прямой с периодом l (l может быть комплексным), имеем $z_{0k} = z_0 + kl$ ($-\infty < k < +\infty$). Ряд (26.22) при объединении членов с z_{0k} и $z_{0(-k)}$ легко суммируется и получается, что

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2il}\operatorname{ctg}\pi\frac{z-z_0}{l}, \tag{26.23}$$

откуда

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{l}(z-z_0) + \text{const}. \tag{26.24}$$

Формула (26.24) следует из (26.23) в результате простого интегрирования, эту формулу можно вывести непосредственно из (26.21) при подходящем определении C_k. При $C_k = 1$ ряд для w в (26.21) расходится.

Пользуясь формулами вида (26.23), путем суммирования можно строить поле скоростей от нескольких периодических «дорожек» вихрей, расположенных вдоль одной и той же прямой или вдоль различных прямых.

В предыдущих выводах рассматривалось поле скоростей, индуцируемое заданной системой вихрей.

Если область, занятая движущейся жидкостью, имеет границы, то при построении поля скоростей, индуцируемого вихрями, необходимо опереться на соображения, развитые в конце предыдущего параграфа. Во многих интересных случаях можно удовлетворить граничным условиям на плоских участках границы или на границе, составленной из частей окружности, с помощью метода зеркальных изображений. Аналитическое продолжение потоков сквозь границы может приводить к необходимости рассмотрения поля скоростей в многолистном римановом пространстве,— это относится не только к плоским, но и к пространственным задачам.

Поле скоростей непрерывного распределения прямолинейных вихрей

Рассмотрим плоскопараллельное движение, когда система точечных вихрей распределена непрерывно вдоль отрезка некоторой кривой S в плоскости xy. Имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{d\Gamma(s)}{z-z_0(s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{e^{-i\theta}\left|\frac{d\Gamma}{ds}\right| dz_0}{z-z_0}, \tag{26.25}$$

где θ — аргумент элемента dz_0 кривой S.

Для функции скорости dw/dz получился интеграл типа Коши. Согласно (26.25) функция dw/dz регулярна во всей плоскости, разрезанной вдоль S. Криволинейный отрезок S (след вихревой поверхности на плоскости xy) является линией разрыва касательных скоростей.

Если при плоскопараллельном движении вихри расположены непрерывно по некоторой площади Σ, то для функции скорости $u - iv$ можно написать

$$u - iv = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{\gamma(M)\,d\sigma}{z - z_0}, \tag{26.26}$$

где $\gamma(M)d\sigma = d\Gamma$ — циркуляция элементарного прямолинейного вихря, соответствующего бесконечно малой площадке $d\sigma$. Согласно равенству $d\Gamma = 2\omega\, d\sigma$ получим, что $\gamma(M) = 2\omega(M)$.

Если на площадке Σ величина ω постоянна, то для поля скоростей получим формулу

$$u - iv = \frac{\gamma}{2\pi i}\int_{\Sigma}\frac{d\sigma}{z - z_0} = \frac{\gamma}{2\pi i}\iint_{\Sigma}\frac{dx_0 dy_0}{x - x_0 + i(y - y_0)}. \tag{26.27}$$

Легко видеть, что интеграл в правой части (26.27) сходится не только для точек z вне площади Σ, но и для точек z, лежащих внутри Σ, для которых при $z = z_0$ подынтегральное выражение обращается в бесконечность.

Поле скоростей круглого вихря постоянной завихренности

Если Σ — площадь круга радиуса a с центром в начале координат, то интеграл (26.27) легко вычислить. В полярных координатах имеем

$$u - iv = \frac{\gamma}{2\pi i}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0 d\rho_0 d\theta_0}{z - \rho_0 e^{i\theta_0}}.$$

Вдоль окружности $\mathcal{K}(\rho_0)$ с постоянным радиусом ρ_0 имеем $d\theta_0 = (dz_0/iz_0)$, поэтому

$$u - iv = -\frac{\gamma}{2\pi}\int_0^a \rho_0 d\rho_0 \int_{\mathcal{K}(\rho_0)}\frac{dz_0}{z_0(z - z_0)} =$$

$$= -\frac{\gamma}{2\pi z}\int_0^a \rho_0 d\rho_0 \int_{\mathcal{K}(\rho_0)}\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z - z_0}\right)dz_0. \tag{26.28}$$

Если точка $z = \rho e^{i\theta}$ находится вне круга радиуса a, то внутренний интеграл равен $2\pi i$, поэтому во внешних к вихрю точках имеем

$$u - iv = \frac{\gamma\pi a^2}{2\pi i z} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z} = -\frac{\Gamma}{2\pi\rho}ie^{-i\theta}. \tag{26.29}$$

В области, внешней к цилиндрическому вихрю, поле скоростей такое же, как от точечного вихря, расположенного в центре цилиндрического вихря и имеющего ту же, что и цилиндрический вихрь, циркуляцию.

Для внутренних точек имеем, что при $\rho_0 < \rho$ внутренний интеграл по $\mathcal{K}(\rho_0)$ по-прежнему равен $2\pi i$, при $\rho_0 > \rho$ внутренний интеграл точно равен нулю, поэтому верхний предел a во внешнем интеграле следует заменить на ρ. По формуле (26.28) найдем

$$u - iv = \frac{\gamma\pi\rho^2}{2\pi i z} = -\omega\rho i e^{-i\theta}. \tag{26.30}$$

Следовательно, внутри цилиндрического вихря с плотностью интенсивности $\gamma = 2\omega$ распределение скоростей получается таким же, как при вращении жидкости как твердого

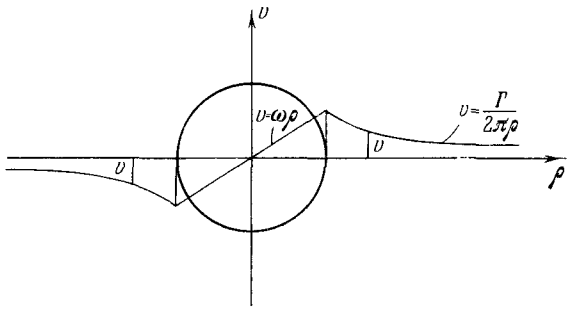


Рис. 101. Распределение скоростей от круглого вихря.

тела вокруг оси z с угловой скоростью ω. Направление [1]) скорости в обоих случаях определяется множителем $-ie^{-i\theta}$, указывающим, что вектор скорости направлен перпендикулярно к радиусу-вектору ρ, при $\Gamma > 0$ в сторону возрастания угла θ. Для модуля скорости вне вихря имеем

$$|v| = \frac{\Gamma}{2\pi\rho}, \qquad \Gamma = 2\omega\pi a^2, \tag{26.31}$$

внутри вихря

$$|v| = \omega\rho = \frac{\Gamma\rho}{2\pi a^2}. \tag{26.32}$$

Это распределение скоростей построено на рис. 101. На границе вихря скорость непрерывна. Очевидно, что поле скоростей на далеких расстояниях от точечного вихря можно трактовать как поле скоростей от круглого вихря конечной интенсивности малого радиуса, и наоборот.

[1]) Для определенности принимаем, что $\omega > 0$.

§ 27. Динамическая теория цилиндрических вихрей

В предыдущем параграфе были рассмотрены кинематические вопросы связи поля скоростей и поля вихрей. Теперь рассмотрим динамические свойства вихревых движений, связанные с влиянием вихрей на поле давлений и с законами движения и трансформации вихревого поля с течением времени в потоке жидкости.

Распределение давлений в случае круглого вихря конечного радиуса

Рассмотрим установившееся движение идеальной несжимаемой жидкости от круглого цилиндрического вихря, кинематическое поле скоростей которого определено в предыдущем параграфе. В этом движении все частицы движутся по концентрическим окружностям с постоянной скоростью, зависящей от радиуса, и, следовательно, имеют только центростремительное ускорение, равное по величине v^2/r. Уравнения Эйлера в проекции на направление радиуса дают

$$\rho a_r = -\rho \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r},$$

где ρ — плотность жидкости. Полагая давление в бесконечности равным p_0, получим

$$p - p_0 = \int_{\infty}^{r} \frac{\rho v^2}{r}\, dr. \tag{27.1}$$

Отсюда следует, что давление уменьшается монотонно при движении из бесконечности к центру вихря. (В (27.1) и следующих формулах радиус-вектор в плоскости движения xy обозначаем буквой r, а не ρ, как это было в предыдущем параграфе.)

В области, внешней к вихрю, т. е. при $r > a$, из (27.1) и (26.31) при постоянной плотности ρ получим

$$p = p_0 - \frac{\rho\omega^2 a^4}{2r^2}. \tag{27.2}$$

Внутри вихря, т. е. при $r < a$, из (27.1), (26.31) и (26.32) получим

$$p = p_0 - \rho\omega^2 a^2 + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}. \tag{27.3}$$

Минимальное давление получается в центре вихря

$$p_{\min} = p_0 - \rho\omega^2 a^2. \tag{27.4}$$

На рис. 102 приведен график распределения давления по радиусу. Соответствующие разрежения пропорциональны

квадрату ω или квадрату суммарной циркуляции вихря $\Gamma = 2\omega\pi a^2$ Случай, когда жидкость неоднородна и плотность зависит от r, также легко описывается.

Для интенсивных вихрей характерно появление больших разрежений вблизи центра вихря. Эффекты разрежения в центре вихрей часто наблюдаются при различных течениях жидкости. Появлением разрежений в вихревых движениях можно объяснить, например, образование углублений воронкообразной

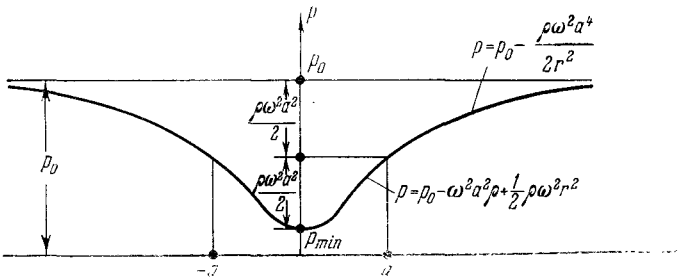


Рис. 102. Распределение давлений при движении жидкости от круглого вихря конечного радиуса.

формы на свободной поверхности при вращательном движении жидкости.

Характерным примером вихревых движений являются смерчи. Смерчи можно наблюдать на суше и на море. Под влиянием разрежений в центре смерчей возникают течения, засасывающие пыль, воду и другие различные предметы. Известны случаи, когда проходящий смерч в узкой области срывал листья с деревьев, засасывал воду вместе с мелкими рыбами и лягушками и даже клады из древних монет, и затем все эти существа и предметы падали обратно на землю в виде своеобразного дождя.

Вихри образуются за крылом, за водяными и воздушными винтами. В этих и во многих других случаях также проявляются эффекты, связанные с сильным разрежением в области завихренного потока.

В идеальной однородной несжимаемой жидкости при потенциальных массовых силах согласно теореме Томсона вихри не могут распространяться по частицам. *Вихри движутся вместе с частицами*, вихревые линии являются жидкими линиями.

Если в плоскопараллельном движении задана система точечных вихрей, то для определения неустановившегося поля скоростей достаточно знать движение каждого вихря. По теореме Томсона циркуляция каждого вихря сохраняется постоянной, $\Gamma_k = \text{const}$. В безграничной массе жидкости для определе-

ния закона движения вихрей, т. е. координат z_{0k}, будем иметь следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_{0s}}{dt} - i\frac{dy_{0s}}{dt} = \frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k}{}' \frac{\Gamma_k}{z_{0s} - z_{0k}}, \tag{27.5}$$

где $\sum_{k}{}'$ означает суммирование по всем индексам, за исключением члена $k = s$.

Интегралы уравнений движения системы точечных вихрей

Система уравнений (27.5) допускает замечательные интегралы. Умножая (27.5) на Γ_s и суммируя по s, получим

$$\sum_{s}\Gamma_s\frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{s}\sum_{k}{}' \frac{\Gamma_k\Gamma_s}{z_{0s} - z_{0k}} = 0,$$

так как в правой части все члены попарно сокращаются. Следовательно,

$$\sum_{s}\Gamma_s\bar{z}_{0s} = \text{const}. \tag{27.6}$$

Таким образом, если $\sum_{s}\Gamma_s \neq 0$, то «центр тяжести» системы точечных вихрей остается неподвижным.

Другой первый интеграл получим, если умножим (27.5) на $\Gamma_s z_{0s}$ и просуммируем по s. Получим

$$\sum_{s}\Gamma_s z_{0s}\frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{s}\sum_{k}{}' \frac{\Gamma_k\Gamma_s z_{0s}}{z_{0s} - z_{0k}} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{s}\sum_{k}{}' \frac{\Gamma_k\Gamma_s z_{0k}}{z_{0s} - z_{0k}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{s}\Gamma_s z_{0s}\frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} = \frac{1}{4\pi i}\sum_{s}\sum_{k}{}'\Gamma_k\Gamma_s. \tag{27.7}$$

Так как правая часть этого равенства чисто мнимая, то

$$\sum_{s}\Gamma_s\left(z_{0s}\frac{d\bar{z}_{0s}}{dt} + \bar{z}_{0s}\frac{dz_{0s}}{dt}\right) = 0.$$

Отсюда выводим, что

$$\sum_{s}\Gamma_s z_{0s}\bar{z}_{0s} = \text{const}. \tag{27.8}$$

Кроме этого, из (27.7) следует, что

$$\sum_s \Gamma_s \left(y_{0s} \frac{dx_{0s}}{dt} - x_{0s} \frac{dy_{0s}}{dt} \right) = -\frac{1}{4\pi} \sum_s \sum_k{}' \Gamma_k \Gamma_s. \qquad (27.9)$$

Соотношение (27.8) можно рассматривать как уравнение постоянства «момента инерции» системы вихрей, а (27.9) — как уравнение постоянства «момента количества» движения.

Уравнения (27.5) можно переписать в виде

$$\frac{dx_{0s}}{dt} = \frac{\partial \psi_s}{\partial y_{0s}} \quad \text{и} \quad \frac{dy_{0s}}{dt} = -\frac{\partial \psi_s}{\partial x_{0s}}, \qquad (27.10)$$

где

$$\psi_s = -\frac{1}{2\pi} \sum_k{}' \Gamma_k \ln | z_{0s} - z_{0k} |.$$

Если ввести функцию H с помощью равенства

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_s \sum_k{}' \Gamma_s \Gamma_k \ln | z_{0s} - z_{0k} |,$$

то уравнения движения (27.10) системы вихрей можно записать в форме

$$\Gamma_s \frac{dx_{0s}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_{0s}} \quad \text{и} \quad \Gamma_s \frac{dy_{0s}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_{0s}}. \qquad (27.11)$$

Непосредственной проверкой легко получить, что система (27.11) допускает интеграл

$$H = \text{const}, \qquad (27.12)$$

который можно истолковать как интеграл постоянства «энергии» системы вихрей.

Примеры движения вихрей

Рассмотрим простейшие примеры движения двух точечных вихрей.

Возьмем два вихря с циркуляциями $\Gamma_1 > 0$ и $\Gamma_2 > 0$. Легко видеть, что каждый из вихрей будет двигаться по окружности с центром O, совпадающим с неподвижным «центром тяжести» этих вихрей (рис. 103).

Два вихря с противоположными по знаку, но равными по модулю циркуляциями движутся поступательно вдоль прямой, перпендикулярной к отрезку, соединяющему центры этих вихрей (рис. 104). Два вихря с противоположными по знаку и равными по величине циркуляциями, движущиеся поступательно, можно остановить, если наложить на течение этих двух вихрей поступательный поток со скоростью, противоположной скорости движения вихрей.

Задача об определении движения вихрей осложняется, если область движения жидкости ограничена, например, твердыми

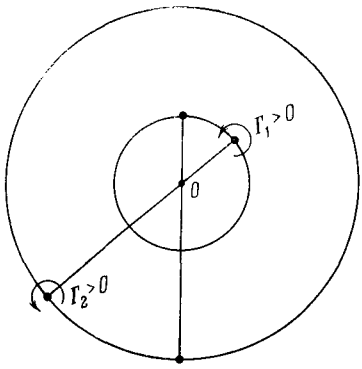


Рис. 103. Два вихря движутся по концентрическим окружностям с центром в «центре тяжести» системы вихрей.

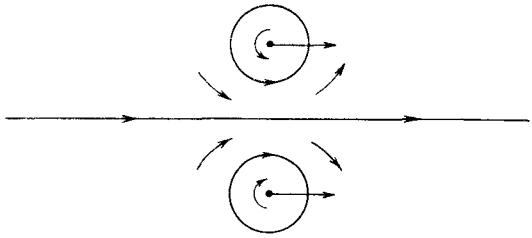


Рис. 104. Вихри с противоположными по знаку и равными по величине циркуляциями движутся поступательно.

стенками или свободными поверхностями. В этом случае за счет влияния границ справа в (27.5) появляются добавочные члены.

Присоединенные вихри

Предыдущая теория движения вихрей развита для свободных вихрей. Скорость движения свободных вихрей относительно жидкости равна нулю.

При решении кинематических задач с помощью замены крыльев или других обтекаемых жидкостью тел системами вихрей, обеспечивающих требуемые условия обтекания на поверхности тел, мы приходим к рассмотрению несвободных вихревых систем — вихрей, связанных с обтекаемым телом, названных Н. Е. Жуковским присоединенными вихрями. В теории Н. Е. Жуковского присоединенные вихри двигаются вместе с обте-

каемым телом заданным образом, их скорость не равна скорости потока, мысленно построенного путем аналитического продолжения внутрь тела возмущенного движения жидкости вне тела.

Н. Е. Жуковский рассматривал установившиеся плоскопараллельные обтекания цилиндрического крыла бесконечного размаха поступательным набегающим потоком с постоянной скоростью. При решении плоской задачи о потенциальном обтекании несжимаемой жидкостью цилиндрического крыла можно найти в двусвязной области потенциального потока решение с циркуляцией, отличной от нуля по контуру, охватывающему крыло. Соответствующий потенциал оказывается многозначным. При непрерывном кинематическом продолжении рассматриваемого обтекания на всю плоскость в соответствии с теоремой Стокса внутри крыла получается вихревое течение.

Для установившегося потенциального обтекания цилиндрического крыла с циркуляцией, отличной от нуля, Н. Е. Жуковский установил наличие подъемной силы, действующей на профиль крыла (см. § 8). Для подъемной силы, действующей на единицу ширины профиля в поперечном направлении, Н. Е. Жуковский получил следующую формулу:

$$A = \rho v_\infty \Gamma, \tag{27.13}$$

где ρ — плотность жидкости, v_∞ — скорость набегающего потока и Γ — циркуляция по контуру, охватывающему профиль крыла. Сила $\boldsymbol{A}$ перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{v}_\infty$ и получается поворотом вектора $\boldsymbol{v}_\infty$ на прямой угол против направления циркуляции вокруг профиля крыла (см. § 8).

Эта формула позволила понять в рамках теории обтекания крыльев идеальной жидкостью механическую природу подъемной силы. Теорема Н. Е. Жуковского особенно существенна в связи с тем, что при непрерывном установившемся обтекании тел идеальной жидкостью с *однозначным* потенциалом скорости имеет место парадокс Даламбера, согласно которому полная сила, действующая со стороны жидкости на тело, равна нулю. Открытие наличия подъемной силы, возникающей за счет циркуляции, обусловливающей неоднозначность потенциала скорости, имело большое принципиальное значение.

Теорему Н. Е. Жуковского (27.13) можно обобщить и распространить на любые неустановившиеся движения точечных присоединенных вихрей (прямолинейных вихрей в плоскопараллельных потоках), движение которых задано.

С помощью уравнения количества движения, примененного к бесконечно малому объему жидкости, вектор вихря ско-

рости внутри которого отличен от нуля, выясняется, что, если мы имеем дело не со свободным вихрем, т. е. если скорость $\boldsymbol{U}$ этого объема не равна скорости частицы жидкости, принадлежащей вихревой линии, то на эту частицу должна действовать концентрированная внешняя сила. Из уравнения количества движения после перехода к пределу для концентрированной силы, действующей на единицу длины вихревого шнура, получается следующая формула:

$$X + iY = -i\rho \boldsymbol{q}_{\text{отн}}\Gamma, \tag{27.14}$$

где Γ — циркуляция вокруг вихревого шнура, а комплексный вектор

$$\boldsymbol{q}_{\text{отн}} = q_x + iq_y$$

представляет собой вектор скорости вихревого шнура относительно жидкости, определяемый формулой

$$\boldsymbol{q}_{\text{отн}} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{v}. \tag{27.15}$$

Если вихрь свободный, то $\boldsymbol{q}_{\text{отн}} = 0$, и, следовательно, $X + iY = 0$; в этом случае нет внешней концентрированной силы, действующей на завихренную жидкость. Если $\boldsymbol{q}_{\text{отн}} \neq 0$, то на завихренную жидкость действует сила, определяемая формулой (27.14).

Сила, действующая со стороны жидкости на внешние тела, обусловливающие заданное движение вихревых шнуров, равна [1])

$$-(X + iY) = i\rho \boldsymbol{q}_{\text{отн}}\Gamma. \tag{27.16}$$

Эта сила представляет собой обощение силы Н. Е. Жуковского.

Множитель i в формулах (27.14) и (27.16) показывает, что сила, вынуждающая двигаться вихрь по заданному закону, и ее противодействие направлены перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{q}_{\text{отн}}$. (Аргументы комплексных векторов $\boldsymbol{q}_{\text{отн}}$ и $-(X + iY)$ отличаются на $\pi/2$, так как $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.)

В ряде случаев крылья можно заменять прямолинейными концентрированными вихревыми шнурами, поэтому силы (27.14) и (27.16) можно рассматривать как силы взаимодействия между крылом, движущимся заданным образом, и жидкостью.

[1]) Подробности выводов о силах, связанных с присоединенными вихрями, содержатся в работе Л. И. Седова «О силе, вынуждающей вихрь двигаться предназначенным способом». См. ПММ, т. III, вып. 1, 1936, стр. 70—75.

§ 28. Движение системы непрерывно распределенных вихрей в идеальной жидкости

Из динамического уравнения движения можно получить уравнение для определения векторного поля вихрей $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$.

Рассмотрим уравнение движения *идеальной* среды (жидкости или газа) в форме Громеки — Лемба:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2. \qquad (28.1)$$

Если внешние массовые силы имеют потенциал

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \mathcal{U} \qquad (28.2)$$

и процесс в среде баротропный, т. е. $p = f(\rho)$, и, следовательно, можно ввести функцию давления $\mathcal{P} = \int \frac{dp(\rho)}{\rho}$ так, что

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \mathcal{P}, \qquad (28.3)$$

то на основании (28.2) и (28.3) уравнение (28.1) можно написать в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\left(\mathcal{U} - \mathcal{P} - \frac{v^2}{2}\right).$$

Применив к этому векторному уравнению операцию ротации, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = 0. \qquad (28.4)$$

Заметим, что здесь дано повторение вывода уравнения (7.4) (см. гл. VI, т. 1), совпадающего с уравнением (28.4).

Уравнение Гельмгольца

Преобразуем теперь уравнение (28.4) к классическому уравнению Гельмгольца. Уравнение (28.4) в проекции на ось x имеет вид

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x v - \omega_y u) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z u - \omega_x w) = 0,$$

или, так как $\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} \equiv 0$, вид

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_x}{\partial z} + \omega_x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \\ - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Аналогично преобразуются проекции уравнения (28.4) на оси y и z. Отсюда следует векторное уравнение:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\operatorname{div}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}, \tag{28.5}$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$. На основании уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

уравнению (28.5) можно придать вид

$$\frac{d\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}}{dt} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}. \tag{28.6}$$

Уравнение (28.6) называется уравнением Гельмгольца. Это уравнение можно положить в основу изучения распределения вихрей в пространстве и во времени в движущейся идеальной среде.

Из уравнения (28.6) легко вывести установленные раньше с помощью теоремы Томсона, полученной из (28.4) (см. т. 1, гл. VI, § 7) динамические свойства вихревых движений. Ввиду фундаментальной важности этих свойств выведем их снова из уравнения (28.6).

Вихревые линии — жидкие линии

Возьмем вихревую линию и рассмотрим ее элемент $d\boldsymbol{s} = \varepsilon\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}$, где ε — малая постоянная. Обозначим через $A(x, y, z)$ и $B(x + dx, y + dy, z + dz)$ начало и конец элемента $d\boldsymbol{s}$ на вихревой линии. Дифференциалы dx, dy и dz можно рассматривать как проекции элемента $d\boldsymbol{s}$ на декартовы оси координат. Имеем равенства

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} = \frac{ds}{\omega} = \frac{\varepsilon}{\rho}$$

и

$$\boldsymbol{v}^B - \boldsymbol{v}_A = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}dz = (d\boldsymbol{s}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = \varepsilon\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}.$$

Из бесконечно малого четырехугольника $ABB'A'$ (рис. 105) следует, что жидкий элемент $d\boldsymbol{s}$ за время dt переходит в элемент $d\boldsymbol{s}'$, причем

$$d\boldsymbol{s}' = d\boldsymbol{s} + \boldsymbol{v}_B dt - \boldsymbol{v}_A dt = \varepsilon\left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} + \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}\,dt\right]. \tag{28.7}$$

С другой стороны, элемент вихревой линии $d\boldsymbol{s}$ перейдет в момент $t + dt$ в элемент $d\boldsymbol{s}''$ новой вихревой линии. Для $d\boldsymbol{s}''$ должна быть верна формула

$$d\boldsymbol{s}'' = \varepsilon\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} + d\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right). \tag{28.8}$$

Формулы (28.7) и (28.8) имеют кинематическую природу и верны не только для идеальной жидкости, когда верны уравнения Гельмгольца (28.6), а и в общем случае, например, для вязкой жидкости и других сред.

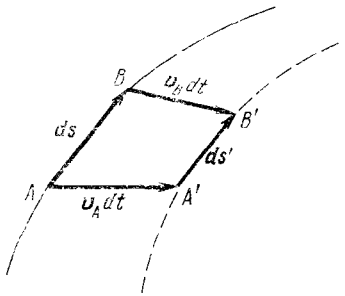


Рис. 105. Жидкий элемент вихревой линии $d\boldsymbol{s}$ переходит за время dt в элемент $d\boldsymbol{s}'$.

В случае уравнения Гельмгольца (28.6) из равенств (28.7) и (28.8) вытекает, что

$$d\boldsymbol{s}' = d\boldsymbol{s}''. \tag{28.9}$$

Это соотношение показывает, что вихревая линия движется так же, как и жидкая линия, совпадающая в данный момент времени t с вихревой линией. Таким образом, вихревые линии являются жидкими линиями.

Ниже мы покажем, что в вязкой жидкости в правой части уравнения (28.6) появляется дополнительный член, и поэтому $d\boldsymbol{s}' \neq d\boldsymbol{s}''$, и, следовательно, в вязкой жидкости вихревые линии перемещаются относительно частиц жидкости.

Интенсивность вихревых трубок постоянна во времени

Рассмотрим теперь в момент t бесконечно тонкую вихревую трубку с площадью сечения $d\sigma$. Эта вихревая трубка за время dt переходит вместе с частицами жидкости в вихревую трубку с сечением $d\sigma'$. Имеем равенства

$$ds = \frac{\omega}{\rho}\varepsilon,$$

$$ds' = \frac{\omega'}{\rho'}\varepsilon \tag{28.10}$$

и закон сохранения массы

$$\rho\, ds\, d\sigma = \rho' ds' d\sigma'. \tag{28.11}$$

Из (28.10) и (28.11) получим

$$\frac{\omega}{\rho\, ds} = \frac{\omega'}{\rho' ds'} \quad \text{и} \quad \omega\, d\sigma = \omega'\, d\sigma', \tag{28.12}$$

т. е. циркуляция вокруг движущейся вместе с жидкостью

вихревой трубки сохраняется постоянной во времени

$$\Gamma = 2\omega\Delta\sigma = \text{const}. \tag{28.13}$$

Это утверждение выражает собой теорему Томсона, доказанную раньше другим способом. Из доказанных предложений вытекают все следствия, установленные раньше, в § 7 гл. VI т. 1.

Подчеркнем, что все предыдущие выводы касались свободных вихрей.

Если справа в уравнении (28.1) имеются массовые силы, ротация которых отлична от нуля (непрерывно распределенные силы Н. Е. Жуковского), то и в идеальной среде возникает движение вихрей относительно среды.

§ 29. Диффузия вихрей в вязкой несжимаемой жидкости

Рассмотрим теперь уравнение распространения вихрей в вязкой несжимаемой жидкости.

Уравнение диффузии вихрей

В этом случае в правую часть уравнения (28.1) необходимо добавить член $\nu\Delta\boldsymbol{v}$. Учитывая это и условие несжимаемости $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, из (28.5) для вязкой несжимаемой жидкости получим

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}\,, \tag{29.1}$$

где ν — по предположению постоянный кинематический коэффициент вязкости.

Векторное уравнение (29.1) в проекции на ось z декартовой системы координат имеет вид

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \omega_x\frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial w}{\partial z} + \nu\Delta\omega_z\,, \tag{29.2}$$

аналогичные уравнения получаются в проекциях на оси x и y. Для медленных движений с точностью до малых первого порядка уравнение (29.2) можно написать в виде

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial t} = \nu\Delta\omega_z. \tag{29.3}$$

Это уравнение (29.3) совпадает с уравнением диффузии или теплопроводности в неподвижной среде (см. § 7, гл. V, т. 1).

Таким образом, проекции вектора вихря выравниваются в общей массе жидкости по законам, аналогичным законам выравнивания температуры в неравномерно нагретом теле. В вязкой жидкости завихренность рассеивается по объему и по частицам среды с общей тенденцией к равномерному распределению по всему объему.

Для плоскопараллельных движений вязкой жидкости при $w = 0$ уравнение (29.2) приобретает вид

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}\right). \qquad (29.4)$$

Диффузия прямолинейного вихря конечной интенсивности

Рассмотрим задачу о диффузии вихря, когда при $t = 0$ в жидкости имеется концентрированный прямолинейный вихрь с заданной конечной циркуляцией Γ, расположенный по оси z. В последующие моменты времени при $t > 0$ будет происходить диффузия вихря на всю плоскость. Рассчитаем распределение вихрей для любых $t > 0$. Очевидно, что искомое решение симметрично относительно оси z, поэтому величина ω_z зависит только от полярного радиуса r в плоскости xy и от t, а скорость жидкости тоже зависит от r и t и направлена по касательным к окружностям с центром в начале координат.

Так как $\partial \omega_z / \partial s_v = 0$, где s_v — направление, взятое вдоль линии тока, т. е.

$$\frac{u}{|v|}\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \frac{v}{|v|}\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 0,$$

то благодаря указанным свойствам симметрии уравнение (29.4) превращается в линейное уравнение теплопроводности, которое после перехода к полярным координатам записывается в виде

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega_z}{\partial r}\right). \qquad (29.5)$$

Рассмотрим циркуляцию $\Gamma(r, t)$, взятую по окружности радиуса r с центром в начале координат. По теореме Стокса имеем

$$\Gamma(r, t) = 2\int_0^r \int_0^{2\pi} \omega_z r\, dr\, d\theta = 4\pi \int_0^r r\omega_z(r, t)\, dr. \qquad (29.6)$$

В начальный момент времени при $t = 0$ для любого r, и в том числе для сколь угодно малого r, имеем

$$\Gamma(r, 0) = \Gamma = \text{const}. \qquad (29.7)$$

Таково начальное условие задачи.

Из постановки задачи следует, что искомое решение имеет вид

$$\omega_z = \omega_z(r, t, \nu, \Gamma).$$

Из линейности уравнения (29.5) и начального условия (29.7) следует, что

$$\omega_z = \Gamma f(r, \nu, t). \tag{29.8}$$

Из постановки задачи, (29.8) и из П-теоремы следует, что безразмерная комбинация

$$\frac{\omega_z \nu t}{\Gamma}$$

может зависеть только от безразмерной переменной

$$\xi = \frac{r^2}{\nu t},$$

т. е.

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{\nu t} \psi(\xi). \tag{29.9}$$

Подстановка формулы (29.9) в уравнение с частными производными (29.5) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\psi(\xi) + \xi\psi'(\xi) + 4[\psi'(\xi) + \xi\psi''(\xi)] = 0,$$

после интегрирования которого получим

$$\xi\psi + 4\xi\psi' = C.$$

Постоянная C равна нулю для искомого решения, в котором $\psi(0)$ и $\psi'(0)$ конечны.

Интегрируя уравнение

$$4\frac{d\psi}{d\xi} + \psi = 0,$$

найдем

$$\psi = Ae^{-\xi/4}.$$

Для ω_z это дает

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{\nu t} Ae^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

Постоянную A определим из начального условия (29.7). Имеем

$$\Gamma(r, t) = 4\pi \frac{\Gamma}{\nu t} A \int_0^r re^{-\frac{r^2}{4\nu t}} dr = 8\pi A\Gamma\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \tag{29.10}$$

Отсюда на основании (29.7) при $t = 0$ для любого $r > 0$ имеем

$$\Gamma = 8\pi A\Gamma.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{8\pi} \quad \text{и} \quad \omega_z = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{29.11}$$

Эта формула дает искомое решение для ω_z.

Определим теперь распределение скоростей $v(r, t)$. Так как

$$\Gamma(r, t) = 2\pi r v(r, t),$$

то на основании (29.10) найдем окончательную формулу:

$$v(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \tag{29.12}$$

При $t = 0$ получается закон распределения скоростей от прямолинейного концентрированного вихря, совпадающего с осью z. В идеальной жидкости такое движение сохраняется для всех $t > 0$. В вязкой жидкости возникает диффузия вихря, обусловленная появлением второго члена в скобках формулы (29.12).

Формула (29.11) показывает, что величина вихря ω_z в каждой точке плоскости xy с течением времени возрастает от нуля до максимума, равного $\Gamma/(2\pi r^2 e)$, а затем убывает и снова стремится к нулю.

Уравнение (29.5) линейное и пригодно для рассмотрения любого симметричного относительно оси z движения и, в частности, для начальной задачи с любой заданной функцией $\omega_z(r, 0)$. Соответствующее решение линейной задачи можно построить методом суперпозиции решения для точечного вихря.

ГЛАВА IX

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

§ 1. Вводные замечания

Рассмотрим теорию деформирования «твердых» тел. Как и раньше, тело будем представлять себе как материальный континуум. Введем систему отсчета x^i, относительно которой происходит движение различных точек континуума, и лагранжеву систему координат ξ^i, движущуюся вместе со средой (рис. 106). Положение каждой точки континуума в любой момент времени t известно, если известны функции

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

задающие закон движения среды.

Одной из важнейших характеристик деформированного твердого тела является тензор деформаций. В гидродинамике этот тензор почти не используется. Для жидкостей важна только одна характеристика деформаций — изменение объема. Для «твердых» тел существенно также и изменение формы, т. е. весь тензор деформаций. Тензор деформаций вводится путем сравнения длины любого элемента тела с его длиной в некотором идеальном состоянии, которое называют «начальным».

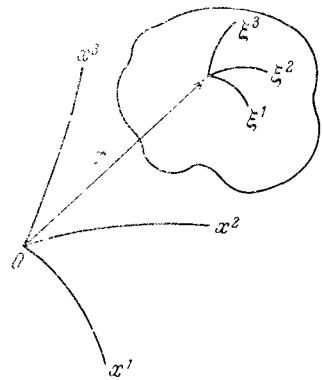


Рис. 106. Система отсчета x^i и лагранжева ξ^i система координат.

В частном случае начальное состояние может быть просто положением данного конечного тела в некоторый начальный момент времени t_0. Это всегда принимается в классической теории упругости. Однако существуют теории, в которых за «начальное» состояние выбирается состояние, которое невозможно реально

осуществить в евклидовом пространстве [1]) (см. § 5, гл. II, т. 1).

Если обозначить через $\overset{\circ}{g}_{ij}$ и $\hat{g}_{ij}$ — компоненты метрического тензора в лагранжевой системе координат соответственно в «начальном» и актуальном состояниях, то, как известно, компоненты тензора деформаций вводятся формулами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}).$$

Начальные деформации

Если начальное состояние реально осуществимо, то можно ввести перемещения $\boldsymbol{w}$ от начального состояния к актуальному. Компоненты тензора деформаций в этом случае выражаются через компоненты вектора $\boldsymbol{w}$ и удовлетворяют уравнениям совместности. Если же начальное состояние не может быть осуществлено в реальном физическом пространстве, то ε_{ij} не удовлетворяют уравнениям совместности. В этом случае иногда вводят некоторое промежуточное характерное состояние (начальное состояние без кавычек) с метрическим тензором $\overset{\circ\circ}{g}_{ij}$ так, что перемещения от состояния $\overset{\circ\circ}{\ }$ к состоянию $\hat{\ }$ можно ввести. Тогда

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ\circ}{g}_{ij}) + \frac{1}{2}(\overset{\circ\circ}{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}),$$

или

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{1}_{ij} + \overset{*}{\varepsilon}_{ij}.$$

Компоненты ε^{1}_{ij} могут быть выражены через перемещения, а компоненты $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ — нет. Компоненты тензора $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ определяют собой «начальное» деформированное состояние.

Геометрически линейные теории

В теории деформирования твердых тел часто рассматривают случай, когда деформации и относительные смещения малы. Если при этом лагранжева система координат выбрана так, что в какой-нибудь момент времени (например, в начальный) она совпадает с системой отсчета, то в дальнейшем она будет мало отличаться от системы отсчета и, очевидно, компоненты любого тензора или вектора в лагранжевой системе координат и в системе отсчета будут отличаться на малую величину. Если в теории учитываются лишь малые первого порядка, то

[1]) В ньютонианской механике реальное трехмерное физическое пространство евклидово. Обычно в теории упругости принимается, что начальное состояние сравнения определяется однозначно с точностью до жесткого перемещения (перемещения среды как твердого тела). Можно рассматривать модели сплошных сред, для которых начальное состояние определяется с известным произволом.

компоненты малых тензоров и векторов, например тензора деформаций, в лагранжевой системе и в системе отсчета в этом случае становятся неразличимыми (так как они отличаются на малые высшего порядка). Поэтому во многих классических курсах теории упругости, где изучаются только бесконечно малые деформации, не вводят явно этих двух различных систем координат.

Для компонент тензоров ε^1_{ij} и ε_{ij} в теории деформирования тел с малыми деформациями можно использовать формулы

$$\varepsilon^1_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i), \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i) + \overset{*}{\varepsilon}_{ij}. \quad (1.1)$$

Такие теории называются геометрически линейными.

§ 2. Модель упругого тела

Процессы деформирования упругих тел обратимы

Главным признаком, по которому теория упругости выделяется из других теорий деформируемых твердых тел (теории пластичности, теории ползучести и т. д.), является то, что все процессы деформирования упругих тел по определению обратимы. Обычно, кроме того, принимается, что локально для всех малых частиц упругого тела можно ввести температуру T. Следовательно, для физически бесконечно малых частиц упругого тела всегда можно пользоваться соотношением [1])

$$T ds = dq^{(e)}. \quad (2.1)$$

Параметры состояния упругого тела

Второй основной посылкой классической теории упругости является допущение, что состояние малой частицы упругого тела полностью определяется тензором деформаций, температурой T (или энтропией s) и некоторыми физическими постоянными или переменными параметрами $\chi_k(\xi^i, t)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, характеризующими механические и физико-химические свойства среды, которые в общем случае могут изменяться. Например, некоторые из χ_k могут быть переменными фазовыми плотностями. К параметрам χ_k при необходимости можно отнести компоненты $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ тензора начальных деформаций. Свойства симметрии кристаллов также можно задавать с помощью параметров χ_k, некоторые из которых могут быть компонентами векторов или тензоров. В распространенных классических

[1]) Соотношение (2.1) может выполняться и для некоторых необратимых процессов. Дальнейшие выводы будут применимы также и при учете таких процессов (например, процесса теплопроводности) в упругом теле.

вариантах модели упругих тел принято, что в каждой частице $\chi_k = \text{const}$, т. е. $d\chi_k = 0$.

Характерным свойством модели упругого тела является также предположение о независимости метрики начального состояния от времени, т. е. $\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$.

Таким образом, определяя обычную [1]) модель упругой среды, для плотности внутренней энергии U или свободной энергии $F = U - Ts$ упругого тела можно написать

$$U = U(s, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \chi_k), \quad F = F(T, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \chi_k). \tag{2.2}$$

Среди аргументов функций U и F нужно явно указывать компоненты $\overset{\circ}{g}_{ij}(\xi^i)$ метрического тензора (или $\hat{g}_{ij}(\xi^i, t) = 2\hat{\varepsilon}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}$) потому, что скалярные величины U и F на самом деле, конечно, зависят лишь от инвариантов тензоров, компоненты которых указаны в качестве аргументов, а не непосредственно от самих компонент. При образовании инвариантов из компонент $\hat{\varepsilon}_{ij}$ и χ_k необходимо, вообще говоря, пользоваться компонентами метрического тензора $\overset{\circ}{g}_{ij}$ или $\hat{g}_{ij}$.

Если U и F не зависят явно от лагранжевых координат ξ^i, то упругое тело называется *однородным*. Некоторые из χ_k могут просто совпадать с ξ^i или быть заданными функциями от ξ^i, и тогда мы имеем неоднородное упругое тело.

Основные исходные уравнения

Для напоминания выпишем уравнения механики сплошной среды, которые составляют основу замкнутой системы уравнений теории упругости. Имеем:

а) формулу для определения плотности (уравнение неразрывности в форме Лагранжа)

$$\rho\sqrt{\hat{g}} = \rho_0\sqrt{\overset{\circ}{g}} = f(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \tag{2.3}$$

б) уравнения импульсов

$$\rho a^i = F^i + \nabla_j p^{ij}, \tag{2.4}$$

в) уравнение притока тепла, которое с учетом условия (2.1) может быть записано в следующих двух эквивалентных формах:

$$dU = \frac{\hat{p}^{ij}}{\rho} d\hat{\varepsilon}_{ij} + T\,ds + dq^{**} \tag{2.5}$$

или

$$dF = \frac{\hat{p}^{ij}}{\rho} d\hat{\varepsilon}_{ij} - s\,dT + dq^{**}. \tag{2.6}$$

---

[1]) В настоящее время вводятся более общие модели упругих сред, в которых в аргументы U и F могут входить различных порядков производные по времени и по координатам от компонент тензора деформации.

Уравнения (2.5) и (2.6) написаны с учетом допущения, что $\overset{\circ}{g}_{ij}$ не зависят от времени t, т. е. $\hat{e}_{ij} = d\hat{\varepsilon}_{ij}/dt$ (см. т. 1, стр. 97 и стр. 210—211).

Для выделения определенной модели упругого тела и получения замкнутой системы уравнений в конкретном случае движения достаточно, как мы покажем дальше, задать внутреннюю энергию $U(s, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \chi_k)$ (или свободную энергию $F(T, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \chi_k)$), компоненты внешних массовых сил F^i, величину притока внешнего тепла $dq^{(e)}$ (который входит только в (2.1)) и величину притока внешней энергии dq^{**}.

О задании внешнего притока энергии dq^{**}

Задание величин U или F, F^i и dq^{**}, вообще говоря, связано с установлением модели, отделением рассматриваемой данной среды от внешних объектов (электромагнитного поля, внешних компонент примесей, внешнего жесткого или подвижного микроскопического каркаса или вообще некоторых внешних распределенных по объему геометрических связей и т. п.).

В общем случае необходимо вводить $dq^{**} \neq 0$ даже при отсутствии взаимодействия данной среды с какими-либо *другими* внешними объектами. При учете усложненного поверхностного или объемного взаимодействия выделенной малой частицы среды с соседними частицами той же среды появляется необходимость вводить $dq^{**} \neq 0$. Однако при наличии существенных допущений, заключенных в равенствах (2.1) и (2.2) [1]),

[1]) В более сложных моделях упругих тел, в которых внутренняя энергия зависит не только от компонент тензора деформаций, но и от производных этих компонент по пространственным координатам, т. е. когда $U = U(s, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij})$ (здесь используется обозначение $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ для компонент тензора деформаций $\overset{\circ}{\mathcal{E}} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{i}}^i\overset{\circ}{\mathbf{i}}^j$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij})$), в уравнении (2.5) слева будет присутствовать член

$$\frac{\partial U}{\partial \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}} d\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij},$$

который, если использовать существенное предположение о том, что компоненты $\check{p}^{ij} = \hat{p}^{ij}$ не зависят от производных по времени $d\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}/dt$, должен балансироваться с членом $\overset{\circ}{\Lambda}{}^{ijk} d\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$, входящим справа в dq^{**}. Для удобства выкладок здесь рассматриваются градиенты в фиксированном пространстве начальных состояний, что не является ограничением общности; это позволяет для индивидуальных производных по времени делать перестановки:

$$\frac{d\overset{\circ}{\nabla}_k}{dt} = \overset{\circ}{\nabla}_k \frac{d}{dt}.$$

После сравнения правой и левой частей в (2.5) ввиду произвольности приращений $d\overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ получим равенства

$$\overset{\circ}{\Lambda}{}^{ijk} = \frac{\partial U}{\partial \overset{\circ}{\nabla}_k \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}} \neq 0. \qquad (A)$$

можно рассматривать модели упругих тел, для которых

$$dq^{**} = 0. \tag{2.7}$$

Для классических простейших моделей упругих сред, построенных без учета эффектов электрической поляризации и намагничивания, равенство (2.7) принимается всегда как основное без каких-либо специальных оговорок.

Уравнения состояния упругого тела

Опираясь на уравнение (2.5) при условиях (2.7) и (2.2), выведем теперь общие уравнения состояния для упругой среды. Уравнение (2.5) перепишем в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}} d\hat{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial U}{\partial s} ds + \frac{\partial U}{\partial \chi_k} d\chi_k = \frac{\hat{p}^{ij}}{\rho} d\hat{\varepsilon}_{ij} + T\, ds. \tag{2.8}$$

Если компоненты $\mathring{\Lambda}^{ijk} = \hat{\Lambda}^{ijk}$ задать независимо, или считать, что $\mathring{\Lambda}^{ijk} = 0$, то соотношения (А) представят собой дополнительные уравнения сверх уже имеющейся замкнутой системы уравнений. Уравнения дополнительных связей (А) в этом случае существенно ограничат свободу изменения определяющих параметров независимо от влияния внешних сил, притоков тепла и краевых условий, что, вообще говоря, неприемлемо (нет внутренних геометрических связей). Поэтому соотношения (А) должны представлять собой тождества, определяющие $\Lambda^{ijk} \neq 0$.

Таким образом, для более сложных моделей упругих сред, в которых внутренняя энергия зависит от градиентов компонент тензора деформаций, приток энергии dq^{**} должен быть отличным от нуля и может определяться свойствами внутренней энергии, заданной как функция своих аргументов. Следовательно, при конструировании некоторых моделей сплошных сред проблема определения dq^{**} может разрешаться автоматически после задания внутренней энергии.

В рассмотренном выше примере, если принять, что приток dq^{**} определен поверхностными взаимодействиями на границе малой частицы, вызванными неоднородностью деформаций, будем иметь

$$\int_V dq^{**} \rho\, d\tau = \int_\Sigma \rho \hat{\Lambda}^{ijk} d\hat{\varepsilon}_{ij} \hat{n}_k d\sigma = \int_V \hat{\nabla}_k (\rho \hat{\Lambda}^{ijk} d\hat{\varepsilon}_{ij})\, d\tau;$$

отсюда, так как $\rho \sqrt{\hat{g}} = \rho_0 \sqrt{\mathring{g}}$ и $\hat{\Lambda}^{ijk} = \mathring{\Lambda}^{ijk}$ (см. (3.7) гл. IV, т. 1), получим

$$dq^{**} = \frac{1}{\rho} \hat{\nabla}_k (\rho \hat{\Lambda}^{ijk} d\hat{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{\rho \sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial \sqrt{\hat{g}}\, \rho \hat{\Lambda}^{ijk} d\hat{\varepsilon}_{ij}}{\partial \xi^k} =$$

$$= \frac{1}{\rho_0 \sqrt{\mathring{g}}} \frac{\partial \rho_0 \sqrt{\mathring{g}}\, \mathring{\Lambda}^{ijk} d\mathring{\varepsilon}_{ij}}{\partial \xi^k} = \frac{1}{\rho_0} \mathring{\nabla}_k (\rho_0 \mathring{\Lambda}^{ijk} d\mathring{\varepsilon}_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{\rho_0} \mathring{\nabla}_k \left(\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \mathring{\nabla}_k \mathring{\varepsilon}_{ij}} d\mathring{\varepsilon}_{ij} \right).$$

Эта формула определяет собой обратимый приток механической энергии за счет неоднородности деформаций, когда внутренняя энергия зависит от градиентов деформаций.

Соотношение (2.8) и аналогичное соотношение, вытекающее из (2.6), выполняются для любых процессов в упругом теле. Изменяя систему внешних сил, величину притока тепла, условия на границе и другие внешние условия, можно осуществить бесконечное число различных процессов, в которых для данной малой частицы в данный момент времени величины $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\hat{\varepsilon}_{ij}$, s, χ_k, $\hat{p}^{ij}$, T и ρ — одни и те же, а приращения $d\hat{\varepsilon}_{ij}$, ds (или dT) и $d\chi_k$ различны. Если существует система независимых приращений $d\hat{\varepsilon}_{ij}$, ds (dT), $d\chi_k$, то при дополнительном условии, что $\hat{p}^{ij}$ зависят только от $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$, χ_k, s (или T) и что $dq^{**} = 0$, из (2.8) или соответственно из (2.6) получаются следующие равенства [1]):

$$\hat{p}^{ij} = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}}\right)_{s,\,\chi_k} = \rho\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,\,\chi_k}, \tag{2.9}$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{\hat{\varepsilon}_{ij},\,\chi_k}, \quad s = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\hat{\varepsilon}_{ij},\,\chi_k}, \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \chi_k}\right)_{\hat{\varepsilon}_{ij},\,s} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \chi_k}\right)_{\hat{\varepsilon}_{ij},\,T} = 0. \tag{2.11}$$

Соотношения (2.9) — (2.11) называются уравнениями состояния упругого тела. Равенства (2.9) связывают компоненты напряжений с аргументами функций U или F. Равенства (2.10) служат для вычисления температуры T (при использовании U) или энтропии s (при использовании F). Соотношения (2.11) определяют законы изменения параметров χ_k; эти соотношения аналогичны известным уравнениям Гульдберга — Вааге для описания обратимых химических реакций. В дальнейшем мы рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда χ_k постоянны, и не будем обращаться к уравнениям (2.11).

Уравнения состояния (2.9) для упругого тела представляют собой соотношения, обобщающие закон Гука на случай учета нелинейных эффектов, влияния температуры и возможного присутствия переменных физических параметров χ_k (фазовых плотностей и т. п.).

Уравнения состояния несжимаемого упругого материала

Уравнения состояния (2.9) получены в предположении, что величины $d\hat{\varepsilon}_{ij}$, ds (или dT) и $d\chi_k$ линейно независимы. Если между ними существует связь, то формулы (2.9) изменяются. Например, для несжимаемого материала имеется дополнительная связь

$$\hat{g}^{ij}\, d\hat{\varepsilon}_{ij} = 0. \tag{2.12}$$

[1]) При выводе формул (2.9) подразумевается, что $(\partial U/\partial \varepsilon_{ij}) = (\partial U/\partial \varepsilon_{ji})$, т. е. компоненты симметричного тензора ε_{ij} входят в функции U и F симметрично.

В этом случае, если ввести множители Лагранжа q и q', то из (2.8) и (2.12) или из (2.6) и (2.12) вместо (2.9) получим равенства

$$\hat{p}^{ij} = -q\hat{g}^{ij} + \rho\frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}} \tag{2.13}$$

или

$$\hat{p}^{ij} = -q'\hat{g}^{ij} + \rho\frac{\partial F}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}}.$$

Для определения множителей Лагранжа q и q' необходимо воспользоваться уравнением связи (2.12). Эти величины не следует смешивать с давлением. В общем случае $q \neq q'$, в конкретных задачах нужно определить либо только q, либо только q'.

Замкнутая система уравнений, описывающих поведение упругого тела

Соотношения (2.9) — (2.11) вместе с уравнением неразрывности (2.3), уравнениями движения (2.4) и совместности при $\overset{*}{\varepsilon}_{ij} = 0$ (или дополнительными данными о $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$, которые зависят от условий изготовления данного образца материала и в соответствующих задачах должны задаваться отдельно), а также вместе с уравнением, выражающим второе начало термодинамики, которое в этом случае может быть записано в виде

$$dq^{(e)} = \frac{\partial U}{\partial s}ds \quad \text{или} \quad dq^{(e)} = -Td\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right), \tag{2.14}$$

образуют замкнутую систему уравнений для описания различных процессов в упругом теле. При этом должны быть заданы U или F как функции соответствующих параметров и должны быть известны F^i и $dq^{(e)}$.

Для изотермических процессов удобнее пользоваться соотношениями, в которые входит свободная энергия F. В этом случае температура T известна и постоянна, а уравнения движения замыкаются без использования соотношений (2.10) и (2.14). Второе соотношение (2.10) служит при этом только для вычисления энтропии (если это нужно), а (2.14) — для вычисления $dq^{(e)}$, необходимого для того, чтобы обеспечить изотермичность процесса. Для адиабатических процессов удобнее пользоваться группой соотношений, в которые входит U. *Однако и та, и другая группы соотношений применимы для любых обратимых процессов в упругих телах с любым притоком тепла* $dq^{(e)}$.

О потенциале напряжений

Сделаем еще следующее замечание. В теории бесконечно малых деформаций уравнения состояния (2.9) с точностью до малых высшего порядка можно написать в виде

$$p^{ij} = \rho_0\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \rho_0 F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \tag{2.15}$$

где ρ_0 — постоянная (начальная) плотность, а $\Phi = \rho_0 F$ — свободная энергия единицы объема. Следовательно, в случае если деформации малы, напряжения имеют потенциал, т. е. представляются в виде производных от функции Φ по ε_{ij}. В точной постановке, при рассмотрении конечных деформаций, потенциала для компонент тензора напряжений p^{ij} не существует.

Идеальная жидкость — пример нелинейно-упругого тела

Рассмотрим пример среды, которую можно назвать нелинейным упругим телом и которая была подробно изучена в гл. VIII. Пусть свободная энергия зависит только от температуры и плотности

$$F = F(T, \rho). \tag{2.16}$$

Зависимость (2.16) является частным случаем зависимости (2.2). В самом деле, согласно (2.3) имеем

$$\rho = \frac{\rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\sqrt{\hat{g}}}, \tag{2.17}$$

где $\overset{\circ}{g} = \mathrm{Det}\,\|\overset{\circ}{g}_{ij}\|$, $\hat{g} = \mathrm{Det}\,\|\hat{g}_{ij}\| = \mathrm{Det}\,\|2\hat{\varepsilon}_{ij} + \overset{\circ}{g}_{ij}\|$, $\rho_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ — известная функция ξ^i, начальная плотность. Следовательно, плотность ρ можно выразить через $\overset{\circ}{g}_{ij}$ и $\hat{\varepsilon}_{ij}$, и свободная энергия рассматриваемой среды зависит от температуры и компонент тензора деформаций, только эта зависимость частного вида (компоненты тензора деформаций входят только через плотность [1]) ρ).

Нетрудно вычислить производные $\frac{\partial \rho}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}}$. Непосредственно дифференцируя (2.17), найдем

$$\frac{\partial \rho}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}} = 2\frac{\partial \rho}{\partial \hat{g}_{ij}} = -\rho \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{g}_{ij}} \mathrm{Det}\,\|\hat{g}_{ij}\|}{\mathrm{Det}\,\|\hat{g}_{ij}\|} = -\rho \hat{g}^{ij},$$

или, иначе, пользуясь уравнением неразрывности в форме Эйлера,

$$d\rho = -\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dt = -\rho \hat{g}^{ij} \hat{e}_{ij}\, dt = -\rho \hat{g}_{ij} d\hat{\varepsilon}_{ij},$$

[1]) Здесь в качестве начального состояния можно выбрать любое состояние с заданным распределением начальной плотности. В этом случае характеристики начального состояния могут войти только через начальную плотность. В начальном состоянии внутренние напряжения могут вообще отличаться от нуля. Для «твердых» упругих тел часто можно принимать, что $p^{ij} = 0$ в начальном состоянии.

снова получим ту же формулу;

$$\frac{\partial \rho}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}} = -\rho \hat{g}^{ij}.$$

Поэтому соотношения (2.9) для рассматриваемой среды принимают вид

$$\hat{p}^{ij} = -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} \hat{g}^{ij}$$

или

$$p^{ij} = -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} g^{ij}. \tag{2.18}$$

Следовательно, тензор напряжений в такой среде — шаровой. Обозначим величину $\rho^2 (\partial F/\partial \rho)$ через p, тогда

$$p^{ij} = -pg^{ij},$$
$$p = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} = p(\rho, T). \tag{2.19}$$

Рассматриваемая среда есть идеальная жидкость или газ, p—давление. Мы видим, что теория движения идеальной жидкости есть частный случай нелинейной теории упругости с конечными деформациями, правда, этот случай очень специальный.

Изотропные и анизотропные упругие среды

Так как U и F являются скалярными функциями, то они могут зависеть от компонент тензоров только через их инварианты. Если все параметры χ_k — скаляры, то тело называется изотропным. В изотропном теле свободная энергия F фактически зависит не от шести переменных параметров ε_{ij}, а только от трех независимых инвариантов, которые можно составить из компонент $\overset{\circ}{g}{}^{ij}$ и ε_{ij}, например, от $\overset{\circ}{I}_1$, $\overset{\circ}{I}_2$, $\overset{\circ}{I}_3$:

$$\overset{\circ}{I}_1 = \overset{\circ}{g}{}^{ij} \varepsilon_{ij},$$
$$\overset{\circ}{I}_2 = \overset{\circ}{g}{}^{ik} \overset{\circ}{g}{}^{jl} \varepsilon_{il} \varepsilon_{jk}, \tag{2.20}$$
$$\overset{\circ}{I}_3 = \overset{\circ}{g}{}^{im} \overset{\circ}{g}{}^{jl} \overset{\circ}{g}{}^{kn} \varepsilon_{jm} \varepsilon_{in} \varepsilon_{kl}.$$

Если свободная энергия упругого тела, кроме T и ε_{ij}, зависит также и от χ_k, причем среди χ_k есть компоненты векторов или тензоров, то тело анизотропно. В анизотропном теле свободная энергия зависит от ε_{ij} не только через инварианты (2.20), но и через совместные инварианты тензора деформаций и других тензорных аргументов функции F. Так, если свойства среды зависят от некоторого вектора $\boldsymbol{b}$ (среда типа текстуры), то среди аргументов F появляются инварианты вида $\varepsilon_{ij} b^i b^j$.

В заключение этого параграфа рассмотрим с общей точки зрения модель линейного упругого тела, подчиняющегося закону Гука, о которой уже шла речь в гл. IV т. 1.

Свободная энергия единицы объема упругого тела в случае малых относительных смещений и малых изменений температуры

Рассмотрим упругое тело, в котором компоненты тензора деформаций ε_{ij}, и относительные смещения малы, а в качестве начального состояния, отвечающего метрике $\overset{\circ}{g}_{ij}$ (см. § 1), выбрано состояние, которое может быть реально осуществлено, т. е. существуют перемещения из состояния, отвечающего метрике $\overset{\circ}{g}_{jj}$, в актуальное деформированное состояние. Пусть лагранжева система координат ξ^i в начальном состоянии выбрана совпадающей с системой отсчета. Тогда координаты x^i точек среды в деформированном состоянии представляются в виде

$$x^i = \xi^i + \Delta^i(\xi^k, t),$$

причем Δ^i и $\partial\Delta^i/\partial\xi^k$ малы (относительные смещения малы). В этом случае компоненты всех тензоров в лагранжевой системе координат и в системе отсчета различаются на малые высшего порядка по сравнению с величинами самих компонент. Имея это в виду, дальше будем опускать знак $\hat{}$ над компонентами тензоров.

Для малых деформаций удобно вместо F рассматривать величину $\Phi = \rho_0 F$ — свободную энергию единицы объема, а уравнения состояния писать в виде

$$p^{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad s = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Phi}{\partial T}. \tag{2.21}$$

Рассмотрим разложение функции Φ в ряд, считая, что $\varepsilon_{ij} \ll 1$, $T = T_0 + \Delta T$, $\Delta T \ll T_0$,

$$\Phi = \Phi_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_0 \varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_0 (T - T_0) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0 \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial T}\right)_0 \varepsilon_{ij}(T - T_0) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}\right)_0 (T - T_0)^2 + (\text{члены высшего порядка малости}). \tag{2.22}$$

Если начальное состояние выбрано так, что в этом состоянии напряжения равны нулю, т. е. $p^{ij} = 0$ при $\varepsilon_{ij} = 0$ и $T = T_0$, то

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_0 = 0.$$

Кроме того,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_0 = -\rho_0 s_0,$$

где s_0 — энтропия в начальном состоянии [1]).

Обозначим теперь постоянные $(\partial^2\Phi / \partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl})_0$ через A^{ijkl}, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T}\right)_0$ — через B^{ij} и $(\partial^2\Phi/\partial T^2)_0$ — через c. Оставляя в (2.22) только малые второго порядка, получим следующее выражение свободной энергии единицы объема упругого тела с малыми деформациями и с малыми изменениями температуры:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} A^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + B^{ij}\varepsilon_{ij}(T - T_0) + \frac{c}{2}(T - T_0)^2 - \rho_0 s_0 (T - T_0). \quad (2.23)$$

Чтобы задать конкретную модель термоупругого тела с малыми ε_{ij} и ΔT, надо задать численные значения констант A^{ijkl}, B^{ij} и c. Из определения A^{ijkl} видно, что эти величины симметричны по i, j и по k, l, а также не меняются при замене i, j на k, l. Поэтому число различных A^{ijkl} не может быть больше двадцати одного. Величины B^{ij} также симметричны по i, j, максимальное число различных B^{ij} равно шести. Следовательно, в линейной термоэластике произвольное анизотропное термоупругое тело характеризуется двадцатью восемью константами A^{ijkl}, B^{ij}, c.

В случае изотропного тела для получения более конкретного вида свободной энергии можно воспользоваться тем, что функция Ф на самом деле может зависеть только от инвариантов тензора деформаций. Поэтому для изотропного упругого тела формулу (2.23), вводя подходящие обозначения для коэффициентов, можно представить в виде

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 - (3\lambda + 2\mu)\alpha I_1 (T - T_0) - f(T). \quad (2.24)$$

Закон Гука с учетом температурных напряжений

На основании (2.21) получим обобщение закона Гука, введенного ранее в гл. IV т. 1, на случай, когда учитываются температурные напряжения и деформации, а именно:

$$p_{ij} = \lambda I_1 g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0) g_{ij}, \quad (2.25)$$

$$s = \frac{1}{\rho_0}(3\lambda + 2\mu)\alpha I_1 + \frac{1}{\rho_0} f'(T). \quad (2.26)$$

Коэффициенты λ и μ являются параметрами Ламе.

[1]) Значение s_0 фиксирует аддитивную постоянную энтропии.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона

Вместо параметров λ и μ на практике и в теории часто используют модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ, определяемые формулами

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{2.27}$$

Выражающие закон Гука формулы (2.25) легко разрешаются относительно компонент тензора деформаций ε_{ij}:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\sigma)p_{ij} - \sigma\mathcal{P}g_{ij}] + \alpha(T - T_0)g_{ij}, \tag{2.28}$$

где $\mathcal{P} = p^{ij}g_{ij} = p^i_i$ — первый инвариант тензора напряжений. Если напряжения равны нулю, $p^{ij} = 0$, то деформации могут быть отличны от нуля за счет изменения температуры. В этом случае тензор деформаций получается шаровым и в декартовых координатах будем иметь

Коэффициент линейного расширения

$$\varepsilon_{11} = \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{22} = \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{33} = \alpha(T - T_0),$$
$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Следовательно, коэффициент α, входящий в выражения закона Гука, представляет собой коэффициент линейного расширения рассматриваемого материала.

С помощью (2.14) легко усмотреть, что коэффициент c, входящий в выражение (2.23) для свободной энергии линейного термоупругого тела, связан с теплоемкостью при постоянных деформациях.

§ 3. Задачи об одноосном растяжении упругого бруса

Рассмотрим малые деформации цилиндрического бруса, сделанного из изотропного упругого материала, подчиняющегося закону Гука, и растягиваемого (или сжимаемого) вдоль оси с помощью заданной системы массовых или поверхностных сил.

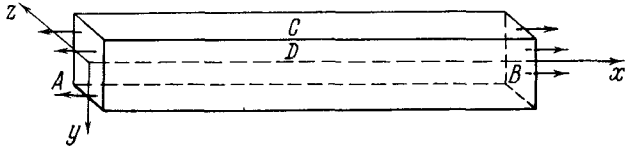


Рис. 107. Простое растяжение бруса.

Начнем с задачи о равновесии бруса прямоугольного поперечного сечения, при условии, что по торцам бруса приложены поверхностные силы (рис. 107).

Основные предположения и граничные условия

В постановку задачи включим следующие предположения.

1) Массовые силы отсутствуют (в частности, не учитывается сила веса).

2) Все частицы бруса имеют одну и ту же постоянную температуру T_0, соответствующую отсутствию «температурных» напряжений при отсутствии деформаций в брусе.

3) Боковые грани бруса C и D и противоположные им грани C_1 и D_1 свободны от нагрузок (на самом деле, если явление происходит в атмосфере, то на боковые грани действует атмосферное давление). Таким образом, принимаем, что на боковых гранях

$$\boldsymbol{p}^n = 0. \tag{3.1}$$

Это означает, что (при расположении координатных осей, указанном на рис. 107)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{на гранях } C \text{ и } C_1 & p_{21} = p_{22} = p_{23} = 0, \\ \text{а на гранях } D \text{ и } D_1 & p_{31} = p_{32} = p_{33} = 0. \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

4) На каждом из торцов (A и B) действуют внешние поверхностные силы; равнодействующие этих сил на каждом из торцов равны по величине, так как брус находится в равновесии. Обозначим величину этих равнодействующих через F. Рассмотрим случай, когда поверхностные силы по торцам A и B распределены следующим образом:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{на } B & \boldsymbol{p}^n = p_{11}(B)\,\boldsymbol{i}, & p_{12} = p_{13} = 0, \\ \text{на } A & \boldsymbol{p}^n = -p_{11}(A)\,\boldsymbol{i}, & p_{12} = p_{13} = 0, \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

причем

$$p_{11}(B) = p_{11}(A) = \frac{\mathsf{F}}{S} = \text{const},$$

где S — площадь поперечного сечения бруса.

В согласии со сказанным выше примем, что при $\mathsf{F} = 0$ и $T = T_0$ получается состояние, соответствующее отсутствию внутренних напряжений и деформаций в брусе. Если это состояние принять за начальное, то получим $\overset{*}{\varepsilon}_{ij} = 0$. Требуется найти напряжения, деформации и перемещения, возникающие в брусе под действием растягивающих сил (при $\mathsf{F} > 0$) и сжимающих сил (при $\mathsf{F} < 0$).

Прежде чем дать решение этой задачи, сделаем замечание общего характера по поводу определения перемещений. Очевидно, что в этой задаче, так же как в большом числе других задач о равновесии упругих тел под действием различных сил, перемещения могут быть определены только с точностью до

перемещения всего тела как абсолютно твердого (с этим связано понятие об инвариантности законов механики в зависимости от места и направления в пространстве — однородность и изотропность евклидова пространства). Необходимо указать дополнительные условия, которые позволят исключить указанный произвол при определении перемещений, что и будет сделано далее.

Решение уравнений равновесия, удовлетворяющее граничным условиям

Уравнения импульса в рассматриваемом случае сводятся к трем уравнениям равновесия, которым должны удовлетворять шесть компонент тензора напряжений внутри бруса:

$$\nabla_j p^{ij} = 0. \tag{3.4}$$

Легко догадаться, что решение уравнений равновесия (3.4), удовлетворяющее граничным условиям (3.2) и (3.3) и описывающее распределение напряжений внутри бруса, имеет вид

$$p_{11} = \frac{F}{S}, \quad p_{12} = p_{13} = p_{22} = p_{23} = p_{33} = 0. \tag{3.5}$$

Заметим, что решение уравнений равновесия (3.5) годится и в случае аналогичной задачи о растяжении (или сжатии) цилиндрического бруса произвольного поперечного сечения распределенными по его торцам A и B силами (3.3), когда его боковая поверхность $S_{бок}$ свободна от напряжений ($\boldsymbol{p}^n = 0$ на $S_{бок}$). Для того чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что решение (3.5) удовлетворяет граничному условию на боковой поверхности такого бруса. На $S_{бок}$ по условию имеем

$$\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{p}^2 \cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{p}^3 \cos(\boldsymbol{n}, z), \tag{3.5'}$$

но в силу выбора оси x на боковой поверхности цилиндрического бруса $\cos(\boldsymbol{n}, x) = 0$ и поэтому решение (3.5) действительно удовлетворяет граничному условию (3.1) на любой цилиндрической поверхности $S_{бок}$.

Определение деформаций

Для определения по известным напряжениям деформаций внутри бруса удобно воспользоваться законом Гука в форме (2.28); при $T = T_0$ имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\sigma)p_{ij} - \sigma \mathcal{P} g_{ij}],$$

где $\mathcal{P}$ — первый инвариант тензора напряжений. Подставив в него значения компонент тензора напряжений p_{ij} (3.5),

легко получим, что

$$\varepsilon_{11} = \frac{F}{ES}, \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\sigma F}{ES}, \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\sigma F}{ES}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0. \tag{3.6}$$

Об удовлетворении уравнений совместности

Для определения компонент w_1, w_2, w_3 вектора перемещений нужно проинтегрировать следующую систему шести дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{F}{ES}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial y} = -\frac{\sigma F}{ES}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial z} = -\frac{\sigma F}{ES}, \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \\ 2\varepsilon_{13} &= \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0, \\ 2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Эти уравнения для перемещений написаны в предположении, что деформации малы, они получаются после линеаризации соответствующих уравнений для конечных деформаций.

Система дифференциальных уравнений (3.7) и (3.8) является совместной, так как найденные выше значения деформаций (3.6) удовлетворяют уравнениям совместности. Действительно, в рассматриваемом случае бесконечно малых деформаций уравнения совместности в декартовых координатах (см. стр. 91 т. 1) имеют вид

$$R_{ik\lambda\mu} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{i\mu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{i\lambda}}{\partial x^k \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{k\lambda}}{\partial x^i \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{k\mu}}{\partial x^i \partial x^\lambda} = 0, \tag{3.9}$$

т. е. в них входят только вторые производные компонент тензора деформаций. Так как найденные компоненты тензора деформаций (3.6) имеют постоянные значения, то уравнения (3.9) автоматически удовлетворяются. Очевидно, что условия совместности (3.9) всегда удовлетворяются и в том случае, когда компоненты тензора деформаций являются линейными функциями декартовых координат.

Замечание об определении перемещений по известным деформациям в общем случае

Дифференциальные уравнения для определения перемещений (3.7), (3.8) являются линейными уравнениями. Ясно, что решение, соответствующее заданным значениям ε_{ij}, может быть определено из них лишь с точностью до функций, удовлетворяющих уравнениям:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\partial w_3}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y} = \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0. \tag{3.10}$$

Найдем общее решение уравнений (3.10). Из первой группы уравнений (3.10) вытекает, что

$$w_1 = \varphi_1(y, z), \quad w_2 = \varphi_2(x, z), \quad w_3 = \varphi_3(x, y), \qquad (3.11)$$

где φ_1, φ_2, φ_3 — произвольные функции указанных аргументов. Для определения этих функций из второй группы уравнений (3.10) получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2(x, z)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3(x, y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) следует

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \alpha(z), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = \beta(y), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \gamma(x),$$

где α, β, γ — пока произвольные функции указанных аргументов. После интегрирования этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha(z)\, y + f_1(z) = \beta(y)\, z + g_1(y), \\ \varphi_2 &= -\alpha(z)\, x + f_2(z) = \gamma(x)\, z + g_2(x), \\ \varphi_3 &= -\beta(y)\, x + f_3(y) = -\gamma(x)\, y + g_3(x), \end{aligned}$$

где f_i, g_i — произвольные функции своих аргументов. Отсюда непосредственно видно, что искомые функции φ_1, φ_2, φ_3 должны иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= k_1 zy + k_2 z + k_3 y + k_4, \\ \varphi_2 &= m_1 zx + m_2 z + m_3 x + m_4, \\ \varphi_3 &= l_1 xy + l_2 x + l_3 y + l_4, \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

где k_i, m_i и l_i — некоторые постоянные, которые в силу уравнений (3.12) должны быть связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} k_1 z + k_3 + m_1 z + m_3 &= 0, \\ k_1 y + k_2 + l_1 y + l_2 &= 0, \\ m_1 x + m_2 + l_1 x + l_3 &= 0, \end{aligned}$$

каждое из которых должно выполняться при любых z, y и x соответственно. Из этих соотношений вытекает, что

1) $k_1 = -m_1$, $k_1 = -l_1$, $m_1 = -l_1$,

отсюда $k_1 = m_1 = l_1 = 0$;

2) $k_3 = -m_3 = -a_3$, $k_2 = -l_2 = a_2$, $m_2 = -l_3 = -a_1$,

где a_1, a_2, a_3 — новые обозначения постоянных.

Таким образом, решения (3.13) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= a_2 z - a_3 y + k_4, \\ \varphi_2 &= -a_1 z + a_3 x + m_4, \\ \varphi_3 &= -a_2 x + a_1 y + l_4. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Введя векторы

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

и $\boldsymbol{\varphi}_0 = k_4\boldsymbol{i} + m_4\boldsymbol{j} + l_4\boldsymbol{k}$, видим, что (3.14) можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varphi} = \varphi_1\boldsymbol{i} + \varphi_2\boldsymbol{j} + \varphi_3\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} \tag{3.15}$$

Следовательно, решения w_1, w_2, w_3 уравнений (3.10) имеют вид (3.14) или (3.15) и содержат шесть произвольных постоянных.

Формула (3.15) при бесконечно малых a_1, a_2, a_3 определяет перемещения тела как абсолютно твердого [1]). Действительно, выражение (3.15) для вектора перемещения мы нашли как решение уравнений

$$\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} = 0. \tag{3.10'}$$

При бесконечно малых относительных перемещениях, т. е. при бесконечно малых значениях $\partial w_i/\partial x^j$, эти условия означают равенство нулю компонент тензора деформаций ε_{ij}.

В рассматриваемом случае бесконечно малых относительных смещений компоненты вектора $\boldsymbol{a}$ малы и определяют собой малый поворот тела, происходящий при перемещениях $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$. Вектор малого поворота можно связать с вектором вихря $\boldsymbol{\omega}$ формулой $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}\,\Delta t$.

Чтобы исключить из рассмотрения возможное перемещение тела как абсолютно твердого, можно при определении переме-

---

[1]) Очевидно, что, если a_1, a_2, a_3 конечны, то при перемещениях (3.15) деформации отличны от нуля. Это связано с тем, что при конечных $\partial w_i/\partial x^j$ компоненты тензора деформаций должны вычисляться по формулам

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} + \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial w_\alpha}{\partial x^j}\right). \tag{A}$$

Если $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$, то формулы (А) дают

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(a_3^2 + a_2^2), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(a_3^2 + a_1^2), \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2),$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{1}{2}a_1a_2, \quad \varepsilon_{13} = -\frac{1}{2}a_1a_3, \quad \varepsilon_{23} = -\frac{1}{2}a_2a_3.$$

щений дополнительно потребовать, например [1]), чтобы некоторая точка упругого тела сохраняла свое положение в пространстве и компоненты вектора малого поворота главных осей деформации в этой точке были равны нулю:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x^j} - \frac{\partial w_j}{\partial x^i} = 0.$$

Заметим, что выполнение этих условий не означает, что рассматриваемая точка действительно закреплена в пространстве с помощью сил. Если тело находится в равновесии, то, не меняя системы внешних сил, можно считать закрепленной любую (но в общем случае единственную) точку тела. При этом не интересующая нас часть перемещений и поворота исключается из рассмотрения. Очевидно, что выражения для перемещений будут различными, если мы будем считать неподвижными различные точки тела.

Определение перемещений в случае растяжения бруса

В задаче о растяжении бруса формулы для перемещений получаются как решения уравнений (3.7), (3.8) и могут быть записаны в виде

$$w_1 = \frac{F}{ES}x + \varphi_1, \qquad w_2 = -\frac{\sigma F}{ES}y + \varphi_2, \tag{3.16}$$

$$w_3 = -\frac{\sigma F}{ES}z + \varphi_3,$$

где φ_1, φ_2, φ_3 определяются согласно (3.14). Если дополнительно потребовать, чтобы в начале координат отсутствовали перемещение и поворот главных осей деформации, т. е. чтобы при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0$$

и

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0,$$

то выражения для перемещений принимают вид

$$w_1 = \frac{F}{ES}x, \quad w_2 = -\frac{\sigma F}{ES}y, \quad w_3 = -\frac{\sigma F}{ES}z. \tag{3.17}$$

Анализ полученного решения

Брус растягивается силами, приложенными на его торцах A и B и направленными по оси x, но, как видно из (3.17), частицы бруса испытывают перемещения также и вдоль осей y и z.

[1]) Вместо этих условий можно пользоваться и другими, важно, однако, что соответствующие дополнительные условия всегда необходимы.

Величина компоненты смещения w_1 вдоль оси x пропорциональна x, максимальна в сечении B и не зависит от y и z. Величины компонент смещения w_2 и w_3 по осям y и z пропорциональны y и z и не зависят от x, z и x, y соответственно. Как ясно из формул для компонент тензора деформаций (3.6), деформации вдоль оси x и осей y и z имеют разные знаки. Если $F > 0$, то ε_{11} положительно, т. е. брус испытывает растяжение вдоль оси x, а ε_{22} и ε_{33} отрицательны, т. е. брус испытывает сжатие в направлении осей y и z. Отношение компонент тензора деформаций

$$\left|\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right| = \left|\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}\right|$$

равняется σ — значению коэффициента Пуассона.

Другие условия на торцах бруса

Если рассмотреть задачу о растяжении призматического бруса под действием поверхностных сил, которые распределены на одном торце по закону (3.3), в том случае, когда второй торец A этого бруса некоторым способом заделан (рис. 108), то приведенное решение будет описывать деформации и напряжения в таком брусе, строго говоря, только в том случае, если способ заделки торца A допускает смещения в направлении осей y и z. Если же торец A бруса заделан жестко, то построенное решения не является точным решением этой задачи. Однако в дальнейшем мы введем так называемый принцип Сен-Венана, согласно которому полученное решение может быть использовано для приближенного определения напряжений и деформаций в задаче о брусе с жестко заделанным торцом A в области, достаточно удаленной от места заделки, если площадь поперечного сечения бруса мала по сравнению с его длиной вдоль оси x.

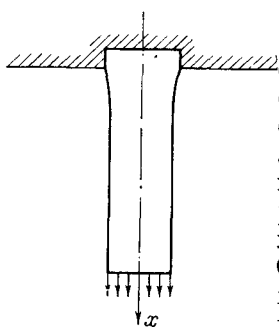


Рис. 108. Растяжение стержня в случае жестко заделанного торца A.

Постановка задачи о растяжении бруса под действием собственного веса

Рассмотрим теперь задачу о растяжении цилиндрического бруса под действием собственного веса. При этом сохраним неизменными основные предположения, при которых решалась первая задача о растяжении бруса под действием поверхностных сил, распределенных по его торцам, а именно предположим, что $T = T_0 = \text{const}$, $\overset{*}{\varepsilon}_{ij} = 0$, но $\boldsymbol{F} = g\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{p}^n = 0$ всюду на внешней поверхности бруса, за исключением торца A, где брус закреплен.

Напряжения $\boldsymbol{p}^n$ на торце A определятся в результате решения задачи (рис. 109).

Воспользуемся системой координат, указанной на рис. 109. Уравнения равновесия в этом случае будут иметь вид

$$\nabla_i p^{ij} + \rho F^j = 0, \tag{3.18}$$

причем $F^2 = F^3 = 0$ и $F^1 = g$.

Определение напряжений

Для решения уравнений равновесия примем, что

$$p^{22} = p^{33} = p^{12} = p^{13} = p^{23} = 0, \tag{3.19}$$

и будем искать p^{11}, для определения которого получим простое уравнение

$$\frac{\partial p^{11}}{\partial x} = -\rho g.$$

Отсюда

$$p^{11} = -\rho g x + \varphi(y, z), \tag{3.20}$$

где $\varphi(y, z)$ — пока произвольная функция y и z, для определения которой воспользуемся граничным условием на нижнем торце бруса B (см. рис. 109). При $x = 0$ должны иметь $p^{11} = 0$ и, следовательно,

$$\varphi(y, z) = 0.$$

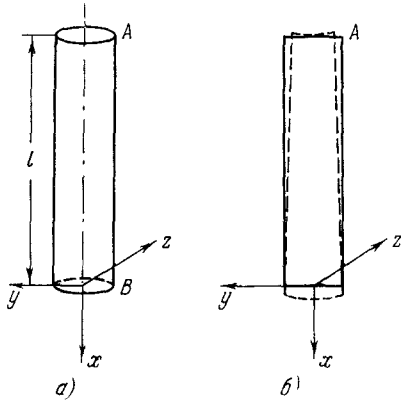


Рис. 109. К растяжению бруса под действием собственного веса.

Распределение напряжений (3.19), (3.20) удовлетворяет внутри бруса всем уравнениям равновесия (3.17), а на внешней поверхности — условиям $\boldsymbol{p}^n = 0$ (на нижнем торце B и боковой поверхности бруса). Действительно, на боковой поверхности бруса $S_{бок}$ имеем

$$\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{p}^2 \cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{p}^3 \cos(\boldsymbol{n}, z),$$

но на $S_{бок}$ в силу выбора осей координат $\cos(\boldsymbol{n}, x) = 0$, и поэтому на основании (3.19) на $S_{бок}$

$$\boldsymbol{p}^n = 0.$$

На верхнем торце A ($x = -l$) из (3.20) имеем

$$p^{11} = \rho g l = \frac{G}{S}, \tag{3.21}$$

где S — площадь поперечного сечения, а $G = \rho g l S$ — полный вес бруса.

Определение деформаций и перемещений С помощью закона Гука (2.28) при $T = T_0$ на основании (3.19), (3.20) легко находим компоненты тензора деформаций

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{p^{11}}{E} = -\frac{\rho g x}{E}, \qquad \varepsilon_{22} = -\frac{\sigma p^{11}}{E} = \frac{\sigma \rho g x}{E}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\sigma p^{11}}{E} = \frac{\sigma \rho g x}{E}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

которые, очевидно, удовлетворяют уравнениям совместности (3.9).

Для определения перемещений w_1, w_2, w_3 имеем следующую совместную систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{\rho g x}{E}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\sigma \rho g x}{E}, \quad \frac{\partial w_3}{\partial z} = \frac{\sigma \rho g x}{E}, \\ &\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Интегрируя первую группу этих уравнений, получаем

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -\frac{\rho g x^2}{2E} + \psi_1(y, z), \\ w_2 &= \frac{\sigma \rho g x y}{E} + \psi_2(x, z), \\ w_3 &= \frac{\sigma \rho g x z}{E} + \psi_3(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Подставив (3.24) во вторую группу уравнений, будем иметь следующие уравнения для определения функций ψ_1, ψ_2, ψ_3:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\sigma \rho g y}{E} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\sigma \rho g z}{E} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Если ввести переобозначение

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1'(y, z) = \psi_1 + \frac{\sigma \rho g}{2E}(y^2 + z^2), \\ &\varphi_2 = \psi_2, \quad \varphi_3 = \psi_3, \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

то система уравнений (3.25) для ψ_1, ψ_2, ψ_3 сведется к решенной выше системе уравнений (3.12) для φ_1', φ_2, φ_3. Следовательно, решение системы уравнений (3.23) можно непосредственно

выписать с помощью (3.24), (3.26) и (3.14). Оно имеет вид

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -\frac{\rho g}{2E}\left[x^2 + \sigma\left(y^2 + z^2\right)\right] + a_2 z - a_3 y + k_4, \\ w_2 &= \frac{\sigma\rho g x y}{E} - a_1 z + a_3 x + m_4, \\ w_3 &= \frac{\sigma\rho g x z}{E} - a_2 x + a_1 y + l_4. \end{aligned}\right\} \qquad (3.27)$$

Условия для однозначного определения перемещений

Для исключения перемещения бруса как абсолютно твердого примем, что при $x = -l$, $y = 0$, $z = 0$, т. е. в центре верхнего торца, выполняются следующие условия:

$$\boldsymbol{w} = 0,$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0.$$

Тогда

$$a_1 = a_2 = a_3 = m_4 = l_4 = 0, \qquad k_4 = \frac{\rho g}{2E} l^2.$$

Формулы (3.27) для перемещений принимают вид

$$w_1 = -\frac{\rho g}{2E}\left[\left(x^2 - l^2\right) + \sigma\left(y^2 + z^2\right)\right], \qquad w_2 = \frac{\sigma\rho g x y}{E}, \qquad w_3 = \frac{\sigma\rho g x z}{E}. \qquad (3.28)$$

Анализ полученного решения

Точки оси бруса ($y = z = 0$) перемещаются вертикально ($w_2 = w_3 = 0$); во всех других точках, кроме точек сечения $x = 0$, горизонтальные перемещения отличны от нуля. Рассмотрим внутри или на поверхности бруса частицы, располагавшиеся до деформации на прямой, параллельной оси x ($y = y_0$, $z = z_0$). После деформации эти частицы будут лежать на линии $y = y_0 + w_2$, $z = z_0 + w_3$ или

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0\left(1 + \frac{\sigma\rho g}{E} x\right), \\ z &= z_0\left(1 + \frac{\sigma\rho g}{E} x\right), \end{aligned}\right\} \qquad (3.29)$$

т. е. они вновь образуют прямую линию. Прямая (3.29) и ось бруса, очевидно, пересекаются в точке

$$x = -\frac{E}{\sigma\rho g}, \qquad y = z = 0, \qquad (3.30)$$

координаты которой не зависят от z_0 и y_0. Следовательно, если в брусе взять любой цилиндр с осью Ox, то после деформации он перейдет в конус с вершиной на оси x в точке (3.30).

Плоские поперечные сечения бруса после деформации перестают быть плоскими.

Действительно, плоское сечение $x = x_0$ после деформации будет иметь уравнение $x = x_0 + w_1$ или

$$x = x_0 - \frac{\rho g}{2E}\left[x_0^2 - l^2 + \sigma\left(y^2 + z^2\right)\right],$$

т. е. превращается в поверхность параболоида вращения. На рис. 109, *б* показано сечение бруса плоскостью xOy после деформации.

Наибольшее напряжение p_{11} получается в верхнем сечении бруса. Оно не зависит от площади поперечного сечения и дается формулой

$$(p_{11})_{\max} = \rho g l. \tag{3.31}$$

Если для данного материала известно максимальное напряжение, которое он может выдержать при растяжении, то по формуле (3.31) можно оценить наибольшую длину троса или стержня из этого материала, при котором он не разорвется под действием собственного веса. Такие оценки необходимы, например, при расчете труб, которые опускаются в нефтяные скважины (в настоящее время имеются скважины глубиной 5—6 *км* и больше).

В точках верхнего торца бруса A имеются как вертикальные, так и горизонтальные перемещения.

Решение, строго говоря, справедливо только в том случае, когда полученные смещения допускаются способом заделки бруса. Однако по принципу Сен-Венана (см. ниже, § 5) приближенно это решение может быть использовано, например, в случае жесткой заделки, если поперечное сечение бруса не слишком велико по сравнению с его длиной и, следовательно, влияние способа крепления верхнего сечения бруса мало сказывается на деформациях в основной его части.

§ 4. Деформации и напряжения, возникающие в круглой трубе из упругого материала под действием внутреннего и внешнего давлений (задача Ламе)

Рассмотрим круглую цилиндрическую трубу из упругого материала, подчиняющегося закону Гука. Требуется найти напряжения и деформации в стенках трубы при условии, что она находится под действием внутреннего p_a и внешнего p_b давлений при постоянной температуре $T = T_0$, соответствующей отсутствию «температурных» напряжений при отсутствии деформаций, которую назовем «равновесной».

Концы трубы закреплены так, что перемещения вдоль ее оси отсутствуют, а перемещения в поперечном направлении ничем не стеснены (рис. 110).

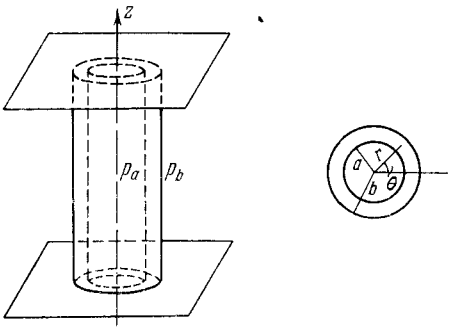


Рис. 110. Труба под действием внутреннего и внешнего давлений.

Пусть известно, что, когда $p_a = p_b = 0$, деформации и напряжения в стенках трубы отсутствуют. Примем это состояние за начальное, тогда $\overset{*}{\varepsilon}_{ij} = 0$ и существуют перемещения $\boldsymbol{w}$ от начального состояния к рассматриваемому деформированному, возникающему при p_a и p_b не равных нулю.

Система уравнений

Напишем полную систему уравнений и необходимые граничные условия рассматриваемой задачи. Система уравнений состоит из а) уравнений равновесия (без учета массовых сил)

$$\nabla_j p^{ij} = 0,$$

б) закона Гука

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\, g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij},$$

в) выражений деформаций через перемещения (относительные смещения предполагаются малыми)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i).$$

Граничные условия

Граничные условия на внешней и внутренней боковых поверхностях трубы записываются в виде (см. рис. 110)

$$\boldsymbol{p}_n = -p_a \boldsymbol{n} \quad \text{при} \quad r = a,$$

$$\boldsymbol{p}_n = -p_b \boldsymbol{n} \quad \text{при} \quad r = b,$$

где через a и b обозначены внутренний и внешний радиусы

поперечного сечения трубы до деформации, а через n — внешняя нормаль к соответствующим боковым поверхностям. Обратим внимание, что мы требуем выполнения граничных условий на границах, которые имела труба до деформации. При этом мы снова пользуемся тем, что относительные перемещения частиц трубы малы.

Для трубы конечной длины $\mathscr{L}$ необходимо написать также граничные условия на торцах $z = 0$ и $z = \mathscr{L}$. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$w_n = 0, \quad p_{n\tau} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = \mathscr{L},$$

где n — нормаль к торцовым поверхностям, а τ — вектор, лежащий в плоскости торцов [1]). Условие $p_{n\tau} = 0$ связано с предположением, что крепления концов трубы не препятствуют перемещению частиц в направлении, перпендикулярном к оси.

Цилиндрическая система координат

Ввиду очевидной симметрии задачи для ее решения удобно пользоваться цилиндрической системой координат $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$ (см. рис. 110).

Напомним (стр. 180 т. 1), что в цилиндрической системе координат

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2,$$

следовательно, матрицы $\|g_{ij}\|$ и $\|g^{ij}\|$ метрического тензора имеют вид

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \|g^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Длины соответствующих базисных векторов таковы:

$$|\mathfrak{e}_1| = 1, \quad |\mathfrak{e}_2| = r, \quad |\mathfrak{e}_3| = 1,$$
$$|\mathfrak{e}^1| = 1, \quad |\mathfrak{e}^2| = \frac{1}{r}, \quad |\mathfrak{e}^3| = 1.$$

Для символов Кристоффеля Γ^i_{jk} в цилиндрической системе координат имеем $\Gamma^1_{22} = -r$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$, остальные Γ^i_{jk} равны нулю.

---

[1]) Вместо граничного условия для перемещений $w_n = 0$ на торцах можно рассмотреть другие условия, например, условие отсутствия напряжений $p_{33} = 0$ и т. п.

Перемещения, деформации и напряжения при цилиндрической симметрии

Очевидно, что в рассматриваемом случае можно искать решение задачи, считая, что все искомые функции зависят только от координаты r, и для вектора перемещения $\boldsymbol{w}$ полагать

$$w_1 = w(r), \quad w_2 = w_3 = 0 \tag{4.1}$$

Тогда для компонент тензора деформаций получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = \nabla_1 w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial r} - w_\alpha \Gamma^\alpha_{11} = \frac{dw}{dr}, \\
&\varepsilon_{22} = \nabla_2 w_2 = \frac{\partial w_2}{\partial \theta} - w_\alpha \Gamma^\alpha_{22} = wr, \\
&\varepsilon_{33} = \nabla_3 w_3 = \frac{\partial w_3}{\partial z} - w_\alpha \Gamma^\alpha_{33} = 0, \\
&\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\nabla_1 w_2 + \nabla_2 w_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - 2w_\alpha \Gamma^\alpha_{12}\right) = 0, \\
&\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(\nabla_1 w_3 + \nabla_3 w_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial r} + \frac{\partial w_1}{\partial z} - 2w_\alpha \Gamma^\alpha_{13}\right) = 0, \\
&\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(\nabla_2 w_3 + \nabla_3 w_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial \theta} + \frac{\partial w_1}{\partial z} - 2w_\alpha \Gamma^\alpha_{23}\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Первый инвариант тензора деформаций выражается через $w(r)$ следующим образом:

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{ij} g^{ij} = \frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}.$$

Получим теперь выражения для компонент тензора напряжений, пользуясь законом Гука.

Имеем

$$\left.\begin{aligned}
&p^{11} = \lambda\left(\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}\right) + 2\mu\frac{dw}{dr}, \\
&p^{22} = \lambda\left(\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}\right)\frac{1}{r^2} + 2\mu\frac{w}{r^3}, \\
&p^{33} = \lambda\left(\frac{dw}{dr} + \frac{w}{r}\right), \\
&p^{13} = p^{23} = p^{21} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Определение перемещений

Поэтому из трех уравнений равновесия два удовлетворяются тождественно, а уравнение в проекции на ось $x^1 = r$

$$\frac{dp^{11}}{dr} + p^{22}\Gamma^1_{22} + p^{11}\Gamma^2_{12} = 0$$

приводится к следующему одному уравнению для перемещения $w(r)$, которое могло бы быть получено и непосредственно из уравнений равновесия в перемещениях Ламе (см. стр. 176 т. 1) при условии (4.1):

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}+\frac{w}{r}\right)=0. \tag{4.4}$$

Из (4.1) и (4.3) видно, что граничные условия на торцах цилиндра удовлетворяются при любом $w(r)$. Условия на боковых поверхностях дают

$$\begin{aligned} p^{11}&=(\lambda+2\mu)\frac{dw}{dr}+\lambda\frac{w}{r}=-p_a \quad \text{при } r=a,\\ p^{11}&=(\lambda+2\mu)\frac{dw}{dr}+\lambda\frac{w}{r}=-p_b \quad \text{при } r=b. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Интегрируя (4.4), получим

$$\frac{dw}{dr}+\frac{w}{r}=\frac{1}{r}\frac{dwr}{dr}=\text{const},$$

отсюда

$$w=Ar+\frac{B}{r}. \tag{4.6}$$

Константы A и B определяются с помощью условий (4.5):

$$2(\lambda+\mu)A-2\mu B\frac{1}{a^2}=-p_a, \quad 2(\lambda+\mu)A-2\mu B\frac{1}{b^2}=-p_b,$$

откуда

$$\begin{aligned} A&=\frac{a^2p_a-b^2p_b}{2(\lambda+\mu)(b^2-a^2)},\\ B&=\frac{(p_a-p_b)\,a^2b^2}{(b^2-a^2)\,2\mu}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Формулы (4.2), (4.3), (4.6) и (4.7) позволяют найти деформации и напряжения в любой точке стенки трубы.

Распределение напряжений в стенках трубы

Проведем исследование напряженного состояния стенок трубы. Наилучшее представление о действительной величине напряжений дают так называемые «физические компоненты» тензора напряжений, т. е. компоненты в единичном базисе (см. стр. 179 т. 1).

Легко видеть, что в рассматриваемом случае физические компоненты $p^{11}_{\text{физ}}$, $p^{22}_{\text{физ}}$, $p^{33}_{\text{физ}}$ совпадают с главными компонентами тензора напряжений. Так как векторы базиса $\mathfrak{e}_1$ и $\mathfrak{e}_3$ имеют единичную длину, то $p^{11}_{\text{физ}}=p^{11}$, $p^{33}_{\text{физ}}=p^{33}$. Длина базисного

вектора ϑ_2 равна r, поэтому контравариантная компонента p^{22} меньше физической компоненты $p^{22}_{\text{физ}}$ в r^2 раз, т. е. $p^{22}_{\text{физ}} = r^2 p^{22}$. Вводя обозначения $p^{11}_{\text{физ}} = p_{rr}$, $p^{22}_{\text{физ}} = p_{\theta\theta}$, $p^{33}_{\text{физ}} = p_{zz}$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} p_{rr} &= p^{11} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \\ p_{\theta\theta} &= r^2 p^{22} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \\ p_{zz} &= p^{33} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,\frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Отсюда видно, что при положительных p_a и p_b величина p_{rr} всегда отрицательна, т. е. частицы трубы испытывают вдоль оси r сжатие. Знаки $p_{\theta\theta}$ и p_{zz} зависят от соотношения между p_a и p_b. Рассмотрим сначала случай, когда $p_b = 0$. Распределение напряжений по толщине стенки трубы представлено для этого случая на рис. 111.

Наиболее опасными напряжениями являются в данном случае растягивающие (положительные) напряжения $p_{\theta\theta}$, так как они могут вызвать появление трещин и разрушение трубы. Растягивающие напряжения p_{zz} всюду меньше, чем $p_{\theta\theta}$.

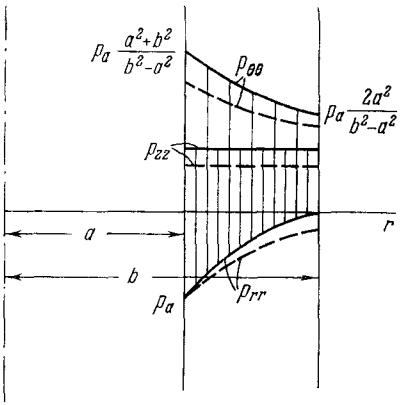


Рис. 111. Распределение напряжений в стенках трубы, находящейся под действием внутреннего давления при отсутствии внешнего давления (сплошная линия) и с внешним давлением (пунктирная линия)

Максимальные по величине напряжения (при $p_a > 0$) возникают на внутренней поверхности трубы. Поэтому при повышении внутреннего давления на внутренней поверхности трубы прежде всего могут произойти пластические деформации или возникнуть трещины.

Влияние толщины стенок на распределение напряжений в них

Рассмотрим, насколько улучшаются условия работы стенок трубы при увеличении толщины стенок (выгодно ли увеличивать толщину стенок трубы?). Зафиксируем величину a и исследуем изменение наиболее важной величины $p_{\theta\theta}(r = a)$ в зависимости от внешнего радиуса b, считая по-прежнему, что $p_b = 0$.

Имеем

$$p_{\theta\theta}(r=a) = p_a\left(\frac{2}{\frac{b^2}{a^2}-1}+1\right).$$

Изменение $p_{\theta\theta}(r=a)$ при увеличении b показано на рис. 112.

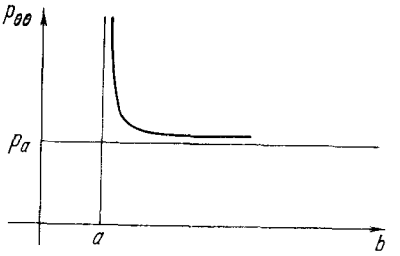


Рис. 112. Величина $p_{\theta\theta}(r=a)$ в зависимости от внешнего радиуса трубы.

Следовательно, при увеличении толщины стенки довольно быстро наступает такое положение, что дальнейшее сильное увеличение b приводит к малозаметному уменьшению разрывающего напряжения $p_{\theta\theta}(r=a)$. Поэтому большое увеличение толщины стенок не дает существенного увеличения прочности трубы.

Влияние внешнего давления

Формулы (4.8) показывают, что $p_{\theta\theta}$ и p_{zz} уменьшаются, если отлично от нуля внешнее давление p_b. При этом распределение напряжений в стенке трубы становится более равномерным (см. рис. 111). Это приводит к мысли об использовании составных труб с внутренними напряжениями для того, чтобы существенно улучшить условия работы внутреннего слоя, не увеличивая общей толщины стенки составной трубы.

О решении задачи Ламе для составной трубы

Предположим, что имеются две трубы, причем наружный диаметр первой (меньшей) трубы b_1 несколько больше, чем внутренний диаметр a_2 второй (большей) трубы. Если каким-либо способом (например, с помощью предварительного нагревания второй трубы) надеть вторую трубу на первую, то при «равновесной» температуре $T = T_0$ и отсутствии внутреннего и внешнего давлений получится система с внутренними напряжениями.

Рассмотрим задачу о нахождении напряжений и деформаций в такой составной трубе под действием внутреннего и внешнего давлений. Прежде всего заметим, что полученные выше формулы не дают решения этой задачи. Действительно, из (4.8),

в частности, видно, что $p_{rr}=p_{\theta\theta}=p_{zz}=0$ при $p_a = p_b = 0$. Однако это заведомо не так в рассматриваемом случае.

Решение (4.8) не годится здесь потому, что при его получении использовалось предположение о существовании непрерывных однозначных перемещений от начального ненапряженного состояния к деформированному. В данном случае можно получить действительно ненапряженное состояние во всех частях системы, если вытащить одну трубу из другой и убрать все внешние нагрузки. Мысленно разгрузку можно произвести без вытаскивания трубы, однако при этом нарушится однозначность перемещений, поэтому непрерывных однозначных перемещений к ненапряженному начальному состоянию в этом случае не существует.

Запишем полные напряжения $p^{ij}_{\text{полн}}$ в виде суммы начальных напряжений p^{ij}_0 и дополнительных напряжений p^{ij}, возникающих от действия внешних сил: $p^{ij}_{\text{полн}} = p^{ij}_0 + p^{ij}$.

Если в материале происходят только малые деформации и он подчиняется закону Гука, то дополнительные напряжения p^{ij} связаны с дополнительными деформациями ε_{ij} такими же соотношениями, которые имеются для полных напряжений и деформаций. В этом случае в силу линейности задачи можно определять p^{ij} по внешним нагрузкам так, как если бы начальных напряжений и деформаций не было. Внутренние начальные напряжения (а следовательно, и полные напряжения) можно определить, только если известна технология изготовления данной детали.

Если рассматриваемая задача нелинейна (относительные смещения не малы или напряжения связаны с деформациями нелинейными соотношениями и т. д.), то дополнительные (от внешних сил) напряжения и деформации нельзя определить, если начальные напряжения и деформации неизвестны.

Определение начальных напряжений в составной трубе

Как определить начальные напряжения в рассматриваемой составной трубе?

Рассмотрим отдельно каждую из двух труб, используемых в этой конструкции. Очевидно, что действие их друг на друга можно заменить действием некоторого давления $\mathcal{P}$. Тогда можно использовать для каждой трубы в отдельности полученное выше решение, в котором для внутренней трубы (с $a = a_1$, $b = b_1$) надо положить $p_a = 0$, $p_b = \mathcal{P}$, а для внешней трубы (с $a = a_2$, $b = b_2$) $p_a = \mathcal{P}$, $p_b = 0$. В частности, получится, что в стенках внутренней трубы

$$p_{\theta\theta} = -\mathcal{P}\frac{b_1^2}{b_1^2 - a_1^2}\left(1 + \frac{a_1^2}{r^2}\right),$$

в стенках наружной трубы

$$p_{\theta\theta} = \mathcal{P}\frac{a_2^2}{b_2^2 - a_2^2}\left(1 + \frac{b_2^2}{r^2}\right).$$

Для определения величины $\mathcal{P}$ следует приравнять внешний радиус первой трубы и внутренний радиус второй трубы после деформации. Имеем $b_1 + w_1(b_1) = a_2 + w_2(a_2)$, причем если трубы сделаны из одинакового материала, то

$$w_1(r) = A_1 r + \frac{B_1}{r} = -\frac{b_1^2 \mathcal{P} r}{2(\lambda+\mu)(b_1^2 - a_1^2)} - \frac{\mathcal{P} a_1^2 b_1^2}{2\mu(b_1^2 - a_1^2) r},$$

$$w_2(r) = A_2 r + \frac{B_2}{r} = \frac{\mathcal{P} a_2^2 r}{2(\lambda+\mu)(b_2^2 - a_2^2)} + \frac{\mathcal{P} a_2^2 b_2^2}{2\mu(b_2^2 - a_2^2) r}.$$

Для $\mathcal{P}$ получим формулу

$$\mathcal{P} = \frac{b_1 - a_2}{\dfrac{b_1}{2(b_1^2 - a_1^2)}\left[\dfrac{b_1^2}{\lambda+\mu} + \dfrac{a_1^2}{\mu}\right] + \dfrac{a_2}{2(b_2^2 - a_2^2)}\left[\dfrac{a_2^2}{\lambda+\mu} + \dfrac{b_2^2}{\mu}\right]}.$$

Если $b_1 > a_2$, то $\mathcal{P}$ — некоторая положительная величина.

Таким образом, распределение «начальных» напряжений, возникающих в составной трубе при отсутствии внешних сил, определено. Если составная труба находится под действием внутреннего и внешнего давлений, то напряжения в ее стенках представляются суммой начальных напряжений и напряжений, возникающих от действия внешних сил, которые в данном случае определяются так же, как если бы начальных напряжений и деформаций не было.

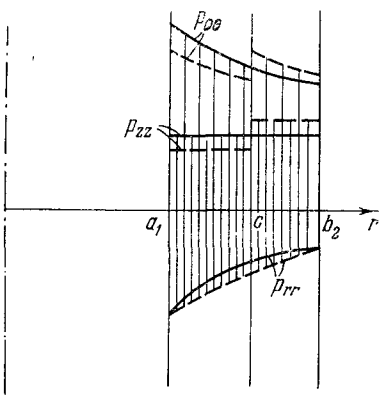


Рис. 113. Распределение напряжений в сплошной (сплошная линия) и составной (пунктирная линия) трубе, находящейся под действием внутреннего и внешнего давлений (c — граница составляющих труб).

Распределение полных напряжений в этом случае показано на рис. 113.

Следовательно, при использовании составных труб вместо сплошных в работу дополнительно вводятся внешние слои, а внутренние слои разгружаются, распределение напряжений становится более равномерным, прочность конструкции возрастает.

В технике и, в частности, при изготовлении артиллерийских стволов широко используются конструкции с предварительными напряжениями, подобранными так, чтобы уменьшить неравномерность распределения напряжений при работе под внешними нагрузками.

§ 5. Постановка задач теории упругости. Уравнение Клапейрона. Теорема единственности решения задач теории упругости. Принцип Сен-Венана

В §§ 3 и 4 дано решение двух простейших частных задач теории упругости. Теперь обратимся к общей теории, касающейся широкого круга задач теории упругости.

Типичные статические задачи теории упругости

Многие важные задачи теории упругости являются статическими, т. е. задачами, в которых требуется найти распределение перемещений и напряжений внутри упругого тела, находящегося в равновесии под действием заданной системы внешних сил или при других заданных внешних условиях. Очевидно, что главный вектор и главный момент системы внешних сил, приложенных к упругому телу, в этом случае равны нулю.

В теории упругости рассматриваются и динамические задачи, например задачи о колебаниях упругих тел.

Рассмотрим следующие три типичные статические задачи теории упругости, которые отличаются друг от друга видом граничных условий.

I. На всей поверхности тела заданы поверхностные силы, требуется найти напряжения внутри тела и перемещения всех его точек, в том числе и перемещения точек границы.

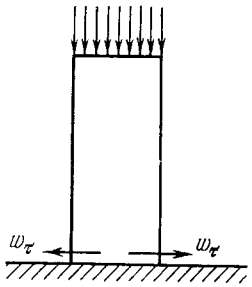


Рис. 114. Сжатие бруса, помещенного на идеально гладкую жесткую плоскость.

II. На всей поверхности тела заданы перемещения, требуется найти перемещения внутри тела и напряжения внутри и на границе тела.

III. На части границы тела известны перемещения, а на остальной части границы действуют заданные внешние силы (или известно, что некоторая часть поверхности свободна от нагрузок).

Встречаются, конечно, и другие виды граничных условий. Например, можно поставить следующую задачу: найти напряженное и деформированное состояния бруса, если на его верхнем торце действуют заданные внешние силы, боковая поверхность свободна от нагрузок, а нижний торец упирается в идеально гладкую жесткую поверхность (рис. 114). В этом случае

на нижнем торце частично известны перемещения ($w_n = 0$) и частично — силы, так как $p_{n\tau} = 0$ в силу отсутствия трения.

Указанные задачи рассмотрены ниже при следующем дополнительном предположении, которое входит в их постановку. Принимается, что при определении компонент тензора деформаций начальное состояние сравнения является действительно осуществимым состоянием, по отношению к которому можно ввести перемещения. Если выбор начального состояния диктуется какими-либо физическими условиями (например, условием, что начальное состояние должно быть ненапряженным), то это допущение можно трактовать как характеристику технологии изготовления изучаемых образцов и тел.

В линейной теории упругости область, в которой математически формулируется задача, фиксирована

Отметим, что в задачах о равновесии и движении упругих тел (за исключением задачи вида II, когда заранее задаются перемещения границы) поверхность деформируемого тела, на которой задаются граничные условия, заранее неизвестна и должна быть найдена в процессе решения задачи. Однако в линейной теории упругости предполагается, что деформированная поверхность тела мало отличается от его начальной недеформированной поверхности. В этом случае, пренебрегая малыми второго порядка, можно считать, что граничные условия должны выполняться на недеформированной, а следовательно, известной поверхности (см. гл. VII т. 1). Именно так мы поступали при решении задач о простом растяжении бруса и о деформации трубы под действием заданных внутреннего и внешнего давлений.

При решении задач теории упругости можно использовать различные эквивалентные системы уравнений, которые рассматриваются подробно ниже. Отметим, однако, сразу, что эти различные системы представляют собой записанные в разных формах уравнения импульсов, закон Гука и уравнения совместности (к этим уравнениям, в случае необходимости, добавляются уравнение неразрывности и уравнение притока тепла).

О постановке задач в перемещениях. Уравнения Ламе с учетом температурных напряжений

Во многих задачах, особенно если на границе тела заданы перемещения, удобно в качестве основных уравнений брать уравнения теории упругости в перемещениях — уравнения Ламе (см. гл. IV т. 1). Уравнения Ламе получаются, как известно, из общих уравнений количества движения с использованием закона Гука и формул (1.1), выражающих компоненты тензора деформаций через перемещения (при условии, что относительные смещения малы, а ε_{ij}, входящие в закон Гука, могут быть выражены через перемещения).

В рассматриваемой здесь линейной теории уравнения Ламе для однородного изотропного тела с учетом температурных напряжений на основании формул (2.25) можно написать в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \boldsymbol{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{w} + \mu \Delta \boldsymbol{w} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \operatorname{grad} T. \tag{5.1}$$

Если объемные силы и температура как функции координат известны и на границе заданы перемещения, то из уравнений (5.1) с известными начальными данными можно найти перемещения внутренних точек тела и таким образом решить задачу теории упругости в перемещениях. Напряжения после этого вычисляются с помощью закона Гука. Уравнения совместности деформаций при такой постановке задачи удовлетворяются автоматически, так как формулы, выражающие деформации через перемещения, представляют собой, как известно, общее решение уравнений совместности.

О постановке задач в напряжениях

Другой распространенный путь решения задач о равновесии упругих тел — решение задач в напряжениях. При этом используются уравнения равновесия в напряжениях

$$\rho_0 F^i + \nabla_j p^{ij} = 0. \tag{5.2}$$

Эти три уравнения содержат вообще шесть неизвестных компонент тензора напряжений и составляют незамкнутую систему. В некоторых случаях, например из симметрии задачи, можно заранее заключить, что в уравнения (5.2) входят только три неизвестные компоненты напряжений, а остальные известны или равны нулю. Тогда система (5.2) может рассматриваться отдельно, независимо от закона Гука. Если на границе известны $\boldsymbol{p}_n$, то в этом случае можно найти напряжения, пользуясь только уравнениями (5.2). Такие задачи называются *статически определимыми.*

Уравнения Бельтрами — Мичелла

В общем случае система (5.2) не замкнута. С помощью закона Гука из уравнений совместности деформаций можно получить дополнительные уравнения, которым должны удовлетворять компоненты тензора напряжений. Эти уравнения называются уравнениями Бельтрами — Мичелла. Они могут быть выведены следующим образом.

Из уравнений совместности деформаций

$$-R_{ikjl} = \nabla_k \nabla_l \varepsilon_{ij} + \nabla_i \nabla_j \varepsilon_{kl} - \nabla_i \nabla_l \varepsilon_{kj} - \nabla_k \nabla_j \varepsilon_{il} = 0$$

с помощью свертывания тензора R_{ikjl} можно получить

$$-R_{ikj}^{\cdot\cdot\cdot k} = \Delta\varepsilon_{ij} + \nabla_i\nabla_j I_1(\varepsilon) - \nabla_i\nabla_k\varepsilon_{\cdot j}^{k} - \nabla_k\nabla_j\varepsilon_{\cdot i}^{k} = 0, \qquad \text{(а)}$$

$$R_{ik\cdot\cdot}^{\cdot\cdot ki} = 2\Delta I_1(\varepsilon) - 2\nabla_i\nabla_k\varepsilon^{ki} = 0, \qquad \text{(б)}$$

где Δ — оператор Лапласа. Заменяя в соотношениях (а) ε_{ij} с помощью закона Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\sigma}{E}p_{ij} - \frac{\sigma}{E}\mathcal{P}g_{ij} + \alpha(T - T_0)g_{ij}$$

и используя уравнения равновесия (5.2) и равенство (б), получим (если E, σ, α, T_0 постоянны) уравнения Бельтрами — Мичелла

$$\Delta p_{ij} + \frac{1}{1+\sigma}\nabla_i\nabla_j\mathcal{P} + \frac{\sigma}{1-\sigma}\operatorname{div}\rho\boldsymbol{F}g_{ij} + \nabla_i\rho_0F_j + \nabla_j\rho_0F_i + \\ + \frac{\alpha E}{1+\sigma}\nabla_i\nabla_j T + \frac{\alpha E}{1-\sigma}\Delta T g_{ij} = 0. \qquad (5.3)$$

Аналогичные уравнения для движущегося упругого тела получаются, если заменить $\rho_0\boldsymbol{F}$ в (5.3) через ρ_0 $(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{a})$ (к массовым силам добавляются силы инерции, $\boldsymbol{a}$ — ускорение точек среды относительно инерциальной системы координат).

Если объемные силы постоянны (как, например, сила тяжести) и температура тоже постоянна, то уравнения Бельтрами — Мичелла принимают следующий простой вид:

$$\Delta p_{ij} + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial x^i\,\partial x^j} = 0, \qquad (5.4)$$

причем в декартовых координатах $\mathcal{P} = p_{11} + p_{22} + p_{33}$.

Свойства компонент тензора напряжений в случае постоянных объемных сил и температуры

Складывая три уравнения (5.4), соответствующие $i = j$, получим

$$\Delta\mathcal{P} = 0. \qquad (5.5)$$

С использованием этого равенства легко вывести из (5.4), что

$$\Delta\Delta p_{ij} = 0. \qquad (5.6)$$

Таким образом, каждая из компонент тензора напряжений в случае постоянной температуры и постоянных объемных сил является бигармонической функцией, а первый инвариант тензора напряжений — гармонической функцией.

В рассмотренных в § 3 задачах о растяжении бруса компоненты тензора напряжений были постоянными или линейными функциями координат, поэтому уравнения Бельтрами автома-

тически удовлетворялись. В общем случае, если отлична от нуля только компонента p_{11} тензора напряжений, то из уравнений (5.4) легко получить, что p_{11} может быть только линейной функцией координат

$$p_{11} = ax^1 + bx^2 + cx^3 + d,$$

где a, b, c, d — константы.

Суперпозиция решений

В рамках линейной теории упругости, очевидно, справедлив принцип суперпозиции решений. Пусть имеются два решения: $w_{(\mathrm{I})}$, $p_{ij(\mathrm{I})}$ и $w_{(\mathrm{II})}$, $p_{ij(\mathrm{II})}$, описывающих напряженно-деформированное состояние одного и того же тела при действии на него внешних массовых сил $F_{(\mathrm{I})}$ и $F_{(\mathrm{II})}$ при следующих условиях на границе тела $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$:

$$p^n_{(\mathrm{I})} = p^n_1 \text{ на } \Sigma_1, \quad w_{(\mathrm{I})} = w_1 \text{ на } \Sigma_2,$$

$$p^n_{(\mathrm{II})} = p^n_2 \text{ на } \Sigma_1, \quad w_{(\mathrm{II})} = w_2 \text{ на } \Sigma_2,$$

соответственно. Тогда

$$w = w_{(\mathrm{I})} + w_{(\mathrm{II})}, \quad p_{ij} = p_{ij(\mathrm{I})} + p_{ij(\mathrm{II})}$$

дают решение задачи о перемещениях и напряжениях в этом теле под действием массовых сил $F_{(\mathrm{I})} + F_{(\mathrm{II})}$ при заданных поверхностных силах $p^n = p^n_1 + p^n_2$ на части Σ_1 границы и при заданных перемещениях $w = w_1 + w_2$ на части Σ_2 границы.

Так, например, с помощью решений рассмотренных выше двух задач о растяжении бруса под действием равномерно распределенных по его торцам сил и о растяжении бруса под действием его веса можно сконструировать решение задачи о растяжении тяжелого бруса силами, равномерно распределенными по его торцам.

О единственности решения задач теории упругости

При решении многих задач теории упругости, так же как в задаче о растяжении тяжелого бруса, значения неизвестных величин частично подбираются из каких-либо интуитивных или опытных соображений, а частично определяются из основных уравнений. В связи с этим может возникать естественное чувство неудовлетворенности, так как требуется исключить возможность существования других решений. Это чувство можно устранить, доказав единственность решения задач теории упругости. Отметим заранее, что решение статических задач теории упругости единственно только в случае *малых* относительных перемещений.

Действительно, рассмотрим, например, задачу о равновесии тонкого заделанного на одном конце прямоугольного стержня под действием силы, приложенной на другом его конце (рис. 115). В этом случае при достаточно большой силе F возможно неединственное решение задачи. Стержень может остаться прямолинейным или изогнуться, например, так, как показано на рис. 115.

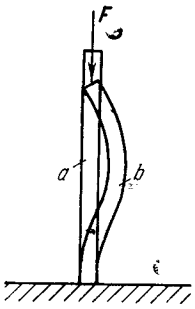


Рис. 115. Два возможных положения стержня под действием сосредоточенной силы.

Перемещения частиц стержня из положения a в положение b (и, в частности, относительные повороты) будут конечными. Неединственность решения задачи в этом случае связана с неустойчивостью рассматриваемой упругой системы, проявляющейся при достаточно большой величине приложенной силы. Оказывается, что возможно несколько положений равновесия, но не все они устойчивы.

Уравнение Клапейрона

С целью доказательства единственности решения статических задач линейной теории упругости установим теорему Клапейрона. Возьмем уравнения равновесия для простоты в декартовой системе координат

$$\rho_0 F^i + \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} = 0. \tag{5.7}$$

Умножим уравнения равновесия на соответствующие компоненты некоторого вектора w, который можно рассматривать как конечный или малый вектор действительного или возможного перемещения точек среды [1]):

$$\rho_0 F^i w_i + \frac{\partial (p^{ij} w_i)}{\partial x^j} - p^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} = 0. \tag{5.7'}$$

В случае симметричного тензора напряжений ($p^{ij} = p^{ji}$) последний член этого уравнения можно преобразовывать следующим образом:

$$p^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left(p^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} + p^{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right) = p^{ij} \varepsilon_{ij},$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right);$$

[1]) Последующие выводы связаны с допущениями, что компоненты вектора w (w_i) и тензора напряжений p^{ij} — непрерывные дифференцируемые функции координат в объеме пространства, занятого телом.

ε_{ij} можно рассматривать как компоненты тензора деформаций, соответствующие малым перемещениям $\boldsymbol{w}$.

Проинтегрировав (5.7′) по всему объему V, воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского и тем, что

$$p^{ij}w_i n_j d\sigma = (\boldsymbol{p}^n)^i w_i d\sigma,$$

получим

$$\int_V \rho_0 (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w})\, d\tau + \int_\Sigma (\boldsymbol{p}^n\cdot\boldsymbol{w})\, d\sigma = \int_V p^{ij}\varepsilon_{ij}\, d\tau. \tag{5.8}$$

Это равенство, когда $\boldsymbol{w}$ — мысленное бесконечно малое смещение, можно рассматривать как уравнение принципа возможных перемещений в теории упругости, эквивалентное системе уравнений (5.7).

Пусть теперь $\boldsymbol{w}$ представляет собой вектор перемещений, которые испытывают точки тела под действием данных поверхностных и массовых внешних сил. Для малых деформаций можно ввести (см. § 2) свободную энергию единицы объема $\Phi = \rho_0 F$ так, что

$$p^{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Тогда равенство (5.8) примет вид

$$\int_V \rho_0 (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w})\, d\tau + \int_\Sigma (\boldsymbol{p}^n\cdot\boldsymbol{w})\, d\sigma = \int_V \varepsilon_{ij}\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}\, d\tau. \tag{5.9}$$

Это равенство представляет собой теорему Клапейрона. Оно верно и в том случае, когда рассматриваемая среда не подчиняется закону Гука. Однако, если тело подчиняется закону Гука, то в случае изотермических процессов Φ можно считать однородной квадратичной формой ε_{ij} (с точностью до аддитивной константы), т. е.

$$\Phi = A^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \text{const}.$$

В случае изотропного тела, отбрасывая несущественную постоянную, имеем (см. (2.24))

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2.$$

По теореме об однородных функциях получим

$$\varepsilon_{ij}\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\Phi. \tag{5.10}$$

Если ввести $\mathscr{F} = \int_V \Phi\, d\tau$ — полную свободную энергию тела

в целом, то равенство Клапейрона (5.9) можно записать в виде

$$\int_V \rho_0 (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w})\, d\tau + \int_\Sigma (\boldsymbol{p}^n\cdot\boldsymbol{w})\, d\sigma = 2\mathscr{D}. \tag{5.11}$$

Это равенство представляет собой теорему Клапейрона для среды, подчиняющейся закону Гука.

Если коэффициенты Ламе λ и μ положительны (что подтверждается опытными данными), то свободная энергия Φ в случае изотермических процессов в изотропной среде, подчиняющейся закону Гука, является дефинитной (положительно определенной) квадратичной формой. Положительная дефинитность квадратичной формы Φ имеет место и в случае неизотропных тел.

Единственность решения

Докажем теперь единственность решения указанных выше статических задач теории упругости типа I, II и III в случае $T = T_0$ и в предположениях, при которых справедливо равенство Клапейрона (5.11) (среда подчиняется закону Гука, а относительные перемещения однозначны, непрерывны и малы).

Доказательство проведем от противного. Допустим, что поставленная задача имеет два различных решения:

$$\boldsymbol{w}_{(\mathrm{I})},\ \varepsilon_{ij(\mathrm{I})},\ p_{ij(\mathrm{I})} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{w}_{(\mathrm{II})},\ \varepsilon_{ij(\mathrm{II})},\ p_{ij(\mathrm{II})}.$$

Рассмотрим разности

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{(\mathrm{I})} - \boldsymbol{w}_{(\mathrm{II})}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij(\mathrm{I})} - \varepsilon_{ij(\mathrm{II})}, \quad p_{ij} = p_{ij(\mathrm{I})} - p_{ij(\mathrm{II})}. \tag{5.12}$$

Если первое и второе решения, согласно сделанному допущению о существовании двух решений задачи, соответствуют одинаковым граничным условиям и массовым силам, то введенные разности являются решением, соответствующим заданным нулевым граничным значениям поверхностных сил и перемещений и отсутствию массовых сил. Поэтому, применив к решению (5.12) равенство Клапейрона (5.11), получим

$$\mathscr{D} = 0. \tag{5.13}$$

Отсюда в силу дефинитности Φ сразу следует, что $\varepsilon_{ij} = 0$, а из закона Гука, что и $p_{ij} = 0$. Так как $\varepsilon_{ij} = 0$, то перемещения $\boldsymbol{w}$ могут представлять собой только перемещения упругого тела как абсолютно твердого. Если при формулировке задачи используются одни и те же предположения, исключающие такие перемещения, то и $\boldsymbol{w} = 0$. Таким образом, $\boldsymbol{w}_{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{w}_{(\mathrm{II})}$, $\varepsilon_{ij(\mathrm{I})} = \varepsilon_{ij(\mathrm{II})}$, $p_{ij(\mathrm{I})} = p_{ij(\mathrm{II})}$, и единственность решения задач типа I, II и III доказана.

Заметим, что для того, чтобы проведенное доказательство оставалось справедливым, достаточно, чтобы граничные

условия на всей поверхности тела Σ для разности двух решений удовлетворяли условию:

$$\int_{\Sigma} (p^n \cdot w)\, d\sigma = 0,$$

которое может выполняться не только в задачах типа I, II и III.

Принцип Сен-Венана

Сформулируем теперь очень важный принцип Сен-Венана, который заключается в следующем.

Если в некоторой области внутри или на поверхности тела, малой по сравнению с основными размерами тела, на него действует система массовых или поверхностных сил и тело находится в равновесии, то в областях, удаленных от места приложения этих сил, деформированное и напряженное состояния определяются в основном только главным вектором и главным моментом этих сил и приближенно не зависят от детального характера распределения сил. Влияние деталей распределения сил практически сказывается только в непосредственной окрестности области их приложения.

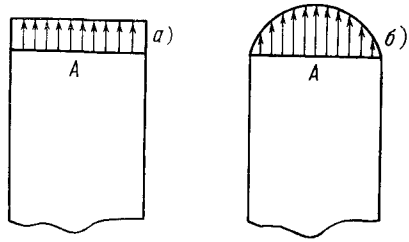


Рис. 116. Силы *а*) и *б*) производят одинаковое действие на стержень вдали от торца A.

Принцип Сен-Венана вытекает из следующего общего свойства решений задач теории упругости. Если в какой-либо малой по сравнению с размерами всего тела части A приложена статически уравновешенная система сил, то она вызывает в нем напряжения, очень быстро убывающие по мере удаления от A. Допустим, что мы зажимаем тисками проволоку, причем концы тисков сжимают проволоку так, что действующая на нее система сил уравновешена. Тогда очевидно, что, как бы ни были велики эти силы (они даже могут перерезать проволоку), они почти не вызовут напряжений в основной массе проволоки вне области, непосредственно примыкающей к месту защемления.

Принцип Сен-Венана подтверждается множеством опытных данных и подкреплен многими численными расчетами на частных примерах.

Из принципа Сен-Венана, в частности, вытекает, что напряженное и деформированное состояния в длинном упругом брусе, растягивающемся под действием собственного веса, в области, достаточно удаленной от заделанного торца, не зависят от

способа его заделки или что напряженное и деформированное состояния в длинном стержне в основном не изменятся, если в задаче о растяжении бруса внешними поверхностными силами распределение сил (*а*) (рис. 116) заменить имеющим ту же равнодействующую F распределением сил (*б*).

Принцип Сен-Венана позволяет получать приближенные решения различных задач теории упругости с помощью решений аналогичных задач для частных распределений действующих сил.

§ 6. Задача об изгибе балки

Рассмотрим упругую цилиндрическую балку произвольного поперечного сечения (рис. 117). Предположим, что на боковой

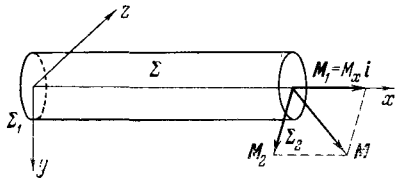


Рис. 117. Цилиндрическая балка под действием крутящего M_1 и изгибающего M_2 моментов ($M_2 = M_y j + M_z k$).

поверхности Σ балки $p^n = 0$, на торце Σ_2 $p^n \neq 0$, причем

$$\int\limits_{\Sigma_2} p^n \, d\sigma = 0, \qquad \int\limits_{\Sigma_2} (r \times p^n) \, d\sigma = M \neq 0,$$

т. е. на торце Σ_2 балки действуют пары сил с общим моментом M. Балка по условию находится в равновесии, поэтому на торце Σ_1

$$\int\limits_{\Sigma_1} p^n d\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Sigma_1} (r \times p^n) \, d\sigma = -M,$$

т. е. на Σ_1 также должны действовать пары сил, общий момент которых равен по величине и противоположен по знаку моменту пар, действующих на Σ_2. В общем случае момент M может иметь произвольное направление.

Крутящий и изгибающий моменты; чистый изгиб

Выберем правую декартову систему координат x, y, z так, чтобы ось x была направлена по оси балки и проходила через центры тяжести поперечных сечений, а оси y и z направим по главным осям инерции поперечного сечения (рис. 117).

Разложим момент M, действующий на торце Σ_2, на три составляющие $M = M_x i + M_y j + M_z k$. Очевидно, под

действием M_x балка будет закручиваться, а под действием моментов M_y и M_z — изгибаться. Поэтому M_x называется крутящим, а моменты M_y и M_z изгибающими моментами.

В силу линейности задач теории упругости решение задачи об определении напряженного и деформированного состояний балки под действием произвольно направленного момента $\boldsymbol{M}$ можно получить как сумму решений трех задач: задачи о кручении под действием момента M_x и двух задач об изгибе балки под действием моментов M_y и M_z. Ясно, что последние две задачи об изгибе балки, по существу, совершенно аналогичны. Рассмотрим подробно задачу об изгибе балки под действием заданного момента $M_z = M$, когда $M_x = M_y = 0$. При этом, как обычно, будем считать момент $\boldsymbol{M}$ положительным, если поворот, возникающий под действием $\boldsymbol{M}$, виден с конца оси z совершающимся против часовой стрелки.

Деформированное и напряженное состояния находящейся в равновесии балки, возникающие под действием только изгибающего момента $\boldsymbol{M}$, когда главный вектор сил, приложенных к каждому из торцов балки, равен нулю, называются чистым изгибом.

В следующем параграфе будет приведено решение задачи о кручении балки. Как в задаче об изгибе, так и в задаче о кручении для простоты примем, что температура различных точек балки одинакова и постоянна во времени ($T = T_0$) и что массовые силы отсутствуют. Кроме этого, примем, что тензор деформаций определяется перемещениями, которые можно считать малыми.

Распределение напряжений на торце Σ_2

Легко видеть, что, если на торце Σ_2 принять следующее частное распределение внешних поверхностных сил

$$\boldsymbol{p}^n = p_{11}\boldsymbol{i}, \quad p_{11} = -\alpha y, \tag{6.1}$$

то, учитывая условия выбора системы координат, получим, что главный вектор этой системы напряжений будет равен нулю, а главный момент будет иметь составляющую только по оси z.

Действительно, $\int\limits_{\Sigma_2} \boldsymbol{p}^n\, d\sigma = -\alpha \boldsymbol{i} \int\limits_{\Sigma_2} y\, d\sigma = 0$, так как ось x проходит через центр тяжести поперечного сечения,

$$M_x = \int\limits_{\Sigma_2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^n)_x\, d\sigma = 0,$$

так как $\boldsymbol{p}^n$ параллельно оси x, а

$$M_y = \int\limits_{\Sigma_2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^n)_y\, d\sigma = \alpha \int\limits_{\Sigma_2} yz\, d\sigma = 0,$$

так как оси y и z совпадают с главными осями инерции поперечного сечения и, наконец, имеем

$$M = M_z = \int\limits_{\Sigma_2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^n)_z d\sigma = \alpha \int\limits_{\Sigma_2} y^2 d\sigma = \alpha J, \qquad (6.2)$$

где J — момент инерции поперечного сечения балки Σ относительно оси z. Из (6.2) для коэффициента α вытекает формула

$$\alpha = \frac{M}{J}.$$

Примем еще, что на торце Σ_1 действуют поверхностные силы, распределенные по закону

$$(\boldsymbol{p}^n)_{\Sigma_1} = -(\boldsymbol{p}^n)_{\Sigma_2}. \qquad (6.3)$$

На рис. 118 изображено распределение напряжений $\boldsymbol{p}^n_{\Sigma_2} = -\alpha y \boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{p}^n_{\Sigma_1} = \alpha y \boldsymbol{i}$ на торцах Σ_1 и Σ_2. Непосредственно очевидно, что такое распределение внешних сил вызовет изгиб

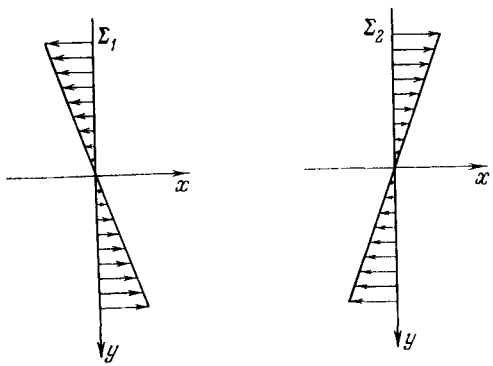


Рис. 118. Распределение напряжений $\boldsymbol{p}^n$ на торцах Σ_1 и Σ_2.

балки. Ниже получим точное решение задачи об изгибе балки моментом $\boldsymbol{M}$ только для случая, когда поверхностные силы на торцах Σ_1 и Σ_2 распределены по законам (6.1) и (6.3). Практическое применение этого решения не ограничивается такого рода случаями. Из принципа Сен-Венана следует, что полученное решение будет справедливо в части балки, достаточно удаленной от ее торцов, и в том случае, когда на Σ_2 (и Σ_1) задано любое другое распределение напряжений $\boldsymbol{p}^n$, приводящееся к заданному моменту $\boldsymbol{M}$ (и $-\boldsymbol{M}$).

Напряжения внутри балки Для получения решения положим, что во всех точках внутри и на поверхности балки для компонент тензора напряжений верны равенства

$$p_{11} = -\frac{M}{J}y, \qquad p_{12} = p_{13} = p_{22} = p_{23} = p_{33} = 0. \tag{6.4}$$

Очевидно, что уравнения равновесия

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

при этом удовлетворяются и будут удовлетворены также все граничные условия.

Действительно, из приведенного выше рассуждения непосредственно видно, что решение (6.4) удовлетворяет граничным условиям на Σ_2 и Σ_1. На боковой поверхности балки в силу выбора осей координат имеем $\cos(\boldsymbol{n}, x) = 0$, поэтому

$$\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}_1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{p}_2 \cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{p}_3 \cos(\boldsymbol{n}, z) = 0.$$

Компоненты тензора деформаций и вектора перемещений С помощью закона Гука (2.28) по известным компонентам тензора напряжений (6.4) легко найдем значения компонент тензора деформаций:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{My}{EJ}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\sigma My}{EJ}, \\ &\varepsilon_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial z} = \frac{\sigma My}{EJ}, \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Отсюда видно, что при чистом изгибе элемент балки, совпадающий с осью x, не испытывает ни удлинения, ни сжатия. Элементы, параллельные оси x, при $y > 0$ сжимаются, а при $y < 0$ растягиваются.

Непосредственно можно проверить, что решение дифференциальных уравнений (6.5) для перемещений w_1, w_2, w_3 имеет вид

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -\frac{Myx}{EJ}, \\ w_2 &= \frac{M}{2EJ}[x^2 + \sigma(y^2 - z^2)], \\ w_3 &= \frac{\sigma Myz}{EJ}. \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

При этом для устранения перемещений балки как абсолютно твердой принято, что перемещение и элементарный поворот главных осей деформации в центре тяжести торца Σ_1 (т. е. в начале координат) равны нулю.

Уравнение изогнутой оси балки и ее кривизна

Любая точка ($x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$) балки после деформации переходит в точку с координатами (x, y, z), вычисляемыми по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + w_1 = x_0 - \frac{M y_0 x_0}{EJ}, \\ y &= y_0 + w_2 = y_0 + \frac{M}{2EJ}\left[x_0^2 + \sigma\left(y_0^2 - z_0^2\right)\right], \\ z &= z_0 + w_3 = z_0 + \frac{\sigma M y_0 z_0}{EJ}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

Для точек оси балки ($y_0 = z_0 = 0$) получаем

$$w_1 = w_3 = 0,$$
$$w_2 = \frac{M}{2EJ} x_0^2 \approx \frac{M}{2EJ} x^2.$$

Отсюда ясно, что уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$y = \frac{M}{2EJ} x^2, \qquad (6.8)$$

т. е. изогнутая ось представляет собой параболу (рис. 119).

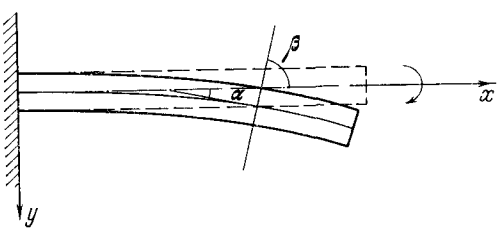


Рис. 119. Балка до и после деформации.

Рассмотрим кривизну $1/R$ изогнутой оси балки

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}, \qquad (6.9)$$

где R — радиус кривизны, θ — угол касательной к кривой, например, с осью x, а ds — элемент дуги кривой. Если кривизна мала, то $1/R \approx d^2y/dx^2$, поэтому (6.8) дает

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}. \qquad (6.10)$$

Деформация плоских поперечных сечений

Возьмем некоторое плоское сечение балки $x = x_0$. После деформации плоскость $x = x_0$ перейдет в поверхность $x = x_0 + w_1$ или по (6.7) в поверхность

$$x = x_0\left(1 - \frac{My_0}{EJ}\right) \approx x_0\left(1 - \frac{My}{EJ}\right). \qquad (6.11)$$

Это уравнение определяет плоскость. Следовательно, плоское поперечное сечение остается плоским после деформации.

Покажем теперь, что при деформации чистого изгиба плоские поперечные сечения балки, перпендикулярные до деформации к оси x, в результате деформации переходят в плоские сечения, перпендикулярные к изогнутой оси балки. Действительно, тангенс угла наклона плоскости (6.11) к оси x равен

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = -\frac{EJ}{Mx_0},$$

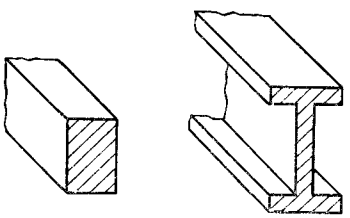


Рис. 120. Балки прямоугольного и двутаврового поперечного сечений.

а угловой коэффициент изогнутой оси балки (6.8) равен

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{M}{EJ}x_0,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha = -1.$$

Жесткость балки на изгиб

Из (6.10) видно, что кривизна балки прямо пропорциональна величине изгибающего момента M и обратно пропорциональна величине EJ, которая называется жесткостью балки на изгиб. Жесткость балки EJ, очевидно, зависит через E от материала, из которого сделана балка, и через J от формы ее поперечного сечения.

Рассмотрим, например, две балки из одинакового материала, причем поперечное сечение одной из них представляет собой прямоугольник площади S, а поперечное сечение второй имеет вид, изображенный на рис. 120 (такая балка называется двутавровой), и имеет ту же площадь S. Очевидно, что момент инерции J, а следовательно, и жесткость EJ двутавровой балки будет больше. Поэтому балки, работающие на изгиб (например, железнодорожные рельсы), обычно имеют двутавровые поперечные сечения.

§ 7. Кручение цилиндрических стержней

Рассмотрим задачу о кручении цилиндрического стержня-балки. Кручение возникает в том случае, когда момент, действующий в концевом сечении балки, не лежит в плоскости поперечного сечения. В условиях кручения работает множество частей различных машин, в частности, валы гидротурбин [1]) и всевозможных (автомобильных, самолетных, пароходных и других) двигателей. Инженеров обычно интересует, какой максимальный момент может воспринять данный вал, каково максимальное значение напряжений, каков угол закручивания при заданном моменте и т. п.

Постановка задачи

Поставим задачу об определении напряженно-деформированного состояния цилиндрического стержня при кручении в рамках теории малых деформаций. Рассмотрим абсолютное или относительное равновесие вала, причем влияние переменной температуры и массовых сил учитывать не будем (в силу линейности задач теории упругости влияние этих факторов при необходимости можно учесть отдельно). Рассмотрим уравнения равновесия

$$\nabla_i p^{ij} = 0. \tag{7.1}$$

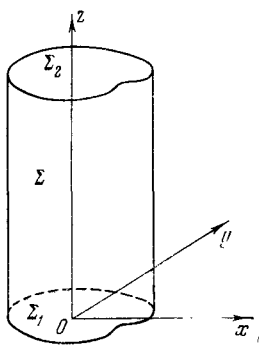


Рис. 121. Обозначения и выбор осей координат в задаче о кручении цилиндрического стержня.

Система (7.1) при условии $T = T_0$ получится замкнутой, если к ней добавить закон Гука и уравнения совместности деформаций или уравнения Бельтрами — Мичелла.

Выберем декартову систему координат, как показано на рис. 121.

Примем, что на боковой поверхности стержня $\boldsymbol{p}^n = 0$. Это условие можно написать в виде

$$\boldsymbol{p}_1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{p}_2 \cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{p}_3 \cos(\boldsymbol{n}, z) = 0$$

или, так как ось z выбрана параллельно образующей цилиндрической поверхности Σ ($\cos(\boldsymbol{n}, z) = 0$), в виде

$$\left.\begin{aligned} p_{11}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{21}\cos(\boldsymbol{n}, y) &= 0, \\ p_{12}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{22}\cos(\boldsymbol{n}, y) &= 0, \\ p_{13}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{23}\cos(\boldsymbol{n}, y) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

[1]) Стальные круглые валы современных сверхмощных гидротурбин имеют диаметр около двух метров.

Пусть на торцах Σ_1 и Σ_2 заданы поверхностные силы. Будем считать, что поверхностные силы на каждом из торцов Σ_1 и Σ_2 приводятся к паре с моментом, параллельным оси z, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\Sigma_2} \boldsymbol{p}^n\, d\sigma = 0, \qquad \int\limits_{\Sigma_2} (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^n)\, d\sigma = \boldsymbol{M} = M\boldsymbol{k},\\ &\int\limits_{\Sigma_1} \boldsymbol{p}^n\, d\sigma = 0, \qquad \int\limits_{\Sigma_1} (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}^n)\, d\sigma = -\boldsymbol{M} = -M\boldsymbol{k}. \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Если мы получим решение, соответствующее какому-нибудь распределению напряжений по торцам Σ_1 и Σ_2, удовлетворяющему условиям (7.3), то по принципу Сен-Венана это решение будет приближенно описывать напряженно-деформированное состояние в стержне при любом другом распределении сил по торцам, если только эти силы приводятся к паре с тем же моментом.

Предположения о перемещениях; формулы для ε_{ij} и p^{ij}

Решение поставленной выше задачи было дано уже около ста лет назад Сен-Венаном. При этом он применил полуобратный метод, которым мы здесь воспользуемся.

Будем искать перемещения w_1, w_2, w_3 в виде

$$w_1 = -\alpha zy, \quad w_2 = \alpha zx, \quad w_3 = \alpha f(x,\ y), \tag{7.4}$$

где α — постоянная, а $f(x, y)$ — функция, которую надо найти в процессе решения задачи.

Нетрудно понять, что если в балке происходят перемещения вида (7.4), то первоначально плоские сечения, перпендикулярные к оси z, поворачиваются около этой оси на угол αz, и, кроме того, искривляются, так что плоскости $z = z_0$ переходят в поверхности $z = z_0 + \alpha f(x, y)$. Таким образом, угол поворота каждого поперечного сечения пропорционален расстоянию этого сечения от начала координат, а α представляет собой угол закручивания на единицу длины балки.

Вычислим компоненты тензора деформаций, соответствующие перемещениям (7.4). Имеем

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{12} = 0,\\ &\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{\alpha}{2}\left(-y + \frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\alpha}{2}\left(x + \frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Если материал стержня подчиняется закону Гука, то для напряжений получаются формулы

$$\left.\begin{aligned} &p_{11} = 0, \quad p_{22} = 0, \quad p_{33} = 0, \quad p_{12} = 0,\\ &p_{13} = \alpha\mu\left(-y + \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad p_{23} = \alpha\mu\left(x + \frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

Постановка задачи для определения функции кручения $f(x, y)$

Внося выражения (7.6) для компонент тензора напряжений в уравнения равновесия (7.1) и граничные условия (7.2) (7.3), получим уравнения и граничные условия, которым должны удовлетворять функция $f(x, y)$ и величина угла закручивания α.

Из трех уравнений равновесия два (в проекциях на оси x и y) удовлетворяются автоматически, а третье приводится к виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{7.7}$$

Граничные условия (7.2) на боковой поверхности дают

$$\alpha\mu\left(-y + \frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos(\boldsymbol{n}, x) + \alpha\mu\left(x + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cos(\boldsymbol{n}, y) = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial n} = y\cos(\boldsymbol{n}, x) - x\cos(\boldsymbol{n}, y) \quad \text{на } \Sigma. \tag{7.8}$$

Заметим, что ни в уравнение (7.7), ни в граничное условие (7.8) не входит переменная z. Поэтому для того, чтобы найти решение, достаточно определить функцию $f(x, y)$ внутри плоской области, совпадающей с поперечным сечением балки, ограниченным контуром C. Условие (7.8) можно переписать следующим образом;

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_C = y\cos(\boldsymbol{n}, x) - x\cos(\boldsymbol{n}, y) = y\frac{dy}{ds} + x\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{x^2+y^2}{2}, \tag{7.9}$$

где s — дуга контура C. Действительно, для проекций dx, dy элемента $d\boldsymbol{s}$ контура C, если положительное направление обхода контура установлено так, что область, заключенная внутри C, остается при обходе слева, имеем

$$\left.\begin{aligned} dx &= ds\cos(\boldsymbol{s}, x) = -ds\cos(\boldsymbol{n}, y), \\ dy &= ds\cos(\boldsymbol{s}, y) = ds\cos(\boldsymbol{n}, x). \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

Сформулированная задача для определения функции $f(x, y)$ есть внутренняя задача Неймана. Правая часть в условии (7.9) — известная функция координат, так как уравнение поверхности стержня известно. Из (7.9) видно, что условие регулярности решения внутренней задачи Неймана

$$\oint \frac{\partial f}{\partial n}\, ds = 0$$

всегда удовлетворяется.

Отметим, что функция f определяется чисто геометрически и одинакова для всех стержней, сделанных из разных изотропных материалов, но имеющих одно и то же поперечное сечение. Функцию f часто называют функцией кручения.

Удовлетворение граничным условиям на торцах

Обратимся теперь к условиям на торцах. На Σ_2 имеем $\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}_3 = p_{31}\boldsymbol{i} + p_{32}\boldsymbol{j}$. Условия (7.3) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{\Sigma_2} p_{31}\,d\sigma = 0, \qquad \int\limits_{\Sigma_2} p_{32}\,d\sigma = 0, \\ &\int\limits_{\Sigma_2} (xp_{32} - yp_{31})\,d\sigma = M. \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

Покажем, что первые два из этих условий выполняются, если f является решением поставленной выше задачи Неймана. Действительно, на основании (7.6), (7.7), (7.8) в результате простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Sigma_2} p_{31}\,d\sigma &= \alpha\mu \int\limits_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right) d\sigma = \\ &= \alpha\mu \int\limits_{\Sigma_2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x - yx\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{\partial f}{\partial y}x\right)\right] d\sigma = \\ &= \alpha\mu \int\limits_{C} \left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)\cos(\boldsymbol{n}, x) + x\left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\right)\cos(\boldsymbol{n}, y)\right] ds = 0. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $\int\limits_{\Sigma_2} p_{32}\,d\sigma = 0$. Формулы (7.6) определяют распределение внешних напряжений на торцах закручиваемого цилиндра в построенном решении частной задачи о кручении.

Так как напряжения, вычисляемые по формулам (7.6), не зависят от z и, в частности, одинаковы в сечениях Σ_2 и Σ_1, то векторы напряжений $\boldsymbol{p}^n$ на торцах Σ_2 и Σ_1 отличаются только знаками.

Поэтому ясно, что если граничные условия на Σ_2 удовлетворены, то граничные условия на Σ_1 также удовлетворены.

Связь между углом закручивания и крутящим моментом. Жесткость при кручении

Третье из равенств (7.11) согласно (7.6) имеет вид

$$\alpha\mu \int\limits_{\Sigma_2} \left[x\left(x + \frac{\partial f}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)\right] d\sigma = M.$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение, связывающее угол закручивания α с величиной крутящего

момента M:

$$\alpha = \frac{M}{\mu \int\limits_{\Sigma_z} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) d\sigma}. \tag{7.12}$$

Угол закручивания пропорционален моменту M и обратно пропорционален модулю сдвига μ. Величину, стоящую в знаменателе (7.12), называют жесткостью при кручении.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи о кручении цилиндрического стержня сводится к решению задачи Неймана для функции $f(x, y)$.

Кручение стержня круглого поперечного сечения

Для некоторых простых областей решение этой задачи известно. Дадим, например, решение задачи о кручении стержня круглого поперечного сечения. Если ось z совпадает с осью цилиндра, то уравнение контура C записывается в виде $x^2 + y^2 = R^2$, а граничное условие (7.9) принимает вид

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=R^2} = 0. \tag{7.13}$$

Решением внутренней задачи Неймана с граничным условием (7.13) является

$$f(x, y) = c = \text{const}.$$

Смещение $w_3 = \alpha f$ вдоль оси z в этом случае одинаково для всех точек стержня. Если, как обычно, какая-нибудь точка стержня считается неподвижной, то постоянную c нужно положить равной нулю. Тогда формулы, определяющие перемещения точек круглого вала при кручении, могут быть записаны в виде

$$w_1 = -\alpha zy, \quad w_2 = \alpha zx, \quad w_3 = 0. \tag{7.14}$$

Отсюда, в частности, видно, что при кручении круглых валов плоские поперечные сечения остаются плоскими. Каждое сечение поворачивается относительно оси как твердый диск, но различные сечения поворачиваются на разные углы, пропорциональные координате z, когда сечение $z = 0$ закреплено.

Отличные от нуля компоненты тензоров деформаций и напряжений в этом случае равны

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = -\frac{\alpha}{2} y, \quad & p_{31} = p_{13} = -\mu\alpha y, \\ \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = \frac{\alpha}{2} x, \quad & p_{32} = p_{23} = \mu\alpha x. \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

При кручении касательные напряжения в каждом поперечном сечении максимальны на границе

Видно, что в любом поперечном сечении стержня действуют только касательные напряжения, причем для модуля вектора напряжения в поперечном сечении круглого стержня имеем $|\tau| = \sqrt{p_{13}^2 + p_{23}^2} = \mu\alpha\sqrt{x^2 + y^2}$. Следовательно, максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \mu\alpha R \tag{7.16}$$

получаются на внешней границе стержня. Это свойство распределения напряжений выполняется при кручении цилиндрических стержней произвольного (а не только круглого) поперечного сечения. Для доказательства этого прежде всего заметим, что в общем случае, если только для перемещений имеют место формулы (7.4), величина результирующего касательного напряжения в поперечном сечении при любом направлении осей x и y представляется в виде

$$|\tau| = \mu\alpha\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\right)^2}. \tag{7.17}$$

Ось x всегда можно выбрать так, чтобы она совпадала с направлением вектора касательного напряжения в произвольной внутренней точке N поперечного сечения. Тогда в этой точке N величина касательного напряжения будет равна $|\tau| = \mu\alpha\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)\right|$. В других точках $\mu\alpha\left|\frac{\partial f}{\partial x} - y\right|$ представляет собой только величину p_{13} проекции касательного напряжения на ось x. Функция $\mu\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)$ является гармонической и не может (см. § 12 гл. VIII) достигать ни максимального, ни минимального значения внутри области своего определения и, в частности, в точке N. В окрестности N всегда найдется точка N_1, в которой эта функция будет иметь большее, чем в точке N, значение и $|p_{13}|_{N_1}$ будет больше $|\tau|_N$. Учет p_{23} для определения $|\tau|_{N_1}$ только усилит это неравенство, и всегда в окрестности любой внутренней точки N найдется такая точка N_1, для которой $|\tau|_{N_1} > |\tau|_N$. Высказанное выше утверждение доказано.

Связь угла закрутки и максимальных касательных напряжений с крутящим моментом для стержня круглого поперечного сечения

Для крутящего момента при кручении вала круглого поперечного сечения на основании (7.12) получим

$$M = \alpha\mu\frac{\pi R^4}{2} \tag{7.18}$$

и, следовательно, $\alpha = \frac{2M}{\mu\pi R^4}$

Таким образом, угол закрутки прямо пропорционален величине крутящего момента M и обратно пропорционален четвертой степени радиуса поперечного сечения. Величина максимального касательного напряжения при заданном значении M равна

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi R^3}. \tag{7.19}$$

Если величина допустимых касательных напряжений в стержне известна и задано значение крутящего момента M, то отсюда можно определить величину минимального допустимого значения диаметра вала.

Поставленная выше задача Неймана для определения функции кручения $f(x, y)$, а следовательно, и задача об определении напряженно-деформированного состояния цилиндрического стержня при кручении решены также для стержней эллиптического, прямоугольного и многих других поперечных сечений.

Замечание о кручении полых стержней

Заметим, что каждое известное решение задачи о кручении любого цилиндрического вала сплошного поперечного сечения дает также решение задачи о кручении такого полого цилиндрического вала, внешняя граница поперечного сечения которого совпадает с границей сплошного вала и внутренняя полость которого свободна от напряжений и вырезана так, что возникающие в поперечном сечении сплошного вала касательные напряжения τ в каждой точке границы полости в плоскости xy направлены по касательной к ней.

Действительно, решение для сплошного вала удовлетворяет уравнениям равновесия, граничному условию на внешней границе полого вала и, очевидно, легко может быть подобрано так, чтобы условия на торцах полого вала удовлетворялись.

Остается только показать, что условие

$$\boldsymbol{p}^n = 0$$

на внутренней границе полого вала при этом также будет выполнено. Легко видеть, что в силу (7.6) и выбора оси z на внутренней стороне полого вала будем иметь

$$p_{nx} = p_{ny} = 0,$$

$$p_{nz} = p_{13}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{23}\cos(\boldsymbol{n}, y).$$

Отсюда, если полость выбрана так, как указано выше, получаем

$$p_{nz} = 0.$$

Кручение вала круглого поперечного сечения с концентрически расположенной круговой полостью

Таким образом, приведенное выше решение задачи для стержня круглого поперечного сечения пригодно для случая кручения стержней, поперечное сечение которых имеет вид кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями, так как по (7.15) в этом случае имеем

$$\boldsymbol{\tau} = p_{13}\boldsymbol{i} + p_{23}\boldsymbol{j} = \mu\alpha(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}),$$
$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r} = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j}$$

и $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{r} = 0$, т. е. $\boldsymbol{\tau}$ направлено по касательной к любой окружности $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const} \leqslant R$.

Жесткость при кручении полого вала внешнего радиуса R и внутреннего радиуса R_1 по (7.12), так как в этом случае $f=0$, будет, очевидно, равна

$$c = \mu \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R} r^3\, dr\, d\varphi = \frac{\pi\mu}{2}(R^4 - R_1^4)$$

и, следовательно, максимальное касательное напряжение по (7.12) и (7.16) будет связано с крутящим моментом M формулой

$$\tau_{\max} = \frac{2MR}{R^4 - R_1^4}. \qquad (7.20)$$

Иногда без значительной потери прочности конструкцию можно сильно облегчить, если сплошной вал, работающий на кручение, заменить полым валом. В подтверждение этого приведем простой конкретный расчет.

Рассмотрим сплошной и полый валы одинакового внешнего диаметра $2R$, находящиеся под действием одинаковых крутящих моментов M. В результате замены сплошного вала на полый площадь поперечного сечения вала уменьшится на πR_1^2. Если радиус R_1 внутренней полости равен $R/2$, то это изменение площади составит 25% от площади сплошного вала πR^2. Разность максимальных касательных напряжений в полом и сплошном валах, отнесенная к величине максимального касательного напряжения в сплошном валу, согласно (7.19) и (7.20) будет равна

$$\frac{R_1/R}{1 - (R_1/R)^4},$$

что в случае $R_1 = R/2$ приближенно равняется шести процентам. Ясно, что если такой потерей прочности можно пожертвовать, то вес вала можно значительно уменьшить.

Изложим теперь предложенный Сен-Венаном способ решения задач о кручении цилиндрических стержней.

Метод Сен-Венана решения частных задач о кручении цилиндрических стержней

Для этого заметим, что вместо гармонической функции кручения $f(x, y)$ можно искать сопряженную ей гармоническую функцию $\psi(x, y)$. Функции $f(x, y)$ и $\psi(x, y)$, как известно, будут связаны условиями Коши — Римана

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Граничное условие на контуре C для функции кручения f можно переформулировать для функции ψ. Из (7.8) на основании условий Коши — Римана получим

$$0 = \cos(\boldsymbol{n}, x)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y\right) - \cos(\boldsymbol{n}, y)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x\right) =$$
$$= \left[\cos(\boldsymbol{n}, x)\frac{\partial}{\partial y} - \cos(\boldsymbol{n}, y)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\psi - \frac{x^2+y^2}{2}\right] =$$
$$= \left[\cos(\boldsymbol{s}, x)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\boldsymbol{s}, y)\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\psi - \frac{x^2+y^2}{2}\right] = \frac{\partial}{\partial s}\left[\psi - \frac{x^2+y^2}{2}\right].$$

Отсюда следует, что во всех точках контура C должно выполняться следующее граничное условие для функции $\psi(x, y)$:

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{const}. \tag{7.21}$$

Таким образом, для определения функции кручения f мы имели внутреннюю задачу Неймана, для определения сопряженной с ней функции ψ получилась задача Дирихле.

Возьмем аналитическую функцию $w(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, для которой действительную и мнимую части этой функции можно принять за f и ψ соответственно. Тогда, если уравнение

$$\operatorname{Imag} w(z) = \frac{x^2+y^2}{2} + \text{const}$$

выражает какую-либо замкнутую кривую, то ее можно принять за контур поперечного сечения стержня;

$$\operatorname{Reel}\ w(z) = f(x, y)$$

при этом определит перемещение точек стержня в направлении оси $z(w_3 = \alpha f)$. Напряжения определятся по формуле (7.6). Можно поступить и наоборот, т. е. принять действительную часть $w(z)$ за функцию $-\psi$, а мнимую — за f.

Кручение стержня эллиптического поперечного сечения

В частности, если взять аналитическую функцию комплексного переменного

$$w = Az^2 = A(x + iy)^2 = A(x^2 - y^2) + 2iAxy,$$

где A — действительная постоянная

$$|A| < \frac{1}{2},$$

и положить

$$f = 2Axy, \quad \psi = -A(x^2 - y^2),$$

то уравнение

$$-A(x^2 - y^2) = \frac{x^2 + y^2}{2} - C^2$$

будет представлять собой уравнение эллипса с полуосями

$$a = \frac{C}{\sqrt{\frac{1}{2} + A}}, \quad b = \frac{C}{\sqrt{\frac{1}{2} - A}}.$$

Выражая из последних двух соотношений A через a и b, получим, что функция

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(x^2 - y^2)$$

дает решение задачи о кручении цилиндрического стержня, поперечное сечение которого представляет собой эллипс с полуосями a и b.

Функция напряжений при кручении

Как указывалось выше, при кручении два уравнения равновесия в проекции на оси x и y удовлетворяются автоматически, а третье сводится к уравнению

$$\frac{\partial p_{13}}{\partial x} + \frac{\partial p_{23}}{\partial y} = 0.$$

На основании этого уравнения можно сделать вывод, что выражение $p_{13}\,dy - p_{23}\,dx$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $\alpha\mu\mathcal{F}(x, y)$ (постоянный коэффициент перед $\mathcal{F}(x, y)$ введен для удобства последующих выкладок и рассуждений). Следовательно, компоненты тензора напряжений p_{13} и p_{23} связаны с функцией $\mathcal{F}(x, y)$ следующими равенствами:

$$p_{31} = \alpha\mu\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}, \quad p_{32} = -\alpha\mu\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}. \tag{7.22}$$

Функция $\mathcal{F}(x, y)$ называется функцией напряжений. Очевидно, что в общем случае функцию $\mathcal{F}(x, y)$ можно всегда вве-

сти, если из всех компонент тензора напряжений отличны от нуля только p_{13} и p_{23}, причем p_{13} и p_{23} не зависят от z.

Если напряжения представлены через функцию напряжений, то уравнения равновесия автоматически удовлетворяются. Однако $\mathcal{F}(x, y)$ не может быть произвольной функцией, так как компоненты тензора напряжений, кроме уравнений равновесия, должны удовлетворять уравнениям Бельтрами — Мичелла. В рассматриваемом случае уравнения Бельтрами — Мичелла превращаются в уравнение для функции $\mathcal{F}(x, y)$.

Мы получим уравнение для $\mathcal{F}(x, y)$, пользуясь непосредственно равенствами (7.6) и (7.22). Предварительно установим связь между введенными для решения задач о кручении функциями f, ψ и $\mathcal{F}$. Для этого вспомним, что напряжения (см. (7.6) и (7.22)) связаны с этими функциями следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} p_{13} &= \alpha\mu\left(-y + \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \alpha\mu\left(-y + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \alpha\mu\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \\ p_{23} &= \alpha\mu\left(x + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \alpha\mu\left(x - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = -\alpha\mu\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

Отсюда ясно, что в случае кручения цилиндрических стержней имеем

$$\mathcal{F} = \psi - \frac{x^2 + y^2}{2}. \tag{7.24}$$

Функция ψ является гармонической, поэтому функция напряжений $\mathcal{F}$ должна удовлетворять уравнению Пуассона

$$\Delta \mathcal{F} = -2. \tag{7.25}$$

Граничное условие (7.21) при этом дает $\mathcal{F} = \text{const}$ на C. Так как функция $\mathcal{F}$ вообще определяется с точностью до аддитивной постоянной, то в случае стержня *односвязного* поперечного сечения можно принять, что

$$\mathcal{F} = 0 \quad \text{на} \quad C. \tag{7.26}$$

Таким образом, с помощью функции напряжений задача о кручении цилиндрического стержня односвязного поперечного сечения сводится к отысканию решения уравнения Пуассона (7.25), удовлетворяющего на контуре C граничному условию (7.26).

Заметим, что в приведенном выше выводе уравнения (7.25) для функции $\mathcal{F}$ выполнение уравнений Бельтрами — Мичелла обеспечивается, так как в этом выводе мы пользовались формулами (7.6), которые были получены с помощью закона Гука и представлений ε_{ij} через w_i.

В случае кручения стержня *круглого* поперечного сечения из (7.24) (7.25) и (7.26) непосредственно вытекает, что функция

напряжений имеет вид

$$\mathcal{F}(x, y) = \frac{R^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2}. \tag{7.27}$$

Установим теперь связь между функцией напряжений и крутящим моментом. Из (7.12) и (7.23) имеем

$$M = -\alpha\mu \int\limits_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} y \right) d\sigma. \tag{7.28'}$$

Отсюда, так как

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} y = \frac{\partial \mathcal{F} x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F} y}{\partial y} - 2\mathcal{F},$$

с помощью формулы Гаусса — Остроградского получаем

$$M = -\alpha\mu \int\limits_{C} \mathcal{F} \left[x \cos(n, x) + y \cos(n, y) \right] ds + 2\alpha\mu \int\limits_{\Sigma_2} \mathcal{F}\, d\sigma.$$

Для стержня *односвязного* поперечного сечения в силу условия (7.26) будем иметь

$$M = 2\alpha\mu \int\limits_{\Sigma_2} \mathcal{F}\, d\sigma. \tag{7.28}$$

В случае стержня *многосвязного* поперечного сечения функция напряжений $\mathcal{F}$ будет принимать различные постоянные значения на различных замкнутых кривых, ограничивающих поперечное сечение. На одной из этих кривых, например на внешнем контуре C, можно положить $\mathcal{F}$ равной нулю. Для получения единственного решения в постановку задачи при этом можно ввести условия, которые являются следствиями однозначности смещения $w_3 = \alpha f$ как функции координат. Именно, интеграл от дифференциала функции кручения f по любому замкнутому контуру C_i должен быть равен нулю. Поэтому, в частности, для внутренних контуров C_k, ограничивающих поперечное сечение, по (7.23) будем иметь

$$\oint\limits_{C_k} df = \oint\limits_{C_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) =$$

$$= -\oint\limits_{C_k} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} dy - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} dx \right) - \oint\limits_{C_k} (x\, dy - y\, dx) = 0$$

или по (7.10)

$$\oint\limits_{C_k} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \cos(n, y) \right] ds =$$

$$= -\oint\limits_{C_k} \left[x \cos(n, x) + y \cos(n, y) \right] ds,$$

Отсюда, воспользовавшись формулой Гаусса — Остроградского, получим

$$\oint_{C_k} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n}\, ds = -2S_k, \tag{7.29}$$

где S_k — площадь, заключенная внутри контура C_k, а $\partial \mathcal{F}/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к контуру C_k в плоскости поперечного сечения стержня.

Ясно, что функция напряжений (7.27), которую в полярных координатах можно записать в виде

$$\mathcal{F}(x, y) = \frac{R^2 - r^2}{2},$$

удовлетворяет условию (7.29), если мы примем за контур C_1 окружность некоторого радиуса $R_1 < R$ с центром в начале координат, и, следовательно, является функцией напряжений в случае кручения цилиндрической трубы внешнего радиуса R. Заметим, что решение уравнения Пуассона (7.25) в этом случае может содержать член вида $A \ln r$ ($A = \text{const}$), который исключается для искомого решения с помощью условия (7.29).

Мембранная аналогия

Функции f, ψ и $\mathcal{F}$ легко вычислить только для небольшого числа простейших областей, в то время как в технике используются работающие на кручение стержни весьма сложного поперечного сечения. Некоторые интересные данные о кручении стержней можно получить, пользуясь различными аналогиями, возможность проведения которых связана с тем, что математические задачи, поставленные для определения функций f, ψ и $\mathcal{F}$, встречаются и во многих других разделах математической физики.

В частности, можно установить аналогию между задачей определения функции $\mathcal{F}$ и задачей определения прогибов мембраны с постоянным натяжением, возникающих под действием равномерно распределенной по ее поверхности нагрузки. Выведем уравнение для прогиба такой мембраны.

Мембраной называется упругое тело, имеющее вид тонкой пленки, не сопротивляющееся изгибу, но сопротивляющееся растяжению. Пусть однородная мембрана постоянной *очень малой толщины* h защемлена по плоскому контуру C, имеющему форму контура поперечного сечения стержня, кручение которого исследуется, причем в области защемления на мембрану действует повсюду одинаковое постоянное по толщине мембраны натяжение T. При отсутствии других внешних воздействий напряженное состояние мембраны будет везде одинаковым, на каждой площадке, перпендикулярной к поверхности мембраны, действует нормальное растягивающее напряжение T. Если

принять среднюю плоскость мембраны за плоскость xOy декартовой системы координат, то матрицу компонент тензора напряжений при отсутствии внешних нагрузок на поверхности мембраны $z = \pm h/2$ можно записать в виде

$$\|p_{ij}\| = \begin{Vmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь равновесие такой мембраны под действием равномерно распределенной по ее поверхности $z = -h/2$ поперечной нагрузки q (параллельной оси z), когда поверхность $z = h/2$ мембраны свободна от нагрузки.

Предположим, что натяжение T столь велико, что прогиб w мембраны ($w = w_3(x, y, z = 0)$) можно считать малым. Дальше примем, что изменением компонент $p_{11} = p_{22} = T$ и $p_{12} = 0$ тензора напряжений в результате приложения нагрузки q можно пренебречь. Компоненты p_{13}, p_{23} и p_{33} будут малыми порядка w, их следует учитывать.

Единичные векторы нормали к внешней поверхности мембраны с точностью до малых первого порядка на разных сторонах мембраны направлены противоположно, а их направляющие косинусы равны

$$\cos(\boldsymbol{n}, x) = \pm \frac{\partial w_3}{\partial x} \approx \pm \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \cos(\boldsymbol{n}, y) = \pm \frac{\partial w_3}{\partial y} \approx \pm \frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\cos(\boldsymbol{n}, z) = \mp 1, \tag{7.30}$$

где верхние знаки соответствуют нормали к деформированной поверхности мембраны $z = -h/2$, а нижние — нормали к деформированной поверхности $z = h/2$.

Граничные условия для компонент вектора напряжений $\boldsymbol{p}^n$, действующих на элементе внешней поверхности мембраны с нормалью n, с точностью до членов первого порядка малости дают

$$\left.\begin{aligned} p_1^n &= p_{11}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{12}\cos(\boldsymbol{n}, y) + \\ &+ p_{13}\cos(\boldsymbol{n}, z) = T\frac{\partial w}{\partial x} - p_{13} = 0, \\ p_2^n &= p_{12}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{22}\cos(\boldsymbol{n}, y) + \\ &+ p_{23}\cos(\boldsymbol{n}, z) = T\frac{\partial w}{\partial y} - p_{23} = 0 \end{aligned}\right\} z = \pm\frac{h}{2},$$
$$p_3^n = p_{13}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{23}\cos(\boldsymbol{n}, y) + \tag{7.31}$$
$$+ p_{33}\cos(\boldsymbol{n}, z) = \begin{cases} -p_{33} = q & \text{при} \quad z = -\dfrac{h}{2}, \\ p_{33} = 0 & \text{при} \quad z = \dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Напишем уравнения равновесия в напряжениях. Имеем

$$\frac{\partial p_{13}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_{23}}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial p_{13}}{\partial z} + \frac{\partial p_{23}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} = 0.$$

Из первых двух уравнений следует, что компоненты напряжения p_{13} и p_{23} не зависят от z. В связи с малостью производных $\partial w/\partial x, \partial w/\partial y$ и h на основании (7.31) можно написать

$$p_{13} = T\frac{\partial w}{\partial x}, \quad p_{23} = T\frac{\partial w}{\partial y} \tag{7.32}$$

Проинтегрировав третье уравнение равновесия вдоль оси z по толщине мембраны от $-h/2$ до $+h/2$ с учетом (7.32) и (7.31), получим [1])

$$-\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial p_{33}}{\partial z}\, dz = T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h + T\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h = -q.$$

Следовательно, уравнение для прогиба мембраны w имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{Th}. \tag{7.33}$$

Из условия закрепления мембраны на контуре C следует

$$w = 0 \quad \text{на } C. \tag{7.34}$$

Сравнив уравнения (7.25) для функции напряжений в задаче о кручении цилиндрического стержня и (7.33) для прогиба мембраны постоянного натяжения и граничные условия (7.26) и (7.34) на контуре C, видим, что решение задачи о кручении цилиндрического стержня сводится к определению формы прогиба мембраны постоянного натяжения, когда

$$2 = \frac{q}{Th}. \tag{7.35}$$

При этом, так как задача об определении $\mathcal{F}$ (7.25), (7.26) не содержит размерной постоянной, фиксируется единица измерения h.

Совпадение уравнений (7.33) и (7.25) можно обеспечить выбором q и произведения Th или выбором единицы измерения длины.

---

[1]) Очевидно, что в рамках рассматриваемой приближенной теории величина p_{33} распределена по толщине мембраны по линейному закону, и ее зависимость от x и y определяется через функцию $q(x, y)$, причем соотношения (7.32) и (7.33) установлены без использования закона Гука.

Мыльная пленка, благодаря наличию поверхностного натяжения, представляет собой мембрану с постоянным натяжением. Если к одной из ее сторон приложить малое постоянное давление и не допускать смещений точек ее границы, то прогиб будет удовлетворять условиям, которые налагаются на функцию напряжений $\mathcal{F}$.

Определяя из опыта прогибы пленки, получим экспериментальные значения функции напряжений $\mathcal{F}$.

Линии, на которых прогиб мембраны одинаков ($(\partial w/\partial s)=0$), в задаче о кручении соответствуют линиям, в каждой точке которых полные напряжения, лежащие в плоскостях поперечных сечений стержня, направлены по касательной к ним.

В самом деле, по (7.22) и (7.10) для таких линий имеем

$$0 = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \\ = p_{13}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{23}\cos(\boldsymbol{n}, y) = \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n},$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к линии ($(\partial w/\partial s) = 0$) постоянного прогиба мембраны в плоскости xy.

Вместе с тем

$$|\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{p_{13}^2 + p_{23}^2} = \alpha\mu\sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2} = \alpha\mu\,|\operatorname{grad}\mathcal{F}|$$

и, следовательно, величина касательных напряжений пропорциональна $|\operatorname{grad}\mathcal{F}|$ или $|\operatorname{grad} w|$ и поэтому больше там, где линии равного уровня $w = \text{const}$ расположены гуще. Таким образом, построив «топографическую» картину линий равного уровня постоянного прогиба мембраны, можно получить наглядную картину распределения касательных напряжений в поперечном сечении стержня.

Объем, заключенный между прогнувшейся мембраной и плоскостью контура, будучи умножен на $2\alpha\mu$, дает величину скручивающего момента M (см. (7.28)).

Как увидим в последующем, аналогия с прогибом мембраны постоянного натяжения полезна не только в случае кручения упругого стержня, но и тогда, когда под действием скручивающего момента материал стержня в некоторых частях поперечного сечения переходит в пластическое состояние.

Обратим внимание на то, что мембранная аналогия справедлива только при малых прогибах мембраны, и поэтому провести измерения с большой точностью довольно трудно. Трудности связаны также с тем, что прогиб, вызванный весом мембраны, обычно сравним с прогибом, возникающим в результате приложения к мембране небольшого давления.

Аналогия с течением вязкой жидкости

Помимо изложенной мембранной аналогии для решения задач о кручении цилиндрических стержней можно указать еще гидродинамические аналогии с течениями вязкой и идеальной жидкости.

Рассмотрим установившееся ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе, поперечное сечение которой совпадает с поперечным сечением стержня. Как известно (см. § 20 гл. VIII), если направить ось z вдоль оси трубы и обозначить через w скорость установившегося течения жидкости в трубе под действием постоянного заданного перепада давлений dp/dz, то из уравнений Навье — Стокса получается следующее уравнение для определения скорости:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}; \tag{7.36}$$

здесь μ — коэффициент вязкости жидкости. На стенках неподвижной трубы (контуре C) имеем условие прилипания

$$w = 0. \tag{7.37}$$

Сравнивая (7.25) и (7.36) и граничные условия (7.26) и (7.37), видим, что математические задачи об определении функции напряжений при кручении цилиндрического стержня и скорости течения ламинарного установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечно длинной трубе, поперечное сечение которой одинаково с поперечным сечением стержня, под действием постоянного перепада давлений dp/dz совпадают, когда

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = -2. \tag{7.38}$$

Аналогия с потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости

Возьмем цилиндрический сосуд, совпадающий по форме со стержнем, кручение которого изучается. Пусть внутри этого сосуда находится идеальная несжимаемая жидкость. Рассмотрим абсолютное плоскопараллельное потенциальное движение жидкости в плоскости xy поперечного сечения цилиндрического сосуда относительно неподвижной системы координат xOy при вращении сосуда с угловой скоростью ω вокруг оси z. Для потенциала $\varphi(x, y)$ имеем уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

и граничное условие на контуре

$$v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})_n = -\omega y\cos(\boldsymbol{n}, x) + \omega x\cos(\boldsymbol{n}, y),$$

которое совпадает с граничным условием (7.8) для функции кручения f, если положить

$$\omega = -1. \tag{7.39}$$

Таким образом, задача определения функции кручения совпадает с задачей определения потенциала скоростей абсолютного плоскопараллельного движения идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе (стержне), вращающейся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью, равной [1]) (-1).

Зависимость перемещений от положения точки закрепления в плоскости поперечного сечения стержня

Приведем один из примеров использования этой аналогии. Из вида формул (7.4) для перемещений ясно, что они определяются так, что элементы стержня, расположенные на оси z, не получают смещений в плоскости xy. Таким образом, положение начала координат в плоскости поперечного сечения стержня «закреплено». Перемещения точек закручиваемого стержня будут различными для различных положений начала координат в плоскости поперечного сечения стержня, совпадающего по условию с точкой закрепления.

Изложенная выше гидродинамическая аналогия позволяет легко представить себе перемещения в случае произвольного положения начала координат O', если известны перемещения для некоторого одного положения начала координат O.

Как известно, вращение вокруг некоторой оси z_2 с угловой скоростью ω в каждый данный момент времени эквивалентно вращению вокруг другой оси z_1, параллельной первой, с той же угловой скоростью ω и мгновенному поступательному движению со скоростью, равной скорости точек оси z_1 при вращении вокруг оси z_2.

Обозначим через φ потенциал скоростей движения жидкости, возникающего при вращении вокруг оси z_1, проходящей через начало координат O, а через φ' потенциал скоростей, возникающих в результате вращения сосуда относительно другой, параллельной первой, оси z_2, проходящей в плоскости xOy через некоторую точку O' с координатами x' и y'.

Компоненты скорости мгновенного поступательного движения (скорости точек оси z_1 при вращении относительно оси z_2) при $\omega = -1$ определены формулами

$$U_x = [\omega \times (-r)]_x = -y', \quad U_y = [\omega \times (-r)]_y = x'.$$

Так как поступательным движениям вдоль осей x и y со

[1]) Условиям (7.38), (7.39) можно удовлетворить выбором единиц измерения.

скоростями $-y'$ и x' соответствуют потенциалы

$$\varphi_1 = -y'x \quad \text{и} \quad \varphi_2 = x'y,$$

то, очевидно, потенциалы φ' и φ связаны равенством

$$\varphi' = \varphi + x'y - y'x.$$

Компоненты смещений при кручении вокруг оси z_2 при этом должны определяться формулами

$$w_1 = -\alpha (y - y') z, \quad w_2 = \alpha (x - x') z, \qquad w_3 = \alpha\varphi'.$$

Очевидно, что напряжения, а следовательно, и крутящий момент при этом не изменятся.

Для стержня круглого поперечного сечения, если начало координат O совпадает с центром круга, $\varphi = 0$ и частицы не испытывают смещений вдоль оси z. Если выбрать другое положение начала координат, т. е. закрепить в стержне другую ось, то смещения вдоль оси z во всех точках, кроме точек новой оси z, станут отличными от нуля и равными

$$w_3 = \alpha (x'y - y'x).$$

Отсюда видно, что в этом случае поперечные сечения также остаются плоскими, но угол между осью z и поперечными сечениями после смещений перестает быть прямым [1]).

Аналогия с вихревым течением идеальной несжимаемой жидкости

Изложенную выше аналогию задач о кручении и потенциальном абсолютном течении жидкости можно легко видоизменить и получить аналогию между задачами о кручении цилиндрических стержней и о вихревом относительном движении жидкости. Для этого на движение сосуда и жидкости в сосуде достаточно наложить вращательное движение вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = 1$. В результате этого сосуд станет неподвижным, а жидкость будет иметь во всех точках постоянную завихренность $\omega_z = 1$. Жидкость несжимаемая, течение плоскопараллельное, уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует, что можно ввести функцию тока ψ такую, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{7.40}$$

[1]) Очевидно, что упругие смещения при изменении положения в стержне оси z отличаются только на малый поворот стержня как твердого относительно оси, не параллельной оси z, в случае стержня круглого поперечного сечения относительно оси, параллельной плоскости xOy.

Жидкость движется так, что вектор вихря $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \boldsymbol{k}$ постоянен в каждой точке, поэтому для определения функции тока ψ получается следующее уравнение:

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\Delta\psi$$

или

$$\Delta\psi = -2, \tag{7.41}$$

которое совпадает с уравнением (7.25) для функции напряжений $\mathcal{F}$.

Граничное условие непроницаемости на стенках неподвижной трубы будет иметь вид

$$v_n = u\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) + v\cos(\boldsymbol{n}, y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial s} = 0,$$

т. е.

$$\psi = \text{const на } C$$

или в случае односвязного сечения

$$\psi = 0 \text{ на } C. \tag{7.42}$$

Это граничное условие совпадает с граничным условием (7.26) для функции напряжений $\mathcal{F}$.

Таким образом, функцию тока ψ можно отождествить с $\mathcal{F}$, а p_{13} и p_{23} с компонентами скорости относительного плоскопараллельного движения идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью $\omega_z = 1$ в цилиндрическом сосуде-стержне.

Момент количества движения слоя жидкости единичной толщины относительно оси z при этом будет равен

$$M' = \rho\int_{\Sigma_z}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})_z\,d\sigma = \rho\int_{\Sigma_z}(vx - uy)\,d\sigma =$$

$$= -\rho\int_{\Sigma_z}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}x + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}y\right)d\sigma$$

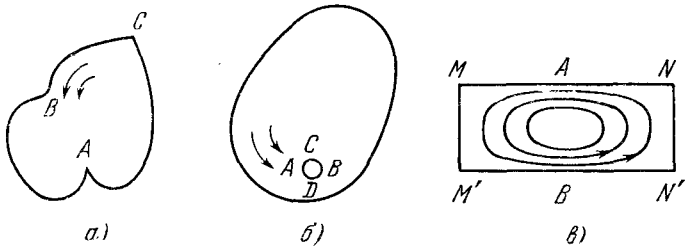
и будет совпадать со значением крутящего момента (7.28′), если принять, что плотность жидкости ρ равна $\alpha\mu$, а $\omega_z = 1$.

Качественные выводы о кручении стержней, сделанные на основе гидродинамических аналогий

Все приведенные математические аналогии любопытны сами по себе и позволяют перенести решения соответствующих задач на случай кручения цилиндрических стержней и наоборот [1]). Гидродинамические аналогии дают возможность сделать ряд приближенных качественных выводов о распределении касательных напряжений при кручении.

[1]) Существует множество других примеров подобного рода аналогий для различных задач физики и механики.

Например, из теории потенциальных плоскопараллельных течений идеальной несжимаемой жидкости [1]) известно, что точки излома линий тока являются критическими точками, при обтекании входящих в область течения углов в угловых точках возникают, вообще говоря, бесконечно большие скорости,



а) б) в)

Рис. 122. К применению гидродинамических аналогий.

а при обтекании выходящих из области течения углов в угловых точках скорости равны нулю [2]). Таким образом, в окрестности угловой точки A выточки, изображенной на рис. 122,*а*, при любом малом крутящем моменте возникают бесконечно большие касательные напряжения. Следовательно, с точки зрения прочности стержня целесообразно делать выточки закругленного профиля, типа B. В угловых точках типа C (рис. 122,*а*) при кручении стержня напряжения равны нулю.

Пусть в поперечном сечении работающего на кручение стержня имеется отверстие — след круглой цилиндрической полости, диаметр которого мал по сравнению с характерным линейным размером поперечного сечения стержня. При обтекании такой полости скорости в некоторых точках A и B будут равны нулю, а в точках C и D — больше скорости натекающего потока. Следовательно, в окрестности точек C и D будут наблюдаться касательные напряжения больше тех, которые возникают в месте полости при ее отсутствии.

Приведем еще один пример использования гидродинамической аналогии. Рассмотрим циркуляционное течение идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрическом сосуде, поперечное сечение которого имеет вид вытянутого прямоугольника (см. рис. 122, *в*). Очевидно, что в точках M, N, M', N' скорости жидкости равны нулю, а вблизи середин длинных сторон линии тока будут расположены наиболее густо, т. е. скорости в окрестностях точек A и B будут наибольшими. Отсюда сле-

[1]) См., например, Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 1950 и 1966 гг.

[2]) Эти свойства верны как для потенциальных движений жидкости, так и для вихревых.

дует, что при кручении такого стержня максимальные касательные напряжения будут в точках A и B.

Таким образом, с помощью гидродинамических аналогий весьма просто можно сделать важные заключения о некоторых особенностях распределения касательных напряжений при кручении.

§ 8. Методы сопротивления материалов в задачах об изгибе балок

Задачи теории упругости с малыми деформациями линейны. Несмотря на это, во многих случаях теоретическое решение этих задач затруднительно. В инженерной практике с успехом применяются приближенные методы расчета, создание и разработка которых составляет предмет «сопротивления материалов».

Общая характеристика методов «сопротивления материалов»

Сопротивление материалов находится в таком же отношении к теории упругости, как гидравлика к теоретической гидромеханике. Методы сопротивления материалов и гидравлики основаны на некоторых предположениях, которые в свою очередь основаны на использовании сведений, полученных в опытах или при изучении известных точных решений задач теории упругости и гидромеханики. Проиллюстрируем эти методы на примере решения задач об изгибе балок. Такие задачи часто встречаются в инженерной практике; балка — наиболее распространенный элемент многих конструкций. Мосты, плотины, корабли, небоскребы и т. д. также часто можно рассматривать как балки, нагруженные различными системами сил.

Рассмотрим системы сил, которые вызывают изгиб балки, и подсчитаем суммарные силы и моменты, действующие в каждом поперечном сечении балки.

«Чистый изгиб», изгиб поперечной силой

В § 6 подробно изучена задача о «чистом изгибе» балки, т. е. изгибе, который производится двумя равными и противоположно направленными моментами $\boldsymbol{M}$ и $(-\boldsymbol{M})$, действующими на торцах балки. В этом случае напряжения, действующие в каждом поперечном сечении балки, приводятся к паре с моментом $\boldsymbol{M}$.

Более распространенным является случай, когда изгиб производится действующими перпендикулярно к оси балки силами [1]).

[1]) Дальше для простоты будем рассматривать изгиб простейших типов балок, имеющих плоскость симметрии, проходящую через продольную ось, силами, действующими в плоскости симметрии. Наиболее распространенные балки круглого, прямоугольного, двутаврового и других поперечных сечений обладают такой симметрией.

Пусть, например, имеется балка, один конец которой жестко

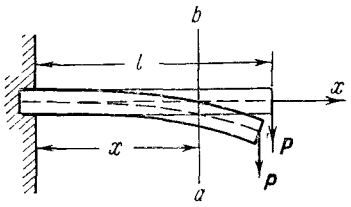


Рис. 123. Консоль.

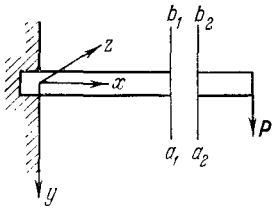


Рис. 124. К вычислению главного вектора и главного момента сил, действующих в сечении ab.

заделан, а на втором действует сила P. Такая балка называется консолью (рис. 123).

Изгибающий момент и перерезывающая сила

Подсчитаем главный вектор и главный момент сил, действующих в некотором поперечном сечении ab такой балки, на площадке с нормалью, совпадающей с осью x, направление которой указано на рис. 123. Для этого мысленно разрежем балку по этому сечению (см. рис. 124) и отбросим левую часть балки, заменив ее действие на оставшуюся часть действием соответствующей системы сил. В результате такой операции правая часть балки, по условию находившаяся в равновесии, должна остаться в равновесии. Следовательно, сумма всех сил и сумма всех моментов, действующих на эту часть балки, должны быть равны нулю.

Отсюда легко получить, что величина главного вектора сил, действующих в сечении a_2b_2 равна $(-P)$, а главного момента $(-P\,(l-x))$ (боковая поверхность балки по условию свободна от нагрузок). Пользуясь известным свойством напряжений $\boldsymbol{p}^n = -\boldsymbol{p}^{-n}$, заключаем, что напряжения в сечении a_1b_1 сводятся к силе P и моменту $M = P\,(l-x)$.

Момент M называется изгибающим моментом, а сила P — перерезывающей силой. Таким образом, в рассматриваемой задаче об изгибе консоли силой P система напряжений в любом поперечном сечении статически эквивалентна перерезывающей силе P и изгибающему моменту $M = (l-x)\,P$. При этом, в противоположность случаю чистого изгиба, оказывается отличной от нуля не только величина p^{11}, но также и p^{12}, т. е. касательные напряжения в поперечном сечении.

В общем случае может быть несколько сил, приложенных в разных точках балки и действующих в разных плоскостях. Тогда полная система сил, действующих в любом поперечном

сечении, будет сводиться к растягивающей силе, перерезывающей силе, изгибающему моменту и крутящему моменту. В этом параграфе рассмотрим только такой случай, когда силы действуют в одной плоскости (которую назовем плоскостью xy) и приводятся к перерезывающей силе и изгибающему моменту (рис. 125). Если величины всех действующих на балку сил P_i и моментов M_i известны, то для подсчета перерезывающей силы и изгибающего момента, действующих в некотором сечении ab, очевидно следующее правило.

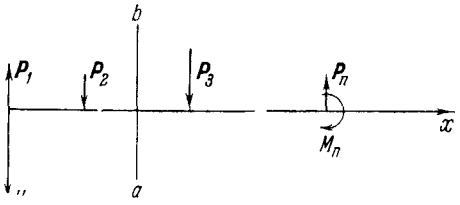


Рис. 125. Система сил и моментов, изгибающая балку.

1) Главный вектор всех сил напряжений, действующих в сечении ab (на площадке с нормалью x, т. е. на левую часть балки), равен сумме всех внешних сил, приложенных справа от этого сечения.

2) Суммарный момент сил напряжений относительно оси, параллельной оси z и расположенной в данном сечении ab, действующих в сечении ab на левую часть балки, равен сумме моментов всех сил и всех пар, приложенных справа от этого сечения.

Погонная нагрузка

Часто приходится рассматривать нагрузку, непрерывно распределенную вдоль балки, например, давление воды на стенку плотины, вес самой балки, давление ветра или поезда на мост (при приближенном рассмотрении) и т. д. В этом случае полезно понятие «погонной нагрузки» $q(x)$, которое вводится следующим образом;

$$q = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x},$$

где ΔF — полная сила, действующая на элемент балки Δx (рис. 126).

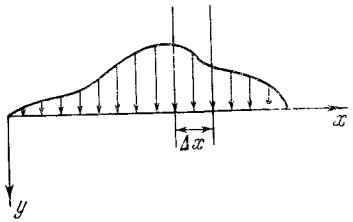


Рис. 126. Непрерывно распределенная нагрузка.

В этом случае перерезывающая сила P, действующая в некотором сечении с координатой x, очевидно, дается формулой

$$P(x) = \int_x^l q(\xi)\, d\xi, \qquad \frac{dP}{dx} = -q(x), \tag{8.1}$$

где l — координата правого конца балки.

Если на балку действует только распределенная нагрузка интенсивности $q(x)$, то изгибающий момент в сечении с координатой x равен

$$M(x) = \int_x^l (\xi - x)\, q(\xi)\, d\xi,$$

т. е.

$$\frac{dM}{dx} = -\int_x^l q(\xi)\, d\xi = -P(x), \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = q(x). \tag{8.2}$$

Эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов

Методы сопротивления материалов дают возможность по известным суммарным характеристикам — перерезывающей силе и изгибающему моменту — определить распределение растягивающих и сжимающих напряжений p_{11} и форму изогнутой оси балки. Поэтому важно знать величины

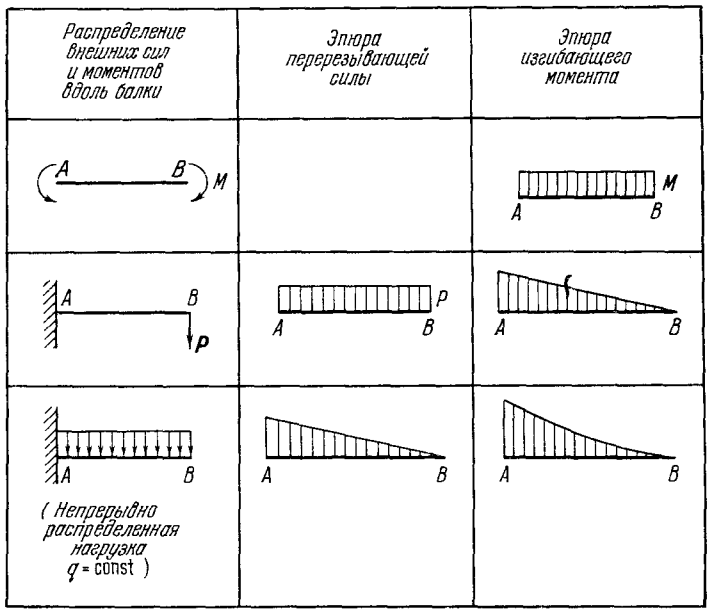


Рис. 127. Примеры эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов.

P и M в каждом сечении балки. Графические изображения распределения этих величин вдоль балки, когда по оси абсцисс откладывается координата сечения, а по оси ординат — ве-

личина P или величина M, называются соответственно эпюрами перерезывающих сил и изгибающих моментов. Примеры таких графиков приведены на рис. 127.

Следует отметить, что в число сил и моментов, действующих на балку, необходимо включать силы и моменты сил *реакций*, возникающие в сечениях, по которым балка закреплена. Силы и моменты реакций заранее неизвестны, и во многих случаях для их определения необходимо полностью решить задачу сопротивления материалов или теории упругости. Дальше мы рассмотрим решения таких задач. Но прежде покажем, как в сопротивлении материалов вычисляются напряжения p_{11} и определяется форма изогнутой оси балки, если в каждом сечении известны перерезывающая сила P и изгибающий момент M.

Основные предположения; удлинение продольного волокна

Сделаем следующие предположения, которые выполняются точно при чистом изгибе (см. § 6).

1. Существует нейтральная ось такая, что каждый элемент балки, лежащий на этой оси, только изгибается, но не удлиняется и не укорачивается.

2. Плоские сечения, перпендикулярные к нейтральной оси балки в начальном недеформированном состоянии, после

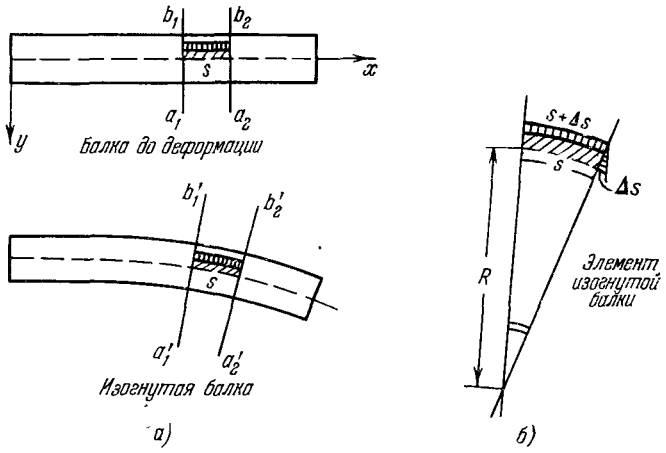


Рис. 128. К вычислению удлинения продольных волокон при изгибе балки.

изгиба остаются плоскими и перпендикулярными к изогнутой нейтральной оси.

В действительности при наличии перерезывающей силы первоначально (до приложения нагрузок) плоские перпендикуляр-

ные к оси балки сечения после деформации балки под действием нагрузок оказываются искривленными. Для длинных и тонких балок этим искривлением плоских сечений можно пренебречь. Точный анализ показывает, что даже для толстых балок при вычислении p_{11} во многих приложениях можно пренебрегать эффектом искривления плоских сечений.

Предположения 1 и 2 дают возможность вывести закон распределения нормальных напряжений в любом поперечном сечении балки. В самом деле, подсчитаем удлинение при изгибе балки продольного волокна, расположенного на расстоянии $|y|$ от оси x, совпадающей с нейтральной осью балки (рис. 128).

Рассмотрим элемент этого продольного волокна, расположенный между двумя плоскостями a_1b_1 и a_2b_2 и имеющий до деформации длину s, а после деформации — длину $s + \Delta s$. Обозначим через R радиус кривизны изогнутой оси балки. Из рисунка 128, *б*, где рассматриваемый элемент волокна и элемент нейтральной оси изображены в более крупном масштабе, легко увидеть, что

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta s}{s} = \frac{|y|}{R} = -\frac{y}{R} \qquad (y < 0). \tag{8.3}$$

Формулы для напряжений и изгибающего момента

Поэтому, используя закон Гука для простого растяжения, для распределения p_{11} получим формулу

$$p_{11} = E\varepsilon_{11} = -\frac{Ey}{R}. \tag{8.4}$$

Если растягивающая балку сила отсутствует, то $\int\limits_{\Sigma} p_{11}\, d\sigma = 0$, где Σ — поперечное сечение балки, или, по (8.4),

$$-\frac{E}{R}\int\limits_{\Sigma} y\, d\sigma = 0,$$

т. е. нейтральная ось должна проходить через центры тяжести поперечных сечений.

Зная напряжения, действующие в рассматриваемом сечении, можно вычислить изгибающий момент M:

$$M = \int\limits_{\Sigma} (-y)\, p_{11}\, d\sigma = \frac{E}{R}\int\limits_{\Sigma} y^2\, d\sigma = \frac{EJ}{R}. \tag{8.5}$$

Здесь через J обозначен момент инерции сечения относительно оси z. Если изгибающий момент в каждом сечении известен, то с помощью (8.4) и (8.5) можно найти величину p_{11} и составить

уравнение изогнутой оси балки:

$$p_{11} = -\frac{yM}{J}, \qquad \frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}. \tag{8.6}$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Если прогиб балки мал, то величину $1/R$ можно заменить на d^2y/dx^2, тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси балки запишется в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}. \tag{8.7}$$

Величина p_{11} и прогиб балки зависят явно лишь от изгибающего момента. Непосредственно от величины перерезывающей силы зависят касательные напряжения в поперечном сечении, которые, как правило, при изгибе бывают менее существенными, чем нормальные напряжения. Способы вычисления касательных напряжений мы здесь рассматривать не будем.

Отметим, что формулы (8.6), (8.7) получились по виду похожими на соответствующие формулы для случая чистого изгиба. Однако величина M теперь сама зависит от x. Поэтому изогнутая ось в общем случае не представляет собой параболу.

Изгиб балки, концы которой укреплены с помощью шарнирно-неподвижной и шарнирно-подвижной опор

Дадим теперь примеры конкретных расчетов. Рассмотрим балку, нагруженную в некоторой точке C силой P и лежащую на двух опорах, одна из которых (в точке A) шарнирно-неподвижная, другая (в точке B) шарнирно-подвижная (рис. 129). Обе опоры позволяют балке свободно вращаться вокруг точек закрепления. Кроме того, опора в точке B поставлена на катки, что позволяет концу балки перемещаться в горизонтальном направлении. Нередко опоры мостов устраиваются именно таким образом. Если пренебречь трением катков о землю, то можно сказать, что в точке B не возникает горизонтальной составляющей силы реакции. Из условия равновесия сразу получается, что и в точке A сила реакции вертикальна. Кроме того, имеем

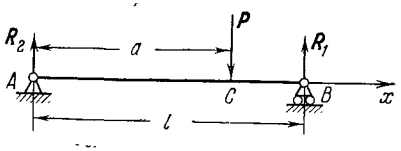


Рис. 129. Балка на двух опорах.

$$R_1 + R_2 = P, \; aP = lR_1. \tag{8.8}$$

Последнее равенство представляет собой условие равенства нулю момента всех действующих на балку сил относительно точки A.

Для изгибающего момента в сечении с координатой x имеем

$$M = -R_1 (l - x) \text{ при } x > a, \qquad (8.9)$$
$$M = -R_1 (l - x) + P (a - x) \text{ при } x < a.$$

Эпюра изгибающих моментов имеет вид, показанный на рис. 130. Наибольший изгибающий момент $M_{\max}$ получается в сечении, расположенном непосредственно под грузом P,

$$M_{\max} = -R_1 (l - a) = -\frac{Pa(l-a)}{l}. \qquad (8.10)$$

В этом сечении будут максимальные растягивающие и сжимающие напряжения p_{11}. Для симметричной балки толщиной $2h$ с помощью (8.6) получаем

$$|p_{11\max}| = |M_{\max}| \frac{h}{J}.$$

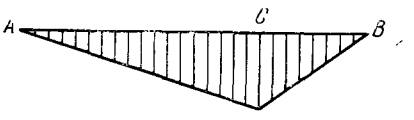


Рис. 130. Эпюра изгибающих моментов при изгибе балки одной силой P, приложенной в точке C.

Величина максимального изгибающего момента зависит, как видно из (8.10), от a, т. е. от положения груза. Если груз P перемещается вдоль балки, то величина $M_{\max}$ будет наибольшей при $l = 2a$, т. е. когда груз находится посредине балки.

Отметим, что мы нашли все силы и определили напряжения p_{11} (по формулам (8.8), (8.9), (8.6)), не пользуясь сведениями о материале, из которого сделана балка, только из условий статики. Рассматриваемая задача представляет собой пример статически определимой задачи.

Найдем теперь уравнение изогнутой оси балки. Пользуясь соотношением (8.7), легко получим:

при $x < a$

$$\left.\begin{aligned} EJ\frac{d^2y}{dx^2} &= R_1(x-l) - P(x-a), \\ \text{т. е.} \quad EJy &= \frac{R_1}{6}(x-l)^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + c_1x + c_2; \end{aligned}\right\} \qquad (8.11)$$

при $x > a$

$$\left.\begin{aligned} EJ\frac{d^2y}{dx^2} &= R_1(x-l), \\ \text{т. е.} \quad EJy &= \frac{R_1}{6}(x-l)^3 + c_3x + c_4. \end{aligned}\right\} \qquad (8.12)$$

В этих формулах через c_1, c_2, c_3, c_4 обозначены константы интегрирования. Для их определения используем условие отсут-

ствия смещений в точках A и B; кроме того, предположим, что в точке, где находится груз, смещения, получающиеся из формул (8.11) и (8.12), одинаковы и имеют одинаковые первые производные. Таким образом, имеем

$$y(0) = 0,$$
$$y(l) = 0,$$
$$y(a + 0) = y(a - 0),$$
$$y'(a + 0) = y'(a - 0).$$

Из этих условий получается, что

$$c_1 = c_3, \quad c_2 = c_4, \quad c_1 = -\frac{c_4}{l},$$
$$c_2 = \frac{R_1}{6} l^3 - \frac{Pa^3}{6} = \frac{Pa}{6}(l^2 - a^2). \tag{8.13}$$

Формулы (8.11) — (8.13) определяют величину прогиба балки в любом ее сечении. Прогиб балки обратно пропорционален EJ — жесткости на изгиб.

Наибольший интерес для инженера представляют величины углов θ_A и θ_B поворота оси балки у опор A и B, координата x^*, где прогиб максимален ($|y| = |y|_{\max}$), и величина $|y_{\max}|$. Интересно, что сечение, где прогиб максимален, оказывается расположенным не непосредственно под грузом. Оно всегда близко к середине балки. В самом деле, если груз находится посредине балки, то $x^* = l/2$. Пусть теперь $a < l/2$. Тогда, очевидно, для определения x^* надо пользоваться формулой (8.12), верной при $x > a$ (рис. 131).

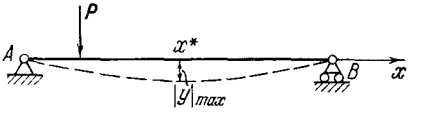


Рис. 131. К определению места максимального прогиба.

Из условия $(dy/dx)_{x=x^*} = 0$ получаем

$$x^* = l - \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}}.$$

Это число близко к $l/2$. Даже при $a \to 0$

$$x^* = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{l}{2} - 0{,}077l.$$

Если груз расположен точно посредине балки, то $x^* = l/2$ и

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Изгиб балки, один конец которой закреплен жестко, а другой — с помощью шарнирно-подвижной опоры

Рассмотрим теперь задачу о равновесии балки с другим устройством левой опоры (рис. 132), а именно, допустим, что левый конец балки (сечение A) жестко закреплен. Тогда в сечении A не известны ни сила реакции, ни точка ее приложения, поэтому в этом сечении приходится вводить не только силу реакции R_2, но и момент реакции $\mathfrak{M}$. Отсутствие горизонтальных составляющих реакций в точках A и B по-прежнему обеспечивается устройством опоры в точке B. Уравнения статики дают

$$R_1 + R_2 = P, \quad Pa - R_1 l - \mathfrak{M} = 0. \tag{8.14}$$

Этих условий недостаточно для определения неизвестных R_1, R_2 и $\mathfrak{M}$. Следовательно, мы имеем дело со статически неопределимой задачей. Необходимое дополнительное условие для определения R_1, R_2 и $\mathfrak{M}$ заключается в условии отсутствия

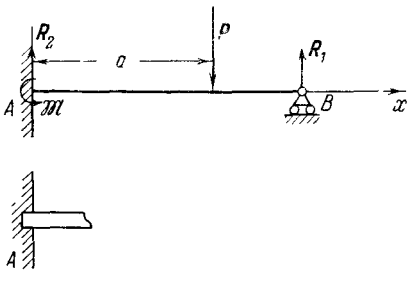


Рис. 132. Изгиб балки, один конец которой закреплен жестко, а другой — с помощью шарнирно-подвижной опоры.

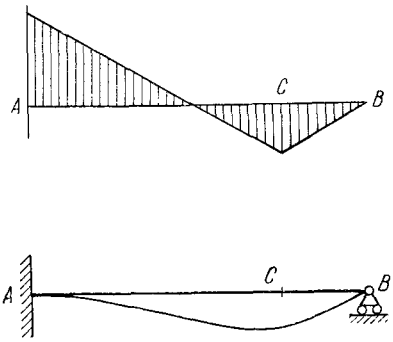


Рис. 133. Эпюра изгибающих моментов и форма изогнутой оси балки, изгибаемой силой, приложенной в точке C.

поворота оси балки в точке A (жесткое закрепление исключает поворот). Это условие имеет вид

$$\theta_A = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = 0.$$

Величина прогиба балки $y(x)$ зависит от свойств материала, и поэтому R_1, R_2, $\mathfrak{M}$ нельзя определить независимо от свойств материала балки.

Для величин изгибающих моментов имеем

$$M = -R_1(l - x) \qquad \text{при } x > a,$$

$$M = -R_1(l - x) + P(a - x) \quad \text{при } x < a.$$

Следовательно, уравнение изогнутой оси балки по-прежнему определяется формулами (8.11) — (8.13).

Условие $\theta_A = 0$ имеет вид

$$\frac{R_1}{2} l^2 - \frac{P}{2} a^2 + c_1 = 0$$

или (с использованием (8.13))

$$R_1 = \frac{Pa^2}{2l^3}(3l - a).$$

Далее из условий (8.14) определяются R_2 и $\mathfrak{M}$:

$$R_2 = P - \frac{Pa^2}{2l^3}(3l - a), \qquad \mathfrak{M} = \frac{Pa}{2l^2}(l - a)(2l - a).$$

Нетрудно проверить, что наибольший изгибающий момент, а следовательно, и наибольшие нормальные напряжения получаются в заделанном сечении и когда груз расположен так, что

$$a = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Эпюра изгибающих моментов и форма изогнутой оси балки приведены на рис. 133.

Задача о равновесии балки на трех опорах

Рассмотрим еще один пример типичной статически неопределимой задачи — зазачу о балке на трех опорах (рис. 134), когда в точке $x = l_1 + a$ на балку действует сила P. Уравнения статики в этом случае дают

$$\left.\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &= P, \\ R_1 l + R_2 l_1 &= P(l_1 + a). \end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

Условия (8.15) представляют собой два уравнения для определения трех неизвестных R_1, R_2, R_3.

Дифференциальные уравнения для определения формы изогнутой оси балки в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} EJ\frac{d^2y}{dx^2} &= -R_1(l - x), && x > l_1 + a, \\ EJ\frac{d^2y}{dx^2} &= -R_2(l - x) + P(l_1 + a - x), && l_1 < x < l_1 + a, \\ EJ\frac{d^2y}{dx^2} &= -R_1(l - x) + P(l_1 + a - x) - R_2(l_1 - x), && x < l_1 \end{aligned}\right\}. \tag{8.16}$$

При интегрировании уравнений (8.16) появляются шесть дополнительных констант. Для определения этих шести констант и одной неизвестной реакции, например R_1, имеем

следующие семь условий:

$$\left.\begin{aligned} &y(0)=0, \quad y(l_1)=0, \quad y(l)=0,\\ &y(l_1+a+0)=y(l_1+a-0),\\ &y'(l_1+a+0)=y'(l_1+a-0),\\ &y(l_1+0)=y(l_1-0),\\ &y'(l_1+0)=y'(l_1-0). \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

После использования условий (8.17) и (8.15) становятся полностью известными величины всех реакций, форма изогнутой

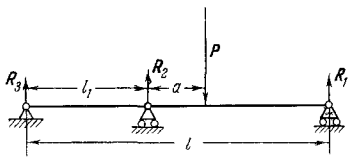


Рис. 134. Равновесие балки на трех опорах.

оси балки и величина нормальных напряжений в каждом поперечном сечении.

Аналогично может быть решена задача о равновесии неразрезной балки на n опорах под действием произвольной системы сил, приводящих к изгибу.

§ 9. Вариационные методы в теории упругости

Вариационными методами называются методы точного и приближенного решения задач, основанные на использовании экстремальных свойств некоторых функционалов. Здесь мы рассмотрим так называемый метод Ритца, а также близкий к нему, хотя и не основанный непосредственно на использовании вариационного принципа, метод Бубнова.

Вывод основного вариационного уравнения

Введем прежде всего вариационный принцип для упругих тел, находящихся в равновесии. Рассмотрим уравнение притока тепла для некоторого действительного процесса, проходящего через данное состояние покоя:

$$dF = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} - s\,dT. \tag{9.1}$$

Это уравнение выполняется для любого действительного процесса в упругом теле. Однако оно имеет более общую природу. Именно, как мы это уже делали в § 2, можно рассматривать набор различных равновесных процессов, проходящих в пространстве

состояний через данную точку и играющих роль «возможных перемещений» для данного упругого тела. В то же время эти «возможные» процессы могут быть действительными при определенном выборе внешних сил, внешнего притока тепла и других внешних факторов, которые не входят в уравнение (9.1). Поэтому, если обозначить набор дополнительных, мысленно определенных возможных бесконечно малых смещений (т. е. дополнительных смещений, допускаемых геометрическими связями) через δw_i, соответствующие им дополнительные деформации через

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \delta w_j}{\partial x^i}\right),$$

а возможное приращение свободной энергии и температуры через δF и δT, то будем иметь

$$\rho\delta F = p^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} - \rho s\delta T. \tag{9.2}$$

Вычислим изменение полной свободной энергии тела $\delta\int\limits_V \rho F\,d\tau$, где V — объем данного тела, учитывая, что для индивидуальных элементов объема V верно равенство $\delta\,(\rho\,d\tau) = 0$. Имеем

$$\delta\int\limits_V \rho F\,d\tau = \int\limits_V \rho\delta F\,d\tau = \int\limits_V p^{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau - \int\limits_V \rho s\delta T\,d\tau.$$

Дальше примем, что вариации перемещений $\delta w_i(x^1, x^2, x^3)$ — *непрерывные дифференцируемые функции координат*; пользуясь этим и свойством симметрии $p^{ji} = p^{ij}$, преобразуем первый из интегралов правой части

$$\int\limits_V p^{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau = \int\limits_V p^{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \delta w_j}{\partial x^i}\right)d\tau = = \int\limits_V p^{ij}\frac{\partial \delta w_i}{\partial x^j}\,d\tau =$$

$$\int\limits_V \frac{\partial p^{ij}\delta w_i}{\partial x^j}d\tau - \int\limits_V \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j}\,\delta w_i\,d\tau = \int\limits_\Sigma (\boldsymbol{p}^n)^i\,\delta w_i\,d\sigma - \int\limits_V \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j}\,\delta w_i\,d\tau. \tag{9.3}$$

При выполнении преобразования (9.3) принято обозначение

$$p^{ij}n_j = (\boldsymbol{p}^n)^i.$$

Для действительного напряженно-деформированного состояния при условии, что упругое тело находится в равновесии (покое), можно написать

$$\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}^n_{\text{гран}},\quad \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} = -\rho F^i,$$

поэтому

$$\int_V p^{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau = \int_\Sigma (p^n_{\text{гран}}\cdot\delta w)\,d\sigma + \int_V \rho\,(F\cdot\delta w)\,d\tau,$$

т. е. интеграл

$$\int_V p^{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau$$

равен работе действующих на тело внешних массовых сил F и поверхностных $p^n_{\text{гран}}$ напряжений. Следовательно,

$$\delta\int_V \rho F\,d\tau = \int_\Sigma (p^n_{\text{гран}}\cdot\delta w)\,d\sigma + \int_V \rho\,(F\cdot\delta w)\,d\tau - \int_V \rho s\delta T\,d\tau. \quad (9.4)$$

Мы получили уравнение (9.4), пользуясь соотношением (9.2), определением индивидуального объема, дифференциальными уравнениями равновесия и граничными условиями, определяющими напряжения на границе.

Обратно, из (9.4) и (9.2) на основании произвольности возможных перемещений δw, с помощью преобразования (9.3) и условия $\delta(\rho\,d\tau) = 0$, можно получить дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия для напряжений. В этом смысле можно говорить, что уравнение (9.4) эквивалентно системе уравнений равновесия и граничным условиям. Если имеются граничные условия в перемещениях, то они должны быть учтены дополнительно [1]).

Предыдущие выводы и уравнение (9.4) справедливы как в рамках теории малых деформаций при наличии закона Гука, так и в рамках общей теории упругости с конечными деформациями и перемещениями из начального состояния.

Рассмотрим отдельно случай, когда внешних массовых сил нет,

$$F = 0. \quad (9.5)$$

Дальше в этом параграфе в качестве возможных процессов рассмотрим только изотермические:

$$\delta T = 0. \quad (9.6)$$

В качестве возможных перемещений δw достаточно рассматривать только такие, для которых на границе тела выполняется равенство

$$p^n_{\text{гран}}\cdot\delta w = 0. \quad (9.7)$$

Это условие ограничивает возможные перемещения только точек

[1]) В частности, это проявится в выборе апроксимирующих функций в методах Ритца и Бубнова.

поверхности рассматриваемого упругого тела, оставляя перемещения внутренних точек произвольными. Если $\boldsymbol{p}^n_{\text{гран}} \neq 0$, то условие (9.7) требует, чтобы $\delta\boldsymbol{w}$ были либо перпендикулярны к направлению действующих на границе внешних сил, либо просто равны нулю[1]). Если же $\boldsymbol{p}^n_{\text{гран}} = 0$, то условие (9.7) не накладывает никаких ограничений на возможные перемещения на границе.

Из равенства (9.4) при условии, что массовых сил нет, а возможные перемещения удовлетворяют условиям (9.6) и (9,7′), получаем

$$\delta \int_V \rho F \, d\tau = 0. \tag{9.8}$$

Вариационный принцип

Следовательно, при равновесии в отсутствие массовых сил действительные перемещения $\boldsymbol{w}$ доставляют экстремум полной свободной энергии упругого тела по сравнению со всеми другими перемещениями $\boldsymbol{w} + \delta\boldsymbol{w}$, удовлетворяющими условиям (9.6) и (9.7′). Отметим и подчеркнем, что свободная энергия отдельных частей тела даже при выполнении этих специальных условий на Σ не достигает в равновесии экстремума.

Нетрудно показать, что если упругое тело подчиняется закону Гука, причем F можно считать положительно определенной квадратичной формой от ε_{ij} для всех изотермических процессов с $T = T_0 = \text{const}$, то условие (9.8) превращается в условие минимума полной свободной энергии в состоянии равновесия. В самом деле, пусть

$$F(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} A^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geqslant 0.$$

Вычислим $F(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij})$. Имеем

$$F(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) = F(\varepsilon_{ij}) + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} = F(\varepsilon_{ij}) + \delta F + \frac{1}{2} A^{ijkl} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl}.$$

Поэтому в силу (9.8) получаем

$$\int_V \rho F(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) \, d\tau = \int_V \rho F(\varepsilon_{ij}) \, d\tau + \int \rho F(\delta\varepsilon_{ij}) \, d\tau.$$

[1]) Для дальнейшего существенно только равенство

$$\int_V \rho(\boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{w}) d\tau + \int (\boldsymbol{p}^n_{\text{гран}} \cdot \delta\boldsymbol{w}) d\sigma = 0, \tag{9.7′}$$

которое может выполняться для перемещений $\delta\boldsymbol{w}$ более общего вида, в частности, для любых перемещений тела как твердого, так как внешние силы удовлетворяют условию равновесия.

Так как F — положительно определенная квадратичная форма, то из последнего равенства следует, что

$$\int_V \rho F(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij})\, d\tau > \int_V \rho F(\varepsilon_{ij})\, d\tau,$$

т. е. свободная энергия в истинном состоянии меньше, чем в других, возможных, состояниях.

Таким образом, при некоторых определенных условиях решение задачи о равновесии упругого тела может быть сведено к решению вариационной задачи о нахождении функций, дающих экстремум некоторому функционалу (для изотермических процессов — полной свободной энергии).

Метод Ритца

Метод Ритца решения задач о равновесии упругого тела основан на использовании вариационного принципа (9.8) или, в более общей формулировке, непосредственно уравнения (9.4). Этот метод состоит в следующем. Ищем решение для перемещений в виде конечной или бесконечной суммы

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \sum_{s=1}^{N} a_s \boldsymbol{w}^{(s)}, \tag{9.9}$$

где $\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{w}^{(s)}$ — наперед заданные функции координат, (например, полиномы), a_s — неизвестные пока константы. Функции $\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{w}^{(s)}$ не обязаны сами по себе удовлетворять уравнениям равновесия или быть связанными с граничными условиями для напряжений. Однако они должны быть выбраны так, чтобы граничные условия для перемещений удовлетворялись, если таковые имеются. Можно, например, выбрать функции $\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{w}^{(s)}$ так, чтобы на поверхности тела

$$\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{w}_{\text{гран}}, \qquad \boldsymbol{w}^{(s)} = 0.$$

Если перемещения заданы формулой (9.9), то можно вычислить соответствующие им компоненты тензора деформаций, которые будут линейными функциями a_s, и величину свободной энергии F, которая при наличии закона Гука оказывается квадратичной функцией постоянных a_s (и известной функцией координат x, y, z).

Рассмотрим перемещения $\delta\boldsymbol{w}$, имеющие вид

$$\delta\boldsymbol{w} = \sum_s \boldsymbol{w}^{(s)} \delta a_s, \tag{9.10}$$

т. е. получающиеся из (9.9) с помощью варьирования констант a_s. Если для изотермического процесса перемещения (9.10)

удовлетворяют условиям (9.7) или (9.7′), то для таких перемещений должно выполняться равенство

$$\delta \int_V \rho F \, d\tau = 0 \quad \text{или} \quad \delta \quad = 0,$$

где $\mathscr{D}$ — полная свободная энергия упругого тела, причем очевидно, что функция $\mathscr{D}$ уже не зависит от координат и является полиномом второй степени относительно a_s с известными коэффициентами. Поэтому условия экстремума для $\mathscr{D}$

$$\frac{\partial \mathscr{D}}{\partial a_s} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, N, \tag{9.11}$$

представляют собой систему линейных уравнений, которые позволяют найти a_s. Таким образом определяются функции $\boldsymbol{w}$ такие, что они дают экстремум функционалу $\mathscr{D}$ по сравнению с другими функциями $\boldsymbol{w} + \delta\boldsymbol{w}$, где $\delta\boldsymbol{w}$ имеют вид (9.10).

Если бы вариации $\delta\boldsymbol{w}$ были совершенно произвольными (удовлетворяющими нужным условиям на границе), то полученное решение было бы точным, так как вариационный принцип полностью эквивалентен системе уравнений равновесия и граничным условиям для напряжений. В данном случае условие экстремума выполняется лишь по отношению к некоторым $\delta\boldsymbol{w}$, поэтому полученное решение является приближенным. Однако если система функций $\boldsymbol{w}^{(s)}$ — полная система, т. е. если любую функцию из данного класса, в частности, $\delta\boldsymbol{w}$ (x, y, z), можно приближенно с любой степенью точности представить в виде линейной комбинации этой системы функций, то, взяв достаточное число членов в (9.9), можно получить решение, вообще говоря, весьма близкое к точному.

После разрешения системы уравнений (9.11) при любых N вопрос о получении таким путем в пределе при $N \to \infty$ точного решения связан не только с полнотой системы функций $\boldsymbol{w}^{(s)}$, но и со сходимостью ряда (9.9).

Решение задачи о кручении цилиндрического стержня эллиптического поперечного сечения методом Ритца

В качестве примера использования метода Ритца рассмотрим решение задачи о кручении цилиндрического стержня эллиптического поперечного сечения (рис. 135) крутящими моментами, приложенными на торцах. Примем, как и прежде (см. § 7), что массовые силы отсутствуют, $T = T_0$, а для перемещений верны формулы:

$$w_1 = -\alpha zy, \quad w_2 = \alpha zx, \quad w_3 = \alpha f(x, y).$$

Тогда, какова бы ни была функция $f(x, y)$, из всех компонент тензора деформаций и тензора напряжений отличны от нуля

только компоненты

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{\alpha}{2}\left(-y + \frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} = \frac{\alpha}{2}\left(x + \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

и

$$p_{31} = p_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \qquad p_{32} = p_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}.$$

При этом считается, что материал стержня изотропен и подчиняется закону Гука. Для свободной энергии, приходящейся на единицу объема, в этом случае получаем

$$\rho F = \frac{\mu\alpha^2}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\right)^2\right].$$

Поэтому полная свободная энергия представляется в виде

$$\mathscr{F} = \int_V \rho F \, d\tau = \frac{l\mu\alpha^2}{2} \int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\right)^2\right] d\sigma, \quad (9.11')$$

где Σ — площадь сечения стержня.

Рассмотрим малые перемещения $\delta\boldsymbol{w}$ следующего вида:

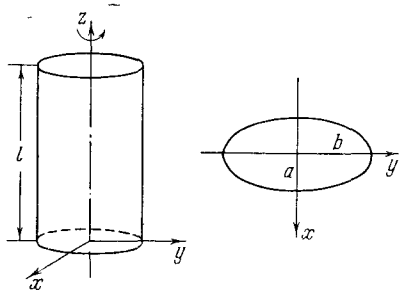


Рис. 135. Обозначения к задаче о кручении стержня эллиптического поперечного сечения.

$$\delta w_1 = 0, \quad \delta w_2 = 0,$$

$$\delta w_3 = \alpha\delta f(x, y).$$

Эти перемещения удовлетворяют условию (9.7), так как на боковой поверхности по условию

$$\boldsymbol{p}^n = 0,$$

а на торцах

$$\boldsymbol{p}^n \cdot \delta\boldsymbol{w} = 0$$

(вектор $\boldsymbol{p}^n = \boldsymbol{p}_3$ лежит в плоскости xy, а $\delta\boldsymbol{w}$ имеет отличную от нуля составляющую только вдоль оси z). Поэтому при всех таких смещениях должно выполняться равенство

$$\delta \int_V \rho F \, d\tau = 0,$$

т. е.

$$\delta \int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x\right)^2\right] d\sigma = 0. \quad (9.12)$$

Легко показать, что если вариация δf может быть произвольной, то из (9.12) для f следуют уравнение $\Delta f = 0$ внутри Σ (уравнение Эйлера в вариационном исчислении) и граничное

условие

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2 + y^2)$$

на границе Σ, т. е. получается рассмотренная в § 7 постановка задачи для определения функции кручения. Найдем функцию $f(x, y)$ методом Ритца, для этого возьмем f в виде

$$f = Axy, \tag{9.13}$$

где A — некоторая постоянная, т. е. положим, что

$$w_0 = 0, \quad w^{(1)} = xy$$

(так как в рассматриваемой задаче перемещения на границе не задаются, то функции w_0, $w^{(s)}$ могут быть выбраны произвольно). Для полной свободной энергии стержня будем иметь

$$\mathscr{D} = \int_V \rho F \, d\tau = \frac{l\mu\alpha^2}{2}\int_\Sigma [(A-1)^2 y^2 + (A+1)^2 x^2] \, d\sigma =$$

$$= \frac{l\mu\alpha^2}{2}\,\frac{\pi ab}{4}\,[(A-1)^2 b^2 + (A+1)^2 a^2] = \mathscr{D}(A),$$

так как Σ — площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из вариационного принципа $\delta\mathscr{D} = 0$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = 0, \quad \text{т. е.} \quad (A-1)b^2 + (A+1)a^2 = 0,$$

отсюда

$$A = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно,

$$f = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}xy.$$

Любопытно, что полученное решение является точным решением задачи о кручении эллиптического цилиндра (см. § 7). В силу удачного выбора функций $w^{(s)}$ всего один член ряда (9.9) дает точное решение.

Аналогичным путем ($w^{(s)}$ — полиномы) получены приближенные решения задач о кручении стержней прямоугольного и треугольного поперечных сечений, а также других задач.

Метод Бубнова

Опишем теперь кратко метод Бубнова [1]). Этот метод не связан непосредственно с задачей разыскания экстремума какого-либо функционала

[1]) В литературе этот метод называется также методом Бубнова — Галеркина.

вида (9.8) и может быть приложен к задачам с необратимыми явлениями [1]).

Пусть требуется найти решение некоторых дифференциальных уравнений, например, уравнений теории движения вязкой жидкости или уравнений движения упругого тела при определенных граничных условиях. Уравнения движения в перемещениях можно записать в виде

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{w}) = 0, \tag{9.14}$$

где L — некоторый оператор. Например, для изотермического равновесия изотропного упругого тела, подчиняющегося закону Гука, имеем линейные уравнения Ламе и

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{w}) = (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{w} + \mu\Delta\boldsymbol{w} + \rho\boldsymbol{F} = 0.$$

Как и в методе Ритца, ищем решение в виде суммы

$$\boldsymbol{w} = \sum_{s=1}^{N} a_s \boldsymbol{w}^{(s)}, \tag{9.15}$$

где $\boldsymbol{w}^{(s)}$ — некоторая система известных функций, обладающая свойством полноты. Далее предполагаем, что выбором функций $\boldsymbol{w}^{(s)}$ удалось заранее удовлетворить граничным условиям. Подставим в уравнения (9.14) формулу (9.15), умножим результат на каждую из функций $\boldsymbol{w}^{(s)}$ и проинтегрируем по всему объему V рассматриваемого упругого тела. Получим следующую систему уравнений:

$$\int_V \mathsf{L}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{w}^{(s)}\,d\tau = 0 \qquad (s = 1, \ldots, N). \tag{9.16}$$

Так как $\mathsf{L}(\boldsymbol{w})$ — теперь известная функция координат и (при наличии закона Гука) линейная функция a_s, то равенства (9.16) представляют собой систему алгебраических уравнений для определения a_s и, может быть, некоторых параметров из условия разрешимости системы (9.16). Определим теперь a_s так, чтобы система (9.16) удовлетворялась.

Возникает вопрос: в каком смысле полученные по (9.15) и (9.16) функции $\boldsymbol{w}$ представляют приближенное решение задачи? Ясно, что если $\boldsymbol{w}^{(s)}$ — полная система функций, то при достаточно большом числе функций $\boldsymbol{w}^{(s)}$ из равенств (9.16) с любой наперед заданной степенью точности следует, что

$$\mathsf{L}(\boldsymbol{w}) = 0,$$

[1]) При наличии необратимых эффектов, вообще говоря, отсутствует голономный вариационный принцип вида (9.8).

и, следовательно, таким способом можно получить решение, близкое к точному.

Для получения таким путем точных решений при $N \to \infty$ математические вопросы о сходимости ряда (9.15) и законности его подстановки в (9.14), а также разрешимости бесконечной системы уравнений (9.16) имеют существенное значение.

Метод Бубнова может быть применен и в динамических задачах теории упругости. При этом, если интегрирование производится по пространственному объему V, то уравнения (9.16) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с одной независимой переменной — временем t.

Применение приближенного метода, по существу совпадающего с методом Бубнова, при интегрировании только по части независимых переменных в области, занятой средой, снижает число независимых аргументов. Такой прием приводит к существенным упрощениям математических задач. Подобные упрощения часто используются на практике в теории стержней, пластинок, оболочек, в гидравлике и т. п.

Замена дифференциальных уравнений интегральными соотношениями, такими как глобальные уравнения количества движения, момента количества движения и энергии, для приближенно заданных законов распределения характеристик движения и состояния является, по существу, частным приемом метода Бубнова.

§ 10. Упругие волны в изотропной среде

Рассмотрим теперь распространение малых возмущений в упругих телах. Уравнения Ламе в случае малых относительных перемещений, не сопровождающихся изменением температуры ($T = T_0$), имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{w} + \mu \Lambda \boldsymbol{w} + \rho \boldsymbol{F}. \qquad (10.1)$$

Процесс распространения упругих волн можно считать адиабатическим

При наличии движения температура в упругом теле, вообще говоря, не остается постоянной, а меняется как с течением времени, так и от точки к точке объема, занятого упругим телом, поэтому система уравнений теории упругости в общем случае движения сильно усложняется.

Однако передача тепла внутри тела путем теплопроводности является медленным процессом, и поэтому быстрый процесс распространения малых возмущений в упругих телах, так же как и в газах, можно обычно считать адиабатическим. Как и в случае движения совершенного газа, предположение об адиабатичности движения упругой среды позволяет получить

простое соотношение между температурой и деформациями. После добавления этого соотношения к уравнениям импульса в перемещениях получается полная система уравнений.

Система уравнений линейной теории упругости в случае адиабатических процессов

Для любой частицы среды адиабатические процессы протекают без обмена теплом с внешней средой ($dq^{(e)} = 0$), все процессы в теории упругости считаются обратимыми ($Tds = dq^{(e)}$), и поэтому в рамках теории упругости адиабатические процессы являются изэнтропическими, $s = \text{const}$. Для энтропии упругого тела (см. § 2) имеем

$$-s = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}}. \tag{10.2}$$

Предполагая изменения температуры $T - T_0$ малыми по сравнению с T_0, выражение для свободной энергии F изотропного упругого тела в случае малых деформаций можно взять в виде (см. (2.24))

$$F = \frac{\lambda}{2\rho} I_1^2(\varepsilon_{ij}) + \frac{\mu}{\rho} I_2(\varepsilon_{ij}) - \frac{1}{\rho}(3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0) I_1(\varepsilon_{ij}) - \\ - s_0(T - T_0) - \frac{c}{2T_0}(T - T_0)^2 + F_0, \tag{10.3}$$

где s_0, λ, μ, c и F_0 — некоторые постоянные, а члены порядка $(T - T_0)^3$ и выше не учитываются.

Подставив (10.3) в (10.2), получим

$$s = \frac{3\lambda + 2\mu}{\rho}\alpha I_1(\varepsilon_{ij}) + s_0 + \frac{c}{T_0}(T - T_0). \tag{10.4}$$

Отсюда в случае изэнтропических (в теории упругости адиабатических) процессов, полагая $s = s_0 = \text{const}$, будем иметь следующую связь между T и $\varepsilon_{\alpha\beta}$:

$$T - T_0 = -\frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0}{\rho c} I_1(\varepsilon_{ij}), \tag{10.5}$$

которая аналогична соотношению

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma - 1}$$

для адиабатических процессов в совершенном газе.

Коэффициент c в формуле (10.3) можно истолковать как теплоемкость при постоянных деформациях. Действительно, в теории упругости имеем

$$T\,ds = dq^{(e)}$$

и, следовательно, с помощью (10.4) получаем

$$c_V = \left(\frac{dq^{(e)}}{dT}\right)_{\varepsilon_{\alpha\beta},\, T=T_0} = T_0\left(\frac{ds}{dT}\right)_{\varepsilon_{\alpha\beta}} = c.$$

Закон Гука согласно (2.25) и (10.5) в случае адиабатических процессов можно переписать в виде

$$p_{ij} = \left[\lambda + \frac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha^2 T_0}{\rho c}\right] I_1(\varepsilon_{\alpha\beta})\, g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = \\ = \lambda_{ад} I_1(\varepsilon_{\alpha\beta})\, g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (10.6)$$

где введено обозначение

$$\lambda_{ад} = \lambda + \frac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha^2 T_0}{\rho c}. \quad (10.7)$$

Ясно, что уравнения Ламе в случае адиабатических процессов имеют тот же вид (10.1), что и в случае изотермических процессов, если под λ в них понимать $\lambda_{ад}$. В дальнейшем ради простоты письма вместо $\lambda_{ад}$ будем писать просто λ и пользоваться обычными уравнениями Ламе (10.1), помня, что они годятся не только для описания изотермических процессов, но и адиабатических процессов в упругих телах, если в них λ равно $\lambda_{ад}$.

Продольные и поперечные плоские волны

Рассмотрим теперь распространение плоской упругой волны в неограниченной изотропной среде, т. е. волны, в которой перемещение w зависит только от одной из декартовых координат, например, x, и времени t. Ради простоты предположим, что массовые силы F отсутствуют. В этом случае для компонент вектора перемещения w из (10.1) получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad (10.8)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2}, \quad (10.9)$$

где

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad (10.10)$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (10.11)$$

Уравнения (10.8) и (10.9) представляют собой обычные волновые уравнения, величины a_1 и a_2 являются скоростями распространения возмущений (см. § 17 гл. VIII). Видно, что скорости

распространения возмущений компоненты перемещения w_1 и компонент w_2 и w_3 различны. Следовательно, плоская упругая волна представляет собой две независимо распространяющиеся волны. В одной из них смещение (w_1) совпадает с направлением распространения самой волны. Такая волна называется продольной и распространяется со скоростью a_1. В другой смещение ($\boldsymbol{w}' = w_2\boldsymbol{j} + w_3\boldsymbol{k}$) лежит в плоскости, ортогональной к направлению ее распространения. Такая волна называется поперечной и распространяется со скоростью a_2. Таким образом, в упругой среде существуют две скорости звука. В том случае, когда коэффициент Ламе μ равен нулю, $a_2 = 0$, т. е. поперечные волны не могут распространяться в упругой среде, в которой отсутствуют касательные напряжения. Для воздуха $a_1 = 330$ *м/сек*, $a_2 = 0$, для железа $a_1 = 7000$ *м/сек*, $a_2 = 3200$ *м/сек*. Иногда полезно рассматривать отношение двух скоростей звука

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{2\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}, \tag{10.12}$$

где σ — соответствующий коэффициент Пуассона. Отметим, что a_1/a_2 не зависит от плотности ρ и соответствующего модуля Юнга E упругой среды.

В поперечной волне не происходит изменения объема частиц среды, так как в ней $w_1 = 0$, а w_2 и w_3 не зависят от y и z и, следовательно, $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0$. Но в поперечной волне, как легко проверить, $\operatorname{rot} \boldsymbol{w} \neq 0$, и поэтому поперечная волна сопровождается «вращением» частиц среды. Напротив, продольные волны сопровождаются изменением объема частиц среды ($\operatorname{div} \boldsymbol{w} = \partial w_1/\partial x \neq 0$) и не сопровождается их «вращением» ($\operatorname{rot} \boldsymbol{w} = 0$).

Пространственные волны сдвига и расширения

Разделение упругой волны на две независимо распространяющиеся части можно провести и в случае произвольной (неплоской) волны, распространяющейся в безграничном пространстве. Для этого сначала заметим, что вектор массовых сил, как и всякий другой вектор, можно представить в виде суммы двух векторов (см. § 25 гл. VIII), один из которых является потенциальным, а другой — соленоидальным:

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}, \tag{10.13}$$

причем, не нарушая общности, можно принять, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Psi} = 0.$$

Допустим, далее, что мы ищем непрерывные дифференцируемые решения уравнений Ламе (10.1) во всем пространстве в виде

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \tag{10.14}$$

где φ — скалярный, а $\boldsymbol{\psi}$ — векторный ($\operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0$) потенциалы перемещения $\boldsymbol{w}$. Подставив (10.13) и (10.14) в уравнение (10.1) (при ($\rho = \text{const}$), получим

$$\operatorname{grad}\left[(\lambda + 2\mu)\,\Delta\varphi + \rho\Phi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] + \\ + \operatorname{rot}\left[\mu\,\Delta\boldsymbol{\psi} + \rho\boldsymbol{\Psi} - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right] = 0. \quad (10.15)$$

Взяв от обеих частей этого равенства операцию дивергенции, будем иметь

$$\Delta\left[(\lambda + 2\mu)\,\Delta\varphi + \rho\Phi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] = 0,$$

т. е. функция $(\lambda + 2\mu)\,\Delta\varphi + \rho\Phi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ является непрерывной гармонической во всем пространстве и, следовательно, может быть либо постоянной величиной, либо некоторой функцией времени $f(t)$. Не нарушая общности, функцию $f(t)$ можно считать равной нулю, если вместо потенциала φ ввести потенциал

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{\rho}\int_0^t (t - t')\,f(t')\,dt'.$$

Таким образом, для определения потенциала φ получается уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{a_1^2}\Phi. \quad (10.16)$$

Аналогично, если от обеих частей соотношения (10.15) взять операцию ротации, то получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left[\mu\Delta\boldsymbol{\psi} + \rho\boldsymbol{\Psi} - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right] = 0,$$

но по известной формуле векторного анализа (см. § 25 гл. VIII)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A}.$$

Отсюда, если вектор $\boldsymbol{A}$ соленоидальный, то

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = -\Delta\boldsymbol{A}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае непрерывный вектор $\mu\Delta\boldsymbol{\psi} + \rho\boldsymbol{\Psi} - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}$ является гармоническим вектором во всем пространстве, поэтому в безграничном пространстве получим, что векторный потенциал $\boldsymbol{\psi}$ перемещений удовлетворяет уравнению

$$\Delta\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = -\frac{1}{a_2^2}\boldsymbol{\Psi}. \quad (10.17)$$

Непосредственно очевидно, что формула (10.14) представляет собой решение уравнения Ламе (10.1), если φ и ψ являются произвольными решениями уравнений (10.16) и (10.17).

Уравнение (10.16) является обычным неоднородным волновым уравнением и, следовательно, часть $\boldsymbol{w}_1$ перемещения $\boldsymbol{w}$, соответствующая скалярному потенциалу φ, переносится в пространстве со скоростью a_1. Волна, распространяющаяся со скоростью a_1, сопровождается изменением объема среды и является безвихревой волной сжатия или расширения.

Уравнение (10.17) также является неоднородным волновым уравнением и показывает, что часть $\boldsymbol{w}_2$ перемещения $\boldsymbol{w}$, соответствующая векторному потенциалу ψ, перемещается в пространстве с другой скоростью a_2. Эта волна является вихревой и не сопровождается изменением объема частиц, она называется волной сдвига. Волны сдвига и расширения наблюдаются при землетрясениях, и по разности зарегистрированных значений моментов прихода возмущений от этих волн в пункт наблюдения Δt можно с большой степенью точности судить о расстоянии L до эпицентра землетрясения, так как

$$\Delta t = L\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right).$$

Волновые уравнения в случае плоской задачи

Применим изложенные выше общие соображения к частному случаю плоской задачи в плоскости xy, когда составляющая массовых сил F_z и составляющая перемещения w_3 равны нулю и все движение не зависит от координаты z.

В случае плоской задачи общие формулы (10.13) и (10.14) в компонентах на декартовы оси координат можно записать в более простом виде через две скалярные функции от x и y. Для внешних массовых сил $\boldsymbol{F}$ имеем

$$F_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad F_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{10.18}$$

и соответственно для перемещений $\boldsymbol{w}$

$$w_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{10.19}$$

Легко видеть, что для заданных векторных полей $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{w}$ функции Φ, Ψ и φ, ψ легко определяются из решения уравнений Пуассона, которые получаются из (10.18) или (10.19) после соответствующего дифференцирования и исключения одной из искомых функций.

Аналогично уравнениям (10.16) и (10.17) уравнение Ламе (10.1) в случае плоской задачи приводит к двум вообще

неоднородным скалярным волновым уравнениям для φ и ψ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{a_1^2}\Phi \qquad (10.20)$$

и

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\frac{1}{a_2^2}\Psi. \qquad (10.21)$$

Таким образом, задача о распространении упругих волн в изотропной среде в безграничном трехмерном пространстве и в случае плоской задачи сводится к интегрированию двух обособленных волновых уравнений. Отсюда видно, что в однородной, изотропной, упругой среде, заполняющей безграничное пространство, любое малое возмущение может быть представлено с помощью наложения волн расширения и волн сдвига. Если среда неоднородна или занимает ограниченную часть пространства, то могут возникать другие типы волн, например волны, распространяющиеся в окрестности границы среды. Такого рода волны будут рассмотрены ниже.

Граничные условия на свободной от напряжений поверхности полупространства

Решения задач о распространении упругих колебаний в ограниченном пространстве также можно строить с помощью решения краевых задач для волновых уравнений (10.16) и (10.17) или (10.20) и (10.21). Однако вопрос о разделении упругих волн на волны сдвига и расширения в ограниченной упругой среде осложняется требованиями учета граничных условий. Граничные условия могут связывать различные части упругой волны и наличие границ может порождать взаимодействие и расщепление волн.

Наиболее простыми типами граничных условий являются такие, когда на границе упругого тела перемещения $\boldsymbol{w}$ или напряжения $\boldsymbol{p}^n$ равны нулю (случай неподвижно закрепленной или свободной поверхности упругого тела соответственно).

Если поставить плоскую задачу об определении упругих волн в ограниченном пространстве как задачу интегрирования волновых уравнений (10.20) и (10.21), то необходимо записать граничные условия через потенциалы φ и ψ.

Общая задача о распространении упругих волн в ограниченном пространстве довольно сложна. Рассмотрим постановку частной плоской задачи (в плоскости xy) о распространении упругих волн в упругой среде, занимающей все полубесконечное пространство $y>0$, когда на границе $y=0$ напряжения обращаются в нуль. Граничные условия на свободной

поверхности полупространства ($p^n = 0$ при $y = 0$) имеют вид

$$p_1^n = -p_{12} = 0, \quad p_2^n = -p_{22} = 0, \quad p_3^n = -p_{32} = 0. \tag{10.22}$$

Если использовать закон Гука, выражения ε_{ij} через w в случае бесконечно малых деформаций и формулы (10.19), выражающие компоненты w через потенциалы φ и ψ, то можно легко установить, что третье условие удовлетворяется автоматически, а два первых приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} &\left[a_1^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (a_1^2 - 2a_2^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2a_2^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right]_{y=0} = 0, \\ &\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]_{y=0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.23}$$

Кроме краевых условий (10.23), для получения конкретных решений уравнений (10.20) и (10.21) необходимо воспользоваться еще дополнительными условиями о поведении решения при $y \to \infty$ и $x \to \pm\infty$ и, вообще говоря, начальными условиями. Можно также изучать установившиеся стоячие или прогрессивные волны и т. п.

Существование поверхностных волн Рэлея

Покажем, что среди решений поставленной задачи имеются решения, которые представляют собой поверхностные волны. Для этого рассмотрим плоскопараллельное движение при отсутствии внешних сил, соответствующее распространению вдоль положительной оси x прогрессивной синусоидальной волны с частотой ω, волновым числом k и амплитудой, зависящей от y, т. е. предположим, что

$$\varphi = e^{i(kx-\omega t)} f(y), \qquad \psi = e^{i(kx-\omega t)} g(y), \tag{10.24}$$

и будем искать такие решения волновых уравнений (10.20) и (10.21) (при Φ и Ψ равных нулю), которые убывают с ростом расстояния от свободной поверхности, т. е. при $y \to \infty$. Подставив (10.24) в (10.20) и (10.21), получим следующие уравнения для определения функций $f(y)$ и $g(y)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2f}{dy^2} - (k^2 - k_1^2) f = 0, \\ &\frac{d^2g}{dy^2} - (k^2 - k_2^2) g = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.25}$$

где

$$k_1 = \frac{\omega}{a_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{a_2}. \tag{10.26}$$

В соответствии с условием при $y \to \infty$ следует потребовать, чтобы

$$\left.\begin{aligned} &k^2 - k_1^2 > 0, \\ &k^2 - k_2^2 > 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.27}$$

так как в противном случае f и g будут периодическими функциями от y и условие при $y \to \infty$ не удовлетворится, не получится поверхностной волны.

Из условия (10.27), вытекает, что скорость

$$c = \frac{\omega}{k} = a_2 \frac{k_2}{k} = a_1 \frac{k_1}{k}$$

поверхностной бегущей волны должна быть меньше скорости распространения объемных поперечных волн $a_2 < a_1$.

Если ввести обозначения

$$k^2 - k_1^2 = r^2, \quad k^2 - k_2^2 = s^2, \tag{10.28}$$

то общие решения уравнений (10.25) можно записать в виде

$$f = Ae^{-ry} + A_1 e^{ry}, \quad g = Be^{-sy} + B_1 e^{sy},$$

где A, B, A_1 и B_1 — постоянные. Очевидно, что A_1 и B_1 необходимо положить равными нулю, так как иначе возмущения в упругой среде при $y \to \infty$ будут возрастать. Для φ и ψ получаются следующие выражения:

$$\varphi = Ae^{i(kx-\omega t)-ry}, \quad \psi = Be^{i(kx-\omega t)-sy}. \tag{10.29}$$

Рассмотрим теперь граничные условия (10.23) при $y = 0$. В случае решения (10.29) они сводятся к двум однородным уравнениям для A и B:

$$\begin{aligned} a_1^2 r^2 A - (a_1^2 - 2a_2^2)Ak^2 + 2a_2^2 Biks = 0, \\ -2Aikr + (s^2 + k^2)B = 0. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражения для r и s из формул (10.28), получим

$$\left.\begin{aligned} A\left(2k^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2}k_1^2\right) + 2iBk\sqrt{k^2 - k_2^2} = 0, \\ -2Aik\sqrt{k^2 - k_1^2} + B(2k^2 - k_2^2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.30}$$

Условие совместности этих уравнений, т. е. обращение детерминанта этой системы в нуль, дает уравнение

$$\left(2k^2 - \frac{a_1^2}{a_2^2}k_1^2\right)(2k^2 - k_2^2) = 4k^2\sqrt{(k^2 - k_2^2)}\sqrt{(k^2 - k_1^2)},$$

которое с учетом обозначений (10.26) и $\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\theta}$ приводится к виду

$$\left(2\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}\right)^2 - 4\theta^2\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}} = 0. \tag{10.31}$$

Равенство (10.31), т. е. условие существования поверхностных волн, является уравнением для определения скорости $c = 1/\theta$ распространения таких волн. Это уравнение называется уравнением Рэлея, который установил существование поверхностных волн в упругих телах.

Покажем, что при заданных a_1 и a_2 уравнение Рэлея (10.31) имеет единственный действительный положительный корень, удовлетворяющий условию $c < a_2$, т. е. покажем, что вблизи свободной поверхности полупространства, занятого любой изотропной упругой средой, характеризующейся постоянными λ и μ, могут распространяться поверхностные волны рассматриваемого типа и что скорость распространения этих волн единственным образом определяется значениями параметров Ламе λ и μ.

Существование корня уравнения (10.31) непосредственно вытекает из того, что левая часть (10.31) положительна при $\theta = 1/a_2$ и отрицательна при $\theta \to \infty$, так как разложение ее в степенной ряд в окрестности бесконечно удаленной точки, начинается с члена

$$2\theta^2\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right).$$

Единственность этого корня следует из отрицательности производной левой части уравнения Рэлея в промежутке $1/a_2 < \theta < \infty$. Действительно, эта производная равна

$$8\theta\left(2\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}\right) - 8\theta\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}} -$$

$$- \frac{4\theta^3}{\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}} - \frac{4\theta^3\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}}{\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}} =$$

$$= \frac{8\theta\left[\left(2\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}\right)\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}} - \left(\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}\right)\left(\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}\right)\right]}{\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}} -$$

$$- \frac{4\theta^3\left(2\theta^2 - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right)}{\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}} =$$

$$= \frac{8\theta\left(\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}\right)}{\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}}\left[\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}} - \left(\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}\right)\right] +$$

$$+ 4\theta^3 \frac{2\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}} - \left(2\theta^2 - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right)}{\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}}.$$

Первое слагаемое этой суммы отрицательно, так как

$$\left(\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}\right) > \sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}},$$

а второе,— так как среднее арифметическое величин $\theta^2 - (1/a_1^2)$ и $\theta^2 - (1/a_2^2)$ всегда больше их среднего геометрического, т. е.

$$\left(2\theta^2 - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right) > 2\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_1^2}}\sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}.$$

Скорость распространения поверхностных волн

Приведем теперь данные, из которых следует, что скорость c распространения поверхностных волн близка к скорости a_2 распространения объемных поперечных волн. Возведя уравнение Рэлея (10.31) в квадрат и выполнив необходимые простые преобразования, получим

$$16\theta^6\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right) + 8\theta^4\left(\frac{3}{a_2^4} - \frac{2}{a_1^2 a_2^2}\right) - \frac{8\theta^2}{a_2^6} + \frac{1}{a_2^8} = 0. \quad (10.32)$$

Если ввести отношение $\xi = \frac{c}{a_2} = \frac{\omega}{ka_2} = \frac{1}{\theta a_2}$, то уравнению (10.32) можно придать вид

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2\left(3 - 2\frac{a_2^2}{a_1^2}\right) - 16\left(1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) = 0. \quad (10.33)$$

Отсюда видно, что отношение ξ зависит только от отношения a_2/a_1, которое постоянно для каждой данной упругой среды. Так как по (10.12)

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}},$$

то ξ зависит только от соответствующего коэффициента Пуассона среды. Изотермический коэффициент σ для всех известных материалов меняется в пределах от 0 до 1/2, отношение a_2/a_1

при этом меняется в пределах от $1/\sqrt{2}$ до 0, а ξ, являющееся корнем уравнения (10.33),— в пределах от 0,874 до 0,955. На рис. 136 приведен график[1]) зависимости ξ от σ.

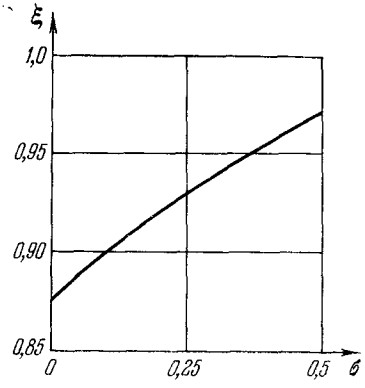


Рис. 136. Зависимость отношения скорости распространения волн Рэлея к скорости поперечных объемных волн от коэффициента Пуассона.

Очевидно, что скорости распространения упругих волн a_1, a_2 и c не зависят от длины волны или от частоты колебаний, поэтому в упругой среде отсутствует дисперсия волн.

Формулы для перемещений в волнах Рэлея

Вычислим теперь компоненты вектора перемещений $\boldsymbol{w}$, соответствующие потенциалам (10.29) поверхностной волны. По (10.19) и (10.29) имеем

$$w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = (Aike^{-ry} - Bse^{-sy})\, e^{i(kx-\omega t)},$$

$$w_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -(Are^{-ry} + Bike^{-sy})\, e^{i(kx-\omega t)}.$$

Отношение постоянных A и B согласно (10.30) выражается через ξ следующим образом:

$$\frac{A}{B} = -\frac{2i\sqrt{1-\xi^2}}{2+\xi^2} = -ib, \qquad b = \frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{2+\xi^2}, \tag{10.34}$$

и постоянно для данного материала. Пользуясь (10.34), для компонент перемещений в поверхностной волне получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} w_1 &= B\,(bke^{-ry} - se^{-sy})\, e^{i(kx-\omega t)}, \\ w_2 &= Bi\,(bre^{-ry} - ke^{-sy})\, e^{i(kx-\omega t)}, \end{aligned} \tag{10.35}$$

где r и s выражаются через k, a_1, a_2 и ω, а k при заданной частоте ω для данной среды единственным образом определяется

[1]) Здесь принято, что $\sigma_{ag} \approx \sigma$.

значением скорости c распространения поверхностной волны или величиной ξ.

Решение задачи о распространении в направлении положительной оси x поверхностных вблизи свободной границы полупространства волн с произвольной частотой ω и амплитудой B полностью построено. Аналогичное решение существует для волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси x.

О законах убывания возмущений в волнах Рэлея

Посмотрим, на каком расстоянии от границы полупространства $y = 0$ заметно сказываются смещения, вызванные поверхностными волнами. Для этого, очевидно, достаточно рассмотреть, как убывают с ростом $|y|$ множители e^{-sy} и e^{-ry}. Если, как обычно, назвать глубиной проникновения y_1 глубину, на которой амплитуда волны падает в $1/e$ раз, то $y_1 = (1/r)$ для части перемещений, связанной с расширением частиц среды, и $y_1 = (1/s)$ для части перемещений, связанной со сдвигом частиц. Имеем

$$y_{1\,\text{рас}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_1^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2 - \dfrac{\omega^2}{a_1^2}}} = \frac{1}{k\sqrt{1 - \dfrac{c^2}{a_1^2}}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1 - \dfrac{a_2^2}{a_1^2}\xi^2}},$$

где λ — длина волны расширения, и

$$y_{1\,\text{сдв}} = \frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_2^2}} = \frac{1}{k\sqrt{1 - \dfrac{c^2}{a_2^2}}} = \frac{1}{k\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1 - \xi^2}},$$

где λ — длина волны сдвига, которая согласно граничным условиям равна длине волны расширения. В случае $\sigma = 1/2$ получим

$$y_{1\,\text{рас}} = \frac{\lambda}{2\pi}, \qquad y_{1\,\text{сдв}} \cong \frac{\lambda\sqrt{10}}{2\pi}.$$

Отсюда ясно, что глубина проникновения составляет только часть длины волны λ и различна для различных частей поверхностной волны.

Смещения, соответствующие двумерным поверхностным волнам, составляют основную часть наблюдаемых при землетрясениях смещений слоев Земли, так как при удалении от эпицентра землетрясения объемные волны, распространяясь внутри Земли, значительно ослабевают. Поверхностные волны при землетрясениях приходят в место наблюдения несколько позднее поперечных пространственных волн, первыми приходят продольные пространственные волны.

ГЛАВА X

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 1. Некоторые эффекты, возникающие при деформировании твердых тел и не описывающиеся в рамках модели упругого тела

Классические модели линейной теории упругости изотропных или анизотропных кристаллических или других сред описывают далеко не все явления, происходящие при деформировании твердых тел.

Результаты и методы теории упругости не всегда достаточны для оценки прочности конструкций и для разрешения многих важных практических вопросов. На практике часто требуется уметь учитывать механические и тепловые свойства твердых тел, связанные с нелинейной упругостью, электродинамическими эффектами и с термодинамической необратимостью процессов деформирования, требуется рассматривать пластичность, ползучесть и релаксацию, усталость и т. д. Для учета и описания подобных явлений необходимо вводить другие теоретические модели сплошных сред.

Проблема построения новых усложненных моделей деформируемых тел до сих пор является предметом экспериментальных и теоретических исследований.

Остановимся очень кратко на описании некоторых наиболее характерных неупругих эффектов, которые наблюдаются при деформировании твердых тел.

Типичная диаграмма растяжения — сжатия металлов

На рис. 137 приведена диаграмма одноосного растяжения — сжатия цилиндрического образца из мягкого железа под действием внешних сил, приложенных на его торцах. Аналогичными особенностями обладают диаграммы растяжения — сжатия образцов, изготовленных из других металлов. По оси абсцисс на рис. 137 отложена компонента ε_{11} относительного удлинения вдоль оси цилиндра, которую выбираем за ось x, по оси ординат — компонента p_{11} нормального напряжения на площадках, перпендикулярных к оси цилиндра.

Начальный участок диаграммы A_1OA близок к прямой линии

$$p_{11} = E\varepsilon_{11} \qquad (1.1)$$

и характеризуется обратимыми деформациями, т. е. как при нагрузке (увеличении растягивающего усилия — увеличении p_{11}), так и при разгрузке (уменьшении растягивающего усилия — уменьшении p_{11}) точка, изображающая на диаграмме состояние образца, двигается по одной и той же прямой A_1OA. Удлинения при этом обычно весьма малы (для мягкого железа меньше 0,3%). Границы интервала применимости линейной формулы (1.1) называются *пределами пропорциональности*, соответствующие напряжения p_{11} (A) и $p_{11}(A_1)$ — напряжениями на пределе пропорциональности. Таким образом, при напряжениях p_{11}, меньших p_{11} (A) и больших p_{11} (A_1), на диаграмме имеется *участок* A_1A, соответствующий закону Гука, или *линейной теории упругости*.

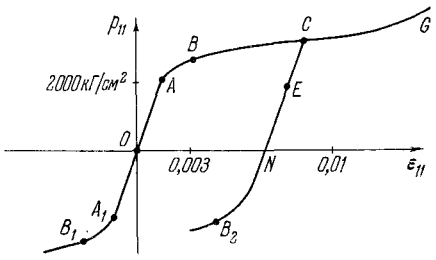


Рис. 137. Типичная диаграмма одноосного растяжения — сжатия для металлов (мягкое железо).

За точкой A, т. е. при дальнейшем увеличении внешнего растягивающего усилия, осуществляется *участок* AB *нелинейной обратимой зависимости* p_{11} от ε_{11}. Деформации на этом участке диаграммы также обычно весьма малы (меньше 1%). Изображающая состояние образца точка на участке AB (и соответственно на A_1B_1) как при нагрузке, так и при разгрузке двигается по одной и той же кривой AB и A_1B_1. Следовательно, при p_{11} $(A) < p_{11} < p_{11}$ (B) образец ведет себя тоже как упругое тело, но с *динамически нелинейной зависимостью* напряжений от деформаций. Понятие динамической нелинейности в данном случае относится к геометрически малым деформациям, для которых можно еще пользоваться приближенными линейными формулами для компонент тензора деформаций при их вычислении через компоненты вектора перемещений.

При дальнейшем увеличении внешнего растягивающего усилия, когда p_{11} становится большим, чем p_{11} (B), проявляются необратимые эффекты пластичности. После перехода через точку B, например в точку C, при последующей разгрузке изображающая точка будет уже двигаться не по кривой $CBAO$, а по другой кривой CE. Обычно линия CE близка к прямой, наклон которой, вообще говоря, приблизительно совпадает с наклоном прямой OA. После разгрузки до точки E при новой

нагрузке изображающая точка будет практически двигаться по той же кривой EC, а после достижения точки C при дальнейшей нагрузке — вдоль основной кривой OAD. Если, находясь за точкой B, внешнюю нагрузку полностью снять и получить состояние, отвечающее $p_{11} = 0$, то в этом состоянии удлинение ε_{11} оказывается отличным от нуля, возникают так называемые *остаточные деформации* ε_{11}^p. Деформацию, например, в точке E можно рассматривать как состоящую из двух частей — остаточной ε_{11}^p и упругой ε_{11}^e

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{11}^e,$$

причем часто можно принять, что

$$\varepsilon_{11}^e = \frac{p_{11}(\varepsilon)}{E_1}.$$

Если наклон прямой EC совпадает с наклоном первоначального участка диаграммы OA, то $E = E_1$.

Появление остаточных деформаций после достижения внешней нагрузкой определенного предела характеризует собой по определению основное свойство пластичности. При появлении остаточных пластических деформаций характерно различие между функциями $p_{11} = f(\varepsilon_{11})$ при нагрузке и разгрузке. Следует отметить, что появление пластических деформаций в опытах можно обнаружить после проведения разгрузки. Точка B определяет начало проявления свойств пластичности, значение напряжения $p_{11}(B)$ называется пределом упругости или *пределом текучести*.

Заметим, что после перехода материала в пластическую область, например в точку C, при разгрузках и последующих нагрузках таких, что $0 < p_{11} < p_{11}(C)$, материал ведет себя как упругое тело (нагрузка и разгрузка идут по одной и той же кривой CN). Поэтому можно говорить, что точка C также играет роль предела упругости для материала, полученного из исходного с помощью пластического деформирования. Для многих материалов $p_{11}(C) > p_{11}(B)$ по крайней мере для некоторых участков диаграммы. Такие участки называются *участками упрочнения материала*, а повышение предела упругости в результате пластического деформирования называется упрочнением материала или наклепом. Материал упрочняется, если $p_{11}(C) > p_{11}(B)$. Для некоторых материалов на диаграмме растяжения — сжатия существует горизонтальный участок, называемый *площадкой текучести*. При деформировании, соответствующем этому участку, упрочнения не происходит. При увеличении внешней нагрузки до $p_{11}(G)$ материал разру-

шается. Растягивающее напряжение p_{11} (G) называется *пределом прочности* на растяжение.

Эффект Баушингера

Пределы пропорциональности и упругости, пластические деформации и упрочнение имеют место как при растяжении, так и при сжатии. При малых упругих деформациях диаграммы растяжения и сжатия, вообще говоря, симметричны $p_{11}(\varepsilon_{11}) = -p_{11}(-\varepsilon_{11})$, однако имеются среды, например горные породы, для которых указанная *симметрия отсутствует*.

Предел упругости на диаграмме сжатия при первоначальном нагружении на рис. 137 соответствует точке B_1. После растяжения до точки C с последующей разгрузкой и сжатием предел упругости материала на сжатие на участке упругих деформаций $CENB_2$ может соответствовать B_2. Величины предельных значений p_{11} в точках B_1 и B_2 будут, вообще говоря, различными. Эффект изменения предела упругости на сжатие после предварительного растяжения за предел упругости называется эффектом Баушингера.

Деформирование за предел упругости приводит к изменению характерных точек участков диаграммы материала, соответствующих напряжениям другого знака.

Зависимость проявления свойств пластичности от свойств материала и вида деформации

Количественные особенности кривой $p_{11} = f(\varepsilon_{11})$ для растяжения или сжатия сильно зависят от физической природы материала. Однако отмеченные характерные качественные особенности свойств пластичности типичны для многих материалов. Эти особенности имеют место также и при других видах нагружений и деформаций, например при деформации чистого сдвига.

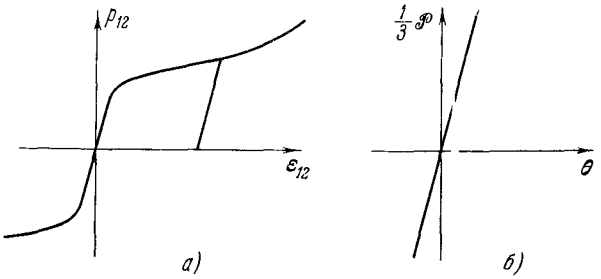


Рис. 138. Типичные диаграммы «напряжение — деформация» для металлов: *а*) при чистом сдвиге, *б*) при всестороннем растяжении или сжатии.

В частности, при кручении круглых цилиндрических труб, когда каждый элемент трубы работает в условиях чистого сдви-

га, зависимость между касательным напряжением и компонентой тензора деформаций, характеризующей угол сдвига, изображается диаграммой, имеющей такие же качественные особенности, как и диаграмма на рис. 137 (рис. 138).

Для некоторых материалов, например глины, при деформации всестороннего сжатия между сжимающим давлением p и коэффициентом объемного сжатия $\theta = -\operatorname{div} w$ также получается аналогичная зависимость. Однако следует заметить, что металлы при всестороннем сжатии ведут себя как упругие тела вплоть до очень больших давлений (порядка 100 000 *атм* и больше).

Поэтому при гидростатическом сжатии законы теории упругости практически выполняются для неограниченно больших давлений, и можно принять, что при всестороннем сжатии пластические деформации не возникают. Таким образом, свойства пластичности зависят как от свойств материала, так и от вида напряженного состояния.

Основные задачи, возникающие при построении теории пластичности

Построение теории пластичности связано с разрешением трех основных задач: обобщением на случай произвольных напряженных состояний понятия предела упругости, введением в общем случае понятий нагрузки и разгрузки и установлением законов, определяющих нарастание остаточных (пластических) деформаций, т. е. установлением соотношений, позволяющих определять остаточные деформации при любых допустимых законах изменения внутренних напряжений.

Таким образом, необходимо дать обобщение на случай произвольного деформирования понятий, возникающих в связи с изучением типичной диаграммы для одноосного растяжения (или чистого сдвига — кручения или всестороннего сжатия и т. п.), представленной на рис. 137.

Идеальные упруго-пластический и жестко-пластический материалы, линейно-упрочняющийся материал

Отметим два основных типа моделей пластических сред.

1. Модели идеальных упруго-пластических или жестко-пластических сред, в которых не учитываются упрочнение и эффект Баушингера. Эти модели получаются в результате обобщения на случай произвольного деформирования предложенных Прандтлем идеализированных диаграмм для простых частных случаев деформирования, например, диаграммы для одноосного растяжения, изображенной на рис. 139.

На этом рисунке приведена диаграмма одноосного растяжения—сжатия для идеально упруго-пластической среды; при напряжении растяжения, меньшем некоторого постоянного предель-

ного значения $-p_0$, и напряжении сжатия, большем p_0', материал ведет себя как упругое тело; часто можно принять, что $p_0 = p_0'$.

В диаграмме, приведенной на рис. 140, упругие деформации вообще не учитываются (что можно оправдать малостью упругих деформаций по сравнению с возможными пластическими).

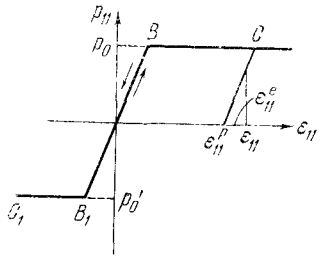


Рис. 139. Диаграмма сжатия — растяжения для идеально-пластического материала.

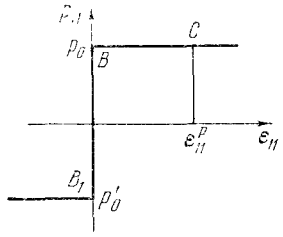


Рис. 140. Диаграмма сжатия — растяжения для жестко-пластического материала.

При напряжениях, абсолютная величина которых меньше некоторого постоянного значения p_0 ($p_0' = p_0$), деформации принимаются равными нулю. Это диаграмма растяжения — сжатия образца из *жестко-пластического* материала. В обоих случаях после увеличения напряжения до p_0 возможно течение материала с неограниченно возрастающей деформацией при постоянном напряжении. Такие модели могут удовлетворительно описывать поведение материалов, для которых на диаграмме $p_{11}(\varepsilon_{11})$ имеется площадка текучести.

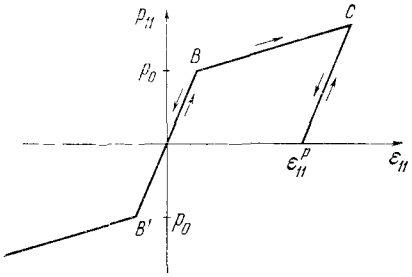


Рис. 141. Диаграмма сжатия — растяжения для линейно-упрочняющегося материала.

2. К другому типу можно отнести модели пластических тел, в которых учитывается упрочнение, т. е. изменение предела упругости при пластическом деформировании. На рис. 141 приведена диаграмма одноосного растяжения — сжатия для линейно-упрочняющегося материала.

Отсутствие однозначной связи между напряжениями и деформациями при пластических деформациях

Отметим, что пластические деформации не определяются однозначно значением напряжений (см., например, рис. 142). Одному и тому же значению напряжения, например $p_{11}^{(1)}$, может соответствовать бесчисленное множество значений $\varepsilon_{11}^{(1)}$, $\varepsilon_{11}^{(2)}$ и т. д.

Если при нагружении образца был момент, когда внешняя нагрузка превысила предел упругости, то значение деформации,

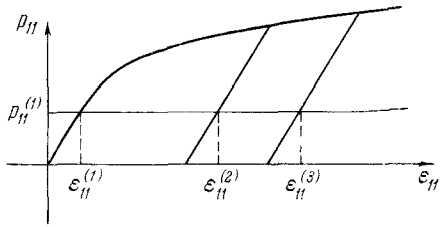


Рис. 142. При пластических деформациях нет однозначной связи между напряжениями и деформациями.

соответствующее данному значению напряжения, зависит от того, как было достигнуто это значение напряжения.

Пример определения остаточной деформации в идеально-пластическом материале, пример системы с внутренними напряжениями

Иногда величину пластических деформаций можно однозначно определить с помощью простых соображений. Рассмотрим, например, конструкцию, состоящую из трех стержней одинакового диаметра d, концы которых скреплены симметрично с помощью абсолютно жесткой пластины AB (рис. 143, *а*). Для простоты исключим влияние сил веса.

Пусть крайние стержни *1* и *2* — стальные, а средний стержень *3*, расположенный симметрично относительно стальных стержней,— алюминиевый. По условию примем, что до приложения внешней нагрузки все три стержня находились в естественном ненапряженном состоянии ($\varepsilon_{11} = 0$). Если пластину, как указано на рис. 143, равномерно нагрузить, то из симметрии ясно, что длины всех стержней после деформации будут одинаковыми.

Предел упругости $p_{11}^{ст}$ и модуль Юнга $E^{ст}$ для стали, как известно, больше предела упругости $p_{11}^{ал}$ и модуля Юнга $E^{ал}$ для алюминия, соответственно. Для простоты пренебрежем эффектами упрочнения и будем рассматривать сталь и алюминий как идеально-пластические среды (см. рис. 143, *б*).

Пусть суммарная нагрузка P на пластину AB задана и требуется определить нагрузки, приходящиеся на каждый стержень, и общее удлинение стержней.

Предположим, что каждый из стержней деформирован однородно. Допустим еще, что нагрузка P выбрана так, что относительное удлинение ε_{11} меньше, чем $(p_{11}^{\text{ал}}/E^{\text{ал}}) = \overset{*}{\varepsilon}_{11}$, и больше, чем $(p_{11}^{\text{ст}}/E^{\text{ст}}) = \overset{\sim}{\varepsilon}_{11}$, т. е. что алюминиевый стержень работает

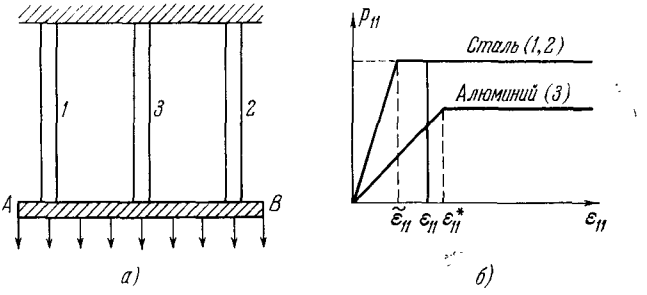


Рис. 143. К определению пластических деформаций в стальных стержнях *1* и *2*

еще в упругой области, а стальные — уже в пластической области (см. рис. 143, *б*).

Ясно, что нагрузка, приходящаяся на каждый из стальных стержней, равна $p_{11}^{\text{ст}}\pi d^2/4$, следовательно, на алюминиевый стержень действует сила $P - (2p_{11}^{\text{ст}}\pi d^2/4)$.

Одинаковую полную деформацию ε_{11} алюминиевого стержня и стальных стержней можно вычислить по закону Гука для алюминиевого стержня

$$\frac{2}{E^{\text{ал}}}\,\frac{2P - p_{11}^{\text{ст}}\pi d^2}{\pi d^2}.$$

Пластическая часть деформации стальных стержней может быть далее определена из условия

$$\varepsilon_{11}^{p} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^{e} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{E^{\text{ст}}}\,p_{11}^{\text{ст}}.$$

Интересно отметить, что если теперь полностью разгрузить пластину AB, то напряжения и деформации во всех трех стержнях, очевидно, не исчезнут. В стальных стержнях возникнут напряжения сжатия, а алюминиевый стержень окажется упруго-растянутым. После разгрузки такая конструкция представляет

собой пример системы, на которую не действуют внешние силы, но внутри которой имеются внутренние напряжения. Уничтожить эти внутренние напряжения при сохранении целостности конструкции нельзя. Из этого примера ясно, каким образом для различных деталей машин или каких-либо сооружений технология изготовления (неравномерное нагревание и охлаждение при закалке, ковка и т. п.) может стать причиной возникновения внутренних напряжений при отсутствии внешних нагрузок.

Рассмотрим теперь еще другие эффекты, встречающиеся при деформировании «твердых» тел и не описывающиеся ни в рамках теории упругости, ни в рамках теории пластичности.

Ползучесть

Пусть имеется некоторый стержень (рис. 144), верхний конец которого закреплен, а к нижнему приложена постоянная сила $\mathcal{P}$. Если стержень на долгое время оставить в таком состоянии, то, как показывает опыт, относительное удлинение ε_{11} стержня будет расти

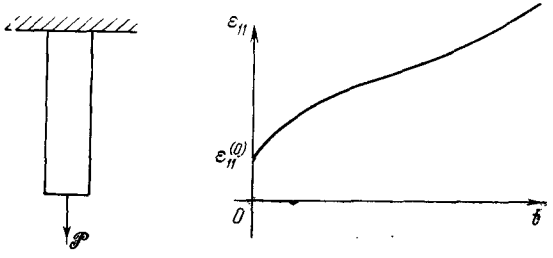


Рис. 144. Ползучесть материалов.

с течением времени t. Если в некоторый момент времени нагрузку $\mathcal{P}$ снять, то возникшие таким образом деформации не пропадут. Это явление, которое наблюдается при любой, даже малой, величине силы $\mathcal{P}$, называется ползучестью.

Ползучесть наиболее сильно проявляется при повышенных температурах, но свойство ползучести материала следует учитывать также при расчетах конструкций, которые должны работать достаточно долго, и при нормальных температурах.

Обычно в тех материалах, в которых проявляется свойство ползучести, наблюдается и другое явление, называемое релаксацией напряжений.

Релаксация напряжений

Если растянутый стержень, в поперечных сечениях которого действуют напряжения p_{11}^0, закрепить на обоих его концах (т. е. зафиксировать деформацию ε_{11}) (рис. 145), то, как показывает опыт, с течением времени напряжения в стержне будут падать, для

одних материалов — до некоторого конечного значения $\overset{*}{p}_{11}$, для других материалов — до нуля.

Явления ползучести и релаксации тесно связаны между собой. При релаксации имевшаяся первоначально упругая деформация за счет ползучести частично или полностью превращается

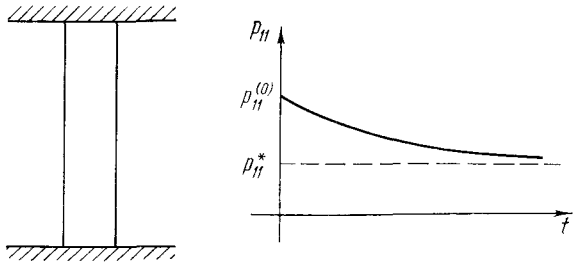


Рис. 145. Релаксация напряжений.

в пластическую, для поддержания (сохранения) которой не требуется прикладывать силу, это и вызывает уменьшение p_{11}.

Теория ползучести является в настоящее время развивающейся областью механики сплошной среды.

Усталость материалов

Опишем еще одно свойство материалов называемое усталостью. Опыт показывает, что, например, металлический образец под действием периодически изменяющейся нагрузки, приложенной на его свободном конце, может разрушаться после достаточно большого, но все же конечного числа колебаний, даже если максимальные напряжения не превосходят предела упругости материала. Для разрушения образцов из металла обычно требуются миллионы циклов колебаний.

Вообще многократно повторяющиеся и быстро сменяющие друг друга по определенному циклу нагрузки и разгрузки обычно приводят к понижению предела прочности конструкций, т. е. к тому, что конструкции разрушаются при гораздо меньших напряжениях, чем в статических условиях. Этот эффект называется усталостью материала.

Проблемы усталости на практике имеют очень большое значение, так как многие детали машин, обшивки самолетов и судов и т. д. подвержены постоянным вибрациям. Самолеты, предназначенные для полетов на больших высотах, всегда испытываются на циклические нагрузки в связи с тем, что их оболочка подвергается то расширению под действием внешнего разрежения на большой высоте, то сжатию вблизи земли. Испытания на усталость обычно проводятся путем погружения

самолета в воду, в которой по заданному закону меняется давление. По результатам такого рода экспериментов оценивается предельное число допустимых вылетов для данного самолета.

Усталостные разрушения обычно обусловлены возникновением и развитием микротрещин внутри или на поверхности материала. На развитие трещин на поверхности или с поверхности внутрь конструкции существенное влияние может оказывать внешняя среда. Например, прочность на разрыв стеклянных пластинок в воздухе и в воде различна.

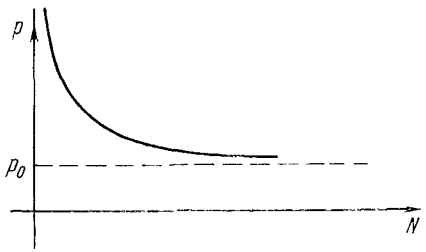


Рис. 146. Типичная кривая усталости.

Сопротивление материалов усталостному разрушению характеризуют кривой усталости, которую можно построить, если испытать серию одинаковых образцов, подвергающихся периодическому нагружению в одинаковых внешних условиях, но с различной амплитудой напряжений. По оси абсцисс откладывается максимальное количество циклов N, которое выдерживает образец до разрушения, а по оси ординат — максимальное значение напряжения p, осуществляемое в этих циклах. Типичная кривая усталости приведена на рис. 146.

По кривой усталости можно определить максимальное напряжение, которое может выдержать образец для каждого заданного числа циклов, называемого базой испытания. Максимальное напряжение, при котором образец выдерживает заданную базу испытания, называют пределом усталости или пределом выносливости. При напряжениях, не превосходящих p^0, образец не разрушается при практически бесконечном числе циклов.

Следует подчеркнуть, что для одного и того же материала сопротивление усталости зависит от типа напряженного состояния (растяжение, кручение, изгиб и т. д.) и от характера изменения напряжений во времени, т. е. от вида цикла и частоты колебаний. Кроме того, сопротивление усталости зависит от температуры (особенно для полимерных материалов), от свойств внешней среды, в частности влажности воздуха, а также от размеров образца и наличия в нем различных концентраторов напряжений, например надрезов.

Удовлетворительная теория усталости в настоящее время еще не создана.

§ 2. Остаточные деформации. Поверхность нагружения

Наряду с начальным и деформированным состояниями среды, которые в действительности могут отвечать, вообще говоря, некоторым моментам времени t_0 и t, рассмотрим мысленно третье состояние — то, которое получается из данного деформированного, отвечающего моменту времени t, если снять все внутренние напряжения.

Отмеченные три состояния можно рассматривать как непрерывные многообразия, в которых индивидуальные точки определены одними и теми же лагранжевыми координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3. Обозначим векторы базисов лагранжевой системы координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 в этих трех состояниях среды через

$$\overset{*}{\boldsymbol{\partial}}_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0) = \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial \xi^i}, \qquad \hat{\boldsymbol{\partial}}_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i}$$

и $\overset{*}{\boldsymbol{\partial}}_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, а компоненты метрических тензоров — через $\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_i \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_j$, $\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{\partial}} \cdot \hat{\boldsymbol{\partial}}_j$ и $\overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{\boldsymbol{\partial}}_i \cdot \overset{*}{\boldsymbol{\partial}}_j$ соответственно. (В ньютонианской механике $\boldsymbol{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ и $\boldsymbol{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ — радиусы-векторы подвижных точек среды.) Квадрат длины материального отрезка, определяемого бесконечно малым вектором с компонентами $d\xi^1, d\xi^2, d\xi^3$, в начальном («недеформированном») состоянии равен $ds_0^2 = \overset{\circ}{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j$, в конечном (деформированном) состоянии $ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$, а в промежуточном, соответствующем полной разгрузке,

$$ds^{*2} = \overset{*}{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j.$$

На рис. 147 показаны состояния, обозначаемые индексами «$\circ$», «$\wedge$» и «$*$» для случая одноосного растяжения образца.

Тензоры пластических, упругих и полных деформаций

Для произвольного состояния конечным образом деформированной упруго-пластической среды можно определить понятия упругих и пластических деформаций и ввести следующие три пары тензоров деформаций:

1) тензоры пластических деформаций $\mathscr{E}^p = \varepsilon^p_{ij} \overset{*}{\boldsymbol{\partial}}^i \overset{*}{\boldsymbol{\partial}}^j$ и $\overset{\circ}{\mathscr{E}}{}^p = \varepsilon^p_{ij} \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}^i \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}^j$ с компонентами

$$\varepsilon^p_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}); \tag{2.1}$$

2) тензоры упругих деформаций $\mathscr{E}^e = \varepsilon^e_{ij} \hat{\boldsymbol{\partial}}^i \hat{\boldsymbol{\partial}}^j$ и $\overset{*}{\mathscr{E}}{}^e = \varepsilon^e_{ij} \overset{*}{\boldsymbol{\partial}}^i \overset{*}{\boldsymbol{\partial}}^j$ с компонентами

$$\varepsilon^e_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{*}{g}_{ij}); \tag{2.2}$$

3) тензоры полных деформаций $\mathscr{E} = \varepsilon_{ij}\hat{\mathfrak{e}}^i\hat{\mathfrak{e}}^j$ и $\overset{\circ}{\mathscr{E}} = \varepsilon_{ij}\overset{\circ}{\mathfrak{e}}^i\overset{\circ}{\mathfrak{e}}^j$ с компонентами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}). \tag{2.3}$$

Таким образом, при изучении действительного процесса деформирования для каждого момента времени наряду с полными деформациями можно рассматривать пластические, т. е. те, которые остались бы в частице, если бы ее из данного состояния полностью разгрузить, и упругие деформации, т. е. те, которые снимаются при такой разгрузке и возникают вновь при повторном нагружении — при переходе от «разгруженного» состояния к актуальному напряженно-деформированному состоянию.

Отметим сразу, что путем снятия всех *внешних сил* не всегда можно реализовать «разгруженное» состояние в теле конечных размеров. Действительно, при снятии всех внешних нагрузок в теле могут все же остаться внутренние напряжения. В частности, такая ситуация получается в примере, рассмотренном в § 2 этой главы. Если в таких случаях все же ввести мысленно для каждого малого элемента тела разгруженное состояние так, чтобы сплошность всего тела не нарушилась, то точки объема тела образуют некоторую область V^* в неевклидовом пространстве, поэтому метрика $\overset{*}{g}_{ij}$, вообще говоря, будет неевклидовой.

Компоненты метрического тензора $\overset{*}{g}_{ij}$ или тензора пластических деформаций $2\varepsilon^p_{ij} = (\overset{*}{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij})$ можно рассматривать как физические характеристики состояния пластических тел. Помимо метрики, можно вводить еще другие геометрические характеристики разгруженного многообразия в области V^* и наряду с $\overset{*}{g}_{ij}$ рассматривать эти другие инвариантные характеристики как параметры состояния.

Из формул (2.1), (2.2) и (2.3) видно, что при таком определении тензоров пластических, упругих и полных деформаций для ковариантных компонент этих тензоров в лагранжевой системе координат верно равенство

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}, \tag{2.4}$$

т. е. полные деформации равны сумме упругих и пластических.

Отметим, что для конечных деформаций это свойство аддитивности не выполняется для компонент с другим строением индексов в лагранжевой системе координат, а также для компонент с любым строением индексов (в том числе и чисто ковариантных) в системе отсчета. Это связано с тем, что (2.4) связывает компоненты тензоров в разных базисах, хотя и в одной

и той же лагранжевой системе координат [1]). В случае бесконечно малых относительных перемещений с точностью до малых высшего порядка можно считать, что равенство (2.4) выполняется для компонент с любым строением индексов и в любой системе координат.

Простейшее определение свойства пластичности состоит в том, что пластические деформации в отличие от вязких появляются только в том случае, когда напряжения превосходят некоторый предел (предел упругости [2])). При достаточно малых напряжениях материал ведет себя как упругий (или как жесткий, если упругими деформациями пренебрегают).

Поверхность нагружения или поверхность текучести

В связи с указанным основным свойством пластической среды в пространстве напряжений, т. е. в девятимерном пространстве, точки которого задаются значениями компонент тензора напряжений p^{ij}, можно отметить область $\mathcal{D}_p$ такую, что если для данного процесса точка p^{ij} лежит строго внутри области $\mathcal{D}_p$, то частица ведет себя как упругое тело. В противном случае в частице могут возникать пластические (остаточные) деформации. Граница Σ_p области $\mathcal{D}_p$ представляет собой совокупность пределов упругости для всевозможных напряженных состояний. Компоненты тензора напряжения p^{ij}, взятые в декартовой пространственной системе координат x, y, z, можно рассматривать как декартовы координаты точек в области $\mathcal{D}_p$. В девятимерном евклидовом пространстве [3]) p^{ij} в общем случае область $\mathcal{D}_p$ девятимерна, так как упругие напряжения могут быть в известной степени произвольными, а Σ_p восьмимерна.

Область $\mathcal{D}_p$ симметрична, если $p^{ij} = p^{ji}$, поэтому в этом случае можно рассматривать только шестимерную область $\mathcal{D}_p$ с пятимерной границей Σ_p в шестимерном пространстве с координатами p^{11}, p^{22}, p^{33}, p^{12}, p^{13}, p^{23}. Граница области $\mathcal{D}_p$ поверхность — Σ_p называется поверхностью нагружения или поверхностью текучести. Обычно при рассмотрении упрочняющихся материалов используется название «поверхность нагружения», а при рассмотрении идеально-пластических материалов — название «поверхность текучести».

---

[1]) См. Л. И. Седов, Введение в механику сплошной среды, Физматгиз, 1962, стр. 248.

[2]) Это определение понятия пластичности и предела упругости можно усложнять; например, можно принимать, что пределы упругости зависят не только от значения самих напряжений, но и от их градиентов, от температуры и других различных параметров.

[3]) Преобразования пространственной системы координат x, y, z индуцируют соответствующие частные преобразования координат p^{ij} в девятимерном или в шестимерном пространствах напряжений.

Теперь можно дать общее определение идеально-пластических и упрочняющихся материалов.

Идеально-пластические среды и среды с упрочнением

При одноосном растяжении предел упругости (предел текучести) — предельное значение растягивающего напряжения — для идеально-пластического материала представляет собой постоянную, которая не зависит от величины пластической деформации, но может зависеть от температуры T и, возможно, еще некоторых других параметров физико-химической природы μ_i, не связанных непосредственно с деформациями (обычный вариант теории). В то же время для упрочняющегося материала предел упругости при одноосном растяжении изменяется при пластическом деформировании даже при постоянных T и μ_i.

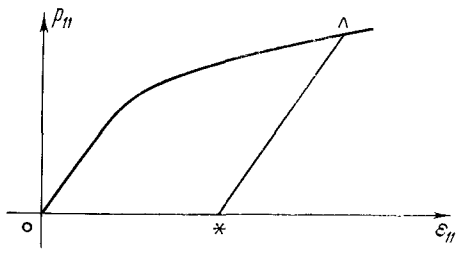


Рис. 147. Начальное (°), деформированное (^) и разгруженное (*) состояния в случае одноосного растяжения.

В соответствии с этим в общем случае назовем упруго-пластическую или жестко-пластическую среду идеально-пластической, если для всех процессов деформирования, происходящих без изменения температуры и физико-химических свойств среды, поверхность Σ_p в пространстве p^{ij} представляет собой фиксированную поверхность, и упрочняющейся, если Σ_p меняется при изменении величины пластических деформаций.

При пластическом деформировании (деформировании с изменением величины пластических деформаций) с непрерывным переходом от упругих состояний к пластическим напряжения p^{ij} всегда изображаются точкой на поверхности Σ_p, т. е. в каждый момент времени совпадают с одним из пределов упругости (см. для примера диаграмму одноосного растяжения, рис. 147).

При изотермическом пластическом деформировании идеально-пластического тела (и при постоянных μ_i) точка p^{ij} лежит на фиксированной поверхности Σ_p или перемещается вдоль нее. При изотермическом пластическом деформировании тела с упрочнением (при постоянных μ_i) изображающая состояние частицы точка в пространстве напряжений p^{ij} увлекает за собой поверхность Σ_p, которая перемещается в пространстве напряжений вслед за напряжениями, соответствующими процессу, в котором возникают пластические деформации (рис. 148, *б*).

Уравнение поверхности текучести Σ_p для идеально-пластического материала можно записать в виде

$$f(p^{ij}, g_{ij}, T, \mu_i) = 0. \tag{2.5}$$

Функция f называется *функцией текучести* или *функцией нагружения*.

Если среда изотропна, то переменные или постоянные физико-химические параметры μ_i — скаляры. В этом случае функция f зависит от тензора напряжений только через его инварианты (при $p^{ij} = p^{ji}$ независимых может быть только три инварианта). Отсюда легко получить соответствующие условия симметрии, которые должны быть присущи области $\mathcal{D}_p$ и поверхности текучести Σ_p для изотропных идеально-пластических материалов.

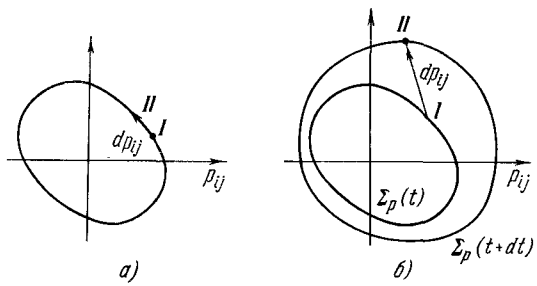


Рис. 148. Пластическое деформирование идеально-пластического (*а*) и упрочняющегося (*б*) материалов.

Из определения упрочняющихся материалов следует, что форма и расположение поверхности нагружения Σ_p в пространстве напряжений должны зависеть не только от p^{ij}, T, μ_i, но и от некоторых других параметров, обусловленных величиной пластических деформаций. В число таких параметров могут входить непосредственно компоненты тензора пластических деформаций ε^p_{ij}. Кроме ε^p_{ij} или вместо них в качестве параметров, определяющих упрочнение, можно взять параметры $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$, которые могут быть связаны с остаточными деформациями ε^p_{ij} различными, в частности неголономными, соотношениями. Следовательно, уравнение поверхности нагружения для упрочняющихся материалов можно записать в виде

$$f(p^{ij}, g_{ij}, T, \mu_i, \varepsilon^p_{ij}, \chi_s) = 0. \tag{2.6}$$

В дальнейшем будем всегда считать, что знак функции f выбран так, что внутри $\mathcal{D}_p$, т. е. в области, где материал ведет себя как упругое тело, имеем

$$f < 0. \tag{2.7}$$

Определение процессов пластического нагружения и разгрузки

Дадим теперь определение процессов пластического нагружения и разгрузки. При одноосном растяжении разгрузка — это уменьшение величины p_{11}. При произвольном деформировании разгрузка определяется как процесс, при котором точка p^{ij} в пространстве напряжений перемещается с поверхности Σ_p внутрь области $\mathcal{D}_p$. Очевидно, что при этом некоторые из компонент p^{ij} могут возрастать.

Аналитически разгрузку из состояния на поверхности Σ_p можно определить как процесс, в котором для идеально-пластического материала

$$df = \frac{\partial f}{\partial T}\,dT + \frac{\partial f}{\partial p^{ij}}\,dp^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mu_i}\,d\mu_i < 0, \tag{2.8}$$

а для материала с упрочнением

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial T}\,dT + \frac{\partial f}{\partial p^{ij}}\,dp^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mu_i}\,d\mu_i < 0. \tag{2.9}$$

При разгрузке, по определению,

$$d\varepsilon^p_{ij} = 0, \quad d\chi_s = 0. \tag{2.10}$$

Пластическое нагружение определяется как процесс, в котором

$$f = 0, \quad df = 0, \tag{2.11}$$

причем для идеально-пластического материала

$$df = \frac{\partial f}{\partial T}\,dT + \frac{\partial f}{\partial p^{ij}}\,dp^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mu_i}\,d\mu_i, \tag{2.12}$$

а для упрочняющегося материала

$$df = \frac{\partial f}{\partial T}\,dT + \frac{\partial f}{\partial p^{ij}}\,dp^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mu_i}\,d\mu_i + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\,d\varepsilon^p_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_s}\,d\chi_s. \tag{2.13}$$

Для упрочняющихся материалов вводят также понятия *активного нагружения* как процесса, в котором

$$\left.\begin{aligned} &f = 0, \quad df = 0, \quad d'f > 0, \\ &d\varepsilon^p_{ij} \neq 0, \quad d\chi_s \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

и *нейтрального нагружения*, в котором

$$\left.\begin{aligned} &f = 0, \quad df = 0, \quad d^2 f = 0, \text{ т. е.} \\ &d\varepsilon_{ij}^p = 0, \quad d\chi_s = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

При нейтральном нагружении с $T = \text{const}$, $\mu_i = \text{const}$ точка p^{ij} движется в пространстве p^{ij} по *неподвижной* поверхности Σ_p, при этом в упрочняющемся материале *не* происходит изменения пластических деформаций.

Возможные виды поверхности нагружения

Сделаем еще несколько замечаний о возможных видах поверхности нагружения. Поверхность нагружения (или поверхность текучести) может, очевидно, содержать бесконечно удаленную точку, если существует такой путь нагружения, в котором при неограниченном увеличении напряжений пластические деформации не возникают. В частности, многие материалы при всестороннем сжатии ведут себя как упругие тела вплоть до очень больших давлений (при схематизации — до бесконечных давлений). Поверхности Σ_p для таких материалов представляют собой цилиндры.

Как было уже указано, вместо девятимерного пространства напряжений при $p^{ij} = p^{ji}$ достаточно рассматривать только шестимерное пространство напряжений. Очевидно, что для изотропных материалов существенные особенности области Σ_p можно описать в трехмерном пространстве главных компонент тензора напряжений. Для изотропных тел компоненты p^{ij} входят в функции (2.5) и (2.6) только через главные напряжения p_1, p_2, p_3.

Отметим, что для идеально-пластического материала при пластическом деформировании с $T = \text{const}$, $\mu_i = \text{const}$ напряжения не могут быть произвольными, они всегда лежат на фиксированной поверхности в пространстве напряжений, поэтому для пластических тел, так же как и для жидкости, равновесие оказывается возможным только при специальной системе внешних сил.

Существуют модели сред, в которых область допустимых значений напряжений еще более ограничена. В частности, в идеальных жидкостях напряжения p^{ij} всегда лежат в пространстве напряжений на прямой, так как величины p^{ij} определяются значением одного параметра p — давления.

Можно строить модели пластических сред, в которых проявление пластичности связано с дополнительными ограничениями, накладываемыми на тензор напряжений. В этом случае непрерывный переход из упругой области в пластическую может соответствовать только некоторым множествам точек поверх-

ности Σ_p. Граница, отделяющая упругую зону от зоны, где уже появились в теле пластические деформации, как правило, является при этом поверхностью сильного разрыва, в частности, для напряжений.

Рассмотрим, например, переход льда в воду (таяние льда) как переход материала от упругого состояния к пластическому. Действительно, при заданной температуре лед, который в известных пределах хорошо описывается уравнениями теории упругости, переходит в воду, если напряжения достигают некоторых значений. Воду можно рассматривать как пластическое состояние льда (в воде могут появляться остаточные деформации [1])). Напряжения в воде (пластическом состоянии материала) сводятся к давлению, напряженное состояние льда может быть более сложным. Поэтому на границе лед — вода в общем случае напряжения терпят разрыв. Так, например, будет в случае растяжения бруска тающего льда. Непрерывный (без разрыва напряжений) переход от упругого состояния к пластическому в рассматриваемой модели соответствует только одной точке поверхности Σ_p. Эта точка определяется величиной давления, при котором тает лед (при заданной температуре).

В конкретных моделях пластических тел *функция нагружения f должна быть заданной функцией* своих аргументов. Кроме того, *должны быть заданы законы упругости*, определяющие деформирование в упругой области и при разгрузке, и *законы, определяющие приращения $d\varepsilon_{ij}^p$ и $d\chi_s$ при пластическом нагружении, а также термодинамические функции среды.*

§ 3. Основные определяющие соотношения в теории пластических тел

Различные модели пластических тел отличаются друг от друга тем, что в них принимаются различные основные законы для определения ε_{ij}^p и χ_s и по-разному задается функция нагружения f. В этом параграфе мы сформулируем так называемый *ассоциированный закон*, который представляет собой закон, принятый в ряде употребляемых на практике моделей пластических тел для определения ε_{ij}^p.

Этот закон, вместе с законом, определяющим упругие деформации ε_i^e, и термодинамическими соотношениями, служит для замыкания системы уравнений в теории пластических тел.

[1]) Воду можно рассматривать также как упругое тело, в котором напряжения сводятся к давлению, связанному однозначным соотношением с плотностью и температурой. Однако в воде могут появляться несущественные с точки зрения механики жидкости остаточные деформации, и в этом смысле можно приписывать воде наличие пластических свойств.

Законы для определения χ_s и ε_{ij}^p в общем случае не могут иметь вид конечных однозначных соотношений типа (3.1)

Прежде всего покажем, что при разнообразных способах нагружения пластические деформации ε_{ij}^p и параметры χ_s в каждый момент времени *не могут* определяться однозначно значениями компонент тензора напряжений в тот же момент времени. Другими словами, покажем, что основные законы пластичности, определяющие ε_{ij}^p и χ_s в случае различных путей нагружения, не могут иметь вид конечных однозначных соотношений:

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p(p^{ij}, T, \mu_1, \ldots, \mu_m), \qquad \chi_s = \chi_s(p^{ij}, T, \mu_1, \ldots, \mu_m), \quad (3.1)$$

где p^{ij} и T — компоненты напряжений и температура в рассматриваемый момент времени, а μ_s — физические постоянные. Первые из соотношений (3.1) принимаются для определения ε_{ij}^p в так называемых деформационных теориях пластичности.

Для идеально-пластического тела недопустимость соотношений (3.1) следует из того факта, что многообразие напряжений p^{ij}, соответствующих процессам пластического нагружения, и пространство остаточных пластических деформаций имеют, вообще говоря, разные размерности. Наибольшее возможное при $T = \text{const}$ и $p^{ij} = p^{ji}$ число измерений многообразия точек поверхности текучести Σ_p, которой принадлежат все точки изотермических процессов пластического нагружения, равно пяти, а соответствующей области пространства ε_{ij}^p — шести.

Недопустимость взаимнооднозначных соотношений вида (3.1) в теории идеальной пластичности, как следствие различных размерностей пространств допустимых значений компонент ε_{ij} и p^{ij}, может иметь место и в том случае, когда на компоненты тензора ε_{ij}^p накладываются дополнительные геометрические ограничения, снижающие размерность пространства.

Например, если принять, что материал пластически несжимаем, то при малых деформациях компоненты тензора ε_{ij}^p образуют девиатор и размерность соответствующего пространства допустимых значений для компонент $\varepsilon_{ij}^{\prime p}$ равна пяти. Однако в этом случае обычно принимается, что в условия пластичности входит только девиатор напряжений p^{ij}. Если же допустить, что в (3.1) компоненты девиатора $\varepsilon_{ij}^{\prime p}$ могут зависеть только от компонент девиатора напряжений $p^{\prime ij}$, то и в этом случае исключаются взаимнооднозначные соотношения вида (3.1), так как размерности пространств допустимых значений компонент $\varepsilon_{ij}^{\prime p}$ и $p^{\prime ij}$ равны соответственно пяти и четырем.

Из диаграммы одноосного растяжения — сжатия идеально-пластического тела видно, что даже в простейшем случае

одноосного монотонного (без промежуточных разгрузок) нагружения в пластической области одному и тому же значению напряжения p^{11} могут соответствовать разные значения величины пластической деформации ε^p_{11} (рис. 139).

В общем случае при различных путях нагружения при подходе в пределе к двум различным точкам M и N на поверхности текучести Σ_p (см. рис. 149) из некоторого состояния D в упругой области для модели идеально-пластического тела мы встретимся со следующими эффектами. При нагружении по путям DM или DN, принадлежащим упругой области, компоненты тензоров пластических деформаций ε^p_{ij} остаются неизменными и, в частности, они могут равняться нулю или отличаться от нуля, если в предыдущей истории деформирования в рассматриваемой частице уже образовались остаточные деформации. Таким образом, в точках M и N при разных напряжениях величины ε^p_{ij} могут быть одинаковыми. С другой стороны, для модели идеально-пластического тела на участке пути MN, расположенном на поверхности текучести, могут образоваться изменения величин ε^p_{ij}, поэтому в точке N в результате двух процессов DN и DMN в частице могут возникнуть одинаковая система напряжений, отвечающая точке N, и различные значения величин ε^p_{ij}.

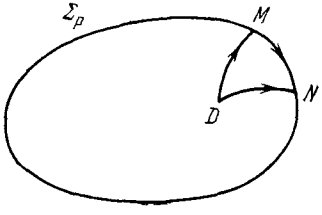


Рис. 149. Различные пути нагружения.

Из этих рассуждений следует, что для модели идеально-пластического тела *при различных* путях нагружения соотношения вида (3.1), вообще говоря, невозможны.

Для упруго-пластических тел с упрочнением при одноосном растяжении без промежуточных разгрузок существует однозначная зависимость между напряжением p^{11} и величиной пластической деформации ε^p_{11}. Поэтому можно было бы предположить, что и в общем случае при любых нагружениях без разгрузок в моделях упрочняющих тел могут выполняться соотношения (3.1). Однако нетрудно показать, что такое предположение приводит к, вообще говоря, неприемлемым ограничениям [1]).

[1]) Иногда высказывается утверждение, что при любых изотермических процессах нагружения без промежуточных разгрузок для модели пластического тела с упрочнением можно рассматривать связи между полными деформациями и напряжениями как связи, аналогичные связям нелинейной теории упругости. Ниже показывается, что в общем случае это утверждение неверно! Для частных путей нагружения для малой частицы такая трактовка допустима. Подчеркнем, однако, что для заданного част-

В самом деле, если допустить, что в процессах нагружения равенства (3.1) справедливы, то каждое из соотношений вида

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{ij}^{p} = \varepsilon_{ij}^{p}(p^{ij}, T, \mu_1, \ldots, \mu_m) = C_{ij} = \text{const} \\ &\text{и} \\ &\chi_s = \chi_s(p^{ij}, T, \mu_1, \ldots, \mu_m) = C_s = \text{const} \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

будет связывать между собой p^{ij} и T, т. е. определять (при $T = \text{const}$) поверхность Σ в пространстве p^{ij}, которая будет содержать точки поверхностей нагружения Σ_p, так как по определению модели пластического тела с упрочнением на поверхности нагружения величины ε_{ij}^{p} и χ_s постоянны.

Рассмотрим сначала случай, когда при фиксированной температуре поверхность нагружения Σ_p представляет собой пятимерную поверхность в шестимерном пространстве значений p^{ij}. Тогда поверхности, определяемые уравнениями (3.2), будут совпадать с поверхностью нагружения.

Ясно, что при нагружениях в случае постоянной температуры без разгрузок, если для некоторых двух состояний остаточные деформации ε_{ij}^{p1} и ε_{ij}^{p2} различны, при наличии связей (3.1) получится, что соответствующие поверхности нагружения Σ_{p1} и Σ_{p2} различны и не могут иметь общих точек, так как иначе одним и тем же значениям p^{ij} и T могли бы соответствовать различные остаточные деформации ε_{ij}^{p1} и ε_{ij}^{p2}, что противоречило бы однозначности формул (3.1).

Таким образом, если зафиксировать, например, $\varepsilon_{11}^{p} = C_{11}$, то соотношение $\varepsilon_{11}(p^{ij}, T, \mu_1, \ldots, \mu_m) = C_{11}$ определит однозначно поверхность нагружения Σ_p и этим самым определятся все компоненты $\varepsilon_{ij}^{p} = C_{ij}$ и $\chi_s = C_s$, которые также постоянны на Σ_p. Поэтому все постоянные C_{ij} и C_s можно рассматривать как универсальные функции (независимые от p^{ij} и T) одной из них, например от $C_{11} = \varepsilon_{11}^{p}$, т. е.

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \omega_{ij}(\varepsilon_{11}^{p}) \quad \text{и} \quad \chi_s = \chi_s(\varepsilon_{11}^{p}). \qquad (3.3)$$

Соотношения (3.3) показывают, что предположения (3.1) приводят к неприемлемому выводу о том, что при нагружении

ного пути нагружения все характеристики состояния малой частицы и тела в целом можно рассматривать как функции только одной из них. Последний вывод совершенно очевиден и справедлив при подходящем выборе одного определяющего параметра вообще для любых моделей неупругих тел. Вместе с этим необходимо отметить, что в глобальной задаче при определенном законе нагружения конечного тела внешними силами пути нагружения для отдельных малых частиц тела различны и заранее неизвестны.

по различным путям в переменных p^{ij} и T возможен только один вполне определенный путь (3.3) пластического деформирования в переменных ε^p_{ij}.

Если материал пластически несжимаем, то при малых деформациях тензор пластических деформаций ε^p_{ij} является девиатором. Легко видеть, что предыдущие общие выводы распространяются и на этот случай, когда по предположению в соотношениях (3.1) в аргументах функций фигурируют только компоненты девиатора напряжений p^{ij}, а совокупность пределов упругости образует четырехмерную поверхность в пятимерном пространстве девиатора тензора напряжений.

В общем случае, если размерность области возможных значений пределов упругости для компонент тензора напряжений p^{ij} при переходе из упругой области в пластическую меньше шести, из предположения о существовании взаимно однозначной связи (3.1) следует, что размерность возможных значений для ε^p_{ij} также меньше шести, и пластические деформации могут иметь только некоторый специальный вид, независимый от системы внешних воздействий.

Следовательно, предположения (3.1) и предположения о допустимости произвольных пластических деформаций находятся в противоречии.

Таким образом, показано, что в случае пластических тел с упрочнением для произвольных путей нагружения даже без разгрузок конечные однозначные соотношения вида (3.1) невозможны. С этим связано характерное основное свойство законов теории пластичности, которое состоит в том, что эти законы имеют вид дифференциальных неинтегрируемых (неголономных) соотношений.

О деформационных теориях пластичности

Очевидно, что для тел с упрочнением для каждого вполне определенного фиксированного закона нагружения можно написать конечные соотношения вида (3.1), причем эти соотношения будут зависеть от выбранного пути нагружения. Вместе с этим нередко получается так, что для некоторых различных, вообще говоря, близких путей нагружения можно применять одно и то же соотношение вида (3.1). В связи с этим на практике иногда можно пользоваться так называемыми деформационными теориями пластичности, основанными на соотношениях вида (3.1). Нужно, однако, твердо помнить, что эти соотношения верны только для одного или нескольких определенных процессов нагружения рассматриваемой частицы среды и не определяют ее поведение в других случаях пластического деформирования, т. е. фиксируют не свойства среды, а лишь свойства некоторых частных процессов в ней.

Пропорциональное нагружение

Например, на практике для моделей пластических тел с упрочнением можно рассматривать пропорциональное нагружение, когда

$$p^{ij} = \varkappa p_0^{ij}, \quad T = T_0, \tag{3.4}$$

где p_0^{ij} — некоторый постоянный тензор, а $\varkappa$ — переменный скалярный параметр. В некоторых приложениях употребляют приближенные деформационные теории для процессов с пропорциональным нагружением.

Связи между напряжениями и деформациями для различных пропорциональных путей нагружения вообще различны и зависят от параметрического тензора p_0^{ij}. При геометрически малых деформациях в линейно-упругом по Гуку конечном фиксированном теле пропорциональное изменение внешних нагрузок ведет к пропорциональному изменению компонент напряжений и компонент тензора деформаций во всех точках тела. При конечных деформациях пропорциональное изменение компонент тензора деформаций во всех точках тела в общем случае геометрически невозможно [1]).

В случае произвольного пластического деформирования конечных тел в рамках теории малых деформаций при пропорциональном изменении внешних нагрузок пропорциональные пути нагружения для всех его малых частиц, вообще говоря, невозможны.

Принцип минимума работы истинных напряжений на приращениях пластических деформаций

Сформулируем теперь некоторое термодинамическое неравенство, которое в работах многих современных авторов принимается в качестве дополнительного термодинамического принципа и служит основой для построения моделей пластических тел.

Введем в рассмотрение элементарную работу напряжений на соответствующих приращениях упругих деформаций

$$dA_e = -\frac{p^{\alpha\beta}}{\rho} d\varepsilon^e_{\alpha\beta} \tag{3.5}$$

и их элементарную работу dA_p на приращениях пластических деформаций, отвечающих некоторому изотермическому процессу нагружения, проходящему через данную точку p^{ij} на поверхности нагружения Σ_p,

$$dA_p = -\frac{p^{\alpha\beta}}{\rho} d\varepsilon^p_{\alpha\beta}. \tag{3.6}$$

[1]) См. Л. И. Седов, О понятии простого нагружения и о возможных путях деформации, ПММ, т. 23, вып. 2, 1959.

Элементарная работа внутренних поверхностных сил представляется в виде суммы dA_e^{*} и dA_p:

$$dA^{(i)} = dA_e + dA_p.$$

Вычислим еще элементарную работу внутренних напряжений $p^{*\alpha\beta}$, отвечающих любой точке упругой области $\mathcal{D}_p$, на рассматриваемых приращениях пластических деформаций $d\varepsilon^p_{\alpha\beta}$

$$d\overset{*}{A}_p = -\frac{p^{*\alpha\beta}}{\rho} d\varepsilon^p_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

Постулат, выражающийся неравенством,

$$d\overset{*}{A}_p - dA_p = \frac{p^{\alpha\beta} - p^{*\alpha\beta}}{\rho} d\varepsilon^p_{\alpha\beta} \geqslant 0, \tag{3.8}$$

носит название принципа минимума работы истинных напряжений на пластических деформациях. Согласно этому принципу (постулату) работа, совершаемая действительными напряжениями на заданных приращениях пластических деформаций, всегда меньше работы, которую совершали бы любые другие напряжения из упругой области на тех же приращениях пластических деформаций.

Если компоненты тензоров $d\varepsilon^p_{\alpha\beta}$ и $dp^{*\alpha\beta} = p^{\alpha\beta} - p^{*\alpha\beta}$ трактовать как компоненты векторов в девятимерном евклидовом пространстве компонент тензора напряжений p^{ij}, то постулат (3.8) можно истолковать как условие, что скалярное произведение этих векторов не отрицательно, т. е.

$$dp^{*\alpha\beta}\, d\varepsilon^p_{\alpha\beta} \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Из (3.9) вытекает, что если в некоторой точке $p^{\alpha\beta}$ на Σ_p провести плоскость, ортогональную вектору $d\varepsilon^p_{\alpha\beta}$, то вся поверхность может быть расположена только по одну сторону от этой плоскости.

Отсюда ясно, что поверхность нагружения Σ_p со стороны упругой области $\mathcal{D}_p$, содержащей точку p^{*ij}, выпуклая.

Ассоциированный закон в случае гладких поверхностей нагружения

Далее, если в точке $p^{\alpha\beta}$ поверхность нагружения имеет определенную касательную плоскость, то эта плоскость должна быть ортогональна вектору $d\varepsilon^p_{\alpha\beta}$. Другими словами, в тех точках поверхности Σ_p, в которых имеется единственная нормаль, векторы $d\varepsilon^p_{\alpha\beta}$ и grad f должны быть коллинеарны, и для определения приращений пластических деформаций в процессе пластического нагружения получаются

следующие дифференциальные соотношения:

$$d\varepsilon^p_{\alpha\beta} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial p^{\alpha\beta}},$$

где $d\lambda$ — некоторая бесконечно малая положительная скалярная величина, так как по условию (3.9) вектор $d\varepsilon^p_{ij}$ направлен в сторону внешней нормали Σ_p.

Итак, для *идеально-пластического* материала согласно (3.8) можно принять, что

$$\left.\begin{aligned} &d\varepsilon^p_{\alpha\beta} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial p^{\alpha\beta}} \text{ при } f = 0,\ df = 0, \\ &d\varepsilon^p_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } f = 0,\ df < 0 \text{ и при } f < 0. \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

В случае пластического тела *с упрочнением* на поверхности нагружения $f = 0$ пластические деформации постоянны, и поэтому $d\lambda = 0$ при $d'f = 0$, следовательно, должно быть справедливо равенство

$$d\lambda = h\, d'f,$$

где $h > 0$ — функция переменных параметров, определяющих физико-механическое состояние частицы. Соотношения (3.10) в случае пластического тела с упрочнением принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &d\varepsilon^p_{\alpha\beta} = h \frac{\partial f}{\partial p^{\alpha\beta}} d'f \text{ при } f = 0,\ d'f > 0, \\ &d\varepsilon^p_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } d'f \leqslant 0,\ f = 0 \text{ и при } f < 0. \end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

Соотношения (3.10) и (3.11) являются дополнительными соотношениями для определения приращений пластических деформаций. Они вытекают из допущения (3.8) и предположения о гладкости поверхности Σ_p и называются ассоциированным законом. Ассоциированный закон в теории идеально-пластических тел в общем виде впервые был предложен и применен Мизесом.

Следует заметить, что допущение (3.8) выдвигается в качестве теоретически недоказанного постулата. Поэтому вместо соотношения (3.8) в качестве основного постулата можно принимать сам ассоциированный закон (3.10) или (3.11). Справедливость ассоциированного закона в требуемых пределах должна подтверждаться опытными данными путем сопоставления следствий из ассоциированного закона и данных измерений в опытах.

Возможно построение других теорий пластичности, в которых вместо ассоциированного закона можно использовать другие основные законы для определения остаточных деформаций.

Что касается приращений параметров $d\chi_s$, то для них в случае пластического тела с упрочнением можно написать формулы:

$$\left.\begin{aligned} d\chi_s &= A_s\, d'f \quad \text{при} \quad d'f > 0, \\ d\chi_s &= 0 \qquad \text{при} \quad d'f \leqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

так как $d\chi_s$ обращаются в нуль вместе с $d'f$, A_s — функции параметров, определяющих состояние частицы.

Функции f, h и A_s при построении моделей пластических тел задаются

Задание функций f, h и A_s входит в определение конкретной модели пластического тела с упрочнением. Их следует выбирать так, чтобы свойства предлагаемой модели отражали наблюдаемые в опытах эффекты.

В предложенных к настоящему времени и используемых для расчетов конкретных моделях пластических сред с упрочнением параметры χ_s либо вовсе отсутствуют, либо имеется только один параметр χ, от которого зависит функция нагружения f и функция h в ассоциированном законе.

Приведем некоторые примеры выражений для $d\chi$. Тейлор, Куинни (1931 г.) и Шмидт (1932 г.) принимали, что

$$d\chi = p^{ij}\, d\varepsilon^p_{ij},$$

Одквист (1933 г.) применял следующий параметр упрочнения:

$$d\chi = \sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i,\,j} d\varepsilon^p_{ij}\, d\varepsilon^p_{ij}}\,.$$

Указанные авторы рассматривали только изотермические процессы и принимали, что уравнение поверхности нагружения имеет вид

$$f = F(p^{ij}) + \omega(\chi) = 0.$$

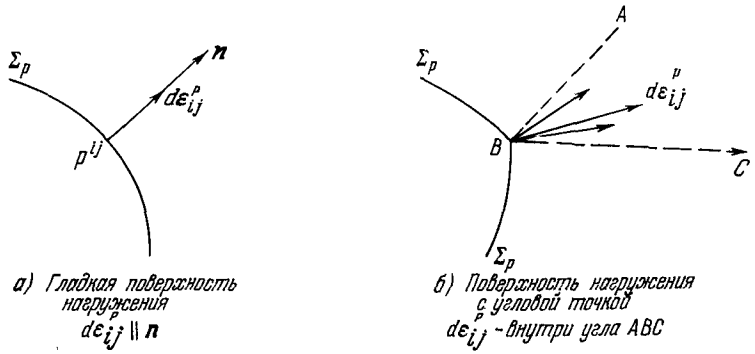
Предположения Треска и Мизеса о виде функции нагружения f мы подробно рассмотрим в следующем параграфе.

Значения пластических деформаций ε^p_{ij} и параметров χ_s для каждого данного пути нагружения, когда производные $\partial f/\partial p^{\alpha\beta}$ известны, определяются посредством интегрирования соотношений (3.11) и (3.12) и *зависят от* пути интегрирования, т. е. от *процесса нагружения.*

Поверхности нагружения с угловыми точками

Существуют модели пластических тел, в которых поверхности нагружения имеют острые ребра, угловые или конические точки. На возможность и даже необходимость использования такого рода моделей указывают некоторые опытные данные. Одна такая модель рассмотрена в § 4.

В регулярных точках поверхности нагружения с единственной нормалью согласно ассоциированному закону направление приращения остаточных деформаций определено единственным образом. В угловых точках поверхности нагружения в согласии с принципом (3.8) или (3.9) направление вектора $d\varepsilon_{ij}^{p}$ может меняться внутри некоторого угла (рис. 150, *б*).



а) Гладкая поверхность нагружения $d\varepsilon_{ij}^{p} \parallel n$

б) Поверхность нагружения с угловой точкой $d\varepsilon_{ij}^{p}$ *- внутри угла ABC*

Рис. 150. Возможные положения вектора $d\varepsilon_{ij}^{p}$.

Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности нагружения с угловой точкой предложено Койтером [1]) в 1953 г. В настоящее время эта теория является основой для всех работ, посвященных исследованию пластичности с поверхностями нагружения, имеющими угловые точки. Основные положения теории Койтера согласуются с принципом минимума работы истинных напряжений на пластических деформациях, выраженным неравенством (3.9). Рассмотрим особые точки Σ_p как точки пересечения некоторого количества регулярных поверхностей с уравнениями вида

$$f_k(p^{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}, T, \chi_s, \mu_j) = 0. \tag{3.13}$$

Число этих поверхностей может быть любым. Иногда поверхность нагружения можно рассматривать как огибающую множества (3.13), содержащего бесконечное количество поверхностей f_k. Функции f_k определены так, что смещениям в упругую область соответствуют неравенства:

$$f_k = 0 \quad \text{и} \quad d'f_k = \frac{\partial f_k}{\partial T}\,dT + \frac{\partial f_k}{\partial p^{\alpha\beta}}\,dp^{\alpha\beta} < 0 \tag{3.14}$$

или $f_k < 0$.

[1]) См. W. T. Koiter, Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular field surface, Quart. Appl. Math., v. XI, № 3, 1953, p. 350—354.

Процессу пластического нагружения в случае идеально-пластического тела, когда функции f_k не зависят от аргументов ε_{ij}^p и χ_s, соответствуют условия

$$\left.\begin{aligned} &f_\omega = 0, \quad df_\omega = d'f_\omega = 0; \\ &f_\nu = 0, \quad df_\nu = d'f_\nu < 0 \text{ или } f_\nu < 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

где индексы ω и ν различны и в совокупности исчерпывают все значения индексов k.

Процессу активного пластического нагружения в случае пластического тела с упрочнением соответствуют условия

$$\left.\begin{aligned} &f_\omega = 0, \quad df_\omega = 0, \quad d'f_\omega > 0; \\ &f_\nu = 0, \quad df_\nu = d'f_\nu \leqslant 0 \text{ или } f_\nu < 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Если ω принимает несколько значений из совокупности индексов k, то во время бесконечно малого элемента пути нагружения компоненты тензора напряжений продолжают соответствовать особым точкам поверхности нагружения. Если $\omega = j$, где j — единственный фиксированный индекс, то во время бесконечно малого пути нагружения происходит переход из особой точки в регулярную точку поверхности Σ_p. Если индексы ω принимают все значения из совокупности индексов k, то такой процесс нагружения называется *полным*.

Ассоциированный закон в случае поверхностей нагружения с угловыми точками

Обобщение ассоциированного закона (3.10) на случай наличия угловых точек на поверхности Σ_p дается равенствами:

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= \sum_\omega d\lambda_\omega \frac{\partial f_\omega}{\partial p^{ij}} && \text{при нагружении, т. е. при усло-} \\ & && \text{виях (3.15) или (3.16),} \\ d\varepsilon_{ij}^p &= 0 && \text{при } f_k = 0,\ df_k < 0 \text{ и при } f_k < 0 \\ & && \text{для всех } k, \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

где $d\lambda_\omega$ — положительные величины.

Для пластического тела с упрочнением для множителей $d\lambda_\omega$ согласно (3.16) и (3.17) можно написать

$$d\lambda_\omega = h_\omega\, d'f_\omega, \tag{3.18}$$

где h_ω — положительные функции определяющих параметров частицы. Функции h_ω аналогичны функции h, фигурирующей

в формуле (3.11). Задание функций h_ω входит в определение модели пластического тела [1]).

В случае бесконечной системы функций (3.13) сумма в (3.17) может быть заменена интегралом, в котором области интегрирования определены условиями (3.15) или (3.16).

Дополнительные условия для определения параметров χ_s в теориях пластичности с упрочнением в тех случаях, когда Σ_p имеет угловые точки, могут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} d\chi_s &= \sum_\omega \mathcal{A}_{s\omega}\, d'f_\omega \\ &\text{или} \\ d\chi_s &= \mathcal{B}_s^{\alpha\beta}\, d\varepsilon^p_{\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

где $\mathcal{A}_{s\omega}$ или $\mathcal{B}_s^{\alpha\beta}$ — известные функции определяющих параметров, задание которых, как и задание функций f_k и h_ω, входит в определение модели пластического тела с упрочнением.

Для пластических материалов с упрочнением первые формулы (3.17) с учетом (3.18) можно записать в виде

$$d\varepsilon^p_{ij} = \sum_\omega h_\omega \frac{\partial f_\omega}{\partial p^{ij}}\, d'f_\omega. \tag{3.20}$$

При заданной системе индексов ω, определяемой приращениями компонент тензора напряжений p^{ij} и температуры, формулы (3.20) дают линейную связь между $d\varepsilon^p_{ij}$ и dp^{ij} и dT. В пространстве напряжений вблизи особой точки Σ_p можно, очевидно, указать различные области изменения dp^{ij} и dT, в каждой из которых система индексов ω различна. Поэтому линейные связи (3.20) в этих различных областях различны. Следовательно, соотношения (3.20), по существу, являются нелинейными. Исследование такого рода нелинейных эффектов в угловых точках Σ_p проведено Сандерсом [2]). Ходж исследовал случаи, когда поверхности Σ_{pi}, определенные уравнениями $f_i = 0$, являются плоскостями. В этом случае можно найти конечную

---

[1]) Очевидно, что для геометрически-(физически) определенной поверхности нагружения в пространстве напряжений условие $f_\omega = 0$ можно вводить с известным произволом. Если положить $f^*_\omega = \sqrt{h} f_\omega$ и учесть, что $f_\omega = 0$ при пластическом деформировании, то придем к формулам (3.20), в которых f_ω надо заменить через f^*_ω и положить $h_\omega = 1$. Аналогичное замечание, в частности, применимо к формуле (3.11).

[2]) T. L. Sanders, Plastic stress-strain relations based on linear loading functions, Proc. of second U.S. National Congress of Appl. Mech., 1954, p. 455—460.

связь между напряжениями и остаточными деформациями, одинаковую для некоторых классов путей нагружения.

В общем случае зависимость функций h_ω и f_ω от параметров, определяющих путь нагружения, может быть весьма сложной, и поверхность Σ_p может сильно изменяться при пластическом деформировании. Однако в случае активного процесса нагружения, отвечающего изолированной угловой точке (без промежуточных разгрузок), важны только локальные свойства поверхности нагружения в этой особой точке, поэтому можно развивать теорию пластического деформирования с упрочнением с помощью формул (3.20), в которых функции f_ω являются линейными функциями p^{ij}.

Несмотря на эффекты нелинейности и весьма сложную ситуацию при путях нагружения общего вида, в теориях пластических тел с угловой точкой на Σ_p возникают значительные упрощения для некоторого множества путей нагружения, полностью принадлежащих области полного нагружения. В частности, Будянским [1]), было показано, что для некоторой совокупности путей полного нагружения можно рассматривать конечные соотношения между напряжениями и деформациями.

Рассмотренные выше общие идеи построения моделей пластических тел были развиты в основном в последние полтора десятилетия. Экспериментальные исследования введенных функций пока немногочисленны.

Уравнение притока тепла и второй закон термодинамики

Рассмотрим теперь термодинамические соотношения в теории пластичности. Эти соотношения необходимы для замыкания системы механических уравнений в случае, когда важны эффекты изменения температуры в процессах деформирования тела. Поэтому модель пластического тела нельзя считать полностью построенной, если не определены термодинамические функции и не написаны термодинамические уравнения.

Уравнение притока тепла и уравнение второго закона термодинамики с учетом необратимости процесса пластического деформирования можно записать в виде (см. §§ 2, 5, 6 гл. V т. 1)

$$dF = \frac{1}{\rho} p^{ij} d\varepsilon_{ij} - d(sT) + dq^{(e)} + dq^{**}, \tag{3.21}$$

или

$$\left.\begin{aligned} T\,ds &= dq^{(e)} + dq', \qquad dq' \geqslant 0, \\ ds &= d_e s + d_i s, \qquad d_i s \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

[1]) B. Budiansky, A reassessment of deformation theory of plasticity, Trans. ASME, Series E, Journ. of Appl. Mech., v. 26, № 1—2, 1959, p. 259—264.

Напомним, что здесь F — удельная свободная энергия, s — удельная энтропия, $dq^{(e)}$ — задаваемый отдельно внешний приток тепла, dq' — некомпенсированное тепло, dq^{**} — соответствующий приток энергии к единице массы (см. § 2 и § 7 гл. V т. 1).

Основные допущения и вытекающие из них термодинамические формулы

Дальнейшее конструирование модели пластического тела всегда связано с рядом дополнительных допущений. Ниже в качестве основных допущений примем следующие:

$$\left.\begin{aligned} dq^{**} &= 0, \\ F &= F\left(\overset{\circ}{g}_{ij}, \varepsilon^e_{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T\right), \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}, \\ dq^{(e)} &= -\frac{1}{\rho}\operatorname{div} \boldsymbol{q}\, dt, \\ dq' &= \frac{1}{\rho}\tau^{ij} d\varepsilon^p_{ij} \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

где $\boldsymbol{q}$ — вектор потока тепла, τ^{ij} — компоненты некоторого тензора, который характеризует диссипацию энергии.

На основании (3.23) уравнения (3.21) и (3.22) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^e_{ij}} - \frac{p^{ij}}{\rho}\right) d\varepsilon^e_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}} - \frac{p^{ij}}{\rho} + \frac{\tau^{ij}}{\rho}\right) d\varepsilon^p_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial T} + s\right) dT = 0, \tag{3.24}$$

$$\rho\, ds = -\frac{\operatorname{div} \boldsymbol{q}}{T}\, dt + \frac{\tau^{ij}}{T} d\varepsilon^p_{ij}. \tag{3.25}$$

Равенство (3.24) выполняется как в упругой, так и в пластической области. В соответствии с рассмотренным выше определением моделей пластических тел от всякого пластического состояния можно провести упругий процесс разгрузки, поэтому напряжения в частице в пластическом состоянии, примыкающем к упругому процессу разгрузки, можно определить с помощью уравнения состояния теории упругости. Пользуясь этим, с помощью рассмотрения упругих процессов разгрузки, когда $d\varepsilon^p_{ij} = 0$, получим, что из равенства (3.24) следуют соотношения (2.9) и (2.10) гл. IX для упругой модели. В связи с этим примем, что в упругой области и в пластической области имеют место соотношения

$$p^{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^e_{ij}} \quad \text{и} \quad s = -\frac{\partial F}{\partial T}. \tag{3.26}$$

Для процесса пластического деформирования равенство (3.24) на основании (3.26) приобретает вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} - \frac{p^{ij}}{\rho} + \frac{\tau^{ij}}{\rho}\right) d\varepsilon_{ij}^p = 0. \tag{3.27}$$

В этом равенстве, вообще говоря, нельзя считать $d\varepsilon_{ij}^p$ независимыми. В самом деле, если, например, принимается ассоциированный закон, то шесть приращений $d\varepsilon_{ij}^p$ выражаются через одно из них.

Несмотря на это, для наших целей всегда можно считать выполненными равенства

$$\tau^{ij} = p^{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p}. \tag{3.28}$$

Действительно, положим

$$\tau^{ij} = p^{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} + \tau_1^{ij}.$$

Тогда из (3.27) следует, что всегда

$$\tau_1^{ij} d\varepsilon_{ij}^p = 0,$$

т. е. добавки τ_1^{ij} не влияют на величину диссипации dq'. Поэтому компоненты тензора τ^{ij}, введенные специально и только для определения dq', можно вычислять по формулам (3.28).

Формулы (3.28) показывают, что если свободная энергия F зависит от пластических деформаций, то

$$dq' = \frac{1}{\rho} p^{ij} d\varepsilon_{ij}^p - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p = -dA_p.$$

В этом случае пластическое деформирование может привести к изменению величины свободной энергии материала за счет изменения его структуры, что в известной степени аналогично изменению свободной энергии при химических реакциях.

Можно рассматривать среды, для которых свободная энергия не зависит от ε_{ij}^p,

$$\left.\begin{aligned} F &= F(\varepsilon_{ij}^e, T) \\ \text{и} \qquad \tau^{ij} &= p^{ij}. \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Такие среды можно назвать средами без «памяти» о пластических деформациях; все термодинамические функции (F, s, U, Ψ) и законы упругости (в частности, например, модуль Юнга)

в них не зависят от величины накопленных пластических деформаций. Однако можно вводить модели пластических тел с «памятью», когда $F = F(\varepsilon^e_{ij},\ T,\ \varepsilon^p_{ij},\ \chi_s)$. В этом случае на основании (3.28) существенно неравенство $\tau^{ij} \neq p^{ij}$.

Уравнение для производства энтропии

Рассмотрим теперь подробнее уравнение второго закона термодинамики. По определению примем, что

$$\rho \frac{d_e s}{dt} = -\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{q}}{T},\quad \rho \frac{d_i s}{dt} = -\frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad} T}{T^2} + \frac{\tau^{ij}}{T}\frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dt} = \sigma. \qquad (3.30)$$

Величина $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ определяет собой скорость производства энтропии за счет внутренних необратимых процессов, связанных с наличием градиента температуры,

$$\sigma_1 = -\frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad} T}{T^2}, \qquad (3.31)$$

и с пластическим деформированием,

$$\sigma_2 = \frac{1}{T}\tau^{ij}e^p_{ij}, \qquad e^p_{ij} = \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dt}. \qquad (3.32)$$

Если воспользоваться законом Фурье для вектора $\boldsymbol{q} = q^i\boldsymbol{e}^i$

$$\frac{q^i}{T^2} = -\varkappa^{ij}\frac{\partial T}{\partial x^j}, \qquad (3.33)$$

то величина σ_1 определяется в виде квадратичной формы от $\partial T/\partial x^i$:

$$\sigma_1 = \varkappa^{ij}\frac{\partial T}{\partial x^i}\frac{\partial T}{\partial x^j}.$$

В этом случае закон Фурье (связь компонент вектора потока тепла с компонентами вектора градиента температуры) может быть записан в виде

$$-\frac{q^i}{T^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\left(\dfrac{\partial T}{\partial x^i}\right)}. \qquad (3.34)$$

В случае теплопроводности формулы (3.33) вместе с (3.34) представляют собой просто иную формулировку принципа Онзагера (см. т. 1, стр. 264—265).

Обобщение принципа Онзагера на нелинейные связи

При рассмотрении произвольных необратимых процессов иногда можно обобщить равенства (3.34) и принимать, что если скорость диссипации σ представляется в виде суммы произведений «сил» X_i и «потоков» x^i

$$\sigma = X_i x^i,$$

причем «силы» X_i являются некоторыми нелинейными функциями от определяющих параметров и «потоков» x^i, то эти функции могут быть представлены в виде

$$X_i = \varkappa \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}. \tag{3.35}$$

В общем случае σ не является квадратичной формой x^i, причем величины σ и $\varkappa$ могут зависеть не только от переменных x^i, но и от некоторых других определяющих параметров χ_s. В общем случае из предыдущих формул следует, что между σ и $\varkappa$ имеется связь:

$$X_i x^i = \varkappa \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} x^i = \sigma. \tag{3.36}$$

Соотношение (3.36) определяет $\varkappa$, если σ задано. Если задано $\varkappa$, то равенство (3.36) можно рассматривать как уравнение с частными производными первого порядка для функции $\sigma(x^i, \chi_s)$.

Если $\varkappa = \text{const}$ или $\varkappa = f(\chi_s)$, то из уравнения (3.36) с учетом формулы Эйлера для однородных функций непосредственно следует, что величина σ является однородной функцией переменных x^i порядка $1/\varkappa$.

Предположение (3.35) можно обосновать принципами, которые по своей природе аналогичны принципу (3,8), положенному в основу вывода ассоциированного закона [1]).

Ниже мы применим формулы (3.35) для установления связи между τ^{ij} и e^p_{ij}.

Вычисление σ_2 с помощью ассоциированного закона

Рассмотрим величину σ_2 в случае, когда имеет место ассоциированный закон (3.10) или (3.11). Для простоты ограничимся случаем гладких поверхностей нагружения. Дальше под p^{ij} и e^p_{ij} можно подразумевать обычные компоненты соответствующих тензоров или только компоненты их девиаторов.

Нетрудно видеть, что ассоциированный закон, выражающий собой условие совпадения направления вектора e^p_{ij} с направлением нормали к поверхности нагружения $f = 0$ в соответствующем многомерном пространстве, может быть записан

[1]) Разъяснение постулируемого равенства (3.35) с помощью других эквивалентных постулатов, которым можно придать геометрическое толкование или которые можно рассматривать как своего рода физические условия, накладываемые на силы X_i для обеспечения экстремума σ в действительных процессах, и подробное описание этих постулатов можно найти в книге Г. Циглера «Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды», пер. с англ., Изд-во «Мир», 1966.

в виде следующего равенства в единичных векторах:

$$\frac{e^p_{ij}}{\sqrt{e^p_{kl}e^{pkl}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p^{ij}}}{\sqrt{\dfrac{\partial f}{\partial p^{mn}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{mn}}}}. \tag{3.37}$$

Для коэффициента $d\lambda/dt$ пропорциональности между e^p_{ij} и $\partial f/\partial p^{ij}$ можно написать формулу

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{e^p_{ij}}{\dfrac{\partial f}{\partial p^{ij}}} = \frac{\sqrt{e^p_{kl}e^{pkl}}}{\sqrt{\dfrac{\partial f}{\partial p^{mn}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{mn}}}}.$$

Соотношений (3.37) недостаточно, чтобы определить e^p_{ij} в функции p^{ij}, ε^p_{ij}, T и χ_s (они определяют в пространстве p^{ij} лишь направление вектора e^p_{ij}). Однако ими можно пользоваться для вычисления p^{ij} через e^p_{ij}, ε^p_{ij}, T, χ_s, если учитывать, что компоненты p^{ij} должны еще дополнительно удовлетворять условию

$$f(p^{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s) = 0,$$

так как мы рассматриваем процесс пластического нагружения.

Поэтому с помощью ассоциированного закона и уравнения поверхности нагружения можно, вообще говоря, вычислить [1])

$$\sigma_2 = \frac{1}{T}\tau^{ij}e^p_{ij} = \frac{p^{ij} - \rho\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}}}{T}e^p_{ij}$$

как функцию от e^p_{ij}, ε^p_{ij}, T, χ_s.

Функция диссипации для модели пластической среды по Мизесу [2])

Например, если функция нагружения определена формулой

$$f = \frac{1}{2}p^{ij}p_{ij} - C^2(\varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s)$$

и $\tau^{ij} = p^{ij}$, то с помощью ассоциированного закона и условия $f = 0$ получим

$$\left.\begin{aligned} p^{ij} &= C(\varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s)\frac{e^{pij}}{\sqrt{e^p_{kl}e^{pkl}}}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{T}p^{ij}e^p_{ij} = \frac{C(\varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s)}{T}\sqrt{e^p_{kl}e^{pkl}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

[1]) Если e^p_{ij} — девиаторные компоненты, то написанная формула для σ_2 сохраняет силу при условии, что пластические деформации происходят без изменения объема.

[2]) Модель пластического тела с такой функцией нагружения рассмотрена в § 4.

Пластическое деформирование как равновесный необратимый процесс

Существенным обстоятельством в развитых теориях пластичности является то, что σ_2 получается однородной функцией первого порядка относительно скоростей пластических деформаций в системе переменных e_{ij}^p, ε_{ij}^p, T, χ_s. Поэтому приращение энтропии за счет необратимости процесса пластического деформирования $d_i s_{\text{пласт}}$ оказывается не зависящим от скорости деформирования.

Вообще при построении моделей пластических тел во многих случаях в качестве основной посылки принимается, что в процессе пластического деформирования приращения энтропии, внутренней энергии, напряжений связаны только с *приращениями* пластических деформаций и не зависят от скоростей, с которыми осуществляются эти приращения. В связи с этим подчеркнем специально, что *процесс пластического деформирования можно рассматривать как необратимый процесс, происходящий сколь угодно медленно, и, следовательно, как необратимый процесс, составленный из последовательности равновесных состояний* [1]).

Существование функций нагружения и ассоциированного закона

Пусть σ_2 — заданная функция от e_{ij}^p, ε_{ij}^p, T и χ_s, причем $\sigma_2 = \tau^{ij} e_{ij}^p / T$. Предположим, что σ_2 — однородная функция первой степени от e_{ij}^p

$$e_{ij}^p \frac{\partial \sigma_2}{\partial e_{ij}^p} = \sigma_2 \tag{3.39}$$

и имеют место равенства

$$\frac{1}{T} \tau^{ij} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial e_{ij}^p}. \tag{3.40}$$

Покажем, что из этих предположений следует существование k независимых функций нагружения f_ω $(\tau^{ij}, \varepsilon_{ij}^p, T, \chi_s)$, $\omega = 1, 2, \ldots, k \geqslant 1$, таких, что при процессе пластического деформирования выполняются равенства

$$f_\omega = 0, \qquad \omega = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.41}$$

и, кроме этого, имеет место ассоциированный закон для компонент тензора скоростей пластических деформаций e_{ij}^p, представляющийся формулами вида

$$e_{ij}^p = \sum_{\omega=1}^{k} \lambda_\omega \frac{\partial f_\omega}{\partial \tau^{ij}}, \tag{3.42}$$

[1]) В некоторых книгах можно прочесть утверждение, что процессы, происходящие бесконечно медленно, обратимы. Очевидно, что в общем случае такое утверждение неверно.

где λ_ω — некоторые множители, которые связаны с неоднозначностью вида функций f_ω и должны быть дополнительно определены с учетом условия $\sigma_2 \geqslant 0$ и равенств (3.41). Формулы (3.42) аналогичны и фактически совпадают с формулами (3.20) (при $\tau^{ij} = p^{ij}$).

Доказательство утверждений, содержащихся в соотношениях (3.41) и (3.42), проведем в более удобных и общих обозначениях. Пусть $\sigma\,(x_i, \chi_s)$ — некоторая однородная функция первой степени от системы переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и, кроме этого, может зависеть произвольным образом от некоторых параметров χ_s, которые в нижеследующих математических рассуждениях рассматриваются как постоянные. В реальных процессах эти параметры могут изменяться. К числу таких параметров можно отнести температуру, параметры упрочнения и другие физические величины.

В связи с функцией σ определим компоненты X_i обобщенных сил по формулам

$$X_i = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.43}$$

где частные производные $\partial\sigma/\partial x_i$ взяты при постоянных χ_s, которые дальше не будем указывать в числе аргументов.

Легко убедиться, что, если $\sigma\,(x^i)$ — однородная функция первой степени, то n функций

$$X_i\,(x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

не являются независимыми функциями. В самом деле, покажем, что якобиан

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \right| = \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i\, \partial x^j} \right|$$

обращается в нуль.

В силу однородности функции $\sigma\,(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ имеем систему соотношений

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i\, \partial x^j}\, x^i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.44}$$

которая удовлетворяется при любых значениях переменных x^i. Эти соотношения для каждой системы значений x^i можно рассматривать как линейные уравнения относительно x^i с коэффициентами $\partial^2\sigma/\partial x^i \partial x^j$, определенными этими значениями x^i. Поэтому детерминант, составленный из этих коэффициентов для всевозможных значений x^i, не всех одновременно равных нулю, обязательно обращается в нуль.

Пусть для некоторой n-мерной области $\mathcal{D}$ значений x^i ранг матрицы [1])

$$\left\| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} \right\|$$

равен $n - k$, где $n > k \geqslant 1$. В этом случае среди n функций $X_i(x^j)$ в области $\mathcal{D}$ имеется ровно $n - k$ независимых функций, и, следовательно, в этом случае имеется k независимых соотношений вида

$$f_\omega(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0, \qquad \omega = 1, 2, \ldots, k \geqslant 1. \quad (3.45)$$

Наличие равенств (3.45) является доказательством первой части высказанного утверждения, выраженной равенствами (3.41).

Наряду с соотношением (3.44) рассмотрим систему линейных уравнений для переменных z^i:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} z^i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (3.46)$$

Очевидно, что общее решение однородной системы (3.46) можно представить в виде

$$z^i = \sum_{\omega=1}^{k} \lambda_\omega z^{\omega i}, \quad (3.47)$$

где λ_k — некоторые произвольные множители, а $z^{1i}, z^{2i}, \ldots, z^{ki}$ — система k линейно независимых решений (3.46), каждое из которых можно рассматривать как функцию переменных x^i.

Легко проверить, что решения $z^{\omega i}$ можно определить формулами

$$z^{\omega i}(x^j) = \frac{\partial f_\omega(X_1(x', \ldots, x^n), \ldots, X_n(x', \ldots, x^n))}{\partial X_i}, \quad \omega = 1, 2, \ldots, k, \quad (3.48)$$

так как при дифференцировании тождественно выполняющихся в переменных x^i соотношений $f_\omega = 0$ получим равенства

$$\frac{\partial f_\omega}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial x^j} = \frac{\partial f_\omega}{\partial X_i} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots n).$$

Отсюда следует, что формулы (3.48) дают решения системы (3.46).

---

[1]) Множество допустимых значений x^i может распадаться на несколько областей, для которых целое число $k \geqslant 1$ различно.

Из независимости функций $f_\alpha(X_i)$ следует, что система функций (3.48) образует полную систему k линейно независимых решений уравнений (3.46).

Сравнивая (3.44) и (3.46), видим, что для решений (3.46), равных x^i, верны общие формулы:

$$x^i = \sum_{\omega=1}^{k} \lambda_\omega \frac{\partial f_\omega}{\partial X_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.49}$$

Этим доказаны [1]) равенства (3.42).

Докажем теперь обратное предложение: из (3.43) и (3.49) следует, что функция $\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ с точностью до аддитивной постоянной по x^i — однородная функция первой степени от $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Положим

$$X_i x^i = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} x^i = \Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = X_j + x^i \frac{\partial X_i}{\partial x^j}.$$

На основании (3.49), (3.48), (3.47), (3.43)и (3.46) получим

$$x^i \frac{\partial X_i}{\partial x^j} = \sum_{\omega=1}^{k} \lambda_\omega \frac{\partial f_\omega}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial x^j} = 0,$$

что приводит к равенствам

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = X_j = \frac{\partial \sigma}{\partial x^j}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma = \Phi + \text{const} \tag{3.50}$$

и

$$\Phi = X_i x^i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} x^i = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} x^i. \tag{3.51}$$

Равенство (3.51) показывает, что функция $\Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — однородная функция первой степени от аргументов $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Постоянная в равенстве (3.50) равна нулю, если, кроме соотношений (3.43) и (3.49), имеет место дополнительное равенство $\sigma = x^i X_i$. В общем случае постоянная в (3.50) может от-

[1]) Возможность перехода от (3.43) к (3.49) при $k = 1$ в некоторых конкретных случаях была указана в заметке Д. Д. Ивлева (ДАН СССР, т. 176, № 5, 1967). Усовершенствование нашего первоначального общего доказательства при $k = 1$ на случай $k > 1$ дано Я. А. Каменяржем.

личаться от нуля и иметь вид y^iY_i, где y^i и Y_i — некоторые дополнительные к x^i и X_i переменные.

Предыдущие выводы получены при условии, что среди переменных x^i имеются отличные от нуля (т. е. в случае модели пластического тела действительно осуществляется процесс пластического деформирования).

Соотношения (3.45) показывают, что в точечном n-мерном пространстве с координатами X_i при некоторых данных значениях параметров χ_s допустимы только те точки X_i, которые принадлежат поверхностям с уравнениями $f_\omega(X_i) = 0$, $\omega = 1,2, \ldots, k \geqslant 0$. В частности, для точек X_i, для которых $f_\nu(X_i) = 0$, а $f_\omega(X_i) \neq 0$ для всех $\omega \neq \nu$, верны более простые формулы:

$$x^i = \lambda_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial X_i}.$$

Введем в рассмотрение всевозможные точки с конечными координатами X_i^*, не лежащие на каких-либо поверхностях $f_\omega(X_i) = 0$, соответствующих данной однородной функции первой степени

$$\sigma(x^i) = x^i X_i \tag{3.52}$$

при некоторых данных значениях χ_s. Очевидно, что точки X_i^* не могут реализоваться в действительном процессе при $x^i \neq 0$, но они могут реализоваться, когда все $x^i = 0$, т. е. $\sigma = 0$, и, следовательно, имеет место обратимость.

Точки поверхностей $f_\omega(X_i) = 0$ в пространстве X_i можно рассматривать как границы обратимых процессов. Напомним, что неравенство $\sigma \neq 0$ указывает на необратимость процесса. Таким образом, необратимые процессы соответствуют граничным точкам, удовлетворяющим равенствам

$$f_\omega(X_i, \chi_s) = 0.$$

Из (3.49) и (3.52) следует условие

$$\sigma = \sum_\omega \lambda_\omega X_i \frac{\partial f_\omega}{\partial X_i} \geqslant 0, \tag{3.53}$$

которое должно выполняться во всех точках X_i, удовлетворяющих (3.45), в частности, для каждой отдельной поверхности $f_j(X_i) = 0$.

При определенном выборе функций $f_j(X_i)$ условие (3.53) фиксирует знаки соответствующих функций λ_j. Множители λ_ω можно положить равными единице при соответствующем определенном выборе функций f_ω (см. сноску на стр. 439).

Принцип (3.9) и условие $\sigma_2 \geqslant 0$ (когда функция $\sigma_2(e_{ij}^p)$ — однородная функция первой степени) аналогичны по своей

природе и приводят к похожим выводам (знаки h_ω и λ_ω), однако они не являются полностью эквивалентными.

Итак, применительно к теории пластичности полученные выводы можно представить в следующем виде. Из термодинамических равенств

$$\tau^{ij} = T\frac{\partial \sigma_2}{\partial e^p_{ij}}, \qquad \sigma_2 = \sigma_2(e^p_{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s), \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial e^p_{ij}} e^p_{ij} = \sigma_2$$

в общем случае следует существование по крайней мере одной связи

$$f(\tau^{ij}, \varepsilon^p_{ij}, T, \chi_s) = 0, \tag{3.55}$$

причем

$$e^p_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau^{ij}}. \tag{3.56}$$

Соотношение (3.56) вместе с условием (3.55) совпадает с ассоциированным законом, только если в выражении для τ^{ij}

$$\tau^{ij} = p^{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}}$$

производная $\partial F/\partial \varepsilon^p_{ij}$ равна нулю или не зависит от ε^e_{ij} при $\rho = \rho_0 = \text{const}$, так как в этом случае

$$\frac{\partial}{\partial p^{kl}}\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\right) = 0.$$

Кроме этого, в общем случае дополнительные соотношения (постулат) (3.40) и ассоциированный закон (постулат) (3.10) не эквивалентны, если функция σ_2 не является однородной функцией первой степени от переменных e^p_{ij}.

§ 4. Примеры моделей пластических тел

В качестве одного из примеров моделей пластических сред рассмотрим следующую модель идеально-пластического тела.

Условие пластичности Треска

Примем, что частица среды ведет себя как упругое тело, если касательное напряжение p_τ на любой площадке меньше некоторой известной величины k, и как пластическое тело, если касательное напряжение хотя бы на одной площадке в рассматриваемой точке равняется k. Постоянная k вообще различна для

моделей различных конкретных материалов и может зависеть от температуры.

Таким образом, постулируется, что свойства пластичности наблюдаются в тех точках тела, в которых

$$p_{\tau\,\max} = k. \tag{4.1}$$

Условие (4.1) носит название условия пластичности Треска.

В пространстве напряжений уравнение поверхности текучести в этом случае имеет вид

$$f = \varphi(p^{ij}) - k = 0, \tag{4.2}$$

где $\varphi(p^{ij})$ представляет собой выражение максимального касательного напряжения $p_{\tau\max}$ в данной точке среды через компоненты тензора напряжений p^{ij}.

Площадки максимальных касательных напряжений

Найдем вид функции $\varphi(p^{ij})$ и ориентацию площадок, на которых в данной точке тела достигаются максимальные касательные напряжения. Обозначим через p^1, p^2, p^3 главные компоненты тензора напряжений. Рассмотрим сначала общий случай, когда p^1, p^2, p^3 различны между собой, а нумерация главных компонент тензора напряжений установлена так, что

$$p^1 > p^2 > p^3. \tag{4.3}$$

Составим выражение для квадрата касательного напряжения p_τ, действующего в рассматриваемой точке на произвольной площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$ (n_1, n_2, n_3)

$$p_\tau^2 = p_n^2 - p_{nn}^2. \tag{4.4}$$

Направив оси координат x^1, x^2, x^3 вдоль главных направлений тензора напряжений в данной точке, можем, очевидно (см. (3.20) гл. III), написать, что

$$p_n^2 = p^{i^2} n_i^2 \quad \text{и} \quad p_{nn}^2 = (p^i n_i^2)^2. \tag{4.5}$$

Сформулируем теперь задачу определения ориентации площадок, на которых в данной точке достигается $p_{\tau\max}$, как задачу отыскания таких направляющих косинусов нормали к площадке, для которых выражение

$$p_\tau^2 = p^{i^2} n_i^2 - (p^i n_i^2)^2 \tag{4.6}$$

при условии, что

$$\Phi(n^i) = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 = 0, \tag{4.7}$$

достигает максимального значения. Поставленная задача является обычной задачей об определении условного экстремума функции (4.6). Для решения этой задачи составим уравнения Эйлера

$$\frac{\partial (p_\tau^2 + \lambda \Phi)}{\partial n_i} = 0, \tag{4.8}$$

где λ — множитель Лагранжа. Уравнения (4.8) в раскрытом виде записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} p^{1^2} n_1 - 2\,(p^i n_i^2)\, p^1 n_1 + \lambda n_1 = 0, \\ p^{2^2} n_2 - 2\,(p^i n_i^2)\, p^2 n_2 + \lambda n_2 = 0, \\ p^{3^2} n_3 - 2\,(p^i n_i^2)\, p^3 n_3 + \lambda n_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Очевидно, что эта система уравнений при соблюдении условия (4.7) имеет решения:

$$\begin{aligned} &n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1, \quad \lambda = (p^3)^2, \\ &n_1 = n_3 = 0, \quad n_2 = 1, \quad \lambda = (p^2)^2, \\ &n_2 = n_3 = 0, \quad n_1 = 1, \quad \lambda = (p^1)^2. \end{aligned}$$

Эти решения следует отбросить, так как они соответствуют главным площадкам, на которых касательные напряжения отсутствуют, т. е. p_τ^2 достигает минимума.

Покажем теперь, что система уравнений (4.9), (4.7) не имеет решения, в которых все три направляющие косинуса n_i отличны от нуля. Уравнения (4.9) в этом случае можно записать в виде

$$p^{j^2} - 2\,(p^i n_i^2)\, p^j + \lambda = 0 \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{4.10}$$

Исключив из уравнений (4.10), соответствующих $j = 1,2$, параметр λ с помощью уравнения (4.10), соответствующего $j = 3$, получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} (p^{1^2} - p^{3^2}) - 2\,(p^i n_i^2)\,(p^1 - p^3) = 0, \\ (p^{2^2} - p^{3^2}) - 2\,(p^i n_i^2)\,(p^2 - p^3) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

которые в силу сделанного допущения (4.3) эквивалентны следующим равенствам:

$$\left.\begin{aligned} p^1 + p^3 - 2\,(p^i n_i^2) = 0, \\ p^2 + p^3 - 2\,(p^i n_i^2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Отсюда получаем

$$p^1 - p^2 = 0,$$

что противоречит неравенству (4.3). Поэтому необходимо искать такие решения системы уравнений (4.9), (4.7), в которых один из направляюших косинусов n_i равен нулю, а два других отличны от нуля.

Пусть $n_1 = 0$, а $n_2 \neq 0$ и $n_3 \neq 0$. Тогда первое из уравнений (4.9) удовлетворяется тождественно, а два других сводятся к уравнениям (4.10), соответствующим $j = 2, 3$. После исключения λ из этих уравнений и сокращения на $p^2 - p^3$ получим

$$p^2 + p^3 - 2(p^2 n_2^2 + p^3 n_3^2) = 0. \tag{4.13}$$

Из условия (4.7) в этом случае имеем

$$n_3^2 = 1 - n_2^2, \tag{4.14}$$

а n_2 должен определяться из уравнения

$$(p^2 - p^3)(1 - 2n_2^2) = 0. \tag{4.15}$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &n_1 = 0, \pm n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ &\text{Аналогично получаются решения} \\ &\pm n_1 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_2 = 0, \\ &\pm n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

Каждое из этих решений определяет две площадки, проходящие через одну из главных осей тензора напряжений и наклоненные к двум другим осям под углами 45° и 135°.

Подставляя (4.16) в (4.6), получим искомые экстремальные значения касательных напряжений

$$p_{\tau 1} = \pm \frac{p^2 - p^3}{2}, \quad p_{\tau 2} = \pm \frac{p^3 - p^1}{2}, \quad p_{\tau 3} = \pm \frac{p^1 - p^2}{2}. \tag{4.17}$$

Экстремальные касательные напряжения равны полуразностям главных напряжений, действующих на двух площадках, пересекающихся вдоль той из главных осей тензора напряжений, через которую проходит рассматриваемая площадка экстремального значения p_τ. При условии (4.3) наибольшим по величине будет напряжение

$$p_{\tau\,\max} = \pm \frac{p^1 - p^3}{2}. \tag{4.18}$$

Если, например,

$$p^1 = p^2 > p^3,$$

то поверхность тензора напряжений будет поверхностью вращения вокруг оси z. Все площадки, проходящие через ось z, будут главными. Площадок, на которых

$$p_\tau = \pm \frac{p^1 - p^3}{2} = p_{\tau\,\max},$$

будет бесконечно много. Все они будут касаться круглого конуса с вершиной в рассматриваемой точке, осью, совпадающей с осью z, и углом раствора 90°.

Поверхность текучести, соответствующая условию текучести Треска

Мы установили вид функциональной зависимости $p_{\tau\max} = \varphi(p^i)$, т. е. установили, как выражаются максимальные касательные напряжения, возникающие на некоторых определенных площадках, проходящих через данную точку, через главные компоненты тензора напряжений в этой точке. Теперь можно построить поверхность текучести

$$f = \varphi(p^i) - k = 0, \tag{4.19}$$

соответствующую условию текучести Треска, в трехмерном пространстве главных напряжений p^1, p^2, p^3.

Заметим, что главные компоненты p^i симметричного тензора напряжений известным образом выражаются через инварианты тензора напряжений. Поэтому, если потребуется, можно составить уравнение поверхности текучести, соответствующей условию пластичности Треска, и в шестимерном пространстве p^{ij}. Оно будет иметь достаточно сложный вид.

При всевозможных напряженных состояниях пластические свойства частицы согласно условию Треска могут проявиться только в том случае, когда выполнено хотя бы одно из следующих шести равенств:

$$\left.\begin{array}{ll} p^1 - p^2 = 2k, & p^1 - p^2 = -2k, \\ p^2 - p^3 = 2k, & p^2 - p^3 = -2k, \\ p^3 - p^1 = 2k, & p^3 - p^1 = -2k. \end{array}\right\} \tag{4.20}$$

Следовательно, граница упругой области $\mathscr{D}_p$ в пространстве главных напряжений p^1, p^2, p^3 образована шестью плоскостями (4.20). Эти плоскости, как видно из (4.20), попарно параллельны одной из координатных осей p^1, p^2, p^3 и составляют углы в 45° с двумя другими осями. Линии пересечения плоскостей (4.20) параллельны прямой $p^1 = p^2 = p^3$. Поэтому поверхность нагружения, соответствующая условию текучести Треска, представляет собой в пространстве главных

напряжений шестигранную призму, грани и ребра которой параллельны прямой $p^1 = p^2 = p^3$ (рис. 151).

Расстояния от начала координат $p^1 = p^2 = p^3 = 0$ до каждой из плоскостей (4.20) равны

$$\frac{2k}{\sqrt{|\operatorname{grad}\psi_i|^2}} = \sqrt{2}\,k,$$

где через $\psi_i(p^j) = 0$ обозначены уравнения (4.20) этих плоскостей.

Если вычислить координаты точек пересечения ребер призмы с плоскостью $p^1 + p^2 + p^3 = 0$, ортогональной прямой

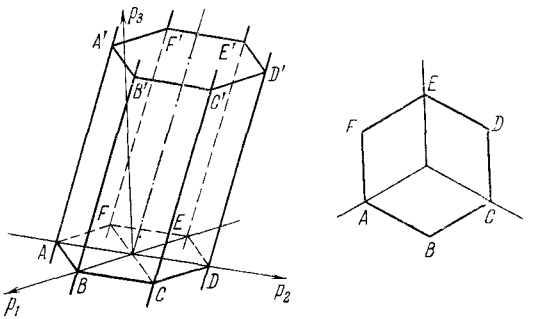


Рис. 151. Призма и шестиугольник Треска.

линии $p^1 = p^2 = p^3$, то окажется, что расстояния всех этих точек до начала координат $p^1 = p^2 = p^3 = 0$ одинаковы и равны $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}k$. Таким образом, в шестиугольник, представляющий собой сечение призмы плоскостью $p^1 + p^2 + p^3 = 0$, можно вписать окружность с центром в начале координат и описать вокруг него окружность с центром в той же точке. Поэтому сечение призмы плоскостью, ортогональной прямой $p^1 = p^2 = p^3$, представляет собой правильный шестиугольник, который называется шестиугольником Треска.

Упругая область представляет собой внутренность шестигранной призмы. При всестороннем сжатии или растяжении, когда напряженные состояния таковы, что $p^1 = p^2 = p^3$, среда ведет себя как упругое тело вплоть до бесконечно больших значений компонент p^i. Поверхность нагружения имеет ребра (в плоскости $p^1 + p^2 + p^3 = 0$ граница упругой области имеет угловые точки). Для идеально-пластического материала при постоянной температуре $k = \text{const} > 0$, призма Треска не меняется; для упрочняющегося материала, k из-

меняется при деформировании в зависимости от некоторых параметров χ_s, призма Треска может изменяться.

Функция нагружения Мизеса

Рассмотрим теперь вместо условия пластичности Треска функцию нагружения, предложенную Мизесом,

$$f(p^i) = (p^1 - p^2)^2 + (p^2 - p^3)^2 + (p^3 - p^1)^2 - 8k_1^2, \quad (4.21)$$

причем для идеально-пластических материалов k_1 — некоторое постоянное для данного материала размерное число или функция температуры.

Уравнение поверхности нагружения в главных осях тензора напряжений в этом случае будет иметь вид

$$f = (p^1 - p^2)^2 + (p^2 - p^3)^2 + (p^3 - p^1)^2 - 8k^2_1 = 0. \quad (4.22)$$

Для модели пластического тела по Мизесу вместо условия пластичности Треска можно принять, что пластические свойства частицы могут проявиться только тогда, когда выполнено условие (4.22). Условие пластичности (4.22) называется условием пластичности Мизеса [1]).

Физическая интерпретация условия пластичности Мизеса

Легко показать, что условие пластичности Мизеса эквивалентно условию, что пластические свойства частицы проявляются тогда, когда касательное напряжение $p_{\tau(n_i=1/\sqrt{3})}$ на так называемой октаэдрической площадке, проходящей через данную точку и равнонаклоненной ко всем трем главным осям p^1, p^2, p^3, достигает некоторой предельной величины, а именно:

$$p^2_{\tau(n_i=1/\sqrt{3})} = \frac{8}{9}k_1^2. \quad (4.23)$$

На самом деле, направляющие косинусы нормали $\boldsymbol{n}$ к такой площадке равны между собой, так как $\sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1$, то $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; поэтому из формулы (4.6) непосредственно следует

$$p^2_{\tau(n_i=1/\sqrt{3})} = \frac{2}{9}(p^{1^2} + p^{2^2} + p^{3^2} - p^1p^2 - p^1p^3 - p^2p^3) =$$
$$= \frac{1}{9}[(p^1 - p^2)^2 + (p^2 - p^3)^2 + (p^1 - p^3)^2] = \frac{4}{9}(p^2_{\tau 1} + p^2_{\tau 2} + p^2_{\tau 3}).$$

---

[1]) Это условие пластичности впервые было сформулировано Максвеллом в письме к Томсону, см С. П. Тимошенко, История науки о сопротивлении материалов, с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений, Гостехиздат, 1957.

Отсюда ясно, что условие (4.23) будет выполняться, если принято условие пластичности Мизеса (4.22), и наоборот.

Запись условия Мизеса через произвольные компоненты тензора напряжений

Запишем условие пластичности Мизеса через главные компоненты девиатора S тензора напряжений. Как известно, девиатором тензора напряжений называется тензор, компоненты которого S^{ij} определяются по формулам $S^{ij} = p^{ij} - {}^1/_3 \mathcal{P} g^{ij}$, где $\mathcal{P}$ — первый инвариант тензора напряжений.

Все три главные компоненты p^i тензора напряжений отличаются от соответствующих компонент S^i его девиатора на одно и то же постоянное число ${}^1/_3\mathcal{P}$. Поэтому условие пластичности Мизеса записывается через главные компоненты девиатора тензора напряжений так же, как и через главные компоненты p^1, p^2, p^3:

$$(S^1 - S^2)^2 + (S^2 - S^3)^2 + (S^3 - S^1)^2 - 8k_1^2 = 0. \quad (4.24)$$

Если в этом равенстве раскрыть скобки и сложить его с тождественно равным нулю квадратом первого инварианта девиатора тензора напряжений, то оно примет вид

$$S^{1^2} + S^{2^2} + S^{3^2} = \frac{8}{3} k_1^2$$

или

$$I_2(S) = \frac{8}{3} k_1^2, \quad (4.25)$$

где $I_2(S) = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_2{}^3 = S^{ij} S_{ij}$ — второй инвариант девиатора напряжений.

Поэтому условие пластичности Мизеса может быть записано следующим образом через произвольные (не главные) компоненты тензора напряжений:

$$f = \left(p^{ij} - \frac{\mathcal{P}}{3} g^{ij}\right)\left(p_{ij} - \frac{\mathcal{P}}{3} g_{ij}\right) - \frac{8}{3} k_1^2 = 0, \quad (4.26)$$

где $\mathcal{P} = p^1 + p^2 + p^3 = p^{ij} g_{ij}$ — первый инвариант тензора напряжений.

Геометрическое построение поверхности текучести Мизеса

С геометрической точки зрения поверхность нагружения (4.22) в пространстве главных напряжений представляет собой поверхность круглого цилиндра с образующими, параллельными прямой $p^1 = p^2 = p^3$.

В силу того, что первый инвариант девиатора равен нулю, вектор с компонентами S^1, S^2, S^3 в пространстве главных напряжений p^1, p^2, p^3 всегда должен лежать в плоскости

$p^1 + p^2 + p^3 = 0$, которая представляет собой плоскость, ортогональную прямой $p^1 = p^2 = p^3$. По уравнению (4.25) модуль

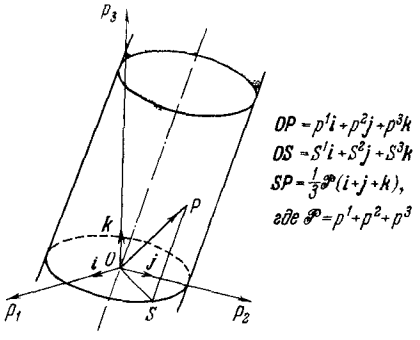


Рис. 152. Цилиндрическая поверхность нагружения Мизеса и разложение вектора напряжений OP на девиаторную OS и шаровую SP составляющие.

этого вектора постоянен, поэтому нормальное сечение цилиндрической поверхности нагружения Мизеса представляет собой круг радиуса $2\sqrt{2/3}\,k_1$ (рис. 152).

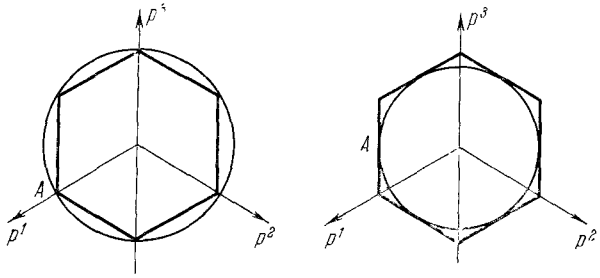
Об определении постоянных величин в условиях пластичности Треска и Мизеса с помощью эксперимента

Константы k и k_1 в условиях пластичности Треска и Мизеса можно определять с помощью эксперимента. Пусть, например, мы провели эксперимент на простое растяжение, так что p^2 и p^3 равны нулю, а $p^1 \neq 0$, и определили значение $p^1 = p^{1*}$, при котором наступает пластичность. Через точку p^{1*}, 0, 0 можно провести цилиндр Мизеса или призму Треска, в зависимости от того, какое условие пластичности мы хотим принять для рассматриваемого материала. Для констант k и k_1 будем соответственно иметь $p^{1*} = 2k$ по (4.20) или $p^{1*} = 2k_1$ по (4.22). Взаимное расположение круга Мизеса и шестиугольника Треска, построенных для данного материала с помощью эксперимента на простое растяжение, показано на рис. 153, *а*. Теоретические значения пределов текучести при других напряженных состояниях, получаемые с помощью условия Мизеса, будут отличаться от вычисленных из условия Треска.

Чтобы из двух обсуждаемых условий текучести выбрать более подходящее для данного материала, нужно провести дополнительный эксперимент, в котором осуществлялось бы не простое растяжение или сжатие, а какой-либо другой тип напряженного состояния.

Ясно, что можно было бы с самого начала определять предел текучести в опыте с некоторым произвольно выбранным

путем нагружения, найти соответствующую точку поверхности текучести в пространстве напряжений и провести через нее поверхность Мизеса или поверхность Треска. Так, если бы мы произвели эксперимент на чистый сдвиг (который осуществляется, например, при кручении тонкостенных цилиндрических труб), то, принимая или условие Мизеса, или условие



Точка A – состояние простого растяжения *а)*

Точка A – состояние чистого сдвига *б)*

Рис. 153. Взаимное расположение круга Мизеса и шестиугольника Треска, построенных с помощью опытов (*а*) на простое растяжение, $k_1 = k$, и (*б*) чистый сдвиг $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} k$.

Треска, получили бы соответственно окружность или шестиугольник, показанные на рис. 153, *б*. Для k или k_1 в этом случае имели бы $k = \tau^*$ или $k_1 = \tau^* \sqrt{3}/2$, где τ^* — предел текучести данного материала при чистом сдвиге.

О полной системе уравнений равновесия идеально-пластического тела с условием текучести Мизеса

В качестве примера рассмотрим полную систему уравнений для определения напряженного и деформированного состояний, возникающих при изотермическом равновесии идеально-пластического тела, удовлетворяющего условию пластичности Мизеса.

Во-первых, в эту систему уравнений входят три уравнения равновесия

$$\nabla_i p^{ij} = 0 \tag{4.27}$$

и шесть соотношений между полными, упругими и пластическими деформациями

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \tag{4.28}$$

В упругой области при отсутствии разгрузок из пластических состояний в предыдущей истории имеем

$$\varepsilon_{ij}^{p} = 0 \tag{4.29}$$

и уравнения равновесия вместе, например, с законом Гука и соотношениями, выражающими компоненты тензора деформаций через компоненты вектора перемещений, представляют собой полную систему уравнений для определения p^{ij} и ε_{ij}^{e}.

В пластической области

$$I_2(S) = \frac{8}{3} k_1^2, \qquad dI_2(S) = 0 \tag{4.30}$$

$d\varepsilon_{ij}^{p}$ в общем случае не равны нулю, для замыкания системы уравнений можно воспользоваться ассоциированным законом

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = 2d\lambda \left(p_{ij} - \frac{1}{3} \mathcal{P} g_{ij} \right), \tag{4.31}$$

который представляет собой систему дифференциальных уравнений, и условием пластичности.

Для определения p^{ij} и ε_{ij}^{p} в общем случае получается система связанных между собой дифференциальных уравнений. Однако встречаются важные простые случаи, когда задачу об определении напряженного состояния идеально-пластического тела можно решить независимо от задачи об определении остаточных пластических деформаций.

Плоские напряженное и деформированное состояния как примеры статически определимых пластических задач

Например, допустим, что мы имеем задачу об определении плоского напряженного состояния находящегося в равновесии пластического тела. Тогда, согласно определению плоского напряженного состояния, оси декартовой системы координат x, y, z всегда можно выбрать так, чтобы $p_{33} = p_{23} = p_{13} = 0$ ($\boldsymbol{p}^3 = 0$), а p^{11}, p^{22} и p^{12} были бы вообще отличными от нуля и зависели бы только [1]) от x и y.

Уравнения равновесия в этом случае сводятся к следующим двум уравнениям:

$$\frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{12}}{\partial y} = -X, \qquad \frac{\partial p^{12}}{\partial x} + \frac{\partial p^{22}}{\partial y} = -Y, \tag{4.32}$$

где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — компоненты массовых сил. Если к этим двум уравнениям добавить условие пластичности

$$f(p^{11}, p^{12}, p^{22}, k_1, \ldots, k_s) = 0,$$

[1]) См. стр. 481.

то система уравнений для определения трех отличных от нуля компонент тензора напряжений p^{11}, p^{12} и p^{22} в пластической области становится замкнутой. Отсюда следует, что если дополнительные краевые условия заданы в напряжениях, то в случае плоского напряженного состояния можно определить значения p^{ij} независимо от решения задачи об определении деформаций.

Другим примером использования условия пластичности для замыкания системы уравнений в напряжениях может служить случай плоского деформированного состояния пластического тела, находящегося в равновесии под действием заданной на его поверхности системы напряжений $\boldsymbol{p}_n$. В этом случае по определению плоского деформированного состояния оси координат x, y, z можно выбрать так, чтобы $\varepsilon^p_{33} = \varepsilon^p_{13} = \varepsilon^p_{23} = 0$, а ε^p_{11}, ε^p_{22} и ε^p_{21} были бы вообще отличными от нуля и зависели только от x и y.

Заметим, что случаи плоского напряженного и плоского деформированного состояний вообще не совпадают друг с другом.

Так, например, в случае плоского напряженного состояния из ассоциированного закона в форме (4.31) вытекает, что $d\varepsilon^p_{23} = d\varepsilon^p_{13} = 0$, но $3d\varepsilon^p_{33} = -2d\lambda\,(p^{11} + p^{22})$, т. е. $d\varepsilon^p_{33} \neq 0$ в общем случае. Наоборот, для плоского деформированного состояния $d\varepsilon^p_{33} = 0$ и

$$p^{33} = \frac{1}{2}(p^{11} + p^{22}), \tag{4.33}$$

т. е. в общем случае $p^{33} \neq 0$. Из (4.31) вытекает, что в случае плоского деформированного состояния могут быть отличными от нуля четыре компоненты тензора напряжений p^{11}, p^{22}, p^{12} и p^{33}, каждая из которых может быть функцией только x и y. Условие равновесия вдоль оси z удовлетворяется тождественно при отсутствии составляющих внешних массовых сил вдоль оси z. Для определения четырех компонент тензора напряжений имеем четыре уравнения: два уравнения равновесия (4.32), условие пластичности $f(p^{ij}, k_1, \ldots, k_s) = 0$ и связь (4.33) между компонентами тензора напряжений.

§ 5. Задача о кручении цилиндрического стержня из упруго-пластического материала без упрочнения

Рассмотрим задачу о кручении цилиндрического стержня произвольного поперечного сечения из упруго-идеально-пластического материала. Выберем оси координат x, y и z так, как показано на рис. 154.

Примем для простоты, что отсутствуют внешние массовые силы и что боковая поверхность S стержня свободна от нагрузок, т. е.

$$p_n = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{5.1}$$

На торцах Σ_1 и Σ_2 стержня $p_n = \mp p_z \neq 0$, но $p_{33} = 0$, т. е. на торцах стержня распределены касательные напряжения p_{13} и p_{23}, под действием которых стержень находится в равновесии. Распределение внешних поверхностных сил на Σ_1 и Σ_2 определим согласно построенному решению, а сейчас отметим, что система поверхностных сил на Σ_2 сводится к моменту $\boldsymbol{M}$, а на Σ_1 — к моменту $-\boldsymbol{M}$.

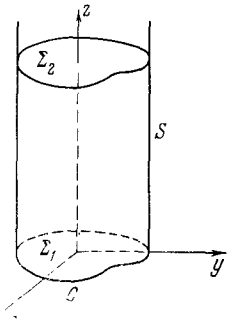


Рис. 154. Обозначения и выбор осей координат в задаче о кручении цилиндрического стержня из упруго-пластического материала.

Если значение крутящего момента $\boldsymbol{M}$ достаточно велико, то в некоторых частях стержня или во всем стержне могут возникнуть пластические деформации. Условие пластичности, которому удовлетворяет материал стержня, рассмотрим ниже.

Требуется определить напряженное состояние стержня и возникающие в нем перемещения. Дальнейшие предположения позволят нам отделить задачу об определении распределения напряжений от задачи об определении перемещений.

Предположения о компонентах тензора напряжений

Рассмотрим решение этой задачи, аналогичное решению уже изученной выше задачи о кручении стержня из упругого материала (см. § 7, гл IX). Примем, что всюду внутри и на поверхности стержня

$$p_{11} = p_{12} = p_{22} = p_{33} = 0 \tag{5.2}$$

и только p_{13} и p_{23} отличны от нуля и подлежат определению.

При отсутствии внешних массовых сил из уравнений равновесия в проекциях на оси x и y вытекает, что компоненты p_{13} и p_{23} не должны зависеть от z, а уравнение в проекции на ось z принимает вид

$$\frac{\partial p_{13}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial p_{23}(x, y)}{\partial y} = 0. \tag{5.3}$$

Функция напряжений

Это уравнение удовлетворится тождественно, если ввести функцию напряжений $\mathcal{F}(x, y)$, через которую компоненты p_{13} и p_{23} представляются по формулам

$$p_{13} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \qquad p_{23} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}. \tag{5.4}$$

Легко видеть, что граничное условие (5.1) на боковой поверхности S стержня в проекциях на оси x и y в силу равенств (5.2) и выбора осей координат выполнится тождественно, а в проекции на ось z сведется к условию

$$p_{13}\cos(\boldsymbol{n}, x)+p_{23}\cos(\boldsymbol{n}, y)=\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, x)-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n}, y)=$$

$$=\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\cos(\boldsymbol{s}, y)+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\cos(\boldsymbol{s}, x)=\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}=0 \text{ или } \mathcal{F}=\text{const} \quad (5.5')$$

на контуре C поперечного сечения стержня [1]). Граничные условия на торцах стержня рассмотрим ниже.

Если стержень имеет односвязное поперечное сечение, то, так как функция $\mathcal{F}(x, y)$ определена с точностью до аддитивной постоянной, условие (5.5′) можно написать в виде

$$\mathcal{F}(x, y)=0 \quad \text{на} \quad C. \qquad (5.5)$$

Если сечение стержня ограничено несколькими замкнутыми граничными контурами, то на одном из них можно принять, что $\mathcal{F}=0$, а на других $\mathcal{F}=C_k$, где C_k — некоторые постоянные, которые нужно определять в процессе решения задачи. Ниже ради простоты рассмотрим задачу о кручении стержня односвязного поперечного сечения.

Рассмотрим теперь условия пластичности, которым может удовлетворять материал стержня.

Условие пластичности

В силу сделанного предположения (5.2) сумма $p_{13}^2+p_{23}^2$ является квадратом величины полного касательного напряжения на поперечных сечениях стержня — площадках с нормалью, параллельной оси z. По условию идеальной пластичности примем, что материал стержня находится в упругом состоянии, если

$$p_{13}^2+p_{23}^2<k_0^2,$$

и в пластическом состоянии, когда

$$p_{13}^2+p_{23}^2=k_0^2, \qquad (5.6)$$

где k_0 — заданная величина, постоянная для данного материала.

Условия пластичности Треска и Мизеса для рассматриваемой задачи

Покажем, что условие пластичности (5.6) для рассматриваемой частной задачи совпадает по форме как с условием пластичности Треска, так и с условием пластичности Мизеса.

Условие пластичности Треска записывается через главные компоненты тензора напряжений $p_1>p_2>p_3$ следующим

[1]) Аналогичное условие получено в § 7 гл. IX.

образом:

$$p_{\tau\,\max} = \frac{p_1 - p_3}{2} = k, \tag{5.7}$$

где k — заданная постоянная, равная максимально допустимому касательному напряжению.

Главные компоненты тензора напряжений являются корнями векового уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & p_{13} \\ 0 & \lambda & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - (p_{13}^2 + p_{23}^2)\lambda = 0. \tag{5.8}$$

Отсюда, так как $p_1 > p_2 > p_3$,

$$p_1 = \sqrt{p_{13}^2 + p_{23}^2}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -\sqrt{p_{13}^2 + p_{23}^2}. \tag{5.9}$$

Следовательно, в данной задаче условие Треска имеет вид

$$p_{\tau\,\max} = \sqrt{p_{13}^2 + p_{23}^2} = k \tag{5.10}$$

и совпадает по форме с условием пластичности (5.6).

Рассмотрим теперь условие пластичности Мизеса

$$\left(p^{ij} - \frac{\mathcal{P}}{3} g^{ij}\right)\left(p_{ij} - \frac{\mathcal{P}}{3} g_{ij}\right) = \frac{8}{3} k_1^2. \tag{5.11}$$

Так как в нашей задаче $\mathcal{P} = 0$, то это условие приобретает вид

$$p^{ij} p_{ij} = 2(p_{13}^2 + p_{23}^2) = \frac{8}{3} k_1^2,$$

т. е. и в этом случае получилось условие вида (5.6). Можно рассмотреть данную задачу о кручении для стержней из различных материалов, для стержня из материала, моделирующегося условием Треска, для стержня, моделирующегося условием Мизеса, и для стержня из изотропного материала, моделирующегося еще другим условием пластичности.

Очевидно, что для изотропного идеально-пластического тела любое условие пластичности, имеющее в этом случае вид

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0, \tag{5.12}$$

в этой задаче сведется к равенству $I_2 = p_{13}{}^2 + p_{23}{}^2 = \text{const}$, так как при кручении $I_1 = I_3 = 0$.

Таким образом, в задаче о кручении условие пластичности Треска (5.10), условие Мизеса (5.11) и условие пластичности общего вида (5.12) для изотропного материала в выбранной для

решения системе координат имеют *одинаковую* форму:

$$p_{13}^2 + p_{23}^2 = \text{const}.$$

Для материала, подчиняющегося условию пластичности Треска,

$$\text{const} = k^2 = p_{\tau\,\max}^2,$$

а для материала, подчиняющегося условию пластичности Мизеса,

$$\text{const} = \frac{4}{3} k_1^2 = \frac{3}{2} p_{\tau\,\text{окт.max}}^2.$$

В рассматриваемой задаче для одного и того же стержня всегда имеет место равенство

$$\frac{3}{2} p_{\tau\,\text{окт.max}}^2 = p_{\tau\,\max}^2. \tag{5.13}$$

Для стержня, подчиняющегося условию пластичности Треска, задается $p_{\tau\max}^2$, для другого стержня, подчиняющегося условию пластичности Мизеса, задается $p_{\tau\text{окт.max}}^2$. В рассматриваемой частной задаче условия Мизеса и Треска для разных стержней совпадают при наличии равенства (5.13), равносильного равенству $k^2 = {}^4/_3 k_1^2$ между задаваемыми в разных моделях характерными физическими постоянными.

Система уравнений для решения задачи в пластической области

Для решения задачи в случае, когда весь материал стержня находится в пластическом состоянии, имеем формулы (5.4), условие пластичности (5.6) и граничное условие (5.5). Эти условия позволяют определить компоненты p_{13} и p_{23} в пластической области независимо от определения пластических деформаций. Рассматриваемая задача, так же как и задачи о плоском напряженном и плоском деформированном состояниях (см. § 4), представляет собой пример статически определимой пластической задачи.

При наличии равенства (5.13) между постоянными в условиях пластичности поверхности нагружения Треска и Мизеса касаются в точке, отвечающей решению рассматриваемой задачи (см. рис. 153, *б*), поэтому не только напряженное, но и деформированное состояние стержня при использовании ассоциированного закона будет одним и тем же, как в том случае, когда материал скручиваемого стержня описывается условием пластичности Треска, так и в том случае, когда материал стержня подчиняется условию пластичности Мизеса.

Постановка задачи об определении напряженного состояния в пластической области через функцию напряжений

Для решения задачи об определении напряженного состояния стержня, когда материал стержня находится в пластическом состоянии, с помощью условия пластичности (5.6) получим уравнение для определения функции напряжения $\mathcal{F}(x, y)$. Это уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 = p^2_{\tau\,\max} = \text{const}$$

или

$$|\operatorname{grad} \mathcal{F}|^2 = p^2_{\tau\,\max} = \text{const}. \tag{5.14}$$

Уравнение (5.14) и граничное условие (5.5) полностью определяют функцию напряжений для стержня с данным односвязным поперечным сечением, когда материал всего стержня находится в пластическом состоянии.

Поверхность равного ската как решение задачи об определении $\mathcal{F}(x, y)$ в пластической области

В самом деле, для определения функции напряжений в этом случае необходимо найти такую поверхность

$$z = \mathcal{F}(x, y),$$

опирающуюся на контур C, для которой

$$|\operatorname{grad} \mathcal{F}|^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \beta = \text{const},$$

где n — направление нормали к линиям равного уровня $z = \text{const}$ на плоскости xy, а β — угол между касательной плоскостью к поверхности $z = \mathcal{F}(x, y)$ и плоскостью xy (рис. 155).

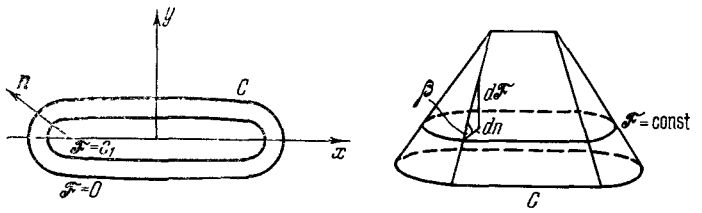


Рис. 155. Линии равного уровня поверхности $z = \mathcal{F}(x, y)$ в проекции на плоскость xy и поверхность равного ската $z = \mathcal{F}(x, y)$.

Отсюда ясно, что искомая поверхность $z = \mathcal{F}(x, y)$ является поверхностью с постоянным углом ската $\beta = \text{const}$, которую можно построить на контуре поперечного сечения C.

Песчаная аналогия

Для построения такой поверхности можно воспользоваться песчаной аналогией. Эта аналогия основана на том, что внешняя поверхность кучи тяжелой сыпучей среды (песка) с сухим трением между частицами, насыпанной на горизонтальную площадку, ограниченную контуром C, и находящейся в предельном равновесии, представляет собой поверхность с постоянным углом ската, равным углу трения.

Таким образом, функцию напряжений $\mathcal{F}(x, y)$ можно экспериментально определить с помощью опытов с сыпучими средами. Решения, отвечающие различным значениям $\operatorname{tg}^2\mu$ (коэффициентам трения), отличаются только масштабным множителем для координаты $z = \mathcal{F}(x, y)$. Значение постоянной $\operatorname{tg}^2\beta$ можно рассматривать как величину, определяющую масштабы по оси z для поверхности $z = \mathcal{F}(x, y)$.

Свойства линий равного уровня $\mathcal{F}(x, y) = \text{const}$ на плоскости xy

Следует отметить, что в области пластического состояния проекции линий равного уровня $\mathcal{F}(x, y) = \text{const}$ на плоскость xy образуют в этой плоскости семейство кривых, равноотстоящих друг от друга, так как производная от функции нагружения по нормали к кривой $\mathcal{F}(x, y) = \text{const}$ в плоскости xy, согласно (5.14), постоянна во всех точках этой кривой (рис. 156).

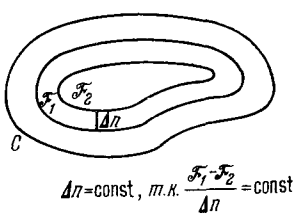


Рис. 156. Вид проекций линий равного уровня $z = \mathcal{F}(x, y) = \text{const}$ на плоскость xy

Такого рода заключение можно сделать для гладких контуров C, в каждой точке которых вектор нормали $\boldsymbol{n}$ определен однозначно. Если же контур C имеет угловые точки — входящие или выходящие углы, то такой контур целесообразно рассматривать как предел соответствующих гладких контуров C_i. В пределе поверхности $z = \mathcal{F}(x, y)$ вблизи угловых точек контура C может иметь ребра, на которых касательные плоскости при подходе с разных сторон имеют разные направления, подобно пирамиде с основанием в виде прямолинейного многоугольника.

Эти свойства решений хорошо иллюстрировать опытным путем на задачах о равновесии песка. При этом необходимо иметь в виду, что при решении задачи о кручении упруго-пластического стержня в сечении стержня получаются, вообще говоря, упругая и пластическая области. Ниже будет показано, что вблизи выступающих угловых точек контура C всегда получается упругая область.

Определение компонент тензора напряжений

Из формул (5.4), верных как в пластической, так и в упругой областях, сразу следует, что в плоскости xy два вектора

$$\boldsymbol{p}_\tau = p_{13}\boldsymbol{i} + p_{23}\boldsymbol{j}$$

и

$$\operatorname{grad} \mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

взаимно перпендикулярны.

Отсюда ясно, что вектор $\boldsymbol{p}_\tau$, параллельный плоскости xy, направлен по касательной к линиям равного уровня $\mathcal{F}(x, y) = \text{const}$ в плоскости xy. Кроме того, в пластической области вектор $\boldsymbol{p}_\tau$ имеет постоянную величину, равную $p_{\tau\max}$. Очевидно, что направление вектора $\boldsymbol{p}_\tau$ определяется направлением внешнего закручивающего момента $\boldsymbol{M}$. Таким образом, компоненты p_{13} и p_{23} всегда можно определить в пластической области, если известна поверхность $z = \mathcal{F}(x, y)$.

Постановка смешанной упруго-пластической задачи

Рассмотрим теперь задачу об определении напряженного состояния стержня в том случае, когда величина скручивающего момента M такова, что часть материала стержня ведет себя, как упругое тело. Границу упругой области в поперечном сечении стержня обозначим через $\mathcal{L}$ (рис. 157). Вид кривой $\mathcal{L}$ необходимо определить из решения задачи. В общем случае упругая область может состоять из нескольких раздельных частей и содержать некоторые участки граничного контура C.

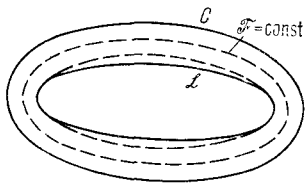


Рис. 157. Поперечное сечение скручиваемого стержня с упругим ядром внутри и линиями равного уровня $\mathcal{F} = \text{const}$.

В пластической области для напряжений будет справедливо изложенное выше решение, которое не зависит от вида упругого ядра, если упругая область не включает в себя точек контура C. Функция напряжений $\mathcal{F}(x, y)$ в пластической области удовлетворяет уравнению (5.14) и граничному условию $\mathcal{F} = 0$ на C.

Для расчета напряжений и перемещений внутри упругой области воспользуемся результатами исследования задачи о кручении упругого стержня, рассмотренной в § 7 гл. IX. Внутри упругой области функция напряжений $\mathcal{F}(x, y)$, введенная по формулам (5.4), должна удовлетворять уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} = -2\alpha\mu, \qquad (5.15)$$

где α — угол закрутки стержня, а μ — коэффициент Ламе материала стержня (см. (7.23) и (7.25) гл. IX).

Из непрерывности распределения компонент напряжений p_{13} и p_{23} в стержне следует, что на границе $\mathscr{L}$ между упругой и пластической областями должны выполняться равенства

$$\frac{\partial \mathscr{F}^e}{\partial x} = \frac{\partial \mathscr{F}^p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \mathscr{F}^e}{\partial y} = \frac{\partial \mathscr{F}^p}{\partial y}, \tag{5.16}$$

где через $\mathscr{F}^e$ и $\mathscr{F}^p$ обозначены функции напряжений в упругой и пластической областях соответственно. Из (5.16) вытекает, что на границе $\mathscr{L}$ должно выполняться равенство

$$\mathscr{F}^e = \mathscr{F}^p + \text{const},$$

или, так как постоянная для определения функции напряжений в упругой области несущественна, на границе $\mathscr{L}$ значения функций напряжений $\mathscr{F}^e$ и $\mathscr{F}^p$ можно считать совпадающими,

$$\mathscr{F}^e = \mathscr{F}^p \quad \text{на} \quad \mathscr{L}. \tag{5.17}$$

Таким образом, определение напряженного состояния в скручиваемом упруго-пластическом стержне для данного угла закручивания упругого ядра α сводится к следующей математической задаче: требуется найти функцию $\mathscr{F}(x, y)$, которая обращается в нуль на контуре C и непрерывна со своими первыми производными всюду внутри C, причем $|\operatorname{grad}\mathscr{F}| \leqslant k_0$; там, где $|\operatorname{grad}\mathscr{F}| < k_0$, функция $\mathscr{F}(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Пуассона (5.15).

Главный вектор сил, приложенных на торцах, равен нулю

Решение поставленной задачи действительно соответствует кручению стержня под действием только внешнего момента $\boldsymbol{M}$, так как главный вектор $\boldsymbol{R}$ сил, действующих в поперечном сечении стержня Σ, равен нулю. В самом деле, имеем

$$\boldsymbol{R} = \int_\Sigma \boldsymbol{p}_\tau \, d\sigma = \int_\Sigma (p_{13}\boldsymbol{i} + p_{23}\boldsymbol{j})\, d\sigma = \int_\Sigma \left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y}\boldsymbol{i} - \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x}\boldsymbol{j}\right) d\sigma =$$

$$= \int_C \mathscr{F}\,[\cos(\boldsymbol{n}, y)\,\boldsymbol{i} - \cos(\boldsymbol{n}, x)\,\boldsymbol{j}]\, ds = 0$$

в силу граничного условия $\mathscr{F} = 0$ на контуре C.

Формула для величины крутящего момента

Рассмотрим величину крутящего момента M. Согласно формулам (5.4) имеем

$$M = \int_\Sigma (x p_{23} - y p_{13})\, d\sigma = -\int_\Sigma \left(x\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y}\right) d\sigma.$$

Так как

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} y = \frac{\partial \mathcal{F} x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F} y}{\partial y} - 2\mathcal{F},$$

то

$$M = -\int_C \mathcal{F} [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] \, ds + 2\int_\Sigma \mathcal{F} \, d\sigma.$$

В случае односвязного поперечного сечения Σ по условию $\mathcal{F} = 0$ на контуре C, и получается окончательная формула, аналогичная формуле (7.28) гл. IX:

$$M = 2\int_\Sigma \mathcal{F} \, d\sigma. \tag{5.18}$$

Эта формула показывает, что величину M можно истолковать как двойной объем, ограниченный поверхностью $z = \mathcal{F}(x, y)$, опирающейся на плоскую площадку поперечного сечения стержня Σ в плоскости $z = 0$.

Поставленная смешанная упруго-пластическая задача об определении напряженного состояния скручиваемого стержня — сложная математическая задача. Аналитическое решение этой задачи получено только для стержней, имеющих некоторые простые формы поперечных сечений. В частности, легко решается задача в случае стержня круглого поперечного сечения (см. ниже стр. 479).

О решении смешанной задачи с помощью песчано-мембранной аналогии

В общем случае задача допускает экспериментальное решение с помощью песчано-мембранной аналогии. Действительно, в упругой области задача об определении функции напряжений допускает аналогию с задачей об определении прогиба мембраны с постоянным натяжением T, возникающего под действием равномерно распределенной по ее поверхности нагрузки интенсивности q, когда T и q вообще подобраны так, что

$$2\mu\alpha = \frac{q}{Th},$$

и мембрана защемлена по контуру C, совпадающему с контуром поперечного сечения стержня (см. § 7 гл. IX). В пластической области рассматриваемая задача допускает песчаную аналогию.

Поэтому для решения упруго-пластической задачи можно провести следующий опыт, указанный А. Надаи (рис. 158). На горизонтально положенный кусок картона, форма которого совпадает с поперечным сечением скручиваемого стержня,

насыпается сыпучая среда так, чтобы образовалась поверхность с постоянным углом ската. Эту поверхность сыпучей среды можно зафиксировать с помощью жесткой крыши из какого-либо прозрачного материала. Основание этой крыши затягивается мембраной, внешняя сторона которой подвергается действию равномерно распределенного давления. При некотором значении давления мембрана начнет касаться крыши, а затем с ростом давления все большая и большая часть мембраны будет прикасаться и фиксироваться на крыше.

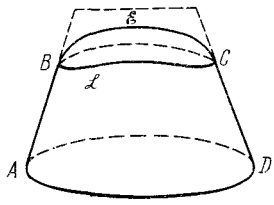


Рис. 158. Поверхность $z = \mathcal{F}(x, y)$ состоит из части жесткой крыши (схематически AB и CD) и части мембраны $B\,\mathcal{C}\,C$. Линия $\mathcal{L}$ соответствует границе между упругой и пластической областями.

Свободная часть мембраны и часть мембраны, прикасающаяся к крыше, образуют поверхность, соответствующую функции напряжений $\mathcal{F}(x, y)$ частично пластического стержня. Граница между упругой и пластической областью в плоскости поперечного сечения xy стержня представится проекцией на плоскость xy линии $\mathcal{L}$, лежащей на жесткой крыше и отделяющей часть мембраны, не прилегающую к жесткой крыше.

Величина соответствующего крутящего момента, согласно формуле (5.18), с точностью до масштабного множителя равняется удвоенному объему пространства между горизонтальной плоскостью xy и экспериментально полученной поверхностью функции напряжений $\mathcal{F}(x, y)$. Можно отметить два характерных значения величины M крутящего момента, а именно: предельное значение момента, когда мембрана впервые касается крыши в некоторой точке, $M_{\text{пред}}$, соответствующее началу перехода материала в пластическое состояние, и критическое значение момента $M_{\text{кр}}$, когда вся мембрана приляжет к поверхности равного ската и материал всего стержня окажется в пластическом состоянии.

С помощью песчано-мембранной аналогии, в частности, можно усмотреть, что при любом конечном угле закрутки α в окрестности выступающих углов (рис. 159) контура C всегда будет оставаться часть упругой области. Действительно, при конечном значении распределенной по поверхности мембраны нагрузки q мембрана будет огибать выступающие ребра крыши.

Присутствие входящих углов (рис. 160) на контуре C приведет, очевидно, к тому, что при сколь угодно малой нагрузке q (угле α) мембрана примкнет к входящему ребру поверхности $z = \mathcal{F}(x, y)$, и в окрестности такого угла мгновенно возникнет пластическая область. Вблизи входящих углов в упругом ре-

шении возникают большие (бесконечные) напряжения. Появление пластической области обеспечивает ограниченность

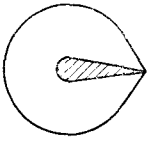


Рис. 159. Поперечное сечение стержня с выступающим углом.

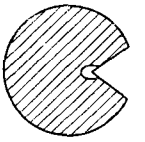


Рис. 160. Поперечное сечение стержня с входящим углом.

напряжений. При малых углах закрутки область пластических состояний будет вообще очень малой.

Определение перемещений в упруго-пластическом стержне

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти перемещения, возникающие при кручении упруго-пластического стержня, если напряженное состояние стержня определено путем решения рассмотренной выше задачи. При вычислении перемещений будем исходить из того, что первоначально свободный от напряжений и деформаций стержень подвергается действию возрастающих внешних нагрузок, сводящихся только к крутящему моменту, приложенному на его торцах, причем каждое промежуточное состояние является положением равновесия, и соответствующие напряжения можно рассчитать как результат соответствующей задачи о кручении для данной промежуточной нагрузки. Примем, кроме этого, еще, что возникающие в стержне полные — упругие и пластические — деформации малы.

Рассмотрим некоторую произвольную точку A поперечного сечения стержня. Если эта точка лежит в *упругой* области, то компоненты тензора деформаций в точке A однозначно определяются напряжениями с помощью закона Гука

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0,$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2\mu} p_{13} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mathcal{F}(x, y)}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2\mu} p_{23} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mathcal{F}(x, y)}{\partial x}.$$

Ясно, что ε_{13} и ε_{23} в этом случае зависят только от x и y и не зависят от z.

Компоненты вектора перемещений при этом определяются формулами Сен-Венана

$$w_1 = -\alpha zy, \quad w_2 = \alpha zx, \quad w_3 = f(x, y), \tag{5.19}$$

где α — угол закрутки. В самом деле, легко показать, что всегда, когда $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0$, а ε_{13}, ε_{23} отличны от нуля и зависят только от x и y, перемещения определяются формулами Сен-Венана (5.19). В этом случае перемещения должны быть решениями следующих уравнений:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial z} = 0, \tag{5.20}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right) = 0, \tag{5.21}$$

$$\varepsilon_{13}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial x}\right), \tag{5.22}$$

$$\varepsilon_{23}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y}\right), \tag{5.23}$$

где $\varepsilon_{13}(x, y)$ и $\varepsilon_{23}(x, y)$ — известные функции. Из (5.20) непосредственно вытекает, что

$$w_1 = w_1(y, z), \quad w_2 = w_2(x, z), \quad w_3 = w_3(x, y).$$

Из (5.21) при этом следует, что

$$-\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial x} = f_1(z), \tag{5.24}$$

где $f_1(z)$ — произвольная функция z, или

$$w_1 = -f_1(z)\, y + f_2(z), \tag{5.25}$$
$$w_2 = f_1(z)x + f_3(z),$$

где f_2 и f_3 — произвольные функции z.

Продифференцировав (5.22) и (5.23) с учетом (5.25) по z, будем иметь

$$-f_1'y + f_2' = 0, \quad f_1'x + f_3' = 0. \tag{5.26}$$

Отсюда видно, что f_1', f_2' и f_3' должны быть равны нулю, т. е.

$$f_1 = \alpha z + C_1, \tag{5.27}$$

где α и C_1 — произвольные постоянные. После этого из уравнений (5.26) непосредственно вытекает, что f_2 и f_3 также являются линейными функциями z:

$$f_2 = C_3z + C_4, \quad f_3 = C_5z + C_6, \tag{5.28}$$

где C_3, C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные. Для компонент вектора перемещений получаются следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -\alpha zy - C_1 y + C_3 z + C_4, \\ w_2 &= \alpha xz + C_1 x + C_5 z + C_6, \\ w_3 &= f(x, y) - C_5 y - C_3 x + C_7, \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

где из неизвестной пока функции $f(x, y)$ выделена специальная часть, линейно зависящая от x и y. Входящие в формулы (5.29) линейные относительно x, y и z члены являются общим решением однородных уравнений (5.20) — (5.23) и характеризуют перемещение стержня как абсолютно твердого (см. § 3 гл. IX).

Таким образом, с точностью до перемещений стержня как абсолютно твердого, перемещения в скручиваемом стержне из упругого материала определяются формулами (5.19).

Функция кручения $f(x, y)$ определяется в упругой области непосредственным интегрированием уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha y + \frac{p_{13}}{\mu}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\alpha x + \frac{p_{23}}{\mu}. \tag{5.30}$$

Если точка A лежит в *пластической* области, то деформации в этой точке складываются из упругих и пластических; для компонент тензора деформаций имеем

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p.$$

Если упругие свойства среды не зависят от пластических деформаций, то упругие деформации в пластической области связаны с напряжениями теми же формулами, что и упругие деформации в упругой области, причем

$$\frac{\varepsilon_{13}^e}{\varepsilon_{23}^e} = \frac{p_{13}}{p_{23}}. \tag{5.31}$$

Пластические деформации в общем случае зависят от пути нагружения. Если деформация стержня, в соответствии с указанным выше, развилась под действием монотонно возраставшего крутящего момента M, то

$$d\varepsilon_{11}^p = d\varepsilon_{22}^p = d\varepsilon_{33}^p = d\varepsilon_{12}^p = 0,$$

$$d\varepsilon_{13}^p = 2p_{13}\,d\lambda, \qquad d\varepsilon_{23}^p = 2p_{23}\,d\lambda.$$

Исключив параметр $d\lambda$, получим следующую связь между приращениями пластических деформаций и компонентами тензора напряжений:

$$d\varepsilon_{13}^p = \frac{p_{13}}{p_{23}}\,d\varepsilon_{23}^p.$$

Так как в каждой точке поперечного сечения стержня, принадлежащей пластической области, p_{13} и p_{23} в процессе кручения стержня остаются постоянными, а деформации считаются малыми, будем иметь

$$\varepsilon_{13}^p - \frac{p_{13}}{p_{23}} \varepsilon_{23}^p = \text{const},$$

где p_{13} и p_{23} зависят только от x и y. Пластические деформации ε_{13}^p и ε_{23}^p одновременно были равны нулю в тот момент, когда через рассматриваемую точку A проходила граница упругого ядра, поэтому постоянная интегрирования равна нулю, т. е.

$$\varepsilon_{13}^p - \frac{p_{13}}{p_{23}} \varepsilon_{23}^p = 0. \tag{5.32}$$

Из (5.31) и (5.32) вытекает, что и для полных деформаций в этом случае должно выполняться соотношение

$$\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{23}} = \frac{p_{13}}{p_{23}}. \tag{5.33}$$

Система уравнений для определения перемещений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i}\right)$$

в данном случае частично совпадает с уравнениями (5.20)—(5.21) для упругих перемещений

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \varepsilon_{11} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial y} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial z} = \varepsilon_{33} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right) = \varepsilon_{12} = 0, \tag{5.34}$$

а вместо (5.22) и (5.23), согласно (5.33), имеем только одно уравнение

$$\frac{\dfrac{\partial w_1}{\partial z} + \dfrac{\partial w_3}{\partial x}}{\dfrac{\partial w_2}{\partial z} + \dfrac{\partial w_3}{\partial y}} = \frac{p_{13}}{p_{23}}. \tag{5.35}$$

Здесь правая часть известна и зависит только от x и y.

При наличии пластических деформаций компоненты вектора полного перемещения $\boldsymbol{w}$ должны быть определены как решения уравнений (5.34), (5.35) с учетом непрерывного нарастания компонент тензора полных деформаций и условия совпадения перемещений с упругими в момент возникновения в данной частице максимального касательного напряжения. После достижения напряжения $p_{\tau\max} = k$ упругие деформации и уп-

ругие перемещения фиксируются, при дальнейшем повышении закручивающего момента в данной точке происходит нарастание компонент тензора пластических деформаций, в соответствии с этим определяются компоненты вектора полных перемещений.

Так же как и из уравнений (5.20) и (5.21), из уравнений (5.34), справедливых как в упругой, так и в пластической областях, следует, что

$$w_1 = -f_1(z)y + f_2(z), \quad w_2 = f_1(z)x + f_3(z), \quad w_3 = f(x, y).$$

Из решения задачи о напряжениях следует, что в каждом сечении при любом z имеется упругое ядро, внутри которого при закреплении точек оси z имеют место формулы

$$w_1 = -\alpha z y, \qquad w_2 = \alpha z x.$$

Так как в общем случае как в пластической, так и в упругой области функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ могут зависеть только от z, то отсюда ясно, что при непрерывном (начиная от нуля на границе с упругой областью) нарастании пластических перемещений в пластической области, так же как и в упругой, верны формулы

$$f_1(z) = \alpha z, \qquad f_2(z) = f_3(z) = 0.$$

Определение функции $f(x, y)$ можно произвести с помощью уравнения (5.35), которое как в упругой, так и в пластической области с учетом формул для w_1, w_2 и w_3 можно написать в виде

$$p_{23}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha y\right) = p_{13}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha x\right). \tag{5.36}$$

В данной точке при упругом состоянии компоненты p_{13} и p_{23} изменяются пропорционально углу закрутки α, или внешнему моменту M, после достижения пластического состояния значения p_{13} и p_{23} в фиксированной точке сохраняются неизменными.

Уравнение (5.36) легко преобразовать так, чтобы в пластической области оно допускало простое геометрическое истолкование.

Обозначим через γ угол между вектором напряжения $\boldsymbol{p}_\tau = p_{13}\boldsymbol{i} + p_{23}\boldsymbol{j}$ и осью x (рис. 161); тогда

$$p_{13} = p_\tau \cos\gamma, \quad p_{23} = p_\tau \sin\gamma,$$

$$\cos\gamma = \cos(\boldsymbol{p}_\tau, \boldsymbol{x}) = -\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}),$$

$$\sin\gamma = \cos(\boldsymbol{p}_\tau, \boldsymbol{y}) = \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x})$$

и уравнение (5.36) можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n}, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n}, y) = \alpha\,[y\cos(\boldsymbol{p}_\tau, y) + x\cos(\boldsymbol{p}_\tau, x)]$$

или

$$\frac{df}{dn} = \alpha r_\tau, \tag{5.37}$$

где r_τ — проекция вектора $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ на направление $\boldsymbol{p}_\tau$ в данной точке A. Напряжение $\boldsymbol{p}_\tau$ направлено по касательной

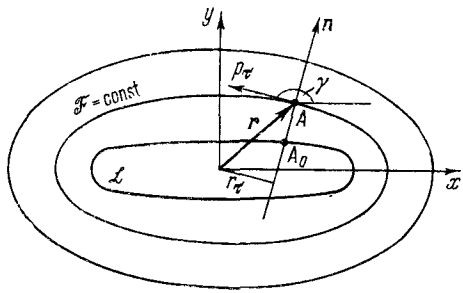


Рис. 161. К истолкованию уравнения (5.36).

к семейству линий $\mathcal{F} = \text{const}$, проекция r_τ постоянна для всех точек A, лежащих в пластической области на одной общей нормали [1]) $\boldsymbol{n}$ к семейству кривых $\mathcal{F} = \text{const}$. Поэтому, интегрируя уравнение (5.37) вдоль данной нормали $\boldsymbol{n}$ от точки A_0, принадлежащей границе упругой области $\mathcal{L}$, до рассматриваемой точки A, получим

$$f = \alpha r_\tau n + f^e, \tag{5.38}$$

где f^e — значение $f(x, y)$ в точке A_0, известное из решения упругой задачи, а r_τ известно, если известен контур C.

Таким образом, с помощью (5.38) можно определить депланацию поперечного сечения $f(x, y)$ скручиваемого стержня в пластической области, если депланация поперечного сечения стержня в упругой области и граница упругой области определены. Ясно, что депланация поперечного сечения в пласти-

[1]) Заметим, что прямолинейное семейство нормалей является семейством характеристик уравнения (5.36), так как вдоль них

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\boldsymbol{n}, y)}{\cos(\boldsymbol{n}, x)} = -\frac{p_{13}}{p_{23}}$$

и производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ слева и справа от $\boldsymbol{n}$ не могут быть однозначно определены только с помощью уравнения (5.37), из которого следует, что приращение f известно только вдоль $\boldsymbol{n}$.

ческой области изменяется линейно вдоль любой нормали к контуру C поперечного сечения. Если поперечное сечение скручиваемого стержня имеет две оси симметрии и начало координат O выбрано в точке их пересечения и закреплено, то в точках обеих осей симметрии

$$f^p = f^e = 0.$$

В самом деле, для таких точек $r_\tau = 0$ и $f^p = f^e$. Кроме того, если вдоль осей симметрии направить оси координат x и y, то из (5.30) непосредственно вытекает, что изменение f^e вдоль этих направлений равно нулю (так как $\boldsymbol{p}_\tau$ перпендикулярно к осям симметрии).

С ростом крутящего момента M или угла закрутки α форма границы упругого ядра $\mathscr{L}$, а следовательно, и значение величины f меняется сложным образом, поэтому в общем случае депланация поперечного сечения в пластической области не пропорциональна углу закрутки α.

Кручение стержня круглого поперечного сечения

Для примера рассмотрим кручение стержня круглого поперечного сечения радиуса a. При достаточно малых углах закрутки α материал стержня будет вести себя как упругий и касательные напряжения p_τ будут связаны с α равенством (7.14) § 7 гл. IX:

$$p_\tau = \mu \alpha r,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Очевидно, что при значении α, равном

$$\alpha^* = \frac{k}{\mu a},$$

касательные напряжения на внешней окружности C — границе поперечного сечения стержня — достигнут предельного значения k, и при $\alpha \geqslant \alpha^*$ часть материала стержня перейдет в пластическое состояние.

Вследствие осевой симметрии граница $\mathscr{L}$ упругой и пластической областей представляет собой окружность, концентрическую с C. Обозначим радиус этой окружности через ρ; очевидно, что при некотором заданном $\alpha > \alpha^*$ радиус упругого ядра будет равен

$$\rho = \frac{k}{\mu \alpha}. \tag{5.39}$$

Ясно, что радиус ρ может обратиться в нуль только при $\alpha \to \infty$, и поэтому при любом конечном угле закрутки α внутри стержня будет существовать упругое ядро.

В пластической области $\rho \leqslant r \leqslant a$ поверхность напряжений $z = \mathcal{F}(x, y)$ будет частью боковой поверхности кругового конуса, направляющей которого служит окружность C, а тангенс угла наклона образующих к плоскости xy равен k. Поэтому функция напряжений в пластической области будет следующей:

$$\mathcal{F}^p(x, y) = k(a - r).$$

В упругой области $0 \leqslant r \leqslant \rho$ функция напряжений должна быть решением уравнения Пуассона (5.15), следовательно, согласно (7.24), (7.21), (7.13) § 7 гл. IX, должна иметь вид

$$\mathcal{F}^e(x, y) = -\frac{r^2}{2}\mu\alpha + \text{const}.$$

На границе $\mathcal{L}$ упругого ядра $r = \rho$ функция напряжений непрерывна

$$\mathcal{F}^p = \mathcal{F}^e,$$

поэтому

$$\mathcal{F}^e(x, y) = \frac{1}{2}\mu\alpha(\rho^2 - r^2) + k(a - \rho).$$

Величина крутящего момента, соответствующая заданному углу α, вычисляется по формуле (5.18) и оказывается равной

$$M = 4\pi\left(\int_0^\rho \mathcal{F}^e r dr + \int_\rho^a \mathcal{F}^p r dr\right) = \frac{2}{3}\pi k\left(a^3 - \frac{1}{4}\rho^3\right). \quad (5.40)$$

Заметим, что при вычислении M использована формула (5.39) для радиуса упругого ядра. При $\rho \to 0$ крутящий момент стремится к значению

$$M_{\text{кр}} = \frac{2}{3}\pi a^3 k.$$

Предельное значение крутящего момента, соответствующее появлению предельных значений касательных напряжений на внешней боковой поверхности стержня, получается из формулы (5.40) при $\rho = a$

$$M_{\text{пред}} = \frac{1}{2}\pi k a^3.$$

Легко видеть, что поперечное сечение стержня при его кручении не искривляется. Решение рассмотренной задачи сильно облегчается тем, что форма упругого ядра оказывается известной из соображений симметрии.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИЮ ТРЕЩИН

§ 1. Плоские задачи теории упругости

Рассмотрим теперь плоские задачи теории упругости. В случае плоской задачи при соответствующем выборе декартовой системы координат $xOyz$ существенными аргументами для искомых функций являются только координаты x и y. Характеристики состояния и движения в плоской задаче вообще не зависят от координаты z или зависят от нее известным простым образом. Теория плоской задачи включает в себя задачи плоского деформированного, плоского напряженного и обобщенного плоского напряженного состояний, определения которых будут даны ниже.

Далее будем рассматривать только статические или квазистатические задачи в линеаризированной постановке для малых деформаций. В решения квазистатических задач время может входить только как параметр.

Ограничимся[1]) рассмотрением плоской задачи, когда по определению имеют место одновременно две группы равенств: первая для компонент тензора напряжений

$$\left.\begin{aligned} &p_{11} = p_{11}(x, y), \quad p_{22} = p_{22}(x, y), \quad p_{12} = p_{12}(x, y), \\ &p_{33} = p_{33}(x, y), \quad p_{13} = p_{23} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

и вторая для компонент тензора деформаций

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(x, y), \ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(x, y), \ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}(x, y), \\ &\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}(x, y), \ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Данное определение плоской задачи в общем случае не связано с видом соотношений между напряжениями и деформациями и не связано со свойствами среды. Однако возможность реализации плоской задачи в тех или иных условиях тесно связана со свойствами рассматриваемой модели сплошной среды.

[1]) Использованное ниже довольно общее определение плоской задачи можно еще расширить. См, например, Л я в, Математическая теория упругости, ОНТИ, 1935, §§ 145, 301, 302, 303.

Рассмотрим теперь возможные упрощения, которые возникают в основных уравнениях в случае плоской задачи.

Компоненты перемещений в случае плоской задачи

Дальше ограничимся приложениями теории к плоским задачам, в которых можно ввести перемещения из начального состояния, применяемого для определения компонент тензора деформаций. В этом случае можно пользоваться уравнениями совместности. Шесть уравнений совместности Сен-Венана $R_{ijkl} = 0$ (см. § 5 гл. II) в случае плоской задачи (1.2) сводятся к следующим четырем соотношениям:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x \partial y} = 0. \tag{1.4}$$

Остальные два уравнения Сен-Венана удовлетворяются тождественно. Из (1.4) следует, что ε_{33} может быть только линейной функцией x и y:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} = Ax + By + C, \tag{1.5}$$

где A, B и C — постоянные. Отсюда для компоненты вектора перемещений вдоль оси z будем иметь

$$w = (Ax + By + C)z + f(x, y), \tag{1.6}$$

где $f(x, y)$ — произвольная функция. По определению плоской задачи (1.2) имеем

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0,$$

и поэтому компоненты u и v вектора перемещений должны представляться в виде

$$u = -A\frac{z^2}{2} - f'_x(x, y)\, z + \omega_1(x, y),$$

$$v = -B\frac{z^2}{2} - f'_y(x, y)\, z + \omega_2(x, y),$$

где $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ — произвольные функции.

Далее, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{11}(x, y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{22}(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varepsilon_{12}(x, y),$$

для определения произвольной функции $f(x, y)$ имеем равенства

$$\varepsilon_{11}(x, y) = \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - f''_{xx}(x, y)\, z,$$
$$\varepsilon_{22}(x, y) = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} - f''_{yy}(x, y)\, z,$$
$$\varepsilon_{12}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right) - f''_{xy}(x, y)\, z.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{xy} = 0,$$

т. е. произвольная функция $f(x, y)$ в выражении (1.6) для w должна быть линейной функцией своих аргументов

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

где a, b, c — постоянные. Легко убедиться, что определенная таким образом функция $f(x, y)$ соответствует пространственным перемещениям тела как абсолютно твердого, и поэтому при изучении деформаций ее можно положить равной нулю.

Таким образом, компоненты перемещений в общем случае плоской задачи независимо от связи между компонентами тензоров напряжений и деформаций представляются формулами вида

$$\left.\begin{aligned} u &= -A\frac{z^2}{2} + \omega_1(x, y), \\ v &= -B\frac{z^2}{2} + \omega_2(x, y), \\ w &= (Ax + By + C)\, z. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Функции $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ могут быть истолкованы как компоненты вектора перемещений в плоскости $z = 0$. Они, очевидно, связаны с компонентами тензора деформаций ε_{11}, ε_{22} и ε_{12} уравнениями:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right). \tag{1.8}$$

Связь p_{ij} и ε_{ij} в случае плоской задачи для линейно-упругого тела. Уравнения Бельтрами — Мичелла

Закон Гука в случае плоской задачи (1.1), (1.2) записывается в виде

$$p_{11} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{11},$$
$$p_{22} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{22},\ p_{33} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{33},$$
$$p_{12} = 2\mu\varepsilon_{12},\quad p_{13} = p_{23} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

или, так как ε_{33} является линейной функцией x и y, в виде

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(Ax + By + C), \\ p_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(Ax + By + C), \\ p_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \\ p_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\lambda + 2\mu)(Ax + By + C). \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Запишем эти соотношения в виде, разрешенном относительно компонент тензора деформаций:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1-\sigma^2}{E}\left(\overline{p}_{11} - \frac{\sigma}{1-\sigma}\,\overline{p}_{22}\right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1-\sigma^2}{E}\left(\overline{p}_{22} - \frac{\sigma}{1-\sigma}\,\overline{p}_{11}\right), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\sigma}{E}\,p_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\varepsilon_{33} = (Ax + By + C) = (1/E)\,[p_{33} - \sigma\,(p_{11} + p_{22})], \tag{1.11}$$

где

$$\overline{p}_{11} = p_{11} - \lambda\,(Ax + By + C), \quad \overline{p}_{22} = p_{22} - \lambda\,(Ax + By + C),$$

$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ — модуль Юнга и $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ — коэффициент Пуассона.

Подставляя эти соотношения в условие совместности (1.3), получим

$$\frac{\partial^2 p_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_{22}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 p_{12}}{\partial x \partial y} + \sigma\,\Delta p, \tag{1.12}$$

где

$$p = p_{11} + p_{22}.$$

Это уравнение является условием совместности напряжений в плоской задаче для линейно-упругого тела и в этом случае может заменить собой уравнения Бельтрами — Мичелла.

Условия на внешние массовые и поверхностные силы в случае плоской задачи

Уравнения равновесия для плоской задачи имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + F_x &= 0, \\ \frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + F_y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

где проекции массовых сил на оси x и y должны быть функциями только x и y. Третье уравнение равновесия в плоской задаче будет удовлетворено только тогда, когда

$$F_z = 0,$$

т. е. массовые силы вдоль оси z в случае плоской задачи должны отсутствовать.

Граничные условия в напряжениях в случае плоской задачи имеют вид

$$\left.\begin{aligned} p_{11}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{12}\cos(\boldsymbol{n}, y) &= p_{n1}, \\ p_{12}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p_{22}\cos(\boldsymbol{n}, y) &= p_{n2}, \\ p_{33}\cos(\boldsymbol{n}, z) &= p_{n3}. \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Обычно (но не всегда) плоские задачи рассматриваются для цилиндрических тел с образующими, параллельными оси z. В этом случае на боковой поверхности тела $\cos(\boldsymbol{n}, z) = 0$ и, следовательно, на этой поверхности должно иметь место равенство

$$p_{n3} = 0.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением плоских задач о деформировании цилиндрических тел, в которых требуемое условие на внешние заданные распределенные силы на цилиндрических боковых поверхностях всегда удовлетворяется.

Граничные условия в случае плоской задачи могут быть заданы также в перемещениях.

О постановке плоских задач теории упругости

Если имеется цилиндрическое тело с образующими, параллельными оси z, на боковой поверхности которого заданы напряжения p_{n1}, p_{n2} как функции только x и y, а $p_{n3} = 0$, то компоненты тензора напряжений p_{11}, p_{12}, p_{22} внутри тела можно определить как решение краевой задачи, поставленной в области, ограниченной контуром C поперечного сечения тела, для двух уравнений равновесия (1.13) и одного уравнения совместности (1.12) с граничными условиями (1.14) на контуре C.

Компоненты тензора деформаций ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} можно затем определять с помощью закона Гука (1.10). Компонента ε_{12} определится при этом однозначно, а ε_{11} и ε_{22} — только с точностью до произвольной аддитивной линейной функции от x и y. Эта линейная функция x и y будет фиксирована, если задать p_{33} или ε_{33}, согласно (1.11).

После этого компоненты вектора перемещений $\boldsymbol{w}$ определятся с помощью формул (1.7); входящие в эти формулы функции $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ по известным ε_{11}, ε_{22} и ε_{12} найдутся при решении уравнений (1.8) с точностью до плоскопараллельных перемещений, определяющих движение тела как твердого в плоскости xy.

Подчеркнем еще раз, что постоянные A, B, C в (1.7) и (1.9) остаются неопределенными, если заданы только граничные условия в напряжениях на боковой поверхности тела.

Плоское деформированное состояние

В случае плоского деформированного состояния (плоской деформации) по определению принимается, что

$$\varepsilon_{33} = 0, \quad A = B = C = 0. \tag{1.15}$$

Соотношения закона Гука (1.9) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ p_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ p_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Компонента p_{33} определяется из соотношения

$$p_{33} = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad \text{или} \quad p_{33} = \sigma (p_{11} + p_{22}). \tag{1.17}$$

В случае плоской деформации перемещения, согласно (1.7), (1.15), имеют вид

$$u = \omega_1 (x, y), \quad v = \omega_2 (x, y), \quad w = 0.$$

Плоская деформация реализуется при нагружении цилиндрического тела по внешней цилиндрической поверхности и по его объему силами, статически эквивалентными нулю, параллельными плоскости xy и не зависящими от z, когда плоские торцовые сечения Σ_1 и Σ_2 цилиндра, параллельные плоскости xy (рис. 162), закреплены так, что длина цилиндра фиксирована ($w = 0$), а Σ_1 и Σ_2 могут без трения ($p_{13} = p_{23} = 0$) перемещаться параллельно плоскости xy. В этом случае при отсутствии начальных напряжений можно удовлетворить всем уравнениям и условиям, если принять, что точки тела получают перемещения, параллельные плоскости xy и не зависящие от z.

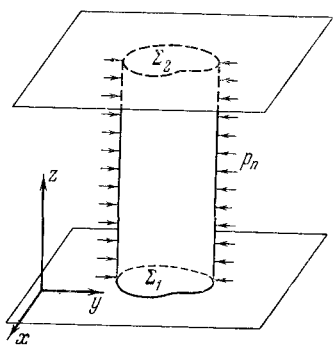


Рис. 162. Плоская деформация.

Если плоская деформация происходит без изменения объема (сам материал сжимаем, $\lambda \neq \infty$), то $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0$, поэтому для таких деформаций имеем

$$p_{11} = 2\mu\varepsilon_{11}, \quad p_{22} = 2\mu\varepsilon_{22}, \quad p_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \quad p_{33} = 0.$$

Плоское напряженное состояние

В случае плоского напряженного состояния по определению принимают [1]), что

$$p_{33} = 0. \tag{1.18}$$

Тогда из закона Гука получается

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \tag{1.19}$$

а остальные соотношения закона Гука приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda^* (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ p_{22} &= \lambda^* (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ p_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

[1]) См. сноску на стр. 481.

где

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Заметим, что эти соотношения полностью совпадут с соотношениями (1.16), выражающими соответствующие равенства для случая плоской деформации, если в последних заменить λ на λ^*. Так как в плоской задаче ε_{33} — линейная функция от x и y, то соотношение (1.19) приводится к виду

$$\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\lambda + 2\mu)(Ax + By + C) = 0$$

или, согласно (1.8), к виду

$$\lambda\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y}\right) + (\lambda + 2\mu)(Ax + By + C) = 0. \quad (1.21)$$

Это соотношение накладывает ограничения на характер изменения ω_1 и ω_2 при реализации в линейно-упругом теле плоского напряженного состояния. Плоское напряженное состояние реализуется лишь в тех случаях, когда перемещения в плоскости $z = 0$ удовлетворяют соотношению (1.21).

При плоском деформированном состоянии таких ограничений на перемещения ω_1 и ω_2 нет. В самом деле, по любым заданным ω_1, ω_2 можно определить, согласно (1.8), компоненты ε_{11}, ε_{12}, ε_{22}, а далее, используя (1.16), найти p_{11}, p_{22}, p_{12}. Найденные таким образом компоненты p_{ij} будут удовлетворять условию совместности (1.12). Из уравнений равновесия (1.13) можно затем найти соответствующие массовые силы F_x, F_y, а из граничных условий (1.14) определить соответствующие усилия p_n на боковой поверхности тела.

Из (1.21) видно, что плоские деформированные состояния, когда $\varepsilon_{33} = 0$ и, следовательно, $A = B = C = 0$, будут и плоскими напряженными состояниями, если деформации происходят без изменения объема

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} = 0$$

(материал сжимаем и λ конечно). В общем случае, очевидно, плоское деформированное состояние не является плоским напряженным состоянием, так как в плоском деформированном состоянии вообще $p_{33} \neq 0$.

При плоском напряженном состоянии, согласно последней формуле (1.7), точки плоскостей $z = \text{const}$ получают линейные относительно x и y перемещения вдоль оси z. Следовательно, система параллельных плоскостей $z = \text{const} = \alpha$ переходит при плоском напряженном состоянии в систему наклоненных к оси z плоскостей $z = \alpha + (Ax + By + C)\alpha$. (В рамках линеаризированной теории в выражении малой величины

$\Delta z = z - \alpha$ координаты точек среды x, y, z можно взять в начальном состоянии, так как добавки, обусловленные перемещениями u, v, скажутся только в малых второго порядка, которые следует отбросить в развиваемой линейной теории.)

На основании изложенного ясно, что реализовать на практике плоское напряженное состояние можно в достаточно искусственных условиях, однако аналогичные соотношения имеют место в случае обобщенного плоского напряженного состояния, которое имеет большое практическое значение.

Обобщенное плоское напряженное состояние

Рассмотрим тонкую плоскую пластину толщиной $2h$ (рис. 163). Обозначим через d характерный продольный размер пластины; по предположению $h/d \ll 1$. Плоскость xy совместим со срединной плоскостью пластины. Предположим, что пластина нагружена внешними силами (в том числе и массовыми),

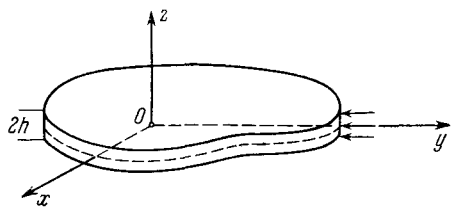


Рис. 163. К понятию обобщенного плоского напряженного состояния. Растяжение и сжатие пластины силами, параллельными ее срединной плоскости.

параллельными срединной плоскости и симметричными относительно плоскости xy. Далее предположим, что отсутствуют внешние усилия на торцовых поверхностях, т. е.

$$p_{33}(x, y, \pm h) = p_{13}(x, y, \pm h) = p_{23}(x, y \pm h) = 0 \qquad (1.22)$$

и, в частности,

$$\frac{\partial p_{33}(x, y, \pm h)}{\partial x} = \frac{\partial p_{33}(x, y, \pm h)}{\partial y} = 0.$$

Так как, кроме того, компонента F_z объемной силы, по предположению, равна нулю, то из уравнения равновесия в проекции на ось z получим

$$\left.\frac{\partial p_{33}(x, y, z)}{\partial z}\right|_{z = \pm h} = 0.$$

Таким образом, на торцовых поверхностях пластины компонента p_{33} не только сама обращается в нуль, но обращаются в нуль и ее производные. Поэтому для тонкой пластины компонента p_{33} является малой и в качестве приближения дальше положим $p_{33} = 0$ всюду внутри пластины.

Два других уравнения равновесия

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x}+\frac{\partial p_{12}}{\partial y}+\frac{\partial p_{13}}{\partial z}+F_x=0, \qquad \frac{\partial p_{12}}{\partial x}+\frac{\partial p_{22}}{\partial y}+\frac{\partial p_{23}}{\partial z}+F_y=0$$

осредним по толщине пластины. С учетом равенств (1.22) и

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial p_{13}}{\partial z}\,dz=\frac{1}{2h}\,p_{13}(x,y,z)\Big|_{-h}^{h}=0,$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial p_{23}}{\partial z}\,dz=\frac{1}{2h}\,p_{23}(x,y,z)\Big|_{-h}^{h}=0$$

получим

$$\frac{\partial p_{11}^*}{\partial x}+\frac{\partial p_{12}^*}{\partial y}+F_x^*=0, \qquad \frac{\partial p_{12}^*}{\partial x}+\frac{\partial p_{22}^*}{\partial y}+F_y^*=0, \quad (1.23)$$

где

$$p_{ij}^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}p_{ij}dz, \qquad F_i^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}F_i dz. \quad (1.24)$$

Так как $p_{33}=0$, закон Гука имеет вид (1.20). Переходя в нем к средним значениям, получим

$$\left.\begin{aligned} p_{11}^*&=\lambda^*(\varepsilon_{11}^*+\varepsilon_{22}^*)+2\mu\varepsilon_{11}^*,\\ p_{22}^*&=\lambda^*(\varepsilon_{11}^*+\varepsilon_{22}^*)+2\mu\varepsilon_{12}^*,\\ p_{12}^*&=2\mu\varepsilon_{12}^*, \end{aligned}\right\} \quad (1.25)$$

где

$$\varepsilon_{11}^*=\frac{\partial u^*}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{22}^*=\frac{\partial u^*}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{12}^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial v^*}{\partial x}\right),$$

$$\varepsilon_{33}^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial w}{\partial z}\,dz=\frac{1}{2h}[w(x,y,h)-w(x,y,-h)], \quad (1.26)$$

$$u^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u\,dz, \qquad v^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}v\,dz.$$

Компоненты p_{ij}^*, u^*, v^*, ε_{ij}^* зависят только от координат x, y.

Рассмотренное напряженное состояние, реализующееся в таких пластинах, работающих без изгиба, определяют как обобщенное плоское напряженное состояние [1]. В силу линейности уравнений и граничных условий все соответствующие соотношения для плоского напряженного состояния сохраняют свой вид для осредненных компонент в случае обобщенного плоского

[1] Подобное напряженное состояние пластины называют также безмоментным.

напряженного состояния. В дальнейшем не будем писать символы осреднения, имея в виду, что все результаты теории плоского напряженного состояния имеют место и для обобщенного плоского напряженного состояния.

Функция напряжений Эри

В неоднородных уравнениях равновесия внешние массовые силы можно исключить, рассмотрев одно частное решение этих уравнений. Поэтому при решении плоских задач теории упругости будем исходить из системы однородных уравнений равновесия

$$-\frac{\partial p_{11}}{\partial x}=\frac{\partial p_{12}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p_{22}}{\partial y}=-\frac{\partial p_{12}}{\partial x}. \tag{1.27}$$

Эти уравнения показывают, что выражения

$$p_{12}\,dx-p_{11}\,dy, \qquad p_{22}\,dx-p_{12}\,dy$$

являются полными дифференциалами некоторых функций $A(x, y)$ и $B(x, y)$ соответственно. Таким образом, уравнения равновесия (1.27) приводят к существованию таких двух функций $A(x, y)$ и $B(x, y)$, что

$$p_{11}=-\frac{\partial A}{\partial y}, \qquad p_{22}=\frac{\partial B}{\partial x} \qquad \text{и} \qquad p_{12}=\frac{\partial A}{\partial x}=-\frac{\partial B}{\partial y}.$$

Аналогично на основании последнего равенства можно сделать вывод о существовании такой функции $U(x, y)$, которая подчиняется условиям

$$\frac{\partial U}{\partial x}=B, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-A.$$

Следовательно, можно ввести такую функцию $U(x, y)$, что компоненты тензора напряжений p_{11}, p_{22} и p_{12} в плоской задаче представятся через нее следующим образом:

$$p_{11}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \qquad p_{22}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad p_{12}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}. \tag{1.28}$$

Функция $U(x, y)$ называется функцией напряжений Эри. Любая функция Эри $U(x, y)$ определяет, согласно (1.28), распределение напряжений, удовлетворяющее уравнениям равновесия (1.27). Очевидно, что для данного распределения напряжений функция Эри определяется только с точностью до несущественной произвольной аддитивной линейной функции от x и y. Формулы (1.28) являются следствием только универсальных уравнений равновесия, и поэтому они верны в случае плоских задач (1.2) в сплошных средах с произвольными свойствами (упругой, пластической и др.).

Нетрудно видеть, что граничные условия в напряжениях выражаются в виде условий на функцию Эри также независимо

от свойств материала. Если поперечное сечение тела ограничено контуром C, вдоль которого отсчитывается дуга s (рис. 164), то граничные условия в напряжениях на C можно, очевидно, переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} p_{n1} &= p_{n1}(s) = p_{11}\cos(n, x) + p_{12}\cos(n, y) = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right), \\ p_{n2} &= p_{n2}(s) = p_{12}\cos(n, x) + p_{22}\cos(n, y) = \\ &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1.29)$$

Покажем теперь, что функция Эри является однозначной функцией, если контур C ограничивает односвязную область и если система внешних поверхностных сил статически эквивалентна нулю. Действительно, если главный вектор внешних поверхностных сил равен нулю, то, очевидно,

$$\int_C p_{n1} ds = 0 \quad \text{и} \quad \int_C p_{n2} ds = 0,$$

так как эти интегралы представляют собой проекции на оси x и y главного вектора сил напряжений, действующих на участок боковой поверхности единичной высоты. Отсюда с помощью (1.29) непосредственно вытекает, что производные функции Эри $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$ при обходе контура сохраняют свои значения.

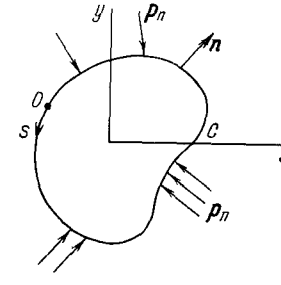


Рис. 164. Выбор положительных направлений нормали n к контуру C поперечного сечения цилиндрического тела и обхода C.

Используем также условие равенства нулю главного момента внешних поверхностных сил относительно оси z. Будем иметь

$$0 = \int_C (p_{n1} y - p_{n2} x)\, ds = \int_C \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) y + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) x\right] ds =$$

$$= \int_C \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y} y + \frac{\partial U}{\partial x} x\right) ds - \int_C \frac{\partial U}{\partial y}\, dy + \frac{\partial U}{\partial x}\, dx.$$

Отсюда, так как контур C замкнутый, а $\partial U/\partial y$ и $\partial U/\partial x$ однозначны, вытекает, что функция Эри U при обходе контура C сохраняет свое значение.

Аналогичные результаты можно получить для случая многосвязных областей, когда граница тела состоит из нескольких замкнутых контуров. Для многосвязных областей

очевидно, что при равновесии имеется однозначность функции $U(x, y)$ при соответствующем обходе один раз всех контуров и, вообще говоря, не обязательна однозначность при обходе отдельных контуров.

Бигармоническое уравнение и граничные условия для функции Эри

Установим теперь уравнение, которому должна удовлетворять функция Эри для упругих материалов, подчиняющихся закону Гука. Подставляя выражения (1.28) для компонент тензора напряжений через функцию Эри в уравнение совместности (1.12), получим

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 \Delta U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta U}{\partial y^2} = 0, \quad \text{где} \quad \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Таким образом, функция Эри удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta U = 0. \tag{1.30}$$

Уравнение (1.30) называется бигармоническим. Таким образом, проблема интегрирования в плоской задаче теории упругости сводится к интегрированию бигармонического уравнения (1.30) при соответствующих граничных условиях и условиях однозначности для функции Эри $U(x, y)$.

Если на боковой поверхности заданы $\boldsymbol{p}_n$, то с помощью (1.29) легко получаются граничные условия, которым должна удовлетворять функция Эри $U(x, y)$ на контуре C. Действительно, из (1.29) в результате интегрирования вдоль C определяются производные функции Эри по координатам x и y в любой точке C

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 &= \int_0^s \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) ds = -\int_0^s p_{n2} ds = -Y(s), \\ \frac{\partial U}{\partial y} - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 &= \int_0^s \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) ds = \int_0^s p_{n1} ds = X(s), \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

где s — длина дуги C, отсчитываемая от некоторой произвольной точки O, $(\partial U/\partial x)_0$ и $(\partial U/\partial y)_0$ — значения производных в точке O, $X(s)$ и $Y(s)$ — компоненты главного вектора поверхностных сил, действующих на участок боковой поверхности тела, опирающийся на дугу контура C от O до s и имеющий единичный размер вдоль оси z. В дальнейшем будем называть $X(s)$ и $Y(s)$ компонентами сил, действующих на участке контура C от O до s.

Зная производные $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$ в каждой точке C, можно вычислить производные U по касательной и нормали к C:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{dU}{dn} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn},$$

и с помощью интегрирования можно определить значения самой функции Эри в любой точке контура C:

$$U(s) - U(0) = \int_0^s \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) ds = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 (x_s - x_0) +$$

$$+ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 (y_s - y_0) + \int_0^s [X(s)\, dy - Y(s)\, dx], \qquad (1.32)$$

где x_0, y_0 и x_s, y_s — значения координат x, y, соответствующие точке O и любой точке s на контуре C. Заметим, что, как и следовало ожидать, усилия $\boldsymbol{p}_n$, приложенные на контуре C, определяют значения функции Эри на C только с точностью до несущественной для распределения напряжений аддитивной линейной функции от x и y. Если контур C ограничивает односвязную область, то коэффициенты этой линейной функции на единственном контуре C можно положить равными нулю. Если область, для которой ставится плоская задача, многосвязна, то эти коэффициенты можно считать равными нулю только на одном из контуров C_k, а для других контуров их следует определять из условий однозначности перемещений [1]).

Таким образом, если на контуре C заданы векторы напряжений $\boldsymbol{p}_n$, то решение плоской задачи может быть сведено к нахождению бигармонической функции $U(x, y)$ в области, ограниченной C, по заданным на контуре C значениям самой этой функции и ее производной по нормали к контуру C.

Физическое истолкование функции Эри

Дадим физическое истолкование функции Эри. Для этого преобразуем интеграл, входящий в (1.32), следующим образом:

$$\int_0^s [X(s)\, dy - Y(s)\, dx] = \int_0^s [X(s)\, d(y - y_s) - Y(s)\, d(x - x_s)] =$$

$$= [X(s)(y - y_s) - Y(s)(x - x_s)]_0^s -$$

$$- \int_0^s [(y - y_s)\, dX(s) - (x - x_s)\, dY(s)],$$

но $dX(s) = p_{n1}\, ds$, $dY(s) = p_{n2}\, ds$, а $X(0) = Y(0) = 0$.

[1]) См. ниже, стр. 497.

Поэтому из (1.32) получим

$$U(s) - U(0) - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) = \\ = -\int_0^s [p_{n1}(y - y_s) - p_{n2}(x - x_s)]\, ds,$$

т. е. значение функции Эри в произвольной точке s контура C с точностью до аддитивной линейной функции от x и y представляет собой главный момент внешних поверхностных сил, приложенных к участку контура C между некоторой начальной точкой O и рассматриваемой точкой s, вычисленный относительно этой последней точки.

Теорема Мориса Леви

Из постановки задачи об определении распределения напряжений при заданных нагрузках на границе поперечного сечения тела, когда функция Эри вполне определяется этими условиями (это имеет место, например, в том случае, когда область, ограниченная контуром C, односвязна), следует, что в рамках линейной теории упругости распределение напряжений не зависит от свойств материала, т. е. от значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

Указанное важное свойство решений плоской задачи теории упругости составляет содержание теоремы М. Леви. Пользуясь этим, можно заменять изучение напряжений, например, в металлических деталях изучением напряжений в моделях, изготовленных из прозрачных изотропных материалов, оптически чувствительных к возникающим в них деформациям. На этом основаны экспериментальные оптические методы исследования упругих тел. Очевидно, что соответствующие перемещения существенным образом зависят от характеристик упругих свойств материала.

Формула Гурса

Остановимся теперь на представлении решения плоских задач теории упругости с помощью функций комплексного переменного. Введем комплексные переменные: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. При переходе от x, y к комплексным переменным z и $\bar{z}$ бигармоническое уравнение (1.30) преобразуется к виду

$$\Delta\Delta U = 16 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0. \qquad (1.33)$$

Следовательно, общее решение бигармонического уравнения можно представить в виде

$$U(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi_1(z) + z\varphi_2(\bar{z}) + \chi_1(z) + \chi_2(\bar{z}). \qquad (1.34)$$

Для класса вещественных функций $U(x, y)$ необходимо положить

$$\varphi_2(\bar{z}) = \overline{\varphi_1(z)}, \qquad \chi_2(\bar{z}) = \overline{\chi_1(z)},$$

где $\overline{\varphi_1(z)}$, $\overline{\chi_1(z)}$ — функции, сопряженные с $\varphi_1(z)$ и $\chi_1(z)$, т. е. получающиеся из них путем замены z на $\bar{z}$ и всех входящих в них постоянных комплексных коэффициентов на сопряженные с ними величины.

Опуская индекс 1, запишем вещественное решение бигармонического уравнения в форме Гурса

$$U(x, y) = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}. \tag{1.35}$$

Проблема отыскания функции Эри и решение соответствующей плоской задачи сводятся к определению двух функций комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, регулярных в области $\mathcal{D}$, занятой упругим телом, и удовлетворяющих определенным граничным условиям.

Выражения компонент тензора напряжений и вектора перемещений через функции комплексного переменного

Для получения формул, выражающих компоненты тензора напряжений через функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, заметим, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = i\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right),$$

и воспользуемся следующими распространенными в теории упругости обозначениями:

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi}{dz} = \Phi(z), \qquad \chi'(z) = \frac{d\chi}{dz} = \psi(z)$$

и

$$\chi''(z) = \psi'(z) = \Psi(z).$$

Из (1.35) с помощью (1.28) непосредственно получим

$$\left.\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{1}{2}\{-\bar{z}\Phi'(z) - z\overline{\Phi'(z)} + 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] - \Psi(z) - \overline{\Psi(z)}\},\\
p_{22} &= \frac{1}{2}\{\bar{z}\Phi'(z) + z\overline{\Phi'(z)} + 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + \Psi(z) + \overline{\Psi(z)}\},\\
p_{12} &= -\frac{i}{2}\{\bar{z}\Phi'(z) - z\overline{\Phi'(z)} + \Psi(z) - \overline{\Psi(z)}\}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

Отсюда легко получить выражения для следующих комбинаций p_{11}, p_{22} и p_{12}:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{11} + p_{22} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] = 4\operatorname{Re}\Phi(z) = 4\operatorname{Re}\varphi'(z),\\
&p_{22} - p_{11} + 2ip_{12} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)].
\end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

Эти формулы потребуются в дальнейшем.

Закон Гука для случая плоской деформации представим в виде, разрешенном относительно компонент тензора деформаций:

$$2\mu\varepsilon_{11} = \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}p - p_{22}, \quad 2\mu\varepsilon_{22} = \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}p - p_{11},$$

$$2\mu\varepsilon_{12} = p_{12},$$

где $p = p_{11} + p_{22}$. Отсюда, вводя компоненты вектора перемещений и функцию Эри, получим

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}p - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}p - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

Так как $p = \Delta U$, а $\Delta\Delta U = 0$, то p — гармоническая функция. Пусть q — сопряженная с ней гармоническая функция. Легко видеть (см. (1.37)), что

$$f(z) = p + iq = 4\varphi'(z),$$

где функция $\varphi(z)$ определена формулой Гурса (1.35). Обозначая

$$\varphi(z) = P + iQ,$$

можно записать

$$p = 4\frac{\partial P}{\partial x} = 4\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad q = -4\frac{\partial P}{\partial y} = 4\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.39}$$

Поэтому два первых соотношения (1.38) можно переписать в виде

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

После интегрирования получим

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P + f_1(y), \\ 2\mu v &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}Q + f_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — произвольные функции. Подставляя (1.40) в последнее соотношение (1.38) и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

получим

$$f_1'(y) + f_2'(x) = 0.$$

Отсюда следует, что $f_1 = \gamma y + \alpha$, $f_2 = -\gamma x + \beta$, где α, β, γ — постоянные. Очевидно, что функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ соответствуют перемещениям тела как абсолютно твердого и поэтому в дальнейшем могут быть отброшены.

Составим из (1.40) комплексную комбинацию

$$2\mu(u + iv) = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\varphi(z) - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right). \qquad (1.41)$$

На основании формулы Гурса (1.35) верно равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = 2\frac{\partial U(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}. \qquad (1.42)$$

Поэтому равенству (1.41) можно придать форму

$$2\mu(u + iv) = \Lambda\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \qquad (1.43)$$

где

$$\Lambda = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\sigma.$$

В случае плоского напряженного состояния в выражении для Λ надо заменить λ на λ^* (в этом случае $\Lambda = (3 - \sigma)/(1 + \sigma)$) и u, v через ω_1 и ω_2. Формулы (1.37) и (1.43) были получены Г. В. Колосовым.

Условия для определения постоянных интегрирования в граничных условиях для функции Эри

Как указывалось выше (см. стр. 493), формулы, выражающие перемещения через функцию Эри, в частности, необходимы в том случае, когда область, занятая упругим телом, многосвязна. В граничные условия для U и dU/dn на каждом из контуров C_k, ограничивающих поперечное сечение цилиндрического тела, входят три произвольные постоянные, причем только на одном из контуров C_k, например внешнем по отношению ко всем другим контурам C_k, контуре C (рис. 165) они могут быть выбраны произвольно. На остальных контурах их можно определять так, чтобы перемещения u и v (1.40) были однозначными функциями x и y, т. е. так, чтобы при обходе любого из внутренних контуров C_k функции

$$\frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}P - \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}Q - \frac{\partial U}{\partial y}$$

возвращались к своим первоначальным значениям.

При обходе по некоторому контуру C_k в указанном на рис. 165 направлении производные $\partial U/\partial y$ и $-\partial U/\partial x$ (см. (1.31)) получают приращения, равные X_k и Y_k — суммам проекций внешних сил, приложенных к границе этого контура, на оси x и y соответственно. Следовательно, функции

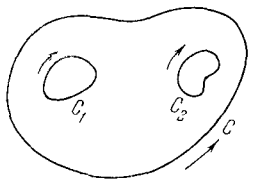


Рис. 165. Многосвязная область поперечного сечения цилиндрического тела.

$$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}P=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\int(p\,dx-q\,dy)$$

и

$$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}Q=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\int(p\,dy+q\,dx)$$

(см. (1.39)) при обходе контура C должны получать такие же приращения, как $\partial U/\partial x$ и $-\partial U/\partial y$, т. е. должны выполняться условия

$$\begin{aligned}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\int_{C_k}(q\,dy-p\,dx)&=Y_k,\\ \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\int_{C_k}(p\,dy+q\,dx)&=X_k.\end{aligned}\tag{1.44}$$

Кроме того, с помощью (1.40) легко установить кинематический смысл гармонической функции q, сопряженной с $p=p_{11}+p_{22}$, которая, очевидно, определяется формулой

$$q-q_0=\int_0^{x,y}\frac{\partial p}{\partial x}\,dy-\frac{\partial p}{\partial y}\,dx.$$

Действительно, согласно (1.40), имеем

$$\omega=\frac{1}{2}(\operatorname{rot}\boldsymbol{w})_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$
$$=\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\,q,$$

т. е. функция q с точностью до постоянного множителя представляет собой малый угол поворота главных осей тензора деформаций элемента деформирующейся среды.

В случае однозначных перемещений должны выполняться равенства

$$\int_{C_k}\frac{\partial p}{\partial x}\,dy-\frac{\partial p}{\partial y}\,dx=\int_{C_k}\frac{\partial p}{\partial n}\,ds=0.\tag{1.44'}$$

Равенства (1.44) и (1.44') представляют собой условия для определения постоянных интегрирования в граничных усло-

виях для U и dU/dn на внутренних контурах C_k. Функция U и ее производные при этом, в противоположность случаю односвязной области, занятой упругим телом, уже не являются, вообще говоря, однозначными.

Граничные условия и классификация краевых задач для определения функций комплексного переменного

Если на границе поперечного сечения тела задано распределение компонент p_{n1}, p_{n2}, то с помощью (1.31) легко получить граничное условие для $(\partial U/\partial x) + i\,(\partial U/\partial y)$ на этой границе. Действительно, из (1.31) на контуре C_k в этом случае имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial U}{\partial y} = -Y(s) + iX(s) + m_k,$$

где s — длина дуги контура, отсчитываемая от некоторой точки O, а $X(s)$ и $Y(s)$ — компоненты сил, действующих на участке C_k от O до s, m_k — вообще комплексная постоянная, которую можно считать равной нулю, если область, занятая упругим телом, односвязна; постоянные m_k для многосвязных областей на всех контурах, кроме одного, на котором постоянная может быть выбрана произвольно, определяются при решении задачи.

Отсюда с помощью (1.42) получаем следующее граничное условие на контуре C_k для функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ комплексного переменного z:

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)} = -Y(s) + iX(s) + m_k. \qquad (1.45)$$

В случае задания в плоскости xy на границе поперечного сечения тела перемещений

$$u = u_0(s), \quad v = v_0(s)$$

краевые условия для функций комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, согласно (1.43), (так как $2\mu = E/(1+\sigma)$) примут вид

$$\Lambda\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\chi'(z)} = \frac{E}{1-\sigma}\,[u_0(s) + iv_0(s)]. \qquad (1.45')$$

Итак, решение основных плоских задач теории упругости свелось к определению двух функций комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ при двух типах краевых условий (1.45) или (1.45′) [1].

[1]) Заметим, что при заданном напряженном состоянии или заданных перемещениях функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, согласно (1.36) и (1.43), имеют некоторый произвол, который можно устранять в различных краевых задачах разными путями, например с помощью фиксирования значений самих функций или их мнимых частей в определенных точках.

Первая краевая задача имеет место, когда на границе тела заданы напряжения и граничные условия для $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ определены в форме (1.45). Вторая краевая задача имеет место при граничном условии (1.45′) (на границе тела заданы перемещения). Смешанная задача имеет место в том случае, когда на некоторой части границы имеется граничное условие (1.45), а на остальной части границы — условие (1.45′).

Переход к криволинейным координатам, связанным с конформным отображением

Иногда для решения этих краевых задач теории функций комплексного переменного, поставленных для некоторой известной области $\mathcal{D}$, ограниченной контуром C в плоскости $z = x + iy$, удобно пользоваться заменой переменных, связанной с конформным отображением $\zeta = f(z)$ области $\mathcal{D}$ на некоторую простую вспомогательную область $\mathcal{D}'$ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, и получать решение в параметрической форме с помощью переменной ζ.

Если область $\mathcal{D}$ ограничена одним замкнутым контуром C, то в качестве области $\mathcal{D}'$ можно выбирать внутренность или внешность круга единичного радиуса и проводить решение краевой задачи, сформулированной для новой переменной ζ, в полярной системе координат, а для переменной z — в криволинейной ортогональной системе координат, в координатные линии которой переходят координатные линии полярной системы координат в плоскости ζ при рассматриваемом конформном отображении.

В связи с этим посмотрим, как преобразуются компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в плоскости z при переходе от декартовой системы координат x и y к указанной криволинейной системе координат; установим вид зависимости компонент тензора напряжений и вектора перемещений в этой криволинейной системе координат от вспомогательной комплексной переменной ζ и сформулируем граничные условия, которым должны удовлетворять искомые функции комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ в плоскости ζ на единичном круге, соответствующем границе C в плоскости z.

Заметим, что применение конформных отображений $\zeta = \xi + i\eta = f(z)$, $z = \varkappa(\zeta)$ в плоской задаче теории упругости отличается по своему смыслу и результатам от применения конформных отображений в плоской задаче гидродинамики. Это связано с тем, что, в противоположность гармоническим функциям, бигармонические функции $U(x, y)$ в результате конформного преобразования, т. е. после замены x и y через ξ и η, в общем случае перестают удовлетворять бигармоническому уравнению в переменных ξ, η. Однако формула Гурса (1.35) позволяет просто определять вид функций, в которые переходят бигармонические функции в плоскости z после

конформного преобразования $z = \varkappa(\zeta)$:

$$U(\xi, \eta) = \overline{\varkappa(\zeta)}\,\varphi(\zeta) + \varkappa(\zeta)\,\overline{\varphi(\zeta)} + \chi(\zeta) + \overline{\chi(\zeta)},$$

где через $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ вновь обозначены аналитические функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, соответственно, после замены в них переменной z через ζ согласно конформному отображению $z = \varkappa(\zeta)$. Очевидно, что функцию $U(\xi, \eta)$ нельзя рассматривать как соответствующую функцию напряжений Эри для области $\mathscr{D}'$ в плоскости ζ, в которую в результате конформного преобразования переходит область $\mathscr{D}$ в плоскости z.

Рассмотрим теперь подробно случай, когда конформное соответствие области $\mathscr{D}$ в плоскости z и внешности или внутренности единичного круга $\mathscr{D}'$ в плоскости ζ однозначно установлено с помощью функции комплексного переменного

$$z = \varkappa(\zeta), \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Начало координат O выберем в центре круга. Если $\mathscr{D}$ — односвязная конечная область, ограниченная замкнутым контуром C в плоскости z, то удобнее производить конформное отображение на внутренность единичного круга в плоскости ζ и считать, что некоторая внутренняя точка, выбранная за начало координат $z = 0$, соответствует точке $\zeta = 0$. Кривые $\rho(x, y) = \text{const}$ в плоскости z, соответствующие окружностям $\rho = \text{const}$ в плоскости ζ, будут замкнутыми линиями, окружающими точку $z = 0$. Кривые $\theta(x, y) = \text{const}$ в плоскости z — образы лучей $\theta = \text{const}$ в плоскости ζ будут все выходить из точки $z = 0$ и кончаться на C. Контур C будет соответствовать окружности $\Gamma(\rho = 1)$. Если $\mathscr{D}$ — бесконечная область, границей которой является один замкнутый контур C, то отображение можно производить на внешность единичного круга в плоскости ζ, считая, что точки $z = \infty$ и $\zeta = \infty$ соответствуют друг другу. Линии $\rho(x, y) = \text{const}$ будут охватывать контур C, а линии $\theta(x, y) = \text{const}$ начинаться на C и уходить в бесконечность.

Через каждую точку A области $\mathscr{D}$ в плоскости z проходят две ортогональные линии

$$\rho(x, y) = \text{const} \quad \text{и} \quad \theta(x, y) = \text{const};$$

примем их за координатные линии $\theta(x, y)$ и $\rho(x, y)$ соответственно. Направления вдоль координатных линий $\rho(x, y)$ и $\theta(x, y)$ будем отсчитывать в сторону роста $\theta(x, y)$ и $\rho(x, y)$ соответственно (рис. 166). Введем в плоскости z векторы базиса $\boldsymbol{e}_1 = \partial \boldsymbol{r}/\partial\rho$ и $\boldsymbol{e}_2 = \partial \boldsymbol{r}/\partial\theta$. Очевидно, что направления единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ декартовой системы координат x и y совпадут с направлениями $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ в некоторой точке A ($z = \varkappa(\zeta) = \varkappa(\rho e^{i\theta})$), если их повернуть на угол α, который составляет вектор базиса $\boldsymbol{e}_1$ с осью x в рассматриваемой точке A.

Подсчитаем коэффициент $e^{i\alpha}$, на который следует умножить комплексное число, заданное в плоскости z, для того, чтобы получить соответствующее комплексное число в комплексной плоскости, определяемой векторами ϑ_1 и ϑ_2, рассматриваемыми

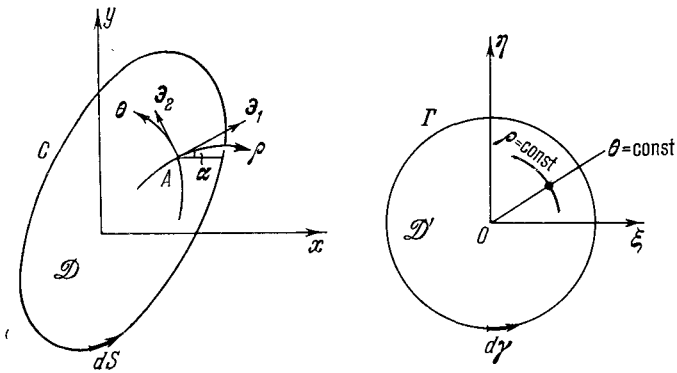


Рис. 166. Конформное отображение и криволинейная система координат $\rho\,(x, y)$ и $\theta\,(x, y)$.

в данной точке A. Рассмотрим отрезок dz вдоль координатной линии $\rho\,(x, y)$ в плоскости z. Очевидно, что

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\varkappa'(\zeta)\,d\zeta}{|\varkappa'(\zeta)|\,|d\zeta|}.$$

Но отрезок $d\zeta$, который соответствует в плоскости ζ отрезку dz, лежит вдоль луча $\theta = \text{const}$, поэтому

$$\frac{d\zeta}{|d\zeta|} = \frac{\zeta}{|\zeta|}.$$

Отсюда для величины α имеем

$$e^{2i\alpha} = \frac{dz^2}{|dz|^2} = \frac{\varkappa'(\zeta)\,\varkappa'(\zeta)}{\varkappa'(\zeta)\,\overline{\varkappa'(\zeta)}}\,\frac{\zeta^2}{\zeta\bar{\zeta}} = \frac{\zeta^2}{\rho^2}\,\frac{\varkappa'(\zeta)}{\overline{\varkappa'(\zeta)}}. \qquad (1.46)$$

Физические компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в криволинейной системе координат

Обозначим через p_ρ, p_θ, $p_{\rho\theta}$ физические компоненты тензора напряжений в ортогональной криволинейной системе координат ρ, θ в плоскости z.

На основании формул преобразования компонент тензора при переходе от декартовой системы координат x, y к декартовой системе координат, повернутой в каждой точке A плоскости z относительно x, y на угол

$\alpha\ (x,\ y)$, получим

$$\left.\begin{aligned} p_\rho &= p_{11}\cos^2\alpha + p_{22}\sin^2\alpha + 2p_{12}\cos\alpha\sin\alpha,\\ p_\theta &= p_{22}\cos^2\alpha + p_{11}\sin^2\alpha - 2p_{12}\cos\alpha\sin\alpha,\\ p_{\rho\theta} &= (p_{22}-p_{11})\sin\alpha\cos\alpha + p_{12}\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1.47)$$

Отсюда непосредственно можно вычислить следующие комбинации физических компонент тензора напряжений в рассматриваемой криволинейной системе координат:

$$\left.\begin{aligned} &p_\rho + p_\theta = p_{11} + p_{22},\\ &p_\theta - p_\rho + 2ip_{\rho\theta} = e^{2i\alpha}(p_{22} - p_{11} + 2ip_{12}). \end{aligned}\right\} \qquad (1.48)$$

Обозначим через u_ρ, u_θ физические компоненты вектора перемещений в криволинейной системе координат $\rho\ (x,\ y)$, $\theta\ (x,\ y)$. Очевидно, что формулы преобразования от u, v к u_ρ, u_θ имеют вид

$$u_\rho = u\cos\alpha + v\sin\alpha, \quad u_\theta = -u\sin\alpha + v\cos\alpha.$$

Эти формулы удобно представить в виде

$$u_\rho + iu_\theta = e^{-i\alpha}(u + iv). \qquad (1.49)$$

Получим выражения для комбинаций (1.48) и (1.49) физических компонент тензора напряжений и вектора перемещений в системе координат $\rho\ (x,\ y)$ и $\theta\ (x,\ y)$ через комплексное переменное ζ. Для этого во всех функциях комплексного переменного z проведем замену переменной $z = \varkappa(\zeta)$ и сохраним для краткости прежние обозначения для новых функций

$$\varphi(z) = \varphi(\varkappa(\zeta)) = \varphi(\zeta), \quad \psi(z) = \psi(\varkappa(\zeta)) = \psi(\zeta),$$
$$\Phi(z) = \Phi(\varkappa(\zeta)) = \Phi(\zeta), \quad \Psi(z) = \Psi(\varkappa(\zeta)) = \Psi(\zeta).$$

При этом, очевидно, должно быть

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\varkappa'(\zeta)} = \Phi(\zeta), \qquad \psi'(z) = \frac{\psi'(\zeta)}{\varkappa'(\zeta)} = \Psi(\zeta).$$

С помощью (1.48) и (1.37) легко получим

$$\left.\begin{aligned} &p_\rho + p_\theta = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] = 4\operatorname{Re}\Phi(\zeta),\\ &p_\theta - p_\rho + 2ip_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2\overline{\varkappa(\zeta)}}[\overline{\varkappa(\zeta)}\,\Phi'(\zeta) + \varkappa'(\zeta)\Psi(\zeta)]. \end{aligned}\right\} \qquad (1.50)$$

Аналогично (1.49) с помощью (1.43) приведется к виду

$$u_\rho + iu_\theta = \frac{1+\sigma}{E}\frac{\bar\zeta}{\rho}\frac{\overline{\varkappa'(\zeta)}}{|\varkappa'(\zeta)|}\left\{\Lambda\varphi(\zeta) - \frac{\varkappa(\zeta)}{\varkappa'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}\right\}. \qquad (1.51)$$

Граничные условия для функций комплексного переменного в плоскости комплексного переменного ζ

Граничное условие (1.45) в плоскости z на конуре C сводится к следующему граничному условию на контуре Г—окружности $\rho = 1$ в плоскости ζ:

$$\varphi(\zeta) + \frac{\varkappa(\zeta)}{\overline{\varkappa'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = H(\gamma), \tag{1.52}$$

где γ — дуга вдоль Г, а функция $H(\gamma)$ определяется в результате перехода к криволинейным координатам и замены переменной $z = \varkappa(\zeta)$ в правой части (1.45) и может считаться известной, если на контуре C заданы внешние поверхностные силы.

Аналогично граничное условие (1.45′) в перемещениях на контуре C сводится к следующему граничному условию на Г:

$$\Lambda\varphi(\zeta) - \frac{\varkappa(\zeta)}{\overline{\varkappa'(\zeta)}}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = G(\gamma), \tag{1.53}$$

где $G(\gamma)$ определяется в результате перехода к криволинейным координатам и замены переменной $z = \varkappa(\zeta)$ в правой части (1.45′) и может считаться известной.

Таким образом, поставленные выше основные краевые задачи об определении аналитических функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ свелись к задачам об определении функций $\varphi(\varkappa(\zeta)) = \varphi(\zeta)$, $\chi(\varkappa(\zeta)) = \chi(\zeta)$ и $\varkappa(\zeta) = z$ во вспомогательной плоскости комплексного переменного ζ.

§ 2. Концентрация напряжений

Из решения различных задач и из опытов известно, что наличие резких изменений формы поверхности тела может приводить к значительным местным напряжениям, быстро затухающим по мере удаления от границы тела. Определение местных напряжений вблизи резких изменений формы поверхности тела или вблизи мест действия резко изменяющихся по координатам внешних сил составляет содержание проблемы концентрации напряжений.

Всестороннее растяжение плоскости с круговым вырезом

Рассмотрим упругую неограниченную плоскую пластину, всесторонне растягиваемую постоянными напряжениями p_0 на бесконечности. В этом случае в пластине имеет место обобщенное плоское напряженное состояние с равномерным распределением напряжений в плоскости xy, совпадающей со срединной плоскостью пластины:

$$p_{11} = p_{22} = p_0, \quad p_{12} = 0, \quad p_{33} = 0$$

или в цилиндрической системе координат ρ, θ, z

$$p_\rho = p_\theta = p_0, \quad p_{\rho\theta} = 0, \quad p_{zz} = 0.$$

Проведем окружность радиуса a с центром в начале координат и удалим мысленно внутренность круга. Действие мысленно отброшенной части заменим поверхностными силами, приложенными по контуру окружности:

$$p_\rho = p_\theta = p_0, \quad p_{\rho\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = a.$$

Предположим теперь, что внешние напряжения на контуре окружности-выреза медленно (квазистатически) убывают до нуля. В этом случае в пластине произойдет перераспределение напряжений. Определим распределение напряжений в неограниченной равномерно растягиваемой напряжениями $p_0 = \text{const}$ на бесконечности плоской пластине с круговым вырезом радиуса a, на границе которого отсутствуют внешние силы.

Бигармоническое уравнение для определения функции Эри в полярных координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right) = 0.$$

Формулы (1.28), выражающие компоненты тензора напряжений через функцию Эри U в полярной системе координат, имеют вид

$$p_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}, \quad p_\theta = \frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}, \quad p_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right).$$

Очевидно, что напряженное состояние всесторонне растягиваемой пластины с круговым отверстием не зависит от угла θ. Общий интеграл $U(\rho)$ бигармонического уравнения, которое в этом случае сводится к уравнению

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left\{\rho\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dU}{d\rho}\right)\right]\right\} = 0,$$

имеет вид

$$U = A\ln\rho + B\rho^2\ln\rho + C\rho^2 + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Пользуясь этой формулой, получим

$$p_\rho = \frac{A}{\rho^2} + 2B\ln\rho + B + 2C,$$

$$p_\theta = -\frac{A}{\rho^2} + 2B\ln\rho + 3B + 2C,$$

$$p_{\rho\theta} = 0.$$

Из граничных условий на контуре кругового отверстия и в бесконечности

$$p = 0 \text{ при } \rho = a \text{ и } p_\rho = p_0 \text{ при } \rho = \infty$$

найдем, что

$$A = -p_0 a^2, \quad B = 0, \quad 2C = p_0.$$

Поэтому решение рассматриваемой задачи в напряжениях представится формулами

$$p_\rho = p_0\left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right),$$

$$p_\theta = p_0\left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right),$$

$$p_{\rho\theta} = 0, \quad p_{zz} = 0.$$

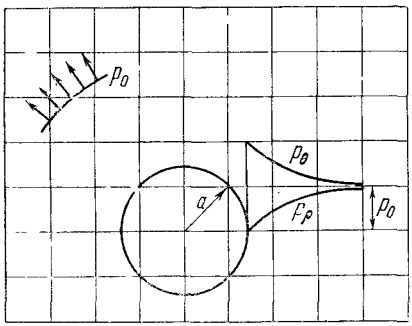


Рис. 167. Эпюры напряжений p_ρ, p_θ вдоль $\theta = \text{const}$ в неограниченной всесторонне растягиваемой плоской пластине с круговым вырезом $\rho = a$.

На рис. 167 построены эпюры напряжений p_ρ, p_θ вдоль луча $\theta = \text{const}$.

Характерно, что компонента напряжения p_θ возрастает при подходе к границе кругового выреза, причем максимальное значение p_θ достигается на границе вырезанной окружности

$$p_{\theta\,\max} = 2p_0 = 2(p_\theta)_\infty \text{ при } \rho = a.$$

Так как $p_{\rho\theta} = 0$, компоненты p_θ, p_ρ и p_{zz} являются главными компонентами тензора напряжений. При $\rho = a$ $p_\theta > p_\rho = p_{zz} = 0$ и наибольшее касательное напряжение τ в каждой точке выреза определяется формулой (см. § 4 гл. X)

$$\tau = \frac{p_\theta - p_{zz}}{2} = p_0.$$

При $a < \rho < \infty$ $p_\theta > p_\rho > p_{zz} = 0$, $p_\theta < 2p_0$ и

$$\tau = \frac{p_\theta - p_{zz}}{2} < p_0.$$

Наконец, в бесконечности $p_\theta = p_\rho = p_0$, $p_{zz} = 0$ и

$$\tau = \frac{p_\theta - p_{zz}}{2} = \frac{p_0}{2}.$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение

$\tau_{max} = p_0$ достигается в точках границы вырезанной окружности на бесконечном числе площадок, касающихся кругового конуса с вершиной в рассматриваемой точке контура выреза с углом раствора 90° и осью θ.

Выше дано полное решение задачи в напряжениях для обобщенного плоского напряженного состояния; в случае плоского деформированного состояния решение в напряжениях для p_ρ, p_θ и $p_{\rho\theta}$ будет тем же самым, однако p_{zz} будет отлично от нуля. При этом на контуре выреза, так как для обычных материалов $0 < \sigma < (1/2)$, будет верно неравенство $p_\theta > p_{zz} > p_\rho = 0$ (см. (1.17)). Поэтому на границе выреза наибольшее касательное напряжение будет в этом случае равно

$$\tau = \frac{p_\theta - p_\rho}{2} = p_0.$$

В бесконечности $p_\theta = p_\rho$ $p_0 = > p_{zz}$ и

$$\tau = \frac{p_0(1-2\sigma)}{2}.$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение $p_{\tau max} = p_0$ достигается в этом случае также в точках границы выреза, но на площадках, проходящих через ось z и наклоненных к радиусу под углом $\pm 45°$.

Найденные выше решения двух задач теории упругости в напряжениях хорошо подтверждаются экспериментально, пока в пластине не возникают пластические деформации. Предположим, что пластические деформации возникают при достижении максимальным касательным напряжением своего предельного значения k — предела текучести при сдвиге, т. е. при

$$\tau_{max} = k.$$

В данном случае $\tau_{max} = p_0$ достигается на контуре окружности-выреза. Следовательно, если $p_0 < k$, то напряженное состояние в теле всюду упругое. Пластические деформации появляются впервые на контуре отверстия, когда растягивающие напряжения p_0 на бесконечности становятся равными k ($p_0 = k$).

Одноосное растяжение плоскости с круговым вырезом

Нетрудно обобщить решение предыдущей задачи на случай плоского напряженного состояния, возникающего при одноосном растяжении плоской неограниченной пластины с круговым вырезом $\rho \leqslant a$. При одноосном вдоль оси y растяжении в декартовых координатах имеем следующие условия в бесконечности:

$$p_{11} = 0, \quad p_{22} = p_0, \quad p_{12} = p_{33} = 0.$$

В полярных координатах ρ, θ в плоскости x,y, $z = \rho e^{i\theta}$ эти условия можно записать в виде

$$p_\rho = p_0 \sin^2\theta, \quad p_\theta = p_0 \cos^2\theta, \quad p_{\rho\theta} = \frac{1}{2} p_0 \sin 2\theta,$$
$$p_{zz} = 0 \quad \text{при } \rho = \infty.$$

На границе выреза условие отсутствия внешних сил имеет вид

$$p_\rho = p_{\rho\theta} = 0 \quad \text{при } \rho = a.$$

Решение сформулированной задачи легко получить с помощью подбора функций $\varphi(z)$ и $\psi(z) = \chi'(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, введенных в предыдущем параграфе при решении бигармонического уравнения для функции Эри. Полагая $z = \zeta = \rho e^{i\theta}$ и учитывая принятые выше обозначения $\Phi(\zeta) = \varphi'(z) = \varphi'(\zeta)$, $\psi'(z) = \psi'(\zeta) = \Psi(\zeta)$, перепишем формулы (1.50) в виде

$$p_\rho + p_\theta = 2[\varphi'(\zeta) + \overline{\varphi'(\zeta)}], \tag{2.1}$$

$$p_\theta - p_\rho + 2ip_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2}[\bar{\zeta}\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta)]. \tag{2.2}$$

Легко проверить непосредственно, что условия в бесконечности при $\zeta = \infty$ и на границе выреза при $|\zeta| = \rho = a$ будут удовлетворены, если положить:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4} p_0 \left(\zeta - 2\frac{a^2}{\zeta}\right), \quad \psi(\zeta) = \frac{1}{2} p_0 \left[\zeta - a\left(\frac{a}{\zeta} + \frac{a^3}{\zeta^3}\right)\right]. \tag{2.3}$$

Эти формулы легко установить, если предварительно задаться для функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ разложением в ряды Лорана около бесконечно удаленной точки $\zeta = \infty$. Коэффициенты этих разложений определяются из граничных условий при $\rho = a$ и из условий в бесконечности.

Из формул (2.1) и (2.3) на окружности выреза при $\rho = a$, где $p_\rho = 0$, сразу получим

$$p_\theta = p_0(1 + 2\cos 2\theta).$$

Величина p_θ достигает максимума в точках $\theta = (0, \pi)$; в этих точках

$$p_{\theta\,\max} = 3p_0.$$

Из формул (2.1), (2.2) и (2.3) легко найти компоненты напряжений p_ρ, p_θ и $p_{\rho\theta}$ во всех точках пластины. В частности, на оси x при $|x| \geqslant a$ верны формулы

$$p_\rho = p_{11} = \frac{3}{2} p_0 \left[\left(\frac{a}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{x}\right)^4\right], \quad p_{\rho\theta} = p_{12} = 0$$

и

$$p_\theta = p_{22} = \frac{1}{2} p_0 \left[2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{x}\right)^4\right].$$

На рис. 168 приведены эпюры напряжений p_{11}, p_{22} вдоль оси x и любопытная диаграмма для изменения p_θ вдоль границы кругового выреза.

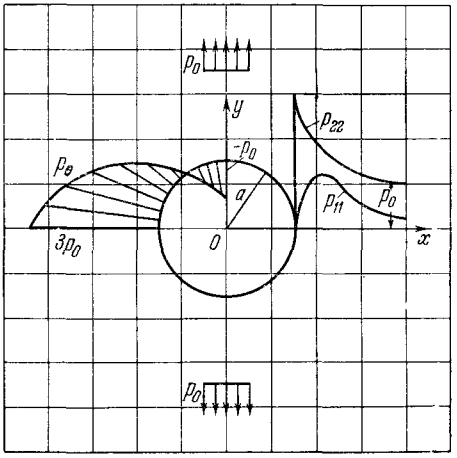


Рис. 168. Эпюры напряжений при одноосном (вдоль оси y) растяжении плоскости с круговым вырезом.

Всестороннее растяжение плоскости с эллиптическим вырезом

Рассмотрим упругую плоскость с эллиптическим отверстием, всесторонне растягиваемую на бесконечности напряжениями $p_0 = \text{const}$. Обозначим полуоси эллипса через a и b $(a > b)$ и выберем оси координат x и y так, чтобы ось x была направлена по большой оси эллипса.

Конформное отображение внешности эллипса в плоскости z на внешность единичного круга в плоскости ζ определяется преобразованием:

$$z = x + iy = \varkappa(\zeta) = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right),$$

$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \xi + i\eta, \qquad 0 < m = \frac{a-b}{a+b} < 1.$$

Следовательно, связь между декартовыми координатами x, y и криволинейными координатами ρ, θ в плоскости z определяется

формулами

$$x = \frac{a+b}{2}\left(\rho + \frac{m}{\rho}\right)\cos\theta, \quad y = \frac{a+b}{2}\left(\rho - \frac{m}{\rho}\right)\sin\theta.$$

Эти криволинейные координаты называются эллиптическими, кривые $\rho = \text{const}$ в плоскости z соответствуют эллипсам

$$\frac{x^2}{\left(\rho + \frac{m}{\rho}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\rho - \frac{m}{\rho}\right)^2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

а кривые $\theta = \text{const}$ — гиперболам

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 4m\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Контур вырезанного отверстия в плоскости z в криволинейной системе координат ρ, θ соответствует эллипсу $\rho = 1$. На границе выреза, так как она по условию свободна от внешних сил, имеем следующие граничные условия:

$$p_\rho = 0, \quad p_{\rho\theta} = 0 \quad \text{при } \rho = 1.$$

Легко проверить, что функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в данном случае определяются формулами:

$$\varphi(\zeta) = \frac{p_0(a+b)}{4}\left(\zeta - \frac{m}{\zeta}\right),$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{p_0(a+b)(1+m^2)}{2}\frac{\zeta}{\zeta^2 - m}.$$

Согласно (1.50) при этом будем иметь

$$p_\rho + p_\theta = 2p_0\frac{(\zeta^2\bar{\zeta}^2 - m^2)}{(\zeta^2 - m)(\bar{\zeta}^2 - m)} = 2p_0\frac{\rho^4 - m^2}{\rho^4 - 2m\rho^2\cos 2\theta + m^2},$$

$$p_\theta - p_\rho + 2ip_{\rho\theta} = \frac{2p_0\rho^2}{(\bar{\zeta}^2 - m)(\zeta^2 - m)^2}\left[(1+m^2)(m+\zeta^2) - 2\zeta m\left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\zeta}\right)\right].$$

Отсюда нетрудно найти напряжения как функции криволинейных координат ρ, θ или декартовых координат x, y. В частности, на контуре эллиптического отверстия ($\rho = 1$) имеем

$$p_\theta = p_0\frac{2(1-m^2)}{1 - 2m\cos 2\theta + m^2}.$$

Очевидно, что напряжение p_θ на контуре отверстия достигает максимума в точках, соответствующих концам большой полу-

оси эллипса ($\rho = \pm 1$; $\theta = 0, \pi$; $x = \pm a$, $y = 0$), причем

$$(p_\theta)_{\max} = 2p_0 \frac{1+m}{1-m} = 2p_0 \frac{a}{b}. \qquad (2.4)$$

Приведем также формулы для распределения напряжений вдоль положительной оси x

$$p_\rho = p_{11} = \frac{p_0 x (x^2 - a^2)}{(x^2 - a^2 + b^2)^{3/2}},$$

$$p_\theta = p_{22} = \frac{p_0 x (x^2 - a^2 + 2b^2)}{(x^2 - a^2 + b^2)^{3/2}},$$

$$p_{\rho\theta} = p_{12} = 0.$$

На рис. 169 построены эпюры напряжений p_{11}, p_{22} вдоль оси x

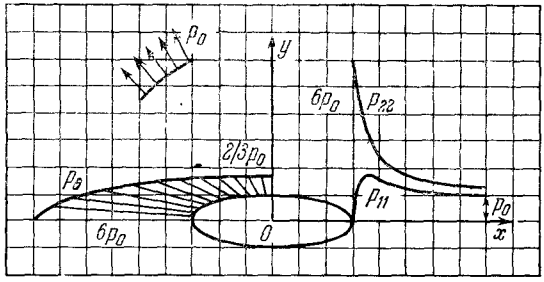


Рис. 169. Эпюры напряжений при всестороннем растяжении неограниченной пластины с эллиптическим вырезом ($(a/b) = 3$, $m = (1/2)$).

и изменение p_θ вдоль контура эллиптического выреза при $(a/b)=3$, $m=(1/2)$. Для заданного не слишком большого p_0 полученные распределения напряжений хорошо отвечают опыту для всех $(b/a) > \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. При $b \to 0$, когда эллиптический вырез вырождается в прямолинейный разрез в точках $x = \pm a$, $y = 0$, значение $p_\theta = (p_\theta)_{\max}$ обращается в бесконечность.

Одноосное растяжение плоскости с эллиптическим вырезом

Рассмотрим упругую плоскость с эллиптическим отверстием, растягиваемую на бесконечности усилиями p_0 под углом θ_0 к оси x (рис. 170). Нетрудно проверить, что решение этой задачи получается с помощью функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, которые определяются формулами:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4} p_0 \frac{a+b}{2} \left\{ \zeta + 2 \frac{e^{i2\theta_0} - m}{\zeta} \right\},$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{p_0}{2} \frac{a+b}{2} \left[\zeta e^{-2i\theta_0} + \frac{e^{2i\theta_0}}{m\zeta} - \frac{(1+m^2)(e^{2i\theta_0} - m)}{m} \frac{\zeta}{\zeta^2 - m} \right].$$

Как и раньше, с помощью общих формул (1.50) можно найти поле напряжений. На контуре эллипса при $\rho = 1$ будем иметь

$$p_\rho = p_{\rho\theta} = 0,$$
$$p_\theta = p_0 \frac{1 - m^2 + 2m\cos 2\theta_0 - 2\cos 2(\theta + \theta_0)}{1 - 2m\cos 2\theta + m^2}.$$

Отсюда видно, что при $m = 2$, т. е. в случае прямолинейного разреза, при любых $\theta_0 \neq 0$ или π в точках $\rho = 1$ и $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (т. е. на концах разреза) $p_\theta = \infty$.

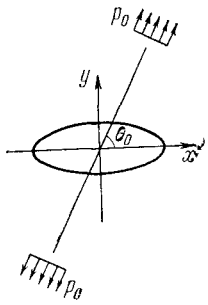


Рис. 170. Одноосное растяжение неограниченной пластины с эллиптическим вырезом.

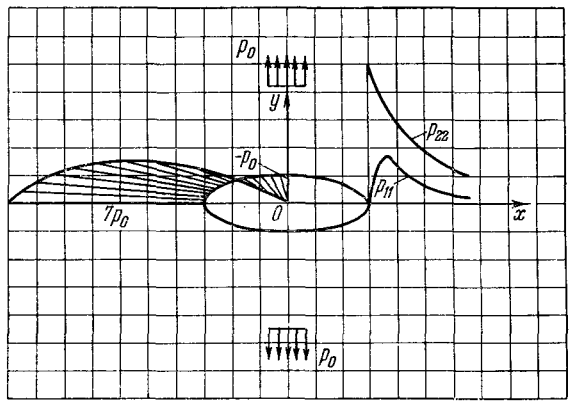


Рис. 171. Эпюры напряжений при одноосном растяжении неограниченной пластины с эллиптическим вырезом ($(a/b) = 3$, $m = (1/2)$).

Предположим, что растяжение происходит в направлении оси y ($\theta_0 = \pm \pi/2$), тогда

$$p_\theta = p_0 \frac{1 - m^2 - 2m + 2\cos 2\theta}{1 - 2m\cos 2\theta + m^2}.$$

Напряжение p_θ достигает максимума на контуре отверстия [1]) в точках $\rho = 1$, $\theta = 0$, π, $x = \pm a$, $y = 0$, причем

$$(p_\theta)_{\max} = p_0 \frac{3 + m}{1 - m} = \left(1 + 2\frac{a}{b}\right) p_0. \qquad (2.5)$$

[1]) Так как все компоненты напряжений в декартовой системе координат представляют собой бигармонические функции, то по основному свойству таких функций максимальные значения компонент напряжения достигаются на границе области; аналогичное положение встречается в гидродинамике (см. стр. 162).

На рис. 171 построены эпюры напряжений p_{11}, p_{22} вдоль оси x и изменение p_θ вдоль границы эллиптического выреза при $(a/b) = 3$, $m = (1/2)$.

О концентрации напряжений в случае вытянутого эллипса — щели

В рассмотренных задачах о растяжении плоскости с эллиптическим вырезом при $b \neq 0$ напряжения получаются везде конечными и хорошо согласуются с опытными данными, если p_0 не слишком велико, т. е. когда всю пластину можно рассматривать как упругое тело.

Предположим, что p_0 и a фиксированы, а b убывает. В этом случае, как видно из (2.4) и (2.5), $(p_\theta)_{\max}$ возрастает и при $b \to 0$, $(p_\theta)_{\max} \to \infty$. Таким образом, в полученном решении на концах прямолинейной щели (в которую вырождается эллипс при $b \to 0$) напряжение p_θ становится сколь угодно большим при любом конечном значении растягивающих напряжений p_0 в бесконечности.

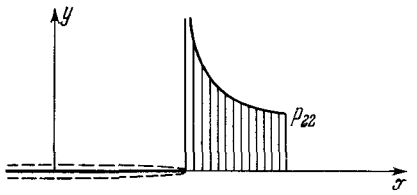


Рис. 172. Характер распределения напряжения вблизи конца щели согласно решению линейной теории упругости.

В реальном материале напряжения не могут превосходить вполне определенных пределов, поэтому подобный результат линейной теории упругости нуждается в дополнительном обсуждении. В местах очень больших напряжений, высокой концентрации напряжений, линейная теория упругости, вообще говоря, неприложима. Для уточненного описания реальных явлений в этих областях необходимо учитывать эффекты нелинейной теории упругости, пластичности и ползучести материала. Кроме этого, большое влияние на величину внутренней энергии и других термодинамических функций и на механическое поведение материалов в этих местах могут оказывать не только сами деформации, но и их градиенты, что не учитывается в обычной теории, использующей для определения напряжений закон Гука.

Для некоторых материалов распределение напряжений вблизи концов щели существенно связано с эффектами, описываемыми в рамках нелинейной теории упругости [1]). Используя уравнения геометрически и динамически нелинейной теории упругости, можно получить конечные значения напряжений вблизи конца щели. Даже в рамках линейной теории упругости с ис-

[1]) Вид деформированных контуров у края (пунктир) на рис. 172 и на последующих рисунках соответствует экстраполяции упругих решений вплоть до края; в действительности форма разрыва у края связана с усложненными реологическими свойствами материала, проявляющимися в этой области.

пользованием закона Гука, если решать нелинеаризированную задачу и удовлетворять граничным условиям на деформированной поверхности (а не на разрезе, как в линеаризованной задаче), напряжения получатся везде конечными, но, вообще говоря, очень большими у края щели. Таким образом, *неограниченное возрастание компонент напряжений при приближении к краю щели* связано не только с использованием линейного закона Гука, но это есть *результат приближенного способа решения* задачи. Отметим также, что рассмотренный эффект обращения напряжений в бесконечность на острых краях щели также тесно связан с сильной идеализацией реального разрыва, в конце которого радиус кривизны отличен от нуля.

В то же время, как показывают расчеты и данные опыта, размер зоны, в которой проявляются указанные выше усложненные физические особенности реальных материалов, во многих случаях, вообще говоря, весьма мал. Эксперименты показывают, что уже в достаточной близости от концов щели линейная теория упругости и указанные выше решения правильно описывают распределение напряжений. Например, для стали у острых кромок характерный размер зоны, в которой действительные характеристики состояний существенно отличаются от теоретически рассчитанных по линейной теории упругости, имеет порядок полмиллиметра [1]).

Обращение компонент напряжений в бесконечность у конца щели не следует рассматривать как коренное противоречие результатов линейной теории упругости в этой задаче опытам. Наоборот, в рамках линейной теории упругости и сильно упрощенной схематизированной постановки задачи это обстоятельство является хорошим отражением действительности. Использование модели линейно упругого тела в этой задаче, так же как и широко используемые идеализации во многих других случаях (абсолютно твердое тело, поверхности сильных разрывов, явление удара и т. д.), связано с некоторыми эффектами, которые в той или иной степени противоречат опыту. Важно, однако, чтобы такие противоречия не имели существенного значения для распределения искомых величин в основной части тела и для получения нужных выводов при решении поставленных задач [2]).

Рассмотрим теперь подробно характер напряженного и деформированного состояния вблизи концов щели, когда на бере-

[1]) См. Г. Нейбер, Концентрация напряжений, ОГИЗ, 1947, стр. 193.

[2]) Небесполезно подчеркнуть, что появление в расчетных данных схематизированных задач теории упругости больших или даже бесконечных напряжений не обязательно приводит в действительности к общему или местному разрушению материала.

гах щели действуют произвольные поверхностные силы с главным вектором и главным моментом, равными нулю.

Разделение общей статической задачи о напряженно-деформированном состоянии тела со щелью на частные задачи

Решение статической задачи линейной теории упругости об определении напряженного и деформированного состояний в некотором теле со щелью под действием заданной системы внешних нагрузок, которую мы назовем задачей $\mathfrak{A}$, можно искать как сумму решений двух следующих *статических* задач: задачи $\mathfrak{B}$ об определении напряженного и деформированного состояний в сплошном теле без щели под действием заданной системы внешних нарузок за

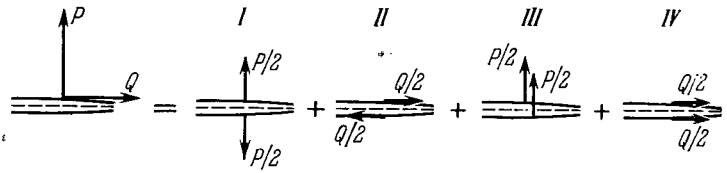


Рис. 173. Виды симметричных нагрузок на элементах противоположных берегов щели: I — нормальная симметричная нагрузка, II — касательная антисимметричная нагрузка, III — нормальная антисимметричная и IV — касательная симметричная нагрузка.

вычетом внешних сил, действующих на бортах щели, и задачи $\mathfrak{C}$ об определении напряженного и деформированного состояний в том же теле со щелью, когда только по берегам щели действуют внешние поверхностные силы. Эти силы слагаются из внешних нагрузок, действующих по берегам щели в исходной задаче $\mathfrak{A}$, и из сил, равных по величине и противоположных по направлению силам напряжений, возникающих в местах берегов щели в задаче $\mathfrak{B}$.

Очевидно, что решение задачи $\mathfrak{B}$ в точках, соответствующих концам щели, не будет иметь особенностей, поэтому характер особенностей в распределении напряжений в исходной задаче $\mathfrak{A}$ будет совпадать с особенностями распределения напряжений в задаче $\mathfrak{C}$.

Произвольную нагрузку, действующую на любом элементе берега щели, можно представить как сумму четырех типов симметричных нагрузок, изображенных на рис. 173, приложенных в соответствующих точках противоположных берегов щели. Таким образом, в случае прямолинейной щели $|x| \leqslant a$, $y = 0$ решение указанной выше задачи $\mathfrak{C}$ (для произвольного статически эквивалентного нулю распределения внешних нагрузок по берегам щели) можно представить как соответствующую сумму решений некоторых частных задач $\mathfrak{C}$ для таких частных распределений нагрузок, в которых нормальные и касательные

поверхностные нагрузки в соответствующих точках противоположных берегов щели одинаковы по величине. При этом разбиении будут отличаться друг от друга только четыре частные за-

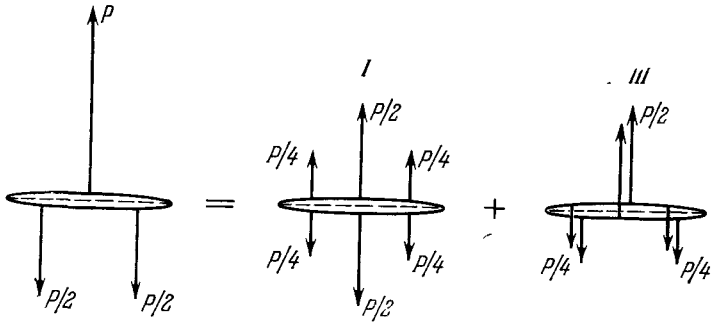


Рис. 174. Пример разбиения конкретной задачи $\mathfrak{C}$ на частные виды задач $\mathfrak{C}$.

дачи $\mathfrak{C}$I, $\mathfrak{C}$II, $\mathfrak{C}$III, $\mathfrak{C}$IV, в которых на соответствующих элементах противоположных берегов щели действуют нагрузки только одного из четырех типов, указанных на рис. 173. Очевидно, что в случае полной статически уравновешенной системы сил на щели в каждой из этих четырех задач также получится статически уравновешенная система сил. Пример такого разбиения для определенной задачи приведен на рис. 174. Если в исходной задаче $\mathfrak{A}$ щель была свободна от напряжений, то для решения соответствующей общей задачи $\mathfrak{C}$ достаточно рассмотреть только два типа (I и II) частных задач $\mathfrak{C}$.

Щель в бесконечной плоскости

Для изучения особенности решения вблизи концов щели вместо тела-пластины конечных размеров со щелью рассмотрим бесконечную плоскость, ослабленную прямолинейной щелью $|x| \leqslant a$, $y = 0$, и предположим, что берега щели свободны от внешних напряжений. Для выяснения поведения напряжений в этом случае достаточно подробно рассмотреть только две задачи $\mathfrak{C}$I и $\mathfrak{C}$II, в постановку которых в этом случае будет входить требование об отсутствии напряжений в бесконечности (при $z = \infty$ $p_{ij} = 0$).

Щель под действием нормальной симметричной нагрузки

Рассмотрим задачу $\mathfrak{C}$I. Предположим, что на берегах щели $|x| \leqslant a$, $y = 0$ действует некоторая нормальная нагрузка, симметрично распределенная относительно оси x (рис. 175). Граничные условия на берегах щели в данном случае имеют вид

$$p_{22}^{(2)} = p_{22}^{(1)} = -g(x), \quad p_{12}^{(1)} = p_{12}^{(2)} = 0 \quad \text{при } |x| \leqslant a, \ y = 0, \tag{2.6}$$

где $g(x)$ — известная конечная функция.

Основываясь на том, что $p_{12} = 0$ при $|x| \leqslant a$, $y = 0$, будем искать решение в предположении, что

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} Z_I(z), \quad \Psi(z) = -\frac{1}{2} z Z_I'(z), \quad Z_I' = \frac{dZ_I}{dz},$$

где $Z_I(z)$ — неизвестная функция. Тогда из (1.36) получим

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I', \\ p_{22} &= \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z_I', \\ p_{12} &= -y \operatorname{Re} Z_I'. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

На основании общей формулы (1.43) для плоской деформации в рассматриваемом случае получаются следующие простые формулы для перемещений [1]):

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u &= (1 - 2\sigma) \operatorname{Re} Z_I^0 - y \operatorname{Im} Z_I, \\ 2\mu v &= 2(1 - \sigma) \operatorname{Im} Z_I^0 - y \operatorname{Re} Z_I, \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

где Z_I^0 — функция, определенная условием $Z_I = dZ_I^0/dz$. На

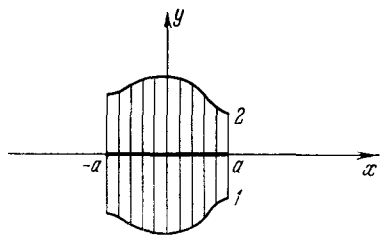


Рис. 175. Симметрично распределенная по берегам щели нормальная нагрузка. Величины, относящиеся к верхнему борту, отмечены индексом (2), а к нижнему — индексом (1).

основании (2.7) граничное условие (2.6) на берегах щели $|x| \leqslant a$, $y = 0$ принимает вид $\operatorname{Re} Z_I = -g(x)$ при $|x| \leqslant a$, $y = 0$. Для получения решения рассматриваемой задачи достаточно найти регулярную вне разреза, убывающую на бесконечности функцию комплексного переменного $Z_I(z)$, действительная часть которой принимает при данном x одинаковые заданные значения на берегах разреза $|x| \leqslant a$, $y = 0$.

Если принять, что в бесконечности перемещения, определяемые формулами (2.8), равны нулю, то согласно (2.8) функция $Z_I(z)$ должна иметь на бесконечности порядок по крайней мере $1/z^2$. Решение таким образом сформулированной задачи об определении функции $Z_I(z)$ по заданной действительной части на

[1]) В случае обобщенного плоского напряженного состояния для перемещений в срединной плоскости получаются такие же формулы, в которых $1-2\sigma$ и $1-\sigma$ следует заменить на $(1 - \sigma)/(1 + \sigma)$ и $1/(1 + \sigma)$ соответственно.

разрезе дается формулой [1])

$$Z_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{g(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi. \tag{2.9}$$

В силу единственности решения сформулированной задачи эта формула определяет искомое решение задачи. С помощью (2.9) и (2.7) легко вычислить искомые компоненты напряжений в любой точке плоскости z.

Асимптотические выражения для компонент напряжений и перемещений вблизи концов щели

На основании формулы (2.9) легко определить поведение решения вблизи обоих концов щели. Вблизи правого края щели положим $z - a = re^{i\vartheta}$, где r — малая величина. Из (2.9) следует, что при малых $r = |z - a|$ верна асимптотическая формула:

$$Z_{\mathrm{I}}(z) = \frac{k_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi(z-a)}}, \quad \text{где } k_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} g(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi. \tag{2.10}$$

Величина k_{I} вообще отлична от нуля. Для частных случаев, когда функция $g(x)$ имеет специальный вид, постоянная k_{I} может обращаться в нуль.

Из (2.10) и (2.7) найдем искомые асимптотические выражения для напряжений

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= k_{\mathrm{I}} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin\frac{\vartheta}{2} \sin\frac{3\vartheta}{2}\right), \\ p_{22} &= k_{\mathrm{I}} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \sin\frac{\vartheta}{2} \sin\frac{3\vartheta}{2}\right), \\ p_{12} &= k_{\mathrm{I}} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{3\vartheta}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Соответствующие асимптотические выражения для перемещений в случае плоской деформации имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{k_{\mathrm{I}}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\vartheta}{2} \left(1 - 2\sigma + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right), \\ v &= \frac{k_{\mathrm{I}}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\vartheta}{2} \left(2 - 2\sigma - \cos^2\frac{\vartheta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

[1]) Эффективное построение функции (2.9) дано Л. И. Седовым в 1934 г. см., например, «Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики», М.— Л., 1950 г., стр. 51, формула (1.9). Формула (1.9) отличается от (2.9) только множителем i, так как здесь задана не мнимая, а действительная часть искомой функции.

Видно, что асимптотические выражения для компонент напряжений и перемещений вблизи концов щели зависят только от значения величины k_{I}. Можно показать, что поведение решения у концов щели в конечных пластинах имеет тот же вид. Для конечных пластин граничные условия и расположение щели в случае действия на берегах щели симметричной нормальной нагрузки определяют в асимптотических формулах у каждого края щели соответствующий параметр k_{I} — коэффициент интенсивности напряжений [1]). Из линейности задачи следует, что если нагрузки возрастают пропорционально некоторому параметру, то коэффициент интенсивности напряжений возрастает пропорционально тому же параметру. В общем случае для данной щели $k_{\mathrm{I}} \neq 0$ даже при сколь угодно малых внешних нагрузках, наличие концентрации напряжений при малых нагрузках хорошо отвечает действительности и, вообще говоря, не связано с разрушением.

Щель под действием касательной антисимметричной нагрузки

Рассмотрим теперь задачу $\mathfrak{C}$ II, когда по берегам прямолинейной щели $|x| \leqslant a$, $y = 0$ распределена антисимметричная касательная нагрузка (рис. 176). В этом случае граничные условия на берегах щели в задаче $\mathfrak{C}$ имеют вид

$$p_{22} = 0, \quad p_{12} = -h(x) \quad \text{при } |x| \leqslant a, \ y = 0. \tag{2.13}$$

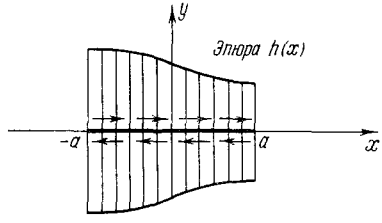


Рис. 176. Распределение антисимметричной касательной нагрузки по берегам прямолинейной щели

Условия (2.13) будут частично удовлетворены, если положить

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{i}{2} Z_{\mathrm{II}}(z), \\ \Psi(z) &= \frac{i}{2}(2Z_{\mathrm{II}} + zZ'_{\mathrm{II}}), \\ Z'_{\mathrm{II}} &= \frac{dZ_{\mathrm{II}}}{dz}, \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

где $Z_{\mathrm{II}}(z)$ — искомая функция, регулярная вне разреза и исчезающая в бесконечности. Из (1.36) получим

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= 2\,\mathrm{Im}\, Z_{\mathrm{II}} + y\,\mathrm{Re}\, Z'_{\mathrm{II}}, \\ p_{22} &= -y\,\mathrm{Re}\, Z'_{\mathrm{II}}, \\ p_{12} &= \mathrm{Re}\, Z_{\mathrm{II}} - y\,\mathrm{Im}\, Z'_{\mathrm{II}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

[1]) Физическое значение параметра k_{I} было подробно проанализировано Ирвином и положено в основу его теории трещин (1957 г.).

Для компонент вектора перемещений в случае плоской деформации будем иметь

$$\left.\begin{aligned} 2\mu u &= 2(1-\sigma)\operatorname{Im} Z_{II}^0 + y \operatorname{Re} Z_{II}, \\ 2\mu v &= -(1-\sigma)\operatorname{Re} Z_{II}^0 - y \operatorname{Im} Z_{II}, \\ \text{где} \quad Z_{II} &= \frac{dZ_{II}^0}{dZ}. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Согласно (2.15) граничные условия (2.13) на берегах щели примут вид

$$\operatorname{Re} Z_{II} = -h(x) \quad \text{при } |x| \leqslant a,\ y = 0.$$

Очевидно, что искомая функция $Z_{II}(z)$, имеющая порядок $1/z^2$ в бесконечности, определяется также формулой (2.9), в которую вместо $g(x)$ следует подставить $h(x)$.

Асимптотические выражения для компонент напряжений и перемещений вблизи концов щели

Асимптотическая формула для $Z_{II}(z)$ вблизи точки $z = a$ имеет вид

$$Z_{II}(z) = \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(z-a)}},$$

$$\text{где } k_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} h(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\, d\xi. \tag{2.17}$$

С помощью (2.17) и (2.15) получим асимптотические формулы для компонент тензора напряжений в этом случае

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\vartheta}{2}\left(2 + \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{3\vartheta}{2}\right), \\ p_{22} &= \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{3\vartheta}{2}, \\ p_{12} &= \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\vartheta}{2}\left(1 - \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{3\vartheta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Соответствующие асимптотические формулы для компонент вектора перемещений в случае плоской деформации имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{k_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\vartheta}{2}\left(2 - 2\sigma + \cos^2\frac{\vartheta}{2}\right), \\ v &= \frac{k_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\vartheta}{2}\left(1 - 2\sigma + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

При некоторых частных распределениях внешних нагрузок, особых размерах тела для данных нагрузок или подходящих размерах щели могут получиться решения, в которых k_I

или k_{II} обращаются в нуль. Однако во многих случаях, отвечающих действительности, при описании состояний равновесия тел у краев щели имеет место концентрация напряжений и постоянные k_I и k_{II} отличны от нуля.

С помощью аналогичных приемов с использованием функций комплексного переменного и формулы вида (2.9) легко решить задачи $\mathfrak{C}$ типа III и IV, при этом у краев щели возникают особенности в распределении напряжений такого же вида, как и в задачах I и II.

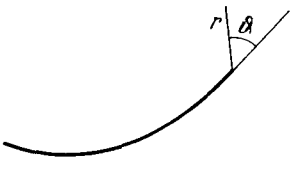


Рис. 177. Криволинейная щель.

Очевидно, что при наличии массовых сил, подобных силе тяжести или системе сил инерции, при решении соответствующей динамической задачи теории упругости получится распределение напряжений, для которого вблизи концов щели будут иметь место асимптотические формулы с k_I и k_{II} вообще не равными нулю. В динамических задачах k_I и k_{II} зависят от переменных во времени внешних заданных поверхностных и массовых сил и от поля сил инерции. Учет тепловых эффектов в общем случае не изменяет поведения напряжений вблизи концов щели.

Мы рассмотрели случай прямолинейной щели. В общем случае щели могут быть криволинейными (рис. 177). Можно показать, что в случае плоской деформации для криволинейных щелей асимптотические формулы для компонент тензора напряжений и вектора перемещений (2.11), (2.18), (2.12), (2.19) сохраняют свой вид в локальной системе координат r, ϑ, указанной на рис. 177, где угол ϑ отсчитывается от направления касательной к щели в ее конце.

Всестороннее растяжение плоскости с прямолинейной щелью

Для примера рассмотрим решения некоторых простейших задач.

Пусть плоскость, ослабленная прямолинейной щелью длины $2a$, берега которой свободны от внешних напряжений, испытывает всестороннее растяжение напряжениями $p_0 = \text{const}$ на бесконечности. Решение этой задачи с помощью параметрической комплексной переменной ζ можно получить из решения рассмотренной выше задачи о всестороннем растяжении плоскости, ослабленной эллиптическим отверстием, когда величина b меньшей полуоси эллипса-выреза стремится к нулю.

С помощью предыдущих формул решение можно также получить непосредственно в плоскости z. В самом деле, очевидно, решение задачи $\mathfrak{B}$ в этом случае имеет вид

$$p_{11} = p_{22} = p_0, \qquad p_{12} = 0.$$

Поэтому для получения искомого решения достаточно рассмотреть только задачу $\mathfrak{C}$I, когда по берегам щели приложено постоянное симметричное нормальное давление p_0. Полагая в формуле (2.9) $g(\xi) = p_0$ ($p_{22} = -p_0$ при $y = 0$, $|x| \leqslant a$), получим, например, с помощью теоремы о вычетах

$$Z_{\mathrm{I}} = \frac{p_0}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi = \frac{p_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - p_0.$$

Решение соответствующей задачи $\mathfrak{B}$ в этом случае имеет вид

$$Z_1(z) = p_0.$$

Следовательно, для поставленной выше задачи $\mathfrak{A}$

$$Z_{\mathrm{I}}(z) = \frac{p_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \tag{2.20}$$

Компоненты тензора напряжений определяются по формулам (2.7) и (2.20). Коэффициент интенсивности напряжений в данном случае согласно (2.10) определяется формулой

$$k_{\mathrm{I}} = \frac{p_0}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} d\xi = \frac{p_0}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} \frac{a + \xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} d\xi = p_0\sqrt{\pi a}. \tag{2.21}$$

Вид формулы для k_{I} непосредственно вытекает из теории размерностей. В самом деле, в постановке задачи об определении напряжений для бесконечной плоскости фигурируют только две размерные постоянные p_0 и a (модуль Юнга согласно теореме М. Леви, см. стр. 494, несуществен). Так как размерность постоянной k_{I} совпадает с размерностью $p_0\sqrt{a}$, то ясно, что $k_{\mathrm{I}} = cp_0\sqrt{a}$, где c — безразмерная постоянная. Из (2.21) следует, что $c = \sqrt{\pi}$.

Одноосное растяжение плоскости с прямолинейной щелью

Рассмотрим теперь упругую плоскость с прямолинейной щелью $|x| \leqslant a$, $y = 0$, берега которой свободны от напряжений, в том случае, когда в бесконечности под углом θ_0 к оси x действуют постоянные растягивающие напряжения p_0 (рис. 178).

Решение этой задачи с помощью параметрической комплексной переменной ζ можно получить из приведенного выше решения аналогичной задачи для плоскости с эллиптическим отверстием при $b \to 0$ ($m \to 1$). Решение этой же задачи непосредственно в плоскости z можно получить с помощью изложенного выше метода.

Вычислим коэффициенты интенсивности напряжений в этом случае. Для этого заметим, что при решении соответствующей задачи $\mathfrak{B}$ получается, что на оси x действуют постоянные

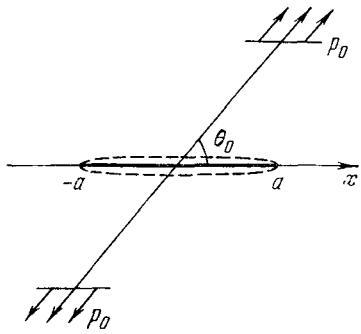


Рис. 178. Плоскость, ослабленная щелью $|x| \leqslant a$, $y = 0$, под действием растягивающих усилий p_0 под углом θ_0 к оси x.

напряжения $p_{12} = p_0 \cos\theta_0 \sin\theta_0$, $p_{22} = p_0 \sin^2\theta_0$. Поэтому согласно (2.10) и (2.17), аналогично (2.21), будем иметь

$$k_{\mathrm{I}} = p_0 \sqrt{\pi a} \sin^2\theta_0, \qquad k_{\mathrm{II}} = p_0 \sqrt{\pi a} \sin\theta_0 \cos\theta_0. \tag{2.22}$$

Плоскость со щелью под действием расклинивающих сосредоточенных сил, приложенных в середине ее берегов

Рассмотрим еще задачу, когда на упругую плоскость со щелью $|x| \leqslant a$, $y = 0$ действуют только две сосредоточенные силы величины P, приложенные к середине берегов щели так, как показано на рис. 179. Полагая в (2.9)

$$g(\xi) = P\delta(0),$$

где $\delta(0)$ — дельта-функция, по определению дельта-функции будем иметь

$$Z_{\mathrm{I}}(z) = \frac{Pa}{\pi z \sqrt{z^2 - a^2}}. \tag{2.23}$$

При этом из (2.10) получим, что

$$k_{\mathrm{I}} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}. \tag{2.24}$$

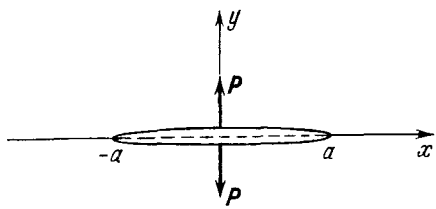


Рис. 179. Щель под действием расклинивающих сосредоточенных сил, приложенных в середине ее берегов.

Если, кроме сосредоточенных расклинивающих сил, приложенных в серединах сторон щели, упругая плоскость находится под действием всестороннего сжатия с напряжением $p_0 = \mathrm{const}$ в бесконечности,

то функция Z_I будет равна разности функций Z_I, определенных формулами (2.23) и (2.20),

$$Z_I(z) = \frac{Pa}{\pi z \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{p_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \qquad (2.25)$$

Коэффициент интенсивности напряжений согласно (2.24) и (2.21) будет представляться формулой

$$k_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} - p_0 \sqrt{\pi a}. \qquad (2.26)$$

Две полуплоскости, прижатые друг к другу напряжением p_0 и разъединяемые двумя сосредоточенными силами

Рассмотрим теперь плоскую задачу, в которой две упругие полуплоскости с абсолютно гладкими границами, соприкасающиеся вдоль оси x, прижимаются друг к другу напряжением p_0, ортогональным оси x на бесконечности, и разъединяются двумя сосредоточенными силами P, приложенными к каждой из полуплоскостей в некоторой точке границы соприкосновения (рис. 180). Требуется определить длину зазора $2a$, образующегося между полуплоскостями при условии, что на границе соприкосновения полуплоскостей полностью отсутствуют силы сцепления.

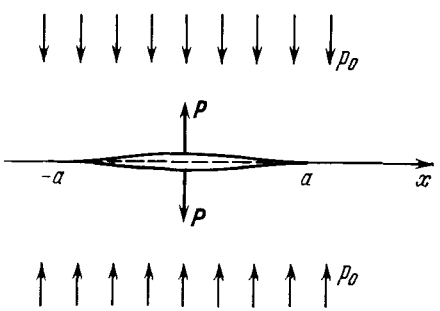


Рис. 180. Две полуплоскости, прижимаемые друг к другу напряжением p_0 на бесконечности и разъединяемые сосредоточенными силами P.

Коэффициент интенсивности напряжений k_I в этом случае, очевидно, равен разности коэффициентов, определяемых формулами (2.24) и (2.22) при $\theta_0 = \pi/2$. Концентрация напряжений вблизи концов зазора, если силы сцепления между полуплоскостями полностью отсутствуют, возникнуть не может. Поэтому $k_I = 0$, и из (2.26) получается, что

$$a = \frac{P}{p_0 \pi}. \qquad (2.27)$$

Если бы на границе соприкосновения полуплоскостей имелись силы сцепления (например, за счет их склейки), то вблизи концов зазора была бы возможной концентрация напряжений и $k_I \neq 0$.

Постановка задачи о давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость

Представим себе упругую полуплоскость, в которую вдавливается абсолютно жесткое тело — штамп. Допустим сначала, что штамп контактирует с полуплоскостью по всей своей известной постоянной ширине $2a$ (рис. 181).

Сформулируем граничные условия. На свободной поверхности полуплоскости

$$p_{22} = p_{12} = 0.$$

На площадке контакта между полуплоскостью и штампом могут быть поставлены различные граничные условия. Рассмотрим некоторые из них. Наиболее простой случай имеет место

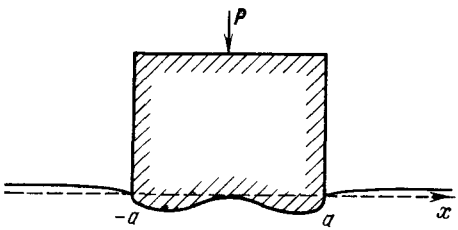


Рис. 181. Жесткий штамп постоянной ширины $2a$, вдавливаемый в упругую полуплоскость.

тогда, когда поверхность штампа является абсолютно гладкой. В этом случае вертикальные перемещения упругой среды определяются углублением штампа как целого и профилем штампа. Следовательно, на участке контакта между штампом и полуплоскостью

$$v = V(x), \quad p_{n\tau} = 0,$$

где через $V(x)$ обозначены заданные вертикальные смещения профиля штампа, через v — вертикальные перемещения частиц упругой среды, а через $p_{n\tau}$ — касательные напряжения на площадках контакта упругой среды с поверхностью штампа.

В линейной теории упругости обычно рассматривают только малые $V(x)$ и пологие штампы, поэтому полагают $p_{n\tau} = p_{12}(x, 0)$. Граничные условие принимают вид

$$v = V(x), \quad p_{12} = 0 \quad \text{при } |x| \leqslant a, \ y = 0 \tag{2.28}$$

и

$$p_{22} = p_{12} = 0 \quad \text{при } |x| > a, \ y = 0.$$

Можно рассмотреть случай, когда поверхность произвольно нагруженного штампа жестко связана (спаяна) с частицами упругой полуплоскости. Тогда граничные условия записываются

следующим образом:

$$u = U(x),\ v = V(x)\,(p_{12} \neq 0) \quad \text{при } |x| \leqslant a,\ y = 0,$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — горизонтальное и вертикальное смещения точек штампа.

Если в задаче о давлении штампа на упругую полуплоскость на площадке контакта между штампом и упругой средой имеются силы трения, то граничные условия принимают вид

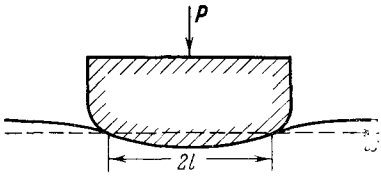


Рис. 182. Жесткий штамп с закругленными краями, вдавливаемый в упругую полуплоскость.

$$v = V(x),\ p_{12} \leqslant \pm f\,|p_{22}|$$
$$\text{при } |x| \leqslant a,\ y = 0,$$

где f — коэффициент трения.

Если ширина участка контакта между поверхностью штампа и упругой полуплоскостью заранее неизвестна (например, штамп имеет закругленные края (рис. 182)), то для определения границ поверхности контакта необходимы дополнительные условия. Например, для гладкого штампа, на поверхности контакта которого с упругим телом полностью отсутствуют силы сцепления, принимается условие об отсутствии концентрации напряжений вблизи концов участка контакта. Это позволяет определить ширину участка контакта $2l$ так же, как ширину зазора в задаче, приведенной на рис. 180. При наличии сил сцепления между материалом штампа и телом упругого полупространства вблизи краев участка контакта возникнет концентрация напряжений [1]).

Аналогия между задачами об упругой плоскости с прямолинейными щелями и давлении прямоугольных штампов на упругую полуплоскость

Представим себе упругую плоскость с двумя бесконечными разрезами вдоль оси x (рис. 183, *а*). Пусть плоскость находится под действием растягивающих сил, приложенных симметрично относительно оси x.

Из симметрии задачи следует, что на отрезке оси x, $|x| \leqslant a$,

$$v = 0,\ p_{12} = 0.$$

В связи с этим очевидно, что если мысленно отбросить верхнюю полуплоскость, то действие ее на нижнюю полуплоскость можно заменить действием прямоугольного штампа с абсолютно гладкой границей, примыкающего к нижней полуплоскости

[1]) Если имеет место концентрация напряжений, то ширину участка контакта необходимо определять с помощью дополнительных данных о свойствах концентрации напряжений (см. ниже, § 3).

на участке оси x $|x| \leqslant a$. Штамп при этом находится под действием силы P, уравновешивающей силы, приложенные к нижней полуплоскости, и производит растягивающее действие

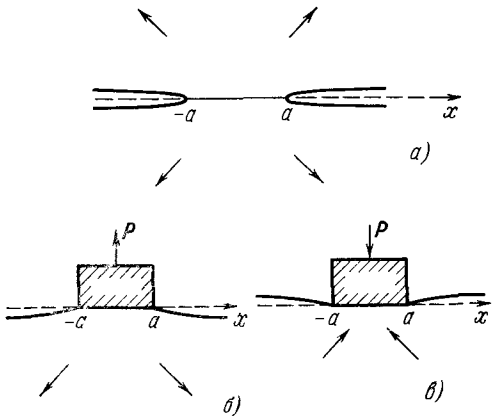


Рис. 183. К аналогии между задачами об упругой плоскости с прямолинейными щелями, находящейся под действием растягивающих сил, и действии прямоугольного штампа на упругую нагруженную полуплоскость.

(рис. 183, *б*). Можно у всех приложенных сил сменить знаки на обратные и получить задачу о жестком прямоугольном штампе,

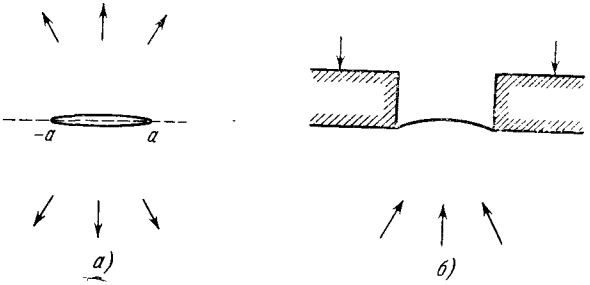


Рис. 184. К аналогии между задачами о растяжении плоскости с внутренней щелью и давлении прямоугольных штампов на нижнюю нагруженную полуплоскость.

примыкающем к нижней нагруженной полуплоскости, под действием силы — P, прижимающей его к полуплоскости на участке оси x $|x| \leqslant a$ (рис. 183, *в*).

Аналогичное рассуждение можно провести и в случае растяжения силами, симметричными относительно оси x, плоско-

сти, ослабленной одной или несколькими внутренними щелями, расположенными вдоль оси x. Штампы при этом должны примыкать к нижней нагруженной полуплоскости на всех сплошных участках оси x (рис. 184).

Таким образом, любое решение задачи о плоскости, ослабленной прямолинейной щелью или системой щелей, расположенных вдоль одной прямой, и находящейся под действием нагрузки, симметричной относительно этой прямой, может быть истолковано как решение задачи о гладком прямоугольном штампе или системе штампов, примыкающих к нагруженной упругой полуплоскости.

Из приведенного выше анализа задачи о щели следует, что распределение напряжений под поверхностью гладких прямоугольных штампов вблизи их концов имеет особенность, описываемую формулами (2.10).

Задача о давлении прямоугольного штампа на упругую полуплоскость

Покажем, что функция

$$Z_{\mathrm{I}} = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - z^2}} \tag{2.29}$$

дает решение задачи о давлении жесткого абсолютно гладкого прямоугольного штампа ширины $2a$ на упругую полуплоскость, когда штамп может перемещаться только поступательно в вертикальном направлении параллельно оси y, под действием силы — P. В самом деле, вдоль действительной оси x из (2.29) и (2.7) имеем $p_{12} = 0$ при любом x, $p_{22} = 0$ при $|x| > a$ и

$$p_{22} = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \tag{2.30}$$

при $|x| \leqslant a$.

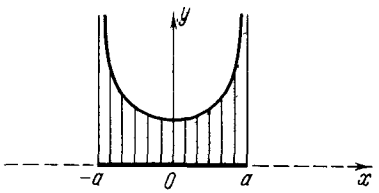


Рис. 185. Распределение напряжения p_{22} под гладким жестким прямоугольным штампом.

Из (2.29) и (2.8) легко получим, что $v = \mathrm{const}$ при $|x| \leqslant a$, $y = 0$.

На рис. 185 построено распределение напряжения p_{22} под штампом, на краях штампа p_{22} обращается в бесконечность.

Из симметрии распределения p_{22} под штампом относительно оси y ясно, что силы, действующие на штамп, проводятся к равнодействующей, линия действия которой проходит через середину ширины штампа.

Величина этой силы равна P:

$$\int_{-a}^{a} p_{22}\, dx = \frac{P}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = P.$$

Напряжения и перемещения в любой точке упругой полуплоскости можно вычислить по (2.29), (2.8) и (2.9).

Задача о давлении на упругую полуплоскость жесткого штампа постоянной ширины и слабо искривленного профиля

Рассмотрим теперь задачу о давлении на упругую полуплоскость жесткого штампа заданной ширины $2a$ с абсолютно гладкой поверхностью, имеющей в плоскости xy некоторый заданный слабо изогнутый профиль $V(x)$ — const, когда штамп смещается только поступательно по оси y.

Получим решение этой задачи с помощью подбора функции $Z_1(z)$. Граничное условие $p_{12} = 0$ при $y = 0$ удовлетворится автоматически, если воспользоваться формулой (2.7) для p_{12}. В силу того, что перемещение $V(x)$ под штампом согласно граничным условиям задачи задано, из (2.8) будем иметь

$$\operatorname{Im} Z_1^0 = \frac{\mu}{1-\sigma} V(x) \quad \text{при } |x| \leqslant a,\ y = 0,$$

где $V(x)$ — известная функция x. Продифференцировав это выражение по x, получим для определения функции $Z_1(z)$ следующее условие:

$$\operatorname{Im} Z_1(z) = \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial x} Z_1^0(z) = \frac{\mu}{1-\sigma} V'(x) \qquad (2.30')$$

при $y = 0$, $|x| \leqslant a$.

Решение задачи о нахождении функции $Z_1(z)$ по условию (2.30') дается формулой (2.9) (см. также сноску на стр. 518), а именно:

$$Z_1(z) = \frac{\mu}{\pi i (1-\sigma)} \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{V'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi. \qquad (2.31)$$

Очевидно, что построенная таким путем функция $Z_1(z)$ удовлетворяет также граничному условию $p_{22} = 0$ при $|x| > a$, $y = 0$, так как согласно (2.7) и (2.31) $p_{22} = \operatorname{Re} Z_1 = 0$ при $|x| \geqslant a$, $y = 0$. Таким образом функция $Z_1(z)$, определяемая формулой (2.31), удовлетворяет всем граничным условиям на границе упругой полуплоскости $y = 0$. Однако эта функция не может быть непосредственно истолкована как решение рассматриваемой задачи о штампе. Действительно, определяемое ею распределение напряжений таково, что равнодействующая усилий на бесконечности равна нулю, в то время как она должна уравновешиваться отличной от нуля силой, действующей на штамп.

Кроме того, из решения задачи о давлении штампа с искривленным профилем при $V'(x) = 0$ должно получаться рассмотренное выше решение задачи о давлении прямоугольного штампа. Поэтому для решения задачи о давлении на упругую полуплоскость штампа заданной ширины $2a$, имеющего слабо изогнутый

профиль $V(x)$, возьмем функцию $Z_I(z)$ в виде

$$Z_I(z) = \frac{\mu}{\pi i (1-\sigma)\sqrt{z^2-a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{V'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi}\, d\xi + \frac{C}{\pi\sqrt{a^2-z^2}}, \quad (2.32)$$

где C — пока неопределенная постоянная. Функция (2.32), очевидно, удовлетворяет всем граничным условиям задачи на границе упругой полуплоскости $y = 0$. В окрестности бесконечно удаленной точки для функции $Z_I(z)$, определяемой формулой (2.32), имеем разложение

$$Z_I = -\frac{Ci}{\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Полагая $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$, с помощью (2.7) в окрестности бесконечно удаленной точки с точностью до малых высшего порядка для компонент тензора напряжений получим

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \frac{C}{\pi\rho}\sin\theta(1+\cos 2\theta), \\ p_{22} &= \frac{C}{\pi\rho}\sin\theta(1-\cos 2\theta), \\ p_{12} &= \frac{C}{\pi\rho}\sin\theta\sin 2\theta. \end{aligned}\right\} \quad (2.33)$$

С помощью этих формул легко подсчитать компоненты F_x и F_y результирующей силы F и величину результирующего момента M, к которым сводится распределение напряжений в окрестности бесконечно удаленной точки. Вычисляя интегралы

$$F_x = \int_{\mathscr{L}} p_{n1}\, dl, \quad F_y = \int_{\mathscr{L}} p_{n2}\, dl, \quad M = \int_{\mathscr{L}} (p_{n2}x - p_{n1}y)\, dl$$

по полуокружности $\mathscr{L}$ большого радиуса, получим

$$F_x = 0, \quad M = 0, \quad F_y = C.$$

Из условия равновесия полуплоскости и жесткого штампа следует, что $C = P$, где P — величина равнодействующей приложенных к штампу сил.

Таким образом, с помощью функции

$$Z_I(z) = \frac{\mu}{\pi i (1-\sigma)\sqrt{z^2-a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{V'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{z-\xi}\, d\xi + \frac{P}{\pi\sqrt{a^2-z^2}} \quad (2.34)$$

можно удовлетворить всем уравнениям и граничным условиям

задачи; эта функция дает полное решение задачи о давлении под действием силы P жесткого абсолютно гладкого штампа заданной постоянной ширины $2a$ и профиля $V(x)$ на упругую полуплоскость.

Заметим, что второе слагаемое в формуле (2.34), соответствующее решению задачи о давлении прямоугольного штампа, играет основную «несущую» роль, а первое слагаемое соответствует возмущениям, вызванным искривлением профиля штампа.

Задача о давлении штампа с профилем в виде дуги окружности большого радиуса на упругую полуплоскость

Допустим, что штамп ширины $2a$ имеет профиль в виде дуги окружности достаточно большого радиуса R, тогда

$$V(x) = \frac{x^2}{2R}, \qquad V'(x) = \frac{x}{R}.$$

Следует различать два случая: первый, когда ширина $2l$ контакта штампа с границей полуплоскости меньше всей ширины штампа $2a\,(l < a)$ (рис. 186, *а*), и второй, когда штамп

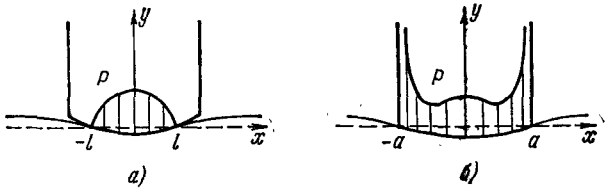


Рис. 186. Давление на упругую полуплоскость жесткого штампа пологого профиля $V(x) = x^2/2R$; *а*) ширина участка контакта меньше всей ширины штампа, *б*) ширина участка контакта совпадает с шириной штампа.

соприкасается с полуплоскостью по всей своей ширине $l = a$ (рис. 186 *б*).

В первом случае согласно (2.34) решение имеет вид

$$Z_I = -\frac{\mu}{\pi R(1-\sigma)\sqrt{l^2-z^2}} \int_{-l}^{l} \frac{\xi\sqrt{l^2-\xi^2}}{z-\xi}\,d\xi + \frac{P}{\pi\sqrt{l^2-z^2}}. \quad (2.35)$$

Вычислив первый интеграл с помощью теоремы о вычетах, будем иметь

$$Z_I = \frac{\mu(l^2-2z^2)}{2R(1-\sigma)\sqrt{l^2-z^2}} + \frac{\mu i z}{R(1-\sigma)} + \frac{P}{\pi\sqrt{l^2-z^2}}. \quad (2.36)$$

С помощью этой формулы и (2.7) легко найти распределение

напряжения p_{22} под штампом

$$p_{22} = \frac{\mu (l^2 - 2x^2)}{2R(1-\sigma)\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{P}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}}. \qquad (2.37)$$

Ширину $2l$ участка контакта штампа с границей упругой среды можно определить из условия отсутствия концентрации напряжений в окрестности его концов

$$p_{22} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x = \pm l.$$

Из (2.35) при этом получим

$$l^2 = \frac{2RP(1-\sigma)}{\pi\mu}.$$

В этом случае эпюра напряжений имеет вид, приведенный на рис. 186, *а*.

Второй случай, когда ширина участка контакта штампа с упругой средой совпадает с шириной штампа, имеет место при условии, что величина равнодействующей сил давления на штамп удовлетворяет неравенству

$$P > \frac{\pi\mu a^2}{2R(1-\sigma)}.$$

В формулах (2.35)—(2.37) в этом случае следует положить $l = a$. Вблизи краев штампа будет иметь место концентрация напряжений (рис. 186, *б*).

§ 3. Теория трещин

Все твердые тела при соответствующих условиях разрушаются. При разрушении твердые тела распадаются на части. Разрушение может иметь различный характер в зависимости от механических свойств тела, его конфигурации, вида нагрузок, скорости нагружения, температуры, вида и свойств окружающей среды[1]) и других факторов.

Разрушение может быть названо хрупким, квазихрупким, вязким, упруго-пластическим и т. д. в зависимости от того, какие из свойств материала играют определяющую роль при данном процессе разрушения.

---

[1]) Например, разрушение стекла в воде происходит иначе, чем в воздухе. Разрушение в воздухе и пустоте может происходить по-разному. Известно, например, что малые количества ртути на поверхности трещин резко снижают сопротивляемость алюминия распространению трещин и т. д.

Хрупкое и квазихрупкое разрушения

Под хрупким разрушением понимается такое разрушение, при котором образовавшиеся после разрушения тела части можно сложить так, чтобы составленное тело совпадало с исходным. Благодаря отсутствию заметных остаточных деформаций, обусловливаемых свойствами пластичности или вязкости, разрушившиеся хрупким образом предметы можно склеивать.

При хрупком разрушении в телах возникают и распространяются макроскопические трещины. Треснувшее или разбитое стекло может служить примером хрупко разрушившегося тела.

Многие металлические конструкции при возникновении и распространении в них макроскопических трещин разрушаются квазихрупким образом.

При квазихрупком разрушении в приповерхностном слое малой толщины на берегах трещин возникает пластическое деформирование.

Предложенные теории хрупкого и квазихрупкого разрушений основаны на результатах классической теории упругости с малыми деформациями. В §§ 1 и 2 этой главы изложен математический аппарат, используемый в теории распространения трещин при хрупком и квазихрупком разрушениях.

Ниже рассмотрены только случаи равновесия и распространения трещин от тонких щелей, имеющихся в начальном состоянии тела, и не затрагивается вопрос о начальном возникновении трещин. Зарождение трещин тесно связано с дислокациями [1]), имеющимися внутри тела.

Общее энергетическое уравнение

При теоретическом анализе проблемы прочности и распространения сильных разрывов перемещений в твердых деформируемых телах можно опереться на универсальное уравнение термодинамики, выражающее закон сохранения энергии для тела конечных размеров. В общем случае это уравнение (см. § 2 гл. V т. 1) имеет вид

$$dE + dU = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}, \qquad (3.1)$$

где E — кинетическая энергия тела, а U — полная внутренняя энергия. Справа стоит общий приток энергии извне за счет работы объемных и поверхностных макроскопических сил $dA^{(e)}$, общий внешний приток тепла $dQ^{(e)}$ и внешний макроскопический приток энергии dQ^{**} за счет особых микроскопических механизмов (химические воздействия на поверхности тела, электромагнитные внешние излучения и т. п.). В рассмот-

[1]) *Пояснение понятия о поверхностных дислокациях дано ниже.*

ренных до сих пор моделях упругих и пластических тел принято, что $dQ^{**} = 0$. Здесь мы вводим $dQ^{**} \neq 0$ ради возможности учета поверхностных эффектов взаимодействия с

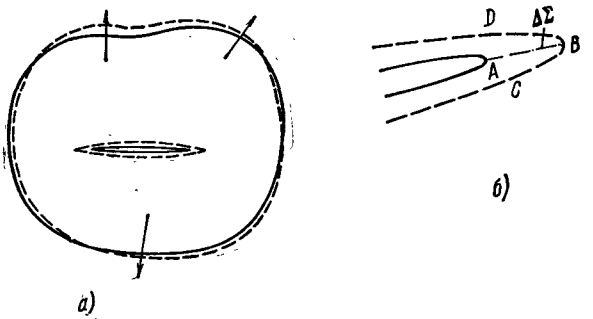


Рис. 187. Развитие трещины. Пунктиром обозначены границы тела в момент t_2, сплошными линиями — в момент t_1 ($t_2 > t_1$).

внешней средой на первоначальных границах тела и на образующихся вследствие разрывов при развитии трещин новых границах тела (рис. 187).

Образование новых участков границ при разрывах целостности тел

На рис. 187, *б* схематически показаны границы трещины вблизи одного из краев в два различные момента времени t_2 и t_1. За время $t_2 - t_1$ вдоль внутреннего участка сплошного тела $\Delta\Sigma$, который в момент t_1 соответствовал штрихпунктирному отрезку AB на рис. 187, *б*, происходит разрыв и образуются элементы новой границы DBC.

Уравнение (3.1) может быть применено ко всему телу в целом или к любому конечному объему тела с развивающейся трещиной для любого промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$. В дальнейших рассуждениях считается, что положения точек тела, соответствующие моментам t_1 и t_2, близки.

Аддитивная постоянная для внутренней энергии и энергия на разрыв

В классической термоэластике (теории упругости с учетом тепловых эффектов) полная внутренняя энергия тела представляется в виде

$$U_т = \int_V U(\varepsilon_{ij}, s)\,\rho\,d\tau + U_0 = U_1 + U_0, \qquad (3.2)$$

где $U(\varepsilon_{ij}, s)$ — некоторая определенная функция, зависящая от удельной энтропии s и компонент тензора деформаций ε_{ij}, U_0 — аддитивная постоянная. В задачах «чистой» теории упругости аддитивная постоянная U_0 несущественна; в уравнении (3.1) принимается всегда, что $dU_0 = 0$.

При рассмотрении развивающихся трещин — процессов распространения в теле сильных разрывов перемещений с образованием новых границ тела, кроме внутренней упругой и тепловой энергии, представляемой в равенстве (3.2) для упругого тела членом U_1, необходимо учитывать и другие виды энергии, связанные с поверхностными эффектами, проявляющимися при нарушении целостности тела. Простейший способ учета таких эффектов можно осуществить с помощью аддитивной постоянной U_0, которая сохраняется при изменении только энтропии s и компонент тензора деформаций ε_{ij}, но может меняться при образовании в теле разрывов и при взаимодействии тела с внешней средой через приток энергии dQ^{**}.

Энергия U_0 как энергия сцепления

Рассмотрим сплошное тело с некоторым одинаковым состоянием всех его частиц, для которого принято, что $U = 0$ и, следовательно, $U_1 = 0$. Представим себе теперь две части этого сплошного тела I и II, разделенные мысленно некоторой поверхностью Σ. По определению функции U_1 в данном случае имеем

$$U_1(\mathrm{I} + \mathrm{II}) = U_1(\mathrm{I}) = U_1(\mathrm{II}) = 0. \qquad (3.3)$$

Это равенство сохраняется и при действительном разделении тела на части I и II, если при этом разделении состояние всех внутренних частиц (в частности, энтропия и величины деформаций) не изменяется.

Для постоянных U_0 в этом случае, очевидно, имеем

$$U_0(\mathrm{I} + \mathrm{II}) \leqslant U_0(\mathrm{I}) + U_0(\mathrm{II}). \qquad (3.4)$$

Это неравенство обусловлено тем, что для образования двух тел I и II из одного I + II надо затратить работу для преодоления действия обобщенных внутренних микроскопических сил сцепления[1]) по поверхности раздела. Работа этих обобщенных внутренних сил сцепления при разделении тела на части обязательно отлична от нуля и отрицательна.

Энергия тела, представляемая величиной U_0, характеризует полную энергию сил сцепления. Эта энергия аналогична гравитационной энергии системы притягивающихся масс. Однако, в отличие от гравитационной энергии притягивающихся масс, энергия сцепления U_0 для реальных тел, вообще говоря, слабо

[1]) Как известно, обобщенные силы определяются через выражение элементарной энергии обмена, эти силы в общем случае не совпадают с силами, определяемыми ньютонианскими уравнениями импульсов для макроскопических взаимодействий. Микроскопические взаимодействия и соответствующий микроскопический, а также и макроскопический энергообмен могут иметь усложненную квантовую природу.

зависит от глобальной геометрической формы тела. Это обусловлено тем, что внутренние силы сцепления имеют электромагнитную природу и действуют между в среднем нейтральными атомами и молекулами, поэтому эти силы являются короткодействующими, т. е. они проявляются в заметном виде только при очень малых расстояниях (порядка межатомных расстояний) между взаимодействующими частицами.

Прочность материалов и энергия U_0

Но важно подчеркнуть, что именно эти силы сцепления и соответствующая им энергия U_0 обеспечивают прочность материалов (крепость соединения частей тела). Отсюда ясно, что проблемы прочности и образования разрывов в твердых телах должны рассматриваться и разрешаться с учетом «несущественной» постоянной U_0. При образовании разрывов необходимо учитывать изменение энергии U_0. В дальнейшем будем трактовать U_0 как внутреннюю энергию сцепления, которая связана с понятием поверхностной энергии, но все же не сводится просто к этому понятию.

В теории упругости перемещения и вариации компонент вектора перемещений δw_i обычно считаются непрерывными. Непрерывность вариаций δw_i связана с основным физическим свойством действительных тел, стремящихся сохранить свою целостность за счет внутренних взаимодействий соседних частиц, и обеспечивается большими значениями приращений δU_0, которые должны преодолеваться при разрывах; при отсутствии разрывов $\delta U_0 = 0$.

В сыпучих телах без сцепления энергия на разрыв равна нулю

В некоторых случаях, например в сыпучих средах (в частности, в сухом песке), вообще говоря, нет сил сцепления, препятствующих образованию разрывов под действием растягивающих усилий, поэтому в таких средах возможно образование внутренних разрывов без изменения внутренней энергии вида U_0.

В металлах, дереве, пластмассах или телах, склеенных вдоль некоторых поверхностей, при образовании внутренних разрывов типа трещин или при действительном разделении тела на части происходит изменение энергии U_0. Поэтому при рассмотрении разрывных явлений необходимо учитывать в частицах, содержащих разрывы, величину dU_0.

Плотность γ энергии на разрыв

Опыт и некоторые общие физические соображения позволяют сделать допущение, что

$$dU_0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i d\Sigma_i, \tag{3.5}$$

где $d\Sigma_i$ — приращения площадей поверхностей трещин в раз-

личных частях внутри тела, а γ_i — соответствующие функции, определенные в местах образования площадок разрыва $d\Sigma_i$ (поверхностная плотность энергии на разрыв). Для тел, разрушающихся хрупким образом, во многих случаях можно считать, что γ есть просто плотность поверхностной энергии, подобная плотности энергии поверхностного натяжения для жидкостей. Иногда γ нельзя отождествлять с плотностью поверхностной энергии твердого тела. Опыты показывают, что плотность энергии на разрыв

$$\gamma_{эф} = \lim_{\Delta\Sigma \to 0} \frac{\Delta U_0}{\Delta\Sigma}$$

во многих случаях значительно превышает плотность поверхностной энергии[1]). В дальнейшем в необходимых случаях под γ можно понимать $\gamma_{эф}$.

Величина γ может зависеть, вообще говоря, от характера деформированного состояния в месте образования разрыва, от температуры и других термодинамических характеристик состояния частиц и от их изменения во времени, от влияния физико-химических свойств внешних сред (если сделать допущение, что $dQ^{**} = 0$), от наличия в теле дефектов, дислокаций и т. п. В простейших случаях в качестве приближения можно принять, что $\gamma = \text{const}$, причем величина этой постоянной представляет собой важнейшую физическую прочностную характеристику материала. При изучении проблем прочности экспериментальное и, может быть, теоретическое исследование величины γ должно составлять главную задачу.

Уравнение энергии в рамках модели упругого тела для описания развития трещины

Таким образом, если принять для внутренней энергии[2]) определение (3.2), основное энергетическое уравнение в случае развития внутренних разрывов при хрупком разрушении тела можно написать в виде

$$dE + dU_1 + dU_0 = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}. \qquad (3.6)$$

Включим теперь две стороны $d\Sigma_1$ и $d\Sigma_2$ участка разрыва $d\Sigma$, отвечающего на рис. 187, *б* штрихпунктирному отрезку AB, в общую границу тела, а поверхностные силы от внутренних сил напряжения, действующие на разных

[1]) Например, за счет затраты дополнительной энергии на образование пластических деформаций в окрестности трещин. В очень тонком слое вблизи бортов трещин могут возникать остаточные деформации, несущие поглощенную энергию.

[2]) В общем случае внутренняя энергия может зависеть от пластических деформаций и других характеристик состояния среды.

сторонах участка площади разрыва $d\Sigma$, во внешние поверхностные силы. После этого возникающие при развитии трещины механические перемещения (деформирование) в хрупком теле можно рассматривать в рамках обычной модели упругого тела, в которой принимается, что $dU_0 = dQ^{**} = 0$. Однако в уравнении энергии при этом необходимо учесть работу новых резко меняющихся внешних сил на вновь образующейся поверхности, включаемой в границу тела [1]), т. е. на участках $d\Sigma_1$ и $d\Sigma_2$.

Уравнение энергии для тела в целом в этом случае в рамках модели упругого тела имеет вид

$$dE + dU_1 = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dA^{(e)}_{d\Sigma}. \tag{3.7}$$

В уравнении энергии для упругой среды при развитии разрывов необходимо учитывать внешний макроскопический поток энергии $dA^{(e)}_{d\Sigma}$

Величина $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ представляет собой некоторый поток энергии в особых точках (совпадающих с краями трещин), возникающий за счет перемещения краев, в которых имеет место концентрация напряжений. Этот поток равен нулю для щелей с фиксированной поверхностью разреза и отличается от нуля для развивающихся трещин (трещину можно рассматривать как щель с переменной площадью разрыва). Применение теории упругости для описания развития трещин связано с появлением в уравнении энергии (3.7) для любых объемов тела, содержащих края трещин, потоков энергии, обозначенных через $dA^{(e)}_{d\Sigma}$. Ниже будут даны формулы, по которым можно вычислять $dA^{(e)}_{d\Sigma}$, если решение упругой задачи известно.

Модель упругого тела для малых деформаций по Гуку и развиваемые ниже математические приближенные постановки задач неприемлемы для описания действительных явлений непосредственно вблизи концов трещин в хрупких телах. Тем не менее для упругих задач для тела в целом достаточно только установить правильно величину концентрированного оттока энергии $dA^{(e)}_{d\Sigma}$, который в рамках более детальных моделей и в более точной математической трактовке может быть обусловлен различными физическими механизмами.

---

[1]) Для развиваемой ниже теории трещин в хрупких телах, в соответствии с принципом Сен-Венана, для правильного определения решений упругой задачи (на основании уравнений импульсов и уравнений совместности для поля состояний упругого тела в целом) нет необходимости вводить действительные или искусственные «подходящие» внутренние силы сцепления на «малых участках» уже реализованных бортов разрыва перемещений (вне $d\Sigma$) как внешние макроскопические поверхностные силы, входящие в граничные условия.

В случае «трещин» в упруго-пластических телах в конечной окрестности краев разрыва могут проявляться свойства пластичности и возникать пластические деформации. Пластические области в зависимости от характера внешних нагрузок могут иметь различный вид. Опыт показывает, что в некоторых *частных примерах* эти пластические области представляют собой тонкие слои различной конечной длины d, которые можно рассматривать как продолжения просветов, образующихся при разрыве перемещений внутри тела. Тонкие слои пластического деформирования у краев трещин с точки зрения упругих решений можно рассматривать как дополнительные разрывы упругих перемещений на участках d, причем поверхностные напряжения на этих участках определяются или задаются приближенно из рассмотрения пластических состояний в слое. Ниже излагается теория трещин в хрупких телах, в которой d принимается равной нулю. В том случае, когда конечность размера d, зависящего от свойств пластичности, формы тела, положения разрыва в теле и вида внешних нагрузок, существенна, эту теорию и соответствующие *критерии необходимо видоизменить.*

Однако теория с $d = 0$ в ряде важных вопросов [1]) хорошо отвечает опытам и в тех случаях, когда вблизи концов разрыва имеются некоторые малые области ($d/l \approx 0$, l — длина разрыва), в которых проявляются пластические свойства материала.

Основное уравнение теории трещин

Далее, в соответствии с определением квазихрупкого разрушения тел, предположим, что в основном объеме тела величины dE, dU_1, $dA^{(e)}$ и $dQ^{(e)}$, соответствующие решению упругой задачи, дают хорошее приближение к действительности, поэтому можно принять, что эти величины в уравнениях для тела в усложненной модели (3.6) и в уравнениях для упругого тела (3.7) имеют одинаковые значения. Тогда из (3.6) и (3.7) следует основное соотношение теории трещин, которое является дополнительным к уравнениям теории упругости:

$$dU_0 = -dA^{(e)}_{d\Sigma} + dQ^{**}. \tag{3.8}$$

Возможность развития трещины связана с выполнимостью соотношения (3.8). Это уравнение при $dQ^{**} = 0$ вместе с до-

[1]) Эта теория позволяет в телах различной формы рассчитать по заданным внешним нагрузкам поля деформаций и напряжений, когда в теле содержатся исходные разрывы, которые могут распространяться в виде трещин. Эти расчеты позволяют указать для выбранной системы нагрузок их критическую величину, определяющую начало роста трещин. Кроме этого, можно производить расчет процесса расширения трещин по заданным внешним условиям и, в частности, решать вопросы об устойчивости критических состояний. Иллюстрации некоторых приложений даны в нижеследующих примерах.

пущением (3.5) было принято в 1922 г. Гриффитсом за основу при построении теории равновесных трещин.

Если при мысленном увеличении поверхности разрыва на $\delta\Sigma$ получается, что

$$\delta U_0 > -\delta A^{(e)}_{\delta\Sigma} + \delta Q^{**},$$

то трещина в действительности развиваться не может («внешних» притоков энергии не хватает для создания дополнительной поверхностной энергии δU_0). В этом случае получается задача теории упругости для тела со щелью, граница которой состоит из одних и тех же индивидуальных точек. В любом возможном процессе деформирования при этом

$$\delta U_0 = \delta A^{(e)}_{\delta\Sigma} = \delta Q^{**} = 0.$$

Щель может превращаться в развивающуюся трещину, как только достигается равенство (3.8).

Предыдущая общая постановка вопроса о развитии трещины и все высказанные выше соображения относятся к самому общему случаю динамической задачи с наличием вообще произвольного внешнего притока тепла и притоков энергии dQ^{**}. Обычно рассматриваются только статические адиабатические процессы при $dQ^{**} = 0$.

Соотношения статической теории трещин

Заметим, что из энергетического уравнения (3.6), примененного к возможному процессу распространения трещины, в статических условиях (при $\delta E = 0$) для равновесной трещины при специальных вариациях, для которых [1]) $\delta A^{(e)} = \delta Q^{(e)} = 0$, $\delta Q^{**} = 0$, вытекает соотношение

$$\delta U_1 + \delta U_0 = 0 \quad \text{или} \quad \delta U_1 = -\delta U_0.$$

Отсюда и из (3.8) в этом случае можно также написать равенства [2])

$$\delta U_1 = -\delta U_0 = \delta A^{(e)}_{\delta\Sigma}.$$

[1]) Здесь предполагается, что внешних массовых сил нет.

[2]) В теории, развитой Гриффитсом, на основании решения конкретных статических задач для данного тела с различной шириной щели при отсутствии внешнего притока энергии вычислялось изменение внутренней упругой энергии по Гуку для тела в целом $(dU_1/d\Sigma)d\Sigma$. С помощью данных о величине γ, определенной равенством $dU_0 = \gamma\,(d\Sigma_1 + d\Sigma_2)$, из уравнения $(dU_1/d\Sigma) = -\gamma$ определялись критические нагрузки и деформированное состояние, при котором щель могла распространиться и превратиться таким образом в трещину.

Подчеркнем, что равенство Гриффитса

$$\delta U_1 = \delta A^{(e)}_{\delta\Sigma}$$

верно также для «трещин» в упруго-пластических телах с конечными пла-

Следовательно, для вариаций указанного вида для статически равновесных трещин, если $\delta U_0 > 0$ или, что то же самое, $\delta A^{(e)}_{\delta\Sigma} < 0$, имеем

$$\delta U_1 < 0.$$

Легко понять, что, независимо от конкретной физической природы обобщенных сил сцепления, их работа $\delta A^{(e)}_{\delta\Sigma}$ при $\delta\Sigma > 0$ всегда отрицательна, так как в обычных условиях всегда имеется противодействие разъединению тела на части. Отсюда следует, что при возможном развитии трещины в условиях, когда

$$\delta A^{(e)} = \delta Q^{(e)} = \delta Q^{**} = 0,$$

при любых физически допустимых силах сцепления всегда верно неравенство

$$\delta U_1 \neq 0.$$

Однако если щель фиксирована и если среди возможных перемещений рассматриваются только такие, при которых $\delta\Sigma = 0$, то

$$\delta U_1 = 0,$$

когда $\delta A^{(e)} = \delta Q^{(e)} = \delta Q^{**} = 0$. В этом случае мы имеем рассмотренное и установленное ранее условие экстремума внутренней упругой энергии (упругого потенциала) (см. § 9, гл. IX).

Для решения задач о распространении в теле разрывов необходимы формулы для вычисления потоков энергии $dA^{(e)}_{d\Sigma}$

Уравнение (3.8) может быть использовано для решения конкретных задач, если имеются сведения о $dA^{(e)}_{d\Sigma}$, dU_0 (или γ_i, если используется допущение (3.5)) и dQ^{**}. Дальше будем считать, что $dU_0 = \gamma(d\Sigma_1 + d\Sigma_2)$, причем γ определена из опыта с учетом взаимодействия данного тела с внешней средой, и поэтому положим, что $dQ^{**} = 0$.

Обратимся теперь к установлению формулы, выражающей отток энергии $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ через характеристики состояний на краях распространяющихся разрывов. Устанавливаемая ниже формула дает величину $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ не только в случае расширения трещины, но и в случае расширения разрывов типа поверхностных дислокаций. Поэтому остановимся предварительно на разъяснении понятия о дислокациях, распределенных непрерывно вдоль некоторой изолированной поверхности Σ.

стическими областями; в этом случае в величину $\delta A^{(e)}_{\delta\Sigma}$ включается элементарная работа внутренних сил напряжений на границах между пластической и упругой областями.

Дислокации, распределенные непрерывно вдоль некоторой поверхности

Поверхность Σ в теле представляет собой изолированную поверхность непрерывно распределенных дислокаций, если в окрестности поверхности Σ с обеих ее сторон для точек тела существует непрерывный вектор перемещений w из некоторого начального положения, причем касательная составляющая вектора w на поверхности Σ терпит разрыв[1]). Если на Σ терпит разрыв только (или и) нормальная составляющая вектора перемещений w, то поверхность разрыва Σ

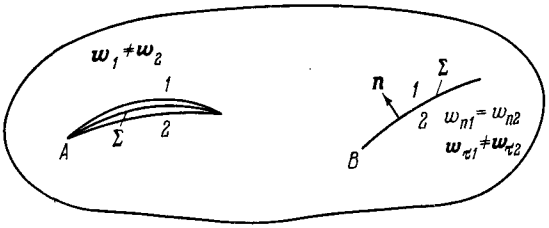


Рис. 188. Схемы изолированной трещины и изолированной поверхностной дислокации. A — трещина, перемещения на краях поверхности разрыва Σ различны $w_1 \neq w_2$ и $w_{n1} \neq w_{n2}$, B — поверхностная дислокация $w_{n1} = w_{n2}$, $w_{\tau 1} \neq w_{\tau 2}$.

можно рассматривать как образовавшуюся однажды щель, если Σ фиксировано, или как трещину, если поверхность Σ расширяется (рис. 188).

Таким образом, как в случае трещин, так и в случае дислокаций в теле имеют место разрывы перемещений, однако в случае появления дислокаций внутри тела возникают соответствующие дефекты, но сохраняется его целостность. Поверхностная дислокация напоминает вихревую поверхность в потенциальном потоке жидкости или поверхностные токи в потенциальном электромагнитном поле.

Линейные дислокации

Если вектор разрыва перемещений вдоль поверхности дислокаций как функция координат на поверхности Σ подчиняется закону перемещений твердого тела, то очевидно, что, несмотря на наличие разрыва

[1]) Здесь и далее подразумевается, что перемещения малы. Если процесс деформирования непрерывен, а перемещения w конечны, то на Σ имеем условие

$$(dw_1)_n = (dw_2)_n,$$

где $(dw_1)_n$ и $(dw_2)_n$ — нормальные составляющие приращений векторов перемещения на разных сторонах поверхности Σ.

перемещений на поверхности Σ, компоненты тензора деформаций могут быть непрерывными при переходе через Σ. В этом случае возникают особенности в распределении компонент тензора деформаций только на контуре $\mathcal{L}$, ограничивающем поверхность Σ.

Аналогично, в гидродинамике вместо системы вихрей, заполняющих поверхность при переменном скачке потенциала $\varphi_1 - \varphi_2$, появляется изолированная вихревая линия $\mathcal{L}$, когда скачок потенциала постоянен на Σ, или в электродинамике вместо системы поверхностных токов появляется линейный ток вдоль линии $\mathcal{L}$.

Таким образом, можно вводить и рассматривать изолированные линии $\mathcal{L}$ как характеристики соответствующих дефектов — дислокаций [1]). Можно различать типы линейных дислокаций в зависимости от вида скачка перемещений на поверхности Σ, ограниченной линией $\mathcal{L}$.

Условие для напряжений на поверхности дислокаций

Поверхность дислокаций Σ является поверхностью касательного разрыва перемещений. В статических условиях и во многих случаях в динамических условиях на поверхности касательного разрыва Σ должно выполняться равенство

$$\boldsymbol{p}_{n_1} = -\boldsymbol{p}_{n_2}$$

или

$$\boldsymbol{p}_{n1} = \boldsymbol{p}_{n2} \text{ или } (p_{nn})_1 = (p_{nn})_2 \text{ и } (p_{n\tau})_1 = (p_{n\tau})_2, \quad (3.9)$$

где $\boldsymbol{p}_n$ — вектор напряжения на площадке поверхности Σ; индексы 1 и 2 соответствуют разным сторонам Σ; $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ — противоположно направленные нормали на поверхности Σ; $\boldsymbol{n}$ и τ — одинаковые направления нормали и касательного вектора на разных сторонах Σ.

В общем случае компоненты векторов напряжений на других площадках, например нормальных к Σ, при переходе через Σ терпят разрыв.

На поверхности трещин, вообще говоря, имеет место неравенство

$$\boldsymbol{p}_{n1} \neq \boldsymbol{p}_{n2}.$$

[1]) Кроме линейных дислокаций и дислокаций, распределенных по поверхности, можно вводить и строить теорию дислокаций, распределенных непрерывно по объему; при этом вводится «начальное состояние», но исключается возможность введения перемещений из соответствующего «начального состояния». Содержание существующих теорий дислокаций, непрерывно распределенных по объему, выходит за рамки предлагаемой книги.

Формула для притока энергии $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ при образовании разрывов (развивающихся трещин и дислокаций)

Вывод формулы для $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ дадим в рамках геометрически линеаризированной постановки задачи. Далее предположим, что тело упруго, но не обязательно следует закону Гука. Модель тела может описываться нелинейными связями между напряжениями и деформациями. Будем учитывать возможные динамические эффекты, связанные с ускоренным движением частиц среды. Учтем возможное наличие притоков тепла.

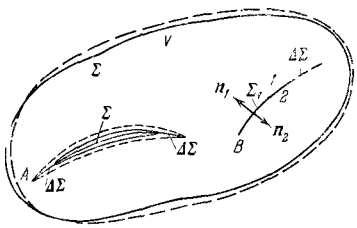


Рис. 189. Схемы развития трещины A и поверхностной дислокации B. Сплошные линии соответствуют границам тела в момент t, пунктирные — в момент $t + \Delta t$. Поверхность Σ — граница объема тела V в момент t, за время Δt часть двусторонней поверхности разрыва получает указанное приращение $\Delta\Sigma$.

Рассмотрим два деформированных состояния, соответствующих моментам времени t и $t + \Delta t$, данного тела, содержащего трещину и (или) поверхностную дислокацию (рис. 189). Случай присутствия нескольких трещин или дислокаций легко учесть дополнительным суммированием. В соответствии с линеаризацией задачи граничные условия можно формулировать на поверхности $\Sigma + \Delta\Sigma$ (рис. 189).

Обозначим через $\boldsymbol{w}\{w_i\}$ вектор перемещения из некоторого начального состояния в состояние в момент t, а через $\boldsymbol{w}'\{w_i'\}$ вектор перемещения из того же начального состояния в состояние, соответствующее моменту $t + \Delta t$. В местах вновь образующихся границ $\Delta\Sigma$ векторы перемещения $\boldsymbol{w}$ непрерывны, а векторы перемещения $\boldsymbol{w}'$ терпят разрыв. Введем вектор перемещения частиц среды за время Δt $\Delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w}$ с компонентами $\Delta w_i = w_i' - w_i$. Для удельной внутренней энергии U по определению модели имеем $U = U(\varepsilon_{ij}, s)$ и $U' = U'(\varepsilon'_{ij}, s')$, где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i) \quad \text{и} \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w'_j + \nabla_j w'_i),$$

а s и s' — соответствующие удельные энтропии.

Согласно законам теории упругости компоненты тензора напряжений внутри объема V тела в первом и втором состояниях определяются соответственно формулами

$$p^{ij} = \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad p'^{ij} = \rho' \frac{\partial U'}{\partial \varepsilon'_{ij}},$$

где ρ и ρ' — соответствующие плотности. В рамках линеари-

зированной теории в этих формулах можно принять, что $\rho = \rho'$. На основании уравнений движения среды для моментов t и $t + \Delta t$ в точках объема V можно написать равенства

$$\nabla_j (p'^{ij} + p^{ij}) + \mathcal{F}'^i + \mathcal{F}^i = 0, \qquad (3.10)$$

где $\mathcal{F}^i = F^i - \rho a^i$, a^i — компоненты вектора ускорения, F^i — компоненты внешних объемных сил. Умножая уравнения (3.10) на

$$\frac{1}{2}\Delta w_i = \frac{1}{2}(w_i' - w_i),$$

суммируя и интегрируя сумму по всему объему тела, с учетом линеаризированной постановки задачи после очевидных преобразований получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma+\Delta\Sigma} (p'^{ij} + p^{ij})(w_i' - w_i)\, n_j\, d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_V (\mathcal{F}^i + \mathcal{F}'^i)(w_i' - w_i)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_V \left[\left(\frac{\partial U'}{\partial \varepsilon_{ij}'} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\nabla_j \Delta w_i\right]\rho\, d\tau, \qquad (3.11)$$

где n_j — компоненты нормали к $\Sigma + \Delta\Sigma$, внешней по отношению к объему, занятому телом.

Если внутренняя энергия представляет собой квадратичную форму только от компонент тензора деформаций, то в рамках линеаризированной теории можно написать

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial \varepsilon_{ij}'} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\nabla_j (w_i' - w_i) = \left(\frac{\partial U'}{\partial \varepsilon_{ij}'}\nabla_j w_i' - \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\nabla_j w_i\right) = 2(U' - U).$$

Поэтому правая часть равенства (3.11) приобретает вид

$$\int\limits_V \rho U'\, d\tau - \int\limits_V \rho U\, d\tau = dU_1.$$

Рассмотрим теперь смысл правой части в равенстве (3.11) при $\Delta t \to 0$ в более общем случае, когда плотность внутренней энергии U представляет собой некоторую функцию от энтропии s и компонент ε_{ij}.

В дальнейших вычислениях учтем, что при $\Delta t \to 0$ величина площадки возникающего разрыва $\Delta\Sigma$ имеет порядок Δt, во внутренних фиксированных точках объема V разности $w_i' - w_i$ и величины $\nabla_j(w_i' - w_i)$ представляют собой малые порядка Δt, однако в точках поверхности разрыва $\Delta\Sigma$ разности $w_i' - w_i$ имеют порядок самих перемещений w_i' или w_i. Примем, что разности энтропий $s' - s$ в точках объема V и на границе $\Delta\Sigma$ имеют те же свойства, что и разности $w_i' - w_i$. С точностью

до малых второго порядка включительно можно написать

$$U'(\varepsilon'_{ij}, s') - U(\varepsilon_{ij}, s) = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \Delta\varepsilon_{ij} + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{pq}\, \partial \varepsilon_{ij}} \Delta\varepsilon_{pq} + \frac{\partial^2 U}{\partial s\, \partial \varepsilon_{ij}} \Delta s\right] \Delta\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\, \Delta s\right) \Delta s$$

и, кроме этого, имеем

$$\frac{\partial U'(\varepsilon'_{ij}, s')}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial U(\varepsilon_{ij}, s)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \Delta \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{pq} \partial \varepsilon_{ij}} \Delta\varepsilon_{pq} + \frac{\partial^2 U}{\partial s\, \partial \varepsilon_{ij}} \Delta s.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta U = \frac{1}{2}\left[\left(2\, \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} + \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\right) \Delta\varepsilon_{ij}\right] + T^* \Delta s, \qquad (3.12)$$

где

$$T^* = \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \Delta s$$

— уточненное значение в момент $t + \Delta t$ для температуры.

Очевидно, что выражения в квадратных скобках в (3.12) и в интеграле справа в (3.11) совпадают. Соотношение (3.12) представляет собой не что иное, как уточненный вариант записи с учетом малых второго порядка дифференциального соотношения

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial U}{\partial s} ds = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} + dq^{(e)}, \quad dq^{(e)} = T\, ds. \qquad (3.13)$$

Во внутренних точках объема V равенство (3.12) переходит в равенство (3.13) при отбрасывании членов порядка $(\Delta t)^2$. При приближении к поверхности образующегося разрыва $\Delta\Sigma$ и на поверхности $\Delta\Sigma$ порядки членов $\partial U/\partial \varepsilon_{ij}$ и $\Delta\,(\partial U/\partial \varepsilon_{ij})$ становятся одинаковыми. В связи с этим при вычислении интеграла (3.11) воспользуемся равенством (3.12).

Для упругого тела по определению имеем

$$U_1 = \int_V U \rho\, d\tau.$$

Положим, что

$$\int_V T^* \Delta s\, \rho\, d\tau = \int_V dq^{(e)}\, \rho\, d\tau = dQ^{(e)},$$

где $dQ^{(e)}$ полный внешний приток тепла. С учетом этих определений на основании (3.12) найдем формулу

$$\frac{1}{2}\int_V \left[\left(\frac{\partial U'}{\partial \varepsilon'_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) \nabla_j (w'_i - w_i)\right] \rho\, d\tau = dU_1 - dQ^{(e)}.$$

Пользуясь этим, получим, что уравнение (3.11) приводится к виду

$$dE + dU_1 = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta\Sigma} \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{w}'\, d\sigma + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta\Sigma} \boldsymbol{p}'^{n} \cdot (\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w})\, d\sigma. \quad (3.14)$$

Здесь еще учтено, что ввиду непрерывности вектора перемещений $\boldsymbol{w}$ и компонент p^{ij} на $\Delta\Sigma$ верно равенство

$$\int\limits_{\Delta\Sigma} (\boldsymbol{p}^n \cdot \boldsymbol{w})\, d\sigma = 0.$$

Кроме этого, в (3.14) использованы очевидные обозначения:

$$dA^{(e)}_{\text{мас}} = \int\limits_V F^i\, dw_i\, d\tau, \quad dE = \int\limits_V \rho a^i\, dw_i\, d\tau,$$

где E — полная кинетическая энергия тела в объеме V; через $dA^{(e)}$ в (3.14) обозначена сумма работ внешних массовых сил и внешних поверхностных сил на полной до появления разрыва на участке $d\Sigma$ границе [1]) тела Σ:

$$dA^{(e)} = \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{p}^n \cdot d\boldsymbol{w}\, d\sigma + dA^{(e)}_{\text{мас}}.$$

Сравнение соотношений (3.14) с (3.7) приводит к искомой формуле:

$$dA^{(e)}_{d\Sigma} = \frac{1}{2}\int\limits_{d\Sigma} \boldsymbol{p}^n \cdot \boldsymbol{w}'\, d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_{d\Sigma} \boldsymbol{p}'^{n} \cdot (\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w})\, d\sigma. \quad (3.15)$$

В частности, для трещины, если ее берега свободны от напряжений, т. е. когда $\boldsymbol{p}'^{n} = 0$ на $d\Sigma$, формула (3.15) дает

$$dA^{(e)}_{d\Sigma} = \frac{1}{2}\int\limits_{d\Sigma_1} \boldsymbol{p}^n \cdot \boldsymbol{w}'_1\, d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_{d\Sigma_2} \boldsymbol{p}^n \cdot \boldsymbol{w}'_2\, d\sigma, \quad \boldsymbol{w}'_2 \neq \boldsymbol{w}'_1, \quad (3.16)$$

где $d\Sigma_1$ и $d\Sigma_2$ — разные стороны дополнительного разрыва $d\Sigma$. Напомним, что нормали направлены на $d\Sigma_1$ и $d\Sigma_2$ в противоположные стороны, внутрь трещины, во внешнюю по отношению к объему V сторону.

В случае поверхностной дислокации на $d\Sigma$ имеем

$$\boldsymbol{p}^{n_1} = -\boldsymbol{p}^{n_2}, \quad \boldsymbol{p}'^{n_1} = -\boldsymbol{p}'^{n_2}, \quad \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2$$

[1]) Здесь принято, что два борта поверхности дислокаций включены в границу тела Σ.

и

$$\boldsymbol{w}'_1 - \boldsymbol{w}'_2 = \boldsymbol{w}'_{\tau 1} - \boldsymbol{w}'_{\tau 2} \neq 0,$$

поэтому формула (3.15) дает

$$dA^{(e)}_{d\Sigma} = \frac{1}{2}\int\limits_{d\Sigma} (\boldsymbol{p}^n + \boldsymbol{p}'^n)\cdot \boldsymbol{w}'\, d\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_{d\Sigma_1} (\boldsymbol{p}^n_{\tau 1} + \boldsymbol{p}'^n_{\tau 2})\cdot(\boldsymbol{w}'_{\tau 1} - \boldsymbol{w}'_{\tau 2})\, d\sigma. \tag{3.17}$$

Здесь индексом τ отмечены касательные к $d\Sigma$ составляющие соответствующих векторов.

В рамках упругой модели тела с внутренней энергией U_1 приток энергии $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ необходимо рассматривать как внешний приток энергии. В полной более сложной модели тела с учетом видоизмененной и усложненной внутренней энергии (например, $U_1 + U_0$) приток энергии $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ должен черпаться за счет изменения внутренней энергии. Например, в теории трещин в хрупком теле за счет величины $dU_0 = \gamma(d\Sigma_1 + d\Sigma_2)$. В теории дислокаций — за счет зависимости внутренней энергии от характеристик дефектов-дислокаций, причем в теории дислокаций часть работы поверхностных сил на разрыве Σ, отличную от нуля и включенную в $dA^{(e)}$, тоже необходимо рассматривать и включать в изменение внутренней энергии, так как этот поток происходит за счет работы не внешних, а внутренних сил, обусловленных работой сил внутренних напряжений на разрыве касательных перемещений, когда на поверхности разрыва Σ

$$\boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w} \neq 0, \text{ причем } d\boldsymbol{w}_1 \neq d\boldsymbol{w}_2.$$

Появляющиеся в рамках модели теории упругости в уравнениях энергии для частей тела, содержащих края развивающихся разрывов, внешние концентрированные притоки энергии $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ по своему смыслу и природе аналогичны внешним концентрированным силам, действующим в жидкости на присоединенные вихревые нити, движущиеся по кинематически заданным законам. Соответствующая обобщенная теорема Н. Е. Жуковского для сил, действующих на присоединенные вихри, разъяснена на стр. 300.

Формула Ирвина

Вычислим теперь величину $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ для трещины в случае плоского деформированного состояния. Для вычисления $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ воспользуемся асимптотическими формулами (2.11), (2.12), (2.18) и (2.19), установленными при решении задачи об упругой плоскости со щелью, и формулой (3.16). В действительности при квазихрупком разрушении законы линейной теории упругости в малой области вблизи краев трещины не описывают реальное поведение ма-

териала (из-за проявления нелинейных эффектов, свойств пластичности и т. д.). Все же указанный прием вычисления $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ для квазихрупких тел можно применять, если иметь в виду следующие соображения.

Из уравнения (3.7) следует, что величина $dA^{(e)}_{d\Sigma}$, непосредственно связанная с эффектами, проявляющимися лишь в малой области у краев трещины, балансируется с приращениями остальных величин, входящих в это уравнение, для всего *тела в целом*. В связи с этим для правильного определения $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ достаточно, чтобы вычисление остальных величин в этом уравнении осуществлялось правильно в главной части тела. Ввиду малости особой зоны вблизи краев трещины, в которой проявляются усложненные свойства тела, можно считать, что ее влияние на основную часть тела таково, как если бы все тело, включая малую область краев трещины, было упругим. В связи с этим мы можем пользоваться для определения $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ законами теории упругости, не беспокоясь о том, что они не описывают реальные явления в малой области у краев трещины, и помня, что при вычислении $dA^{(e)}_{d\Sigma}$ в рамках упругой модели удовлетворяются все законы сохранения так же как и в усложненной модели, описывающей детали явления малой окрестности краев трещины.

Хорошее соответствие действительности законов теории упругости в основной части объема показывает, что расходы энергии у края трещины в действительном явлении и расходы энергии, рассчитанные по теории упругой модели, одинаковы. Точность совпадения для хрупких и квазихрупких тел гарантируется удовлетворительной применимостью теории упругости для расчета полей напряжений и деформаций во всем объеме тела, за исключением весьма малых областей вблизи краев трещин.

С помощью формулы (3.16), используя для p_{22} и p_{12} формулы (2.11) и (2.18) при $\vartheta = 0$, $r = x$, а для u и v формулы (2.12) и (2.19) при $\vartheta = \pi$, $r = \delta l - x$, для величины $\delta A^{(e)}_{\delta\Sigma}$, рассчитанной на единицу ширины пластины, получим [1])

$$\delta A^{(e)}_{\delta\Sigma} = -\int_0^{\delta l} (p_{22}v + p_{12}u)\,dx = -\frac{1-\sigma}{\mu}(k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2)\,\delta l. \quad (3.18)$$

Как видно, вывод формулы Ирвина (3.18) связан с рядом существенных допущений. Однако формула Ирвина, получен-

[1]) Если напряжения на бортах трещины отличны от нуля, то нужно учесть также второй интеграл в формуле (3.15). Однако если p_n ограничено, то вычисление этого интеграла по асимптотическим формулам дает малую величину высшего порядка (порядка $(\delta l)^{3/2}$).

ная как следствие разъясненных выше допущений, принята авторами, разрабатывающими механическую теорию трещин. Эта теория во многих случаях хорошо соответствует опытам.

Условие, определяющее развитие трещины

С помощью (3.18) из основного уравнения (3.8) при условии, что $\delta U_0 = \gamma \delta \Sigma = \gamma\, 2\delta l$ и $\delta Q^{**} = 0$, ввиду произвольности вариации δl у каждого развивающегося края трещины получается фундаментальное равенство, регулирующее решение упругой задачи с учетом движения концов трещины,

$$k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 = \frac{\mu}{1-\sigma}\, 2\gamma = \frac{E\gamma}{1-\sigma^2}. \qquad (3.19)$$

Здесь k_{I} и k_{II} — величины, зависящие функциональным образом от распределения внешних нагрузок, от поля ускорений (массовых сил инерции), размеров и формы трещин и законов притока тепла. Равенства (3.19), написанные для концов всех трещин, могут служить добавочными условиями в упругой задаче для определения законов развития внутренних разрывов — трещин.

Статическое решение задачи теории упругости с заданной щелью можно найти при любых формах и размерах щели и при любых внешних нагрузках. В каждом решении получаются свои k_{I} и k_{II}. Если для данного конца щели $k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 < [E\gamma/(1-\sigma^2)]$, то при $k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 \neq 0$ будет концентрация напряжений, но не будет развития щели как трещины. Расчетные упругие поля, в которых $k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 > [E\gamma/(1-\sigma^2)]$, неосуществимы.

Равенства (3.19) являются в теории трещин основными соотношениями, добавочными к уравнениям и условиям теории упругости. Эти соотношения, тесно связанные с идеей Гриффитса, были установлены и применены к решению многочисленных задач о равновесии и распространении трещин Ирвином (1957 г.) и затем рядом других авторов. Полезно подчеркнуть, что для каждой отдельной трещины будет, вообще говоря, не одно, а два соотношения типа (3.19). В частных случаях, например, при наличии симметрии число существенных соотношений (3.19) сокращается. В общем случае соотношения (3.19) определяют не только длины трещин, но и их расположение в теле.

Об отсутствии концентрации напряжений

Из равенства (3.19) видно, что условие об отсутствии концентрации напряжений у концов щели или трещины, т. е. равенство нулю коэффициентов интенсивности напряжений k_{I} и k_{II}, может иметь место только в том случае, когда

$$\gamma = 0 \text{ или } dU_0 = 0.$$

Это может быть тогда, когда в направлении роста трещины два тела просто прижаты друг к другу (не склеены) и не взаимодействуют между собой силами сцепления, противодействующими разъединению тела.

Выше была рассмотрена такого рода задача (см. стр. 524).

Фиксированные щели и развивающиеся трещины

Очевидно, что в задачах о развитии трещин в реальных телах всегда имеется расход энергии, и поэтому всегда $\gamma \neq 0$. Следовательно, в рамках линейной теории упругости у заостренных концов щели и трещины всегда имеет место концентрация напряжений.

Трещина отличается от простой щели (геометрически они могут быть одинаковыми) только тем, что для трещины выполняется равенство (3.19), а для щели вместо равенства (3.19) имеет место неравенство

$$k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 < \frac{\mu}{1-\sigma} 2\gamma, \tag{3.20}$$

причем в этом случае концы щели фиксированы. Переход от неравенства (3.20) к равенству (3.19) определяет критические условия для внешних нагрузок, действующих на тело.

Устойчивый и неустойчивый процесс развития трещины

Выше были установлены локальные условия на концах трещины. Этих условий достаточно для решения с помощью теории упругости глобальной задачи о неустановившемся деформировании образца, внутри которого имеются трещины.

Решение динамической задачи для тела в целом с использованием условия (3.19) в зависимости от формы тела и вида нагрузок может соответствовать лавинообразному ускоренному неустойчивому развитию трещины, приводящему к разрушению образца, или устойчивому процессу, в котором для последовательного увеличения размеров трещины требуется прикладывать все большие нагрузки.

Небесполезно подчеркнуть, что проблема разрушения тел представляет собой глобальную задачу, не связанную непосредственно с локальными условиями на концах трещин; однако локальное предельное условие на конце трещины должно выполняться как в случае устойчивого, так и в случае неустойчивого развития трещины, и поэтому это условие может быть использовано как необходимое условие при решении соответствующих задач.

В ряде случаев локальное условие (3.19) является достаточным критерием неустойчивости, приводящей к разрушению тела. Приведем некоторые примеры неустойчивого развития трещин.

Плоскость с прямолинейной трещиной, по берегам которой распределены постоянные нормальные напряжения

Рассмотрим бесконечную плоскость, ослабленную прямолинейной трещиной $|x| \leqslant a$, $y=0$. Пусть по берегам трещины распределены раздвигающие ее берега нормальные напряжения

$$p_{22} = -g(x), \quad p_{12} = 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant a, \ y = 0.$$

Коэффициент интенсивности напряжений k_{I} определяется при этом выражением (2.10) и, согласно (3.19), условие развития трещины имеет вид

$$\frac{1}{\pi a}\left[\int_{-a}^{a} g(\xi)\sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\,d\xi\right]^2 = \frac{E\gamma}{1-\sigma^2}. \tag{3.21}$$

При $g(\xi) = p_0 = \mathrm{const}$ коэффициент интенсивности напряжений (см. (2.21)) равен

$$k_{\mathrm{I}} = p_0\sqrt{\pi a}$$

и предельное условие (3.21) записывается в виде

$$p_0 = p_0^* = \sqrt{\frac{E\gamma}{\pi a(1-\sigma^2)}}, \tag{3.22}$$

где через p_0^* обозначена величина напряжения p_0, при которой происходит разрыв щели.

Согласно (3.22) критическое значение напряжения p_0^* убывает с ростом длины трещины $2a$. Поэтому при фиксированном давлении p_0 распространение трещины будет носить неустойчивый характер.

Очевидно, что развитие трещины будет иметь неустойчивый характер и в том случае, когда берега трещины свободны от напряжений, а плоскость испытывает всестороннее растяжение под действием постоянного напряжения p_0 на бесконечности. Коэффициент интенсивности напряжений k_{I} в этом случае также определяется формулой (2.21), а критическое значение p_0^* растягивающего напряжения p_0 — формулой (3.22).

Одноосное растяжение плоскости с трещиной

В случае одноосного растяжения упругой плоскости с трещиной $|x| \leqslant a$, $y = 0$ напряжениями p_0 в бесконечности под углом θ_0 к оси x (рис. 178), коэффициенты интенсивности напряжений k_{I} и k_{II} согласно (2.22) имеют значения

$$k_{\mathrm{I}} = p_0\sqrt{\pi a}\sin^2\theta_0, \quad k_{\mathrm{II}} = p_0\sqrt{\pi a}\sin\theta_0\cos\theta_0$$

и условие предельного равновесия щели согласно (3.19)

запишется в виде

$$p_0 = p_0^* = \frac{1}{\sin\theta_0}\sqrt{\frac{E\gamma}{\pi a(1-\sigma^2)}}. \qquad (3.23)$$

Очевидно, что распространение трещины при $\theta_0 \neq 0$ и постоянном p_0 также имеет неустойчивый характер. Критическое значение p_0^* растягивающего напряжения p_0 зависит от θ_0. Наименьшее значение p_0 для нарушения равновесия щели потребуется, очевидно, в том случае, когда плоскость растягивается в направлении, перпендикулярном к щели ($\theta_0 = \pi/2$). Формулы (3.23) и (3.22) при этом совпадают.

В случае растяжения плоскости по направлению щели ($\theta_0 = 0$) коэффициенты интенсивности напряжений k_I и k_{II} обращаются в нуль; как и следовало ожидать, такого рода напряжения не влияют на развитие трещины. Рассмотрим теперь примеры устойчивого распространения трещин.

Плоскость с трещиной, на фиксированном участке берегов которой распределены постоянные нормальные раздвигающие напряжения

Предположим, что плоскость ослаблена трещиной $|x| \leqslant a$, $y = 0$, причем на фиксированном участке берегов трещины $|x| \leqslant b$, $y = 0\,(b < a)$ действуют постоянные нормальные напряжения, раздвигающие берега трещины (рис. 190).

Коэффициент интенсивности напряжений k_I согласно (2.10) равен

$$k_I = \frac{p_0}{\sqrt{\pi a}}\int_{-b}^{b}\frac{\sqrt{a+\xi}}{\sqrt{a-\xi}}\,d\xi = \frac{p_0}{\sqrt{\pi a}}\int_{-b}^{b}\frac{a+\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\,d\xi = \frac{2p_0\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Условие развития трещины (3.19) принимает вид

$$p_0 = p_0^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi E\gamma}{a(1-\sigma^2)}}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^{-1}.$$

Легко усмотреть, что в этом случае p_0^* с ростом длины трещины

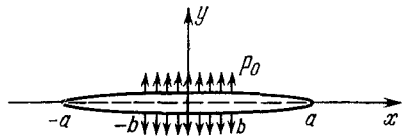


Рис. 190. Трещина $|x| \leqslant a$, $y = 0$ под действием нормальных разрывающих постоянных напряжений p_0, распределенных на отрезке $|x| \leqslant b$ $(b < a)$ $y = 0$, $b = \text{const}$.

a возрастает и, следовательно, процесс распространения трещины при фиксированных p_0 и b может остановиться.

Плоскость с трещиной под действием расклинивающих сосредоточенных сил, приложенных в середине ее берегов

Рассмотрим случай, когда к плоскости с трещиной $|x| \leqslant a$, $y = 0$ только в середине берегов трещины приложены две расклинивающие силы $\boldsymbol{P}$ (рис. 179). В этом случае коэффициент интенсивности напряжений k_{I} (см. (2.24)) равен

$$k_{\mathrm{I}} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}.$$

Условие распространения трещины в этом случае имеет вид

$$P = P^* = \sqrt{\frac{\pi E \gamma a}{1 - \sigma^2}}. \tag{3.24}$$

Видно, что критическое значение P^* сил P с ростом длины трещины возрастает, и процесс распространения трещины является устойчивым.

Развитие трещины в плоскости со щелью, когда плоскость находится под действием постоянного одноосного сжатия на бесконечности и возрастающих расклинивающих сил, приложенных в серединах берегов щели

Представим себе упругую плоскость с прямолинейной щелью конечной длины $|x| \leqslant a$, $y = 0$. Пусть на эту плоскость действуют сжимающие, направленные параллельно оси y напряжения p_0 на бесконечности и две сосредоточенные расклинивающие силы $\boldsymbol{P}$, приложенные в серединах берегов щели (рис. 191). Рассмотрим развитие трещины в этой плоскости, когда p_0 фиксировано, а расклинивающие силы $\boldsymbol{P}$ квазистатически возрастают от нуля.

Выражение для коэффициента интенсивности напряжений k_{I} согласно (2.22) и (2.24), очевидно, будет иметь вид

$$k_{\mathrm{I}} = \frac{P}{\sqrt{\pi l}} - p_0 \sqrt{\pi l}, \tag{3.25}$$

где $2l$ — длина трещины. Если $l \leqslant a$, то щель раскрыта не полностью и $k_{\mathrm{I}} = 0$, при этом величина силы P должна удовлетворять неравенству

$$0 \leqslant P = p_0 \pi l \leqslant P_1 = p_0 \pi a.$$

При изменении P в пределах

$$P_1 < P < P^*,$$

где P^* — критическое значение P, определяемое из предельного

условия (3.19) с помощью (3.25) при $l = a$,

$$P^* = \sqrt{\frac{\pi a E \gamma}{1 - \sigma^2}} + p_0 \pi a,$$

трещина не развивается, и в окрестности концов первоначальной щели имеется концентрация напряжений.

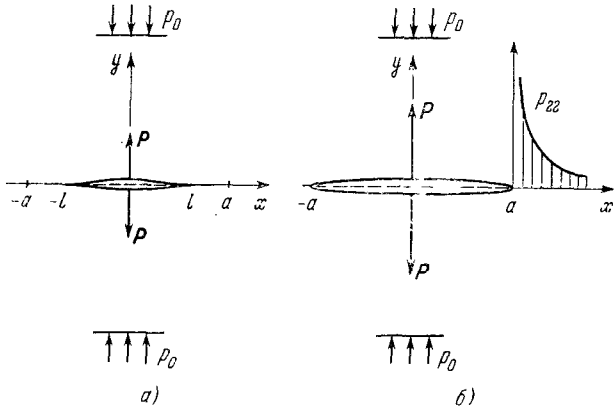


Рис. 191. Плоскость со щелью $|x| \leqslant a$, $y = 0$ под действием одноосного (в направлении оси y) сжатия напряжениями p_0 на бесконечности и расклинивающих сил P, приложенных в серединах берегов щели. *а*) Величина сил P недостаточна для того, чтобы щель полностью раскрылась; концентрация напряжений в окрестности точек $x = \pm l$, $y = 0$ отсутствует. *б*) Щель полностью раскрыта и вблизи ее концов имеется концентрация напряжений.

При $P = P^*$ длина $2a$ первоначальной щели начинает увеличиваться, и при фиксированном значении

$$P = P_2 > P^*$$

будет происходить процесс развития трещины.

Длину трещины $2l$ ($l > a$) при этом, если γ известно, можно определить из равенства

$$P_2 = \sqrt{\frac{\pi l E \gamma}{1 - \sigma^2}} + p_0 \pi l.$$

Об экспериментальном определении величины γ

Как показано выше, физический параметр γ является плотностью энергии на разрыв. В простейшем случае можно предположить, что величина γ является константой материала (Ирвин).

Величину γ можно определять из различного рода экспериментов [1]): растяжение толстых надрезанных плит (рис. 192, *а*), круглых стержней с надрезами (рис. 192, *б*), над-

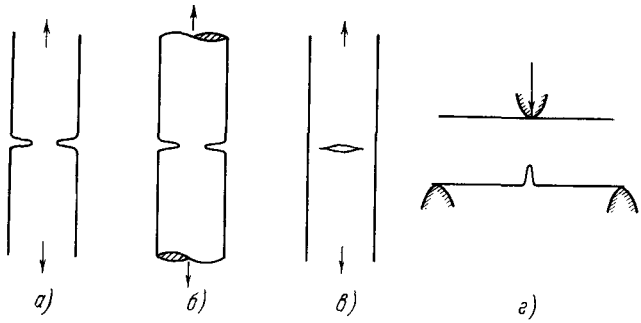


Рис. 192. Возможные эксперименты по определению величины γ.

резанных в центре плоских листов (рис. 192, *в*); изгиб надрезанного стержня (рис. 192, *г*). В перечисленных экспериментах достижение предельного равенства (3.19) связано с дальнейшим неустойчивым распространением трещины.

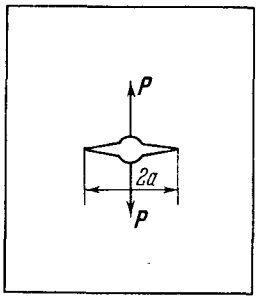


Рис. 193. Расклинивающие силы P, приложенные в середине берегов трещины.

Могут быть также использованы эксперименты, в которых происходит устойчивый рост трещин, например, когда трещина находится под действием расклинивающих сил, приложенных в середине ее берегов (рис. 193). Теоретический анализ показывает, что для пластины конечной ширины устойчивый рост трещины имеет место в этом случае только тогда, когда длина трещины $2a$ не превосходит половины ширины образца ($2a < l/2$).

Следует отметить, что величина γ, определенная из экспериментов с устойчивым ростом трещины, оказывается несколько меньше величины γ, определенной из экспериментов с неустойчивым ростом трещин. Это связано с динамическими эффектами, с влиянием вязкости и других свойств материала, проявляющихся при неустановившемся характере деформирования.

[1]) См., например, статью Ирвина, Киса и Смита, Proc. Amer. Soc. Test. Mater, 1958/1959, vol. 58, p. 640—657.

О влиянии температуры и толщины образца

Понижение температуры приводит к тому, что материал становится более хрупким. Поэтому для Крайнего Севера расчеты различных сооружений (газопроводов, мостов и других конструкций) в условиях хрупкого разрушения приобретают особенно важное значение. Эксперименты показывают, что величина γ для сталей повышается с ростом температуры.

Изменение толщины образца при других равных условиях также сказывается на развитии трещин и на характере разрушения.

О влиянии поверхностно-активных сред на развитие трещины

Внешняя среда, примыкающая к краям трещин, может оказывать существенное влияние на развитие трещин. Например, при погружении стекла в воду эффективная величина γ для стекла снижается на 25%. Механизм этого явления можно представлять себе следующим образом. В уравнении (3.8) величина dU_0 является характеристикой материала, и ее можно рассматривать независимо от внешних условий. Влияние внешних условий можно учитывать с помощью притоков физико-химической энергии dQ^{**},

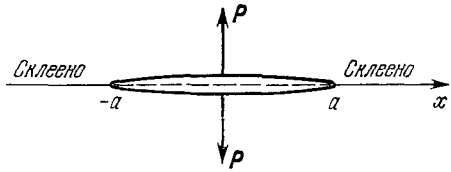


Рис. 194. Склеенный образец под действием расклинивающих сил, приложенных в точках склеенной поверхности.

разность $dU_0 - dQ^{**}$ можно рассматривать как dU_0 с измененной величиной γ.

Аналогичным образом можно описать следующий опыт. Возьмем склеенный образец, в котором под действием внешних разрывающих сил $\boldsymbol{P}$ имеется концентрация напряжений на краях щели $|x| \leqslant a$, $y = 0$ (рис. 194). При фиксированных малых внешних нагрузках P, несмотря на концентрацию напряжений, не произойдет разделения образца по склеенной части. Если вблизи концов щели смочить склеенную поверхность кислотой, разъедающей клей, то при неизменных внешних нагрузках произойдет разрыв образца по склеенной поверхности.

Это можно истолковать как проявление влияния притока химической энергии dQ^{**} в равенстве (3.9). За счет притока этой энергии имеющаяся концентрация напряжений окажется

достаточной для разрыва образца. Эти примеры указывают на то, что в некоторых случаях для объяснения наблюдаемых эффектов необходимо вводить и учитывать внешние макроскопические притоки энергии dQ^{**}.

Значение γ и $\gamma_{эф}$ для некоторых материалов

Эксперименты показывают, что величина γ не является, строго говоря, константой материала. Все же эта величина и, соответственно, критическое значение $k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2$ являются весьма полезными характеристиками, которые могут быть использованы в расчетах на разрушение.

Приведем для примера порядки величин γ и $\gamma_{эф}$ для некоторых материалов. Для силикатных стекол

$$\gamma_{эф} \sim \gamma \sim (1 \div 2)10^3 \text{ дин/см},$$

для поваренной соли

$$\mathrm{NaCl} - \gamma_{эф} \sim \gamma \sim 300 \text{ дин/см}$$

(для сравнения заметим, что для воды $\gamma = 72$ дин/см). Распространение трещины в стальных образцах сопровождается многими дополнительными сложными явлениями, поэтому $\gamma_{эф}$ для сталей значительно больше, чем величина плотности поверхностной энергии γ. Именно, для сталей

$$\gamma \sim 2 \cdot 10^3 \text{ дин/см}, \quad \text{а } \gamma_{эф} \sim (10^5 \div 10^7) \text{ дин/см}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Абрамович Г. Н., Прикладная газовая динамика, «Наука», Москва, 1969.
Арутюнян Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, Москва, 1952.
Angelitch T. P., Tensorkalkül nebst Anwendungen. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 141, Springer — Yerlag, 1968.
Batchelor G. K., An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967.
Бердичевский В. Л., Седов Л. И., Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций, связь с теорией пластичности, ПММ, т. 31. вып. 6, 1967.
Биркгоф Г., Гидродинамика, перев. с англ. ИЛ, 1954, 1963.
Биркгоф Г., Сарантонелло Э., Струи, следы и каверны, перев. с англ., «Мир», Москва, 1964.
Bridicka M., Mechanika kontinua, Praha, 1959.
Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости, Гостехиздат, Москва, 1953.
Гиббс Дж., Термодинамические работы, Гостехиздат, Москва, 1950.
Green A. E., Zerna W., Theoretical elasticity, Oxford Univ. Press, 1954.
Гольденблатт И. И., Нелинейные проблемы теории упругости, «Наука», Москва, 1969.
Гроот С., Мазур П., Неравновесная термодинамика, перев. с англ., «Мир», Москва, 1964.
Гуревич М. И., Теория струй идеальной жидкости, Физматгиз, Москва, 1961.
Eringen A. C., Mechanics of Continua, John Wiley, 1967.
Жермен П., Механика сплошных сред, перев. с франц., «Мир», Москва, 1965.
Жуковский Н. Е., Собрание сочинений, тт. I—VII, Гостехиздат, Москва, 1948—1950.
Зоммерфельд А. А., Механика деформируемых сред, перев. с нем., ИЛ, Москва, 1954.
Зоммерфельд А. А., Термодинамика и статистическая физика, перев. с нем., ИЛ, Москва, 1955.
Ивлев Д. Д., О теории трещин квазихрупкого разрушения, ПМТФ, № 6, 1967 (библиография).
Ильюшин А. А., Пластичность, Изд-во АН СССР, Москва, 1963.
Iacob C. Introduction Mathematique á la Mechanique des Fluides, Bucarest — Paris, 1959.
Качанов Л. М., Основы теории пластичности, изд. 2, «Наука», Москва, 1969.
Качанов Л. М., Теория ползучести, Физматгиз, Москва, 1960.
Карафоли Э., Аэродинамика крыла самолета, Изд-во АН СССР, Москва, 1956.
Кирхгоф Г., Механика, перев. с нем., Изд-во АН СССР, Москва, 1962.
Колосов Г. В., Применение комплексной переменной к теории упругости. ОНТИ, Москва, 1935.

Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В., Теория точечного взрыва, Физматгиз, Москва, 1961.
Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, Москва, 1951.
Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, тт. I и II, Физматгиз, Москва, 1963.
Красильщикова Е. А., Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, Гостехиздат, Москва — Ленинград, 1952.
Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, Физматгиз, Москва, 1962.
Ламб Г., Гидродинамика, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1947.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика; Механика сплошных сред, ГИТТЛ, 1954; Теория упругости, т. 7, «Наука», 1965; Электродинамика сплошных сред, т. 8, Физматгиз, 1959; Теория поля, т. 2, «Наука», 1967.
Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, Гостехиздат, Москва, 1947.
Лейбензон Л. С., Вариационные методы решения задач теории упругости, Гостехиздат, Москва, 1943.
Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, изд. 3, «Наука», Москва, 1970.
Лоренц Г. А., Лекции по термодинамике, перев. с нем., Гостехиздат, Москва, 1941
Лурье А. И., Теория упругости, «Наука», Москва, 1970.
Ляв А., Математическая теория упругости, перев. с англ., ОНТИ, Москва 1935.
Михлин С. Г., Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, Москва, 1950.
Murnaghan F. D., Finite deformation of an elastic solid, John Wiley, Chapman, New York, 1951.
Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, «Наука», Москва, 1966.
Надаи А., Пластичность, перев. с англ., ОНТИ, Москва, 1936.
Надаи А., Пластичность и разрушение твердых тел, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1954.
Новожилов В. В., Основы нелинейной теории упругости, Гостехиздат, Москва, 1947.
Новожилов В. В., Теория упругости, Судпромгиз, Ленинград, 1958.
Паули В., Теория относительности, перев. с нем., Гостехиздат, Москва, 1947.
Прагер В., Введение в механику сплошных сред, перев. с нем., ИЛ, Москва, 1963.
Прагер В., Ходж Ф. Г., Теория идеально-пластических тел, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1956.
Прандтль Л., Гидроаэромеханика, перев. с нем., ИЛ, Москва, 1949.
Прандтль Л., Титьенс Л., Гидро и аэромеханика, тт. I и II, перев. с нем., ГТТИ, Москва, 1933.
Работнов Ю. Н., Ползучесть элементов конструкций, «Наука», Москва, 1966.
Риман Б., О распространении плоских волн конечной амплитуды, Сочинения, перев. с нем., Гостехиздат, Москва 1948.
Roy M., Mécanique des millieux continus et déformables, тт. I, II, Gauthier — Villars, Paris, 1950.
Roy M., Thermodynamique macroscopique, notions fondamentales, Paris. Dunod, Paris, 1964.
Седов Л. И., Введение в механику сплошной среды, Физматгиз, Москва, 1962.

Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, изд. 5, «Наука», Москва, 1967.
Седов Л. И., О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций, ПММ, т. 29, вып. 1, 1965.
Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 2, Москва, «Наука», 1965.
Sokolnikoff I. S., Tensoranalysis, Theory and application to geometry and mechanics of continua, Wiley, New York, 1964.
Соловьев В. И., Чумак Д. А. Корабельные движители, Воениздат, Москва, 1948.
Степанов Г. Ю., Гидродинамика решеток турбомашин, Физматгиз, 1962.
Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, тт. I и II, перев. с англ., «Наука», 1965.
Тимошенко С. П., Теория упругости, перев. с англ., ОНТИ, 1934.
Тонелла М. А., Основы электромагнетизма и теории относительности, перев. с франц., ИЛ, Москва, 1962.
Федяевский К. К., Войткунский Я. И., Фадеев Ю. И., Гидромеханика, «Судостроение», Ленинград, 1968.
Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике, вып. 1—7, перев. с англ., «Мир», Москва 1965, 1966.
Феппль А., Феппль Л., Сила и деформация тт. I и II, перев. с нем., ГТТИ, Москва, 1933.
Филоненко-Бородич М. М., Теория упругости, Гостехиздат, 1947.
Франкль Ф. И., Карпович Е. А., Газодинамика тонких тел, ОГИЗ, Москва — Ленинград, 1948.
Хилл Р., Математическая теория пластичности, перев. с нем., Гостехиздат, Москва, 1956.
Чаплыгин С. А., Собрание сочинений, тт. I—III, Гостехиздат, Москва, 1948.
Черный Г. Г., Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, Физматгиз, 1959.
Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, перев. с нем., «Наука», Москва, 1969.
Эйнштейн А., Собрание научных трудов, «Наука», Москва, 1965, 1966.
Эпштейн П. С., Курс термодинамики, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1948.

Предметный указатель

Аналогия задач о давлении жестких прямоугольных штампов на упругую полуплоскость и нагруженной упругой плоскости с прямолинейными щелями 528
— — кручения пластического стержня и равновесия сыпучей среды (аналогия песчаная) 468, 471
— — — упругого стержня и вихревого течения идеальной жидкости 374—376
— — — — — — потенциального течения идеальной жидкости 372, 373
— — — — — — течения вязкой жидкости 372
— — — — — — прогиба мембраны (аналогия мембранная) 368—371, 471
— задачи кручения упруго-пластического стержня (аналогия песчано-мембранная) 471—473
Атмосфера изотермическая 10
— однородная 10
— политропная 11
— стандартная 12

Балки 350, 355, 377—388

Вентилятор 103
Винт 35, 69, 80, 103, 144—149
Вихри, диффузия в вязкой жидкости 305
—, плотность распределения 267
—, примеры движения 298
— присоединенные 299
— свободные 299
— —, система (пелена) 288
—, система, интегралы движения 297
—, сохраняемость в идеальной жидкости 153, 296, 303—305
Вихрь круглый 293, 295
— прямолинейный 289
Водослив 27
Волна отраженная 213
— поперечная плоская 400
— прогрессивная 212, 404
— продольная плоская 400
— простая (волна Римана) 222, 224, 226
— сдвига вихревая пространственная 402
— сжатия 224
— — (расширения) безвихревая пространственная 402
— ударная, искривленная, вихревое движение за ней 25
Волны Римана центрированные (автомодельные) 227
— Рэлея поверхностные 404, 408, 409
— упругие в изотропной среде 397

Гидростатика 5
Глиссирование 57, 287
Глубины проникания волн Рэлея 409

давление гидростатическое 7, 15, 29
— динамическое 15, 29
— жесткого штампа на упругую полуплоскость 525, 528, 529, 531
— импульсивное 154, 176, 286, 287
— полное (торможения) 28, 37
— торможения и расход топлива 127
—, связь с числом Маха (и коэффициентом скорости) 41, 42
Двигатель воздушно-реактивный 130
— — — прямоточный 137, 138
— ракетный 122, 130
— турбореактивный 141
Движение адиабатическое 21, 25, 36
— в идеальной несжимаемой жидкости сферы 181
— — — — — тела, кинематическая задача 187, 189, 190
— — — — — —, динамическая задача 200
— газа дозвуковое 40
— — сверхзвуковое 40
— — с малыми возмущениями 210
— — с плоскими волнами 211
— — со сферическими волнами 213
— жидкости несжимаемой в трубке переменного поперечного сечения 31
— — — вязкой в трубе 235
— ламинарное 243
— потенциальное 150, 157
Депланация 478
Дефинитность квадратичной формы свободной энергии 348
Деформации малые упругого тела, совпадение лагранжевых начальной и актуальной систем координат 319
— начальные 310
— остаточные 412
— пластические 422
— полные 422
— упругие 422
Диаграмма всестороннего растяжения (сжатия) 198
— одноосного растяжения-сжатия 411, 415
— чистого сдвига 414
Диполь точечный пространственный 158
Дислокации линейные 542
—, непрерывно распределенные по объему 543
—, — — — поверхности 542
Диффузор 94
— для сверхзвуковых скоростей 96
Дорожка вихрей 292

Единственность решения задач для гармонических функций, краевых внешних 173
— — — — — — —, — внутренних 165
— — — статической теории упругости 348
— — задачи об определении поля скоростей по вихрям и источникам 269

Жесткость балки на изгиб 355
— — при кручении 360
Жидкость идеальная — пример нелинейно-упругого тела 317

Задача Блязиуса 258
— Дирихле 155, 164
— краевая для гармонических функций внешняя 165
— — — — — внутренняя 165
— — — — — смешанная 164
— Ламе 332
— — для составной трубы 338
— Неймана 164, 188
— о движении газа за поршнем, выдвигаемым с постоянной скоростью из трубы 228
— — — сферы в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости 181
— о разъединении двух гладких прижатых друг к другу полуплоскостей под действием внешних сил 524
— — — — склеенных полуплоскостей под действием внешних сил 557
— об обтекании твердой сферы потоком идеальной несжимаемой жидкости 183
— равновесия балки на трех опорах 387
— — — неразрезной на n опорах 388
— Стокса о движении шара в вязкой несжимаемой жидкости 229
Задачи краевые в плоской задаче теории упругости для функций комплексного переменного 500
— статически неопределимые 386, 387
— — определимые 343, 384
— — — теории пластичности, примеры 461, 466
— теории упругости плоские, закон Гука 483
— — — —, определение 481
— — — —, перемещения 482
— — — —, уравнения Бельтрами—Мичелла 483
— — — типичные статические 341
Зависимости напряжений от деформаций динамически линейные и нелинейные 411
Закон Архимеда 13
— ассоциированный 428, 435, 446
—, — в случае поверхностей нагружения с угловыми точками 438
— Био—Савара 281
— Гука с учетом температурных напряжений 320
— движения среды 309
— Паскаля 6
— сохранения энергии для конечного тела с учетом возможности разрывов 533—537
— теплопроводности Фурье, диссипативная функция 443
Законы определения пластических деформаций, основное свойство 429—432
Запирание эжектора 120

Изгиб балки поперечной силой 377
— — — — на шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной опорах 383
— — — — — — — — — опоре, когда второй конец ее жестко закреплен 384
— — чистый 351
Изобары 7
Изостеры 7
Интеграл Бернулли 23, 26, 37, 66
— —, обобщение 66
— Коши—Лагранжа 150
— — — в подвижной системе координат 151
Интегралы движения системы вихрей 297
Источник (сток) точечный 214
— —, плотность распределения 267

Кавитация 32, 35, 163
Камера сгорания 98
— смешения 113
Количество движения бесконечной массы идеальной жидкости при движении в ней конечного тела 192
Компрессор 102
Конвекция атмосферы 17
Консоль 378
Конус Маха 219
Конфузор 93
Концентрация напряжений 504, 513, 528, 550, 551, 555
Коэффициент восстановления давления в диффузоре 95, 100
— вязкости турбулентной 252
— давления 33
— интенсивности напряжений 519, 521—523
— линейного расширения 321
— нагрузки винта 145, 147, 148
— неравномерности потока 94
— полезного действия двигателя идеальный 131, 147
— — — — полетный 131, 144, 148
— — — — пропульсивный 135, 140, 144, 148
— — — — термический 135, 140, 143
— — — камеры смешения 117
— — — компрессора адиабатический 106
— — — турбины адиабатический 112
— Пуассона 321
— расхода 97, 147
— скорости 40
— сопротивления трения 241, 262
— — —, способы его уменьшения 245
— тяги 94, 135
— эжекции 116
Коэффициенты присоединенных масс 194
— — — для тел вращения 196
— — — — — — с плоскостями симметрии 196
Кривизна изогнутой балки при изгибе 354
Кризис тепловой в камере сгорания 102
Кручение упругого стержня 356, 375
— — — круглого поперечного сечения 360
— — — — — — — с концентрической полостью 363
— — — полого 363
— — — эллиптического поперечного сечения 365, 395
— упруго-пластического стержня 462
— — — — круглого поперечного сечения 479
Крыло конечного размаха, вихревая система 288

Линии равного уровня 468

Манометры 8
Масса жидкости бесконечная при движении в ней конечного твердого тела как механическая система 201, 203
— шара присоединенная 187
Мембрана 368, 370
Метод Бубнова 395
— конформных отображений решения плоских задач теории упругости 500—502
— — — — — — — — —, физические компоненты вектора перемещений 503
— — — — — — — — —, — — тензора напряжений 503
— Ритца 392, 393
— Сен-Венана полуобратный 357
— — решения частных задач о кручении стержней 364
Методы сопротивления материалов 377
— теории упругости вариационные 388
Модель линейно-упругого тела 319
Модели сред идеальных жестко-пластических 414
— — — упруго-пластических 414
— — пластических с «памятью» 415
— — — с упрочнением 415
Модуль Юнга 321
Момент гидродинамических сил, действующих на тело 64, 200, 203, 205
— изгибающий 351, 378
— количества движения бесконечной массы идеальной жидкости при движении в ней конечного тела 192
— крутящий 351, 470
— —, критическое значение 472
— —, предельное значение 472
Мультиполь 159

Нагревание тел в потоке газа 42
Нагружение активное 426
— нейтральное 427
— пропорциональное 433
Нагрузка 411
— погонная 379
Наклеп 412
Направления главные движения тела в жидкости 195
Напряжения вблизи концов щели, асимптотические формулы 518, 520
— внутренние, пример конструкции 418
— касательные максимальные 361, 454, 506
— начальные в составной трубе 339
— турбулентные 251
Насадок Борда 60
Насадки Брикса-Корта 146
Насос 102
— водоструйный 31
— поршневый 9
Нить вихревая 279, 289
— —, потенциал индуцируемых скоростей 281—284

Обратимость процессов теории упругости 311
Определение перемещений по деформациям 325
— поля скоростей по вихрям и источникам 267—278
Опрокидывание римановской волны сжатия 224
Опыт Рейнольдса 242
Осреднение течений в каналах 88
— характеристик турбулентного движения 247
Ось балки нейтральная 381
Отображения конформные, их применение в плоской задаче теории упругости 500
Отрыв пограничного слоя 264—267
Очко (сопло простое) 47

Парадокс Даламбера 73, 75, 133, 185, 206
— Дюбуа 71
— Жуковского 15
Параметры Ламе 320
— состояния упругого тела 311
— торможения 28, 37, 125, 127
— упрочнения 425, 436, 439
Перемещения вблизи концов щели, асимптотические формулы 518, 520
— в волнах Рэлея 408, 409
— — задаче о кручении упруго-пластического стержня 473
Перепад давления в трубе 237
Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный 265
— — режима течения в трубе в турбулентный 243—245
Плоскость с вырезом круговым, растяжение всестороннее 504
— — — —, — одноосное 507
— — — эллиптическим, растяжение всестороннее 509
— — — —, — одноосное 511
— с прямолинейной щелью под действием расклинивающих сил 523
— — — — — — — — — и одноосного сжатия 555
— — — —, растяжение всестороннее 521
— — — —, — одноосное 522
— с трещиной под действием расклинивающих напряжений, распределенных на ее берегах 552
— — — — — — — —, — — постоянном участке берегов 553
— — — — — — сосредоточенных сил 554
— — —, одноосное растяжение 552
Плотность торможения (см. *Давление*)
Площадка текучести 412
Площадки максимальных касательных напряжений 452
Поверхность вихревая, разрыв касательных скоростей 285
— контрольная 54
— нагружения 423, 427, 434
— — гладкая 434
— — с угловыми точками 436
— равного ската 467
— разрыва возмущений слабого 220
— — касательных скоростей 285
— — перемещений 542, 543
— — плотности 6
— текучести 423
— — Мизеса 458
— — Треска 455
— характеристическая 220
Поле скоростей, определение по заданным вихрям и источникам 267
Ползучесть 418
Помпаж 102
Постановка задач теории упругости в напряжениях 343
— — — — — перемещениях 342
Постоянная аддитивная для внутренней энергии 534

Потенциал векторный 275
— вихревой нити прямолинейной 289
— двойного слоя 160
— запаздывающий 216
— магнитного листка, геометрическая интерпретация 282
— напряжений 316
— объемного распределения источников 159
— простого слоя 160
— системы вихревых нитей 284, 291, 292
— скоростей, динамическая интерпретация 155
— — системы особенностей в полупространстве, ограниченном плоской стенкой 179
Потери в скачках уплотнения 78
— в сопле 127
— кинетической энергии газов при смешении 118
Поток энергии в особых точках, совпадающих с краями трещин 538
Предел пропорциональности 411
— прочности 412
— текучести 412
— упругости 412
— усталости (выносливости) 420
Преобразование инверсии относительно сферы 179
Приближение Стокса уравнений движения вязкой жидкости 229
Принцип вариационный для упругих тел в равновесии 391
— минимума работы напряжений на пластических деформациях 434
— Онзагера, обобщение на нелинейные связи 443
— относительности Галилея—Ньютона 71, 209
— Сен-Венана 328, 332, 349
Приток, энергии dq ** в сложных моделях упругих тел 313, 314
— — к выделенному контрольной поверхностью объему жидкости 64
— — к среде внешний, возможные трактовки 68
Пропеллер идеальный 144
Пространство напряжений 423
Процесс адиабатический 398
— баротропный 150
— изэнтропический 398
— нагружения полный 438
— небаротропный, пример вычисления функции давления 21
— пластического деформирования, равновесность, необратимость 446
— развития трещины неустойчивый 551
— — — устойчивый 551
Процессы деформирования упругих тел, обратимость 311
Прочность материалов, связь с внутренней энергией сцепления 536
Пульсации характеристик турбулентного течения 246, 248, 249

Работа гидродинамических сил, действующих на подвижную решетку 87
— напряжений на приращениях деформаций пластических 433
— — — — — упругих 433
Равенство Гриффитса в теории трещин 540
Равновесие в поле сил тяжести жидкостей и газов 7
— — — — — однородной несжимаемой жидкости 7
— — — — — совершенного газа 9
— жидкости относительное, примеры 18, 19
Разгрузка 411, 426
Развитие трещины в плоскости со щелью под действием возрастающих расклинивающих сил и одноосного сжатия на бесконечности 554
Разложение потенциала течения несжимаемой жидкости в ряд по сферическим функциям 168—172
Разрушение квазихрупкое 533
— хрупкое 533
Распространение возмущений малых в упругих телах 397
— — от источника, движущегося с постоянными дозвуковой и сверхзвуковой скоростями 217—219
— плоской упругой волны в изотропной среде 399
— сигналов в дозвуковом потоке 217
— — — сверхзвуковом потоке 220
Растяжение бруса простое (одноосное) 321
— — в случае жестко заделанного торца 328
— — под действием собственного веса 328
Расход жидкости 44, 168
— — при движении в круглой трубе 240
— источника объемный 214
— критический сопла Лаваля 48
— топлива удельный весовой 129
Режим работы сопла нерасчетный 52, 124
— — — расчетный 50, 124
Релаксация напряжений 418
Решение бигармонического уравнения 494, 495
— волнового уравнения с волнами плоскими, общее 211
— — — — — сферическими, общее 213, 214
— уравнения Лапласа, фундаментальное 157
— — Пуассона 270
Решетка профилей 81

Свойства осреднения характеристик турбулентного движения 248
— симметрии гармонических функций 175, 177
Свойство пластичности 412, 413, 423
Связь между давлением и плотностью, при которой волна Римана не опрокидывается 226
— — — — — политропная 11
— — пластическими деформациями и напряжениями, отсутствие однозначности 416, 429
Сжимаемость, влияние на зависимость давления и плотности от скорости 42
—, — — форму трубок тока 44
Сила Архимеда 13, 30, 76
—, вынуждающая несвободный вихрь двигаться предназначенным образом 301
— гидродинамическая, действующая на контрольную поверхность 64

Сила гидродинамическая, действующая на поверхность тока 75
— —, — — решетку профилей 82
— —, — — тело в идеальной жидкости 200, 202
— —, — — — вращения в идеальной жидкости 205
— —, — — — со стороны вязкой жидкости (приближение Стокса) 229
—, действующая на поверхность со стороны покоящейся жидкости 12
— перерезывающая 378
— подъемная гидродинамическая 13, 73, 85, 300
— растягивающая 379
— реакции жидкости, текущей в трубе 68
— сопротивления при непрерывном обтекании тел 73
— — при обтекании тел газом со скачками уплотнения 79
— — — — — жидкостью со срывом струй 76
— — трения 74
— тяги 79
— — ракетного двигателя 123
Силы гидродинамические, действующие на тело в идеальной жидкости на глубине 208
— —, — — — — — — при наличии массовых сил 208
— —, — — — — — — при обтекании ускоренным потоком 209
— сцепления внутренние микроскопические 535
Система вихревых нитей 284, 291, 292
— уравнений идеально пластического тела, подчиняющегося условию пластичности Мизеса, замкнутая 460, 461
— — упругого тела замкнутая 316
— — — — при адиабатических процессах 398
Скачок уплотнения 79, 225
Скорость в реактивной струе 128, 136
— звука 39, 212, 220
— — максимальная 39
— — местная 39
—, играющая роль скорости звука 45
— истечения из сосуда газа 41
— — — несжимаемой жидкости 26
— критическая 39
— максимальная при установившемся движении 38, 39
— потенциальных течений несжимаемой жидкости, максимальность значений на границе 162
— производства энтропии за счет необратимости, связанной с градиентом температуры и пластическим деформированием 443
— распространения малых возмущений в газе 212
— — — — в упругих телах 400
— — поверхностных волн Рэлея 405, 407
— — постоянных значений плотности 223
Слой пограничный 253
— — ламинарный на пластинке 254, 258
— — — на искривленной поверхности 257, 258, 263, 264
— — при движении газа 266
— — турбулентный 265, 266
Соотношения интегральные для установившихся движений жидкости 53
— статической теории трещин 540
Сопло Лаваля 47, 93
— — с регулируемым горлом 52
Сопло Лаваля расчетное, максимальность тяги 124
— простое (очко) 47
Сопротивление индуктивное 289
— сферы при движении в идеальной жидкости с переменной скоростью 186
— — — — — в вязкой жидкости 235
— трения 265
Состояние начальное 309, 342
— «начальное» 309
— плоское деформированное 485
— — — как пример статически определимой задачи пластичности 461
— —напряженное 486
— — — как пример статически определимой задачи пластичности 461
— — — обобщенное 488
Среда идеально-пластическая 424
— упрочняющаяся 424
Стабилизатор в камере сгорания 102
Степень сжатия в ВРД общая 136, 137
— — в компрессоре 104
Стратосфера 12
Суперпозиция решений в задаче о теле со щелью 515
— — в линейной теории упругости 345
Существование поверхностных волн Рэлея 404
— функций нагружения и ассоциированного закона 446
Схема струйного обтекания с возвратной струйкой 78

Текстура 318
Тело анизотропное 318
— изотропное 318
— упругое однородное 312
Температура торможения (см. *Давление*)
— — продуктов горения 125
Тензор деформаций 309
— диссипации энергии 441
— напряжений, свойства компонент при постоянных объемных силах и температуре 344
Тензоры деформаций пластических 421
— — полных 422
— — упругих 421
Теорема Ампера 282
— Гельмгольца о сохранении вихревых линий 304
— — — — — трубок 304
— Жуковского о подъемной силе крыла 85, 300
— — — — — профиля в решетке 84
— Клапейрона 347, 348
— Лагранжа 153
— Мориса Леви 494
— о среднем гармонических функций 161
— Томсона 288, 296
Теории геометрически линейные упругих тел 311
— пластичности деформационные 429, 432
— —, основные задачи при построении 414
Теория идеального пропеллера 144
— трещин 532
Теплоемкость при постоянных деформациях 398
Теплосодержание 36
— полное 64
— — и постоянная в интеграле Бернулли 36, 37
— —, сохранение при переходе через скачок 24
Теплота реакции 125

Течение жидкости в трубке переменного поперечного сечения 31
— материала 415
Течения идеальных жидкости и газа при наличии баротропии, постановки задач 155
— сверхзвуковые и дозвуковые
Толщина вытеснения 263
— пограничного слоя 258, 262 40
Топлива, применяемые и перспективные 126
Точка отрыва пограничного слоя 264
— тела центральная 195
Тропосфера 12
Трубы аэродинамические 93, 103
— кавитационные 35
Трубка вихревая 279
— Пито—Прандтля 27
Трубки тока 44
Турбина 107
Тяга двигателя 123, 127
— удельная 126, 128

Угол дрейфа 206
— закручивания 358, 359
— Маха 220
Удар плавающего тела 175, 178
— по свободной поверхности воды 286
— струи о плоскую стенку 55
Упрочнение материала 412
Уравнение бигармоническое 344, 492
— вариационное для упругих тел в равновесии 390
— волновое 157, 210
— — неоднородное 402
— второго закона термодинамики в теории пластичности 440
— Гельмгольца 303
— диффузии вихрей 305
— для производства энтропии в теории пластичности с учетом теплопроводности 443
— изогнутой оси балки 354
— — — — дифференциальное 383
— импульсов (количества движения) при установившемся движении жидкости 53
— Лапласа 155
— моментов (моментов количества движения) при установившемся движении жидкости 54
— поверхности нагружения для упрочняющихся материалов 425
— — текучести для идеально-пластических материалов 425
— — — Мизеса 457
— — — Треска 452
— принципа возможных перемещений в теории упругости 347
— притока тепла в теории пластичности 440
— прогиба мембраны постоянного натяжения 370
— Пуассона 160, 270, 366
— — векторное 276
— Рэлея для скорости поверхностных волн 406
— сохранения массы при установившемся движении жидкости 53
— теории трещин основное 539
— теплопроводности 305
— энергии (первый закон термодинамики) 54
— — в случае развития внутренних разрывов при хрупком разрушении 537
Уравнение энергии вдоль линии тока 67
— — для тела с трещиной в рамках модели упругого тела 538
Уравнения Бельтрами—Мичелла 343
— волновые в двумерной задаче теории упругости 403
— движения в форме Громеки—Лемба 20
— Ламе с учетом температурных напряжений 343
— ламинарного пограничного слоя (уравнения Прандтля) 256
— модели упругого тела основные 312
— равновесия жидкостей и газов 5
— — упругого тела в напряжениях 343
— Рейнольдса для турбулентного движения жидкости 251
— совместности деформаций 324, 343
— состояния упругого тела 314, 315
— — — материала несжимаемого 315, 316
Условие минимума свободной энергии в состоянии равновесия 391
— на перемещения в плоском напряженном состоянии 487
— на плотность внешних сил в гидростатике 6
— пластичности для изотропного идеально-пластического тела 465
— — Мизеса 457, 458
— — Треска 452
— прилипания 232, 253
— развития трещин 550
— теплового равновесия среды 11
Условия в бесконечности при движении конечного тела в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости 165, 201
— — — — — — — в трубе 69
—, граничные в линейной теории упругости, выполнения на недеформированной поверхности 342
—, — на свободной поверхности упругого полупространства 403, 404
—, — для функции Эри 492
—, — для функций комплексного переменного в плоской задаче теории упругости 499, 504
— для напряжений на поверхности дислокаций 543
— для исключения перемещений упругого тела как твердого при определении перемещений по деформациям, возможные 327
— для определения постоянных интегрирования в граничных условиях для функции Эри 499
— Коши — Римана 364
— критические для внешних нагрузок, действующих на тело со щелью 551
— на внешние силы в плоской задаче теории упругости 484
— на прямых скачках 66
Усталость материала 419, 420
Устойчивость ламинарного течения 245
— равновесия несжимаемой жидкости 16
— — плавающих тел 18
— — политропной атмосферы 17
— — упругой системы 346

Формула барометрическая 10
— Гурса 494
— для количества движения жидкости при движении в ней твердого тела, удобная для вычисления коэффициентов присоединенных масс 197

Формула для притока энергии в случае развивающейся поверхностной дислокации 548
— — — — — — — трещины 547
— — — — при образовании разрывов 547
— Ирвина 549
— Сен-Венана—Венцеля 41
— Стокса 281
— Торичелли 27
— Эйлера для момента сил, действующих на лопатки турбины 112
Формулы Грина 164
— Колосова 497
— Сен-Венана 357, 474
Форсаж 143
Функция гармоническая 155, 161
— — как сумма потенциалов простого и двойного слоя 166
— Грина 167
— — в задаче Дирихле для сферы 180
— — для полупространства, ограниченного плоскостью 178
— давления 20
— —, пример вычисления для небаротропного процесса 21
— диссипации, вычисление с помощью ассоциированного закона 444
— — для модели пластической среды по Мизесу 445
— кручения 359, 475
— нагружения 425
— напряжений 366, 463
— — Эри 490, 497
— текучести 425
Функции гармонические, условия симметрии 173, 177
— нагружения 446
— сферические 172

Характеристики состояния пластических тел физические 422
Характеристики средние потока совершенного газа 90

Циркуляция скорости 83

Число кавитации 34
— Маха 40
— Рейнольдса критическое 243
— Эйлера 146

Шлепок по свободной поверхности жидкости 286, 287
Штамп жесткий, давление на упругую полуплоскость 525
— — прямоугольный, давление на упругую полуплоскость 528
— — со слабоискривленным профилем 529, 531

Щель под действием касательной антисимметричной нагрузки 519
— — — нормальной симметричной нагрузки 516

Эжектор 113
Энергия кинетическая несжимаемой жидкости при потенциальном движении 164, 173, 192
— на разрыв 534
— — —, плотность 537, 555, 558
— свободная единицы объема упругого тела 320, 347
— сил сцепления 535
— поверхностная, плотность 536, 537
Энтальпия (см. *Теплосодержание*)
Эпюры изгибающих моментов 381
Эффект Баушингера 413
— Допплера 218

Ядро упругое 469, 477